UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE DUALIDAD DE STONE EN ANILLOS CONMUTATIVOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

JAIME ALEJANDRO GARCÍA VILLEDA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANK PATRICK MURPHY HERNÁNDEZ
2017

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido Paterno	García
Apellido Materno	Villeda
Nombres	Jaime Alejandro
Teléfono	11-08-77-50
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Número de Cuenta	308221031
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Doctor
Apellido Paterno	Murphy
Apellido Materno	Hernández
Nombre	Frank Patrick
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Doctor
Apellido Paterno	Peláez
Apellido Materno	Menaldo
Nombres	José Pablo
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Doctor
Apellido Paterno	Rincón
Apellido Materno	Mejía
Nombres	Hugo Alberto
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Doctor
Apellido Paterno	Ríos
Apellido Materno	Montes
Nombre	José
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Doctor
Apellido Paterno	Alvarado
Apellido Materno	García
Nombre	Alejandro
7. Datos del trabajo escrito	Datos del trabajo escrito
Título	Algunas aplicaciones del teorema de Dualidad de Stone en anillos conmutativos.
Número de páginas	117 páginas
Año	2017

Agradecimientos

Siempre he pensado que esto de agradecer no es lo mio pero ahí voy:

Para mi papá Jaime y mi mamá Adriana, sin su confianza y constante apoyo esto no hubiera sido posible, de verdad no sé de que manera puedo agradecerles por todo lo que han hecho por mí.

Para mis hermanas Cynthia, Liliana, Adriana y Mariana, gracias por todos estos años de amistad y paciencia que me han tenido. También agradezco a mi tío Neri por su constante preocupación por mí y mi carrera.

Para el Dr. Frank Murphy, muchas gracias por toda la confianza y apoyo que has depositado en mí. También estoy en deuda contigo amigo.

Para mis amigas Mariana y Adriana Rosas, gracias por sacarme una sonrisa cada fin de semana y darme fuerzas para continuar aunque el camino se viera muy oscuro. También agradezco a todos los amigos que he hecho a lo largo de los últimos años, sin sus sensatos consejos seguramente este trabajo aún estuviera inconcluso. Muy en especial quiero agradecer a Iván, Luis, Alberto, Lore, Paty, Daysi y Adri, gracias por su apoyo.

Para finalizar estoy muy agradecido con cada uno de los sinodales por toda la disposición que tuvieron para revisar este trabajo, por el buen trato que tuvieron hacia mí y por todos sus comentarios y sugerencias, muchas gracias.

Índice general

Introducción

El estudio de las álgebras de Boole se inició con los trabajos de Boole (1847-1854) y Peirce (1880), quienes se dedicaron a estudiar puramente álgebras de proposiciones o clases. Fueron Whitehead (1898) y Huntington (1904) quienes para su estudio tomaron una perspectiva más abstracta. Un análisis del periodo de tiempo en que se desarrollaron dichos trabajos muestra que si la teoría de grupos puede considerarse el área más antigua del álgebra abstracta, las álgebras de Boole puede reclamar el segundo sitio, sin embargo hay una diferencia muy importante entre el estudio de ambas áreas en el siglo XX y esta fue marcada por los trabajos de Stone.

A diferencia de los pioneros en el estudio de las álgebras de Boole, Stone no era un algebrista ni un lógico, él se dedicaba al análisis funcional, concretamente al estudio de operadores en espacios de Hilbert, donde algunos de sus trabajos eran en torno al álgebra de Boole de proyecciones ortogonales conmutativas. Dicha álgebra de Boole se escapa del resultado clásico de clasificación probado por Lindenbaum y Tarski que afirma qué las álgebras de Boole isomorfas a un álgebra de subconjuntos son precisamente las que son completas y atómicas. Por otro lado tampoco es obvio que exista una representación como subálgebra de un conjunto potencia para dicha estructura. Así, para encontrar dicha representación Stone comienza un estudio topológico en la familia de ultrafiltros de un álgebra de Boole, idea que no era parte de los métodos algebraicos de esa época. Dicha idea se describe brevemente a continuación mediante una analogía.

En geometría algebraica clásica a todo anillo conmutativo unitario R se le asocia el conjunto de todos sus ideales primos, el que se denota por $\mathbf{Zar}(R)$. Dicho conjunto tiene una topología cuyos abiertos es la familia de subconjuntos $\tau = \{\mathcal{O}_a\}_{a \in R}$, definida mediante:

$$\mathcal{O}_a = \{\mathfrak{P} \in \mathbf{Zar}(R) \mid a \notin \mathfrak{P}\}.$$

Al conjunto $(\mathbf{Zar}(R), \tau)$ se le conoce como el espectro de Zariski del anillo R.

Como espacio topológico el espectro de Zariski es un espacio T_0 que en general no es Hausdorff y además es casi-compacto. También, todo subconjunto cerrado de $\mathbf{Zar}(R)$ es unión finita de conjuntos cerrados a los que se les conoce como conjuntos irreducibles y en particular, $\mathbf{Zar}(R)$ tiene una descomposición de este tipo.

La asignación que a todo anillo conmutativo unitario le asigna su espectro de Zariski resulta ser funtorial al definir para $f : R \to S$ un morfismo de anillos, $\mathbf{Zar}(f) : \mathbf{Zar}(S) \to \mathbf{Zar}(R)$ mediante $\mathbf{Zar}(f)(\mathcal{P}) = f^{-1}(\mathcal{P})$. La asignación $\mathbf{Zar} : \mathbf{R1ng}^{op} \to \mathbf{Top}$ se conoce como el funtor espectro de Zariski y es ampliamente estudiado en álgebra conmutativa y geometría algebraica.

Por otro lado, se tiene una segunda asignación que a todo anillo conmutativo unitario le asocia un espacio topológico. Dicha asignación asocia a un anillo conmutativo unitario el conjunto de todos los ultrafiltros del álgebra de Boole de sus idempotentes, el que se denota por $\mathbf{Sp}(R)$. De manera análoga a lo que sucede con $\mathbf{Zar}(R)$, la familia de subconjuntos $\tau' = \{\mathcal{O}_e\}_{e\in\mathbf{Idem}(R)}$, cuyos elementos están definidos mediante:

$$\mathcal{O}_e = \{\mathcal{U} \in \mathbf{Sp}(R) \mid e \notin \mathcal{U}\}$$

es una topología en $\mathbf{Sp}(R)$ y al espacio topológico $(\mathbf{Sp}(R), \tau')$ se le conoce como el espectro de Pierce del anillo R.

A diferencia del espectro de Zariski de un anillo, el espectro de Pierce es un espacio Hausdorff y compacto. De hecho, este espacio es lo que se conoce como un espacio topológico profinito.

Además, el espectro de Pierce tiene algunas propiedades análogas a las del espectro de Zariski, por ejemplo, todo subconjunto abierto-cerrado del $\mathbf{Sp}(R)$ es unión finita de subconjuntos abiertos-cerrados del espectro de Pierce y así, nuevamente, $\mathbf{Sp}(R)$ posee una descomposición de esta forma. Además, todo morfismo de anillos $f : R \to S$ induce una función continua $\mathbf{Sp}(f) : \mathbf{Sp}(S) \to \mathbf{Sp}(R)$ cuya regla de correspondencia es $\mathbf{Sp}(f)(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U})$. La asignación $\mathbf{Sp} : \mathbf{R1ng}^{op} \to \mathbf{Prof}$ resulta ser un funtor que se conoce como el funtor espectro de Pierce, donde $\mathbf{Prof}$ denota la categoría de espacios topológicos profinitos.

El objetivo de este trabajo es estudiar dicho funtor usando el teorema de Dualidad de Stone, el cual establece una antiequivalencia entre la categoría de álgebras de Boole y la categoría de espacios topológicos profinitos.

Un espacio topológico es profinito si es límite de un sistema proyectivo de espacios topológicos discretos y finitos. Para entender dicha definición es necesario conocer el concepto de límite de un funtor y por lo tanto en el primer capítulo se estudian los conceptos de límite de un sistema proyectivo y el de límite de un funtor. Se dan algunos ejemplos de límites que entre otras cosas muestran que este concepto generaliza algunas construcciones básicas de la teoría de categorías y se demuestra que en el caso de la categoría de conjuntos, el límite proyectivo de un sistema proyectivo coincide con el límite de dicho funtor. Dicho teorema motiva una manera de definir el límite de un sistema proyectivo de espacios topológicos y con esto se tiene como consecuencia la existencia de límites para sistemas proyectivos en la categoría de espacios topológicos. Este resultado es de gran importancia pues permite construir un espacio profinito dado cualquier sistema proyectivo de espacios topológicos finitos y discretos.

Sin embargo, aparece la pregunta de: ¿cómo determinar de manera sencilla si un espacio topológico es profinito?, cosa que de la definición es muy difícil. Así, el segundo capítulo está destinado al estudio de los espacios topológicos profinitos. Para esto se introducen la noción de espacio totalmente disconexo y la de espacio totalmente separado, las cuales son estudiadas y se muestra que la segunda noción es más fuerte que la primera pero no coinciden en general. En este capítulo se define la categoría de espacios topológicos profinitos y se demuestra un importante teorema de caracterización de dichos espacios, a saber: un espacio topológico es profinito si y sólo si es compacto y totalmente separado. Usando este teorema se dan algunos ejemplos de espacios topológicos profinitos.

El tercer capítulo está dedicado a la demostración del teorema de Dualidad de Stone. Así, en este capítulo se construyen las transformaciones naturales que permiten obtener la antiequivalencia de categorías de la que habla dicho teorema y en la construcción de dichas transformaciones se establecen también algunos resultados de estructura para las categorías de álgebras de Boole y de espacios topológicos profinitos. También se muestra una “segunda versión” del teorema de Dualidad de Stone la cual establece una antiequivalencia entre la categoría de anillos de Boole y la categoría de espacios topológicos profinitos.

En el cuarto capítulo se da la construcción del funtor espectro de Pierce de un anillo conmutativo unitario y de algunos espacios asociados a este funtor. Para esto, primero se define el concepto de ideal regular y se obtienen algunas propiedades de esta familia de ideales. También se estudian algunas propiedades de los ideales regulares máximos y después de mostrar su existencia se da una topología en dicho conjunto. Así, una vez definido el espectro de Pierce de un anillo conmutativo unitario, se demuestra que este espacio topológico es homeomorfo al de los ideales regulares máximos del anillo en cuestión. Este resultado permite definir el espacio estructural de Pierce de un anillo y el capítulo termina estudiando algunas propiedades de este espacio.

Con respecto al penúltimo capítulo, este está dedicado al uso del teorema de Dualidad de Stone para demostrar que el funtor espectro de Pierce tiene un adjunto derecho. Dicha adjunción tiene como consecuencia un resultado que permite conocer cuando el adjunto derecho del espectro de Pierce es fiel y pleno, a saber, cuando el anillo en cuestión tiene exactamente dos idempotentes. Posteriormente se utiliza nuevamente el funtor espectro de Pierce para definir un nuevo funtor y se demuestra que dicho funtor también tiene un adjunto derecho.

Para terminar, en el último capítulo se discuten algunas conclusiones y aplicaciones de teoría desarrollada y se dan referencias para el estudio de dichas aplicaciones.

Capítulo 1

Límites.

A lo largo de este trabajo **Set** denotará la categoría de conjuntos y **Top** la categoría de espacios topológicos. También, el conjunto potencia de un conjunto X se denota por $\mathcal{P}(X)$, la clase de objetos de una categoría $\mathbb{A}$ se denota por $\mathbb{A}$ y la categoría opuesta a dicha categoría por $\mathbb{A}^{op}$. Además, los conjuntos unitarios en los que no importa quien es su elemento se escribirán como $\{pt\}$.

En este capítulo I denotará una categoría pequeña y $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ dos categorías.

1. El límite proyectivo de un sistema proyectivo.

Se recuerda la definición de transformación natural.

Definición 1.1. *Sean $F, G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ dos funtores. Una transformación natural de F en G es una familia de morfismos $\eta = \{\eta_A : F(A) \to G(A)\}_{A\in\mathbb{A}}$ en $\mathbb{B}$, tal que para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathbb{A}$ se tiene que $G(f) \circ \eta_A = \eta_B \circ F(f)$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Se usará la notación $\eta : F \Rightarrow G$ para indicar que η es una transformación natural de F en G.

Si $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor, entonces la familia de morfismos $\mathbb{1} = \{1_A : F(A) \to F(A)\}_{A\in\mathbb{A}}$ es claramente una transformación natural. Por otro lado, si $F, G, H : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ son funtores, $\eta : F \Rightarrow G$ y $\tau : G \Rightarrow H$, entonces la familia de morfismos $\tau \circ \eta = \{\tau_A \circ \eta_A : F(A) \to H(A)\}_{A\in\mathbb{A}}$ es natural. Esto permite hablar de la categoría de funtores de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$, que se denota mediante **Funct**$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, cuyos objetos son los funtores entre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ y los morfismos son las transformaciones naturales entre dichos funtores.

Definición 1.2. *Un sistema proyectivo de* $\mathbb{A}$ *indizado en* I *es un funtor* $\beta : I^{op} \to \mathbb{A}$. *La categoría de sistemas proyectivos de* I *en* ***Set*** *se denota mediante* $I^{\wedge}$.

Se define una asignación de $I^{op} \to \mathbf{Set}$, denotada por $pt_{I^{\wedge}}$, mediante:

$$pt_{I^{\wedge}}(i) = \{pt\}$$

$$pt_{I^{\wedge}}(i \to j) = 1_{\{pt\}},$$

donde $i, j \in I$ e $i \to j \in Hom_I(i, j)$.

Dicha asignación es un funtor y se hace notar que la asignación en los objetos es constante y está determinada por el hecho de que $\{pt\}$ es un objeto final en **Set**. De hecho, esta última propiedad se transfiere al funtor definido.

Lema 1.1. *El funtor* $pt_{I^{\wedge}}$ *es un objeto final de la categoría* $I^{\wedge}$.

Demostración. Sea $\beta \in I^{\wedge}$. Se construye una transformación natural $\beta^* : \beta \Rightarrow pt_{I^{\wedge}}$ tal que para todo $i \in I$ y $x \in \beta(i)$, $\beta_i^*(x) = pt$.

Véase que β^* está bien definida. Sean $i, j \in I$ y $f : i \to j$. Se quiere probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \beta(j) \arrow[r, "\beta(f)"] \arrow[d, "\beta_j^*"'] & \beta(i) \arrow[d, "\beta_i^*"] \\ \{pt\} \arrow[r, "pt_{I^{\wedge}}(f)"'] & \{pt\} \end{tikzcd}$$

En efecto, si $x \in \beta(j)$ entonces:

$$\begin{aligned} (\beta_i^* \circ \beta(f))(x) &= \beta_i^*(\beta(f)(x)) \\ &= pt \\ &= 1_{\{pt\}}(pt) \\ &= 1_{\{pt\}}(\beta_j^*(x)) \\ &= (1_{\{pt\}} \circ \beta_j^*)(x) \\ &= (pt_{I^{\wedge}}(f) \circ \beta_j^*)(x) \end{aligned}$$

Esto prueba que $\beta^* : \beta \Rightarrow pt_{I^\wedge}$. En lo que respecta a la unicidad sea $\gamma : \beta \Rightarrow pt_{I^\wedge}$. Como para toda $i \in I$ se tiene que $\gamma_i : \beta(i) \to pt_{I^\wedge}(i)$ y $pt_{I^\wedge}(i) = \{pt\}$, entonces para todo $x \in \beta(i)$, $\gamma_i(x) = pt = \beta_i^*(x)$. Por lo tanto, para toda $i \in I$, $\beta_i^* = \gamma_i$ y así $\beta^* = \gamma$.

□

De la proposición anterior se tiene que $Hom_{I^\wedge}(\beta, pt_{I^\wedge})$ consta de un sólo elemento. Así, se tiene la siguiente definición.

Definición 1.3. *Si $\beta \in I^\wedge$, entonces se define el límite proyectivo de β mediante:*

$$Hom_{I^\wedge}(pt_{I^\wedge}, \beta)$$

Es común denotar al límite proyectivo de $\beta \in I^\wedge$ mediante $\varprojlim \beta$ o $\varprojlim_{i \in I} \beta(i)$. Por otro lado, nótese que $\varprojlim \beta$ es un conjunto pues $\varprojlim \beta \subseteq \mathcal{P}(Hom_{\mathbf{Set}}(\{pt\}, \beta(i)))$. Además, dicho conjunto induce una familia de funciones $\{\varphi_i : \varprojlim \beta \to \beta(i)\}_{i \in I}$, donde $\varphi_i(\eta) = \eta_i(pt)$. Así, por la propiedad universal del producto en **Set** existe $\varphi : \varprojlim \beta \to \prod_{i \in I} \beta(i)$ tal que para toda $i \in I$, $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$. Esta función permite dar una caracterización como conjunto del límite proyectivo.

Proposición 1.1. *Si $\beta \in I^\wedge$ entonces se tiene el siguiente isomorfismo de conjuntos:*

$$\varprojlim \beta \cong \{x \in \textstyle\prod_{i \in I} \beta(i) \mid \textit{para toda } f : i \to j,\ \beta(f)(x_j) = x_i\}.$$

Demostración. Se define $L := \{x \in \prod_{i \in I} \beta(i) \mid \text{para toda } f : i \to j,\ \beta(f)(x_j) = x_i\}$ y sea φ la función construida en el párrafo previo. Se afirma que esta función es la buscada.

Si $\eta \in \varprojlim \beta$, entonces por construcción $\varphi(\eta) \in \prod_{i \in I} \beta(i)$. Por otro lado, si $f : i \to j$, entonces:

$$\begin{aligned}
\beta(f)(\varphi(\eta)(j)) &= \beta(f)(\pi_j \circ \varphi)(\eta) \\
&= \beta(f)(\varphi_j)(\eta) \\
&= \beta(f)(\eta_j(pt)) \\
&= \eta_i(pt) \\
&= \varphi_i(\eta) \\
&= (\pi_i \circ \varphi)(\eta) \\
&= \varphi(\eta)(i)
\end{aligned}$$

Esto prueba que $im(\varphi) \subseteq L$. Por otro lado, si $x \in L$ entonces se define $\eta \in \varprojlim \beta$ de manera que para toda $i \in I$, $\eta(pt) = x_i$. Veamos que η está bien definida y para esto sean $i, j \in I$ y $f : i \to j$. Se quiere probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} pt_{I^\wedge}(j) \arrow[r, "pt_{I^\wedge}(f)"] \arrow[d, "\eta_j"'] & pt_{I^\wedge}(i) \arrow[d, "\eta_i"] \\ \beta(j) \arrow[r, "\beta(f)"'] & \beta(i) \end{tikzcd}$$

Para ver esto se evalua en pt:

$$\begin{aligned} (\beta(f) \circ \eta_j)(pt) &= \beta(f)(\eta_j(pt)) \\ &= \beta(f)(x_j) \\ &= x_i \\ &= \eta_i(pt) \\ &= \eta_i(1_{\{pt\}}(pt)) \\ &= (\eta_i \circ 1_{\{pt\}})(pt) \\ &= (\eta_i \circ pt_{I^\wedge}(f))(pt) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta \in \varprojlim \beta$. Además, $\varphi(\eta)(i) = \pi_i(\varphi(\eta)) = (\pi_i \circ \varphi)(\eta) = \varphi_i(\eta) = \eta_i(pt) = x_i$. Esto prueba que $L \subseteq im(\varphi)$, de lo que se concluye que $L = im(\varphi)$.

Para probar que φ es inyectiva, sean $\eta, \tau \in \varprojlim \beta$ tales que $\varphi(\eta) = \varphi(\tau)$. Entonces, para todo $i \in I$ se tiene que $(\pi_i \circ \varphi)(\eta) = \pi_i(\varphi(\eta)) = \pi_i(\varphi(\tau)) = (\pi_i \circ \varphi)(\tau)$. Pero de la propiedad universal del producto se deduce que $\varphi_i(\eta) = \varphi_i(\tau)$ y así $\eta_i(pt) = \tau_i(pt)$.

Este razonamiento permite concluir que para toda $i \in I$, $\eta_i = \tau_i$. Por lo tanto $\eta = \tau$. □

2. El límite de un funtor.

DEFINICIÓN 1.4. *Sea $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor.*

1. *Un cono de F es una pareja $(B, \{p_A\}_{A \in \mathbb{A}})$ tal que $B \in \mathbb{B}$ y para todo $A \in \mathbb{A}$ se tiene un morfismo $p_A : B \to F(A)$ tal que para toda $f : A \to A'$, con $A, A' \in \mathbb{A}$, se tiene que $F(f) \circ p_A = p_{A'}$.*

2. *Un límite de F es un cono $(L, \{p_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ de F, tal que para todo cono $(M, \{q_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ de F, existe un único morfismo $m : M \to L$ tal que para todo $A \in \mathbb{A}$, $p_A \circ m = q_A$. En un diagrama conmutativo esto sería:*

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(A') \\
& L \arrow[ul, "p_A"'] \arrow[ur, "p_{A'}"] & \\
& M \arrow[uul, "q_A"] \arrow[uur, "q_{A'}"'] \arrow[u, dotted, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.2. *Sea $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor. Si F tiene un límite entonces este es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Sean $(L, \{p_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ y $(L', \{q_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ dos límites de F. Como $(L', \{q_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ es un cono de F, entonces existe un único morfismo $m : L' \to L$ tal que para todo $A \in \mathbb{A}$, $p_A \circ m = q_A$.

Por otro lado $(L, \{p_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ es un cono de F, entonces existe un único morfismo $m' : L \to L'$ tal que para todo $A \in \mathbb{A}$, $q_A \circ m' = p_A$.

Así, para todo $A \in \mathbb{A}$ se tiene que $p_A \circ (m \circ m') = p_A$. Pero tomando $(L, \{p_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ como un límite de F y $(L, \{p_A\}_{A\in\mathbb{A}})$ como cono, se cumple que para todo $A \in \mathbb{A}$, $p_A \circ 1_L = p_A$ y $m \circ m', 1_L : L \to L$. Luego por unicidad $m \circ m' = 1_L$.

Un argumento similar muestra que $m' \circ m = 1_{L'}$ y por lo tanto $L \cong L'$. $\square$

El siguiente resultado muestra que los conceptos desarrollados en este capítulo son esencialmente el mismo.

Teorema 1.1. *Si $\beta \in I^\wedge$ entonces $\varprojlim \beta$ es el límite de β.*

Demostración. Como se vio anteriormente $\varprojlim \beta$ es un conjunto y este induce una familia de funciones $\{\varphi_i : \varprojlim \beta \to \beta(i)\}_{i\in I}$ cuya regla de correspondencia es $\varphi_i(\eta) = \eta_i(pt)$.

Nótese que $(\varprojlim \beta, \{\varphi_i\}_{i\in I})$ es un cono de β pues si $i,j \in I$, $f : i \to j$ y $\eta \in \varprojlim \beta$, entonces:

$$\begin{aligned}\beta(f)(\varphi_j(\eta)) &= \beta(f)(\eta_j(pt))\\ &= \eta_i(pt)\\ &= \varphi_i(\eta)\end{aligned}$$

Sea $(M, \{q_i\}_{i\in I})$ un cono de β. Por la propiedad universal del producto en **Set** existe una única $q : M \to \prod_{i\in I} \beta(i)$ tal que para toda $i \in I$, $\pi_i \circ q = q_i$.

Se afirma que $im(q) \subseteq \varprojlim \beta$. Para probar esto considere $i,j \in I$, $f : i \to j$ y $m \in M$. Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}\beta(f)(q(m)(j)) &= \beta(f)((\pi_j \circ q)(m))\\ &= \beta(f)(q_j(m))\\ &= (\beta(f) \circ q_j)(m)\\ &= q_i(m)\\ &= (\pi_i \circ q)(m)\\ &= q(m)(i)\end{aligned}$$

Esto prueba que $im(q) \subseteq \varprojlim \beta$.

Se considera ahora $i \in I$. Se quiere probar que $\varphi_i \circ q = q_i$ y para esto basta con probar que estas funciones tienen la misma regla de correspondencia.

Si $m \in M$, entonces:

$$\begin{aligned}(\varphi_i \circ q)(m) &= \varphi_i(q(m))\\ &= q(m)_i(pt)\\ &= q(m)(i)\\ &= (\pi_i \circ q)(m)\\ &= q_i(m)\end{aligned}$$

La unicidad de q es consecuencia de la propiedad universal del producto. Por lo tanto $\varprojlim \beta$ es el límite de β.

$\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es la siguiente:

COROLARIO 1.1. *Si $\beta \in I^{\wedge}$ entonces el el límite proyectivo de β es único y es isomorfo al límite de β y al conjunto*

$$L = \{x \in \textstyle\prod_{i \in I} \beta(i) \mid \text{para toda } f : i \to j,\ \beta(f)(x_j) = x_i\}.$$

CONVENCIÓN 1.1. *El concepto de límite proyectivo puede usarse en otras categorías, por ejemplo, en* ***Top***. *Se usará el término límite proyectivo y límite de manera indistinta para cualquier sistema proyectivo de conjuntos ó de espacios topológicos.*

El límite de un funtor generaliza muchas construcciones básicas de la teoría de categorías. Los siguientes ejemplos muestran en qué sentido se afirma esto.

EJEMPLO 1.1. *Sea $F : \mathbb{I} \to \mathbb{A}$ un funtor donde la categoría $\mathbb{I}$ es discreta. Se recuerda que una categoría discreta tiene como objetos los elementos de un conjunto, digamos I, y los únicos morfismos son las identidades en cada elemento de I.*

Se afirma que si el límite de F existe, y este es $(L, \{p_i : L \to F(i)\}_{i \in I})$, entonces $L \cong \prod_{i \in I} F(i)$. Para probar esta afirmación se prueba que L cumple la propiedad universal del producto de la familia $\{F(i)\}_{i \in I}$. Sea una familia de morfismos $\{f_i : A \to F(i)\}_{i \in I}$ donde $A \in \mathbb{A}$. Al satisfacerse de manera trivial que para todo $i \in I$, $F(1_i) \circ f_i = 1_{F(i)} \circ f_i = f_i$, la propiedad universal del límite permite concluir que existe un único $f : A \to L$ tal que para todo $i \in I$, $p_i \circ f = f_i$. Pero esto último es la propiedad universal del producto.

Lo que muestra este ejemplo es que si el límite de un funtor cuyo dominio es una categoría discreta existe, este es isomorfo al producto de una familia de objetos en el codominio. Por otro lado, se puede realizar el proceso inverso, es decir, partir de una familia de objetos indizada en un conjunto no vacío y definir un funtor dotando al conjunto indicador con estructura de categoría discreta. Así, el producto de dicha familia existe si y sólo si dicho funtor tiene límite.

EJEMPLO 1.2. *Sean $A, B, C \in \mathbb{A}$, $\alpha \in Hom_{\mathbb{A}}(A, C)$, $\beta \in Hom_{\mathbb{A}}(B, C)$ y $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor. Nuevamente supóngase que F tiene límite, sea este $(L, \{p_D : L \to F(D)\}_{D \in \{A,B,C\}})$. Se afirma que $L \cong \mathcal{P}(F(\alpha), F(\beta))$ donde $\mathcal{P}(F(\alpha), F(\beta))$ denota la fibración (pullback) de $F(\alpha)$ y $F(\beta)$.*

En efecto, como $F(\alpha) \circ p_A$ *y* $F(\beta) \circ p_B$ *son morfismos de* $L \to F(C)$, *al ser* L *el límite de* F, *se cumple que* $F(\alpha) \circ p_A = F(\beta) \circ p_B = p_C$. *Así, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] & F(A) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ F(B) \arrow[r, "F(\beta)"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

Si para $D \in \mathbb{B}$ *existen dos morfismos* $f_A : D \to F(A)$ *y* $f_B : D \to F(B)$ *tales que* $F(\alpha) \circ f_A = F(\beta) \circ f_B$, *entonces defínase* $f_C : D \to F(C)$ *como* $f_C = F(\alpha) \circ f_A = F(\beta) \circ f_B$. *Así, de la propiedad universal del límite existe un único morfismo* $f : D \to L$ *tal que* $p_A \circ f = f_A$, $p_B \circ f = f_B$ *y* $p_C \circ f = f_C$. *Esto muestra que* L *satisface la propiedad universal de la fibración de* $F(\alpha)$ *y* $F(\beta)$. *Por lo tanto se concluye que* $L \cong \mathcal{P}(F(\alpha), F(\beta))$.

EJEMPLO 1.3. *Este ejemplo se obtiene al adaptar la construcción del ejemplo 1.2. Sean* $A, B \in \mathbb{A}$, $\alpha, \beta \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$ *y* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *un funtor. Si* F *tiene límite y este es* $(L, \{p_D : L \to F(D)\}_{D \in \{A,B\}})$, *entonces* $L \cong Eq(F(\alpha), F(\beta))$, *donde* $Eq(F(\alpha), F(\beta))$ *denota el igualador de* $F(\alpha)$ *y* $F(\beta)$.

3. El límite en la categoría de espacios topológicos.

A todo conjunto parcialmente ordenado $(I, \leq)$ se le puede asociar una categoría $\mathcal{I}$ cuyos objetos son los elementos de I y para todo $i, j \in I$ se define:

$$Hom_{\mathcal{I}}(i, j) = \begin{cases} \{pt\}, & \text{Si } i \leq j \\ \emptyset, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

De la definición resulta claro que $\mathcal{I}$ es una categoría pequeña y localmente pequeña.

DEFINICIÓN 1.5. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(I, \leq)$ *es un conjunto dirigido si para todo* $i, j \in I$ *existe* $k \in I$ *tal que* $i \leq k$ *y* $j \leq k$.

Sean $\mathcal{I}$ la categoría asociada a un conjunto dirigido $(I, \leq)$ y β un sistema proyectivo de **Top** indizado en $\mathcal{I}$. Para todo $i, j \in I$ se denotará $X_i := \beta(i)$ y $\beta_i^j := \beta(i \to j)$, donde se hace notar que $\beta_i^j : X_j \to X_i$ es una función continua.

Así, el conjunto L definido en el corolario 1.1 se puede escribir como:

$$L = \{x \in \prod_{i \in I} X_i \mid \text{ para toda } f : i \to j,\ \beta_i^j(x_j) = x_i\}.$$

Dado que $L \subseteq \prod_{i \in I} X_i$, entonces L es un espacio topológico con la topología inducida por $\prod_{i \in I} X_i$. Así, la función inclusión $\iota : L \to \prod_{i \in I} X_i$ es continua y por lo tanto para toda $i \in I$, la función $p_i : L \to X_i$ definida mediante $p_i = \pi_i \circ \iota$ es continua pues las proyecciones del producto $\{\pi_i\}_{i \in I}$ son continuas.

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.3. *El límite proyectivo de β es $(L, \{p_i\}_{i \in I})$.*

Demostración. Para ver que $(L, \{p_i\}_{i \in I})$ es un cono de β sólo resta probar que si $i, j \in I$ son tales que $i \leq j$, entonces $\beta_i^j \circ p_j = p_i$. Nuevamente basta ver que estas funciones tienen la misma regla de correspondencia y para probar esto sea $x \in L$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\beta_i^j \circ p_j)(x) &= \beta_i^j(x_j) \\
&= x_i \\
&= p_i(x).
\end{aligned}$$

Para terminar considerese M un espacio topológico y $\{m_i : M \to X_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones continuas tales que $(M, \{m_i\}_{i \in I})$ es un cono de β. Por la propiedad universal del producto topológico existe una única función continua $m : M \to \prod_{i \in I} X_i$ tal que para todo $i \in I$, $\pi_i \circ m = m_i$.

Se afirma que $im(m) \subseteq L$ y para probar esto sean $x \in M$ e $i, j \in I$ tales que $i \leq j$. Al evaluar en $m(x)_j$:

$$
\begin{aligned}
\beta_i^j(m(x)_j) &= \beta_i^j(\pi_j(m(x))) \\
&= \beta_i^j(\pi_j \circ m)(x) \\
&= \beta_i^j(m_j(x)) \\
&= (\beta_i^j \circ m_j)(x) \\
&= m_i(x) \\
&= (\pi_i \circ m)(x) \\
&= m(x)_i
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $im(m) \subseteq L$ y así L es el límite proyectivo de β. $\square$

Nótese que aunque la prueba del resultado anterior se realizó para sistemas proyectivos inducidos por un conjunto dirigido, nunca se utilizó la propiedad de ser conjunto dirigido. Sin embargo en muchos textos clásicos de topológia general las construcciones de límites se hacen para este tipo de sistemas (ver [**E**, pp 98–104] ó [**W**, pp 211–214]).

Capítulo 2

Espacios topológicos profinitos.

Para X un espacio topológico se denotará por $\mathbf{Clopen}(X) = \{A \subseteq X \mid A$ es abierto y cerrado en $X\}$. Para $x \in X$ la componente conexa de dicho punto se denota por C_x.

1. Espacios totalmente disconexos.

Si X es un espacio topológico conexo, entonces la componente conexa de todo punto es X. La noción dual a la de espacio conexo es la de espacio totalmente disconexo pues en estos espacios la componente conexa de todo punto tiene un único elemento que es el punto en cuestión.

Definición 2.1. *Un espacio topológico X es totalmente disconexo si para todo $x \in X$, $C_x = \{x\}$.*

Es importante mencionar que la noción de espacio totalmente disconexo no generaliza la noción de espacio inconexo pues el espacio $X = \{pt\}$ con la topología discreta es totalmente disconexo y conexo. Por otro lado, existen espacios que son disconexos pero no totalmete disconexos. Por ejemplo, $X = [0,1] \cup [2,3]$ con la topología inducida de $\mathbb{R}$ es disconexo pero no es totalmente disconexo pues $C_0 = [0,1]$.

Algunas propiedades relativas a espacios totalmente disconexos se muestran en el siguiente resultado.

Proposición 2.1. *Si X es un espacio topológico, entonces:*

1. *X es totalmente disconexo si y sólo si todo conexo es unitario.*
2. *Si $Y \subseteq X$ es un espacio con la topología inducida y X es totalmente disconexo entonces Y es totalmente disconexo.*
3. *Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección no vacía de espacios totalmente disconexos entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es un espacio totalmente disconexo con la topología producto.*

Demostración. Para la ida de la afirmación 1 sean X un espacio totalmente disconexo y $C \subseteq X$ un conexo. Como $C \neq \emptyset$ existe $x \in C$ y, por ser la componente conexa de x el conexo más grande que tiene como elemento a x, se tiene que $C \subseteq C_x = \{x\}$. Así, se concluye que $C = \{x\}$. Para el regreso considere $x \in X$. Como C_x es un conexo y $x \in C_x$ entonces $C_x = \{x\}$. Esto prueba que X es totalmente disconexo.

Para la afirmación 2, sea $x \in Y$ y denótese por C_x^Y la componente conexa de x en Y. Como $x \in X$ y C_x es el conexo más grande que tiene como elemento a x entonces $C_x^Y \subseteq C_x = \{x\}$. De esto se concluye que $C_x^Y = \{x\}$.

Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección de espacios totalmente disconexos y $C \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ es conexo, entonces para todo $i \in I$, $\pi_i(C) \subseteq X_i$ es conexo pues π_i es continua. Por la afirmación 1 de esta proposición existe un único $x_i \in X_i$ tal que $\pi_i(C) = \{x_i\}$ y por lo tanto $C = \{(x_i)_{i \in I}\}$. Al usar nuevamente la primera afirmación de esta proposición se tiene que $\prod_{i \in I} X_i$ es totalmente disconexo. □

En este trabajo tendrá mayor importancia una noción topológica más fuerte que la estudiada hasta este momento.

Definición 2.2. *Un espacio topológico X es totalmente separado si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $U, V \in \boldsymbol{Clopen}(X)$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*

De la definición es claro que todo espacio totalmente separado es Hausdorff. Sin embargo, hay espacios Hausdorff que no son totalmente separados, por ejemplo, $\mathbb{R}$ con su topología usual.

Los espacios totalmente separados cumplen dos propiedades análogas a las mostradas en la proposición 2.1 para espacios totalmente disconexos. Se tiene así el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Si X es un espacio topológico, entonces:*

1. *X es totalmente separado si y sólo si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $U \in \boldsymbol{Clopen}(X)$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*
2. *Si $Y \subseteq X$ es un espacio con la topología inducida y X es totalmente separado entonces Y es totalmente separado.*
3. *Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una colección no vacía de espacios totalmente separados entonces $\prod_{i \in I} X_i$ es un espacio totalmente separado con la topología producto.*

Demostración. Para la afirmación 1 el regreso es claro. Para la ida sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Por hipótesis existen $U, V \in \mathbf{Clopen}(X)$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Así, $V \subseteq X \setminus U$ y por lo tanto $y \notin U$.

Si $Y \subseteq X$ es un subespacio topológico y $x, y \in Y$ con $x \neq y$, entonces por la afirmación 1 existe $U \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Por definición de la topología inducida se tiene que $U \cap Y \in \mathbf{Clopen}(Y)$ y claramente $x \in U \cap Y$ y $y \notin U \cap Y$.

Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ una colección de espacios totalmente separados y $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$ tales que $x \neq y$. Dado que existe $i_0 \in I$ tal que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$, entonces existe $U_{i_0} \in \mathbf{Clopen}(X_{i_0})$ tal que $x_{i_0} \in U_{i_0}$ y $y \notin U_{i_0}$. Esto permite definir una colección de conjuntos indizada en I mediante:

$$V_i = \begin{cases} U_{i_0}, & \text{Si } i = i_0 \\ X_i, & \text{Si } i \neq i_0 \end{cases}$$

Por definición para todo $i \in I$, $V_i \subseteq X_i$ y además $\prod_{i \in I} V_i \in \mathbf{Clopen}(\prod_{i \in I} X_i)$. También se tiene que $x \in \prod_{i \in I} V_i$ y $y \notin \prod_{i \in I} V_i$. Por lo tanto $\prod_{i \in I} X_i$ es totalmente separado. $\square$

Como se mencionó anteriormente los dos conceptos definidos en esta sección se encuentran relacionados.

Proposición 2.3. *Si X es un espacio totalmente separado entonces X es totalmente disconexo.*

Demostración. Sean X un espacio totalmente separado y $x \in X$. Como $x \in C_x$ entonces $\{x\} \subseteq C_x$ y si se supone que dicha contención es propia entonces existe $y \in C_x$ tal que $y \neq x$. Así, por la afirmación 1 de la proposición 2.2 existe $A \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$.

Por otro lado $C_x = (C_x \cap A) \cup (C_x \cap X \setminus A)$ y dado que $C_x \cap A$ y $C_x \cap X \setminus A$ son cerrados en X, no vacíos, pues $x \in C_x \cap A$ y $y \in C_x \cap X \setminus A$, y ajenos, estos conjuntos forman una desconexión de C_x lo que es una contradicción pues C_x es conexo. Así, la contención $\{x\} \subseteq C_x$ no puede ser propia y por lo tanto $C_x = \{x\}$. $\square$

La proposición recíproca de la anterior no es cierta en general. Un ejemplo de un espacio totalmente disconexo que no es totalmente separado se construye con la tienda de Kuratowski-Knaster (ver ejemplo 2.6). Sin embargo, se tiene una condición bajo la cual ambos conceptos coinciden.

PROPOSICIÓN 2.4. *Si X es un espacio compacto y Hausdorff entonces X es totalmente disconexo si y sólo si es totalmente separado.*

DEMOSTRACIÓN. El regreso es la proposición 2.3. Así, sean X un espacio compacto, Hausdorff y totalmente disconexo. Dado que para todo $x \in X$ el conjunto $\{A \in \mathbf{Clopen}(X) \mid x \in A\} \neq \emptyset$, pues X es un elemento de dicho conjunto, defínase $Q_x := \bigcap\{A \in \mathbf{Clopen}(X) \mid x \in A\}$. Si se prueba que para todo $x \in X$, $C_x = Q_x$, entonces la conclusión de esta proposición se sigue del hecho de que para $x, y \in X$ con $x \neq y$, se tiene que $y \notin C_x = \{x\} = Q_x$, y por lo tanto existe $A \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$, con lo que se concluye que X es totalmente separado. Se probará esta afirmación.

Obviamente $C_x = \{x\} \subseteq Q_x$ y para probar la segunda contención basta con probar que Q_x es conexo pues como $x \in Q_x$, al ser C_x el máximo conexo con esta propiedad, se tendrá que $Q_x \subseteq C_x = \{x\}$.

Supóngase que $Q_x = A \cup B$ con A, B cerrados ajenos y sin pérdida de generalidad que $x \in A$. Dado que A y B son compactos, por ser subconjuntos cerrados de un espacio compacto, entonces existen $U, V \subseteq X$ vecindades ajenas de A y B, es decir, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Así, como Q_x es compacto, por ser un espacio cerrado en un espacio compacto, y $Q_x \subseteq U \cup V$, entonces existen $A_1, ..., A_n \in \mathbf{Clopen}(X)$ tales que $Q_x \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} A_j \subseteq U \cup V$.[1]

Defínase $C := \bigcap_{j=1}^{n} A_j$ y nótese que $C \in \mathbf{Clopen}(X)$. Además, $U \cap C$ es un abierto en X y se afirma que de hecho $U \cap C \in \mathbf{Clopen}(X)$. En efecto,

[1]Si $U \subseteq X$ es un conjunto abierto en un espacio compacto X, entonces dada $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados en X tales que $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq U$, se tiene que existen $i_1, ..., i_n \in I$ tales que $\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \subseteq U$. Para una prueba de esta afirmación veáse el corolario 3.1.5 de [**E**, pp 124].

$$
\begin{aligned}
\overline{U \cap C} &\subseteq \overline{U} \cap \overline{C} \\
&= \overline{U} \cap C \\
&= (\overline{U} \cap C) \cap (U \cup V) \\
&= (\overline{U} \cap C \cap U) \cup (\overline{U} \cap C \cap V) \\
&= (U \cap C) \cup (\overline{U} \cap C \cap V) \\
&= (U \cap C) \cup \emptyset \\
&= U \cap C
\end{aligned}
$$

Donde la segunda igualdad es consecuencia de que $C \subseteq U \cup V$ y por lo tanto $\overline{U} \cap C \subseteq U \cup V$. La quinta igualdad se obtiene al notar que $\overline{U} \cap V = \emptyset$, pues dado $y \in V$, como $U \cap V = \emptyset$, entonces $y \notin \overline{U}$. Esto prueba que $V \subseteq X \setminus \overline{U}$ y por lo tanto $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

De esta contención se concluye que $U \cap C$ es cerrado en X. Como $x \in U \cap C$ entonces $Q_x \subseteq U \cap C$. Además $B \subseteq Q_x \subseteq U \cap C \subseteq U$ y dado que $U \cap V = \emptyset$ y $B \subseteq V$, entonces $B = \emptyset$. Esto termina la prueba de que Q_x es conexo. $\square$

Vale la pena mencionar que en la prueba de la proposición anterior se definió un conjunto Q_x que en la literatura se conoce como la cuasicomponente del punto $x \in X$. Se puede probar que en todo espacio topológico $C_x \subseteq Q_x$ y el resultado anterior muestra que cuando el espacio en cuestión es compacto y Hausdorff ambas componentes coinciden.

Para terminar esta sección se muestran algunos ejemplos de espacios con las propiedades estudiadas.

Ejemplo 2.1. *Si X es un conjunto con la topología discreta, entonces X es totalmente separado pues si $x, y \in X$ con $x \neq y$, entonces $\{x\} \in$ **Clopen**(X), $x \in \{x\}$ y $y \notin \{x\}$. La proposición 2.3 permite concluir que X es también totalmente disconexo.*

Ejemplo 2.2. *Sea X un conjunto con la topología cofinita. Si $C \subseteq X$ es tal que $C = A \cup B$ con $A, B \subseteq X$ abiertos, no vacíos y ajenos, entonces $X \setminus C = X \setminus A \cap X \setminus B$ y por definición de la topología, $X \setminus C$ es finito. Esto prueba que si C es disconexo entonces $X \setminus C$ es finito y por lo tanto si $X \setminus C$ es infinito entonces C es conexo. Así, si X es infinito, entonces existen conjuntos conexos con más de un punto, por* *ejemplo, si* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$*, entonces* $\{x, y\}$ *es conexo. Esto permite concluir que si* X *es infinito entonces* X *con la topología cofinita no es totalmente disconexo y por la proposición 2.3 tampoco es totalmente separado.*

Un ejemplo concreto de este caso lo da la topología de Zariski en K *un campo algebraicamente cerrado, pues el complemento de un abierto es un conjunto formado por las raíces de los generadores de un ideal en* $K[x]$ *que es finitamente generado y por lo tanto, dicho conjunto es finito.*

Si X *es finito, entonces la topología cofinita coincide con la discreta y este caso ya fue discutido en el ejemplo 2.1.*

Ejemplo 2.3. $\mathbb{Q}$ *es un espacio totalmente separado con la topología inducida por* $\mathbb{R}$ *pues es fácil probar que para todo* $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *con* $x < y$*, se tiene que* $(x, y) \in \boldsymbol{Clopen}(\mathbb{Q})$*. Así, dados* $a, b \in \mathbb{Q}$ *con* $a < b$*, se tiene que existe* $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *tal que* $a < y < b$*. Por lo tanto* $(a - |y|, y) \in \boldsymbol{Clopen}(\mathbb{Q})$ *y es tal que* $a \in (a - |y|, y)$ *y* $b \notin (a - |y|, y)$*. Por la afirmación 1 de la proposición 2.2 se concluye que* $\mathbb{Q}$ *es totalmente separado y por la proposición 2.3 dicho espacio es totalmente disconexo.*

Ejemplo 2.4. *Sea* $p \in \mathbb{N}$ *un primo. El campo de números p-ádicos* $\mathbb{Q}_p$ *es totalmente separado*[2] *y por lo tanto totalmente disconexo. Además, el anillo de enteros p-ádicos* $\mathbb{Z}_p := \{x \in \mathbb{Q}_p | \; |x|_p \leq 1\}$ *hereda ambas propiedades de desconexión por la afirmación 2 de las proposiciones 2.1 y 2.2.*

Ejemplo 2.5. *Considerese* $\boldsymbol{C}$ *el conjunto ternario de Cantor. Este conjunto es totalmente disconexo pues si* $A \subseteq \boldsymbol{C}$ *es un conexo tal que* $a, b \in A$ *con* $a < b$*, entonces* $[a, b] \subseteq A$*. Dado que existe* $n \in \mathbb{N}^+$ *tal que* $3^{-n} < b - a$ *entonces* $a, b \in C_n$*, donde* C_n *es el n-ésimo conjunto de la construcción de* $\boldsymbol{C}$*. Pero, como* $3^{-n} < b - a$ *estos elementos no pueden estar en el mismo intervalo pues cada uno de estos mide* 3^{-n} *y por lo tanto* $[a, b] \nsubseteq C_n$*. Dado que* $\boldsymbol{C} \subseteq C_n$ *entonces* $[a, b] \nsubseteq \boldsymbol{C}$*, lo que es una contradicción. Así todos lo conexos en* $\boldsymbol{C}$ *son unitarios y por el teorema 2.1* $\boldsymbol{C}$ *es totalmente disconexo. Más aún* $\boldsymbol{C}$ *es compacto, pues es un subconjunto cerrado contenido en* $[0, 1]$ *que es compacto. Como dicho espacio es también Hausdorff entonces la proposición 2.4 permite concluir que* $\boldsymbol{C}$ *es totalmente separado.*

[2] Ver corolario 3.8 [**G**, pp 60–64]

EJEMPLO 2.6. *La tienda de Kuratowski-Knaster* $\boldsymbol{K}$. *Sean* $\boldsymbol{C}$ *el conjunto ternario de Cantor y* $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$. *Considere además* $E \subseteq \boldsymbol{C}$ *el conjunto de puntos extremos del conjunto de Cantor,* $F = \boldsymbol{C} \setminus E$ *y denótese por* L_t *al segmento de recta que une el punto* $(t, 0) \in \boldsymbol{C} \times \{0\}$ *con* p.

Se definen dos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ *de la siguiente manera:*

$$X_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in L_t,\ t \in E,\ y \in \mathbb{Q}\ \}$$

$$X_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in L_t,\ t \in F,\ y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ \}$$

y sea $\boldsymbol{K} = X_E \cup X_F$ *con la topología inducida por* $\mathbb{R}^2$. *Dicho espacio se conoce como la tienda de Kuratowski y Knaster.*

Este espacio es un ejemplo nada trivial de un espacio conexo, sin embargo $\boldsymbol{K} \setminus \{p\}$ *es totalmente disconexo pero no totalmente separado. La prueba de estos hechos pueden encontrarse en* [**Ei**, pp 353–356] *y* [**SS**, pp 145–147].

2. Espacios profinitos.

DEFINICIÓN 2.3. *Un espacio topológico es profinito si es el límite proyectivo de espacios topológicos finitos y discretos.*

La categoría de espacios topológicos profinitos tiene como objetos los espacios profinitos y como morfismos a las funciones continuas. Esta categoría se denotará por **Prof**.

El objetivo de esta sección es dar una caracterización de los espacios profinitos a partir de propiedades topológicas más usuales. Para esto se requieren algunos resultados previos.

LEMA 2.1. *Si* X *y* Y *son espacios topológicos con* Y *Hausdorff, entonces para todo par de funciones continuas* $f, g : X \to Y$, *el igualador de* f *y* g *es un conjunto cerrado en* X.

Demostración. Se recuerda que en la categoría de espacios topológicos el igualador de f y g es el conjunto $Eq(f,g) = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ con la topología inducida por X. Para ver que este conjunto es cerrado en X se demostrará que $X \setminus Eq(f,g)$ es abierto en X.

Sea $x_0 \in X \setminus Eq(f,g)$, entonces $f(x_0) \neq g(x_0)$ y dado que $f(x_0), g(x_0) \in Y$ y Y es Hausdorff, entonces existen $U, V \subseteq Y$ abiertos tales que $f(x_0) \in U$, $g(x_0) \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Es claro que $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X$ es un conjunto abierto en X pues f y g son funciones continuas. Por otro lado, $x_0 \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ y además $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq X \setminus Eq(f,g)$. Por lo tanto $X \setminus Eq(f,g)$ es un conjunto abierto en X.

□

Un resultado que se deduce de la proposición anterior y que será de gran importancia en la prueba del teorema principal de este capítulo se muestra a continuación:

Proposición 2.5. *El límite proyectivo de espacios topológicos totalmente separados y compactos es totalmente separado y compacto.*

Demostración. Sea β un sistema proyectivo sobre **Top** indizado en I y como antes denótese para todo $i \in I$, $X_i := \beta(i)$ así como para $i, j \in I$ con $i \leq j$ a $\beta_i^j := \beta(i \to j)$.

Dado que todo espacio totalmente separado es Hausdorff, entonces el límite proyectivo de estos espacios coincide con el límite proyectivo en la categoría de espacios Hausdorff que por el teorema de Tychonoff coincide, como conjunto, con el límite en la categoría de espacios topológicos.

Así, como $L \subseteq \prod_{i \in I} X_i$ y por las afirmaciones 2 y 3 de proposición 2.2, $\prod_{i \in I} X_i$ es totalmente separado, entonces L es totalmente separado.

Para ver que L es compacto, nótese que como $\prod_{i \in I} X_i$ es compacto, por el teorema de Tychonoff, y Hausdorff, entonces basta con probar que L es cerrado en el producto.

En efecto, pues

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; \forall i, j \in I,\ i \leq j,\ \beta_i^j(x_j) = x_i \right\} \\
&= \bigcap_{i \leq j} \left\{ x \in \prod_{i \in I} X_i \;\middle|\; (\beta_i^j \circ \pi_j)(x) = \pi_i(x) \right\} \\
&= \bigcap_{i \leq j} Eq(\beta_i^j \circ \pi_j, \pi_i)
\end{aligned}
$$

Pero para todo $i, j \in I$ con $i \leq j$, las funciones β_i^j son continuas al igual que las proyecciones. Además, el codominio de las funciones $\beta_i^j \circ \pi_j$ y π_i es X_i que es Hausdorff. Luego entonces por el lema 2.1 $Eq(\beta_i^j \circ \pi_j, \pi_i)$ es cerrado y como L es intersección de conjuntos cerrados entonces es cerrado.

$\square$

Hay que notar que es sencillo adaptar la prueba del resultado anterior para probar que el límite de una familia de espacios totalmente disconexos y compactos es totalmente disconexo y compacto.

TEOREMA 2.1. *Un espacio topológico es profinito si y sólo si es compacto y totalmente separado.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sea X es un espacio profinito, entonces $X = \varprojlim X_i$ donde todo X_i es finito y discreto. Dado que todo X_i es finito entonces es compacto y al ser discreto es totalmente separado. Así, por la proposición 2.5 X es totalmente separado y compacto.

$\Leftarrow$) Sea X un espacio compacto y totalmente separado. Defínase el conjunto $\mathcal{R} = \{R \subseteq X \times X \mid X/R \text{ es discreto y finito}\}$ y nótese que $\mathcal{R} \neq \emptyset$ pues $X \times X \in \mathcal{R}$. Dado que $\mathcal{R}$ es un conjunto parcialmente ordenado con la contención inversa, este tiene estructura de categoría, la que de hecho es $\mathcal{R}^{op}$. Por lo tanto se define una asignación $\beta : (\mathcal{R}^{op})^{op} \to \mathbf{Top}$ mediante:

$$\beta(R) = X/R$$

$$\beta_R^S := \beta(R \to S)([x]_R) = [x]_S$$

Dados $R, S \in \mathcal{R}$ tales que $R \subseteq S$, es claro que β_R^S está bien definida y que es continua pues el dominio de esta función es un espacio discreto. Además esta asignación resulta ser un funtor. Así, puede considerarse el $(\varprojlim_R X/R,\ p_R)$ y se afirma que $X \cong \varprojlim_R X/R$.

Se recuerda que para todo $R \in \mathcal{R}$ se tiene la función proyección en R $\pi_R : X \to X/R$, cuya regla de correspondencia es $\pi_R(x) = [x]_R$, donde $x \in X$. Dado que X/R tiene la topología cociente, la función anterior es continua y además para $R, S \in \mathcal{R}$ tales que $R \subseteq S$, se tiene que $\beta_R^S \circ \pi_R = \pi_S$ pues dado $x \in X$:

$$\begin{aligned}(\beta_R^S \circ \pi_R)(x) &= \beta_R^S(\pi_R(x)) \\ &= \beta_R^S([x]_R) \\ &= [x]_S \\ &= \pi_S(x)\end{aligned}$$

Así, por la propiedad universal del límite en **Top** existe una única función continua $\lambda : X \to \varprojlim_R X/R$ tal que para todo $R \in \mathcal{R}$, $p_R \circ \lambda = \pi_R$. Se demostrará que λ es un homeomorfismo y dado que X es compacto y $\varprojlim_R X/R$ es Hausdorff, pues de la proposición 2.5 se tiene que este espacio es totalmente separado, entonces basta probar que dicha función es biyectiva.

Para ver que λ es inyectiva sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es totalmente separado existe $A \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in A$ y $y \notin A$. Dado que el conjunto $\{A, X \backslash A\}$ es una partición de X, entonces existe una relación de equivalencia $R_A \in \mathcal{R}$ inducida por esta partición. Así, $x_{R_A} \neq y_{R_A}$ y por lo tanto $\lambda(x) \neq \lambda(y)$.

Respecto a la suprayectividad de λ observese que dado que λ es cerrada, pues su dominio es un espacio compacto y el codominio un espacio Hausdorff, entonces basta con probar que la imagen es densa en $\varprojlim_R X/R$. Para probar esta última afirmación sea $([x^R]_R)_{R\in\mathcal{R}} \in \varprojlim_R X/R$ y se quiere probar que si $V \subseteq X$ es una vecindad de $([x^R]_R)_{R\in\mathcal{R}}$, entonces $V \cap \lambda(X) \neq \emptyset$ y para esto basta con encontrar una familia de vecindades básicas de $([x^R]_R)_{R\in\mathcal{R}}$ que satisfagan esta propiedad. Esta será la forma de proceder.

Dados $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ defínase el conjunto $\mathcal{U}_{R_1,...,R_n} = \bigcap_{j=1}^n p_{R_j}^{-1}([x^{R_j}]_{R_j})$. De la definición es claro que estos conjuntos son vecindades de $([x^R]_R)_{R\in\mathcal{R}}$ y que si $V \subseteq \varprojlim_R X/R$ es una vecindad cerrada de $([x^R]_R)_{R\in\mathcal{R}}$, entonces existen $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ tales que para toda $j \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $V_{R_j} \subsetneq X/R_j$ es cerrado y $[x^{R_j}]_{R_j} \in V_{R_j}$.

Por lo tanto para toda $j \in \{1, ..., n\}$, $p_{R_j}^{-1}([x^{R_j}]_{R_j}) \subseteq p_{R_j}^{-1}(V_{R_j})$ y así $\mathcal{U}_{R_1,...,R_n} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} p_{R_j}^{-1}(V_{R_j}) = V$.

Lo que resta probar es que para cualesquiera $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ se tiene que $\mathcal{U}_{R_1,...,R_n} \cap \lambda(X) \neq \emptyset$. En efecto, sean $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ y se afirma que existe $R_0 \in \mathcal{R}$ tal que para todo $j \in \{1, ..., n\}$, $R_0 \subseteq R_i$. Es suficiente probar esto para $n = 2$ pues el resultado se generaliza utilizando inducción sobre n. Sean $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ y $\{V_j\}_{j=1}^{m}$ las particiones inducidas por R_1 y R_2 respectivamente, entonces es claro que $X = \bigcup_{i,j=1}^{k,m} U_i \cap V_j$. Así, el conjunto $\{U_i \cap V_j \mid U_i \cap V_j \neq \emptyset\}_{i,j=1}^{m,k} \subseteq \mathbf{Clopen}(X)$ es una partición finita de X y por lo tanto esta induce una relación de equivalencia R_0 tal que $R_0 \in \mathcal{R}$ y claramente $R_0 \subseteq R_1, R_2$.

Regresando al caso general considerese R_0 la partición tal que para todo $j \in \{1, ..., n\}$ satisface que $R_0 \subseteq R_j$. Dado que $[x^{R_0}]_{R_0} \in X/R_0$ y como además para todo $j \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $p_{R_i}(([x^{R_0}]_R)_{R\in\mathcal{R}}) = [x^{R_0}]_{R_i} = [x^{R_0}]_{R_0}$, donde la última igualdad se obtiene por la construcción de R_0, entonces $([x^{R_0}]_R)_{R\in\mathcal{R}} \in \mathcal{U}_{R_1,...,R_n}$. Por otro lado es claro que $\lambda(x^{R_0}) = ([x^{R_0}]_R)_{R\in\mathcal{R}}$ y esto permite concluir que $([x^{R_0}]_R)_{R\in\mathcal{R}} \in \mathcal{U}_{R_1,...,R_n} \cap \lambda(X)$.

□

Como primera aplicación del teorema anterior se discutirá si los espacios topológicos mostrados en los ejemplos 2.1 al 2.6 son profinitos.

Ejemplo 2.7. *Un espacio discreto es profinito si y sólo si es finito pues los conjuntos compactos con la topología discreta son precisamente los conjuntos finitos.*

Ejemplo 2.8. *Si X es un conjunto con la topología cofinita este siempre es compacto. Sin embargo, como se vio en el ejemplo 2.2 este no es totalmente disconexo si X es infinito. De hecho, X es profinito con la topología cofinita si y sólo si X es finito, pero como se mencionó antes en este caso dicha topología coincide con la topología discreta.*

Ejemplo 2.9. *$\mathbb{Q}$ con la topología inducida por $\mathbb{R}$ es un espacio totalmente separado pero no es profinito pues $\mathbb{Q}$ no es compacto con esta topología.*

EJEMPLO 2.10. *Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. El campo de números p-ádicos no es profinito pues no es compacto. Sin embargo, el anillo de enteros p-ádicos es un espacio profinito pues $\mathbb{Z}_p = \overline{B}_0(1)$ que es un conjunto compacto. Los resultados relativos a la compacidad de estos espacios pueden consultarse en* [**G**, pp 63–64].

EJEMPLO 2.11. *El conjunto de Cantor $\boldsymbol{C}$ es compacto pues es un conjunto cerrado, por ser intesección de conjuntos cerrados, en un espacio compacto, a saber $[0, 1]$. Así, $\boldsymbol{C}$ es un espacio profinito.*

EJEMPLO 2.12. *La tienda de Kuratowski-Knaster $\boldsymbol{K}$ y el espacio $\boldsymbol{K} \setminus \{p\}$ no son profinitos pues no son totalmente separados.*

El último resultado de esta sección muestra que si un espacio es Hausdorff y compacto, entonces todas las definiciones de este capítulo coinciden.

COROLARIO 2.1. *Si X es un espacio topológico compacto y Hausdorff entonces son equivalentes:*

1. *X es profinito.*
2. *X es totalmente separado.*
3. *X es totalmente disconexo.*
4. *La topología de X tiene una base de conjuntos abiertos-cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. De teorema 2.1 se tiene que las afirmaciones 1 y 2 son equivalentes y por la proposición 2.4 que 2 y 3 también lo son. Para $3 \Rightarrow 4$ supóngase que X es totalmente separado y sean $U \subseteq X$ un abierto no vacío y $x \in U$. Para todo $y \in X \setminus U$ existe $A_y \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in A_y$ y $y \notin A_y$. Dado que $X \setminus U$ es cerrado y $\{X \setminus A_y\}_{y \in X \setminus U}$ es una cubierta abierta de dicho conjunto, de la compacidad de $X \setminus U$ se deduce que existen $y_1, ..., y_n \in X \setminus U$ tales que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} X \setminus A_{y_j}$ y por lo tanto $\bigcap_{j=1}^{n} A_{y_j} \subseteq U$ y $x \in U$. Esto prueba que existe una base de conjuntos abiertos y cerrados en X.

Para $4 \Rightarrow 3$ sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como X es Hausdorff existen $V, U \subseteq X$ abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Pero por hipótesis existe $A \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in A$ y $A \subseteq U$. Como $V \subseteq X \setminus U$ y $X \setminus U \subseteq X \setminus A$ se tiene que $y \notin A$. De la afirmación 1 de la proposición 2.2 se concluye que X es totalmente separado. $\square$

Para concluir el capítulo se van a realizar algunas observaciones. Los espacios topológicos que satisfacen la afirmación 4 del corolario anterior se conocen como 0-dimensionales. Un espacio topológico es un espacio de Boole si es compacto, Hausdorff y 0-dimensional, así el corolario anterior afirma que para espacios Hausdorff y compactos la propiedad de ser profinito coincide también con la de ser 0-dimensional y ambas con la de ser un espacio de Boole.

Por otro lado un espacio topológico es de Stone si es compacto, Hausdorff y totalmente disconexo. Por lo tanto en el corolario también puede agregarse a las equivalencias la propiedad de ser un espacio de Stone.

Capítulo 3

El teorema de dualidad de Stone.

En este capítulo se utiliza el material básico de álgebras de Boole que se encuentra en el apéndice A, así como el apéndice D para la parte categórica.

1. Filtros, ideales y ultrafiltros.

DEFINICIÓN 3.1. *Si B es un álgebra de Boole entonces $\mathcal{F} \subseteq B$ no vacío es un filtro sobre B si:*

1. *Para todo $x, y \in \mathcal{F}$, $x \wedge y \in \mathcal{F}$.*
2. *Para todo $x \in \mathcal{F}$ y $y \in B$ tal que $x \leq y$, se cumple que $y \in \mathcal{F}$.*

Un filtro es propio si $\mathcal{F} \subsetneq B$. Un ultrafiltro es un filtro propio máximo con respecto al orden inducido por la contención en el conjunto de filtros propios de un álgebra de Boole.

Toda álgebra de Boole es un filtro sobre sí misma. Todo filtro $\mathcal{F}$ en un álgebra de Boole tiene al 1. Además, $\mathcal{F}$ es propio si y sólo si $0 \notin \mathcal{F}$. Por otro lado, la imagen inversa de un filtro mediante un morfismo de álgebras de Boole es un filtro. La familia de filtros es cerrada bajo intersecciones arbitrarias. Por esta razón todo subconjunto de B puede extenderse a un filtro conocido como el filtro generado por ese conjunto. La construcción de dicho filtro es estándar pues este corresponde a la intersección de todos los filtros que contienen a dicho conjunto. Esta construcción permite probar que la familia de filtros de un álgebra de Boole forma una retícula completa respecto a la contención.

EJEMPLO 3.1. *Si $x \in B$, entonces el conjunto $x\uparrow = \{y \in B \mid x \leq y\}$ es un filtro en B. Este filtro es propio si y sólo si $x \neq 0$ y de hecho este conjunto es el filtro generado por $\{x\}$ en B.*

EJEMPLO 3.2. *Si X es un espacio topológico y $x \in X$, entonces se define el conjunto $\mathcal{F}_x = \{A \in \boldsymbol{Clopen}(X) \mid x \in A\}$. Este conjunto es un filtro en $\boldsymbol{Clopen}(X)$.*

Definición 3.2. *Si B es un álgebra de Boole entonces $\mathcal{I} \subseteq B$ no vacío es un ideal sobre B si:*

1. *Para todo $x, y \in \mathcal{I}$, $x \vee y \in \mathcal{I}$.*
2. *Para todo $x \in \mathcal{I}$ y $y \in B$ tal que $y \leq x$, se cumple que $y \in \mathcal{I}$.*

Un ideal es propio si $\mathcal{I} \subsetneq B$. Un ideal propio es máximo si es máximo con respecto al orden inducido por la contención en el conjunto de los ideales propios de un álgebra de Boole.

Nuevamente toda álgebra de Boole es un ideal sobre sí misma. De manera dual a como sucede con filtros, todo ideal tiene como elemento al 0 y un ideal $\mathcal{I}$ es propio si y sólo si $1 \notin \mathcal{I}$. Todas las propiedades restantes que satisfacen la familia de filtros de un álgebra de Boole, son satisfechas también por la familia de ideales de dicha álgebra. Así, la imagen inversa de un ideal mediante un morfismo de álgebras de Boole es un ideal y toda familia no vacía de ideales de un álgebra de Boole es cerrada bajo intesecciones. Por lo tanto todo conjunto puede extenderse a un ideal que se conoce como el ideal generado por dicho conjunto, que nuevamente se construye al intersectar todos los ideales que contienen a dicho conjunto. Con esto se tiene que la familia de ideales de un álgebra de Boole forma un retícula completa respecto a la contención.

El concepto dual al de filtro en un álgebra de Boole es el de ideal. El siguiente resultado muestra en que sentido son duales estos conceptos.

Proposición 3.1. *Existe un isomorfismo de órdenes entre los ideales y filtros propios de un álgebra de Boole.*

Demostración. Sea B un álgebra de Boole y se denota por $\mathfrak{I} = \{\mathcal{I} \subsetneq B \mid \mathcal{I} \text{ es un ideal}\}$ y $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F} \subsetneq B \mid \mathcal{F} \text{ es un filtro}\}$. Se afirma que las funciones $f : \mathfrak{I} \to \mathfrak{F}$ y $g : \mathfrak{F} \to \mathfrak{I}$ definidas mediante $f(\mathcal{I}) = \{x \in B \mid x^c \in \mathcal{I}\}$ y $g(\mathcal{F}) = \{x \in B \mid x^c \in \mathcal{F}\}$ están bien definidas, son morfismos de órdenes parciales, $f \circ g = 1_{\mathfrak{F}}$ y $g \circ f = 1_{\mathfrak{I}}$.

Para ver que f está bien definida sea $\mathcal{I} \in \mathfrak{I}$. Para probar que $f(\mathcal{I})$ es un filtro en B sean $x, y \in f(\mathcal{I})$. De la definición se tiene que $x^c, y^c \in \mathcal{I}$ y como $\mathcal{I}$ es un ideal entonces $x^c \vee y^c \in \mathcal{I}$. Al usar las leyes de De Morgan se tiene que $(x \wedge y)^c \in \mathcal{I}$ y por lo tanto $x \wedge y \in f(\mathcal{I})$. Por otro lado si $x \in f(\mathcal{I})$ y $y \in B$ son tales que $x \leq y$, entonces $y^c \leq x^c$. Como $x^c \in \mathcal{I}$ e $\mathcal{I}$ es un ideal entonces $y^c \in \mathcal{I}$ y por lo tanto $y \in f(\mathcal{I})$. Esto prueba que $f(\mathcal{I})$ es un filtro de B y como $1 \notin \mathcal{I}$, pues $\mathcal{I}$ es un ideal propio, entonces $0 \notin f(\mathcal{I})$. Por lo tanto $f(\mathcal{I}) \in \mathfrak{F}$.

La prueba de que g está bien definida es análoga. Para probar que $f \circ g = 1_{\mathfrak{F}}$ sea $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ y nótese que:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\mathcal{F}) &= f(g(\mathcal{F})) \\ &= \{x \in B \mid x^c \in g(\mathcal{F})\} \\ &= \{x \in B \mid x \in \mathcal{F}\} \\ &= \mathcal{F} \\ &= 1_{\mathfrak{F}}(\mathcal{F})\end{aligned}$$

La prueba de que $g \circ f = 1_{\mathfrak{I}}$ es análoga. Para ver que f es un morfismo de órdenes parciales basta con ver que es una función monótona, por ser biyectiva. Sean $\mathcal{I}, \mathcal{J} \in \mathfrak{I}$ tales que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$. Si $x \in f(\mathcal{I})$ entonces $x^c \in \mathcal{I}$ y por lo tanto $x^c \in \mathcal{J}$, de lo que se deduce que $x \in f(\mathcal{J})$. Esto prueba que $f(\mathcal{I}) \subseteq f(\mathcal{J})$ y esto concluye también la prueba de la afirmación. $\square$

El resto de esta sección se estudiarán algunas propiedades de los filtros en un álgebra de Boole.

Proposición 3.2. *Si B es un álgebra de Boole, entonces todo filtro propio puede extenderse a un ultrafiltro.*

Demostración. La prueba de esta proposición es un argumento estándar del uso del Lema de Zorn. Sea $F \subsetneq B$ un filtro y considere el conjunto $\mathcal{S} = \{G \subsetneq B \mid G$ es filtro y $F \subseteq G\}$. Como $F \in \mathcal{S}$ entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y también es claro que $(\mathcal{S}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Si $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ es una cadena no vacía de elementos en $\mathcal{S}$, entonces es claro que para todo $\beta \in \Delta$, $F_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$ y que $1 \notin \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$. Se afirma que $\bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$ es un filtro en B.

En efecto, si $x, y \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$, entonces existen $\alpha_0, \alpha_1 \in \Delta$ tales que $x \in F_{\alpha_0}$ y $y \in F_{\alpha_1}$. Como $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ es una cadena se puede suponer sin pérdida de generalidad que $F_{\alpha_0} \subseteq F_{\alpha_1}$ y por lo tanto $x, y \in F_{\alpha_1}$. Como este conjunto es un filtro en B entonces $x \wedge y \in F_{\alpha_1}$ y por lo tanto $x \wedge y \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$.

Por otro lado si $x \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$ y $y \in B$ es tal que $x \leq y$, con la misma notación del párrafo anterior $x \in F_{\alpha_0}$ y por lo tanto $y \in F_{\alpha_0}$, pues F_{α_0} es un filtro. Así, $y \in \bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$ y esto termina la prueba de que $\bigcup_{\alpha \in \Delta} F_\alpha$ es un filtro propio en B.

Lo que se ha probado es que dada una cadena de elementos en $\mathcal{S}$ esta es acotada superiormente. Entonces el Lema de Zorn asegura que existe $M \in \mathcal{S}$ máximo y esto termina la prueba. $\square$

Vale la pena mencionar que el resultado anterior se conoce como el teorema del ultrafiltro y que fue probado originalmente por Ulam en 1929 y Tarski en 1930. Además, este tiene como consecuencia inmediata la existencia de ultrafiltros en toda álgebra de Boole no trivial.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si B es un álgebra de Boole, entonces para todo $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$ existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $x \in \mathcal{U}$ y $y \notin \mathcal{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in B$ tales que $x \nleq y$. Es claro que $x \neq 0$ y que $y \neq 1$, así que considerese el filtro $(x \wedge y^c) \uparrow$. Por una observación previa $x \wedge y^c \neq 0$ y se deduce de la proposición 3.2 que existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $(x \wedge y^c) \uparrow \subseteq \mathcal{U}$. Como $x \wedge y^c \leq x$ entonces $x \in \mathcal{U}$. Por otro lado $y \notin \mathcal{U}$ pues en caso contrario $0 = (x \wedge y^c) \wedge y \in \mathcal{U}$, lo que sería una contradicción. Así, $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro buscado. $\square$

COROLARIO 3.1. *Si B es un álgebra de Boole, entonces para todo $x \in B$ con $x \neq 0$, existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $x \in \mathcal{U}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in B$ con $x \neq 0$. Entonces $x \nleq 0$ y por la proposición 3.3 existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $x \in \mathcal{U}$ y $0 \notin \mathcal{U}$. $\square$

PROPOSICIÓN 3.4. *Si B es un álgebra de Boole, entonces todo filtro propio es la intersección de todos los ultrafiltros que lo contienen.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{F}$ un filtro propio y defínase $\mathfrak{D} = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U}$ es ultrafiltro y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}\}$. Por la proposición 3.2 $\mathfrak{D} \neq \emptyset$ y además es claro que $\mathcal{F} \subseteq \bigcap \mathfrak{D}$. Si la contención anterior fuera propia, entonces existe $x \in \bigcap \mathfrak{D}$ tal que $x \notin \mathcal{F}$. Así, si $\langle \mathcal{F} \cup \{x^c\} \rangle$ es el filtro generado por el conjunto $\mathcal{F} \cup \{x^c\}$ y como $x \neq 0, 1$, entonces existe $\mathcal{U} \in \mathfrak{D}$ tal que $\mathcal{F} \cup \{x^c\} \subseteq \mathcal{U}$. Por hipótesis $x \in \mathcal{U}$ y por construcción $x^c \in \mathcal{U}$ por lo que $0 = x \wedge x^c \in \mathcal{U}$, pero esto es una contradicción. $\square$

Como se mencionó entre los resultados anteriores se encuentra la prueba de la existencia de ultrafiltros así como otras propiedades que satisface dicha familia de subconjuntos. Por ejemplo, la proposición 3.3 es una condición de separación de puntos. El siguiente resultado da distintas caracterizaciones para los ultrafiltros.

PROPOSICIÓN 3.5. *Si B es un álgebra de Boole y $\mathcal{F} \subsetneq B$ es un filtro, entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.*
2. *Para todo $x \in B$, $x \in \mathcal{F}$ ó $x^c \in \mathcal{F}$.*

3. *Para todo $x, y \in B$ tales que $x \vee y \in \mathcal{F}$ se tiene que $x \in \mathcal{F}$ o $y \in \mathcal{F}$.*
4. *Existe un morfismo de álgebras de Boole $f : B \to \{0, 1\}$ tal que $f^{-1}(1) = \mathcal{F}$.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro y $x \in B$ es tal que $x \notin \mathcal{F}$, entonces considere el conjunto $\mathcal{G} = \{y \in B \mid x \vee y \in \mathcal{F}\}$ que es un filtro. Nótese que $0 \in \mathcal{G}$ si y sólo si $x \in \mathcal{F}$, por lo que este filtro es propio. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y de esto se concluye que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Como $x \vee x^c = 1 \in \mathcal{F}$, entonces $x^c \in \mathcal{G}$ y por lo tanto $x^c \in \mathcal{F}$.

$2 \Rightarrow 3$) Si $x, y \in B$ son tales que $x \vee y \in \mathcal{F}$ y $x \notin \mathcal{F}$, entonces por 2, $x^c \in \mathcal{F}$. Así, $x^c \wedge y = x^c \wedge (x \vee y) \in \mathcal{F}$ y como $x^c \wedge y \leq y$, al ser $\mathcal{F}$ un filtro se deduce que $y \in \mathcal{F}$.

$3 \Rightarrow 4$) Defínase $f = \chi_{\mathcal{F}}$ que cumple con que $(\chi_{\mathcal{F}})^{-1}(1) = \mathcal{F}$. De la hipótesis se tiene que esto es un morfismo de álgebras de Boole.

$4 \Rightarrow 1$) Por hipótesis existe un morfismo de álgebras de Boole $f : B \to \{0, 1\}$ tal que $f^{-1}(1) = \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G} \subseteq B$. Entonces, existe $x \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$ y así $f(x) = 0$. Como $x \vee x^c = 1$ y f es morfismo, entonces $f(x) \vee f(x^c) = 1$ y por lo tanto $f(x^c) = 1$. De esto se deduce que $x^c \in \mathcal{G}$. Como $x \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es filtro entonces $0 = x \wedge x^c \in \mathcal{G}$. Por lo que $\mathcal{G} = B$.

$\square$

En virtud al lema anterior el conjunto $\mathcal{F}_x$ definido en el ejemplo 3.2 es un ultrafiltro pues si $A \in \mathbf{Clopen}(X)$, entonces este puede o no tener a x como elemento. Así, $A \in \mathcal{F}_x$ ó $A \notin \mathcal{F}_x$ según sea el caso.

También en virtud a los resultados anteriores se puede definir lo siguiente:

Definición 3.3. *Si B es un álgebra de Boole entonces se define el conjunto*

$$\boldsymbol{Spec}(B) = \{\mathcal{U} \subsetneq B \mid \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro}\}$$

y para todo $H \subseteq B$ filtro, se define

$$\mathcal{O}_H = \{\mathcal{U} \in \boldsymbol{Spec}(B) \mid H \nsubseteq \mathcal{U}\}.$$

Sea B un álgebra de Boole y denótese por $\mathbf{Filter}(B)$ al conjunto de filtros de B. La definición 3.3 permite definir la siguiente función:

$$\mathcal{O} : \mathbf{Filter}(B) \to \mathcal{P}(\mathbf{Spec}(B))$$

$$H \longmapsto \mathcal{O}_H.$$

La función definida tiene propiedades muy interesantes tal y como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.6. *La función $\mathcal{O}$ es un morfismo inyectivo de conjuntos parcialmente ordenados donde $\boldsymbol{Filter}(B)$ y $\mathcal{P}(\boldsymbol{Spec}(B))$ son conjuntos parcialmente ordenados respecto a la contención. Además, se satisfacen las relaciones:*

1. $\mathcal{O}_B = \boldsymbol{Spec}(B)$ *y* $\mathcal{O}_{1\uparrow} = \emptyset$.
2. *Para toda familia* $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \boldsymbol{Filter}(B)$, $\mathcal{O}_{\langle\bigcup_{i\in I} F_i\rangle} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{F_i}$.
3. *Para todo* $F, G \in \boldsymbol{Filter}(B)$, $\mathcal{O}_{F\cap G} = \mathcal{O}_F \cap \mathcal{O}_G$.

Demostración. Para ver que dicha asignación es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados sean $F, G \in \mathbf{Filter}(B)$ tales que $F \subseteq G$. Entonces es claro que $\mathcal{O}_F \subseteq \mathcal{O}_G$. Por otra lado si $\mathcal{O}_F \subseteq \mathcal{O}_G$, entonces $\mathbf{Spec}(B)\setminus\mathcal{O}_G \subseteq \mathbf{Spec}(B)\setminus\mathcal{O}_F$ y usando la proposición 3.4 se tiene que $F = \bigcap \mathbf{Spec}(B)\setminus\mathcal{O}_F \subseteq \bigcap \mathbf{Spec}(B)\setminus\mathcal{O}_G = G$.

Del hecho de que la asignación es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados se deduce la inyectividad pues si $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_G$, entonces $\mathcal{O}_F \subseteq \mathcal{O}_G$ y $\mathcal{O}_G \subseteq \mathcal{O}_F$. De esto se deduce que $F \subseteq G$ y $G \subseteq F$. Por lo tanto $F = G$.

Las igualdades mostradas en 1 son consecuencia de que los ultrafiltros son filtros propios y de que todo filtro, y por tanto todo ultrafiltro, tiene como elemento al 1. Si $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbf{Filter}(B)$, entonces para todo $j \in I$, $F_j \subseteq \bigcup_{i\in I} F_i \subseteq \langle\bigcup_{i\in I} F_i\rangle$. Usando el hecho de que $\mathcal{O}$ es morfismo se tiene que para toda $j \in I$, $\mathcal{O}_{F_j} \subseteq \mathcal{O}_{\langle\bigcup_{i\in I} F_i\rangle}$ y por lo tanto $\bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{F_i} \subseteq \mathcal{O}_{\langle\bigcup_{i\in I} F_i\rangle}$. Por otro lado, si $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec(B)} \setminus \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{F_i}$, entones para toda $i \in I$, $F_i \subseteq \mathcal{U}$. Usando que $\mathcal{U}$ es un filtro y la definición de filtro generado, se tiene que $\langle\bigcup_{i\in I} F_i\rangle \subseteq \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B) \setminus \mathcal{O}_{\langle\bigcup_{i\in I} F_i\rangle}$.

Si $F, G \in \mathbf{Filter}(B)$, entonces al ser $\mathcal{O}$ morfismo, se tiene que $\mathcal{O}_{F\cap G} \subseteq \mathcal{O}_F \cap \mathcal{O}_G$. Si $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_F \cap \mathcal{O}_G$ entonces $F \nsubseteq \mathcal{U}$ y $G \nsubseteq \mathcal{U}$ por lo que existen $x \in F \setminus \mathcal{U}$ y $y \in G \setminus \mathcal{U}$. Así, $x \vee y \in F \cap G$ y $x \vee y \notin \mathcal{U}$, pues en caso contrario al ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro, se tiene que $x \in \mathcal{U}$ o $y \in \mathcal{U}$ lo que sería una contradicción. Esto prueba que $F \cap G \nsubseteq \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{F\cap G}$, lo que prueba la contención que faltaba.

□

Corolario 3.2. *Los conjuntos $\boldsymbol{Filter}(B)$ y $\tau = \{\mathcal{O}_H\}_{H\in\boldsymbol{Filter}(B)}$ son isomorfos como conjuntos parcialmente ordenados y τ es una topología en $\boldsymbol{Spec}(B)$.*

En virtud del corolario anterior, se llamará el espectro de B al espacio topológico $(\mathbf{Spec}(B), \tau)$.

El siguiente resultado permite conocer una base de la topología en el espectro de un álgebra de Boole.

Proposición 3.7. *Para todo $b \in B$ los conjuntos $\mathcal{O}_{b\uparrow} = \{\mathcal{U} \in \boldsymbol{Spec}(B) | b \notin \mathcal{U}\}$ son abiertos y cerrados en $\boldsymbol{Spec}(B)$ y forman una base de la topología.*

Demostración. Sean $b \in B$ y $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B)$ tal que $b \in \mathcal{U}$. Al ser $\mathcal{U}$ un filtro se tiene que $b \uparrow \subseteq \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B) \setminus \mathcal{O}_{b\uparrow}$. De hecho, nótese que cada una de las implicaciones anteriores son válidas en la otra dirección y esto prueba la igualdad de conjuntos.

Por otro lado, $\mathbf{Spec}(B) \setminus \mathcal{O}_{b\uparrow} = \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B) \mid b \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B) \mid b^c \notin \mathcal{U}\} = \mathcal{O}_{(b^c)\uparrow}$. De lo que se deduce que el complemento relativo al $\mathbf{Spec}(B)$ de este conjunto es un abierto y por lo tanto es un cerrrado también.

Si $F \in \mathbf{Filter}(B)$, entonces $F = \bigcup_{b \in F} b \uparrow$ y por lo tanto $\mathcal{O}_F = \bigcup_{b \in F} \mathcal{O}_{b\uparrow}$. Esto prueba que dichos conjuntos son una base de la topología para el espectro. □

Notación 3.1. *Para todo $b \in B$ se escribirá $\mathcal{O}_b$ en lugar de $\mathcal{O}_{b\uparrow}$ y $U_b = \boldsymbol{Spec}(B) \setminus \mathcal{O}_b$.*

Con esta notación y las últimas dos proposiciones es sencillo probar el siguiente resultado.

Proposición 3.8. *Sea B un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in B$ se tiene que:*

1. $\mathcal{O}_1 = U_0 = \emptyset$ *y* $\mathcal{O}_0 = U_1 = \boldsymbol{Spec}(B)$.
2. $a \leq b$ *si y sólo si* $\mathcal{O}_b \subseteq \mathcal{O}_a$ *y* $U_a \subseteq U_b$.
3. $\mathcal{O}_{a \wedge b} = \mathcal{O}_a \cup \mathcal{O}_b$ *y* $U_{a \wedge b} = U_a \cap U_b$.
4. $\mathcal{O}_{a \vee b} = \mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b$ *y* $U_{a \vee b} = U_a \cup U_b$.
5. $\mathcal{O}_{b^c} = U_b$ *y* $U_{b^c} = \mathcal{O}_b$

Demostración. Todo ultrafiltro tiene como elemento al 1 por lo que $\mathcal{O}_1 = \emptyset$ y por lo tanto $U_1 = \mathbf{Spec}(B)$. Ningún ultrafiltro tiene como elemento al cero, entonces $\mathcal{O}_0 = \mathbf{Spec}(B)$ y por lo tanto $U_0 = \emptyset$. Esto prueba la afirmación 1.

Si $a \leq b$ y $\mathcal{U} \in U_a$, entonces $a \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro entonces $b \in \mathcal{U}$ y así $\mathcal{U} \in U_b$. Por lo tanto $U_a \subseteq U_b$. Por otro lado si $U_a \subseteq U_b$ entonces $\bigcap U_b \subseteq \bigcap U_a$. De la proposición 3.4 se tiene que $b \uparrow = \bigcap U_b$ y $a \uparrow = \bigcap U_a$, por lo que $b \uparrow \subseteq a \uparrow$. Así, $b \in a \uparrow$ y por lo tanto $a \leq b$. Además, por propiedades del complemento relativo es claro que $\mathcal{O}_b \subseteq \mathcal{O}_a$ si y sólo si $U_a \subseteq U_b$ y esto concluye la prueba la afirmación 2.

Para la afirmación 3 nótese que $(a \wedge b) \uparrow = \langle a \uparrow \vee b \uparrow \rangle$. Por lo tanto de la proposición 3.6 se deduce que $\mathcal{O}_{a \wedge b} = \mathcal{O}_{\langle a\uparrow \vee b\uparrow \rangle} = \mathcal{O}_a \cup \mathcal{O}_b$. La segunda afirmación se obtiene al aplicar el complemento relativo al $\mathbf{Spec}(B)$ en la igualdad anterior.

La afirmación 4 se deduce de la igualdad $a \uparrow \wedge b \uparrow = (a \vee b) \uparrow$ y de la proposición 3.6 se deduce que $\mathcal{O}_{a \vee b} = \mathcal{O}_{a\uparrow \wedge b\uparrow} = \mathcal{O}_a \cap \mathcal{O}_b$. Nuevamente la segunda afirmación se obtiene al aplicar el complemento relativo al $\mathbf{Spec}(B)$ en la igualdad anterior.

Para la última afirmación si $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B)$, entonces $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{b^c}$ si y sólo si $b^c \notin \mathcal{U}$ y al ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro esto sucede si y sólo si $b = (b^c)^c \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $\mathcal{U} \in U_b$ y de esto se concluye que $\mathcal{O}_{b^c} = U_b$. Para la segunda igualdad aplicar la igualdad probada a b^c. $\square$

También se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 3.3. *Sean B un álgebra de Boole y $a, b \in B$. Entonces son equivalentes:*

1. $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_b$
2. $U_a = U_b$
3. $a = b$

DEMOSTRACIÓN. Es claro de la definición que $1 \Rightarrow 2$. Para probar que $2 \Rightarrow 3$ supóngase que $U_a = U_b$. Entonces $\bigcap U_a = \bigcap U_b$, pero por la proposición 3.4 $a \uparrow = \bigcap U_a$ y $b \uparrow = \bigcap U_b$. Por lo tanto $a \uparrow = b \uparrow$ y de esto se concluye que $a = b$. La prueba de que $3 \Rightarrow 1$ es obvia. $\square$

El obtener de manera explícita el $\mathbf{Spec}(B)$ para un álgebra de Boole B es en general complicado. Por ejemplo, dado un lenguaje de primer orden puede definirse el álgebra de Lindenbaum de dicho lenguaje, la que resulta ser un álgebra de Boole. En este caso $\mathbf{Spec}(B) \cong 2^{\mathbb{N}}$, donde $2^{\mathbb{N}}$ es el espacio de sucesiones de ceros y unos, que de hecho es homeomorfo al conjunto clásico de Cantor. La prueba de esta afirmación puede encontrarse en [**Ha**].

2. El teorema de dualidad de Stone.

El primer objetivo de esta sección es exhibir que el espectro de un álgebra de Boole es funtorial.

PROPOSICIÓN 3.9. *Si B es un álgebra de Boole, entonces $\boldsymbol{Spec}(B)$ es un espacio topológico profinito.*

Demostración. Por el teorema 2.1 la afirmación es equivalente a probar que **Spec**(B) es un espacio totalmente separado y compacto.

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathbf{Spec}(B)$ con $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$. Por ser $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, entonces $\mathcal{U} \nsubseteq \mathcal{V}$ y así existe $b \in B$ tal que $b \in \mathcal{U}$ y $b \notin \mathcal{V}$. Esto significa que $\mathcal{U} \notin \mathcal{O}_b$ y $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_b$. De la proposición 2.2 se concluye que **Spec**(B) es un espacio totalmente separado.

Para ver que **Spec**(B) es compacto supóngase que $\mathbf{Spec}(B) = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{b_i}$ y que no existe una subcubierta finita de dicha cubierta. Nótese que basta con considerar cubiertas formadas por elementos de la forma $\mathcal{O}_b$ pues estos elementos son base de la topología del espectro. Entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{b \in B \mid \exists i_1, ..., i_n \in I, b_{i_1} \wedge ... \wedge b_{i_n} \leq b\}$ define un filtro en B y además $0 \in \mathcal{F}$ si y sólo si existen $i_1, .., i_n \in I$ tales que $b_{i_1} \wedge ... \wedge b_{i_n} = 0$. Pero si esto último se cumpliera, entonces el conjunto $\{\mathcal{O}_{b_i}\}_{i \in \{1,...,n\}}$ es una cubierta finita de **Spec**(B) lo que sería una contradicción. Así, $\mathcal{F}$ es un filtro propio y por lo tanto existe $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B)$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Usando la hipótesis existe $b_j \in B$ tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{b_j}$, es decir, $b_j \notin \mathcal{U}$ y por lo tanto $b_j^c \in \mathcal{U}$. Por otro lado, $b_j \in \mathcal{F}$ y por lo tanto $0 = b_j \wedge b_j^c \in \mathcal{U}$ lo que es una contradicción. $\square$

La proposición anterior permite derivar una serie de resultados muy importantes. El primero de ellos permite clasificar a todos los conjuntos abiertos-cerrados en el espectro.

Corolario 3.4. *Si $U \subseteq$ **Spec**(B), entonces U es un abierto-cerrado si y sólo si existe $b \in B$ tal que $U = U_b$.*

Demostración. No hay nada que probar en el regreso. Para la ida considere $U \subseteq \mathbf{Spec}(B)$ un abierto-cerrado. Como **Spec**(B) es compacto entonces U es compacto y dado que $U = \bigcup_{b \in X} U_b$ para $X \subseteq B$, entonces existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i} = U_{b_1 \vee ... \vee b_n}$, donde la última igualdad se tiene por la proposición 3.8. $\square$

El siguiente resultado será de gran importancia en el teorema principal de este capítulo.

Corolario 3.5. *Toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de Boole de los conjuntos abiertos-cerrados de su espectro.*

Demostración. Sea B un álgebra de Boole y se define:

$$\eta_B : B \to \mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B)) \tag{3.1}$$

$$b \mapsto U_b$$

Por la proposición 3.8 esta función es un morfismo inyectivo de álgebras de Boole y por el corolario anterior esta función es suprayectiva. Así, es un isomorfismo. $\square$

Nótese que la función definida en la ecuación (3.1) tiene un subíndice que hace notar la dependencia de esta respecto al álgebra de Boole en cuéstion. Esta observación es muy importante ya que posteriormente se demostrará que esta función establece un isomorfismo natural entre dos funtores. Además dicha asignación se conoce en la literatura como el isomorfismo de Stone.

El siguiente corolario, que si bien no tiene gran relevancia para nuestro objetivo, es un teorema de estructura para las álgebras de Boole y es uno de los resultados más importantes del trabajo de Stone pues dice que los conjuntos potencia contienen a todas estas álgebras.

COROLARIO 3.6. *(Teorema de representación de Stone) Toda álgebra de Boole es isomorfa a una subálgebra de Boole de subconjuntos de un conjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea B un álgebra de Boole y defínase $X = \mathbf{Spec}(B)$. Es sencillo ver que X es un conjunto pues $X \subseteq \mathcal{P}(B)$ y por el corolario 3.5 se tiene que $B \cong \mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B))$. Además es claro que $\mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B)) \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\square$

La importancia del resultado anterior radica en que durante mucho tiempo se quizo clasificar a las álgebras de Boole y se creía que todas ellas eran isomorfas a un álgebra de subconjuntos. Sin embargo, Lindenbaum y Tarski (1935) probaron que las álgebras de Boole que son isomorfas a un álgebra de subconjuntos son precisamente las que son átomicas y completas. Así, el resultado anterior dice que aunque el resultado buscado no es cierto para álgebras de Boole en general, siempre hay una representación en un álgebra de subconjuntos. Por otro lado se puede dar una prueba del teorema de representación de Stone que no depende de la topología, esta se puede consultar por ejemplo en [**H**, pp 205].

El siguiente corolario dice que para álgebras de Boole finitas el espectro se puede determinar de manera sencilla y de hecho este se vuelve trivial.

COROLARIO 3.7. *Sea B un álgebra de Boole, entonces B es finita si y sólo si $\mathbf{Spec}(B)$ tiene la topología discreta.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Supóngase que B es un álgebra de Boole finita. Dado que $\mathbf{Spec}(B) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces $\mathbf{Spec}(B)$ es finito. Como dicho espacio es Hausdorff, entonces $\mathbf{Spec}(B)$ tiene la topología discreta.

$\Leftarrow$) Por el isomorfismo de Stone se tiene que $B \cong \mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B))$. Así, como $\mathbf{Spec}(B)$ tiene la topología discreta se tiene que $\mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B)) = \mathbf{Spec}(B)$ y por lo tanto $B \cong \mathbf{Spec}(B)$. Como el espacio $\mathbf{Spec}(B)$ es compacto y discreto entonces es finito y del isomorfismo se deduce que B es finita. $\square$

Regresando al objetivo planteado al inicio de esta sección nótese que la proposición 3.9 tiene como consecuencia directa la definición, a nivel de objetos, de una asignación de la categoría de álgebras de Boole a la de espacios topológicos profinitos.

Por otro lado también se induce una asignación entre los morfismos de la categoría de álgebras de Boole y de espacios topológicos profinitos, pues si $f : B \to B'$ es un morfismo de álgebras de Boole, entonces este induce una función continua $\mathbf{Spec}(f) : \mathbf{Spec}(B') \to \mathbf{Spec}(B)$. Así, si $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B')$ entonces por la proposición 3.5 existe $g : B' \to \{0,1\}$ un morfismo de álgebras de Boole tal que $g^{-1}(1) = \mathcal{U}$. Como $g \circ f : B \to \{0,1\}$ es un morfismo de álgebras de Boole, nuevamente al aplicar la proposición 3.5 se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}) = (g \circ f)^{-1}(1) \subseteq B$ es un ultrafiltro. Con esto se concluye que la regla de correspondencia es $\mathbf{Spec}(f)(\mathcal{U}) = f^{-1}(\mathcal{U})$. Además, esta función es continua pues, si $b \in B$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Spec}(f)^{-1}(\mathcal{O}_b) &= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid \mathbf{Spec}(f)(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_b\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_b\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid b \notin f^{-1}(\mathcal{U})\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid f(b) \notin \mathcal{U}\} \\
&= \mathcal{O}_{f(b)}.
\end{aligned}$$

La prueba de que la asignación $\mathbf{Spec} : \mathbf{Bool}^{op} \to \mathbf{Prof}$ es funtorial, es una consecuencia directa de las propiedades de la imagen inversa de una función.

El siguiente objetivo es ver que la asignación que a cada espacio topológico profinito le asocia el álgebra de Boole de sus conjuntos abiertos-cerrados, es también funtorial.

PROPOSICIÓN 3.10. *Todo espacio topológico profinito es homeomorfo al espectro del álgebra de Boole de sus conjuntos abiertos-cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio topológico profinito y se define la asignación

$$\tau_X : X \to \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X)) \tag{3.2}$$

$$x \mapsto \mathcal{F}_x$$

donde $\mathcal{F}_x$ es el ultrafiltro definido en el ejemplo 3.2.

Como X es un espacio compacto y $\mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X))$ es Hausdorff, para ver que τ_X es un homeomorfismo basta con probar que es continua y biyectiva (ver [**E**, pp 12–13]).

Si $U \in \mathbf{Clopen}(X)$, entonces nótese que $\tau_X^{-1}(\mathcal{O}_U) = \{x \in X \mid \tau_X(x) \in \mathcal{O}_U\} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \in \mathcal{O}_U\} = \{x \in X \mid U \notin \mathcal{F}_x\} = \{x \in X \mid x \notin U\} = X \setminus U$. Dado que este conjunto es abierto entonces τ_X es continua.

Para $x, y \in X$ tales que $x \neq y$ y al ser X profinito se tiene que existe $U \in \mathbf{Clopen}(X)$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Así, $U \in \mathcal{F}_x$ y $U \notin \mathcal{F}_y$ y por lo tanto $\mathcal{F}_x \neq \mathcal{F}_y$. Esto prueba que τ_X es inyectiva.

Sea $\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X))$ y considerese el conjunto $\mathfrak{S} = \{Y \subseteq X \mid Y \in \mathcal{U}\}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro entonces $\mathfrak{S}$ es cerrado bajo intersecciones finitas y como X es Hausdorff entonces $\bigcap \mathfrak{S} \neq \emptyset$.[1] Sea $x \in \bigcap \mathfrak{S}$ y si $Y \in \mathcal{U}$, entonces $x \in Y$ pues $x \in \bigcap \mathfrak{S}$. De esto se deduce que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_x$ y como $\emptyset \notin \mathcal{F}_x$ entonces $\mathcal{F}_x$ es un filtro propio. Por lo tanto $\mathcal{U} = \mathcal{F}_x$ y esto concluye la prueba de que τ_X es suprayectiva. $\square$

Nuevamente hay que notar que la función definida en la ecuación (3.2), a la que se le conoce como el homeomorfismo de Stone, depende del espacio en cuestión y la razón por la cual esta lleva un subíndice es porqué esta establece un isomorfismo entre dos funtores. Sin embargo, antes de probar esto hay que definir todavía un funtor entre la categoría de espacios topológicos profinitos y álgebras de Boole.

La definición a nivel de objetos es estándar pues a todo espacio topológico profinito se le asigna el conjunto de sus subconjuntos abiertos-cerrados, que es un álgebra de Boole. A nivel de morfismos la asignación es nuevamente contravariante y a toda función continua entre espacios profinitos $f : X \to Y$ se le asocia una función $\mathbf{Clopen}(f) : \mathbf{Clopen}(Y) \to \mathbf{Clopen}(X)$ cuya regla de correspondencia es $\mathbf{Clopen}(f)(U) = f^{-1}(U)$. Por continuidad esta función está bien definida y por propiedades de la imagen inversa es un morfismo de álgebras Boole.

[1] Ver [**E**, pp 12–13]

Así, la asignación **Clopen** : $\mathbf{Prof}^{op} \to \mathbf{Bool}$ es funtorial nuevamente por propiedades de la imagen inversa.

Se termina esta sección probando un importante resultado relativo a los dos funtores definidos anteriormente.

TEOREMA 3.1. *(Dualidad de Stone) Existe una antiequivalencia entre las categorías* ***Bool*** *y* ***Prof*** *dada por los funtores* ***Spec*** : $\boldsymbol{Bool}^{op} \to \boldsymbol{Prof}$ *y* ***Clopen*** : $\boldsymbol{Prof}^{op} \to \boldsymbol{Bool}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema D.2, lo único que falta demostrar es que $\mathbf{Spec} \circ \mathbf{Clopen} \cong 1_{\mathbf{Prof}}$ y que $\mathbf{Clopen} \circ \mathbf{Spec} \cong 1_{\mathbf{Bool}}$. Para el primer caso sea $f : X \to X'$ una función continua entre espacios profinitos. Se quiere probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_{\mathbf{Prof}}(f)"] \arrow[d, "\tau_X"'] & X' \arrow[d, "\tau_{X'}"] \\
\mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X)) \arrow[r, "(\mathbf{Spec}\circ\mathbf{Clopen})(f)"'] & \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X'))
\end{tikzcd}$$

En efecto, pues si $x \in X$ entonces:

$$\begin{aligned}
((\mathbf{Spec} \circ \mathbf{Clopen})(f) \circ \tau_X)(x) &= \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(f))(\mathcal{F}_x) \\
&= \mathbf{Clopen}(f)^{-1}(\mathcal{F}_x) \\
&= \{U \in \mathbf{Clopen}(X') \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_x\} \\
&= \{U \in \mathbf{Clopen}(X') \mid x \in f^{-1}(U)\} \\
&= \{U \in \mathbf{Clopen}(X') \mid f(x) \in U\} \\
&= \mathcal{F}_{f(x)} \\
&= \tau_{X'}(f(x)) \\
&= (\tau_{X'} \circ 1_{\mathbf{Prof}}(f))(x)
\end{aligned}$$

En el segundo caso se quiere probar que si $f : B \to B'$ es un morfismo de álgebras de Boole, entonces el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "1_{\mathbf{Bool}}(f)"] \arrow[d, "\eta_B"'] & & B' \arrow[d, "\eta_{B'}"] \\
\mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B)) \arrow[rr, "(\mathbf{Clopen} \circ \mathbf{Spec})(f)"'] & & \mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(B'))
\end{tikzcd}$$

Para esto sea $b \in B$, entonces:

$$\begin{aligned}
((\mathbf{Clopen} \circ \mathbf{Spec})(f) \circ \eta_B)(b) &= \mathbf{Clopen}(\mathbf{Spec}(f))(U_b) \\
&= \mathbf{Spec}(f)^{-1}(U_b) \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid \mathbf{Spec}(f)(\mathcal{U}) \in U_b\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid f^{-1}(\mathcal{U}) \in U_b\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid b \in f^{-1}(\mathcal{U})\} \\
&= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Spec}(B') \mid f(b) \in \mathcal{U}\} \\
&= U_{f(b)} \\
&= \eta_{B'}(f(b)) \\
&= (\eta_{B'} \circ 1_{\mathbf{Bool}}(f))(b)
\end{aligned}$$

□

3. El teorema de dualidad de Stone para anillos de Boole.

Definición 3.4. *Sea S un anillo unitario y no necesariamente conmutativo. Se dice que S es un anillo de Boole si todos sus elementos son idempotentes.*

Si el conjunto de los elementos idempotentes de un anillo unitario S se denota por $\mathbf{Idem}(S)$, entonces S es un anillo de Boole si y sólo si $\mathbf{Idem}(S) = S$.

Proposición 3.11. *Sea S un anillo de Boole, entonces:*

1. *Para todo $x \in S$, $2x = 0$.*
2. *S es conmutativo.*

Demostración. Para la primera afirmación sea $x \in S$, entonces $(x+1)^2 = x+1$. Pero $(x+1)^2 = x^2+2x+1 = x+2x+1$ por lo que $2x+(x+1) = x+1$. Al cancelar $x+1$ se tiene que $2x = 0$.

Para la segunda afirmación sean $x, y \in S$ y como $(x+y)^2 = x+y$, entonces $xy+yx = 0$. Dado que de la primera afirmación $2(xy) = 0$, entonces por la unicidad del inverso aditivo $xy = yx$.

$\square$

Denótese por **BR1ng** a la categoría de anillos de Boole con los morfismos de anillos. Así, la segunda afirmación del resultado anterior dice que existe un encaje de esta categoría en la categoría de anillos conmutativos unitarios con los morfismos de anillos, la que se denotará por **CR1ng**.

Un primer ejemplo de anillo de Boole es el anillo cero, sin embargo, el primer ejemplo no trivial de anillo de Boole lo constituye $\mathbb{Z}_2$. De hecho este anillo tiene una propiedad muy interesante en la categoría **BR1ng**.

Proposición 3.12. *$\mathbb{Z}_2$ es el objeto inicial de la categoría **BR1ng**.*

Demostración. Si $S \in$ **BR1ng**, entonces se define $\rho_S : \mathbb{Z}_2 \to S$ mediante $\rho_S(0) = 0$ y $\rho_S(1) = 1$. Esta asignación está bien definida por la primera afirmación de la proposición 3.11, es claramente un morfismo de anillos y es el único con dominio $\mathbb{Z}_2$ y codominio S. $\square$

Lo que está diciendo esta proposición es que todo anillo de Boole tiene en automático estructura de $\mathbb{Z}_2$-álgebra (ver apéndice C).

Por otro lado, el siguiente resultado dice que de hecho la categoría de anillos de Boole tiene otra presentación con la que ya se ha trabajado antes.

Proposición 3.13. *Las categorías **BR1ng** y **Bool** son isomorfas.*

Demostración. Se define la asignación $\mathfrak{BR} : \mathbf{Bool} \to \mathbf{BR1ng}$ que a nivel de objetos tiene por regla de correspondencia $\mathfrak{BR}(B, \wedge, \vee, \_^c, 0, 1) = (B, +, \cdot)$, donde las funciones $+, \cdot : B \times B \to B$ se definen mediante:

$$a + b = (a \wedge b^c) \vee (a^c \wedge b)$$

$$a \cdot b = a \wedge b$$

con $a, b \in B$.

Es sencillo ver que con estas operaciones $(B, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo unitario. Además, es un anillo de Boole pues al ser B un álgebra de Boole se tiene que para todo $a \in B$, $a \wedge a = a$.

Es claro que si $f : B \to B'$ es un morfismo de álgebras de Boole, entonces f es un morfismo de anillos con la definición de las operaciones que hacen de B y B' anillos de Boole. Por lo tanto se define $\mathfrak{BR}(f) = f$ y también se deduce de manera sencilla que $\mathfrak{BR}$ es un funtor y que además es fiel y pleno.

Por otro lado, si $(S, +, \cdot) \in$ **BR1ng**, entonces al definir las funciones $\vee, \wedge : S \times S \to S$ y $\_^c : S \to S$ con las reglas de correspondencia:

$$a \wedge b = ab$$

$$a \vee b = a + b - ab$$

$$a^c = 1 - a$$

donde $a, b \in S$, se tiene que $(S, \vee, \wedge, \_^c, 0, 1) \in$ **Bool**.

Así, al definir la asignación $\mathfrak{B}$: **BR1ng** $\to$ **Bool** mediante $\mathfrak{B}(S, +, \cdot) = (S, \vee, \wedge, \_^c, 0, 1)$ como en la discusión previa, es claro que $\mathfrak{BR}$ y $\mathfrak{B}$ inducen una correspondencia biyectiva entre los objetos de las categorías **Bool** y **BR1ng**. Respecto a los morfismos nuevamente se define $\mathfrak{B}(f) = f$ y por lo tanto dichas categorías son isomorfas. $\square$

Como una primera consecuencia, el resultado anterior permite dar una gran cantidad de ejemplos de anillos de Boole pues se recuerda que dado X un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ tiene estructura de álgebra de Boole. Así, $\mathcal{P}(X)$ es un anillo de Boole donde el producto de dos subconjuntos corresponde a la intersección de ellos.

Sin embargo, el resultado más importante de esta sección se obtiene al unir el resultado anterior y el teorema de Dualidad de Stone.

TEOREMA 3.2. *(Dualidad de Stone en anillos de Boole) Existe una antiequivalencia de categorías entre las categorías de espacios topológicos profinitos* ***Prof*** *y de anillos de Boole* ***BR1ng****.*

DEMOSTRACIÓN. Considerese el funtor $\mathbf{Clopen} \circ \mathfrak{BR} : \mathbf{Prof}^{op} \to \mathbf{BR1ng}$. Para ver que este funtor es una equivalencia de categorías se va a probar que es fiel, pleno y denso (ver teorema D.2).

Por el teorema de Dualidad de Stone y el teorema D.2 el funtor **Clopen** es fiel y pleno, y de la prueba de la proposición 3.13 el funtor $\mathfrak{BR}$ también lo es. Por lo tanto, $\mathbf{Clopen} \circ \mathfrak{BR}$ es fiel y pleno.

Para ver que es denso sea $B \in \mathbf{BR1ng}$, entonces $\mathfrak{BR}(\mathfrak{B}(B)) = B$ y como $\mathfrak{B}(B) \in \mathbf{Bool}$ y **Clopen** es denso, por el teorema de Dualidad de Stone, entonces existe $X \in \mathbf{Prof}$ tal que $\mathfrak{B}(B) = \mathbf{Clopen}(X)$. Por lo tanto $B = \mathfrak{BR}(\mathfrak{B}(B)) \cong \mathfrak{BR}(\mathbf{Clopen}(X))$ y esto concluye la prueba. $\square$

Originalmente el teorema de Dualidad de Stone, que se encuentra enunciado en [**S2**], establece una “equivalencia matemática” entre los anillos de Boole y los espacios de Boole. La noción de equivalencia matemática es lo que hoy en día se conoce como una equivalencia de categorías y fue usada por primera vez en el famoso artículo *Tôhoku* de Grothendieck. Así, nótese que del teorema 3.2 y el corolario 2.1 se deduce la versión moderna del teorema de Dualidad de Stone original, es decir, la existencia de una antiequivalencia de categorías entre la categoría de espacios de Boole con las funciones continuas y la de anillos de Boole.

Capítulo 4

El funtor espectro de Pierce.

En este capítulo R denota siempre un anillo conmutativo unitario. Además, se recuerda que la categoría de anillos conmutativos unitarios se denota por **CR1ng**.

1. Ideales regulares de un anillo.

Para un anillo R se denota por $\mathbf{Idem}(R)$ al conjunto de sus idempotentes, el cual es siempre diferente del vacío pues 0 es un elemento de dicho conjunto.

Defínanse dos funciones binarias $\vee, \wedge : \mathbf{Idem}(R) \times \mathbf{Idem}(R) \to \mathbf{Idem}(R)$ y una función $\_^c : \mathbf{Idem}(R) \to \mathbf{Idem}(R)$, tales que para $e, f \in \mathbf{Idem}(R)$:

$$e \vee f = e + f - ef$$

$$e \wedge f = ef$$

$$e^c = 1 - e$$

Estas funciones están bien definidas pues si $e, f \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces:

$$\begin{aligned}(e \vee f)^2 &= (e + f - ef)^2\\ &= e^2 + ef - e^2 f + fe + f^2 - fef - efe - ef^2 + (ef)^2\\ &= e + f - ef\\ &= e \vee f\end{aligned}$$

Y es muy sencillo ver que $e \wedge f, e^c \in \mathbf{Idem}(R)$. De hecho, las funciones definidas dan estructura de álgebra de Boole a $\mathbf{Idem}(R)$.

Proposición 4.1. $(\boldsymbol{Idem}(R), \wedge, \vee, \_^c, 0, 1)$ *es un álgebra de Boole.*

Demostración. Sean $e, f, g \in \mathbf{Idem}(R)$. Primero nótese que es claro que $\wedge$ es asociativa y tanto $\wedge$ como $\vee$ son conmutativas. Veámos que $\vee$ es asociativa:

$$\begin{aligned}(e \vee f) \vee g &= (e + f - ef) + g - (e + f - ef)g \\ &= e + f - ef + g - eg - fg + efg \\ &= e + (f + g - fg) - e(f + g - fg) \\ &= e \vee (f \vee g)\end{aligned}$$

También se satisfacen las identidades de absorción pues

$$\begin{aligned}(e \vee f) \wedge e &= (e + f - ef)e \\ &= e + fe - ef \\ &= e\end{aligned}$$

Y de manera análoga se tiene que $(e \wedge f) \vee e = e$. Además, $e \wedge e^c = e(1 - e) = e - e^2 = 0$ y $e \vee e^c = e + e^c - ee^c = e + (1 - e) = 1$.

Para las propiedades distributivas se tiene que:

$$\begin{aligned}(e \vee f) \wedge (e \vee g) &= (e + f - ef)(e + g - eg) \\ &= e + eg - eg + fe + fg - feg - ef - efg + efg \\ &= e + fg - efg \\ &= e \vee (f \wedge g)\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que $e \wedge (f \vee g) = (e \wedge f) \vee (e \wedge g)$ y con esto se concluye la prueba. $\square$

Se recuerda que como a toda álgebra de Boole se le puede asociar una estructura de retícula, entonces el álgebra de Boole de los idempotentes de un anillo $\mathbf{Idem}(R)$, es una retícula al definir para $e, f \in \mathbf{Idem}(R)$: $e \leq f$ si $e \wedge f = e$ o, de manera equivalente, $e \leq f$ si $e \vee f = f$.

En esta sección se estudiarán ciertas clases de ideales cuyos idempotentes cumplen una característica especial.

Definición 4.1. *Un ideal I de R es regular si es generado por sus elementos idempotentes. En tal caso se escribirá $I \trianglelefteq R$.*

EJEMPLO 4.1. *Los ideales* 0 *y* R *son ideales regulares de* R *pues* $0 = 0R$ *y* $R = 1R$*.*

Nótese que si R es un dominio entero, entonces $\mathbf{Idem}(R) = \{0,1\}$. Por lo tanto los únicos ideales regulares de dicho anillo son 0 y R. Sin embargo, el que un anillo tenga exactamente dos elementos idempotentes, y por lo tanto dos ideales regulares, no implica que dicho anillo es un dominio entero. Como ejemplo de esta afirmación considerese $C^0([0,1],\mathbb{R})$ el anillo de funciones continuas reales con dominio $[0,1]$. Ahora, si $f \in \mathbf{Idem}(C^0([0,1],\mathbb{R}))$, entonces $im(f) \subseteq \{0,1\}$. Si se supone que $f \neq 0$ y $f \neq 1$, entonces existen $x_0, x_1 \in [0,1]$ tales que $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = 1$. Dado que f es continua, el teorema del valor intermedio permite concluir que existe $x_2 \in [0,1]$ tal que $f(x_2) = \frac{1}{2}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathbf{Idem}(C^0([0,1],\mathbb{R})) = \{0,1\}$. Además $C^0([0,1],\mathbb{R})$ no es un dominio entero pues las funciones $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas mediante $f(x) = \text{máx}\{1-2x, 0\}$ y $g(x) = \text{máx}\{2x-1, 0\}$ son continuas, $f, g \neq 0$ pero $fg = 0$.

EJEMPLO 4.2. *Considere a* $\mathbb{R}$ *con su topología usual y a* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ *con la topología inducida. Si* $A \in$ ***Clopen***$(\mathbb{Q})$ *entonces la función característica de* A*,* $\chi_A : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *es continua pues para* $U \subseteq \mathbb{R}$ *abierto se tiene que:*

$$\chi_A^{-1}(U) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & Si\ 0,1 \in U \\ \mathbb{Q} \setminus A, & Si\ 0 \in U \ \ y\ 1 \notin U \\ A, & Si\ 0 \notin U \ \ y\ 1 \in U \\ \emptyset, & Si\ 0,1 \notin U \end{cases}$$

En cualquier caso $\chi_A^{-1}(U) \subseteq \mathbb{Q}$ *es abierto y por lo tanto para todo* $A \in$ ***Clopen***$(\mathbb{Q})$*,* $\chi_A \in C^0(\mathbb{Q},\mathbb{R})$*.*

Además, es claro de la fórmula del producto de funciones características que para todo $A \in$ ***Clopen***$(\mathbb{Q})$*,* $\chi_A \in$ ***Idem***$(C^0(\mathbb{Q},\mathbb{R}))$*. Por lo tanto para todo* $A \in$ ***Clopen***$(\mathbb{Q})$*,* $\chi_A C^0(\mathbb{Q},\mathbb{R}) \trianglelefteq C^0(\mathbb{Q},\mathbb{R})$*.*

Este ejemplo es muy interesante pues muestra un anillo con una cantidad infinita de ideales regulares pues como se dijo en el ejemplo 2.3, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *con* $x < y$*, se tiene que* $(x,y) \in$ ***Clopen***$(\mathbb{Q})$*.*

El siguiente resultado da una caracterización de los ideales regulares.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea* I *un ideal de* R*. Son equivalentes:*

1. I *es regular.*

2. *Para todo* $x \in I$ *existe* $e \in I$ *idempotente tal que* $x = xe$.
3. *Para cualesquiera* $x_1, ..., x_n \in I$ *existe* $e \in I$ *idempotente tal que para todo* $k \in \{1, ..., n\}$, $x_k = x_k e$.

Demostración. Es claro que $3 \Rightarrow 2$ y que $2 \Rightarrow 1$. Para probar que $1 \Rightarrow 3$ sean $x_1, ..., x_n \in I$. Usando la hipótesis existen $\{e_1, ..., e_m\} \subseteq \mathbf{Idem}(R)$ tales que para todo $j \in \{1, ..., n\}$, $x_j = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(j)} e_i$ donde $r_i^{(j)} \in R$.

Se define $e := e_1 \vee ... \vee e_n$ y como para todo $i \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $e_i \leq e$, entonces $e_i e = e_i$. Así, dado $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $x_k e = (\sum_{i=1}^{m} r_i^{(k)} e_i)e = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(k)} e_i e = \sum_{i=1}^{m} r_i^{(k)} e_i = x_k$. Esto prueba la afirmación. $\square$

El siguiente resultado muestra que el conjunto de ideales regulares de un anillo es cerrado bajo ciertas operaciones de ideales.

Proposición 4.3.

1. *El producto de una cantidad finita de ideales regulares es un ideal regular.*
2. *La intersección de una cantidad finita de ideales regulares es un ideal regular y esta coincide con el producto de dichos ideales.*
3. *La suma de cualquier familia de ideales regulares es un ideal regular.*

Demostración. Para la afirmación 1 observe primero que si la familia de ideales regulares es vacía, entonces su producto es R, que es un ideal regular. Así, considere el caso de una familia no vacía de ideales regulares que además puede reducirse al caso de dos ideales regulares, pues el resultado se generaliza utilizando inducción sobre el número de elementos de la familia. Entonces sean $I, J \trianglelefteq R$ y $x \in IJ$. De la definición del ideal IJ existen $i_1, ..., i_n \in I$ y $j_1, ..., j_n \in J$ tales que $x = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k$. Por la afirmación 3 de la proposición 4.2 existen $e \in I$ y $f \in J$ idempotentes tales que para todo $k \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $i_k e = i_k$ y $j_k f = j_k$. Nótese que $ef \in IJ$ y que este elemento es idempotente. Además, $x(ef) = \sum_{k=1}^{n}(i_k j_k)(ef) = \sum_{k=1}^{n}(i_k e)(j_k f) = \sum_{k=1}^{n} i_k j_k = x$. La afirmación 2 de la proposición 4.2 permite concluir que $IJ \trianglelefteq R$.

En lo que respecta a la afirmación 2, nuevamente se tiene que la intersección de una familia vacía de ideales regulares es R, que es regular y coincide con el producto de los elementos de la familia. De manera análoga a la prueba anterior, para probar el resultado en una familia finita no vacía de ideales regulares basta con considerar el caso de dos ideales regulares y de hecho, por la afirmación 1 de esta proposición, basta con probar que para $I, J \trianglelefteq R$ se tiene que $IJ = I \cap J$. Se recuerda que para anillos conmutativos siempre es cierto que $IJ \subseteq I \cap J$. Por otro lado, si $x \in I \cap J$

entonces como $x \in I$ existe $e \in I$ idempotente tal que $x = ex$. Dado que $x \in J$ se deduce que $ex \in IJ$ y esto prueba la contención que faltaba.

Se considera ahora $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de ideales regulares de R. Si $\Delta = \emptyset$ entonces $\sum_{\alpha\in\Delta} I_\alpha = 0$, que es regular. Ahora, si $\Delta \neq \emptyset$ entonces sea $x \in \sum_{\alpha\in\Delta} I_\alpha$. Así, existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Delta$ tales que para todo $j \in \{1, ..., n\}$, $x_{\alpha_j} \in I_{\alpha_j}$ y $x = \sum_{j=1}^n x_{\alpha_j}$. Al usar la segunda afirmación de la proposición 4.2, para todo $j \in \{1, ..., n\}$ existe $e_j \in I_{\alpha_j}$ idempotente tal que $x_{\alpha_j} e_j = x_{\alpha_j}$. Sea $e = e_1 \vee ... \vee e_n$ y entonces es claro que $e \in \sum_{\alpha\in\Delta} I_\alpha$ y que este elemento es idempotente. Además, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, $e_j e = e_j$. Para terminar nótese que $xe = (\sum_{j=1}^n x_{\alpha_j})e = (\sum_{j=1}^n x_{\alpha_j} e_j)e = \sum_{j=1}^n x_{\alpha_j} e_j e = \sum_{j=1}^n x_{\alpha_j} e_j = x$. Por lo tanto $\sum_{\alpha\in\Delta} I_\alpha \trianglelefteq R$. $\square$

Definición 4.2. *Un ideal regular máximo es un ideal regular que es máximo con respecto al orden inducido por la contención en el conjunto de ideales regulares propios.*

Algunas propiedades de los ideales regulares máximos que serán de utilidad se encuentran en el siguiente resultado.

Proposición 4.4.

1. *Todo ideal regular propio se puede extender a un ideal regular máximo.*
2. *Para todo $e \in \textbf{Idem}(R)$ no unidad existe $M \trianglelefteq R$ máximo tal que $e \in M$.*
3. *Si $M \trianglelefteq R$ es máximo, entonces para todo $e \in \textbf{Idem}(R)$ se tiene que $e \in M$ ó $1 - e \in M$.*

Demostración. La primera afirmación es una prueba estándar del uso del lema de Zorn. Sea $I \trianglelefteq R$ propio y se define el conjunto $\mathcal{S} = \{J \trianglelefteq R \mid J \subsetneq R, I \subseteq J\}$. Como $I \in \mathcal{S}$ entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y además $(\mathcal{S}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Si $\{J_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una cadena no vacía de elementos en $\mathcal{S}$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Delta} J_\alpha$ es un ideal de R. Lo único que resta probar es que es regular y para ello se va a probar que este ideal satisface la afirmación 2 de la proposición 4.2. Si $x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} J_\alpha$, entonces existe $\alpha_0 \in \Delta$ tal que $x \in J_{\alpha_0}$. Pero como $J_{\alpha_0} \trianglelefteq R$ se tiene que existe $e \in \textbf{Idem}(J_{\alpha_0})$ tal que $x = xe$. Dado que $e \in \textbf{Idem}(\bigcup_{\alpha\in\Delta} J_\alpha)$ esto concluye la prueba de que $\bigcup_{\alpha\in\Delta} J_\alpha \trianglelefteq R$ y como para todo $\beta \in \Delta$, $J_\beta \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Delta} J_\alpha$, entonces el lema de Zorn permite concluir que existe $M \in \mathcal{S}$ máximo.

Para $e \in \textbf{Idem}(R)$ que no es unidad, el ideal Re es propio y regular. Por la afirmación 1 existe $M \trianglelefteq R$ máximo tal que $Re \subseteq M$, de donde $e \in M$.

Sean $M \trianglelefteq R$ máximo y $e \in \mathbf{Idem}(R)$ tal que $e \notin M$. Entonces el ideal $M+Re$ es regular por la afirmación 3 de la proposición 4.3 y además $M \subsetneq M+Re$. Usando la maximalidad de M se concluye que $M+Re = R$, de lo que se deduce que existe $r \in R$ tal que $1-er \in M$. Como M es un ideal $(1-e)(1-er) \in M$, pero $(1-e)(1-er) = 1-er-e+e^2r = 1-e$, lo que concluye la prueba.

□

Para R un anillo se denota por $\mathcal{M}_R$ al conjunto de ideales regulares máximos de R. Por otro lado, para $I \trianglelefteq R$ se define el conjunto $\mathcal{O}_I = \{M \in \mathcal{M}_R \mid I \nsubseteq M\}$. Es muy sencillo adaptar la prueba de la proposición 3.6 para probar que estos conjuntos satisfacen las siguientes propiedades:

Proposición 4.5.

1. *$\mathcal{O}_0 = \emptyset$ y $\mathcal{O}_R = \mathcal{M}_R$.*
2. *Para $I, J \trianglelefteq R$ se cumple que $\mathcal{O}_{I\cap J} = \mathcal{O}_I \cap \mathcal{O}_J$.*
3. *Para cualquier familia $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de ideales regulares de R se tiene que $\mathcal{O}_{\sum_{\alpha\in\Delta} I_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\Delta} \mathcal{O}_{I_\alpha}$.*

Como consecuencia de esta proposición la colección de conjuntos $\{\mathcal{O}_I\}_{I\trianglelefteq R}$ es una topología en $\mathcal{M}_R$. Nótese que en el caso en que R es un dominio entero la topología definida es la indiscreta.

2. Definición del funtor espectro de Pierce.

Lema 4.1. *Sea $f : R \to S$ un morfismo de anillos. Entonces:*

1. *$f(\boldsymbol{Idem}(R)) \subseteq \boldsymbol{Idem}(S)$.*
2. *La función $\boldsymbol{Idem}(f) : \boldsymbol{Idem}(R) \to \boldsymbol{Idem}(S)$ cuya regla de correspondencia es $\boldsymbol{Idem}(f)(e) = f(e)$ es un morfismo de álgebras de Boole.*

Demostración. Sea $e \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces $f(e)^2 = f(e^2) = f(e)$. Esto prueba que $f(e) \in \mathbf{Idem}(S)$ y por lo tanto la afirmación 1.

Para probar que $\mathbf{Idem}(f)$ es un morfismo de álgebras de Boole nótese primero que como f es un morfismo de anillos entonces $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Por lo tanto $\mathbf{Idem}(f)(0) = 0$ y $\mathbf{Idem}(f)(1) = 1$.

Sean $e, e' \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Idem}(f)(e \vee e') &= f(e \vee e') \\
&= f(e + e' - ee') \\
&= f(e) + f(e') - f(e)f(e') \\
&= f(e) \vee f(e') \\
&= \mathbf{Idem}(f)(e) \vee \mathbf{Idem}(f)(e')
\end{aligned}$$

También se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Idem}(f)(e \wedge e') &= f(e \wedge e') \\
&= f(ee') \\
&= f(e)f(e') \\
&= f(e) \wedge f(e') \\
&= \mathbf{Idem}(f)(e) \wedge \mathbf{Idem}(f)(e')
\end{aligned}$$

Y para terminar la prueba que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Idem}(f)(e^c) &= f(e^c) \\
&= f(1 - e) \\
&= 1 - f(e) \\
&= f(e)^c \\
&= \mathbf{Idem}(f)(e)^c
\end{aligned}$$

$\square$

El resultado anterior permite definir el funtor espectro de Pierce $\mathbf{Sp} : \mathbf{CR1ng}^{op} \to \mathbf{Prof}$ mediante:

$$\mathbf{Sp}(R) = \mathbf{Spec}(\mathbf{Idem}(R))$$

$$\mathbf{Sp}(f : R \to S) = \mathbf{Spec}(\mathbf{Idem}(f))$$

De la definición es claro que este funtor resulta ser la composición de los funtores **Idem** y **Spec**. De ahí que es contravariante. Además, al espacio profinito $\mathbf{Sp}(R)$ se le llama el espectro de Pierce o espectro de Boole del anillo R.

El primer resultado que se va a probar es una propiedad del espectro de Pierce de un anillo. Para ello se recuerda que por el corolario 3.4 para B un álgebra de Boole, $U \subseteq \mathbf{Spec}(B)$ es abierto y cerrado, si y sólo si existe $b \in B$ tal que $U = U_b$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Proposición 4.6. *Si* $U_e \in \boldsymbol{Clopen}(\boldsymbol{Sp}(R))$, *entonces existen* $e_1, ..., e_n \in \boldsymbol{Idem}(R)$ *tales que:*

1. $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
2. *Para todo* $i, j \in \{1, .., n\}$ *con* $i \neq j$ *se tiene que* $e_i e_j = 0$.
3. $U_e = \bigcup_{i=1}^{n} U_{e_i}$.

Demostración. De la proposición 3.7 y la afirmación 5 de la proposición 3.8 existen $f_1, ..., f_n \in \mathbf{Idem}(R)$ tales que $U_e = \bigcup_{i=1}^{n} U_{f_i}$.

Se definen $e_1 = f_1$ y para todo $k \in \{2, ..., n\}$, $e_k = f_k \wedge (\bigvee_{j=1}^{k-1} f_j)^c$. Por construcción es claro que $e_1, ..., e_n \in \mathbf{Idem}(R)$. Por otro lado si $i, j \in \{1, ..., n\}$ y son tales que $i \neq j$, entonces sin pérdida de generaliad se puede suponer que $i < j$. Así, como $e_j \leq f_i^c$ y $e_i \leq f_i$, entonces $e_j e_i = e_j \wedge e_i \leq f_i^c \wedge f_i = 0$. Como en toda álgebra de Boole se satisface que $0 \leq e_j e_i$, entonces $e_j e_i = 0$. Esto prueba la afirmación 2.

De la construcción es claro que $U_{e_1} = U_{f_1}$ y que para todo $k \in \{2, ..., n\}$ se tiene que $U_{e_k} = U_{f_k} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i)$. De esto se deduce que $\bigcup_{i=1}^{n} U_{e_i} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{f_i} = U_e$, lo que prueba la afirmación 3.

Mediante un argumento de inducción es sencillo probar que $e_1 \vee ... \vee e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} e_i e_j + ... + (-1)^n e_1 \cdot .... \cdot e_n$. Por la afirmación 2 todos los términos salvo el primero se anulan y por lo tanto $e_1 \vee ... \vee e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Como $U_{\sum_{i=1}^{n} e_i} = U_{e_1 \vee ... \vee e_n} = \bigcup_{i=1}^{n} U_{e_i} = U_e$, por el corolario 3.3 se concluye que $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$. □

Corolario 4.1. *Existen* $e_1, ..., e_n \in \boldsymbol{Idem}(R)$ *tales que* $\boldsymbol{Sp}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{e_i}$, $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ *y para todo* $i, j \in \{1, .., n\}$ *con* $i \neq j$, $e_i e_j = 0$.

Demostración. Como se vio anteriormente $U_1 = \mathbf{Sp}(R)$. El resultado se obtiene al aplicar la proposición anterior. □

Dado que el anillo cero es conmutativo y unitario, a este puede calcularse su espectro de Pierce. El siguiente resultado muestra que sucede en esta situación.

Proposición 4.7. $R = 0$ *si y sólo si* $\boldsymbol{Sp}(R) = \emptyset$.

Demostración. Para demostrar la ida nótese que si $R = 0$ entonces $\mathbf{Idem}(R) = \{0\}$. Además, si $\mathcal{F}$ es un filtro de $\mathbf{Idem}(R)$ y al ser $\mathcal{F} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{F} = \{0\}$. Esto prueba que el álgebra de Boole $\mathbf{Idem}(R)$ no tiene filtros propios y por lo tanto no tiene ultrafiltros, es decir, $\mathbf{Sp}(R) = \emptyset$.

El regreso de la proposición es por contrapositiva. Si $R \neq 0$ entonces $1 \neq 0$ y por el corolario 3.1 existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $1 \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{U} \in \mathbf{Sp}(R)$ y por lo tanto $\mathbf{Sp}(R) \neq \emptyset$.

□

Lema 4.2. *Sean L una retícula completa y P un conjunto parcialmente ordenado. Si existe $f : L \to P$ un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados, entonces P tiene una estructura de retícula completa tal que f es un isomorfismo de retículas completas. Además, si L es un marco entonces P tiene una estructura de marco tal que f es un isomorfismo de marcos.*

Demostración. Sea $f : L \to P$ un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados. Si $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq P$, entonces $\{f^{-1}(x_i)\}_{i\in I} \subseteq L$ y como L es una retícula completa existen $\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i)$ y $\bigwedge_{i\in I} f^{-1}(x_i)$. Se afirma que $\bigvee^P_{i\in I} x_i = f(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i))$ y $\bigwedge^P_{i\in I} x_i = f(\bigwedge_{i\in I} f^{-1}(x_i))$. Se probará la primera afirmación.

Como para toda $j \in I$, $f^{-1}(x_j) \leq \bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i)$, entonces al ser f un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados se tiene que para toda $j \in I$, $x_j = f(f^{-1}(x_j)) \leq f(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i))$. Esto prueba que $f(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i))$ es una cota superior de la familia $\{x_i\}_{i\in I}$. Por otro lado, si existe $y \in P$ tal que para todo $j \in I$, $x_j \leq y$, entonces para todo $j \in I$, $f^{-1}(x_j) \leq f^{-1}(y)$ y por lo tanto $\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i) \leq f^{-1}(y)$. Al aplicar f y usar el hecho de que este es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados se tiene que $f(\bigvee f^{-1}(x_i)) \leq f(f^{-1}(y)) = y$. Esto concluye la prueba de la afirmación y la otra prueba es análoga.

Para ver que f es un morfismo de retículas completas sea $\{y_i\}_{i\in I} \subseteq L$. Entonces $f(\bigvee_{i\in I} y_i) = f(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(f(y_i))) =: \bigvee^P_{i\in I} f(y_i)$. De manera análoga se prueba que $f(\bigwedge_{i\in I} y_i) = \bigwedge^P_{i\in I} f(y_i)$ y al ser f biyectiva, f es un isomorfismo de retículas completas.

Si L es un marco entonces para ver que P es también un marco, se definen el supremo e ínfimo como antes y lo que falta probar es que para todo $y \in P$ y $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq P$ se cumple que $y \wedge \left(\bigvee^P_{i\in I} x_i\right) = \bigvee^P_{i\in I}(x_i \wedge y)$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
y \wedge \left(\bigvee_{i\in I}^{P} x_i \right) &= y \wedge f\left(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i) \right) \\
&= f(f^{-1}(y)) \wedge f\left(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i) \right) \\
&= f\left(f^{-1}(y) \wedge \bigvee_{i\in I} f^{-1}(x_i) \right) \\
&= f\left(\bigvee_{i\in I} (f^{-1}(y) \wedge f^{-1}(x_i)) \right) \\
&= f\left(\bigvee_{i\in I} f^{-1}(y \wedge x_i) \right) \\
&= \bigvee_{i\in I}^{P} (y \wedge x_i)
\end{aligned}
$$

Así, f es ya un morfismo de marcos y al ser biyectiva es un isomorfismo de marcos. □

PROPOSICIÓN 4.8. *El marco de ideales regulares de un anillo R es isomorfo al marco de conjuntos abiertos del espectro de Pierce del anillo R.*

DEMOSTRACIÓN. Por el corolario 3.2 el marco de los conjuntos abiertos de $\mathbf{Sp}(R)$ es isomorfo como conjunto parcialmente ordenado al conjunto $\mathbf{Filter}(\mathbf{Idem}(R))$. Además, por la proposición 3.1 el conjunto $\mathbf{Filter}(\mathbf{Idem}(R))$ es isomorfo como conjunto parcialmente ordenado al conjunto de los ideales del álgebra de Boole $\mathbf{Idem}(R)$. Si se prueba que el conjunto de ideales regulares es isomorfo como conjunto parcialmente ordenado con el conjunto de ideales de $\mathbf{Idem}(R)$, entonces el lema 4.2 permite concluir el resultado deseado.

Si el conjunto de ideales regulares de R se denota por $\mathcal{I}_R$ y el conjunto de ideales del álgebra de Boole $\mathbf{Idem}(R)$ por $\mathcal{I}(\mathbf{Idem}(R))$, entonces se define $f : \mathcal{I}_R \to \mathcal{I}(\mathbf{Idem}(R))$ cuya regla de correspondencia es $f(I) = \mathbf{Idem}(I)$. Hay que probar que esta función está bien definida.

Primero observe que como $0 \in \mathbf{Idem}(I)$ entonces $\mathbf{Idem}(I) \neq \emptyset$. Si $e, e' \in \mathbf{Idem}(I)$, entonces $e, e' \in I$ y como I es un ideal de R entonces $ee' \in I$ y así $e \vee e' = e + e' - ee' \in I$. Al ser dicho elemento idempotente se tiene que $e \vee e' \in \mathbf{Idem}(I)$.

Por otro lado si $e, e' \in \mathbf{Idem}(R)$ son tales que $e \leq e'$ y $e' \in \mathbf{Idem}(I)$, entonces $e' \in I$. Como I es un ideal de R se tiene que $ee' \in I$, pero $ee' = e$ y por lo tanto $e \in \mathbf{Idem}(I)$. Esto prueba que f está bien definida.

Por otro lado si $I, J \in \mathcal{I}_R$ y son tales que $I \subseteq J$, entonces es claro que $f(I) = \mathbf{Idem}(I) \subseteq \mathbf{Idem}(J) = f(J)$. Por otro lado si $f(I) \subseteq f(J)$ entonces $\mathbf{Idem}(I) \subseteq \mathbf{Idem}(J)$. Así los generados por estos conjuntos satisfacen que $\langle \mathbf{Idem}(I) \rangle \subseteq \langle \mathbf{Idem}(J) \rangle$. Pero como I y J son regulares entonces $I = \langle \mathbf{Idem}(I) \rangle$ y $J = \langle \mathbf{Idem}(J) \rangle$ por lo que $I \subseteq J$. Esto prueba que f es un morfismo de conjuntos parcialmenete ordenados y por lo tanto es inyectivo.

Para ver que f es suprayectiva sea $J \in \mathcal{I}(\mathbf{Idem}(R))$. Si I es el ideal generado por J en R entonces es claro que $I \trianglelefteq R$. Además, $J \subseteq I$ y por lo tanto $J \subseteq \mathbf{Idem}(I)$. Por otro lado, si $e \in \mathbf{Idem}(I)$, entonces existen $e_1, ..., e_n \in J$ y $r_1, ..., r_n \in R$ tales que $e = \sum_{i=1}^{n} r_i e_i$. Se define $e' = e_1 \vee ... \vee e_n$ y entonces claramente e' es un idempotente y además para todo $k \in \{1, ..., n\}$, $e_k \leq e'$, por lo que $e_k e = e_k$. Así, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
ee' &= \left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i \right) e' \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_i e_i e' \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \\
&= e
\end{aligned}
$$

Lo que prueba que $e \leq e'$ y como $e' \in J$ entonces $e \in J$. Esto prueba que $\mathbf{Idem}(I) \subseteq J$ y por lo tanto $\mathbf{Idem}(I) = J$. Esto quiere decir que $f(I) = J$ y por lo tanto f es suprayectiva. Con este argumento se termina la prueba de que f es un isomorfismo entre los conjuntos $\mathcal{I}_R$ y $\mathcal{I}(\mathbf{Idem}(R))$.

$\square$

El siguiente resultado relaciona los espacios topológicos definidos en esta sección y en la anterior.

Proposición 4.9. *El espectro de Pierce de R es homeomorfo al conjunto de ideales regulares máximos de R.*

Demostración. Se definen las asignaciones $f : \mathbf{Sp}(R) \to \mathcal{M}_R$ mediante $f(\mathcal{U}) = \langle\{e \in \mathbf{Idem}(R) \mid 1 - e \in \mathcal{U}\}\rangle$, que es el ideal generado por el conjunto de idempotentes $\{e \in \mathbf{Idem}(R) \mid 1 - e \in \mathcal{U}\}$, y $g : \mathcal{M}_R \to \mathbf{Sp}(R)$ mediante $g(M) = \mathcal{U}\{e \in \mathbf{Idem}(R) \mid 1 - e \in M\}$, que es el ultrafiltro que extiende al filtro $\{e \in \mathbf{Idem}(R) \mid 1 - e \in M\}$.

Para ver que f está bien definida primero se observa que $1 \notin f(\mathcal{U})$ pues $0 \notin \mathcal{U}$ por ser este un ultrafiltro. Por otro lado, sea I un ideal regular de R y supóngase que $f(\mathcal{U}) \leq I \leq R$ e $I \neq R$. Si $x \in I$, entonces por la proposición 4.2 existe $e \in \mathbf{Idem}(I)$ tal que $x = xe$. Si $e \notin f(\mathcal{U})$, entonces $1 - e \notin \mathcal{U}$ y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces $e \in \mathcal{U}$, por lo que $1-e \in f(\mathcal{U})$ y así $1-e \in I$. De esto se deduce que $1 = (1-e)+e \in I$ por lo que $I = R$ y esto es una contradicción. Así, $e \in f(\mathcal{U})$ y entonces $x = xe \in f(\mathcal{U})$. Por lo tanto $f(\mathcal{U}) = I$ y esto prueba que $f(\mathcal{U})$ es un ideal regular máximo.

En lo que respecta al conjunto $\mathcal{F} = \{e \in \mathbf{Idem}(R) \mid 1-e \in M\}$, nótese que $0 \notin \mathcal{F}$ pues $1 \notin M$. Si $e, f \in \mathcal{F}$, entonces $1-e, 1-f \in M$. Así $1-ef = (1-f)+(1-e)f \in M$ y por lo tanto $ef \in \mathcal{F}$. Para terminar si $e \leq f$ con $e \in \mathcal{F}$ y $f \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces $ef = e$. Así, $1 - f = (1 - f) - (1 + e)f \in M$ y por lo tanto $f \in \mathcal{F}$. Esto prueba que $\mathcal{F}$ es un filtro y por lo tanto puede extenderse a un ultrafiltro.

Las funciones anteriores son inversas y además nótese que si I es un ideal regular de R, entonces:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathcal{O}_I) &= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Sp}(R) \mid f(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_I\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Sp}(R) \mid I \nsubseteq f(\mathcal{U})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbf{Sp}(R) \mid f^{-1}(I) \nsubseteq \mathcal{U}\} \\ &= \mathcal{O}_{f^{-1}(I)} \end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que para F un filtro se tiene que $g^{-1}(\mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_{g^{-1}(F)}$, lo que prueba que las funciones definidas son homeomorfismos. □

3. El espacio estructural de Pierce de un anillo.

Se recuerda que para R un anillo, $\mathcal{M}_R$ es el conjunto de ideales regulares máximos de R.

Considere entonces $\bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ la unión ajena de los anillos R/M donde $M \in \mathcal{M}_R$. Se quiere definir una topología en dicho espacio y para esto dados $r \in R$ e $I \trianglelefteq R$ se define la función

$$s_r^I : \mathcal{O}_I \to \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$$

cuya regla de correspondencia es:

$$s_r^I(M) = [r]_M, \tag{4.1}$$

donde $[r]_M$ denota la clase de equivalencia de r módulo M, es decir, $[r]_M \in R/M$.

Así, $\bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ tiene la topología final inducida por la familia de funciones $\{s_r^I\}_{I \trianglelefteq R,\ r \in R}$.

Definición 4.3. *El espacio estructural de Pierce del anillo R es el espacio topológico $\bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ con la topología final dada por la familia de funciones $\{s_r^I\}_{I \trianglelefteq R,\ r \in R}$.*

Las funciones definidas poseen también las siguientes propiedades que se heredan del hecho de que cada uniendo en el espacio estructural de Pierce tiene estructura de anillo.

Lema 4.3. *Si $I \trianglelefteq R$, entonces se satisfacen las igualdades:*

1. *Para todo $r, t \in R$, $s_{r+t}^I = s_r^I + s_t^I$.*
2. *Para todo $r, t \in R$, $s_{rt}^I = s_r^I s_t^I$.*
3. *Para todo $e \in \boldsymbol{Idem}(R)$, $s_{1-e}^{Re} = 0$.*

Demostración. Sean $r, t \in R$ y $M \in \mathcal{O}_I$. Entonces $s_{r+t}^I(M) = [r+t]_M = [r]_M + [t]_M = s_r^I(M) + s_t^I(M)$. Esto prueba la afirmación 1.

También se tiene que $s_{rt}^I(M) = [rt]_M = [r]_M[t]_M = s_r^I(M)s_t^I(M)$. Lo que muestra la segunda afirmación.

En lo que respecta a la última afirmación sea $e \in \mathbf{Idem}(R)$ y $M \in \mathcal{O}_{Re}$. Como $e \notin M$, de la afirmación 3 de la proposición 4.4 se concluye que $1 - e \in M$. Por lo tanto $s_{1-e}^{Re}(M) = [1-e]_M = [0]_M$. $\square$

Lo que prueba el resultado anterior es que para todo $I \trianglelefteq R$ el conjunto $S^I = \{s_r^I : \mathcal{O}_I \to \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M \mid r \in R\}$ es un anillo conmutativo con 1, donde el uno de este anillo es la función s_1^I.

En las siguientes proposiciones se identifica $\mathbf{Sp}(R)$ con el conjunto de ideales regulares máximos de R.

LEMA 4.4. *Para todo $r \in R$ el conjunto $U_r = \{M \in \boldsymbol{Sp}(R) \mid r \in M\}$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r \in R$ y defínase $J = \bigcap_{N \in \mathbf{Sp}(R), r \notin N} \mathbf{Idem}(N)$. Se afirma que $J = \{e \in R \mid e^2 = e,\ \forall N \in \mathbf{Sp}(R)(r \notin N \Rightarrow e \in N)\}$.

Si $e \in J$, entonces para todo $N \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \notin N$, $e \in \mathbf{Idem}(N)$. Así, $e^2 = e$ y dado que $N \in \mathbf{Sp}(R)$ es tal que $r \notin N$, siempre se tiene que $e \in N$ pues $\mathbf{Idem}(N) \subseteq N$. Para la segunda contención sea $f \in \{e \in R \mid e^2 = e,\ \forall N \in \mathbf{Sp}(R)(r \notin N \Rightarrow e \in N)\}$. Dado $N \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \notin N$, como $f \in N$ y $f^2 = f$, entonces $f \in \mathbf{Idem}(N)$. Como el ideal considerado es arbitrario entonces para todo $N \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \notin N$ se tiene que $f \in \mathbf{Idem}(N)$ y por lo tanto $f \in J$.

Además, como para todo $N \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \notin N$ se cumple que $\mathbf{Idem}(N)$ es un ideal en el álgebra de Boole $\mathbf{Idem}(R)$, entonces J es también un ideal en dicha álgebra. De la prueba de la proposición 4.8 se concluye que existe un único $I \trianglelefteq R$ tal que $\mathbf{Idem}(I) = J$. Se afirma que $\mathcal{O}_I = U_r$.

Para la primera contención sea $N \in \mathcal{O}_I$, entonces esto sucede si y sólo si $I \nsubseteq N$ y esto quiere decir que existe $e \in I$ idempotente tal que $e \notin N$, de lo que se deduce que existe $e \in J$ tal que $e \notin N$. Pero de la afirmación previa se concluye que $r \in N$ al usar la contrapositiva de la proposición definida en el conjunto, y esto es equivalente a decir que $N \in U_r$. Esto prueba que $\mathcal{O}_I \subseteq U_r$.

Nótese que para tener la segunda contención basta con probar que para todo $N \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \in N$, existe $e \in J$ tal que $e \notin N$. Suponiendo la hipótesis se tiene que al ser N regular existe $e \in \mathbf{Idem}(N)$ tal que $r = re$. Así, para todo $M \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \notin M$, se tiene que $e \notin M$ pues en caso contrario $r = re \in M$ lo que sería una contradicción. Esto prueba que para todo $M \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $r \notin M$, $e \notin M$ y por la afirmación 3 de la proposición 4.4 se tiene que $1 - e \in M$ por lo que $1 - e \in J$ y además $1 - e \notin N$ por ser N máximo.

Como $\mathcal{O}_I$ es un abierto por definición de la topología en el conjunto de ideales máximos entonces U_r es abierto.

$\square$

Se tiene el siguiente importante resultado.

PROPOSICIÓN 4.10. *Para cualesquiera $r \in R$ e $I \trianglelefteq R$, el conjunto $im(s_r^I) \subseteq \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $t \in R$ y $J \trianglelefteq R$. Se quiere probar que $(s_t^J)^{-1}(ims_r^I) \subseteq \mathcal{O}_J$ es abierto.

En efecto, pues:

$$\begin{aligned}
(s_t^J)^{-1}(im(s_r^I)) &= (s_t^J)^{-1}(s_r^I(\mathcal{O}_I)) \\
&= \{M \in \mathcal{O}_J \mid s_t^J(M) \in s_r^I(\mathcal{O}_I)\} \\
&= \{M \in \mathcal{O}_J \mid [t]_M \in s_r^I(\mathcal{O}_I)\} \\
&= \{M \in \mathcal{O}_J \mid [t]_M = [r]_N, N \in \mathcal{O}_I\} \\
&= \{M \in \mathcal{O}_J \cap \mathcal{O}_I \mid [t]_M = [r]_M\} \\
&= \{M \in \mathcal{O}_J \cap \mathcal{O}_I \mid [t-r]_M = [0]_M\} \\
&= \{M \in \mathcal{O}_J \cap \mathcal{O}_I \mid t-r \in M\} \\
&= \{M \in \mathcal{O}_{J\cap I} \mid t-r \in M\} \\
&= \mathcal{O}_{J\cap I} \cap U_{t-r}
\end{aligned}$$

Por el lema anterior U_{t-r} es abierto y por definición de la topología $\mathcal{O}_{J\cap I}$ también, por lo que $(s_t^J)^{-1}(im(s_r^I))$ es abierto.

□

Para el siguiente resultado se requiere recordar una definición de topología general.

DEFINICIÓN 4.4. *Un morfismo de espacios topológicos $f : X \to Y$ es étale si para todo $x \in X$ existe $U \subseteq X$ vecindad de x y V una vecindad de $f(x)$ tal que la función $f|_U : U \to V$ es un homeomorfismo.*

La noción de que un morfismo en la categoría de espacios topológicos sea étale es más débil que la de ser un homeomorfismo pero no son iguales. Un ejemplo típico es la función $f : [0,1) \to \mathbb{S}^1$ definida mediante $f(t) = e^{2\pi i t}$. Esta función no es un homeomorfismo pero si es un morfismo étale.

TEOREMA 4.1. *Para todo R anillo la función $p : \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M \to \boldsymbol{Sp}(R)$ cuya regla de correspondencia es $p([r]_M) = M$ es étale y suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN. La suprayectividad de p es obvia. En lo que respecta a la continuidad de esta función nótese primero que para todo $r \in R$ e $I \trianglelefteq R$ se tiene que $p \circ s_r^I : \mathcal{O}_I \to \mathbf{Sp}(R)$. Se afirma que esta composición es la inclusión de $\mathcal{O}_I$ en $\mathbf{Sp}(R)$ la que se denotará por $\iota_{\mathcal{O}_I}$. Para probar esto, lo único que resta probar es que ambas funciones tienen la misma regla de correspondencia.

Sea $M \in \mathcal{O}_I$, entonces:

$$\begin{aligned}(p \circ s_r^I)(M) &= p(s_r^I(M)) \\ &= p([r]_M) \\ &= M\end{aligned}$$

Esto prueba que $p \circ s_r^I = \iota_{\mathcal{O}_I}$.

Ahora, dado $\mathcal{O}_I \subseteq \mathbf{Sp}(R)$ abierto, se tiene que para todo $J \trianglelefteq R$ y $r \in R$, $(s_r^J)^{-1}(p^{-1}(\mathcal{O}_I)) = (p \circ s_r^J)^{-1}(\mathcal{O}_I) = \iota_{\mathcal{O}_J}^{-1}(\mathcal{O}_I) = \mathcal{O}_{I \cap J}$. Como este conjunto es abierto y tanto $J \trianglelefteq R$ como $r \in R$ son arbitrarios, entonces se concluye que $p^{-1}(\mathcal{O}_I) \subseteq \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ es abierto y por lo tanto p es continua.

Para probar que p es étale sea $[r]_N \in \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ y observe que $[r]_N \in im(s_r^R)$. Además, este conjunto es abierto por la proposición 4.10. Se afirma que la función inducida $p|_{im(s_r^R)} : im(s_r^R) \to p(im(s_r^R))$ es un homeomorfismo, donde por lo demostrado anteriormente $p(im(s_r^R)) = \mathcal{O}_R = \mathbf{Sp}(R)$.

De hecho se va a probar que $p|_{im(s_r^R)} \circ s_r^R = 1_{\mathbf{Sp}(R)}$ y que $s_r^R \circ p|_{im(s_r^R)} = 1_{im(s_r^R)}$.

La primera igualdad es consecuencia de que por lo demostrado antes $p \circ s_r^R = \iota_{\mathcal{O}_R} = \iota_{\mathbf{Sp}(R)} = 1_{\mathbf{Sp}(R)}$. Por otro lado, si $[t]_{N'} \in im(s_r^R)$, entonces existe $M' \in \mathbf{Sp}(R)$ tal que $[t]_{N'} = s_r^R(M') = [r]_{M'}$, por lo que $N' = M'$ y así $[t]'_N = [r]_{N'}$. Esto muestra que para probar la afirmación basta con evaluar en elementos de la forma $[r]_{N'}$ y así $s_r^R \circ p|_{im(s_r^R)}([r]_{N'}) = s_r^R(p|_{im(s_r^R)}([r]_{N'})) = s_r^R(N') = [r]_{N'}$. Esto concluye la prueba. $\square$

Hay algunas observaciones que hacer respecto a la prueba del teorema anterior, pues se tiene gran analogía con el concepto de haz fibrado. Se recuerda que si E y B son espacios topológicos, un haz fibrado es una función continua y suprayectiva $\pi : E \to B$. Si $x \in B$, entonces el conjunto $\pi^{-1}(x)$ se conoce como la fibra en el punto x, la cual es siempre no vacía pues la función es suprayectiva. Además, una sección es una función continua $s : B \to E$ tal que $\pi \circ s = 1_B$. En la prueba anterior se probó que la función p es continua, suprayectiva y además que para cualesquiera $I \trianglelefteq R$ y $r \in R$, $p \circ s_r^I = \iota_{\mathcal{O}_I}$. Así, a las funciones $s : \mathcal{O}_I \to \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ tales que $p \circ s = \iota_{\mathcal{O}_I}$ se les conoce como secciones de p y como para todo $M \in \mathbf{Sp}(R)$, $p^{-1}(M) = R/M$, a los espacios R/M se les conoce como fibras del espectro de Pierce de R.

Teorema 4.2. *Para todo $e \in R$ idempotente, el conjunto de secciones de p definidas en el conjunto abierto $\mathcal{O}_{Re}$ es un anillo y este es isomorfo al ideal principal Re.*

Demostración. Sea $e \in \mathbf{Idem}(R)$. Se define la función $\phi_e : R \to S^{Re}$ cuya regla de correspondencia es $\phi_e(r) = s_r^{Re}$. De las afirmaciones 1 y 2 del lema 4.3 se deduce que esta función es un morfismo de anillos. Así, $im(\phi_e) \subseteq S^{Re}$ es un subanillo y por lo tanto un anillo.

Se quiere caracterizar el núcleo de dicho morfismo. Para esto sea $r \in nuc(\phi_e)$. Entonces $\phi_e(r) = 0_{S^{Re}}$, de lo que se deduce que para todo $M \in \mathcal{O}_{Re}$, $[r]_M = [0]_M$ y así $r \in M$, es decir, $r \in \bigcap_{M \in \mathcal{O}_{Re}} M$. Por otro lado, $\bigcap_{M \in \mathcal{O}_{Re}} M = \bigcap_{e \notin M} M = \bigcap_{1-e \in M} M = R(1-e)$, donde la segunda igualdad se obtiene de la afirmación 3 de la proposición 4.4. Así, $r \in R(1-e)$ y por lo tanto $nuc(\phi_e) \subseteq R(1-e)$. Además, si $r \in R(1-e)$, entonces existe $a \in R$ tal que $r = a(1-e)$, de lo que se deduce que $\phi_e(r) = s_r^{Re} = s_{a(1-e)}^{Re} = s_a^{Re} s_{1-e}^{Re} = s_a^{Re} 0 = 0$. Aquí, la tercera y cuarta igualdad se obtienen de las afirmaciones 2 y 3 del lema 4.3. Esto prueba que $r \in nuc(\phi_e)$ y por lo tanto $nuc(\phi_e) = R(1-e)$.

Al aplicar el primer teorema de isomorfismo para anillos se deduce que $R/R(1-e) \cong im(\phi_e)$. Pero como $R = Re \oplus R(1-e)$, el segundo teorema de isomorfismo para anillos afirma que $R/R(1-e) \cong Re/\{e\} \cong Re$. De esto se concluye que $Re \cong im(\phi_e)$.

Para concluir la prueba basta con ver que $im(\phi_e) = S^{Re}$.

Es claro que $im(\phi_e) \subseteq S^{Re}$. Entonces sea $\sigma \in S^{Re}$ y como $\sigma : \mathcal{O}_{Re} \to \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$, entonces usando el axioma de elección existe un sistema de representantes $\{r_M\}_{M \in \mathcal{M}_R}$ tales que para todo $M \in \mathcal{O}_{Re}$, $\sigma(M) = [r_M]_M$.

Por otro lado, de la proposición 4.10 se tiene que $im(s_{r_M}^{Re}) \subseteq \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}_R} R/M$ es un conjunto abierto y por la continuidad de σ se concluye que $\sigma^{-1}(im(s_{r_M}^{Re})) \subseteq \mathcal{O}_{Re}$ es un conjunto abierto. Denótese a este conjunto por U_M y observese que como $s_{r_M}^{Re}(M) = [r_M]_M = \sigma(M)$ entonces $M \in U_M$.

De la proposición 3.7 se tiene que el conjunto $\{\mathcal{O}_e\}_{e\in\mathbf{Idem}(R)}$ es una base de la topología del $\mathbf{Sp}(R)$ y así existe $e_M \in \mathbf{Idem}(R)$ tal que $M \in \mathcal{O}_M$ y $\mathcal{O}_M \subseteq U_M$.

Nótese que el argumento anterior vale para todo $M \in \mathcal{O}_{Re}$ y esto prueba que $\mathcal{O}_{Re} \subseteq \bigcup_{M\in\mathcal{O}_{Re}} \mathcal{O}_{e_M}$. Además, de la construcción se tiene que para todo $M \in \mathcal{O}_{Re}$, $\mathcal{O}_{e_M} \subseteq \mathcal{O}_{Re}$, por lo que $\bigcup_{M\in\mathcal{O}_{Re}} \mathcal{O}_{e_M} \subseteq \mathcal{O}_{Re}$ y así $\mathcal{O}_{Re} = \bigcup_{M\in\mathcal{O}_{Re}} \mathcal{O}_{e_M}$.

Como $\mathbf{Sp}(R)$ es compacto y $\mathcal{O}_{Re}$ es un cerrado, entonces $\mathcal{O}_{Re}$ es un compacto, de lo que se deduce que existen $M_1, ..., M_n \in \mathcal{O}_{Re}$ tales que $\mathcal{O}_{Re} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{e_{M_i}}$.

Además, por construcción para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $\mathcal{O}_{e_{M_i}} \subseteq U_{M_i}$ y así, al fijar $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que para todo $N \in \mathcal{O}_{e_{M_i}}$ existe $N' \in \mathcal{O}_{Re}$ tal que $\sigma(N) = s^{Re}_{r_{M_i}}(N') = [r_{M_i}]_{N'}$, y por lo tanto $[r_N]_N = [r_{M_i}]_{N'}$. De esto se deduce que $N = N'$ y además esto permite definir $r = \sum_{j=1}^n r_{M_j} e_{M_j}$.

Se afirma que $\sigma = s^{Re}_r$ y como estas funciones tienen el mismo dominio y codominio, lo único que falta probar es que tienen la misma regla de correspondencia. Sea $M \in \mathcal{O}_{Re}$, entonces existe un único $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $M \in \mathcal{O}_{e_{M_i}}$. Esto quiere decir que $e_{M_i} \notin M$ y para todo $j \neq i$, $e_{M_j} \in M$. Así,

$$\begin{aligned} s^{Re}_r(M) &= [r]_M \\ &= \sum_{j=1}^{n} [r_{M_j}]_M [e_{M_j}]_M \\ &= [r_{M_i}]_M [e_{M_i}]_M \\ &= [r_{M_i}]_M [1]_M \\ &= [r_{M_i}]_M \\ &= s^{Re}_{r_{M_i}}(M) \\ &= \sigma(M) \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba de la afirmación. □

Corolario 4.2. *El anillo de secciones continuas de p definidas en el espacio estructural de Pierce de R es isomorfo a R.*

Demostración. Dado que $1 \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces el teorema anterior implica que $S^R \cong 1R = R$, pero $S^R = \{s : \mathbf{Sp}(R) \to \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M \mid s \text{ es una sección de } p\}$, lo que concluye la prueba. □

Proposición 4.11. *Si $R \neq 0$ e $I \trianglelefteq R$, entonces I es un ideal regular máximo si y sólo si R/I es un anillo con exactamente dos idempotentes.*

Demostración. Para la ida nótese que es claro que $\{[0],[1]\} \subseteq \mathbf{Idem}(R/I)$, así para probar la contención restante sea $[x] \in \mathbf{Idem}(R/I)$. Dado que $[x^2] = [x]^2 = [x]$, entonces $x^2 - x \in I$. Como I es regular, por la proposición 4.2 existe $e \in \mathbf{Idem}(I)$ tal que $e(x^2 - x) = x^2 - x$, expresión que se puede reescribir como $(1-e)x = (1-e)x^2$, con lo que se deduce que $(1-e)x \in \mathbf{Idem}(R)$ pues $((1-e)x)^2 = (1-e)^2x^2 = (1-e)x^2 = (1-e)x$. Por lo tanto el ideal $I + R((1-e)x)$ es regular y además se tiene la siguiente cadena de ideales $I \subseteq I + R((1-e)x) \subseteq I + Rx \subseteq R$.

Por hipótesis I es máximo por lo que $I = I + R((1-e)x)$ ó $I + R((1-e)x) = R$. Si sucede el primer caso, entonces dado que $x = ex + (1-e)x \in I + R((1-e)x)$, entonces $x \in I$ y así $[x] = [0]$. En lo que respecta al segundo caso se tiene que $I + Rx = R$ por lo que existen $y \in I$ y $r \in R$ tales que $y + rx = 1$. Al multiplicar dicha expresión por $x - 1$ se tiene que $x - 1 = y(x-1) + rx(x-1) = y(x-1) + r(x^2 - x) \in I$ y así $[x] = [1]$.

Esto prueba que $\mathbf{Idem}(R/I) \subseteq \{[0],[1]\}$, con lo que $\mathbf{Idem}(R/I) = \{[0],[1]\}$ y así se concluye la prueba de la proposición en esta dirección.

Para el regreso supóngase que I es un ideal regular tal que $\mathbf{Idem}(R/I) = \{[0],[1]\}$. Si $e \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces $[e]^2 = [e^2] = [e]$, por lo que $[e] = [0]$, en cuyo caso $e \in I$, ó $[e] = [1]$, con lo que $e^c = 1 - e \in I$.

El argumento anterior prueba para todo $e \in \mathbf{Idem}(R)$, se tiene que $e \in I$ ó $1 - e \in I$. Para concluir la prueba sea $J \trianglelefteq R$ tal que $I \subsetneq J \subseteq R$. Entonces existe $e \in \mathbf{Idem}(J)$ tal que $e \notin I$. De la observación previa se concluye que $1 - e \in I$ y por lo tanto $1 - e \in J$. Así, $1 = e + (1-e) \in J$ y entonces $J = R$. Esto prueba que I es un ideal regular máximo. $\square$

Capítulo 5

Cálculo de dos funtores adjuntos derechos.

En este capítulo R denota siempre un anillo conmutativo unitario. De igual manera todas las R-álgebras serán siempre conmutativas y unitarias. La categoría de R-álgebras conmutativas y unitarias se denota por **CR-Alg**.

1. Cálculo de un adjunto derecho del funtor Sp.

En el capítulo anterior se estudiaron algunas propiedades del funtor espectro de Pierce cuyo dominio es la categoría de anillos conmutativos unitarios **CR1ng** y con codominio la categoría de espacios topológicos profinitos **Prof**.

Es claro que para la categoría **CR-Alg** existe un encaje en la categoría de anillos conmutativos unitarios. Abusando de la notación se denota por $\mathbf{Sp} : \mathbf{CR\text{-}Alg}^{op} \to \mathbf{Prof}$ al funtor que resulta de la composición de dicho encaje con el funtor espectro de Pierce. El objetivo de este capítulo es mostrar que dicho funtor, al que también se llamará en lo sucesivo funtor espectro de Pierce, tiene un adjunto derecho y para esto se requieren una serie de resultados previos.

LEMA 5.1. *Sea $f : X \to R$ una función con X un espacio topológico profinito y R un anillo conmutativo unitario con la topología discreta. Son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *Existen $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq$ **Clopen**(X) y $r_1, ..., r_n \in R$ tales que $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una partición de X y $f = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{U_i}$.*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Supóngase que f es continua. Como R tiene la topología discreta entonces para todo $r \in R$, $f^{-1}(r) \subseteq X$ es abierto. Dado que $X = \bigcup_{r\in R} f^{-1}(r)$ y este espacio es compacto, entonces existen $r_1, ..., r_n \in R$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(r_i)$ y para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $f^{-1}(r_i) \neq \emptyset$.

Es claro que si $r, s \in R$ y son tales que $r \neq s$, entonces $f^{-1}(r) \cap f^{-1}(s) = \emptyset$ y así el conjunto $\{f^{-1}(r_i)\}_{i=1}^n$ es una partición X. Además, del hecho de que R tiene la topología discreta se deduce que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $\{r_i\} \in \mathbf{Clopen}(R)$ y como

f es continua entonces para todo $i \in \{1, ...n\}$, $f^{-1}(r_i) \in \mathbf{Clopen}(X)$. Por lo tanto se define para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $U_i = f^{-1}(r_i)$ y así resulta claro que $f = \sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{U_i}$.

$2 \Rightarrow 1$) De la hipótesis $f = \sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{U_i}$ con $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathbf{Clopen}(X)$ una partición de X y $r_1, ..., r_n \in R$. Como R tiene la topología discreta, para ver que f es continua basta con ver que para todo $r \in R$, $f^{-1}(r) \subseteq X$ es abierto.

Sea $r \in R$, para la prueba de dicha afirmación se procede por casos pues si existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $r = r_i$, entonces $f^{-1}(r) = U_i$ que es un abierto. Además, si para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $r \neq r_i$, entonces $f^{-1}(r) = \emptyset$. Por lo tanto f es continua.

$\square$

En el resto de este capítulo se considera a R como espacio topológico con la topología discreta. Se tiene así el siguiente resultado:

Lema 5.2. *Para todo espacio topológico profinito X, el conjunto $\mathcal{C}(X, R) = \{f : X \to R \mid f \text{ es continua } \}$ es una R-álgebra.*

Demostración. Al utilizar la estructura de anillo de R es posible definir dos operaciones en $\mathcal{C}(X, R)$ de manera puntual, que corresponden a una suma y un producto en dicho conjunto.

Nótese que si $C_r : X \to R$ denota la función constante con valor $r \in R$, entonces es claro que esta función es continua pues para todo $A \subseteq R$ se tiene que:

$$C_r^{-1}(A) = \begin{cases} X, & \text{Si } r \in A \\ \emptyset, & \text{Si } r \notin A \end{cases}$$

De esta observación se deduce que la función constante con valor 1 es continua. Para ver que $\mathcal{C}(X, R)$ es un anillo, lo único que falta probar es que la suma y producto de dos funciones continuas es continua.

Sean $f, g \in \mathcal{C}(X, R)$. Por el lema 5.1 existen $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{V_j\}_{j=1}^{m}$ subconjuntos de $\mathbf{Clopen}(X)$ y $r_1, ..., r_n, s_1, ..., s_m \in R$ tales que $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ y $\{V_j\}_{j=1}^{m}$ son particiones de X, $f = \sum_{i=1}^{n} r_i \chi_{U_i}$ y $g = \sum_{j=1}^{m} s_j \chi_{V_j}$. Así, se tiene que:

$$f + g = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (r_i + s_j) \chi_{U_i \cap V_j}$$

$$fg = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_i s_j \chi_{U_i \cap V_j}$$

Como el conjunto $\{U_i \cap V_j \mid U_i \cap V_j \neq \emptyset\}_{i,j=1}^{n,m} \subseteq \mathbf{Clopen}(X)$ es una partición de X, entonces las fórmulas anteriores se pueden reescribir con sumandos distintos de cero y al usar nuevamente el lema 5.1 se concluye que $f+g,\ fg \in \mathcal{C}(X,R)$.

El que $\mathcal{C}(X,R)$ sea un anillo conmutativo unitario se sigue del hecho de que R lo es, y para ver que $\mathcal{C}(X,R)$ es una R-álgebra se define la función

$$\rho_{\mathcal{C}(X,R)} : R \to \mathcal{C}(X,R) \tag{5.1}$$

$$r \mapsto C_r$$

Por una observación previa esta función está bien definida y además es claramente un morfismo de anillos. Así, esto concluye la prueba de que $\mathcal{C}(X,R)$ es una R-álgebra. □

Dos propiedades que vale la pena mencionar se encuentran en la siguiente proposición.

Proposición 5.1. *Para todo anillo conmutativo unitario R se tienen los siguientes isomofismos de R-álgebras.*

1. $\mathcal{C}(\emptyset, R) \cong 0$.
2. $\mathcal{C}(\{pt\}, R) \cong R$.

Demostración. Sea R un anillo conmutativo unitario. Para la primera afirmación nótese que la función vacía es el único elemento de $\mathcal{C}(\emptyset,R)$. Al definir la suma y producto de manera obvia se tiene el resultado deseado.

En lo que respecta a la segunda afirmación, primero nótese que el espacio topológico $\{pt\}$ consistente de un sólo elemento con la topología discreta es totalmente separado y compacto, por ser finito, entonces $\{pt\} \in \mathbf{Prof}$. Como se vio anteriormente, la función definida en la ecuación (5.1) es un morfismo de R-álgebras y por otro lado, se define $\psi_R : \mathcal{C}(\{pt\},R) \to R$ mediante $\psi_R(f) = f(pt)$. Se afirma que esta función es inversa de $\rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)}$.

En efecto, si $f \in \mathcal{C}(\{pt\},R)$ entonces:

$$\begin{aligned}(\rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)} \circ \psi_R)(f)(pt) &= \rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)}(\psi_R(f))(pt)\\ &= \rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)}(f(pt))(pt)\\ &= C_{f(pt)}(pt)\\ &= f(pt)\\ &= 1_{\mathcal{C}(\{pt\},R)}(f)(pt)\end{aligned}$$

Esto prueba que $\rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)} \circ \psi_R = 1_{\mathcal{C}(\{pt\},R)}$. Por otro lado si $r \in R$ entonces:

$$\begin{aligned}(\psi_R \circ \rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)})(r) &= \psi_R(\rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)}(r))\\ &= \psi_R(C_r)\\ &= C_r(pt)\\ &= r\\ &= 1_R(r)\end{aligned}$$

Esto prueba que $\psi_R \circ \rho_{\mathcal{C}(\{pt\},R)} = 1_R$ y entonces ψ_R es un morfismo de R-álgebras. Así, se tiene que ψ_R es el isomorfismo.

$\square$

Lo que sigue es ver que la asignación $\mathcal{C}(\_, R)$ es funtorial. Para esto se observa que para $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos profinitos, se define una función $\mathcal{C}_R(f) : \mathcal{C}(Y, R) \to \mathcal{C}(X, R)$ cuya regla de correspondencia es $\mathcal{C}_R(f)(\alpha) = \alpha \circ f$, donde $\alpha \in \mathcal{C}(Y, R)$. Es claro que esta asignación está bien definida pues la composición de funciones continuas es siempre continua. Además, es muy sencillo probar que la asignación $\mathcal{C}_R$: **Prof** $\to$ **CR-Alg**^{op} definida mediante:

$$\mathcal{C}_R(X) = \mathcal{C}(X, R)$$

$$\mathcal{C}_R(f : X \to Y) = \mathcal{C}_R(f)$$

es funtorial. Se afirma que este funtor es el adjunto derecho de **Sp** y para probar esto se van a construir la unidad y counidad de dicha adjunción.

Primero se tratará la construcción de la counidad y para esta se utilizará el teorema de Dualidad de Stone (Teorema 3.1).

Lema 5.3. *Para todo espacio topológico profinito X, la función:*

$$\widetilde{\epsilon_X} : \boldsymbol{Clopen}(X) \to \boldsymbol{Idem}(\mathcal{C}_R(X)) \tag{5.2}$$

$$U \mapsto \chi_U$$

está bien definida y es un morfismo de álgebras de Boole.

Demostración. Sea X un espacio topológico profinito. La prueba de que la función $\widetilde{\epsilon_X}$ está bien definida es consecuencia de que para todo $U \in \mathbf{Clopen}(X)$, la función χ_U es continua, prueba que es similar a la mostrada en el ejemplo 4.2, y es un elemento idempotente en el anillo $\mathcal{C}_R(X)$.

Para ver que dicha función es un morfismo de álgebras de Boole primero observe que claramente $\widetilde{\epsilon_X}(\emptyset) = \chi_\emptyset = 0$ y que $\widetilde{\epsilon_X}(X) = \chi_X = 1$. Sean $U, V \in \mathbf{Clopen}(X)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\epsilon_X}(U \cup V) &= \chi_{U \cup V} \\
&= \chi_U + \chi_V - \chi_U \chi_V \\
&= \chi_U \vee \chi_V \\
&= \widetilde{\epsilon_X}(U) \vee \widetilde{\epsilon_X}(V)
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\epsilon_X}(U \cap V) &= \chi_{U \cap V} \\
&= \chi_U \chi_V \\
&= \chi_U \wedge \chi_V \\
&= \widetilde{\epsilon_X}(U) \wedge \widetilde{\epsilon_X}(V)
\end{aligned}$$

Para terminar con la prueba,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\epsilon_X}(X \setminus U) &= \chi_{X \setminus U} \\
&= 1 - \chi_U \\
&= \chi_U^c \\
&= \widetilde{\epsilon_X}(U)^c
\end{aligned}$$

$\square$

El siguiente resultado es de gran importancia para la naturalidad de la counidad.

LEMA 5.4. *La familia de morfismos $\widetilde{\epsilon}$ es una transformación natural entre los funtores **Clopen** e **Idem** $\circ\, \mathcal{C}_R$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos profinitos. Se quiere probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Clopen}(Y) \arrow[r, "\widetilde{\epsilon_Y}"] \arrow[d, "\mathbf{Clopen}(f)"'] & \mathbf{Idem}(\mathcal{C}_R(Y)) \arrow[d, "\mathcal{C}_R(f)"] \\
\mathbf{Clopen}(X) \arrow[r, "\widetilde{\epsilon_X}"'] & \mathbf{Idem}(\mathcal{C}_R(X))
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $U \in \mathbf{Clopen}(Y)$. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\epsilon_X} \circ \mathbf{Clopen}(f))(U) &= \widetilde{\epsilon_X}(f^{-1}(U)) \\
&= \chi_{f^{-1}(U)} \\
&= \chi_U \circ f \\
&= \mathcal{C}_R(f)(\chi_U) \\
&= (\mathcal{C}_R(f) \circ \widetilde{\epsilon_Y})(U)
\end{aligned}$$

□

Así, los resultados anteriores permiten obtener el siguiente importante resultado.

PROPOSICIÓN 5.2. *Si para todo espacio topológico profinito X se define $\epsilon_X = \tau_X^{-1} \circ$ **Spec**$(\widetilde{\epsilon_X})$, entonces la familia de morfismos $\epsilon = \{\epsilon_X\}_{X \in \boldsymbol{Prof}}$ es una transformación natural entre los funtores **Sp** $\circ\, \mathcal{C}_R$ y $1_{\boldsymbol{Prof}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos profinitos. Al aplicar el funtor **Spec** al diagrama del lema 5.4 se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X)) \arrow[r, "\mathbf{Spec}(\widetilde{\epsilon_X})"] \arrow[d, "(\mathbf{Sp}\circ\mathcal{C}_R)(f)"'] & \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X)) \arrow[d, "(\mathbf{Spec}\circ\mathbf{Clopen})(f)"] \\
\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(Y)) \arrow[r, "\mathbf{Spec}(\widetilde{\epsilon_Y})"'] & \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(Y))
\end{tikzcd}$$

Además, por el teorema de Dualidad de Stone $\mathbf{Spec} \circ \mathbf{Clopen} \cong 1_{\mathbf{Prof}}$ y por lo tanto se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X)) \arrow[r, "\mathbf{Spec}(\widetilde{\epsilon_X})"] \arrow[d, "(\mathbf{Sp}\circ\mathcal{C}_R)(f)"'] & \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X)) \arrow[r, "\tau_X^{-1}"] \arrow[d, "(\mathbf{Spec}\circ\mathbf{Clopen})(f)"] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(Y)) \arrow[r, "\mathbf{Spec}(\widetilde{\epsilon_Y})"'] & \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(Y)) \arrow[r, "\tau_Y^{-1}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Lo que prueba que la familia de morfismos ϵ es natural.

$\square$

Ahora se quiere definir la familia de funciones que resultará ser la unidad de la adjunción. Dado que se quiere que $\eta : 1_{\mathbf{CR\text{-}Alg}^{op}} \Rightarrow \mathcal{C}_R \circ \mathbf{Sp}$ sea una transformación natural, esto es, que para toda R-álgebra A, $\eta_A : A \to \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))$ sea un morfismo en en $\mathbf{CR\text{-}Alg}^{op}$, entonces a cada uno de estos morfismos le corresponde un morfismo en **CR-Alg**, que se denotará de la misma manera, $\eta_A : \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A)) \to A$. Para simplificar las cosas se van a definir dichos morfismos en **CR-Alg** y para esto se requieren nuevamente algunos resultados previos. Entre estos se encuentra un resultado que se deduce del lema 5.1.

Corolario 5.1. *Para toda $f \in \mathcal{C}_R(\boldsymbol{Sp}(A))$ existen $\{U_{e_i}\}_{i=1}^n \subseteq \boldsymbol{Clopen}(\boldsymbol{Sp}(A))$ partición de $\boldsymbol{Sp}(A)$ y $r_1, ..., r_n \in R$ tales que $e_1, ..., e_n \in \boldsymbol{Idem}(A)$, $\sum_{i=1}^n e_i = 1$ y $f = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{U_{e_i}}$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))$. Por el lema 5.1 existen $r_1, ..., r_n \in R$ y $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbf{Clopen}(\mathbf{Sp}(A))$ tales que $\{U_i\}_{i=1}^n$ es una partición de $\mathbf{Sp}(A)$ y $f = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{U_i}$.

Sea $i \in \{1, ..., n\}$ fijo. Como $U_i \in \mathbf{Clopen}(\mathbf{Sp}(A))$, entonces por el corolario 3.4 existe $e_i \in \mathbf{Idem}(A)$ tal que $U_i = U_{e_i}$. Como $\{U_{e_i}\}_{i=1}^n$ es una partición de $\mathbf{Sp}(A)$, entonces $U_1 = \mathbf{Sp}(A) = \bigcup_{i=1}^n U_{e_i} = U_{\sum_{i=1}^n e_i}$ y por el corolario 3.3 se tiene que $\sum_{i=1}^n e_i = 1$. Esto concluye la prueba de la afirmación. $\square$

Proposición 5.3. *Sea A una R-álgebra. Se define la función $\eta_A : \mathcal{C}_R(\boldsymbol{Sp}(A)) \to A$ mediante:*

$$\eta_A(f) = \sum_{i=1}^n r_i e_i \tag{5.3}$$

donde $\{U_{e_i}\}_{i=1}^n$ *es una partición inducida por* f *según el corolario 5.1. Entonces, esta función está bien definida, es decir, no depende de la partición y es un morfismo de* R*-álgebras.*

Demostración. Por construcción de la partición, cualquier otra partición debe refinar a esta y de hecho, por la proposición 4.6 para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $U_{e_i} = \bigcup_{j=1}^{n_i} U_{f_j^i}$, donde para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y $j \in \{1, ..., n_i\}$ se tiene que $f_j^i \in \mathbf{Idem}(R)$, $e_i = \sum_{j=1}^{n_i} f_j^i$ y para todo $j \neq k$, $f_j^i f_k^i = 0$.

Así,

$$\begin{aligned}\eta_A(f) &= \sum_{i=1}^{n} r_i e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} r_i f_j^i.\end{aligned}$$

Esto prueba que η_A está bien definida.

Para ver que η_A es un morfismo de R-álgebras se tiene que probar primero que es un morfismo se anillos. Para ello sean $f, g \in \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))$ así como $\{U_{e_i}\}_{i=1}^n$ y $\{U_{f_i}\}_{i=1}^m$ dos particiones asociadas según el corolario anterior a f y g respectivamente, y tales que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $f|_{U_{e_i}} = r_i$ y para todo $j \in \{1, ..., m\}$, $g|_{U_{f_j}} = s_j$.

Como $\mathbf{Sp}(A) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m U_{e_i} \cap U_{f_j} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m U_{e_i \wedge f_j}$, entonces el conjunto $\{U_{e_i \wedge f_j} \mid e_i \wedge f_j \neq 0\}_{i,j=1}^{n,m}$ es una partición del espectro de Pierce de A y esta cumple que para cualesquiera $i \in \{1, ..., n\}$ y $j \in \{1, ..., m\}$ tales que $e_i \wedge f_j \neq 0$, $f|_{U_{e_i \wedge f_j}} = r_i$ y $g|_{U_{e_i \wedge f_j}} = s_j$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\eta_A(f+g) &= \sum_{i,j=1}^{n,m}(r_i+s_j)(e_i\wedge f_j)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n,m}(r_i+s_j)e_if_j\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} r_ie_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} f_j\right)+\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} s_jf_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} r_ie_i+\sum_{j=1}^{m} s_jf_j\\
&= \eta_A(f)+\eta_A(g)
\end{aligned}$$

Donde en la cuarta igualdad se utilizó el hecho de que $\sum_{i=1}^{n} e_i=\sum_{j=1}^{m} f_j=1$.

Por otro lado, también se tiene que:

$$\begin{aligned}
\eta_A(f)\eta_A(g) &= \left(\sum_{i=1}^{n} r_ie_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} s_jf_j\right)\\
&= \sum_{i,j=1}^{n,m} r_is_je_if_j\\
&= \sum_{i,j=1}^{n,m} r_is_je_i\wedge f_j\\
&= \eta_A(fg)
\end{aligned}$$

Además, como $U_1=\mathbf{Sp}(A)$ entonces $\eta_A(1)=1\cdot 1=1$ y esto concluye la prueba de que esta función es un morfismo de anillos.

Para probar que esta función es un morfismo de R-álgebras se quiere probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A)) \arrow[r, "\eta_A"] & A \\
R \arrow[u, "\rho_{\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))}"] \arrow[ur, "\rho_A"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $r \in R$ entonces:

$$
\begin{aligned}
(\eta_A \circ \rho_{\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))})(r) &= \eta_A(\rho_{\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))}(r)) \\
&= \eta_A(C_r) \\
&= r \cdot 1 \\
&= \rho_A(r)1 \\
&= \rho_A(r)
\end{aligned}
$$

Esto concluye la prueba de que η_A es un morfismo de R-álgebras. $\square$

Se tiene así la propiedad más importante de la familia de morfismos definida.

Proposición 5.4. *La familia de morfismos $\eta = \{\eta_A\}_{A \in \textbf{\textit{R-Alg}}}$ es una transformación natural entre los funtores $1_{\textbf{\textit{R-Alg}}^{op}}$ y $\mathcal{C}_R \circ \textbf{\textit{Sp}}$.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo de R-álgebras. Se quiere probar que le siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A)) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(f))"'] & A \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A)) \arrow[r, "\eta_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Si $g \in \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))$ tiene por partición del espectro de Pierce al conjunto $\{U_{e_i}\}_{i=1}^n$ y cumple que para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $g|_{U_{e_i}} = r_i$, entonces como $\mathbf{Sp}(f) : \mathbf{Sp}(B) \to \mathbf{Sp}(A)$ nótese que:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Sp}(B) &= \mathbf{Sp}^{-1}(\mathbf{Sp}(A)) \\
&= \mathbf{Sp}^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{e_i}\right) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{Sp}^{-1}(U_{e_i}) \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} U_{f(e_i)}
\end{aligned}
$$

Donde la última igualdad se obtiene de la relación $\mathbf{Sp}^{-1}(\mathcal{O}_{e_i}) = \mathcal{O}_{f(e_i)}$, demostrada en la página 45.

Como f es un morfismo de anillos entonces para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $f(e_i) \in \mathbf{Idem}(B)$. Por lo tanto $\{U_{f(e_i)}\}_{i=1}^{n}$ es una partición del espectro de Pierce de B.

Además, como $\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(f))(g) \in \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(B))$ y dado que para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $\mathbf{Sp}(f)(U_{f(e_i)}) = \mathbf{Sp}(f)(\mathbf{Sp}(f)^{-1}(U_{e_i})) \subseteq U_{e_i}$, entonces $\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(f))(g)|_{U_{e_i}}$ es constante y de hecho igual a r_i. Por lo tanto $\eta_B(\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(f))(g)) = \sum_{i=1}^{n} r_i f(e_i)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(f \circ \eta_A)(g) &= f(\eta_A(g)) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_i f(e_i) \\
&= \eta_B(\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(f))(g)) \\
&= (\eta_B \circ \mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(f)))(g)
\end{aligned}$$

□

En este momento se disponen de todas las herramientas para probar uno de los resultados principales de este capítulo.

TEOREMA 5.1. *Para todo anillo conmutativo unitario R, el funtor $\mathcal{C}_R$: **Prof** $\to$ **CR-Alg**^{op} es el adjunto derecho del funtor espectro de Pierce **Sp** : **CR-Alg**^{op} $\to$ **Prof**.*

DEMOSTRACIÓN. Lo único que resta probar es que ϵ y η satisfacen las identidades triangulares.

Sea $A \in \mathbf{R\text{-}Alg}$. Se quiere probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sp}(A) \arrow[r, "\mathbf{Sp}\eta_A"] \arrow[dr, "1_{\mathbf{Sp}(A)}"'] & \mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A))) \arrow[d, "\epsilon_{\mathbf{Sp}(A)}"] \\
& \mathbf{Sp}(A)
\end{tikzcd}$$

Sin embargo, por el teorema de Dualidad de Stone, basta con probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Idem}(A) & (\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(A)))) \arrow[l, "\mathbf{Idem}(\eta_A)"'] \\
& \mathbf{Idem}(A) \arrow[ul, "1_{\mathbf{Idem}(A)}"] \arrow[u, "\widetilde{\epsilon_{\mathbf{Sp}(A)}} \circ \widetilde{\eta_{\mathbf{Idem}(A)}}"']
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\eta_{\mathbf{Idem}(A)}}$ es la función definida en la ecuación 3.1.

Sea $e \in \mathbf{Idem}(A)$. Como $\mathbf{Sp}(A) = U_e \cup \mathbf{Sp}(A) \setminus U_e = U_e \cup U_{1-e}$, entonces $\eta_A(\chi_{U_e}) = 1 \cdot e + 0 \cdot (1-e) = e$.

Ahora, al evaluar se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\eta_A \circ (\widetilde{\epsilon_{\mathbf{Sp}(A)}} \circ \widetilde{\eta_{\mathbf{Idem}(A)}}))(e) &= \eta_A(\widetilde{\epsilon_{\mathbf{Sp}(A)}}(\widetilde{\eta_{\mathbf{Idem}(A)}}(e))) \\
&= \eta_A(\widetilde{\epsilon_{\mathbf{Sp}(A)}}(U_e)) \\
&= \eta_A(\chi_{U_e}) \\
&= e \\
&= 1_{\mathbf{Idem}(A)}(e)
\end{aligned}$$

Esto prueba la conmutatividad del diagrama y al aplicar el funtor **Spec** se tiene la primera identidad triangular.

Sea $X \in \mathbf{Prof}$. La segunda identidad triangular está expresada en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X))) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{C}_R(X)}"] & \mathcal{C}_R(X) \\
\mathcal{C}_R(X) \arrow[u, "\mathcal{C}_R\epsilon_X"] \arrow[ur, "1_{\mathcal{C}_R(X)}"']
\end{tikzcd}$$

Sea $g \in \mathcal{C}_R(X)$. Dado que $X = \bigcup_{r\in R} g^{-1}(r)$ y como $\{g^{-1}(r)\}_{r\in R}$ es una cubierta abierta, por tener R la topología discreta y ser g continua, de la compacidad de X se deduce que existen $r_1, ..., r_n \in R$ tales que para toda $i \in \{1, ..., n\}$, $g^{-1}(r_i) \neq \emptyset$ y $X = \bigcup_{i=1}^n g^{-1}(r_i)$. Además, $g = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{g^{-1}(r_i)}$.

Por otro lado, como para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $g^{-1}(r_i) \in \mathbf{Clopen}(X)$, entonces $\chi_{g^{-1}(r_i)} \in \mathcal{C}_R(X)$. Se afirma que $\{U_{\chi_{g^{-1}(r_i)}}\}_{i=1}^n$ es una partición formada por conjuntos abiertos-cerrados del $\mathbf{Spec}(\mathcal{C}_R(X))$. Lo único que resta probar es que esta familia es una partición:

Sean $i, j \in \{1, ..., n\}$ tales que $i \neq j$, entonces:

$$\begin{aligned}
U_{\chi_{g^{-1}(r_i)}} \cap U_{\chi_{g^{-1}(r_j)}} &= U_{\chi_{g^{-1}(r_i)}\chi_{g^{-1}(r_j)}} \\
&= U_{\chi_{g^{-1}(r_i)\cap g^{-1}(r_j)}} \\
&= U_{\chi_\emptyset} \\
&= U_0 \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=1}^{n} U_{\chi_{g^{-1}(r_j)}} &= U_{\sum_{j=1}^{n} \chi_{g^{-1}(r_j)}} \\
&= U_{C_1} \\
&= \mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X))
\end{aligned}$$

Además, se tiene que $(g \circ \epsilon_X)(U_{\chi_{g^{-1}(r_i)}}) = \{r_i\}$ y con esto se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\eta_{\mathcal{C}_R(X)} \circ \mathcal{C}_R\epsilon_X)(g) &= \eta_{\mathcal{C}_R(X)}(\mathcal{C}_R(\epsilon_X)(g)) \\
&= \eta_{\mathcal{C}_R(X)}(g \circ \epsilon_X) \\
&= \sum_{j=1}^{n} r_j \chi_{g^{-1}(r_j)} \qquad (5.4) \\
&= g \\
&= 1_{\mathcal{C}_R(X)}(g)
\end{aligned}$$

□

Proposición 5.5. *Sea R un anillo conmutativo unitario con la topología discreta. Entonces son equivalentes:*

1. *R tiene exactamente dos idempotentes.*
2. *El funtor $\mathcal{C}_R$ es fiel y pleno.*

Demostración. Por el proposición D.1. del apéndice D, la segunda afirmación es equivalente a que la counidad es un isomofismo en **Prof**, es decir, un homeomorfismo.

$1 \Rightarrow 2$) Si $X = \emptyset$, entonces $\mathcal{C}_R(X)$ es el anillo cero. Así, $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X)) = \emptyset$ y por lo tanto la función $\epsilon_X : \emptyset \to \emptyset$ es un homeomorfismo.

Si $X \neq \emptyset$, entonces al ser los espacios X y $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X))$ Hausdorff y $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(X))$ compacto, para probar que ϵ_X es un homeomorfismo basta ver que es continua y biyectiva, pero como la primera afirmación ya se demostró, simplemente se probará la biyectividad. Sin embargo, por el teorema de Dualidad de Stone basta con probar que la función $\widetilde{\epsilon_X} : \mathbf{Clopen}(X) \to \mathbf{Idem}(\mathcal{C}_R(X))$ es un isomorfismo de álgebras de Boole.

Sean $A, B \in \mathbf{Clopen}(X)$ tales que $\widetilde{\epsilon_X}(A) = \widetilde{\epsilon_X}(B)$. Entonces se tiene que $\chi_A = \chi_B$ y esto sucede si y sólo si $A = B$. Esto prueba que $\widetilde{\epsilon_X}$ es inyectiva.

Para ver que esta función es suprayectiva sea $f \in \mathbf{Idem}(\mathcal{C}_R(X))$. Como por hipótesis $\mathbf{Idem}(R) = \{0, 1\}$, entonces $im(f) \subseteq \{0, 1\}$ y así se define $A = f^{-1}(1)$. Al tener R la topología discreta y al ser f continua, se deduce que $A \in \mathbf{Clopen}(X)$ y además es claro que $f = \chi_A = \widetilde{\epsilon_X}(A)$. Esto prueba que $\widetilde{\epsilon_X}$ es suprayectiva y concluye la prueba en esta dirección.

$2 \Rightarrow 1$) Considere el espacio topológico $\{pt\}$ consistente en un sólo elemento con la topología discreta. Como $\{pt\} \in \mathbf{Prof}$, la hipótesis afirma que $\epsilon_{\{pt\}}$ es un homeomorfismo, por lo que $\mathbf{Sp}(\mathcal{C}_R(\{pt\})) \cong \{pt\}$. Además, $\mathcal{C}_R(\{pt\}) \cong R$ y por lo tanto $\mathbf{Sp}(R) \cong \{pt\}$. Así, $\mathbf{Sp}(R)$ tiene un único ultrafiltro, de lo que se deduce que $R \neq 0$, y dado que 1 es un elemento de dicho ultrafiltro, entonces $1 \neq 0$ y así $\{0, 1\} \subseteq \mathbf{Idem}(R)$.

Por otro lado si $e \in \mathbf{Idem}(R)$ con $e \neq 0$, entonces el filtro $e\uparrow$ es propio y por la proposición 3.2 existe $\mathcal{U}_e$ un ultrafiltro tal que $e\uparrow \subseteq \mathcal{U}_e$. De manera análoga y como $1 \neq 0$, existe $\mathcal{U}_1$ un ultrafiltro tal que $1\uparrow \subseteq \mathcal{U}_1$. Dado que $|\mathbf{Sp}(R)| = 1$ entonces $\mathcal{U}_e = \mathcal{U}_1$ y al usar la proposición 3.4 se concluye que $e\uparrow = \bigcap\{\mathcal{U} \subseteq \mathbf{Idem}(R) \mid \mathcal{U}$ es ultrafiltro y $e\uparrow \subseteq U\} = \mathcal{U}_e = \mathcal{U}_1 = 1\uparrow$. Por lo tanto $e = 1$ y así $\mathbf{Idem}(R) = \{0, 1\}$.

$\square$

2. Cálculo de un adjunto derecho para un funtor inducido por Sp.

Se tiene el siguiente resultado.

LEMA 5.5. *Sean R un anillo conmutativo unitario y S una R-álgebra, entonces las categorías* $\textbf{CR-Alg}^{op}/S$ *y* $\textbf{CS-Alg}^{op}$ *son isomorfas.*

DEMOSTRACIÓN. Se define el funtor $F : \textbf{CR-Alg}^{op}/S \to \textbf{CS-Alg}^{op}$ mediante $F(A, f) = A$. Esta asignación está bien definida pues dado $f : A \to S$ un morfismo en $\textbf{CR-Alg}^{op}$, entonces se tiene que $f : S \to A$ es un morfismo **CR-Alg** y este da una estructura de S-álgebra a A. También, si $h \in Hom_{\textbf{CR-Alg}^{op}/A}((B, f), (C, g))$ entonces se define $F(h) = h$. El funtor definido establece claramente una correspondencia biyectiva entre los objetos de ambas categorías, es fiel y pleno. Por lo tanto, es un isomorfismo de categorías. $\square$

LEMA 5.6. *Sean R un anillo conmutativo unitario y S una R-álgebra, entonces hay un isomorfismo de categorías entre* $\textbf{Prof}/\{pt\}$ *y* **Prof**.

DEMOSTRACIÓN. Se define una asignación $G : \textbf{Prof}/\{pt\} \to \textbf{Prof}$ mediante $G(X, f) = X$, y si $h \in Hom_{\textbf{Prof}/\{pt\}}((X, f), (Y, g))$ entonces $G(h) = h$. Esta asignación es claramente un funtor, establece una biyección entre los objetos de ambas categorías, es fiel y pleno, pues $\{pt\}$ es objeto final de **Prof**. Así, G establece el isomorfismo de categorías deseado. $\square$

El siguiente resultado muestra que si un funtor tiene un adjunto derecho y la categoría del dominio tiene una propiedad especial, entonces es posible inducir una adjunción entre dos categorías sobre objetos (ver apéndice D).

PROPOSICIÓN 5.6. *Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos categorías tales que $\mathbb{A}$ tiene fibraciones. Si $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un funtor con un adjunto derecho $G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, entonces para todo $A \in \mathbb{A}$ el funtor $F_A : \mathbb{A}/A \to \mathbb{B}/F(A)$ donde $F_A(B, \alpha) = (F(B), F(\alpha))$, tiene por adjunto derecho al funtor $G_A : \mathbb{B}/F(A) \to \mathbb{A}/A$ definido mediante $G_A(\beta, Y) = (\mathcal{P}(\eta_A, G(\beta)), \gamma)$, donde γ es definido por la fibración:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\eta_A, G(\beta)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"'] & G(Y) \arrow[d, "G(\beta)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"'] & GF(A)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $t \in Hom_{\mathbb{A}}(T, A)$ y $\beta \in Hom_{\mathbb{B}}(Y, F(A))$. Se quiere probar que $Hom_{\mathbb{A}/A}((T,t), G_A(Y,\beta)) \cong Hom_{\mathbb{B}/F(A)}(F_A(T,t),(Y,\beta))$.

Para probar dicho isomorfismo se va a probar que $Hom_{\mathbb{A}/A}((T,t), G_A(Y,\beta)) \cong Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t),(G(Y), G(\beta)))$ y que $Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t),(G(Y), G(\beta))) \cong Hom_{\mathbb{B}/F(A)}(F_A(T,t),(Y,\beta))$. Así, por la transitividad de $\cong$ se tiene el resultado deseado.

Se define $\Phi_1 : Hom_{\mathbb{A}/A}((T,t), G_A(Y,\beta)) \to Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t),(G(Y), G(\beta)))$ mediante la regla de correspondencia $\Phi_1(\varphi) = \delta \circ \varphi$. Esta función está bien definida pues

$$\begin{aligned}
(G(\beta) \circ \Phi_1)(\varphi) &= G(\beta) \circ (\delta \circ \varphi) \\
&= (G(\beta) \circ \delta) \circ \varphi \\
&= (\eta_A \circ \gamma) \circ \varphi \\
&= \eta_A \circ (\gamma \circ \varphi) \\
&= \eta_A \circ t,
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene del cuadrado que define la fibración y la cuarta igualdad de que $\varphi \in Hom_{\mathbb{A}/A}((T,t), G_A(Y,\beta))$.

Sea $\Psi_1 : Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t),(G(Y), G(\beta))) \to Hom_{\mathbb{A}/A}((T,t), G_A(Y,\beta))$ cuya regla de correspondencia es $\Psi_1(\psi) = l$, donde l se define mediante la fibración:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, "\psi"] \arrow[dr, dotted, "l"] \arrow[ddr, "t"'] & & \\
& \mathcal{P}(\eta_A, G(\beta)) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\gamma"'] & G(Y) \arrow[d, "G(\beta)"] \\
& A \arrow[r, "\eta_A"'] & GF(A)
\end{tikzcd}$$

Como por construcción $\gamma \circ \Psi_1(\psi) = \gamma \circ l = t$ entonces Ψ_1 está bien definida.

Además se afirma que $\Phi_1 \circ \Psi_1 = 1_{Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T,\eta_A \circ t),(G(Y),G(\beta)))}$ y que $\Psi_1 \circ \Phi_1 = 1_{Hom_{\mathbb{A}/A}((T,t),G_A(Y,\beta))}$.

Si $\psi \in Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t),(G(Y), G(\beta)))$, entonces con la notación de antes:

$$\begin{aligned}(\Phi_1 \circ \Psi_1)(\psi) &= \Phi_1(\Psi_1(\psi)) \\ &= \Phi_1(l) \\ &= \delta \circ l \\ &= \psi \\ &= 1_{Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T,\eta_A \circ t),(G(Y),G(\beta)))}(\psi).\end{aligned}$$

La segunda igualdad se prueba de manera análoga y esto termina la prueba del primer isomorfismo.

Para el segundo isomorfismo sea $\Phi_2 : Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t), (G(Y), G(\beta))) \to Hom_{\mathbb{B}/F(A)}(F_A(T, t), (Y, \beta))$ cuya regla de correspondencia es $\Phi_2(\alpha) = \epsilon_Y \circ F(\alpha)$.

Primero se quiere ver que esta función está bien definida, es decir, que $\beta \circ \Phi_2(\alpha) = F(t)$. Como $G(\beta) \circ \alpha = \eta_A \circ t$ entonces $FG(\beta) \circ F(\alpha) = F(\eta_A) \circ F(t)$, de lo que se deduce que $\epsilon_{F(A)} \circ FG(\beta) \circ F(\alpha) = \epsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) \circ F(t)$. De la naturalidad de ϵ se tiene que $\epsilon_{F(A)} \circ FG(\beta) = \beta \circ \epsilon_Y$ y de una de las identidades triangulares que $\epsilon_{F(A)} \circ F(\eta_A) = 1_{F(A)}$. Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}\beta \circ \Phi_2(\alpha) &= \beta \circ (\epsilon_Y \circ F(\alpha)) \\ &= (\epsilon_{F(A)} \circ FG(\beta)) \circ F(\alpha) \\ &= (\epsilon_{F(A)} \circ F\eta_A) \circ F(t) \\ &= 1_{F(A)} \circ F(t) \\ &= F(t)\end{aligned}$$

Por otro lado, se define $\Psi_2 : Hom_{\mathbb{B}/F(A)}(F_A(T, t), (Y, \beta)) \to Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T, \eta_A \circ t), (G(Y), G(\beta)))$ mediante $\Psi_2(\xi) = G(\xi) \circ \eta_T$.

Para ver que esta función está bien definida se quiere ver que $G(\beta) \circ \Psi_2(\xi) = \eta_A \circ t$. Dado que $\beta \circ \xi = F(t)$ entonces $G(\beta) \circ G(\xi) = GF(t)$ y por la naturalidad de η se tiene que $\eta_A \circ t = GF(t) \circ \eta_T$. Así, se deduce que:

$$\begin{aligned}G(\beta) \circ \Psi_2(\xi) &= G(\beta) \circ (G(\xi) \circ \eta_T) \\ &= GF(t) \circ \eta_T \\ &= \eta_A \circ t\end{aligned}$$

Lo que resta probar es que $\Phi_2 \circ \Psi_2 = 1_{Hom_{\mathbb{B}/F(A)}(F_A(T,t),(Y,\beta))}$ y que además $\Psi_2 \circ \Phi_2 = 1_{Hom_{\mathbb{A}/GF(A)}((T,\eta_A \circ t),(G(Y),G(\beta)))}$.

Con la misma notación de antes y usando la naturalidad de ϵ se tiene que $\epsilon_Y \circ FG(\xi) = \xi \circ \epsilon_{F(T)}$. Además, al usar una de las identidades triangulares se tiene que $\epsilon_{F(T)} \circ F\eta_T = 1_{F(T)}$. De esto se deduce que:

$$\begin{aligned}
(\Phi_2 \circ \Psi_2)(\xi) &= \Phi_2(G(\xi) \circ \eta_T) \\
&= \epsilon_Y \circ F(G(\xi) \circ \eta_T) \\
&= (\epsilon_Y \circ FG(\xi)) \circ F\eta_T \\
&= \xi \circ (\epsilon_{F(T)} \circ F\eta_T) \\
&= \xi \circ 1_{F(t)} \\
&= \xi \\
&= 1_{Hom_{\mathbb{B}/F(A)}(F_A(T,t),(Y,\beta))}(\xi)
\end{aligned}$$

La otra igualdad se prueba de manera análoga y con esto se concluye la prueba. □

COROLARIO 5.2. *Sean R un anillo conmutativo unitario y S una R-álgebra con exactamente dos idempotentes. Entonces para todo espacio topológico profinito X se tiene que $S \otimes_R \mathcal{C}(X,R) \cong \mathcal{C}(X,S)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S una R-álgebra con exactamente dos idempotentes, entonces $\mathbf{Sp}(S) \cong \{pt\}$. Al usar el resultado previo se tiene que el funtor $\mathbf{Sp}_S : \mathbf{CR\text{-}Alg}^{op}/S \to \mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(S)$ tiene por adjunto derecho al funtor $(\mathcal{C}_R)_S : \mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(S) \to \mathbf{CR\text{-}Alg}^{op}/S$, donde este funtor está definido mediante la cofibración:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_R(\mathbf{Sp}(S)) \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[d, "\mathcal{C}_R(\alpha)"'] & S \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{C}_R(X) \arrow[r, "\delta"'] & (\mathcal{C}_R)_S(X)
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha : X \to \mathbf{Sp}(S)$ es una función continua.

Por otro lado, se afirma que $S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)$ es la cofibración de η_S y $\mathcal{C}_R(\alpha)$. Para probar esto considerese la situación del siguiente diagrama donde la función $\iota_1 : S \to S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)$ está definida mediante $\iota_1(s) = s \otimes C_1$, donde $s \in S$ y C_1 es la función constante con valor 1. Además, la función $\iota_2 : \mathcal{C}_R(X) \to S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)$ tiene por regla de correspondencia $\iota_2(f) = 1 \otimes f$, donde $f \in \mathcal{C}_R(X)$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\rho_S"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{C}_R(X)}"'] & S \arrow[d, "\iota_1"] \\
\mathcal{C}_R(X) \arrow[r, "\iota_2"'] & S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)
\end{tikzcd} .$$

Veamos que ι_1 es un morfismo de R-álgebras. Es claro que $\iota_1(1) = 1 \otimes C_1$. Sean $s, s' \in S$, entonces:

$$\begin{aligned}
\iota_1(s + s') &= (s + s') \otimes C_1 \\
&= s \otimes C_1 + s' \otimes C_1 \\
&= \iota_1(s) + \iota_1(s')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iota_1(ss') &= ss' \otimes C_1 \\
&= (s \otimes C_1)(s' \otimes C_1) \\
&= \iota_1(s)\iota_1(s').
\end{aligned}$$

Además, si $r \in R$ entonces:

$$\begin{aligned}
\iota_1(r \cdot s) &= \iota_1(\rho_S(r)s) \\
&= \iota_1(\rho_S(r))\iota_1(s) \\
&= (r \otimes C_1)\iota_1(s) \\
&= r(1 \otimes C_1)\iota_1(s) \\
&= r\iota_1(s).
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba que ι_2 es un morfismo de R-álgebras. Además, como esto implica que $\iota_1 \circ \rho_S = \rho_{S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)}$ y $\iota_2 \circ \rho_{\mathcal{C}_R(X)} = \rho_{S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)}$, entonces el diagrama anterior conmuta.

Si existen L una R-álgebra, $\alpha_1 : S \to L$ y $\alpha_2 : \mathcal{C}_R(X) \to L$ dos morfismos de R-álgebras tales que $\alpha_1 \circ \rho_S = \alpha_2 \circ \rho_{\mathcal{C}_R(X)}$, entonces considerese el morfismo de R-álgebras $h = \overline{\mu} \circ (\alpha_1 \otimes \alpha_2)$, donde $\alpha_1 \otimes \alpha_2 : S \otimes_R \mathcal{C}_R(X) \to L \otimes_R L$ es el producto tensorial de los morfismos de R-álgebras α_1 y α_2, así como $\overline{\mu}$ el morfismo de R-álgebras inducido por el producto en L que es un morfismo R-bilineal.

Se quiere ver que $h \circ \iota_1 = \alpha_1$ y que $h \circ \iota_2 = \alpha_2$. Para probar esto lo único que resta ver es que dichas funciones tienen la misma regla de correspondencia y sólo se probará la primera de las igualdades pues la segunda es análoga. Sea $s \in S$, entonces:

$$\begin{aligned}(h \circ \iota_1)(s) &= \overline{\mu}(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(\iota_1(s)) \\ &= \overline{\mu}(\alpha_1 \otimes \alpha_2)(s \otimes C_1) \\ &= \overline{\mu}(\alpha_1(s) \otimes \alpha_2(C_1)) \\ &= \alpha_1(s)\alpha_2(C_1) \\ &= \alpha_1(s),\end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que α_2 es un morfismo de R-álgebras y por lo tanto $\alpha_2(C_1) = 1$.

Esto prueba que $S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)$ es la cofibración de $\rho_{\mathcal{C}_R(X)}$ y ρ_S. Por lo tanto el siguiente diagrama es una cofibración entre $\rho_{\mathcal{C}_R(X)} \circ h$ y $\rho_S \circ h$.

$$\begin{tikzcd}\mathcal{C}_R(\mathbf{Spec}(S)) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{C}_R(X)} \circ h"'] & R \arrow[r, "\rho_S"] \arrow[d, "\rho_{\mathcal{C}_R(X)}"'] & S \arrow[d, "\iota_1"] \\ \mathcal{C}_R(X) \arrow[r, "1_{\mathcal{C}_R(X)}"'] & \mathcal{C}_R(X) \arrow[r, "\iota_2"'] & S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)\end{tikzcd}$$

donde h el es isomorfismo entre $\mathcal{C}_R(\mathbf{Spec}(S))$ y R, que se recuerda está dado por $h(f) = f(pt)$. Veamos que $\rho_{\mathcal{C}_R(X)} \circ h = \mathcal{C}_R(\alpha)$ y que $\rho_S \circ h = \eta_S$. Lo único que falta ver es que estos morfismos tienen la misma regla de correspondencia.

Sea $f \in \mathcal{C}_R(\mathbf{Spec}(S))$, entonces.

$$\begin{aligned}(\rho_{\mathcal{C}_R(X)} \circ h)(f) &= \rho_{\mathcal{C}_R(X)}(h(f)) \\ &= \rho_{\mathcal{C}_R(X)}(f(pt)) \\ &= f(pt)C_1 \\ &= C_{f(pt)} \\ &= f \circ \alpha \\ &= \mathcal{C}_R(\alpha)(f)\end{aligned}$$

Por otro lado si $s \in S$, entonces:

$$\begin{aligned}(\rho_S \circ h)(f) &= \rho_S(h(f))\\ &= \rho_S(f(pt))\\ &= f(pt)1_S\\ &= f(pt)\\ &= \eta_S(f)\end{aligned}$$

Con esto se ha probado que $S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)$ es la cofibración de η_S y $\mathcal{C}_R(\alpha)$, por lo que $(\mathcal{C}_R)_S(X) \cong S \otimes_R \mathcal{C}_R(X)$.

Además, por el teorema 5.1 se tiene que $(\mathcal{C}_R)_S(X) \cong \mathcal{C}(X, S)$, lo que concluye la prueba.

□

LEMA 5.7. *Para todo espacio profinito X y $f : X \to \boldsymbol{Sp}(R)$ una función continua, el conjunto $Hom_{\boldsymbol{Prof}/\boldsymbol{Sp}(R)}((X, f), (\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$ es una R-álgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\alpha, \beta \in Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X, f), (\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$. Nótese que como $p\circ\alpha = p\circ\beta = f$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $\alpha(x), \beta(x) \in R/f(x)$ y por lo tanto se definen la suma y el producto de dichas funciones de manera puntual. Además, esta resulta ser una nueva función continua. Se define también la función $\hat{1} : X \to \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M$ mediante $\hat{1}(x) = [1]_{f(x)}$, donde $x \in X$. Esta función es continua y es sencillo ver que es el elemento unitario del producto definido. Así, el conjunto $Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X, f), (\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$ es un anillo conmutativo unitario.

Se define ahora la función $\rho : R \to Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X, f), (\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$ con la regla de correspondencia $\rho(r)(x) = [r]_{f(x)}$. Esta función está bien definida pues para $r \in R$, la función $\rho(r)$ es continua y además satisface que $p \circ \rho(r) = f$ pues dado $x \in X$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(p \circ \rho(r))(x) &= p(\rho(r)(x))\\ &= p([r]_{f(x)})\\ &= f(x).\end{aligned}$$

Esto prueba que $\rho(r) \in Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X, f), (\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$. Además, por la definición de las operaciones en el codominio es claro que esta función es un morfismo de anillos y por lo tanto $Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X, f), (\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$ es una R-álgebra.

□

TEOREMA 5.2. *Para todo anillo conmutativo unitario R, el adjunto derecho del funtor*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Sp}_R : \boldsymbol{CR\text{-}Alg}^{op} \to \boldsymbol{Prof}/\boldsymbol{Sp}(R) \\ A \mapsto (\boldsymbol{Sp}(A), \boldsymbol{Sp}(\rho_A)) \end{gathered}$$

está definido mediante el funtor

$$\begin{gathered} \mathfrak{C}_R : \boldsymbol{Prof}/\boldsymbol{Sp}(R) \to \boldsymbol{CR\text{-}Alg}^{op} \\ (X,f) \mapsto Hom_{\boldsymbol{Prof}/\boldsymbol{Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p)). \end{gathered}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $A \in \mathbf{CR\text{-}Alg}$ y $(X,f) \in \mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)$. Se quiere probar que $Hom_{\mathbf{CR\text{-}Alg}^{op}}(A, \mathfrak{C}_R(X,f)) \cong Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}(\mathbf{Sp}_R(A),(X,f))$.

Si $R = 0$ entonces $\mathbf{Sp}(R) = \emptyset$ y así $\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R) \cong \mathbf{Prof}$. Por otro lado, $\mathfrak{C}_R(X,f) = \{\emptyset\} \cong 0$ y además $\mathbf{CR\text{-}Alg} \cong \{0\}$. Así, la afirmación es obvia.

El caso que falta tratar es en el que $R \neq 0$. Para esto primero nótese que si $U \in \mathbf{Clopen}(X)$ entonces se define una función $\chi_U : X \to \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M$ mediante la regla de correspondencia:

$$\chi_U(x) = \begin{cases} [1]_{f(x)}, & \text{Si } x \in U \\ [0]_{f(x)}, & \text{Si } x \notin U \end{cases}$$

Es claro que esta función es continua y que $p \circ \chi_U = f$, por lo que $\chi_U \in Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M,p))$. De hecho, dicha función es un elemento idempotente en dicho anillo.

Para construir el isomorfismo sea $\varphi \in Hom_{\mathbf{R\text{-}Alg}^{op}}(A, \mathfrak{C}_R(X,f))$. Entonces $\varphi : \mathfrak{C}_R(X,f) \to A$ es un morfismo de R-álgebras y así se define $\tau_\varphi : \mathbf{Clopen}(X) \to \mathbf{Idem}(A)$ cuya regla de correspondencia es $\tau_\varphi(U) = \varphi(\chi_U)$. Es claro por propiedades de las funciones características y del hecho de que φ es un morfismo de anillos que τ_φ es un morfismo de álgebras de Boole, entonces al aplicar el teorema de Dualidad de Stone, la función $\tau'_\varphi = \tau_X^{-1} \circ \mathbf{Spec}(\tau_\varphi)$ es continua. Se afirma que $\tau'_\varphi \in Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}(\mathbf{Sp}_R(A),(X,f))$, es decir, que $f \circ \tau'_\varphi = \mathbf{Sp}(\rho_A)$.

Para probar esta afirmación se utiliza nuevamente el teorema de Dualidad de Stone, por lo que primero se va a probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Idem}(R) \arrow[d, "\eta_{\mathbf{Idem}(R)}"'] \arrow[ddr, "\mathbf{Idem}(\rho_A)"] & \\
\mathbf{Clopen}(\mathbf{Sp}(R)) \arrow[d, "\mathbf{Clopen}(f)"'] & \\
\mathbf{Clopen}(X) \arrow[r, "\tau_\varphi"'] & \mathbf{Idem}(A)
\end{tikzcd}$$

En efecto, sea $e \in \mathbf{Idem}(R)$, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\tau_\varphi \circ \mathbf{Clopen}(f) \circ \eta_{\mathbf{Idem}(R)})(e) &= \tau_\varphi(\mathbf{Clopen}(f)(\eta_{\mathbf{Idem}(R)}(e))) \\
&= \tau_\varphi(\mathbf{Clopen}(f)(\mathcal{O}_e)) \\
&= \tau_\varphi(f^{-1}(\mathcal{O}_e)) \\
&= \varphi(\chi_{f^{-1}(\mathcal{O}_e)}) \\
&= e \cdot \varphi([1]_{f(x)}) \\
&= e \cdot 1 \\
&= \rho_A(e)1 \\
&= \rho_A(e)
\end{aligned}$$

Donde la quinta igualdad se obtiene de la observación siguiente: $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_e)$ si y sólo si $f(x) \in \mathcal{O}_e$, y esto sucede si y sólo si $e \in f(x)$, de donde $[0]_{f(x)} = [e]_{f(x)}$. Análogamente se prueba que si $x \notin f^{-1}(\mathcal{O}_e)$ entonces $[1]_{f(x)} = [e]_{f(x)}$. De esto se deduce que $\chi_{f^{-1}(\mathcal{O}_e)} = [e]_{f(x)} = e \cdot [1]_{f(x)}$ y al ser φ un morfismo de R-álgebras se tiene que $\varphi(e \cdot [1]_{f(x)}) = e \cdot \varphi([1]_{f(x)})$.

Al aplicar el funtor espectro al diagrama anterior y al utilizar la naturalidad de τ^{-1} se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sp}(A) \arrow[r, "\mathbf{Spec}(\varphi)"] \arrow[ddr, "\mathbf{Sp}(\rho_A)"'] & \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(X)) \arrow[r, "\tau_X^{-1}"] \arrow[d, "\mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(f))"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& \mathbf{Spec}(\mathbf{Clopen}(\mathbf{Sp}(R))) \arrow[r, "\tau_{\mathbf{Sp}(R)}^{-1}"'] \arrow[d, "\mathbf{Spec}(\eta_{\mathbf{Idem}(R)})"] & \mathbf{Sp}(R) \\
& \mathbf{Sp}(R) &
\end{tikzcd}$$

Así, el teorema de Dualidad de Stone permite concluir que $f \circ \tau'_\varphi = \mathbf{Sp}(\rho_A)$.

Considerese $F_{A,(X,f)} : Hom_{\mathbf{CR\text{-}Alg}^{op}}(A, \mathfrak{C}_R(X,f)) \to Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}(\mathbf{Sp}_R(A),(X,f))$ definida mediante $F_{A,(X,f)}(\varphi) = \tau'_\varphi$. Esta asignación es natural y se afirma que es una biyección.

Primero nótese que si $g \in Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M))$, entonces para todo $r \in R$, $s_r^R(\mathbf{Sp}(R)) \subseteq \bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M$ es un abierto y así $g^{-1}s_r^R(\mathbf{Sp}(R)) \subseteq X$ es abierto. Claramente $\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M = \bigcup_{r\in R} s_r^R(\mathbf{Sp}(R))$ y así $X = \bigcup_{r\in R} g^{-1}(s_r^R(\mathbf{Sp}(R)))$. Por lo tanto $\{g^{-1}(s_r^R(\mathbf{Sp}(R)))\}_{r\in R}$ es una cubierta abierta de X y como X es profinito, compacto y Hausdorff, entonces por el corolario 2.1 dicha cubierta admite un refinamiento constituido por conjuntos abiertos-cerrados, es decir, existen $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbf{Clopen}(X)$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y si $x \in U_i$, entonces existe $r_i \in R$ tal que $g(x) = [r_i]_{f(x)}$. Por lo tanto $g = \sum_{i=1}^n r_i \chi_{U_i}$.

Para la inyectividad de la asignación sean $\varphi, \psi \in Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M, p))$ tales que $F_{A,(X,f)}(\varphi) = F_{A,(X,f)}(\psi)$. Entonces por el teorema de Dualidad de Stone $\tau_\varphi = \tau_\psi$ y así para toda $i \in \{1,...,n\}$, $\varphi(\chi_{U_i}) = \tau_\varphi(U_i) = \tau_\psi(U_i) = \psi(\chi_{U_i})$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\varphi(g) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n r_i \chi_{U_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n r_i \varphi(\chi_{U_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n r_i \psi(\chi_{U_i}) \\
&= \psi\left(\sum_{i=1}^n r_i \chi_{U_i}\right) \\
&= \psi(g)
\end{aligned}$$

Esto prueba la inyectividad de dicha asignación. En lo que respecta a la suprayectividad sea $h \in Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((\mathbf{Sp}(A), \mathbf{Sp}(\rho_A)), (X,f)))$. Como $h : \mathbf{Sp}(A) \to X$ es una función continua, por el teorema de Dualidad de Stone esta función es inducida por un morfismo de álgebras de Boole $\overline{h} : \mathbf{Clopen}(X) \to \mathbf{Idem}(A)$ tal que para todo $e \in \mathbf{Idem}(R)$, $\overline{h}(f^{-1}(\mathcal{O}_e)) = e \cdot 1$.

Por otro lado, si $g \in Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M,p))$, entonces existen $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbf{Clopen}(X)$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y además para todo $x \in U_i$ existe $r_i \in R$ tal que $g(x) = [r_i]_{f(x)}$. Con estas observaciones se define la asignación $\varphi : Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M,p)) \to A$ mediante $\varphi(g) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \overline{h}(U_i)$.

Se afirma que φ está bien definida, es decir, no depende de la descomposición de g. Si $g = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \chi_{U_i} = \sum_{j=1}^m r_j \cdot \chi_{V_j}$ donde $\{U_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_j\}_{j=1}^m$ son dos familias de conjuntos abiertos-cerrados que son una partición de X, entonces para todo $i \in \{1,...,n\}$ y $j \in \{1,...,m\}$ defínase $W_{ij} = U_i \cap V_j$. Es claro que $\{W_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m} \subseteq \mathbf{Clopen}(X)$ y que los elementos diferentes del vacío de dicha familia forman una partición de X. Más aún, para todo $i \in \{1,...,n\}$ fijo, la familia $\{W_{ij}\}_{j=1}^m$ es una partición de U_i y entonces $\overline{h}(\bigcup_{j=1}^m W_{ij}) = \sum_{j=1}^m \overline{h}(W_{ij})$. Por lo tanto $r_i \cdot \overline{h}(U_i) = \sum_{j=1}^m r_i \cdot \overline{h}(W_{ij})$ y de manera análoga se prueba que $s_j \cdot \overline{h}(V_j) = \sum_{i=1}^n s_j \cdot \overline{h}(W_{ij})$. Así, para probar la afirmación basta con mostrar que para todo $i \in \{1,...,n\}$ y $j \in \{1,...,m\}$ se tiene que $r_i \cdot \overline{h}(W_{ij}) = s_j \cdot \overline{h}(W_{ij})$. Sin embargo, como para todo $x \in X$ existen únicos $i \in \{1,...,n\}$ y $j \in \{1,...,m\}$ tales que $[s_j]_{f(x)} = h(x) = [r_i]_{f(x)}$, entonces $r_i - s_j \in f(x)$. Así las cosas, la prueba de esta afirmación se reduce a mostrar que si $U \in \mathbf{Clopen}(X)$ y $r \in R$, entonces para todo $x \in U$ y $r \in f(x)$, $r \cdot \overline{h}(U) = 0$.

Sea $x \in U$ tal que $r \in f(x)$, entonces se deduce que $f(U) = \{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid \exists y \in U, f(y) = M\} \subseteq \{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid f(x) = M\} \subseteq \{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid r \in M\} = U_r$ y por el lema 4.4 U_r es abierto. Así, por el corolario 2.1 existen $\{e_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbf{Idem}(R)$ tales que $U_r = \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{e_i}$. Dado que $f(U) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_{e_i}$, entonces $U \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathcal{O}_{e_i})$ y como U es un compacto, por ser un conjunto cerrado contenido en X que es compacto, también se tiene que existen $e_1,...,e_n \in \mathbf{Idem}(R)$ tales que $U \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_{e_i})$. Así, $\bigcup_{i=1}^n U \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{e_i}) = U \cap (\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_{e_i})) = U$. Por lo que:

$$
\begin{aligned}
r \cdot \overline{h}(U) &= r \cdot \overline{h}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U \cap f^{-1}(\mathcal{O}_{e_i})\Big) \\
&= r \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(U)\overline{h}(f^{-1}(\mathcal{O}_{e_i})) \\
&= r \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(U) e_i \cdot 1 \\
&= r \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(U) \rho_A(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(U) r \cdot \rho_A(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{h}(R) \rho_A(re_i)
\end{aligned}
$$

Como para todo $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene que $\mathcal{O}_{e_i} \subseteq U_r$, entonces $\bigcap\{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid M \in \mathcal{O}_{e_i}\} = \bigcap\{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid e_i \notin M\} = \bigcap\{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid 1 - e_i \in M\} = R(1 - e_i)$ y dado que $r \in \bigcap\{M \in \mathbf{Sp}(R) \mid M \in \mathcal{O}_{e_i}\}$, entonces $r \in R(1-e_i)$ y como $R = Re_i \oplus R(1-e_i)$ entonces $re_i = 0$. Por lo que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $\rho_A(re_i) = 0$ y entonces la suma es cero. Por lo tanto la función φ está bien definida.

Además, si $U \in \mathbf{Clopen}(X)$, entonces como $\chi_U = 0 \cdot \chi_{X \setminus U} + 1 \cdot \chi_U$, se tiene que $\varphi(U) = 0 \cdot \overline{g}(X \setminus U) + 1 \cdot \overline{g}(U) = \overline{g}(U)$. Así, se deduce que para todo $U \in \mathbf{Clopen}(X)$, $\tau_\varphi(U) = \overline{g}(U)$ y que $\tau_\varphi = \overline{g}$, por lo que $\tau'_\varphi = g$. Esto prueba que la asignación $F_{A,(X,f)}$ es suprayectiva y esto concluye la prueba de la adjunción. $\square$

Proposición 5.7. *El funtor $\mathfrak{C}_R : \boldsymbol{Prof}/\boldsymbol{Sp}(R) \to \boldsymbol{CR\text{-}Alg}^{op}$ es fiel y pleno.*

Demostración. Como el funtor $\mathfrak{C}_R$ es adjunto derecho del funtor $\mathbf{Sp}_R$, para ver que este es fiel y pleno se va a probar que la counidad de la adjunción es un isomorfismo, esto es, que para todo $(X, f) \in \mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)$, $\epsilon_{(X,f)} : \mathbf{Sp}(\mathfrak{C}_R(X, f)) \to (X, f)$ definido mediante $\epsilon_X = F_{\mathfrak{C}_R(X,f),(X,f)}(1_{\mathfrak{C}_R(X)})$, es un isomorfismo.

Sea $g \in \mathbf{Idem}(\mathfrak{C}_R(X, f))$, entonces para todo $x \in X$, $g(x) \in \mathbf{Idem}(R/f(x))$. Además, dado que para todo $x \in X$ se tiene que $f(x) \in \mathbf{Sp}(R)$, entonces $f(x)$ es un ideal máximo y regular, por lo que la proposición 4.11 permite concluir que

$\mathbf{Idem}(R/f(x)) = \{[0]_{f(x)}, [1]_{f(x)}\}$, de lo que se deduce que $g(x) = [0]_{f(x)}$ ó $g(x) = [1]_{f(x)}$.

Considerese los conjuntos $s_0^{\mathbf{Sp}(R)}(\mathbf{Sp}(R))$ y $s_1^{\mathbf{Sp}(R)}(\mathbf{Sp}(R))$, que son abiertos por la proposición 4.10 y disjuntos pues para todo $M \in \mathbf{Sp}(R)$ se tiene que $1 \notin M$.

Dado que por el teorema de Tychonoff el producto de espacios compactos es compacto y el producto de espacios totalmente separados es totalmente separado, entonces el producto de una familia finita de espacios topológicos profinitos es un espacio topológico profinito y por lo tanto el espacio $\{0,1\} \times \mathbf{Sp}(R)$ es profinito.

Se afirma que $\mathbf{Idem}(\mathfrak{C}_R(X,f)) \cong Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\} \times \mathbf{Sp}(R), \pi_2))$, donde π_2 es la proyección en la segunda coordenada del producto.

En efecto, se define $\alpha_1 : \mathbf{Idem}(\mathfrak{C}_R(X,f)) \to Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\} \times \mathbf{Sp}(R), \pi_2))$ mediante $\alpha_1(g) = g \times f$. Para ver que esta función está bien definida lo primero que se tiene que probar que es continua, pero como $\pi_1 \circ \alpha_1(g) = g$ y $\pi_2 \circ \alpha_1(g) = f$ son funciones continuas, por definición de la topología producto, la función $\alpha_1(g)$ es continua y de hecho, de la segunda igualdad, se tiene que $\alpha_1(g) \in Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\} \times \mathbf{Sp}(R), \pi_2))$.

Por otro lado se define $\beta_1 : Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R), \pi_2)) \to \mathbf{Idem}(\mathfrak{C}_R(X,f))$ mediante la regla de correspondencia $\beta_1(h)(x) = [\pi_1(h(x))]_{f(x)}$. Se tiene que probar que esta función está bien definida. Así si $x \in X$, entonces:

$$\begin{aligned}
(p \circ \beta_1(h))(x) &= p(\beta_1(h)(x)) \\
&= p([\pi_1(h(x))]_{f(x)}) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Lo que prueba que $p \circ \beta_1(h) = f$. Lo que resta probar es que $\beta_1(h)$ es idempotente y para esto dada $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\beta_1(h)^2(x) &= [\pi_1(h(x))]^2_{f(x)} \\
&= [\pi_1(h(x))^2]_{f(x)} \\
&= [\pi_1(h(x))]_{f(x)} \\
&= \beta_1(h)(x),
\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene del hecho de que $\pi_1(h(x)) \in \{[0]_{f(x)}, [1]_{f(x)}\}$. Esto concluye la prueba de que la función está bien definida.

Lo único que falta probar es que $\alpha_1 \circ \beta_1 = 1_{Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))}$ y que $\beta_1 \circ \alpha_1 = 1_{\mathbf{Idem}(Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M,p)))}$.

Para la primera igualdad sea $h \in Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))$, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $h(x) = (\pi_1(h(x)), f(x))$. Así, para $x \in X$:

$$\begin{aligned}(\alpha_1 \circ \beta_1)(h)(x) &= \alpha_1(\beta(h)(x))\\ &= \alpha([\pi_1(h(x))]_{f(x)})\\ &= (\pi_1(h(x)), f(x))\\ &= h(x)\\ &= 1_{Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))}(h)(x).\end{aligned}$$

Lo que prueba la primera igualdad. Por otro lado, si $g \in \mathbf{Idem}(\mathfrak{C}_R(X,f))$ entonces,

$$\begin{aligned}(\beta \circ \alpha)(g)(x) &= \beta(\alpha(g)(x))\\ &= \beta(g(x), f(x))\\ &= [g(x)]_{f(x)}\\ &= g(x)\\ &= 1_{\mathbf{Idem}(Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\bigsqcup_{M\in\mathcal{M}_R} R/M,p)))}(g)(x).\end{aligned}$$

Esto concluye la afirmación.

Ahora se afirma que $Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2)) \cong \mathcal{C}(X,\{0,1\})$.

Para esto se define $\alpha_2 : Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2)) \to \mathcal{C}(X,\{0,1\})$ mediante la regla de correspondencia $\alpha(g) = \pi_1 \circ g$, donde $\pi_1 : \{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R) \to \{0,1\}$ es la proyección en la primera coordenada. Es claro que esta función es continua pues es una composición de dos funciones continuas.

Por otro lado se define $\beta_2 : \mathcal{C}(X,\{0,1\}) \to Hom_{\mathbf{Prof/Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))$ mediante $\beta_2(h) = h \times f$. Esta función es continua pues $\pi_1 \circ \beta_2(h) = h$ y $\pi_2 \circ \beta_2(h) = f$ son funciones continuas y de hecho, por la segunda igualdad esta función está bien definida.

Para terminar el isomorfismo resta probar que $\alpha_2 \circ \beta_2 = 1_{\mathcal{C}(X,\{0,1\})}$ y que $\beta_2 \circ \alpha_2 = 1_{Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))}$.

Sea $h \in \mathcal{C}(X,\{0,1\})$, entonces:

$$\begin{aligned}(\alpha_2 \circ \beta_2)(h) &= \alpha_2(\beta_2(h))\\ &= \alpha_2(h \times f)\\ &= \pi_1(h \times f)\\ &= h\\ &= 1_{\mathcal{C}(X,\{0,1\})}(h)\end{aligned}$$

Por otro lado si $g \in Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))$ entonces,

$$\begin{aligned}(\beta_2 \circ \alpha_2)(g) &= \beta_2(\alpha_2(g))\\ &= \beta_2(\pi_1 \circ g)\\ &= (\pi_1 \circ g) \times f\\ &= g\\ &= 1_{Hom_{\mathbf{Prof}/\mathbf{Sp}(R)}((X,f),(\{0,1\}\times\mathbf{Sp}(R),\pi_2))}(g)\end{aligned}$$

Los isomofismos obtenidos permiten concluir que $\mathbf{Idem}(\mathfrak{C}_R(X,f)) \cong \mathcal{C}(X,\{0,1\})$ y al aplicar el funtor **Spec** se tiene que $\mathbf{Sp}(\mathfrak{C}_R(X,f)) \cong \mathbf{Spec}(\mathcal{C}(X,\{0,1\}))$. Como $\mathbf{Spec}(\mathcal{C}(X,\{0,1\})) \cong X$, se tiene el resultado deseado. $\square$

Capítulo 6

Conclusiones.

En teoría de categorías la noción de isomorfismo entre categorías es muy restrictiva pues exige unicidad a nivel de objetos en la asignación es cuestión. Por otro lado, en muchas áreas de la matemática existen teoremas que permiten caracterizar a ciertos objetos salvo isomorfismo, y es por esta razón que es mucho más práctico el concepto de equivalencia de categorías.

Uno de los ejemplos por excelencia de la utilidad de dicho concepto se da en la geometría algebraica clásica con el conocido resultado que establece una antiequivalencia entre las categorías de variedades algebraicas afines y K-álgebras reducidas finitamente generadas, con el cual es posible establecer un potente diccionario entre geometría y álgebra.

En el presente trabajo se estudió otro ejemplo de antiequivalencia de categorías que es el teorema de Dualidad de Stone, el cual muestra que dos objetos matemáticos que en principio aparentan ser muy distintos, como lo son los espacios topológicos profinitos y las álgebras de Boole, no lo son. El camino hacía el enunciado y prueba de este teorema fue particularmente fructífero pues se obtuvieron distintos resultados de estructura de las categorías involucradas y posteriormente al establecimiento de dicho teorema, se realizó un estudio del funtor espectro de Pierce.

De acuerdo a Mac Lane (1981) hay dos ideas claves en el trabajo de Stone y su teorema de representación, una de ellas es la introducción de los métodos topólogicos para el estudio de un problema algebraico. Dicha acción rompio el esquema de trabajo de los topologos generales de ese momento (entre ellos la escuela polaca de Sierpiński, Kuratowski, etc.) quienes para la construcción de espacios topológicos se apoyaban de la intuición geométrica. Así, el trabajo de Stone fue uno de los primeros en los que se construyeron espacios topológicos a partir de estructuras algebraicas. Desde una visión diferente el empleo de la topología como técnica para el estudio de estructuras algebraicas no fue aceptada por todos los algebristas del momento, uno de los mayores detractores fue Garret Birkhoff quien en conversaciones con Artin, Mac Lane y otros matemáticos, afirmó que “eso no era hacer álgebra, pero no era algo que un algebrista no pueda hacer”. Sin embargo, hoy en día es muy frecuente usar técnicas topológicas para resolver problemas en otras áreas y vale la pena mencionar que después de estar establecido el teorema de Stone, Birkhoff obtuvo también un análogo para retículas distributivas, sin embargo su trabajo pasó casi desapercibido por la falta de métodos topológicos.

De acuerdo a Mac Lane la segunda idea clave es la prueba de un importante resultado donde Stone mostró la equivalencia entre las álgebras de Boole y los anillos de Boole [**S1**], lo que hoy en día se sabe es un isomorfismo entre categorías. El trabajo de Stone fue muy importante para los precursores de la teoría de categorías pues en [**S2**] se encuentran ocultos los conceptos de funtor, isomorfismo de categorías, equivalencia de categorías (en el sentido en que Grothedieck las definió en su famoso artículo *Tôhoku*) y la idea de funtor adjunto. Según Johnston el teorema de Stone fue una de las mayores influencias para introducir en el mundo matemático la teoría de categorías por Eilenberg y Mac Lane.

Una vez consolidado el trabajo de Stone comenzaron las aplicaciones. Algunas de las primeras dos aparecieron en topología y análisis funcional y fueron dadas por Stone en [**S2**]. La primera de ellas fue la construcción de una compactificación máxima para espacios completamente regulares, que es lo que hoy se conoce como la compactación de Stone-Čech, y la segunda su generalización del teorema de aproximación de Weierstrass, es decir, el teorema de Stone-Weierstrass. Vale la pena mencionar que la compactación de Stone-Čech fue desarrollada de manera independiente por Stone y Čech, sin embargo, en el trabajo de Stone hay nuevamente un resultado de caracter categórico pues Stone muestra que dicho espacio satisface una propiedad universal. Además, en dicho estudio se utilizan propiedades del anillo de funciones acotadas y continuas de un espacio topológico X en $\mathbb{R}$. En una segunda etapa de trabajo Stone logra caracterizar este anillo en terminos algebraicos en sus artículos de 1939 y 1941, mientras que Gelfand da una descripción del caso complejo en sus artículos de 1939 y 1941, dicha descripción fue el inicio de lo que hoy se conoce como la dualidad de Gelfand.

En otro artículo Stone usa la equivalencia probada para dar una caracterización topológica del concepto de completez de un álgebra de Boole en 1935 en su artículo titulado *Postulates for Boolean algebras and generalized Boolean algebras*, cosa que lo lleva a definir el concepto de espacio extremadamente disconexo, los cuales tienen muchas aplicaciones en análisis funcional. También el 1937 define los espacios coherentes en su artículo *"Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics"*, que son los primos no Hausdorff de los espacios de Stone, sin embargo este campo aún está en desarrollo.

En resumen y como Johnston lo escribe en la introducción de su libro [**J**], el trabajo de Stone se puede resumir como el primer paso a la algebrización de la categoría de espacios compactos Hausdorff.

Las influencias del trabajo de Stone aún son más pues Deudonné afirma en su libro *"Cours de géométrie algébrique"* que este influenció a Zariski. También se cree que Grothedieck conocia su trabajo y de hecho por tal razón tomó la palabra "espectro" para el conjunto de ideales primos con la topología definida por ellos.

Respecto al concepto de espacio profinito este ha sido de gran relevancia en distintas áreas de la matemática pues existen diversos ejemplos de este tipo de espacios en Teoría de Galois (con los grupos profinitos), Geometría Algebraica y Topología. En torno a estas últimas dos áreas existen en la literatura muy variados e interesantes resultados. Por ejemplo, es posible calcular las componentes conexas de $\mathbf{Zar}(R)$ para todo anillo conmutativo unitario R en terminos del conjunto de ideales regulares máximos del anillo R (ver [**T**, pp 7]). Por otro lado, también es posible probar que existe una topología en $\mathbf{Zar}(R)/\sim$ que hace de este espacio un espacio topológico profinito, donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por las componentes conexas del espectro de Zariski (ver [**T**, pp 8]). Con esto puede darse también una topología en $\mathbf{Max}(\mathcal{C}(X))/\sim$ que hace de este espacio un espacio topológico profinito, donde $\mathbf{Max}(\mathcal{C}(X))$ denota al espectro máximo del anillo de funciones continuas reales de un espacio topológico X (ver [**T**, pp 8–9]).

Sin embargo, los resultados descritos anteriormente no son únicamente una forma de dar ejemplos de espacios profinitos, pues uno de los resultados más fuertes que pueden deducirse de dichos resultados, es la prueba de que la categoría de espacios profinitos es una subcategoría reflectiva de la categoría de espacios compactos Haussdorff (ver [**T**, pp 11]).

De entre las muchas y variadas aplicaciones del teorema de Stone, que constituye la primera parte de la tesis, en este trabajo se optó por mostrar algunas aplicaciones de la teoría desarrollada a anillos conmutativos unitarios. Regresando a lo que sucede en geometría algebraica, la equivalencia de categorías ahí probada es un primer paso a la teoría de esquemas, en el sentido de que uno puede preguntarse que sucede con el análogo geométrico cuando en lugar de considerar K-álgebras reducidas y finitamente generadas, se consideran anillos conmutativos unitarios. En paralelo a esto los teoremas 5.1 y 5.2, que son aquellos en los que se calcula un adjunto derecho de dos funtores asociados al espectro de Pierce, son el primer paso al desarrollo de una teoría de Galois en anillos conmutativos, la cual tuvo su origen con los trabajos independientes de Grothendieck y Auslander-Goldman y cuyo desarrollo formal fue concluido por A. R. Magid en [**M**]. Así, se ha expuesto uno de los resultados básicos necesarios para iniciar el estudio de dicha área, los ingredientes que faltan son la noción de morfismo descendente y algunos resultados de pregavillas internas, cuyo desarrollo puede consultarse en [**M**] y en el capítulo 4 de [**BJ**], lo que muestra que incluso en el terreno algebraico quedan aún aplicaciones de esta teoría.

Después de discutir brevemente la influencia del trabajo de Stone y la variedad de aplicaciones que tiene, la moraleja de esta historia es aquella frase que en 1938 dijo Stone: *"One must always topologize"*.

Apéndice A

Álgebras de Boole.

Definición A.1. *Un álgebra de Boole es una tupla* $(A, \wedge, \vee, \_^c, 0, 1)$ *que consta de un conjunto no vacío* A *tal que* $0, 1 \in A$*, dos funciones binarias* $\wedge, \vee : A \times A \to A$ *y una función unaria* $\_^c : A \to A$ *tales que para todo* $a, b, c \in A$*:*

1. $a \wedge b = b \wedge a$ *y* $a \vee b = b \vee a$.
2. $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ *y* $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
3. $(a \wedge b) \vee a = a$ *y* $(a \vee b) \wedge a = a$.
4. $a \wedge a^c = 0$ *y* $a \vee a^c = 1$.
5. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *y* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Las igualdades que se muestran en la tercera propiedad que define a un álgebra de Boole se conocen como las identidades de absorción. El resto de las igualdades reciben un nombre canónico.

Ejemplo A.1. *El ejemplo por excelencia de un álgebra de Boole es el conjunto potencia de un conjunto* X*, al definir para* $A, B \in \mathcal{P}(X)$*,* $A \wedge B = A \cap B$*,* $A \vee B = A \cup B$*,* $A^c = X \setminus A$*,* $0 = \emptyset$ *y* $1 = X$*.*

Ejemplo A.2. *Una variante del ejemplo anterior es considerar el conjunto* $FC(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es finito o } X \setminus A \text{ es finito}\}$*. Con las mismas operaciones y elementos distinguidos en el ejemplo anterior dicha colección es un álgebra de Boole, que se conoce como el álgebra de Boole finita-cofinita del conjunto* X*.*

Ejemplo A.3. *El tercer ejemplo, que es de hecho muy importante para este trabajo, se obtiene al considerar el conjunto de elementos idempotentes de un anillo conmutativo unitario* R*, denotado por* $\boldsymbol{Idem}(R)$*, en el que se definen para* $e, f \in \boldsymbol{Idem}(R)$*:* $e \wedge f = ef$*,* $e \vee f = e + f - ef$*,* $e^c = 1 - e$*. Con estas operaciones, los elementos cero y uno, que corresponden a los elementos* 0 *y* 1 *del anillo* R*,* $\boldsymbol{Idem}(R)$ *tiene estructura de álgebra de Boole.*

Ejemplo A.4. *Si X es un espacio topológico, entonces el conjunto* $\boldsymbol{Clopen}(X) = \{A \subseteq X \mid A$ *es abierto y cerrado*$\}$ *es un álgebra de Boole con las mismas funciones definidas en el ejemplo A.1. Algunos autores la llaman el álgebra de Boole característica o dual del conjunto X.*

Definición A.2. *Para A y B álgebras de Boole, $f : A \to B$ es un morfismo de álgebras de Boole si $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y para todo $a, b \in A$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ y $f(a^c) = f(a)^c$.*

Ejemplo A.5. *Sea $f : X \to Y$ una función. Se define una nueva función $f_* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ mediante la regla de correspondencia $f_*(D) = f^{-1}(D)$, donde $D \in \mathcal{P}(Y)$. Es sencillo probar que f_* es un morfismo de álgebras de Boole.*

La categoría de álgebras de Boole se denota por **Bool**.

De manera alterna se tiene el concepto de retícula que es un orden parcial en el que para todo par de elementos el supremo e ínfimo existen. Una retícula L tiene complementos si existen dos elementos $0, 1 \in L$ tal que para todo $a \in L$ existe $b \in L$ tal que $\sup\{a, b\} = 1$ y $\inf\{a, b\} = 0$. Puede probarse que estos elementos son únicos y que el elemento asociado b es único, por tal razón este se llama el complemento de a.

Así, a toda álgebra de Boole puede asignarse una retícula con complementos y distributiva al definir el orden parcial $a \leq b$ si $a \wedge b = a$ y visceversa, es decir, a toda retícula con complementos y distributiva puede asignarse estructura de álgebra de Boole al definir $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. En ambos casos la asignación del complemento de un elemento es el complemento en la estructura correspondiente y el elemento cero y uno son los mismos. Esta correspondencia puede extenderse también a morfismos estableciendose así una biyección entre los objetos de estas categorías. Además, a nivel de morfismos esta asignación es fiel y plena, es decir, hay un isomorfismo de categorías entre la categoría de álgebras de Boole y la de retículas con complementos y distributivas. Por esta razón, en la literatura suele encontrarse como definición equivalente a la definición A1, a un álgebra de Boole como una retícula con complementos y distributiva.

Apéndice B

Marcos y Locales.

Definición B.1. *Un marco L es una retícula completa que satisface que para toda familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de L y $y \in L$:*

$$y \wedge \left(\bigvee_{i\in I} x_i \right) = \bigvee_{i\in I} (x_i \wedge y).$$

Ejemplo B.1. *Sea X un espacio topológico y denótese por $\Omega(X)$ al conjunto de los subconjuntos abiertos de X. Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \Omega(X)$, entonces se definen:*

$$\bigvee_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i$$

$$\bigwedge_{i\in I} A_i = \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right)^{\circ}.$$

Así, $\Omega(X)$ tiene estructura de retícula completa y de hecho, $\Omega(X)$ es un marco.

Definición B.2. *Un morfismo de marcos $f : L \longrightarrow L'$ es una función que preserva supremos arbitrarios e ínfimos finitos.*

Ejemplo B.2. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ continua. Se define la función $f_* : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ cuya regla de correspondencia es $f_*(U) = f^{-1}(U)$. La función f_* es un morfismo de marcos.*

Es sencillo probar que la composición de morfismos de marcos es un morfismo de marcos y que la función identidad en un marco es un morfismo de marcos.

La observación previa permite hablar de la categoría de marcos la que se denota por **Frm**. La categoría opuesta a la categoría de marcos es la categoría de locales denotada por **Loc**.

En muchos textos no suele hacerse distinción a nivel de objetos entre los marcos y locales. No sucede así con los morfismos pues para la categoría de locales a sus morfismos se les suele llamar funciones continuas (ver [**J**, pp 39]).

En la categoría de marcos es sencillo probar que todo morfismo biyectivo de marcos es un isomorfismo, pues la función inversa de dicho morfismo es un morfismo de marcos.

Apéndice C

R-álgebras.

Sean A y R anillos conmutativos unitarios y $f : R \to A$ un morfismo de anillos. Se define una acción de R en A, $\cdot : R \times A \to A$ mediante la regla:

$$r \cdot a = f(r)a$$

Con esta acción es sencillo probar que A tiene estructura de R-módulo.

Definición C.1. *Se dice que A un anillo conmutativo unitario es una R-álgebra si existe un morfismo de anillos $\rho_A : R \to A$. Al decir que A es una R-álgebra siempre se piensa en la estructura de R-módulo que induce el morfismo ρ_A en A.*

Ejemplo C.1. *Del hecho de que $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial en la categoría de anillos conmutativos unitarios se deduce que todo anillo conmutativo unitario es una $\mathbb{Z}$-álgebra.*

Definición C.2. *Sean A y B R-álgebras. Un morfismo de anillos $f : A \to B$ es un morfismo de R-álgebras si es un morfismo de R-módulos.*

El siguiente resulado da una caracterización útil de los morfismos de R-álgebras.

Proposición C.1. *Sean A y B R-álgebras y $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Son equivalentes:*

1. *f es un morfismo de R-álgebras.*
2. $\rho_B = f \circ \rho_A$

La segunda condición se expresa en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ R \arrow[u, "\rho_A"] \arrow[ur, "\rho_B"'] & \end{tikzcd}$$

Es sencillo probar que la identidad en toda R-álgebra es un morfismo de R-álgebras y que la composción de dos morfismos de R-álgebras es un morfismo de R-álgebras. Esto permite hablar de la categoría de R-álgebras conmutativas la que se denota por **CR-Alg**.

Además, en la categoría de R-álgebras no se hace distinción entre los morfismos biyectivos de R-álgebras y los isomorfismos pues se puede probar que si $f : A \to B$ es un morfismo de R-álgebras biyectivo, entonces $f^{-1} : B \to A$ es un morfismo de R-álgebras.

Por otro lado si A es una R-álgebra e $I \subseteq A$ es un ideal, entonces I es un R-submódulo de A y por lo tanto el anillo cociente A/I tiene automáticamente una estructura de R-módulo.

Otra construcción importante que hereda la categoría de R-módulos a la categoría de R-álgebras es la existencia de un producto tensorial para dos objetos. Los detalles de esta construcción pueden consultarse en [**A**, pp 30–31].

Apéndice D

Algunos conceptos categóricos.

Sean $\mathbb{A}$ una categoría y $A \in \mathbb{A}$. Se recuerda que la categoría de objetos sobre A, denotada por $\mathbb{A}/A$, tiene por objetos a los morfismos en $\mathbb{A}$ cuyo dominio es un objeto cualquiera de la categoría y cuyo codominio es A. Los objetos en esta categoría se suelen denotar mediante $(dom(f), f)$.

En lo que respecta a los morfismos de dicha categoría, se define:

$$Hom_{\mathbb{A}/A}((B, f), (C, g)) = \{h \in Hom_{\mathbb{A}}(B, C) \mid g \circ h = f\}.$$

Definición D.1. *Sean $A, B, C \in \mathbb{A}$, $f : A \to C$ y $g : B \to C$. La fibración de f y g es una tripleta $(P, p_A : P \to A, p_B : P \to B)$ donde $P \in \mathbb{A}$ y se satisface que $f \circ p_A = g \circ p_B$. Además, se tiene la siguiente propiedad universal: Para cualquier par de morfismos en $\mathbb{A}$, $h_A : Q \to A$ y $h_B : Q \to B$ tales que $f \circ h_A = g \circ h_B$, existe un único $q : Q \to P$ tal que $p_A \circ q = h_A$ y $p_B \circ q = h_B$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[drr, bend left, "h_B"] \arrow[dr, dotted, "q"] \arrow[ddr, bend right, "h_A"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_B"'] \arrow[d, "p_A"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Sean $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ dos categorías.

Definición D.2. *Un funtor $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un encaje si es fiel, pleno e inyectivo en los objetos de $\mathbb{A}$.*

Definición D.3. *Sean* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *y* $G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *dos funtores. Se dice que* F *es un adjunto izquierdo de* G*, o equivalentemente que* G *es un adjunto derecho de* F*, si existe un isomorfismo natural* $\gamma_{A,B} : Hom(F(A), B) \to Hom(A, G(B))$*, para todo* $A \in \mathbb{A}$ *y* $B \in \mathbb{B}$*.*

El siguiente teorema da una caracterización de cuando dos funtores son adjuntos.

Teorema D.1. *Sean* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *y* $G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *dos funtores. Son equivalentes:*

1. F *es adjunto izquierdo de* G*.*
2. *Existen* $\epsilon : FG \Rightarrow 1_{\mathbb{B}}$ *y* $\eta : 1_{\mathbb{A}} \Rightarrow GF$ *tales que los siguientes diagramas, conocidos como las identidades triangulares, conmutan para todo* $A \in \mathbb{A}$ *y* $B \in \mathbb{B}$*:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F\eta_A"] \arrow[dr, "1_{F(A)}"'] & (FGF)(A) \arrow[d, "\epsilon_{F(A)}"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "1_{G(B)}"'] & (GFG)(B) \arrow[d, "G(\epsilon_B)"] \\ & G(B) \end{tikzcd}$$

La transformación natural η se conoce como la unidad de la adjunción y a ϵ se le conoce como la counidad de la adjunción. Una prueba de este teorema se puede encontrar en [**KS**, pp 29].

El siguiente resultado juega también un papel importante en un par de resultados del capítulo 5. La prueba de dicho resultado se puede encontrar en [**B**, pp 114] y [**KS**, pp 29–30].

Proposición D.1. *Sean* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *y* $G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ *dos funtores tales que* F *es adjunto derecho de* G*. Entonces son equivalentes:*

1. F *es fiel y pleno.*
2. *La counidad de la adjunción es un isomorfismo.*

Teorema D.2. *Sea* $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *un funtor. Entonces son equivalentes:*

1. *F es fiel y pleno y tiene un adjunto izquierdo G fiel y pleno.*
2. *F tiene un adjunto G y la unidad y counidad de la adjunción son isomorfismos.*
3. *Existe un funtor $G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ y dos isomorfismos naturales tales que $GF \cong 1_{\mathbb{A}}$ y $FG \cong 1_{\mathbb{B}}$*
4. *F es fiel, pleno y para todo $B \in \mathbb{B}$ existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $F(A) \cong B$.*

Una prueba de este resultado puede encontrarse en [**B**, pp 115–116]. Además, a la última propiedad de la cuarta afirmación se le conoce como que el funtor F sea denso o esencialmente suprayectivo.

DEFINICIÓN D.4. *Un funtor $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ que satisface las equivalencias del teorema D.2. se llama equivalencia de categorías.*

Todo isomorfismo de categorías es una equivalencia pero no recíprocamente. Un ejemplo que prueba esta última afirmación es considerar una categoría $\mathbb{A}$ cuya familia de objetos es $\mathbb{N}$ y para $n, m \in \mathbb{N}$ se define $Hom_{\mathbb{A}}(n, m) = M_{n\times m}(K)$, donde K es un campo. En esta categoría la composición está dada por el producto de matrices y las identidades son las matrices identidad. Si $\mathbf{K\text{-}Vect}_f$ denota la categoría de K-espacios vectoriales de dimensión finita, y para todo $V \in \mathbf{K\text{-}Vect}_f$ se fija β_V una base, entonces se define la asignación $F : \mathbf{K\text{-}Vect}_f \to \mathbb{A}$ mediante $F(V) = dim_K(V)$ y para $T \in Hom_K(V, W)$ se define $F(T) = [T]_{\beta_V}^{\beta_W}$. Esta asignación resulta ser una equivalencia de categorías pero no puede ser un isomorfismo pues $\mathbb{A}$ es un conjunto mientras que $\mathbf{K\text{-}Vect}_f$ es general una clase propia.

Bibliografía

[A] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to Conmutative Algebra*, Adisson-Wesley Publishing Company, 1906.

[B] Borceux F., *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[BJ] Borceux F., Janelidze G., *Galois Theories*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[DP] Davey. B. A., Priestley H. A., *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, Cambrigde, 2002.

[E] Engelking R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[Ei] Eisenberg M., *Topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

[F] Fernández A. R., *Descomposición de dos Anillos de Funciones Continuas*, Miscelánea Matemática SMM, 38, (2003), 65-75.

[G] Gouvea F. Q., *p-adic Numbers An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.

[Gr] Grothendieck A., *Sur quelques points d' algebre homologique*, Tôhoku Math. J. 9 (1957), 119-121.

[H] Hernández H. F., *Teoría de Conjuntos Una introducción*, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[Ha] Halmos P. R., *Lectures on boolean algebras*, D. Van Nostrand Company Inc., 1963.

[J] Johnstone P. T., *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambrigde, 1982.

[K] Koppelberg S., *Handbook of Boolean Algebras Volume 1*, North Holland, 1989.

[KS] Kashiwara M., Schapira P., *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

[M] Magid A. R., *The Separable Galois Theory of Commutative Rings*, CCR Press, 2014.

[Mc] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, Springer, 1998.

[S1] Stone M. H., *The theory of representations for boolean algebras*, Transactions of the American Mathematical Society 40 (1936), 37-111.

[S2] Stone M. H., *Applications of the theory of boolean rings to general topology*, Transactions of the American Mathematical Society 41 (1937), 375-481.

[SS] Steen L. A., Seebach Jr. A., *Counterexemples in Topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.

[T] Tarizadeh A., *On the category of profinite spaces as a reflective subcategory.* Artículo disponible en: arXiv:1207.5963.

[W] Willard S., *General Topology*, Dover Publications, Inc., 2004.