



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Número de Subdivisión y Multisubdivisión
de Árboles

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
Licenciada en Matemáticas

PRESENTA:
NORMA DIEZ MARINA ROBLES

DIRECTORA DE TESIS:
RITA ESTHER ZUAZUA VEGA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD.MX.

2017





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ÍNDICE GENERAL

	Página
Introducción	I
El origen	II
Algunas conjeturas y resultados importantes	IV
Capítulo 1. Preliminares	1
1.1. Vecindades	1
1.2. Gráficas diversas	2
1.3. Dominación	3
Capítulo 2. Subdivisión	9
2.1. Conceptos importantes	9
2.2. Número de subdivisión de algunas gráficas conocidas	10
2.3. Resultados	10
2.4. Número de subdivisión de árboles	12
2.5. El contraejemplo	14
Capítulo 3. Árboles de clase 3	17
3.1. Construyendo la familia	17
3.2. Propiedades de la familia	19
3.3. La caracterización	21
Capítulo 4. Árboles de clase 1	25
4.1. Algunos ejemplos	27
Capítulo 5. Multisubdivisión	31

5.1. Subdivisión vs. Multisubdivisión	32
5.2. ¿Y para árboles?.....	33
Bibliografía	33

INTRODUCCIÓN

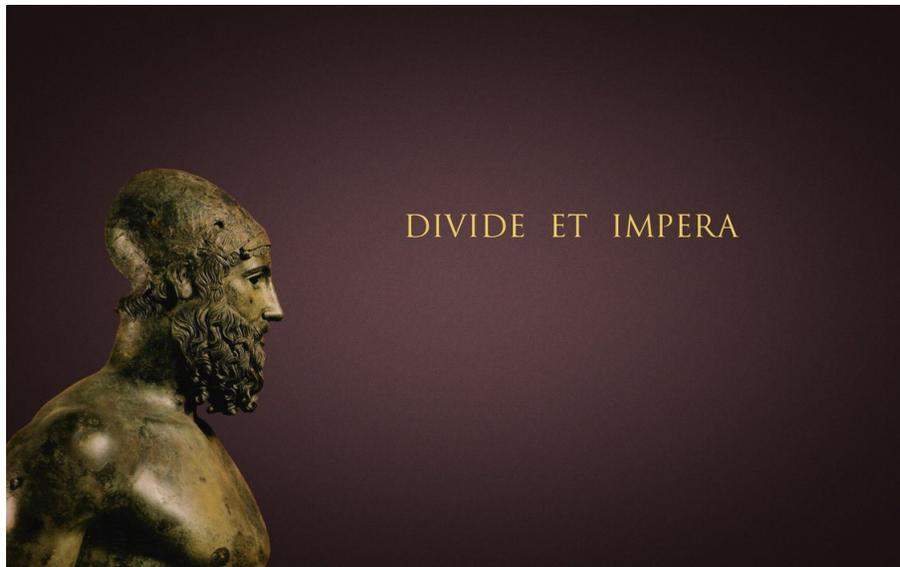


FIGURA 1. BRONZO DI RIACE - DIVIDE ET IMPERA por Epicuro

Divide et Impera! máxima latina que en español se traduce como *¡Divide y Dominarás!* Es un principio bien conocido que ha sido aplicado en distintos ámbitos en la historia de la humanidad como política, filosofía, psicología, economía, etc. y es utilizada incluso de forma coloquial para expresar que es más fácil realizar una tarea al dividirla en tareas más sencillas. El mismo Descartes, en su **Discurso del Método**, afirma que la ciencia se realiza dividiendo un problema en partes más pequeñas

para después realizar la síntesis y llegar a una solución. En política, para mantener el poder es necesario dividirlo en concentraciones más pequeñas. Julio César y más tarde Napoleón acuñaron esta máxima en su intento fallido de conquistar el mundo. Es interesante preguntarse que tan cierto es tal principio, que tanto es conveniente dividir (en este caso el poder) sin perder el dominio o control sobre el sistema; es decir, en que momento es adecuado detenerse.

Resulta que en Teoría de gráficas nos podemos hacer una pregunta similar. Si tenemos una gráfica $G = (V(G), E(G))$ y sabemos cual es el mínimo número de vértices que necesitamos para dominar a todos los vértices de G (llamado *número de dominación* y denotado por $\gamma(G)$) nos gustaría saber cual es el mínimo número de aristas que deben ser subdivididas una sola vez (llamado *número de subdivisión* y denotado por $sd\gamma(G)$) para que $\gamma(G)$ aumente. Éste es precisamente el problema que nos compete en este trabajo. El concepto de *número de subdivisión* de una gráfica es bastante nuevo, haremos un viaje desde su origen hasta algunos de los trabajos más recientes. En el capítulo 1 estudiaremos los conceptos y parámetros necesarios para abordarlo.

Como podemos ver, el concepto de *número de subdivisión* de una gráfica está intrínsecamente relacionado con el de *conjunto dominante* y *número de dominación* por lo que prestaremos especial atención a este tema.

El origen

Al igual que muchos conceptos en teoría de gráficas que se han originado a partir de juegos y problemas probabilísticos, el concepto de dominación tiene su origen en el juego de las reinas dominantes que data de los años 1850 y consiste en lo siguiente: Tomemos un tablero de ajedrez de 8×8 , siguiendo las reglas usuales de movimiento de la reina, queremos saber cuál es el mínimo número de reinas que necesitamos poner en el tablero de tal forma que todas las casillas sean ocupadas o amenazadas por una reina. En ese entonces se encontró que el mínimo número de reinas necesario para *dominar* un tablero de 8×8 es 5. Este problema se reduce a encontrar un *conjunto dominante* de cinco vértices para una gráfica G con $|V(G)| = 64$ y diremos que habrá una arista entre dos vértices si pertenecen a la misma línea, columna o diagonal. En la figura 2 vemos el ejemplo de una posible solución.

El problema fue abordado matemáticamente en los años 1860, pero fue hasta 1958 cuando Claude Berge, en su libro *Théorie des Graphes et ses Applications* definió el concepto de *número de dominación* de una gráfica, al que llamó *coeficiente de estabilidad externa*. El nombre de *conjunto dominante* y *número de dominación* fue dado por Ore en 1962 en su libro *Graph Theory* quien además dio los primeros resultados al respecto. La notación que se utiliza actualmente fue introducida por Cockayne y

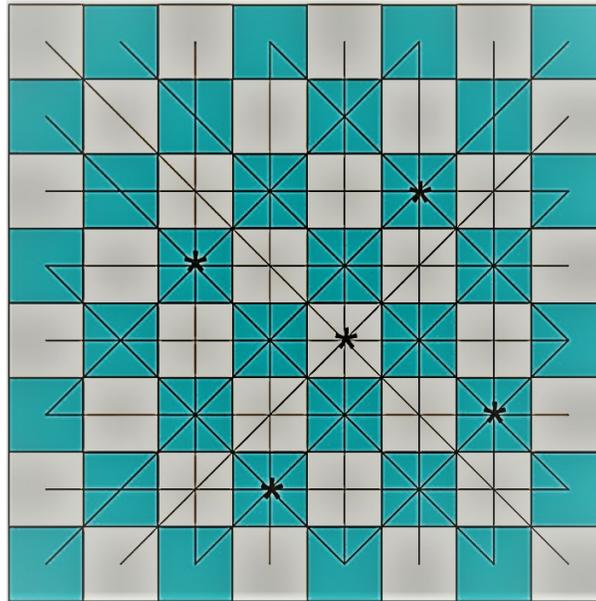


FIGURA 2. El problema de las 5 reinas

Hedetniemi en 1977. A partir de entonces se han realizado numerosos trabajos en dominación. En el capítulo 1 hablaremos acerca de la dominación en gráficas, daremos algunas definiciones y estudiaremos algunos parámetros y resultados importantes. Nos enfocaremos en la *dominación clásica*.

Conozcamos ahora un poco acerca del tema principal de este trabajo que es el *número de subdivisión de una gráfica*. Durante el proceso de investigación y recopilación de información nos encontramos con algunas dificultades para conocer con precisión el origen del concepto de número de subdivisión.

El concepto de *número de subdivisión* fue dado por S. Velammal en 1997 en su tesis de doctorado *Studies in Graph Theory: Covering, Independence, Domination and Related Topics*. En todos los artículos que usamos como referencia, se menciona esta tesis como el origen del concepto y se menciona que en el año 2000, Arumugam conjeturó que para toda gráfica G , se tiene que $1 \leq sd\gamma(G) \leq 3$. Al parecer la tesis de doctorado de Velammal fue publicada hasta muchos años después, pero ya era usada y citada en todos estos trabajos. Resulta curioso también que en ninguna de estas publicaciones se menciona la referencia escrita del trabajo de Arumugam, en todos ellos se habla de una comunicación privada en la que surgió dicha conjetura. La única referencia escrita con la que contamos es [Aru11], un trabajo conjunto entre Velammal y Arumugam en el año 2011, en donde se introduce el concepto de número de subdivisión, se prueban los primeros resultados al respecto y se da la conjetura de

Arumugam. Entonces, aunque el número de subdivisión de una gráfica fue definido por Velammal muchos años atrás, al igual que la conjetura de Arumugam y se dieron los primeros resultados al respecto, hubo muchos otros trabajos que fueron publicados antes.

Algunas conjeturas y resultados importantes

A partir de la definición del número de subdivisión de una gráfica de Velammal en 1997 surgieron diversos trabajos, así como conjeturas y discusiones. Hagamos un pequeño recorrido a través de estos trabajos para entender como ha evolucionado el conocimiento que tenemos. Además de dar las primeras definiciones, resultados y algunas cotas para el número de subdivisión de una gráfica, Velammal y Arumugam demostraron que:

Si G es un árbol de orden $n \geq 3$, $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$.

Resultado del que daremos una demostración detallada en el capítulo 2. Poco tiempo después (en el año 2000) Arumugam conjeturó que:

Para cualquier gráfica G se cumple que $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$.

En el año 2001 en [Mer01] Haynes *et al.* dan un contraejemplo a esta conjetura, entonces proponen que:

Para cualquier gráfica G se cumple que $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 4$.

En [Hed04] O. Favaron, T.W. Haynes y S.T. Hedetniemi dan resultados que parecían llevar a la veracidad de esta nueva conjetura, sin embargo, en una comunicación privada entre Favaron y Zuazua, Favaron comentó que también ha sido probada su falsedad aunque hasta ese momento no había sido publicado tal resultado. En [Mer01] Haynes *et al.* probaron que:

Para toda gráfica G , $sd_\gamma(G) \leq \gamma(G) + 1$ y conjeturaron que para toda gráfica G con grado mínimo $\delta(G) \geq 2$ se tiene que $sd_\gamma \leq \delta(g) + 1$.

En [Hed04] O. Favaron, T.W. Haynes y S.T. Hedetniemi demostraron que esta conjetura es cierta para algunos casos particulares, sin embargo, en [She08b] O. Favaron, H. Karami y S.M. Sheikholeslami dan un contraejemplo y además se demuestra un resultado contundente:

Para cada par de enteros positivos r y q , tales que $r + q \geq 4$, existe una gráfica G con $\delta(G) = r$ y $sd_\gamma(G) \geq r + q$.

Gracias a este resultado, ahora sabemos que el número de subdivisión de una gráfica, en general, puede ser tan grande como se quiera.

En 2002 Bhattacharya y Vijayakumar [Vij02] dan otro contraejemplo a la conjetura de Arumugam, que estudiaremos en el capítulo 2.

Aún cuando la conjetura de Arumugam no es cierta, se han publicado diversos trabajos en busca de cotas y otros resultados para algunos tipos de gráficas. En particular,

se han realizado trabajos respecto al *número de subdivisión de árboles*. Sabemos que para todo árbol G de orden $n \geq 3$ se tiene que $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$, entonces resulta interesante dar una clasificación de árboles respecto a su número de subdivisión. En el año 2008, [Fav09] H. Aram, S.M. Sheikholeslami y O. Favaron hacen dos caracterizaciones de árboles cuyo número de subdivisión es 3; nosotros estudiaremos una de ellas en el capítulo 3, dando la construcción de una familia de árboles que pertenecen a esta clase. Por otro lado, en el mismo año se publican dos caracterizaciones de árboles de clase 1; es decir, árboles cuyo número de subdivisión es 1. Una de estas caracterizaciones es dada por Karami y Sheikholeslami en [She08a], la cual es también una construcción de la familia de árboles que satisfacen lo anterior, ésta es parecida a la caracterización de árboles de clase 3 que mencionamos anteriormente. Nosotros estudiaremos la otra caracterización de árboles de clase 1, que dieron Mynhardt y Benecke en [Myn08], en donde se da un Teorema que demostraremos detalladamente en el capítulo 4. A partir de estos resultados tendremos entonces una caracterización completa de árboles respecto a su *número de subdivisión*.

En 2013, [Top13] Dettlaff, Raczek y Topp demostraron que determinar el número de subdivisión de una gráfica es un problema \mathcal{NP} -completo. Este resultado motivó el concepto de *número de multisubdivisión* de una gráfica, calcularon el número de multisubdivisión de algunas clases de gráficas, dieron algunas cotas y probaron resultados importantes para árboles. En el capítulo 5 estudiaremos algunos de estos resultados, vamos a estudiar si existe alguna relación con respecto al número de subdivisión de una gráfica, por supuesto, con especial atención en aquellos resultados referentes a árboles. Podremos apreciar como es que este concepto le da un giro al trabajo que se puede realizar y estudiaremos si la caracterización que mostramos respecto al número de subdivisión de árboles también es buena respecto al número de multisubdivisión.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En esta sección vamos a introducir algunos conceptos y notación que utilizaremos en el desarrollo de este trabajo. En general, los conceptos básicos, notación y terminología que usaremos son aquellos utilizados en [Mur76].

1.1. Vecindades

Si G es una gráfica con conjunto de vértices $V(G)$ y conjunto de aristas $E(G)$. Para cada vértice $v \in V(G)$, definimos:

1. La *vecindad abierta* de v como $N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$, si $u \in N(v)$ decimos que u es vecino de v .
2. La *vecindad cerrada* de v es $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
Ahora, para un conjunto $S \subseteq V(G)$ definimos:
3. La *vecindad abierta* de S como $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$.
4. La *vecindad cerrada* de S como $N[S] = N(S) \cup S$.
5. Sea $u \in S$, decimos que v es un *vecino privado* de u con respecto a S si $N[v] \cap S = \{u\}$.
6. La *vecindad privada* de u con respecto a S es $pn[u, S] = \{v \mid N[v] \cap S = \{u\}\}$.

Notemos que si $v \in pn[u, S]$ entonces $u = v$ si y sólo si u es un vértice aislado en S , en cuyo caso diremos que u es su propio vecino privado.

Si $v \in V \setminus S$ diremos que v es un vecino privado externo de u .

Veamos el siguiente ejemplo para entender mejor este concepto.

En la Figura 1 tomemos el conjunto $S = \{2, 4, 6\}$ y encontremos la vecindad privada de sus vértices respecto a S .

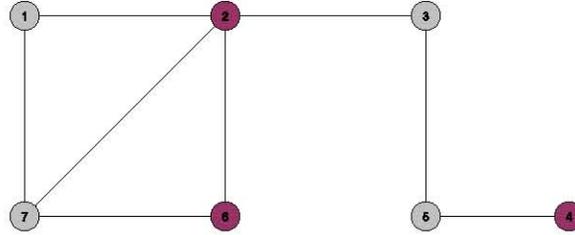


FIGURA 1. Una gráfica G

- $pn[2, S] = \{1, 3\}$. Donde 1 y 3 son vecinos privados externos de 2 con respecto a S . Observamos también que 2 no es su propio vecino privado, pues es adyacente a 6 en S .
- $pn[4, S] = \{4, 5\}$. En este caso podemos ver que 4 es su propio vecino privado pues es un vértice aislado en S .
- $pn[6, S] = \{\emptyset\}$. Podemos observar que 6 no tiene vecinos privados respecto a S , pues $N[6] \cap S = \{2, 6\}$.

1.2. Gráficas diversas

Recordemos algunos tipos de gráficas que serán útiles para ejemplificar algunos conceptos:

1. Un *ciclo* C_n de orden $n \geq 3$ es una gráfica conexa de tamaño $m = n$ que es 2-regular.
2. Un *árbol* T es una gráfica conexa que no tiene ciclos.
3. En un árbol $T = (V(T), E(T))$ tenemos que:
 - a) Una *hoja* o *vértice terminal* es un vértice que es adyacente a sólo un vértice, es decir, es un vértice de grado 1.
 - b) Un *vértice soporte débil* es aquel que es adyacente a una hoja.
 - c) El *conjunto soporte* de G , denotado por $sop(G)$ es el conjunto de todos los vértices soporte de G .
 - d) Una *arista terminal* es la arista que une al vértice terminal con su vértice soporte.
 - e) Un *vértice soporte fuerte* es aquel que es adyacente a dos o más hojas.
 - f) Una *trayectoria* P_n es un árbol de orden n tal que $diám(P_n) = n - 1$.
4. Una *estrella* $K_{1,n-1}$ es una gráfica tal que, existe $v_n \in V(G)$ con $\delta(v_n) = n - 1$ y $\delta(v_i) = 1$ para todo $i = 1, \dots, n - 1$.
5. Un *vértice universal* es un vértice que es adyacente a todos los demás vértices de la gráfica.

6. Una *gráfica completa* K_n es tal que cada par de vértices son adyacentes entre sí y es $(n - 1)$ -regular.

1.3. Dominación

Como mencionamos anteriormente es necesario conocer algunos resultados de dominación en gráficas para poder entrar en materia. En esta sección estudiaremos definiciones y parámetros de dominación en gráficas, utilizaremos [Sla98] como referencia principal. Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica.

DEFINICIÓN 1.1. Un conjunto $S \subseteq V(G)$ se llama conjunto dominante de G si $N[S] = V(G)$, en ese caso decimos que S domina a G y se escribe $S \succ G$.

DEFINICIÓN 1.2. Un conjunto $S \subseteq V(G)$ se llama un conjunto dominante total de G si $N(S) = V(G)$.

DEFINICIÓN 1.3. El número de dominación (total) de una gráfica G , denotado por $\gamma(G)$ ($\gamma_t(G)$) es la cardinalidad de un conjunto dominante (total) mínimo de G .

DEFINICIÓN 1.4. Un γ -conjunto (γ_t -conjunto) de G es un conjunto dominante (total) de G con cardinalidad $\gamma(G)$ ($\gamma_t(G)$).

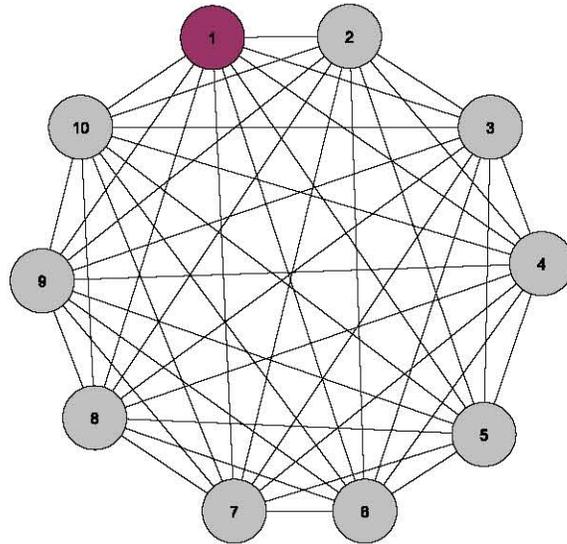
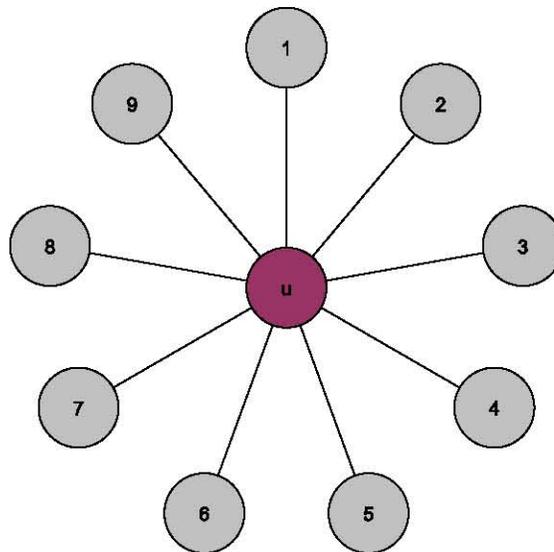
Veamos cuál es el número de dominación de algunas gráficas. Sea n un número natural.

- Sea K_n una gráfica completa, tenemos que $\gamma(K_n) = 1$. Dado que cada par de vértices son adyacentes entre sí, entonces basta con un vértice para dominar a todos los demás. En la Figura 2 tenemos la gráfica completa K_{10} y podemos ver que basta tomar un solo vértice para dominar a todos los demás.
- Sea $K_{1,n}$ una estrella, tenemos que $\gamma(K_{1,n}) = 1$ pues el vértice central domina a todos los demás vértices.

En la Figura 3 tenemos la estrella $K_{1,9}$ donde podemos ver que basta tomar el vértice universal u para dominar a todos los demás vértices de la gráfica.

LEMA 1.5. El número de dominación de un ciclo C_n o una trayectoria P_n es $\gamma(C_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $n = 3k - l$ con $0 \leq l \leq 2$ y G un ciclo C_n o una trayectoria P_n . Afirmamos que $\gamma(G) = k$. Sea D un conjunto dominante mínimo tal que $|D| \leq k - 1$, como $\delta(v) \leq 2$ para todo $v \in V(G)$, entonces el número de vértices dominados por D es a lo más $3k - 3$; pero $3k - 3 < 3k - l$ con $0 \leq l \leq 2$; es decir, $3k - 3 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De aquí tenemos que D no domina a todos los vértices de G . Por lo tanto, todo conjunto dominante mínimo de G tiene cardinalidad $|D| \geq k$. Ahora, si $l = 0$ o $l = 1$, sea $D = \{v_{2+3r} | 0 \leq r \leq k - 1\}$ es un conjunto dominante de cardinalidad k . Si $l = 2$, tenemos que $D = \{v_{2+3r} | 0 \leq r \leq k - 2\} \cup \{v_{3k-2}\}$ es un conjunto dominante

FIGURA 2. $\gamma(K_{10}) = 1$ FIGURA 3. $\gamma(K_{1,9}) = 1$

con cardinalidad $|D| = k$. Por lo tanto $\gamma(G) = k$.

□

En la Figura 4 tenemos una trayectoria P_{10} donde podemos observar que el conjunto $D = \{2, 5, 7, 9\}$ es un conjunto dominante mínimo. Tenemos entonces que $\gamma(P_{10}) = \lceil \frac{10}{3} \rceil = 4$.

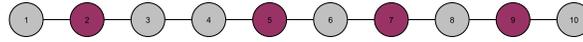


FIGURA 4. $\gamma(P_{10}) = 4$

Consideremos la siguiente situación para ejemplificar los conceptos que definimos previamente. Sea $G = (V(G), E(G))$ una gráfica cuyos vértices representan al personal del departamento de finanzas de una empresa. Se requiere elegir a un grupo de empleados que asistan a un curso de capacitación de tal forma que los proyectos de la empresa no queden desatendidos. Entonces habrá una arista entre dos empleados si ambos trabajan juntos en algún proyecto. Tenemos la gráfica que aparece en la Figura 5.

En la gráfica de la Figura 5 podemos ver que la empresa podría enviar al curso a:

$$D = \{\text{Sara, Gloria, Yogui, Pinky, Chata, Ale, Lau}\},$$

pues D es un conjunto dominante, que en particular es un conjunto dominante total pues en D no hay vértices aislados. Sin embargo, si la empresa desea enviar al menor número posible de empleados, entonces las personas que deben tomar el curso son $S = \{\text{Conny, Enrique, Cris}\}$, pues S es un conjunto dominante mínimo, así $\gamma(G) = 3$.

DEFINICIÓN 1.6. *Un conjunto $S \subseteq V(G)$ es un conjunto dominante crítico de G si para cada vértice $u \in S$ se tiene que $S \setminus \{u\}$ no es un conjunto dominante.*

Para entender mejor la diferencia entre un conjunto dominante mínimo y un conjunto dominante crítico, pensemos en una estrella $K_{1,t}$. Sea $D = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ un conjunto dominante de $K_{1,t}$; D es un conjunto dominante crítico, pues $D' = D \setminus \{v_i\}$, $i = 1, \dots, t$, no domina a $K_{1,t}$. Pero D no es un conjunto dominante mínimo, puesto que $\gamma(K_{1,t}) = 1$.

DEFINICIÓN 1.7. $\mathcal{N}(G) \subseteq V(G)$ es el conjunto de vértices de G que no pertenecen a ningún $\gamma(G)$ -conjunto.

Los teoremas que veremos a continuación fueron dados por Ore en 1962 y son los primeros teoremas respecto a dominación.

TEOREMA 1.8. *Un conjunto dominante S de G es un conjunto dominante crítico de G si y sólo si para cada vértice $u \in S$, se cumple una de las siguientes dos condiciones:*

1. Si u es un vértice aislado en S ;
2. Si existe un vértice $v \in V \setminus S$ tal que $N(v) \cap S = \{u\}$.

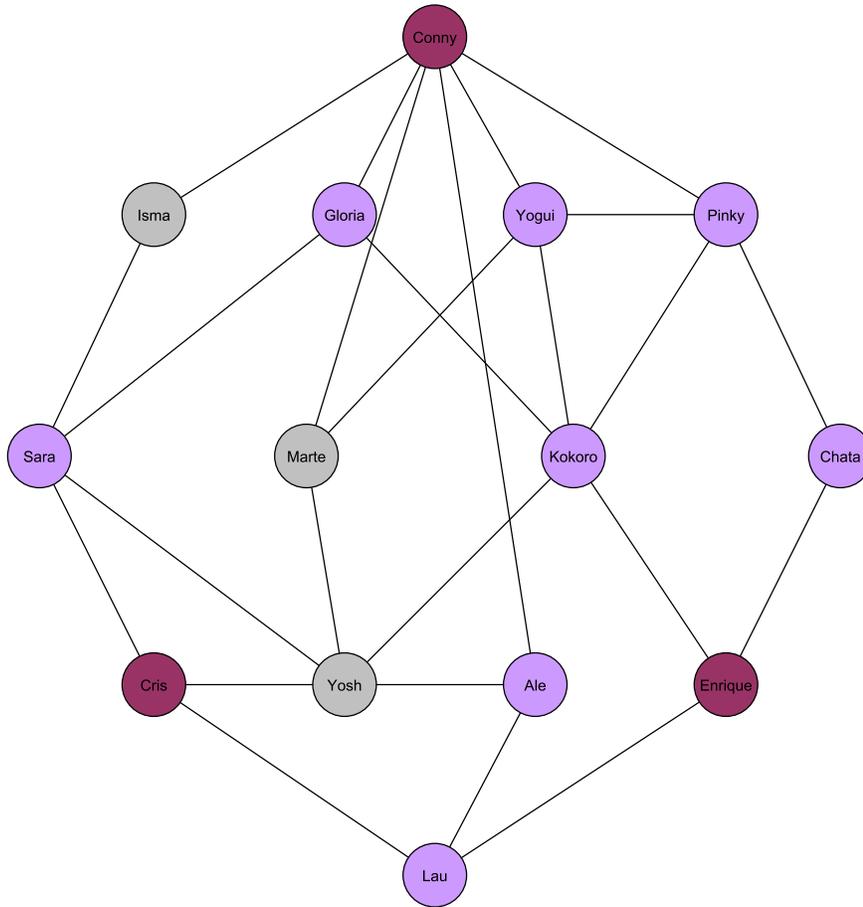


FIGURA 5. Gráfica del personal

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que S es un conjunto dominante crítico de G . Entonces, para cada vértice $u \in S$, se tiene que $S \setminus \{u\}$ no es un conjunto dominante; es decir, existe $v \in V \setminus S \cup \{u\}$ que no es dominado por ningún vértice en $S \setminus \{u\}$. Entonces para v tenemos los siguientes casos:

- Si $v = u$ en cuyo caso u es un vértice aislado de S ;
- Si $v \in V \setminus S$. Si v no es dominado por $S \setminus \{u\}$, pero es dominado por S , entonces v es adyacente sólo a u en S ; es decir, $N(v) \cap S = \{u\}$.

Ahora, sea S es un conjunto dominante de G tal que para cada vértice $u \in S$ se satisface alguna de las dos condiciones. Supongamos que S no es un conjunto dominante crítico; es decir, existe $u \in S$ tal que $S \setminus \{u\}$ es un conjunto dominante; entonces

u es adyacente a algún vértice en $S \setminus \{u\}$; es decir, $N(v) \cap S \neq \{u\}$ lo cual contradice la condición b). Por lo tanto, S es un conjunto dominante crítico. \square

A partir de este Teorema y de la definición de vecino privado, tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 1.9. *Un conjunto dominante S es un conjunto dominante crítico si y sólo si cada vértice en S tiene al menos un vecino privado. Es decir, para cada $u \in S$ se tiene que $pn[u, S] \neq \emptyset$.*

TEOREMA 1.10. *Toda gráfica conexa G de orden $n \geq 2$ tiene un conjunto dominante S cuyo complemento $V \setminus S$ también es dominante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea T un árbol generador de G y sea $u \in V(G)$. Consideremos los siguientes conjuntos de vértices: $S = \{v \in V(T) \mid d(u, v) = 2k \text{ para } 1 \leq k \leq n\}$ y $S' = \{v \in V(T) \mid d(u, v) = 2k - 1 \text{ para } 1 \leq k \leq n\}$. Tenemos que $V(T) = S \cup S'$ y $S \cap S' = \emptyset$. Por construcción S es un conjunto dominante de G y $S' = V \setminus S$ también lo es. \square

TEOREMA 1.11. *Si G es una gráfica sin vértices aislados, entonces el complemento $V \setminus S$ de todo conjunto dominante crítico S es un conjunto dominante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S un conjunto dominante crítico de G . Supongamos que existe un vértice $u \in S$ que no es dominado por ningún vértice de $V \setminus S$. Como G no tiene vértices aislados, entonces u es dominado por al menos un vértice en $S \setminus \{u\}$ pero esto no es posible, pues S es crítico. Por lo tanto, cada vértice en S es dominado por al menos un vértice en $V \setminus S$; es decir, $V \setminus S$ es dominante. \square

Analicemos la gráfica de la Figura 6

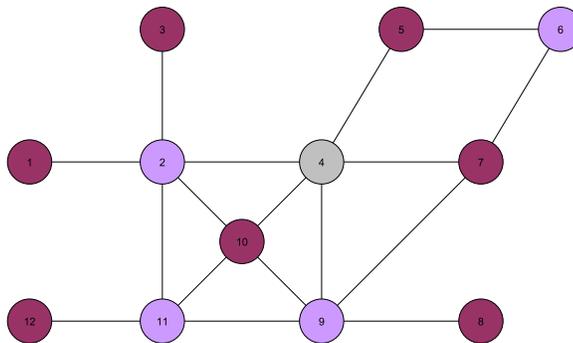


FIGURA 6. Una gráfica G

En la Figura 6 tomemos $S \subset V(G)$, $S = \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$. S es un conjunto dominante crítico de G pues para todo $u \in S$ se tiene que $S \setminus \{u\}$ no es un conjunto

dominante. Observemos que para cada $u \in S$ se tiene que u es un vértice aislado en S , que es la primer condición del Teorema 1.8. En la misma gráfica G consideremos $D \subset V(G)$, $D = \{2, 6, 9, 11\}$. En este caso tenemos que D es un conjunto dominante mínimo y crítico. Observemos que 6 es un vértice aislado en D y además cada vértice $v \in V \setminus \{u\}$ tiene un vecino privado en D , que son las condiciones del Teorema 1.8 y el Corolario 1.9.

Observación. Sabemos que en una gráfica G todo conjunto dominante de G debe dominar a todos sus vértices terminales, para tal efecto es posible tomar sólo conjuntos dominantes que contengan a todos sus vértices soporte. Por lo tanto, para toda gráfica siempre podemos encontrar un γ -conjunto que contenga a todos sus vértices soporte. En lo sucesivo siempre consideraremos este tipo de conjuntos dominantes.

CAPÍTULO 2

SUBDIVISIÓN

2.1. Conceptos importantes

Ahora que ya conocemos los conceptos y parámetros de los que echaremos mano en los siguientes capítulos, haremos un recorrido por los trabajos que se han hecho en torno al tema de *subdivisión*. En [Mur76] se define la *subdivisión de una arista* como la siguiente operación de gráficas:

DEFINICIÓN 2.1. Sea $G = (V(G), E(G))$; para $e = uv \in E(G)$, definimos una nueva gráfica $G_e = (V(G_e), E(G_e))$ tal que $V(G_e) = V(G) \cup \{x\}$ y $E(G_e) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup (ux, xv)$.

Decimos que G_e se obtiene de G subdividiendo la arista e , a la cual se le llama *arista subdividida*. Al nuevo vértice $x \in V(G_e)$ se le llama *vértice de subdivisión*.

Si en G subdividimos un conjunto de aristas $\{e_1, e_2, \dots, e_k\} \subseteq E(G)$, lo denotaremos por: G_{e_1, e_2, \dots, e_k} .

La siguiente definición fue introducida por Velammal y Arumugam en [Aru11].

DEFINICIÓN 2.2. El número de subdivisión de una gráfica G , $sd\gamma(G)$ es el mínimo número de aristas que deben ser subdivididas una sola vez, de tal forma que se incremente su número de dominación.

Puesto que el número de dominación de K_2 no cambia cuando su única arista es subdividida, entonces asumiremos que la gráfica es de orden $n \geq 3$.

En la gráfica G de la Figura 1 tenemos que $D = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}\}$ es un γ -conjunto de G , entonces $\gamma(G) = 6$. Tomemos $G' = G_{v_1v_2}$ y sea x el vértice de subdivisión. $\gamma(G)$ no aumenta, pues el conjunto $D_1 = D \setminus \{v_2\} \cup \{x\}$ es un γ -conjunto de G . Para $G'' = G'_{v_2v_4}$, tenemos que D_1 también es γ -conjunto de G . Ahora, si tomamos

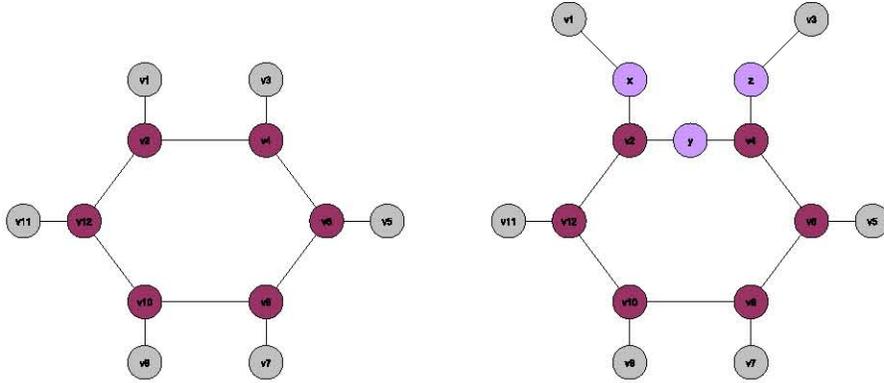


FIGURA 1. Gráfica G con $\gamma(G) = 6$ y $sd\gamma(G)=3$.

$G''_{v_3v_4}$, tenemos que $D_2 = D_1 \cup \{z\}$ es un γ -conjunto y así $\gamma(G''_{v_3v_4}) = 7$ por lo tanto $sd\gamma(G) = 3$.

2.2. Número de subdivisión de algunas gráficas conocidas

Calculemos $sd\gamma(G)$ para algunas gráficas:

- $sd\gamma(K_p) = 1$. Basta subdividir cualquier arista para que su número de dominación aumente.
-

$$sd\gamma(K_{m,n}) = \begin{cases} 2 & \text{si } 3 \leq m \leq n; \\ 3 & \text{si } m = 2 \text{ y } n \geq 2. \end{cases}$$

PROPOSICIÓN 2.3. Para una trayectoria P_n o un ciclo C_n se tiene que:

$$sd\gamma(P_n) = sd\gamma(C_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}; \\ 3 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

2.3. Resultados

Estudiemos algunos resultados respecto al *número de subdivisión* que nos serán útiles más adelante.

LEMA 2.4. Si G es una gráfica que tiene vértices soporte fuertes, entonces $sd\gamma(G) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, v, w \in V(G)$ tales que $uw, vw \in E(G)$, con $\delta(v) = \delta(u) = 1$. Sabemos que $w \in D$ para algún conjunto dominante D . Si subdividimos

cualquiera de las dos aristas terminales, tenemos que w sigue siendo vértice soporte y por otro lado, $\gamma(G)$ aumentará pues el vértice de subdivisión será vértice soporte y por lo tanto deberá pertenecer también a un conjunto dominante. Entonces $sd\gamma(G) = 1$. \square

LEMA 2.5. *Si G es una gráfica que tiene vértices soporte adyacentes entre sí, entonces $sd\gamma(G) \leq 3$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, x, y, v \in V(G)$ tales que x, y son vértices soporte adyacentes entre sí y u, v son sus hojas, respectivamente. Es suficiente subdividir las aristas ux, xy y yv para que el número de dominación aumente. Por lo tanto, $sd\gamma(G) \leq 3$. \square

DEFINICIÓN 2.6. *Para $t \geq 1$, una estrella subdividida $sK_{1,t}$ se obtiene al subdividir las t aristas de la estrella $K_{1,t}$.*

Observemos que $\gamma(sK_{1,t}) = t$.

LEMA 2.7. *Sea G una gráfica, si G es una estrella subdividida $sK_{1,t}$, con $t \geq 2$, entonces $sd_\gamma(G) = 2$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K_{1,t}$ una estrella con u su vértice soporte fuerte. Sea $N(u) = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$, sea $G = sK_{1,t}$ y $D = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$ el conjunto de vértices de subdivisión. Tenemos que D es un $\gamma(G) - conjunto$ con $|D| = t$. Ahora, en G consideremos las aristas $e_1 = ux_i$ y $e_2 = x_iw_i$. Veamos qué ocurre al subdividir aristas.

- i) Si subdividimos la arista e_2 con el vértice z , en G_{e_2} tenemos que $D_2 = \{D \setminus \{x_i\}\} \cup \{z_i\}$ es un $\gamma(G_{e_2}) - conjunto$ con $|D_2| = \gamma(G) - 1 + 1$, es decir, $\gamma(G_{e_2}) = \gamma(G)$.
- ii) Si subdividimos la arista e_1 con el vértice y , entonces en G_{e_1} tenemos que $D_1 = D$ es un $\gamma(G_{e_1}) - conjunto$ con $|D_1| = \gamma(G)$.
De i) y ii) tenemos que $sd_\gamma(G) > 1$.
- iii) Si subdividimos e_1 y e_2 con los vértices y y z respectivamente, en G_{e_1, e_2} tenemos que todo $\gamma(G_{e_1, e_2}) - conjunto$ contiene al soporte de G_{e_1, e_2} ; pero $sop(G_{e_1, e_2})$ no es un conjunto dominante de G_{e_1, e_2} porque el vértice z dominaría a x_i y w_i , pero z ya no dominaría a y y necesitaríamos aumentar un vértice más para dominar a y .

Por lo tanto $|sop(G_{e_1, e_2})| < \gamma(G_{e_1, e_2})$, entonces $t < \gamma(G_{e_1, e_2})$, es decir, $\gamma(G) < \gamma(G_{e_1, e_2})$.

De donde $sd_\gamma(G) = 2$. \square

LEMA 2.8. *Sea G' una gráfica.*

1. *Si G' es de orden al menos 2 y G es la gráfica obtenida a partir de G' al añadir una estrella subdividida $sK_{1,t}$ con $t \geq 1$ y una arista que una el centro c de la*

estrella a un vértice y de G' , entonces $\gamma(G) = \gamma(G') + t$. Más aún, si G' tiene orden al menos 3, entonces $sd_\gamma(G) \leq sd_\gamma(G')$.

2. Si G' tiene una arista ya o un camino ybc unidos a ella, y G es la gráfica obtenida a partir de G' al añadir una arista xz y una arista que une al vértice x con el vértice y , entonces $\gamma(G) = \gamma(G') + 1$. Más aún, si y es un vértice soporte de G' y G' tiene orden al menos 3, entonces $sd_\gamma(G) \leq sd_\gamma(G')$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Supongamos que $\gamma(G) < \gamma(G') + t$. Sea D un $\gamma(G) -$ conjunto; sabemos que $sop(sK_{1,t}) = \{x_1, x_2, \dots, x_t\} \subset D$ y que $|D| < \gamma(G') + t$, entonces $D' = D \setminus sop(sK_{1,t})$ tiene que dominar a G' . Entonces, $|D'| = |D| - t \leq \gamma(G') + t - t$, de aquí tenemos que $\gamma(G) \geq \gamma(G') + t$. Por lo tanto, $\gamma(G) = \gamma(G') + t$. Ahora, sea $sd(G') = k$, $1 \leq k$ y sea $H = G'_{e_1, e_2, \dots, e_k} \cup sK_{1,t}$ tenemos que $\gamma(H) = \gamma(G') + 1 + t$ y $G'_{e_1, e_2, \dots, e_k} > \gamma(G')$. Sea D un $\gamma(G'_{e_1, e_2, \dots, e_k})$ -conjunto. Tenemos que $D \cup sop(sK_{1,t})$ es un conjunto dominante mínimo de $G'_{e_1, e_2, \dots, e_k}$ pues: $\gamma(G'_{e_1, e_2, \dots, e_k}) = \gamma(G'_{e_1, e_2, \dots, e_k}) + t > \gamma(G') + t = \gamma(G)$. Por lo tanto, $sd_\gamma(G) \leq sd_\gamma(G')$.

2. Sea D' un $\gamma(G') -$ conjunto, entonces $D' \cup \{x\}$ domina a G . De donde $\gamma(G) \leq \gamma(G') + 1$. Ahora, sea D un $\gamma(G) -$ conjunto, tenemos que $D \setminus \{x\}$ es un conjunto dominante de G' y $\gamma(G') \leq |D| - 1 = \gamma(G) - 1$, de donde $\gamma(G) \geq \gamma(G') + 1$. Por lo tanto, $\gamma(G) = \gamma(G') + 1$. Por otro lado, por el inciso anterior, con $t = 1$ tenemos que $sd_\gamma(G) \leq sd_\gamma(G')$.

□

2.4. Número de subdivisión de árboles

El Teorema que demostraremos a continuación fue uno de los primeros resultados que se dieron en torno al número de subdivisión, fue propuesto y demostrado en [Aru11] por Velammal y Arumugam.

TEOREMA 2.9. *Para cualquier árbol T de orden $n \geq 3$ se tiene que $1 \leq sd_\gamma(T) \leq 3$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $n = 3$, $sd_\gamma(T) = 1$ pues $T = P_3$. Si $n \geq 4$, tenemos los siguientes casos:

1. Si el árbol T tiene al menos un vértice soporte fuerte u , adyacente a dos hojas v y w . Subdividamos la arista uv , con x el vértice de subdivisión; llamemos T_1 a este nuevo árbol. Sabemos que todo $\gamma(T)$ -conjunto es un conjunto dominante de T de cardinalidad mínima y recordemos que $\gamma(G) \leq \gamma(G_e) + 1$ para toda G . Ahora, sea D' un $\gamma(T_1)$ -conjunto tal que $|D'| = \gamma(T)$, es decir, $\gamma(T_1) = \gamma(T)$. Consideremos un conjunto de vértices de T_1 : $A = \{w, u, x, v\}$. Para que todos los vértices de A sean dominados, basta tener dos de ellos en cualquier $\gamma(T_1)$ -conjunto, es decir: $|A \cap D'| = 2$, sea $A \cap D' = \{z_1, z_2\}$. En T consideremos el conjunto $D = D' \setminus \{z_1, z_2\} \cup \{u\}$, el cual es un conjunto dominante de T pues

contiene a u . Entonces tenemos que: $|D| = |D'| - 2 + 1$, es decir, $|D| = \gamma(T) - 1$. pero esto no es posible, pues D sería un $\gamma(T)$ -conjunto con cardinalidad menor que $\gamma(T)$. Por lo tanto, $\gamma(T_1) = \gamma(T) + 1$ y así: $sd_\gamma(T) = 1$.

2. En el árbol T todo vértice soporte es débil. Sea u un vértice soporte débil de T tal que $\delta(u) = 2$, u es adyacente a un vértice terminal v y a otro vértice w . Si al subdividir $uv = e_1$ se tiene que $\gamma(T) < \gamma(T_{e_1})$, entonces $sd_\gamma(T) = 1$. Supongamos que no es así, subdividamos uv y uw con los vértices s y r respectivamente y llamemos T_1 a este nuevo árbol. Si $\gamma(T) < \gamma(T_1)$ entonces $sd_\gamma(T) = 2$. Supongamos que D_1 es un $\gamma(T_1)$ -conjunto tal que $|D_1| = \gamma(T)$, es decir, $\gamma(T_1) = \gamma(T)$. Consideremos el conjunto de vértices de T_1 , $A = \{w, s, u, r, v\}$. Para que todos los vértices de A sean dominados, basta tener dos de ellos en cualquier $\gamma(T_1)$ -conjunto, es decir, $|A \cap D_1| = 2$, de donde tenemos las siguientes posibilidades:

- i) Si $A \cap D_1 = \{r, s\}$ tenemos que el conjunto $D = D_1 \setminus \{r, s\} \cup \{u\}$ es un $\gamma(T)$ -conjunto, donde $|D| = \gamma(T) - 2 + 1$, $|D| = \gamma(T) - 1$, pero esto no es posible. Por lo tanto, $\gamma(T) < \gamma(T_1)$.
- ii) Si $A \cap D_1 = \{r, u\}$, entonces el conjunto $D = D_1 \setminus \{r, u\} \cup \{w\}$, $D = D_1 \setminus \{r\}$ es un $\gamma(T)$ -conjunto, con $|D| = \gamma(T) - 1$, así, $\gamma(T) < \gamma(T_1)$. De i) y ii), $sd_\gamma(T) \leq 2$.
- iii) Si $A \cap D_1 = \{r, w\}$ y $N(w) \setminus s = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Sea T_2 el árbol obtenido a partir de T_1 al subdividir la arista wx_i , $1 \leq i \leq n$ con z_i el vértice de subdivisión.

Sea D_2 un $\gamma(T_2)$ -conjunto tal que $|D_2| = \gamma(T_1)$, es decir, $\gamma(T_2) = \gamma(T_1)$. Si $w \in D_2$, se sigue que $D_1 = D_2 \setminus x_i$ es un $\gamma(T_1)$ -conjunto con $|D_1| = \gamma(T_1) - 1$. Por lo tanto, $\gamma(T_1) < \gamma(T_2)$.

Ahora, supongamos que $w \notin D_2$,

- Si $z_i, x_i \in D_2$, entonces $D_1 = D_2 \setminus z_i$ es un $\gamma(T_1)$ -conjunto con $|D_1| = \gamma(T_1) - 1$. Por lo tanto, $\gamma(T_1) < \gamma(T_2)$.
- Si $z_i \in D_2$ y $x_i \notin D_2$, tenemos que $D_1 = \{D_2 \setminus z_i\} \cup \{w\} \setminus A \cup \{r\}$ es un $\gamma(T_1)$ -conjunto con $|D_1| = \gamma(T_1) - 4$. Se sigue que, $\gamma(T_1) < \gamma(T_2)$.
- Si $z_i, x_i \in D_2$, se tiene que $D_1 = D_2 \setminus \{z_i\}$ es un $\gamma(T_1)$ -conjunto con $|D_1| = \gamma(T_1) - 1$. Así, $\gamma(T_1) < \gamma(T_2)$.

De aquí tenemos que en T_2 , existe una arista wx_i tal que $\gamma(T_1) < \gamma(T_2)$, es decir, $sd_\gamma(T) \leq 3$.

□

En los siguientes capítulos veremos ejemplos de árboles que tienen número de subdivisión 1 y 3. En la Figura 2 tenemos un ejemplo de un árbol con número de subdivisión 2. Como podemos ver, $\gamma(T) = 7$. Si subdividimos una arista con el vértice w_1 $\gamma(T_{e_1}) = 7$. Ahora, si subdividimos una segunda arista con el vértice w_2 entonces $\gamma(T_{e_1e_2}) = 8$. Por lo tanto $sd_\gamma(T) = 2$.

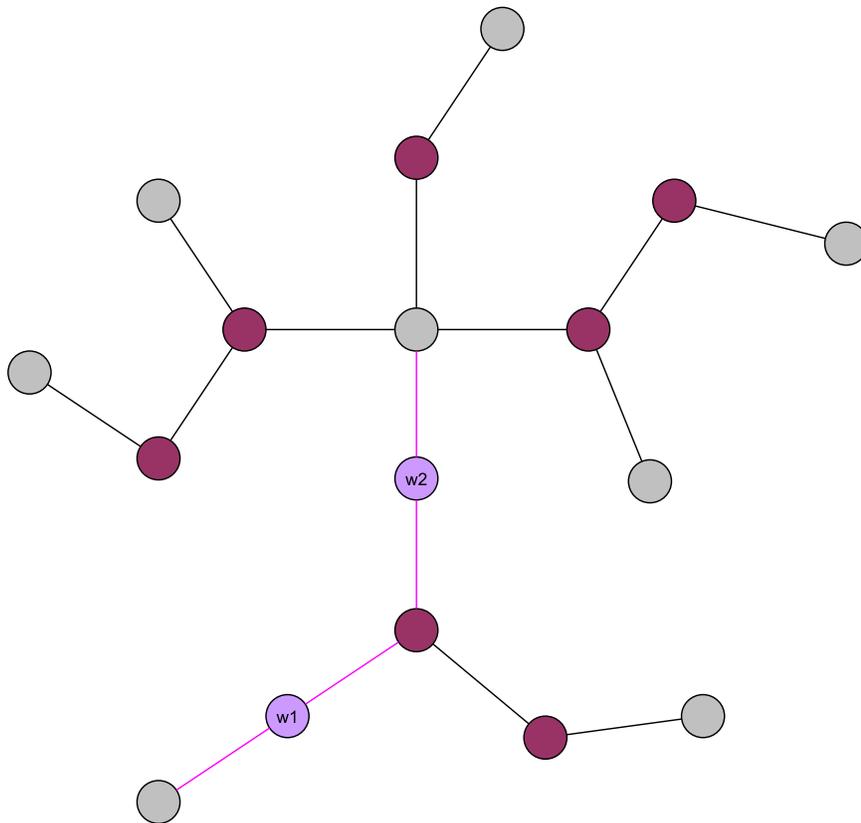


FIGURA 2. Árbol con $sd_\gamma(T) = 2$

2.5. El contraejemplo

Hasta este punto hemos estudiado algunos resultados que se han dado acerca del número de subdivisión de una gráfica. Para entender la relevancia de esta sección, recapitulemos un poco.

En la sección anterior demostramos que si T es un árbol, entonces $1 \leq sd_\gamma(T) \leq 3$. Sabemos que en [Aru11] Velammal conjeturó que la desigualdad anterior se cumple para cualquier gráfica G . A partir de esta conjetura surgieron varios trabajos buscando demostrarla, en los que se dieron algunas cotas. En [Mer01], Haynes et al. propusieron que para cualquier gráfica G con $\delta(G) \geq 2$, $sd_\gamma(G) \leq \delta(G) + 1$. Sin embargo, en [Hed04], Favaron, Haynes y Hedetniemi demostraron que dicha cota no es adecuada, y que en general, para una gráfica G se tiene que $sd_\gamma(G) - \delta(G)$ puede ser arbitrariamente grande para cualquier entero positivo $\delta(G)$. A partir de este resultado sabemos que la conjetura de Velammal no es cierta.

A continuación estudiaremos un interesante ejemplo de una gráfica cuyo número de subdivisión es mayor que 3, dado en [Vij02] por Bhattacharya y Vijayakumar.

Sean $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ y $V_2 = \{A \subseteq V_1 \mid |A| = 4\}$ es decir, A contiene a todos los subconjuntos de cuatro elementos de V_1 . Entonces, $|V_2| = C_{10}^4 = 210$.

Construyamos una gráfica bipartita G con $V(G) = V_1 \cup V_2$ y $E(G) = \{vA \mid v \in V_1, A \in V_2 \text{ y } v \in A\}$. Es decir, para cualesquiera dos vértices $v \in V_1$ y $A \in V_2$ v es adyacente a A si y sólo si $v \in A$. En la Figura 3 podemos ver cómo es la gráfica G .

Bhattacharya y Vijayakumar demostraron en [Vij02] que para esta gráfica G se tiene que $\gamma(G) = 7$ y que al subdividir tres aristas de G , $\gamma(G_{e_1, e_2, e_3}) = 7$, es decir, es necesario subdividir más de tres aristas para que el número de dominación de G aumente.

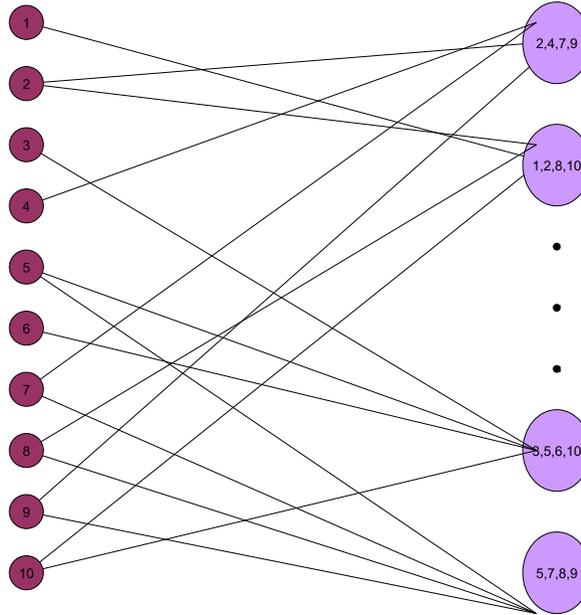


FIGURA 3. Gráfica G con $sd_\gamma > 3$

Construyamos un ejemplo particular de un γ -conjunto de G . Primero, tomemos seis vértices de V_1 . Sea $D_1 = \{1, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Entonces, con D_1 dominamos a todos los vértices $A_i \in V_2$, excepto el vértice $\{2, 6, 8, 10\}$. De esta forma, para dominar a todos los vértices de V_2 y los cuatro vértices que nos falta dominar en V_1 tomamos: $D = D_1 \cup \{2, 6, 8, 10\}$ con $|D| = 7$. Es decir, D es un γ -conjunto de G . Notemos que esta forma de construir el γ -conjunto sirve para cualquier conjunto D_1 con $|D_1| = 6$ que tomemos.

Veamos que ocurre al subdividir tres aristas de G . Sean $v_1, v_2, v_3 \in V_1$ y $A_1, A_2, A_3 \in V_2$. Consideremos las siguientes aristas.

- $e_1 = v_1A_1$, con $v_1 = 3$ y $A_1 = \{3, 4, 1, 2\}$.
- $e_2 = v_2A_2$, con $v_2 = 2$ y $A_2 = \{5, 2, 6, 7\}$.
- $e_3 = v_3A_3$, con $v_3 = 8$ y $A_3 = \{1, 5, 7, 8\}$.

Al subdividirlas tendremos la gráfica G_{e_1, e_2, e_3} . Ahora construiremos un ejemplo de un γ – conjunto de G_{e_1, e_2, e_3} .

Tomamos los tres vértices de V_1 que son adyacentes a las aristas subdivididas, en este caso $\{3, 2, 8\}$ además, también de V_1 tomamos tres vértices distintos de v_1, v_2 y v_3 que aparezcan en A_1, A_2 y A_3 . Tomaremos $\{4, 7, 5\}$. Entonces tenemos $D_1 = \{3, 2, 8, 4, 7, 5\}$. De nuevo, para dominar a todos los vértices de G_{e_1, e_2, e_3} sólo falta dominar a $V_1 \setminus D_1$ y para hacerlo, basta tomar el vértice $\{2, 6, 9, 10\}$. Entonces nuestro γ – conjunto será el siguiente: $D = D_1 \cup \{2, 6, 9, 10\}$ con $|D| = 7$. Notemos de nuevo que el proceso funciona al subdividir cualesquiera tres aristas.

Por lo tanto G es un ejemplo de una gráfica con $sd_\gamma(G) \geq 4$. Lo que contradice la conjetura de Velammal. Es decir, para una gráfica G en general, no es cierto que $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$.

Ya sabemos que la desigualdad es cierta en el caso en que G es un árbol, en los siguientes capítulos nos dedicaremos a estudiar el número de subdivisión de árboles.

CAPÍTULO 3

ÁRBOLES DE CLASE 3

Los árboles pueden ser clasificados como árboles de clase 1, 2 o 3, dependiendo de si su número de subdivisión es 1, 2 o 3, respectivamente. En este capítulo se mostrará una caracterización de los árboles de clase 3. Describiremos un proceso de construcción de una familia de árboles etiquetados.

3.1. Construyendo la familia

DEFINICIÓN 3.1. Sea \mathcal{F} la familia de árboles etiquetados tal que:

1. Contiene a P_4 , donde las dos hojas tienen etiqueta A y los dos vértices soporte tienen etiqueta B .
2. Es cerrado bajo las dos operaciones op_1 y op_2 , que extienden a un árbol T , uniendo otro árbol a un vértice $v \in V(T)$ llamado vértice fijador y son definidas a continuación.

La etiqueta de un vértice, la denotaremos por $eti(v)$.

op1: Si $eti(v) = A$, entonces pegamos a v una trayectoria xyz y la arista vx . Donde $eti(x) = eti(y) = B$ y $eti(z) = A$.

op2: Si $eti(v) = B$, entonces pegamos a v una trayectoria xy y la arista vx . Donde $eti(x) = B$ y $eti(y) = A$.

En la Figura 1 podemos ver en que consisten las dos operaciones.

Si $T \in \mathcal{F}$, $A(T)$ y $B(T)$ son los conjuntos de vértices con etiquetas A y B respectivamente en T ; los cuales dependen de la forma en la que T se construye a partir de un P_4 inicial. Veremos que de hecho, todas las posibles construcciones de T dan lugar a la misma partición $A(T) \cup B(T)$ de $V(T)$.

Ahora, consideremos las siguientes *observaciones* para $T \in \mathcal{F}$ y $v \in V(T)$.

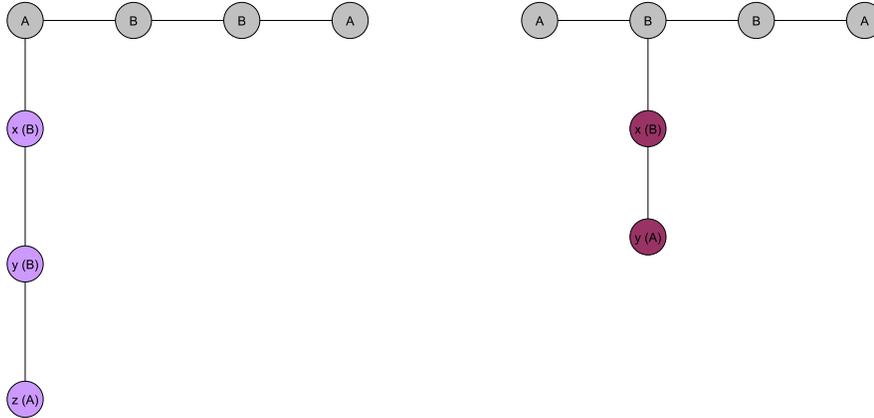


FIGURA 1. Operación $op1$ (izq), Operación $op2$ (der)

Observación 1: Si el vértice v es una hoja, entonces $eti(v) = A$. Ya que si $eti(v) = B$ por la definición de **op1** y **op2** entonces v sería adyacente a un vértice en $A(T)$ y a uno en $B(T)$ y no sería una hoja.

Observación 2: Si el vértice $v \in sop(T)$, entonces $eti(v) = B$. Pues si $eti(v) = A$, por la definición de **op1** v podría ser un vértice fijador o una hoja y bajo la **op2** v sólo podría ser una hoja, en ningún caso sería un vértice soporte.

Observación 3: Si $eti(v) = A$, entonces $N(v) \subset B(T)$. Puesto que $eti(v) = A$, si viene de una **op1** entonces v es un vértice fijador y por lo tanto adyacente a un vértice en $B(T)$ o v es una hoja. Si v viene de una **op2** también es una hoja y por lo tanto en ambos casos v es adyacente a un vértice soporte que por la observación 2 está en $B(T)$

Observación 4: Si $eti(v) = B$, entonces v es adyacente a exactamente un vértice de $A(T)$ y al menos a un vértice de $B(T)$. Bajo **op1** puede ocurrir que v es adyacente a un vértice fijador en $A(T)$ y al menos a un vértice en $B(T)$ (podría ser adyacente a más vértices en $B(T)$ si éste fuera vértice fijador para una **op2**) o puede ocurrir que v sea vértice soporte, en cuyo caso es adyacente a una hoja en $A(T)$ y al menos a un vértice en $B(T)$. Bajo **op2**, v podría ser un vértice fijador, un vértice soporte o adyacente a un vértice fijador y por lo tanto adyacente a cuando menos un vértice en $B(T)$ y a exactamente uno en $A(T)$.

Observación 5: Si los vértices $u, v \in A(T)$ entonces $d(u, v) \geq 3$. Por la observación 3 tenemos que $N(v) \in B(T)$ y $N(u) \in A(T)$, entonces u y v no son adyacentes y por lo tanto $d(u, v) \neq 1$. Ahora, supongamos que u es adyacente a un vértice $x \in B(T)$, por la observación 4, x no puede ser adyacente a otro vértice en $A(T)$, es decir, x no es adyacente a v y por lo tanto $d(u, v) \neq 2$.

Además, también por la observación 4 sabemos que existe al menos un vértice $y \in B(T)$ adyacente a x . Si y fuera adyacente a v entonces $d(u, v) = 3$. Por lo tanto $d(u, v) \geq 3$.

Observación 6: Para cualquier $T \in \mathcal{F}$ todos sus vértices soporte son débiles. Si $v \in \text{sup}(T)$ tenemos que $\text{eti}(v) = B$ (por la observación 2). Además sabemos que $N(v) \subseteq A(T)$ (por la observación 1) pero por la Observación 3 v es adyacente a exactamente un vértice en $A(T)$. Por lo tanto v es un vértice soporte débil.

En la Figura 2 tenemos un ejemplo de como se vería un árbol en la familia \mathcal{F} .

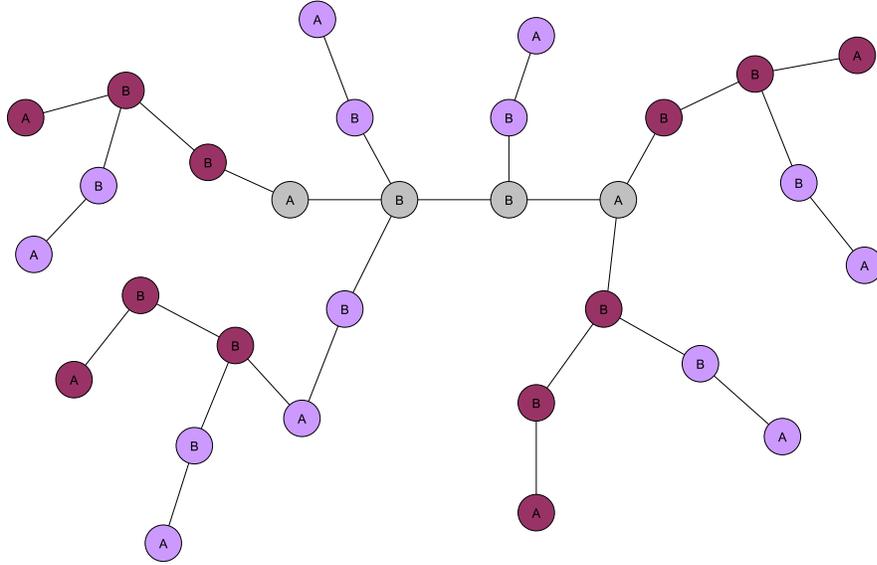


FIGURA 2. $T \in \mathcal{F}$

3.2. Propiedades de la familia

LEMA 3.2. Si $T \in \mathcal{F}$ y T se obtiene de $T_0 = P_4$ por una sucesión de operaciones op^1, \dots, op^m entonces $A(T)$ es un $\gamma(T)$ -conjunto y $\gamma(T) = m + 2$.

DEMOSTRACIÓN. Por la observación 4, sabemos que si $v \in B(T)$, es adyacente exactamente a un vértice de $A(T)$ y al menos a un vértice de $B(T)$, entonces $A(T)$ es un conjunto dominante de T .

Sea D un $\gamma(T)$ -conjunto, tenemos que, $|D| \leq |A(T)|$.

Por otro lado, sabemos que $N[x] \cap N[y] = \emptyset$ para todo $x, y \in A(T)$. Por la observación 5, sea $v \in D$, como $|N[v] \cap A(T)| \leq 1$, entonces $|D| \geq |A(T)|$, por lo tanto $|D| = |A(T)|$, y así $A(T)$ es un $\gamma(T)$ -conjunto.

Ahora, puesto que $|A(P_4)| = 2$ y con cada operación **op1** y **op2** se agrega un vértice a $A(T)$, entonces $|A(T)| = m + 2$. \square

De aquí, si un árbol de F se construye a partir de P_4 , por diferentes sucesiones de operaciones, entonces todas las sucesiones tienen longitud $m = \gamma(T) - 2$.

LEMA 3.3. *Sea $T \in \mathcal{F}$ y $z \in A(T)$, existe D un $\gamma(T)$ -conjunto tal que $z \in D$ y $pn[z, D] = \{z\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $pn[z, D] = \{z\}$ quiere decir que z es un vértice aislado en D , es decir, z es su propio vecino privado.

Sea $T_0 = P_4$ y T se obtiene a partir de P_4 al aplicar op^1, \dots, op^m operaciones sucesivas. La prueba será por inducción sobre m .

Si $m = 0$, entonces $T_0 = P_4$ y por lo tanto, existe D , un $\gamma(P_4)$ -conjunto tal que $z \in D$ y $pn[z, D] = \{z\}$.

Supongamos que $m \geq 1$ y que para T_{m-1} se cumple que si $z \in A(T_{m-1})$ existe D , un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto, tal que $z \in D$ y $pn[z, D] = \{z\}$.

Por el Lema 3.2, tenemos que $\gamma(T_{m-1}) = (m+2) - 1$ y por lo tanto $\gamma(T_{m-1}) = m+1$.

T se obtiene de T_{m-1} al aplicar la operación op^m , para la cual tenemos dos posibilidades: $op^m = \mathbf{op1}$ o $op^m = \mathbf{op2}$.

Si $op^m = \mathbf{op1}$, siguiendo la definición, a T_{m-1} le añadimos una trayectoria xwv a un vértice $y \in A(T_{m-1})$ y la arista xy . Sabemos que $eti(x) = eti(w) = B$ y $eti(v) = A$. Sea $z \in A(T)$, si $z \in A(T_{m-1})$, por hipótesis de inducción, existe D , un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto tal que $z \in D$ y $pn[z, D] = \{z\}$. De donde, $D' = D \cup \{w\}$ es un $\gamma(T)$ -conjunto y $pn[z, D'] = \{z\}$. Ahora, sea $z = v$, por hipótesis de inducción, existe D , un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto, tal que $y \in D$ y $pn[y, D] = \{y\}$. Por lo tanto, $D' = (D \setminus \{y\}) \cup \{x, v\}$ es un $\gamma(T)$ -conjunto y $pn[v, D'] = \{v\}$.

Si $op^m = \mathbf{op2}$ tenemos que, T se obtiene de T_{m-1} al añadir una trayectoria xw y una arista xy con $y \in B(T_{m-1})$. Sabemos, por definición que $eti(x) = B$ y $eti(w) = A$. Sea $z \in A(T)$. Si $z \in A(T_{m-1})$, por hipótesis de inducción existe D , $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto tal que $z \in D$ y $pn[z, D] = \{z\}$. Por lo tanto $D' = D \cup \{w\}$ es un $\gamma(T)$ -conjunto y $pn[z, D'] = \{z\}$. Ahora, si $z = w$, por la observación 4, y tiene exactamente un vecino en $A(T_{m-1})$, digamos v . Por hipótesis de inducción, existe D , un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto, tal que $v \in D$ y $pn[v, D] = \{v\}$. Entonces $D' = (D \setminus \{v\}) \cup \{y, w\}$ es un $\gamma(T)$ -conjunto y $pn\{w, D'\} = \{w\}$. \square

LEMA 3.4. *Sea $T \in \mathcal{F}$, T_e obtenido a partir de T al subdividir una arista e de T y $z \in A(T)$. Entonces $\gamma(T_e) = \gamma(T)$ y existe un $\gamma(T_e)$ -conjunto que contiene a z .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in \mathcal{F}$. Sabemos que al subdividir cualquier arista e de T se tiene que $\gamma(T_e) \geq \gamma(T)$ vamos a demostrar que cualquier conjunto dominante de T_e de orden $\gamma(T)$ es un $\gamma(T_e)$ -conjunto, es decir $\gamma(T_e) \leq \gamma(T)$. Sea $e \in E(T)$ y sea

T_e el árbol obtenido al subdividir la arista e con el vértice a . La prueba se hará por inducción sobre m . Si $m = 0$, entonces $\gamma(P_5) = \gamma(P_4) = 2$ y existe un $\gamma(P_5)$ -conjunto que tiene un vértice terminal.

Supongamos que $m \geq 1$. Tomemos $(T_{m-1})_e$, sea $z \in A(T_{m-1})$, entonces $\gamma((T_{m-1})_e) = \gamma(T_{m-1})$ y existe un $\gamma((T_{m-1})_e)$ -conjunto que contiene a z . T_m lo podemos obtener de T_{m-1} al aplicar **op1** o **op2**. Consideramos dos casos:

1. Si la operación $op^m = \mathbf{op1}$. Sea $y \in A(T_{m-1})$ añadimos la trayectoria xwv y la arista xy ; por definición tenemos que $eti(x) = eti(w) = B$ y $eti(v) = A$. Supongamos que $e \in E(T_{m-1})$ por hipótesis de inducción, $\gamma((T_{m-1})_e) = \gamma(T_{m-1}) = \gamma(T) - 1$ y para cualquier vértice $z \in A(T_{m-1})$ existe un $\gamma((T_{m-1})_e)$ -conjunto, D_z que contiene a z . Si $z \in A(T_{m-1})$, sea $D_1 = D_z \cup \{w\}$; si $z = v$, sea $D_1 = D_z \cup \{v\}$. En ambos casos se tiene que D_1 es un conjunto dominante de T_e que contiene a z de orden $\gamma(T)$. Si $z \in A(T_{m-1})$ entonces $D_1 = A(T_{m-1}) \cup \{w\}$ es un conjunto dominante de T_e de orden $\gamma(T)$ y por lo tanto D_1 es un $\gamma(T_e)$ -conjunto que contiene a z . Si $z = v$, por el Lema 3.3 en T_{m-1} existe D un $\gamma(T)$ -conjunto que contiene a y tal que $pn[y, D] = \{y\}$, entonces $D_1 = (D - \{y\}) \cup \{v, a\}$ es un conjunto dominante de T_e de orden $\gamma(T)$, por lo tanto, D_1 es un $\gamma(T_e)$ -conjunto que contiene a z .
2. Si la operación $op^m = \mathbf{op2}$. Supongamos que $e \in E(T_{m-1})$. Por hipótesis de inducción tenemos que $\gamma((T_{m-1})_e) = \gamma(T_{m-1}) = \gamma(T) - 1$ y si $z \in A(T_{m-1})$, existe D_z , un $\gamma((T_{m-1})_e)$ -conjunto que contiene a z . Supongamos ahora que subdividimos la arista xy de la trayectoria yxw . Si $z = w$ tenemos que $D_1 = D_z \cup \{w\}$. Si $z \in A(T_{m-1})$, $D_1 = A(T_{m-1}) \cup \{x\}$. Si $z = v$, por el Lema 6, en T_{m-1} existe D un $\gamma(T)$ -conjunto que contiene a y tal que $pn[y, D] = \{y\}$, entonces $D_1 = (D \setminus \{v\}) \cup \{y, w\}$. En todos los casos D_1 es un conjunto dominante de T_e de orden $\gamma(T)$, por lo tanto, D_1 es un $\gamma(T_e)$ -conjunto que contiene a z .

□

3.3. La caracterización

TEOREMA 3.5. *Si T es un árbol tal que $T \in \mathcal{F}$, entonces $sd_\gamma(T) = 3$.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se hará por inducción sobre m . Si $m = 0$ entonces $T = P_4$ tenemos que $sd_\gamma(P_4) = 3$.

Supongamos que $m \geq 1$ y que $sd_\gamma(T) = 3$ si $T \in \mathcal{F}$ y $T_{m-1} = op^1 \cdots op^{m-1}(P_4)$. Sea $T \in \mathcal{F}$, $e, f \in E(T)$. Sea $T_{e,f}$, sabemos que $\gamma(T_{e,f}) \geq \gamma(T)$.

Consideremos dos casos:

1. Si $T = \mathbf{op1}(T_{m-1})$, entonces, para e y f tenemos tres posibilidades:
 - Cuando las aristas $e, f \in E(T_{m-1})$. Entonces $T_{e,f}$ se obtiene de $T_{(m-1)e,f}$ al añadir la trayectoria $yxwv$ al vértice $y \in V(T_{(m-1)e,f})$. Por hipótesis

de inducción y por el Lema 3.2 tenemos que $\gamma(T_m) = \gamma(T_{m-1}) + 1$, pues $A(T_{m-1})$ es un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto y $A(T_m)$ es un $\gamma(T_m)$ -conjunto. Entonces $\gamma(T_{(m-1)e,f}) = \gamma(T_{m-1}) = \gamma(T) - 1$. Sea D un $\gamma(T_{(m-1)e,f})$ -conjunto, tenemos que $D_1 = D \cup \{w\}$ es un $\gamma(T_{e,f})$ -conjunto, y así tenemos que $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T)$.

- Si ocurre que $|\{e, f\} \cap E(T_{m-1})| = 1$. Supongamos que $e \in E(T_{m-1})$ y que $f = xw$. Consideremos $T_{(m-1)e}$ por hipótesis de inducción y el Lema 3.2 tenemos que $\gamma(T_{(m-1)e}) = \gamma(T_{m-1}) = \gamma(T) - 1$ así, por el Lema 3.4 existe un $\gamma(T_{(m-1)e})$ -conjunto D que contiene a y . Entonces, $D_1 = D \cup \{w\}$ es un $\gamma(T_{e,f})$ -conjunto y así $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T)$.
 - Si las aristas $e, f \in yxwv$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $e = xw$ y $f = wv$. Sea w' el vértice de subdivisión de f . Como $y \in A(T_{m-1})$ y por el Lema 3.3 existe un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto D tal que $y \in D$ y $pn[y, D] = \{y\}$. Entonces, $D_1 = (D \setminus \{y\}) \cup \{x, w'\}$ es un $\gamma(T_{e,f})$ -conjunto y así $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T_{m-1}) + 1 = \gamma(T)$ por lo tanto $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T)$.
2. $T = \mathbf{op2}(T_{m-1})$. Para e y f tenemos tres posibilidades:
- Si las aristas $e, f \in E(T_{m-1})$. Tenemos que $T_{e,f}$ se obtiene de $T_{(m-1)e,f}$, al añadir la trayectoria yxw a $y \in B(T_{m-1})$. Por hipótesis de inducción y el lema 5 tenemos que $\gamma(T_{(m-1)e,f}) = \gamma(T_{m-1}) = \gamma(T) - 1$. Sea D un $\gamma(T_{(m-1)e,f})$ -conjunto, entonces $D_1 = D \cup \{w\}$ es un $\gamma(T_{e,f})$ -conjunto y así $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T)$.
 - Cuando tenemos que $|\{e, f\} \cap E(T_{m-1})| = 1$. Supongamos que $e \in E(T_{m-1})$ y $f = yx$. Sea D un $\gamma(T_{(m-1)e})$ -conjunto, entonces $D_1 = D \cup \{x\}$ es un $\gamma(T_{e,f})$ -conjunto y así $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T)$.
 - Si las aristas $e, f \in yxw$ es decir, $e = yx$ y $f = xw$. Sea w' el vértice de subdivisión de f y y' el único vecino de y con etiqueta A en T_{m-1} . Por el Lema 3.3 existe D un $\gamma(T_{m-1})$ -conjunto tal que $y' \in D$ y $pn[y', D] = \{y'\}$. Entonces, $D_1 = \{D \setminus \{y'\}\} \cup \{y, w'\}$ es un $\gamma(T_{e,f})$ -conjunto y así $\gamma(T_{e,f}) \leq \gamma(T)$.

En todos los casos D_1 es un conjunto dominante de orden $\gamma(T)$, por lo tanto $sd_\gamma(T) = 3$. □

TEOREMA 3.6. *Un árbol de orden $n \geq 3$ es de clase 3 si y sólo si $T \in \mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.5 es suficiente demostrar que la condición es necesaria. La prueba es por inducción sobre el orden n de T . Por el Lema 2.7, P_4 es el único árbol de orden 4 tal que $sd_\gamma(T) = 3$ y $P_4 \in \mathcal{F}$. Sea $n \geq 5$ y supongamos que el enunciado es cierto para todo árbol de clase 3 y de orden más pequeño que n .

Sea T un árbol de orden n y $sd_\gamma(T) = 3$. Por el Lema 2.7 los vértices soporte de T no son fuertes. Sea $P = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ una trayectoria de longitud máxima en T .

Tenemos que $\deg(v_1) = \deg(v_l) = 1$ y $\deg(v_2) = \deg(v_{l-1}) = 2$, por lo tanto $l \geq 5$. Consideremos dos casos:

1. Si el vértice v_3 es soporte, sea $T' = T \setminus \{v_1, v_2\}$. Por el Lema 2.8, T' es de clase 3 y por hipótesis de inducción pertenece a \mathcal{F} . Por la observación 4, $v_3 \in B(T')$ entonces $T = \mathbf{op2}(T')$ y por lo tanto $T \in \mathcal{F}$.
2. Si el vértice v_3 no es soporte, sean T' y T'' las componentes de $T - v_3v_4$ que contienen a v_4 y v_3 respectivamente. Puesto que P es una trayectoria de longitud máxima de T , todos los vecinos de v_3 diferentes de v_4 son vértices soporte. Entonces T'' es una estrella subdividida $sK_{1,t}$ con $t \geq 1$. Más aún, $|V(T'')| \geq 3$ de lo contrario T sería una estrella subdividida $sK_{1,t+1}$ lo cual contradice que $sd_\gamma(T) = 3$ por el Lema 2.7. Ahora, por el Lema 2.8, T' es de clase 3 y así T' pertenece a \mathcal{F} por hipótesis de inducción. Si v_4 es un vértice soporte o tiene un vecino que lo es, consideremos a $T_{v_1v_2}$ y $T_{v_2v_3}$; sean D un $\gamma(T)$ -conjunto y D' un $\gamma(T_{v_1v_2})$ -conjunto. El conjunto D contiene a v_4 o a uno de sus vecinos en T' y no contiene a v_3 ; entonces, $|D' \cap V(T_{v_2v_3})| = t + 1 = |D \cap V(T'')| + 1$ y $|D' \cap V(T')| = |D \cap V(T')|$, por lo tanto $\gamma(T_{v_1v_2}) \geq \gamma(T)$ lo que contradice que $sd_\gamma(T) = 3$. Entonces, $\deg(v_4) = 2$ y v_4 es una hoja de T' o $\deg(v_4) \geq 3$ y todos los vecinos de v_4 en $T' \setminus v_5$ están a distancia exactamente 2 de una hoja de T , pues P es la trayectoria más larga. En el primer caso tenemos que $v_4 \in A(T')$ por la observación 1. En el segundo caso, todos los vecinos de v_4 en $T' - v_5$ están en $B(T')$ por la observación 1 y la observación 5, además, no tienen vecinos en $A(T')$ salvo v_4 . Entonces, por la observación 4, $v_4 \in A(T')$ y así $T = \mathbf{op1}(\mathbf{op2}^1 \cdots \mathbf{op2}^{t-1})(T')$, es decir, $T \in \mathcal{F}$.

□

CAPÍTULO 4

ÁRBOLES DE CLASE 1

Existen dos trabajos en los cuales se da una caracterización de los árboles de clase 1, [Myn08] y [She08a]. Nosotros estudiaremos la caracterización dada por Benecke y Mynhardt en [8], pues la caracterización dada en [She08a] es muy parecida a la que acabamos de estudiar para árboles de clase 3. Dicha caracterización se enuncia en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.1. *Sea T un árbol de orden $n \geq 3$, $sd_\gamma(T) = 1$ si y sólo si T tiene una hoja que no pertenece a ningún $\gamma(T)$ -conjunto o tiene una arista cuyos vértices no pertenecen a ningún $\gamma(T)$ -conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T tiene una hoja $u \in \mathcal{N}(T)$ y sea v su vértice soporte, consideremos T_{vu} con w su vértice de subdivisión. Sea D' un $\gamma(T_{vu})$ -conjunto. De donde, en T_{vu} tenemos que u es una hoja y ahora w es su vértice soporte, de aquí, $|\{u, w\} \cap D'| = 1$. Sea $D = (D' \setminus \{u, w\}) \cup \{u\}$ de forma que $|D| = |D'|$ y tenemos que, D es un conjunto dominante de T que contiene a u tal que $|D| \geq \gamma(T)$ puesto que $u \in \mathcal{N}(T)$. Por lo tanto, $sd_\gamma(T) = 1$.

Ahora supongamos que T tiene una arista $e = xy$ tal que $x, y \in \mathcal{N}(T)$. Consideremos T_e con w el vértice de subdivisión y sea D' un $\gamma(T_e)$ -conjunto. Como $D' \succ w$, $D' \cap \{x, y, w\} \neq \emptyset$ y como D' es un conjunto dominante crítico, entonces $|D' \cap (x, y, w)| \leq 2$. Así, para w tenemos dos posibilidades:

- Si $w \notin D'$, entonces, D' es un conjunto dominante de T tal que $x \in D'$ o $y \in D'$; y como $x, y \in \mathcal{N}(T)$, de donde, $|D'| > \gamma(T)$, por lo tanto $sd_\gamma(T) = 1$.
- Si $w \in D'$ y $x \notin D'$ o $y \notin D'$. Sin pérdida de generalidad, si $x \notin D'$, tenemos que $D = (D' \setminus \{w\}) \cup \{x\}$ es un conjunto dominante de T que contiene a x tal

que $|D| = |D'|$. Así, como $x \in \mathcal{N}(T)$, tenemos que $|D| = |D'| > \gamma(T)$, por lo tanto, $sd_\gamma(T) = 1$.

Ahora supongamos que $sd_\gamma(T) = 1$, entonces, en T existe $e = uv$ tal que $\gamma(T_e) = \gamma(T) + 1$. Sea w el vértice de subdivisión. Para u y v tenemos dos posibilidades:

- Si alguno de los dos vértices es una hoja en T (supongamos que u es una hoja), necesariamente $u \in \mathcal{N}(T)$. Si existiera un γ -conjunto D de T tal que $u \in D$, entonces, $D' = (D \setminus \{u\}) \cup \{w\}$ sería un conjunto dominante de T con $|D'| = \gamma(T)$. Lo que contradice que $sd_\gamma(T) = 1$. Por lo tanto, T tiene una hoja $u \in \mathcal{N}(T)$.
- En caso de que ninguno de los dos vértices es una hoja, es decir, $\delta(u) > 1$ y $\delta(v) > 1$. Si $\{u, v\} \subseteq \mathcal{N}(T)$, entonces la arista $e = uv$ satisface la segunda condición del Teorema y ya terminamos. Supongamos que $\{u, v\} \not\subseteq \mathcal{N}(T)$, tenemos que, existe un γ -conjunto D de T tal que $u, v \in D$. de aquí, D dominaría a T_e , lo que de nuevo contradice el hecho de que $sd_\gamma(T) = 1$.

Supongamos que alguno de los dos vértices está en un γ -conjunto y el otro no. Es decir, $u \notin \mathcal{N}(T)$ o $v \notin \mathcal{N}(T)$. Entonces existe D un γ -conjunto de T tal que $|\{u, v\} \cap D| = 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u \in D$. Vamos a demostrar varias cosas:

- a:** Primero veamos que $v \in pn(u, D)$, es decir, u domina a v en T . Supongamos que no es así. Sea u' un vértice tal que $u' \in (N(v) \cap D) \setminus \{u\}$, entonces en T_e tenemos que u domina a w y u' domina a v . De donde, todos los demás vértices de T_e siguen dominados por los mismos vértices de D que ya dominaban en T , es decir $D \succ T_e$, lo cual contradice que $sd_\gamma(T) = 1$. Por lo tanto, $v \in pn(u, D)$.
- b:** Ahora, sea $N(v) \setminus \{u\} = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$, puesto que v no es una hoja, entonces $t \geq 1$. Sea T_i el subárbol de $T - vw_i$ que contiene a w_i y $D_i = D \cap V(T_i)$. Como $v \notin D$, tenemos que $D_i \succ T_i$ para cada i y además es mínimo, pues si no lo fuera, podríamos obtener un conjunto dominante de T más pequeño que D . Así, $w_i \in \mathcal{N}(T_i)$ para cada $i = 1, \dots, t$, pues si para alguna i ocurriera que w_i pertenece a un γ -conjunto de T , éste tendría a u y no tendría a v , es decir, u no dominaría a v , lo cual contradice **a**.
- c:** Consideremos ahora un subárbol T_v de $T - vw_i$ que contiene a v . Tenemos que $v \in \mathcal{N}(T_v)$, pues si hubiera un γ -conjunto D_v de T_v que tuviera a v , de aquí, podemos construir un conjunto dominante de T_e , $D' = (D_v \setminus \{v\}) \cup \{w\} \cup \bigcup D_i$. Entonces $|D'| = |D|$, pero esto contradice que $sd_\gamma(T) = 1$.
- d:** Ahora veamos que efectivamente $v \in \mathcal{N}(T)$. Supongamos que $v \in H$ con H un γ -conjunto de T . Consideremos H_v y H_i como en **b** y **c**, sustituyendo D por H . Como $v \in H_v$, tenemos que H_v es un conjunto dominante de T_v pero como vimos en **c** no es mínimo, entonces, $|H_v| > |D_v|$ y de aquí, $|H_i| < |D_i|$ para alguna i . Supongamos que $i = 1$. Tenemos que H_1 domina a $T_1 - w_1$ pues w_1 es

el único vértice dominado por algún vértice de $H - H_1$, de donde, el conjunto $H_1 \cup \{w_1\}$ es un γ -conjunto de T_1 , lo que contradice **b**.

e: Finalmente, veamos que para cada $i = 1, \dots, t$ se tiene que $w_i \in \mathcal{N}(T)$. Tomemos i fijo. Supongamos que $w_i \in S$ con S un γ -conjunto de T . Consideremos S_v y S_i como en **b** y **c**, sustituyendo D por S . Tenemos que S_i domina a T_i y contiene a w_i , entonces S_i no es mínimo. Hay dos posibilidades. Si para algún $j \neq i$ ocurre que $|S_j| < |D_j|$, podemos suponer que $j = 1$. Por lo tanto S_1 domina a $T_1 - w_1$ pues w_1 es el único vértice dominado por algún vértice de $S - S_1$. Pero entonces el conjunto $S_1 \cup \{w_1\}$ es un γ -conjunto de T_1 , lo que contradice **b**. La otra posibilidad es que $|S_v| < |D_v|$ y como S_v es un conjunto dominante de $T_v \setminus \{v\}$, de donde, el conjunto $S_v \cup \{v\}$ es un γ -conjunto de T_v , lo que contradice **c**.

Por lo tanto, vw_i es una arista de T tal que $v \in \mathcal{N}(T)$ y $w_i \in \mathcal{N}(T)$ para todo $i = 1, \dots, t$.

□

A partir de esta caracterización de los árboles de clase 1 y la mostrada en el capítulo 3 de los árboles de clase 3 tenemos entonces una caracterización completa de árboles respecto a su número de subdivisión.

4.1. Algunos ejemplos

Ya tenemos ejemplos de árboles de clase 2 y clase 3. En el **capítulo 2**, en la Figura 2 vimos un ejemplo de un árbol de clase 2, en el capítulo 3, en la Figura 2 mostramos como se veía un árbol de clase 3.

Veamos ahora dos ejemplos de árboles de clase 1.

En la Figura 1 mostramos un árbol de clase 1 que satisface la primera condición del Teorema 4.1.

Como podemos ver, la arista $e = xy$ satisface que $x, y \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$. Tenemos que $\gamma(T) = 5$ y si subdividimos la arista e , entonces $\gamma(T_e) = 6$.

De esta forma tenemos que $sd_\gamma(T) = 1$.

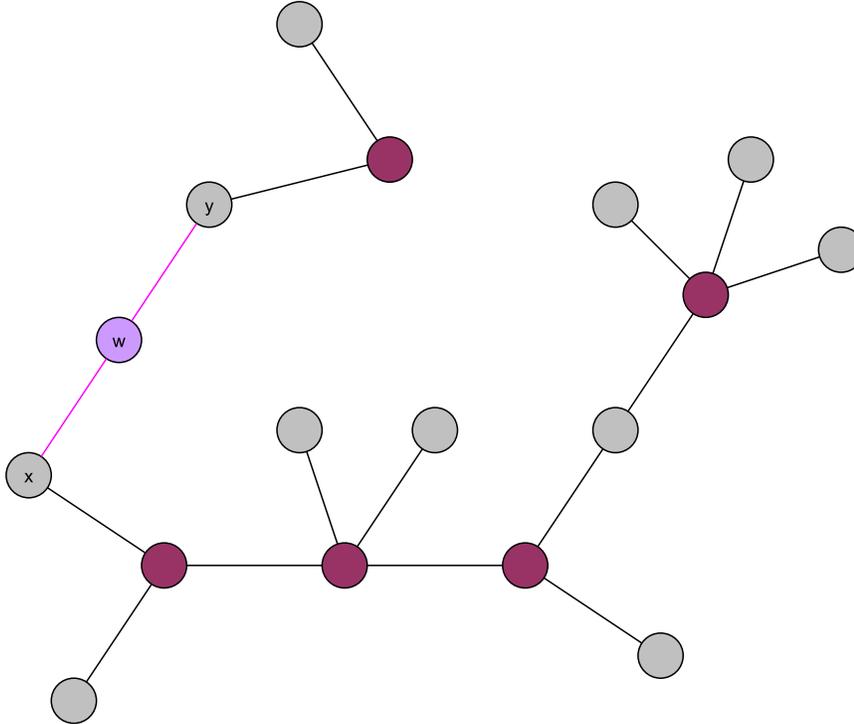


FIGURA 1. Árbol de clase 1

En la Figura 2 tenemos un árbol de clase 2 que satisface la segunda condición del Teorema 4.1.

El vértice z satisface que $z \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$. Podemos ver que $\gamma(T) = 6$ y si subdividimos la arista cuyo vértice final es z con el vértice w , entonces $\gamma(T_e) = 7$.

Así, $sd_\gamma(T) = 1$.

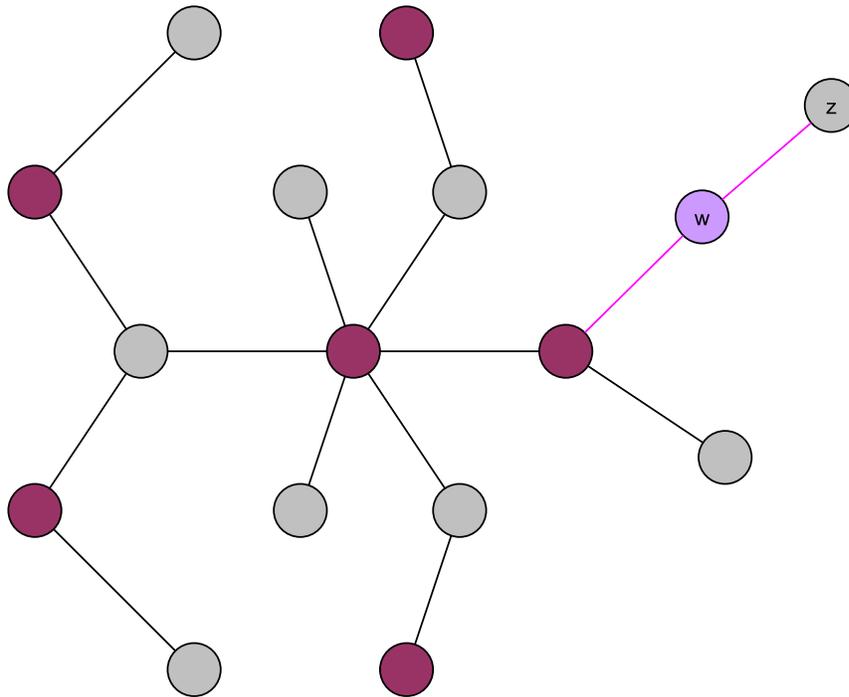


FIGURA 2. Árbol de clase 1

En el siguiente capítulo estudiaremos un nuevo parámetro, definido en 2013, que surgió a partir del concepto de subdivisión. Veremos como están relacionados y si es posible enriquecer las caracterizaciones que ya hemos estudiado.

CAPÍTULO 5

MULTISUBDIVISIÓN

En los capítulos anteriores demostramos algunos resultados respecto al número de subdivisión de una gráfica, estudiamos algunas conjeturas que resultaron falsas respecto a este parámetro y mostramos una caracterización para árboles respecto a su número de subdivisión. En [Top13], Dettlaff, Raczek y Topp continuaron con el estudio del número de subdivisión de una gráfica y demostraron que determinar el número de subdivisión de una gráfica es un problema NP -completo; lo cual motivó la definición de un nuevo parámetro, que estudiaremos en este capítulo. Veamos las siguientes definiciones:

Sea $G = (V, E)$ una gráfica, con $|V(G)| = n$, $|E(G)| = m$. Consideremos la siguiente modificación de gráficas. Sea $e = uv \in E(G)$, $t \in \mathbb{N}$; $G_{e,t}$ denota la gráfica obtenida a partir de G al subdividir la arista e con t vértices, es decir, en lugar de la arista e , tendremos una trayectoria $\{ux_1, \dots, x_tv\}$. Decimos entonces que la arista e fue multisubdividida en G . Notemos que cuando $t = 1$, se escribe G_e y se reduce al caso de subdivisión.

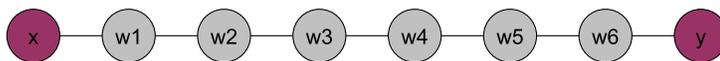


FIGURA 1. Arista multisubdividida

DEFINICIÓN 5.1. *El número de multisubdivisión de una arista uv , $msd(uv)$ es el mínimo número de subdivisiones de la arista uv , tal que el número de dominación de G , $\gamma(G)$ aumente.*

DEFINICIÓN 5.2. El número de multisubdivisión de una gráfica G con $m > 0$, denotado por $msd(G)$ es: $msd(G) = \min\{msd(uv) | uv \in E(G)\}$.

A partir de estas definiciones, nos preguntamos que similitudes y diferencias existen entre el número de subdivisión y multisubdivisión de una gráfica, si son comparables y que relación hay entre ellos, en qué casos estos parámetros son iguales y en particular, para este trabajo, nos interesa saber que ocurre en el caso en que G es un árbol.

En este capítulo estudiaremos algunos resultados dados en [Top13] respecto al número de multisubdivisión de una gráfica G y analizaremos su relación (en caso de haberla) con su número de subdivisión.

5.1. Subdivisión vs. Multisubdivisión

Para comenzar, prestemos atención a una sencilla pero importante observación entre estos dos parámetros que queremos estudiar y que nos será útil más adelante.

Observación. Para toda gráfica G $sd_\gamma(G) = 1$ si y sólo si $msd(G) = 1$. Es decir, $sd_\gamma(G) = 1$ significa que basta subdividir una arista de G una sola vez para que su número de dominación aumente, es decir, $msd(G) = 1$.

En el capítulo 2 calculamos el número de subdivisión de algunas gráficas, veamos que ocurre con esas mismas gráficas respecto al número de multisubdivisión.

- Sabemos que $sd_\gamma(K_n) = 1$, entonces, por la observación anterior tenemos que $msd(K_n) = 1$.
- Notemos que en un ciclo C_n o una trayectoria P_n , subdividir una vez cierto número de aristas resulta en una gráfica isomorfa a la que se obtiene de multisubdividir una arista con ese mismo número de vértices. Por lo tanto:

$$sd_\gamma(P_n) = msd(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}; \\ 3 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

- Dado que $sd_\gamma(K_{1,t}) = 1$, entonces $msd(K_{1,t}) = 1$.
- Sabemos que $\gamma(K_{m,n}) = 2$. Si subdividimos una arista uv , con el vértice de subdivisión x entonces el número de dominación no aumenta, pues $D = \{u, v\}$ es un conjunto dominante. Si multisubdividimos uv con los vértices de subdivisión x, y entonces el número de dominación tampoco aumenta, pues $D = \{u, v\}$ es un conjunto dominante. Pero si multisubdividimos una arista uv con los vértices de subdivisión x, y, z entonces necesitamos $D = \{u, y, z\}$ para dominar a todos los vértices. Por lo tanto, $msd(K_{m,n}) = 3$.

Sabemos que en general, para una gráfica G no es cierto que $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$ y en realidad sabemos que el número de subdivisión de una gráfica G no se puede acotar superiormente. En [Top13], Dettlaff, Raczek y Topp demostraron que para

toda gráfica G , $1 \leq msd(G) \leq 3$. De aquí, existe una gráfica G tal que $msd(G) \leq sd_\gamma(G)$. Sin embargo, en el capítulo 2 encontramos que $sd_\gamma(K_{m,n}) = 2$ y en la sección anterior vimos que $msd(K_{m,n}) = 3$. Es decir, hemos encontrado una gráfica G tal que $sd_\gamma(G) < msd(G)$. De lo anterior podemos concluir que en general estos dos parámetros son incomparables entre sí.

5.2. ¿Y para árboles?

En el capítulo 3 demostramos que para todo árbol T se tiene que $1 \leq sd_\gamma(T) \leq 3$ y ahora sabemos que para toda gráfica G y en particular para todo árbol T , $1 \leq msd(T) \leq 3$. Es natural preguntarse cuando ocurre que $sd_\gamma(T) = msd(T)$.

Dado que $sd_\gamma(T) = 1$ si y sólo si $msd(T) = 1$, podemos decir que los árboles de clase 1 respecto al número de subdivisión también son árboles de clase 1 respecto al número de multisubdivisión.

Ahora, basta preguntarnos si existe un árbol T tal que $sd_\gamma(T) = 2$ y $msd(T) = 3$ o $sd_\gamma(T) = 3$ y $msd(T) = 2$.

En el capítulo 3 estudiamos la familia \mathcal{F} dada en [Fav09] por Aram, Sheikholeslami y Favaron, y vimos en el Teorema 3.6 que un árbol T es de clase 3 si y sólo si T pertenece a dicha familia. Resulta que en [Top13], Dettlaff, Raczek y Topp demuestran que si tomamos esa misma familia \mathcal{F} , se tiene que, para un árbol T , $msd(T) = 3$ si y sólo si $T \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, para todo árbol T , $sd_\gamma(T) = msd(T)$.

De esta forma podemos saber cuando un árbol es de clase 1, 2 o 3 respecto a estos dos parámetros. Es decir,

¡tenemos una caracterización completa para árboles respecto al número de subdivisión y multisubdivisión!

BIBLIOGRAFÍA

- [Aru11] S. Velammal, S. Arumugam. Domination and subdivision in graphs. *Indian Journal of Applied Research*, 1(3), 2011.
- [Fav09] H. Aram, S.M. Sheikholeslami, O. Favaron. Domination subdivision numbers of trees. *Discrete Mathematics*, 309:622–628, 2009.
- [Hed04] O. Favaron, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi. Domination subdivision numbers in graphs. *Utilitas Mathematica.*, 66:195–209, 2004.
- [Mer01] T.W. Haynes, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, D.P. Jacobs, J.Kniseli, L. Van Der Merwe. Domination subdivision numbers. *Discussiones Mathematicae. Graph Theory*, 21:239–253, 2001.
- [Mur76] J. A. Bondy, U.S.R. Murty. *Graph Theory With Applications*. Elsevier Science Ltd/North-Holland, junio 1976.
- [Myn08] S. Benecke, C.M. Mynhardt. Trees with domination subdivision number one. *Australasian Journal of Combinatorics*, 42:201–209, 2008.
- [She08a] H. Karami, S.M. Sheikholeslami. Trees whose domination subdivision number is one. *Australasian Journal of Combinatorics*, 40:161–166, 2008.
- [She08b] O. Favaron, H. Karami, S.M. Sheikholeslami. Disproof of a conjecture on the subdivision domination number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 24:309–312, 2008.
- [Sla98] T. Haynes, S. Hedetniemi, P. Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*. Marcel Dekker, Nueva York, 1998.
- [Top13] M. Dettlaff, J. Raczek, J. Topp. Domination subdivision and domination multisubdivision numbers of graphs. *math.CO*, 1(arXiv:1310.1345), oct 2013.
- [Vij02] A. Bhattacharya, G.R. Vijayakumar. Effect of edge subdivision on vertex-domination in a graph. *Discussiones Mathematicae*, 22:335–347, 2002.