



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Manipulador redundante plano
3-(PR)RR de configuración
triángulo-estrella, cinemática
diferencial y singularidades**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Mecatrónico

P R E S E N T A

Bruno Rodríguez Carrillo

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Víctor Javier González Villela



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Patricio Martínez Zamudio por su ayuda como co-director de este trabajo
Agradezco a la DGAPA por la ayuda a través del proyecto *UNAM – DGAPA – PAPIIT*
IN118117

Índice general

Resumen	5
1. Teoría	6
1.1. Conceptos	6
1.2. Manipuladores paralelos	6
1.3. Redundancia	7
1.4. Análisis de singularidades	10
1.5. Terminología	12
2. Revisión de la literatura	14
2.1. Introducción	14
2.2. Resolución cinemática inversa	14
2.2.1. Resolución de la redundancia a nivel velocidad	15
2.2.2. Solución a nivel posición	16
2.3. Redundancia de actuación	16
2.4. Redundancia cinemática	18
2.5. Conclusiones	24
3. Manipulador 3-PRRR	26
3.1. Características del manipulador	26
3.2. Modelado cinemático	28
3.2.1. Matrices de transformación homogéneas	29
3.2.2. Ecuaciones de posición	30
3.2.3. Ecuaciones de velocidad	31
3.2.4. Restricciones cinemáticas diferenciales por cadena	32
3.3. Solución del sistema MIMO	37
3.3.1. Solución 1	38
3.3.2. Solución 2	40
3.3.3. Solución 3	41
3.3.4. Solución 4	43

4. Análisis de resultados	46
4.1. Singularidades en la literatura	46
4.1.1. Singularidades de la cinemática directa	47
4.1.2. Singularidades de la cinemática inversa	47
4.1.3. Singularidades combinadas (complejas)	48
4.2. Singularidades en el presente trabajo	48
4.3. Resultados solución 1	49
4.4. Resultados solución 2	50
4.5. Resultados solución 3	51
4.6. Resultados solución 4	52
5. Discusión y conclusiones	55
Referencias	57

Resumen

Los manipuladores paralelos redundantes tienen grandes ventajas sobre los no redundantes. Algunas de éstas son mayor espacio de trabajo alcanzable, mejor distribución de esfuerzos a través de las cadenas que componen el mecanismo y posibilidad de evadir configuraciones singulares o, incluso, en determinados casos, eliminarlas por completo.

Los objetivos principales de este trabajo son obtener el modelo cinemático diferencial del manipulador paralelo plano redundante configuración triángulo-estrella 3-PRRR y, a partir de éste, encontrar las configuraciones para las cuales el mismo manipulador pierde o gana grados de libertad, es decir, singularidades del mecanismo. Lo anterior para hallar todas estas configuraciones e indicar de qué dependen.

De la misma manera, el estudio realizado está centrado en la configuración antes mencionada, pero la metodología utilizada es aplicable para cualquier configuración de manipulador.

Por otra parte, la metodología seguida es la siguiente. Primero se obtiene el modelo cinemático diferencial del mecanismo, el cual se expresa de una forma diferente a lo encontrado en la literatura e, igualmente importante, se proporciona una solución única al problema cinemático inverso de un manipulador redundante por medio de la ampliación del vector de entradas al sistema, presentando la solución en función de dichas variables. En segundo lugar, a partir de la solución al problema inverso, se llega a los valores para los cuales el manipulador se encuentra en una configuración singular y se da una interpretación geométrica para cada una de éstas.

Los resultados muestran que las singularidades dependen de vector de entradas y salidas. Del mismo modo, se proporciona la razón por la que todas las configuraciones singulares del manipulador 3-PRRR son evitables, reafirmando una de las ventajas de la redundancia.

Capítulo 1

Teoría

1.1. Conceptos

La robótica es la unión de varias ramas del conocimiento -matemáticas e ingeniería- que se encarga del estudio de todo lo relacionado con robots o manipuladores.

El término robot fue propuesto por primera vez por el escritor checo Karel Capek en 1920. Actualmente existen muchas definiciones de qué es un robot y esto siempre conduce a discrepancias. Para evitar lo anterior, se tomará la definición de la RIA (Robot Institute of America): *un robot es un manipulador multifuncional programable diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivo específicos a través de movimientos variados y programados para la realización de una gran variedad de tareas.* (Pandilov y Dukovski, 2014)

Un robot está constituido, fundamentalmente, por eslabones unidos por juntas -éstas pueden ser prismáticas, rotacionales, entre otras-, un efector final y un sistema de control -hardware y software- que se encarga de supervisar que la tarea que realiza el robot es la deseada.

Los robots pueden ser clasificados con base en diversos criterios, como: grados de libertad, estructura cinemática, tipo de control, geometría del espacio de trabajo o características de su movimiento. Dentro de la clasificación por estructura cinemática, se dice que un robot o manipulador es serial si su estructura cinemática toma la forma de una cadena abierta; se llama manipulador paralelo si toma forma de una cadena cerrada. Un manipulador híbrido consiste en cadenas abiertas y cerradas trabajando conjuntamente. (Pandilov y Dukovski, 2014)

Es importante mencionar que las palabras manipulador y robot se usarán indistintamente en este trabajo.

1.2. Manipuladores paralelos

Un robot paralelo está compuesto por dos o más cadenas cinemáticas cerradas, en las cuales el efector final está conectado a una la base fija por medio de al menos dos cadenas cinemáticas independientes. Entre la base o plataforma fija existen cadenas seriales. Los manipuladores paralelos tienen diversas aplicaciones, como simuladores de aviones, centros de mecanizado, entre otras. (Pandilov y Dukovski, 2014)

En general, un manipulador paralelo con d grados de libertad está constituido por d cadenas cinemáticas que están conectadas a la base fija y a la base móvil. Generalmente, pero no siempre, se considera que todas las cadenas cinemáticas son idénticas. (Merlet, 1996)

Los manipuladores paralelos pueden ser divididos en dos grupos: manipuladores paralelos no redundantes y manipuladores paralelos redundantes. Se dice que un manipulador es redundante cuando tiene más grados de libertad de los necesarios para llevar a cabo una tarea.

Los manipuladores paralelos se clasifican a su vez en planos y espaciales con base en las características de su movimiento. Los manipuladores paralelos planos realizan un movimiento, comúnmente, a lo largo de los ejes x y y , y rotan alrededor del eje z . (Pandilov y Dukovski, 2014). Lo anterior puede generalizarse si se considera que el manipulador se mueve en un plano Π y gira sobre un eje perpendicular a dicho plano.

En la literatura han sido propuestas algunas configuraciones para manipuladores paralelos redundantes, entre éstas se encuentra el manipulador paralelo plano con redundancia cinemática configuración triángulo-estrella 3-PRRR, el cual fue propuesto por (Ebrahimi y cols., 2007) y será objeto de estudio en este trabajo.

1.3. Redundancia

En (Merlet, 2006) se definen tres tipos de redundancia para robots paralelos, pero en este trabajo se considera que solo hay dos tipos de redundancia, a saber, redundancia de actuación -(Merlet, 2006) define redundancia de actuación y de medición o sensado de forma separada- y redundancia cinemática.

En (Luces y cols., 2017) se propone que existen dos tipos de redundancia para mecanismos paralelos: redundancia cinemática y redundancia de actuación.

- La redundancia cinemática se presenta cuando se agregan grados de libertad a cadenas existentes del manipulador, esto aumenta su movilidad. Investigaciones han demostrado que este tipo de redundancia aumenta el espacio de trabajo del manipulador, la destreza del mismo y ayuda a evitar configuraciones singulares (Luces y cols., 2017)
- La redundancia de actuación es aquélla que tiene lugar cuando se remplazan juntas pasivas por activas o cuando se incorporan más cadenas al manipulador, éstas son conocidas como cadenas redundantes, por lo común tienen las mismas arquitecturas que las originales. Este tipo de redundancia es uno de los enfoques más utilizados cuando se busca evitar singularidades, específicamente, aquéllas que ocurren cuando el efector final -o plataforma móvil-puede moverse aun cuando los actuadores están bloqueados (Luces y cols., 2017). Un claro ejemplo de cómo la redundancia de actuación puede eliminar cierto tipo de singularidades se encuentra en (Rakotomanga y Bonev, 2010)

A continuación se presentarán los aspectos generales relacionados con la redundancia. La mayor parte de lo que se presenta ahora se toma de (Fahimi, 2008).

Para un manipulador el espacio de tarea (*task space*, en inglés) es el espacio que define la posición y orientación del efector final. En el caso de un manipulador paralelo plano, por ejemplo, la posición y orientación del efector final pueden ser definidas por dos componentes

de posición y un ángulo de orientación, por lo que el espacio de tarea es de dimensión tres. El espacio de juntas, también llamado espacio de configuración, para un manipulador está compuesto por todas las variables que definen la configuración del manipulador.

Ahora, si definimos la dimensión del espacio de tarea como m y la dimensión del espacio de configuración con n , cuando n es mayor a m se dice que el manipulador es redundante. La diferencia entre los vales n y m se conoce como grado de redundancia, se representa con la letra r y está definido como $r = n - m; r \geq 1$.

Las variables que definen la posición y orientación del efector final con respecto al sistema de referencia fijo se incluyen en un vector. Frecuentemente, dicho vector se representa por la letra \mathbf{x} y su dimensión es $m \times 1$. De igual forma, las variables que definen la configuración del manipulador se reúnen en un vector, representado por la letra \mathbf{q} , con dimensión $n \times 1$.

Con lo anterior en mente, la posición y orientación del efector final dependen de la configuración de las juntas, esto se expresa matemáticamente como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (1.1)$$

Esta relación es conocida como cinemática directa del manipulador. También, las velocidades -lineal y angular- están relacionadas con las velocidades de las juntas. Lo anterior se expresa como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_e(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.2)$$

La expresión 1.2 es conocida como cinemática diferencial del manipulador.

Antes de continuar, la ecuación 1.2 tiene una interesante interpretación matemática. Todas las velocidades posibles de las juntas, $\dot{\mathbf{q}}$, forman un vector de dimensión $n \times 1$, el cual es un subconjunto de \mathbb{R}^n . Asimismo, todas las velocidades posibles -lineales y angulares- del efector final forman un vector, $\dot{\mathbf{x}}$, de dimensión $m \times 1$, que es un subconjunto de \mathbb{R}^m , en los dos casos anteriores, \mathbb{R} es el conjunto de los números reales. Considerando esto, para cualquier valor \mathbf{q} , la matriz jacobiana $\mathbf{J}_e(\mathbf{q})$ puede ser interpretada como una transformación lineal que mapea vectores del espacio \mathbb{R}^n al espacio \mathbb{R}^m .

Al igual que con otras transformaciones lineales, el espacio de entrada \mathbb{R}^n del jacobiano tiene dos importantes subespacios asociados. Estos subespacios se conocen como rango y espacio nulo. El rango del jacobiano es el subespacio de \mathbb{R}^n que es cubierto por la transformación, en este caso, la transformación es $\mathbf{J}_e(\mathbf{q})$. Físicamente lo anterior puede ser interpretado como las velocidades que pueden ser generadas o alcanzadas por el manipulador. El rango de $\mathbf{J}_e(\mathbf{q})$ se denota como $rank(\mathbf{J}_e(\mathbf{q}))$, simplemente $rank(\mathbf{J}_e)$ y es definido como:

$$rank(\mathbf{J}_e) = \{\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{J}_e \dot{\mathbf{q}}\} \quad (1.3)$$

De igual forma, el espacio nulo del jacobiano \mathbf{J}_e es un subconjunto del espacio de entrada \mathbb{R}^n que es mapeado por la matriz jacobiana al vector cero del espacio de salida \mathbb{R}^m . Físicamente estos valores son las velocidades posibles de las juntas que no generan movimiento o velocidad del efector final. El espacio nulo del jacobiano se denota como $\text{Null}(\mathbf{J}_e)$ y se expresa de la siguiente manera:

$$\text{Null}(\mathbf{J}_e) = \{\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{J}_e \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\} \quad (1.4)$$

Lo anterior puede ilustrarse de la siguiente forma:

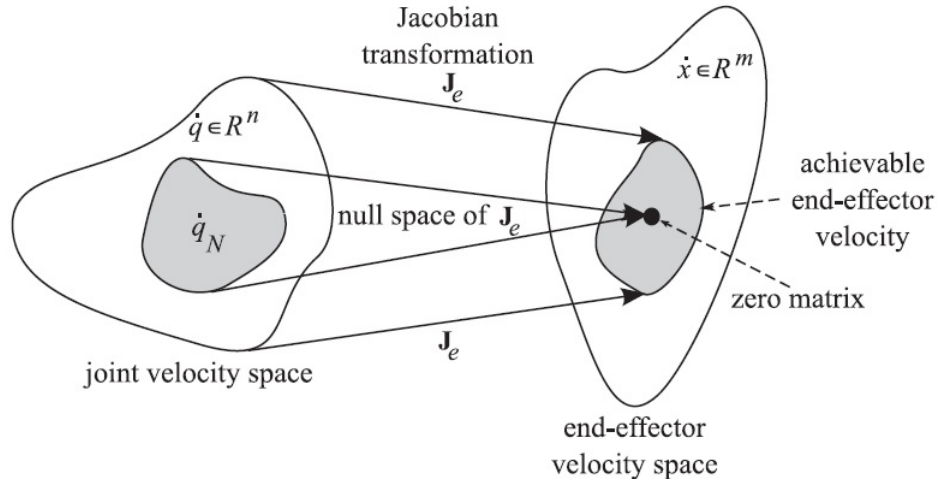


Figura 1.1: Representación del rango y espacio nulo del jacobiano, tomada de (Fahimi, 2008).

La existencia del espacio nulo, como se definió en 1.4, del jacobiano es el principio matemático fundamental para los manipuladores redundantes. Lo anterior implica que las velocidades $\dot{\mathbf{q}}_{\text{Null}}$ o $\dot{\mathbf{q}}_N$ tomadas del espacio nulo $\text{Null}(\mathbf{J}_e)$ no generan velocidad en el efector final. Lo anterior se puede expresar:

$$\mathbf{J}_e \dot{\mathbf{q}}_N = \mathbf{0} \quad (1.5)$$

Debe de quedar claro que a pesar de que las velocidades de $\dot{\mathbf{q}}_N$ no generan movimiento del efector final, generan movimientos internos de las juntas, lo que se traduce en movimientos de las cadenas que forman el manipulador. Por lo tanto, estas velocidades pueden ser utilizadas para satisfacer cualquier requerimiento que el manipulador deba cumplir, por ejemplo, evasión de obstáculos, mientras el efector final está realizando su tarea principal sin perturbar su comportamiento.

Lo anterior puede ser descrito matemáticamente de la siguiente forma. Consideremos una velocidad $\dot{\mathbf{x}}^d$ del efector final que puede ser generada por medio del vector de velocidades de las juntas $\dot{\mathbf{q}}^d$, esto se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{x}}^d = \mathbf{J}_e \dot{\mathbf{q}}^d \quad (1.6)$$

Lo anterior para $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$.

Si ahora se seleccionan velocidades de las juntas que pertenezcan al espacio nulo antes definido, el vector de velocidades queda como $\dot{\mathbf{q}}^d + \alpha \dot{\mathbf{q}}_N$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, lo interesante es que este vector de velocidad aun genera la velocidad deseada debido a:

$$\mathbf{J}_e (\dot{\mathbf{q}}^d + \alpha \dot{\mathbf{q}}_N) = \mathbf{J}_e \dot{\mathbf{q}}^d + \mathbf{0} = \dot{\mathbf{x}}^d$$

La dimensión del espacio nulo, del cual $\dot{\mathbf{q}}_N$ es seleccionado, depende del rango del jacobiano. Si la matriz jacobiana \mathbf{J}_e tiene rango columna completo en una posición \mathbf{q} dada, entonces la dimensión del espacio nulo es igual al grado de redundancia. Por otro lado, si el jacobiano tiene un rango menor a m , digamos m' , entonces la dimensión del espacio nulo es igual a $n - m'$.

El mayor reto cuando se planea resolver la cinemática inversa en un robot con redundancia cinemática es el hecho de que su matriz jacobiana no es cuadrada, por lo que no puede ser invertida por métodos “convencionales”.

1.4. Análisis de singularidades

Uno de los análisis más importantes que deben de realizarse cuando se desea saber el comportamiento de un manipulador es el análisis de singularidades del mismo. Una configuración singular o simplemente singularidad de un manipulador se presenta cuando los grados de libertad del sistema -o mecanismo- cambian instantáneamente -aumentan o se reducen-, lo cual, evidentemente, es indeseable.

En (Gosselin y Angeles, 1990) se presenta un estudio detallado de la clasificación de las singularidades para cadenas cerradas, éstas se dividen dentro de tres grupos principales. Se sabe que la relación entre las variables de entrada y salida de un manipulador está dada por la siguiente ecuación, tomada de (Gosselin y Angeles, 1990) y modificando la notación:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

Derivando respecto al tiempo se llega a:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}; \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}}$$

Las singularidades ocurren cuando la matriz \mathbf{A} o \mathbf{B} son singularidades -el determinante es cero-, lo que quiere decir que éstas pierden rango.

El primer tipo de singularidad se presenta cuando el determinante de \mathbf{B} es cero, son conocidas como singularidades de la cinemática inversa. Cuando se presenta este caso, la nulidad de \mathbf{B} es distinta de cero -la dimensión de su espacio nulo-, lo cual significa físicamente que existen valores de las juntas motorizadas para los cuales no hay movimiento del efector final. En tales configuraciones el efector final del robot pierde uno o más grados de libertad. (Gosselin y Angeles, 1990)

El segundo tipo de singularidad se presenta cuando el determinante de \mathbf{A} es cero, son conocidas como singularidades de la cinemática directa. Estas configuraciones son aquéllas en las cuales el efector final se puede mover cuando las variables motorizadas son cero. De forma similar a como se dijo anteriormente, cuando se presenta este caso, la nulidad de \mathbf{A} es distinta de cero -la dimensión de su espacio nulo-, lo cual significa físicamente que existen valores

de velocidad del efector final que pueden ser generados cuando las variables de entrada son cero. En tales configuraciones el efector final del robot gana uno o más grados de libertad. (Gosselin y Angeles, 1990)

El tercer tipo de singularidad tiene lugar cuando el determinante de la matriz \mathbf{A} y \mathbf{B} son cero. En este tipo de configuraciones tienen como significado físico que el manipulador aún puede moverse cuando los actuadores están bloqueados o que el manipulador no se mueve cuando las variables de entrada son cero. (Gosselin y Angeles, 1990)

Lo anterior es aplicable para robots paralelos no redundantes. Por otra parte, para manipuladores redundantes se tiene, como se sabe, más entradas que salidas, por lo que el jacobiano de la cinemática inversa es rectangular. En este caso, (Merlet, 1996) propone que dicho jacobiano se multiplique por su transpuesta, resultando una matriz cuadrada; a partir de aquí el análisis se hace igual que para los manipuladores no redundantes.

Un análisis de singularidades para cadenas cerradas más general -incluyen manipuladores redundantes- se puede encontrar en (Park y Kim, 1999).

Por otra parte, el análisis que presenta (Park y Kim, 1999) está basado en geometría diferencial y las ventajas sobre el propuesto por (Gosselin y Angeles, 1990) son *i*) independencia de la parametrización de coordenadas, *ii*) independencia de la formulación de las restricciones para las ecuaciones cinemáticas y *iii*) incluye la información de los actuadores. En otras palabras, este enfoque es más general.

(Park y Kim, 1999) presenta tres tipos de singularidades, a saber:

- *Singularidades del espacio de configuración.* Ocurren en puntos de la variedad del espacio de configuración donde el espacio tangente al mismo no está definido, en otras palabras, el rango del espacio de configuración cambia
- *Singularidades de actuador.* Tiene lugar cuando el espacio de juntas pierde rango
- *Singularidades del efector final.* Esta singularidad se presenta cuando el jacobiano de la cinemática directa pierde rango. Físicamente, esto corresponde con la misma idea de singularidades cinemática de manipuladores seriales, donde el efector final pierde uno o más grados de libertad instantáneamente

Con esto en mente, (Liao y cols., 2004) presenta un enfoque diferente al de (Merlet, 1996) para identificar las singularidades de manipuladores paralelos redundantes.

Afirma que el método propuesto por (Merlet, 1996) sirve para encontrar parte de las singularidades para un manipulador redundante.

Dicho enfoque se hace con base en la descomposición en valores singulares (SVD, en inglés) de la matriz jacobiana -recordar que es una matriz rectangular- para analizar las ecuaciones de velocidad, y las relaciones entre velocidades de entrada generalizadas y las velocidades de salida generalizadas.

Como parte de sus conclusiones propone que las singularidades del manipulador están relacionadas con las dimensiones del espacio de velocidades de las juntas y la dimensión del espacio de velocidades del efector final. Presenta tres tipos de singularidades:

- Singularidades de actuador, se presentan cuando:

$$\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) = 0 \quad (1.9)$$

- Singularidades del efector final, se presentan cuando:

$$\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

- Singularidades complejas, se presentan cuando:

$$\text{tr}(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

Para las ecuaciones 1.9, 1.10 y 1.11 la matriz jacobiana \mathbf{J} es la relaciona lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}}$$

(Liao y cols., 2004) concluye que su método es aplicable para todo tipo de manipuladores redundantes, sin importar que éstos sean seriales o paralelos. Sin embargo, su análisis necesita la expresión $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{x}}$, donde resulta complicado obtener \mathbf{J} para manipuladores con estructura más compleja al presentado en este artículo.

1.5. Terminología

En (Müller, 2013) se presenta la terminología general para robots paralelos redundantes, la cual está basada en el espacio de configuración del manipulador. Lo anterior, lo define de la siguiente manera:

$$W \xleftarrow{f_O} V \xrightarrow{f_I} I \quad (1.12)$$

W representa el espacio de trabajo, V es el espacio de configuración de dimensión n y I es el espacio de entrada.

Las restricciones cinemáticas las define de la siguiente manera:

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.13)$$

Donde $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ es el jacobiano de restricciones cinemáticas. De igual forma, $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ puede escribirse en forma separada de la siguiente forma:

$$\mathbf{0} = \mathbf{J}_p(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_p + \mathbf{J}_a(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}_a \quad (1.14)$$

Donde los subíndices indican junta pasiva p y junta activa a .

La expresión (1.12) indica que el espacio de trabajo W es caracterizado por la función f_O , llamada mapeo de salida. Esto genera el espacio de configuración del efector final como función del espacio de configuración \mathbf{q} .

Con esto en mente, la velocidad del efector final \mathbf{V} está representada como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (1.15)$$

Siendo $\mathbf{J}_O(\mathbf{q})$ el jacobiano de salida.

Por otra parte, el movimiento del manipulador está en función de las entradas de los actuadores, lo anterior está expresado en (1.13) como un mapeo de entrada f_I , éste asigna a cada configuración del manipulador las entradas admisibles. Esta relación no es única porque para la misma configuración del manipulador pueden existir distintas entradas.

Entre las muchas definiciones que presenta, define las configuraciones singulares de cualquier manipulador redundante dentro de tres grandes grupos:

1. Singularidades del espacio de configuración
2. Singularidades de entrada, cuando los rangos de $\mathbf{J}_p(\mathbf{q})$ y $\mathbf{J}_a(\mathbf{q})$ no son constantes
3. Singularidades de salida, cuando el rango de la matriz $\mathbf{J}_O(\mathbf{q})$ no es constante

Las singularidades del espacio de configuración son más complejas de interpretar. Los grados de libertad instantáneos o grados de libertad diferenciales de un mecanismo están definidos como $\delta_{diff} := n - \text{rank}\mathbf{J}(\mathbf{q})$. Dada una configuración $\mathbf{q} \in V$, ésta es regular si y solo si pertenece a una subvariedad de V , es decir, existe una vecindad $U(\mathbf{q})$ tal que δ_{diff} es constante en $U(\mathbf{q}) \cap V$, de otra forma dicha configuración se conoce como singular.

Todo lo referente a esta sección ha sido íntegramente tomado de (Müller, 2013), para explicaciones más detalladas, revisar dicha fuente.

En el presente trabajo se pretende encontrar todas las singularidades de un manipulador paralelo plano con redundancia cinemática por medio de cinemática diferencial.

Capítulo 2

Revisión de la literatura

2.1. Introducción

En la literatura se encuentran diversos estudios que involucran manipuladores paralelos planos redundantes, en todos éstos se hace hincapié, y coinciden, en cuanto a las ventajas de los manipuladores redundantes sobre los no redundantes, algunas de éstas son mayor espacio de trabajo y la reducción o eliminación de configuraciones singulares. Sin embargo, controlar este tipo de manipuladores se vuelve una tarea compleja, en general, porque se tienen más variables actuadas que salidas -posición y orientación del efector final-.

Antes de mostrar algunos de los artículos encontrados en la literatura, es conveniente presentar un panorama general de cómo se analiza un manipulador redundante y cuáles son los retos cuando se quiere resolver el problema cinemático inverso.

Para tal fin la siguiente sección introduce algunos de los enfoques para el problema inverso en un manipulador redundante, para mayor y más detallada información, véanse fuentes citadas.

2.2. Resolución cinemática inversa

La cinemática directa de cualquier manipulador establece la relación entre las entradas o variables actuadas con las salidas, por lo general, la salida es posición y orientación del efector final, aunque esto no es necesario. En otras palabras, determina el conjunto de salida dada una entrada. La mayoría de las ocasiones, la anterior relación se expresa como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{q}} \quad (2.1)$$

Por otra parte, la cinemática inversa determina los valores de las variables de entrada para producir una determinada salida. Es común encontrar dicha relación como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{x}} \quad (2.2)$$

En las ecuaciones anteriores -basándonos en la notación de la ecuación (1.8)-, se tiene: $\mathbf{J}_x = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ y $\mathbf{J}_q = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.

El mayor reto cuando se presenta al resolver la cinemática inversa de un robot con redundancia es el hecho de que su matriz jacobiana \mathbf{B} no es cuadrada, por lo que no puede ser invertida por métodos convencionales, en otras palabras, la obtención de la ecuación 2.2 es compleja.

Por esta razón diversos métodos y enfoques han sido propuestos para resolver el problema cinemático inverso de un manipulador redundante.

Retomando lo que se comentó en el capítulo anterior, debido a que la elección de las velocidades que pertenecen al espacio nulo no es única, existen muchas formas en la que una determinada tarea $\dot{\mathbf{x}}^d$ puede ser llevada a cabo. En otras palabras, hay infinitas soluciones al problema de la cinemática inversa para un manipulador redundante. Estas soluciones pueden ser utilizadas dependiendo de la aplicación o requerimientos del usuario, por lo que se pueden definir restricciones adicionales. En general, existen dos enfoques para lograr un desempeño óptimo al momento definir restricciones adicionales: global y local. Los enfoques globales logran un rendimiento óptimo a lo largo de una trayectoria, lo cual asegura un mejor rendimiento sobre los enfoques locales. Sin embargo, su cómputo los hace inapropiados para sistemas de control en tiempo real. Por lo tanto, la mayoría de los métodos están pensados para soluciones de forma local, los cuales presentan soluciones óptimas. (Fahimi, 2008)

A partir de aquí, cuando se mencione que el jacobiano no puede ser invertido, siempre se hará referencia a la matriz, rectangular para manipuladores redundantes, \mathbf{J}_q de la ecuación (2.2).

2.2.1. Resolución de la redundancia a nivel velocidad

Comúnmente en aplicaciones reales, la trayectoria deseada (posición y orientación) del efector final es la tarea principal que debe de realizar el manipulador. Para control del manipulador, sin embargo, el valor de las juntas es requeridas. Por consiguiente, la solución al problema inverso comúnmente llamada solución de la redundancia es necesaria. Como primer paso de la solución de la redundancia, la solución es hecha a nivel de velocidad, esto es, se calculan las velocidades de las juntas activas que generan cierta velocidad del efector final.

Se debe tener en cuenta que la resolución de la redundancia para un manipulador redundante no es trivial. Debido a la redundancia, siempre hay más variables desconocidas que ecuaciones del sistema. Existen herramientas matemáticas que permiten obtener la solución del problema cinemático inverso a nivel velocidad, éstos se clasifican en métodos exactos y aproximados.

Dentro de los métodos exactos se encuentran:

- Métodos basados en el cálculo de la matriz pseudo-inversa
- Métodos basados en el cálculo del jacobiano extendido

Los métodos de solución aproximados son:

- Método de evasión de singularidades
- Método de control de configuración

2.2.2. Solución a nivel posición

Los métodos descritos anteriormente no son capaces de proporcionar un conjunto de valores de las juntas para que el manipulador llegue a una posición deseada. Para lograr esto, las velocidades obtenidas en el problema cinemático inverso deben de integrarse.

Debido a que el problema debe de resolverse integrando los valores de velocidad de las juntas, es necesaria una condición inicial, la cual representa una postura inicial del manipulador desde la cual el movimiento hacia la posición final comienza.

Se debe de considerar un camino o trayectoria dentro del espacio de trabajo del manipulador. Dicha trayectoria comienza desde un punto inicial -condición inicial- \mathbf{x}^1 hacia su posición final \mathbf{x}^d . La trayectoria más simple para unir estos dos puntos es una línea recta.

Para llevar a cabo dicha integración es necesario el uso de algún método numérico que ayude con tal objetivo. Para una mayor explicación de los métodos anteriores y ejemplos, véase (Fahimi, 2008)

Por otra parte, para los robots paralelos planos se tiene mucha información de las configuraciones singulares, para los manipuladores redundantes no es así. En (Bonev, 2002) se hace un estudio profundo de las singularidades de todos los manipuladores paralelos planos no redundantes; se incluyen interpretaciones geométricas de cada tipo de singularidad. Podría decirse que el trabajo mencionado es la síntesis de las singularidades de todos los manipuladores no redundantes planos de configuración 3-XXX, donde X puede ser una junta prismática (P) o una junta rotacional (R).

2.3. Redundancia de actuación

A continuación se muestran algunos de los avances dentro del análisis de manipuladores paralelos planos con redundancia de actuación.

En (Rakotomanga y Bonev, 2010) se muestra un claro ejemplo de cómo los robots redundantes puede servir para evitar las configuraciones singularidades. Presenta un robot no redundante 3-RPR y la eliminación de las singularidades de la cinemática directa -cuando la plataforma móvil pierde su rigidez- por la adición de una cadena redundante del mismo tipo RPR, pasando a ser un robot 4-RPR.

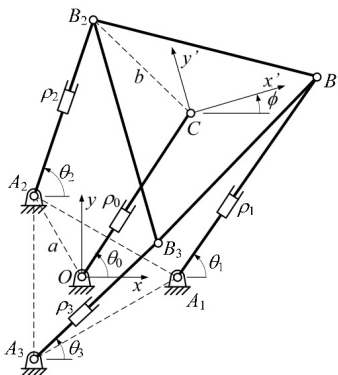


Figura 2.1: Manipulador propuesto en (Rakotomanga y Bonev, 2010).

Lo más interesante de este trabajo es cómo posicionando en determinada forma las cadenas que forman el manipulador puede eliminar un cierto tipo de singularidad. Para la eliminación de las singularidades antes mencionadas, los puntos A_i debe de formar un triángulo equilátero, lo mismo que los puntos B_i , la cadena cinemática extra une los circuncentros de los triángulos A_i y B_i . Debe de cumplirse $b > a$ para la evasión de singularidades de la cinemática directa. El análisis de singularidades lo realiza desde el punto de vista de (Tsai, 1999) o (Gosselin y Angeles, 1990).

En (Liao y cols., 2004) además de proponer otra forma de obtención de las singularidades de una manipulador redundante, como se mencionó en el capítulo 1, aplica su método a un robot redundante de tres grados de libertad y demuestra la aplicación de su enfoque para encontrar todas las singularidades del manipulador.

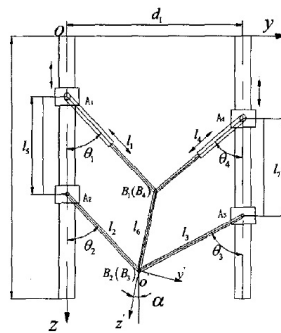


Figura 2.2: Manipulador analizado en (Liao y cols., 2004).

En (Wang y cols., 2009) se analiza el mismo manipulador que en (Liao y cols., 2004), solo que en éste se agrega el análisis del espacio de trabajo del manipulador redundante y muestra que es mayor que aquél no redundante. Presenta los mismos casos de singularidades, concluye que éstas son similares a las de su contraparte no redundante.

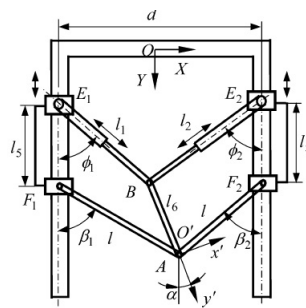


Figura 2.3: Manipulador analizado en (Wang y cols., 2009).

Como se observa en las figuras 2.2 y 2.3 los manipuladores analizados son prácticamente iguales.

En (Firmani y cols., 2008) se presenta un estudio basado en la teoría del *screw*, específicamente en la teoría del *wrench*, donde, a grados rasgos, compara el desempeño dinámico del manipulador 3-RRR con el robot redundante 3-RRR y el robot 4-RRR, ver la fuente citada para más información.

2.4. Redundancia cinemática

Dentro del análisis de los manipuladores con redundancia cinemática encontramos los siguientes trabajos.

(Cha y cols., 2009) propone un algoritmo para determinar el rango de valores de las juntas redundantes prismáticas para generar trayectorias libres de singularidades. Dicho método se prueba exitosamente con simulaciones y, en propias palabras del autor, puede ser una guía para el diseño de robots paralelos planos con redundancia cinemática. Se basa en un criterio de optimización para evitar las singularidades donde la plataforma puede moverse aun cuando los actuadores no generan velocidad, es decir, las singularidades de la cinemática directa. Dicho algoritmo lo prueba en dos manipuladores, $3\text{-}\underline{R}\underline{P}\underline{R}\underline{R}$ y $3\text{-}\underline{R}\underline{P}\underline{R}\underline{P}\underline{R}$.

En (Santos y cols., 2013) se compara el espacio de trabajo, ubicación y comportamiento de las singularidades, y los torques necesarios en las juntas activas del manipulador paralelo plano no redundante $3\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$ con los robots redundantes $1\text{-}\underline{P}\underline{R}\underline{R}\underline{R} + 2\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$, $2\text{-}\underline{P}\underline{R}\underline{R}\underline{R} + 1\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$ y $3\text{-}\underline{P}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$; sus análisis parten del modelo cinemático del manipulador para evaluarlos numéricamente por computadora. El análisis cinemático de los manipuladores se hace presentando dos matrices jacobianas, la directa y la inversa, como lo hace Tsai. No se enfoca a encontrar singularidades.

Dentro de sus conclusiones dice que la inclusión de actuadores redundantes origina que se tenga una reducción del torque máximo requerido para seguir una trayectoria definida, el menor torque corresponde al manipulador $3\text{-}\underline{P}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$. Por lo que refuerza la idea acerca de que la redundancia cinemática mejora el rendimiento de un manipulador, incluyendo el comportamiento dinámico.

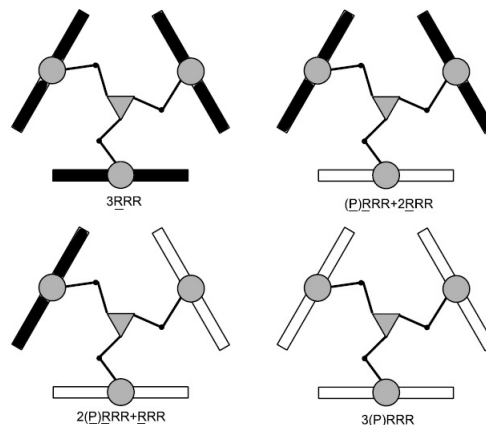


Figura 2.4: Manipuladores analizados en (Santos y cols., 2013).

En (Fontes y cols., 2014) se hace un análisis dinámico de los mismos manipuladores que se presentan en (Santos y cols., 2013), para más información visitar estas referencias.

Este artículo, (Kotlarski y cols., 2011), uno de los más interesantes, compara el desempeño del manipulador redundante $3\text{-}\underline{P}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$ con su contraparte no redundante. Su objetivo es demostrar de forma práctica algunas de las características que hacen a los manipuladores redundantes mejores que los no redundantes, para ese fin, las pruebas son llevadas a cabo en un prototipo del manipulador antes mencionado.

Su análisis está enfocado en la optimización del actuador prismático redundante para la evasión de singularidades y, precisión y exactitud en el desempeño del efector final. Resulta muy interesante que no utiliza modelos cinemáticos durante su análisis, porque todos sus resultados están basados en la información de los encoders de las articulaciones del manipulador y un dispositivo de medición externo al manipulador.

Dentro del análisis de reconfiguración del manipulador, señala que en la práctica alcanzar un espacio nulo tal y como está definido en la teoría es imposible de alcanzar, esto es, no se puede mantener al efector realizando una tarea específica mientras los eslabones están cambiando su configuración. Lo anterior se debe a la presencia natural de errores en los instrumentos de medición o en los errores de control. Este trabajo demuestra algunas de las ventajas de la redundancia cinemática.

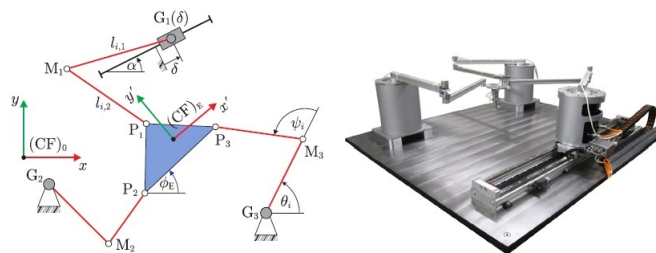


Figura 2.5: Manipulador y su prototipo analizado en (Kotlarski y cols., 2011).

(Chen y cols., 2009) propone una nueva arquitectura de robot paralelo plano con redundancia cinemática basado en el conocido manipulador 3-RRR; sustituye las cadenas de éste por cadenas redundantes paralelas, ver figura 2.6. Es interesante que agregue tres plataformas -además de la que ya posee- para utilizar la orientación de éstas como parte del vector que define la posición y orientación del efector final para determinar el valor de las variables de entrada. Ahora se tienen seis datos que pueden ser definidos arbitrariamente. Esto quiere decir que el vector de salida es ampliado. Con lo anterior se logra que el vector de salida y entrada sean de la misma dimensión, lo que obliga al jacobiano a ser cuadrado y, por tanto, invertible.

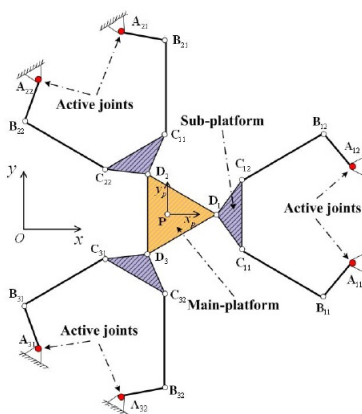


Figura 2.6: Manipulador redundante expuesto en (Chen y cols., 2009).

Sus resultados muestran que el manipulador presentado alcanza una mayor precisión de las

variables de salida, si se compara con su contraparte no redundante y los manipuladores redundantes que ha sido propuestos en la literatura con cadenas seriales.

En (Pechev, 2008) se propone un esquema de control para minimizar el error entre la velocidad de salida -del efector final- y la velocidad de entradas -correspondiente a las variables actuadas-. Hace uso del método de cinemática inversa por retroalimentación de tal forma que no es necesaria la inversión de la matriz jacobiana. Debe señalarse que el controlador propuesto toma en cuenta el espacio nulo del jacobiano. Según figura 2.7.

Prueba sus resultados de forma teórica en un robot plano con tres grados de libertad. Se considera conveniente escribir la ecuación asociada con la figura 2.7:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \dot{\hat{\mathbf{x}}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_o$$

\mathbf{J}^\dagger es la matriz pseudo-inversa de \mathbf{J} y $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$. Aquí \mathbf{J} representa \mathbf{J}_q de la ecuación (2.2).

Esta forma de trabajar tiene la ventaja de que no es necesaria la inversión del jacobiano, por lo que: *i*) es aplicable para manipuladores redundantes y *ii*) tiene un desempeño mejor que aquéllos basados en el cálculo de la matriz pseudo-inversa.

Asimismo, el controlador presentado tiene un buen desempeño cuando el manipulador está cerca de configuraciones singulares, incluso cuando se encuentra en una.

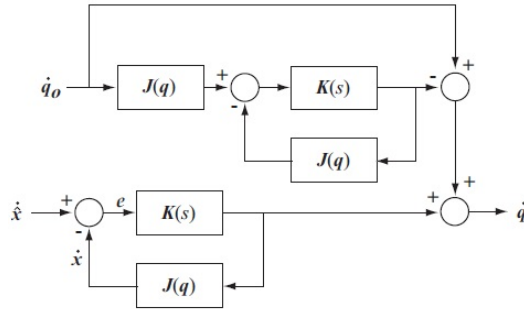


Figura 2.7: Esquema de control propuesto por (Pechev, 2008).

En (Simas y cols., 2012) se presenta un manipulador redundante P3R, equivalente a 1-PRRR, al cual se le imponen restricciones cinemáticas por medio de dos cadenas virtuales, una para imponer una trayectoria al efector final- cadena virtual PPR- y otra para la evasión de un obstáculo dentro del espacio de trabajo del manipulador- cadena virtual RPR, ver figura 2.8. Lo anterior se realiza para hacer que el jacobiano sea una matriz cuadrada y, por lo tanto, invertible.

Sus resultados muestran que, por la introducción de restricciones cinemáticas para evitar colisiones, dos singularidades adicionales se presentan. Aunque éstas tienen lugar debido a que la trayectoria impuesta al efector final no puede llevarse a cabo sin la colisión del manipulador con el obstáculo, en otras palabras, las tareas impuestas por las cadenas virtuales son incompatibles. No obstante, dichas singularidades pueden ser detectadas y evitadas.

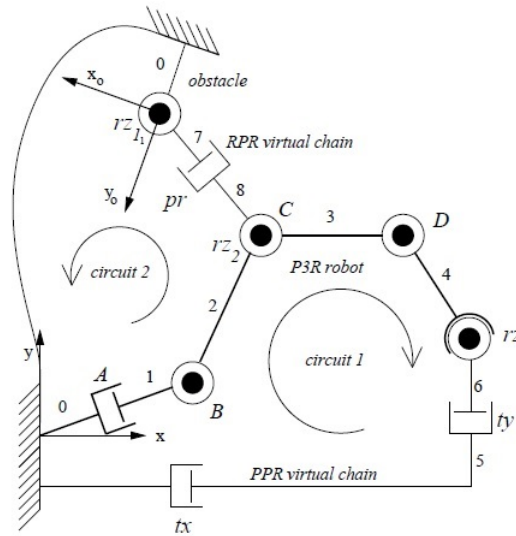


Figura 2.8: Manipulador redundante P3R y sus cadenas virtuales presentado en (Simas y cols., 2012).

Con respecto al análisis de singularidades, éste se lleva a cabo calculando el determinante del jacobiano y averiguando en qué condiciones dicha matriz pierde rango.

La ventaja de este método comparado con método del jacobiano extendido comúnmente usado es que las singularidades pertenecen exclusivamente a las cadenas que forman el manipulador y no algoritmo o método usado.

(Šoch y Lórencz, 2005) utiliza la técnica de ampliación del jacobiano porque ésta es la única forma de evitar el uso de la matriz pseudo-inversa y su inestabilidad en las singularidades del robot, pero su contribución está en que no propone una función objetivo, la cual es la base para extender el jacobiano. En su lugar, manipula la estructura del manipulador en pares de eslabones para controlar las juntas con base en sus características, según muestra la figura. Es decir, el jacobiano se extiende al agregar las características cinemáticas de dichos pares -posición- a la matriz que contiene la cinemática de los eslabones considerados por separado.

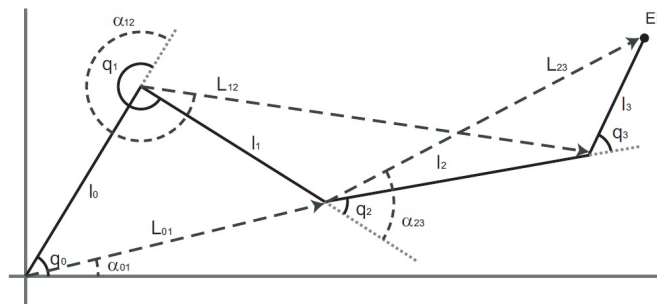


Figura 2.9: Estructura en pares utilizada en el análisis por (Šoch y Lórencz, 2005).

Prueba su método por medio de simulaciones en un manipulador de seis eslabones. Como consecuencia, el método propuesto tiene un mejor desempeño cuando es manipulador se encuentra en una configuración singular, si se compara con el método de la matriz pseudo-

inversa. Finalmente, a forma de comentario, este trabajo está enfocado para animación por computadora de estructuras articuladas en el plano.

En (Ebrahimi y cols., 2008b) se propone el nuevo manipulador redundante 3-RPPP. El análisis de singularidades lo realiza como (Gosselin y Angeles, 1990) lo propone, considerando, además, de la metodología utilizada por (Merlet, 1996) para singularidades de la cinemática inversa en manipuladores redundantes. Ver figura 2.10.

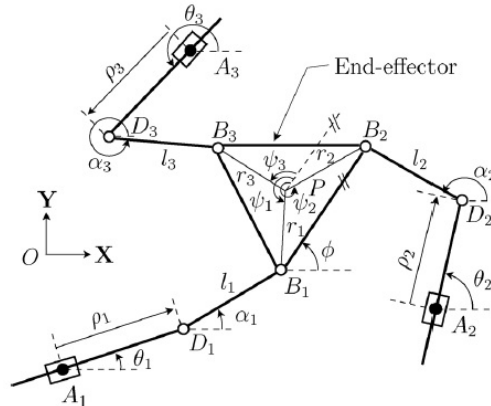


Figura 2.10: Manipulador propuesto por (Ebrahimi y cols., 2008b).

Antes de continuar, debe quedar claro que los manipuladores 3-RPPP y 3-PRPP no se comportan de la misma forma. En el primero, la rotación ocurre primero que la traslación, en el segundo es al contrario.

Muestra que el manipulador puede evitar las singularidades de la cinemática directa eligiendo diferentes soluciones de la cinemática inversa de la ubicación de las soluciones. Asimismo, mientras los valores de los actuadores prismáticos no sean cero, las singularidades de la cinemática inversa pueden ser evitadas.

Por otro lado, obtiene el espacio de trabajo diestro geoméricamente; demuestra que éste es mayor que el del manipulador no redundante.

Para encontrar una solución del conjunto infinito de soluciones al problema inverso, propone un método de optimización basado en la medición geométrica de proximidad a configuraciones singulares. Muestra que las características del manipulador propuesto aumentan considerablemente la capacidad de éste para evitar las singularidades por medio del método de optimización propuesto.

En el artículo (Ebrahimi y cols., 2007) los autores proponen un robot paralelo plano con redundancia cinemática, a saber, el manipulador 3-PRRR configuración triángulo-estrella. Véase figura 2.10.

Compara el espacio de trabajo diestro y alcanzable del manipulador propuesto con su equivalente no redundante; como se esperaba, éstos son mayores en el robot redundante.

Dentro del análisis de singularidades, utiliza el método de Gosselin y Angeles (1990) para *i*) obtener las ecuaciones cinemáticas del manipulador, donde resultan dos matrices jacobianas y *ii*) analizar los tres tipos de singularidades que presenta la referencia antes citada. Además, proporciona interpretaciones geométricas para cada tipo de singularidad y concluye que todas éstas pueden evitarse considerando configuraciones que son libres de singularidades.

Como consecuencia, es posible elegir conjuntos de soluciones que sean libres de singularidades. Por lo tanto, el manipulador puede realizar cualquier tipo de movimiento.

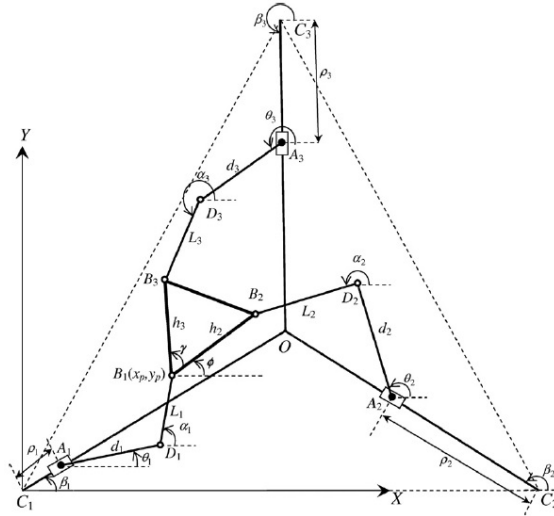


Figura 2.11: Manipulador propuesto por (Ebrahimi y cols., 2007).

(Ebrahimi y cols., 2008a) presenta tres configuraciones diferentes del mismo manipulador redundante 3-PRRR, a saber, las configuraciones presentadas son: delta, triángulo-estrella y circular. Véase figura. Compara el espacio de trabajo diestro y alcanzable de cada configuración con el manipulador no redundante 3-RRR; la configuración circular es alcanza la mayor área de los dos espacios mencionados. Con esta misma idea, la forma por la que se desplazan las juntas prismáticas tiene un gran impacto en los espacios de trabajo.

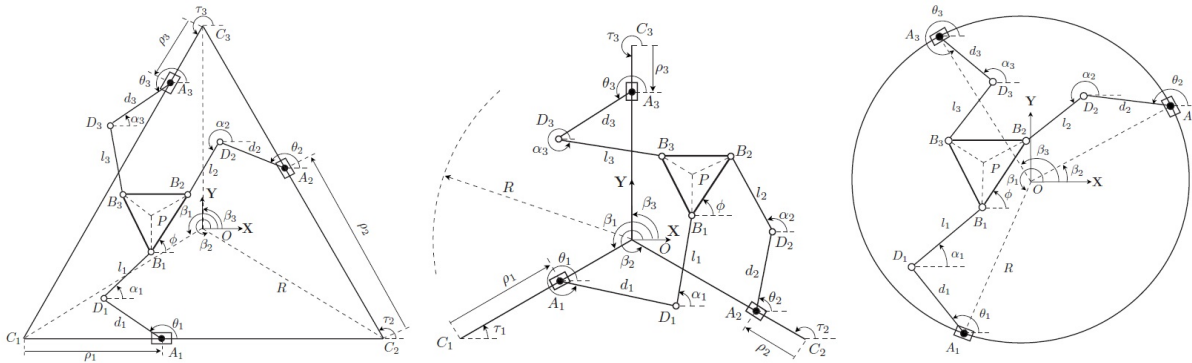


Figura 2.12: Configuración delta, triángulo-estrella y circular del manipulador 3-PRRR, tomada de (Ebrahimi y cols., 2007).

Más adelante, se hace un análisis de singularidades para cada configuración del manipulador redundante y se explica cada una de éstas desde el punto de vista geométrico. Dentro de este análisis, concluye de forma general que las singularidades para todas las configuraciones tienen lugar cuando al menos un eslabón está completamente “estirado” o “doblado” mientras éste es perpendicular a la dirección sobre la que se mueve las juntas prismáticas.

El análisis de singularidades lo realiza utilizando el método de (Gosselin y Angeles, 1990) y (Merlet, 1996).

En (Varalakshmi y Srinivas, 2015) se presenta un método de optimización basado en algoritmos genéticos para determinar el torque mínimo de las variables actuadas del manipulador paralelo plano redundante 3-PRRR configuración triángulo-estrella para seguir una trayectoria, lo anterior en función de la ubicación de las variables actuadas, en específico, las prismáticas. El manipulador redundante tiene un mejor desempeño que su contraparte no redundante.

En (Mohamed y Gosselin, 2005) se presenta un análisis de manipuladores paralelos redundantes con plataformas reconfigurables; utiliza la metodología de los *screws*.

Finalmente, en (Martínez Zamudio, 2015) se presenta un enfoque distinto, por tanto nuevo, para obtener el modelo cinemático de un manipulador paralelo plano no redundante 3-RRR delta y de su cadena 3-RRR virtual.

Sus resultados muestran que se puede controlar el movimiento del manipulador antes mencionado por medio de su cadena virtual, es decir, cuando el efector final de la cadena virtual sigue una trayectoria, el manipulador también sigue la misma. Usa las variables de la cadena virtual como entradas al sistema. La prueba de sus resultados los hace por medio de simulaciones.

Lo más destacado de este trabajo, entre otros aspectos, es su metodología para la resolución del problema cinemático inverso -en general la metodología para el modelado de todo el problema- y que el efector del manipulador puede controlarse por medio de una cadena que no existe. Para más información, véase fuente citada.

En (Martínez-Zamudio y cols., 2015) sigue la misma línea de estudio que en (Martínez Zamudio, 2015). Se analiza el mismo manipulador paralelo plano no redundante 3-RRR delta.

2.5. Conclusiones

Con base en lo que se presentó en este capítulo, podemos decir lo siguiente:

1. La solución problema cinemático inverso-resolución de la redundancia- se ha tratado de resolver, en general, por métodos numéricos, por ejemplo métodos basados en el cálculo de la matriz pseudo-inversa, por lo que, más que un problema involucrado con la robótica, es un problema puramente matemático
2. El problema cinemático inverso puede resolverse con base en qué es lo que se desea, es decir, optimizando torques en las juntas, evitando singulares, entre otros
3. Por lo anterior, existen diversos enfoques para tratar el análisis general de manipuladores paralelos planos redundantes
4. Los manipuladores paralelos planos redundantes tienen ventajas, entre éstas, mayor espacio de trabajo -diestro y alcanzable-, capacidad para evitar configuraciones singulares, mejor comportamiento dinámico, por mencionar algunas

5. Sin embargo, el control de dichos manipuladores es más complicado, en general, porque se tienen más variables independientes que grados de libertad del efector final y existen infinita soluciones de la cinemática inversa
6. El análisis de singularidades se ha realizado con el método de (Gosselin y Angeles, 1990) y Merlet (1996), a excepción de los dos casos presentados anteriormente

En este trabajo se abordará el estudio de las singularidades del manipulador 3-PRRR configuración triángulo-estrella propuesto por (Ebrahimi y cols., 2007) desde el punto de la cinemática diferencial.

Capítulo 3

Manipulador 3-PRRR

3.1. Características del manipulador

Antes de comenzar con la descripción del manipulador, cabe aclarar que en el título del presente trabajo el nombre del manipulador se muestra como 3-(PR)RR. Sin embargo, de aquí en adelante se considera que 3-(PR)RR y 3-PRRR son notaciones equivalentes.

Primero, se llegará al modelo cinemático diferencial del manipulador paralelo plano redundante configuración triángulo-estrella 3-PRRR. Después, a partir de dicho modelo se obtendrán las singularidades del mismo manipulador.

El manipulador se toma de (Ebrahimi y cols., 2008a), pero fue propuesto por primera vez en (Ebrahimi y cols., 2007), se ha cambiado la nomenclatura para adaptarla a este trabajo.

De aquí en adelante se considera que $n = 1, 2, 3$, es decir, representa el número de cadena.

El manipulador 3-PRRR tiene las siguientes características:

1. Es un manipulador paralelo plano con redundancia cinemática
2. Está compuesto por tres cadenas cuyos eslabones tienen las mismas dimensiones
3. Tiene seis grados de libertad, dos por cada cadena
4. Tiene cuatro juntas por cadena; una junta prismática L_{1n} y tres juntas rotacionales θ_{2n} , θ_{3n} y θ_{4n}
5. Está actuado en las juntas L_{1n} y θ_{2n}
6. Las correderas B_n se desplazan sobre los segmentos $\overline{A_n G}$
7. Los puntos A_n de la figura (3.1) son fijos y forman un triángulo equilátero
8. Los puntos D_n de la figura (3.1) forman una plataforma cuya geometría es un triángulo equilátero, aunque la forma puede ser arbitraria
9. El punto G es el circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro del triángulo formado por los puntos A_n , siempre y cuando este último sea equilátero, figura (3.1)

10. Para que la geometría de los puntos A_n sea un triángulo, tomando en cuenta que los segmentos $\overline{A_n G}$ son bisectrices, se debe cumplir que $\angle A_3 A_1 G + \angle G A_2 A_3 + \angle A_2 A_3 G = \frac{\pi}{2}$. En el caso de un triángulo equilátero, $\angle A_3 A_1 G = \angle G A_2 A_3 = \angle A_2 A_3 G = \frac{\pi}{6}$
11. El punto P es el punto cuyo movimiento se quiere analizar respecto al sistema inercial o fijo $\{S_0\}$, figura (3.1)
12. Las variables, por lo tanto, son $\theta_{2n}, \theta_{3n}, \theta_{4n}, L_{1n}$, además de aquéllas que describen el movimiento del efector final, a saber, velocidad lineales y angulares
13. Los valores constantes son las medidas de los eslabones L_{2n}, L_{3n} y L_{4n} , el ángulo θ_{1n} , la ubicación del punto G y las posiciones de los puntos A_n

La siguiente figura muestra al manipulador 3-PRRR:

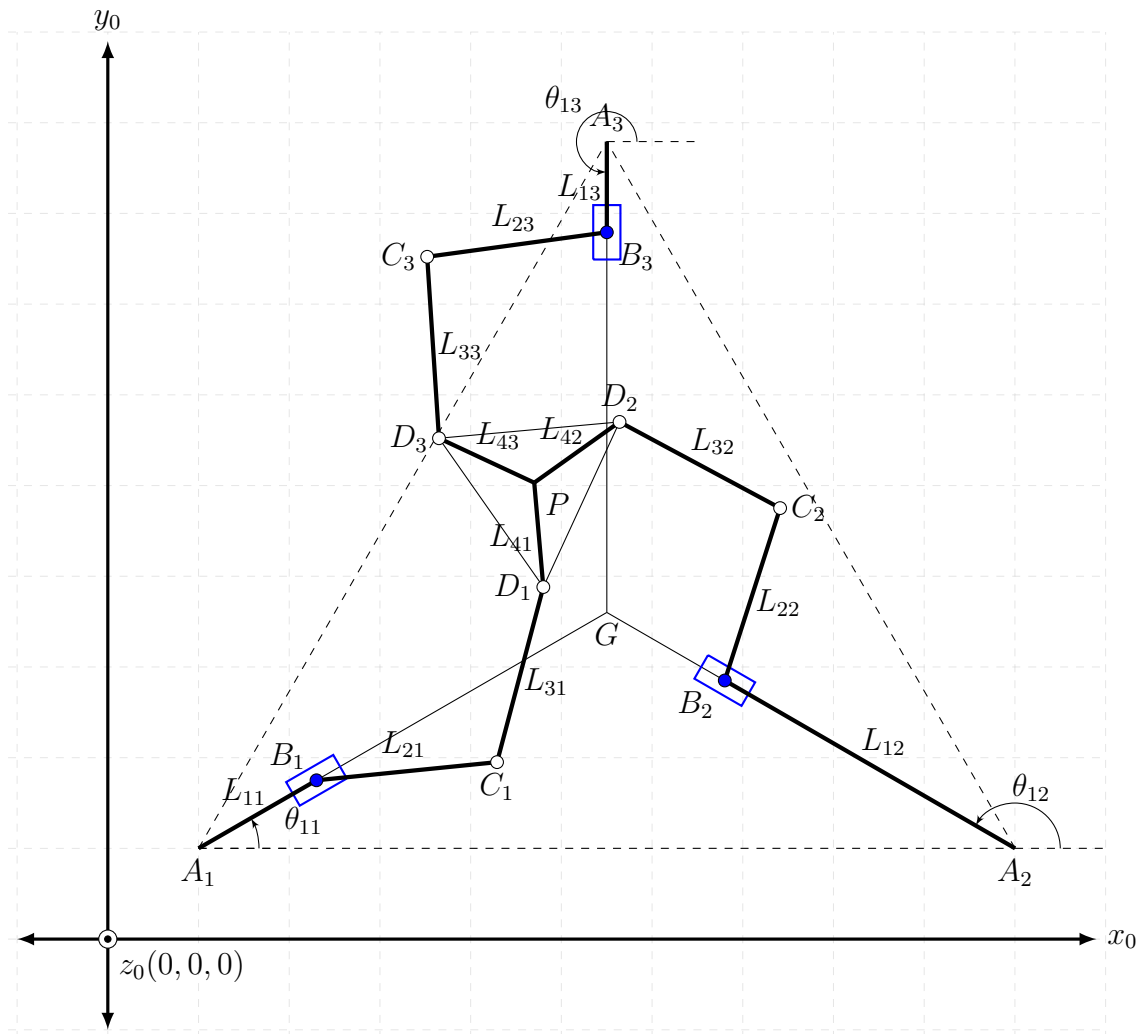


Figura 3.1: Manipulador 3-PRRR, basado en el presentado por (Ebrahimi y cols., 2008a).

En la figura (3.1), los juntas activas o motorizadas están en color azul, mientras que las juntas pasivas solo tienen contorno de color negro.

Las juntas pasivas se encuentran en los puntos C_n y D_n , con $n = 1, 2, 3$.

El sistema inercial se representa con $\{S_0\}$. Por simplicidad, en la figura (3.1) no se incluyen los nombres de los sistemas de referencia. Por tanto, en el punto A_n se encuentra el sistema $\{S_{1n}\}$, en el punto B_n se encuentra el sistema $\{S_{2n}\}$, en el punto C_n se encuentra el sistema $\{S_{3n}\}$, en el punto D_n se encuentra el sistema $\{S_{4n}\}$ y en el punto P se encuentra el sistema $\{S_{Pn}\}$.

3.2. Modelado cinemático

La siguiente figura muestra el manipulador 3-PRRR con su sistema de referencia $\{S_{Pn}\}$ visto desde el sistema inercial $\{S_0\}$.

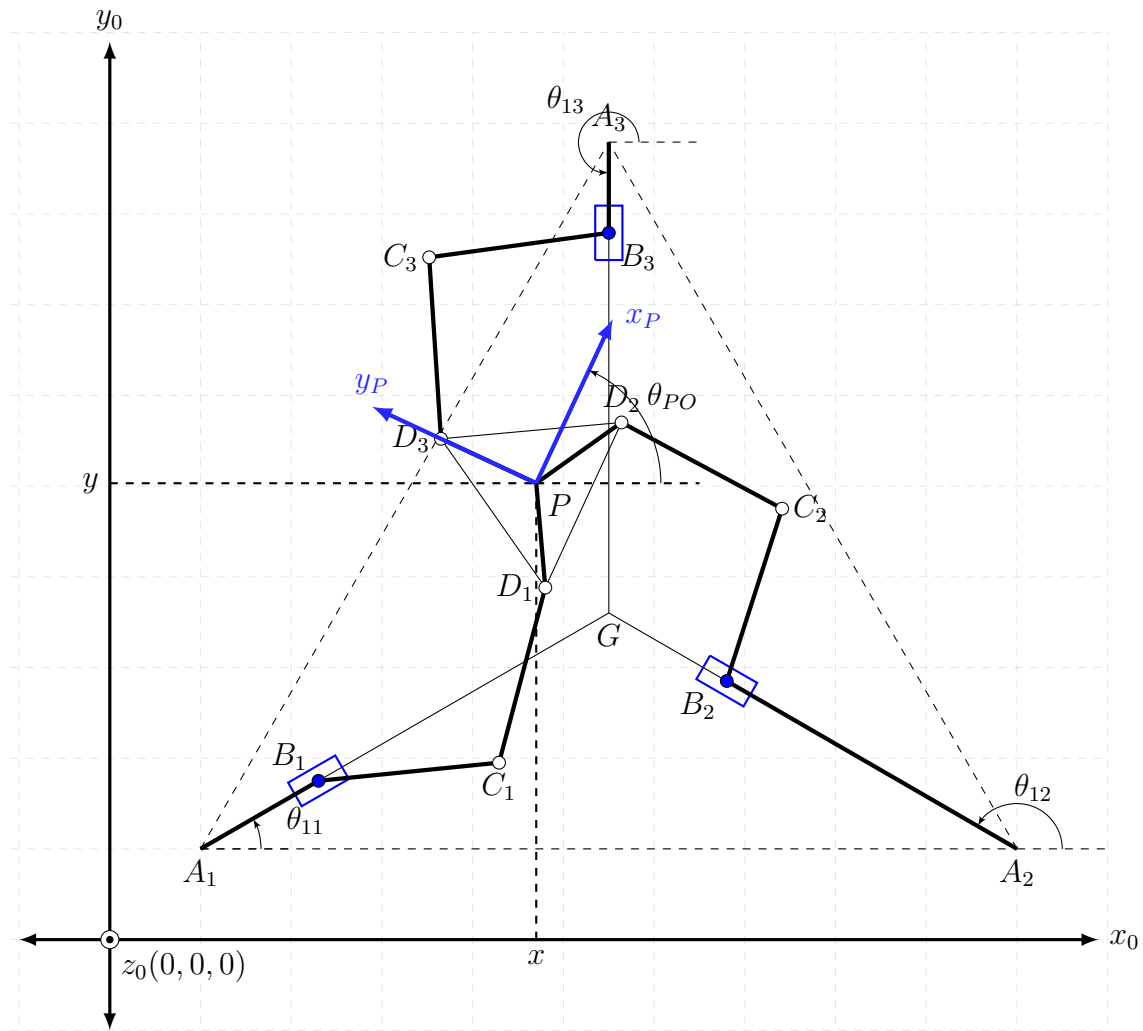


Figura 3.2: Manipulador 3-PRRR, punto P visto desde el sistema inercial.

Para obtener las ecuaciones cinemáticas, tomemos una de las tres cadenas del manipulador mostrado en la figura (3.1). Sea dicha cadena n la mostrada en la siguiente figura.

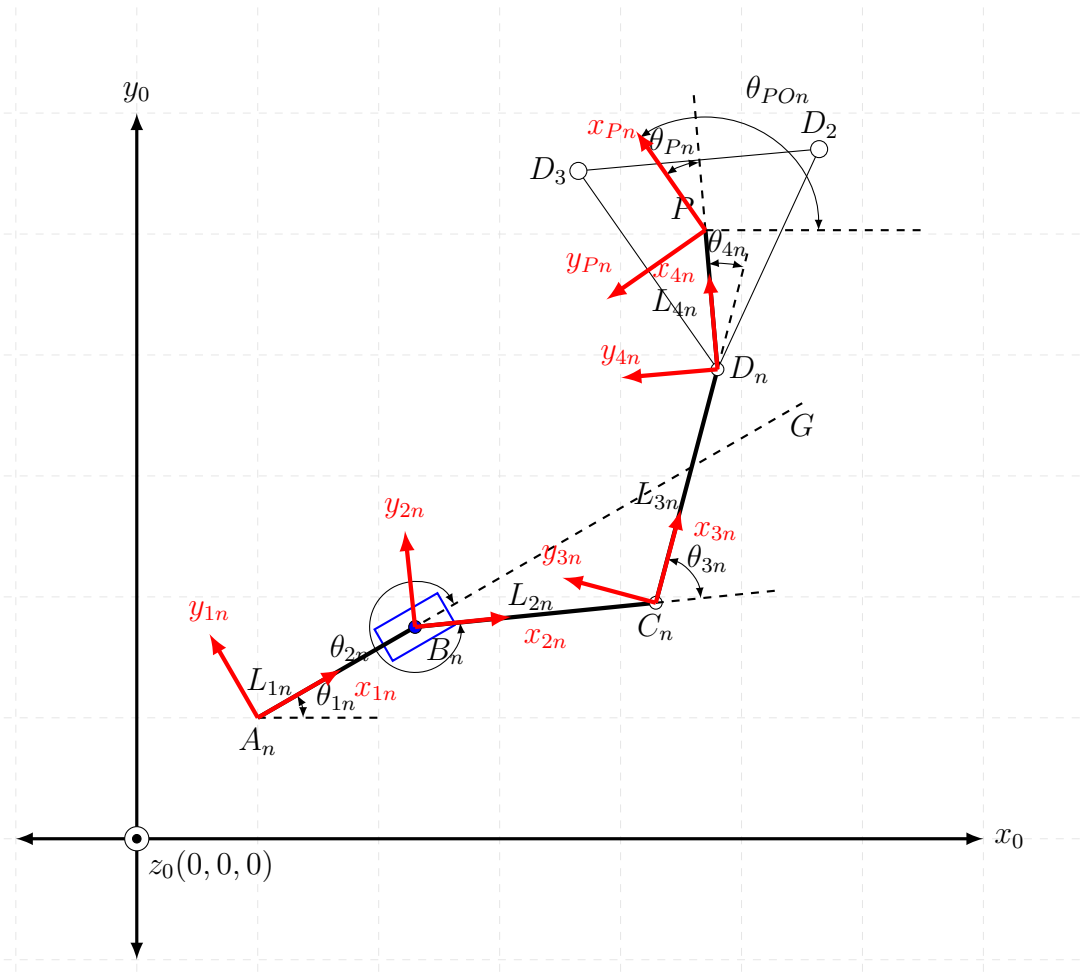


Figura 3.3: Cadena n del manipulador 3-PRRR.

En la figura (3.3), el ángulo θ_{PO_n} es aquél para el cual el eje x_{P_n} es paralelo al lado $\overline{D_n D_2}$.

3.2.1. Matrices de transformación homogéneas

(Barrientos, 2007) define la matriz de rotación $\mathbf{R}_z(\theta_i)$, con ángulo θ_i sobre el eje z y la matriz de traslación $\mathbf{T}(x, y, z)$ en los ejes x , y y z de la siguiente forma:

$$\mathbf{R}_z(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{T}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Con lo anterior en mente, supongamos que para llegar de un sistema i a un sistema j por medio de rotación y traslación -en los mismo ejes que las anteriores ecuaciones-, en este orden, entonces dicha operación usando las ecuaciones (3.1) quedaría:

$$\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & x \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Debido a que en nuestro análisis nos limitaremos al estudio de movimientos en el plano $x - y$ y rotaciones sobre el eje z , entonces la ecuación (3.2) resultante es:

$$\mathbf{T}_{ij}(x, y, \theta_i) = \mathbf{R}_z(\theta_i) \cdot \mathbf{T}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & x \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) se usará de aquí en adelante para describir, como se indicó, una rotación sobre el eje z , seguida de una traslación en el plano $x - y$.

3.2.2. Ecuaciones de posición

Las transformaciones se harán con base en la figura (3.3).

La obtención de las ecuaciones de posición se harán para la cadena n . El primer subíndice indica el sistema, mientras que el segundo la cadena.

La transformación del sistema S_0 al sistema S_{1n} es una traslación sobre el plano $x - y$, de donde:

$$\mathbf{T}_{S_0S_{1n}}(x_{1n}, y_{1n}, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{1n} \\ 0 & 1 & y_{1n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La transformación del sistema S_{1n} al sistema S_{2n} es una rotación de un ángulo constante θ_{1n} y una traslación L_{1n} sobre el eje x_{1n} , de donde:

$$\mathbf{T}_{S_{1n}S_{2n}}(L_{1n}, 0, \theta_{1n}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{1n} & -\sin \theta_{1n} & L_{1n} \\ \sin \theta_{1n} & \cos \theta_{1n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La transformación del sistema S_{2n} al sistema S_{3n} es una rotación de un ángulo θ_{2n} y una traslación L_{2n} sobre el eje x_{2n} , de donde:

$$\mathbf{T}_{S_{2n}S_{3n}}(L_{2n}, 0, \theta_{2n}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{2n} & -\sin \theta_{2n} & L_{2n} \\ \sin \theta_{2n} & \cos \theta_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

La transformación del sistema S_{3n} al sistema S_{4n} es una rotación de un ángulo θ_{3n} y una traslación L_{3n} sobre el eje x_{3n} , de donde:

$$\mathbf{T}_{S_{3n}S_{4n}}(L_{3n}, 0, \theta_{3n}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{3n} & -\sin \theta_{3n} & L_{3n} \\ \sin \theta_{3n} & \cos \theta_{3n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La transformación del sistema S_{4n} al sistema S_{Pn} es una rotación de un ángulo θ_{4n} y una traslación L_{4n} sobre el eje x_{4n} , de donde:

$$\mathbf{T}_{S_{4n}S_{Pn}}(L_{4n}, 0, \theta_{4n}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{4n} & -\sin \theta_{4n} & L_{4n} \\ \sin \theta_{4n} & \cos \theta_{4n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La transformación del sistema S_0 al sistema S_{Pn} queda descrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{T}_{S_0S_{Pn}} = \mathbf{T}_{S_0S_{1n}} \cdot \mathbf{T}_{S_{1n}S_{2n}} \cdot \mathbf{T}_{S_{2n}S_{3n}} \cdot \mathbf{T}_{S_{3n}S_{4n}} \cdot \mathbf{T}_{S_{4n}S_{Pn}} \quad (3.9)$$

Operando la expresión (3.9) y tomando el vector de posición de la misma, llegamos a:

$$\mathbf{T}_{S_0S_{Pn}} = \begin{pmatrix} x_{1n} + L_{1n} \cos \theta_{1n} + L_{2n} \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n}) + L_{3n} \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) + L_{4n} \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ y_{1n} + L_{1n} \sin \theta_{1n} + L_{2n} \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n}) + L_{3n} \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) + L_{4n} \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Además, el movimiento del manipulador que estamos analizando queda totalmente descrito por dos ecuaciones de posición y una de orientación. Con la ecuación (3.10) tenemos las dos primeras.

Para obtener la orientación del efector final, basta con observar la figura (3.1), de donde se tiene:

$$\theta_{POn} = \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} + \theta_{Pn} \quad (3.11)$$

Seguidamente, la transformación $\mathbf{T}_{S_0S_{Pn}}$ representa las coordenadas del punto P para la cadena n , sea éstas x_{P0n} y y_{P0n} vistas desde el sistema fijo S_0 . También, el ángulo θ_{POn} es necesario para definir la orientación del efector final, por lo que la ecuación (3.10) se puede escribir finalmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} x_{P0n} \\ y_{P0n} \\ \theta_{POn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1n} + L_{1n} \cos \theta_{1n} + L_{2n} \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n}) + L_{3n} \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) + L_{4n} \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ y_{1n} + L_{1n} \sin \theta_{1n} + L_{2n} \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n}) + L_{3n} \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) + L_{4n} \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} + \theta_{Pn} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Se debe tener en cuenta que los valores constantes de la ecuación (3.12) son x_{1n} , y_{1n} , θ_{1n} , θ_{Pn} , L_{2n} , L_{3n} y L_{4n} . Mientras que las variables son L_{1n} , θ_{2n} , θ_{3n} y θ_{4n} .

3.2.3. Ecuaciones de velocidad

A partir de aquí se usará $\cos \theta_i = c\theta_i$ y $\sin \theta_i = s\theta_i$ para simplificar la notación.

Para obtener las ecuaciones de velocidad de la cadena n , derivamos la ecuación (3.12) respecto al tiempo; simplificando se llega a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{P0n} \\ \dot{y}_{P0n} \\ \dot{\theta}_{POn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{L}_{1n} c\theta_{1n} - \dot{\theta}_{2n} L_{2n} s(\theta_{1n} + \theta_{2n}) - (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n}) L_{3n} s(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) - (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n} + \dot{\theta}_{4n}) L_{4n} s(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ \dot{L}_{1n} s\theta_{1n} + \dot{\theta}_{2n} L_{2n} c(\theta_{1n} + \theta_{2n}) + (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n}) L_{3n} c(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) + (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n} + \dot{\theta}_{4n}) L_{4n} c(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ \dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n} + \dot{\theta}_{4n} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Para expresar la ecuación (3.13) de la forma (2.1), consideremos que el lado derecho de la ecuación (3.13) depende de las variables $\dot{\theta}_{2n}$, $\dot{\theta}_{3n}$, $\dot{\theta}_{4n}$ y \dot{L}_{1n} , lo cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{POn} \\ \dot{y}_{POn} \\ \dot{\theta}_{POn} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_n \left(\dot{\theta}_{2n}, \dot{\theta}_{3n}, \dot{\theta}_{4n}, \dot{L}_{1n} \right) \quad (3.14)$$

Por lo tanto, podemos llegar a la siguiente igualdad:

$$\mathbf{J}_x = \left(\mathbf{f}_n(1, 0, 0, 0) \quad \mathbf{f}_n(0, 1, 0, 0) \quad \mathbf{f}_n(0, 0, 1, 0) \quad \mathbf{f}_n(0, 0, 0, 1) \right) \quad (3.15)$$

Cada elemento de la matriz \mathbf{J}_x , según la ecuación (3.15), es un vector columna. Dicha matriz es de dimensión 3×4 .

Además, se tiene que el vector de velocidades de las juntas es:

$$\dot{\mathbf{q}} = \left(\dot{\theta}_{2n} \quad \dot{\theta}_{3n} \quad \dot{\theta}_{4n} \quad \dot{L}_{1n} \right) \quad (3.16)$$

Sustituyendo valores y simplificando se obtiene el siguiente:

$$\mathbf{f}_n(1, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -L_{2n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n})-L_{3n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})-L_{4n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ L_{2n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n})+L_{3n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{4n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f}_n(0, 1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -L_{3n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})-L_{4n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ L_{3n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{4n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f}_n(0, 0, 1, 0) = \begin{pmatrix} -L_{4n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ L_{4n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{f}_n(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} c\theta_{1n} \\ s\theta_{1n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Por otra parte, el vector de postura $\boldsymbol{\xi}$ del efector final está descrito por dos coordenadas, x_{PO} y y_{PO} , y una orientación θ_{PO} , es decir:

$$\boldsymbol{\xi} = \left(x_{PO} \quad y_{PO} \quad \theta_{PO} \right)^T \quad (3.21)$$

Además, todas los valores anteriores varían con el tiempo, por esta razón la deriva del vector de postura es:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left(\dot{x}_{PO} \quad \dot{y}_{PO} \quad \dot{\theta}_{PO} \right)^T \quad (3.22)$$

3.2.4. Restricciones cinemáticas diferenciales por cadena

Primero, se definen los vectores de configuración de posición y velocidad para cada cadena. El vector de configuración de posición \mathbf{q}_n para la cadena n está definido por aquellos valores que cambian con el tiempo y que definen la estructura, por decirlo de alguna forma, del mecanismo, de donde:

$$\mathbf{q}_n = (x_{PO_n} \ y_{PO_n} \ \theta_{PO_n} \ \theta_{2n} \ \theta_{3n} \ \theta_{4n} \ L_{1n})^T \quad (3.23)$$

El vector de configuración de velocidad para la cadena n está definido por la derivada del vector de configuración de posición, se llega a lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}_n = (\dot{x}_{PO_n} \ \dot{y}_{PO_n} \ \dot{\theta}_{PO_n} \ \dot{\theta}_{2n} \ \dot{\theta}_{3n} \ \dot{\theta}_{4n} \ \dot{L}_{1n})^T \quad (3.24)$$

En un principio los vectores de configuración de posición y velocidad para cada cadena quedan definidos de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= (x_{PO1} \ y_{PO1} \ \theta_{PO1} \ \theta_{21} \ \theta_{31} \ \theta_{41} \ L_{11})^T \\ \mathbf{q}_2 &= (x_{PO2} \ y_{PO2} \ \theta_{PO2} \ \theta_{22} \ \theta_{32} \ \theta_{42} \ L_{12})^T \\ \mathbf{q}_3 &= (x_{PO3} \ y_{PO3} \ \theta_{PO3} \ \theta_{23} \ \theta_{33} \ \theta_{43} \ L_{13})^T \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_1 &= (\dot{x}_{PO1} \ \dot{y}_{PO1} \ \dot{\theta}_{PO1} \ \dot{\theta}_{21} \ \dot{\theta}_{31} \ \dot{\theta}_{41} \ \dot{L}_{11})^T \\ \dot{\mathbf{q}}_2 &= (\dot{x}_{PO2} \ \dot{y}_{PO2} \ \dot{\theta}_{PO2} \ \dot{\theta}_{22} \ \dot{\theta}_{32} \ \dot{\theta}_{42} \ \dot{L}_{12})^T \\ \dot{\mathbf{q}}_3 &= (\dot{x}_{PO3} \ \dot{y}_{PO3} \ \dot{\theta}_{PO3} \ \dot{\theta}_{23} \ \dot{\theta}_{33} \ \dot{\theta}_{43} \ \dot{L}_{13})^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

Por lo tanto, los vectores de configuración de posición y velocidad para todo el manipulador se pueden expresar en dos vectores \mathbf{q} y $\dot{\mathbf{q}}$:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{pmatrix}; \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Por otro lado, las tres cadenas que conforman el manipulador 3-PRRR tienen en común el punto P , efector final, por lo que los valores de las coordenadas x_{PO_n} y y_{PO_n} son iguales para las tres cadenas, lo mismo sucede con el ángulo de orientación θ_{PO_n} . Con estas consideraciones, lo siguiente se cumple para el mecanismo:

$$\begin{aligned} x_{PO} &= x_{PO1} = x_{PO2} = x_{PO3}; \ y_{PO} = y_{PO1} = y_{PO2} = y_{PO3}; \ \theta_{PO} = \theta_{PO1} = \theta_{PO2} = \theta_{PO3} \\ \dot{x}_{PO} &= \dot{x}_{PO1} = \dot{x}_{PO2} = \dot{x}_{PO3}; \ \dot{y}_{PO} = \dot{y}_{PO1} = \dot{y}_{PO2} = \dot{y}_{PO3}; \ \dot{\theta}_{PO} = \dot{\theta}_{PO1} = \dot{\theta}_{PO2} = \dot{\theta}_{PO3} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Todo lo anterior se ha realizado para expresar los vectores de configuración de posición y velocidad del manipulador de una forma general -ordenados de distinta forma-; quedan definidos de siguiente forma:

$$\mathbf{q} = (x_{PO} \ y_{PO} \ \theta_{PO} \ \theta_{21} \ \theta_{22} \ \theta_{23} \ \theta_{31} \ \theta_{32} \ \theta_{33} \ \theta_{41} \ \theta_{42} \ \theta_{43} \ L_{11} \ L_{12} \ L_{13})_{1 \times 15}^T \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = (\dot{x}_{PO} \ \dot{y}_{PO} \ \dot{\theta}_{PO} \ \dot{\theta}_{21} \ \dot{\theta}_{22} \ \dot{\theta}_{23} \ \dot{\theta}_{31} \ \dot{\theta}_{32} \ \dot{\theta}_{33} \ \dot{\theta}_{41} \ \dot{\theta}_{42} \ \dot{\theta}_{43} \ \dot{L}_{11} \ \dot{L}_{12} \ \dot{L}_{13})_{1 \times 15}^T \quad (3.30)$$

Por otro lado, las restricciones cinemáticas de posición pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$\Psi = (\xi \ \mathbf{q})^T \quad (3.31)$$

Se obtiene las restricciones de velocidad derivando las de posición, de donde:

$$\dot{\Psi} = (\dot{\xi} \ \dot{\mathbf{q}})^T \quad (3.32)$$

Los vectores Ψ y $\dot{\Psi}$ representan los vectores de pose de posición y velocidad, respectivamente y, evidentemente, comprende todas las variables de postura y configuración

Las expresiones (3.31) y (3.32) pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{A}(\Psi) \cdot \dot{\Psi} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.33)$$

La solución a la segunda ecuación en (3.33) es el espacio nulo de $\mathbf{A}(\Psi)$, esto es:

$$\mathbf{S}_N = \text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)] \quad (3.34)$$

Importante, N y n son valores distintos.

Dada una selección de variables generalizadas $\dot{\Psi}_N \in \mathbb{R}^{\dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)]) \times 1}$ se puede encontrar el espacio nulo, representado por $\mathbf{S}_N(\Psi)$, de $\mathbf{A}(\Psi)$ que cumple con:

$$\dot{\Psi} = \mathbf{S}_N(\Psi) \dot{\Psi}_N \quad (3.35)$$

Tal que: $\mathbf{A}(\Psi) \cdot \mathbf{S}_N(\Psi) = \mathbf{0}$

Recordando que:

$\dot{\Psi} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 1}$ es la pose del manipulador.

$\dot{\xi} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es la postura del manipulador, comprende posición y orientación del efector final.

$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es la configuración del manipulador, comprende las variables de articulación.

$\mathbf{S}_N(\Psi) \in \mathbb{R}^{(n+m) \times \dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)])}$ representa el espacio nulo de $\mathbf{A}(\Psi)$.

Si seleccionamos un subespacio de $\mathbf{S}_N(\Psi)$ para que el número de entradas sea igual al número de salidas, se forma un sistema de coordenadas generalizadas de entrada-salida que se puede representar de la siguiente manera:

$$\dot{\Psi}_S = \mathbf{S}_S(\Psi) \dot{\Psi}_N \quad (3.36)$$

Donde:

$\dot{\Psi}_S \in \mathbb{R}^{\dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)]) \times 1}$ representa el subespacio de salidas, el cual es seleccionado del $\dot{\Psi}$.
 $\mathbf{S}_S(\Psi) \in \mathbb{R}^{\dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)]) \times \dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)])}$ es un subespacio de $\mathbf{S}_N(\Psi)$.

Para representar lo anterior tenemos la siguiente figura:

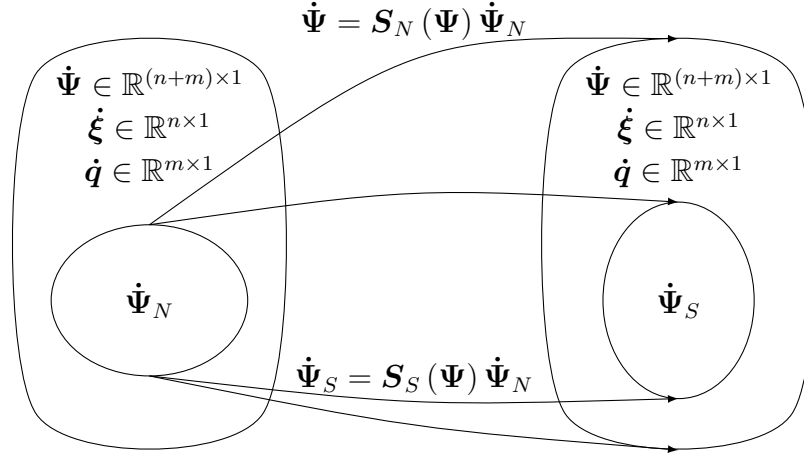


Figura 3.4: Representación de la pose del manipulador 3-PRRR.

De la figura anterior, podemos interpretar a $\mathbf{S}_S(\Psi)$ y $\mathbf{S}_N(\Psi)$ como dos transformaciones que mapean del espacio de pose al espacio de pose, en otras palabras, son jacobianos. Esto quiere decir que el vector de entradas $\dot{\Psi}_N$ puede ser elegido de forma arbitraria y que todo el comportamiento del manipulador puede quedar descrito en función del mismo vector.

Por otra parte, sea $C_{S\Psi}$ la combinación de $n + m$ coordenadas de pose tomadas en conjuntos de números iguales a $\dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)])$ coordenadas generalizadas del sistema. Entonces, existen un número máximo de soluciones $\mathbf{S}_N(\Psi)$ igual a $C_{S\Psi}$, que cumplen con $\mathbf{A}(\Psi) \cdot \dot{\Psi} = \mathbf{0}$. El número máximo de subespacios $\mathbf{S}_S(\Psi)$ que se pueden encontrar para cada selección de coordenadas generalizadas $\dot{\Psi}_N \in \mathbb{R}^{\dim(\text{Null}[\mathbf{A}(\Psi)]) \times 1}$ es $C_{S\Psi}$.

Por lo tanto, el número máximo de subsistemas que se pueden encontrar son igual a $C_{S\Psi}^2$, dado que se tienen $C_{S\Psi}$ combinaciones de coordenadas $\dot{\Psi}_N$ y $C_{S\Psi}$ subespacios $\mathbf{S}_S(\Psi)$ para cada selección de variables $\dot{\Psi}_N$.

Tomando en cuenta todo lo anterior, se puede llegar a las siguientes expresiones.

Las ecuaciones (3.33) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi}) = \\
 & \begin{pmatrix} \dot{x}_{P0n} \\ \dot{y}_{P0n} \\ \dot{\theta}_{P0n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{L}_{1n}c\theta_{1n} - \dot{\theta}_{2n}L_{2n}s(\theta_{1n} + \theta_{2n}) - (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n})L_{3n}s(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) - (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n} + \dot{\theta}_{4n})L_{4n}s(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ \dot{L}_{1n}s\theta_{1n} + \dot{\theta}_{2n}L_{2n}c(\theta_{1n} + \theta_{2n}) + (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n})L_{3n}c(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) + (\dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n} + \dot{\theta}_{4n})L_{4n}c(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) \\ \dot{\theta}_{2n} + \dot{\theta}_{3n} + \dot{\theta}_{4n} \end{pmatrix} \\
 & = \mathbf{0} \\
 & \quad \quad \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Para obtener la segunda expresión de (3.33), tomemos en cuenta que la matriz \mathbf{C} es función tanto de Ψ y $\dot{\Psi}$. Por lo que dicha matriz puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}(\Psi, (\dot{x}_{P0n} \quad \dot{y}_{P0n} \quad \dot{\theta}_{P0n} \quad \dot{\theta}_{2n} \quad \dot{\theta}_{3n} \quad \dot{\theta}_{4n} \quad \dot{L}_{1n})) = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

Por lo tanto, la matriz $\mathbf{A}(\Psi)$ se obtiene si sustituye el primer elemento del vector $\dot{\Psi}$ con la unidad, mientras los restantes valores toman el valor cero y así sucesivamente, esto queda expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}(\Psi) = (\mathbf{C}(\Psi, (1 \quad \dots \quad 0)) \dots \mathbf{C}(\Psi, (0 \quad \dots \quad 1))) \quad (3.39)$$

Cada uno de los elementos de la matriz $\mathbf{A}(\Psi)$ es un vector columna, cuyos valores se muestran a continuación.

$$\mathbf{C}(\Psi, (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{C}(\Psi, (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{C}(\Psi, (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{C}(\Psi, (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)) = \begin{pmatrix} L_{2n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n})+L_{3n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{4n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ -L_{2n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n})-L_{3n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})-L_{4n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{C}(\Psi, (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)) = \begin{pmatrix} L_{3n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{4n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ -L_{3n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})-L_{4n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{C}(\Psi, (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)) = \begin{pmatrix} L_{4n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ -L_{4n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n}) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{C}(\Psi, (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)) = \begin{pmatrix} -c\theta_{1n} \\ -s\theta_{1n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

La matriz $\mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})$ que representa todo el manipulador es:

$$\mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{P0} - \dot{L}_{11}c\theta_{11} + \dot{\theta}_{21}L_{21}s(\theta_{11}+\theta_{21}) + (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{31})L_{31}s(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31}) + (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{31} + \dot{\theta}_{41})L_{41}s(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31}+\theta_{41}) \\ \dot{y}_{P0} - \dot{L}_{11}s\theta_{11} - \dot{\theta}_{21}L_{21}c(\theta_{11}+\theta_{21}) - (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{31})L_{31}c(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31}) - (\dot{\theta}_{21} + \dot{\theta}_{31} + \dot{\theta}_{41})L_{41}c(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31}+\theta_{41}) \\ \dot{\theta}_{P0} - \dot{\theta}_{21} - \dot{\theta}_{31} - \dot{\theta}_{41} \\ \dot{x}_{P0} - \dot{L}_{12}c\theta_{12} + \dot{\theta}_{22}L_{22}s(\theta_{12}+\theta_{22}) + (\dot{\theta}_{22} + \dot{\theta}_{32})L_{32}s(\theta_{12}+\theta_{22}+\theta_{32}) + (\dot{\theta}_{22} + \dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{42})L_{42}s(\theta_{12}+\theta_{22}+\theta_{32}+\theta_{42}) \\ \dot{y}_{P0} - \dot{L}_{12}s\theta_{12} - \dot{\theta}_{22}L_{22}c(\theta_{12}+\theta_{22}) - (\dot{\theta}_{22} + \dot{\theta}_{32})L_{32}c(\theta_{12}+\theta_{22}+\theta_{32}) - (\dot{\theta}_{22} + \dot{\theta}_{32} + \dot{\theta}_{42})L_{42}c(\theta_{12}+\theta_{22}+\theta_{32}+\theta_{42}) \\ \dot{\theta}_{P0} - \dot{\theta}_{22} - \dot{\theta}_{32} - \dot{\theta}_{42} \\ \dot{x}_{P0} - \dot{L}_{13}c\theta_{13} + \dot{\theta}_{23}L_{23}s(\theta_{13}+\theta_{23}) + (\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{33})L_{33}s(\theta_{13}+\theta_{23}+\theta_{33}) + (\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{33} + \dot{\theta}_{43})L_{43}s(\theta_{13}+\theta_{23}+\theta_{33}+\theta_{43}) \\ \dot{y}_{P0} - \dot{L}_{13}s\theta_{13} - \dot{\theta}_{23}L_{23}c(\theta_{13}+\theta_{23}) - (\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{33})L_{33}c(\theta_{13}+\theta_{23}+\theta_{33}) - (\dot{\theta}_{23} + \dot{\theta}_{33} + \dot{\theta}_{43})L_{43}c(\theta_{13}+\theta_{23}+\theta_{33}+\theta_{43}) \\ \dot{\theta}_{P0} - \dot{\theta}_{23} - \dot{\theta}_{33} - \dot{\theta}_{43} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

La matriz (3.47) incluye todo el comportamiento del mecanismo. Es muy importante observar que la matriz $\mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})$ depende de quince variables, pero de la misma matriz, se puede notar que tenemos nueve ecuaciones independientes, tres por cadena. Ésta es la razón por la que se necesitan seis variables de entrada para poder dar una solución única a la cinemática inversa del manipulador redundante 3-PRRR, además de que, como se verá más adelante, una justificación más rigurosa es que seis indica el número de variables linealmente independientes y con éstas es posible describir el comportamiento del manipulador. Lo anterior quiere decir que el sistema depende de seis variables independientes, lo cual conduce a un resultado interesante: dichas variables son arbitrarias. Sin embargo, en este trabajo siempre se considera al vector de postura $\dot{\xi}$ como parte de vector de entradas o variables independientes.

3.3. Solución del sistema MIMO

El manipulador 3-PRRR, al contar con más de una entrada y más de una salida, puede ser clasificado como un sistema MIMO (*Multiple-input Multiple-output*, por sus siglas en inglés).

El comportamiento del manipulador redundante bajo estudio se encuentra en la expresión (3.47). En ésta se cuenta con nueve ecuaciones y quince variables -definidas por el vector (3.30)-, por tal motivo, es necesario definir un vector de entradas para poder resolver el sistema. Lo anterior, para completar el sistema de ecuaciones y poder solucionarlo, como ya se ha mencionado.

Como se ha mencionado anteriormente, en la mayoría de los casos lo que se desea es que el manipulador llegue a una posición determinada y con una orientación deseada, por lo que en este trabajo el vector de velocidad de postura del efector final será una entrada.

Con lo anterior, ahora quedan tres entradas más por definir, éstas serán las variables restantes del vector de velocidad de configuración.

Es decir, primero se soluciona el sistema de ecuaciones (3.47) con el vector de velocidad de postura y las variables \dot{L}_{11} , \dot{L}_{12} y \dot{L}_{13} .

El segundo caso se presenta cuando las entradas son el vector de velocidad de postura y las variables $\dot{\theta}_{21}$, $\dot{\theta}_{22}$ y $\dot{\theta}_{23}$.

El tercer caso se presenta cuando las entradas son el vector de velocidad de postura y las variables $\dot{\theta}_{31}$, $\dot{\theta}_{32}$ y $\dot{\theta}_{33}$.

Finalmente, el cuarto caso se presenta cuando las entradas son el vector de velocidad de postura y las variables $\dot{\theta}_{41}$, $\dot{\theta}_{42}$ y $\dot{\theta}_{43}$.

Para encontrar las singularidades de la matriz jacobiana, tenemos dos opciones, calcular el determinante de ésta o encontrar aquellos valores para los cuales dicha matriz pierde rango.

Trabajaremos con la segunda opción porque ésta es *i)* más simple de utilizar y *ii)* los resultados pueden ser interpretados de forma más sencilla. Con esto en mente, una matriz cuadrada pierde rango cuando sus columnas son linealmente dependientes, esto puede ocurrir cuando una o más columnas dicha matriz se vuelven cero, originando que el determinante sea nulo y, por lo tanto, la matriz no pueda ser invertida. Lo anterior puede presentarse también cuando uno o más renglones de una matriz cuadrada son cero. Para más información acerca de lo anterior, véanse (Maltsev y Vega, 1972) o (Ayres, 1978).

Por consiguiente, en este trabajo se obtendrán los valores para los cuales las columnas de la matriz \mathbf{J}_q de la ecuación (2.2) se vuelven nulas. La matriz \mathbf{J}_q coincide con $\mathbf{S}_S(\Psi)$. Sin embargo, ésta última no se usará para evitar confusiones con la letra S .

Para representar la solución general, espacio nulo de todo el sistema -ecuación (3.35), $\mathbf{S}_N(\Psi)$ se caracterizará a ésta por $\mathbf{S}_n(\Psi)$. Con n el número de cadenas.

Definamos el vector de velocidades de las juntas activas o motorizadas como $\dot{\mathbf{q}}_a$ cuyos valores son:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = (\dot{\theta}_{21} \quad \dot{\theta}_{22} \quad \dot{\theta}_{23} \quad \dot{L}_{11} \quad \dot{L}_{12} \quad \dot{L}_{13})_{1 \times 6}^T \quad (3.48)$$

El vector $\dot{\mathbf{q}}_a$ será el mismo para las cuatro soluciones presentadas a continuación. Se presenta cuatro soluciones porque el vector de entradas $\dot{\mathbf{u}}$ varía de una solución a otra. Es muy importante notar que $\dot{\mathbf{q}}_a = \dot{\Psi}_S$.

Para las cuatro soluciones mostradas $n_1 \in \mathbb{N}$; por supuesto, \mathbb{N} representa el conjunto de los números naturales.

3.3.1. Solución 1

Llamemos $\dot{\mathbf{u}}_1$ al vector de entradas, es decir:

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = (\dot{x}_{PO} \quad \dot{y}_{PO} \quad \dot{\theta}_{PO} \quad \dot{L}_{11} \quad \dot{L}_{12} \quad \dot{L}_{13})_{1 \times 6}^T \quad (3.49)$$

Con lo anterior, seis variables ya son conocidas por lo que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} C(\Psi, \dot{\Psi})_{1,1} &= 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{2,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{5,1} = 0; \\ C(\Psi, \dot{\Psi})_{6,1} &= 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{7,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{8,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{9,1} = 0; \quad \dot{x}_{PO} = \dot{x}_{PO}; \\ \dot{y}_{PO} &= \dot{y}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{PO} = \dot{\theta}_{PO}; \quad \dot{L}_{11} = \dot{L}_{11}; \quad \dot{L}_{12} = \dot{L}_{12}; \quad \dot{L}_{13} = \dot{L}_{13}; \end{aligned} \quad (3.50)$$

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones definido en (3.50), las soluciones se pueden expresar de la forma $\dot{\Psi} = \mathbf{S}_1(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_1$, o de otra forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \\ \dot{\theta}_{41} \\ \dot{\theta}_{42} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{L}_{11} \\ \dot{L}_{12} \\ \dot{L}_{13} \end{pmatrix}_{15 \times 1} = \mathbf{S}_1(\Psi)_{15 \times 6} \begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{L}_{11} \\ \dot{L}_{12} \\ \dot{L}_{13} \end{pmatrix}_{6 \times 1} \quad (3.51)$$

Ahora, se toma la submatriz de $\mathbf{S}_1(\Psi)$ que relaciona el vector de juntas actuadas con el vector de entradas $\dot{\mathbf{u}}_1$. Sea $\mathbf{J}_1(\Psi)_{6 \times 6}$ dicha matriz, entonces se cumple lo siguiente:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_1(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_1$$

$$\mathbf{J}_1(\Psi) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\theta_{11} + \theta_{21} + \theta_{31})}{L_{21} \sin(\theta_{31})} & \frac{\sin(\theta_{11} + \theta_{21} + \theta_{31})}{L_{21} \sin(\theta_{31})} & \frac{L_{41} \sin(\theta_{41})}{L_{21} \sin(\theta_{31})} & -\frac{\cos(\theta_{21} + \theta_{31})}{L_{21} \sin(\theta_{31})} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\theta_{12} + \theta_{22} + \theta_{32})}{L_{22} \sin(\theta_{32})} & \frac{\sin(\theta_{12} + \theta_{22} + \theta_{32})}{L_{22} \sin(\theta_{32})} & \frac{L_{42} \sin(\theta_{42})}{L_{22} \sin(\theta_{32})} & 0 & -\frac{\cos(\theta_{22} + \theta_{32})}{L_{22} \sin(\theta_{32})} & 0 \\ \frac{\cos(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33})}{L_{23} \sin(\theta_{33})} & \frac{\sin(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33})}{L_{23} \sin(\theta_{33})} & \frac{L_{43} \sin(\theta_{43})}{L_{23} \sin(\theta_{33})} & 0 & 0 & -\frac{\cos(\theta_{23} + \theta_{33})}{L_{23} \sin(\theta_{33})} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

La expresión anterior coincide con la forma de la ecuación (2.2).

Para obtener las singularidades, obtenemos los valores para los cuales la matriz $\mathbf{J}_1(\Psi)$ pierde rango. Lo anterior sucede cuando las columnas o renglones de dicha matriz se vuelven cero. Al observar a la matriz de la ecuación (3.52), notamos que ésta tiene unos en sus tres últimas columnas, por lo que dichas columnas nunca se podrán hacer cero, por esta razón, se analizarán las tres primeras columnas de esta matriz.

Columna 1:

Los valores de la columna 1 de la matriz $\mathbf{J}_1(\Psi)$ tienen la misma forma, ésta es $\frac{\cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{2n} \sin(\theta_{3n})}$.

Esta columna se vuelve cero cuando se presenta lo siguiente:

$$\frac{\cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{2n} \sin(\theta_{3n})} = 0 \Rightarrow \cos(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) = 0 \Rightarrow \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2}; n_1 \in \mathbb{N}$$

Columna 2:

Los valores de la columna 2 de la matriz $\mathbf{J}_1(\Psi)$ tienen la misma forma, ésta es $\frac{\sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{2n} \sin(\theta_{3n})}$.

Esta columna se vuelve cero cuando se presenta lo siguiente:

$$\frac{\sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{2n} \sin(\theta_{3n})} = 0 \Rightarrow \sin(\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) = 0 \Rightarrow \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = n_1\pi; n_1 \in \mathbb{N}$$

Columna 3:

Finalmente, la columna 3 pierde rango cuando:

$$\frac{L_{4n} \sin(\theta_{4n})}{L_{2n} \sin(\theta_{3n})} = 0 \Rightarrow \sin(\theta_{4n}) = 0 \Rightarrow \theta_{4n} = n_1\pi; n_1 \in \mathbb{N}$$

Es importante notar que en la matriz $\mathbf{J}_1(\Psi)$ se encuentra un término que contiene a la función $\sin \theta_{3n}$, pero ésta se encuentra en el denominador de todos los términos de la matriz, por lo tanto, se debe evitar que dicho término tome el valor cero, de lo cual se llega a la siguiente condición para evitar que la matriz $\mathbf{J}_1(\Psi)$ tienda a infinito:

$$\theta_{3n} \neq n_1\pi; n_1 \in \mathbb{N}$$

Si $\sin(\theta_{3n}) = 0 \Rightarrow \mathbf{J}_1(\Psi) \rightarrow \infty$.

De lo anterior, se llega a la siguiente tabla que resume las singularidades para este primer caso.

$\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2}$ $\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = n_1\pi$ $\theta_{4n} = n_1\pi$ $\theta_{3n} = n_1\pi$	$n_1 \in \mathbb{N}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 3.1: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 1.

3.3.2. Solución 2

En este segundo caso, sea $\dot{\mathbf{u}}_2$ a vector de entradas, de donde:

$$\dot{\mathbf{u}}_2 = (\dot{x}_{PO} \quad \dot{y}_{PO} \quad \dot{\theta}_{PO} \quad \dot{\theta}_{21} \quad \dot{\theta}_{22} \quad \dot{\theta}_{23})_{1 \times 6}^T \quad (3.53)$$

Como en la solución 1, los valores de entrada son conocidos.

Por lo tanto, se puede definir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} C(\Psi, \dot{\Psi})_{1,1} &= 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{2,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{5,1} = 0; \\ C(\Psi, \dot{\Psi})_{6,1} &= 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{7,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{8,1} = 0; \quad C(\Psi, \dot{\Psi})_{9,1} = 0; \quad \dot{x}_{PO} = \dot{x}_{PO}; \\ \dot{y}_{PO} &= \dot{y}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{PO} = \dot{\theta}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{21}; \quad \dot{\theta}_{22} = \dot{\theta}_{22}; \quad \dot{\theta}_{23} = \dot{\theta}_{23}; \end{aligned} \quad (3.54)$$

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones definido en (3.54), las soluciones se pueden expresar de la forma $\dot{\Psi} = \mathbf{S}_2(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_2$, o de otra forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \\ \dot{\theta}_{41} \\ \dot{\theta}_{42} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{L}_{11} \\ \dot{L}_{12} \\ \dot{L}_{13} \end{pmatrix}_{15 \times 1} = \mathbf{S}_2(\Psi)_{15 \times 6} \begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \end{pmatrix}_{6 \times 1} \quad (3.55)$$

Como en la solución 1, se toman la submatriz de $\mathbf{S}_2(\Psi)$ que relaciona las juntas activas con el vector de entradas. Sea $\mathbf{J}_2(\Psi)$ dicha matriz, entonces se cumple lo siguiente

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_2(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_2$$

$$\mathbf{J}_2(\Psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\cos(\theta_{11} + \theta_{21} + \theta_{31})}{\cos(\theta_{21} + \theta_{31})} & \frac{\sin(\theta_{11} + \theta_{21} + \theta_{31})}{\cos(\theta_{21} + \theta_{31})} & \frac{L_{41} \sin \theta_{41}}{\cos(\theta_{21} + \theta_{31})} & -\frac{L_{21} \sin \theta_{31}}{\cos(\theta_{21} + \theta_{31})} & 0 & 0 \\ \frac{\cos(\theta_{12} + \theta_{22} + \theta_{32})}{\cos(\theta_{22} + \theta_{32})} & \frac{\sin(\theta_{12} + \theta_{22} + \theta_{32})}{\cos(\theta_{22} + \theta_{32})} & \frac{L_{42} \sin \theta_{42}}{\cos(\theta_{22} + \theta_{32})} & 0 & -\frac{L_{22} \sin \theta_{32}}{\cos(\theta_{22} + \theta_{32})} & 0 \\ \frac{\cos(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33})}{\cos(\theta_{23} + \theta_{33})} & \frac{\sin(\theta_{13} + \theta_{23} + \theta_{33})}{\cos(\theta_{23} + \theta_{33})} & \frac{L_{43} \sin \theta_{43}}{\cos(\theta_{23} + \theta_{33})} & 0 & 0 & -\frac{L_{23} \sin \theta_{33}}{\cos(\theta_{23} + \theta_{33})} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

Si se analiza la matriz $\mathbf{J}_2(\Psi)$ de la misma forma que se hizo con $\mathbf{J}_1(\Psi)$, analizando los valores para los cuales las columnas se vuelven cero. Igual que en la solución 1, las columnas 4, 5 y 6 nunca se vuelven cero. Por tal razón, se analizan las columnas 1, 2 y 3 de $\mathbf{J}_2(\Psi)$. Si se lleva a cabo la misma metodología que en el caso 1, se llega a la siguiente tabla que resume las singularidades del manipulador para esta solución:

$\begin{aligned} \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \\ \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} &= n_1\pi \\ \theta_{4n} &= n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 3.2: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 2.

3.3.3. Solución 3

Llamemos $\dot{\mathbf{u}}_3$ a vector de entradas, de donde:

$$\dot{\mathbf{u}}_3 = (\dot{x}_{PO} \quad \dot{y}_{PO} \quad \dot{\theta}_{PO} \quad \dot{\theta}_{31} \quad \dot{\theta}_{32} \quad \dot{\theta}_{33})_{1 \times 6}^T \quad (3.57)$$

En este caso se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{1,1} &= 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{2,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{5,1} = 0; \\ \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{6,1} &= 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{7,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{8,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{9,1} = 0; \quad \dot{x}_{PO} = \dot{x}_{PO}; \\ \dot{y}_{PO} &= \dot{y}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{PO} = \dot{\theta}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{31} = \dot{\theta}_{31}; \quad \dot{\theta}_{32} = \dot{\theta}_{32}; \quad \dot{\theta}_{33} = \dot{\theta}_{33}; \end{aligned} \quad (3.58)$$

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones definido en (3.58), las soluciones se pueden expresar de la forma $\dot{\Psi} = \mathbf{S}_3(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_3$, o de otra forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \\ \dot{\theta}_{41} \\ \dot{\theta}_{42} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{L}_{11} \\ \dot{L}_{12} \\ \dot{L}_{13} \end{pmatrix}_{15 \times 1} = \mathbf{S}_3(\Psi)_{15 \times 6} \begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \end{pmatrix}_{6 \times 1} \quad (3.59)$$

Como se ha estado haciendo, definamos como a $\mathbf{J}_3(\Psi)$ como la matriz que relaciona el vector de velocidad de juntas activas con el vector de entradas. En esta ocasión la matriz $\mathbf{J}_3(\Psi)$ será desplegada en dos matrices \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 . De tal forma que:

$$\mathbf{J}_3(\Psi) = (\mathbf{M}_1_{(6 \times 3)} \quad \mathbf{M}_2_{(6 \times 3)}) \quad (3.60)$$

$$\dot{q}_a = \mathbf{J}_3(\Psi) \dot{u}_3$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{s\theta_{11}}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} & \frac{c\theta_{11}}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} & -\frac{L_{41}c(\theta_{21}+\theta_{31}+\theta_{41})}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} \\ -\frac{s\theta_{12}}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} & \frac{c\theta_{12}}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} & -\frac{L_{42}c(\theta_{22}+\theta_{32}+\theta_{42})}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} \\ -\frac{s\theta_{13}}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} & \frac{c\theta_{13}}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} & -\frac{L_{43}c(\theta_{23}+\theta_{33}+\theta_{43})}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} \\ \frac{L_{31}c(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c(\theta_{11}+\theta_{21})}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} & \frac{L_{31}s(\theta_{11}+\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}s(\theta_{11}+\theta_{21})}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} & \frac{L_{21}L_{41}s(\theta_{31}+\theta_{41})+L_{31}L_{41}s\theta_{41}}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} \\ \frac{L_{32}c(\theta_{12}+\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c(\theta_{12}+\theta_{22})}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} & \frac{L_{32}s(\theta_{12}+\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}s(\theta_{12}+\theta_{22})}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} & \frac{L_{22}L_{42}s(\theta_{32}+\theta_{42})+L_{32}L_{42}s\theta_{42}}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} \\ \frac{L_{33}c(\theta_{13}+\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c(\theta_{13}+\theta_{23})}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} & \frac{L_{33}s(\theta_{13}+\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}s(\theta_{13}+\theta_{23})}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} & \frac{L_{23}L_{43}s(\theta_{33}+\theta_{43})+L_{33}L_{43}s\theta_{43}}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} \end{pmatrix} 6 \times 3$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} \\ \frac{L_{21}L_{31}s\theta_{31}}{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})+L_{21}c\theta_{21}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_{22}L_{32}s\theta_{32}}{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})+L_{22}c\theta_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_{23}L_{33}s\theta_{33}}{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})+L_{23}c\theta_{23}} \end{pmatrix} 6 \times 3 \quad (3.61)$$

Para obtener las singularidades, obtenemos aquellos valores para los cuales las columnas de las matrices \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 valen cero.

Primero, se obtienen los valores que vuelven cero las columnas de la matriz \mathbf{M}_1 . Sin embargo, por ejemplo, si se observan los renglones 1 y 4 de la matriz \mathbf{M}_1 , para que el renglón 1 de dicha matriz se vuelva nulo dos condiciones deben cumplirse de manera simultánea. Si esto se toma en cuenta, llegamos a los siguientes resultados.

Columna 1:

Columna 1 de la matriz \mathbf{M}_1 .

$$\begin{aligned} -\frac{s\theta_{1n}}{L_{3n}c(\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 & \theta_{1n} &= n_1\pi \\ \frac{L_{3n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c(\theta_{1n}+\theta_{2n})}{L_{31}c(\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 & \Rightarrow \theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ & & \theta_{1n}+\theta_{2n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \end{aligned}$$

Columna 2:

Columna 2 de la matriz \mathbf{M}_1 .

$$\begin{aligned} \frac{c\theta_{1n}}{L_{3n}c(\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 & \theta_{1n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ \frac{L_{3n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}s(\theta_{1n}+\theta_{2n})}{L_{3n}c(\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 & \Rightarrow \theta_{1n}+\theta_{2n}+\theta_{3n} &= n_1\pi \\ & & \theta_{1n}+\theta_{2n} &= n_1\pi \end{aligned}$$

Columna 3:

Columna 3 de la matriz \mathbf{M}_1 .

$$\begin{aligned} -\frac{L_{4n}c(\theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n})}{L_{3n}c(\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 & \theta_{2n}+\theta_{3n}+\theta_{4n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ \frac{L_{2n}L_{4n}s(\theta_{3n}+\theta_{4n})+L_{3n}L_{4n}s\theta_{4n}}{L_{3n}c(\theta_{2n}+\theta_{3n})+L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 & \Rightarrow \theta_{3n}+\theta_{4n} &= n_1\pi \\ & & \theta_{4n} &= n_1\pi \end{aligned}$$

Columnas 4, 5 y 6:

Columnas 1,2 y 3 de la matriz \mathbf{M}_2 .

$$\begin{aligned} -\frac{L_{3n}c(\theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{3n}c(\theta_{2n} + \theta_{3n}) + L_{2n}c\theta_{2n}} = 0 &\Rightarrow \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \\ \frac{L_{2n}L_{31}s\theta_{3n}}{L_{3n}c(\theta_{2n} + \theta_{3n}) + L_{2n}c\theta_{2n}} = 0 &\theta_{3n} = n_1\pi \end{aligned}$$

Como en los dos casos anteriores, los siguientes valores deben ser evitados, de lo contrario, la matriz $\mathbf{J}_3(\Psi)$ tendería a infinito.

$$\theta_{2n} \neq \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} \neq \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2}$$

La siguiente tabla resume los resultados:

$\begin{aligned} \theta_{1n} = n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ \theta_{1n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{4n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 3.3: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 3.

3.3.4. Solución 4

Llamemos $\dot{\mathbf{u}}_4$ a vector de entradas, de donde:

$$\dot{\mathbf{u}}_4 = (\dot{x}_{PO} \quad \dot{y}_{PO} \quad \dot{\theta}_{PO} \quad \dot{\theta}_{41} \quad \dot{\theta}_{42} \quad \dot{\theta}_{43})_{1 \times 6}^T \quad (3.62)$$

En este caso se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{1,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{2,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{3,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{5,1} = 0; \\ \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{6,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{7,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{8,1} = 0; \quad \mathbf{C}(\Psi, \dot{\Psi})_{9,1} = 0; \quad \dot{x}_{PO} = \dot{x}_{PO}; \\ \dot{y}_{PO} = \dot{y}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{PO} = \dot{\theta}_{PO}; \quad \dot{\theta}_{41} = \dot{\theta}_{41}; \quad \dot{\theta}_{42} = \dot{\theta}_{42}; \quad \dot{\theta}_{43} = \dot{\theta}_{43}; \end{aligned} \quad (3.63)$$

Cuando se resuelve el sistema de ecuaciones definido en (3.63), las soluciones se pueden expresar de la forma $\dot{\Psi} = \mathbf{S}_4(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_4$, o de otra forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{21} \\ \dot{\theta}_{22} \\ \dot{\theta}_{23} \\ \dot{\theta}_{31} \\ \dot{\theta}_{32} \\ \dot{\theta}_{33} \\ \dot{\theta}_{41} \\ \dot{\theta}_{42} \\ \dot{\theta}_{43} \\ \dot{L}_{11} \\ \dot{L}_{12} \\ \dot{L}_{13} \end{pmatrix}_{15 \times 1} = \mathbf{S}_4(\Psi)_{15 \times 6} \begin{pmatrix} \dot{x}_{PO} \\ \dot{y}_{PO} \\ \dot{\theta}_{PO} \\ \dot{\theta}_{41} \\ \dot{\theta}_{42} \\ \dot{\theta}_{43} \end{pmatrix}_{6 \times 1} \quad (3.64)$$

Ahora se toma la submatriz de $\mathbf{S}_4(\Psi)$ que relaciona las variables actuadas con las entradas. Esta matriz se denotará con $\mathbf{J}_4(\Psi)$ y cumple con lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{q}}_a &= \mathbf{J}_4(\Psi) \dot{\mathbf{u}}_4 \\
\mathbf{J}_4(\Psi) &= \begin{pmatrix} -\frac{s\theta_{11}}{L_{21}c\theta_{21}} & \frac{c\theta_{11}}{L_{21}c\theta_{21}} & -\frac{L_{41}c(\theta_{21}+\theta_{31}+\theta_{41})+L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})}{L_{21}c\theta_{21}} & \frac{L_{31}c(\theta_{21}+\theta_{31})}{L_{21}c\theta_{21}} & 0 & 0 \\ -\frac{s\theta_{12}}{L_{22}c\theta_{22}} & \frac{c\theta_{12}}{L_{22}c\theta_{22}} & -\frac{L_{42}c(\theta_{22}+\theta_{32}+\theta_{42})+L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})}{L_{22}c\theta_{22}} & 0 & \frac{L_{32}c(\theta_{22}+\theta_{32})}{L_{22}c\theta_{22}} & 0 \\ -\frac{s\theta_{13}}{L_{23}c\theta_{23}} & \frac{c\theta_{13}}{L_{23}c\theta_{23}} & -\frac{L_{43}c(\theta_{23}+\theta_{33}+\theta_{43})+L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})}{L_{23}c\theta_{23}} & 0 & 0 & \frac{L_{33}c(\theta_{23}+\theta_{33})}{L_{23}c\theta_{23}} \\ \frac{c(\theta_{11}+\theta_{21})}{c\theta_{21}} & \frac{s(\theta_{11}+\theta_{21})}{c\theta_{21}} & \frac{L_{41}s(\theta_{31}+\theta_{41})+L_{31}s\theta_{31}}{c\theta_{21}} & \frac{L_{31}s\theta_{31}}{c\theta_{21}} & 0 & 0 \\ \frac{c(\theta_{12}+\theta_{22})}{c\theta_{22}} & \frac{s(\theta_{12}+\theta_{22})}{c\theta_{22}} & \frac{L_{42}s(\theta_{32}+\theta_{42})+L_{32}s\theta_{32}}{c\theta_{22}} & 0 & \frac{L_{32}s\theta_{32}}{c\theta_{22}} & 0 \\ \frac{c(\theta_{13}+\theta_{23})}{c\theta_{23}} & \frac{s(\theta_{13}+\theta_{23})}{c\theta_{23}} & \frac{L_{43}s(\theta_{33}+\theta_{43})+L_{33}s\theta_{33}}{c\theta_{23}} & 0 & 0 & \frac{L_{33}s\theta_{33}}{c\theta_{23}} \end{pmatrix} \quad (3.65)
\end{aligned}$$

Para obtener las singularidades, obtenemos aquellos valores para los cuales las columnas de la matriz $\mathbf{J}_4(\Psi)$ valen cero. Sin embargo, por ejemplo, si se observan los renglones 1 y 4 de la matriz $\mathbf{J}_4(\Psi)$ se puede notar que para que el renglón 1 de dicha matriz se vuelva nulo dos condiciones deben de cumplirse simultáneamente. Sucede lo mismo con los otros renglones. Tomando en cuenta lo anterior, se llega a:

Columna 1:

$$\begin{aligned}
-\frac{s\theta_{1n}}{L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 \\
\frac{c(\theta_{1n}+\theta_{2n})}{c\theta_{2n}} &= 0
\end{aligned}
\Rightarrow \theta_{1n} = n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2}$$

Columna 2:

$$\begin{aligned}
\frac{c\theta_{1n}}{L_{2n}c\theta_{2n}} &= 0 \\
\frac{s(\theta_{1n}+\theta_{2n})}{c\theta_{2n}} &= 0
\end{aligned}
\Rightarrow \theta_{1n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = n_1\pi$$

Columna 3:

$$\begin{aligned}
-\frac{L_{4n}c(\theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n}) + L_{3n}c(\theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{2n}c\theta_{2n}} = 0 & \quad \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \\
\frac{L_{4n}s(\theta_{3n} + \theta_{4n}) + L_{3n}s\theta_{3n}}{c\theta_{2n}} = 0 & \Rightarrow \quad \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \\
& \quad \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \\
& \quad \theta_{3n} = n_1\pi
\end{aligned}$$

Columnas 4, 5 y 6:

$$\begin{aligned}
\frac{L_{3n}c(\theta_{2n} + \theta_{3n})}{L_{2n}c\theta_{2n}} = 0 & \Rightarrow \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\
-\frac{L_{3n}s\theta_{3n}}{c\theta_{2n}} = 0 &
\end{aligned}$$

De la matriz $\mathbf{J}_4(\Psi)$ observamos que el término $\cos\theta_{2n}$ aparece en el denominador de todos los términos, por lo que éste no debe ser cero, por lo tanto:

$$\theta_{2n} \neq \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2}$$

Resumiendo los resultados para esta solución, llegamos a la siguiente matriz:

$ \begin{aligned} \theta_{1n} &= n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ \theta_{1n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \end{aligned} $	$n_1 \in \mathbb{N}$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 3.4: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 4.

4.1.1. Singularidades de la cinemática directa

Estas singularidades tienen lugar cuando la matriz de la cinemática directa $\mathbf{J}_x(\mathbf{q})$ pierde rango. Para observar dicha matriz, revisar la fuente citada.

Las singularidades de la cinemática directa se presentan cuando:

1. Los eslabones distales son paralelos a los ejes coordenados x y y
2. Los eslabones distales convergen a un mismo punto

Entiéndase por eslabones distales aquéllos que tienen las juntas pasivas en sus dos extremos. En el caso de la figura (4.1), estos eslabones son $\overline{D_i B_i}$ o l_i . En nuestro problema, tales eslabones son los segmentos $\overline{C_n D_n}$ o los segmentos L_{3n} .

La condición 1) se cumple cuando, en lenguaje de los autores en (Ebrahimi y cols., 2008a), se tiene lo siguiente:

$$\cos \alpha_i = 0 \quad \sin \alpha_i = 0 \quad (4.1)$$

La condición 2) se cumple cuando, en lenguaje de los autores en (Ebrahimi y cols., 2008a), se tiene lo siguiente:

$$\sin(\alpha_i - \phi - \psi_i) = 0 \quad (4.2)$$

4.1.2. Singularidades de la cinemática inversa

Estas singularidades tienen lugar cuando la matriz de la cinemática directa $\mathbf{J}_q(\mathbf{q})$ pierde rango. Para observar dicha matriz, revisar la fuente citada.

Estas singularidades tienen lugar cuando se presenta lo siguiente (las dos expresiones son tomadas de forma exacta desde la fuente citada, se mantiene la misma notación):

$$\begin{aligned} \alpha_{i_{\Delta,*}} &= \frac{2n_1 + 1}{2} \cdot \pi + \tau_{i_{\Delta,*}} \\ \alpha_{i_{\Delta,*}} &= n_2 \cdot \pi + \theta_{i_{\Delta,*}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

En la ecuación (4.3) $n_1 = 0, 1, 2, \dots$ y $n_2 = 0, 1, 2, \dots$

Las condiciones en (4.3) indican que la matriz jacobina $\mathbf{J}_q(\mathbf{q})$ pierde rango cuando el camino que siguen las correderas son perpendiculares a los segmentos $\overline{B_i D_i}$, es decir cuando $\overline{B_i D_i}$ y $\overline{C_i O}$ forman un ángulo recto, según la figura (4.1), y cuando el segmento $\overline{A_i D_i B_i}$ está completamente “doblado” o “estirado”.

4.1.3. Singularidades combinadas (complejas)

Estas singularidades tienen lugar cuando las singularidades de la cinemática directa e inversa se presentan al mismo tiempo. No se presentan otras singularidades distintas en el artículo citado.

4.2. Singularidades en el presente trabajo

Para poder comparar las singularidades mencionadas en la sección anterior con las encontrada en este trabajo, primero vamos a adaptar, cuando sea posible, las anteriores a nuestra notación.

Las expresiones en (4.1) y (4.2) se puede expresar en nuestra notación, si se considera que: $\alpha_i = \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}$ y $\alpha_i - \phi - \psi_i = -\theta_{4n}$, por lo tanto dichas expresiones pueden ser escritas como:

De la ecuación (4.1):

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i = 0 &\Rightarrow \cos (\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) = 0 \\ \sin \alpha_i = 0 &\Rightarrow \sin (\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

De la ecuación (4.2):

$$\sin (\alpha_i - \phi - \psi_i) = 0 \Rightarrow -\sin \theta_{4n} = 0 \quad (4.5)$$

De igual forma, las expresiones en la ecuación (4.3) pueden ser escritas en nuestra notación observando que en la fuente citada los ángulos son medidos respecto al sistema inercial o absoluto. Las equivalencias, por llamarle de algún modo, con nuestra notación son las siguientes: $\alpha_{i_{\Delta,*}} = \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n}$, $\tau_{i_{\Delta,*}} = \theta_{1n}$, $\theta_{i_{\Delta,*}} = \theta_{1n} + \theta_{2n}$ y $n_1 = n_2$. De donde se llega a lo siguiente:

$$\alpha_{i_{\Delta,*}} = \frac{2n_1 + 1}{2} \cdot \pi + \tau_{i_{\Delta,*}} \Rightarrow \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{2n_1 + 1}{2} \cdot \pi + \theta_{1n} \Rightarrow \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{2n_1 + 1}{2} \cdot \pi$$

$$\alpha_{i_{\Delta,*}} = n_2 \cdot \pi + \theta_{i_{\Delta,*}} \Rightarrow \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = n_1 \cdot \pi + \theta_{1n} + \theta_{2n} \Rightarrow \theta_{3n} = n_1 \cdot \pi$$

De lo anterior, se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{2n_1 + 1}{2} \cdot \pi \\ \theta_{3n} &= n_1 \cdot \pi \end{aligned} \quad (4.6)$$

Es decir, las expresiones en la ecuación (4.3) y (4.6) son equivalentes.

Ahora, se compararán cada los resultados de cada uno de los cuatro casos estudiados anteriormente con los encontrados en la literatura. Para tal fin, se tomarán las tablas (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) del capítulo anterior.

Del mismo modo, en la sección anterior el argumento en $\mathbf{J}_q(\mathbf{q})$ o $\mathbf{J}_x(\mathbf{q})$, en otras palabras \mathbf{q} , es equivalente a Ψ . Además, las singularidades combinadas (complejas) tampoco se presentan en nuestro análisis.

A partir de este punto, se hará referencia a las figuras (3.1), (3.2), (3.3).

4.3. Resultados solución 1

Según la tabla (3.1), se obtuvo lo siguiente:

$\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2}$ $\theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = n_1\pi$ $\theta_{4n} = n_1\pi$ $\theta_{3n} = n_1\pi$	$n_1 \in \mathbb{N}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 4.1: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 1.

Si comparamos el renglón uno y dos de la tabla (4.1), se observa que claramente éstos coinciden con los valores mostrados en (4.4). El renglón tres de la misma tabla coincide con el valores mostrado en (4.5). Asimismo, los valores mostrados en los dos últimos renglones de la tabla en cuestión coinciden con (4.6).

El primer resultado de la tabla anterior indica que existe una configuración singular cuando todos los segmentos $\overline{C_n D_n}$, eslabones L_{3n} , son paralelos al eje y_0 se manera simultánea.

De igual forma, el segundo resultado indica que existe una singularidad cuando cada uno de los segmentos $\overline{C_n D_n}$, eslabones L_{3n} , son paralelos simultáneamente al eje x_0 . Mientras que la tercera expresión de la misma tabla señala que existe una singularidad cuando los segmentos $\overline{C_n D_n}$ y $\overline{D_n P}$ -eslabones L_{3n} y L_{4n} - son colineales al mismo tiempo, es decir, el segmento $\overline{C_n P}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’. Finalmente, la última condición en la tabla (4.1) indica que existe una configuración singular cuando los segmentos $\overline{B_n C_n}$ y $\overline{C_n D_n}$ son colineales, es decir, el segmento $\overline{B_n D_n}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’.

Antes de pasar a la segunda solución, es muy importante observar que de la matriz $\mathbf{J}_1(\Psi)$, ecuación (3.52) - columnas 4, 5 y 6-, podría pensarse que existe otros valores para los cuales dichas columnas pierden rango, pero esto no sucede por las siguientes razones:

- Las columnas 4, 5 y 6 nunca pierden rango; éstas contienen valores unitarios
- El renglón 1, por ejemplo, nunca perdería rango porque, tomando en cuenta la primera y segunda columna, observamos que para que esto ocurra es necesario que los eslabones L_{3n} sean paralelos a los dos ejes x_0 y y_0 simultáneamente; esto nunca pasa. Lo anterior puede realizarse con los cinco renglones restantes

Además, las dos primeras expresiones de la tabla (4.1) indican singularidades del manipulador cuando éste es considerado como un mecanismo. Por otra parte, las dos últimas expresiones de dicha tabla corresponden a singularidades por cada cadena, lo cual quiere decir que es

suficiente con que una cadena cumpla con las expresiones citadas para que las singularidades tengan lugar.

Como resultado de lo anterior y como diferencia de lo encontrado en la literatura, una singularidad no se presenta, a saber, aquélla que tiene lugar cuando los segmentos $\overline{C_n D_n}$ y $\overline{A_n G}$ forman un ángulo recto (eslabones L_{3n} son perpendiculares a $\overline{A_n G}$).

Sin embargo, los resultados encontrados son idénticos a los encontrados en la literatura, la última singularidad mostrada en la tabla (4.1), según con la nomenclatura de (Liao y cols., 2004), es una singularidad del efector final, mientras que las tres restantes son singularidades de actuador. Esto es, en la literatura las tres primeras singularidades de la tabla (4.1) son llamadas singularidades de la cinemática directa y la restante es llamada de la cinemática inversa.

4.4. Resultados solución 2

Según la tabla (3.2), se obtuvo lo siguiente:

$\begin{aligned} \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \\ \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} &= n_1\pi \\ \theta_{4n} &= n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 4.2: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 2.

Como en se discutió anteriormente, las primera dos expresiones de la tabla (4.2) apuntan a que existen singulares cuando los segmentos $\overline{C_n D_n}$, eslabones L_{3n} , son paralelos al eje y_0 y x_0 , respectivamente.

La tercera expresión de la misma tabla, señala que existe una configuración singular cuando los segmentos $\overline{C_n D_n}$ y $\overline{D_n P}$ -eslabones L_{3n} y L_{4n} - son colineales, es decir, el segmento $\overline{C_n P}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’.

Entretanto, la última expresión indica que existe una singularidad cuando los segmentos $\overline{C_n D_n}$ y $\overline{A_n G}$ forman un ángulo recto (eslabones L_{3n} son perpendiculares a $\overline{A_n G}$).

De la misma manera como se explicó en el caso anterior, al revisar la matriz $\mathbf{J}_2(\Psi)$, ecuación (3.56) - columnas 4, 5 y 6-, podría pensarse que existe otros valores para los cuales dichas columnas pierden rango, pero esto no sucede por las mismas razones que se dieron en el apartado de la solución 1.

Adicionalmente, las dos primeras expresiones mostradas en la tabla (4.2) son aquéllas que deben de cumplirse en todas las cadenas para que las singularidades se presenten. Por ejemplo, la primera expresión debe de presentarse en las tres cadenas que conforman el manipulador con el objetivo de alcanzar la configuración singular, lo mismo que para la segunda expresión. Con lo que se puede afirmar, que las dos primeras condiciones de la tabla (4.2) son las singularidades del manipulador considerado como un mecanismo. Por otra parte, las dos

últimas ecuaciones de la misma tabla corresponden a singularidades del manipulador por cadena, lo que quiere decir que la configuración singular tiene lugar cuando por lo menos una cadena cumple con dichas ecuaciones.

De lo anterior, resulta como diferencia con lo encontrado en la literatura que una singularidad no se presenta, a saber, aquélla que tiene lugar cuando los segmentos $\overline{B_n C_n}$ y $\overline{C_n D_n}$ son colineales, es decir, el segmento $\overline{B_n D_n}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’.

Como se observa, los resultados de las soluciones 1 y 2 son muy parecidos; tienen pequeñas diferencias.

¿Cuál es la diferencia entre las soluciones 1 y 2?

En la solución 1 no existe la última condición de la tabla (4.2) y viceversa. Sin embargo, es muy interesante que las singularidades que no se presentan son de actuación, lo cual es de esperarse porque al momento de hacer entrada alguno de los valores actuados, las singularidades relacionadas con éstos se pierden.

4.5. Resultados solución 3

Según la tabla (3.3), se obtuvo lo siguiente:

$\begin{aligned} \theta_{1n} &= n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ \theta_{1n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} + \theta_{3n} = n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{4n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 4.3: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 3.

Con base en la geometría del manipulador, las dos primeras expresiones -por supuesto indican singularidades- de la tabla (4.3) nunca tendrían lugar. Porque el ángulo θ_{1n} no toma valores de 0° ni 90° , y múltiplos de estos dos valores. De hecho, si lo anterior ocurriese, los segmentos sobre los que se desplazan las juntas prismáticas serían horizontales o verticales, lo cual no es el caso. Por lo tanto, las columnas 1 y 2 de la matriz $\mathbf{J}_3(\Psi)$, ecuación (3.61) nunca toman valores nulos, es decir, no existen en nuestro mecanismo.

Del tercer renglón, se obtiene el siguiente resultado:

$$\theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{4n} = n_1\pi \Rightarrow \theta_{2n} = \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{3n} = 0$$

Del cuarto renglón de la tabla (4.3), tenemos lo siguiente:

$$\theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \Rightarrow \theta_{2n} = \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi$$

Del último renglón de la misma tabla, llegamos a lo siguiente:

$$\theta_{2n} \neq \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} \neq \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \Rightarrow \theta_{2n} \neq \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} \neq 0$$

Los resultados anteriores nos sirven para reescribir las singularidades de la tabla (4.3) de la siguiente manera:

$\begin{aligned} \theta_{2n} &= \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{3n} = 0 \\ \theta_{2n} &= \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} = 0 \end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 4.4: Singularidades finales del manipulador 3-PRRR, solución 3.

De la tabla anterior, es evidente que los valores para los cuales las singularidades se presentan cuando *i*) el segmento $\overline{B_n C_n}$ -eslabón L_{2n} - es perpendicular al segmento $\overline{A_n G}$, los segmentos $\overline{C_n D_n}$ y $\overline{D_n P}$ -eslabones L_{3n} y L_{4n} - son colineales, es decir, el segmento $\overline{C_n P}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’, y cuando los segmentos $\overline{B_n C_n}$ y $\overline{C_n D_n}$ -eslabones L_{2n} y L_{3n} - son colineales, pero en este caso, solo cuando el segmento $\overline{B_n D_n}$ está completamente estirado. Y -renglón 2- *ii*) cuando el segmento $\overline{B_n C_n}$ -eslabón L_{2n} - es perpendicular al segmento $\overline{A_n O}$ y el segmento $\overline{B_n D_n}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’.

Es conveniente señalar que los valores del primer renglón de la tabla (4.4) corresponden a singularidades del manipulador 3-PRRR considerando a éste como un mecanismo compuesto por tres cadenas, es decir, son configuraciones singularidades que todas las cadenas que constituyen al manipulador deben de adoptar para que la matriz $\mathbf{J}_3(\Psi)$ pierda rango. Por otro parte, las condiciones expresadas en el segundo y tercer renglón de la tabla antes citada corresponden a singularidades del mismo manipulador, pero viendo a éste por cadena, en otras palabras, son los valores para los cuales las singularidades tienen lugar en cada cadena.

Los dos primeros resultados de la tabla (4.5) pueden clasificarse como singularidades del efector final, mientras que el último resultado como singularidad de actuador.

4.6. Resultados solución 4

Según la tabla (3.4), se obtuvo lo siguiente:

$\begin{aligned} \theta_{1n} &= n_1\pi \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \\ \theta_{1n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{1n} + \theta_{2n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} + \theta_{3n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} &= \frac{\pi(2n_1+1)}{2} \end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 4.5: Singularidades del manipulador 3-PRRR, solución 4.

Para analizar las singularidades mostradas en la tabla (4.5) llevamos a cabo la misma metodología que para la solución 3.

De los renglones 1 y 2 de la tabla (4.5), observamos que el ángulo θ_{1n} nunca toma valores de 0° o 90° , incluyendo múltiplos de los mismos. Las razones son exactamente las mismas que para el caso anterior; debido a la geometría del manipulador. Por lo que dichas singularidades no se presentan y pueden ser descartadas.

Del renglón 3 de la misma tabla se tiene:

$$\begin{aligned}\theta_{2n} + \theta_{3n} + \theta_{4n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \wedge \theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \wedge \theta_{3n} + \theta_{4n} = n_1\pi \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \Rightarrow \theta_{2n} = \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \wedge \theta_{4n} = 0\end{aligned}$$

Del renglón 4 de la misma tabla en cuestión:

$$\theta_{2n} + \theta_{3n} = \frac{\pi(2n_1 + 1)}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \Rightarrow \theta_{2n} = \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi$$

Con todas las consideraciones anteriores, se puede escribir la tabla (4.5) de una forma simplificada, de tal forma que explique las singularidades del manipulador 3-PRRR, de donde:

$\begin{aligned}\theta_{2n} = \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \wedge \theta_{4n} = 0 \\ \theta_{2n} = \frac{\pi}{2} \wedge \theta_{3n} = n_1\pi \\ \theta_{2n} = \frac{\pi(2n_1+1)}{2}\end{aligned}$	$n_1 \in \mathbb{N}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------

Tabla 4.6: Singularidades finales del manipulador 3-PRRR, solución 4.

La primera singularidad de la tabla (4.6) se presenta cuando el segmento $\overline{B_n C_n}$ -eslabón L_{2n} - forma un ángulo recto con el segmento $\overline{A_n G}$, los eslabones L_{2n} y L_{3n} son colineales -segmento $\overline{B_n D_n}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’- y el segmento $\overline{D_n P}$ está completamente “estirado”.

De igual forma, la segunda singularidad se presenta cuando el segmento $\overline{B_n C_n}$ -eslabón L_{2n} - forma un ángulo recto con el segmento $\overline{A_n G}$ y los eslabones L_{2n} y L_{3n} son colineales -segmento $\overline{B_n D_n}$ se encuentra totalmente “estirado” o ‘doblado’-.

Para terminar, la última singularidad de la tabla (4.6) ocurre cuando el eslabón L_{2n} forma un ángulo recto con $\overline{A_n G}$.

Como se hizo en la sección anterior, se debe señalar que los valores del primer renglón de la tabla (4.6) corresponden a singularidades del manipulador 3-PRRR considerando a éste como un mecanismo compuesto por tres cadenas, es decir, son configuraciones singularidades que todas las cadenas que constituyen al manipulador deben de adoptar para que la matriz $\mathbf{J}_4(\Psi)$ pierda rango. Por otro lado, las condiciones expresadas en el segundo y tercer renglón de la tabla antes citada corresponden a singularidades del mismo manipulador, pero viendo a éste por cadena, en otras palabras, son los valores para los cuales las singularidades tienen lugar por cadena.

Las dos primeras singularidades pueden ser clasificadas como singularidades del efector final, mientras que la última singularidad de actuador.

Resumiendo los resultados anteriores, podemos decir que las singularidades para cada solución presentada son diferentes y, por supuesto, dependen del vector que se considere como entradas al sistema.

En el siguiente capítulo, se hará la discusión y conclusiones de este trabajo escrito.

Capítulo 5

Discusión y conclusiones

En este trabajo se obtiene el modelo cinemático diferencial del manipulador paralelo plano redundante configuración triángulo-estrella 3-PRRR, y partiendo de éste, se llega a cuatro posibles casos de solución para el problema cinemático inverso del manipulador. Además, las singularidades para las cuatro soluciones analizadas son todas las que se presentan y es muy importante mencionar que éstas, sin excepción, son evitables, porque depende únicamente de ciertas configuraciones del manipulador.

Los resultados mostrados en este trabajo muestran, sin lugar a dudas, que las configuraciones singulares del manipulador 3-PRRR dependen de cuáles variables sean sus entradas y cuáles las variables actuadas.

Respecto a los trabajos encontrados en la literatura, las dos primeras soluciones coinciden con lo encontrado en otras fuentes, mientras que las dos última soluciones no habían sido mostradas.

Sin embargo, un hecho muy importante que debe de ser expresado, las singularidades en general se presentan, salvo en las excepciones ya discutidas con anterioridad, cuando dos eslabones consecutivos son colineales. Lo anterior, desde el punto de vista geométrico, significa que el triángulo formado por los dos eslabones consecutivos deja de existir. Con esto en mente, los ángulos interiores y exteriores de dicho triángulo también dejan de existir, por lo que se pierde la capacidad de controlar la posición del efector final del manipulador, es decir, se presenta una singularidad.

Por otra parte, debe señalarse que los casos de estudio aquí presentados se realizan siempre para alguna combinación del vector de postura del efector final del manipulador y un vector de variables actuadas y pasivas, por lo que aquellos casos para los cuales el vector de postura no forma parte de las entradas al sistema no fueron tomados en cuenta.

El estudio presentado en este trabajo difiere de todos los encontrados en la literatura, principalmente por la metodología utilizada, la cual está en camino de ser publicada por el Dr. Víctor Javier González Villela, siendo parte de misma que se presenta una solución del problema cinemático inverso para un manipulador redundante y ésta es única dependiendo, como se dijo anteriormente, de las variables de entrada-salida. Es importante recalcar que metodología seguida en este trabajo puede ser aplicada a manipuladores redundantes y no redundantes.

Por otra parte, si comparamos las figuras (3.4) y (1.1), observamos que el espacio nulo que

se obtuvo es diferente del mostrado en la literatura. Específicamente, el espacio nulo con el que se trabajó genera movimiento en el manipulador y en el efector final, mientras que en la literatura se lee que dicho espacio es aquel que no mueve al efector final pero sí a las cadenas del mecanismo. La diferencia radica al momento de igualar las ecuaciones cinemáticas diferenciales a cero. Es decir, se obtienen los valores para los cuando el mecanismo se mueve como un conjunto. Además, se presenta una notación para pose, siendo ésta un concepto que abarca los conceptos de postura y configuración.

Por último, dentro del trabajo futuro, podría pensarse en una propuesta de control para el manipulador 3-PRRR siguiendo la misma metodología que este trabajo o, incluso, la construcción de un modelo de este manipulador para comprobar lo que aquí se ha mostrado, con el objetivo de poder utilizar este tipo de manipuladores en aplicaciones prácticas y, tal vez, sustituir a sus contrapartes no redundantes, los cuales presentan muchos inconvenientes.

No obstante, el trabajo futuro para este manipulador aún es largo y sumamente interesante.

Referencias

- Ayres, F. (1978). *Teoría y problemas de matrices*. McGraw-Hill,.
- Barrientos, A. (2007). *Fundamentos de robótica* (Inf. Téc.). e-libro, Corp.
- Bonev, I. A. (2002). *Geometric analysis of parallel mechanisms*. Université Laval Canada.
- Cha, S.-H., Lasky, T., y Velinsky, S. (2009). Determination of the kinematically redundant active prismatic joint variable ranges of a planar parallel mechanism for singularity-free trajectories. *Mechanism and Machine Theory*, 44(5), 1032–1044.
- Chen, G., Wang, H., Zhao, Y., y Lin, Z. (2009). A kind of kinematically redundant planar parallel manipulator for optimal output accuracy. En *The asme international design engineering technical conferences*.
- Ebrahimi, I., Carretero, J. A., y Boudreau, R. (2007). 3-prrr redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses. *Mechanism and Machine Theory*, 42(8), 1007–1016.
- Ebrahimi, I., Carretero, J. A., y Boudreau, R. (2008a). A family of kinematically redundant planar parallel manipulators. *Journal of Mechanical Design*, 130(6), 062306.
- Ebrahimi, I., Carretero, J. A., y Boudreau, R. (2008b). Kinematic analysis and path planning of a new kinematically redundant planar parallel manipulator. *Robotica*, 26(3), 405–413.
- Fahimi, F. (2008). *Autonomous robots: modeling, path planning, and control* (Vol. 107). Springer Science & Business Media.
- Firmani, F., Zibil, A., Nokleby, S. B., y Podhorodeski, R. P. (2008). Wrench capabilities of planar parallel manipulators. part ii: Redundancy and wrench workspace analysis. *Robotica*, 26(6), 803–815.
- Fontes, J. V., Santos, J. C., y da Silva, M. M. (2014). Optimization strategies for actuators of kinematically redundant manipulators to achieve high dynamic performance. En *Robotics: Sbr-lars robotics symposium and robocontrol (sbr lars robocontrol), 2014 joint conference on* (pp. 31–36).
- Gosselin, C., y Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *IEEE transactions on robotics and automation*, 6(3), 281–290.

- Kotlarski, J., Heimann, B., y Ortmaier, T. (2011). Experimental validation of the influence of kinematic redundancy on the pose accuracy of parallel kinematic machines. En *Robotics and automation (icra), 2011 ieee international conference on* (pp. 1923–1929).
- Liao, H., Li, T., y Tang, X. (2004). Singularity analysis of redundant parallel manipulators. En *Systems, man and cybernetics, 2004 ieee international conference on* (Vol. 5, pp. 4214–4220).
- Lucas, M., Mills, J. K., y Benhabib, B. (2017). A review of redundant parallel kinematic mechanisms. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 86(2), 175–198.
- Maltsev, A. I., y Vega, C. (1972). *Fundamentos de álgebra lineal*. Mir Moscow.
- Martínez-Zamudio, P., González-Villela, V. J., López-Parra, M., y Ramírez-Reivich, A. C. (2015). Cinemática diferencial de un manipulador paralelo plano 3rrr-(rrr) v con actuación virtual indirecta. *Ingeniería mecánica, tecnología y desarrollo*, 5(3), 321–331.
- Martínez Zamudio, P. (2015). *Manipulador paralelo plano 3Rrr-(rrr)_v con actuación virtual indirecta*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Merlet, J.-P. (1996). Redundant parallel manipulators. *Laboratory Robotics and Automation*, 8(1), 17–24.
- Merlet, J.-P. (2006). *Parallel robots* (Vol. 128). Springer Science & Business Media.
- Mohamed, M. G., y Gosselin, C. M. (2005). Design and analysis of kinematically redundant parallel manipulators with configurable platforms. *IEEE Transactions on Robotics*, 21(3), 277–287.
- Müller, A. (2013). On the terminology and geometric aspects of redundant parallel manipulators. *Robotica*, 31(1), 137–147.
- Pandilov, Z., y Dukovski, V. (2014). Comparison of the characteristics between serial and parallel robots. *Acta Technica Corviniensis-Bulletin of Engineering*, 7(1), 143.
- Park, F., y Kim, J. W. (1999). Singularity analysis of closed kinematic chains. *TRANSACTIONS-AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN*, 121, 32–38.
- Pechev, A. N. (2008). Inverse kinematics without matrix inversion. En *Robotics and automation, 2008. icra 2008. ieee international conference on* (pp. 2005–2012).
- Rakotomanga, N., y Bonev, I. A. (2010). Completely eliminating the singularities of a 3-dof planar parallel robot with only one degree of actuator redundancy. En *Proceedings of the 2010 asme design engineering technical conferences, detc2010-28829*.
- Santos, J. C., Rocha, D. M., y da Silva, M. M. (2013). Performance evaluation of kinematically redundant planar parallel manipulators.

- Simas, H., Dias, A., y Martins, D. (2012). Extended jacobian for redundant robots obtained from the kinematics constraint. En *Abcm symposium series in mechatronics* (Vol. 5, pp. 1005–1014).
- Šoch, M., y Lórencz, R. (2005). Solving inverse kinematics—a new approach to the extended jacobian technique. *Acta Polytechnica*, 45(2).
- Tsai, L.-W. (1999). *Robot analysis*. John Wiley & Sons New York.
- Varalakshmi, K., y Srinivas, J. (2015). Optimum design of kinematically redundant planar parallel manipulator following a trajectory. *Int J Mater Mech Manufact*, 3(May (2)), 74–79.
- Wang, J., Wu, J., Li, T., y Liu, X. (2009). Workspace and singularity analysis of a 3-dof planar parallel manipulator with actuation redundancy. *Robotica*, 27(1), 51–57.