



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

## FACULTAD DE CIENCIAS

MANIPULACIÓN DE LA CORRELACIÓN ESPECTRAL DE  
FOTONES GENERADOS MEDIANTE CONVERSIÓN  
PARAMÉTRICA DESCENDENTE EN LA VENTANA DE  
TELECOMUNICACIONES

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
FÍSICA

P R E S E N T A:

ELISA TEJEDA ZACARÍAS

TUTOR:

ALFRED BARRY U'REN CORTÉS



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



TESIS DE LICENCIATURA 2017

**Manipulación de correlación espectral de fotones  
generados por conversión paramétrica descendente  
en la ventana de telecomunicaciones**

ELISA TEJEDA ZACARÍAS



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

Facultad de Ciencias  
*Instituto de Ciencias Nucleares*  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Ciudad Universitaria, CDMX, 2017

Manipulación de la correlación espacial de fotones generados por  
conversión paramétrica descendente en la ventana de telecomunicaciones  
ELISA TEJEDA ZACARÍAS

© ELISA TEJEDA ZACARÍAS, 2017.

Tutor: Alfred Barry U'Ren Cortés  
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

Tesis de Licenciatura 2017  
Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Av. Universidad 3000, Coyoacán, México  
Tel. (01 55) 5622 1332

Hecha en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
Ciudad de México, México, 2017

Manipulación de correlación espectral de parejas de fotones generadas por conversión paramétrica descendente en la ventana de telecomunicaciones.

ELISA TEJEDA ZACARÍAS

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

## Resumen

La construcción de fuentes de fotones individuales conforma una de las bases de sistemas de comunicación cuántica tales como canales cuánticos, criptografía cuántica o teleportación cuántica, por mencionar algunos. La obtención de fotones individuales se basa en la generación de fotones mediante procesos no lineales, en los cuales los fotones generados son descritos por un estado cuántico. Para la construcción de este tipo de fuentes es necesaria la obtención de fotones cuyos estados sean factorizables, es decir, deben satisfacer la inexistencia de correlaciones tanto espectrales como espaciales [1]. En particular, si los fotones son generados mediante conversión paramétrica descendente (SPDC por sus siglas en inglés *Spontaneous Parametric Down Conversion*), el estado cuántico de la pareja de fotones generada,  $|\Psi\rangle$ , en la variable fotónica de frecuencia angular tiene la forma:

$$|\Psi\rangle = \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle |\omega_i\rangle \quad (0.1)$$

donde  $f$  es la amplitud espectral conjunta y cuyo módulo cuadrado corresponde a la llamada función de intensidad conjunta (JSI por sus siglas en inglés, *Joint Spectral Intensity*) e indica la amplitud de probabilidad de que la pareja de fotones con frecuencia angular  $\omega_s, \omega_i$  sea emitida.

A lo largo de este trabajo, se manipuló experimentalmente la correlación espectral de la función JSI de fotones generados en la región espectral de telecomunicaciones de manera colineal y con la misma polarización mediante el proceso de SPDC, llamado SPDC-I, en un cristal de  $\beta$ -borato de bario (BBO). El control de la correlación espectral se logró tras la variación del radio del cinturón del bombeo, el ancho espectral del bombeo y el radio de los cinturones de acoplamiento. Se observó además una dependencia directa entre la variación de estos parámetros y la correlación, que fue cuantificada con el coeficiente de correlación de Pearson, el número de Schmidt asociado al estado y la función de coherencia de segundo orden.

Palabras clave: SPDC, fotones gemelos, correlación, variable fotónica, JSI.



# Agradecimientos

Este trabajo representa una etapa de mi vida en la que han sido partícipes muchas personas. Agradezco a cada una de ellas, pues cada momento me ha dejado algo y define una parte de quien soy.

Elisa Tejeda Zacarías, Ciudad de México, 2017





# Índice general

Índice de figuras	xi
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Motivación . . . . .	2
1.2 Problema y objetivo . . . . .	4
1.2.1 Objetivos específicos . . . . .	4
1.3 Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2 Bases teóricas</b>	<b>7</b>
2.1 Haz Gaussiano . . . . .	8
2.2 Procesos no lineales de segundo orden . . . . .	10
2.3 Modelos cuánticos de la luz . . . . .	12
2.3.1 Descomposición de Schmidt . . . . .	13
2.4 Funciones de correlación . . . . .	13
<b>3 Teoría para el SPDC y la obtención de estados factorizables</b>	<b>17</b>
3.1 Estado cuántico para SPDC . . . . .	19
3.1.1 Función de la amplitud conjunta en términos de los vectores de onda . . . . .	21
3.1.1.1 Función de <i>phase-matching</i> . . . . .	23
3.1.1.2 Función de amplitud conjunta . . . . .	24
3.2 Obtención de estados factorizables . . . . .	26
3.2.1 Correlaciones espectrales . . . . .	27
3.2.2 Condiciones para estados factorizables . . . . .	28
3.3 SPDC acoplado a fibras monomodales . . . . .	31
3.3.1 Equivalencia de coordenadas para los modos de colección . . . . .	32
<b>4 Simulaciones</b>	<b>35</b>
4.1 Las variables del estado . . . . .	36
4.1.1 Propiedades del cristal . . . . .	36
4.1.2 Propiedades del haz de bombeo . . . . .	36
4.1.3 Acoplamiento a fibra . . . . .	37
4.2 Simulación del estado . . . . .	37

4.3	Comportamiento del estado . . . . .	38
4.3.1	Ancho espectral del bombeo . . . . .	40
4.3.2	Radio del cinturón de bombeo . . . . .	42
4.3.3	Radio del cinturón de acoplamiento . . . . .	44
4.3.4	Dependencia de la correlación espectral a $\sigma_P$ , $W_0$ y $W_f$ . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Arreglo experimental, detección de coincidencias y resultados</b>	<b>47</b>
5.1	Espectrómetro de fibra . . . . .	49
5.2	Caracterización del cinturón del haz de bombeo y cinturones de acoplamiento	50
5.3	Perfil de intensidad de fotones generados . . . . .	52
5.4	Detección de coincidencias con TDC id800 . . . . .	53
	5.4.0.1 Modo de operación TDC id800 y gráfica de la JSI . . . . .	54
5.5	Medición de función de coherencia de segundo orden $g^2$ . . . . .	57
5.6	Resultados . . . . .	58
	5.6.1 Análisis de resultados . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Phase-matching en cristales</b>	<b>I</b>
A.1	Birrefringencia . . . . .	I
A.2	Condiciones de phase-matching en un cristal uniaxial . . . . .	II
	A.2.1 Propagación electromagnética en un medio anisotrópico . . . . .	II
	A.2.2 Deducción de condiciones de PM . . . . .	III
<b>B</b>	<b>Propagación de luz en una fibra óptica</b>	<b>V</b>

# Índice de figuras

2.1	Diferencia entre las mediciones de correlación integrada temporalmente y resuelta temporalmente. . . . .	15
3.1	Representación de la generación de fotones mediante SPDC tipo I, que debe satisfacer las condiciones de <i>phase matching</i> : conservación de energía y de momento. . . . .	18
3.2	Representación geométrica del proceso de SPDC-I [17]. . . . .	18
3.3	Aproximación de función $\text{sinc}(x) \approx e^{-\gamma x^2}$ con $\gamma = 0.193$ . . . . .	28
3.4	Correlaciones entre las variables fotónicas espectrales y espaciales que pueden presentarse en el estado generado. . . . .	29
3.5	Correlaciones directas e indirectas entre las variables fotónicas espectrales y espaciales del estado. . . . .	30
4.1	Acoplamiento de los fotones generados a la fibra óptica . . . . .	37
4.2	Cinturón de bombeo y cinturones de acoplamiento de los fotones generados a la fibra óptica . . . . .	38
4.3	Estado fotónico genérico dependiente de dos variables. Se muestra su comportamiento cuando existe enredamiento entre la variable $s$ y la variable $i$ , y cuando estas variables son independientes. . . . .	39
4.4	Gráfica de las funciones (a) $ \alpha(\omega_s + \omega_i) ^2$ y (b) $ \Phi(\omega_s, \omega_i) ^2$ para un cristal de $\beta$ -borato de bario tipo I orientado para conversión descendente no colineal de un bombeo centrado en $775\text{nm}$ . . . . .	39
4.5	Variación del número de Schmidt de la función JSI en función del ancho espectral del bombeo $\sigma_P$ . . . . .	40
4.6	Cambio de la función de la envolvente espectral y JSI respecto a ancho espectral del bombeo $\sigma_P$ . . . . .	41
4.7	Variación del número de Schmidt de la función JSI en función del radio del cinturón de bombeo $W_f$ . . . . .	42
4.8	Cambio de la función de <i>phasematching</i> y JSI respecto al radio de cinturón del bombeo $W_0$ . . . . .	43
4.9	Variación del número de Schmidt de la función JSI en función del cinturón de acoplamiento $W_f$ . . . . .	44

4.10	Cambio de la función de <i>phasematching</i> y JSI respecto al cinturón de acoplamiento $W_f$ . . . . .	45
5.1	Esquema de la generación de fotones y su acoplamiento a fibra óptica monomodal. . . . .	48
5.2	Arreglo experimental para la generación de parejas mediante SPDC-I. . . . .	49
5.3	Función de distribución cronocíclica de Wigner para un pulso que atraviesa el espectrómetro de fibra. . . . .	50
5.4	Calibración utilizada para la obtención de la velocidad de grupo de cada longitud de onda que compone los pulsos del haz de bombeo al salir del espectrómetro de fibra. . . . .	51
5.5	Arreglo experimental para la medición de los cinturones de acoplamiento $W_f$ . . . . .	52
5.6	Cortes transversales del cono de fotones generados mediante SPDC tipo I en un BBO. . . . .	53
5.7	Discriminación de pulsos electrónicos provenientes del fotodiodo rápido por parte del prescaler. . . . .	54
5.8	Esquema de las señales generadas por cada aparato. . . . .	54
5.9	Criterio de coincidencias aplicado a los tiempos de arribo de los fotones detectados para graficar la función JSI. . . . .	55
5.10	Matriz para graficar la función de JSI. . . . .	56
5.11	Vista de coincidencias obtenidas en una ventana de detección del APD de $50ns$ y un tiempo de exposición de 10 minutos con una resolución de $324ps$ con variación en el cinturón de bombeo. . . . .	57
5.12	Arreglo experimental para la medición de la función de coherencia de segundo orden. . . . .	58
5.13	Medición experimental de JSI y simulación. Se muestra el control experimental completo de la correlación espectral con la variación del cinturón de acoplamiento $W_f$ . . . . .	59
5.14	Medición experimental de JSI y simulación. Se muestra el control experimental de la correlación espectral con la variación del cinturón de bombeo $W_0$ . . . . .	60
5.15	Medición experimental de JSI y simulación. Se muestra el control experimental completo de la correlación espectral con la variación del ancho espectral $\sigma_P$ . . . . .	61
5.16	Medición experimental de JSI y simulación. Se muestra el control experimental completo de la correlación espectral con la variación del cinturón de acoplamiento $W_f$ . . . . .	62
B.1	Las soluciones a las ecuaciones de Bessel se traducen a los modos de aceptación de la fibra. . . . .	VII

# 1

## Introducción

La luz ha fascinado al hombre desde los inicios de la historia y la voluntad de entender su comportamiento se remonta a los antiguos egipcios y mesopotamios, quienes desarrollaron por primera vez lentes, así como a los filósofos griegos, cuyas aportaciones se refieren a la concepción de la luz y la visión.

Es en el siglo XVII cuando se enfrentaron dos teorías que pretendían explicar la naturaleza de la luz. Por un lado, Christian Huygens escribió los *Tratados de luz* y, basado en observaciones sobre la reflexión y refracción de ésta, propuso una teoría bajo la cual la luz se propaga como un frente de ondas esféricas. Por otra parte, su contemporáneo, Issac Newton escribió *Óptica* y desarrolló la teoría corpuscular de la luz. En 1803, Young observó por primera vez interferencia de luz con el famoso experimento de la doble rendija, justificando la teoría desarrollada por Huygens y, de manera paralela, Fresnel estudió detalladamente propiedades ondulatorias de la luz como la difracción. Finalmente, en 1865, Maxwell le dio un sustento teórico firme a la teoría ondulatoria de la luz con la derivación de la ecuación de onda, lo que provocó que la teoría corpuscular de Newton dejara de ser considerada como válida.

Los años transcurrieron y, tras el desarrollo de la teoría electromagnética de Maxwell, que unificaba las inconsistencias entre corriente y fuerzas electromagnéticas, los científicos llegaron a creer que la física estaba completa. Sin embargo, aún algunos fenómenos carecían de explicación, entre ellos la "catástrofe del ultravioleta" y el efecto fotoeléctrico. En el año de 1901, Max Planck propuso una solución meramente matemática a la "catástrofe del ultravioleta", en la cual la radiación es absorbida y emitida en pequeños paquetes de energía o *quanta*. A Planck le disgustaba esta idea de los *quanta* de energía, pero la aceptó de manera temporal porque la solución al problema de radiación de cuerpo negro era inmejorable. Para la mala fortuna de Planck, y la buena fortuna del desarrollo de la física, en 1905, Albert Einstein mostró cómo la idea de partículas discretas de luz podía explicar el efecto fotoeléctrico y la presencia de una frecuencia característica para cada material, por debajo de la cual no se producía ningún efecto.

Se dio un choque muy fuerte al entendimiento de todas las teorías físicas desarrolladas hasta ese momento, que se basaban en el supuesto de la continuidad de todas las cadenas causales de conocimientos, desde que Leibnitz y Newton introdujeron el cálculo infinitesimal. Intervinieron, entonces, grandes personajes como Bohr, Schrödinger, Heisenberg, en el nacimiento de una nueva teoría que deja de lado casi todos los conceptos intuitivos desarrollados previamente, la famosa mecánica cuántica. Einstein estaba

en desacuerdo con algunos principios e implicaciones de la mecánica cuántica, entre ellos, el principio de incertidumbre, razón por la que propuso una serie de experimentos pensados (“Gedankenexperiment”), es decir, experimentos que a pesar de ser imposibles de realizar por limitaciones tecnológicas, siguen una lógica irrefutable.

La maravilla de la mecánica cuántica es que puntos de vista aparentemente contradictorios, como la localidad de fotón-partícula en la emisión y detección, y deslocalización en la propagación de campo (llamado dualidad onda-partícula), pueden coexistir.

La idea de manipular fotones individuales no surge inmediatamente de principios de la mecánica cuántica. Es hasta la década de 1960 cuando, principalmente impulsado por Glauber, se inician estudios para observar propiedades cuánticas específicas de la luz que carecieran de una explicación clásica. Además, a inicios de esta década, la invención del láser abre las puertas al estudio de la óptica cuántica experimental, pues permite manipular campos eléctricos muy intensos de luz coherente. Inició así el descubrimiento de procesos no lineales de la luz, en los que su frecuencia se ve afectada por la interacción con el material.

### 1.1 Motivación

A lo largo de este trabajo se tratará con fotones generados alrededor de los 1550 *nm* mediante SPDC, durante este proceso, un fotón del bombeo se convierte en dos fotones que conservan la energía y momento lineal del fotón incidente. En este caso, los fotones serán generados de manera no colineal y con la misma polarización, a este proceso se le conoce como SPDC-I. El proceso de conversión paramétrica descendente permite obtener grandes tasas de parejas de fotones correlacionados (fotones gemelos) y estos fotones gemelos pueden utilizarse como fuentes de fotones individuales anunciados. Una fuente de fotones individuales suficientemente brillante y confiable abriría las puertas a una gran cantidad de aplicaciones en la espectroscopía y la óptica cuántica.

Las técnicas de espectroscopía generalmente utilizan como fuente luz coherente proveniente de un láser, sin embargo, a pesar de que un láser estable genera pulsos de luz cuya amplitud puede considerarse constante a gran escala, simplemente por la gran cantidad de fotones que lo conforman, a pequeña escala, las fluctuaciones en el número de fotones emitidos no son insignificantes; entonces, la detección de señales de baja absorción se ve limitada por fluctuaciones en el número de fotones que inciden en la muestra. El bajo nivel de ruido de una fuente de fotones individuales sería muy valioso para detección de señales de baja absorción. Una fuente de fotones individuales perfecta junto con un sistema de detección perfecto daría entonces acceso a absorciones arbitrariamente pequeñas, imposibles de medir con una fuente láser dado el ruido [2].

La generación de números aleatorios resulta fundamental en varios niveles de procesamiento de información, desde métodos computacionales (simulaciones Monte Carlo, por ejemplo) hasta la criptografía en general. Han sido propuestos algunos generadores aleatorios cuánticos, uno de ellos, por Rarity y sus colaboradores [2], en el que se plantea una fuente de fotones individuales cuya emisión atraviesa un divisor de haz 50:50. Cada

fotón individual que proviene de la fuente de luz y atraviesa el divisor de haz tiene la misma probabilidad de ser reflejado o transmitido. La teoría cuántica predice que para cada fotón, cada camino elegido es puramente aleatorio e independiente de la historia u orden de los parámetros experimentales.

Como es sabido, la red de comunicaciones actual opera en el infrarrojo, específicamente en las zonas de menos pérdidas por absorción y dispersión en fibras ópticas. Para satisfacer esta creciente demanda de transporte de información en mayores cantidades y más rápido, una fuente que emita pares de fotones alrededor de los 1550 *nm* podría ser aplicada. Actualmente, las tecnologías de la información se desarrollan velozmente buscando eficiencia y rapidez. Una de ellas es la información cuántica, para la cual la mecánica cuántica ofrece poderosos esquemas que no pueden encontrarse en la mecánica clásica. La unidad fundamental en la información cuántica son los *qubits*, que consisten en sistemas de dos niveles que pueden prepararse en una superposición coherente de sus eigenestados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ , es decir, un *qubit* se refiere al estado de una partícula cuántica dado por:  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . La medición de dicha partícula colapsa el estado inicial en cualquiera de sus eigenestados, con probabilidad  $|\alpha|^2$  y  $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$ . El poder de la información cuántica radica en la superposición de estados cuánticos, lo que permite  $2^n$  operaciones simultáneas, considerando a  $n$  como el número de *qubits*.

Otra aplicación atractiva es la criptografía cuántica, y de manera más precisa, distribución de llaves cuánticas. En este caso, la caracterización bien definida del estado de un fotón individual es explotada para detectar y contrarrestar el "espionaje" (intercepción de la información) al transmitir la llave secreta entre dos partes, que pueden usar después para encriptar.

En el amplio campo de la computación cuántica, teleportación y redes, los fotones son los candidatos principales para cargar con información cuántica, ya que son, en principio, idénticos e indistinguibles, y están poco acoplados al ambiente. Ya que los fotones son partículas que se propagan, pueden transmitir la información. Si, además, el cómputo cuántico puede llevarse a cabo en los fotones, ellos pueden servir como "*qubits* voladores", lo que puede simplificar de manera considerable la arquitectura del procesamiento de información.

El uso de fotones individuales como portadores de *qubits* en información cuántica requiere que estén hechos para interactuar de manera coherente y controlada. Diversos protocolos de comunicación y computación cuántica se basan en la interferencia de fotones provenientes de fuentes independientes, efecto que presentará una visibilidad óptima sólo si los fotones son indistinguibles, estando en estados cuánticamente puros.

Además, se debe tener mucho cuidado para asegurar que la no distinguibilidad de la información esté contenida en los fotones que interfieren, de tal forma que no sea posible rastrear su origen [3].



## 1.2 Problema y objetivo

En virtud de la creciente necesidad de fuentes de fotones individuales, es necesaria la generación de fotones con estados cuánticos factorizables. Un paso previo es la generación de fotones cuyos estados tengan correlación espectral nula. En esta tesis, se tiene como objetivo mostrar la manipulación experimental de la correlación espectral de fotones generados en la región espectral de telecomunicaciones, mediante el proceso de SPDC tipo I, en un cristal de  $\beta$ -borato de bario. El análisis de la correlación espectral se realiza tras la medición de la distribución de intensidad espectral del estado de los fotones generados (JSI por sus siglas en inglés), para distintas configuraciones del haz de bombeo, cristal y acoplamiento a fibra. Dicha distribución es descrita por la función  $|F(\omega_s, \omega_i)|^2$ , que indica la probabilidad de que sea generada una pareja de fotones con frecuencias  $\omega_s$  y  $\omega_i$ .

### 1.2.1 Objetivos específicos

1. Detección de los fotones generados en el régimen de  $1550nm$  mediante APDs (por sus siglas en inglés *Avalanche Photo Diode*) de InGaAs en modo *gating*. El modo *gating* implica el disparo de compuertas para la detección de los fotones generados.
2. Medición de la distribución de la función de intensidad espectral, haciendo uso de un *time tagger* TDC id800. Mediante este aparato es posible conocer los tiempos de arribo de todos los fotones detectados, por lo que resulta necesario:
  - (a) Sincronizar la señal de detección de cada pareja de fotones generados al llegar al *time tagger* TDC id800.
  - (b) Establecer un criterio de coincidencias para discriminar entre la detección de una pareja de fotones gemelos y la detección de fotones individuales en cada APD.
  - (c) Asignar al tiempo de arribo de cada fotón  $t_\mu$ , la frecuencia  $\omega_\mu$  correspondiente.
3. Caracterización cuantitativa del grado de correlación de la distribución de la función de intensidad espectral mediante el cálculo del coeficiente de correlación y el número de Schmidt [4] de cada estado medido.
4. Comprobación experimental de la dependencia de la correlación espectral de la JSI medida con los parámetros del haz de bombeo, cristal y cinturones de acoplamiento. Dicha dependencia debe estar en concordancia con las condiciones obtenidas mediante el método de *Group Velocity Matching (GVM)* y las desarrolladas en el trabajo [1], pues resulta claro que los parámetros que determinan la factorabilidad del estado determinan también su grado de correlación espectral.

## 1.3 Estructura de la tesis

La presente tesis ha sido estructurada de la siguiente manera:

El capítulo 2 presenta las herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo y obtención del estado cuántico del proceso de conversión paramétrica descendente (SPDC), mediante el cual son generados los fotones en el desarrollo experimental. Se parte de las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de onda para describir especialmente la propagación de la luz, deduciendo las propiedades de un haz Gaussiano. Posteriormente se hace un recuento de procesos no lineales de segundo orden y se describe la cuantización de campo. Finalmente, se habla brevemente de las propiedades estadísticas de la luz, haciendo hincapié en las funciones de correlación. Las propiedades descritas en este capítulo resultan herramientas fundamentales en los desarrollos del capítulo 3.

En el capítulo 3 se describe el proceso de SPDC. Se discuten las propiedades de empatamiento de fases, o también conocidas como *phasematching*, que involucran tanto la conservación de energía como de momento. Posteriormente se deriva el estado cuántico de SPDC mediante el cálculo de la función de amplitud conjunta en término de los vectores de onda, y se analiza brevemente su estructura. A partir del estado calculado, se hace un análisis de la obtención de estados factorizables; primeramente, se describe el método de empatamiento de velocidad de grupo *group velocity matching (GVM)* y, posteriormente, se obtienen las condiciones de factorabilidad para dicho estado de acuerdo al trabajo de [1]. Se desarrolla brevemente cálculo referente al acoplamiento a fibra del estado.

En el capítulo 4 se hace un análisis de la estructura de la función de intensidad espectral conjunta (*joint spectral intensity (JSI)*), haciendo uso de las simulaciones desarrolladas previamente por Pablo Daniel Yepiz Graciano y Karina Garay Palmett. A partir de este análisis, se muestra que la manipulación de parámetros del bombeo y el acoplamiento a fibra óptica resulta en cambios de la correlación espectral en dicha función.

El capítulo 5 está dedicado totalmente al experimento: primero, se describe de manera detallada el montaje experimental; a continuación, se describe la calibración del espectrómetro de fibra utilizado y se muestra la caracterización de los cinturones del haz de bombeo y de acoplamiento utilizados en las mediciones presentadas. Este segundo punto resulta importante ya que ambos parámetros son determinantes en la correlación espectral del estado medido. Posteriormente se describe de manera completa el sistema de detección y se presentan diagramas que muestran la sincronización de pulsos y compuertas de detección para la medición de la JSI. Se presentan las mediciones realizadas para distintos estados, de acuerdo con la variación de uno o varios parámetros de la fuente.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.



# 2

## Bases teóricas

Las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento de los fenómenos electromagnéticos, y establecen que, para un campo eléctrico  $\vec{E}$  y un campo magnético  $\vec{H}$  en el espacio libre:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde  $\epsilon_0$  representa la permitividad eléctrica y  $\mu_0$  la permitividad magnética en el espacio libre. Para analizar el comportamiento de la luz, es posible resumirlas en la ecuación (2.2), conocida como *ecuación de onda*, que describe la propagación de una onda electromagnética en un medio [5]

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0\tag{2.2}$$

Una solución para el campo electromagnético  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  es de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0[\alpha(\vec{r}, t)e^{i\omega t} + \alpha^*(\vec{r}, t)e^{-i\omega t}]\hat{\epsilon}(\vec{r}, t)\tag{2.3}$$

donde  $\omega = 2\pi\nu$  es la frecuencia angular y  $\nu$  representa la frecuencia de la luz en Hz. El término  $\hat{\epsilon}(\vec{r}, t)$  representa la polarización del campo  $\vec{E}$  y se refiere a la orientación del campo eléctrico en el plano tangencial al frente de ondas local. Por su parte, el término  $\alpha(\vec{r}, t)$  corresponde a la amplitud del campo y satisface

$$\alpha(\vec{r}, t) = \alpha_0(\vec{r}, t)e^{i\phi(\vec{r}, t)}\tag{2.4}$$

Aquí,  $\alpha_0(\vec{r}, t)$  es la magnitud de la amplitud, que varía en el tiempo para luz modulada o pulsada, mientras que  $e^{i\phi(\vec{r}, t)}$  es la fase y describe la dirección y forma (o distribución espacial) del frente de ondas.

Si el campo electromagnético a analizar es una onda plana con amplitud constante, entonces  $\phi(\vec{r}) = -\vec{k} \cdot \vec{r}$ , donde  $\vec{k}$  representa el vector de onda. Si además se fija su dirección de propagación al eje  $\hat{z}$ , entonces se tiene que

$$\alpha(\vec{r}, t) = \alpha_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{z}}\tag{2.5}$$

Si se considera una polarización lineal, es decir,  $\hat{\epsilon}(\vec{r}, t)$  con una dirección fija respecto a  $\vec{k}$ , entonces, la componente espacial del campo eléctrico puede escribirse como

$$\vec{E}(r) = \alpha(r)e^{-ikz} \quad (2.6)$$

Dada la dependencia armónica del campo eléctrico  $\vec{E}$ , a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.1) se obtiene la ecuación de Helmholtz [5], siendo totalmente equivalente a la ecuación de onda (2.2).

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{E} = 0 \quad (2.7)$$

## 2.1 Haz Gaussiano

En el proceso de SPDC-I, cuyo análisis matemático se realiza en el capítulo 3, un haz láser incide sobre un cristal no lineal de segundo orden, lo que provoca la generación de parejas de fotones bajo condiciones de conservación de energía y momento lineal. Debido a la coherencia del haz de bombeo, este puede ser tratado como luz clásica [6]. De acuerdo con las suposiciones realizadas a lo largo de este capítulo, se ha considerado la propagación de la luz sin una distribución espacial, pero haces de luz de este tipo resultan meramente teóricos. Se considera entonces que el haz de luz a estudiar tiene una distribución espacial circular alrededor de su eje óptico y, dado que se propaga en la dirección del eje  $\hat{z}$ , satisface que  $r^2 = x^2 + y^2$ . La solución a dichas condiciones es el haz gaussiano y su estudio resulta particularmente útil en este trabajo ya que se trata de una buena representación de un haz láser. La luz láser es generada dentro de una cavidad construida con espejos, mediante interferencia múltiple de ondas y amplificación simultánea, este proceso propicia una distribución de campo estable y bien definida dentro de la cavidad, conocida como modo de la cavidad [7]. El haz que se propaga libremente en el espacio es una extensión de dicho campo interno.

Sustituyendo (2.6) en (2.7) se obtiene que

$$(\nabla^2 + k^2)\vec{E} = (\nabla^2\alpha)e^{-ikz} - 2ik\frac{\partial\alpha}{\partial z}e^{-ikz}$$

Se realiza una aproximación paraxial, bajo la cual se considera que la variación en la propagación del campo es pequeña respecto a la longitud de onda  $\lambda$  y a su extensión transversal, y queda matemáticamente escrito como

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} \ll 2k\frac{\partial\alpha}{\partial z} \quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2} \ll \left| \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} \right| \left| \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} \right| \quad (2.8)$$

De aquí se obtiene la ecuación de onda paraxial

$$\left( \nabla_T^2 - 2ik\frac{\partial}{\partial z} \right) \alpha = 0 \quad (2.9)$$

donde  $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Como se mencionó anteriormente, para el haz gaussiano se supone simetría cilíndrica. Se supone también que la solución de la ecuación paraxial tiene la forma

$$\alpha(r) \propto e^{i\left[P(z) + \frac{kr^2}{2q(z)}\right]} \quad (2.10)$$

$P(z)$  y  $q(z)$  representan funciones de  $z$ . Sustituyendo (2.10) en (2.9) en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\left(\frac{k^2\alpha}{q^2(z)} + \frac{k^2}{q^2(z)} \frac{dq(z)}{dz}\right) r^2 + \left(-\frac{2ik}{q(z)}\alpha_0 - 2k \frac{dP(z)}{dz}\alpha_0\right) = 0$$

La igualdad debe de satisfacerse para todo  $r$ , entonces, resolviendo para cada término se obtienen las siguientes condiciones

$$q(z) = q_0 + z \quad \frac{dP(z)}{dz} = -\frac{i}{q(z)} \quad (2.11)$$

Analizando el comportamiento de  $q_0$  se observa que este valor no puede ser real [8], por lo que se establece que  $q(z) = z + iz_R$ , de donde se obtiene  $iP(z) = \ln\left(1 + i\frac{z}{z_R}\right)$ . La cantidad  $q(z)$  se conoce como *parámetro  $q$*  del haz y el parámetro  $z_R$  es llamado rango de Rayleigh. Sustituyendo en (2.10) se obtiene finalmente una expresión para el haz gaussiano

$$\alpha(r) = \frac{\alpha_0}{q(z)} e^{-\frac{ikr^2}{2q(z)}} \quad (2.12)$$

Para separar la amplitud y la fase de esta envolvente compleja, se reescribe el *parámetro  $q$*  como  $\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$ . El tamaño del haz está dado por  $W(z)$ , y su ancho es mínimo para  $z = 0$ , es decir, el cinturón del haz se encuentra en  $W_0$ ; el radio de curvatura es descrito por el parámetro  $R(z)$ .

$$\begin{aligned} W(z) &= W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \\ W_0 &= \sqrt{\frac{\lambda_0 z_R}{n\pi}} \\ R(z) &= z \left(1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Con estos parámetros es posible realizar una descripción completa de un haz gaussiano. La intensidad del haz se obtiene al tomar la raíz de la amplitud compleja.

$$I(r, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 e^{\left(\frac{-2\rho^2}{W^2(z)}\right)} \quad (2.14)$$

Nótese que  $z_R$  describe el punto donde la intensidad del eje ha decaído a la mitad del valor de la intensidad en el cinturón, es decir,  $I(0, z_0) = \frac{1}{2}I_0$  y el cinturón del haz ha

incrementado en un factor de  $\sqrt{2}$ . La intensidad en un plano específico resulta una función gaussiana de la distancia radial  $r$ , razón por la que este tipo de haces son llamados gaussianos.

## 2.2 Procesos no lineales de segundo orden

Los materiales de interés en la óptica se pueden pensar como una colección de partículas cargadas: núcleos de iones y electrones. Cuando un campo eléctrico es aplicado a estos, las cargas se desplazan; las cargas positivas tienden a moverse en la dirección del campo, mientras que las negativas se mueven en dirección opuesta. En materiales conductores, parte de las partículas cargadas es libre de moverse a través del material mientras el campo eléctrico es aplicado, dando lugar a una corriente. Por su parte, en los materiales dieléctricos, las cargas están ligadas con cierta “elasticidad”. Entonces, cuando se aplica un campo, las cargas son desplazadas ligeramente de sus posiciones usuales y este movimiento resulta en una colección de momentos dipolares inducidos. En otras palabras, el efecto del campo sobre un medio dieléctrico es inducir una polarización. Cuando la intensidad del campo incidente es mucho menor que la intensidad que liga el electrón al átomo, el efecto de la polarización será proporcional al campo incidente, dando lugar a un efecto lineal:

$$P = \chi^{(1)}E \quad (2.15)$$

El campo electromagnético de un láser que incide sobre un material genera polarización eléctrica. Dicha polarización macroscópica, inducida por un campo eléctrico externo  $E$ , puede escribirse de acuerdo con la siguiente expresión [9]:

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}EE + \chi^{(3)}EEE + \dots + \chi^{(n)}E^n + \dots \quad (2.16)$$

Aquí,  $\chi^{(1)}$ ,  $\chi^{(2)}$ ,  $\chi^{(3)}$  corresponden a las susceptibilidades ópticas no lineales de primer, segundo y tercer orden.

En el caso de SPDC (*Spontaneous Parametric Down Conversion*), el medio no lineal donde ocurre la generación de parejas de fotones es de segundo orden, por lo que las componentes de la polarización de orden 3 o mayor pueden despreciarse. En este caso, resulta útil definir el siguiente vector [9]

$$d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)} \quad (2.17)$$

El factor  $\frac{1}{2}$  es consecuencia de una convención histórica. En procesos no lineales de segundo orden, la componente  $i$  de la polarización no lineal,  $P_i$ , puede expresarse de acuerdo con la ecuación (2.18) en la que  $E$  representa la componente del campo eléctrico con frecuencia  $\omega$  en las direcciones  $i, j, k$  y  $\omega_1, \omega_2$  las frecuencias de los fotones generados.

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \epsilon_0 \sum_{jk} \sum_{(nm)} 2d_{ijk}E_j(\omega_n)E_k(\omega_m) \quad (2.18)$$

Existe un resultado conocido como simetría de Kleinman que se satisface para el caso en el que las frecuencias  $\omega_1, \omega_2$  son mucho menores a la frecuencia de resonancia del material donde sucede el proceso no lineal. Con estas condiciones puede considerarse que la susceptibilidad no lineal es independiente de la frecuencia  $\omega$  del campo y que el medio no tiene pérdidas, es decir, no hay dispersión de energía debido a la susceptibilidad. Entonces, todos los componentes de  $\chi_{ijk}^{(2)}$  son reales y se cumple que

$$\begin{aligned}\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \\ \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2)\end{aligned}\quad (2.19)$$

Sin embargo, se mencionó que  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)$  es independiente de  $\omega_i$ , por lo que es válido permutar los índices  $i, j, k$  sin permutar las frecuencias, obteniendo

$$\begin{aligned}\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)\end{aligned}\quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) es conocida como simetría de Kleinman y, para el caso degenerado del proceso de SPDC, permite suponer que  $d_{ijk}$  es simétrica en los últimos dos índices [9]. Se simplifica la notación introduciendo la matriz contraída  $d_{il}$  de acuerdo con lo siguiente:

$$\begin{array}{l}jk : \quad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 23, 32 \quad 31, 13 \quad 12, 21 \\ l : \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\end{array}\quad (2.21)$$

El tensor de susceptibilidad no lineal puede ser representado por una matriz de  $3 \times 6$

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}\quad (2.22)$$

Si ahora se cumple que los índices  $d_{ijk}$  pueden permutarse libremente, se observa que no todos los elementos de  $d_{il}$  son independientes. Por ejemplo, se tiene que

$$d_{12} \equiv d_{122} \equiv d_{212} \equiv d_{26}\quad (2.23)$$

y que

$$d_{14} \equiv d_{123} \equiv d_{213} \equiv d_{25}\quad (2.24)$$

Aplicando este tipo de argumentos de manera sistemática, se cumple que  $d_{il}$  tiene sólo 10 elementos independientes; la forma de  $d_{il}$  bajo esta condición es entonces

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{bmatrix}\quad (2.25)$$

Para el caso degenerado de SPDC, se puede describir la polarización no lineal en procesos de suma de frecuencia ( $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ ) como la ecuación:



$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} P_x(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \\ P_z(\omega_3) \end{bmatrix} &= 4\epsilon_0 \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix} \\
 &\times \begin{bmatrix} E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \end{bmatrix} \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Para una geometría fija, por ejemplo, direcciones de propagación y polarización fijas, es posible expresar la polarización no lineal de un proceso de generación de suma de frecuencias por la siguiente relación escalar:

$$P(\omega_3) = 4\epsilon_0 d_{eff} E(\omega_1)E(\omega_2) \quad (2.27)$$

donde  $E(\omega) = |\vec{E}(\omega)|$  y  $P(\omega) = |\vec{P}(\omega)|$ . En este caso,  $d_{eff}$  se obtiene tras determinar de manera explícita  $\vec{P}$  utilizando las ecuaciones (2.25) o (2.26). Una fórmula general para calcular  $d_{eff}$  para cada clase de cristal se presenta en [10].

## 2.3 Modelos cuánticos de la luz

Para el proceso de SPDC los fotones generados deben de ser descritos cuánticamente. Un modo del campo electromagnético, caracterizado por el vector de onda  $\vec{k}$ , la frecuencia angular  $\omega_k$  y polarización  $\epsilon_k$  perpendicular a  $\vec{k}$ , que se encuentra en una cavidad de volumen  $L^3$ , puede cuantizarse directamente como un oscilador armónico. Los operadores de creación y aniquilación,  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  respectivamente, crean o aniquilan un fotón en cada modo. El campo eléctrico en la posición  $\vec{r}$  se convierte entonces en un operador, que puede escribirse como la suma de dos términos conjugados hermitianos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{(-)}(\vec{r}) + \vec{E}^{(+)}(\vec{r}) \quad (2.28)$$

Al incluir la dependencia temporal de acuerdo al panorama de Heisenberg, el operador de campo queda como [11]

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}) = i \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{\epsilon} \hat{a}^\dagger e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \quad (2.29)$$

La descripción cuántica de los fotones generados, junto con las consideraciones del tipo proceso no lineal y las características del bombeo permiten el cálculo del estado de los fotones generados, que se presenta a detalle en el capítulo 3. Una de las características más importantes de los estados cuánticos es la superposición de estados. Un estado

factorizable corresponde a aquel en el cual sus componentes pueden ser factorizadas y reescritas como la multiplicación de dos estados independientes.

Para el proceso de SPDC es evidente que al estudiar el estado de los fotones generados, se estará tratando con un sistema bipartito.

### 2.3.1 Descomposición de Schmidt

Para los sistemas bipartitos la descomposición de Schmidt proporciona un criterio para determinar si un estado puro del sistema es separable o entrelazado, sin embargo, no corresponde a una medida precisa del grado de entrelazamiento.

En el caso de un sistema cuántico compuesto por dos subsistemas A y B, el espacio de Hilbert para el sistema compuesto es el producto tensorial  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ . Para un estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  de este sistema, existe un par de bases ortonormales  $|n^A\rangle$  y  $|n^B\rangle$  a partir de las cuales es posible obtener un operador de densidad reducido del sistema A, tomando la traza parcial del operador de densidad total  $\hat{\rho}$  con respecto al sistema B [4]:

$$\hat{\rho}^A = \sum_n^B \langle n^B | \rho | n^B \rangle = Tr_B(\rho) \quad (2.30)$$

Si es posible factorizar el vector de estado del sistema compuesto  $A + B$ , como un producto de vectores estado individuales de los sistemas A y B,  $|\Psi\rangle = |\Psi^A\rangle \otimes |\Psi^B\rangle$ , entonces  $\hat{\rho}^A$  se reduce a la matriz de densidad del sistema A en estado puro  $|\Psi^A\rangle$ . Por otro lado, el estado del sistema compuesto que no es factorizable  $|\Psi\rangle \neq |\Psi^A\rangle \otimes |\Psi^B\rangle$  es llamado estado entrelazado.

Es posible sin embargo, realizar una descomposición de Schmidt y encontrar bases ortonormales  $\{|\Psi_i^A\rangle\}$  para A y  $\{|\Psi_i^B\rangle\}$  para B de manera que se expanda  $\{|\Psi\rangle\}$  como:

$$|\Psi\rangle = \sum_i s_i |\Psi_i^A\rangle \otimes |\Psi_i^B\rangle \quad (2.31)$$

Por consiguiente, la matriz reducida del sistema A en esta base es diagonal,

$$\hat{\rho}_{ii}^A = \sum_i |\Psi_i^A\rangle \langle \Psi_i^A| \quad (2.32)$$

es decir,  $|\Psi_i^A\rangle$  son eigenestados de  $\hat{\rho}^A$  con eigenvalores  $p_i = s_i^2$ . El número de eigenvalores diferentes de cero es llamado número de Schmidt, el cual de ser mayor a uno implica un estado compuesto entrelazado.

## 2.4 Funciones de correlación

Las funciones de correlación se han convertido en una herramienta estándar en experimentos de óptica cuántica para estudiar las propiedades de haces láser, fuentes de conversión paramétrica descendente o fotones individuales anunciados [12].

El concepto de funciones de correlación parte de la idea de dos haces de luz iguales que inciden en un divisor de haz y al salir son superpuestos de manera lineal y, además, a uno de ellos se le añade un tiempo de retraso  $\tau$ . Esta interferencia entre las ondas resulta en una modulación de la fotocorriente como función de la diferencia de camino. La coherencia temporal clásica de la luz se cuantifica mediante la función de correlación de primer orden  $g^{(1)}(\tau)$ , definida como

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle |E(t)|^2 \rangle} \quad (2.33)$$

Las correlaciones de mediciones de intensidad, en lugar de campo, se ven reflejadas en el grado de coherencia de segundo orden  $g^{(2)}$ , que se define como

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle E^*(t)E^*(t+\tau)E(t)E(t+\tau) \rangle}{\langle |E(t)|^2 \rangle \langle |E(t+\tau)|^2 \rangle} \quad (2.34)$$

Mientras que la función de correlación de primer grado  $g^{(1)}(\tau)$  está acotada entre los valores 0 y 1, la función  $g^{(2)}(\tau)$  no tiene cota superior.

La medición de la función de correlación es en general resuelta temporalmente  $g^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ . En el marco teórico cuántico los campos transmitidos y reflejados a la salida del divisor de haz son tratados como operadores cuánticos, entonces

$$g^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = \frac{\langle \hat{E}^{(+)}(t_1) \dots \hat{E}^{(+)}(t_n) \hat{E}^{(-)}(t_1) \hat{E}^{(-)}(t_n) \rangle}{\langle \hat{E}^{(+)}(t_1) \hat{E}^{(-)}(t_1) \rangle \dots \langle \hat{E}^{(+)}(t_n) \hat{E}^{(-)}(t_n) \rangle} \quad (2.35)$$

Dado que a lo largo de este trabajo se tratará con detectores de fotones, resulta conveniente modelar el proceso de fotodetección, en el que se manejan probabilidades de detección proporcionales a la eficiencia del detector y la intensidad promedio del campo que alcanza al detector. Si se denota como  $P_T$  a la probabilidad de detección de uno de los fotones transmitidos a través del divisor de haz,  $P_R$  uno de los reflejados y  $P_{TR}$  a la probabilidad conjunta de obtener una fotodetección en de un fotón reflejado y uno transmitido, resulta que la función de correlación de segundo orden satisface [13]

$$g_{T,R}^{(2)}(\tau) = \frac{P_{TR}(\tau)}{P_T P_R} \quad (2.36)$$

Sea cualquiera de las dos definiciones de función de correlación de segundo orden que se utilice, dadas en las ecuaciones (2.34) y (2.36), para campos clásicos se satisface que

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0), \quad g^{(2)}(0) \geq 1 \quad (2.37)$$

Para una onda perfectamente estable, es decir, con varianza cero, se tendría que  $g^{(2)}(\tau) = 1$  para todo  $\tau$ . El análogo a un campo estable clásico en la teoría cuántica corresponde a un estado coherente  $|\alpha\rangle$ , que es eigenestado del operador de aniquilación es decir, satisface que  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ , para el que se satisface  $g^{(2)}(0) = 1$ .

Para luz caótica, por ejemplo, luz proveniente de una fuente térmica, se puede mostrar que  $g^{(2)}(0) = 2$  [14]. Es interesante mencionar que si se hacen las consideraciones

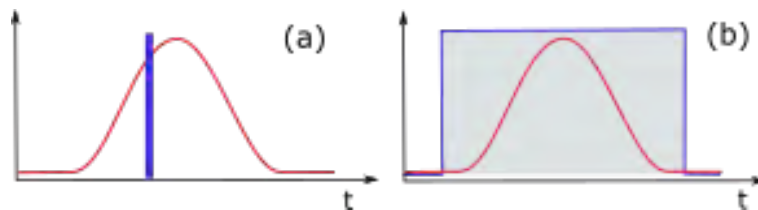
para una fuente de luz térmica en el régimen cuántico se obtiene que  $g^{(2)}(0) = 2$ , y dicho estado se le conoce como "bunched" por que los fotones tienden a acomodarse en montones (del inglés *bunches*) y cuando unos son transmitidos y otros reflejados mantienen una correlación positiva.

A pesar de dichas congruencias con la teoría clásica, para un estado de un solo fotón con eigenvalor 1:  $\hat{n}|1\rangle = 1|1\rangle$  se obtiene  $g^{(2)}(0) = 0$ , que viola la igualdad clásica  $g^{(2)}(0) \geq 1$  descrita en la ecuación (2.37) [13].

Si la fuente de luz estudiada es pulsada, como es el caso de este trabajo, y los fotodetectores utilizados exhiben ventanas de detección planas que exhiben el ancho de los pulsos investigados, de acuerdo con la ecuación (2.35) se cumple que [15]

$$g^{(n)} = \frac{\int dt_1 \dots dt_n \langle \hat{E}^{(+)}(t_1) \dots \hat{E}^{(+)}(t_n) \hat{E}^{(-)}(t_1) \hat{E}^{(-)}(t_n) \rangle}{\langle \int dt_1 \hat{E}^{(+)}(t_1) \hat{E}^{(-)}(t_1) \rangle \dots \int dt_n \langle \hat{E}^{(+)}(t_n) \hat{E}^{(-)}(t_n) \rangle} \quad (2.38)$$

La ecuación (2.38) presenta la ventaja de ser independiente del tiempo y representa la función de correlación de ancho de banda multimodal generalizada. A pesar de su similitud con las funciones de correlación comunes, como la definida en la ecuación (2.35), la función de correlación de ancho de banda multimodal generalizada descrita en (2.38) no debe considerarse una función general de correlación de orden  $n$ . La diferencia entre las mediciones de correlación integrada temporalmente y resuelta temporalmente se muestra en la figura 2.1



**Figura 2.1:** (a) Detección resuelta temporalmente de manera perfecta. (b) El ancho de banda en la compuerta de detección excede la duración del pulso, lo que da lugar a mediciones de distintos tipos de correlación [15].

La ecuación (2.38) puede adecuarse al análisis de los fotones generados mediante SPDC realizado en este trabajo si se reemplazan los operadores de campo por operadores de creación y aniquilación y se aplica una transformada de Fourier que pase del espacio de tiempos al de frecuencias, con lo que se obtiene

$$g^{(n)} = \frac{\int d\omega_1 \dots d\omega_n \langle \hat{a}^\dagger(\omega_1) \dots \hat{a}^\dagger(\omega_n) \hat{a}(\omega_1) \hat{a}(\omega_n) \rangle}{\langle \int d\omega_1 \hat{a}^\dagger(\omega_1) \hat{a}(\omega_1) \rangle \dots \int d\omega_n \langle \hat{a}^\dagger(\omega_n) \hat{a}(\omega_n) \rangle} \quad (2.39)$$

El número de Schmidt  $K$  de un estado puede obtenerse tras la medición de la función de correlación  $g^{(2)}$  de ancho de banda multimodal. En el régimen de baja ganancia correspondiente a estados fotónicos generalmente en el contexto de conversión paramétrica descendente se satisface que [15]

$$g^{(2)} = 1 + \frac{1}{K} \tag{2.40}$$

Para un estado factorizable se satisface que  $K = 1$ , lo que implica  $g^{(2)} = 2$ , mientras que para  $K \gg 1$ ,  $g^{(2)}$  se aproxima a uno. Un análisis de la función de correlación desde el punto de vista de número de fotones permite concluir que  $g^{(2)} = 2$  para un estado comprimido de una pareja de fotones, que exhibe una distribución de luz térmica. Por el contrario, si hay mas estados comprimidos, el detector no puede distinguir entre las diferentes distribuciones térmicas, es decir, mide una convolución de los distintas fuentes térmicas de fotones, lo que da una distribución Poissoniana del número de fotones.

# 3

## Teoría para el SPDC y la obtención de estados factorizables

El proceso de conversión paramétrica descendente espontánea SPDC, en términos generales, consiste en hacer incidir un haz de luz (bombeo) a un cristal con propiedades ópticas no lineales de segundo orden; cada fotón individual que compone al bombeo está caracterizado por una frecuencia angular  $\omega_p$  y un vector de onda  $k_p$  y para cada uno de ellos existe una probabilidad de decaer en dos fotones, llamados señal y acompañante, con frecuencias angulares  $\omega_s, \omega_i$  (i de idler, acompañante en inglés) y vectores de onda  $k_s, k_i$  respectivamente. Dicho fenómeno es un proceso cuántico.

Las condiciones para que este decaimiento sea posible en un medio homogéneo [16] son la conservación de la energía.

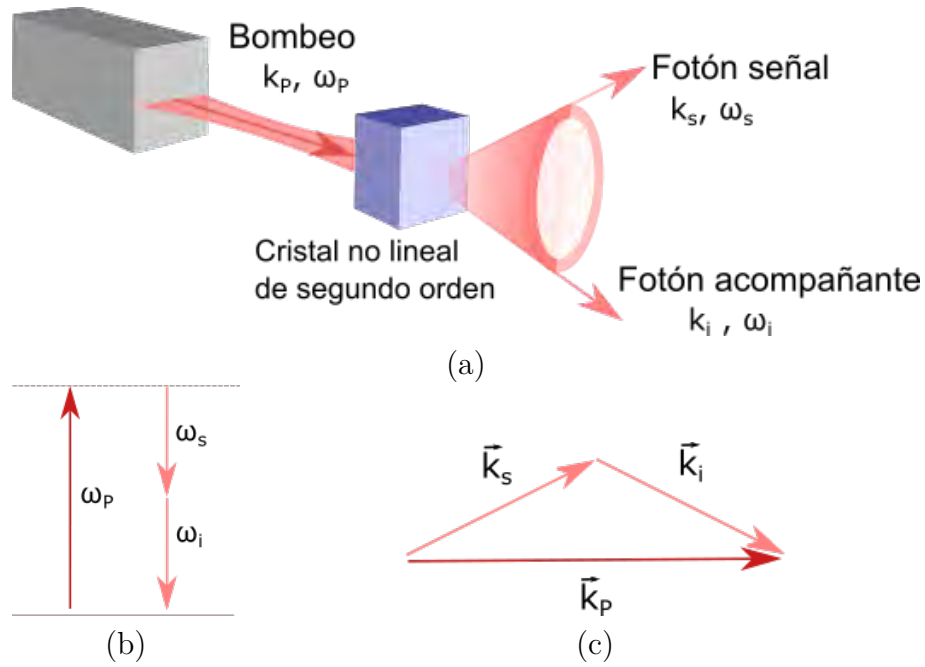
$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (3.1)$$

y la conservación de momento lineal, también conocida como empatamiento de fases o *phase matching*.

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i \quad (3.2)$$

Un caso particular es el degenerado, en el que la generación de fotones satisface  $\omega_s = \omega_i = \frac{\omega_p}{2} = \omega_0$ . Este proceso puede ser colineal, es decir, los fotones generados son emitidos de manera paralela al bombeo, o no colineal. En la figura 3.1 se esquematiza de manera simple el proceso de SPDC tipo I no colineal, así como las condiciones de *phase matching*.

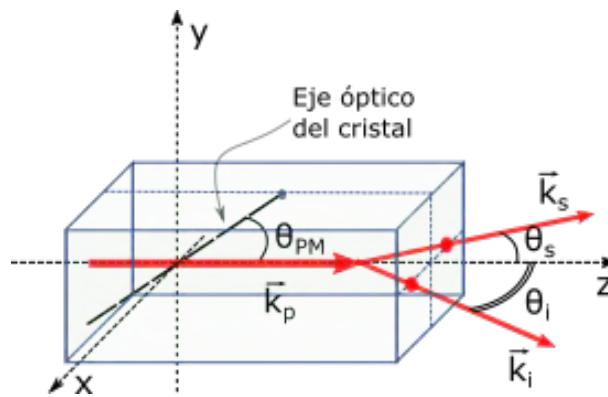
Todos los cristales no lineales presentan birrefringencia y ésta puede ser uniaxial o biaxial. En este trabajo se tratará con un cristal uniaxial, es decir, que tiene dos índices de refracción: el índice de refracción ordinario  $n_o$  y el índice de refracción extraordinario  $n_e$ . Se conocen como cristales negativos a aquellos que satisfacen  $n_o > n_e$  y positivos a aquellos para los que  $n_e > n_o$ . El eje del cristal se refiere a la dirección en la que están dispuestos los átomos de manera simétrica, la luz que incide con una polarización lineal perpendicular al plano donde se encuentra el eje del cristal se conoce como luz ordinaria y se asocia al índice de refracción  $n_o$ . Por su parte, si la polarización de la luz es paralela al plano que contiene al eje del cristal se le conoce como haz extraordinario y se asocia a  $n_e$ .



**Figura 3.1:** (a) Representación de la generación de fotones mediante SPDC tipo I, que debe satisfacer las condiciones de *phase matching* representadas en (b), conservación de energía, y en (c), conservación de momento.

El ángulo entre el eje del cristal y el vector de onda del bombeo para el que se satisfacen las condiciones de *phasematching* se conoce como ángulo de *phase matching* ( $\theta_{pm}$ ) y controla las frecuencias angulares y ángulos de emisión de los fotones generados.

En este trabajo se utiliza un cristal de  $\beta$ - Borato de Bario (BBO), un cristal uniaxial negativo que genera fotones mediante el proceso de SPDC tipo I no colineal. El ángulo de *phase matching* del cristal es de  $20.3^\circ$



**Figura 3.2:** Representación geométrica del proceso de SPDC-I [17].

### 3.1 Estado cuántico para SPDC

El desarrollo de la teoría cuántica del proceso de SPDC se deriva de la descripción clásica de interacciones no lineales y posteriormente la cuantización del campo. Como se mencionó en la sección 2.2, en procesos ópticos no lineales se satisface la ecuación (2.16) entonces, las interacciones hasta segundo orden de un medio óptico no centrosimétrico con un campo electromagnético  $\vec{E}$  que se propaga en él, se describe con las componentes de la polarización.

$$P_i(r, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty dt' \chi_{ijk}^{(1)}(t') E_j(r, t - t') + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(r, t - t') E_k(r, t - t'') \quad (3.3)$$

Al incrementar la intensidad de  $\vec{E}$ , por ejemplo haciendo uso de un láser, se incrementan los términos no lineales de la polarización. Sin embargo, para campos eléctricos débiles, estos términos son despreciables.

Para cuantizar el campo, se parte del hamiltoniano clásico del campo electromagnético [16]

$$H_{EM} = \frac{1}{2} \int_V dr (\vec{D}\vec{E} + \vec{B}\vec{H}) \quad (3.4)$$

Donde  $V$  corresponde al volumen del medio dieléctrico. Se tiene que  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , lo que permite reescribir el hamiltoniano como una suma de los coeficientes lineales y no lineales  $H_{EM} = H_L + H_{NL}$ , entonces

$$\begin{aligned} H_{NL} &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V dr \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_i(r, t) E_j(r, t - t') E_k(r, t - t'') \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V dr \chi_{ijk}^{(2)} E_i(r, t) E_j(r, t) E_k(r, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dado que  $\chi_{ijk}^{(2)}$  depende de las frecuencias  $\omega_P, \omega_s$  y  $\omega_i$  y además, es posible escribir los vectores de onda en términos de las mismas, resulta más sencillo analizar la ecuación (3.5) escrita para los vectores de onda

$$H_{NL} = \frac{1}{2 (\sqrt{2\pi})^3} \epsilon_0 \int_V dr \int d^3k \left( \chi_{ijk}^{(2)}(\omega(k_p), \omega(k_s), \omega(k_i)) E_i(\omega(k_p)) E_j(\omega(k_s)) E_k(\omega(k_i)) \right) \quad (3.6)$$

Como parte del proceso de cuantización del campo, de acuerdo con la sección 2.4, el campo eléctrico clásico  $\vec{E}$  se expande en términos de ondas planas. Nótese que tras la cuantización del campo, las funciones  $E(\vec{r}, t)$  se reemplazan por las observables de campo  $\hat{E}(\vec{r}, t)$ . Dichas componentes se separan en la suma de las frecuencias positivas y negativas  $\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t)$ , donde  $\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = (\hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t))^*$  corresponde al hermitiano conjugado. Entonces, de acuerdo a [16],



$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \int_V d^3k e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \ell(\omega) \hat{a}(k) \quad (3.7)$$

donde  $\hat{a}(\vec{k})$  es el operador de aniquilación y

$$\ell(\omega) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2(2\pi)^3 \epsilon_0 n(\omega)^2}} \quad (3.8)$$

Entonces

$$\hat{H} = \int d^3k \hbar\omega(\vec{k}) \hat{a}_{\vec{k},n}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},n} + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r \chi_{ijk}^{(2)} \hat{E}_i(\vec{r}, t) \hat{E}_j(\vec{r}, t) \hat{E}_k(\vec{r}, t) \quad (3.9)$$

El primer sumando de la ecuación (3.9) corresponde a la contribución lineal y el segundo, a la contribución no lineal de segundo orden. La integral correspondiente a esta contribución, tiene  $2^3 = 8$  términos, y cada uno de ellos representa un proceso distinto con su propia amplitud de probabilidad. Las condiciones iniciales del estado indican que hay fotones en los estados iniciales de los fotones señal y acompañante, entonces las únicas contribuciones en las que se conserva la energía serán aquellas en las que los fotones de bombeo son aniquilados y los fotones señal y acompañante creados. Además de ello, debido a que el bombeo es una fuente de luz coherente pues se utiliza un láser, se considera que  $\vec{E}_p$  puede ser tratado clásicamente [6]. Entonces la función de amplitud compleja que representa al bombeo satisface, de acuerdo con lo tratado anteriormente y con [16] que

$$\vec{E}_p = (2\pi)^3 A_p \int d\omega_p \alpha(\omega_p) e^{(k_p(\omega_p)z - \omega_p t)} GB \left( x, y - (z + L) \tan \rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L; \omega_p \right) \quad (3.10)$$

donde  $\rho_0$  se refiere al ángulo de *walkoff* y  $z_0$  a la posición del cinturón del bombeo respecto al plano medio del cristal. El efecto de *walkoff* se refiere a que en un cristal uniaxial los frentes de onda y la energía de una onda viajan en direcciones diferentes, estas direcciones dependen del ángulo de corte del cristal. este efecto consiste en considerar un corrimiento dado por  $(x, y) \rightarrow (x, y - z \tan \rho)$  y, de acuerdo con [18], es posible expresar este ángulo como

$$\rho_0(\theta) = \pm \arctan \left[ \frac{n_o^2}{n_e} \tan(\theta) \right] \quad (3.11)$$

donde los signos de arriba son para un cristal negativo y los de abajo para uno positivo. La amplitud espectral está dada por la gaussiana:

$$\alpha(\omega_p) = \exp \left( -\frac{(\omega - \omega_{P_0})^2}{\sigma^2} \right) \quad (3.12)$$

$\sigma$  se refiere al ancho del haz.

$$A_p^2 = \frac{2\sqrt{2}U_p}{\pi\sqrt{\pi}(2\pi)^7 c\epsilon_0\sigma\omega_0^2}$$

donde  $U_p$  representa la energía por pulso.

$$GB(x, y, z; \omega) = \frac{1}{1 + i\frac{z}{z_R}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2(1 + i\frac{z}{z_R})}\right)$$

Nótese que  $GB(x, y, z; \omega)$  depende de  $\omega$  pero dicha dependencia se eliminará al evaluar en la frecuencia central del bombeo. Tomando sólo los factores que conservan energía, es decir, aquellos para los que se generan dos fotones cuando un fotón del bombeo es aniquilado, se tiene que

$$\hat{H}_{NL} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int d^3r \chi_{ijk}^{(2)} \vec{E}_p^{(+)}(\vec{r}, t) \hat{E}_s^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}_i^{(-)}(\vec{r}, t) \quad (3.13)$$

Se supone que el cristal es isotrópico, entonces  $\chi_{ijk}^{(2)}$  no depende del vector de posición  $\vec{r}$  y, se puede considerar  $d_{eff}$  como constante, según la ecuación (2.17) [10], con lo que el hamiltoniano queda representado por

$$\hat{H}(t) = 2\epsilon_0 d_{eff} \int_V dV \hat{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} \quad (3.14)$$

Para obtener el estado de los campos convertidos se puede utilizar teoría de perturbaciones de primer orden dependiente del tiempo, con lo que el estado cuántico del proceso de SPDC dado por  $|\Psi(t)\rangle = e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H(t')} |\Psi(0)\rangle$  tiene la forma

$$|\Psi(t)\rangle \approx \left(1 + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H(t')\right) |\Psi(0)\rangle \quad (3.15)$$

donde  $|\Psi(0)\rangle = |0\rangle_i \times |0\rangle_s$ , que representa la generación de parejas de fotones por fluctuaciones en el vacío.

El objetivo del análisis que se presenta a continuación es encontrar una función  $F = F(k_{sx}, k_{sy}, \omega_s, k_{ix}, k_{iy}, \omega_i)$  que describa las propiedades de los fotones generados, tal que  $|F|^2$  corresponda a la probabilidad de emisión de una pareja de fotones con frecuencia  $\omega_s$ ,  $\omega_i$ .  $F$  puede representarse como un producto de funciones que contengan información sobre el haz de bombeo y el medio no lineal donde ocurre el SPDC, lo que permite entender cómo la manipulación de éstos influye en las propiedades finales de los fotones señal y acompañante.

### 3.1.1 Función de la amplitud conjunta en términos de los vectores de onda

Para obtener el estado  $|\Psi\rangle$  se debe calcular  $\int_0^t dt' H(t')$ , de acuerdo con (3.14) y (3.15). Primero se realiza el producto de los campos señal y acompañante; para cada uno de ellos, según la ecuación (3.7), se tiene que

$$\hat{E}_\mu^{(+)} = i \int_V d^3 k_\mu e^{-i(\omega_\mu t - \vec{k}_\mu \cdot \vec{r})} \ell(\omega_\mu) \hat{a}_\mu(k_\mu), \quad (3.16)$$

$\mu = s, i$

Entonces

$$\hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} = - \int d^3 k_s \int d^3 k_i e^{i(\omega_s + \omega_i)t} e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i)$$

El hecho de que la integración se haga sobre todo el espacio de  $\mathfrak{R}^3$  equivale a la consideración de todo los modos. Ahora, calculando el producto de los tres campos se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) e^{-i(\omega_p - \omega_s - \omega_i)t} \\ &\times GB \left( x, y - (z + L) \tan \rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \\ &\times \int d^3 k_s \int d^3 k_i e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_i) \cdot \vec{r}} \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se definen los siguientes vectores y variables

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega_p - \omega_s - \omega_i \\ \Delta k_z &= k_p(\omega_p) - k_{sz} - k_{iz} \\ \vec{k}^\perp &= (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy}, 0) = (k_x^\perp, k_y^\perp, 0) \\ \vec{r} &= (x, y, 0) + z\hat{z} = \vec{\rho} + z\hat{z} \\ \Rightarrow [\vec{k}_s + \vec{k}_i] \cdot \vec{r} &= \vec{k}^\perp \cdot \rho + (k_{sz} + k_{iz})z \end{aligned} \quad (3.18)$$

entonces se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{E}_p^{(+)} \hat{E}_s^{(-)} \hat{E}_i^{(-)} &= -(2\pi)^3 A_p \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \int d^3 k_s \int d^3 k_i e^{-i\Delta\omega t} \\ &\times e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \rho} e^{-i\Delta k_z z} GB \left( x, y + (z + L) \tan \rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) \\ &\times \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

El cálculo del hamiltoniano del estado, de acuerdo con (3.14), requiere que se integre el producto de los tres campos en el volumen del medio no lineal, en el que se supone  $d_{eff}$  constante [9]. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= -\frac{1}{2} (2\pi)^3 A_p \epsilon_0 d_{eff} \int dV \int_0^\infty d\omega_p \alpha(\omega_p) \\ &\int d^3 k_s \int d^3 k_i e^{-i\Delta\omega t} e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \rho} e^{i\Delta k_z z} \\ GB \left( x, y - (z + L) \tan \rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) &\hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.1.1.1 Función de *phase-matching*

Nótese que en (3.20) es posible reagrupar todos los términos dependientes de  $\vec{k}_s, \vec{k}_i$  en una función  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  que será llamada función de *phase-matching* y que satisface

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int dV e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \rho} e^{i\Delta k_z z} GB \left( x, y + (z + L)\tan\rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) \quad (3.21)$$

El haz de bombeo se propaga en la dirección  $\hat{z}$ , y al integrar sobre el volumen del cristal, se considera de longitud  $L$ , por lo que los límites de integración en  $z$  van de  $-\frac{L}{2}$  a  $\frac{L}{2}$ ; además, las dimensiones transversales del cristal son mucho más grandes que las dimensiones del haz, por lo que los límites pueden establecerse como  $-\infty$  e  $\infty$  para las variables  $x$  y  $y$ .

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz e^{i\Delta k_z z} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \rho} \\ &\times GB \left( x, y + (z + L)\tan\rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Recordemos que la transformada de Fourier de una función satisface [19]

$$\begin{aligned} f(x) &\Leftrightarrow F(k) \\ F(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \\ f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Entonces se define una función  $\Gamma(z; \vec{k}^\perp)$  tal que

$$\Gamma(z; \vec{k}^\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \rho} GB \left( x, y + (z + L)\tan\rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) \quad (3.24)$$

La función descrita en (3.24) corresponde al espectro angular y se trata de la transformada de Fourier de dos dimensiones del haz Gaussiano respecto a las frecuencias espaciales  $k^\perp$  y las coordenadas  $\rho$ . La función de *phase matching* se reduce a

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz e^{i\Delta k_z z} \cdot \Gamma(z; \vec{k}^\perp) \quad (3.25)$$

De acuerdo con [1] el efecto de *walk-off* es proporcional al ancho del cristal. En este trabajo se utilizó un cristal de ancho 10 mm, por esta razón y el ángulo de corte del cristal, se considerará este efecto en los cálculos siguientes. Se resuelve primero para el espectro angular de acuerdo con (3.24) y haciendo uso de la propiedad [20]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}} \quad (3.26)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \Gamma(z; \vec{k}^\perp) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}^\perp \cdot \rho} GB \left( x, y - (z + L) \tan \rho_0, z - z_0 + \frac{1}{2}L \right) \\
 &= \frac{1}{q \left( z + \frac{L}{2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\vec{k}_x^\perp x} e^{-\frac{x^2}{W_0^2} q \left( z + \frac{L}{2} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i\vec{k}_y^\perp y} e^{-\frac{(y - (z + L) \tan \rho_0)^2}{W_0^2} q \left( z + \frac{L}{2} \right)}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Es claro que en la variable  $x$  se tiene simplemente una transformada de Fourier, como se mencionó anteriormente. Sin embargo, para la transformada de Fourier en la variable  $y$  se utiliza el siguiente teorema

$$f(x - a) = F(k) e^{-ika} \tag{3.28}$$

Entonces se tiene que

$$\Gamma(z; \vec{k}^\perp) = \pi W_0^2 \exp \left( -\frac{W_0^2}{4} q \left( z + \frac{L}{2} \right) \left( (k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2 \right) \right) \exp(-ik_y(z + L) \tan \rho_0) \tag{3.29}$$

La función de *phase matching* queda como

$$\begin{aligned}
 \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) &= \pi W_0^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \exp \left( i\Delta k_z z - \frac{W_0^2}{4} q \left( z + \frac{L}{2} \right) \left( (k_x^\perp)^2 + (k_y^\perp)^2 \right) \right) \\
 &= L\pi W_0^2 \exp \left( -\frac{W_0^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2 \right) \text{sinc} \left( \frac{L}{2} \left( \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} + k_y \tan \rho_0 - \Delta k_z \right) \right)
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

En la ecuación (3.30) se aproximó  $z + L \sim z$  dadas las dimensiones del cristal. Se observa que la función de *phase matching* puede ser representada como el producto de dos funciones: una exponencial y una función *sinc*. La función *sinc* en este caso representa a la función de *phasematching* longitudinal y contiene todas las propiedades del cristal, como ángulo de *phasematching*, longitud; la exponencial es llamada función de *phase-matching* transversal y contiene las propiedades espaciales del bombeo, corresponde al espectro angular de éste en término de  $k_x^\perp$  y  $k_y^\perp$ .

### 3.1.1.2 Función de amplitud conjunta

Se realiza ahora la integración sobre el tiempo del Hamiltoniano descrito en (3.14). El siguiente resultado se usa para simplificar la expresión (3.34).

$$\int dt' e^{-1\Delta\omega t'} = 2\pi\delta(\Delta\omega) \tag{3.31}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t'} dt' \hat{H}(t') &= -\frac{1}{2}(2\pi)^3 A_p \epsilon_0 d_{eff} \int_0^{t'} dt' e^{-i\Delta\omega t'} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \alpha(\omega_p) \\
 &\quad \times \int d^3 k_s \int d^3 k_i \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \ell(\omega_s) \ell(\omega_i) \\
 &= -\frac{1}{2}(2\pi)^4 A_p \epsilon_0 d_{eff} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_p \alpha(\omega_p) \delta(\Delta\omega) \\
 &\quad \times \int d^3 k_s \int d^3 k_i \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \ell(\omega_s) \ell(\omega_i)
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

De acuerdo con [19] se tiene el siguiente resultado

$$\int dz f(z) \delta(z - z_0) = f(z_0) \tag{3.33}$$

Entonces, utilizando (3.31) se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t'} dt' \hat{H}(t') &= -\frac{1}{2}(2\pi)^4 A_p \epsilon_0 d_{eff} \int d^3 k_s \int d^3 k_i \\
 &\quad \times \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p_0}) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \ell(\omega_s) \ell(\omega_i)
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

De acuerdo con [16] es posible considerar  $\ell(\omega_\mu) \approx cte$ . Entonces, se define una constante  $\eta$  que agrupa a todas las constantes en (3.34). Esta constante estará relacionada con la eficiencia del proceso. Finalmente se obtiene

$$|\Psi\rangle \approx |\Psi(0)\rangle + \eta \int d^3 k_s \int d^3 k_i F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \hat{a}_s^\dagger(k_s) \hat{a}_i^\dagger(k_i) \tag{3.35}$$

La función  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  está dada por

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p_0}) \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) \tag{3.36}$$

De acuerdo con (3.36), la función  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  es producto de las funciones  $\alpha(\omega_s + \omega_i; \omega_{p_0})$  y  $\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$ . La primera de estas funciones corresponde a la envolvente espectral del bombeo y describe sus propiedades temporales. La segunda función es conocida como función de *phasematching* y refleja la conservación de energía y momento de los fotones generados respecto al bombeo.

El conocimiento de la estructura de la función de amplitud conjunta  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  permite analizar el estado cuántico del proceso de SPDC de acuerdo con la manipulación de las propiedades del bombeo y del cristal. Para obtener de manera completa dicho estado es necesario conocer, además, los vectores de onda de los fotones señal, acompañante y del bombeo, pues todas las funciones dependen de al menos uno de ellos. Para su cálculo es necesario conocer los índices de refracción a través de las ecuaciones de Sellmeier, dependientes del medio óptico no lineal utilizado en el proceso.

## 3.2 Obtención de estados factorizables

La implementación de la mayoría de los protocolos de información cuántica requiere de estados puros, pues los estados mixtos son estados incoherentes y además, incapaces de interferir cuánticamente con la calidad necesaria para implementar dichos protocolos. Para describir cada fotón generado mediante un estado puro es necesario que el estado de la pareja de fotones gemelos sea factorizable, es decir, que cada fotón pueda ser descrito de manera individual. Como se ha mencionado anteriormente, el número de Schmidt cuantifica el grado de factorabilidad del estado de la pareja de fotones, si  $k \rightarrow \infty$  entonces hay máximo enredamiento, y por el contrario, si  $k = 1$ , el estado es factorizable.

Como se observó en la sección anterior, las condiciones de *phasematching* en el proceso de SPDC resultan en parejas de fotones enredados espacio temporalmente, de acuerdo con la ecuación (3.35) que describe el estado  $|\Psi\rangle$  resultante en el que las variables espaciales y temporales de cada fotón generado no pueden separarse en expresiones de estados individuales para cada uno de ellos. La función de amplitud conjunta es descrita por

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_{p_0})\phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$$

Donde  $\alpha(\omega_s + \omega_i)$  es la amplitud espectral y, de acuerdo con la ecuación (3.30)

$$\begin{aligned} \Phi(k_s, k_i) &= \exp\left[i\frac{|k_\perp|^2}{2k_p}z_0\right]\exp\left(i\frac{1}{2}L(\Delta k + \underline{k}_{\perp y}\tan\rho_0)\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{4}\omega_0^2|\underline{k}_{\perp y}|^2\right)\text{sinc}\left(\frac{1}{2}L\Delta k\right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para el análisis de las correlaciones espectrales y espaciales del estado, es necesario escribir los vectores de onda en términos de frecuencias y en coordenadas esféricas, como se muestra en la figura 3.2, de donde se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{k}_\mu &= \frac{n(\omega_\mu)\omega_\mu}{c}\vec{k}_\mu(\theta_\mu, \phi_\mu) \\ \hat{k}_\mu(\theta_\mu, \phi_\mu) &= (\sin\theta_\mu \cos\phi_\mu, \sin\theta_\mu \sin\phi_\mu, \cos\theta_\mu) \end{aligned} \quad (3.38)$$

La función de amplitud conjunta depende de seis variables y varios parámetros.

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = f(\omega_s, \theta_s, \phi_s; \omega_i, \theta_i, \phi_i) \quad (3.39)$$

Es importante mencionar que la orientación del corte del cristal es tal que el fotón señal tiene una frecuencia central  $\omega_{s_0}$  orientada a un ángulo de emisión  $\theta_s = \theta_{s_0}$  y, de manera análoga para el fotón acompañante,  $\omega_{i_0}$  y  $\theta_i = \theta_{i_0}$ .

### 3.2.1 Correlaciones espectrales

Sea  $S(\omega_s, \omega_i)$  la probabilidad de detectar el fotón señal con una frecuencia  $\omega_s$  y al fotón acompañante con una frecuencia  $\omega_i$  al medir la intensidad espectral conjunta del estado. Si no hay correlaciones espectrales se satisface

$$S(\omega_s, \omega_i) = P_s(\omega_s)P_i(\omega_i) \quad (3.40)$$

donde  $P_\mu(\omega_\mu)$ , con  $\mu = s, i$  representa la probabilidad de que el fotón señal o acompañante tenga frecuencia  $\omega_\mu$ .

De acuerdo con la ecuación (3.35) y en términos de las frecuencias de los fotones generados, para el estado de dos fotones se tiene que

$$|\Psi\rangle \approx |\Psi(0)\rangle + \eta \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i)$$

Entonces

$$S(\omega_s, \omega_i) = |f(\omega_s, \omega_i)|^2 \quad (3.41)$$

Las frecuencias de los fotones señal y acompañante son independientes solamente si  $f(\omega_s, \omega_i)$  es factorizable, es decir, se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} f(\omega_s, \omega_i) &= f_s(\omega_s) f_i(\omega_i) \\ \Rightarrow |\Psi(t)\rangle &\approx |\Psi(0)\rangle + \eta \int d\omega_s f_s(\omega_s) \hat{a}_s^\dagger(\omega_s) \int d\omega_i f_i(\omega_i) \hat{a}_i^\dagger(\omega_i) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.42)$$

Si los fotones señal y acompañante no presentan correlaciones espectrales, no están correlacionados temporalmente, sin embargo, esto no quiere decir que sean generados en tiempos aleatorios, siempre existirá la restricción de la pareja de fotones sean generados en un intervalo de tiempo correspondiente a la duración de cada pulso del bombeo.

La forma de  $S(\omega_s, \omega_i)$  depende de la forma de  $|\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2$  y de  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$ . La envolvente espectral del bombeo se ha considerado Gaussiana, y su ancho es proporcional al ancho espectral del bombeo. Dado el argumento de la función  $|\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2$ , ésta será constante a lo largo de las líneas  $\omega_s + \omega_i = \text{const}$  y presentará un máximo en la recta  $\omega_s + \omega_i = \omega_{s_0} + \omega_{i_0} = \omega_p$ . La reducción del ancho de banda del bombeo provocará que la envolvente espectral del bombeo se haga más angosta, provocando que la JSI se asemeje al contorno de la envolvente espectral del bombeo.

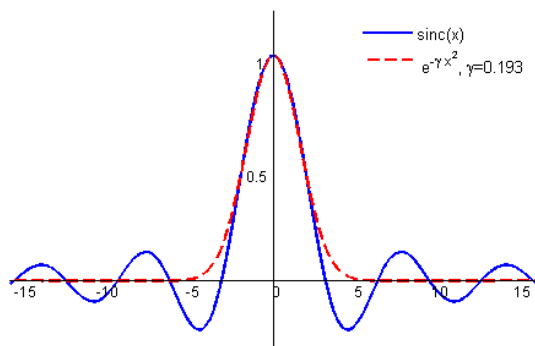
Si se analiza la forma de la función de *phase matching*  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$  se observa que su contorno está definido por el argumento de la función *sinc* igualado a cero, dado por  $k_p(\omega_s + \omega_i) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i) = 0$ . El aumento en la longitud del cristal tiende a alinear la función espectral de intensidad conjunta al contorno de la función de *phasematching*. A pesar de que la manipulación de estos dos parámetros permite alinear la JSI en cualquier dirección entre los contornos de las funciones  $|\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2$  y  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$ , como se muestra en las figuras 4.3-4.4, es necesario satisfacer otras condiciones para la completa eliminación de las correlaciones espectrales.



### 3.2.2 Condiciones para estados factorizables

Una vez que se tiene el estado SPDC para los fotones es posible realizar un análisis espacio temporal de las correlaciones en las parejas de fotones producidas mediante SPDC-I y derivar un conjunto de condiciones en todos los grados de libertad para la obtención de estados totalmente factorizables de los fotones generados, detalles de este análisis pueden consultarse en [1]. En general, las técnicas para obtener estados factorizables de pares de fotones requieren pulsos de bombeo de femtosegundos, pues un pulso monocromático introduce correlaciones espectrales estrictas.

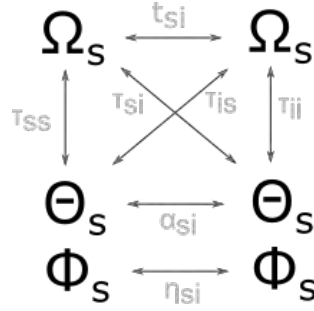
Dado que la función de amplitud conjunta depende de seis variables  $\omega_s, \theta_s, \phi_s, \omega_i, \theta_i, \phi_i$ , concorde con la ecuación (3.39), el análisis de condiciones que satisfagan la factorabilidad del estado de los fotones es complicado. De acuerdo con [1], al expandir a primer orden el vector de onda transversal y la frecuencia de la función de amplitud conjunta, además de sustituir la función *sinc* por una función gaussiana cuya altura y su ancho coincidan, se obtiene una aproximación bastante precisa que facilita la obtención de las condiciones de factorabilidad.



**Figura 3.3:** Aproximación de función  $\text{sinc}(x) \approx e^{-\gamma x^2}$  con  $\gamma = 0.0.193$ , equivalente a desprestigiar las contribuciones de las colas de la función *sinc*.

La aproximación  $\text{sinc}(x) \approx e^{(\gamma x^2)}$  con  $\gamma = 0.193$  es válida siempre y cuando se consideren los fotones generados cerca de la región de *phase-matching* de los vectores de onda y frecuencias donde la conversión paramétrica descendente ocurre de manera más efectiva. En este rango de parámetros tan limitado, es decir, para  $\frac{L}{2} \left( \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - \Delta k_z \right) \ll 1$  las colas de la función *sinc* tienen una contribución insignificante sobre toda la distribución de probabilidad de generación de parejas de fotones.

Cuando se expresa la función de amplitud conjunta en términos de funciones exponenciales como serie de potencias de las 6 variables mencionadas al rededor de sus valores centrales, definidas como  $\Omega_\mu \equiv \omega_\mu - \omega_{\mu_0}$ ,  $\Theta_\mu \equiv \theta_\mu - \theta_{\mu_0}$  y  $\Phi_\mu \equiv \phi_\mu - \phi_{\mu_0}$ , los términos cruzados de la variable de un fotón con la variable de otro fotón indican la presencia de enredamiento entre los fotones señal y acompañante.



**Figura 3.4:** Correlaciones entre las variables fotónicas espectrales y espaciales que pueden presentarse en el estado generado [1].

Las correlaciones presentes entre las variables fotónicas  $s$  e  $i$  pueden dividirse en correlaciones internas y correlaciones externas, como se muestra en la figura 3.4. Para el proceso SPDC-I degenerado en frecuencia, de todos los términos cruzados sólo ocho son independientes, como consecuencia de las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 T_s &= T_i = T, & T_\mu &= L(k'_p(\omega_{p_0}) - k'_\mu(\omega_{\mu_0} \cos \theta_{\mu_0})) \\
 \tau_s &= -\tau_i = -\tau, & \tau_\mu &= W_0 k'_\mu(\omega_{\mu_0}) \sin \theta_{\mu_0} \\
 k_{zs} &= k_{zi} = k_z, \\
 k_{\perp s} &= -k_{\perp i} = -k_{\perp} \\
 t_{lm}^2 &= 2\sigma^{-2} + \frac{1}{2}\gamma T_l T_m + \frac{1}{2}\tau_l \tau_m \\
 \alpha_{lm} &= \frac{1}{2}\gamma L^2 k_{\perp} k_{\perp m} + \frac{1}{2}\omega_0^2 k_{zl} k_{zm} \\
 \eta_{lm} &= \frac{1}{2}k_{\perp} k_{\perp m} (\gamma \rho^2 L^2 + \omega_0^2)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Las condiciones de factorabilidad provienen de imponer que los coeficientes de las correlaciones externas se anulen o sean despreciables simultáneamente y, de acuerdo con [1] se obtiene entonces que

$$\begin{aligned}
 k'_s &= k'_p \cos \theta_{s_0} \\
 k'_i &= k'_p \cos \theta_{i_0} \\
 \frac{\omega_0^2}{\gamma L^2} &= -\tan \theta_{s_0} \tan \theta_{i_0} \\
 \sigma_P &\gtrsim \bar{\sigma}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde  $\bar{\sigma}$  se refiere a un umbral del ancho de banda que, si se excede implica que la amplitud conjunta del estado de dos fotones es determinada por las propiedades de *phase matching* longitudinales y transversales, independientes del ancho de banda del bombeo. Este umbral corresponde al ancho a la altura media de la integral  $\int d\omega_- |f(\omega_+, \omega_-)|$  donde  $f$  representa la amplitud conjunta proyectada en un modo espacial específico,  $\omega_{\pm} = \omega_s \pm \omega_i$ . Además, si los fotones generados son proyectados a un modo espacial específico, por ejemplo el modo de colección de una fibra, el estado de los dos fotones se vuelve una función de  $\omega_s, \omega_i$ .

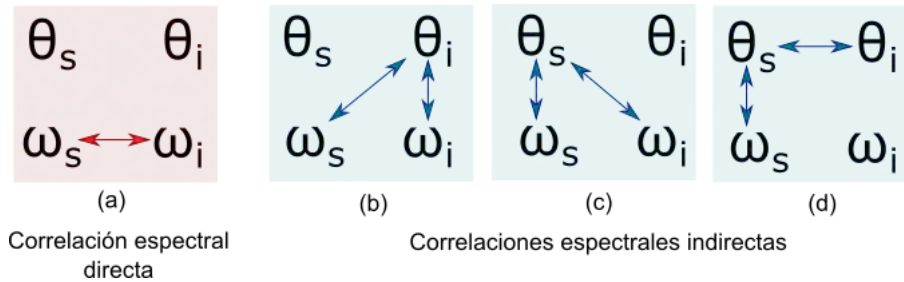
Las correlaciones que involucran el ángulo azimutal  $\phi$  no se pueden anular, pero pueden acotarse reduciendo la propagación de la detección angular. De aquí proviene otra condición de factorabilidad:

$$\Phi_{max}^2(\gamma\rho^2L^2 + w_0^2) \lesssim \frac{1}{k^2 \sin^2 \theta_0} \quad (3.45)$$

$\Phi_{max}^2$  máxima propagación de los ángulos azimutal al rededor de las detecciones de los fotones señal y acompañante. Las correlaciones que involucran al ángulo  $\phi$  se vuelven despreciables.

Las primeras dos condiciones presentadas en la ecuación (3.44) corresponden a condiciones en las que la componente longitudinal de las velocidades de grupo de los fotones señal y acompañante se hace igual a la velocidad de grupo del bombeo. La tercera condición corresponde a una restricción en las dimensiones físicas de la fuente (largo del cristal y radio del cinturón del bombeo) junto con ángulos de propagación, entonces se tiene que el ancho de banda del bombeo excede el valor umbral  $\bar{\sigma}$ , correspondiente a la condición 4.

La función  $|F(\omega_s, \theta_s, \phi_s; \omega_i, \theta_i, \phi_i)|^2$  puede tener correlaciones entre cualquiera de las 6 variables. Las correlaciones externas son asociadas a aquellas que contribuyen al enredamiento del par de fotones. Por su parte, las correlaciones internas son aquellas que involucran dos variables del mismo fotón. En la imagen 4.3 se observan las correlaciones espectrales directas e indirectas que pueden presentar los fotones generados.



**Figura 3.5:** En la imagen (a) se representa el caso para el que la correlación espectral es directa. En las imágenes (b)-(d) las correlaciones espectrales son indirectas y existen sólo si hay correlaciones  $\omega - \theta$  internas junto con correlaciones  $\theta - \theta$  externas, o bien, si existen correlaciones  $\omega - \theta$  externas junto con correlaciones  $\theta - \theta$  internas [1].

Las correlaciones presentadas en la imagen 4.3 pueden suprimirse mediante un filtrado espacial en la detección, sin embargo este método disminuye de manera significativa la brillantez de la fuente. También mediante la supresión de correlaciones que involucran correlaciones espaciales en la fuente. La propagación de detección de los vectores debe aumentarse sin que aparezcan correlaciones espectrales

### 3.3 SPDC acoplado a fibras monomodales

El acoplamiento de los fotones emitidos a fibras monomodales representa una forma de suprimir las correlaciones en el grado de libertad espacial, pues su colección en este tipo de fibras implica el conocimiento del modo espacial en el que viajan los fotones.

Para el cálculo del estado de los dos fotones ya acoplados a la fibra se consideran los modos de la luz que sale a través de las fibras monomodales, pasa a través de las lentes acopladoras y se propaga al revés a través del cristal. Intuitivamente podemos suponer que el estado de los fotones generados acoplados a la fibra está dado por la superposición matemática de los modos de colección a fibra en el espacio libre y la JSA antes del acoplamiento [1].

El modo de colección de la fibra se modela como gaussiano, conviene definirlo para un marco de referencia con uno de sus ejes orientado al cinturón del haz, de acuerdo con

$$u(x''', y''', z''') = \frac{1}{1 + i \frac{z'''}{z_R}} \exp \left[ \frac{x'''^2 + y'''^2}{W_{\mu_f}^2 \left( \frac{1}{1 + i \frac{z'''}{z_R}} \right)} \right] \quad (3.46)$$

donde  $\mu_s, i$ , las variables  $x'''$ ,  $y'''$  y  $z'''$ , representan coordenadas cartesianas de un sistema de referencia anclado al cinturón del modo de colección  $W_{\mu_f}$  y  $z_R = k_\mu W_\mu^2$  es la distancia de Reyleigh.

Es posible escribir los estados de los fotones individuales, correspondientes a los modos de colección de cada fibra, como

$$|\omega\rangle = b_\mu^\dagger(\omega)|0\rangle \quad (3.47)$$

donde el operador de aniquilación  $\hat{b}_\mu(\omega)$  se define como

$$b_\mu^\dagger(\omega) = \int_{|\vec{k}|=\frac{\omega}{c}} u_\mu^*(\vec{k}) a_\mu^\dagger(\vec{k}) d^2k \quad (3.48)$$

con  $u_\mu(\vec{k})$  el modo de colección en el espacio de momentos. Ahora, para obtener el estado de los fotones generados acoplado a las fibras, es necesario proyectar el estado de los fotones en el espacio libre (al salir del cristal), a la base de modos de colección de las fibras ópticas, de acuerdo con

$$|\Psi_c\rangle = \hat{\Pi}|\Psi_l\rangle \quad (3.49)$$

$\Psi_c$  representa el estado acoplado,  $\Psi_l$  el estado en el espacio libre a la salida del cristal y  $\hat{\Pi}$  el operador de proyección, definido por [1]:

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{c^2} \int d\omega_s |\omega_s\rangle_{Fs} \langle \omega_s|_{Fs} \otimes \int d\omega_i |\omega_i\rangle_{Fi} \langle \omega_i|_{Fi} \quad (3.50)$$

entonces, sustituyendo las ecuaciones 3.35 y 3.50 en 3.49 se tiene que el estado de los fotones generados acoplados a la fibra satisface

$$|\Psi_c\rangle = |0\rangle + \frac{\eta}{c^2} \int d\omega_s \int d\omega_i f(\omega_s, \omega_i) f(\omega_s, \omega_i) |\omega_s\rangle_{Fs} |\omega_i\rangle_{Fi} \quad (3.51)$$

La amplitud espectral conjunta de los fotones acoplados a las fibras se calcula en términos de los modos de la fibra  $u_\mu(\vec{k}_\mu)$  y la JSA del espacio libre  $F_f(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  como

$$f(\omega_s, \omega_i) = \int_{|\vec{k}_s|=\frac{\omega_s}{c}} d^2k_s \int_{|\vec{k}_i|=\frac{\omega_i}{c}} d^2k_i F_f(\vec{k}_s, \vec{k}_i) u_s^*(\vec{k}_s) u_i^*(\vec{k}_i) \quad (3.52)$$

Nótese que en la ecuación (3.52) se integra la función de amplitud espectral conjunta en el espacio libre, lo que implica que los ángulos polares son refractados a la salida del cristal, por lo que se sustituye  $\theta_{\mu f} = \arcsin \left[ \sin \left( \frac{\theta_\mu}{n(\vec{k}_\mu)} \right) \right]$  para  $\mu = s, i$

### 3.3.1 Equivalencia de coordenadas para los modos de colección

Los modos de colección de la fibra se consideran haces gaussianos de acuerdo con

$$u(x''', y''', z''') = \frac{1}{1 + i \frac{z'''}{z_R}} \exp \left[ -\frac{x'''^2 + y'''^2}{W_{\mu f}^2 \left( 1 + i \frac{z'''}{z_R} \right)} \right] \quad (3.53)$$

y su orientación y posición debe empatar con los modos señal y acompañante refractados en el cristal. En la ecuación (3.53), el sistema coordenado  $x''', y''', z'''$  está anclado a la cintura del modo de colección. Se parte del sistema coordenado  $x, y, z$  que está anclado a la segunda cara del cristal en el centro del cono de emisión. Nos fijamos en un fotón en algún punto arbitrario del cono, que se encuentra a un ángulo  $\phi$  respecto al eje  $x$  en las coordenadas  $(x, y, z) = (h, d, 0)$ . El cambio de coordenadas estableciendo este punto como origen y rotando los ejes  $x, y$   $\phi$  grados está dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - h \\ y - d \\ z \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

El sistema  $x'', y'', z''$  resulta de rotar un ángulo  $\theta$  el sistema  $x', y', z'$  al rededor del eje  $z'$  para colocar el modo de colección en la dirección de emisión.

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Finalmente se realiza un desplazamiento en el eje  $z''$  de una distancia  $c$  para la sintonización del cinturón de acoplamiento, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} x''' &= x'' \\ y''' &= y'' \\ z''' &= z'' - c \end{aligned} \quad (3.56)$$

Con lo que el cambio de coordenadas queda dado por:

$$\begin{aligned}
 x''' &= (x - h)\cos\theta\cos\phi + (y - d)\cos\theta\sin\phi \\
 y''' &= -(x - h)\sin\phi + (y - d)\cos\phi \\
 z''' &= (x - h)\sin\theta\cos\phi + (y - d)\sin\theta\sin\phi - c
 \end{aligned}
 \tag{3.57}$$

Conociendo las transformaciones de coordenadas de la ecuación, el paso siguiente consiste en realizar la transformada de Fourier de la función que define a los modos de colección  $u(x''', y''', z''')$ . No obstante, sin el uso de aproximaciones resulta complicado obtener una expresión analítica cerrada de la función del modo en el espacio de momentos.

Una vez obtenida la expresión del modo de colección en el espacio de momentos, es posible realizar una convolución entre esta función y la función de amplitud conjunta, con lo que se obtiene el estado de los fotones generados acoplados a la fibra.



# 4

## Simulaciones

El conocimiento de la función de amplitud conjunta  $F(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$  obtenida en la sección 3.1.2.2 permite analizar el estado cuántico del proceso de SPDC de acuerdo a las propiedades del bombeo y del cristal. De acuerdo a los resultados obtenidos en esta sección, es posible descomponer dicha función como el producto de dos funciones: la envolvente espectral del bombeo y la función de *phasematching*.

$$F(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = \alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_{P_0}) \cdot \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i)$$

La envolvente espectral del bombeo,  $\alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_{P_0})$ , describe sus propiedades temporales y se ve afectada con la variación de parámetros como el ancho espectral del mismo y la frecuencia central.

$$\alpha(\omega_s + \omega_i, \omega_{P_0}) = \exp\left(-\frac{(\omega_s + \omega_i - \omega_{P_0})^2}{\sigma^2}\right)$$

Por su parte, la función de *phasematching* en el espacio libre puede verse como el producto de la llamada función de *phasematching* longitudinal, descrita por una función sinc que contiene las propiedades del cristal, y la función de *phasematching* transversal, descrita por una exponencial que describe las propiedades espaciales del bombeo.

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_i) = L\pi W_o^2 \exp\left(-\frac{W_o^2}{4} |\vec{k}^\perp|^2\right) \text{sinc} \left( \frac{L}{2} \left( \frac{|\vec{k}^\perp|^2}{2k_p} - \Delta k_z \right) \right)$$

Como es de esperarse, el acoplamiento a fibra de los fotones generados tendrá una repercusión directa en su correlación espacial, pues se confinan al modo fundamental de la fibra óptica utilizada (las fibras en las que son acoplados se consideran monomodales, cuyo modo de colección es descrito por haces gaussianos de acuerdo con la sección 3.3). De la misma forma, dicho acoplamiento afectará la correlación espectral, pues las fibras actúan como un filtro de frecuencias al estar éstas distribuidas espacialmente.



## 4.1 Las variables del estado

### 4.1.1 Propiedades del cristal

El cristal considerado en las siguientes simulaciones es un  $\beta$ -Borato de Bario (BBO) uniaxial negativo. Las propiedades del cristal comprenden sus dimensiones, así como las ecuaciones de Sellmeier características del material, que describen el índice de refracción y el ángulo de *phasematching*; un análisis de estas ecuaciones se presenta en el apéndice A. Para este cristal, dichas ecuaciones satisfacen [18]

$$n_o(\lambda) = \sqrt{A_o + \frac{B_o}{\lambda^2 + C_o} + D_o\lambda^2} \quad (4.1)$$

$$n_e(\lambda) = \sqrt{A_e + \frac{B_e}{\lambda^2 + C_e} + D_e\lambda^2} \quad (4.2)$$

donde  $\lambda$  está en micras y los coeficientes son  $A_o = 2.7359$ ,  $B_o = 2.7359$ ,  $C_o = 2.7359$  y  $D_o = 2.7359$  para el índice de refracción ordinario, mientras que el índice de refracción extraordinario son  $A_e = 2.7359$ ,  $B_e = 2.7359$ ,  $C_e = 2.7359$  y  $D_e = 2.7359$ . Estas ecuaciones son válidas para longitudes de onda entre los  $226nm$  y  $3230nm$ . El cristal tiene una longitud de  $10mm$  y un ángulo de *phasematching* de  $20.3^\circ$ .

### 4.1.2 Propiedades del haz de bombeo

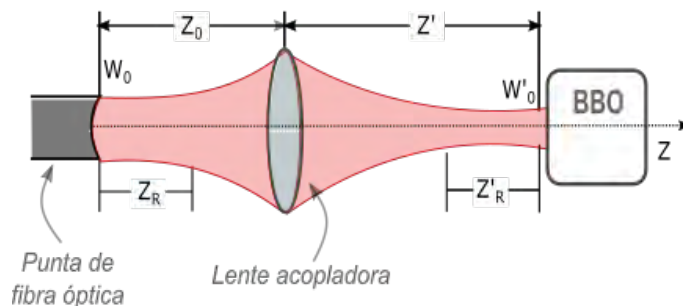
El interés del proyecto radica en la generación de parejas de fotones en la ventana de telecomunicaciones, por lo que se fijó la longitud de onda central del bombeo en  $775nm$ . Dado el láser utilizado, un titanio-zafiro construido en el laboratorio de Óptica Cuántica del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, el ancho espectral al que puede accederse varía entre los  $10nm$  y  $20nm$  aproximadamente. El haz de bombeo puede ser considerado un haz gaussiano circular, por lo que queda descrito por el radio de su cinturón y el rango de Rayleigh. Este haz puede ser manipulado espacialmente con lentes plano convexas de distancia focal  $f$ , lo que permite la variación del radio de su cinturón. En la tabla 5.1 se muestran los distintos radios de cinturón que se utilizaron en el desarrollo experimental del proyecto; el rango de los cinturones de bombeo utilizado en las simulaciones presentadas en este trabajo abarca estos radios.

Lente [cm]	Rango de Rayleigh $z_R$ [cm]	Cinturón $W_0$ [ $\mu m$ ]
Sin lente	102.10	995.96
$f = 75cm$	22.29	236.06
$f = 100cm$	42.99	325.74

**Tabla 4.1:** Caracterización del rango de Rayleigh y cinturón del haz de bombeo.

### 4.1.3 Acoplamiento a fibra

El acoplamiento a fibra óptica de los fotones generados se representa en la figura 4.1. Es notorio que el radio del cinturón de acoplamiento a la altura del cristal,  $W_f$ , depende de la distancia entre la punta de la fibra óptica y la lente acopladora, pues esta distancia permite "enfocar" o "desenfocar" el modo de colección de los fotones generados. Durante el desarrollo experimental se utilizaron dos lentes acopladoras con distancias focales  $f_1 = 15.29mm$  y  $f_2 = 8mm$ , con las que fue posible variar el radio de los cinturones de acoplamiento en un rango entre los  $200\mu m$  y los  $1500\mu m$  aproximadamente.



**Figura 4.1:** Acoplamiento de los fotones generados a fibra óptica. El cinturón de acoplamiento  $W_f$  a la altura del cristal depende de la distancia entre la punta de la fibra y la lente acopladora.

La calibración del radio los cinturones de acoplamiento a la altura del cristal, respecto a la distancia  $z_0$  se realizó de acuerdo con la teoría de propagación de haces gaussianos a través de lentes delgadas [8] y se trata de manera detallada en la sección 5.2.

## 4.2 Simulación del estado

La simulación del estado sin acoplar a fibra óptica se realizó de acuerdo con las ecuaciones obtenidas en la sección 3.1. Es importante aclarar que la magnitud de los cinturones de bombeo y de acoplamiento que se consideran en la simulación son en campo, sin embargo, son medidos en intensidad. La correspondencia entre ambos puede encontrarse considerando que el campo eléctrico es proporcional a

$$E(\vec{r}) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{W_0^2}\right) \quad (4.3)$$

con  $\vec{r} = (x, y)$ , por lo que la intensidad satisface

$$I(\vec{r}) \propto \exp\left(-\frac{2r^2}{W_0^2}\right) \quad (4.4)$$

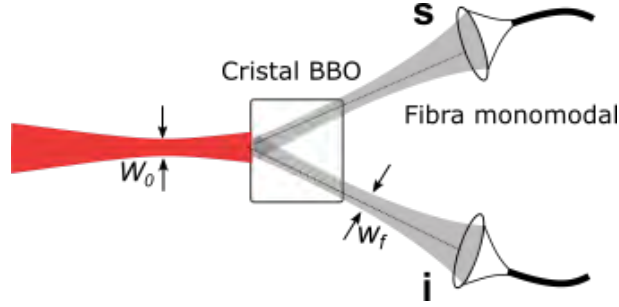
De acuerdo con la definición de ancho a media altura FWHM (del inglés Full Width at Half Maximum), bajo la cual se miden los cinturones de bombeo, acoplamiento y el ancho espectral del bombeo, se tiene que

$$\begin{aligned}
 I(\vec{r}_{\pm}) = I_0 e^{-2} &\Rightarrow \exp\left(-\frac{2\vec{r}_{\pm}^2}{W_0^2}\right) = 2^{-1} \\
 &\Rightarrow \vec{r}_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{\ln(2)}W_0}{\sqrt{2}} \\
 &\Rightarrow FWHM = \vec{r}_+ - \vec{r}_- \\
 \therefore W_0 &= \sqrt{\frac{2}{\ln(2)}} FWHM
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tras la conversión de  $\sigma_P$ ,  $W_0$  y  $W_f$  a campo es posible ingresar estos como parámetros para la simulación.

El procedimiento para obtener la función de amplitud conjunta del estado de los fotones acoplados a fibras ópticas monomodales, se basó en las simulaciones realizadas previamente por la Dra. Karina Garay Palmett, en colaboración con este proyecto.

En la figura 4.2 se muestra un esquema de los cinturones de bombeo y acoplamiento. El acoplamiento óptimo se alcanza cuando el cinturón del bombeo a la altura del cristal y el cinturón de acoplamiento, ambos a la altura del cristal, coinciden.

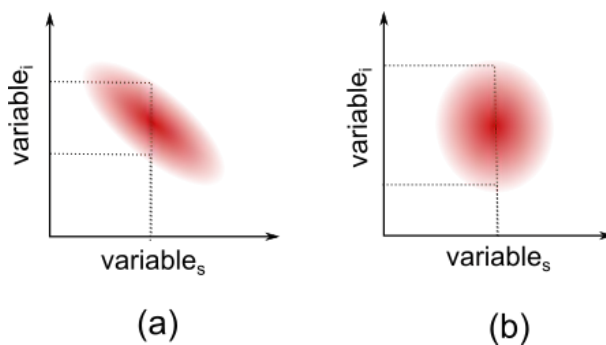


**Figura 4.2:** Cinturón de bombeo y cinturones de acoplamiento de los fotones generados a la fibra óptica. El acoplamiento óptimo se alcanza cuando el cinturón del bombeo a la altura del cristal y el cinturón de acoplamiento, ambos a la altura del cristal, coinciden.

### 4.3 Comportamiento del estado

Para estudiar el efecto de la manipulación de parámetros del bombeo en el estado cuántico de los fotones generados se analiza la gráfica de la JSI y de cada una de sus funciones componentes. Se simula un cristal de  $\beta$ -borato de bario tipo I orientado para conversión descendente no colineal de un bombeo centrado en  $775nm$ .

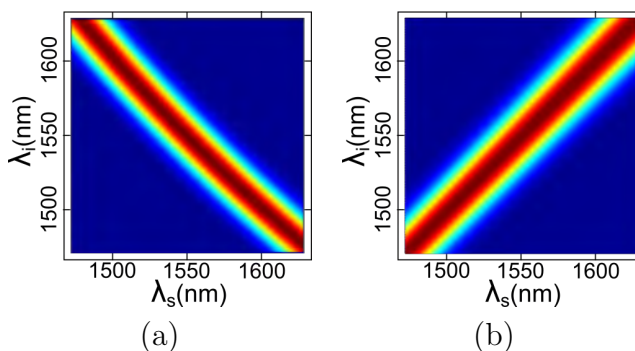
La gráfica de la función de la intensidad espectral conjunta muestra la correlación espectral del estado de los fotones generados. En la figura 4.3(a), que representa la forma que podría tomar la gráfica de esta función, la correlación espectral no es máxima, pues a una frecuencia particular del fotón señal por ejemplo, le corresponde un rango de frecuencias particulares del fotón acompañante. Por otra parte, en la figura 4.3(b)



**Figura 4.3:** Estado fotónico dependiente de dos variables. Se muestra su comportamiento cuando existe enredamiento entre la variable  $s$  y la variable  $i$  (a), y cuando estas variables son independientes (b). En particular, dicho estado se hizo semejante a la función de la intensidad espectral conjunta obtenida para el proceso de SPDC tratado en este trabajo.

se observa correlación espectral sería nula, pues a cada frecuencia del fotón señal le corresponde un mismo rango de frecuencias de fotones acompañantes; gráficamente, esto se aprecia como la función espectral conjunta rotada, de tal forma que uno de sus semiejes es paralelo a uno de los ejes de frecuencias, o bien, si es perfectamente circular sin la aproximación de lóbulos laterales. La cuantificación de la correlación para las simulaciones presentadas en este apartado se hizo mediante el cálculo del número de Schmidt, obtenido a partir de la traza de la matriz de densidad del estado.

La forma de la función JSI depende de la forma de  $|\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2$  y de  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$ . Nótese que la envolvente espectral del bombeo se ha considerado Gaussiana, y su ancho es proporcional al ancho espectral del bombeo; además, la función  $|\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2$  es constante en la recta  $\omega_s + \omega_i = cte$  y presenta un máximo para  $\omega_s + \omega_i = \bar{\omega}_s + \bar{\omega}_i = \omega_p$ .



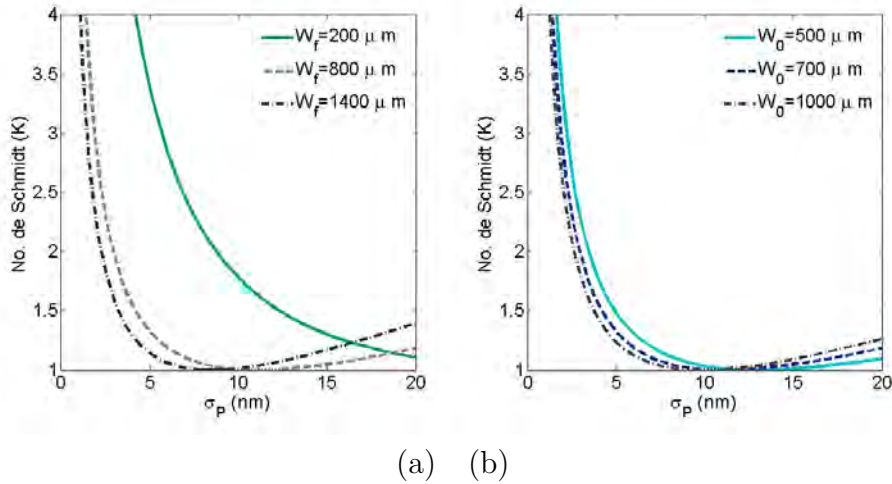
**Figura 4.4:** Gráfica de las funciones (a)  $|\alpha(\omega_s + \omega_i)|^2$  y (b)  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$  para un cristal de  $\beta$ -borato de bario tipo I orientado para conversión descendente no colineal de un bombeo centrado en  $775nm$ .

No obstante, si se analiza la forma de la función de *phase matching*  $|\Phi(\omega_s, \omega_i)|^2$  se observa que las frecuencias  $\omega_s, \omega_i$  que la maximizan están definidas por el argumento de

la función *sinc* igualado a cero, de acuerdo con la ecuación (3.31); es decir, el contorno de dicha función es descrito por  $k_p(\omega_s + \omega_i) - k_s(\omega_s) - k_i(\omega_i) = 0$

En las simulaciones desarrolladas en el resto de este capítulo, se presentan las gráficas de la intensidad adjunta  $|F(\omega_s, \theta_s, \phi_s; \omega_i, \theta_i, \phi_i)|^2$  donde 4 de las 6 variables son constantes y se grafica sen función de  $\omega_s$  y  $\omega_i$ . Se muestra también el cambio en la correlación espectral del estado, de acuerdo con la variación de los parámetros del cristal y del haz de bombeo. Resulta conveniente mencionar que los valores de los parámetros de la fuente utilizados en las simulaciones son valores accesibles en el montaje experimental.

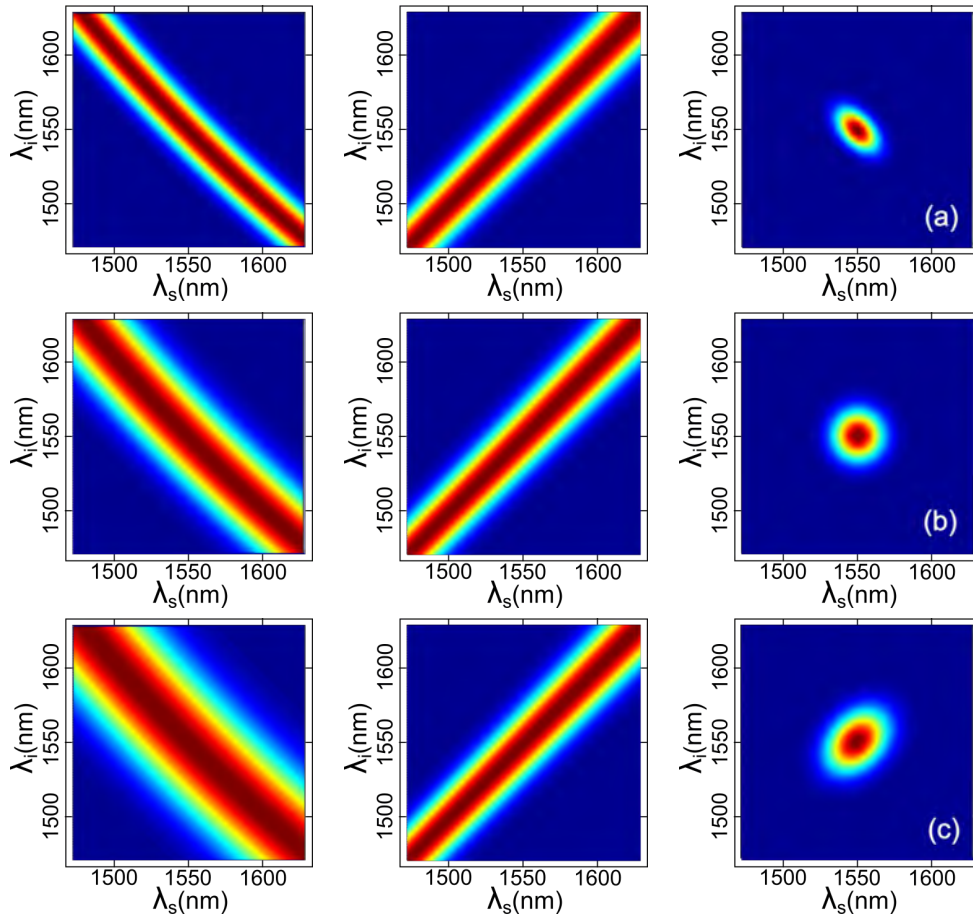
### 4.3.1 Ancho espectral del bombeo



**Figura 4.5:** Variación del número de Schmidt de la función JSI en función del ancho espectral del bombeo (a) con un cinturón de bombeo de  $700\mu m$  y varios casos del radio de cinturón de acoplamiento; y para (b) un cinturón de acoplamiento de  $800\mu m$  y varios casos de cinturón de bombeo.

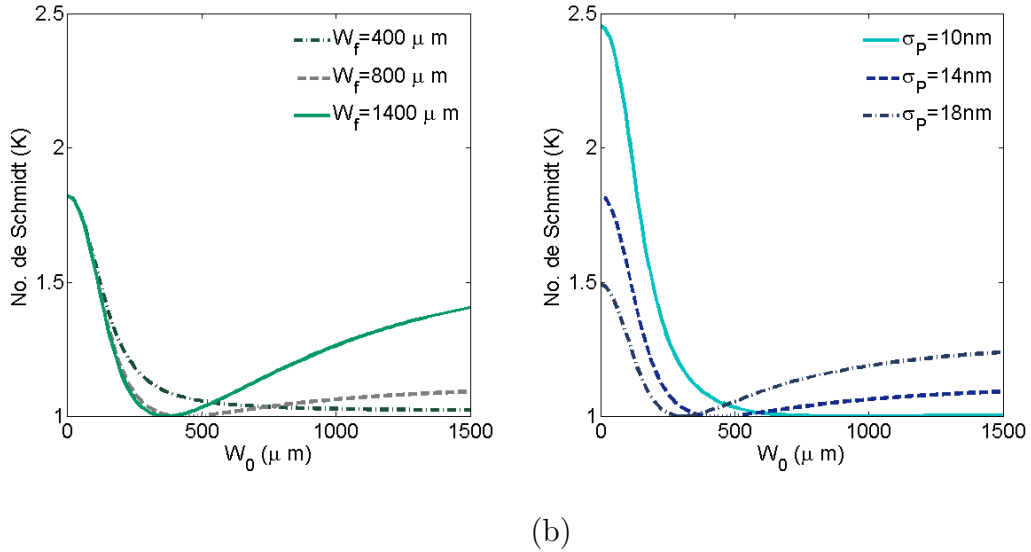
En la figura 4.5 se observa la variación del número de Schmidt respecto al ancho espectral del bombeo para: (a) el cinturón de bombeo de  $700\mu m$  y tres valores distintos del radio de cinturón de acoplamiento y, (b) para un cinturón de acoplamiento de  $800\mu m$  y tres radios del cinturón de bombeo distintos. Resulta evidente que el cambio en el número de Schmidt, que puede traducirse en un cambio en la correlación espectral del estado, es mucho más sensible a la variación del cinturón de acoplamiento que del cinturón de bombeo.

De acuerdo con la figura 4.5 se observa también que la obtención de un estado con un número de Schmidt muy grande es más sencilla si se utilizan anchos espectrales del bombeo pequeños. En la figura 4.6 se observan la envolvente espectral, la función de *phasing* y la JSI para tres estados distintos con  $W_0 = 800\mu m$  y  $W_f = 100\mu m$ , que difieren en el ancho espectral del bombeo, con valores de  $5nm$ ,  $8.5nm$  y  $12nm$ .



**Figura 4.6:** Cambio de la función de la envolvente espectral y JSI respecto a ancho espectral del bombeo. El radio del cinturón de bombeo es en todos los casos de  $800\mu m$  y el cinturón de acoplamiento de  $100\mu m$ . Los valores de  $\sigma_P$  y el número de Schmidt para cada estado son: (a)  $5nm$ ,  $K = 1.1474$ ; (b)  $8.5nm$ ,  $K = 1.003$  y (c)  $12nm$ ,  $K = 1.19$ .

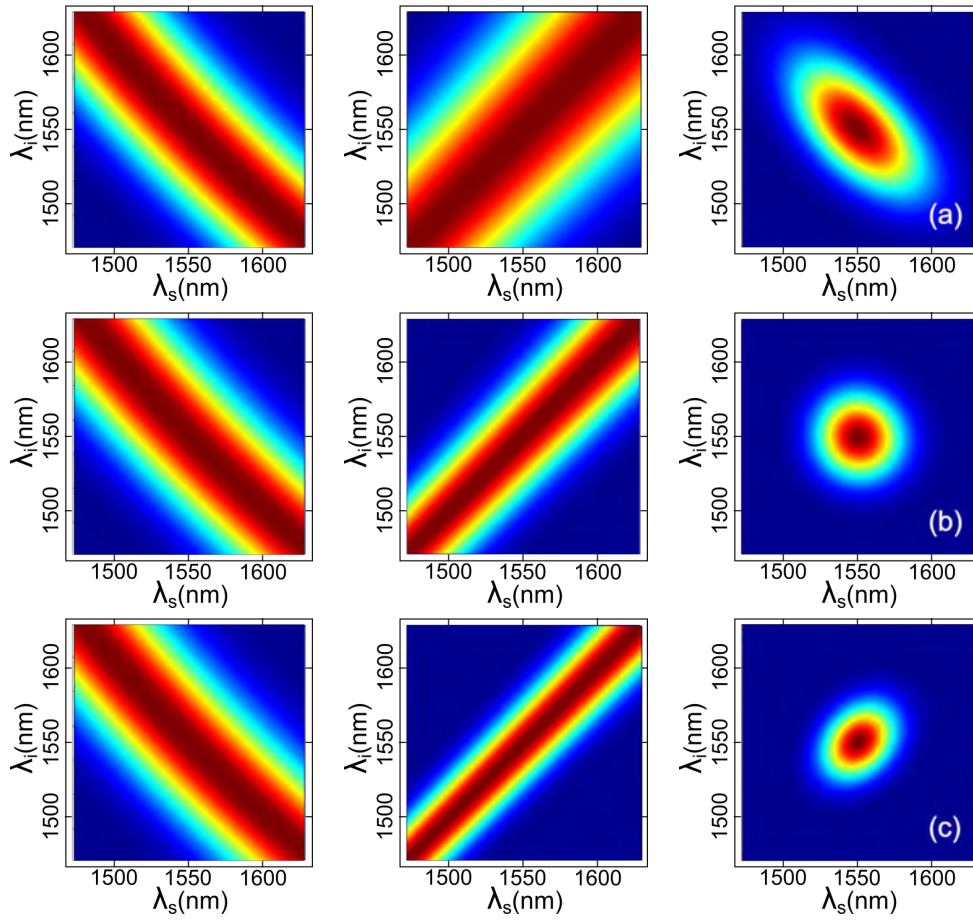
### 4.3.2 Radio del cinturón de bombeo



**Figura 4.7:** Variación del número de Schmidt de la función JSI en función del radio del cinturón de bombeo (a) con un ancho espectral del bombeo de  $14\text{nm}$  y tres radios de cinturón de acoplamiento diferentes y para (b) un radio de cinturón de acoplamiento de  $800\mu\text{m}$  y tres cinturones de bombeo diferentes.

En la figura 4.7 se observa que la dependencia del número de Schmidt respecto al radio de cinturón de bombeo cambia de manera más radical en el caso en el que se varía el radio del cinturón de acoplamiento a la fibra óptica (a), frente al cambio en el ancho espectral del bombeo (b). Se observa también que un estado con un número de Schmidt mayor puede obtenerse mediante la disminución del ancho espectral, de acuerdo con lo que se observó en la sección 4.3.1. Sin embargo, un cambio en el cinturón de acoplamiento no aumenta el número de Schmidt para cinturones del bombeo pequeños. El aumento en el cinturón de acoplamiento provoca una curva con un mínimo más pronunciado para la gráfica de la dependencia del número de Schmidt contra el cinturón del bombeo, lo que significa un cambio de correlación espectral más marcado.

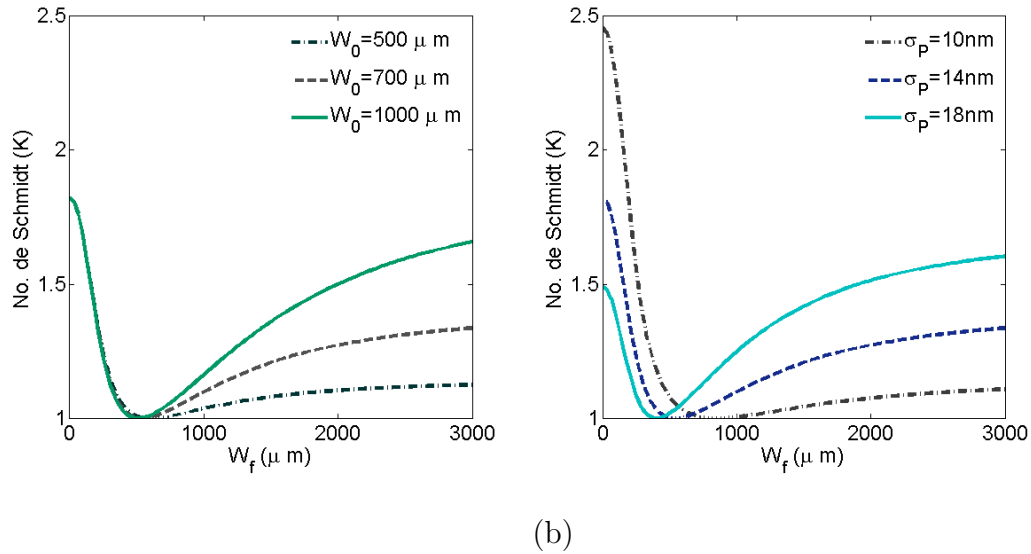
En la figura 4.8 se observan la envolvente espectral, la función de *phasing* y la JSI para tres estados distintos con un ancho espectral de bombeo de  $14\text{nm}$  y un cinturón de acoplamiento de  $1400\mu\text{m}$ , para los que se tiene un cinturón del bombeo de  $150\mu\text{m}$ ,  $300\mu\text{m}$  y  $450\mu\text{m}$ .



**Figura 4.8:** Cambio de función de *phasematching* y JSI respecto al radio de cinturón del bombeo. El ancho espectral del bombeo es en todos los casos de  $14\text{nm}$  y el cinturón de acoplamiento de  $1400\mu\text{m}$ . Se utilizaron cinturones de bombeo con radio de  $W_0 = 150\mu\text{m}$ ,  $K = 1.225$ ;  $W_0 = 300\mu\text{m}$ ,  $K = 1.007$ ;  $W_0 = 450\mu\text{m}$ ,  $K = 1.045$ .



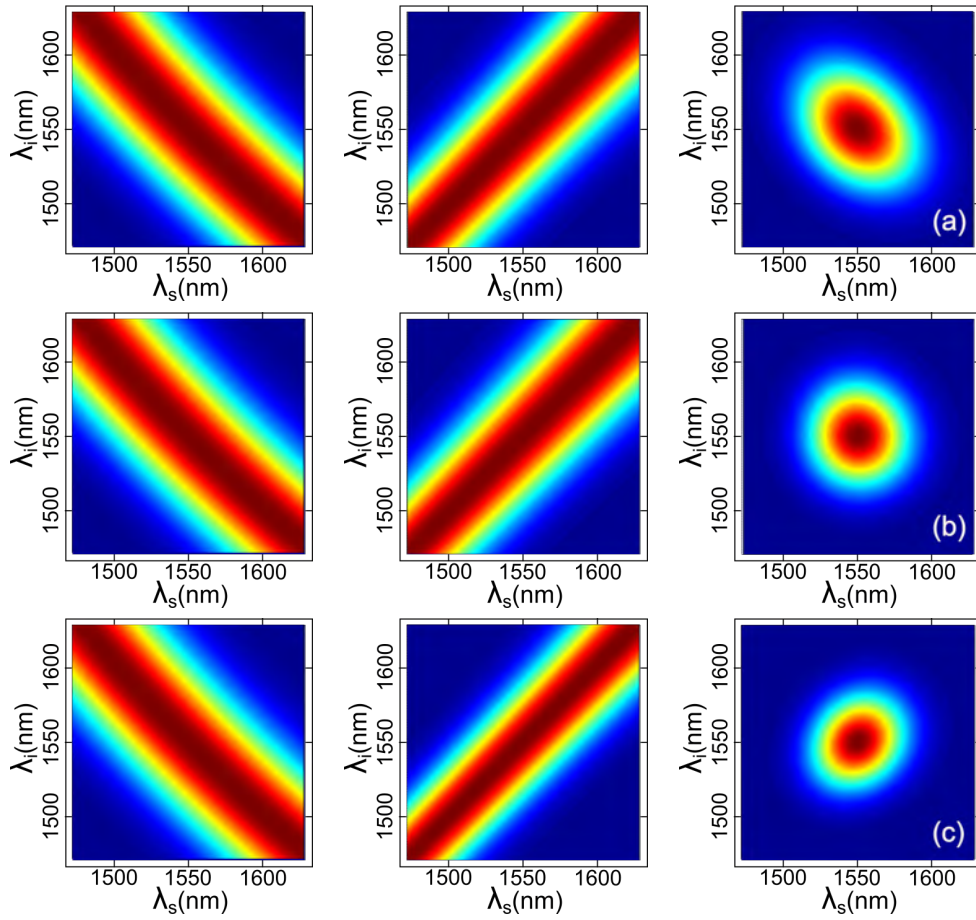
### 4.3.3 Radio del cinturón de acoplamiento



**Figura 4.9:** Variación del número de Schmidt de la función JSI en función del cinturón de acoplamiento (a) con un ancho espectral de bombeo de  $14 \text{ nm}$  y tres radios de cinturón de bombeo y para (b) un cinturón de bombeo de  $700 \mu\text{m}$  y tres casos del ancho espectral del bombeo.

La figura 4.9 representa la variación del número de Schmidt respecto al radio del cinturón de acoplamiento para tres cinturones de bombeo distintos, (a), y para tres anchos espectrales diferentes, (b). Es notorio que el aumento en el cinturón del bombeo, hace más pronunciado el mínimo de la función  $K(W_f)$ , lo que sucede de manera parecida para un ancho espectral grande. Sin embargo, de acuerdo con lo observado en las dos secciones anteriores, un aumento en el ancho espectral del bombeo reduce el número de Schmidt máximo que puede obtenerse para un estado cuando en la fuente el radio del cinturón de acoplamiento tiende a cero.

En la figura 4.10 se observan la envolvente espectral, la función de *phaseshifting* y la JSI para tres estados distintos donde el único parámetro que varía de la fuente es el radio del cinturón de acoplamiento.



**Figura 4.10:** Cambio de la función de *phasematching* y JSI respecto al cinturón de acoplamiento. El ancho espectral del bombeo es en todos los casos de  $17\text{nm}$  y el cinturón de acoplamiento de  $1000\mu\text{m}$ . Se utilizaron cinturones de bombeo con radio de  $W_f = 300\mu\text{m}$ ,  $K = 1.044$ ;  $W_f = 400\mu\text{m}$ ,  $K = 1.005$ ;  $W_0 = 500\mu\text{m}$ ,  $K = 1.015$ .

### 4.3.4 Dependencia de la correlación espectral a $\sigma_P$ , $W_0$ y $W_f$

Resulta evidente que cambios en el número de Schmidt representan cambios en la correlación espectral del estado. El número de Schmidt es un parámetro cuyo mínimo es 1 y este valor representa, en este caso, un estado sin enredamiento en las variables fotónicas de frecuencia. El número de Schmidt es una función dependiente, entre otros parámetros, del radio de cinturón de bombeo  $W_0$  y su ancho espectral  $\sigma_P$ , así como del radio del cinturón de acoplamiento  $W_f$ .

De acuerdo con los resultados obtenidos en las simulaciones y presentados en las gráficas se 4.5-4.10, se observa que el estado de los fotones generados pasa de tener una correlación espectral negativa a una positiva al aumentar alguno de los parámetros  $\sigma_P$ ,  $W_0$  o  $W_f$ . Se puede apreciar también que el cambio de correlación resulta más sensible a variaciones del cinturón de acoplamiento que a variaciones en los parámetros del bombeo.

Para un bombeo cuyo radio del cinturón sea de entre  $500$  y  $1000\mu m$  y con un ancho espectral que esté entre los  $10$  y los  $18nm$ , que corresponden a los parámetros permitidos en el montaje experimental, la correlación espectral del estado será negativa para radios del cinturón de acoplamiento menores a aproximadamente  $600\mu m$ , de acuerdo con la figura 4.9, lo que concuerda con las figuras 4.5(a) y 4.7(a). En otras palabras, dadas las características de la fuente, no será posible obtener un estado sin correlación espectral o con una correlación espectral positiva para cinturones de acoplamiento menores a los  $600\mu m$ .

De las figuras 4.5(a) y 4.9(a) se observa que el cambio en el radio del cinturón del bombeo no afecta los valores del ancho espectral del bombeo o del cinturón de acoplamiento para los que se obtiene un estado sin correlación espectral, sólo influye en la pendiente de la función K.

Por su parte, de la figura 4.7(b) 4.9(b) se puede apreciar que el ancho espectral afecta la pendiente de la función K así como los valores de  $W_0$  y  $W_f$  para los que el estado presenta una correlación espectral nula.

# 5

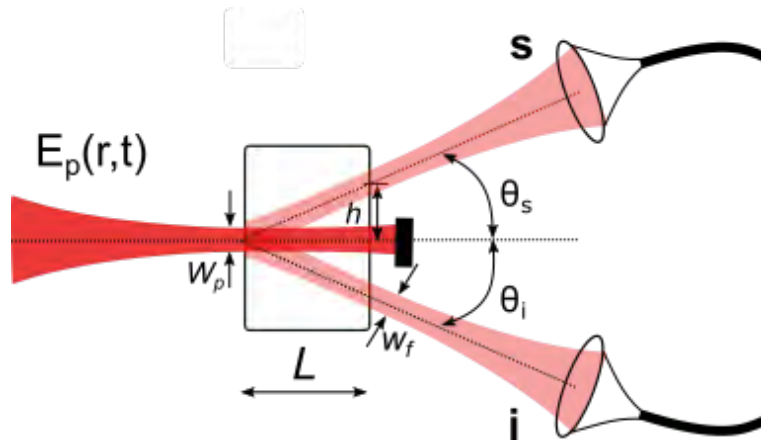
## Arreglo experimental, detección de coincidencias y resultados

En esta implementación del proceso de SPDC, el cristal no lineal fue bombeado con un láser pulsado Ti:Sa centrado en  $775nm$ , con una frecuencia de repetición de  $90MHz$ , para producir parejas de fotones alrededor de los  $1550nm$ , emitidas con un ángulo de  $20.3^\circ \pm 0.5$  respecto al cristal BBO donde fueron generadas. El ancho espectral del bombeo se varió manualmente entre  $10nm$  y  $18nm$ . Los fotones generados se acoplaron a fibras ópticas monomodales cuyas puntas se encuentran a  $13.5cm$  del cristal, distancia a la que coinciden los cinturones de emisión y acoplamiento. La finalidad de las fibras ópticas, entre otras, es eliminar posibles correlaciones espaciales. Posteriormente, se propagaron a través de un espectrómetro de fibra, que en este caso consiste en  $5km$  de fibra óptica, y cuyo funcionamiento se explicará en la sección 5.1.

La imagen 5.1 muestra un esquema de la generación de parejas de fotones mediante este proceso y su acoplamiento a fibras ópticas. De acuerdo con el capítulo 3 de este trabajo, las propiedades de los fotones detectados están completamente determinadas por las propiedades del haz de bombeo, del cristal no lineal y los modos de colección de la fibra óptica.

La detección de los fotones generados se hace mediante un par de fotodiodos de avalancha (APD por sus siglas en inglés) *id Quantique id201 Single Photon Detector Module* basados en InGaAs/InP. Estos detectores trabajan para un rango de longitudes de onda que va de los  $900nm$  a los  $1700nm$ . Los APD se basan en el efecto de ionización por impacto para la detección; en este proceso, un electrón generado por la absorción de un fotón con la suficiente energía cinética puede generar nuevos pares electrón-hueco en los semiconductores del fotodiodo al dar parte de su energía a otro electrón, de forma que este pase de la banda de valencia a la banda de conducción. Luego, la corriente generada por la absorción de los fotones incidentes es convertida en una señal eléctrica que indica una detección.

El ruido interno de los APD proviene de cuentas oscuras o de un efecto conocido como *after pulsing*. En el momento de la detección, es posible excitar un electrón térmicamente y que produzca el efecto cascada, ocasionando una cuenta falsa; este tipo de señales corresponden a cuentas oscuras. Por otro lado, los electrones o huecos pueden ser capturados por impurezas del material y estimular una avalancha. Debido a que su tiempo de decaimiento es grande, la avalancha es detectada. A este fenómeno se le



**Figura 5.1:** Esquema de la generación de fotones y su acoplamiento a fibra óptica[1]. Un haz pulsado de longitud de onda central de  $775nm$  incide sobre un cristal no lineal de longitud  $L$ , en éste se generan parejas de fotones con un ángulo de emisión de  $20.3 \pm 0.5^\circ$ . Son acoplados a fibras ópticas monomodales con lentes de distancia focal de  $8mm$  o  $15.29mm$ , dependiendo de la correlación espectral deseada.

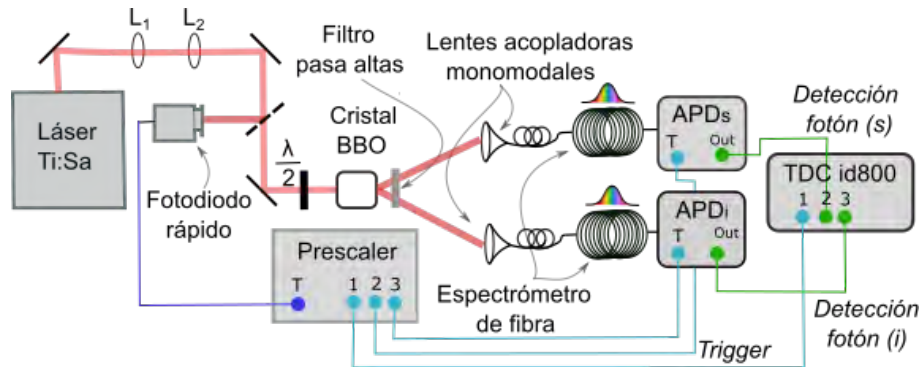
conoce como after-pulsing.

En el régimen de longitudes de onda de telecomunicaciones, debido a la pequeña brecha entre la banda de valencia y la banda de conducción, los APD deben ser operados en modo *gated* para suprimir parte de las cuentas oscuras y afterpulsing [21]. Esto quiere decir que se "abren" compuertas de detección a frecuencia constante. Si la amplitud de la avalancha creada por el arribo de un fotón supera el umbral de alguna compuerta, se cuenta una detección. En este caso, las compuertas se abren con una frecuencia de  $1.5MHz$  y tienen un ancho temporal de  $50ns$ . El tiempo de respuesta entre el arribo de un fotón y la cuenta de una detección es de  $28ns$  [22]. En particular, el afterpulsing se corrige casi en su totalidad usando un tiempo muerto de  $20ns$  entre ventanas de detección para cada APD, a diferencia de las cuentas oscuras, que requieren del post procesamiento de los datos.

La señal que sincroniza el disparo de las compuertas de detección proviene de un prescaler *Stanford Research System DG646 Digital Delay Generator*, que es activado con señales electrónicas TTL generadas por un fotodiodo rápido *Thorlabs DET10A*. El fotodiodo rápido recibe una señal óptica de los pulsos del haz de bombeo y genera una señal eléctrica con esta frecuencia de repetición. El prescaler se encarga de discriminar cierto número de pulsos que recibe como señal con la finalidad de reducir su frecuencia, ya que los APD soportan una frecuencia máxima de  $8MHz$  para la apertura de las compuertas de detección.

La medición de los tiempos de llegada de los fotones se hace mediante el *Time Tagger id800*, el cual etiqueta los tiempos de llegada de las señales que recibe en cada canal. Recibe una señal "referencia" proveniente del prescaler y las señales de detección de cada APD, en tres canales distintos. De acuerdo con la calibración del espectrómetro de fibra,

se establece una función  $\omega(t)$  que asigna a cada tiempo de arribo una frecuencia. Cada fotón convertido conforma una dupla  $(t_s, t_i) \rightarrow (\omega_s(t_s), \omega_i(t_i))$ , cuya gráfica corresponde a la medición de la JSI. Un esquema del montaje de se muestra en la figura 5.2.



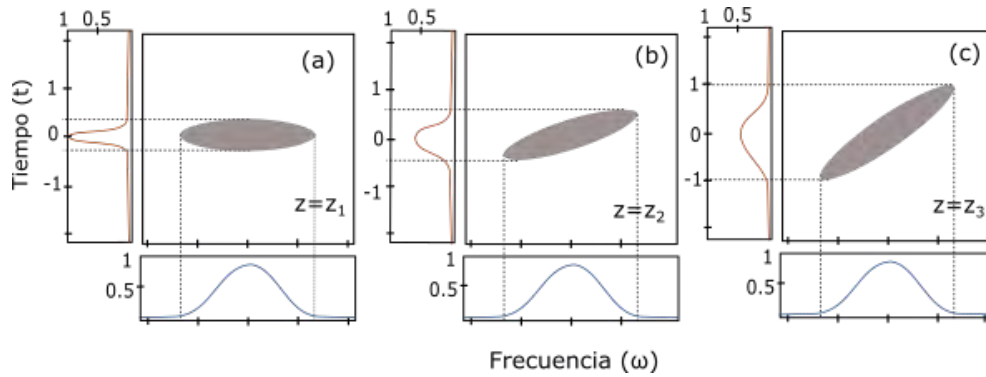
**Figura 5.2:** Arreglo experimental. El cristal no lineal es un BBO, en el cual incide un haz pulsado de bombeo de longitud de onda central de  $775nm$ , cuyo ancho espectral varía entre los  $10nm$  y  $18nm$ . Los fotones generados son acoplados a fibras monomodales que desembocan en un espectrómetro de fibra. Posteriormente son detectados cada uno con un APD  $InGaAs$ , cuya señal de detección es etiquetada temporalmente con un TDCid800.

## 5.1 Espectrómetro de fibra

Parte clave de la medición de la correlación de los fotones generados es el espectrómetro de fibra, pues permite la medición precisa y eficiente del espectro de los fotones individuales [21]. Debido a que los pulsos del láser tienen un ancho espectral considerable, entre  $10nm$  y  $20nm$ , resultan sensibles a la dispersión de velocidad de grupo (GVD *Group Velocity Dispersion*). Mediante la función de Wigner cronocíclica es posible representar el pulso como una función bidimensional en términos de tiempo de duración del pulso y frecuencias, representado en la figura 5.3; la figura 5.3(a) representa el pulso justo al ingresar a la fibra, cuyo trayecto recorrido dentro de esta es  $z_1 = 0$ , en las figuras 5.3(b),(c) el pulso ha recorrido una distancia  $z_2 < z_3$ , respectivamente. Las marginales de cada gráfica representan la distribución de intensidad temporal y espectral normalizadas, a partir de éstas se observa que el pulso óptico no presenta variaciones espectrales, mientras que aumenta su ancho temporal. Resulta importante hacer notar que la intensidad temporal del pulso, definida como [23]

$$\int \frac{1}{2\pi} W(E; t, \omega) d\omega = |E(t)|^2 = I_t(t) \quad (5.1)$$

donde  $W(E; t, \omega)$  es la función de Wigner, descrita en [23], es constante si no se consideran las pérdidas de luz en la fibra, en otras palabras, su ensanchamiento temporal no afecta su intensidad temporal total.



**Figura 5.3:** Función de distribución cronocíclica de Wigner para un pulso que atraviesa el espectrómetro de fibra para diferentes distancias recorridas  $z_1 = 0, z_2, z_3$ , con  $z_1 < z_2 < z_3$  [23].

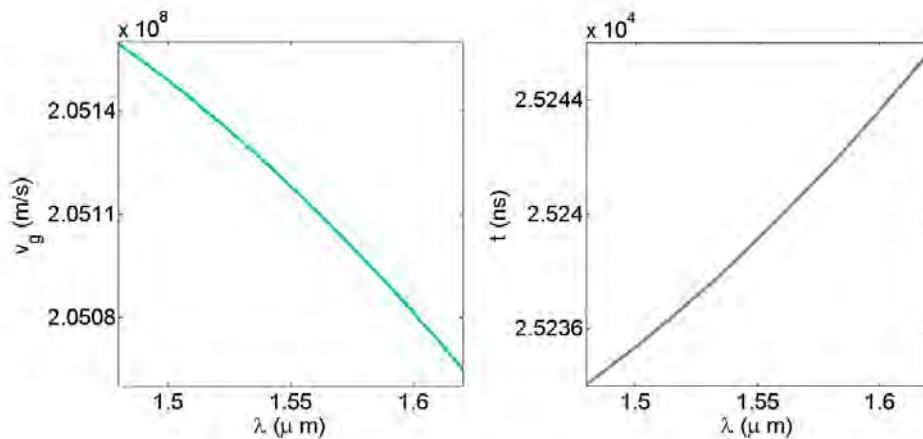
El incremento en la extensión temporal de cada pulso al atravesar el espectrómetro de fibra permite tener una mejor resolución espectral, pues aumenta la diferencia de tiempo de vuelo de cada componente espectral.

La calibración confiable del espectrómetro de fibra resulta fundamental en este trabajo. Se calculó de manera teórica, de acuerdo con el apéndice B, la velocidad de grupo para diversas componentes espectrales del bombeo. Después, se acopló un láser pulsado infrarrojo de *iDQuantique* de  $1550\text{nm}$  y se midió el tiempo de propagación de éste en el espectrómetro, obteniendo  $244.8 \pm 0.05 \text{ ns}$ , con lo que se calculó de manera precisa la longitud de la fibra monomodal, con un valor de  $5177 \pm 0.5\text{m}$ . Conociendo esta longitud y el tiempo de vuelo de las componente espectrales del pulso, es posible asignar a cada una de ellas una velocidad e interpolarla de acuerdo con el cálculo teórico de velocidad de grupo realizado anteriormente para designar una longitud de onda. Las curvas de calibración se muestran en la figura 5.4.

La curva de calibración puede mejorarse al cambiar el sistema de calibración a uno que incluya como referencia los espectros de varias fuentes de luz cercanas a los  $1550\text{nm}$  calibradas con un espectrómetro. Además, es posible incrementar la resolución espectral al aumentar la longitud de la fibra óptica, sin embargo, implica mayores pérdidas y un mayor costo.

## 5.2 Caracterización del cinturón del haz de bombeo y cinturones de acoplamiento

Dado que el radio del cinturón del haz de bombeo y el cinturón de acoplamiento en el centro del cristal juegan un papel importante en el cambio de la correlación de la JSI, fue necesaria su caracterización. Para el bombeo, se utilizaron tres cinturones distintos: uno de ellos sin enfocar el haz y los otros dos enfocando el haz con una lente de  $100\text{cm}$  y de  $75\text{cm}$  respectivamente, cuidando que el cinturón se encontrara en el centro del cristal.



**Figura 5.4:** Calibración utilizada para la obtención de la velocidad de grupo de cada longitud de onda que compone los pulsos del haz de bombeo al salir del espectrómetro de fibra. Tras el conocimiento de ésta, es posible relacionar a cada longitud de onda un tiempo de llegada al atravesar al fibra.

La medición del radio del cinturón y el rango de Rayleigh en cada caso se llevó a cabo obteniendo los perfiles de intensidad del haz con una cámara *iDus InGaAs DU490A* en diferentes posiciones y realizando un ajuste a gaussianas para calcular su ancho, con el fin de reconstruir el perfil del haz. El montaje para su medición se muestra en la figura 5.5, los valores obtenidos se muestran en la tabla 5.1.

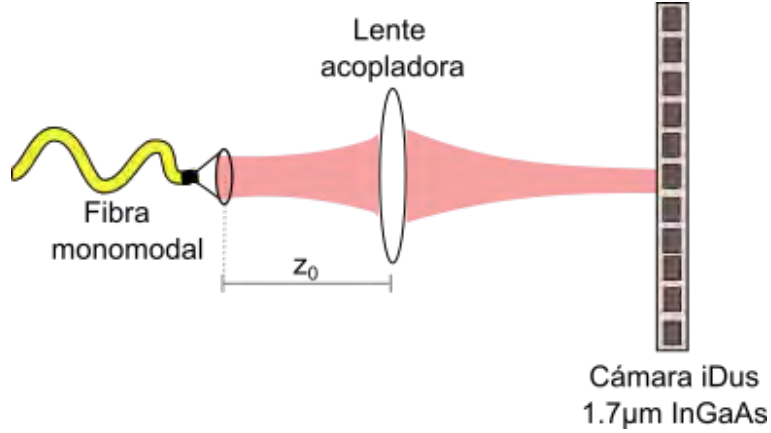
Lente [cm]	Rango de Rayleigh $z_R$ [cm]	Cinturón $W_0$ [ $\mu\text{m}$ ]
Sin lente	102.10	995.96
$f = 75\text{cm}$	22.29	236.06
$f = 100\text{cm}$	42.99	325.74

**Tabla 5.1:** Caracterización del rango de Rayleigh y cinturón del haz de bombeo.

Se utilizaron dos pares de lentes acopladoras a las fibras ópticas, de  $8\text{mm}$  y  $15.29\text{mm}$  de distancia focal. La variación de los cinturones de acoplamiento  $W_f$  se realizó manipulando la distancia entre la punta de la fibra y la lente acopladora, llamada  $z_0$ . Para 10 distancias distintas se midió el cinturón de acoplamiento de acuerdo con el esquema mostrado en la figura 5.5 y se comparó al obtenido de manera teórica.

Para calcular el cinturón de acoplamiento a partir de la distancia  $z_0$  se parte de las características de la fibra óptica: tiene una apertura numérica  $NA = 0.14$  y un diámetro  $D_f = 10.5\mu\text{m}$ . Se supone entonces que el cinturón del haz gaussiano antes de atravesar al lente es  $W_{0_1} = \frac{1}{2}D_f$ ; a partir de éste se calcula el rango de Rayleigh sabiendo que  $z_R = \frac{W_0^2\pi}{\lambda}$ . Utilizando el método matricial para el análisis de sistemas ópticos se tiene que la matriz de transformación para una lente delgada está dada por [8]





**Figura 5.5:** Arreglo experimental para la medición de los cinturones de acoplamiento. Para cada posición de  $z_0$  se midió en diez puntos posteriores a la lente la distribución espacial de intensidad del haz, ajustando éstas a gaussianas fue posible reconstruir el perfil del haz.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

El *parámetro*  $q$  del haz gaussiano satisface  $q(z) = z + iz_R$  y especifica las propiedades del haz en un punto  $z$  en particular. Dada la matriz del sistema óptico, la ecuación de evolución del sistema se define por [8]

$$q'(z) = \frac{q(z)}{1 - \frac{q(z)}{f}} \quad (5.3)$$

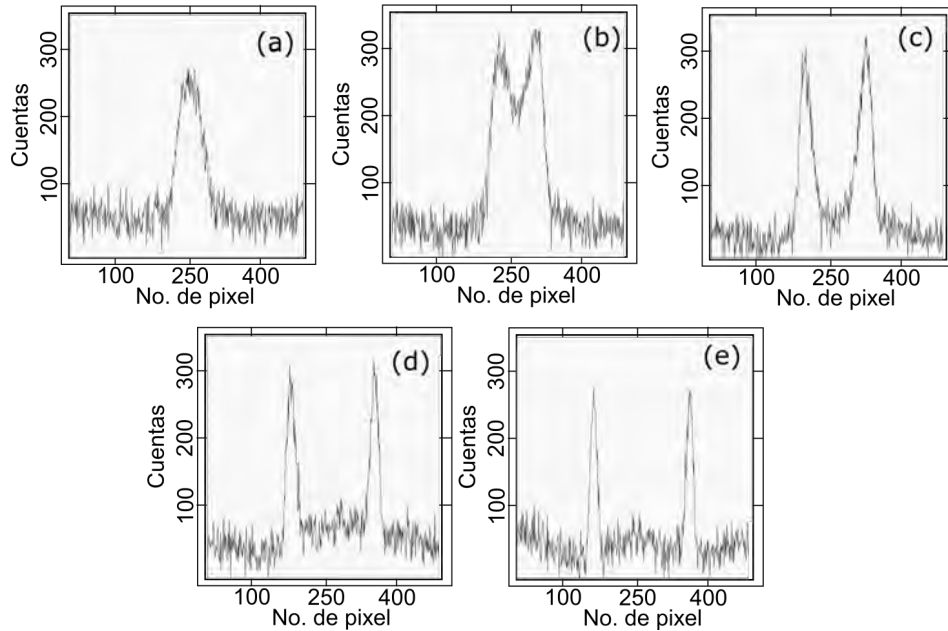
La parte real de  $q(z)$  corresponde a la distancia entre la posición del cinturón y la lente, mientras que la parte imaginaria del *parámetro*  $q$  representa el rango de Rayleigh del haz después de haber atravesado la lente; con éste se calcula en cinturón de acoplamiento  $W_f$ , sin embargo, la distancia entre la lente acopladora y el cristal es de  $17\text{cm}$  y está fija, por lo que es necesario finalmente calcular el cinturón efectivo en el cristal, para lo que se utiliza la relación:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_r}\right)^2} \quad (5.4)$$

### 5.3 Perfil de intensidad de fotones generados

Haciendo uso de la cámara *iDus InGaAs DU490A* fue posible obtener los perfiles de intensidad de los fotones generados mediante SPDC tipo I por el cristal BBO (figura 5.6). Fue colocada a la salida del cristal y se desplazó siguiendo el eje de propagación

del bombeo; se tomaron 5 imágenes del cono, cada una con una distancia de  $0.3\text{cm}$  entre ellas.



**Figura 5.6:** Cortes transversales del cono de fotones generados mediante SPDC tipo I en un BBO. La figura (a) se tomó con la cámara a la salida del cristal, las figuras (b-e) se encuentran a  $1\text{cm}$  de distancia entre ellas desplazando la cámara sobre el eje de propagación del bombeo y alejándose del cristal.

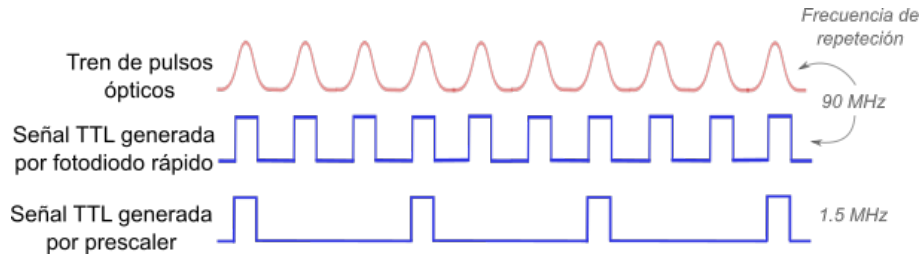
## 5.4 Detección de coincidencias con TDC id800

Como se ha mencionado anteriormente, la detección de los fotones generados se realiza en los APD con ventanas de detección y cada una puede detectar únicamente un fotón. Es claro que, si por cada pulso de luz que incide en el cristal se abriera una ventana, sería posible detectar todos los fotones generados. La tasa de conversión del cristal utilizado es baja, es por ello que no para todos los pulsos ópticos hay una pareja de fotones generados y, a pesar de que para algún pulso podría haber más de un fotón que sea convertido paraméricamente, este suceso sería poco frecuente.

Una de las restricciones que presentan los APD *id201* en modo *gating* es que aceptan una frecuencia máxima de  $8\text{MHz}$  para el disparo de ventanas de detección. A pesar de que con el fotodiodo rápido se produce una señal TTL con la frecuencia de los pulsos del bombeo, es necesario modular su frecuencia y adecuarla a la frecuencia óptima para el disparo de ventanas en los APD.

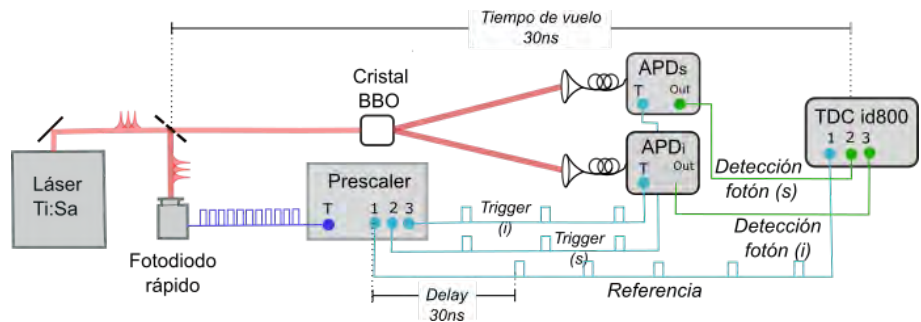
El prescaler permite la selección periódica de pulsos electrónicos proveniente de la señal generada por el fotodiodo rápido, con lo que genera un tren de pulsos electrónicos ade-

cuado para la apertura de las ventanas en los detectores, lo que se muestra esquemáticamente en la figura 5.7. Además, permite incluir un retraso al disparo de compuertas de cada APD, con lo que es posible optimizar la sincronización de las ventanas de detección y la llegada de los fotones generados.



**Figura 5.7:** El fotodiodo rápido genera una señal electrónica con la misma frecuencia de repetición que la de los pulsos provenientes del haz de bombeo. Esta señal ingresa al prescaler, que discrimina ciertos pulsos electrónicos para generar una señal electrónica adecuada para abrir ventanas de detección en los APD.

El prescaler genera tres señales distintas: dos de ellas abrirán las compuertas en el APD que detecta el fotón señal y el APD que detecta el fotón acompañante, y la tercera señal va al etiquetador de tiempos *TDC id800*, como puede verse en la figura 5.10. En la configuración utilizada, los caminos de los fotones generados desde el cristal BBO hasta su detección son idénticos, lo que asegura que fotones gemelos son detectados con ventanas que se abrieron de manera simultánea en los APD. Las señales de detección de los APD son enviadas al *TDC id800*. La diferencia temporal de los caminos de las 3 señales generadas por el prescales hasta llegar al etiquetador de tiempos es de  $30\text{ns}$ . La señal que va directamente del prescaler al *TDC id800* es una referencia al tiempo en que se abrieron las ventanas de detección y permite conocer el tiempo transcurrido entre que la ventana de detección fue abierta hasta que llegó un fotón que fue detectado.



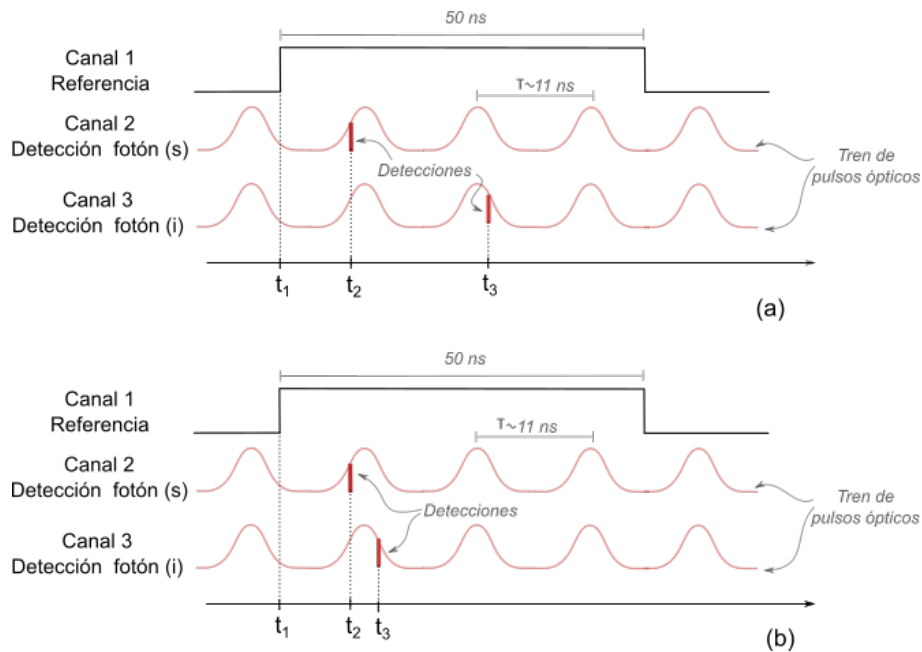
**Figura 5.8:** Esquema de las señales generadas por cada aparato.

#### 5.4.0.1 Modo de operación *TDC id800* y gráfica de la JSI

El *TDC id800* es un etiquetador de tiempos, en esta configuración recibe tres señales en tres canales distintos: el canal 1 corresponde a una referencia a la apertura de las

compuertas de detección en los APD que proviene directamente del prescaler y los canales 2 y 3 a las detecciones de los fotones señal y acompañante, respectivamente. Mediante un software, genera un listado en orden cronológico del canal donde recibió una señal y su tiempo de arribo. La resolución temporal que tiene el *TDC id800* en el listado de arribo de señales es de  $81ps$ . A cada cuanto temporal se le llama *bin*.

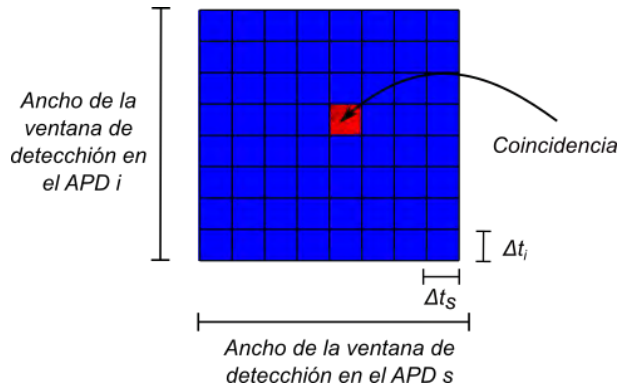
Se llamará coincidencia a las detecciones simultáneas en los APD, que se traduce en la detección de una pareja de fotones gemelos. Conocer los tiempos de llegada de los fotones generados permitirá graficar la función JSI del estado. La figura 5.9 esquematiza el criterio de coincidencias utilizado descrito en los siguientes puntos:



**Figura 5.9:** Criterio de coincidencias aplicado a los tiempos de arribo de los fotones detectados para graficar la función JSI. En (a) se tiene una detección de dos pulsos que no son gemelos, es decir, una coincidencia accidental. En cambio en (b) la detección es de una pareja de fotones gemelos.

- Se busca que de manera consecutiva hayan llegado las señales de los canales 123 o 132, pues eso querría decir que la detección del fotón señal (2) y la detección del fotón acompañante (3) han sido con compuertas disparadas al mismo tiempo.
- Cada compuerta de detección en los APD detecta un único fotón y, si la apertura de ventanas de detección se sincronizó correctamente con la llegada de la señal de referencia al canal 1 del *TDC id800*, la diferencia de tiempos  $t_2 - t_1$  y  $t_3 - t_1$  tiene que ser menor al ancho de la compuerta de detección utilizada, en este caso  $50ns$ .
- Debido a que la frecuencia de repetición de los pulsos del bombeo es de  $11ns$  y el ancho temporal de las ventanas de detección es de  $50ns$ , cabe más de un pulso óptico en cada ventana. Entonces, la detección de fotones en cada APD

con ventanas simultáneas no asegura que provengan del mismo pulso óptico, pues pueden ser dos fotones generados por pulsos ópticos que caen dentro de ventanas de detección simultáneas. A este tipo de coincidencias se les llama *coincidencias accidentales* y su tasa de conteo es mucho menor que la de coincidencias verdaderas, por lo que no afectan de manera importante el criterio descrito. La figura 5.9 esquematiza este punto.

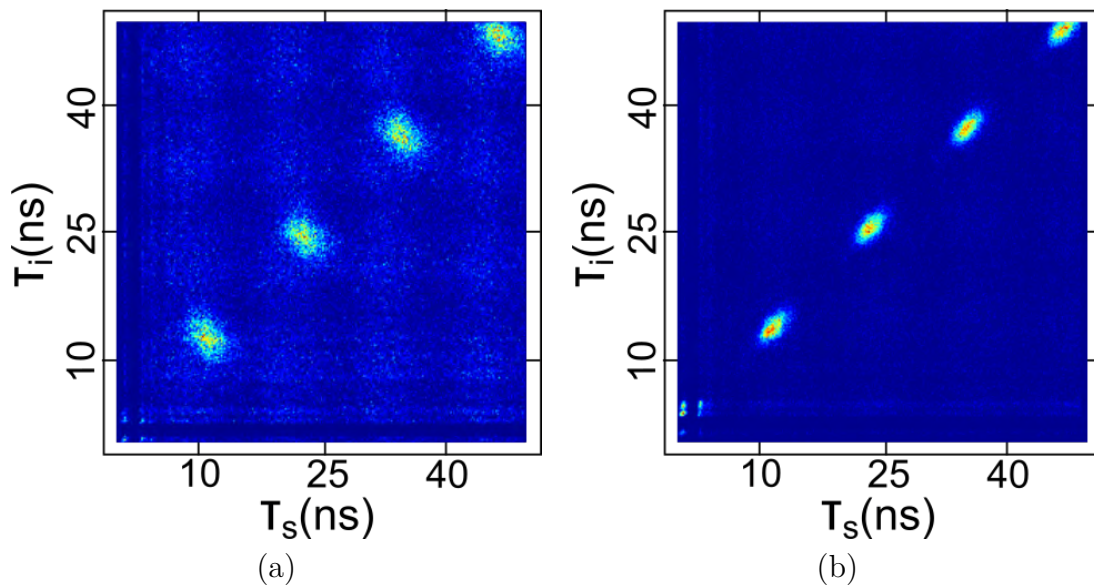


**Figura 5.10:** Matriz para graficar la función de JSI. De acuerdo al criterio de coincidencias mencionado, una coincidencia se grafica cuando la detección de dos fotones se encuentra en el intervalo temporal  $(t + n\Delta t, t + (n + 1)\Delta t)$

Cuando se grafica las coincidencias en el dominio temporal total de las ventanas de detección y se observa una diagonal intensa, como en la figura 5.11, es posible afirmar que hay una buena sincronización de las señales generadas por el prescaler, así como una buena alineación de la fuente. La optimización de la sincronización de las detecciones de los fotones y la referencia generada por el prescaler se alcanza cuando se maximizan las coincidencias, lo que puede observarse en un contador de coincidencias entre los canales del etiquetador de tiempo, parte del software del aparato.

Una vez que se ha detectado una coincidencia con los tiempos  $t_2, t_3$ , se obtiene una coordenada  $(t_s, t_i)$ . Previamente se creó un arreglo rectangular, cuyos lados tienen la longitud del ancho temporal de la ventana de detección en los dos APD y que está dividido en casillas. La resolución temporal de la gráfica de la JSI corresponde al ancho de cada casilla  $\Delta t$ . A cada casilla se le asigna el número de parejas  $(t_s, t_i)$  que entran en el intervalo  $(t + n\Delta t, t + (n + 1)\Delta t)$ , donde  $n - 1$  es el número de casillas. La gráfica de este arreglo corresponde a la gráfica de la JSI. Es posible realizar una corrección de cuentas oscuras a la gráfica de la JSI si se sustrae el ruido base de las mediciones.

Se mencionó anteriormente que la unidad temporal del *TDC iD800* es de 1bin, sin embargo, la distribución de tiempos en este aparato es asimétrica, es decir, el conteo en cada canal de este aparato está tendenciado a los bins pares. Una forma de compensar esta tendencia es juntar los conteos cada 2 bins, lo que implica que las casillas deben tener un ancho par.



**Figura 5.11:** Vista de coincidencias obtenidas en una ventana de detección del APD de  $50ns$  y un tiempo de exposición de 10 minutos con una resolución de  $324ps$  y cinturón del bombeo de  $252\mu m$  (a),  $675\mu m$  (b).

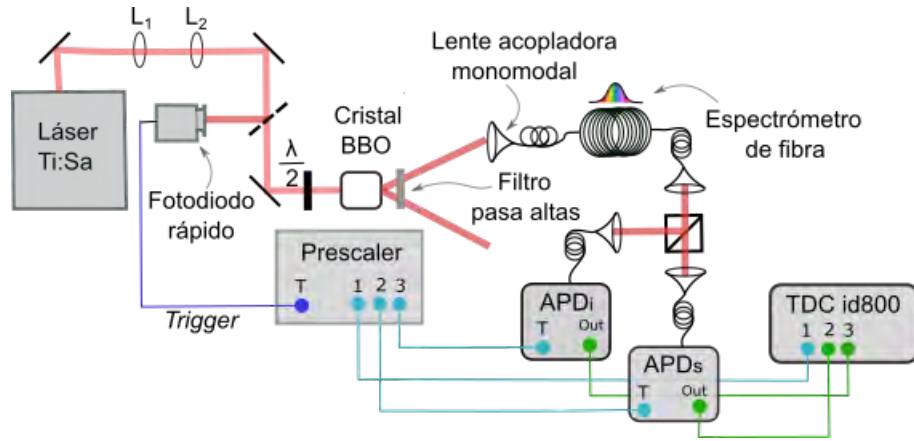
## 5.5 Medición de función de coherencia de segundo orden $g^2$

La medición de la función de coherencia de segundo orden se llevó a cabo colocando un divisor de haz a la salida de uno de los brazos de fotones generados y detectando las coincidencias de los fotones reflejados y transmitidos con dos APD, como se muestra en la figura 5.12. Las ventanas de detección utilizadas en los detectores tuvieron un ancho temporal de  $20ns$ , con lo que se aseguró que un solo pulso era detectado en cada una de ellas. El etiquetador de tiempos *ID800* se utilizó para establecer las coincidencias, en el canal 1 recibía una señal de referencia proveniente del prescaler, que indicaba el momento de apertura de las ventanas de detección; en el canal 2 recibía las detecciones provenientes del fotón transmitido en el divisor de haz y en el canal 3 del fotón reflejado. De acuerdo con los resultados analizados en la sección 2.5, haciendo uso de la ecuación (2.36), la función de coherencia de segundo orden se calculó mediante la siguiente relación

$$g^{(2)} = \frac{C_{123}N_C}{C_{12}C_{13}} \quad (5.5)$$

donde  $C_{123}$  corresponde a las coincidencias entre los canales 1, 2 y 3, es decir, las coincidencias detectadas entre los fotones transmitidos y reflejados en el divisor de haz.  $C_{12}$  y  $C_{13}$  representan las cuentas individuales de fotones transmitidos y reflejados, respectivamente. El número de compuertas abiertas para la medición de esta función

se representa con la variable  $N_C$ .



**Figura 5.12:** Arreglo experimental para la medición de la función de coherencia de segundo orden.

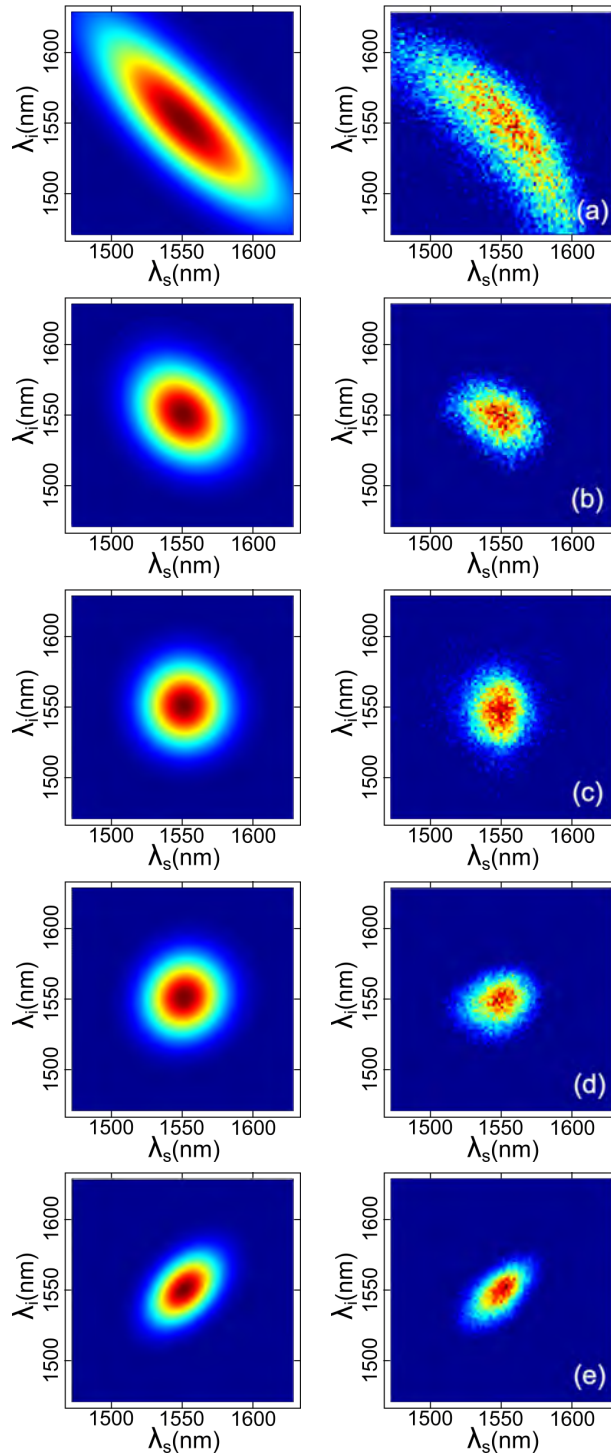
El valor de la función de coherencia de segundo orden, de acuerdo con el post procesamiento de datos implementado mediante Labview y Matlab, requiere de un alto número de datos, razón por la cual es necesario hacer mediciones de 20,000 o 30,000 eventos, hasta que su valor se haya corregido.

## 5.6 Resultados

Para la adquisición de datos se utilizaron ventanas de detección con duración de  $50ns$ , preestablecidas en los APD's, y fueron disparadas con una frecuencia de  $1.5MHz$ . En la figura 5.13 se muestra la manipulación de la correlación espectral del estado de los fotones generados, junto con la medición de la función de coherencia de segundo orden,  $g^{(2)}$ . A partir de las mediciones experimentales se calculó el coeficiente de correlación de Pearson  $\rho$  y el número de Schmidt  $K_{exp}$ , calculado como la traza de la matriz de densidad. También se calculó el número de Schmidt a partir de cada simulación  $K_{sim}$  y a partir del valor obtenido de la función de correlación de segundo orden  $g^{(2)}$  medida para el estado, utilizando  $K(g^{(2)}) = \frac{1}{1+g^{(2)}}$ . Estos resultados se presentan en la tabla 5.2.

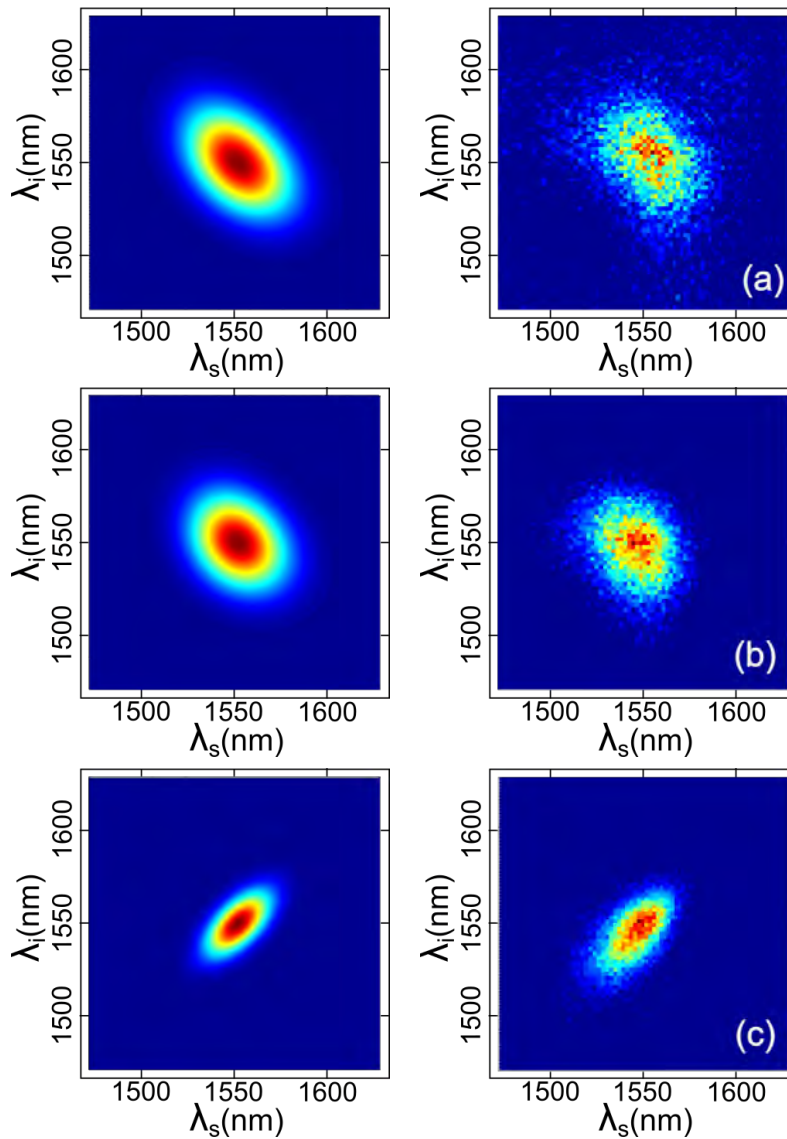
En las figuras 5.14-5.16 se muestran las mediciones experimentales de la JSI y la simulación del respectivo estado. Se observa el control experimental de la correlación espectral con la variación de un sólo parámetro:

- Cinturón de bombeo  $W_0$  en la figura 5.14
- Ancho espectral  $\sigma_P$  en la figura 5.15
- Cinturón de acoplamiento  $W_f$  en la figura 5.16



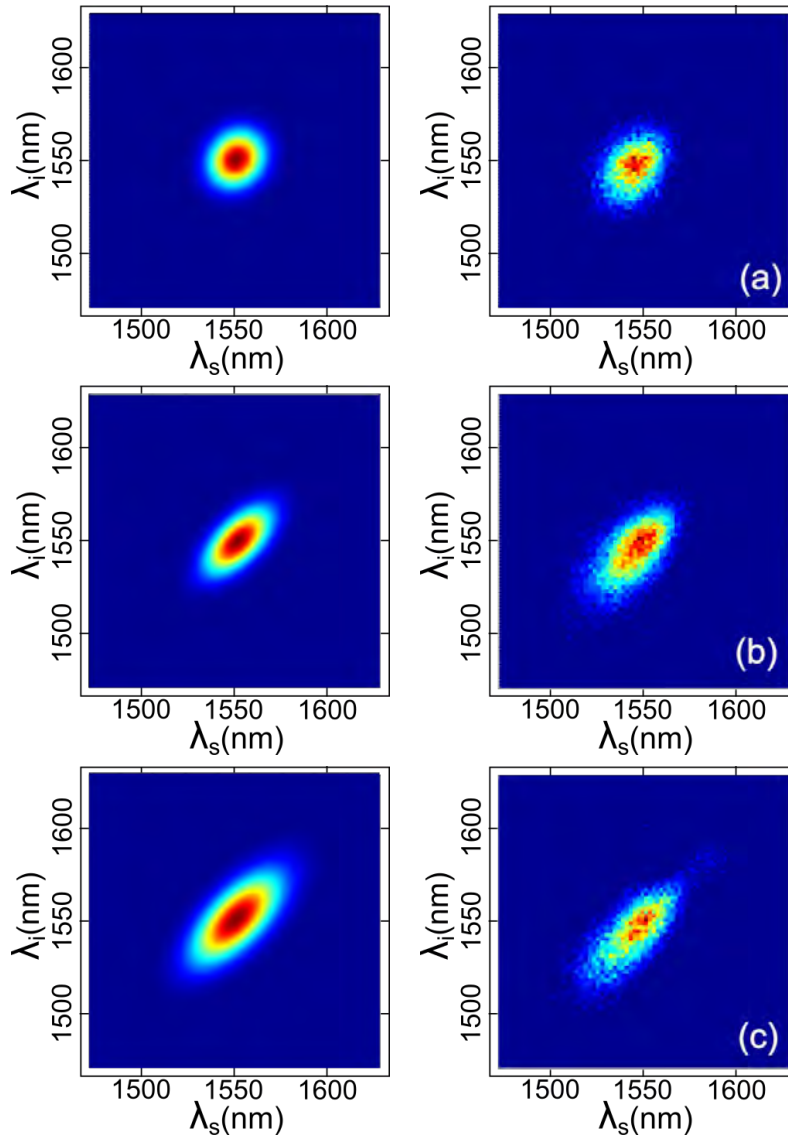
**Figura 5.13:** Se muestra el control experimental completo de la correlación espectral con la variación del cinturón de acoplamiento  $W_f$ . Se utilizó un ancho de banda del bombeo de  $\sigma_p = 16.12 \pm 0.34 \text{ nm}$  centrado en  $\lambda_0 = 775.73 \pm 0.007 \text{ nm}$ , con un radio del cinturón de bombeo de  $995 \mu\text{m}$  y cinturones de acoplamiento en cada estado de: (a)  $225 \mu\text{m}$ , (b)  $524 \mu\text{m}$ , (c)  $691 \mu\text{m}$ , (d)  $774 \mu\text{m}$  y (e)  $1338 \mu\text{m}$ .





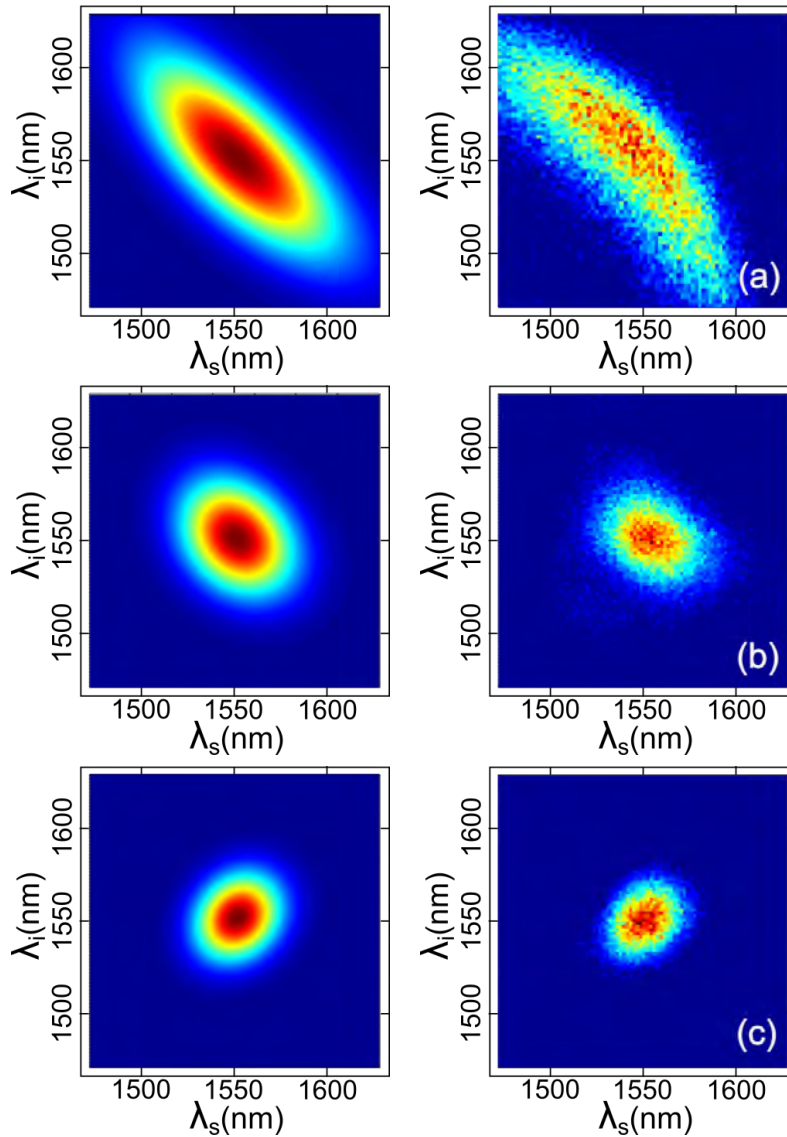
**Figura 5.14:** Se muestra el control experimental de la correlación espectral con la variación del cinturón de bombeo  $W_0$ . El bombeo tiene un ancho espectral de  $\sigma_p = 14nm$  y el un cinturón de colección es de  $1200\mu m$ . Los valores de los cinturones de bombeo utilizados son:

- (a)  $W_0 = 272\mu m$ , coeficiente de correlación  $\rho = -0.04$ , número de Shmidt  $K = 1.31$ .
- (b)  $W_0 = 392\mu m$ , coeficiente de correlación  $\rho = -0.0039$  y número de Shmidt  $K = 1.10$ .
- (c)  $W_0 = 995\mu m$ , coeficiente de correlación  $\rho = 0.11$  y número de Shmidt  $K = 1.25$ .



**Figura 5.15:** Se muestra el control experimental completo de la correlación espectral con la variación del ancho espectral  $\sigma_P$ . La medición de las funciones JSI se realizó un cinturón de bombeo  $W_0 = 640\mu m$  y un cinturón de colección  $W_f = 1200\mu m$ . Los valores de los anchos espectrales utilizados son:

- (a)  $\sigma_P = 10nm$ , coeficiente de correlación  $\rho = 0.07$  y número de Shmidt  $K = 1.20$ .
- (b)  $\sigma_P = 14nm$ , coeficiente de correlación  $\rho = 0.11$  y número de Shmidt  $K = 1.25$ .
- (c)  $\sigma_P = 19nm$ , coeficiente de correlación  $\rho = 0.22$  y número de Shmidt  $K = 1.79$ .



**Figura 5.16:** Se muestra el control experimental completo de la correlación espectral con la variación del cinturón de acoplamiento. La medición de las funciones JSI se realizó un cinturón de acoplamiento  $W_0 = 191.71\mu m$  y un ancho espectral de  $13.21 \pm 0.269$ , centrado en  $775 \pm 0.006nm$ . Los valores del cinturón de acoplamiento utilizado son:

(a)  $W_f = 225\mu m$ , se obtuvo un coeficiente de correlación  $\rho = -0.793$  y número de Shmidt  $K = 2.058$ , así como  $g^{(2)} = 1.4859$

(b)  $W_f = 623\mu m$ , se obtuvo un coeficiente de correlación  $\rho = -0.213$  y número de Shmidt  $K = 1.22$ , así como  $g^{(2)} = 1.819$

(c)  $W_f = 1000\mu m$ , se obtuvo un coeficiente de correlación  $\rho = 0.265$  y número de Shmidt  $K = 0.757$ , así como  $g^{(2)} = 2.3211$

### 5.6.1 Análisis de resultados

En la figura 5.13 se observa el cambio de correlación del estado con un ancho de banda del bombeo de  $\sigma_p = 16.12 \pm 0.34nm$  centrado en  $\lambda_0 = 775.73 \pm 0.007nm$ , un radio del cinturón de bombeo de  $995\mu m$  y cinturones de acoplamiento en cada estado de: (a)  $225\mu m$ , (b)  $524\mu m$ , (c)  $691\mu m$ , (d)  $774\mu m$  y (e)  $1338\mu m$ . En la tabla 5.2 se presentan los valores calculados del coeficiente de correlación de Pearson  $\rho$ , el número de Schmidt  $K_{exp}$  calculado como la traza de la matriz de densidad de la medición, el número de Schmidt a partir cada simulación  $K_{sim}$  y éste mismo a partir del valor obtenido de la función de correlación de segundo orden  $g^{(2)}$ , usando la relación  $K(g^{(2)}) = \frac{1}{1+g^{(2)}}$ .

Fig. 5.13	Cinturón de acoplamiento $W_f[\mu m]$	Coeficiente de correlación $\rho_{exp}$	$g^{(2)}$	No. de Schmidt $K$		
				$K_{sim}$	$K_{exp}$	$K(g^{(2)})$
(a)	$225\mu m$	-0.80	1.55	1.66	1.97	1.81
(b)	$524\mu m$	-0.34	1.82	1.06	1.15	1.22
(c)	$691\mu m$	0.02	1.90	1.001	1.05	1.11
(d)	$774\mu m$	0.19	1.83	1.004	1.06	1.19
(e)	$1338\mu m$	0.49	1.86	1.11	1.17	1.17

**Tabla 5.2:** Valores del coeficiente de correlación y el numero de Schmidt para distintos estados obtenidos con un bombeo de ancho espectral de  $16.12 \pm 0.34nm$  centrado en  $775.73 \pm 0.007nm$  con radio de cinturón de  $995\mu m$ .

Para los valores obtenidos del número de Schmidt de los estados presentados en en la figura 5.13 en general se observa que  $K_{sim} < K_{exp} < K(g^{(2)})$ . El cálculo de  $K_{exp}$  se hace a partir de la matriz de densidad de la JSI obtenida experimentalmente, en la cual se pierde toda la información referente a la fase del estado, pues se obtiene midiendo intensidades. Por su parte, el valor de  $K(g^{(2)})$  sí considera la fase del estado, lo que explica que en las mediciones presentadas en la figura 5.13(b-e) se satisfaga la desigualdad  $K_{exp} < K(g^{(2)})$ ; es probable que para el estado presentado en la figura 5.13(a) no se satisfaga la desigualdad debido a la deformación que presenta la gráfica de JSI por la calibración del espectrómetro de fibra. Por otro lado, los valores  $K_{sim}$  y  $K_{exp}$  se obtienen de la misma manera para la JSI de la simulación y experimental respectivamente. Debido a que la JSI experimental presenta fluctuaciones en el número de cuentas (ruido) es que se observa que  $K_{sim} < K_{exp}$ .

En las figuras 5.14- 5.16 se muestra el cambio de la JSI variando un sólo parámetro a la vez: el radio del cinturón de bombeo  $W_0$ , el ancho espectral del bombeo  $\sigma_p$  o el cinturón de acoplamiento a las fibras monomodales  $W_f$ , todas ellas en concordancia con las simulaciones. Para estas mediciones no se llevó a cabo la medición de la función de correlación de segundo orden, por lo que sólo se presenta el valor del coeficiente de correlación de Pearson  $\rho$  y el número de Schmidt calculados a partir de las mediciones experimentales.

Se observa que el cambio en la correlación espectral medida depende fuertemente de la variación de cada uno de estos parámetros:

- El aumento del ancho espectral de los pulsos del bombeo provoca un aumento en la correlación de la JSI del estado medido.
- El incremento del radio del cinturón del haz de bombeo propicia que la correlación de la JSI del estado aumente.
- El aumento del radio del cinturón de acoplamiento aumenta la correlación de la JSI del estado medido y la variación de sólo este parámetro brinda un control total en la correlación espectral del estado. Esto se debe también a que este parámetro, dadas las características de la fuente, puede variarse de manera más controlada.

# 6

## Conclusiones

En esta tesis se estudiaron de manera breve algunos de los aspectos de la óptica y de la óptica no lineal, que permiten entender el proceso de conversión paramétrica descendente espontánea tipo I, mediante el cual se generan las parejas de fotones en este trabajo. Por medio de un método perturbativo, se estudió el estado cuántico que describe a la pareja de fotones emitida del cristal, así como el estado cuántico de los fotones acoplados a fibras ópticas monomodales. Se observó que las soluciones que cumplen las condiciones de empatamiento de fases conllevan a correlaciones espaciales, en este caso dependientes de  $\theta_s, \theta_i$ , correlaciones espectrales, que involucran  $\omega_s, \omega_i$  y correlaciones espacio-espectrales, es decir, una combinación de las anteriores.

Del estado que describe los fotones generados al ser emitidos por el cristal, se estudiaron ciertas condiciones analíticas que conducen a la factorabilidad para el caso específico de fuentes degeneradas, a partir de imponer la separabilidad en la función de amplitud conjunta [1]. En estas condiciones se toma en cuenta, entre otras cosas, el empatamiento de la componente longitudinal de las velocidades de grupo de los fotones generados con la velocidad de grupo del bombeo y se delimita el tamaño la fuente. Es claro que los parámetros que determinan la factorabilidad del estado, determinan también el grado de correlación espectral del mismo. Del empatamiento de velocidades de grupo destaca la influencia del ancho de banda del bombeo  $\sigma_p$ , mientras que la restricción de las dimensiones físicas de la fuente provoca que la manipulación de parámetros como el cinturón del bombeo en el cristal  $W_0$ , la longitud del cristal  $L$  y los cinturones de acoplamiento  $W_f$  influyan en la correlación espectral de los fotones generados.

De las simulaciones realizadas de la función de intensidad conjunta se concluye que la variación en el radio del cinturón de acoplamiento resulta en un cambio de correlación más importante, respecto al cambio de correlación presentado ante la modificación en parámetros del bombeo. Así mismo, puede maximizarse el cambio de la correlación respecto a la variación del cinturón de acoplamiento si se elige un cinturón de bombeo grande, cercano a  $1000\mu m$  y un ancho espectral al rededor de  $18nm$ .

El resultado principal de este trabajo radica en la medición experimental de la función de intensidad espectral conjunta (JSI) de dos fotones generados mediante SPDC tipo I en un cristal de  $\beta$ -borato de bario (BBO), acoplados a fibras ópticas monomodales. Ésta se llevó a cabo graficando los tiempos de arribo de fotones generados tras recorrer un espectrómetro de fibra.

Una parte fundamental en la medición de la JSI reside en la calibración del espec-

trómetro de fibra, para el que la curva de calibración tiene errores sistemáticos, sin embargo, estas incertidumbres no presentan una restricción en el sistema ya que pueden reducirse al usarse más espectros de referencia. Mencionar que se puede aumentar la resolución, implicando mayores pérdidas y mayor gasto aumentando la longitud de la fibra.

Por otro lado, la resolución de los tiempos de arribo de los fotones es de  $2bins$ , es decir,  $0.16ns$ , lo que brinda una alta resolución espectral a la medición de la JSI, y corresponde al tiempo de resolución temporal mínimo permitido por el *TDC id800*. Es importante mencionar que este valor de resolución temporal queda muy por encima del *jitter* de los APD's, correspondiente a  $300ps$ ,

Se observa que las mediciones realizadas concuerdan con las simulaciones realizadas previamente en el proyecto. Para cada una de ellas se tuvo control del ancho espectral,  $\sigma_P$ , y radio del cinturón del haz de bombeo,  $W_0$ , así como del radio del cinturón de acoplamiento a fibra  $W_f$ . La variación de estos parámetros propició la obtención de distintas correlaciones en la JSI de acuerdo con lo esperado. Es posible concluir que el cambio en la correlación de estas mediciones depende fuertemente de la variación de los parámetros mencionados, en particular, el aumento en el ancho espectral de los pulsos  $\sigma_P$  y en radio del cinturón del bombeo  $W_0$ , provocan un aumento en la correlación de la JSI. Además, mediante el cálculo del número de Schmidt para cada medición se concluye que se tiene un control fino de la correlación espectral de la JSI con la manipulación de dichos parámetros.

Un aspecto importante de la fuente es su brillantez, que depende de factores como la eficiencia de conversión del cristal BBO, la eficiencia de colección de las fibras monomodales, la transmitancia del espectrómetro de fibra y la eficiencia de detección tanto de los APD como del *time tagger*. Cabe resaltar que uno de los factores que determinan la correlación espectral de los fotones generados es el cinturón de colección, y este parámetro influye también la eficiencia de colección de las fibras, por lo que resulta conveniente priorizar la elección de este parámetro con la finalidad de utilizar un cinturón de acoplamiento conveniente para una correlación espectral nula. Respecto a la eficiencia de detección de la fuente puede mencionarse que la tasa de coincidencias detectadas es bastante buena y permite medir de manera satisfactoria la JSI, sin embargo, sería posible mejorar el número de detecciones de utilizando APD's en modo *free running*; para esta modalidad no se requiere de compuertas de detección, pues ésta se realiza de manera continua. Sería posible entonces detectar "todos" los fotones generados y sólo sería necesario asegurar que el arribo de los fotones generados en cada canal del *TDC id800* es simultáneo.

Una de las posibles aplicaciones a futuro para esta fuente es tomografía de coherencia cuántica óptica, abreviada QOCT (en inglés Quantum Optical Coherence Tomography) [24][25].

A pesar de que se ha demostrado la manipulación experimental de la correlación espectral, el objetivo final de este proyecto es la obtención de estados factorizables para fotones generados en el rango de longitudes de onda de telecom, luego entonces, el siguiente paso conlleva a la medición de la correlación espacial de los fotones generados.

Dicha correlación puede analizarse observando la dependencia entre  $\theta_s$  y  $\theta_i$ , por lo que se propone para su medición restringir el ángulo de propagación  $\Delta\theta$  de los fotones a cada lente acopladora colocando una rendija enfrente de ella. Se realizaría entonces un barrido  $\Delta\theta_s$  vs  $\Delta\theta_i$ .





# Bibliografía

- [1] L. E. Vicent, A. B. U'Ren, L. Zhang, and I. A. Walmsley, “Design of bright, fiber-coupled and fully factorable photon pair sources for quantum information processing,” in “Conference on Lasers and Electro-Optics/Quantum Electronics and Laser Science Conference and Photonic Applications Systems Technologies,” (Optical Society of America, 2008), p. JTuA108.
- [2] B. Lounis and M. Orrit, “Single-photon sources,” *Reports on Progress in Physics* **68**, 1129 (2005).
- [3] A. B. U'Ren, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, “Photon engineering for quantum information processing,” *Quantum Info. Comput.* **3**, 480–502 (2003).
- [4] P. Lambropoulos and D. Petrosyan, *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information* (Springer Berlin Heidelberg, 2006).
- [5] E. Hecht, *Optics* (Addison-Wesley, 2002).
- [6] S. Walborn, C. Monken, S. Pádua, and P. S. Ribeiro, “Spatial correlations in parametric down-conversion,” *Physics Reports* **495**, 87 – 139 (2010).
- [7] J. C. Gutiérrez-Vega and M. A. Bandres, “Helmholtz–gauss waves,” *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 289–298 (2005).
- [8] B. Saleh and M. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley Series in Pure and Applied Optics (Wiley, 2007).
- [9] R. Boyd, *Nonlinear Optics*, Electronics & Electrical (Academic Press, 2003).
- [10] J. E. Midwinter and J. Warner, “The effects of phase matching method and of uniaxial crystal symmetry on the polar distribution of second-order non-linear optical polarization,” *British Journal of Applied Physics* **16**, 1135 (1965).
- [11] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light* (OUP Oxford, 2000).
- [12] O. A. Ivanova, T. S. Iskhakov, A. N. Penin, and M. V. Chekhova, “Multiphoton correlations in parametric down-conversion and their measurement in the pulsed regime,” *Quantum Electronics* **36**, 951 (2006).

- [13] G. R. P. Grangier and A. Aspect, “Experimental evidence for a photon anticorrelation effect on a beam splitter: A new light on single-photon interferences.” *EPL (Europhysics Letters)* **1**, 173 (1986).
- [14] J. J. Thorn, M. S. Neel, V. W. Donato, G. S. Bergreen, R. E. Davies, and M. Beck, “Observing the quantum behavior of light in an undergraduate laboratory,” *American Journal of Physics* **72**, 1210–1219 (2004).
- [15] A. Christ, K. Laiho, A. Eckstein, K. N. Cassemiro, and C. Silberhorn, “Probing multimode squeezing with correlation functions,” in “Research in Optical Sciences,” (Optical Society of America, 2012), p. QT1B.4.
- [16] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995).
- [17] N. Boeuf, D. Branning, I. Chaperot, E. Dauler, S. Gue´rin, G. Jaeger, A. Muller, and A. Migdall, “Calculating characteristics of noncollinear phase matching in uniaxial and biaxial crystals,” *Optical Engineering* **39**, 1016–1024 (2000).
- [18] G. G. G. Valentin G. Dmitriev and D. N. Nikogosyan, *Handbook of nonlinear Optical Crystals* (Springer Series in Optical Sciences, 1999), 3rd ed.
- [19] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill physical and quantum electronics series (W. H. Freeman, 2005).
- [20] N. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (Pearson Prentice Hall, 2005).
- [21] M. Avenhaus, A. Eckstein, P. J. Mosley, and C. Silberhorn, “Fiber-assisted single-photon spectrograph,” *Opt. Lett.* **34**, 2873–2875 (2009).
- [22] ID Quantique, *id800-TDC 8-Channel Time to Digital Converter User Guide*.
- [23] J. Paye, “The chronocyclic representation of ultrashort light pulses,” *IEEE Journal of Quantum Electronics* **28** (1992).
- [24] D. Lopez-Mago and L. Novotny, “Coherence measurements with the two-photon michelson interferometer,” *Phys. Rev. A* **86**, 023820 (2012).
- [25] D. Lopez-Mago and L. Novotny, “Quantum-optical coherence tomography with collinear entangled photons,” *Opt. Lett.* **37**, 4077–4079 (2012).

# A

## Phase-matching en cristales

### A.1 Birrefringencia

Se conoce como birrefringencia al fenómeno en el que un cristal tiene dos índices de refracción, pues desdobra el haz de luz incidente en dos rayos linealmente polarizados y perpendiculares entre sí. El rayo ordinario seguirá las leyes de refracción, mientras que el rayo extraordinario tendrá  $v$  y  $n$  variables.

Como sabemos, la luz en un medio transparente se propaga mediante la excitación de los átomos de éste, entonces el índice de refracción que describe la relación entre la velocidad de propagación de la luz en el medio respecto a su velocidad de propagación en el vacío  $n = \frac{c}{v}$ , entonces representa así mismo la diferencia entre la frecuencia del campo eléctrico y la frecuencia natural de los átomos del medio

$$n \propto f(E) - f(\text{atomos})$$

Se conoce como medio dicroico a aquel que absorbe en un eje y deja pasar en el otro (de acuerdo a la polarización.)

Ahora, el campo electromagnético  $E$  se puede propagar como ondas esféricas ( $o$ ) o bien, como ondas elipsoidales ( $e$ ). Si el campo  $E$  de ondas tipo ( $o$ ) es normal al eje óptico, entonces  $v_{\perp}$  al eje óptico, mientras que para un campo  $E$  de ondas tipo ( $e$ ) tiene  $v_{\perp}$  en dirección al eje óptico y normal a esta dirección, el campo  $E$  es paralelo al eje óptico y tiene  $v_{\parallel}$ , entonces los índices de refracción ordinario y extraordinario satisfacen que

$$n_o = \frac{c}{v_{\perp}}, n_e = \frac{c}{v_{\parallel}}, \quad (\text{A.1})$$

El grado de birrefringencia se escribe como  $\Delta n = n_e - n_o$  y determina si un cristal es positivo o negativo.

Las ecuaciones de Sellmeier son una relación empírica entre  $n$  y  $\lambda$  para un medio transparente, sus coeficientes son determinados experimentalmente.

Periodic Poling. Formación de capas con orientación alternada en un material birrefringente. Provoca una mejora en la eficiencia en SHG (Second Harmonic Generation).

## A.2 Condiciones de phase-matching en un cristal uniaxial

### A.2.1 Propagación electromagnética en un medio anisotrópico

Sabemos que en un medio anisotrópico la polarización inducida depende la dirección del campo electromagnético, en caso de tratarse de un medio óptico no lineal de segundo orden satisfase:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \epsilon_0(\chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z) \\
 P_y &= \epsilon_0(\chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z) \\
 P_z &= \epsilon_0(\chi_{31}E_x + \chi_{32}E_y + \chi_{33}E_z)
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

La magnitud del elemento  $\chi_{ij}$  depende de las direcciones elegidas para  $x, y, z$ , pero siempre es posible elegir  $(x, y, z)$  tales que se satisfaga

$$\begin{aligned}
 P_x &= \epsilon_0(\chi_{11}E_x) \\
 P_y &= \epsilon_0(\chi_{22}E_y) \\
 P_z &= \epsilon_0(\chi_{33}E_z)
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

A estas direcciones en particular se les conoce como ejes principales del cristal. Es posible reescribir estas expresiones en términos del momento dieléctrico

$$\begin{aligned}
 D &= \epsilon_o E + P, \epsilon_{ij} = \epsilon_0(1 + \chi_{ij}) \\
 D_i &= \epsilon_{ij}E_j
 \end{aligned}$$

La densidad de energía del campo EM almacenada en el medio anisotrópico es

$$\begin{aligned}
 U_e &= \frac{1}{2}E \cdot D = \frac{1}{2}E_i\epsilon_{ij}E_j \\
 \Rightarrow \dot{U} &= \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\dot{E}_iE_j + E_i\dot{E}_j)
 \end{aligned}$$

El teorema de Poynting nos indica el flujo de poder (power flow) por unidad de volumen en el medio

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (E \times H) &= E \cdot \dot{D} + H \cdot \dot{B} \\
 \Rightarrow -\nabla \cdot (E \times H) &= E_i\epsilon_{ij}\dot{E}_j + H \cdot \dot{B}
 \end{aligned}$$

donde  $E_i\epsilon_{ij}E_j$  corresponde al flujo de energía en el medio  $\dot{U}_e$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\epsilon_{ij}(\dot{E}_iE_j + E_i\dot{E}_j) = E_i\epsilon_{ij}\dot{E}_j$$

por lo cual se derivan dos casos si el tensor dielectrico es real entonces  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$  y si es complejo entonces  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ , de donde la conservación de la energía del campo electromagnético implica que el tensor dieléctrico sea hermitiano.

Supongamos ahora que

### A.2.2 Deducción de condiciones de PM

Las condiciones de phase-matching se refieren a un conjunto de condiciones que provienen de la conservación de energía y momento. Existen distintas configuraciones de phase-matching, entre ellas la colineal y la no colineal. Una de las ventajas del phase-matching no colineal es que permite discriminar entre los dos fotones "downnconverted", razón por la cual se estudiará esta segunda configuración, para lo cual resulta práctico tener dos márgenes de referencia, uno correspondiente al a los ejes ((ópticos?)) del cristal (o al laboratorio) en el que se describirá el haz de bombeo, y otro correspondiente al haz de bombeo, en el que se describirán los fotones generados (señal y acompañante). La conservación de energía y de momento se escribe como

$$\begin{aligned}\omega_p &= \omega_s + \omega_i, \\ k_p &= k_s + k_i\end{aligned}\tag{A.4}$$

y cada vector de onda puede escribirse en términos de la frecuencia y el pindce de refracción como

$$\begin{aligned}k_p &= n(\omega_p) \frac{\omega_p}{c} \hat{s}_p \\ k_\mu &= n(\omega_\mu) \frac{\omega_\mu}{c} \hat{s}_\mu, \mu = s, i\end{aligned}\tag{A.5}$$

Por practicidad, los vectores de onda unitarios se escriben en coordenadas esféricas

$$\hat{s}_p = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta_p \cos\phi_p \\ \text{sen}\theta_p \text{sen}\phi_p \\ \cos\theta_p \end{pmatrix}_{x,y,z} \quad \hat{s}_\mu = \begin{pmatrix} \text{sen}\theta_\mu \cos\phi_\mu \\ \text{sen}\theta_\mu \text{sen}\phi_\mu \\ \cos\theta_\mu \end{pmatrix}_{x'',y'',z''}$$

La transformación de coordenadas entre los sistemas corresponde simplemente a dos rotaciones, por lo que está descrita por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi & -\text{sen}\phi & \text{sen}\theta \cos\phi \\ \cos\theta \text{sen}\phi & \cos\phi & \text{sen}\theta \text{sen}\phi \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Obsérvese que hay 9 variables;  $\omega_p, \theta_p, \phi_p, \omega_s, \theta_s, \phi_s, \omega_i, \theta_i, \phi_i$  y sólo hay 4 ecuaciones, por lo que 5 de estas variables deben representar parámetros. Fijamos entonces  $\omega_p, \theta_p, \phi_p$  como parámetros conocidos, y al elegir medir uno de los fotones generados entonces quedan fijos  $\omega_p, \theta_p$ .

Recordemos también que las configuraciones de PM en cristales uniaxiales (positivos) son

$$\begin{aligned}
 k_p(0) &= k_s(e) + k_i(e) \longrightarrow \text{tipo I} \\
 k_p(0) &= k_s(e) + k_i(o) \longrightarrow \text{tipo II} \\
 k_p(0) &= k_s(o) + k_i(e)
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

Para un cristal uniaxial  $n_x = n_y = n_o$ ,  $n_z = n_e$ . Por las ecuaciones de Fresnel de ondas normales

$$\frac{s_x^2}{\frac{1}{n^2(\hat{s})} - \frac{1}{n_x^2}} + \frac{s_y^2}{\frac{1}{n^2(\hat{s})} - \frac{1}{n_y^2}} + \frac{s_z^2}{\frac{1}{n^2(\hat{s})} - \frac{1}{n_z^2}} = 0
 \tag{A.7}$$

# B

## Propagación de luz en una fibra óptica

Una fibra óptica es una guía de onda fabricada con un material cuyas pérdidas ópticas son pequeñas. La mayoría de las fibras ópticas están hechas de sílica. Todas ellas satisfacen que  $n_2 < n_1$ , la condición de reflexión total interna, para la cual el ángulo de reflexión entre el núcleo y el *cladding* es  $\theta \geq \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ . La luz se propaga a través de modos y cada modo viaja con una constante de propagación y velocidad de grupo distintas. Una fibra monomodal se caracteriza por tener un núcleo pequeño, tal que sólo puede acoplarse un modo a ella.

El ángulo de incidencia de la fibra es  $\theta_a = \frac{\pi}{2} - \theta_c$ . Si los rayos provienen del aire, por la ley de Snell se tiene que  $\theta_a = \sin^{-1} NA$  donde  $NA = (n_2 - n_1)^{\frac{1}{2}}$  es la apertura numérica de la fibra.

Para analizar la propagación de luz monocromática en la fibra óptica es necesario determinar el campo eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  que satisfacen las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera impuestas por la unión del núcleo y *cladding* de la fibra. Existe un conjunto de soluciones específicas para estas ecuaciones y a cada uno de ellos se le conoce como modos.

Es posible visualizar el modo como una eigenfunción del sistema. Los eigenvalores o constantes multiplicativas corresponden a los factores de atenuación o amplificación de los modos. Un sistema lineal está totalmente caracterizado por sus eigenfunciones y eigenvalores, y cualquier función input puede escribirse como una combinación lineal de eigenfunciones y eigenvalores. Los modos se transmiten en el sistema sin mezclarse entre ellos.

Las componentes del campo electromagnético deben satisfacer la Ecuación de Helmholtz dada por

$$\begin{aligned}\nabla^2 U + nk_0^2 u &= 0 \\ k_0 &= \frac{2\pi}{\lambda}\end{aligned}\tag{B.1}$$

Para el núcleo se tiene que  $n = n_1, r < a$ , mientras que en *cladding*  $n = n_2, r > a$  y se asume además que su radio es mucho mayor al del núcleo, por lo que puede aproximarse a infinito. Escribiendo la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas se tiene que



$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + nk_0^2 U = 0 \quad (\text{B.2})$$

con  $U = U(r, \phi, z)$  que representa cualquier componente cartesiana del campo eléctrico o magnético, o las componentes axiales  $E_z, H_z$  en coordenadas cilíndricas. Se asume una solución de la forma

$$U = U(r, \phi, z) = u(r) e^{j\ell\phi} e^{-j\beta z} \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo B.3 en B.2 se tiene que

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( nk_0^2 - \beta^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right) u = 0 \quad (\text{B.4})$$

Se observa que, para que la luz sea guiada se debe satisfacer que  $\beta < n_1 k_0$  en el núcleo y  $\beta > n_2 k_0$  en el *cladding*, por lo que resulta conveniente definir las constantes

$$\begin{aligned} k_T^2 &= n_1^2 k_0^2 - \beta^2 \\ \gamma^2 &= \beta^2 - n_2^2 k_0^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Es claro de (B.5) que  $k_T$  y  $\gamma$  son número reales. Entonces, las ecuaciones del campo electromagnético en el núcleo y *cladding* quedan como

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( k_T^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \right) u &= 0 \quad r < a \\ \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left( \frac{\ell^2}{r^2} + \gamma^2 \right) u &= 0 \quad r > a \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Las soluciones de estas ecuaciones son las funciones de Bessel. Se excluyen los casos en los que la función tiende a infinito para  $r = 0$  y  $r \rightarrow \infty$  y se obtiene que el campo electromagnético satisface

$$u(r) = \begin{cases} J_\ell(k_T r) & \text{si } r < a \\ K_\ell(\gamma r) & \text{si } r > a \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

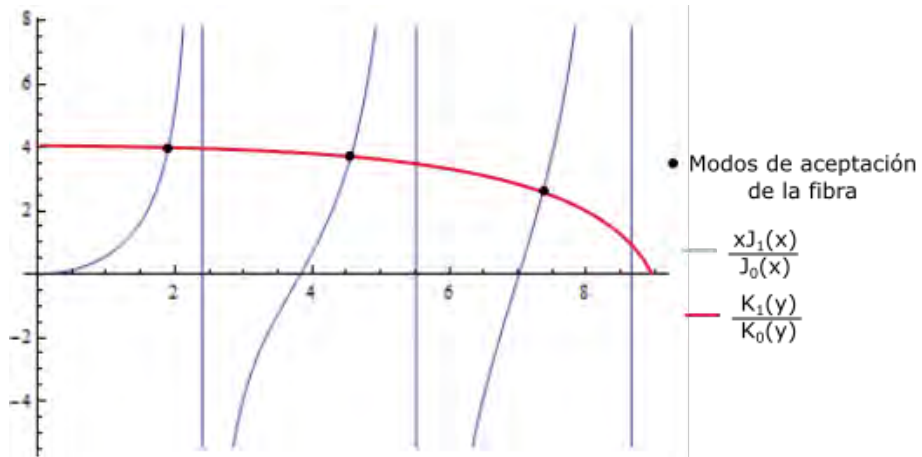
Ahora, en  $r = a$  se debe satisfacer la continuidad e la ecuación del campo. De aquí se deduce la relación de dispersión de involucra a  $\beta$  con  $\frac{a}{\lambda_0}, n_1, n_2$ . Para cada índice azimutal  $\ell$ , la relación de dispersión tiene varias soluciones, que implican constantes de propagación discretas  $\beta_{\ell m}, m = 1, 2, \dots$  y cada solución representa un modo.

Las condiciones de continuidad del campo electromagnético mandan que la derivada de las soluciones sea continua par  $r = a$ , entonces se tiene que

$$\frac{k_T a J'_\ell(k_T a)}{J_\ell(k_T a)} = \frac{\gamma a K'_\ell(\gamma a)}{K_\ell(\gamma a)} \quad (\text{B.8})$$

Pero las funciones de Bessel satisfacen:

$$J'_\ell(x) = \pm J_{\ell \mp 1}(x) \mp \ell \frac{J_\ell(x)}{x}, \quad J_{\ell-1}(x) = (-1)^\ell J_\ell(x) \quad (\text{B.9})$$



**Figura B.1:** Las soluciones a las ecuaciones de Bessel se traducen a los modos de aceptación de la fibra.