



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

**ENTROPIA DE ENTRELAZAMIENTO HOLOGRÁFICA EN TEORÍAS  
DE LOVELOCK CON MATERIA**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
EDEL EFRAÍN GARCÍA HERNÁNDEZ

TUTOR PRINCIPAL: DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

COMITÉ TUTORAL:  
DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER,  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO,  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, JULIO 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Entropía de Entrelazamiento Holográfica en Teorías de Lovelock con Materia

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICAS) PRESENTA

Edel Efraín García Hernández

Comité tutorial: Dr. Mariano Chernicoff Minsberg (Tutor principal)  
Dr. David Vergara Oliver  
Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Julio 2017

# Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a Mariano Chernicoff por introducirme en el interesante mundo de la correspondencia holográfica, por brindarme siempre las herramientas necesarias para entender la física, y por ser un tutor siempre dispuesto a ayudar y atender las dudas de sus alumnos. Por su interés genuino en mi formación profesional y científica.

En este mismo tono quiero agradecer también a Alberto Güijosa, por la enorme labor que lleva a cabo para que cada vez más gente se interese por estos temas y por ser además uno de los mejores profesores que he tenido a lo largo de mi trayectoria académica.

A Elena Cáceres, porque sin su aportación y colaboración académica este trabajo no hubiera sido posible.

Agradezco también a David Vergara por sus útiles consejos y comentarios constructivos acerca de mi trabajo. Por esta misma razón agradezco también a los miembros de mi jurado, Myriam Mondragón, Leonardo Patiño, Hernando Quevedo y Antonio García.

A mis compañeros de trabajo, Fernando, Armando, Gustavo, Ricardo, Anayeli, Enrique y a los que me faltan, por todas las constructivas discusiones que hemos tenido y todos los congresos que hemos compartido. También a mis compañeros de cubículo Uriel y Alejandro.

En el ámbito no académico quiero agradecer principalmente a mis padres, cuya educación y enseñanza me llevó a interesarme en la ciencia, y por inspirarme a venir a estudiar a la UNAM, además de apoyar siempre mis decisiones. A mis amigos, por los buenos ratos y por hacerme sentir que de verdad vale la pena lo que estoy estudiando.

Finalmente, quiero agradecer a mi novia, compañera y colega, Brisa, por siempre confiar en mi trabajo, por su paciencia y comprensión cuando estoy presionado, por sentirse orgullosa de mis logros, y sobre todo por haber vuelto mi vida mucho más dichosa.

## Resumen

En esta tesis estudiamos una solución a la teoría de gravedad de Lovelock en cinco dimensiones espacio-temporales acoplada de manera no minimal a un campo escalar, que corresponde a una configuración de agujero negro con una retroacción en la métrica por parte del campo. Se presentaron las propiedades termodinámicas de esta solución, y se estudió en particular la ley de áreas iguales de Maxwell para la entropía térmica. Una vez estudiadas las características principales de dicha solución, nos concentramos en el resultado principal de este trabajo, que es el cálculo del funcional de entropía de entrelazamiento holográfica para la teoría de gravedad estudiada previamente. Para esto usamos el método de entropía gravitacional generalizada, sugerido por Lewkowycz y Maldacena. Un resultado importante es que las potencias del campo escalar en los términos de acoplamiento de esta teoría no modifican de forma sustancial los resultados previamente conocidos, salvo que estas mismas potencias aparecen como factores dentro del funcional. Una vez obtenido este resultado, estudiamos la forma explícita del funcional de entropía de entrelazamiento para la teoría cuántica dual a la solución de agujero negro con pelo escalar. Para ello, calculamos la métrica inducida, así como las cantidades geométricas que aparecen en el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica.

## Abstract

In this thesis we studied a black hole solution to Lovelock gravity theory in five dimensional space-time, with a scalar field non-minimally coupled, which backreacts on the metric. The thermodynamic properties of this solution were presented, and as a particular case, the Maxwell's equal area law for the thermal entropy was studied. After reviewing the semi-classical properties of this solution, we proceeded to obtain the main result of this work, which is the holographic entanglement entropy functional for this theory. This calculation relies on the method developed by Lewkowycz and Maldacena, which we applied to the particular case of Lovelock theory conformally coupled with the scalar field. An important result is that the powers of the scalar field which appear in the coupling terms of the gravity theory do not modify the previously obtained results, except that these powers appear as factors inside the functional. Once we obtain this result, we studied the explicit form of the entanglement entropy functional for the quantum dual of the hairy black hole, so we calculate the induced metric, as well as all the other geometric quantities appearing in the holographic entanglement entropy functional.



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Marco Teórico</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1. Introducción . . . . .   | 1         |
| 1.2. Teoría General de la Relatividad . . . . .   | 6         |
| 1.2.1. Curvatura y Ecuación de Einstein . . . . .   | 6         |
| 1.2.2. Agujeros negros . . . . .  | 10        |
| 1.2.3. Teorías de Gravedad con correcciones de orden superior . . . . .                             | 12        |
| 1.3. Teorías Cuánticas de Campo . . . . .   | 14        |
| 1.3.1. Campos cuánticos y diagramas de Feynman . . . . .  | 15        |
| 1.3.2. Renormalización y teorías conformes . . . . .  | 20        |
| 1.3.3. QCD y $SYM \mathcal{N} = 4$ . . . . .  | 22        |
| 1.4. Teorías de Cuerdas y D-Branas . . . . .  | 24        |
| 1.4.1. Cuerda bosónica, supercuerda y tipo IIB . . . . .  | 25        |
| 1.4.2. Solución de p-brana negra y D-branas . . . . .   | 27        |
| 1.5. Correspondencia Norma Gravedad . . . . .   | 31        |
| 1.5.1. Límite de ultra-bajas energías . . . . .   | 31        |
| 1.5.2. Diccionario de AdS/CFT . . . . .   | 33        |
| 1.6. Entropía de Entrelazamiento Holográfica . . . . .  | 36        |
| 1.6.1. Entropía de entrelazamiento . . . . .  | 37        |
| 1.6.2. Fórmula de Ryu takayanagi . . . . .  | 39        |
| <b>2. Agujeros Negros de Lovelock con Pelo</b>  | <b>43</b> |
| 2.1. Acoplamientos conformes . . . . .  | 43        |
| 2.2. Solución de Agujero Negro . . . . .  | 44        |
| 2.3. Termodinámica de la solución . . . . .   | 47        |
| 2.4. Términos de frontera . . . . .   | 50        |
| <b>3. Entropía Gravitacional Generalizada</b>   | <b>53</b> |
| 3.1. Método de Gibbons-Hawking para Entropía Gravitacional . . . . .                                | 54        |
| 3.2. Método de Lewkowycz-Maldacena . . . . .  | 56        |
| 3.2.1. Truco de réplica para EE . . . . .   | 56        |
| 3.2.2. Dual gravitacional del truco de réplica . . . . .  | 59        |
| 3.2.3. Conos aplastados regularizados . . . . .   | 60        |
| 3.3. Prueba de la fórmula de Ryu-Takayanagi . . . . .   | 63        |
| 3.4. Aplicación del método de Lewkowycz-Maldacena a teorías de Gauss-Bonnet y de Lovelock . . . . . | 65        |
| 3.5. Generalización a Acoplamiento no-minimal . . . . .   | 70        |
| <b>4. Funcional de Entropía Gravitacional Generalizada</b>  | <b>75</b> |
| 4.1. Contribuciones de la acción al funcional de entropía . . . . .                                 | 75        |
| 4.1.1. Término con primeras derivadas del campo . . . . .   | 76        |
| 4.1.2. Término con segundas derivadas del campo . . . . .   | 78        |

|   |           |
|---|-----------|
| 4.1.3. Término de Gauss-Bonnet modificado . . . . .                               | 79        |
| 4.1.4. Funcional de HEE para la solución de agujero negro 5-dimensional.          | 82        |
| <b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>   | <b>87</b> |
| <b>APÉNDICES</b>  | <b>91</b> |
| <b>A. Geometría diferencial de hipersuperficies</b>                               | <b>91</b> |
| <b>B. Tensores en las ecuaciones de movimiento de Lovelock + Materia conforme</b> | <b>95</b> |
| B.1. Acción de gravedad . . . . .   | 95        |
| B.1.1. Contracciones a segundo orden en la curvatura . . . . .                    | 96        |
| <b>C. Geometría del cono aplastado</b>  | <b>99</b> |

# Capítulo 1

## Marco Teórico

### 1.1. Introducción

Uno de los mayores retos de la física teórica contemporánea es entender cuál es el significado de los conceptos de espacio-tiempo y de materia cuando los exploramos a escalas de distancia cercanas o inferiores a la escala de Planck<sup>1</sup>.

Según la teoría de la Relatividad General, que Einstein formuló hace más de cien años, la presencia de materia o energía deforma la geometría del espacio tiempo circundante, dando lugar a lo que conocemos como fuerza de gravedad. Gracias a esta teoría, podemos describir la dinámica de objetos macroscópicos como planetas, estrellas y galaxias con una gran precisión, además de predecir fenómenos novedosos como la deflexión gravitacional de la luz, la existencia de ondas gravitacionales y de agujeros negros.

Por otro lado, sabemos que a escalas pequeñas la materia y energía aparecen en forma de constituyentes fundamentales, cuyas propiedades e interacciones se entienden hoy en día con gran precisión a través del *Modelo estándar* de la física de partículas. Esta teoría se basa en la descripción de estos constituyentes (partículas) como fluctuaciones cuánticas de un conjunto de objetos dinámicos que llenan todo el espacio; tales objetos los conocemos como *campos*. Estos campos interactúan entre sí a través de partículas mensajeras, que corresponden a tres de las cuatro fuerzas fundamentales que conocemos; la *fuerza electromagnética*, la *fuerza nuclear débil* y la *fuerza nuclear fuerte*. La verificación experimental del modelo estándar nos permite afirmar que son en realidad los campos y nos las partículas los ingredientes fundamentales de la materia. Este hecho es una consecuencia no trivial que surge al intentar conciliar la mecánica cuántica con la relatividad especial (es decir, al considerar cuerpos con masas pequeñas moviéndose a altas velocidades).

Esto claramente sugiere que para describir la fuerza de gravedad a escalas pequeñas, podríamos interpretar a la Relatividad General como una teoría efectiva, la cual sería en realidad el límite clásico (a escalas grandes) de una teoría cuántica de campos. Esta teoría tendría como unidad fundamental de excitación del campo de gravedad a una partícula hipotética conocida como *gravitón*. Desafortunadamente, la consistencia de la teoría cuántica de campos nos obliga a descartar a la gravedad como una interacción cuantizable<sup>2</sup>. Este problema ha dado lugar a décadas de investigación, y se han desarrollado distintas estrategias para atacarlo, aunque hasta la fecha existen pocos programas satisfactorios.

Una de las pocas teorías que incorporan la interacción gravitatoria a escalas cuánticas, y probablemente la mejor opción que tenemos hasta la fecha para entender cómo funciona

---

<sup>1</sup>Escala de distancia que se define como el inverso de la energía a la cual la geometría clásica dejaría hipotéticamente de tener validez. En 4 dimensiones su valor numérico es de  $l_P = 1,6162 \times 10^{-35} m$

<sup>2</sup>Ver Sección 1.2.

el mundo a esas escalas es la *teoría de cuerdas*. Esta, se basa en la suposición de que a niveles ultra-energéticos, lo que detectamos como partículas, no son más que finas hebras unidimensionales de energía, que conocemos como *cuerdas*. Según la interpretación fenomenológica de esta teoría, los distintos modos de vibración de estas cuerdas, producirían las distintas partículas que conforman el Modelo Estándar. Además, en este tipo de teorías aparece una partícula cuántica con las propiedades del gravitón, por lo que son consideradas como teorías de gravedad cuántica.

A pesar de que la teoría de cuerdas incorpora de una forma simple y elegante varios conceptos cruciales para la formulación de una teoría fundamental de la naturaleza, no existe evidencia experimental de que esta en verdad describa a la realidad que conocemos, además de involucrar fenómenos que parecerían contradecir la evidencia empírica, tales como la existencia de dimensiones adicionales, supersimetría, etc.. Más formalmente, la teoría de cuerdas es un lenguaje que nos permite construir distintos modelos fenomenológicos que en principio, podríamos buscar emparentarlos con la realidad. Esto está en completa analogía con el lenguaje de la teoría cuántica de campos, y los distintos modelos fenomenológicos que podemos construir con este (como el Modelo Estándar). En este sentido, en ninguno de los dos casos estamos trabajando teorías fundamentales que describen la realidad en su totalidad, sino como teorías efectivas que aproximan un cierto sistema abierto a una cierta escala energética <sup>3</sup>.

Aún si estos modelos no tienen relación directa con la evidencia experimental podemos trabajar con ellos, pensándolos como una especie de laboratorios teóricos y explorar las consecuencias físicas que tienen. En el caso de la teoría de cuerdas que conocemos como *Tipo IIB*, existe una propiedad muy importante que ha revolucionado el entendimiento de la gravedad cuántica y de la misma teoría de cuerdas. Dentro del lenguaje de cuerdas, existen varios tipos de *dualidades* entre distintas teorías o entre distintos límites de una misma teoría. Una de estas dualidades relaciona a una solución de la teoría de cuerdas tipo IIB que contiene cuerdas cerradas, con una teoría que contiene cuerdas abiertas y otro nuevo tipo de ingredientes llamados *branas*. Al considerar un límite particular en ambos lados de esta dualidad, obtenemos una correspondencia entre la teoría de cuerdas IIB en el límite de bajas energías, y una teoría cuántica de campos fuertemente acoplada. El límite a bajas energías de la teoría de cuerdas tipo IIB implica la aparición de un fondo gravitacional conocido como *Anti-de Sitter*, con modos de cuerda cerrada débilmente acoplados. Del lado de la teoría de campos, obtenemos la teoría que conocemos como *Yang-Mills máximamente supersimétrica* o *SYM  $N=4$* . Esta última es una *teoría de norma no-Abeliana*, tal como las teorías de interacción fuerte e interacción electrodébil en el modelo estándar, y que además tiene la importante propiedad de tener *invariancia conforme*, y es por tanto una *teoría conforme de campos*. Este escenario es útil para para explorar propiedades genéricas de las teorías de norma no-Abelianas.

Esta dualidad entre teorías de cuerdas y teorías de campos, conocida como *Correspondencia AdS/CFT* o *Norma-Gravedad*, ha abierto la puerta a toda una avalancha de trabajos que buscan relacionar la dinámica de la gravedad con el comportamiento de las interacciones cuánticas en la teorías de campo duales. Una de las aplicaciones más importantes en este rubro es en la comprensión de la fuerza de interacción nuclear fuerte. Esta fuerza está descrita por una teoría cuántica de campos conocida como *cromodinámica cuántica* (o *QCD* por sus siglas en inglés) que es una teoría de norma no-Abeliana, y contiene a partículas fundamentales de materia llamadas *quarks*, mediados por partículas mensajeras

---

<sup>3</sup>El lenguaje de campos y de cuerdas incorpora de manera natural la forma en la que las teorías se comportan al variar la escala energética, a través del formalismo del *grupo de renormalización*. Esto nos brinda una manera de argumentar si una teoría tiene validez física como teoría completa o solo a nivel efectivo

de interacción fuerte, conocidas como *gluones*. A energías muy grandes, aparece un nuevo estado de la materia formado por quarks y gluones interactuado muy débilmente, formando una especie de sopa o plasma. A esto se le conoce como el *plasma de quarks y gluones* o *QGP*. En éste régimen las teorías de QCD y SYM  $N=4$  son muy similares, por lo que podemos considerar a esta última como un modelo efectivo de la primera y obtener observables mediante la correspondencia AdS/CFT. De esta forma, se han logrado calcular propiedades como la viscosidad o entropía del plasma y comparar estas predicciones con los resultados empíricos obtenidos en experimentos de altas energías donde se ha logrado reproducir el QGP, como en el Large Hadron Collider en el CERN. Como ejemplo, la correspondencia holográfica predice un valor para la viscosidad del QGP que es proporcional por un factor de 0.8 al valor obtenido experimentalmente. Este resultado es importante no sólo por la cercanía numérica de los resultados, sino porque además existen muy pocos ejemplos de cálculos no perturbativos en QCD. Además, la correspondencia AdS/CFT se ha abierto lugar en la aplicación a otras teorías de campo, como sistemas de materia condensada (superconductores, superfluidos, etc.), física de fluidos, y como es el caso en el presente trabajo, en la física de agujeros negros.

A esta dualidad también se le da el nombre de *holográfica*, ya que la teoría de campos puede pensarse como la frontera asintótica en  $d$  dimensiones espacio-temporales de la teoría dual de gravedad que también se conoce como el *bulto*, y que es un espacio de  $d+1$  dimensiones. De esta forma, la teoría de campos codifica la información en el bulto de la misma forma en que un holograma codifica la información de una imagen tridimensional en una película bidimensional.

Dentro del diccionario de la correspondencia AdS/CFT existe un resultado que a su vez ha repercutido positivamente durante los últimos años en el camino hacia formular una teoría de gravedad cuántica. En el conjunto de observables que podemos calcular en una teoría de campos, existen cantidades que contienen información acerca de cómo los estados cuánticos de la teoría están *entrelazados* entre sí, es decir, como afectan las mediciones que realizamos en nuestro laboratorio a los grados de libertad cuánticos fuera de él, o viceversa. La mayor parte del tiempo tenemos acceso a realizar mediciones en un subsistema de una teoría cuántica de campo, sin embargo ignoramos cómo reaccionan a estas mediciones los grados de libertad en el exterior de nuestro subsistema. Una cantidad u observable que cuantifica la cantidad de información que perdemos al restringirnos únicamente al subsistema al cual tenemos acceso es la *entropía de entrelazamiento* de este subsistema. Esta se define como la entropía de Von Neumann asociada a la *matriz de densidad reducida* de  $A$ , que a su vez se define como la traza de la matriz de densidad total respecto a los grados de libertad del complemento de  $A$ . La correspondencia AdS/CFT brinda una manera muy simple de obtener esta cantidad; nos dice que la entropía de entrelazamiento de un subsistema  $A$  es igual al *área* de una cierta superficie de codimensión 2, que se obtiene de minimizar el área de las superficies cuya frontera en la región asintótica que corresponde a la teoría conforme, coincide con la frontera del subsistema  $A$ . Esta prescripción para calcular entropías de entrelazamiento en teorías de campo con un dual holográfico es la *fórmula de Ryu-Takayanagi*, y a la cantidad calculada en una teoría de gravedad de *Einstein* mediante esta prescripción se le llama *entropía de entrelazamiento holográfica*.

Una de las incógnitas principales que surgen al interpretar esta receta, es cuál es cuál es la relación que guarda con otra equivalencia similar obtenida por Hawking y Bekenstein en 1974, y que involucra a la entropía térmica de un agujero negro y el área de una cierta superficie bidimensional. Un agujero negro es una solución a las ecuaciones de la Relatividad General que tiene la interesante propiedad de tener una densidad tan grande, que ninguna forma de energía, ni siquiera la luz, pueden escapar de su potencial gravitatorio una vez que han traspasado esta región bidimensional, que se conoce como el *horizonte de eventos*

del agujero negro. Cerca del horizonte, la curvatura<sup>4</sup> del espacio tiempo es tan grande, que ocurre un proceso de producción de pares, donde una de las partículas producidas es absorbida y la otra es emitida por el agujero negro. Las partículas emitidas escapan en forma de radiación, por lo que el agujero negro adquiere propiedades termodinámicas, como temperatura y entropía. A este tipo de radiación se le conoce como *radiación de Hawking* y la entropía del agujero negro, conocida como *entropía de Bekenstein-Hawking* resulta ser igual al área del horizonte de eventos dividida por cuatro veces la constante de gravitación universal. Este resultado parecería ser bastante extraño desde la perspectiva de la física clásica, dado que parece contradecir la definición de entropía como una cantidad extensiva. Sin embargo, esto puede entenderse si consideramos que existe una correlación cuántica entre las dos partículas producidas debido a que sus estados de Fock aparecen entrelazados. Esto implica que los grados de libertad (originados en la producción de pares) se distribuyen a lo largo de la región donde hay mayor entrelazamiento, que es el horizonte de eventos. Este argumento parece darnos una pista acerca del origen de la relación entre área y entropía de entrelazamiento discutida en el párrafo anterior.

¿Cuál es entonces la conexión precisa entre la entropía de entrelazamiento y la entropía del agujero negro? A pesar de que todavía no podemos responder completamente esta pregunta, en los últimos años se han realizado avances importantes en esta dirección, y uno de ellos relaciona las *correcciones cuánticas* en la entropía de entrelazamiento con *correcciones en la curvatura* a la entropía de Bekenstein-Hawking. Regresando unos párrafos atrás, vimos que las teorías de cuerdas proporcionan una manera natural para incorporar interacciones gravitatorias a escalas cuánticas. En algunas de estas, aparecen términos en la acción de cuerdas que corrigen al término de Einstein-Hilbert (orden lineal) en la acción gravitacional con términos a orden superior en la curvatura, es decir, que modifican las ecuaciones de movimiento de gravedad en el régimen de altas energías, incorporando términos cuadráticos, etc. en la curvatura Riemanniana. Estas correcciones, además pueden incluir acoplamientos con campos de materia de todo tipo. Lo que esto sugiere, es que en nuestro universo, la dinámica contenida en las ecuaciones de gravedad podría necesitar correcciones de este estilo, y hasta el momento ha resultado exitosa porque no tenemos forma de hacer experimentos en el régimen de altas energías (que implica ir a regiones donde la curvatura es muy grande, como en un agujero negro).

Por otro lado, la entropía de entrelazamiento es divergente en una teoría de campo, debido a que hay una infinidad de grados de libertad entrelazados. Si consideramos un parámetro de corte finito, la divergencia dominante resulta ser proporcional al área de la región de entrelazamiento, y las divergencias subdominantes empiezan a cobrar relevancia cuando vamos a bajas energías del lado de la teoría de campo. En trabajos recientes, se ha sugerido que las correcciones en la teoría de gravedad (en el UV del lado de gravedad) modifican las divergencias subdominantes en la entropía de entrelazamiento, y por tanto contienen información acerca de las correcciones en el IR de la teoría de campo dual.

Cabe entonces preguntarse si existe una manera genérica de saber cómo se modifica a nivel funcional la entropía de entrelazamiento holográfica cuando modificamos la teoría de gravedad agregando términos a orden superior en la curvatura. La respuesta a esta pregunta fue proporcionada en 2013 por Lewkowycz y Maldacena en [10], donde generalizaron el método de Gibbons y Hawking para calcular la entropía gravitacional de agujeros negros, a una relación entre cantidades geométricas en ambos lados de la correspondencia, que sin embargo también puede aplicarse a cualquier región en un espacio-tiempo solución a las ecuaciones de gravedad que tenga una frontera. Este trabajo busca aplicar este método para obtener el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica en una

---

<sup>4</sup>Propiedad del espacio tiempo que determina la forma en que medimos distancias localmente. Matemáticamente, está dada en términos del tensor de Riemann y sus contracciones.

teoría de gravedad que involucra tanto correcciones a orden superior en la curvatura como acoplamientos con materia escalar. Específicamente, tenemos una solución a una teoría de gravedad de Lovelock en 5 dimensiones en un fondo de agujero negro con un campo escalar acoplado de manera conforme reaccionando en la métrica.

La elección de trabajar en este escenario se debe principalmente a dos razones. La primera es que en esta teoría existen soluciones con un fondo gravitacional Anti-de Sitter (si así lo decidimos), por lo que en principio podemos encontrar una teoría (3+1)-dimensional de campo dual bajo la correspondencia AdS/CFT. Una forma en la que podemos estudiar esto, es comparar la termodinámica (transiciones de fase, etc.) de la entropía de entrelazamiento holográfica calculada del lado gravitacional de la correspondencia AdS/CFT mediante la prescripción de Lewkowycz y Maldacena, con la entropía de entrelazamiento en teorías térmicas de campo, por ejemplo, teorías de materia condensada. Si encontráramos esta teoría de campos dual, tendríamos un nuevo escenario donde aplicar o poner a prueba toda la maquinaria de la correspondencia que conocemos. La segunda razón es que en esta teoría de gravedad, el campo de materia escalar aparece acoplado a la métrica y a la curvatura de una manera particular que hace que las ecuaciones de movimiento *no* se separen en una parte que depende sólo del campo escalar, y otra que dependa solamente de la métrica y la curvatura como sucede en el caso más simple de acoplamiento mínimo. Además, bajo una cierta redefinición de la métrica y del campo escalar, aparece una dualidad que intercambia la parte puramente gravitacional de la acción, con los términos de acoplamiento con el campo escalar. Esta ambigüedad en la definición de los campos de materia y gravedad podría sugerir una conexión más profunda entre estos conceptos que aún no se ha entendido bien. El objetivo de esta tesis es entender la termodinámica de la entropía de entrelazamiento en este fondo gravitacional, y en concreto, cómo afecta la forma del acoplamiento con el campo de materia al funcional de entropía de entrelazamiento holográfica.

Para familiarizar al lector con el contexto de los cálculos que realizaremos, empezaremos esta tesis con una breve pero necesaria introducción en los temas que proveen de las herramientas teóricas con las que trabajaremos. En la Sección 1.2 revisaremos los conceptos fundamentales de la Relatividad General con énfasis en las soluciones de agujero negro y su generalización a teorías de orden superior. En la Sección 1.3 estudiaremos la teoría cuántica de los campos, así como casos especiales que nos interesan, como son QCD y las teorías conformes de campo. En la Sección 1.4 daremos una introducción a la teoría de cuerdas y D-branas, con la motivación de contextualizar la deducción heurística de la correspondencia AdS/CFT, que concluiremos en la primera parte de la Sección 1.5. Dentro de esta misma sección estudiaremos las entradas más importantes del diccionario de la correspondencia, y concluiremos con la Sección 1.6 que se dedica a la entrada del diccionario en la que se basan los cálculos realizados en este trabajo, que es la fórmula de Ryu-Takayanagi.

## 1.2. Teoría General de la Relatividad

El objetivo de esta sección es brindar una breve introducción a los conceptos más importantes dentro de la teoría de la Relatividad General y la Geometría Riemanniana, con énfasis en las soluciones de agujero negro en distintos fondos gravitacionales y en teorías de gravedad con correcciones a orden superior en la curvatura, escenarios que usaremos en gran parte de este trabajo. Esta sección puede ser complementada con el Apéndice A, que se especializa en el estudio de la geometría diferencial de hipersuperficies encajadas en espacios con un número arbitrario de dimensiones.

Antes de pasar al caso general, revisemos algunos conceptos de la teoría especial de la relatividad. La idea principal de esta teoría es suponer que las tres dimensiones espaciales que observamos, así como la dimensión temporal, pueden ser descritas por un mismo espacio métrico, donde la pseudo-distancia<sup>5</sup> entre puntos  $(t, x, y, z)$ ,  $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$  se obtiene de la siguiente manera:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.1)$$

siendo  $ds$  el elemento de línea de la trayectoria seguida. A este espacio lo conocemos como espacio de Minkowski. Este hecho es consecuencia de postular que la velocidad de la luz  $c$ , es la misma para cualquier sistema de referencia inercial, además de pedir que isotropía del espacio. La idea que liga esta descripción de la estructura espacio-temporal con la fuerza de gravedad fue propuesta por Einstein, y se conoce como el *principio de equivalencia*:

*Los resultados de cualquier experimento local realizados en un marco de referencia que cae libremente en un campo gravitacional son independientes de la velocidad y de la posición de este.*

Como veremos más adelante, esto puede reformularse en términos de trayectorias que minimizan la distancia y que viven en espacios curvos. Este tipo de espacios curvos se conocen como *variedades diferenciales*, concepto que definiremos a continuación.

### 1.2.1. Curvatura y Ecuación de Einstein

Formalmente, una variedad diferencial  $d$ -dimensional es un espacio topológico junto con una familia de pares  $\{(U_i, \phi_i)\}$  llamados *cartas*, donde  $\phi_i$  es un homomorfismo del subconjunto abierto  $U_i$  a un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$ , y tal que estos subconjuntos abiertos cubren todo el espacio topológico. Además debe cumplirse que para las intersecciones no vacías  $U_i \cap U_j$  el mapeo  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  debe ser una función suave, o diferenciable hasta un cierto orden. Intuitivamente puede pensarse como un espacio suave, que podemos cubrir con una familia de pedazos pequeños que se ven como  $\mathbb{R}^d$ , y en la que además tenemos una manera de decidir si una función que va de la variedad a  $\mathbb{R}$  es bien comportada, a través del conjunto de cartas. Consideremos una variedad descrita por un conjunto de coordenadas  $x^\mu$ . La manera en que medimos distancias en esta variedad está determinada por la *métrica*  $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ , un campo tensorial<sup>6</sup> de rango (0,2) que nos permite escribir el elemento

<sup>5</sup>La elección de la *signatura* permite incluir un signo menos en la definición de elemento de línea, por lo que es de la forma  $(-1, 1, 1, 1)$ , lo que significa que esta es una variedad *pseudo-Riemanniana*. Cuando la signatura es positiva, se dice que es una variedad *Riemanniana*.

<sup>6</sup>Si un objeto  $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$  que depende de las coordenadas satisface la regla de transformación  $T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\bar{x}) = \frac{\partial x^{\bar{\mu}_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x^{\bar{\mu}_2}}{\partial x^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x^{\bar{\mu}_n}}{\partial x^{\nu_n}} \frac{\partial x^{\bar{\nu}_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\bar{\nu}_2}}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{\bar{\nu}_n}}{\partial x^{\mu_n}} T_{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}(\bar{x})$ , entonces se dice que es un campo tensorial de rango  $(n, n)$ . En particular un campo vectorial es un tensor de rango (1,0).

de línea  $ds^2$  como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

Podríamos intentar escribir la ecuación que rige el comportamiento de una partícula bajo la influencia de la gravedad en términos de un potencial gravitatorio, de manera análoga a como se procede en gravedad Newtoniana. Sin embargo, gracias al principio de equivalencia, y bajo la suposición de que, en ausencia de fuerzas, las partículas siguen trayectorias que minimizan localmente la distancia, llamadas *geodésicas*, podemos deducir que una partícula que cae bajo la influencia de este potencial gravitatorio es equivalente a una partícula que sigue una geodésica en una variedad diferencial. De esta manera, lo que antes entendíamos como una partícula bajo la acción de la fuerza de gravedad, se vuelve una partícula siguiendo una trayectoria que está determinada por las propiedades geométricas del espacio-tiempo. La acción de la partícula relativista puede escribirse considerando que de entre todas las trayectorias posibles, esta seguirá la que minimice la longitud de su trayectoria:

$$S = -m \int d^D x \sqrt{-ds^2} = -m \int d^D x \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} d\lambda \quad (1.3)$$

La ecuación que se obtiene a partir de esta acción se escribe en términos de la métrica como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (1.4)$$

donde  $\lambda$  es el parámetro de la trayectoria  $x^\mu(\lambda)$ , y  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  es la *conexión de Levi-Civita*, o *símbolo de Christoffel*, que se define en términos de las primeras derivadas de la métrica como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -\frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}) \quad (1.5)$$

Si una ecuación ha de describir la física de manera independiente del sistema de referencia, entonces debe involucrar objetos que transformen de la misma forma en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, si una ecuación contiene un covector (tensor de rango  $(0, 1)$ ),  $V^\mu$ , proporcional a la derivada parcial  $\partial_\mu$ , entonces esta ecuación no es física, dado que  $\partial_\mu$  *no* transforma como un covector, sino como un vector. Frecuentemente encontramos expresiones que involucran derivadas parciales en una forma en la que dicha ecuación no se puede expresar de manera independiente del marco de referencia. La manera de solucionar esto es definir una nueva versión de derivada que transforma de manera covariante:

$$\nabla_\lambda V_{\nu\dots}^{\mu\dots} = \partial_\lambda V_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu V_{\nu\dots}^{\rho\dots} + \dots - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho V_{\rho\dots}^{\mu\dots} \quad (1.6)$$

Entonces dada una ecuación que involucra derivadas parciales, podemos volverla independiente del marco de referencia sustituyendo las derivadas parciales ordinarias por la *derivada covariante* que acabamos de definir. A este procedimiento, junto con la sustitución  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$  se le conoce como *acoplamiento mínimo*, y es la manera más simple de agregar interacciones con campos de materia, es decir, términos en la acción  $S_M$  que definiremos más adelante.

Con estas herramientas, podemos escribir las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R + 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

donde  $G_N$  es la constante de Newton, y  $\Lambda$  es la *constante cosmológica*<sup>7</sup>. Del lado izquierdo de la ecuación aparecen cantidades que se construyen a partir de la métrica donde el *tensor de Ricci*  $R_{\mu\nu}$  y el *escalar de curvatura*  $R$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} g_{\rho\alpha} R_{\mu\lambda\nu}{}^\rho, \quad (1.8)$$

se definen como las únicas dos contracciones posibles del *tensor de Riemann*;

$$R_{\mu\lambda\nu}{}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\rho - \Gamma_{\lambda\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\rho. \quad (1.9)$$

En el lado derecho de la ecuación aparece el *tensor de energía-momento*;

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (1.10)$$

un tensor simétrico de rango 2, que contiene la información acerca de la densidad de energía y momento, así como de los esfuerzos para una configuración de materia descrita por la acción  $S_M$ .

La acción que proporciona estas ecuaciones de movimiento se conoce como la *Acción de Einstein-Hilbert* y se escribe como:

$$S = S_{EH} + S_M = \frac{1}{16\pi G_N} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} R + S_M. \quad (1.11)$$

Esta integral necesita ser evaluada en la variedad diferencial  $\mathcal{M}$  que representa al espacio-tiempo. Si además esta variedad posee una frontera  $\partial\mathcal{M}$ , la presencia de las segundas derivadas de la métrica en las ecuaciones de movimiento ocasiona que el principio variacional no esté bien definido. Para arreglar esto, debemos imponer, mediante la adición de un término de frontera en la acción gravitacional, condiciones de frontera sobre la métrica y su derivada. York, Gibbons y Hawking dedujeron la forma en que estas condiciones modifican la acción gravitacional:

$$S = S_{EH} + S_M + S_{GHY}, \quad (1.12)$$

con el término de frontera de *Gibbons-Hawking-York* dado por:

$$S_{GHY} = \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} K, \quad (1.13)$$

donde  $h$  y  $K$  son respectivamente el determinante de la *métrica inducida* y la traza de la *curvatura extrínseca*, que se definen en el Apéndice. En una teoría de gravedad arbitraria, debemos obtener e incluir estos términos de frontera en la acción para que el principio variacional esté bien definido. Comentaremos más sobre esto en el Capítulo 1.2.

Dada una solución a las ecuaciones de gravedad  $g_{\mu\nu}$ , frecuentemente es útil estudiar cuáles son las transformaciones de coordenadas, o *difeomorfismos* que dejan invariante la geometría del espacio-tiempo, es decir, cuáles son las simetrías de la métrica, también llamadas *isometrías*. Dado un tensor  $g_{\mu\nu}$  y un campo vectorial  $\zeta$ , definimos la *derivada de Lie*<sup>8</sup> como;

$$L_\zeta g_{\mu\nu} = \zeta^c \nabla_c g_{\mu\nu} + g_{ac} \nabla_b \zeta^c + g_{cb} \nabla_a \zeta^c = \nabla_a \zeta_b + \nabla_b \zeta_a \quad (1.14)$$

<sup>7</sup>Valor numérico que representa la densidad de energía del vacío. Está relacionada de manera inversamente proporcional con el radio de curvatura. De esta manera  $\Lambda = 0$  para un espacio plano, es positiva para un espacio esférico y negativa para un espacio hiperbólico. Cantidad inicialmente introducida por Einstein para dar consistencia a su modelo estático del universo, antes de que fuese descartado por las observaciones de Hubble.

<sup>8</sup>En general, podemos definir una derivada de Lie para tensores de rango arbitrario. Aquí nos restringimos sólo al caso de un tensor de rango (0,2).

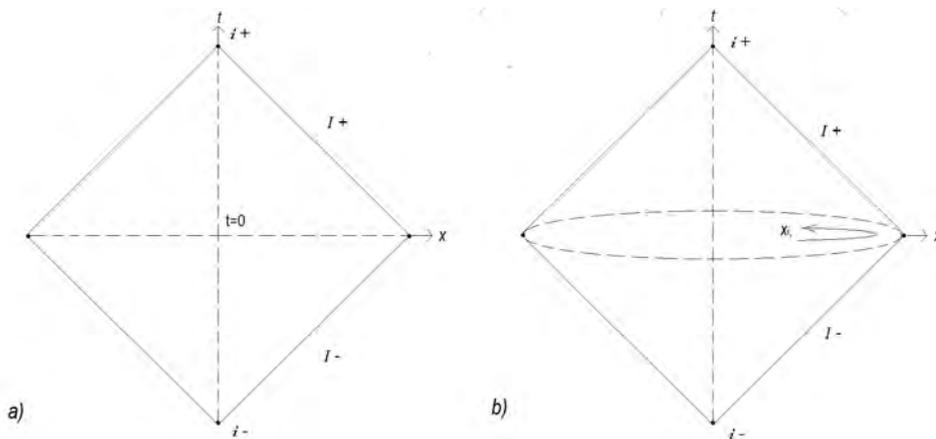


Figura 1.1: a) Diagrama de Penrose del espacio de Minkowski 1+1 dimensional.  $I+$  e  $I-$  denotan el futuro y pasado causal respectivamente, mientras que  $i+$  e  $i-$  son el futuro y pasado temporal. El punto a la derecha que delimita el diamante representa el infinito espacial. b) Diagrama de Penrose de Minkowski en 2+1 dimensiones, donde una de estas es compacta y periódica en la dirección señalada en la figura.

Esta operación recibe el nombre de derivada debido a que evalúa el cambio del tensor a lo largo del flujo del campo vectorial. Si existe un campo vectorial para el cual la derivada de Lie de la métrica a lo largo de este campo se anula, significa que la métrica es invariante cuando hacemos el cambio de coordenadas generado por el flujo del campo, es decir, existe una isometría asociada con este campo vectorial. A un campo de este tipo se le conoce como *campo vectorial de Killing*, y está definido por la ecuación:

$$L_{\zeta}g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.15)$$

Por ejemplo, consideremos la métrica de una 2-esfera descrita por las coordenadas  $\theta, \phi$ . Claramente, la métrica  $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  es invariante bajo rotaciones a lo largo de la dirección  $\phi$ . A nivel infinitesimal, esto es una transformación de la forma  $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$ . El generador de esta transformación es entonces el campo vectorial  $\partial_{\phi}$  es un campo de Killing asociado a esta simetría, y por tanto satisface la ecuación  $L_{\partial_{\phi}}g_{\mu\nu} = 0$ .

Antes de pasar al estudio de las soluciones de las ecuaciones de gravedad que nos interesan para este trabajo, revisemos un método que resulta ser muy útil para visualizar geométricamente una solución a las ecuaciones de campo (que en general se extiende infinitamente), en una región finita que representamos mediante un diagrama. A este tipo de diagramas, que se obtienen mediante una transformación de las coordenadas espaciotemporales, se les conoce como *diagramas de Penrose*. Veamos como ejemplo a un espacio-tiempo de Minkowski (1+1)-dimensional. Para obtener el diagrama, hacemos una transformación de coordenadas  $u_{\pm} = t \pm x$  que lleve la métrica a la forma  $ds^2 = -du_+ du_-$ , seguida de la transformación

$$u_{\pm} = \tan \tilde{u}_{\pm} \quad ; \quad \tilde{u}_{\pm} = \frac{\tau \pm \theta}{2} . \quad (1.16)$$

En esta forma, la métrica  $ds^2 = k(-d\tau^2 + d\theta^2)$  vuelve a ser la de un espacio 2-dimensional plano, salvo un factor de escala  $k = (4\cos^2(\tilde{u}_+)\cos^2(\tilde{u}_-))^{-1}$ , que podemos omitir mediante una transformación de Weyl para obtener el espacio finito de Figura 1.2.1(a). La forma de diamante resulta de la restricción  $|\tau \pm \theta| \neq \pi$ , que se sigue de la definición 1.16. Análogamente podemos construir el diagrama de Penrose para el espacio de Minkowski en  $d + 1$  dimensiones (Figura 1.2.1(b)).

### 1.2.2. Agujeros negros

En este trabajo, nos interesan soluciones a las ecuaciones (1.7) que tengan simetría esférica, es decir, que sean invariantes bajo rotaciones en cualquier dirección espacial. Estas soluciones están descritas en un fondo asintóticamente plano por la *métrica de Schwarzschild*, que en 4 dimensiones se puede escribir como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.17)$$

Esta geometría corresponde al campo gravitacional de una estrella o masa esférica cuando es observada a distancias grandes  $r \gg 2M$ . Cerca de la región  $r = 2M$ , la geometría se deforma de manera que las geodésicas alcanzan el infinito temporal en el punto  $r = 2M$ , donde tenemos una singularidad, al igual que en  $r = 0$ . Sin embargo, podemos deshacernos de la primera de estas singularidades si hacemos un cambio de coordenadas a las *coordenadas de Kruskal*, definidas por

$$-z^2 + y^2 = [r(2M)^{-1} - 1]e^{r(2M)^{-1}} \quad (1.18)$$

$$(y + z)(y - z)^{-1} = e^{t(2M)^{-1}}. \quad (1.19)$$

La métrica en estas coordenadas se escribe como:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r(2M)^{-1}} (dy^2 - dz^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (1.20)$$

Ahora la singularidad en  $r = 2M$  se localiza en la región temporal que separa las regiones I y II en la Figura 1.2.2. Esta región es lo que conocemos como el *horizonte* del agujero negro. Cualquier punto en la región exterior I puede enviar señales de luz que alcancen el futuro temporal  $t = \infty$  y el futuro causal  $I_+$ . Sin embargo, cualquier rayo de luz que sea enviado desde la región II, no alcanzará el futuro  $t = \infty$  ni ningún punto de la región I. La región II es lo que se conoce como el interior del agujero negro. Además, tenemos la región IV, una solución hipotética que se conoce como *agujero blanco*, donde cualquier rayo de luz alcanza la región I. Por último tenemos la región III, que es idéntica a la región I, salvo que están fuera de contacto causal. A diferencia de este tipo de agujeros negros, en esta tesis trabajaremos principalmente soluciones en un fondo que no es asintóticamente plano. Sin embargo, estas geometrías aún poseen las características principales del agujero de Schwarzschild, y su correspondiente diagrama de Penrose se divide en regiones análogas a las regiones del diagrama 1.2.2. En el resto de este trabajo nos enfocaremos sólomente en las regiones I y II.

Dado que este tipo de objetos no emite ningún tipo de luz, podríamos preguntarnos qué otro tipo de cantidades observables pueden asociarse al agujero. Se ha encontrado [32] que además de la masa, solo existen otras dos de estas observables tales que la solución sigue siendo un agujero negro; la carga  $Q$  y el momento angular  $J$ . Por ejemplo, podemos agregar un término  $\int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  a la acción de materia, donde  $F_{\mu\nu}$  se define como la intensidad de campo del potencial vectorial electromagnético  $A_\mu$ . Imponiendo simetría esférica y resolviendo las ecuaciones de Einstein resultantes obtenemos la métrica del agujero negro cargado, conocida como *métrica de Reissner-Nordstrom*. El agujero negro con rotación se describe a través de la *métrica de Kerr*, o más generalmente (cuando el agujero rota y además tiene carga) con la *métrica de Kerr-Newman*, dada por:

$$ds^2 = -\rho^2 \left( \frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 \frac{\Delta}{\rho^2} + ((r^2 + a^2)d\phi - a dt)^2 \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2}, \quad (1.21)$$

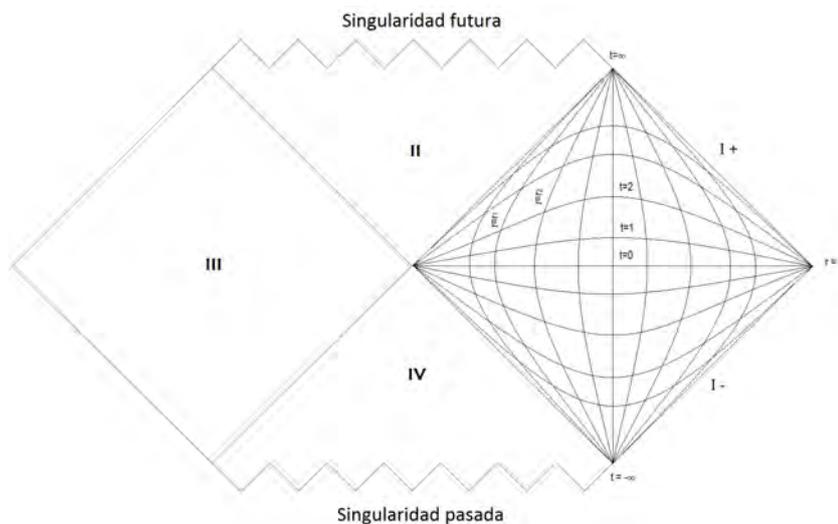


Figura 1.2: Diagrama de Penrose para la métrica de Schwarzschild. La región I representa el exterior del agujero negro, con el horizonte de eventos localizado en la línea temporal que separa a la región I de la región II. Los puntos  $I_+, I_-$  se definen de la misma manera que para el diagrama de la Figura 1.2.1, y la región  $r=0$  representa la singularidad en el centro del agujero, que separa causalmente a la región III de la región I.

donde,

$$a = \frac{J}{M}, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - rr_s + a^2 + r_Q^2, \quad (1.22)$$

siendo  $r_s = 2GM$  el *radio de Schwarzschild*, y  $r_Q = Q^2G/4\pi\epsilon_0$  una escala de distancia correspondiente a la carga eléctrica. Las métricas correspondientes a tener solo una de estas observables pueden obtenerse a partir de 1.22, igualando las otras observables a cero. Como veremos más adelante, existen escenarios donde es posible encontrar otro tipo de observables, o *pelos* al agujero. Para ello tendremos que considerar modificaciones a la acción de Einstein-Hilbert, como las teorías que estudiaremos en la Sección 1.2.3.

Recientemente [2], se ha encontrado evidencia de que los agujeros negros existen en la naturaleza, por lo que brindan un escenario donde poner a prueba las predicciones de la relatividad general. Además de esto, es interesante estudiarlos por varias razones, entre las que se encuentra el hecho de que cerca del horizonte la curvatura del espacio-tiempo genera fenómenos semiclásicos que nos brindan un acercamiento a la gravedad cuántica. En 1974 Hawking [28], trabajando en teoría de campos en espacios curvos, y basándose en trabajos previos de Bekenstein argumentó que la métrica cerca del horizonte implica un proceso de creación de pares de partículas, donde se producen pares entrelazados, uno de los cuales es absorbido, y el otro emitido por el agujero, produciendo radiación. Mediante una descripción estadística de los pares cuánticos en términos de una función de partición, dedujo también una forma de asociar cantidades termodinámicas al agujero negro. La temperatura y entropía asociadas a este proceso de emisión de radiación a partir del horizonte se conocen como la *temperatura de Hawking* y la *entropía de Bekenstein-Hawking*:

$$T = \frac{\kappa_s}{2\pi}, \quad S_{BH} = \frac{A}{4G_N}, \quad (1.23)$$

donde  $\kappa_s$  es la *gravedad superficial*, definida en términos del vector de Killing asociado al horizonte  $k^\mu$  como  $\kappa_s^2 = -1/2(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu)$ , y  $A$  es el área del horizonte de eventos. Un hecho importante es que la entropía en este caso escala como el área del horizonte, cuando la entropía debe ser por definición una cantidad extensiva. Esta aparente inconsistencia

será relevante más adelante cuando consideremos correcciones cuánticas en términos de la entropía de entrelazamiento. En virtud de estas relaciones entre la termodinámica y la geometría del agujero, podemos enunciar las siguientes *leyes de la mecánica de agujeros negros*:

Ley Cero: La gravedad superficial  $\kappa_s \equiv$  es constante en el horizonte de eventos.

Primera Ley: La relación entre los cambios en la masa  $M$ , la carga  $Q$ , el momento angular  $J$  y el área del horizonte  $A_h$  está dada por:

$$dM = \kappa_s \frac{dA_h}{8\pi} + \omega_h dJ + \Phi_e dQ, \quad (1.24)$$

donde  $\omega_h$  es la velocidad angular y  $\Phi_e$  es el potencial electrostático.

Segunda Ley: El área del horizonte  $A_h$  nunca decrece en un proceso físico.

Tercera Ley: Es imposible alcanzar  $\kappa_s = 0$  mediante algún proceso físico.

Hasta el momento hemos considerado solamente soluciones en un fondo asintóticamente plano, esto es, tales que lejos de la solución el espacio-tiempo es el espacio de Minkowski. Sin embargo, hemos visto que al considerar teorías con constante cosmológica, es posible obtener fondos gravitacionales con una curvatura distinta de cero. Por ejemplo, podemos resolver la ecuación de Einstein con constante cosmológica negativa para obtener la solución conocida como *AdS-Schwarzschild*:

$$ds^2 = - \left( \frac{r^2}{L^2} + 1 \right) dt^2 + \left( \frac{r^2}{L^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.25)$$

Esta métrica resultará de interés más adelante cuando estudiemos la dualidad entre este fondo y una cierta teoría de campo a temperatura finita.

### 1.2.3. Teorías de Gravedad con correcciones de orden superior

A pesar de que la teoría de Einstein ha resultado exitosa en la predicción de fenómenos a escalas macroscópicas, e incluso en nuestros días se siguen comprobando sus predicciones como en los experimentos de LIGO, existen razones para pensar que no proporciona una descripción completa de la teoría de la gravedad. Completa, en el sentido de ser válida a cualquier escala de distancia o equivalentemente, a cualquier escala de energía. Concretamente, si intentamos aplicar las técnicas de la Sección 1.3.2 para cuantizar la teoría de Einstein, la teoría resulta ser no renormalizable. En pocas palabras, este problema implica que existe una infinidad de términos que se deben agregar a la acción gravitacional linealizada para que las amplitudes de probabilidad en la teoría no divergan. Esta dificultad conduce a la idea de que la acción gravitacional debe ser corregida con términos que cobren cada vez mayor relevancia al ir escalas de distancia pequeñas. Todas estas ideas sobre la validez de las teorías de campos a escalas distintas de distancia quedarán clarificadas una vez que hayamos estudiado el formalismo del grupo de renormalización, en la Sección 1.3.2. También resultará útil más adelante pensar en teorías de gravedad en dimensión arbitraria, por lo que dejaremos de ahora en adelante la dimensión espacio-temporal  $D$  implícita. Este paso a dimensión arbitraria conlleva consecuencias topológicas no triviales. Por ejemplo, existe un resultado conocido como el *teorema de Gauss-Bonnet*, que básicamente nos da una forma de calcular la *característica de Euler*<sup>9</sup>  $\chi(M)$  asociada a una

<sup>9</sup>Número entero que determina la forma de una superficie independientemente de las deformaciones continuas que apliquemos sobre esta. Está relacionado con el *genus*, que representa el número de orificios que tiene dicha superficie.

variedad  $M$  a partir de escalares formados con contracciones del tensor de Riemann. En 4 dimensiones podemos escribir:

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2) = \chi(\mathcal{M}) \quad (1.26)$$

Si intentáramos extender la teoría de Einstein agregando este invariante topológico a la acción de Einstein-Hilbert, al tomar la variación de la acción, dicho invariante conduciría a un término de frontera que podemos tomar igual a cero, dejando invariantes las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, podemos considerar esta misma acción en 5 dimensiones, dando lugar a la teoría conocida como *gravedad de Gauss-Bonnet*, cuya acción se escribe como:

$$S_{GB} = S_{EH} + \int_{\mathcal{M}} d^Dx \sqrt{-g} \lambda (R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}). \quad (1.27)$$

Aquí  $\lambda$  es la constante de acoplamiento de Gauss-Bonnet. En contraste con el caso 4-dimensional, en esta teoría sí aparece una contribución no trivial a las ecuaciones de movimiento a partir del segundo término en la acción. Las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} - \lambda \left( \frac{1}{2} g_{ab} ((R^2 - 4R_{ab}R^{ab} + R_{abcd}R^{abcd}) - 2RR_{ab} + 4R_{ac}R_b^c + 4R_{cd}R_{ab}^{cd} - 2R_{acde}R_b^{cde}) \right) = 8\pi G_N T_{ab} \quad (1.28)$$

Esta teoría es interesante porque las ecuaciones de movimiento se ven modificadas a mayor orden en la curvatura pero siguen siendo de segundo orden en derivadas de la métrica, por lo que es posible encontrar soluciones como en gravedad de Einstein, tales como geometrías esféricas con métricas tipo agujero negro, etc. El hecho de que aparezca la contribución entre paréntesis al pasar de 3+1 a 4+1 dimensiones es análogo a considerar la acción de Einstein-Hilbert en 2+1 dimensiones y en 3+1 dimensiones. En 2 dimensiones espaciales, la variación de la acción de E-H conduce a una identidad trivial, debido a que en 2 dimensiones el escalar de curvatura es la característica de Euler. Sin embargo, en 3 dimensiones espaciales, esta misma acción proporciona las ecuaciones (1.7). Podemos generalizar esta identidad a dimensión arbitraria considerando extensiones dimensionales de un conjunto de invariantes topológicos, conocidos *invariantes de Chern-Weyl*, en el mismo sentido en que la acción de Einstein-Hilbert es la extensión dimensional de la característica de Euler. Estas extensiones, dan lugar a la *teoría de gravedad de Lovelock*, definida por la acción:

$$S_L = \int_{\mathcal{M}} d^Dx \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k} \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \alpha_k R_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots R_{a_k b_k}^{c_k d_k} + I_B, \quad (1.29)$$

donde el símbolo  $\lfloor \ ]$  denota la parte entera de un número, y  $I_B$  corresponde a un término de frontera análogo al término de GHY (1.13), que escribiremos explícitamente en el Capítulo 2. También definimos la delta de Kronecker generalizada como el producto antisimetrizado de las deltas de Kronecker usuales:

$$\delta_{a_1 b_1 \dots a_k b_k}^{c_1 d_1 \dots c_k d_k} = (2k)! \delta_{[c_1}^{a_1} \delta_{d_1}^{b_1} \dots \delta_{c_k}^{a_k} \delta_{d_k}^{b_k]} \quad (1.30)$$

De hecho, la acción definida en (1.29) resulta ser la acción más general de gravedad pura sin torsión que proporciona ecuaciones de segundo orden en la métrica, y dadas por un tensor simétrico de rango 2. En  $D > 4$ , esta teoría es una generalización de la

gravedad de Einstein con correcciones a orden  $\mathcal{O}(R^k)$  en la curvatura, con  $k \leq [(D-1)/2]$ . Explícitamente hasta orden  $k = 3$ , la acción se escribe como:

$$\begin{aligned} S \sim \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} [ & a_0 + a_1 R + a_2 (R_{abcd} R^{abcd} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2) \\ & + a_3 (R^3 + 3R R^{abcd} R_{cdab} - 12R R_{ab} R^{ab} + 24R^{cdab} R_{ac} R_{bd} + 16R^{cd} R_{da} R_c^a \\ & + 24R^{cdab} R_{abde} R_c^e + 8R_{ae}^{cd} R_{df}^{ab} R_{cb}^{ef} + 2R_{abef} R^{cdab} R_{cd}^{ef}) + \dots ], \end{aligned} \quad (1.31)$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden superior en curvatura o términos de frontera. Las ecuaciones de campo que obtenemos al variar esta acción, en ausencia de fuentes se pueden escribir como:

$$G_a^b = \sum_{k=0}^{[\frac{D-1}{2}]} \frac{a_k}{2^{k+1}} \delta_{ab_1 b_2 \dots b_{2k}}^{ba_1 a_2 \dots a_{2k}} R^{b_1 b_2}_{a_1 a_2} \dots R^{b_{2k-1} b_{2k}}_{a_{2k-1} a_{2k}} = 0. \quad (1.32)$$

La teoría de Lovelock es una extensión de la teoría de Einstein que puede pensarse a un orden  $k$  fijo, como un truncamiento de una teoría fundamental de gravedad. Es por esto, que las constantes de acoplamiento  $a_k$  que aparecen en la acción (1.29), a pesar de que son independientes entre sí, deben corresponder a una única escala de longitud. Cuando estudiemos más adelante las herramientas de la teoría de cuerdas, veremos que en ciertos modelos de gravedad cuántica aparecen correcciones a la acción de Einstein-Hilbert en la forma del término cuadrático en la acción (1.31). En este tipo de teorías también aparecen términos de orden superior en convolución con campos de materia en la acción. Por esto, será importante considerar acoplamientos de la acción de Lovelock con acoplamientos a materia.

En gravedad de Gauss-Bonnet se conocen soluciones explícitas de agujero negro [8, 13], y como veremos más adelante, también existen en gravedad de Lovelock cuando consideramos acoplamientos conformes a materia escalar. Cabe preguntarnos cómo se ven afectadas las propiedades termodinámicas del agujero negro en este tipo de generalizaciones. Ya que el procedimiento de Hawking para la deducción de la fórmula (1.23) para la entropía requiere la evaluación explícita de la acción gravitacional, este resultado es válido únicamente en gravedad de Einstein. En general, para una teoría de gravedad cuya Lagrangiana  $\mathcal{L}(R_{\mu\nu\lambda\rho})$  dependa de combinaciones del tensor de Riemann y de la métrica, la entropía de Bekenstein-Hawking se debe generalizar a la relación [5]:

$$S_W = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{h} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\lambda\rho}} \epsilon_{\mu\lambda} \epsilon_{\nu\rho}, \quad (1.33)$$

donde  $\epsilon_{\mu\nu}$  es el tensor binormal al horizonte de eventos y  $h$  es la métrica inducida. A esta fórmula se le conoce como *entropía de Wald*. En la Sección 4 evaluaremos explícitamente esta fórmula para gravedad de Gauss-Bonnet, e interpretaremos el resultado como un caso particular de otra cantidad, conocida como de entropía de entrelazamiento holográfica.

### 1.3. Teorías Cuánticas de Campo

Durante la primera mitad del siglo XX las ideas acerca de la naturaleza de las partículas sufrieron una revolución con la introducción de la teoría cuántica de Schrödinger y Heisenberg, con la que entendemos bastante bien la dinámica de procesos moleculares, atómicos y nucleares. Sin embargo, al considerar partículas que se mueven con velocidades

cercanas a la de la luz, debemos incorporar la teoría de la relatividad especial en nuestra descripción. Los primeros intentos de generalizar la ecuación de Schrödinger fracasaron, principalmente por el hecho de que se interpretaban como ecuaciones de una partícula cuántica. Ahora entendemos, que la naturaleza está constituida por otro tipo de objeto fundamental, el campo, del cual las partículas no son más que excitaciones cuánticas. Sabemos que una ecuación relativista válida ha de ser invariante bajo cambios de sistema de referencia. Esto restringe las posibles transformaciones que dejan invariante las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del campo, y al cuantizar la teoría, este hecho tiene como consecuencia que las excitaciones cuánticas del campo deben transformar de forma adecuada bajo esta simetría. En este caso, el conjunto de transformaciones que deben dejar invariantes las ecuaciones de movimiento son las matrices de Lorentz junto con las rotaciones en 3 dimensiones. Juntos forman el grupo matricial que conocemos como  $SO(3,1)$ . Si consideramos además la invariancia bajo traslaciones espacio-temporales obtenemos el *grupo de Poincaré*. En general, cada tipo distinto de partícula debe ser entonces una *representación*<sup>10</sup> de un cierto grupo de simetría. Además de las simetrías espacio-temporales, podemos tener simetrías internas y simetrías de norma. Estas últimas dan lugar a representaciones vectoriales o campos de norma, que estudiaremos más adelante. También existe otro tipo de simetría que relaciona partículas bosónicas con fermiónicas, llamada *supersimetría*, que discutiremos en la Sección 1.3. Restringiéndonos por el momento a las simetrías espacio-temporales, la tarea principal de la teoría cuántica de campos es encontrar las posibles representaciones del grupo de Poincaré y cuantizarlas para obtener partículas fundamentales. Comenzaremos con el caso más sencillo, que es el de la teoría escalar de Klein-Gordon.

### 1.3.1. Campos cuánticos y diagramas de Feynman

Consideremos por simplicidad un campo que es invariante bajo transformaciones de coordenadas, esto es, un campo *escalar*. La regla de transformación de este campo bajo una transformación de Lorentz  $x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv \Lambda_\nu^\mu x^\nu$  es simplemente  $\phi(x^\nu) \rightarrow \phi'(x'^\nu) \equiv \phi(\Lambda_\mu^{\nu-1} x^\mu)$ . La dinámica del campo escalar está descrita por la *Lagrangiana de Klein-Gordon*;

$$L_{KG} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.34)$$

que proporciona, después de aplicar el principio variacional de Hamilton a la acción correspondiente, la *ecuación de Klein-Gordon*:

$$\square \phi - m^2 \phi = 0, \quad (1.35)$$

Clásicamente esta ecuación describe a un objeto que se extiende en 3 dimensiones espaciales, y que puede oscilar análogamente a como lo hace una membrana en 2 dimensiones, y a una cuerda en una dimensión. Para obtener la versión cuántica de esta teoría, la forma más sencilla es seguir el procedimiento de *cuantización canónica*. Esto significa suponer que cada modo de oscilación  $a_{\mathbf{p}}$ ,  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  en la siguiente descomposición en modos de Fourier del campo

$$\phi(x^\mu) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\mathbf{p}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (1.36)$$

puede entenderse como un operador de descenso o ascenso de un oscilador armónico cuántico con momento  $\mathbf{p}$ . Para satisfacer las relaciones de conmutación usuales sobre

<sup>10</sup>En teoría de grupos, una representación es un objeto que conserva las propiedades de transformación del grupo en cuestión. Por ejemplo, en el caso del grupo de Lorentz  $SO(3,1)$ , las matrices de Lorentz forman una representación vectorial, o fundamental de este grupo.

estos operadores,  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 2\pi\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ , debemos imponer las siguientes relaciones de conmutación sobre el campo y su momento conjugado  $\pi(x^\mu) \equiv \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}}$  ;

$$[\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = i\hbar\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0. \quad (1.37)$$

De esta manera, interpretamos a las partículas como cuantos de ondas planas sobre el valor de fondo del campo. Cada par de operadores de ascenso y descenso crea antipartículas o partículas respectivamente cuando actúa sobre el estado base del sistema. De esta manera podemos construir estados de varias partículas, que están contruidos a partir de una base de un espacio de Fock. Esta es una teoría libre, en el sentido de que no hay términos de interacción en la Lagrangiana, y la única constante que determina toda la dinámica es la masa del campo. Podemos calcular la amplitud de probabilidad de propagación de un cuanto desde un punto  $x$  a un punto  $y$ , que es el tipo de cantidad que usualmente se mide en los experimentos. Para preservar causalidad, debemos considerar una cantidad que considere la amplitud de partícula y antipartícula. Esto está dado por el *propagador de Feynman*:

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + ie}, \quad (1.38)$$

que es una función de Green del operador de Klein-Gordon. A pesar de que el caso del campo escalar se usa generalmente como modelo introductorio, existen casos importantes en los que es necesario considerar campos escalares en la teoría. Por ejemplo, en el modelo estándar, el campo que se encarga de dar masa al resto de las partículas es el *campo de Higgs*, descrito por un campo escalar que se acopla al resto de las partículas.

Habiendo entendido la teoría libre de Klein-Gordon, podemos preguntarnos qué otras representaciones del grupo de Poincaré podemos construir. El siguiente caso en simplicidad es estudiar la *representación espinorial*, que al cuantizar da lugar a partículas de espín 1/2, como los electrones. Para ello, debemos definir las matrices 4x4  $\gamma^\mu$  que satisfacen el *álgebra de Clifford*:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}, \quad (1.39)$$

donde el símbolo  $\{ \}$  denota anticonmutación de matrices. Si definimos  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ , podemos probar que las matrices  $M(\Lambda) = e^{iS^{\mu\nu}}$  satisfacen las reglas de conmutación del grupo de Poincaré y por lo tanto, forman una representación de este último. Estas matrices actúan sobre columnas de cuatro componentes llamados *espinores de Dirac*. La ecuación relativista que describe a un campo de espinores se obtiene de la Lagrangiana

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (1.40)$$

y se puede escribir como:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (1.41)$$

que es conocida como *ecuación de Dirac*. Siguiendo el método de cuantización canónica podemos deducir que las excitaciones de este campo aparecen como partículas de espín 1/2. Además, estas excitaciones están cargadas eléctricamente, debido a la existencia de una simetría interna asociada al grupo  $U(1)$  que nos permite hacer la transformación

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\theta\psi(x)}, \quad (1.42)$$

donde  $\theta$  es un parámetro *constante* arbitrario. En virtud del teorema de Noether, esta simetría da lugar a una corriente conservada cuya carga correspondiente puede identificarse

con la carga eléctrica. El propagador para esta teoría es el *propagador de Dirac*,

$$S_D(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i(x-y)\cdot p}, \quad (1.43)$$

donde el símbolo  $\not{p}$  se define como  $\not{p} \equiv \gamma_a p^a$ . La simetría  $U(1)$  es de carácter *global*. Esto quiere decir que el parámetro  $\theta$  que determina la transformación (1.42) es independiente de la posición en el espacio-tiempo. Si queremos que esta transformación siga siendo una simetría cuando hacemos que este parámetro dependa del punto  $x$  donde hacemos la transformación, debemos considerar el cambio de variables conjunto:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\psi(x) \quad , \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x), \quad (1.44)$$

junto con la sustitución

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (1.45)$$

en la acción (1.40). El campo  $A_\mu$  es un vector de cuatro componentes que transforma en la representación fundamental de  $SO(3, 1)$  conocido como *campo de Maxwell*, y su excitación fundamental es una partícula de espín 0, sin masa, que corresponde al fotón, partícula que es mediadora de la interacción electromagnética. La Lagrangiana que describe al campo de Maxwell se define en términos de la *intensidad de campo*  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , y se conoce como Lagrangiana de la *electrodinámica cuántica*, o *QED*:

$$L_{QED} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \not{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

donde  $\not{D} = \gamma_\mu D^\mu$ . Las ecuaciones de movimiento que resultan de esta Lagrangiana corresponden a las ecuaciones de Maxwell con fuentes eléctricas junto con la ecuación de Dirac (1.41). La transformación (1.44) nos da una libertad adicional que nos permite redefinir el campo  $A_\mu$  restando una derivada total de una función arbitraria  $\Lambda(x)$ . A esta libertad se le conoce como *invariancia de norma*. Esta redundancia ocasiona que al cuantizar, la teoría contenga cantidades que no son observables. Existen dos caminos para lidiar con esta ambigüedad en la definición de la teoría. El primero de ellos consiste en cuantizar canónicamente fijando la norma desde el principio y por otro lado, podemos cuantizar quedándonos con las componentes no físicas y después imponer constricciones sobre los operadores de creación y aniquilación que descarten estas componentes. Las teorías invariantes de norma son sumamente importantes en la naturaleza, ya que el modelo estándar de la física de partículas es una teoría de este tipo cuyo grupo de simetría se descompone en un producto de representaciones que dan lugar a las tres fuerzas fundamentales que engloba esta teoría.

Al encender interacciones entre los campos mediante la adición de términos de acoplamiento a la Lagrangiana, como el término proporcional a  $e$  en (1.46), la descomposición en modos de Fourier que resuelve las ecuaciones de movimiento ya no resulta válida, y de hecho resulta imposible encontrar el valor exacto de las amplitudes de dispersión de la teoría, salvo en casos excepcionales. Sin embargo, en muchos casos de interés podemos considerar a la teoría de campo como interactuante pero *débilmente acoplada*, lo que significa que el parámetro que determina la intensidad de las interacciones, conocido como *constante de acoplamiento* (por ejemplo,  $e$  en (1.46)), es pequeño en comparación con las escalas energéticas en las que realizamos experimentos. Restrinjámonos por el momento a la teoría escalar  $\phi^4$  con constante de acoplamiento  $\lambda$ , definida por la Lagrangiana:

$$L_{\phi^4} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (1.47)$$

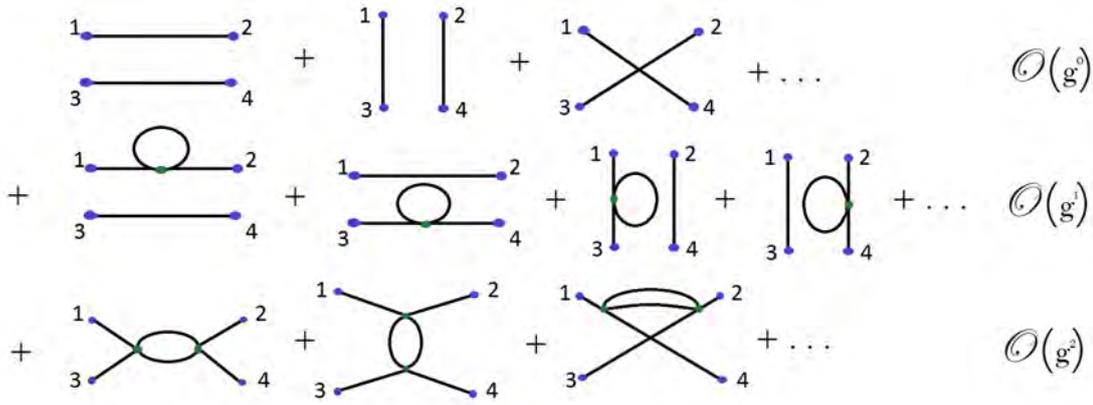


Figura 1.3: Algunos de los diagramas de Feynman que aparecen en la expansión perturbativa del correlador de cuatro puntos, ref. Se indica a qué orden en esta expansión aparecen. Las líneas azules corresponden a propagadores, y los puntos internos a vértices. La contribución correspondiente se obtiene del producto de estas cantidades, considerando la simetría de cada diagrama.

Lo mejor que podemos hacer es seguir el método desarrollado por Feynman, Schwinger y Tomonaga, que consiste en hacer una expansión perturbativa del hamiltoniano en términos de propagadores de Feynman. Equivalentemente, podemos optar por seguir el formalismo de integrales de trayectoria o de camino formulado por Feynman. Este método, nos permite interpretar las amplitudes de probabilidad de una teoría cuántica como promedios sobre las trayectorias clásicas recorridas por una partícula. Comenzamos definiendo la integral de trayectoria que calcula la amplitud de propagación de un punto a otro del espacio-tiempo:

$$\langle \phi(x_1) | \phi(x_2) \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \quad (1.48)$$

donde la medida de integración se define como  $\mathcal{D}\phi \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod_n \phi(x_n)$ . Físicamente, esta definición nos dice que la amplitud de probabilidad de que las excitaciones cuánticas del campo se propaguen de un punto a otro del espacio, puede calcularse sumando sobre todas las trayectorias clásicas, pesadas con el factor  $e^{iS}$ . Podemos definir un propagador ordenado en el tiempo, que está dado por

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}{\int \mathcal{D}\phi \exp[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L}]}, \quad (1.49)$$

donde  $|\Omega\rangle$  es el estado base de la teoría interactuante. Se puede demostrar que en el caso libre esto equivale al propagador de Feynman. Podemos definir en general, el correlador de  $n$  puntos

$$G(\phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n)) \equiv \langle \Omega | \phi(x_1) \phi(x_2) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle \quad (1.50)$$

mediante la inserción de  $n$  campos en la integral de trayectoria que aparece en el numerador de (1.49). Estas cantidades contienen toda la información física sobre las interacciones en la teoría, y nos permiten calcular las observables que se miden más frecuentemente en los experimentos, conocidas como *amplitudes de dispersión*. El formalismo de integral de trayectoria nos brinda una manera de obtener cualquier correlador en términos de propagadores de Feynman, mediante la implementación de Por ejemplo, el correlador de  $n$  puntos para la teoría  $\phi^4$  se puede calcular a partir de la *funcional generatriz*

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(-i\left\{ \int d^4x (L_{KG} + L_{int}) + \int d^4x \phi J \right\}\right), \quad (1.51)$$

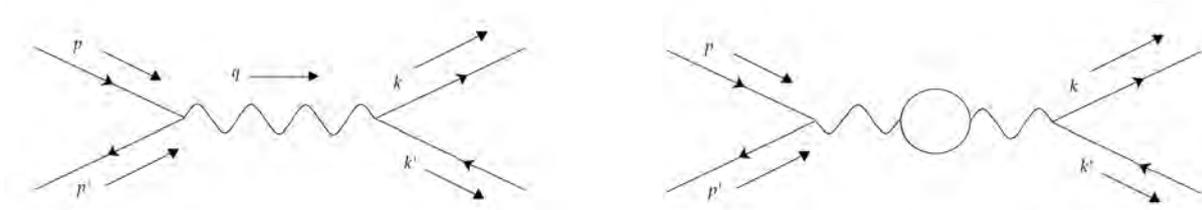


Figura 1.4: a) Diagrama a nivel árbol que aparece en el cálculo de la amplitud de dispersión para el proceso  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . b) Diagrama con un lazo fermiónico que aparece en la expansión a orden 2 para el mismo proceso. La integración sobre todo el espacio de momentos ocasiona que esta contribución sea infinita.

tomando  $n$  derivadas funcionales respecto a  $J$ :

$$G(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)) = \frac{1}{(\int \mathcal{D}\phi e^{iS})} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \mathcal{Z}[J] \Big|_{J=0}. \quad (1.52)$$

Podemos hacer una expansión perturbativa de la funcional generatriz usando la suposición de que la teoría está fuertemente acoplada. Para la teoría  $\phi^4$  obtenemos:

$$\mathcal{Z}[J]_{\phi^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4y \left( \frac{\delta}{\delta J(y)} \right)^4 \right\}^n e^{\frac{1}{2}J \cdot \Delta^{-1} \cdot J} \mathcal{Z}_0(0), \quad (1.53)$$

donde  $\Delta^{-1}$  es una función de Green del operador de Klein-Gordon  $\Delta = -\partial^2 - m^2$ , y  $\mathcal{Z}_0$  es la funcional generatriz de la teoría de Klein-Gordon con  $\lambda = 0$ . Como caso particular, analicemos el correlador de 4 puntos. La ecuación (1.52) nos dice que tenemos que tomar cuatro derivadas funcionales de (1.53) y evaluarlas en cada punto externo. Si organizamos esta expansión en términos de diagramas, donde a cada línea le corresponde un propagador libre, y a cada punto que une líneas externas el factor de vértice  $-i\lambda$ , podemos ver que obtenemos una serie de diagramas como los de la Figura 1.3.1. Después de dividir entre el denominador en (1.49), que representa las contribuciones de las fluctuaciones del vacío, obtenemos la siguiente relación:

$$G(\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)) = \langle \Omega | T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n)) | \Omega \rangle = \{ \text{Suma sobre todos los diagramas conexos con } n \text{ puntos externos} \}. \quad (1.54)$$

En la Figura 1.3.1 se muestran algunos de los diagramas que aparecen hasta orden 2 en la expansión para el correlador de 4 puntos de esta teoría. Al conjunto de normas para asociar las partes del diagrama con cantidades como propagadores, se le conoce como reglas de Feynman, y dependen de la teoría en cuestión. Por ejemplo, para QED tenemos partículas de espín 1/2 y partículas de espín cero que interactúan con una intensidad determinada por la constante de acoplamiento  $e$ . La forma de la Lagrangiana de QED determina los vértices de interacción entre estas partículas. Las reglas de Feynman de esta teoría nos dicen que debemos asociar un factor de  $-ie$  a cada vértice de interacción, y que las líneas que representan la propagación de (anti)fermiones corresponden al propagador de Dirac (líneas rectas en la Figura 1.3.1), mientras que las líneas que representan la propagación de fotones (líneas onduladas en 1.3.1) corresponden al propagador de la teoría de Maxwell. Consideremos el diagrama de la Figura 1.3.1 a), que aparece en la expansión del proceso de dispersión  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . Las reglas de Feynman nos permiten calcular la contribución de este diagrama a la amplitud de dispersión total mediante:

$$\bar{v}^{s'}(p') (-ie\gamma^a) u^s(p) \left( \frac{-ig_{ab}}{q^2} \right) \bar{u}^r(k) (-ie\gamma^b) v^{r'}(k'), \quad (1.55)$$

donde  $q = p + p'$  es el momento del fotón, que por conservación de momento equivale a la suma de los momentos salientes  $k$  y  $k'$ . Los espinores  $u$  y  $v$  son soluciones a la ecuación de Dirac, y los índices  $s, r$  denotan componentes de espín.

### 1.3.2. Renormalización y teorías conformes

Supongamos que queremos calcular la contribución del diagrama de la Figura 1.3.1 b). La integral en el espacio de momentos que proviene del lazo fermiónico (a orden 2 en la expansión perturbativa), requiere ser evaluada en el rango de  $-\infty$  a  $\infty$ , dando lugar a una divergencia. Genéricamente, los diagramas con lazos presentan este tipo de divergencias. La razón de esto se debe a que el vacío cuántico está fluctuando constantemente con infinitos grados de libertad, y por lo tanto su energía es infinita. Para obtener cantidades finitas en las amplitudes de dispersión, debemos redefinir los parámetros que aparecen en la Lagrangiana como parámetros desnudos, de manera que esta se separa en una parte renormalizada (libre de divergencias) y otra parte que incluye *contratérminos*, para absorber las divergencias en los correladores. En el caso de QED, por ejemplo, la Lagrangiana toma la forma:

$$\begin{aligned} L_{QED} &= \bar{\psi}_o(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_o)\psi_o - q_o\bar{\psi}_o\gamma_\mu\psi_oA_o^\mu - \frac{1}{4}F_{o\mu\nu}F_o^{\mu\nu} \\ &= L_{QED \text{ ren}} + L_{QED \text{ cont}}, \end{aligned} \quad (1.56)$$

donde

$$L_{QED \text{ ren}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (1.57)$$

y los contratérminos se escriben como:

$$\begin{aligned} L_{QED \text{ cont}} &= -\frac{1}{4}(Z_A - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i(Z_\psi - 1)\bar{\psi}\not{\partial}\psi - (Z_\psi m_o - m)\bar{\psi}\psi \\ &\quad - (Z_\psi\sqrt{z_A}e_o - e)q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu \equiv -\frac{1}{4}\delta Z_3 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\delta Z_2 \bar{\psi}\not{\partial}\psi - \delta m \bar{\psi}\psi - \delta Z_1 q\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu, \end{aligned} \quad (1.58)$$

donde la cantidad  $Z_A$  se define en términos de la relación  $A_\mu = A_o \mu / \sqrt{Z_A}$ , y análogamente para  $Z_\psi$ . Podemos calcular las contribuciones de los contratérminos a los correladores divergentes mediante un procedimiento conocido *regularización*, que implica sustituir las integrales divergentes por integrales parametrizadas por alguna cantidad sobre la cual tomaremos un cierto límite al final del cálculo para recuperar la descripción inicial. Aplicando este procedimiento, se encuentra que las cantidades  $\delta Z_1$ ,  $\delta Z_2$ ,  $\delta Z_3$  y  $\delta m$  dan lugar a nuevos términos de interacción que absorben las divergencias en los correladores, proporcionando un resultado finito.

Si en una teoría de campos es posible remover todas las divergencias en las amplitudes de dispersión mediante la adición de un número finito de contratérminos, se dice que la teoría es renormalizable. La propiedad de renormalizabilidad nos brinda una manera de clasificar a las teorías de campo y decidir si son o no buenas candidatas para describir la naturaleza. Por ejemplo, el modelo estándar de las partículas elementales resulta ser una teoría exactamente renormalizable, sugiriendo que las teorías fundamentales de la naturaleza deben compartir esta propiedad. En contraste, la relatividad general no es renormalizable a nivel cuántico. Esto significa que para absorber todos los infinitos en los correladores debemos añadir una cantidad infinita de contratérminos, de modo que este procedimiento se vuelve imposible de realizar en la práctica.

El método de renormalización nos permite deducir como las cantidades físicas de la teoría dependen de la escala energética  $\mu$  que define a la teoría de campo, conocida como *escala de renormalización*. Esta información está codificada en la *función beta*, y en la *dimensión anómala* definidas respectivamente como

$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}, \quad \gamma = \frac{\mu}{2} \frac{\partial(\ln Z)}{\partial \mu}, \quad (1.59)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento y  $Z$  es la cantidad definida en (1.58). La forma en que la función beta depende de la escala energética está contenida en la *ecuación de Callan-Symanzyk*, que en el caso de QED resulta:

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_4 \frac{\partial}{\partial g_4} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial g_2} + N\gamma \right) G_N(x; g_2, g_4, \mu) = 0. \quad (1.60)$$

Aquí  $g_1(\mu)$  y  $g_2(\mu)$  son funciones que se relacionan directamente con la constante de acoplamiento y la masa de los campos. Esta ecuación nos permite deducir que el acoplamiento o constante de estructura fina, definida como  $\alpha_{QED} = e^2/4\pi$ , calculada hasta un lazo en la expansión perturbativa, depende de la escala energética como:

$$\alpha_{QED}(\mu) = \frac{\alpha_{QED}(\mu_{ref})}{1 - \frac{2}{3\pi} \alpha_{QED}(\mu_{ref}) \ln(\mu/\mu_{ref})}, \quad (1.61)$$

donde  $\mu_{ref}$  es una escala de referencia a la cual esta expresión deja de tener validez.

Otro concepto importante que introduciremos a continuación tiene que ver con un tipo de teorías que tienen propiedades interesantes desde la perspectiva del grupo de renormalización, y que más adelante aparecerán también en el contexto de teoría de cuerdas. Cuando la función beta es igual a cero, la teoría en cuestión se ve de la misma manera a cualquier escala energética que la exploremos, y por lo tanto, también es invariante ante reescalamientos de distancia. Esta propiedad implica un tipo de simetría, que se conoce como *invariancia conforme*. Una variedad  $D$ -dimensional es llamada *conformalmente plana* si el elemento invariante de línea puede ser escrito en la forma

$$ds^2 = e^{\omega(x)} dx \cdot dx \quad (1.62)$$

donde el producto punto representa una contracción con la métrica de Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$ . El *grupo conforme* es el subgrupo del grupo general de transformaciones coordenadas que preserva la condición (1.62). Geométricamente, el grupo conforme preserva ángulos entre puntos mientras se distorsionan las distancias. Además de los cambios de escala, las transformaciones conformes pueden ser rotaciones (incluyendo boosts de Lorentz) y traslaciones además de un tipo de transformaciones más complicadas conocido como *transformaciones conformes especiales*. En dos dimensiones, el grupo conforme tiene un subconjunto de dimensión finita que corresponde al grupo  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}^2$ . En este caso podemos realizar una complexificación de las coordenadas de un campo, de la forma  $\phi(x^0, x^1) \rightarrow \phi(z, \bar{z})$ . Esto nos permite introducir la definición de *dimensión conforme*. Si un campo  $\phi(z, \bar{z})$  transforma bajo el cambio de escala  $z \rightarrow \lambda z$  de acuerdo a

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \lambda^h \lambda^{-\bar{h}} \phi(\lambda z, \bar{\lambda} \bar{z}) \quad (1.63)$$

se dice que tiene dimensión conforme  $(h, \bar{h})$ . Si el campo en cuestión transforma bajo  $z \rightarrow f(z)$  como

$$\phi(z, \bar{z}) \rightarrow \phi'(z, \bar{z}) = \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^h \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}} \phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (1.64)$$

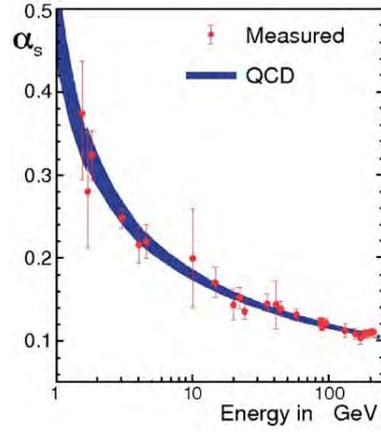


Figura 1.5: Libertad asintótica en QCD. La constante de estructura fina tiende a cero conforme vamos a energías grandes. En cambio, a energías pequeñas, el acoplamiento crece, y la teoría se vuelve confinada y fuertemente acoplada. Esto contrasta con el caso de QED donde la constante de acoplamiento tiende a cero cuando vamos a energías pequeñas.

es llamado campo *primario* de dimensión conforme  $(h, \bar{h})$ . Si restringimos  $f$  al subgrupo  $SL(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$ , el campo  $\phi$  se conoce como campo *cuasi-primario*. Un resultado importante es que en algunas de las teorías de este tipo las funciones de correlación de  $n$  puntos pueden derivarse exactamente a partir de las simetrías de la teoría, incluso sin necesidad de conocer la acción. En el caso de la función de dos puntos de dos campos cuasi-primarios, la simetría conforme de  $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$  fija la función de correlación a la forma:

$$\langle \phi_i(z) \phi_j(w) \rangle = \frac{d_{ij} \delta_{h_i, h_j}}{(z-w)^{2h_i}} \quad (1.65)$$

donde  $d_{ij}$  es una constante llamada *constante de estructura*. Para una función de correlación de tres puntos tenemos:

$$\langle \phi_1(z_1) \phi_2(z_2) \phi_3(z_3) \rangle = \frac{C_{123}}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} + z_{23}^{h_2+h_3-h_1} + z_{13}^{h_1+h_3-h_2}} \quad (1.66)$$

donde  $z_{ij} = z_i - z_j$ . Cuando la teoría conforme tiene dimensión  $D \geq 2$ , es posible deducir expresiones similares para las funciones de correlación, imponiendo restricciones sobre estas a través de la invariancia bajo el grupo conforme.

### 1.3.3. QCD y SYM $\mathcal{N} = 4$

La teoría que describe a la fuerza fuerte, responsable de que los protones permanezcan confinados en los núcleos, es una teoría de norma *no-Abeliana* con grupo de norma  $SU(3)$ . Esto quiere decir que el campo de norma transforma en una representación matricial de este grupo, y que este grupo no presenta la propiedad de conmutatividad en sus elementos. Las partículas que corresponden a esta representación son bosones de espín uno, llamados *gluones*. En la sección anterior estudiamos el caso familiar de una teoría de norma abeliana, y argumentamos que la densidad Lagrangiana corresponde al escalar formado por la contracción de dos tensores  $F_{\mu\nu}$ . La Lagrangiana que generaliza esto a teorías no abelianas da lugar a la *teoría de Yang-Mills*;

$$L_{YM} = -Tr\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\}, \quad (1.67)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  se define de manera análoga al caso de QED, pero ahora el campo  $A_\mu$  es una matriz que es un elemento del álgebra de  $SU(3)$ . La traza aparece porque en este

caso la combinación  $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  no es invariante de norma en contraste con QED, mientras que su traza sí lo es. Podemos agregar también materia fermiónica en la representación fundamental de  $SU(3)$  si definimos los espinores de Dirac y su regla de transformación bajo este grupo como:

$$\psi_c^{(s)}(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^{(s)}(x) \\ \psi_2^{(s)}(x) \\ \psi_3^{(s)}(x) \end{pmatrix} \rightarrow \psi_c'^{(s)} = U(x)\psi_c^{(s)}(x) = \exp(i\theta_I(x)t^I)\psi_c^{(s)}(x), \quad (1.68)$$

donde  $\theta_I(x)$  es una matriz que parametriza la transformación, y  $t^I$  representa a los generadores del álgebra del grupo  $SU(3)$ . El índice  $c$  corre de 1 a 3, y corresponde a la carga fuerte o de *color*. Estos fermiones aparecen en tres generaciones, denotadas por el índice  $(s)$ , que corresponden a la carga *electrodébil* o de *sabor*. A las partículas fermiónicas que resultan de cuantizar esta teoría se les conoce como *quarks*. Cuando consideramos la acción de Yang-Mills acoplada mínimamente a la Lagrangiana de Dirac para los quarks, obtenemos la teoría conocida como cromodinámica cuántica, o QCD:

$$L_{QCD} = \bar{\psi}_c ((i\not{D}) - m) \psi_c - \frac{1}{4} Tr \{ (F_{\mu\nu}^I)^2 \} \quad (1.69)$$

Análogamente al caso de QED, podemos deducir tanto las reglas de Feynman como los correspondientes contratérminos. De la misma forma podemos determinar la función beta a un lazo, y la forma en que la constante de acoplamiento depende en la escala energética en una teoría de Yang-Mills con grupo de norma  $SU(N)$  al mismo orden en la expansión perturbativa:

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}(11N_c - 2N_s) \ln(\mu/\Lambda_{QCD})}. \quad (1.70)$$

Aquí  $N_c$  es el número de colores, y  $N_s$  el número de sabores, mientras que  $\Lambda_{QCD}$  es una constante característica de la teoría, a la cual  $\alpha_{YM}$  diverge. Físicamente, es una escala de corte, por debajo de la cuál la interacción fuerte se vuelve fuertemente acoplada. En el caso del grupo de norma  $SU(3)$  con 3 sabores esta función resulta negativa. Como consecuencia, en escalas energéticas bajas la teoría está fuertemente acoplada y resulta imposible hacer una expansión perturbativa en términos de un parámetro pequeño. A esto se le conoce como *libertad asintótica*, y se ilustra en la Figura 1.3.3. Este hecho vuelve muy difícil la tarea de obtener predicciones experimentales en el régimen de bajas energías donde la teoría está fuertemente acoplada, y ha dado lugar a que se desarrollen nuevas estrategias para entender y describir la fuerza fuerte.

A temperaturas comparables con  $\Lambda_{QCD}$  el acoplamiento se vuelve pequeño y las partículas se desconfinan. Esto da lugar a un estado de la materia formado por gluones y quarks que interactúan débilmente, formando una especie de plasma, conocido como *plasma de quarks y gluones*. Como a altas temperaturas los cambios en la escala de renormalización son despreciables, la teoría se vuelve aproximadamente conforme. Es posible crear este estado de la materia en el laboratorio durante un tiempo muy corto, acelerando iones pesados a velocidades ultrarelativistas y haciéndolos colisionar.

Una propiedad importante que presentan algunas teorías de norma es un tipo de simetría que no es espacio-temporal ni interna, sino que se encarga de mezclar los campos bosónicos y fermiónicos de manera que la acción quede invariante, y que a cada partícula de la teoría le corresponda una partícula con estadística opuesta (*superpareja*). A esto se le conoce como *supersimetría*. Los generadores de la transformación se conocen como *supercargas*, y se denotan como  $Q_A$ , de forma que al actuar con ellas sobre los campos obtenemos las

correspondientes superparejas. Pueden existir distintas formas de hacer una transformación de este tipo, y en ese caso tendremos más de una supercarga. A pesar de que gran parte de la comunidad de físicos teóricos de altas energías creen que es bastante probable la existencia de supersimetría en la naturaleza, aún no hay evidencia experimental que nos permita sustentar esta afirmación.

Existe un ejemplo importante de una teoría supersimétrica que puede considerarse como prima de QCD y que es útil como laboratorio teórico para explorar propiedades generales de las teorías de norma no-abelianas. A esta teoría le conocemos como *super Yang-Mills*  $\mathcal{N} = 4$ , o simplemente *SYM*  $\mathcal{N} = 4$ . Esta denominación proviene del hecho de que tenemos 4 supercargas, o equivalentemente 4 formas distintas de rotar los campos entre sí de manera que la teoría se quede invariante. Estos campos están contenidos en el multiplete de norma que escribimos como  $(A_\mu, \lambda_a^i, X^i)$ . La Lagrangiana de *SYM* está dada por:

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{N}=4 \text{ SYM}} = \text{Tr} \left\{ \frac{-1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\theta_I}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_a i \bar{\lambda}_a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda_a - \sum_i D_\mu X^i D^\mu X^i \right. \\
\left. + \sum_{a,b,i} g_{YM} C_i^{ab} \lambda_a [X^i, \lambda_b] + \sum_{a,b,i} \bar{C}_{iab} \bar{\lambda}^a [X^i, \bar{\lambda}^b] + \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{i,j} [X^i, X^j]^2 \right\} \\
i = 1, 2, \dots, 6 \quad a, b = 1, \dots, 4
\end{aligned} \tag{1.71}$$

donde  $g_{YM}$  y  $\theta_I$  son las constantes de acoplamiento de la teoría, mientras que las  $C_{ab}^i$  son las constantes de estructura del álgebra de supersimetría. El contenido de campos en una teoría de Yang-Mills con un número de supersimetrías  $\mathcal{N} \leq 4$  arbitraria consiste principalmente de multipletes de componentes del campo de norma  $A_\mu$ , fermiones de Weyl izquierdos  $\psi_a$  y  $\lambda_a$ , y campos escalares  $\phi$  y  $H$ . En particular para  $\mathcal{N} = 4$ , tenemos el multiplete de norma  $(A_\mu, \lambda_a^A, \phi^I)$ , donde  $\lambda_a^A$ ,  $A = 1, 2, 3, 4$  son fermiones izquierdos de Weyl, y  $\phi^I$   $I = 1, 2, \dots, 6$  son campos escalares reales. Bajo el grupo de supersimetrías  $SU(4)_R$  el campo de norma  $A_\mu$  es un singulete, los fermiones de Weyl se transforman en la representación fundamental **4**, y los escalares  $\phi^I$  bajo la representación **6**.

Otra simetría que presenta esta teoría es invariancia conforme, simetría que se preserva aún cuando cuantizamos la teoría, como puede comprobarse calculando la función beta. Esta invariancia puede mezclarse con la supersimetría  $\mathcal{N} = 4$ , dando lugar a un grupo que engloba a estas dos simetrías, conocido como *grupo superconforme*, y nos brinda una manera de organizar los operadores de la teoría en términos de familias generadas por operadores primarios superconformes.

Cuando consideramos esta teoría a una temperatura finita  $T \sim \Lambda_{QCD}$  la invariancia conforme y la supersimetría se rompen, y el contenido de materia consiste en una sopa de gluones y materia exótica que es similar al plasma de quarks y gluones de QCD. Por esto, *SYM*  $\mathcal{N} = 4$  se vuelve relevante, ya que aproxima bastante bien a QCD en este régimen. Si de alguna manera pudiéramos realizar cálculos no perturbativos en esta teoría, tendríamos un modelo fenomenológico para realizar predicciones en QCD a altas temperaturas.

## 1.4. Teorías de Cuerdas y D-Branas

A pesar de que la teoría cuántica de campos ha resultado exitosa al explicar tres de las cuatro interacciones fundamentales a escalas cuánticas, falla al intentar incorporar a la gravedad como una teoría fundamental, dado que la relatividad general es una teoría no renormalizable. Desde finales de los años 70's, se conoce una alternativa que permite

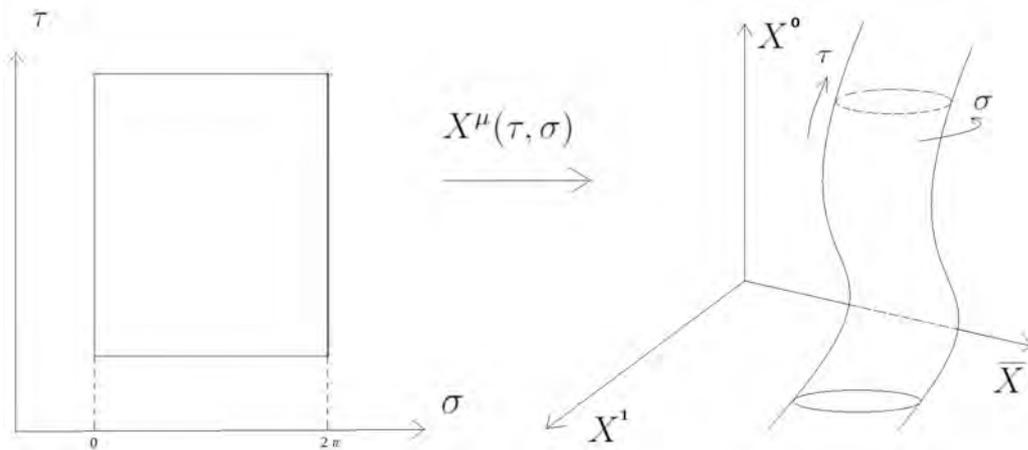


Figura 1.6: Derecha: Parametrización de un segmento en el espacio 2 dimensional  $(\sigma, \tau)$ . Izquierda: La función  $X(\tau, \sigma)$  mapea este segmento a la hoja de mundo encajada en un espacio  $D$ -dimensional. En el caso de cuerda cerrada, la coordenada  $\sigma$  es periódica, y la hoja de mundo tiene la topología de un cilindro.

incorporar a la gravedad como una teoría cuántica, y de paso unificarla con todas las otras interacciones fundamentales. Si bien aún no provee de evidencia experimental para ser corroborada, es sin duda hasta ahora la mejor opción que tenemos para entender la gravedad cuántica. La idea principal de esta teoría consiste en suponer que a escalas comparables con la longitud de Planck, la realidad consiste de objetos unidimensionales, cuyos modos de vibración cuánticos dan lugar a las distintas partículas que conocemos. Debido a su importancia para el marco teórico donde se realizarán los cálculos de este trabajo, dedicaremos esta sección a estudiar los temas más importantes de la teoría de cuerdas, comenzando con la descripción de la cuerda bosónica relativista.

### 1.4.1. Cuerda bosónica, supercuerda y tipo IIB

Imaginemos un objeto unidimensional (como una liga) que se mueve en un espacio  $d + 1$ -dimensional en la ausencia de fuerzas externas. Recordemos la acción para partícula relativista (1.3). Al ser extremizada, esta acción proporciona la trayectoria que minimiza la longitud recorrida por la partícula. Una cuerda a su vez, describe una superficie bidimensional al moverse en el espacio  $d + 1$ -dimensional, conocida como *hoja de mundo*. En analogía con la partícula relativista, podemos deducir la dinámica de la cuerda a partir de un principio variacional, exigiendo que el *área* de la hoja de mundo sea mínima. Podemos parametrizar la hoja de mundo con las variables  $\sigma, \tau$  y escribir el encaje de la cuerda  $X^\mu(\sigma, \tau)$  en el espacio tiempo como función de estas (ver Figura 1.4.1). La acción para la cuerda, o *acción de Nambu-Goto* se escribe como:

$$S_{NG} = -T \int d\sigma d\tau \sqrt{-h}, \quad (1.72)$$

donde  $h_{ab}$  es la métrica inducida, que hemos definido para cualquier dimensión en el Apéndice, y en dos dimensiones se escribe como  $h_{ab} = g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ . Esta acción presenta, además de simetría de Lorentz en las coordenadas espacio-temporales (en espacio plano), invariancia bajo reparametrizaciones en la hoja de mundo. Es posible partir de una acción equivalente a la de Nambu-Goto introduciendo una métrica independiente del encaje de la cuerda, en la hoja de mundo  $\gamma_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ . En este caso obtenemos la *acción de Polyakov*:

$$S_P = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \quad (1.73)$$

Además de las simetrías que satisface la acción de Nambu-Goto, esta acción presenta invariancia bajo transformaciones de Weyl, que son reescalamientos de la forma  $e^{-\phi}h_{\alpha\beta}$  sobre el campo auxiliar  $h_{\alpha\beta}$ . Usando esta simetría y la invariancia bajo reparametrizaciones, podemos hacer una elección de norma que simplifique la forma de las ecuaciones de movimiento. Las ecuaciones que se obtienen corresponden a la ecuación de onda, más ciertas constricciones sobre el tensor de energía momento ( $T_{ab} = \frac{\delta S}{\delta h_{ab}}$ ). Por lo tanto, podemos construir la solución  $X^\mu(\tau, \sigma)$  como una superposición de modos de Fourier<sup>11</sup>. Armados con la solución clásica, podemos implementar el programa de cuantización canónica y construir el espacio de estados en términos los operadores de ascenso y descenso  $\alpha_n^\mu, \bar{\alpha}_n^\mu$  con  $n \in \mathbb{Z}$  análogos a los que aparecen en la teoría de campos. Si exigimos que se satisfagan las reglas de conmutación del álgebra de Poincaré, podemos deducir que el único valor de la dimensión  $D$  que es consistente con las relaciones de conmutación de los generadores de Lorentz es  $D = 26$ . El espectro de partículas consiste para cuerda abierta de partículas vectoriales de espín cero como el fotón, junto con una torre infinita de estados masivos, mientras que para la cuerda cerrada siempre aparece un campo tensorial de rango 2 y espín cero, que corresponde al cuanto del campo gravitatorio, o gravitón entre otros campos que detallaremos más adelante.

Al igual que en teoría cuántica de campos, en teoría de cuerdas podemos calcular amplitudes de dispersión a nivel perturbativo en términos de diagramas de Feynman generalizados, valiéndonos de la invariancia conforme en la hoja de mundo, que nos permite determinar la evolución de los estados en el plano conforme mediante la inserción de operadores puntuales. La principal diferencia con QFT, es que en este caso es el mismo objeto el que da lugar a todas las interacciones de la teoría, que por lo tanto están controladas por una única constante de acoplamiento, la *constante de cuerdas*  $g_c$ . Si obtenemos las amplitudes de dispersión para la teoría, podemos organizar esta información en una acción efectiva para la teoría, que se escribe en términos de los campos generados por la cuerda.

Podemos generalizar la acción de la cuerda para que incluya fermiones en su espectro. Concretamente, incorporamos  $D$  ( $2D$  para cuerdas cerradas) fermiones de Majorana en la representación vectorial del grupo de Lorentz  $SO(D-1, 1)$ . La acción resultante corresponde a la suma de la acción bosónica y la acción de Dirac para los  $D$  fermiones sin masa:

$$S = S_{bosónica} - \frac{T}{2} \int d^2\sigma \bar{\psi}^\mu \partial_a \rho^a \psi_\mu \quad (1.74)$$

donde  $\rho^a$  son las matrices de Dirac en dos dimensiones. Esta acción resulta ser invariante bajo un conjunto de transformaciones que relacionan las coordenadas bosónicas  $X^\mu$  con el campo fermiónico  $\psi^\mu$  en la hoja de mundo. Como mencionamos al introducir la teoría de Yang-Mills supersimétrica, este es un tipo de transformaciones de supersimetría. A las teorías de cuerdas que incluyen supersimetría (y como consecuencia, fermiones) se les conoce como *teorías de supercuerdas*. Históricamente, el concepto de supersimetría surge dentro de la teoría de cuerdas con el objetivo de incluir materia fermiónica en su espectro.

Al aplicar el principio variacional a la acción (1.74), debemos imponer dos tipos distintos de condiciones de frontera que dividen el espectro en cuatro sectores :

$$\psi^\mu(\tau, \pi) = +\psi^\mu(\tau, -\pi) \quad (1.75)$$

<sup>11</sup>La solución explícita para cuerda abierta con condiciones de frontera de Neumann es  $X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l_s^2 p^\mu \tau + i l_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma)$ , donde  $\alpha_m^\mu$  son los modos de Fourier de la descomposición. Para cuerda cerrada existen dos conjuntos independientes de estos modos de oscilación  $\alpha_m^\mu$  y su conjugado  $\bar{\alpha}_m^\mu$ , y la solución es análoga al caso de cuerda abierta.

$$\psi^\mu(\tau, \pi) = -\psi^\mu(\tau, -\pi) \quad (1.76)$$

La primera condición (1.75) es periódica y le conoce como condición de Ramond(R), mientras que la segunda (1.76) condición es antiperiódica y se le llama condición de Neveu-Schwarz(NS). El espectro resultante se divide en cuatro sectores (NN, NR, RN, RR), que corresponden a las 4 combinaciones de condiciones de frontera posibles para un fermión y su superpareja. El espectro de supercuerdas resulta libre de taquiones, lo cual significa que la teoría tiene un estado vacío estable. Al requerir que se cumpla la invariancia de Lorentz, obtenemos una restricción sobre la dimensión del espacio-tiempo D, resultando D=10.

Actualmente se conocen 5 tipos distintos de teorías de supercuerdas que están relacionadas entre sí, las cuales se consideran límites de una teoría más general, llamada teoría M. Una de estas teorías es de particular interés para este trabajo, ya que es la que describe el fondo sobre el que se desarrolla la correspondencia holográfica, tópicamente a desarrollar en la siguiente sección. A esta teoría se le conoce como teoría de cuerdas *tipo IIB*, y consiste de cuerdas cerradas supersimétricas que se propagan en un espacio 10-dimensional. El nombre IIB, proviene del hecho de que hay presentes 2 supersimetrías, que en 10 dimensiones corresponde a 32 componentes de los generadores de supercarga. El espectro de campos que producen los modos de oscilación de las cuerdas puede dividirse en los 4 sectores de supercuerdas descritos anteriormente. En el sector R-R, tenemos un campo escalar  $\varphi(x)$  conocido como *dilatón*, con una componente física, y dos tensores de rango 2: el gravitón  $h_{MN}$  y el campo antisimétrico de *Kalb-Ramond*,  $B_{MN}(x^L)$ . Además, tenemos 3 campos fermiónicos en el sector R-R;  $C(x^M)$ ,  $C_{MN}(x^L)$ , y  $C_{MNP}^+(x^L)$ , que son respectivamente el campo escalar del *axión*, la 2-forma R-R, y la 4-forma autodual. Estos tres campos, junto con el campo de Kalb-Ramond corresponden a generalizaciones del potencial electromagnético  $A_\mu$ , y por lo tanto tienen una *carga R-R* asociada, y sus intensidades de campo son invariantes bajo las correspondientes transformaciones de norma. Por último, tenemos también las parejas supersimétricas del dilatón y del gravitón, que se denominan respectivamente *dilatino* y *gravitino*, y se pueden acomodar en los sectores R-NS y NS-R.

Como mencionamos anteriormente, podemos determinar la manera en que estos campos interactúan entre sí mediante las amplitudes de dispersión de la cuerda. Esta información puede resumirse en una acción efectiva para la teoría de cuerdas IIB. Si además suponemos que estamos en el régimen de energías bajas, donde  $E \leq l_c^{-1}$ , podemos despreciar los modos masivos y quedarnos solamente con los campos no-masivos. La teoría resultante se conoce como *supergravedad IIB* o *SUGRA IIB*. La acción efectiva para esta teoría se tiene la forma:

$$S_{SUGRA} = \int d^{10}x \sqrt{-g_E} \left\{ R_E - \frac{1}{2} (\partial_M \varphi)_E^2 - \frac{1}{12} e^{-\varphi} H_{MNP} H_E^{MNP} + \dots \right\}, \quad (1.77)$$

donde la etiqueta  $E$  indica que estos campos están calculados en el *marco de Einstein*, que no es más que la redefinición de la métrica  $g_{MN}(x) \rightarrow g_{MN}(x) = e^{\frac{\varphi(x)}{2}} g_{MN}^E(x)$ . El campo  $H_{MNP}$  es la intensidad de campo de la 2-forma R-R, y los puntos suspensivos denotan acoplamientos de los otros campos de norma.

### 1.4.2. Solución de p-brana negra y D-branas

Existen distintas soluciones a la teoría de supergravedad IIB, sin embargo aquí sólo examinaremos una de ellas, que corresponde a un fondo de gravedad conocido como *p-brana negra*. Este fondo es máximamente supersimétrico, lo cual quiere decir que se conservan

las 32 supersimetrías de SUGRA IIB. Esta solución puede entenderse como una fuente de carga  $N$  bajo el campo de norma  $A_{p+1}$  que tiene como grupo de isometrías al grupo  $\text{ISO}(p)$ . Si suponemos que la simetría de las  $10 - p$  coordenadas en esta métrica es esférica cuando la fuente de carga R-R está en el origen, la carga del campo  $A_{p+1}$  está dada por la integral de la intensidad de campo, que corresponde a la  $p + 2$ -forma  $F_{p+2}^*$ , sobre una esfera  $(8 - p)$  dimensional  $\mathbb{S}^{8-p}$ . Esta integración nos permite separar la métrica en una parte espacial originada por la fuente  $\sum_{i=1}^p dx^i dx^i$  y una solución con simetría esférica en las  $10 - p$  coordenadas exteriores a esta fuente:

$$ds^2 = -\Delta_+(r)\Delta_-(r)^{-\frac{1}{2}}dt^2 + \Delta_-^{\frac{1}{2}}(r)dx^i{}^2 + \Delta_+^{-1}(r)\Delta_-^\gamma(r)dr^2 + r^2\Delta_-^{\gamma+1}(r)d\Omega_{8-p}^2 \quad (1.78)$$

donde  $d\Omega_{8-p}^2$  es la métrica en una esfera  $\mathbb{S}^{8-p}$  unitaria, y  $\gamma = -\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}$ . El campo del dilatón y las funciones  $\Delta$  están dados como:

$$\Delta_\pm(r) = 1 - \left(\frac{r_\pm}{r}\right)^{7-p} \quad (1.79)$$

$$e^\Phi = g_{YM}^2 \Delta_-(r)^{\frac{(3-p)}{4}} \quad (1.80)$$

$$A_{p+1} = g_s^{-1}[\Delta_-(r)^{-1} - 1] dx^0 \wedge \dots \wedge dx^p \quad (1.81)$$

El nombre de  $p$ -brana *negra* hace referencia a que estas soluciones comparten la mayoría de las propiedades de los agujeros negros cargados, que como vimos anteriormente están descritos por la métrica de Reissner-Nördstrom. La topología del horizonte en este caso es de la forma  $S^{8-p} \times \mathbb{R}^p$ . Vemos que el horizonte de eventos está localizado en  $r = r_+$  y para  $p \geq 6$  además tiene una singularidad en  $r = r_-$ . La masa y la densidad de carga están dadas por:

$$M = \frac{2}{(7-p)(2\pi)^7 d_p l_P^8} ((8-p)r_+^{7-p} - r_-^{7-p}), \quad Q = \frac{7-p}{2}(r_- r_+)^{\frac{7-p}{2}} \quad (1.82)$$

donde  $d_p$  es un factor numérico. Cuando  $r_+ > r_-$  el horizonte de eventos cubre a la singularidad de la misma manera que en el caso del agujero de Schwarzschild. En el caso crítico,  $r_+ = r_-$  y si  $p \neq 3$ , el horizonte de eventos y la singularidad coinciden, originando una singularidad *nula*. El dilatón puede diverger o anularse en  $r = r_+$ . Sin embargo, la singularidad en este caso puede tratarse más fácilmente que la singularidad en el régimen  $r_+ < r_-$ . Para el caso  $p = 3$  el dilatón es constante y la superficie en  $r = r_+$  es regular, por lo que la singularidad impone la condición  $r_+ > r_-$  sobre la coordenada radial. Esta condición se transforma en la siguiente relación entre la masa y la carga, conocida como cota BPS:

$$M \geq \frac{N}{(2\pi)^p d l_s^{p+1}} \quad (1.83)$$

Esta desigualdad determina los valores que puede tomar  $M$  una vez que fijamos la carga R-R dada por  $N = Q\Omega_{8-p}$ , donde  $\Omega_n$  es el volumen de una esfera  $n$ -dimensional. Cuando se cumple la igualdad,  $M$  es la mínima masa que pueden tomar las branas dada la carga  $N$ , por lo que a las soluciones se les llama *p-branas negras extremales*. En este caso el área del horizonte de eventos se anula, y la mitad de las supersimetrías se conserva siempre y cuando estemos en el régimen donde la teoría es tratable con gravedad clásica. Esto sugiere que las  $p$ -branas negras extremales corresponden al estado base de las  $p$ -branas negras dada la carga  $Q$ .

Una teoría de cuerdas abiertas requiere que impongamos condiciones de frontera en los extremos de la cuerda. Hasta el momento hemos considerado implícitamente condiciones de frontera sobre las velocidades de los extremos, llamadas condiciones de Neumann. Ahora podemos pensar en restringir el movimiento de los extremos a una superficie dada, esto es, imponer condiciones de Dirichlet en los extremos. En este caso surgen consecuencias interesantes para nuestra discusión. En primer lugar, la superficie sobre la cual se mueven los extremos puede considerarse a sí misma como un objeto dinámico de la teoría, que llamamos  $Dp$ -brana. Esta superficie es un objeto dinámico extendido, que se entiende como la generalización de una cuerda a objetos  $p$ -dimensionales. Las branas son objetos de tipo solitónico, es decir, soluciones no perturbativas a ecuaciones de movimiento no-lineales, que poseen una gran energía y producen excitaciones macroscópicas en forma de campos. Una  $Dp$ -brana puede tener dos tipos de excitaciones. El primero corresponde a sus fluctuaciones y deformaciones en las direcciones normales o transversales. Estas están descritas por un conjunto de  $d - p$  campos escalares no masivos  $\phi^i$  con  $i = p + 1, \dots, d$ , los cuales solo dependen de las coordenadas  $x^\mu$  tangenciales al volumen de mundo de la D-brana. El segundo tipo de excitaciones corresponde a las direcciones tangenciales a la brana, y está descrito por un campo de norma abeliano  $A_\mu$  con  $\mu = 0, \dots, p$ , cuyo grupo de simetrías es  $U(1)$ . Podemos explicar el origen de este campo, si consideramos al extremo de la cuerda como una carga que actúa como generador del campo de norma sobre el volumen de mundo. Es decir, el extremo de la cuerda genera un campo de Maxwell que vive en el volumen de mundo de la  $Dp$ -brana. Cuando el campo de norma no es muy intenso y la deformación externa de las branas es despreciable, la acción que resume estos dos tipos de excitaciones está dada por la acción de Dirac-Born-Infeld:

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu})} \quad (1.84)$$

Donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica inducida sobre el volumen de mundo, y  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es la intensidad del campo de norma. Si no hay un campo de norma en el volumen de mundo,  $F_{\mu\nu} = 0$  y la acción se reduce a

$$S = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-g} \quad (1.85)$$

que puede considerarse como una generalización de la acción de la cuerda para un objeto con  $p$  dimensiones espaciales. En el espacio plano, la métrica inducida en la D-brana está dada por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (2\pi l_s^2)^2 \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^i \quad (1.86)$$

donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la usual métrica de Minkowski en  $(p + 1)$  dimensiones.

Si realizamos una expansión en potencias de  $g_{\mu\nu}$  y  $F_{\mu\nu}$ , y nos quedamos solamente con los términos cuadráticos, la acción se transforma en:

$$S_{DBI} = \frac{1}{g_{YM}^2} \left( \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i + \dots \right) \quad (1.87)$$

donde introdujimos la constante de acoplamiento  $g_{YM}$  dada por:

$$g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_s \quad (1.88)$$

Esta es la acción que describe un campo de norma junto con  $d - p$  campos escalares.

Consideremos ahora el caso de  $n$   $Dp$ -branas paralelas. Sean  $x^i$  las posiciones de la brana  $i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $x$  representa el conjunto de  $9 - p$  coordenadas normales. La separación

entre las branas es  $r = x^2 - x^1$ . Existen 4 tipos de configuraciones en las cuales pueden estar los extremos de una cuerda, y cada uno genera un campo de norma distinto. Estos campos de norma podemos denotarlos como  $(A_\mu)_j^i$ , donde  $i, j = 1, 2$  denotan la brana en la que se encuentra cada extremo de la cuerda. Si la cuerda tiene ambos extremos sobre la misma  $Dp$ -brana ( $i = j$ ), el campo de norma correspondiente es no masivo, como se explicó anteriormente. Sin embargo, cuando una cuerda une a las dos  $Dp$ -branas, obtenemos estados masivos, donde el operador de masa está dado como  $M = \frac{r}{2\pi\alpha'}$  donde  $r$  es la coordenada radial. Si acercamos las dos  $Dp$ -branas hasta que coincidan, tendremos  $M = 0$ , y como consecuencia, los 4 campos  $(A_\mu)_j^i$  serán no masivos. Entonces podemos ver a estos campos como componentes de matrices de  $2 \times 2$  que forman una representación del grupo de norma  $U(2)$ .

En un caso más general, podemos “apilar” un número arbitrariamente grande  $N_c$  de  $Dp$ -branas, en cuyo caso, obtendremos  $2^{N_c}$  campos de norma no masivos, que forman matrices de  $(N_c \times N_c)$  en la representación adjunta del grupo de norma  $U(N_c)$ . En particular, nos interesa considerar  $N_c$   $D3$ -branas en la teoría tipo IIB descrita anteriormente en el límite de bajas energías, cuándo la teoría de cuerdas se reduce a SUGRA IIB. Estudiando las fluctuaciones de este sistema obtenemos un campo de norma  $A_\mu$ , seis campos escalares  $\phi^i$  con  $i = 1, \dots, 6$ , y cuatro fermiones de Weyl, todos ellos en la representación adjunta de  $U(N_c)$ . A bajas energías, podemos realizar una expansión perturbativa y la acción resultante está dada por (3.18), que resulta ser la parte bosónica de la acción de Yang-Mills en (3+1) dimensiones con supersimetría global  $\mathcal{N} = 4$  (que abreviaremos  $\mathcal{N} = 4$  SYM). La constante de acoplamiento de Yang-Mills corresponde a tomar  $p = 3$  en la ecuación (1.88) y es:

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s \quad (1.89)$$

El subgrupo diagonal  $U(1)$  de  $U(N_c)$  describe el movimiento del centro de masa del sistema de branas, por lo que los modos correspondientes a la dinámica intrínseca de estas se desacoplan de los modos correspondientes a  $SU(N_c)$ , que describen el movimiento relativo entre  $D$ -branas. La teoría también incluye cuerdas cerradas propagándose en el bulto del espacio 10-dimensional. A bajas energías (en comparación con el inverso de la longitud de la cuerda,  $\frac{1}{l_s}$ ), la intensidad de las interacciones entre cuerdas cerradas y abiertas es despreciable, y podemos concluir a partir de la acción (1.87) que la teoría en el volumen de mundo 4-dimensional de las  $D3$ -branas se reduce a  $\mathcal{N} = 4$  SYM en un espacio de Minkowski con 4 dimensiones, que está incrustado en el espacio de cuerdas 10-dimensional.

A partir de las amplitudes de propagación entre modos de cuerdas abiertas y cerradas podemos escribir una acción efectiva para los modos de supergravedad interactuando con los modos de cuerda abierta en la  $Dp$ -brana. Esto da lugar a una acción generalizada que nos dice que la  $Dp$ -brana se acopla un campo de norma, y por tanto posee una carga R-R, con  $T_{Dp}$  igual a su densidad de carga. Por otro lado, sabemos de la forma de  $S_{DBI}$  sabemos que  $T_{Dp}$  es la constante de acoplamiento para la propagación de gravitones. Esto hecho es relevante, ya que la misma cantidad determina la amplitud de propagación de cuerdas cerradas. Más aún, si calculamos las amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas entre dos branas paralelas, con uno de los extremos de la cuerda en cada brana obtenemos exactamente el mismo valor que si consideramos la propagación de una cuerda cerrada de una brana a otra. Este resultado se conoce como *dualidad de cuerdas abiertas-cerradas* y nos permite deducir la manera en que la tensión depende de la constante de acoplamiento de cuerdas abiertas:

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}} \quad (1.90)$$

Podemos entender más a fondo este resultado si examinamos de nuevo la pila de  $N$   $Dp$ -branas. Se puede deducir el resultado de que la masa y la carga R-R de la  $Dp$ -brana están dadas exactamente por las ecuaciones (1.82), y la ecuación (1.83), que corresponde a las condiciones para una  $p$ -brana negra extremal. Esto nos lleva a la conjetura de que los modos de cuerda cerradas generados por la pila de  $N$   $Dp$ -branas (teoría de norma  $SU(N)$ ) son exactamente iguales a los modos de cuerdas cerradas propagándose en el fondo de  $p$ -brana negra. De manera más precisa, la solución de  $p$ -brana negra sólo es válida cuando  $E \gg g_c N$ , mientras que la expansión perturbativa para modos de cuerda abierta en la pila de  $Dp$ -branas requiere que consideremos  $E \ll l_c N$  por lo que estas dos descripciones nos hablan de un mismo sistema, pero descrito a escalas energéticas mutuamente excluyentes.

## 1.5. Correspondencia Norma Gravedad

La discusión de la sección anterior ha hecho énfasis en la propiedad de que los dos escenarios descritos ahí, son en realidad el mismo sistema, descrito por dos lenguajes distintos que son válidos a distintas escalas energéticas. El objetivo de esto, ha sido brindar todo el marco teórico para la deducción de un resultado que provee de las herramientas teóricas que utilizaremos en este trabajo. Como veremos, cuándo consideremos la relación anterior en un régimen energético particular, obtendremos una dualidad entre una teoría de campo y una teoría de gravedad. A este resultado se le conoce como *correspondencia AdS/CFT*, o *correspondencia holográfica*, o *norma/gravedad*.

### 1.5.1. Límite de ultra-bajas energías

Regresemos a la solución de  $p$ -brana negra de la ecuación 1.78, cuya métrica puede escribirse para el caso extremal con  $p = 3$  en la forma

$$ds^2 = H(r)^{-1/2}(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + H(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2) \quad (1.91)$$

$$H(r) = 1 + \left(\frac{L}{r}\right)^4, \quad L^4 = 4\pi g_c N l_c^4 \quad (1.92)$$

En este caso el dilatón es constante, y su exponencial es igual a la constante de cuerdas. El campo de norma se escribe como  $C_{0123} = g_c^{-1}(1 - H(r)^{-1})$ . La cantidad  $L$  representa el radio de curvatura del espacio alrededor de la solución, que pedimos que sea grande, de forma que podamos quedarnos con la solución de gravedad clásica. Esta condición implica, de la segunda de las ecuaciones (1.92), que la cantidad  $g_c N$  igualmente debe ser grande mientras que la expansión perturbativa en modos de cuerda cerrada requiere que  $g_c \ll 1$ . Sabemos de la dualidad de cuerdas abiertas-cerradas que este sistema es equivalente una pila de  $N$   $D3$ -branas en espacio plano con  $E \ll g_c N$ , con cuerdas abiertas interactuando débilmente.

Ahora analicemos qué sucede si consideramos este sistema a energías ultrabajas,  $E \ll \frac{1}{l_c}, \frac{1}{L}$  o lo que es lo mismo, a escalas distancia mucho mayores que la longitud de cuerdas y que el radio de curvatura del fondo. En el lado de la brana negra la condición  $E \ll g_c N$  implica (por la ecuación (1.92)) que  $E^{-1} \ll L$ , por lo que los modos de cuerda cerrada resultan demasiado grandes para ser absorbidos por la brana, que tiene una sección eficaz proporcional a una potencia de  $L$ . Los modos de cuerda cerrada se propagan entonces en un fondo plano, y están desacoplados por completo de los modos en el interior de la brana. Del lado de las  $D3$ -branas, la teoría igualmente se desacopla en modos de cuerda cerrada en espacio plano dando lugar a una teoría de SUGRA libre, y modos de cuerda

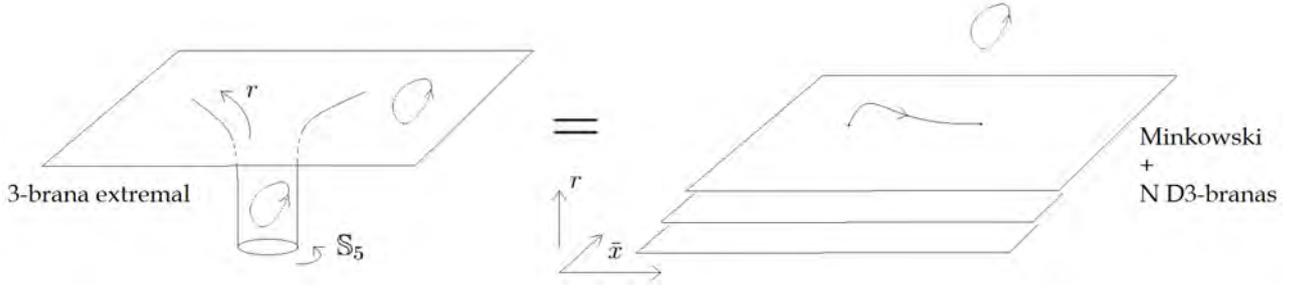


Figura 1.7: Dualidad entre el fondo gravitacional generado por el sistema de 3-brana negra extrema con carga R-R  $N$  (izquierda) y una pila de  $N$  D3-branas encajadas en un espacio plano-10 dimensional (derecha). En el lado izquierdo tenemos cuerdas cerradas propagándose cerca del horizonte y lejos de él, donde el espacio tiempo es aproximadamente plano. Del lado derecho tenemos cuerdas abiertas propagándose en las D3's y cuerdas cerradas en Minkowski 10-dim.

abierta en la pila de  $D$ -branas, que en este límite corresponde a  $SYM \mathcal{N} = 4$  con grupo de norma  $U(N)$ .

En la brana negra además sucede un efecto de corrimiento al rojo, debido a que la componente temporal de la métrica, que determina la energía propia de un observador en términos de la energía de un observador en infinito a través de la fórmula  $E_{prop} = \sqrt{-g_{tt}^{-1}} E_{\infty}$ , depende de la coordenada radial  $r$ . El efecto de este corrimiento es que al imponer la condición  $E \ll 1/L$  sobre la energía en infinito, la teoría se reduce a SUGRA IIB libre en un fondo plano siempre y cuando nos mantengamos en la región  $r \geq L$ . Sin embargo, en la región  $r \ll L$ , podemos tener  $E_{prop}$  arbitrariamente grande y aún satisfacer esta condición, debido a que

$$g_{tt} = H(r)^{-1/2} = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4}. \quad (1.93)$$

Además, en este régimen podemos aproximar  $1 + \frac{L^4}{r^4} \sim \frac{L^4}{r^4}$  y obtenemos el siguiente fondo gravitacional,

$$ds^2 = \left\{ \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \right\} + L^2 d\Omega_5^2 \quad (1.94)$$

donde el término entre llaves corresponde a la métrica del espacio conocido como *Anti-de Sitter*, mientras que el resto de la métrica describe a una esfera 5-dimensional de radio  $L$ . Recordando nuestro punto de partida, que podemos visualizar esquemáticamente en la Figura 1.5.1, podemos comparar los sistemas que tenemos hasta el momento en las dos descripciones. En el lado de la pila de  $N$  D3-branas tenemos una teoría de norma  $SYM \mathcal{N} = 4$  más modos de supergravedad IIB desacoplados propagándose en fondo plano, y por tanto podemos separar la acción en la forma:

$$S_{N D3} = S_{SYM \mathcal{N}=4} + S_{SUGRA IIB}. \quad (1.95)$$

La solución de  $p$ -brana negra se separa en el fondo  $AdS_5 \times S^5$ , y en los modos lejos de la  $p$ -brana, que corresponden a supergravedad IIB en fondo plano. De esta forma, la acción para la geometría de brana negra se escribe como:

$$S_{3-brananegra} = S_{AdS_5 \times S^5} + S_{SUGRA IIB} \quad (1.96)$$

Claramente, si estos dos sistemas han de ser equivalentes en esta aproximación, las acciones (1.95) y (1.96) deben coincidir, y notando que en ambos lados aparece la acción de la teoría

SUGRA IIB, podemos cancelar este término, y llegamos a la conclusión de que

$$\{\mathcal{N} = 4 \text{ SYM en Minkowski } 4 - \text{dim}\} = \{\text{cuerdas tipo IIB en } AdS_5 \times S^5\} \quad (1.97)$$

Este es el enunciado principal de la correspondencia norma/gravedad [39]. Notemos que el lado derecho de esta relación las interacciones están controladas por la constante de t'Hooft  $\lambda = g_c N$ , que en este lado de la dualidad es mucho mayor que uno, por lo que la teoría está fuertemente acoplada, mientras que en el lado izquierdo las interacciones están controladas por la constante de cuerdas  $g_c$  que es pequeña, por lo que la teoría está débilmente acoplada. Este resultado nos permite relacionar cantidades calculadas en el lado de gravedad para obtener información de la teoría de norma fuertemente acoplada, en el régimen donde no es posible realizar cálculos perturbativos de QFT.

### 1.5.2. Diccionario de AdS/CFT

Antes de analizar alguna de las entradas del diccionario de AdS/CFT, estudiemos la geometría del fondo conocido como Anti-de Sitter. Este espacio, se define en 5 dimensiones como la cubierta universal de un hiperboloide de radio  $L^2$  encajado en un espacio plano con signatura (4,2). Es un espacio de curvatura negativa, hecho que se ve reflejado en el signo negativo de la constante cosmológica. En las *coordenadas globales*  $(\tau, \rho, \Omega)$  la métrica se escribe como:

$$ds^2 = L^2(d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\tau^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2), \quad (1.98)$$

donde  $d\Omega_3^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi^2 + \sin^2 \phi d\psi^2)$ , con las coordenadas  $(\theta, \phi, \psi)$  periódicas. Si redefinimos la coordenada radial como  $\tan \alpha = \sinh \rho$  y desechamos un factor conforme mediante una transformación de Weyl, podemos representar a este espacio en una región finita. En la Figura 1.5.2 a) se muestra el correspondiente diagrama de Penrose, dado en coordenadas globales. Notemos que el infinito espacial es una superficie tipo tiempo, por lo que los rayos de luz pueden alcanzar esta región en un tiempo propio finito. En analogía con lo que sucede en el espacio de Minkowski, donde un observador acelerado describe sólo una porción del espacio completo (coordenadas de Rindler), también podemos definir un conjunto de coordenadas asociadas a un observador acelerado en AdS. A ese conjunto se le conoce como coordenadas de Poincaré, y cubren la porción sombreada en la Figura 1.5.2 b), también conocida como parche de Poincaré. En estas coordenadas la métrica se escribe como:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\bar{x}^2 + dz^2) \quad (1.99)$$

Vemos que esta ecuación coincide con el primer término de (1.94), que determina la solución de  $p$ -brana negra extremal, por lo que las coordenadas espaciales del espacio plano en el que vive la teoría  $SYM_{\mathcal{N}=4}$ ,  $\bar{x}$  deben identificarse específicamente con las coordenadas del parche de Poincaré en  $AdS_5$ .

Como primera prueba de consistencia veamos cómo se relacionan las simetrías de las teorías en los dos lados de la correspondencia. El espacio  $AdS_5 \times S^5$  tiene, por definición, al grupo conforme  $SO(2,4)$  como grupo de isometrías. Este grupo actúa sobre la frontera de  $AdS_5$  como el grupo de conforme 4-dimensional, por lo que la métrica resulta invariante bajo transformaciones conformes. En particular, para dilataciones de la forma  $(\lambda(t, \bar{x}) \rightarrow \lambda(t, \bar{x}), z \rightarrow \lambda z)$  podemos comprobar fácilmente la invariancia de la métrica:

$$ds'^2 = \frac{R^2}{(\lambda z)^2}(-d(\lambda t)^2 + d(\lambda \bar{x})^2) = \frac{R^2}{z^2}(-dt^2 + d\bar{x}^2 + dz^2) = ds^2 \quad (1.100)$$

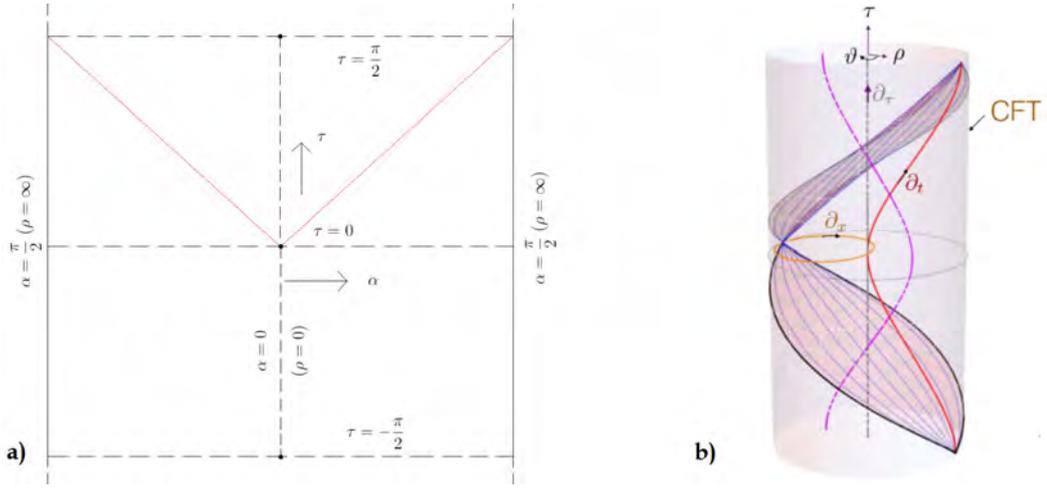


Figura 1.8: a) Sección transversal del diagrama de Penrose de  $AdS_5$  cuando las coordenadas periódicas se toman como constantes. La coordenada radial  $\alpha$  tiene un rango finito, por lo que el infinito espacial está localizado en  $\alpha \pm \pi/2$ . b) En el cilindro completo de AdS descrito por las coordenadas globales, podemos definir coordenadas que describen a un observador acelerado en  $AdS$  restringiendo el espacio al parche de Poincaré, representado como la región sombreada del diagrama.

Del otro lado de la dualidad,  $AdS_5$  corresponde a una teoría  $\mathcal{N} = 4$  SYM, que es máximamente supersimétrica y tiene 32 supercargas dadas por los 4 generadores de supersimetría  $Q_\alpha^A$  ( $A = 1, \dots, 4$ ). Los generadores de supercarga transforman en la representación fundamental del grupo  $SU(4)$ . En esta teoría aparecen además seis campos escalares  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) que transforman en la representación fundamental de  $SO(6) \simeq SU(4)$ .

En la descripción de  $p$ -brana negra en cuerdas IIB, la solución también es máximamente supersimétrica con 32 espinores de Killing, que identificamos con los generadores de supercarga de  $\mathcal{N} = 4$  SYM. La simetría rotacional de la  $S^5$ -esfera está dada por el grupo  $SO(6) \approx SU(4)$ , que corresponde a la simetría-R de la teoría de Yang-Mills. Los seis campos escalares  $\phi_i$  corresponden a las coordenadas de la  $S^5$ -esfera, que son coordenadas extra en la formulación de gravedad. Las isometrías de este espacio compacto son duales, y están en relación uno a uno con las rotaciones internas de los supercampos y campos escalares en  $\mathcal{N} = 4$  SYM.

Cabe preguntarnos también a que corresponde el contenido de materia en ambos lados de la dualidad. Como ejemplo, recordemos que la constante de acoplamiento de la teoría de norma,  $g_{YM}^2$ , se mapea a la constante de acoplamiento de cuerdas  $g_s$  mediante (1.89), que a su vez está definida como la exponencial del campo del dilatón  $\Phi$  siempre y cuando identifiquemos a la CFT con la frontera de  $AdS$   $r \rightarrow \infty$ . La forma en que se acoplan los operadores de la teoría de norma determina las condiciones de frontera de los campos en el bulto.

La ecuación para un campo de masa  $m$  en el espacio Euclidiano tiene dos soluciones independientes que escribimos como  $z^{d-\Delta}$  y  $z^\Delta$  donde

$$\Delta = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{d^2}{4} + R^2 m^2} \quad (1.101)$$

por lo que las condiciones de frontera consistentes con este campo masivo implican que [41]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(x, r) \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Phi(x, \epsilon) = \epsilon^{d-\Delta} \phi(x)] \quad (1.102)$$

Como  $\Phi$  es una cantidad adimensional y  $\epsilon$  es una longitud,  $\phi$  debe tener unidades de  $(\text{longitud})^{\Delta-d}$ , de donde obtenemos que el operador  $\mathcal{O}(x)$  tiene dimensión  $\Delta$ . Por lo tanto, este resultado general nos dice que existe una correspondencia biunívoca entre los operadores invariantes de norma de la teoría de campo y los campos del bulto de  $AdS$ . Además del ejemplo del dilatón, otro caso importante es el campo del gravitón  $h_{ab}$ , que tiene como operador dual al tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ .

Usando lo anterior podemos obtener una receta para calcular correladores en la teoría de norma. Si diferenciamos la función de partición de la teoría de gravedad (que podemos escribir en términos de la acción clásica) sucesivamente respecto a  $\phi$  tenemos;

$$\left\langle \prod_i \mathcal{O}(x_i) \right\rangle = \prod_i \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \log Z_{QFT}[J]|_{J=0} \quad (1.103)$$

Podemos ver que cada derivada involucra a algún operador  $\mathcal{O}$  que mapea un estado del campo  $\phi$  dentro del bulto de  $AdS$ . El lado izquierdo de esta ecuación se puede calcular considerando el límite de  $N$  grande, donde la aproximación de punto silla permite usar la acción clásica de supergravedad en lugar de la acción completa de cuerdas IIB. Entonces, para calcular las amplitudes de interacción entre partículas de la teoría de norma podemos encontrar diagramas análogos a los diagramas de Feynman en el lado de la teoría de gravedad, y usar las funciones de correlación correspondientes a estos. De la discusión sobre la correspondencia campo/operador, es natural postular que las funciones de partición en ambos lados de la dualidad coinciden exactamente. A esta entrada se le conoce como la *correspondencia bulto/frontera*, y se escribe como:

$$\mathcal{Z}_{cuerda}[\phi] = \mathcal{Z}_{CFT}[\phi(x)] \simeq \exp(S^{(ren)}[\Phi_c^\epsilon]) \quad (1.104)$$

donde  $\phi$  y  $\Phi$  son duales bajo la correspondencia campo-operador, y donde  $S^{(ren)}$  es la acción de supergravedad renormalizada, que corresponde a una acción clásica evaluada en las soluciones  $\Phi$  determinadas por la condición de frontera (1.102).

La función de partición más general de la CFT puede incluir una fuente para cada operador invariante de norma, por lo que interpretamos a  $\phi(x)$  como el conjunto de todas estas fuentes. Concluimos que las funciones de correlación conexas en el límite de  $N_c$  grande y  $\lambda$  constante en la teoría de norma están dadas simplemente como las derivadas funcionales de la acción clásica de gravedad:

$$\langle \mathcal{O}(x_1) \dots \mathcal{O}(x_n) \rangle = \frac{\delta^n S^{(ren)}[\Phi_c^\epsilon]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \Big|_{\phi=0} \quad (1.105)$$

Gracias a este procedimiento es posible calcular observables que podemos comparar con experimentos de QCD, por ejemplo, la viscosidad y entropía del plasma de quarks y gluones, descrito en la introducción.

Estudiemos ahora qué sucede si en lugar de que la teoría de norma se encuentre en el estado vacío, podemos describirla por una matriz de densidad de un ensamble térmico con temperatura finita. En este caso el valor esperado del tensor de energía momento determina El resultado, que obtenemos después de realizar la expansión de Fefferman-Graham <sup>12</sup> de la métrica, es el siguiente:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{r_0^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_3^2 \quad (1.106)$$

<sup>12</sup>Esta es una expansión de la métrica que a orden cero coincide con el fondo Anti-de Sitter, y que admite fluctuaciones a mayor orden en la métrica. Estas fluctuaciones están determinadas por la información sobre el contenido de campos en la teoría cuántica dual. Explícitamente toma la forma  $ds^2 = (\frac{L}{z})^2 (g_{\mu\nu}(x, z) dx^\mu dx^\nu + dz^2)$ , con  $g - \mu\nu(x, z) = \eta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}^{(2)} z^2 + \dots$ .

Esto es exactamente la métrica de un agujero negro en un fondo asintóticamente  $AdS$ , conocido como  $AdS - Schwarzschild$ , que ya habíamos presentado en la Sección 1.2. El horizonte del agujero negro se halla localizado en  $r = r_0$ . En las coordenadas de Poincaré, podemos escribir esto como

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left( - \left( 1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right) dt^2 + d\bar{x}^2 \right) + \frac{R^2}{r^2 \left( 1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right)} dr^2. \quad (1.107)$$

Notemos que en esta forma, la métrica es independiente de la dimensión de la coordenada  $\bar{x}$ . Dicho de forma más precisa, si la coordenada radial cumple  $r \in (r_0, \infty)$ , entonces, (1.107) corresponde a la región externa de una brana negra en  $AdS_{d+1}$ . Como puede verificarse, este espacio-tiempo es invariante bajo traslaciones a lo largo de las coordenadas de la frontera tanto temporales como espaciales, e invariante rotacionalmente a lo largo de las coordenadas espaciales en la frontera  $AdS$ . Por lo tanto, identificamos naturalmente a las propiedades termodinámicas (como la temperatura) de una brana negra en un espacio  $AdS$  con aquellas de la teoría  $\mathcal{N} = 4 SYM$  dual. Cuantitativamente, la temperatura de la  $CFT$  está dada por la temperatura de Hawking en  $AdS$ -Schwarzschild, la cual calculamos usando el método desarrollado en [31, 28]. Para esto, debemos exigir que la continuación Euclidiana de la métrica (1.107) mediante la sustitución  $t \rightarrow -it_E$

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (f dt_E^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{R^2}{r^2 f} dr^2 \quad (1.108)$$

sea no-singular en  $r = r_0$ . Esto implica que debemos tomar la coordenada temporal como periódica con periodo

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\pi}{r_0} \quad (1.109)$$

Entonces, la temperatura de Hawking  $T$  es identificada con la temperatura de la  $CFT$  en la frontera, ya que la coordenada Euclidiana  $t_E$  coincide con la coordenada temporal en el lado de la teoría de norma.

## 1.6. Entropía de Entrelazamiento Holográfica

Es bien sabido que en la mecánica cuántica existen predicciones que parecen contradecir el principio de localidad del espacio-tiempo. Este hecho fue notado por Einstein, Podolsky y Rosen en su famoso artículo de 1935 [3], donde se argumenta que, bajo la suposición de localidad y realidad de las teorías físicas, la mecánica cuántica debía ser una teoría incompleta, debido a que predice que un observador B puede conocer, por ejemplo, el espín de una partícula en dos direcciones simultáneamente, contradiciendo el principio de incertidumbre, si se tiene un canal de comunicación con un observador A que mide el espín de otra partícula que estuvo inicialmente en interacción con la primera. Esto se debe a que el estado que describe a ambas partículas no puede separarse como un producto tensorial de estados, condicionando. A un estado de este tipo se le conoce como estado *enredado*, o *entrelazado*. Posteriormente, en 1964 Bell [4] demostró que si se asume la suposición de EPR, es posible deducir una desigualdad que debe cumplirse en caso de que la mecánica cuántica sea una teoría incompleta que debe incluir variables que están ocultas, o que no están siendo consideradas en nuestra descripción. Experimentalmente, la evidencia indica que en ciertos sistemas es posible violar estas desigualdades, demostrando que la mecánica cuántica *no* es una teoría de variables ocultas, y que podemos considerarla como la descripción correcta a escalas en las que la constante de Planck cobra

relevancia. La existencia de estados entrelazados es probablemente la característica más importante que distingue a los sistemas clásicos de los cuánticos. Por esta razón resulta crucial cuantificar la manera en que un subconjunto de estos estados se entrelazan con el resto, cuando están distribuidos sobre una región dada. Una observable que codifica esta información es la *entropía de entrelazamiento*. La importancia de esta cantidad para este trabajo yace en el hecho de que si la teoría cuántica en la que definimos a la entropía de entrelazamiento tiene un dual holográfico, la correspondencia AdS/CFT nos brinda una manera sencilla de calcularla en términos de cantidades geométricas en el bulto. Más aún, cuando esta teoría consiste de un ensamble térmico, el dual de gravedad corresponde a la métrica de un agujero negro, y la entropía de entrelazamiento calculada en esta métrica está estrechamente relacionada con la correspondiente entropía térmica de Bekenstein-Hawking. En cierto sentido, la primera resulta ser una versión cuántica corregida de la segunda. Esto nos brinda un escenario en el que podemos aplicar las nociones básicas de la termodinámica para extraer información acerca de cómo se acomodan las correcciones cuánticas al considerar teorías de gravedad cuántica, y por otro lado, entender con qué tipo de teoría estamos tratando del lado de la teoría de campos. En particular, podemos aplicar este análisis al escenario de gravedad descrito en el Capítulo 1.2, lo cual es el objetivo principal de este trabajo.

### 1.6.1. Entropía de entrelazamiento

Consideremos una teoría cuántica, que vive en una variedad  $d$ -dimensional. Por ejemplo, una cadena de espín puede considerarse como una variedad unidimensional, o una superficie semiconductora puede modelarse en una variedad bidimensional. En sistemas de muchos cuerpos la distribución de estados en los que es posible encontrar al sistema está codificada en la *matriz de densidad*:

$$\rho = \sum_n p_n |\Psi_n\rangle \langle \Psi_n|, \quad (1.110)$$

donde  $\{|\Psi_n\rangle\}$  son los posibles estados del sistema, y el factor  $p_n$  determina el peso probabilístico de cada uno de estos estados. En el caso en el que solo hay un posible estado, con probabilidad 1 de que el sistema se encuentre en este, se dice que es un estado *puro*. Un estado que no es puro se le llama estado *mezclado*.

En general, este tipo de sistemas puede extenderse indefinidamente en el espacio, y frecuentemente sólo tenemos posibilidad de realizar mediciones en un subconjunto del total de estados de la teoría. Supongamos que el conjunto de estados al que tenemos acceso se encuentra localizado en una región  $A$  del espacio. Si llamamos  $B$  a la región complementaria a  $A$ , podemos definir una nueva noción de matriz de densidad, que responde a la pérdida de información que resulta del hecho de que sólo podemos realizar mediciones en la región  $A$ . A este operador le conocemos como *matriz de densidad reducida*:

$$\rho_A \equiv Tr_B(\rho) \equiv \sum_{n_B} p_{n_B} |\langle \Psi_{n_B} | \Psi_{n_B} \rangle|^2, \quad (1.111)$$

donde  $\{\Psi_{n_B}\}$  representa el subconjunto de estados de  $\{\Psi_n\}$  que se encuentran en la región  $B$ . La información acerca del sistema total que se pierde cuando separamos los subsistemas está codificada en la intensidad del entrelazamiento entre las dos regiones, por lo que una cuantificación del entrelazamiento cuántico nos dará información acerca de cómo responde el subsistema  $A$  cuando modificamos el estado de  $B$ . En analogía con la definición estadística de la entropía como el logaritmo del número de grados de libertad,

podemos definir a la entropía de entrelazamiento como la entropía de Von Neumann de la matriz de densidad reducida del sistema  $A$  :

$$S_A = -Tr(\rho_A \log(\rho_A)) \quad (1.112)$$

Ahora podemos deducir algunas propiedades básicas de esta observable. Supongamos que el sistema se encuentra en un estado puro. Sustituyendo la matriz de densidad reducida (1.111) , podemos escribir

$$S_A = -Tr(\rho_A \log(\rho_A)) = \sum_{n=1}^D |\lambda_n|^2 \log(|\lambda_n|^2) = -Tr(\rho_B \log(\rho_B)) = S_B \quad (1.113)$$

Por lo tanto, en un estado puro la entropía de entrelazamiento es simétrica entre las dos regiones. La entropía de entrelazamiento de una región sólo puede anularse si la correspondiente matriz de densidad reducida es una matriz diagonal, por cuál el mismo estado del subsistema debe ser un estado puro. Si el sistema se encuentra en un estado mezclado, podemos representar el ensamble en términos de la densidad de Gibbs en lugar de la suma en (1.110), y en este caso no se satisface esta igualdad.

Existe otro conjunto de propiedades que relacionan de forma general la entropía de entrelazamiento de varios subsistemas, a través de una serie de desigualdades. Si  $A$  ,  $B$  , y  $C$  son tres subsistemas que no se intersectan entre sí, entonces se cumple que:

$$S_{A+B+C} + S_B \geq S_{A+B} + S_{B+C} \quad (1.114)$$

$$S_A + S_C \geq S_{A+B} + S_{B+C}. \quad (1.115)$$

A estas desigualdades se les conoce en conjunto como condición de *subaditividad fuerte*. Bajo ciertas condiciones, esta relación puede interpretarse como una generalización de la segunda ley de la termodinámica para sistemas cuánticos [27]. Si tomamos a  $B$  como el conjunto vacío, obtenemos la condición de *subaditividad débil*:

$$S_{A+C} \geq S_A + S_C \quad (1.116)$$

Esta desigualdad nos permite definir una cantidad definida positiva, llamada *información mutua*:

$$I(A, B) = S_{A+C} - S_A + S_C \geq 0 \quad (1.117)$$

Esta otra observable codifica la correlación total entre los grados de libertad de las regiones  $A$  y  $B$ . La información mutua es un concepto importante en teoría de la información, ya que presenta algunas ventajas respecto a la entropía de entrelazamiento, como ser finita y proporcional a la entropía de entrelazamiento de cada subsistema.

Una teoría cuántica de campos es ciertamente una teoría cuántica, por lo que es igualmente válido definir la entropía de entrelazamiento en estos escenarios. Sin embargo, en este caso surge una dificultad que resulta del enorme número de grados de libertad en la teoría. Aunque por ahora no estudiaremos la manera calcular la entropía de entrelazamiento en QFT (ver Sección 1.4 ), cabe mencionar que los casos en los que se puede calcular esta cantidad de manera analítica y aún numéricamente son escasos. La entropía de entrelazamiento en una QFT es infinita por definición, ya que es proporcional al número de grados de libertad, que en una teoría cuántica de campos son infinitos y densamente distribuidos. Para lidiar con estos infinitos, es necesario llevar a cabo un procedimiento de regularización análogo al que estudiamos en la Sección 1.3.2. Si imaginamos a la teoría

como una retícula discreta, con un parámetro de corte en distancia  $\epsilon$ , podemos integrar hasta este límite y expandir en términos de un parámetro chico, y obtenemos un resultado conocido como la *ley de Área* para entropía de entrelazamiento:

$$S_A = c_o \frac{\text{Área}\{A\}}{\epsilon^{d-1}} + \{Divergencias\ subdominantes\} + S_{finita} \quad (1.118)$$

Este resultado nos dice que la contribución dominante a las divergencias en la entropía de entrelazamiento proviene de los grados de libertad que están distribuidos a lo largo de la región que separa los dos subsistemas. Si tomamos el corte  $\epsilon$  como proporcional a la longitud de Planck, e identificamos la constante  $c_o$  con  $\pi$ , entonces el primer término en esta identidad corresponde exactamente a la entropía de Bekenstein-Hawking, que es otro ejemplo de una ley de Área. Cuando estudiamos esta relación bajo la interpretación de la correspondencia holográfica surgen consecuencias interesantes que parecen relacionar a las correcciones cuánticas de la entropía clásica con modificaciones a la acción de la teoría de gravedad en el bulto. Para adentrarnos en más en esta relación, pasaremos ahora a la prescripción holográfica para obtener la entropía de entrelazamiento, fórmula que se ha convertido en uno de los resultados más importantes de la correspondencia AdS/CFT.

### 1.6.2. Fórmula de Ryu takayanagi

Consideremos ahora que la teoría cuántica definida sobre la variedad  $\Sigma$  tiene una teoría dual de gravedad, definida sobre una variedad  $\mathcal{M}$ , de la cual  $\Sigma$  es frontera en el infinito de la coordenada radial  $r$ . Una cierta región  $A$  en  $\Sigma$  define a su vez toda una familia de superficies de codimensión 2 encajadas en el bulto, bajo la condición de que la frontera de cada una de estas superficies coincida con la frontera de  $A$  en  $\Sigma$ . El siguiente resultado, nos dice que la entropía de entrelazamiento de la región  $A$ , es proporcional al elemento de esta familia que tiene área mínima [53]:

$$S_A = \frac{\text{Área}(\Sigma_{min})}{4G_N^{(d+1)}} \quad (1.119)$$

A este resultado se le conoce *fórmula de Ryu-Takayanagi*. Notemos que el lado derecho de esta ecuación está bien definido siempre que la teoría de gravedad viva en una variedad con una frontera, por lo que esta relación tiene sentido aún cuando la teoría cuántica no esté necesariamente bien definida. Al lado izquierdo de esta ecuación se le conoce en general como *entropía de entrelazamiento holográfica*, que abreviaremos como HEE por sus siglas en inglés. Esta relación es sorprendente desde el punto de vista tradicional, ya que relaciona cantidades que parecieran no tener ninguna relación *a priori*. Del lado de la teoría de campo tenemos una cantidad que depende completamente de la dinámica cuántica del sistema, mientras que en la teoría de gravedad tenemos una cantidad que depende únicamente de la geometría y extensión de la partición inducida por la CFT en el bulto de la teoría dual. Notemos además que este es un ejemplo de un cálculo puramente clásico nos permite obtener información de una teoría cuántica fuertemente acoplada. Dada una solución a la ecuación de Einstein, podemos calcular el área de la superficie  $\Sigma$  en el bulto que comparte frontera con  $A$ , en términos de la métrica inducida en  $\Sigma$ ,  $h_{ab}$ :

$$\text{Área} = \int_{\Sigma_{min}} d^{d-1}y \sqrt{h} \quad (1.120)$$

En los casos en los que se conoce la expresión analítica para la entropía de entrelazamiento

en la teoría de campos <sup>13</sup>, la fórmula de Ryu-Takayanagi reproduce exactamente estos resultados, aún cuando la teoría cuántica se encuentra en el régimen de acoplamiento fuerte. La ecuación (1.119) resulta válida siempre y cuando la teoría de gravedad sea la teoría de Einstein, y puede incluir acoplamientos con campos de materia siempre que el acoplamiento sea de tipo mínimo. Dejaremos la prueba de esta fórmula para la Sección 1.4, donde además generalizaremos el método para deducir la relación correspondiente cuando la teoría de gravedad incluye correcciones de orden superior, o materia acoplada no minimalmente.

Como ya mencionamos anteriormente, para lidiar con las divergencias en la entropía de entrelazamiento se debe regularizar la integración del lado de la teoría de campos, idealizando a la teoría de campo como una retícula con espaciamiento  $a$ . En el lado de la teoría de gravedad, vemos que la métrica de  $AdS$  en coordenadas globales diverge cuando  $\rho \rightarrow \infty$ , por lo que, para regular la correspondiente divergencia en la integral 1.120 es necesario imponer un radio de corte  $\rho_0$  y restringir el espacio a la región acotada por  $\rho \geq \rho_0$ . Entonces es natural relacionar esta cantidad con un parámetro de corte UV en la CFT mediante la correspondencia AdS/CFT. Si definimos el parámetro adimensional de corte UV  $\delta$ , encontramos la relación holográfica  $e^{\rho_0} \sim \delta^{-1}$ . Por ejemplo, en el caso de una teoría cuántica definida sobre una variedad unidimensional, podemos escoger  $A$  como un segmento finito de longitud  $L$ . En una CFT con espaciamiento reticular  $a$  encontramos explícitamente:

$$e^{\rho_0} \sim \delta^{-1} = \frac{L}{a} \quad (1.121)$$

Es posible deducir las propiedades básicas de la entropía de entrelazamiento a partir de la fórmula de Ryu-Takayanagi de una manera geométrica y elegante. Por ejemplo, en un estado puro, que corresponde del lado de gravedad al vacío máximamente simétrico de Anti-de Sitter, es la misma superficie la que minimiza el área de la familia de superficies que terminan en  $A$  o en su complemento, demostrando la fórmula (1.113). En [54] se realiza la deducción holográfica de la desigualdad de subaditividad fuerte, mientras que en este trabajo dejaremos sólo la demostración gráfica de la Figura 1.6.2.

En el caso en que el estado de la teoría de campos en el que se encuentra nuestro sistema es dependiente del tiempo, existe una generalización covariante de la fórmula de Ryu-Takayanagi, que nos dice que la HEE corresponde al área de una superficie *extremal* [48, 49]. Esto es consecuencia de que las geodésicas tipo tiempo se extienden indefinidamente en el espacio, y en general no existen superficies tipo tiempo de área mínima, por lo que deben considerarse también soluciones tipo punto silla.

En general podemos tener más de una superficie que sea candidata a proporcionar la HEE, bajo la única condición de que las superficies de entrelazamiento en el bulto y en la frontera sean *homólogas*. Esto quiere decir que la unión de la superficie  $\Sigma$  y la región  $A$  en nuestra definición de HEE, debe formar una superficie de codimensión uno en el bulto de AdS. Si la métrica corresponde a la de un agujero negro, debido la periodicidad de las coordenadas angulares, existen siempre dos superficies homólogas a una región dada  $A$  en la frontera  $r \rightarrow \infty$ . La condición de minimalidad nos indica que debemos elegir de entre estas dos superficies, a la superficie que tenga la menor área [50].

Otro aspecto interesante es que la HEE puede usarse como parámetro de orden en tran-

---

<sup>13</sup>Un ejemplo en el caso de un intervalo de longitud  $L$  en una CFT<sub>2</sub> con dual holográfico en  $AdS_3$ , donde la entropía de entrelazamiento toma la forma  $S_A = c/3 \log[L/a]$ , siendo  $a$  un parámetro de corte y  $c$  la carga central de la CFT. La fórmula de R-T reproduce exactamente este resultado.

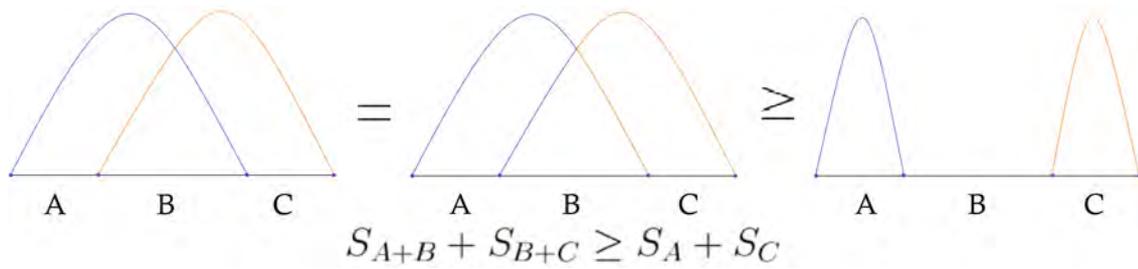


Figura 1.9: Demostración gráfica de la desigualdad de subaditividad fuerte. El lado izquierdo de esta desigualdad puede calcularse sumando las áreas de las superficies de área mínima que conectan las regiones  $A$  con  $B$  y  $B$  con  $C$  (izquierda). Sin embargo, esto es equivalente a considerar el área de las superficies homólogas a  $A$  y  $B$  que se construyen a partir de las intersecciones de las curvas anteriores (centro). Por último, sabemos que el área de estas superficies debe ser mayor al área de la superficie de área mínima que es homóloga a cada una de las regiones (derecha). Por lo tanto, se tiene la desigualdad 1.114.

siciones de fase. Por ejemplo, se sabe que un agujero negro presenta transiciones de fase tipo Van-der Waals. Si calculamos la HEE en una métrica de este tipo encontramos que transición de agujeros negros de radio pequeño a agujeros negros de radio grande. Uno de los objetivos de este trabajo es extender este razonamiento a soluciones 5-dimensionales en gravedad de orden superior que presentan un acoplamiento particular con materia escalar. Para ello, debemos generalizar la fórmula de RT para incluir este tipo de teorías, problema que discutiremos en la Sección 1.4.



# Capítulo 2

## Agujeros Negros de Lovelock con Pelo

Habiendo estudiado en la Sección 1.2.3 la teoría de gravedad de Lovelock en el vacío, podemos pensar en acoplar materia al campo gravitacional. La forma más simple en la que podemos hacer esto es seguir el procedimiento detallado en la Sección 1.2, conocido como *acoplamiento mínimo*. Sin embargo, podemos considerar otros tipos de acoplamiento, y en particular cuando tenemos un campo escalar no masivo, podemos definir un acoplamiento de tipo *conforme*, que involucra explícitamente productos del campo con la curvatura Riemanniana y que además presenta un tipo de simetría bajo reescalamientos. La elección de este acoplamiento está motivada, entre otras razones, por modelos de teoría de cuerdas donde existen interacciones de este tipo entre un campo de gravedad y campos escalares, como el campo del dilatón. Además presenta, como veremos a lo largo del capítulo, varias consecuencias interesantes que intentaremos interpretar desde la perspectiva de la correspondencia holográfica estudiando el comportamiento de la entropía de entrelazamiento holográfica en una solución particular de esta teoría.

### 2.1. Acoplamientos conformes

El primer paso es notar que podemos construir, para cada orden  $k$  en la expansión en la acción de Lovelock, un conjunto de tensores que comparten las propiedades del Riemann pero que involucran productos antisimetrizados del campo escalar y sus derivadas covariantes:

$$S_{cd}^{ab} = \phi^2 R_{cd}^{ab} + \frac{4}{s} \phi \delta_{[c}^{[a} \nabla_{d]} \nabla^{b]} \phi + \frac{4(1-s)}{s^2} \delta_{[c}^{[a} \nabla_{d]} \phi \nabla^{b]} \phi - \frac{2}{s^2} \delta_{[c}^{[a} \delta_{d]}^{b]} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi. \quad (2.1)$$

En este trabajo llamaremos por comodidad a este tensor, *tensor de materia conforme*. El adjetivo *conforme* proviene de que este tensor (y como consecuencia la acción gravitacional (2.4)) resultan invariantes (salvo un factor de escala) ante una transformación de Weyl dada por:

$$g_{ab} \rightarrow e^{2\Omega} g_{ab}, \quad \phi \rightarrow e^{s\Omega} \phi, \quad (2.2)$$

donde  $s$  es el *peso conforme*. Bajo este cambio de variables, el tensor definido en (2.1) transforma como:

$$S_{cd}^{ab} \rightarrow e^{2(s-1)\Omega} S_{cd}^{ab}. \quad (2.3)$$

Esta invariancia nos da una libertad adicional, que nos permite elegir arbitrariamente el peso conforme sin que se vean afectadas las ecuaciones de movimiento. Con estas

definiciones podemos construir el acoplamiento entre gravedad de Lovelock y materia escalar, que podemos escribir en forma compacta como [6] :

$$I[g, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k} \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \left( \alpha_k R_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots R_{a_k b_k}^{c_k d_k} + \beta_k \phi^{m_k} S_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots S_{a_k b_k}^{c_k d_k} \right) + I_B \quad (2.4)$$

donde  $m_k = \frac{2k(1-s)-D}{s}$  y  $I_B$  es el término de frontera análogo a término de GHY (1.13) que escribiremos explícitamente en la última sección de este capítulo. Escogiendo el peso conforme como  $s = 1 - \frac{D}{2}$  y expandiendo la acción hasta primer orden con los acoplamientos dados como:

$$a_0 = -\frac{1}{8\pi G}, \quad a_1 = \frac{1}{16\pi G}, \quad b_0 = -\frac{\lambda}{D!}, \quad b_1 = -1, \quad (2.5)$$

obtenemos

$$I = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G} R - \frac{\Lambda}{8\pi G} - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{(D-2)}{4(D-1)} \phi^2 R - \frac{\lambda}{D!} \phi^{\frac{2D}{D-2}} + \dots \right). \quad (2.6)$$

Los primeros dos términos dentro del paréntesis corresponden a la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica. El tercer término, corresponde al término de acoplamiento mínimo, mientras que el cuarto término es la contribución a primer orden del acoplamiento conforme. Finalmente, tenemos una potencia de  $\phi$  que puede considerarse como un término de autointeracción del campo y no está acoplado con la parte gravitatoria de la teoría.

Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse en términos del tensor de energía momento

$$T_{ab} = g_{cb} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{\beta_k}{2^{k+1}} \phi^{m_k} \delta_{a c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{c a_1 b_1 \dots a_k b_k} S_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots S_{a_k b_k}^{c_k d_k}, \quad (2.7)$$

y del tensor de Einstein generalizado de gravedad de Lovelock, (1.32) como:

$$G_{ab} = T_{ab} \quad (2.8)$$

La ecuación de movimiento para el campo escalar puede obtenerse análogamente variando la acción (2.4) respecto a  $\phi$ :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{(2k-D)\beta_k}{2^k s} \phi^{m_k-1} \delta_{a_1 b_1 \dots a_k b_k}^{c_1 d_1 \dots c_k d_k} S_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots S_{a_k b_k}^{c_k d_k} \quad (2.9)$$

Estas ecuaciones de movimiento resultan ser de segundo orden en la métrica, a pesar de que en la acción gravitacional aparecen términos de orden superior en la curvatura. Este hecho facilita la obtención de soluciones como las que discutiremos en la siguiente sección, además de que asegura que el espectro de modos linealizados esté libre de modos de norma negativa, o *fantasmas*.

## 2.2. Solución de Agujero Negro

Recordemos la discusión de la Sección 1.2.2, donde analizamos las propiedades de los agujeros negros en espacio asintóticamente plano 4-dimensional. Resaltamos que además de

la carga, masa, y momento angular no existen otros parámetros observables que podamos asociarle a agujero. Este resultado general se conoce como *teorema de imposibilidad de pelo* o *teorema de no-pelo*. Por ejemplo, la métrica de Schwarzschild satisface un teorema de unicidad, que generalizado a agujeros con carga y masa dan lugar al teorema de no-pelo. Este resultado es en particular importante para la llamada *paradoja de la información* [25].

Si ahora generalizamos nuestra teoría de gravedad a mayores dimensiones o a teorías que incluyen correcciones a orden superior, podríamos preguntarnos qué sucede con las condiciones sobre la existencia de agujeros negros con pelo. De hecho, en gravedad de Gauss-Bonnet y de Lovelock se conocen teoremas de no-pelo que responden a esta pregunta. A pesar de esto, se sabe que dichos teoremas pueden evadirse si suponemos el acoplamiento del tipo que acabamos de describir en la sección anterior. Imponiendo simetría esférica podemos deducir que la métrica adquiere la siguiente forma:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Sigma_{D-2}^2. \quad (2.10)$$

Después de elegir un valor particular para el peso conforme, la solución para el campo escalar toma la forma sumamente simple

$$\phi(r) = \frac{N}{r}, \quad (2.11)$$

donde  $N$  es una constante que se relaciona con las constantes de acoplamiento a través de las siguientes ecuaciones de constricción:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} k \tilde{b}_k N^{2-2k} = 0, \quad , \quad \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} (D(D-1) + 4k^2) \tilde{b}_k N^{-2k} = 0 \quad (2.12)$$

Puede comprobarse que estas ecuaciones admiten soluciones particulares para valores  $k > 2$  y  $D \geq 5$ . Notemos que la solución para el campo escalar 2.11 es regular en todo el rango  $r > 0$ , y en particular lo es en el horizonte de eventos. Podemos definir una *carga escalar* en términos de la intensidad del campo escalar y las constantes de acoplamiento como:

$$Q_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} (D - 2k - 1) \tilde{b}_k N^{D-2k} \quad (2.13)$$

La función métrica puede obtenerse entonces a partir de la ecuación polinomial

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} a_k \frac{(D-1)!}{(D-2k-1)!} \left( \frac{1-F(r)}{r^2} \right)^k = \frac{M(D-1)}{\text{Vol}_\Sigma r^{D-1}} + \frac{Q_0}{r^D} \quad (2.14)$$

Aquí  $M$  es en principio una constante de integración arbitraria que corresponde a la masa del agujero negro. En este trabajo nos interesan soluciones hasta orden  $\mathcal{O}(\mathcal{R}^2)$ , donde la función métrica toma la siguiente forma:

$$F(r) = 1 + \frac{r^2}{4\tilde{\alpha}} - \frac{r^2 H(r)}{4\tilde{\alpha}} \quad (2.15)$$

con  $\tilde{\alpha}$  definido en términos de los acoplamientos de gravedad como:

$$\tilde{\alpha} = \frac{a_2(D-4)(D-3)}{2a_1} \quad (2.16)$$

La función  $H(r)$  satisface una ecuación cuadrática en  $r$  y por tanto tiene dos raíces. Sin embargo, la raíz negativa en el límite  $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$  presenta una divergencia. La raíz positiva debe considerarse como la única solución física. En este caso, en el límite  $\tilde{\alpha} \rightarrow 0$   $F(r)$  puede escribirse como:

$$F(r) \simeq 1 - \frac{16\pi MG}{Vol_{\Sigma}(D-2)r^{D-3}} + \frac{16\pi G\tilde{Q}_1^2}{Vol_{\Sigma}(D-2)(D-3)r^{2D-6}} - \frac{16\pi G\tilde{Q}_0}{(D-1)(D-2)r^{D-2}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)} + \mathcal{O}(\tilde{\alpha}), \quad (2.17)$$

donde  $\tilde{Q}_1$  y  $\tilde{Q}_0$  están definidos por medio de (2.20). En este trabajo nos especializaremos en el caso 5-dimensional con  $a_2 = 0$  (o  $\tilde{\alpha}=0$  de manera equivalente). Considerando además la elección del peso conforme como  $s = 1/5$ , la acción gravitacional (2.4) puede escribirse explícitamente hasta orden 2 tomando a  $a_0$  y  $a_1$  igual que en (2.5), mediante:

$$I[g, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{R}{16\pi G} + b_0 \phi^{25} + b_1 \phi^{13} S + b_2 \phi (S_{cdab} S^{cdab} - 4S_{ab} S^{ab} + S^2) \right), \quad (2.18)$$

La función métrica toma entonces la forma:

$$F(r) = 1 - \frac{\tilde{M}}{r^2} - \frac{\tilde{Q}_0}{r^3} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (2.19)$$

donde hemos redefinido la masa y la carga escalar, y la constante cosmológica en términos de las cantidades:

$$\tilde{\Lambda} = -\frac{a_0}{(D-1)(D-2)a_1}, \quad \tilde{M} = \frac{M}{Vol_{\Sigma}(D-2)a_1}, \quad \tilde{Q}_0 = \frac{Q_0}{(D-1)(D-2)a_1}. \quad (2.20)$$

Notemos que la solución para el campo escalar en este caso escala como una potencia  $-1/5$  de la coordenada radial  $r$ :

$$\phi(r) = \frac{N}{r^{1/5}}, \quad (2.21)$$

de donde vemos que el campo retroactúa en la métrica explícitamente a través de la inclusión del término cúbico en (2.19), que está regulado por la carga escalar  $\tilde{Q}_0$ . Las soluciones con  $\tilde{Q}_0 = 0$  pueden tener masa  $M$  sin estar acotada por debajo, y pueden además tener entropía negativa, por lo que debe tenerse necesariamente la condición  $\tilde{Q}_0 < 0$  para que la solución tenga sentido físico. Las relaciones de constricción entre los acoplamientos pueden conjuntarse con la definición de la carga escalar y de la intensidad de campo para escribir las siguientes ecuaciones,

$$b_2 = \frac{9b_1^2}{10b_0}, \quad \tilde{Q}_0 = \frac{64\pi G}{6} \epsilon b_1 \left( -\frac{18b_1}{5b_0} \right)^{3/2}, \quad N = \epsilon \left( -\frac{18b_1}{5b_0} \right)^{1/10}, \quad (2.22)$$

que restringen el *espacio de parámetros* de la teoría. Las últimas dos ecuaciones de (2.22) definen un cambio de variables de los parámetros  $(b_0, b_1) \rightarrow (\tilde{Q}_0, N)$ , por lo que podemos

describir al sistema con cualquiera de estas dos parejas de parámetros. Notemos por último la relación que guarda la primera de las ecuaciones (2.22) con las constricciones de causalidad que satisfacen los acoplamientos de la teoría de Lovelock con  $D = 5$ , predicha por la correspondencia AdS/CFT:

$$a_0 a_2 < \frac{27}{50} a_1^2. \quad (2.23)$$

Estas soluciones comparten la mayor parte de sus propiedades con las soluciones en gravedad de Einstein y tiene un horizonte de eventos localizado en el radio finito  $r_h$ , que se obtiene de la raíz positiva del polinomio  $F(r)$ , ecuación que puede escribirse en el caso  $\tilde{\alpha} = 0$  como:

$$r_h^6 + kL^2 r_h^4 - ML^2 r_h^2 - \tilde{Q}_0 L^2 r_h + \tilde{Q}_1 L^2 = 0. \quad (2.24)$$

### 2.3. Termodinámica de la solución

Así como para la métrica de Schwarzschild en la aproximación semiclásica podemos aplicar los principios de la mecánica estadística a la acción Euclídea para obtener la termodinámica de estos objetos, igualmente podemos hacerlo en las soluciones que acabamos de describir. En particular, se sabe que en el caso de gravedad pura de Lovelock existe un transición de fase tipo Hawking-Page [22], que implica que una transición de fase con una carga escalar distinta de cero ocurre sólo a altas temperaturas. La temperatura de Hawking se escribe como [6]:

$$T(r_h) = \frac{1}{4\pi(4\tilde{\alpha}) + r_h^2} (\tilde{Q}_0 r_h^{D-3} + (D-3)r_h + 2\tilde{\alpha}(D-5)r_h^{-1} - \tilde{\Lambda}(D-1)r_h^3 - (D-3)\tilde{Q}_1^2 r_h^{7-2D}). \quad (2.25)$$

Podemos ahora integrar la primera de las leyes de la mecánica de agujeros negros, enunciadas en la Sección 1.1, para obtener la entropía térmica [6]:

$$S = 4\pi \text{Vol}_\Sigma (D-2)a_1 \left( \frac{r_h^{D-2}}{D-2} + \frac{4\tilde{\alpha}r_h^{D-4}}{D-4} \right) + S_0 \quad (2.26)$$

La constante  $S_0$  es una contribución que aparece debido a que, como mencionamos antes, la entropía puede ser negativa cuando  $\tilde{Q}_0 > 0$ . Esto es debido a la presencia de la constante  $S_0$ , cuyo signo depende del signo de  $\tilde{Q}_0$ . Equivalentemente este resultado puede obtenerse mediante la fórmula de Wald (1.33) para la entropía. Desde esta perspectiva vemos que  $S_0$  corresponde a las contribuciones de los términos de orden superior. La forma que toma el primer término en la entropía (2.26) corresponde al término de área  $S_{BH}$  corregido con el segundo término, que corresponde a una potencia positiva de  $r_h$  para  $D = 5$ :

$$S = \frac{A}{4G_N} + \mathcal{O}(\tilde{\alpha}_h^{D-4}) \quad (2.27)$$

A partir de ahora y en los siguientes capítulos consideraremos el caso particular  $\tilde{\alpha} = 0$ . Notemos que en este caso la corrección a  $S_{BH}$  se anula, dejándonos solamente con la entropía de Bekenstein-Hawking. También consideraremos inicialmente  $\tilde{Q}_1 = 0$  aunque más adelante volveremos a encender el campo de Maxwell. Con esta elección de los acoplamientos la fórmula para la temperatura se vuelve:

$$T = \frac{r_h}{l^2\pi} + \frac{1}{2\pi r_h} + \frac{Q_0}{4\pi r_h^4} \quad (2.28)$$

Para calcular el resto de las cantidades termodinámicas de interés debemos recurrir a la acción Euclídea de la teoría. En particular, en un ensemble a temperatura fija y volumen fijo el potencial termodinámico adecuado de analizar es la energía libre de Helmholtz  $\mathcal{F}_{AdS}$  que está dada en términos de la acción euclídea como  $\beta\mathcal{F}_{AdS} = I_E$ . Para calcular el lado derecho de esta ecuación es necesario conocer la forma del término de frontera en (2.4), que pospondremos para la última sección. El resultado para la energía libre es [6]:

$$\mathcal{F}_{AdS} = -\frac{1}{8} \frac{\pi r_h^4}{GL^2} + \frac{1}{8} \frac{\pi r_h^2}{G} + \frac{5}{4} \frac{\pi \tilde{Q}_0 r_h}{GL^2} + \frac{1}{8} \frac{\pi \tilde{Q}_0}{Gr_h} + \frac{5}{16} \frac{\pi \tilde{Q}_0^2}{Gr_h^4}. \quad (2.29)$$

Esta forma obtenida hace manifiesta la transición de fase tipo Hawking-Page que mencionamos anteriormente, como podemos comprobar gráficamente a partir de la discontinuidad en la derivada de la gráfica de la Figura 2.4 a), característica de este tipo de transiciones de fase. Podemos calcular análogamente usando los principios de la mecánica estadística semiclásica, la entropía a partir de  $F_{AdS}$ :

$$S_{AdS} = \beta^2 \frac{d\mathcal{F}_{AdS}}{d\beta} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 r_h^3}{G_N} - \frac{5}{4} \frac{\tilde{Q}_0 \pi^2}{G_N}, \quad (2.30)$$

y la masa del agujero negro como:

$$M_{AdS} = \mathcal{F}_{AdS} + \beta \frac{d\mathcal{F}_{AdS}}{d\beta} = \frac{3}{8} \frac{\pi \left( r_h^5 + r_h^3 L^2 - \tilde{Q}_0 L^2 \right)}{G_N L^2 r_h} \quad (2.31)$$

Podemos hallar expresiones similares para el caso en que la solución es asintóticamente plana. También podemos añadir el radio de curvatura, o equivalentemente, la constante cosmológica como una variable termodinámica a nuestra descripción, interpretando a esta última como una presión[29]. La relación correspondiente es:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{4\pi L^2} \quad (2.32)$$

Existe un resultado en la teoría de transiciones de fase conocido como la *ley de áreas iguales de Maxwell*, que usaremos en esta tesis para estudiar el comportamiento de la entropía de entrelazamiento holográfica. El comportamiento termodinámico de un agujero negro en un fondo asintóticamente *AdS* es análogo al de un fluido de Van-der Waals real, por lo que es válido aplicar el análisis de transiciones de fase en este caso. El comportamiento crítico del fluido de Van-der Waals ocurre en la isoterma crítica  $T = T_c$ , donde el diagrama P-V tiene un punto de inflexión, por lo que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,N} = 0, \quad \left( \frac{\partial^2 P}{\partial^2 V} \right)_{T,N} = 0. \quad (2.33)$$

Cuando la temperatura del sistema está por debajo de la temperatura crítica el diagrama  $P - V$  tiene un comportamiento oscilatorio alrededor una cierta presión  $P^*$ , a la cual coexisten las dos fases, y que cumple que las áreas delimitadas por esta isobara y la curva  $P(V)$  por arriba y por debajo de la intersección son iguales. A fin de que la ley de áreas iguales de Maxwell se satisfaga, esto nos indica que debemos sustituir en este intervalo oscilatorio la curva  $P(V)$  por la isobara  $P^*$ . Esta ley se establece en el caso P-V en términos de la diferencial de energía libre de Gibbs:

$$dG = dM - TdS - SdT, \quad (2.34)$$

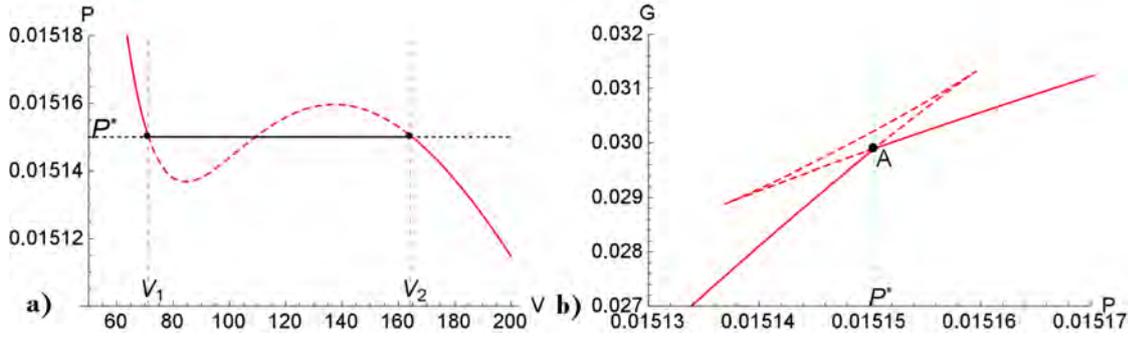


Figura 2.1: a) Diagrama  $P$  vs  $V$  a  $T < T_c$  constante para el agujero negro 5 dimensional con pelo, en el caso con  $\tilde{\alpha} = \tilde{Q}_1 = 0$ . La construcción de Maxwell predice que en la transición de fase el comportamiento oscilatorio entre  $V_1$  y  $V_2$  debe ser reemplazado por la recta  $T^*$  que divide la gráfica en áreas iguales. b) La temperatura  $T^*$  puede obtenerse a partir de la energía libre de Gibbs, que presenta una discontinuidad debido a la transición de fase. La presión de coexistencia  $T^*$  puede determinarse a partir de la intersección  $A$ . Gráfica obtenida en [14].

Sabemos que la teoría de transiciones de fase, que las fases coexistentes tienen una misma energía libre, así que usando este hecho junto con la primera ley de la termodinámica obtenemos la ley de áreas iguales de Maxwell integrando la ecuación 2.34 a  $T$ ,  $\tilde{Q}_0$  y  $\tilde{Q}_1$  constantes. La energía libre de Gibbs puede obtenerse de manera análoga a la energía libre de Helmholtz, y en el caso  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{Q}_1 = 0$  resulta:

$$G = \frac{\pi}{8} \left( r_h^2 - \frac{r_h^4}{L^2} + \frac{5\tilde{Q}_0}{2r_h^4} + \tilde{Q}_0 \left( \frac{10r_h}{L^2} + \frac{1}{r_h} \right) \right). \quad (2.35)$$

Los valores críticos para el radio de horizonte, temperatura y presión están dados en términos de la carga escalar como :

$$r_c = (-5\tilde{Q}_0)^{1/3}, \quad T_c = -\frac{3}{20} \frac{(-5\tilde{Q}_0)^{2/3}}{\pi\tilde{Q}_0}, \quad P_c = \frac{9}{200\pi} \left( -\frac{\sqrt{5}}{\tilde{Q}_0} \right)^{2/3}. \quad (2.36)$$

En [36] se obtuvieron los diagramas  $P - V$  y  $G - r_h$  (Figura 2.3) para este caso, y se verificó que se cumple con la ley de áreas iguales de Maxwell. El análisis anterior se realizó en [14] para el espacio  $P - V$ , pero también se puede obtener para los diagramas  $T - S$  y  $\Phi - \tilde{Q}_1$  en el caso con carga eléctrica. Como en este trabajo estamos interesados en la entropía (tanto termodinámica como de entrelazamiento), podemos hacer el análisis anterior en el caso  $T - S$ . En este caso la transición ocurre una isocarga crítica con carga escalar constante  $\tilde{Q}_{0c}$ . Para cargas (en valor absoluto) por debajo de este valor tenemos un comportamiento oscilatorio para el diagrama  $T - S$ , y debemos sustituir la curva por la isocarga que divide las áreas encerradas por arriba y por debajo de ésta en áreas iguales. En este caso, la función que juega el papel de  $G$  en el diagrama  $P - V$  es la energía libre de Helmholtz (2.29), cuya gráfica se muestra para los valores  $L = 4$ ,  $\tilde{Q}_0 = -1$  en la Figura 2.4 a). En este caso la carga escalar puede calcularse en términos de la presión crítica, o del radio de curvatura  $L$  y obtenemos  $\tilde{Q}_{0c} = -2,1032$  de modo que se satisface  $|\tilde{Q}_0| < |\tilde{Q}_{0c}|$ . La forma de la gráfica de la Figura 2.4 a) indica la presencia de la transición de fase, y la intersección de la parte creciente y decreciente de la gráfica nos indica la temperatura de coexistencia  $T^*$  análoga a  $P^*$ , que resulta  $T^* = 0,1131$ .

Ahora podemos graficar  $T$  como función de la entropía alrededor de  $T^*$ , donde vemos el comportamiento oscilatorio esperado. Integrando numéricamente desde  $S_1$  hasta  $S_2$  podemos obtener las áreas acotadas por arriba  $A_1$  y por debajo  $A_2$ . Obtenemos los siguientes

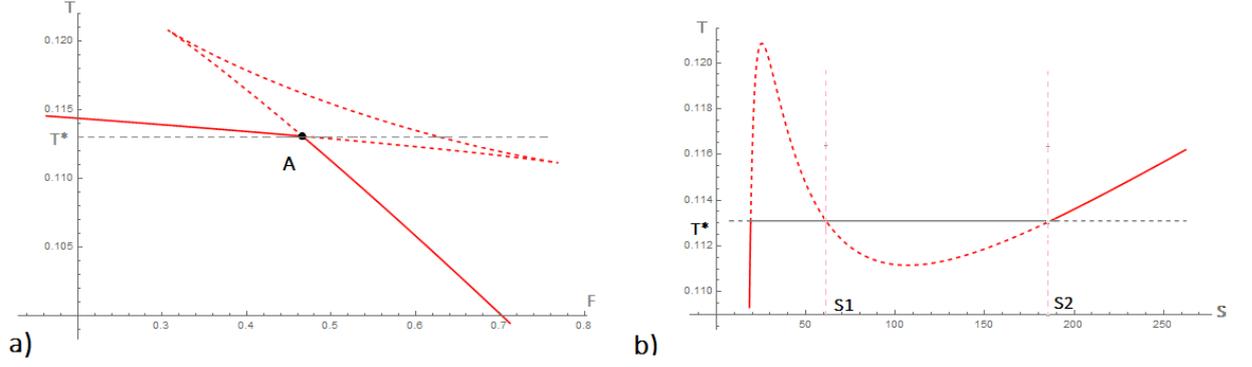


Figura 2.2: a) Gráfica de la temperatura como función de la energía libre de Helmholtz. Notamos el mismo tipo de comportamiento que en el diagrama P-V a  $T$  constante para la energía libre de Gibbs, y podemos determinar la temperatura de coexistencia  $T^*$ . b) Gráfica de la temperatura como función de la entropía para  $T < T_c$ . Vemos el comportamiento oscilatorio esperado, y graficando la temperatura  $T^*$  podemos verificar que se satisface la ley de áreas iguales.

valores para las áreas y para el error relativo entre ellas:

$$A_1 = 0,15887, \quad A_2 = 0,15896, \quad RelErr = 0,05677 \%, \quad (2.37)$$

Este error se debe principalmente a la falta de precisión del método gráfico que utilizamos para encontrar las intersecciones, por lo que podemos concluir que en este caso también se satisface la ley de áreas iguales de Maxwell.

## 2.4. Términos de frontera

Existe otra propiedad en esta teoría que nos permite pensar en la parte de materia de la acción como una teoría de gravedad pura una vez que realizamos una cierta redefinición de la métrica y del campo escalar. A esto se le conoce a partir de [6] como *dualidad de marco*. La transformación de los campos nos lleva del espacio de parámetros descrito por el conjunto  $(b_0, b_1, \dots, b_{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor})$  al espacio  $(a_0, a_1, \dots, a_{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor})$ . La acción inicial puede escribirse en forma compacta como

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-\tilde{g}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k} \delta^{(k)} \left( \alpha_k R^{(k)} + \beta_k \phi^{m_k} S^{(k)} \right), \quad (2.38)$$

donde  $\delta^{(k)}$  es una abreviación para la delta de Kronecker generalizada, y las cantidades  $R^{(k)}$  y  $S^{(k)}$  se definen análogamente en términos de las contracciones de  $R_{\mu\nu}^{\lambda\rho}$  y  $S_{\mu\nu}^{\lambda\rho}$  a orden  $k$  que aparecen en la acción (2.4). Consideremos ahora el cambio de variables

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \left( \frac{\xi}{\tilde{\phi}} \right)^{2/s} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad \phi \rightarrow \phi_0 \frac{\xi}{\tilde{\phi}}. \quad (2.39)$$

Bajo este reescalamiento el tensor de Riemann y el tensor de materia conforme transforman como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{\lambda\rho} &= \tilde{\phi}^{2/s-2} \xi^{-2s} \tilde{S}_{\mu\nu}^{\lambda\rho} \\ S_{\mu\nu}^{\lambda\rho} &= \tilde{\phi}^{2/s-2} \xi^{2-2s} \phi_0^2 \tilde{R}_{\mu\nu}^{\lambda\rho} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Reescribiendo la acción en términos de los nuevos tensores tenemos

$$\begin{aligned}
I[g_{\mu\nu}, \phi] &= I\left[\left(\xi/\tilde{\phi}\right)^{2/s} \tilde{g}_{\mu\nu}, \phi_0 \xi/\tilde{\phi}\right] \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-\tilde{g}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k} \delta^{(k)} \left( \beta_k \phi_0^{-\frac{D-2k}{s}} \tilde{R}^{(k)} + \alpha_k \xi^{\frac{D-2k}{s}} \tilde{\phi}^{m_k} \tilde{S}^{(k)} \right)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Vemos que la acción tiene esencialmente la misma forma que la acción original, salvo la aparición de los factores  $\phi_0^{-\frac{D-2k}{s}}$  y  $\xi^{\frac{D-2k}{s}}$  en cada término. Notemos que ahora los acoplamientos  $(b_0, b_1, \dots, b_{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor})$  acompañan a las contracciones del tensor de Riemann mientras que los acoplamientos  $(a_0, a_1, \dots, a_{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor})$  ahora regulan las interacciones con la parte de materia. En este sentido, entendemos a este tipo de transformación como una que intercambia la parte de materia escalar con la parte gravitacional. A un orden  $k$  dado (o a dimensión dada), podemos elegir el peso conforme de manera que la potencia de los factores sea cero, y en ese caso la acción toma exactamente la misma forma que la acción original, dando lugar a una autodualidad.

Un ejemplo de una solución autodual gracias a la dualidad de marco sucede en el caso en (3+1) dimensiones. En este se demuestra que, si se cumplen ciertas relaciones entre los acoplamientos, la siguiente métrica es solución de la teoría:

$$ds^2 = - \left( -\frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^2 \right) dt^2 + \left( -\frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Sigma_\gamma^2, \tag{2.42}$$

con el campo escalar dado como

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \frac{\mu}{r + \mu}. \tag{2.43}$$

$d\Sigma_\gamma$  es el elemento de línea de un espacio dos dimensional con curvatura constante  $\gamma$  normalizada a  $\pm 1, 0$  y  $\mu$  es una constante de integración. A fin de que esto sea una solución, el acoplamiento de la parte conforme está relacionado con la constante cosmológica y la constante de Newton, de manera que sólo uno de estos dos acoplamientos es independiente. Haciendo la transformación (2.39), obtenemos:

$$\begin{aligned}
d\tilde{s}^2 &= \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\mu/\phi_0}{r + \mu} \right)^2 \left[ - \left( -\frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^2 \right) dt^2 + \right. \\
&\quad \left. \left( -\frac{\Lambda}{3} r^2 + \gamma \left(1 + \frac{\mu}{r}\right)^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Sigma_\gamma^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.44}$$

y el campo escalar reescalado resulta

$$\tilde{\phi} = \phi_0 \xi \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \frac{r + \mu}{\mu}. \tag{2.45}$$

Podemos elegir libremente los parámetros  $\phi_0$  y  $\xi$ , así como redefinir la coordenada radial en términos de  $\rho$ :

$$\phi_0 = \xi = \sqrt{\frac{3}{8\pi G}}, \quad \rho = \frac{\mu r}{r + \mu}, \tag{2.46}$$

Sustituyendo esto en la fórmula 2.44 obtenemos de vuelta el elemento de línea y la solución para el campo escalar, con  $r$  y  $\mu$  sustituidos por las nuevas variables  $\rho$  y  $\tilde{\mu}$ , de donde

podemos ver la autodualidad de la solución.

También podemos analizar cómo transforma la solución de agujero negro 5 dimensional bajo dualidad de marco. En general, las soluciones para  $D > 4$  no presentan autodualidad, sino que se mapean a otras configuraciones que necesariamente deben ser también soluciones a la teoría dual. En el caso con dimensión arbitraria  $s = -1$ ,

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{N^2 F(r)}{r^2} dt^2 + \frac{N^2 r^2}{F(r)r^2} dr^2 + N^2 d\Sigma_{D-2}^2. \quad (2.47)$$

La geometría dual a esta solución consiste del producto de un espacio bidimensional  $\mathcal{M}_2$  y una  $(D - 2)$  esfera de radio  $N$ . El valor asintótico de esta geometría depende del valor de  $\Lambda$  que aparezca en la acción, siendo  $\mathbb{R}^{1,1} \times S^{D-2}$  si  $\Lambda < 0$ , o  $AdS_2 \times S^{D-2}$  si  $\Lambda = 0$ .

Como una última aplicación de la dualidad de marco, podemos obtener sencillamente los términos de frontera que aparecen en la acción (2.4) a partir de los términos de frontera ya conocidos para la teoría de Lovelock pura. En este último caso se sabe que el término de frontera para la acción (B.1) con acoplamientos  $(c_0, \dots, c_{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor})$  es:

$$I_{B_{\{c\}}} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} c_k \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{kl} \int_{\mathcal{M}} d^{D-1}x \sqrt{|h|} \delta_{\rho \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{k-1} \beta_{k-1}}^{\sigma \mu_1 \nu_1 \dots \mu_{k-1} \nu_{k-1}} \times \quad (2.48)$$

$$K_{\sigma}^{\rho} K_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots K_{\nu_l}^{\beta_l} \hat{R}_{\mu_{l+1} \nu_{l+1}}^{\alpha_{l+1} \beta_{l+1}} \dots \hat{R}_{\mu_{k-1} \nu_{k-1}}^{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}},$$

donde  $h$  es la métrica inducida en la frontera de la teoría  $\partial\mathcal{M}$ ,  $\hat{R}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  es el tensor de Riemann calculado a partir de  $h$ ,  $K_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  es la curvatura extrínseca de  $\partial\mathcal{M}$  que se define en el Apéndice, y  $\zeta_{kl}$  es un número que depende solamente de  $k$  y  $l$ . La acción completa de Lovelock con materia conforme se puede dividir entonces en dos partes, aplicando la transformación (2.39) a la parte de materia únicamente:

$$I[g, \phi] = I_{\{a\}}[g] + I_{\{b\}}[\tilde{g}] \quad (2.49)$$

Claramente la relación entre la acción y los términos de frontera es aditiva, por lo que podemos obtener el término de frontera para la acción completa mediante:

$$I_B[g, \phi] = I_{B,\{a\}}[g] + I_{B,\{b\}}[\tilde{g}] \quad (2.50)$$

Conocemos el primer término, y el segundo se obtiene realizando la transformación inversa  $\tilde{g} = \phi^{-2/s} g$  y sustituyendo en el tensor de curvatura extrínseca, que puede escribirse en términos del tensor  $L_{\nu}^{\mu}$ :

$$\tilde{K}_{\nu}^{\mu} = \phi^{1/s-1} L_{\nu}^{\mu}, \quad L_{\nu}^{\mu} = \phi K_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \Pi_{\nu}^{\mu} n^{\alpha} \nabla_{\alpha} \phi, \quad (2.51)$$

donde  $\Pi$  es la proyección ortogonal en la frontera y  $n^{\alpha}$  es el vector unitario normal a esta. Sustituyendo esto de vuelta en (2.50) obtenemos la forma explícita del término de frontera como una expansión en  $k$  y en  $l$ :

$$I_B = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \sum_{l=0}^{k-1} \zeta_{kl} \int_{\mathcal{M}} d^{D-1}x \sqrt{|h|} \delta_{\rho \alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{k-1} \beta_{k-1}}^{\sigma \mu_1 \nu_1 \dots \mu_{k-1} \nu_{k-1}} \times \quad (2.52)$$

$$\left( a_k K_{\sigma}^{\rho} K_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots K_{\nu_l}^{\beta_l} \hat{R}_{\mu_{l+1} \nu_{l+1}}^{\alpha_{l+1} \beta_{l+1}} \dots \hat{R}_{\mu_{k-1} \nu_{k-1}}^{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}} \right. \\ \left. + b_k \phi^{m_k+1} L_{\sigma}^{\rho} L_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots L_{\nu_l}^{\beta_l} \hat{S}_{\mu_{l+1} \nu_{l+1}}^{\alpha_{l+1} \beta_{l+1}} \dots \hat{S}_{\mu_{k-1} \nu_{k-1}}^{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}} \right).$$

## Capítulo 3

# Entropía Gravitacional Generalizada

LA inclusión de términos de orden superior en la acción gravitacional claramente modifica la forma de las cantidades termodinámicas calculadas a partir de la función de partición estadística, que a su vez se obtiene de la acción Euclídea. Un ejemplo de esto es la fórmula de Wald (1.33) para la entropía, que funciona en teorías donde la Lagrangiana depende de manera general de el tensor de Riemann. El diccionario de la correspondencia AdS/CFT depende tanto en la forma de la acción en el lado gravitacional como en el contenido de campos en la teoría cuántica, de manera que si queremos encontrar un dual holográfico a una solución particular de la teoría de gravedad (como es en este caso el agujero negro 5-dimensional), los observables de la teoría cuántica dual se verán modificadas por su dependencia en la acción gravitacional. El resultado es que, dada una forma particular de la acción de gravedad, las cantidades calculadas mediante la correspondencia holográfica deben modificarse, y en general no es claro a qué corresponde el contenido de campos (y por lo tanto la teoría dual) en la teoría cuántica dual bajo la correspondencia *AdS/CFT*. En particular nos interesa estudiar la cantidad geométrica, que calculada en el bulto de *AdS*, es dual a la entropía de entrelazamiento de esta teoría cuántica. Como demostraremos en la Sección, la fórmula de Ryu-Takayanagi sólo es válida si la teoría de gravedad en consideración es la teoría de Einstein, y en general, la HEE obtiene correcciones a orden superior en la curvatura, de manera análoga a como la entropía termodinámica se modifica por su dependencia en la acción gravitacional. En esta sección estudiaremos el problema de encontrar el método para generalizar el cálculo del funcional de la entropía de entrelazamiento holográfica en una teoría arbitraria de gravedad, que puede parafarsearse en el siguiente enunciado:

*Consideremos una teoría de gravedad cuya acción depende de la métrica, el tensor de Riemann, las contracciones de este y posibles campos de materia acoplados de manera arbitraria, junto con una solución a las ecuaciones de gravedad con una frontera, ¿Cuál es la forma que toma el funcional de entropía gravitacional (o entropía de entrelazamiento holográfica cuando identificamos la frontera con una teoría dual bajo AdS/CFT) y cuál es la superficie de codimensión-2 donde este debe ser evaluado?*

Antes de responder esta pregunta, que resulta ser bastante general, revisaremos la solución que encontraron Gibbons y Hawking hace más de 40 años para un caso particular de este problema. Como mencionamos anteriormente, la entropía del agujero negro puede de hecho entenderse como un caso particular de entropía de entrelazamiento holográfica, donde el horizonte resulta ser la superficie de área mínima en la cuál evaluamos el funcional de Ryu-Takayanagi, de forma que el procedimiento para encontrar la entropía en soluciones esféricas en gravedad de Einstein con un horizonte de eventos resultará como un antecedente para ilustrar el método que responde de manera general al problema que acabamos de exponer.

### 3.1. Método de Gibbons-Hawking para Entropía Gravitacional

En 1974 Stephen Hawking, basándose en trabajos previos de Bekenstein, argumentó mediante una aproximación semiclásica que en la cercanía del horizonte de eventos ocurre un proceso de producción de pares, cuyos productos pueden ser absorbidos por el agujero o emitidos hacia el exterior en forma de radiación. La aproximación semiclásica consiste en describir la dinámica de la gravedad cerca del agujero negro en términos de una función de partición que asigna una probabilidad a cada trayectoria clásica posible (aún cuando no extremicen la acción). Dicho de otra forma, aún cuando no sepamos cómo cuantizar la teoría de gravedad, podemos interpretar a la acción como la de una teoría cuántica, y obtener la función de partición térmica. De esta forma, si logramos obtener el valor de la acción Euclídea para la solución a las ecuaciones de campo, podemos calcular la función de partición de la teoría, y por tanto podemos calcular la entropía siguiendo los procedimientos usuales de la mecánica estadística, mediante la fórmula:

$$S = -\beta(\partial_\beta - 1) \ln Z, \quad (3.1)$$

donde  $\beta = 1/kT$ , o bien, mediante la integración de la primera ley de la mecánica de agujeros negros (1.24). Primero estudiemos el método para obtener la acción Euclídea para una solución con un horizonte, por ejemplo, la métrica de Schwarzschild de la ecuación (1.17). Para el presente caso nos interesa la forma que toma la métrica en coordenadas de Kruskal. Recordemos de aquella sección que estas coordenadas nos permiten deshacernos de la singularidad desnuda en  $r = 2M$ . La singularidad en  $r = 0$  ahora se localiza en la superficie  $z^2 - y^2 = 1$ . Esta una singularidad en la curvatura y no puede removerse mediante un cambio de coordenadas. Sin embargo, podemos evadirla si definimos la coordenada compleja  $\zeta = iz$ , donde el elemento de línea se escribe como:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \left[ \frac{r}{2M} - 1 \right] e^{-\frac{r}{2M}} (d\zeta^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.2)$$

donde ahora  $r$  está determinada mediante:

$$\zeta^2 + y^2 = \left( \frac{r}{2M} - 1 \right) e^{\frac{r}{2M}}. \quad (3.3)$$

Esta es la métrica de Schwarzschild en su forma Euclídea, o con signatura positiva. Tomando a  $\zeta$  y  $y$  como reales, obtenemos la sección Euclídea, donde  $r$  es positivo y mayor que  $2M$ . Redefiniendo la coordenada temporal como  $\tau = it$  podemos ver de la definición (3.2), que esta coordenada debe ser periódica con periodo  $8\pi M$ , y puede interpretarse como una coordenada angular alrededor del eje  $r = 2M$ . La acción ahora está libre de singularidades, y podemos calcular la acción en una sección  $\Sigma$ , acotada por la superficie  $r = r_o$ . La acción completa se escribe como (en unidades naturales donde  $G_N = h = c = 1$ ):

$$I = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} R + \int_{\partial\Sigma} d^3x \sqrt{-h} B. \quad (3.4)$$

Sin embargo notamos que el escalar de curvatura evaluado con la métrica es cero, por lo que la acción resulta:

$$I = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial\Sigma} K d\Sigma = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial n} \int_{\partial\Sigma} d\Sigma. \quad (3.5)$$

En la segunda igualdad la parcial se toma respecto a  $n$ , un vector unitario normal a lo largo del cual se desplazan los puntos de la frontera. El resultado de tomar esta derivada

es:

$$\begin{aligned} \int K d\Sigma &= -32M \pi^2 (1 - 2Mr^{-1})^{1/2} \frac{d}{dr} (ir^2(1 - 2Mr^{-1})^{1/2}) \\ &= -32\pi^2 iM(2r - 3M) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para espacio plano podemos tomar a  $K$  como  $K = 2/r$ , por lo que la acción toma la forma:

$$I = \frac{1}{8\pi} \int K dY = -4\pi^2 iM(1 - 2Mr^{-1})^{1/2} 2r = \pi iM\kappa^{-1} + \mathcal{O}(M^2 r_o^{-1}), \quad (3.7)$$

donde  $\kappa$  es la gravedad superficial  $\kappa = (4M)^{-1}$  para la solución de Schwarzschild. Análogamente podemos obtener la entropía para la acción de Reissner-Nordstrom, usando la acción gravitacional para un campo electromagnético con intensidad de campo  $F_{ab}$ . En ese caso, la acción Euclídea completa para parte de gravedad más la parte electromagnética se escribe como:

$$I = i\pi\kappa^{-1}(M - Q\Phi) \quad (3.8)$$

Para un espacio (Anti-)de Sitter el procedimiento es similar, solo que ahora debemos considerar el término de constante cosmológica. En espacio de Sitter obtenemos que la acción Euclídea es  $I = -12\pi i\Lambda^{-1}$ . Ahora que entendemos como calcular la acción podemos aplicar estos resultados al cálculo de la entropía térmica. Para ello necesitamos la función de partición de gravedad:

$$Z = Tr(e^{-\beta H}) = \int \mathcal{D}\phi \exp\{iI[\phi]\} \quad (3.9)$$

También podemos considerar un ensamble gran canónico, donde tenemos potenciales químicos  $\mu_i$  asociados a las cantidades conservadas  $C_i$ . En ese caso la función de partición puede escribirse como:

$$Z = Tr \left[ \exp \left( \beta \left\{ H - \sum_i \mu_i C_i \right\} \right) \right] \quad (3.10)$$

Supongamos que tanto la métrica como los campos tienen un valor de fondo sobre el cual hay grados de libertad que fluctúan a orden cuadrático, por lo que podemos escribir  $(g = g_0 + \tilde{g}, \phi = \phi_0 + \tilde{\phi})$ . Ahora podemos expandir en una serie de Taylor alrededor del valor de fondo de la métrica y de los campos, como:

$$I[g, \phi] = I[g_0, \phi_0] + I_2[\tilde{g}] + I_2[\tilde{\phi}] + \dots, \quad (3.11)$$

donde  $I_2[\tilde{g}]$  y  $I_2[\tilde{\phi}]$  corresponden a las fluctuaciones cuadráticas de  $g$  y  $\phi$  respectivamente, y los puntos suspensivos denotan correcciones de orden superior. La función de partición entonces está dada como:

$$\ln Z = iI[g_0, \phi_0] + \ln \int \mathcal{D}\tilde{g} \exp\{iI_2[\tilde{g}]\} + \ln \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\{iI_2[\tilde{\phi}]\}. \quad (3.12)$$

El argumento termodinámico usual implica que:

$$\ln Z = WT^{-1}, \quad (3.13)$$

donde  $W = M - TS - \sum_i \mu_i C_i$  es el llamado *potencial termodinámico* del sistema. En la métrica de Kerr-Newman obtenemos una temperatura  $T = \kappa(2\pi^{-1})$  y el valor de este potencial es:

$$W = \frac{1}{2}(M - \phi Q). \quad (3.14)$$

Ahora usamos la fórmula de Smarr generalizada [28],

$$\frac{1}{2}\kappa(8\pi)^{-1}A + \frac{1}{2}\Phi Q + \Omega J, \quad (3.15)$$

de donde obtenemos el famoso resultado:

$$S = \frac{1}{4}A. \quad (3.16)$$

## 3.2. Método de Lewkowycz-Maldacena

Regresando al problema de calcular la entropía de entrelazamiento holográfica en una teoría de gravedad arbitraria, notamos la similaridad entre este problema y el de calcular la entropía térmica del agujero negro. En ambos, tenemos una solución a las ecuaciones de gravedad que tiene una frontera, sobre la cual imponemos condiciones consistentes con la solución. La diferencia principal radica en que el agujero negro es una solución con simetría esférica (simetría  $U(1)$ ), mientras que una superficie de Ryu-Takayanagi, en principio puede tomar cualquier forma arbitraria. Por esto, tenemos que generalizar el método de Gibbons-Hawking para incluir soluciones *sin* simetría  $U(1)$ . El primer paso hacia este objetivo es entender cuál es el dual holográfico del método que nos permite obtener la entropía de entrelazamiento en una teoría de campos. Como mencionamos en la Sección 1.2, una teoría de campos tiene un número infinito de grados de libertad, y por lo tanto no resulta obvio cómo aplicar la fórmula para calcular la traza de la matriz de densidad reducida. Para resolver esto debemos aplicar un resultado que nos permite traducir este problema en el de obtener la traza en un espacio de réplicas, formado por  $n$  copias de la variedad inicial. El objetivo de esta sección será estudiar este método y deducir su dual holográfico, que nos permitirá obtener el funcional de HEE en una teoría arbitraria a partir de la forma de la acción de gravedad, para después aplicar el método al cálculo explícito de este funcional en varios casos de interés para esta tesis.

### 3.2.1. Truco de réplica para EE

En el formalismo de la integral de trayectoria la traza de la matriz de densidad reducida está representada mediante una integral que suma sobre todas las trayectorias asociadas a los estados que viven en una región  $A$ . La definición (1.112) requiere que calculemos la traza de  $\rho_A \ln(\rho_A^n)$ , de manera que la integral de trayectoria ahora involucra un logaritmo en el integrando que dificulta el cálculo. Para solucionar este problema, podemos notar que si definimos la  $n$ -ésima entropía de Renyi como:

$$S_n = \frac{1}{1-n} \ln \text{Tr}[\rho_A^n], \quad (3.17)$$

entonces la entropía de entrelazamiento puede obtenerse a partir de esta cantidad tomando el límite  $n \rightarrow 1$ :

$$S_{EE} = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\text{Tr}[\rho_A^n] - 1}{1-n} = -\frac{\partial}{\partial n} \ln \text{Tr}[\rho_A^n] \Big|_{n=1} = \lim_{n \rightarrow 1} S_n. \quad (3.18)$$

Por tanto podemos reemplazar el problema de calcular la traza de  $\rho_A \ln(\rho_A^n)$  sobre todos los grados de libertad de la teoría de campos, por el de tomar la traza del producto de  $n$  matrices de densidad reducidas, cada una correspondiendo a una de las  $n$  copias de la teoría. Este último problema parecería en principio más complejo que el original, sin embargo, notemos que este truco permite deshacernos del logaritmo en (1.112), facilitando

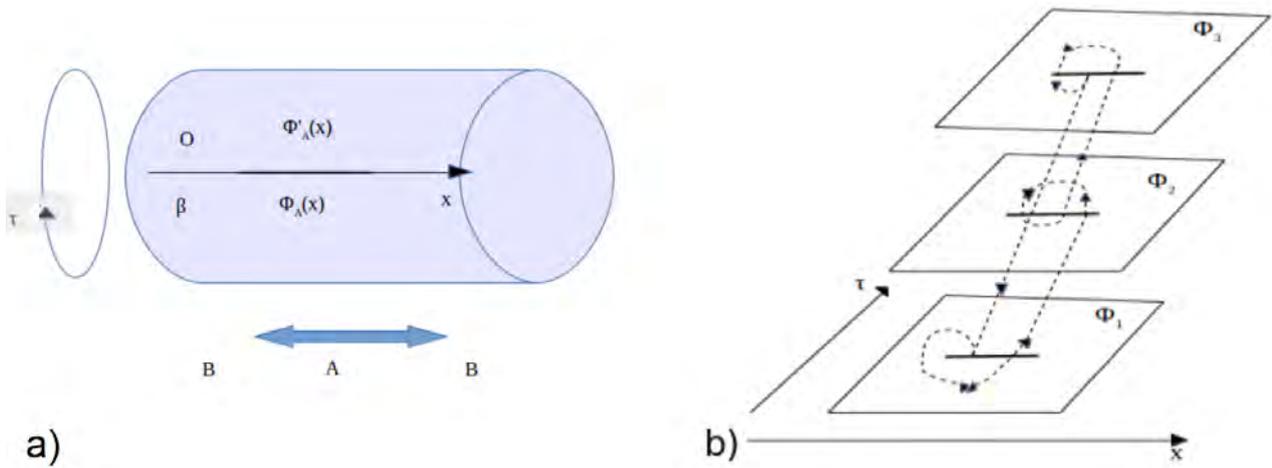


Figura 3.1: a) La variedad  $\Omega$  puede visualizarse como un cilindro con coordenada angular periódica  $\tau$ . El periodo, puede identificarse con el inverso de la Temperatura, por lo que la función de partición se identifica con la de un ensemble a temperatura  $T$ . b) La función de partición en el espacio réplica se calcula integrando sobre todas las variedades réplica, con condiciones cíclicas entre cada variedad, que nos permitan integrar solamente sobre los grados de libertad de  $A$ .

el cálculo. A este resultado se le conoce como el *truco de réplica* [19].

Para hacer más explícito el procedimiento para obtener la entropía de entrelazamiento, consideremos como caso particular una teoría de campo definida sobre una variedad  $D$ -dimensional  $\Omega$  con un campo escalar real  $\phi(x)$ . La acción entonces está dada por  $S_E[\phi] = \int_{\Omega} d^D x \mathcal{L}[\phi(x)]$  donde  $\mathcal{L}$  es la densidad Lagrangiana. En el formalismo del grupo de renormalización, idealizamos nuestra QFT como una retícula de espaciamiento finito  $a$  e identificamos a cada punto de la retícula con el parámetro discreto  $x$ . En un espacio-tiempo Euclídeo, el tiempo está representado por la coordenada imaginaria  $\tau = it$  la cual es periódica con periodo  $\beta = 1/kT$ . Entonces podemos visualizar al espacio-tiempo  $\Omega$  como un cilindro de circunferencia  $\beta$  (Figura 3.2.1 a) ). Si consideramos un sistema con temperatura  $T$  la matriz de densidad está dada por la ecuación (1.110), por lo que la función de partición corresponde a una integral funcional. En la métrica Euclídea operador de evolución temporal es  $U(\tau) = e^{(-\tau\hat{H})}$ , donde  $\hat{H}$  es el operador hamiltoniano del sistema cuántico. Mientras  $\tau$  crece, el sistema tiende a regresar al estado de mínima energía, por lo que el operador  $U(\tau)$  proyecta cualquier función de onda en el estado base para  $\tau \rightarrow \infty$ . Utilizando esto, podemos escribir el funcional de onda del vacío como

$$\Psi_0[\phi] = \langle \phi | 0 \rangle = \frac{1}{Z} \int D\phi e^{-\int_{\Sigma} d^D x \mathcal{L}[\phi]} \quad (3.19)$$

Aquí la variedad  $\Sigma$  corresponde a una superficie tal que su frontera se haya en  $\tau = 0$ , y se encuentra en el estado definido por las configuraciones de campo  $|\phi\rangle$  de nuestra teoría. Tomar el límite  $\tau \rightarrow \infty$  es equivalente a hacer el tamaño de la dimensión temporal infinito, es decir  $\beta \rightarrow \infty$ , por lo que el funcional de onda representa a un sistema que está a temperatura cero.

En el espacio réplica, tenemos  $n$  de estos funcionales de onda, cada uno evaluado sobre una réplica de la variedad  $s$  y debemos tomar la traza del producto de estos  $n$  funcionales. Esto es equivalente a hacer una sola integral de trayectoria de los campos sobre el producto de  $n$  funcionales como el de (3.19), imponiendo las siguientes condiciones de frontera sobre

los campos, que nos permiten integrar solamente a lo largo de los grados de libertad en  $A$  (ver Figura 3.2.1 b)):

$$\begin{aligned}\phi_j(0^+, x) &= \phi_{j+1}(0^-, x) \quad x \in A \\ \phi_j(0^+, x) &= \phi_j(0^-, x) \quad x \in B\end{aligned}\tag{3.20}$$

donde las etiquetas  $\pm$  significan evaluar tomando el límite por la izquierda (-) o por la derecha (+). Con estas condiciones, podemos escribir el funcional para una de las réplicas como:

$$[\rho_A]_{\phi_+\phi_-} = \frac{1}{Z} \int_{t=-\infty}^{t=\infty} D\phi e^{-S[\phi]} \prod_x \delta(\phi_+(x, \tau=0) - \phi_+(x)) \prod_x \delta(\phi_-(x, \tau=\beta) - \phi_-(x)),\tag{3.21}$$

de manera que la traza  $Tr[\rho_A^n]$  puede calcularse tomando el producto de estos funcionales,

$$[\rho_A]_{\phi_1+\phi_1-} [\rho_A]_{\phi_2+\phi_2-} \cdots [\rho_A]_{\phi_n+\phi_n-},\tag{3.22}$$

e integrando sobre todas las configuraciones de campo sujetas a las condiciones (3.20).

En términos de la integral de trayectoria (3.21), podemos definir una función de partición  $Z_n$  para la  $n$ -ésima réplica de manera que podemos reescribir la traza que aparece en la entropía de Renyi de manera compacta:

$$Z[n, A] = Tr_A \rho_A^n = \frac{1}{(Z)^n} \int_{(t,x) \in \mathcal{R}_n} D\phi e^{S_n[\phi]} \equiv \frac{Z_n}{(Z)^n},\tag{3.23}$$

y por lo tanto la entropía de entrelazamiento se puede calcular como:

$$S = - \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{n-1} (\ln Z_n - n \ln(Z_1)^n)\tag{3.24}$$

Como un caso particular en donde podemos evaluar la integral consideremos una teoría de campo conforme en (1+1) dimensiones. En las coordenadas complejas  $u = x + it$ ,  $w = x - it$ , las condiciones de frontera (3.20) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\phi_i(e^{2\pi i}(w-u)) &= \phi_{i+1}(w-u) \\ \phi_i(e^{2\pi i}(w-u)) &= \phi_{i-1}(w-u)\end{aligned}\tag{3.25}$$

El conjunto de variedades en el espacio réplica presenta simetría bajo el intercambio de las réplicas. Si existen campos locales que obedecen esta invariancia entonces son denominados *campos de torsión*. Entonces la condición de frontera (3.25) puede ser interpretada como la inserción de dos de estos campos de torsión  $\Psi_n^{+(k)}$  y  $\Psi_n^{-(k)}$  en los puntos  $w = u$  y  $w = v$  para cada una de las  $k$ -superficies Riemannianas unidimensionales. Estos operadores de campo mapean las distintas copias de nuestra teoría a lo largo de los cortes en la región  $A$ . De (3.23), la matriz de densidad reducida está dada como la función de partición con un corte en los puntos frontera entre las regiones  $A$  y  $B$ . En el método de réplica, esto corresponde a insertar los operadores de torsión en los puntos frontera  $u$  y  $v$ . Entonces la traza de la matriz de densidad puede expresarse en términos de estos campos como

$$Tr_A \rho_A^n = \prod_{k=0}^{n-1} \langle \Psi_n^{+(k)}(u) \Psi_n^{-(k)}(v) \rangle.\tag{3.26}$$

Por tanto, para este método general basta con conocer una expresión para el valor esperado de los operadores de torsión de la teoría considerada. En particular, para teorías conformes en una dimensión espacial es posible evaluar directamente este producto, dando lugar a los resultados mencionados en la Sección 1.6.

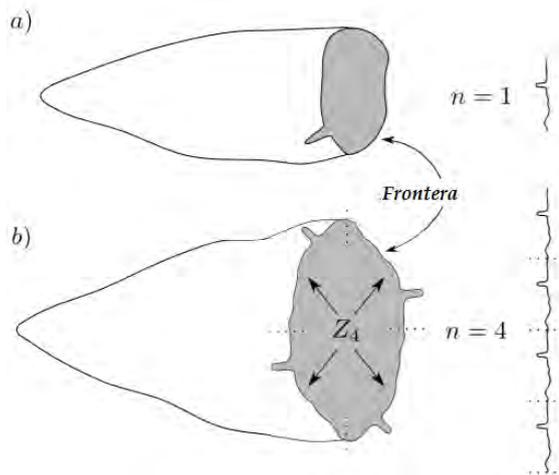


Figura 3.2: a) Representación de una solución a las ecuaciones de gravedad con una frontera (gris). La condición de frontera correspondiente se indica mediante la protuberancia en la frontera. b) Extendemos la geometría anterior al espacio de réplicas con  $n = 4$ , eligiendo las nuevas condiciones de frontera de forma cíclica, de manera que el periodo de la coordenada  $\tau$  es ahora  $2\pi n$ . Para obtener la orbifold  $\hat{B}_n$  tomamos el cociente de esta variedad con el grupo  $\mathbb{Z}_n$ , de manera que hacemos de nuevo el periodo de  $\tau = 2\pi$ .

### 3.2.2. Dual gravitacional del truco de réplica

Ahora podemos hacer uso del diccionario de la correspondencia AdS/CFT para intentar traducir el método anterior al lenguaje gravitacional. Todos los resultados de esta y la siguiente sección están basados en [10], donde se desarrolló el método general para calcular el funcional de entropía de entrelazamiento, además de proporcionar la prueba de la fórmula de Ryu-Takayanagi. Frecuentemente nos referiremos a este método como *metodo L-M*. Para teorías con un dual holográfico podemos construir una solución en el bulto  $B_n$ , cuya frontera sea  $M_n$ . La correspondencia bulto/frontera (1.104) nos permite relacionar la función de partición calculada en  $M_n$  con la acción del bulto en la capa de masa en  $B_n$ , en el límite de  $N$  grande :

$$Z_n \equiv Z[M_n] = e^{-I[B_n]} + \dots, \quad (3.27)$$

donde los puntos suspensivos denotan contribuciones a orden mayor que  $1/N$ . Notemos que nuestra definición inicial de  $n$  como un número natural que etiqueta a las réplicas es de hecho incompatible con la operación de límite, que está definida sobre todos los números reales. Para que este límite tenga sentido, debemos hacer una continuación analítica de  $n$  hacia todos los reales. Del lado de campos, este procedimiento resulta difícil de realizar en general. Sin embargo, un hecho clave es que el lado dual brinda una manera mucho más sencilla de hacer esta continuación analítica. La razón de esto es que podemos extender fácilmente la geometría a una variedad compacta, u *orbifoldo* (*orbifold* en inglés) de  $B_n$ , donde las configuraciones en el bulto están bien definidas para  $n$  real. Veamos cómo podemos definir esta nueva configuración. La frontera  $M_n$  para un número  $n$  entero presenta simetría  $\mathbb{Z}_n$  que nos permite permutar cíclicamente las réplicas. Supongamos que esta simetría se puede extender hacia el bulto para la solución tipo punto silla dominante. Por lo tanto, basta con considerar el orbifoldo:

$$\hat{B}_n = \frac{B_n}{\mathbb{Z}_n} \quad (3.28)$$

En la Figura 3.2.2 se muestra gráficamente cómo podemos construir esta variedad a partir de la solución inicial y sus correspondientes condiciones de frontera, para el caso particular  $n = 4$ . Los puntos que la simetría  $\mathbb{Z}_n$  deja invariantes forman una superficie de

codimensión 2 con un defecto cónico en el bulto, que terminan en la región  $\partial A$  en la frontera, como puede entenderse a partir del siguiente argumento. En el orbifolio  $\hat{B}_n$ , la frontera corresponde a la variedad  $M_n/Z_n = M_1$ . Como la simetría de réplica actúa sobre la coordenada periódica  $\tau$  como  $\tau \rightarrow 2\pi n$ , en la frontera  $\partial A$  esto corresponde a un desplazamiento por  $2\pi$ , dejando invariantes estos puntos. Podemos extender la definición de la coordenada temporal periódica hacia el bulto, de manera que los puntos fijos forman una superficie de codimensión 2, que llamaremos  $C_n$ . La solución en el bulto  $B_n$  debe ser regular en todos sus puntos, por lo que los puntos invariantes bajo  $\tau \rightarrow 2\pi n$  deben tener un defecto cónico en  $C_n$  con apertura  $2\pi/n$ , o de manera equivalente con ángulo de déficit  $(2\pi - 2\pi/n)$ . Sabemos también por construcción que la acción en el espacio réplica es idénticamente igual a la acción en el orbifolio con el periodo  $\tau$  recorrido por  $2\pi n$ , de manera que:

$$I[B_n] = nI[\hat{B}_n]. \quad (3.29)$$

Notemos que a diferencia del método de Gibbons-Hawking, en este caso no necesitamos de un término de frontera tipo GHY. La razón de esto es que  $I[B_n]$  por sí sola no contiene ninguna contribución en  $C_n$ , y por lo tanto debemos incluir tanto el término de GHY junto con los contratérminos correspondientes en la definición de  $I[B_n]$ .

Lo último que nos resta por hacer es continuar analíticamente el parámetro  $n$ , y para ello debemos escoger una forma particular de la métrica a partir de la simetría  $\mathbb{Z}_n$  en la superficie de codimensión dos  $C_n$ . Si logramos hacer esto, podemos calcular la entropía de Rènyi fácilmente, sustituyendo (3.29) en (3.24), y notando que

$$S_n = \frac{n}{n-1} \left( I[\hat{B}_n] - I[\hat{B}_1] \right). \quad (3.30)$$

Después de hacer la continuación analítica, podemos calcular la entropía de entrelazamiento a partir de la sencilla fórmula:

$$S = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n}{n-1} \left( I[\hat{B}_n] - I[\hat{B}_1] \right) = \partial_n I[\hat{B}_n] \Big|_{n=1}. \quad (3.31)$$

### 3.2.3. Conos aplastados regularizados

Ahora que tenemos una expresión para la entropía en términos de la acción Euclídea, podemos entender cómo hacer la continuación analítica en una manera que enfatice que la contribución proviene del horizonte. Identificando a la coordenada  $\tau$  como periódica con periodo  $2\pi$ , podemos escribir la entropía como:

$$S = -n \partial_n [\ln Z_n - \ln Z_1]_{n=1}, \quad (3.32)$$

o bien, podemos definir el parámetro pequeño  $\epsilon$  como:

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{n}, \quad (3.33)$$

con la intención de posteriormente hacer una expansión perturbativa en términos de éste. Así, podemos reescribir nuestra fórmula para la entropía como

$$S = -\partial_\epsilon I[\hat{B}_n] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (3.34)$$

Recordemos que  $I[\hat{B}_n]$  no tiene ninguna contribución proveniente de la singularidad cónica, por lo que podemos definirla en términos de una pequeña región alrededor de  $C_n$ . Para

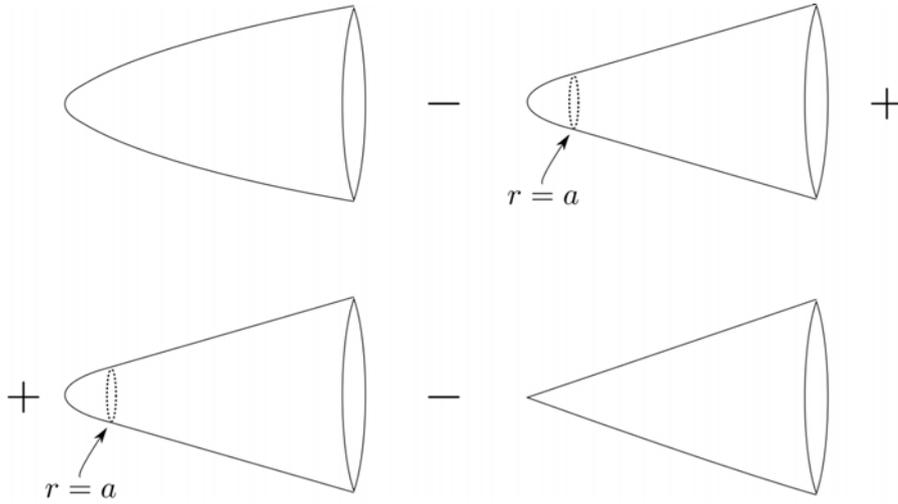


Figura 3.3: Representación gráfica de la fórmula (3.35). La forma inicial de esta fórmula contiene la diferencia entre las acciones de la geometría original en el espacio de réplica, y la de la geometría de la orbifold  $B_n$ , que contiene una singularidad cónica en el origen. Estas corresponden al primer y último término en la Figura. Para realizar el cálculo, notamos que podemos añadir y sustraer la geometría de un cono regularizado con el parámetro de corte  $a$ , que está libre de singularidades.

el presente caso, consideremos que esta región está definida por  $\rho < a$ , donde  $a$  puede tomarse como un parámetro de corte. Entonces podemos calcular la acción Euclídea integrando sobre la región  $\rho > a$  y tomando el límite  $\rho \rightarrow 0$  al final de los cálculos. Antes de tomar este límite, resulta natural cerrar la variedad definida por la frontera  $\rho = a$  llenando la región que sustrajimos,  $\rho < a$ , por una geometría regular. A esta geometría le llamaremos geometría del *cono aplastado regularizado*, o simplemente *cono regularizado* cuando la solución tenga simetría  $U(1)$ .

Una manera más formal de definir esta geometría es considerar (3.24), sumar y restar la acción correspondiente a una geometría suave, que es la misma que la del cono con la singularidad lejos del origen, y un cono aplastado regularizado cerca de este. Esta geometría no es una solución de las ecuaciones de gravedad y por tanto es una configuración *off-shell*, es decir, fuera de la capa de masa, cuya función de partición denotamos como  $Z_n^{off}$ . Entonces podemos escribir la fórmula para la entropía como:

$$S = -n\partial_n[(\ln Z_n - \ln Z_n^{off}) - (\ln Z_n^{off} - \ln Z_1^n)]_{n=1} \quad (3.35)$$

La geometría correspondiente a cada término que aparece en esta acción se representa gráficamente en la Figura 3.2.3. Es posible escoger la configuración fuera de la capa de masa de manera que difiera de una solución a las ecuaciones de movimiento únicamente por una cantidad a primer orden en  $\epsilon$ . Por lo tanto, al considerar variaciones al orden más bajo, el primer paréntesis en (3.35) da lugar a una variación a primer orden respecto a la solución con periodo  $n$ , que justo corresponde al lado izquierdo de las ecuaciones de gravedad con coordenada  $\tau$  periódica, y por lo tanto es cero.

Finalmente, falta calcular solamente el segundo paréntesis de (3.35), que contiene la diferencia entre la acción de un cono con una singularidad y un cono regularizado. Por lo tanto, la única contribución proviene de la región cercana a la singularidad, que es extensiva en el área del horizonte  $\rho = a$ . En gravedad de Einstein con campos de materia acoplados de manera minimal, esto nos permite calcular la contribución correspondiente

haciendo la integral  $\int d^2x \sqrt{g} R$  a lo largo de las coordenadas paralelas al cono. Esta integral la evaluaremos en la siguiente sección una vez que hayamos obtenido la expansión perturbativa de la métrica y el resultado es:

$$\int_{\text{Cono Regularizado}} d^2x \sqrt{g} R \sim 4\pi(1-n), \quad (3.36)$$

por lo que el resultado final toma la forma esperada:

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} (\text{Área}) \left( -n \partial_n \int_{\text{Cono Regularizado}} d^2x \sqrt{g} R \right) = \frac{\text{Área}}{4G_N} \quad (3.37)$$

Existe otro enfoque de este problema que nos servirá para dejar aún más claro como es que la contribución proviene del horizonte. Como vimos en la deducción de la fórmula (3.31), podemos sustituir la evaluación de  $\ln Z_n$  por:

$$\ln Z_n = n [\ln Z_n]_{2\pi}, \quad (3.38)$$

donde el subíndice  $2\pi$  indica que el periodo de la coordenada  $\tau$  corresponde a  $2\pi$ , de manera que se trata de la acción en la orbidad. Sustituyendo directamente esta equivalencia en la fórmula (3.31), obtenemos:

$$S = -n^2 \partial_n [\ln Z_n]_{2\pi} \quad (3.39)$$

Aquí, tomar la derivada respecto a  $n$  significa variar la apertura del ángulo de déficit, de manera que tanto la métrica como los campos tienen que ajustarse al nuevo valor de  $n$ . Sin embargo, notemos que en este caso la curvatura de la singularidad cónica no aparece en la geometría original, de manera que las condiciones de frontera en el origen tienen que modificarse para remover esta singularidad. Dado que en  $n = 1$  tenemos una solución de las ecuaciones de movimiento, esperaríamos que una variación a primer orden de esta acción diera lugar a las mismas ecuaciones de movimiento y por lo tanto, los términos a primer orden se deberían de anular. Sin embargo, la modificación a las condiciones de frontera que acabamos de mencionar induce la aparición de un término de frontera en la acción, que constituye la contribución usual de área a la fórmula para la entropía. En concreto, podemos escribir estas contribuciones como:

$$S = -\partial_n [\ln Z_n]_{2\pi} \Big|_{n=1} = \int E_g \partial_n g + \int E_\phi \partial_n \phi + \frac{1}{8G_N} \int_{\rho \sim 0} d^{D-2} y \sqrt{g} (\nabla^\mu \partial_n g_{\mu\rho} - g^{\mu\nu} \nabla_\rho \partial_n g_{\mu\nu}) = \frac{\text{Área}}{4G_N}. \quad (3.40)$$

$E_g$  y  $E_\phi$  son los lados izquierdos de las respectivas ecuaciones de movimiento para la métrica y los campos, y por lo tanto son iguales a cero. Las coordenadas  $y$  denotan las coordenadas a lo largo de la superficie  $\rho = 0$ . Esto nos deja con el término de frontera, que lejos de la singularidad  $\rho = 0$  se anula, pero mientras nos acercamos al origen cobra relevancia y resulta ser igual al área de la superficie de codimensión dos.

A pesar de que los dos acercamientos que acabamos de estudiar dan lugar al funcional correcto para calcular la entropía de entrelazamiento holográfica, aún no queda claro cuál es la localización de la superficie  $C_n$  donde debemos evaluar este funcional. Para resolver este problema, ahora haremos uso de la periodicidad  $2\pi$  de la coordenada  $\tau$  en la geometría

de la orbidad  $\hat{B}_n$ , y escribiremos la métrica como una expansión perturbativa regularizada alrededor de la  $\rho = 0$  por una función que suaviza la singularidad cónica.

$$ds^2 = e^{2A}[dzd\bar{z} + e^{2A}T(\bar{z}dz - zd\bar{z})^2] + (g_{ij} + 2K_{aij}x^a + Q_{abij}x^ax^b)dy^i dy^j + 2ie^{2A}(U_i + V_{ai}x^a)(\bar{z}dz - zd\bar{z})dy^i + \dots, \quad (3.41)$$

donde la función reguladora se define con el valor particular siguiente:

$$A = -\frac{\epsilon}{2} \ln(\rho^2 + a^2) \quad (3.42)$$

Esta parecería ser una elección completamente arbitraria que escogemos para simplificar los cálculos, pero como veremos más adelante, el resultado final no depende del esquema de regularización como es de esperarse. La deducción de esta fórmula se explica más detalladamente en el Apéndice, y puede escribirse en la forma más simple:

$$ds^2 = \rho^{-2\epsilon}(d\rho^2 + \rho^2 d\tau^2) + (g_{ij} + 2K_{aij}x^a)dy^i dy^j + \dots \quad (3.43)$$

Con esta expansión podemos evaluar los términos que aparecen en la acción, y extraer aquellos que dependan linealmente en  $\epsilon$ , que son los únicos que no se anulan después de derivar y evaluar en  $\epsilon = 0$ . Por otro lado, podemos localizar la superficie de codimensión dos notando que al sustituir la expansión perturbativa (3.41) en las ecuaciones de movimiento, aparecen términos que contienen divergencias en las coordenadas complejas  $z$  y  $\bar{z}$ . Estos términos deben anularse, debido a que podemos suponer que el tensor de energía-momento para los campos no diverge en ningún punto. Estas constricciones determinan una ecuación que nos permite encontrar cuál es la superficie  $C_n$  sobre la cual debemos evaluar el funcional de HEE. Podemos también listar las componentes del tensor de Riemann que tienen una contribución a orden lineal en  $\epsilon$  y que aparecen en la expansión de escalar de curvatura. Esto corresponde a las componentes  $R_{z\bar{z}z\bar{z}}$ ,  $R_{zizj}$ ,  $R_{\bar{z}i\bar{z}j}$  a orden cuadrático en  $z$  y  $\bar{z}$ :

$$R_{z\bar{z}z\bar{z}} \sim -\epsilon\pi e^{2A}\delta^{(2)}(x^1, x^2), \quad (3.44)$$

$$R_{zizj} \sim -\frac{\epsilon}{2z}K_{zij}, \quad (3.45)$$

$$R_{\bar{z}i\bar{z}j} \sim -\frac{\epsilon}{2\bar{z}}K_{\bar{z}ij}. \quad (3.46)$$

Además, con el objetivo de analizar las divergencias en las ecuaciones de movimiento listamos el resto de las componentes que contienen divergencias a orden más bajo en  $z$  o  $\bar{z}$ . Esto corresponde únicamente a las componentes  $z$  y  $\bar{z}$  del símbolo de Christoffel.

$$\Gamma_{zz}^z \sim -\frac{\epsilon}{z} \quad (3.47)$$

$$\Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} \sim -\frac{\epsilon}{\bar{z}} \quad (3.48)$$

El resto de las componentes a orden cuadrático en  $z$  y  $\bar{z}$  se listan en el Apéndice.

### 3.3. Prueba de la fórmula de Ryu-Takayanagi

Armados con la expansión (3.41), podemos proceder a aplicar el método de Lewkowycz-Maldacena a la obtención del término de área a partir del método de términos de frontera

discutido en la sección anterior. Recordemos que la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica toma la forma:

$$I[g, \phi] = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + I_{mat}, \quad (3.49)$$

donde en término  $I_{mat}$  incluye posibles acoplamientos de tipo minimal con campos de materia, denotados conjuntamente como  $\phi$ . Podemos ver que este término, al igual que la contribución de la constante cosmológica no contribuye al funcional de entropía, dado que los únicos términos proporcionales a  $\epsilon$  son los que aparecen en las ecuaciones (3.44)-(3.46), y los acoplamientos de este tipo no contienen al tensor de Riemann y sus contracciones. Por lo tanto, la única contribución que podría aparecer, proviene de los símbolos de Christoffel. Sin embargo, notemos que la potencia proporcional a  $\epsilon$ , en este caso viene acompañado por una divergencia en  $z(\bar{z})$ . Como detallaremos más adelante, al integrar un término de este tipo respecto a la coordenada temporal periódica  $\tau$ , obtenemos cero, ya que podemos escribir  $z = e^{-i\tau} \rho$ , y la integral sobre la exponencial se anula al evaluar en  $\tau = \tau + 2\pi$ .

Por lo tanto, la única contribución a la entropía de entrelazamiento proviene de los términos a orden más bajo (distinto de cero) en  $z$  y  $\bar{z}$  que son proporcionales a  $\epsilon$  en la expansión del escalar de curvatura. Escribamos la acción explícitamente en términos del tensor de Riemann:

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{g} (g^{ab} g^{cd}) R_{abcd} + \dots \quad (3.50)$$

Como el escalar de curvatura contribuye a primer orden en  $z$  y  $\bar{z}$ , el resto de las cantidades que aparecen en este producto deben tomarse al orden más bajo en la expansión perturbativa:

$$g^{z\bar{z}} = 2e^{-2A} + \dots, \quad \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{h} e^{2A} + \dots \quad (3.51)$$

Sustituyendo estas expresiones en la acción, junto con la expansión para la componente  $z\bar{z}z\bar{z}$  del tensor de Riemann, obtenemos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16\pi G_N} \partial_\epsilon \int d^{D-2} y d\tau d\rho \left( \frac{1}{2} \sqrt{h} e^{2A} \right) (2e^{-2A})^2 \left( -\epsilon \pi e^{2A} \delta^{(2)}(x^1, x^2) \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{2\pi}{16\pi G_N} \int d^{D-2} y d\tau d\rho \delta^{(2)}(x^1, x^2) = \frac{1}{4G_N} \int d^{D-2} y \sqrt{h} \\ &= \frac{\text{Área}}{4G_N} \end{aligned} \quad (3.52)$$

La superficie  $C_n$  puede determinarse en principio resolviendo las ecuaciones de movimiento para la geometría del cono regularizado, sin embargo notemos que la expansión en términos de las coordenadas complejas contiene divergencias a orden lineal, que deben anularse para asegurar que la parte que sólo depende de los campos de materia sea no-divergente. En concreto, sabemos que las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N T_{ab} \quad (3.53)$$

Consideremos la componente  $zz$  de estas ecuaciones. De la expansión (3.41), podemos ver que las componentes  $zz$  no contienen términos divergentes, por lo que basta considerar la contribución proveniente del tensor de Ricci:

$$R_{zz} \sim 2K_z \frac{\epsilon}{z} \quad (3.54)$$

Como el lado derecho de las ecuaciones de Einstein debe estar libre de divergencias, la contribución que da lugar a esta divergencia debe anularse:

$$K_z = 0, \quad (3.55)$$

que justo es la ecuación de una superficie de área mínima. La condición que obtenemos si consideramos la componente  $z\bar{z}$  es exactamente la misma. Por lo tanto, podemos concluir esta sección con el enunciado de Ryu-Takayanagi, válido en gravedad de Einstein con campos acoplados minimalmente:

$$S = \frac{\text{Área}\{C_{\min}\}}{4G_N} \quad (3.56)$$

Para resaltar la conexión entre el método de Lewkowycz-Maldacena y la fórmula de Ryu-Takayanagi, notemos que el primero está bien definido para cualquier solución a las ecuaciones de Einstein con una frontera. En cambio la fórmula holográfica de R-T es una conjetura en el contexto de la correspondencia AdS/CFT, donde identificamos la CFT con la frontera de  $AdS$ , y por lo tanto resulta ser un caso particular del método L-M.

### 3.4. Aplicación del método de Lewkowycz-Maldacena a teorías de Gauss-Bonnet y de Lovelock

Como primera aplicación del método de L-M en un caso distinto al de la teoría de Einstein, veamos como obtener la entropía de entrelazamiento holográfica en las teorías de Lovelock. Estas teorías resultan ser un caso particular de un conjunto de teorías donde la Lagrangiana depende de manera arbitraria en el tensor de Riemann y sin embargo sus ecuaciones siguen siendo de segundo orden en derivadas. En este caso, se logró demostrar la forma del funcional en [11], mientras que aquí solo esbozaremos la prueba y aplicaremos la fórmula general a las teorías que nos interesan. Podemos escribir la acción de manera general como:

$$S = \int d^D x \sqrt{g} \mathcal{L}(R_{abcd}). \quad (3.57)$$

La tarea principal consiste en deducir todas las posibles combinaciones de tensores de Riemann que dan lugar a términos lineales en  $\epsilon$  una vez que sustituimos la expansión (3.41). Como sabemos, cuándo aparece un sólo tensor de Riemann en la acción tenemos un término proporcional a  $\epsilon$  que proviene de la componente  $R_{z\bar{z}z\bar{z}}$ . Notemos que esta expansión de Taylor se realiza en términos de las coordenadas complejas  $z$  y  $\bar{z}$ , mientras que aquí debemos hacer la expansión en Taylor de la Lagrangiana alrededor de  $\epsilon = 0$ :

$$\mathcal{L}(R_{abcd}) = \mathcal{L}(R_{abcd})|_{\epsilon=0} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{abcd}}|_{\epsilon=0} R_{abcd} + \dots \quad (3.58)$$

El término a orden cero no contribuye al funcional, ya que toda esta expresión al final debe ser derivada respecto a  $\epsilon$  (por la fórmula (3.34)). Con esto en mente, nos quedamos solamente con el segundo término en la expansión, que incluye sólo a un tensor de Riemann. Por lo tanto, la contribución en este caso proviene de:

$$R_{z\bar{z}z\bar{z}} \sim -\frac{1}{2} e^{2A} \nabla^2 A = -\pi \epsilon e^{2A} \delta^{(2)}(x^1, x^2). \quad (3.59)$$

Esto implica que el único término en la acción que contribuye a este orden es:

$$I^{(1)} = -4 \int d^D x \left( \frac{1}{2} \sqrt{h} e^{2A} \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} \pi \epsilon e^{2A} \delta^{(2)}(x^1, x^2). \quad (3.60)$$

Integramos respecto a las coordenadas transversales, con ayuda de la delta de Dirac:

$$I^{(1)} = -2\pi\epsilon \int d^{D-2}y\sqrt{h} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} \quad (3.61)$$

Ahora que tenemos una expresión para el único término proporcional a  $\epsilon$  en la acción  $I^{(1)}$ , podemos aplicar la fórmula (3.70) para obtener el funcional de entropía de entrelazamiento:

$$S_{EE} = -\partial_\epsilon I^{(1)} \Big|_{\epsilon=0} = 2\pi \int d^{D-2}y\sqrt{h} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \quad (3.62)$$

Comparando esta fórmula con (1.33), vemos que este término corresponde a la entropía de Wald. Para el tipo de teorías que estamos considerando, existe además otra posible contribución a orden lineal en  $\epsilon$  cuando consideramos el producto de dos tensores de Riemann, el primero de ellos contribuyendo en la componente

$$R_{zizj} \sim 2K_{zij}\nabla A, \quad (3.63)$$

y el otro tensor de Riemann en su forma conjugada,  $R_{\bar{z}i\bar{z}j}$ . Podría parecer que este término (así como todos los términos de orden superior al lineal) no contribuye debido a la dependencia cuadrática en  $\epsilon$ . Sin embargo, como demostraremos, al integrar respecto a  $\rho$ , esta dependencia se ve promovida a una potencia lineal de  $\epsilon$  que sí contribuye al funcional. También puede verse que este es el único término posible que se ve promovido después de realizar la integración. Por lo tanto, el último término que nos falta considerar es:

$$I^{(2)} = 4^2 \int d^Dx\sqrt{g} \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial R_{zizj}\partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} (2K_{zij}\nabla_z A)(2K_{\bar{z}ij}\nabla_{\bar{z}} A), \quad (3.64)$$

donde incluimos un factor de simetría de 4 por cada tensor de Riemann. Si separamos la integral respecto a  $\rho$  del resto de la integral, podemos ver que toma la forma

$$\int \rho d\rho (\nabla_z A)(\nabla_{\bar{z}} A) e^{-\beta A}, \quad (3.65)$$

donde hemos agrupado todos los factores  $e^{2A}$  provenientes de la métrica y de los Riemann en el factor  $e^{-\beta A}$ . Si ahora insertamos la forma de  $A$  a partir de la geometría del cono regularizado que estamos utilizando, podemos escribir:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty (\nabla_z A)(\nabla_{\bar{z}} A) e^{\beta A} - (a \rightarrow 0) \\ &= \frac{\epsilon^2}{4} \int_0^\infty \rho^3 d\rho (\rho^2 + a^2)^{\frac{\beta}{2}\epsilon - 2} - (a \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde el segundo término corresponde a la sustracción del término sin regularizar, que llevamos a cabo para obtener un resultado finito, en analogía con el procedimiento de renormalización en teoría de campos. La integral puede resolverse analíticamente, y obtenemos:

$$\frac{\epsilon^2}{4} \left[ (\rho^2 + a^2)^{\frac{\beta}{2}\epsilon} \left( \frac{1}{\beta\epsilon} - \frac{a^2}{(\rho^2 + a^2)(\beta\epsilon - 2)} \right) \Big|_0^\infty - (a \rightarrow 0) \right] \quad (3.67)$$

Como podemos ver, el primer término aquí da cambio la potencia cuadrática de  $\epsilon$  a un factor a una potencia lineal, que sí contribuye a la entropía. Quedándonos sólo con el primer término y haciendo la integración respecto a  $\rho$  obtenemos

$$\int \rho d\rho (\nabla_z A)(\nabla_{\bar{z}} A) e^{-\beta\epsilon} = -\frac{\epsilon}{4\beta}. \quad (3.68)$$

El factor de  $\beta$  depende de la teoría de gravedad, y se obtiene contando las potencias de  $e^A$  que aparecen en  $I^{(2)}$ , las cuáles pueden provenir de el determinante de la métrica, la métrica inversa y los tensores de Riemann. Sabemos que  $\sqrt{g}$  contribuye con un término  $e^{2A}$ , mientras que las dos métricas inversas contribuyen  $e^{-2A}$  cada una. Las contribuciones de los tensores de Riemann se obtienen a partir de la métrica a orden cuadrático en  $\rho$ , y puede demostrarse que por cada  $Q_{zzij}$  y  $Q_{\bar{z}\bar{z}ij}$  debemos asociar un factor de  $e^{-2A}$ , así como un factor  $e^{-A}$  por cada  $V_{ai}$  y  $K_{aij}$ , y ningún factor exponencial al resto de los tensores en la expansión ( $T, U_i, Q_{z\bar{z}ij}$  y  $rikjl$ ). Si definimos que el índice  $\alpha$  corra sobre todos los términos en la expansión de los tensores de Riemann, el término en el integrando se vuelve una suma sobre  $\alpha$ . Sea  $q_\alpha$  el número total de  $Q_{zzij}$  y  $Q_{\bar{z}\bar{z}ij}$  más un medio del total de  $V_{ai}$  y  $K_{aij}$  en el  $\alpha$ -ésimo término. Entonces el producto de todos los  $e^A$  se escribe (considerando tanto el determinante como las métricas inversas) como

$$e^{2A}(e^{-2A})^2 e^{-2(q_\alpha+1)A}, \quad (3.69)$$

de donde obtenemos  $\beta = 2(q_\alpha + 1)$ . Por lo tanto el resultado final para esta contribución a la acción se puede escribir como [11]

$$\begin{aligned} S_{EE}^{(2)} &= -\partial_\epsilon \left( -16\pi\epsilon \int d^d y \sqrt{h} \sum_\alpha \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} \right)_\alpha \frac{K_{zij} K_{\bar{z}kl}}{q_\alpha + 1} \right) \\ &= 16\pi \int d^d y \sqrt{h} \sum_\alpha \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} \right)_\alpha \frac{K_{zij} K_{\bar{z}kl}}{q_\alpha + 1}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Juntando esto con la primera contribución que habíamos obtenido, podemos escribir el funcional completo de entropía de entrelazamiento holográfica para una teoría general dependiente del tensor de Riemann [11]:

$$S_{EE} = 2\pi \int d^{D-2} y \sqrt{h} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} + \sum_\alpha \left( \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} \right)_\alpha \frac{K_{zij} K_{\bar{z}kl}}{q_\alpha + 1} \right\}. \quad (3.71)$$

Notemos que la deducción de este funcional no implica nada acerca de la forma de la superficie de codimensión dos donde debe ser evaluada. En principio, esto se puede obtener resolviendo las ecuaciones de movimiento en la geometría del cono regularizado, cálculo que puede resultar bastante complicado en general. Sin embargo se conjetura que esta superficie debe ser la que *extremiza* el funcional de HEE [11, 10]. Como esto no está demostrado, tendremos que probar esta afirmación para cada caso que estudiemos.

Como primer ejemplo, veamos cómo aplicar la fórmula (3.70) al tipo de teorías cuya Lagrangiana tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{R^2} = \lambda_1 R^2 + \lambda_2 R_{ab} R^{ab} + \lambda_3 R_{abcd} R^{abcd}, \quad (3.72)$$

que incluyen a la teoría de Gauss-Bonnet cuando tomamos los acoplamientos como  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_2/4 = \lambda$ . Al considerar también un término de Einstein-Hilbert debemos agregar un término de área entra  $4G_N$  al funcional de HEE. Evaluando la derivada de la Lagrangiana obtenemos el funcional de entropía de entrelazamiento:

$$S_{EE} = -4\pi \int d^{D-2} y \sqrt{y} \left[ 2\lambda_1 R + \lambda_2 \left( R^a{}_a - \frac{1}{2} K_a K^a \right) + 2\lambda_3 (R^{ab}{}_{ab} - K_{aij} K^{aij}) \right] \quad (3.73)$$

En el caso de gravedad de Gauss-Bonnet esto se reduce al funcional de Jacobson-Myers [26]:

$$S_{EE} = \frac{1}{4G_N} \int d^3 y \sqrt{h} (1 + \lambda R) \quad (3.74)$$

Para determinar la superficie en la cual hay que evaluar este funcional, debemos insertar la expansión (3.41) en las ecuaciones de movimiento (1.32), y extraer los términos divergentes. De las ecuaciones en el Apéndice, pueden obtenerse todos los productos de tensores de Riemann que contienen divergencias. En [24], se obtienen las siguientes divergencias en las componentes de las ecuaciones de movimiento:

Divergencias en la componente  $zz$  ( $\bar{z}\bar{z}$ ):

$$-\frac{\epsilon}{2z}K_z - \frac{\lambda L^2 \epsilon}{2z} [K_z \mathcal{R} - 2K_{zij} \mathcal{R}^{ij} + (-K_z^3 + 3K_z K_z^2 - 2K_z^3)]. \quad (3.75)$$

Divergencias en la componente  $zi$  ( $\bar{z}i$ ):

$$\begin{aligned} & -\frac{\lambda L^2 \epsilon}{2z} [2K_z \nabla_j (K_{zi}^j) - 2K_z \nabla_i (K_z) + 2K_{zi}^j \nabla_j (K_z) \\ & - 2K_{ij} \nabla_k (K_z^{kj}) + 2K_{kj} \nabla_i (K_z^{kj}) - 2K_{zjk} \nabla^j (K - zt^k)]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Divergencias en la componente  $ij$ :

$$\begin{aligned} & 2\lambda L^2 \left[ \frac{\epsilon}{z} (K_{zij} K_z^{(2)} - 2K_{zik} K_z^{kl} K_{zij} + K_{zil} K_{zj}^l K_z - K_z K_z^{(2)} h_{ij} + K_z^{(3)} h_{ij}) \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon^2}{z^2} (K_z^{(2)} h_{ij} - 2K_z K_{zij} - K_z^{(2)} h_{ij} + 2K_{zik} K_{zj}^k) \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

En estas expresiones hemos abreviado  $K^{(2)} = K_a^b K_b^a$  y  $K^{(3)} = K_a^c K_c^b K_b^a$ . En principio las componentes  $ij$  y  $iw$  contienen divergencias, a diferencia de gravedad de Einstein. Sin embargo, si suponemos que  $\mathcal{O}(K) \sim \alpha z/\epsilon$  con  $\alpha \ll 1$ , estas componentes tienden a cero. Además, tenemos que  $\mathcal{O}(K^3) \ll \mathcal{O}(K)$ , de manera que los términos  $K^{(3)}$  pueden ignorarse. Después de todas estas suposiciones obtenemos [24]:

$$K_z + \lambda L^2 [K_z \mathcal{R} - 2\mathcal{R}^{ij} K_{zij}] = 0 \quad (3.78)$$

Como puede comprobarse descomponiendo la métrica inducida en coordenadas tangenciales y normales a la superficie, esta es justamente la ecuación que satisface una superficie que minimiza el funcional de Jacobson-Myers, por lo tanto la HEE se obtiene evaluando este funcional en la superficie que lo minimiza. Esta fórmula es análoga a la de Ryu-Takayanagi para el caso de gravedad de Gauss-Bonnet.

En el caso de la teoría de Lovelock, igualmente podemos aplicar la fórmula general (3.70) para obtener el funcional. En este caso, la situación es más complicada debido a que tenemos términos a orden arbitrario que contienen productos de un número arbitrario de tensores de Riemann. En [11], se demuestra que las derivadas que aparecen en este caso pueden obtenerse a partir de la Lagrangiana de la acción (B.1), que a orden  $k$  denotamos como  $\mathcal{L}_{2k}$ , como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{2k}(R)}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} = -\frac{k}{2^{k-2}} \delta a_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_{k-1} \nu_{k-1} \bar{z} \bar{z}}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{k-1} \beta_{k-1} z \bar{z}} R_{\alpha_1 \beta_1}^{\mu_1 \nu_1} \dots R_{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}}^{\mu_{k-1} \nu_{k-1}} (g^{z\bar{z}})^2, \quad (3.79)$$

mientras que el producto de la segunda derivada de  $\mathcal{L}_{2k}$  por los dos tensores de curvatura extrínseca que aparecen en (3.70) se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{2k}(R)}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} 8K_{zij} K_{\bar{z}kl} = \frac{8k}{2^k} (k-1) \delta_{j_1 l_1 \dots j_{k-1} l_{k-1}}^{i_1 k_1 \dots i_{k-1} k_{k-1}} R_{i_1 k_1}^{\mu_1 \nu_1} \dots R_{i_{k-2} k_{k-2}}^{j_{k-2} l_{k-2}} K_{z i_{k-1}}^{j_{k-1}} K_{\bar{z} k_{k-1}}^{l_{k-1}}. \quad (3.80)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.70), y simplificando la expresión resultante como se indica en [11], obtenemos:

$$\begin{aligned} S_{EE} &= -4\pi k \int d^{D-2} y \sqrt{h} \mathcal{L}_{2k-2}(r) \\ &= -2\pi \int d^{D-2} y \sqrt{h} \frac{k}{2^{k-2}} \delta_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_{k-1} \nu_{k-1}}^{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_{k-1} \beta_{k-1}} r_{\alpha_1 \beta_1}^{\mu_1 \nu_1} \dots r_{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}}^{\mu_{k-1} \nu_{k-1}} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ahora podemos aplicar el método discutido la Sección 3.3 para gravedad de Einstein, con la finalidad de obtener la localización de la superficie de codimensión dos. Sabemos que las ecuaciones de movimiento en el caso de gravedad de Lovelock toman la forma (1.32), y podemos definir la componente  $ab$  del lado izquierdo de estas ecuaciones de movimiento como  $E_{ab}$ . Consideremos únicamente la componente  $z\bar{z}$  de esta cantidad, que podemos escribir usando las ecuaciones de movimiento de Lovelock como:

$$\begin{aligned} E_{z\bar{z}} &= \frac{(2k)^2}{2^{k+1}} \delta_{z\bar{z}\sigma_1 \nu_2 \sigma_2 \dots \nu_k \sigma_k}^{\bar{z}\sigma_1 \nu_2 \sigma_2 \dots \nu_k \sigma_k} R_{z\rho_1}^{\bar{z}\sigma_1} R_{\mu_2 \rho_2}^{\nu_2 \sigma_2} \dots R_{\mu_k \rho_k}^{\nu_k \sigma_k} + \dots \\ &= -\frac{k^2}{2^{k-2}} \frac{\epsilon}{z} K_{zi}^j \delta_{jj_1 l_1 \dots j_{k-1} l_{k-1}}^{11_1 k_1 \dots i_{k-1} k_{k-1}} R_{i_1 k_1}^{j_1 l_1} \dots R_{i_{k-1} k_{k-1}}^{j_{k-1} l_{k-1}} + \dots, \end{aligned} \quad (3.82)$$

donde hemos usado en el paso del segundo renglón la expansión familiar para el tensor de Riemann,  $R_{zizj} = \epsilon K_{zij}/z + \dots$ , y donde los puntos suspensivos denotan términos que son menos divergentes cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Los índices contraídos en esta expresión son todos distintos de  $z$  o  $\bar{z}$ .

$$R_{ik}^{jl} = r_{ik}^{jl} + e^{-2A} g^{ab} (K_{ai}^l K_{bj}^k - K_{ai}^j K_{bk}^l) \quad (3.83)$$

y por lo tanto el término más divergente resulta ser:

$$E_{z\bar{z}} = -\frac{k^2}{2^{k-2}} \frac{\epsilon}{z} \left( K_{zi}^j \delta_{jj_1 l_1 \dots j_{k-1} l_{k-1}}^{11_1 k_1 \dots i_{k-1} k_{k-1}} r_{i_1 k_1}^{j_1 l_1} \dots r_{i_{k-1} k_{k-1}}^{j_{k-1} l_{k-1}} \right) + \dots \quad (3.84)$$

Cuando consideramos a  $\epsilon$  como una cantidad pequeña pero finita, debemos quedarnos con el término entre paréntesis, y después de exigir que esta divergencia se anule obtenemos la ecuación para la superficie:

$$K_{zi}^j \delta_{jj_1 l_1 \dots j_{k-1} l_{k-1}}^{11_1 k_1 \dots i_{k-1} k_{k-1}} r_{i_1 k_1}^{j_1 l_1} \dots r_{i_{k-1} k_{k-1}}^{j_{k-1} l_{k-1}} = 0. \quad (3.85)$$

Por otro lado, podemos deducir cual es la ecuación que satisface una superficie que minimice el funcional  $S_{EE}$ . La ecuación de movimiento para las coordenadas de encaje se obtuvo en [11], y se pueden escribir como:

$$\Pi_a = 2K_{aij} \frac{S_{EE}}{\delta g_{ij}}. \quad (3.86)$$

Como puede verse de (3.81), el funcional  $S_{EE}$  corresponde a la acción para una teoría de Lovelock a orden  $2k - 2$ , con el tensor  $r_{ijkl}$  en lugar del tensor de Riemann, por lo que la ecuación de movimiento correspondiente se obtiene de la derivada funcional que aquí aparece contraída con  $K_{aij}$ . Ahora notemos que la parte de la ecuación (3.85) que está contraída con  $K_{zi}^j$ , es exactamente la ecuación de movimiento para una teoría de Lovelock a orden  $2k - 2$ , por lo cual concluimos que la ecuación que satisface la superficie de codimensión 2 que aparece en el funcional de HEE, es la misma que la de la superficie que minimiza el funcional  $S_{EE}$ , como habíamos conjeturado en un inicio.

### 3.5. Generalización a Acoplamiento no-minimal

Hasta el momento hemos estudiado la forma de obtener el funcional de HEE únicamente en teorías de gravedad pura, o que a lo sumo incluyen un acoplamiento de tipo mínimo con campos de materia. En este tipo de acoplamiento no aparece explícitamente el tensor de Riemann o sus contracciones, y por lo tanto no contribuye al funcional de entropía de entrelazamiento holográfica. El siguiente paso en complejidad es entender cómo aplicar el método de Lewkowycz-Maldacena a un acoplamiento entre un campo escalar y la métrica, de forma que haya una contribución no trivial en la HEE debido a la presencia explícita del escalar de curvatura en el término de acoplamiento. En concreto, consideraremos la acción de gravedad de Einstein-Hilbert en cinco dimensiones con el acoplamiento conforme de (2.4), que puede escribirse en la forma más familiar:

$$I_{\phi^2} = \int d^5x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{16\pi G} R + \lambda \phi^2 R \right) + I_{mat}, \quad (3.87)$$

donde  $I_{mat}$  incluye el resto de los términos que aparecen en la acción y que son independientes del tensor de Riemann:

$$I_{mat} = \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \left( -\frac{\Lambda}{8\pi G_N} - \frac{16\lambda}{3} \phi \square \phi + \phi^{10/3} + \dots \right). \quad (3.88)$$

La elección de  $D$  está motivada por la correspondencia holográfica, donde una teoría de gravedad 5 dimensional se mapea a una teoría cuántica 4-dimensional. Notemos que esta acción se obtiene a partir de 2.4 eligiendo el peso conforme como  $s = 1 - D/2$ ,  $D = 5$  y los acoplamientos de la siguiente forma:

$$a_0 = -\frac{1}{8\pi G}, \quad a_1 = \frac{1}{16\pi G_N}, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = \lambda. \quad (3.89)$$

La restricción sobre el espacio de parámetros  $b_2 = b_1^2/b_0$  parecería impedir que despreciemos el acoplamiento con el término a orden cuadrático en el tensor de materia conforme, sin embargo, cabe mencionar que estas restricciones aparecen bajo la condición de que la solución tipo agujero negro que describimos en la Sección 2.2 sea analítica. Por lo tanto aún con  $b_2 = 0$ , esta teoría está bien definida. Las ecuaciones de movimiento para la métrica, que resultan de variar la acción se pueden obtener a partir de las ecuaciones del Apéndice, y se escriben como

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{ab} = 8\pi G_N \left( g_{ab} \phi^{10/3} - \lambda (S_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} S) \right). \quad (3.90)$$

Expandiendo los tensores  $S_{ab}$  y  $S$  en sus componentes, y separando la parte dependiente del Riemann, podemos definir un tensor de energía-momento efectivo que incluye sólo términos que dependen del campo escalar y de la métrica,

$$T_{ab}^{(eff)} \equiv \left( b_0 g_{ab} \phi^{10/3} - \lambda (-2\phi \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{10}{3} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{2}{3} g_{ab} \nabla_c \phi \nabla^c \phi + 2g_{ab} \phi \square \phi) \right), \quad (3.91)$$

con el cual podemos escribir las ecuaciones de movimiento de gravedad en la forma compacta:

$$G_{ab} (1 + 8\pi G_N \lambda \phi^2) + \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}^{(eff)}. \quad (3.92)$$

Análogamente podemos escribir las ecuaciones de movimiento para el campo escalar, que resultan:

$$\frac{10}{3} \phi^{7/3} + \lambda \left( \phi R - \frac{16}{3} \square \phi \right) = 0. \quad (3.93)$$

Ahora que tenemos bien definida la teoría, procedemos aplicando el método L-M para obtener la contribución del segundo término de (3.87), de la misma manera que hicimos en el caso de gravedad de Einstein. La única diferencia aquí es que el campo escalar aparece explícitamente en el término de acoplamiento, de modo que necesitamos una expresión para la expansión del campo escalar en la métrica del cono regularizado alrededor de  $\rho = 0$ . Sabemos que el método de condiciones de frontera nos permite obtener una expresión para la métrica con la singularidad cónica regularizada, notando que en la frontera UV de  $\hat{B}_n$  es siempre  $M_1$ . Análogamente, el campo escalar cerca de la singularidad  $\rho = 0$  admite una descomposición de la forma

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi_a^{(1)}x^a + \phi_{ab}^{(2)}x^ax^b \dots, \quad (3.94)$$

donde las funciones  $\phi_0, \phi_1, \dots$ , son finitas cuando  $\rho \rightarrow 0$ , y pueden determinarse a partir de las condiciones de frontera. Al igual que para la expansión de la métrica, la condición de que la solución sea regular alrededor de la singularidad, junto con la simetría  $\mathbb{Z}_n$  indica que esta debe ser una expansión en  $\rho^{2-2\epsilon}$ ,  $z$  y  $\bar{z}$ :

$$\phi = \phi_z z + \phi_{\bar{z}} \bar{z} + \phi_{zz} z^2 + \phi_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^2 + \phi_{z\bar{z}} (z\bar{z})^{1-\epsilon}. \quad (3.95)$$

Esta expansión, junto con la de la métrica (3.41), nos permiten encontrar las contribuciones a orden más bajo en el funcional de HEE. Este funcional se obtiene a partir de los términos proporcionales a  $\epsilon$  que aparecen en la expansión a orden más bajo en  $z$  y  $\bar{z}$ .

$$I_{\phi^2} = \lambda \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^2 R = \lambda \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^2 g^{ab} g^{cd} R_{abcd} \quad (3.96)$$

Analícemos cuáles son los posibles lugares donde puede aparecer cada término proporcional a  $\epsilon$ . Primero consideremos la posible contribución con el tensor de Riemann a orden cero en  $(z, \bar{z})$ . Esto quiere decir que la dependencia en  $\epsilon$  debe venir de la expansión a orden más bajo de la cantidad  $\sqrt{-g}\phi^2$ . A primer orden en  $z$  y  $\bar{z}$ , el tensor de Riemann contiene tres términos proporcionales a  $\epsilon$ , (3.44-3.46), de los cuales sólo (3.44) es distinto de cero después de realizar la integral en  $\tau$  como se discutió en la Sección 3.3. El resto de los factores dependientes de  $\epsilon$  corresponden al determinante de la métrica y a la métrica inversa, que pueden escribirse como:

$$g^{z\bar{z}} = 2e^{-2A} + \dots, \quad \sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{h}e^{2A} + \dots \quad (3.97)$$

Como estamos tomando el tensor de Riemann a primer orden en la expansión, estos términos sólo contribuyen a orden más bajo, y por lo tanto podemos obtener el funcional de HEE a partir del término:

$$R_{z\bar{z}z\bar{z}} \sim -\pi\epsilon e^{2A} \delta^{(2)}(x^1, x^2) \quad (3.98)$$

Para obtener la contribución de este término, debemos tomar a  $\sqrt{-g}\phi^2$  a orden cero:

$$\begin{aligned} S_{\lambda\phi^2} &= \lambda \int d^2x d^3y \left( \frac{1}{2}e^{2A}\sqrt{h} \right) (\phi^2)^{(0)} 2(2e^{-2A})^2 (\pi e^{2A} \delta^{(2)}(x_1, x_2)) \\ &= \lambda \int d^2x d^3y \sqrt{h} (4\pi) \phi^2(x, y)^{(0)} \delta^{(2)}(x) \\ &= 4\pi\lambda \int d^3y \sqrt{h} \phi^2(0, y). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Notemos que  $\phi(0, y)$  corresponde al término de orden 0 en  $\rho$ , que es la solución para el campo escalar. Ahora podemos añadir el funcional de Ryu-Takayanagi, correspondiente

a la parte de Einstein-Hilbert de la acción, para obtener el funcional de HEE completo para esta teoría:

$$\begin{aligned} S_{EE} &= S_{RT} + S_{\lambda\phi^2} = \int d^3y \sqrt{h} \left( \frac{1}{4G_N} + 4\pi\lambda\phi^2 \right) \\ &= (1 + 16\pi G_N \lambda\phi^2) \frac{Area}{4G_N}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Falta encontrar la superficie en la que evaluar este funcional. Al igual que en los casos anteriores, usaremos las ecuaciones de movimiento (3.93) para demostrar que la superficie de codimensión dos en la que debemos evaluar este funcional corresponde a una superficie que minimiza  $S_{EE}$ . Analicemos estas ecuaciones componente por componente. En la parte de materia,  $T_{ab}^{eff}$  contiene cinco términos, de los cuales tres contienen sólo primeras derivadas covariantes actuando sobre el campo escalar, y por lo tanto son simples derivadas parciales que no contienen divergencias. La métrica, por sí sola no contiene términos divergentes, ni tampoco la expansión para el campo escalar (3.95). Por lo tanto solo quedan dos posibles términos con divergencias en  $T_{ab}^{eff}$ , que contienen dos segundas derivadas covariantes. Esta segunda derivada da lugar a un término proporcional a  $z^{-1}$  ( $\bar{z}^{-1}$ ) cuando tomamos la componente  $zz$  ( $\bar{z}\bar{z}$ ), debido a la presencia de las componentes de los símbolos de Christoffel:

$$T_{ab}^{eff} \sim 2(-\phi\nabla_a\nabla_b\phi + g_{ab}\phi\Box\phi) \quad (3.101)$$

La componente  $zz$  da:

$$\begin{aligned} T_{zz}^{eff} &\sim 2(-\phi\nabla_z\nabla_z\phi + g_{zz}\phi(g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi)) \sim 2\left(\phi\frac{\epsilon}{z}\partial_z\phi - g_{zz}(g^{zz}\frac{\epsilon}{z}\partial_z\phi + g^{\bar{z}\bar{z}}\frac{\epsilon}{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\phi)\right) \\ &= 2\phi\frac{\epsilon}{z}\partial_z\phi - 2\phi\frac{\epsilon}{z}\partial_z\phi + 2g_{zz}g^{\bar{z}\bar{z}}\frac{\epsilon}{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\phi = 2g_{zz}g^{\bar{z}\bar{z}}\frac{\epsilon}{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\phi, \end{aligned} \quad (3.102)$$

sin embargo, este último término contiene un factor  $g_{zz}g^{\bar{z}\bar{z}}$ , a orden dos en la expansión dada anteriormente, y estas componentes de la métrica contienen factores de  $z$  y  $\bar{z}$  (como puede verse de (3.41)), que hacen que esta divergencia sea subdominante. Lo mismo sucede si consideramos la componente  $\bar{z}\bar{z}$  de la ecuación de movimiento. Por lo tanto  $T_{ab}^{eff}$  no contiene ninguna divergencia dominante que debamos de fijar a cero, y solo resta el lado izquierdo de las ecuaciones de movimiento, que se escribe como:

$$\begin{aligned} G_{ab}(1 + \lambda\phi^2) + \Lambda g_{ab} &= (R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R)(1 + \lambda\phi^2) + \Lambda g_{ab} \\ &= (R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}g^{cd}R_{cd})(1 + \lambda\phi^2) + \Lambda g_{ab}, \end{aligned} \quad (3.103)$$

donde por conveniencia hemos absorbido la constante numérica  $8\pi G_N$  en la definición de  $\lambda$ . Sabemos que la expansión de la métrica y del campo escalar no contienen términos con divergencias. Por lo tanto la única contribución debe provenir de la expansión del tensor de Ricci, donde sabemos de las ecuaciones (3.44-3.46) que las únicas divergencias están en las componentes  $zz$  y  $\bar{z}\bar{z}$ . Estas componentes contribuyen al orden más bajo en la expansión perturbativa, mientras que las componentes  $zz$  y  $\bar{z}\bar{z}$  de la métrica son cero a este orden. Esto significa que el segundo término en el primer paréntesis sólo contribuye con una divergencia si consideramos la expansión a un orden más alto, lo que significa que no contribuye a la ecuación de la superficie de codimensión dos. Así, la única posible divergencia proviene del término:

$$R_{zz}(1 + \lambda\phi^2) \sim 2K_{zij}g^{ij}\frac{\epsilon}{z}(1 + \lambda\phi^2) = 0. \quad (3.104)$$

Fijando este término igual a cero para que no haya divergencias en las ecuaciones de movimiento obtenemos la ecuación:

$$K_{zij}g^{ij} = K_z = 0. \quad (3.105)$$

Esta es la misma ecuación que satisface la una superficie de área mínima en gravedad de Einstein, como obtuvimos en la Sección 3.3. Por otro lado, la ecuación de movimiento para el campo escalar, (3.93) sólo contiene una potencial divergencia, que proviene del término  $\square\phi \sim g^{zz}\epsilon_z\partial_z\phi + g^{\bar{z}\bar{z}}\epsilon_{\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\phi$ . Las derivadas respecto a las coordenadas complejas son cero a orden más bajo, por lo que este término se anula trivialmente. Podemos intentar empatar la condición que hemos obtenido con la condición de extremalidad en el funcional que obtuvimos. En este caso, tenemos:

$$\frac{\delta S_{EE}}{\delta X^\mu} = \int d^3x \left( \frac{\delta L}{\delta h_{ij}} \frac{\delta h_{ij}}{\delta X^\mu} \delta X^\mu + \frac{\delta L}{\delta \phi} \frac{\delta \phi}{\delta X^\mu} \delta X^\mu \right). \quad (3.106)$$

Como en gravedad de Einstein, pedir que el primero de estos dos términos se anule, es equivalente a la condición de que la traza de la curvatura extrínseca sea cero, que empata con la condición (3.105). Para que la superficie sea mínima, se debe cumplir además que:

$$n^\mu 2\phi \nabla_\mu \phi \sim \phi(\partial_z \phi + \partial_{\bar{z}} \phi) = 0 \quad (3.107)$$

Por lo tanto, la superficie de codimensión dos que satisface (3.105) cuando la teoría de gravedad es, también extremiza el funcional de HEE que obtuvimos. Notemos que este análisis es completamente independiente de la potencia de  $\phi$  que aparece en la acción (3.87), y por lo tanto, es inmediata la generalización a cualquier término en la Lagrangiana de la forma  $\phi^n R$ . En la siguiente sección, evaluaremos explícitamente este funcional en el caso en el que tomamos el peso conforme de la teoría (2.4) como  $s = -\frac{1}{5}$ , dando lugar a un término de este tipo con  $n = 15$ . Sin embargo, la dependencia en las coordenadas  $y$  que resultan de considerar una solución particular para el campo escalar resulta ser independiente de la elección del peso conforme.



# Capítulo 4

## Funcional de Entropía Gravitacional Generalizada

EN esta sección aplicaremos el método de Lewkowycz Maldacena para el cálculo de la entropía gravitacional generalizada en la teoría expuesta en el Capítulo 2, enfocándonos en principio en la acción en 5 dimensiones.

El procedimiento que seguiremos será primero evaluar la acción en términos de las expansiones (3.41) y (C.18). Después integramos a lo largo de las coordenadas normales a la superficie de codimensión dos, y eventualmente renormalizamos haciendo tender el parámetro de corte  $a \rightarrow 0$ . Los términos que contribuyen al funcional serán los términos proporcionales a  $\epsilon$  (después de hacer la integración), que son únicos los que sobreviven a la derivación  $\partial_\epsilon|_{\epsilon=0}$ . Para las coordenadas tangenciales usaremos la nomenclatura  $y^i$  con  $i = 0, \dots, D - 2$  y para las normales, cualquiera de los conjuntos  $(\rho, \tau)$ ,  $(x^1, x^2)$ , o  $(z, \bar{z})$ .

### 4.1. Contribuciones de la acción al funcional de entropía

En esta sección calcularemos las contribuciones de la acción a la entropía de entrelazamiento mediante el método de conos aplastados desarrollado en la sección anterior. Partimos de la acción gravitacional para la teoría de gravedad de Lovelock acoplada con materia conforme en 5 dimensiones espacio-temporales, que obtenemos de evaluar la fórmula (2.4) en  $D = 5$  y  $s = -1/5$ . Esta elección de  $s$  nos permitirá usar más adelante la solución de agujero negro de la Sección 2.2.

$$\begin{aligned}
 I[g, \phi] = \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} & \left( \frac{-\Lambda}{8\pi G} + \frac{1}{16\pi G} R + \beta_0 \phi^{25} + \beta_1 \phi^{13} (\phi^2 R + 20\phi \square \phi - 260 \nabla_c \phi \nabla^c \phi) + \right. \\
 & \beta_2 \phi (\phi^4 (R_{cdab} R^{cdab} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2) + 80\phi^2 R_{ab} \nabla^a \nabla^b \phi - 480 R_{ab} \phi^2 \nabla^a \phi \nabla^b \phi + \\
 & \phi^2 R (-40\phi \square \phi - 60 \nabla_a \phi \nabla^a \phi) + 35400 (\nabla_c \phi \nabla^c \phi)^2 + 25600 (\phi \square \phi) (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) \\
 & \left. - 1740 (\phi \square \phi)^2 + 7200 (\phi \nabla_a \phi \nabla_b \phi \nabla^a \nabla^b \phi) + 300 \phi^2 (\nabla_a \nabla_b \phi \nabla^a \nabla^b \phi) \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Resultará conveniente separar en la forma

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = I_{EH} + I_R + I_H + I_{H'} + I_{GB} + I_M, \tag{4.2}$$

donde

$$I_{EH} = \int_{\mathcal{M}} d^5 x \sqrt{-g} \left( \frac{-\Lambda}{8\pi G} + \frac{1}{16\pi G} R \right), \tag{4.3}$$

$$I_R = \beta_1 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^{15} R, \quad (4.4)$$

$$I_H = -480\beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} (R_{ab} + \frac{1}{8}g_{ab}R) \phi^3 \nabla^a \phi \nabla^b \phi, \quad (4.5)$$

$$I_{H'} = 80\beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} (R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R) \phi^4 \nabla^a \nabla^b \phi, \quad (4.6)$$

$$I_{GB} = \beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^5 (R_{cdab}R^{cdab} - 4R_{ab}R^{ab} + R^2), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} I_M = \int_{\mathcal{M}} d^Dx \sqrt{-g} & \left( \beta_0 \phi^{25} + \beta_1 \phi^{13} (20\phi \square \phi - 260\nabla_c \phi \nabla^c \phi) \right. \\ & + \beta_2 \phi (35400(\nabla_c \phi \nabla^c \phi)^2 + 25600(\phi \square \phi)(\nabla_c \phi \nabla^c \phi) - 1740(\phi \square \phi)^2 \\ & \left. + 7200(\phi \nabla_a \phi \nabla_b \phi \nabla^a \nabla^b \phi) + 300\phi^2(\nabla_a \nabla_b \phi \nabla^a \nabla^b \phi) \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Como veremos más adelante, el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica recibirá contribuciones de cada uno de estos términos, de manera que podemos separarlo como:

$$S_{EH} = S_{EH} + S_R + S_H + S_{H'} + S_{GB} + S_M. \quad (4.9)$$

Calcularemos término por término estas contribuciones aislando los términos a primer orden en  $\epsilon$  en la expansión perturbativa. Notemos que todos los términos en la Lagrangiana que son independientes del tensor de Riemann y sus contracciones, han sido agrupados en el término  $S_M$ . Es fácil ver que estos términos no contribuyen al funcional, ya que la métrica y el campo escalar no contienen términos proporcionales a  $\epsilon$  al orden más bajo, y al ser integrados, estos términos sólo contribuyen con potencias subdominantes de  $\epsilon$ .

El término de Einstein-Hilbert  $S_{EH}$  contribuye a la entropía de entrelazamiento con el término usual de área:

$$S_{EH} = \frac{A}{4G_N} = \frac{1}{4G_N} \int d^3y \sqrt{h}. \quad (4.10)$$

El análisis del término  $S_R$  es totalmente análogo al caso del acoplamiento  $\phi^2 R$  estudiado en la Sección 3.87. La diferencia aquí es únicamente la potencia del campo  $\phi$ . Como podemos ver de la expansión de la ecuación (C.18) con  $n = 15$  (y en general para  $n$  arbitrario), se cumple que la dependencia en  $\epsilon$  aparece de tal forma que al integrar las contribuciones a segundo orden en  $z(\bar{z})$ , no hay términos lineales en  $\epsilon$ . La única contribución proviene entonces del escalar de curvatura al mismo orden que en el caso  $n = 2$ , multiplicado por la contribución a orden cero en el campo. De esta manera podemos escribir su contribución al funcional como:

$$S_R = \frac{\beta_1}{4G_N} \int d^3y (\sqrt{h} \phi^{15}). \quad (4.11)$$

Así, ahora resta calcular las contribuciones de los términos  $I_H$ ,  $I_{H'}$  y  $I_{GB}$ . Para ello nos apoyaremos en el trabajo de [20].

#### 4.1.1. Término con primeras derivadas del campo

El acoplamiento que aparece en  $I_H$  es similar al que aparece en la teoría de gravedad de Horndeski [21], que es de la forma  $G_{ab} \nabla^a \phi \nabla^b \phi$ . La diferencia principal aquí, es que el tensor de Einstein es sustituido el tensor  $G'_{ab} \equiv R_{ab} + \frac{1}{8}g_{ab}R$ , además de un factor de  $\phi^3$  multiplicando a toda esta expresión. Como demostraremos más adelante, debido a que esta

potencia del campo escalar no contiene términos dominantes proporcionales a  $\epsilon$ , el análisis en ambos casos es completamente análogo. Consideremos la acción (4.5). Este término a su vez contribuye con un término proporcional al tensor de Ricci y otro proporcional al escalar de curvatura. El tensor de Ricci aparece contraído en sus dos índices, por lo que aparecen términos con todas las combinaciones de índices posibles. Estudiando con cuidado la estructura de los tensores de Riemann y de Ricci (ver ecuaciones (C.9)-(C.15) en el Apéndice), podemos ver que sólo tres de esos términos son proporcionales a  $\epsilon$ :

$$R^{zz} \sim 8e^{-4A} g^{ij} K_{\bar{z}ij} \nabla_{\bar{z}} A, \quad (4.12)$$

$$R^{\bar{z}\bar{z}} \sim 8e^{-4A} g^{ij} K_{zij} \nabla_z A, \quad (4.13)$$

$$R^{z\bar{z}} \sim 2e^{-4A} \nabla^2 A. \quad (4.14)$$

Como vimos en el caso de gravedad Einstein, a segundo orden en la expansión en coordenadas normales, sólo hay un término a orden  $\epsilon$  en el escalar de curvatura, y puede escribirse como:

$$R \sim 2e^{-2A} \nabla^2 A. \quad (4.15)$$

Sustituyendo estos cuatro términos en la expresión (4.5):

$$\begin{aligned} S_H = \partial_\epsilon I_H |_{\epsilon=0} &= -480\beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^3 (R^{zz} \partial_{\bar{z}} \phi \partial_{\bar{z}} \phi + R^{\bar{z}\bar{z}} \partial_z \phi \partial_z \phi + R^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \phi \partial_z \phi \\ &+ \frac{1}{8} R \nabla_c \phi \nabla^c \phi) = -480\beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^3 (8e^{-4A} (K_{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} A (\partial_{\bar{z}} \phi)^2 + K_z \nabla_z A (\partial_z \phi)^2) \\ &+ 2e^{-4A} \nabla^2 A (\partial_{\bar{z}} \phi \partial_z \phi + \frac{1}{8} e^{2A} \nabla_c \phi \nabla^c \phi)). \end{aligned} \quad (4.16)$$

El siguiente paso será integrar respecto a las coordenadas normales a la superficie de codimensión dos. Recordando la forma de la función reguladora  $A(\rho) = -\frac{\epsilon}{2} \ln(\rho^2 + a^2) = -\frac{\epsilon}{2} \ln(z\bar{z} + a^2)$ , podemos calcular las derivadas que aparecen en (4.12) y (4.13):

$$\nabla_{\bar{z}} A = -\frac{\epsilon}{2} \frac{z}{z\bar{z} + a^2}, \quad \nabla_z A = -\frac{\epsilon}{2} \frac{\bar{z}}{z\bar{z} + a^2}. \quad (4.17)$$

De esta manera, para los primeros dos términos en la acción que son proporcionales a  $K_{\bar{z}}$  y  $K_z$ , podemos sustituir la forma polar  $z = \rho e^{-i\tau}$  y obtener las integrales de la forma:

$$-480\beta_2 \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^\infty d\rho \frac{\rho}{\rho^2 + a^2} e^{i\tau} - (a \rightarrow 0). \quad (4.18)$$

La integral respecto a  $\tau$  es proporcional a  $e^{i\tau}$  evaluada sobre desde 0 hasta  $2\pi$ , por lo que se anula, y por lo tanto toda la integral también se anula. Esto se debe a la sencilla razón de que en la expansión en coordenadas normales hemos impuesto condiciones periódicas sobre la métrica. En general, cualquier término que dependa de esta forma en  $z$  o  $\bar{z}$  será cero por la misma razón. Si consideramos órdenes superiores en la expansión del factor  $\phi^3$  que aparece en esta acción, obtendremos de nuevo una integral que se anula por la periodicidad de  $\tau$ . Esto se debe a que cualquier potencia de  $\phi$  que dependa de  $\epsilon$  contiene sólo potencias pares de  $\rho$ , como podemos ver de (C.18).

Esto nos deja con el último término en (4.16). Como también vimos en el caso de gravedad de Einstein, el término  $\nabla^2 A$  resulta ser proporcional a la delta de Dirac y a  $\epsilon$ . Realizar

la integral sobre  $\rho$  requiere evaluar todo ese término en  $z = \bar{z} = 0$ . Escribiendo  $\sqrt{-g} = \frac{1}{2}e^{2A}\sqrt{h}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} S_H &= -480\beta_2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \left( \frac{1}{2}e^{2A}\sqrt{h} \right) (2e^{-4A})\phi^3 (\partial_z\phi\partial_z\phi + \frac{1}{8}e^{2A}\nabla_c\phi\nabla^c\phi) |_{z=0} \\ &= -480\beta_2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h}\phi^3 (e^{-2A}\partial_z\phi\partial_z\phi |_{z=0} + \frac{1}{8}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi) |_{z=0}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

El primer término aquí se anula porque sólo involucra derivadas respecto a las coordenadas normales. El segundo término incluye una contracción de derivadas ( $\nabla_c\phi\nabla^c\phi$ ) que se descompone en una parte que al ser evaluada a orden cero en  $z$  se anula, y otra parte que depende sólo de las coordenadas tangenciales [20]:

$$\phi^3\nabla_c\phi\nabla^c\phi \sim \phi^3 h^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi. \quad (4.20)$$

La integración de la delta de Dirac evalúa al campo escalar en  $\rho = 0$ , de forma que al final obtenemos la siguiente expresión:

$$S_H = -240\pi\beta_2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} h^{ij} \partial_i\phi\partial_j\phi\phi^3. \quad (4.21)$$

#### 4.1.2. Término con segundas derivadas del campo

Calcularemos la contribución (4.6) de manera similar. En este caso, tenemos al tensor  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$  contraído en sus dos índices de la misma forma que en el caso anterior, de forma que aparecen exactamente los mismos términos proporcionales a  $\epsilon$  que en ese caso. Sin embargo notemos aquí una diferencia importante. En el caso anterior, al evaluar las primeras derivadas covariantes del campo no hay contribuciones lineales a  $\epsilon$  provenientes de la métrica porque, al actuar sobre el campo escalar, esto es simplemente una derivada parcial. En este caso, tenemos que tomar dos derivadas covariantes del campo, por lo que en la expansión aparecerá el símbolo de Christoffel,  $\Gamma_z^z$  ( $\Gamma_{\bar{z}}^{\bar{z}}$ ). De la ecuaciones (3.41), notamos que las componentes  $zz$  y  $\bar{z}\bar{z}$  son proporcionales a  $\epsilon$ :

$$\Gamma_{zz}^z \sim -\frac{\epsilon}{z}, \quad \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} \sim -\frac{\epsilon}{\bar{z}} \quad (4.22)$$

Por lo tanto, tenemos en principio una contribución ocasionada por la forma de la derivada covariante,  $\nabla_z\nabla_z\phi \sim \partial_z^2\phi + \Gamma_{zz}^z\partial\phi$  y similarmente para la componente  $\bar{z}$ . Sin embargo, puede verse que  $\epsilon$  viene acompañado del factor  $z^{-1}$  ( $\bar{z}^{-1}$ ), que expresados en su forma polar dan lugar a integrandos de la forma  $\rho e^{\pm i\tau}$ . Por el argumento que nos permitió fijar el término (4.18) igual a cero, sabemos que las integrales que solo dependen en  $\tau$  de esta forma funcional también se anulan. Ahora bien, como en la acción aparece esta derivada covariante multiplicada por el tensor  $G_{ab}$ , la única posible contribución de este término proviene de los productos

$$\begin{aligned} S_H = \partial_\epsilon I_H \Big|_\epsilon &\sim 80\beta_2\partial_\epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\tau d\rho \left( G_{zz}^{(0)}\Gamma_{zz}^z + G_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)}\Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} \right) \Big|_{\epsilon=0} \\ &\sim 80\beta_2\partial_\epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\tau d\rho \left( G_{zz}^{(0)}\left(-\frac{1}{z}\right) + G_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)}\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) \right) \\ &\sim -80\beta_2 \int_0^\infty d\rho \rho^{-1} \left( G_{zz}^{(0)} \int_0^{2\pi} d\tau e^{-i\tau} + G_{\bar{z}\bar{z}}^{(0)} \int_0^{2\pi} d\tau e^{i\tau} \right) \Big|_\epsilon = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por lo tanto, la parte de la derivada covariante que involucra al término de Christoffel no contribuye al funcional, dejándonos únicamente con la la derivada parcial respecto a  $z(\bar{z})$

actuando sobre el campo. Para este caso, podemos atribuirle toda la dependencia lineal en  $\epsilon$  al tensor  $G_{\mu\nu}$ , tal como en el caso anterior toda esta dependencia estaba contenida en el tensor  $R_{ab} + \frac{1}{8}g_{ab}R$ . De aquí en adelante el análisis en ambos casos es el mismo, pero ahora en lugar de la ecuación (4.16), tendremos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} S_H = \partial_\epsilon I_H |_{\epsilon=0} &= 80\beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^4 (R^{zz} \partial_{\bar{z}} \partial_z \phi + R^{\bar{z}\bar{z}} \partial_z \partial_{\bar{z}} \phi + R^{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}} \partial_z \phi \\ &- \frac{1}{2} R \square \phi) = 80\beta_2 \int_{\mathcal{M}} d^5x \sqrt{-g} \phi^4 (8e^{-4A} (K_{\bar{z}} \nabla_{\bar{z}} A \partial_{\bar{z}}^2 \phi + K_z \nabla_z A \partial_z^2 \phi) \\ &+ 2e^{-4A} \nabla^2 A (\partial_{\bar{z}} \partial_z \phi - \frac{1}{2} e^{2A} \square \phi)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

y en lugar de (4.19) tendremos:

$$\begin{aligned} S_{H'} &= 80\beta_2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y (\frac{1}{2} e^{2A} \sqrt{h}) (2e^{-4A}) \phi^4 (\partial_{\bar{z}} \partial_z \phi - \frac{1}{2} e^{2A} \square \phi) |_{z=0} \\ &= 80\beta_2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} \phi^4 (e^{-2A} \partial_{\bar{z}} \partial_z \phi |_{z=0} - \frac{1}{2} (\square \phi) |_{z=0}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Evaluando la cantidad entre paréntesis a orden cero en  $z$ , vemos que el término con  $\partial_{z\bar{z}}\phi$  se anula, mientras que el término que incluye al D'Alembertiano se vuelve:

$$\phi^4 \square \phi \sim \phi^4 (h^{ij} \partial_i \partial_j \phi), \quad (4.26)$$

por lo que finalmente el funcional toma la forma:

$$S_{H'} = -40\beta_2 (4\pi) \int_{\partial\Sigma} d^3y \sqrt{h} \phi^4 h^{ij} \partial_i \partial_j \phi. \quad (4.27)$$

### 4.1.3. Término de Gauss-Bonnet modificado

La última contribución a la entropía de entrelazamiento holográfica que tenemos que calcular proviene del término (4.7) en la acción, que es similar al término de Gauss-Bonnet, salvo que aparece multiplicado por una potencia de  $\phi$ . En la ausencia de este factor, la contribución correspondiente se calculó en [11], cuyo análisis se explicó detalladamente en el Capítulo 3, y sabemos que es una suma de dos términos, uno proporcional al escalar de curvatura construido con la métrica inducida, y otro proporcional a la curvatura extrínseca. A su vez, estos dos términos provienen respectivamente de una contribución lineal en el tensor de Riemann y otra a orden cuadrático en la curvatura. Aquí el problema es similar, salvo que tenemos que evaluar la contribución, si es que existe, del campo escalar.

Del análisis realizado en [11], sabemos que la acción de Gauss-Bonnet contiene dos términos proporcionales a  $\epsilon$ . Veamos como la presencia del campo escalar multiplicando en la acción afecta a cada uno de estos términos. El primero, proviene de la única componente del tensor de Riemann proporcional a  $\epsilon$ , que es la  $z\bar{z}z\bar{z}$ ;

$$R_{z\bar{z}z\bar{z}} \sim \frac{1}{4} e^{2A} \nabla^2 A. \quad (4.28)$$

Para obtener la contribución de un solo tensor de Riemann, tenemos que tomar la derivada del Lagrangiano respecto a esta componente. La evaluación de este término es similar a la del término  $S_R$  en la ecuación (4.11), gracias a la presencia de la delta de

Dirac. Tenemos:

$$\begin{aligned}
S_{GB}^{(1)} &= 4\beta_2 \int d^5x \sqrt{g} \phi^5 \frac{\partial L_{GB}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} \frac{1}{4} e^{2A} \nabla^2 A \\
&= \beta_2 \int d\rho d\tau d^3y \left( \frac{1}{2} e^{2A} \sqrt{h} \right) \phi^5 \frac{\partial L_{GB}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} e^{2A} (4\pi\epsilon \delta(x^1, x^2)) \\
&= 2\pi\beta_2 \int d^3y \sqrt{h} \frac{\partial L_{GB}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \Big|_{\epsilon=0} (\phi^{(0)})^5.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Podemos ver que al menos para este término, la contribución de la acción  $L'_{GB} \equiv \phi^5 L_{GB}$  al funcional puede calcularse siguiendo la receta de Dong en [11];

$$S^{(1)} = 2\pi \int d^3y \sqrt{h} \left( \frac{\partial L'_{GB}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \right), \tag{4.30}$$

que coincide con la entropía de Wald. Para Gauss-Bonnet, podemos evaluar fácilmente la derivada respecto al tensor de Riemann y obtenemos:

$$\left( \frac{\partial L_{GB}}{\partial R_{z\bar{z}z\bar{z}}} \right) \Big|_{\epsilon=0} = \mathcal{R}, \tag{4.31}$$

donde  $\mathcal{R}$  es el escalar de curvatura de la superficie de codimensión 2, que obtenemos al poner  $\rho = f(z)$  y  $\tau = 0$  en la métrica para la solución. De esta manera la contribución completa en (4.29) puede escribirse como:

$$S_{GB}^{(1)} = 4\pi\beta_2 \int_{\partial\Sigma} d^3y \sqrt{h} \mathcal{R} \phi^5 \tag{4.32}$$

Sabemos qué forma toma el funcional de HEE para el caso de gravedad de Gauss-Bonnet pura [11, 24]. Dicha contribución proviene del producto de dos tensores de Riemann, como estudiamos en la Sección 3. Esta contribución aparece a orden cuadrático en  $z$  y  $\bar{z}$ . Por lo tanto, vamos a considerar todas las posibles contribuciones a orden cuadrático en la expansión en coordenadas complejas, y determinaremos cuáles de estos términos son proporcionales a  $\epsilon$ . En el primer caso, podemos considerar la potencia de  $\phi$  que aparece en la acción a segundo orden en esta expansión, por lo que el término de Gauss-Bonnet deberá aparecer a orden cero. Sabemos de la ecuación (C.18), que la dependencia en  $\epsilon$  de las potencias del campo, está en la forma  $\rho^{\alpha-2\epsilon}$ , donde  $\alpha$  es un número entero, y al integrar este término sobre  $\rho$ , no hay ningún término proporcional a  $\epsilon$ , y por lo tanto no contribuye al funcional de entropía de entrelazamiento. Para el término a orden cero en el campo escalar, y orden cuadrático en los tensores de Riemann, obtenemos esencialmente lo mismo que para el caso sin campo escalar evaluado en la superficie de codimensión dos, por lo que el resultado es simplemente :

$$\begin{aligned}
S_{GB}^{(2)} &= \partial_\epsilon \int \rho d\rho d\tau d^3y \sqrt{g} \phi^5 \frac{\partial^2 L_{GB}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} (2K_{zij} \nabla_z A) (2K_{\bar{z}kl} \nabla_{\bar{z}} A) \Big|_{\epsilon=0} \\
&= 2\pi \int_0^\infty \rho^3 d\rho (\rho^2 + a^2)^{\frac{\beta\epsilon}{2}-1} \int d^3y \sqrt{h} \phi^5 \frac{\partial^2 L_{GB}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} (2K_{ij}) (2K_{kl}) \\
&= -4\pi\epsilon \int d^3y \sqrt{h} \phi^5 \frac{\partial^2 L_{GB}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} K_{ij} K_{kl}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Evaluamos la segunda derivada respecto al Riemann de la Lagrangiana de Gauss-Bonnet:

$$\frac{\partial^2 L_{GB}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} K_{ij} K_{kl} = -2K_z \tag{4.34}$$

Haciendo las contracciones vemos que estos dos términos se cancelan entre sí, por lo que la contribución total de este término también se anula. Sabemos que en la expansión de Taylor para dos variables  $\phi$  y  $R_{abcd}$ , a segundo orden aparecen tres términos, de los cuales hemos considerado únicamente el término a orden cero en el campo escalar. Además de esto, podríamos tener contribuciones a segundo orden en el campo o con derivadas cruzadas en la expansión de Taylor, como:

$$\int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{g} \left( \frac{\partial \phi^5}{\partial \phi} (\phi_z z + \phi_{\bar{z}} \bar{z}) \right) \left( \frac{\partial L_{GB}}{\partial R_{zizj}} (2K_{zij} \nabla_z A) + \frac{\partial L_{GB}}{\partial R_{\bar{z}o\bar{z}j}} (2K_{\bar{z}ij} \nabla_{\bar{z}} A) \right) \quad (4.35)$$

Sabemos que las contribuciones que provienen de la primera derivada de la Lagrangiana son lineales en la expansión en las coordenadas  $z$ ,  $\bar{z}$ , por lo que podríamos tomar la parte a orden uno de  $\phi$  para obtener un término cuadrático. Este término será proporcional a  $\epsilon$ . Sin embargo, notemos que la divergencia en el segundo factor se cancela con las potencias lineales en el primero, o bien, aparece multiplicada por factores de  $e^{\pm ni\tau}$ , que anulan la contribución después de hacer la integral sobre  $\tau$ . Por lo tanto, no hay contribución de dicho término.

Con todas estas consideraciones, recordemos de la Sección 3, que en teoría de Gauss-Bonnet pura (y en general para cualquier teoría dependiente del Riemann con segundas derivadas en las ecuaciones de movimiento), aparece un término anómalo, debido a la promoción de un término cuadrático en  $\epsilon$  a un término lineal, que surge de la integral a lo largo de la coordenada radial [11, 12]. Por lo tanto, podemos preguntarnos si este término aún se ve promovido a una potencia lineal de  $\epsilon$  cuando el orden en el que aparece la potencia del campo escalar es distinto de cero. Al considerar una potencia del campo escalar multiplicando este factor surge una diferencia importante respecto a los cálculos previos. En todos los casos anteriores tuvimos la ventaja de que al sustituir las posibles contribuciones en el tensor de Riemann y sus contracciones (todas a primer orden en este tensor), la expansión se separa en una parte lineal en  $\epsilon$  y otra parte que no contribuye a la integral a este orden. Además, la evaluación del campo escalar se facilitaba debido a que en todos los casos esta contribución aparecía acompañada de una delta de Dirac que evaluaba al campo escalar en  $\rho = 0$ . En concreto, consideremos el término:

$$\int \rho d\rho d\tau d^3 y \sqrt{g} \phi^5 \frac{\partial^2 L_{GB}}{\partial R_{zizj} \partial R_{\bar{z}k\bar{z}l}} (2K_{zij} \nabla_z A) (2K_{\bar{z}kl} \nabla_{\bar{z}} A) \quad (4.36)$$

Recordando la expansión del campo escalar en (3.95), podemos escribir la dependencia en  $\epsilon$  de una potencia arbitraria del campo escalar como:

$$\phi^n \sim \sum_{l=0}^k \sum_{k=0}^{n-1} C_{lk} (\rho^2 + a^2)^{((l+n-k)-\epsilon(n-k))} + \dots, \quad (4.37)$$

donde hemos realizado la sustitución  $\rho^2 \rightarrow \rho^2 + a^2$ , que interpretamos como una regularización de la singularidad cónica, que definimos reemplazando la geometría cerca de dicha singularidad por una geometría suave determinada por el parámetro de corte  $a$ . Los  $C_{lk}$  son los correspondientes coeficientes de la expansión, y los puntos suspensivos denotan términos que contienen factores de  $z$  o  $\bar{z}$ , como  $\phi^4 \sim \phi_{z\bar{z}}^5 (\rho^2 + a^2)^{4(1-\epsilon)}$ ,  $\phi^5 \sim \phi_{z\bar{z}}^5 (\rho^2 + a^2)^{5(1-\epsilon)}$ , etc. Los términos de esta forma no contribuyen porque inducen factores de  $e^{\pm i\tau}$ , que se

anulan al integrar respecto a  $\tau$ . Separando la parte dependiente en  $\rho$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{l=0}^k \sum_{k=0}^{n-1} C_{lk} \int_0^\infty \rho^3 d\rho (\rho^2 + a^2)^{((l+n-k)-\epsilon(n-k))} (\rho^2 + a^2)^{\frac{\beta}{2}\epsilon-2} - (a \rightarrow 0) \\
&= \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{l=0}^k \sum_{k=0}^{n-1} C_{lk} \int_0^\infty \rho^3 d\rho (\rho^2 + a^2)^{((l+n-k-2)-\epsilon(n-k-\beta/2))} - (a \rightarrow 0) \\
&= \frac{\epsilon^2}{8} \sum_{l=0}^k \sum_{k=0}^{n-1} C_{lk} \left[ (a^2 + \rho^2)^{l+n+k(\epsilon-1)+\beta\epsilon/2-n\epsilon} \left( \frac{-2a^2}{(a^2 + \rho^2)(-2 + 2l + 2n + 2k(\epsilon - 1) + \beta\epsilon - 2n\epsilon)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2}{2l + 2n + 2k(\epsilon - 1) + \beta\epsilon - 2n\epsilon} \right) \right] \Big|_0^\infty - (a \rightarrow 0).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Debido a la forma del denominador en estos dos términos, vemos que sólomente el segundo puede dar lugar a un denominador proporcional a  $\epsilon$  a orden dominante, por lo que ignoramos el primer término. Después de regularizar y evaluar los límites de integración, obtenemos la siguiente contribución:

$$\frac{\epsilon^2}{8} \sum_{l=0}^k \sum_{k=0}^{n-1} C_{lk} \left[ (a^{2(l+n+k(\epsilon-1)+\beta\epsilon/2-n\epsilon)}) \left( \frac{2}{2l + 2n + 2k(\epsilon - 1) + \beta\epsilon - 2n\epsilon} \right) \right] \tag{4.39}$$

La condición para obtener una potencia  $\epsilon^{-1}$  en el denominador es entonces:

$$2l + 2n - 2k = 0, \quad 2k - 2n = 0, \tag{4.40}$$

o de manera equivalente

$$n = k, \quad l = 0. \tag{4.41}$$

Como la suma sobre  $k$  de (C.18) corre hasta  $n - 1$ , es imposible satisfacer esta condición con  $n \neq 0$ . Se sigue entonces que el único factor de  $\phi^n$  que da lugar a una potencia cuadrática después de integrar un término lineal en  $\epsilon$ , ocurre únicamente con  $n = 0$ , es decir, si no aparece explícitamente el campo escalar en la acción. Dicho de otra manera, la presencia del campo escalar en la acción arruina la dependencia lineal del único posible término a orden cuadrático en el Riemann que puede ser promovido a un factor proporcional a  $\epsilon$  tras la integración en  $\rho$ . Por lo tanto, la única posible contribución de este término viene de considerar el campo escalar a orden cero en  $\epsilon$ .

Se sigue que la contribución total del término que incluye al escalar de Gauss-Bonnet multiplicado por una potencia del campo da lugar a la siguiente contribución al funcional de HEE:

$$S_{GB} = 4\pi\beta_2 \left( \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{h} \mathcal{R} \phi^5 + 2 \int_{\partial\Sigma} \phi^5 K \right). \tag{4.42}$$

#### 4.1.4. Funcional de HEE para la solución de agujero negro 5-dimensional.

Gracias al análisis de la sección anterior, podemos sustituir los resultados de las ecuaciones (4.11), (4.21), (4.27) y (4.42) en la ecuación (4.9), y escribir el funcional total de entropía de entrelazamiento holográfica en gravedad de Lovelock acoplada conformalmente a segundo

orden con materia escalar:

$$\begin{aligned}
 S_{EE} = & \frac{1}{4G_N} \int d^3y \sqrt{h} + 4\pi\beta_1 \int d^3y \sqrt{h} \phi^{15} \\
 & - 4\pi \left( 60\beta_2 \int_{\partial\mathcal{M}} d^3y \sqrt{h} h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi \phi^3 + 40\beta_2 \int_{\partial\Sigma} d^3y \sqrt{h} \phi^4 h^{ij} \partial_i \partial_j \phi \right) \\
 & + 4\pi\beta_2 \left( \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{h} \mathcal{R} \phi^5 + 2 \int_{\partial\Sigma} \phi^5 K \right), \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

o de manera equivalente:

$$\begin{aligned}
 S_{EE} = & \int_{\Sigma} d^3y \sqrt{h} \left( \frac{1}{4G} + 4\pi (\beta_1 \phi^{15} + \beta_2 \mathcal{R} \phi^5 - 60\beta_2 \phi^3 h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - 40\beta_2 \phi^4 h^{ij} \partial_i \partial_j \phi) \right) \\
 & + 2\beta_2 \int_{\partial\Sigma} \phi^5 K \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

Este funcional es el resultado principal de este trabajo. Notemos que, las potencias de  $\phi$  proporcionales a cada uno de los acoplamientos que aparecen dentro de la integral, son exactamente las mismas que aparecen en la acción (2.4). Este hecho es consecuencia de que el campo escalar no contribuye a este funcional más allá de orden cero en la expansión en coordenadas complejas, y por lo tanto todas estas potencias inocuas del campo se heredan al funcional de HEE.

Como un ejemplo concreto, procedamos al cálculo explícito de este funcional para la solución a la teoría (2.4) estudiada en la Sección 2.2. Esto es, un agujero negro con pelo escalar en 5 dimensiones. En la frontera de la geometría asintóticamente *AdS*, consideremos una región espacial 3-dimensional a tiempo constante, que llamaremos  $A$ . Sabemos que esta solución tiene simetría esférica, por lo que podemos delimitar la región  $A$  desde  $-\theta$  a  $\theta$ , donde  $\theta$  del ángulo de apertura medido desde el origen en coordenadas polares. Como la simetría esférica se extiende hacia el bulto, entonces el perfil de las superficies de codimensión 2 que terminan en  $A$  pueden representarse por medio de una función de la coordenada angular,  $r(\theta)$ . Podemos calcular fácilmente el determinante de la métrica inducida a partir de este ansatz y de la función métrica de la solución del agujero negro:

$$f(r) = 1 - \frac{\tilde{M}}{r^2} - \frac{\tilde{Q}_0}{r^3} + \frac{r^2}{l^2} \tag{4.45}$$

Primero calculamos las componentes del tensor  $h_{ij}$ , donde los índices sólo toman los valores  $\Omega$  y  $\theta$  ya que estamos suponiendo que la superficie es independiente del resto de las coordenadas en el bulto. Tenemos:

$$h_{\theta\theta} = g_{\mu\nu} \partial^\mu X_r \partial^\nu r X_r = g_{\theta\theta} + g_{rr} (r')^2 = \frac{r'^2}{f(r)} + r^2, \tag{4.46}$$

$$h_{\phi\phi} = g_{\mu\nu} \partial^\mu X_\phi \partial^\nu r X_\phi = r^2 \sin^2(\theta) = g_{\mu\nu} \partial^\mu X_\psi \partial^\nu r X_\psi = h_{\psi\psi}, \tag{4.47}$$

$$h_{r\theta} = h_{r\phi} = h_{r\psi} = h_{\theta\phi} = h_{\theta\psi} = h_{\phi\psi} = 0. \tag{4.48}$$

Tomando el producto de (4.46) y (4.47) obtenemos el determinante de la métrica inducida:

$$h = r^2 \sin^2(\theta) \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right). \quad (4.49)$$

Además necesitamos el escalar de curvatura inducido en la superficie, y la traza de la curvatura extrínseca. Para ello definimos una función que en esencia es la función  $A$  que regulariza la geometría del cono aplastado, pero calculada en la geometría en la capa de masa;

$$e^{2F} = \frac{r^2}{z^2} \implies F = \ln(r/z). \quad (4.50)$$

De esta manera podemos calcular las cantidades geométricas correspondientes a la solución de agujero negro. Para el escalar de curvatura obtenemos:

$$R = 2e^{-2F} - 4\nabla^2 F - 6(\partial F)^2, \quad (4.51)$$

donde hemos calculado tenemos las siguientes identidades:

$$e^{2F} = r^2 \sin^2(\theta), \quad \nabla^2 F = \frac{1}{\sqrt{h_{\theta\theta}}} \partial_\theta (\sqrt{h_{\theta\theta}} h^{\theta\theta} \partial_\theta F), \quad (\partial F)^2 = h^{\theta\theta} (\partial_\theta F)^2. \quad (4.52)$$

Para obtener la traza del tensor de curvatura extrínseca, debemos definir un vector normal apuntando hacia afuera de la superficie de codimensión dos:

$$n_a = \sqrt{h_{\theta\theta}} \delta_{\theta a}, \quad , n^a = \sqrt{h^{\theta\theta}} \delta_{\theta a}, \quad (4.53)$$

en términos del cual podemos calcular la curvatura extrínseca:

$$K = (h^{ab} - n^a n^b) \nabla_a n_b. \quad (4.54)$$

Notemos que también aparecen segundas derivadas del campo escalar, que podemos calcular sustituyendo la solución  $\phi = N/r^{1/5}$  en el funcional de HEE:

$$h_{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi = h_{\theta\theta} \partial_\theta \frac{N}{r^{1/5}} \partial_\theta \frac{N}{r^{1/5}} = \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) \left( -\frac{1}{5} \frac{N}{r^{6/5}} r' \right)^2, \quad (4.55)$$

y

$$h_{ij} \partial_i \partial_j \phi = h_{\theta\theta} (\partial_\theta)^2 \frac{N}{r^{1/5}} = \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) \left( \frac{6}{25} \frac{N}{r^{11/5}} r'^2 - \frac{1}{5} \frac{N}{r^{6/5}} r'' \right). \quad (4.56)$$

Aquí, el símbolo ' denota la primera derivada respecto a la coordenada  $\theta$ . Sustituyendo estas expresiones en el funcional (4.44), podemos obtener la forma explícita para el caso de interés:

$$\begin{aligned} S_{EE} &= 4\pi \int_0^{\theta_0} d\theta \left[ r^2 \sin^2(\theta) \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right)^{1/2} \right] \left( \frac{1}{16\pi G} - 60\beta_2 \frac{N^3}{r^{3/5}} \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) \left( -\frac{1}{5} \frac{N}{r^{6/5}} r' \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 40\beta_2 \frac{N^4}{r^{4/5}} \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) \left( \frac{6}{25} \frac{N}{r^{11/5}} r'^2 - \frac{1}{5} \frac{N}{r^{6/5}} r'' \right) + \beta_1 \frac{N^{15}}{r^3} + \frac{N^5}{r} \frac{2\beta_2}{r^2 \sin^2(\theta)} \right) \\ &\quad + 8\pi\beta_2 \int_0^{\theta_0} d\theta \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right)^{-1/2} \frac{N^5}{r} (r \cos(\theta) + r' \sin(\theta))^2 \\ &= 4\pi \int_0^{\theta_0} d\theta \left[ r^2 \sin^2(\theta) \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right)^{1/2} \right] \left( \frac{1}{16\pi G} - 12\beta_2 \frac{N^5 r'^2}{r^3} \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + 8\beta_2 \frac{N^5 r''}{r^2} \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) + 2\beta_2 \frac{N^5}{r^3} \sin^{-2}(\theta) + \beta_1 \frac{N^{15}}{r^3} \right) \\ &\quad + 8\pi\beta_2 \int_0^{\theta_0} d\theta \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right)^{-1/2} \frac{N^5}{r} (r \cos(\theta) + r' \sin(\theta))^2 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Para evaluar este funcional debemos conocer el perfil  $r(\theta)$  de la superficie de codimensión dos. Basándonos en los resultados previos del Capítulo 3, conjeturamos que esta superficie coincide con la que extremiza el funcional. Sería interesante demostrar esto de manera precisa, sin embargo, lo dejaremos para un trabajo posterior.



# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo, utilizamos las herramientas de la correspondencia  $AdS/CFT$  para estudiar una teoría de gravedad con correcciones de orden superior, que admite soluciones tipo agujero negro con una carga escalar que retroactúa en la métrica. En particular, nos especializamos en el cálculo del funcional de la entropía de entrelazamiento holográfica. Con este objetivo en mente, primero desarrollamos todas las herramientas necesarias para formular y entender la correspondencia  $AdS/CFT$ .

Como aprendimos en el primer capítulo de este trabajo, se necesita entender primero la forma en la que describimos el mundo a escalas ultra-energéticas, que a diferencia del mundo macroscópico, está regido por la mecánica cuántica. La teoría de gravedad de Einstein parece ser incompatible con los procedimientos de cuantización conocidos, y es por esto que nos preguntamos si existe la posibilidad de que la gravedad esté en realidad descrita por una teoría más general que la de la relatividad general. Esto nos llevó a explorar las teorías con correcciones de orden superior en la curvatura. El ejemplo que mejor se estudió en esta tesis fue la teoría de gravedad de Lovelock. Además de considerar el caso de gravedad pura, o con acoplamiento minimal, analizamos una manera particular de acoplar esta teoría de gravedad a un campo de materia escalar no masivo, que tiene soluciones esféricas con un horizonte, que a su vez presentan una retroacción del campo escalar en la métrica. Además de esto, tiene otras propiedades interesantes. Esta solución resulta invariante bajo una transformación de Weyl que nos permite elegir libremente un peso conforme en la teoría. También presenta un tipo de dualidad cuando reescalamos conjuntamente la métrica y el campo escalar, de forma que obtenemos soluciones que son equivalentes bajo este reescalamiento a otras soluciones de la misma teoría, y en casos particulares, estas soluciones pueden ser autoduales. Otro resultado importante es que, al igual que en otras soluciones de este tipo, que aparecen en otras teorías de gravedad como Reissner-Nordstrom o Gauss-Bonnet, existe una transición de fase totalmente análoga a la transición de Van der Waals, que puede entenderse como una transición de agujeros negros de radio chico, a agujeros con radio grande. En [14], se encontró que en el ensemble a  $S$  y  $T$  fijas, se satisface la ley de áreas iguales de Maxwell para la entropía térmica. En este trabajo realizamos el cálculo análogo para el ensemble con  $P$  fija, y  $T$  y  $\tilde{Q}_0$  variables, en un caso particular de la elección de la carga escalar y del resto de los acoplamientos en la solución. Como era de esperarse, obtuvimos que la ley de áreas de Maxwell también se satisface en este caso.

Aprendimos, que podemos interpretar los términos con correcciones como contribuciones que son pequeñas cuando la curvatura es débil, pero que cobran mayor relevancia en geometrías altamente curvadas, como la superficie de un agujero negro. Más allá de los

experimentos que realizamos en el LHC, no tenemos ninguna certeza de cómo se comporta el mundo en este régimen. Sin embargo, sabemos que la teoría de cuerdas es un candidato a unificar la gravedad y la mecánica cuántica en estas escalas. Si en verdad describiera a nuestro universo, esta teoría nos permitiría explorar e intentar entender las propiedades cuánticas de ciertas teorías con correcciones de orden superior, y en particular, de sus soluciones tipo agujero negro. La teoría de cuerdas, nos permite al mismo tiempo deducir un enunciado que nos brinda toda una maquinaria para relacionar cantidades calculadas en una teoría cuántica de tipo conforme con una teoría de gravedad en un fondo asintóticamente *AdS*. En este contexto, sabemos que la entropía de entrelazamiento holográfica es una cantidad útil para entender la termodinámica de los agujeros negros y el papel que esta juega en el diccionario de la correspondencia *AdS/CFT*. Las soluciones de agujero negro que elegimos estudiar comparten la propiedad de ser *AdS* en la asintótica, así que es natural preguntarnos si existe un dual holográfico a dichas soluciones. Una manera de averiguar esto es calcular la entropía de entrelazamiento holográfica. En una teoría de Einstein (que es donde generalmente se trabaja en la correspondencia holográfica), dicha cantidad se puede obtener de manera muy sencilla extremizando el área de una familia de superficies. Sin embargo, se sabe que al considerar teorías de gravedad más generales que Einstein, esta prescripción deja de ser válida.

Enfocándonos en este problema, en el Capítulo 3 estudiamos cuál es la generalización de la fórmula holográfica de Ryu-Takayanagi cuando consideramos una teoría de gravedad arbitraria, y se entendió por qué esta fórmula no funciona en el escenario de gravedad a orden superior en el que estamos trabajando. Para entender cómo se modifica este funcional, tuvimos que recurrir al método de Lewkowycz-Maldacena, que consiste en hacer una continuación analítica de la variedad definida en el espacio de réplicas, a un orbifolio con simetría  $\mathbb{Z}_n$ . Esto requiere hacer una expansión de Taylor en términos de coordenadas normales a la superficie que queda fija por la simetría  $\mathbb{Z}_n$ . El cálculo, básicamente se reduce a insertar esta expansión de Taylor en la acción gravitacional y extraer los términos proporcionales al parámetro pequeño  $\epsilon$ . Como caso simplificado de la teoría para la que queremos encontrar la entropía de entrelazamiento, estudiamos la manera de aplicar este método a una teoría con un acoplamiento de tipo no-minimal, que consiste simplemente en añadir un término  $\phi^2 R$  a la acción de Einstein-Hilbert. El resultado que obtenemos, consiste, además del término usual de área procedente de la acción de Einstein-Hilbert, de un término que también contiene al área de la superficie de codimensión 2, y además contiene un factor proporcional a la potencia  $\phi^2$  del campo escalar. Este funcional debe ser evaluado en una superficie de área mínima, que se reduce a extremizar el funcional de HEE.

En el Capítulo 4, aplicamos el método de L-M a la teoría de gravedad expuesta en el Capítulo 2, considerando  $D = 5$  y  $s = -1/5$ , donde aparecen varios términos con contribuciones lineales y cuadráticas en el tensor de Riemann. Basándonos en trabajos previos [11, 24, 20], encontramos que estas contribuciones en la acción aparecen como variantes de teorías de gravedad bien estudiadas y donde se ha obtenido el correspondiente funcional de HEE, como son gravedad de Horndeski y gravedad de Gauss-Bonnet. La novedad en este caso es que estos términos aparecen multiplicados por potencias (en principio arbitrarias) del campo escalar. Para entender cómo cambiaba la contribución de estos términos al involucrar estas potencias, recurrimos a la expansión de Taylor del campo escalar, análoga a la descomposición que se realizó para la métrica. En esta elección de coordenadas, la expansión en Taylor no induce términos proporcionales a  $\epsilon$  más que a orden subdominante, y por lo tanto no hay contribución de estos factores a orden mayor que cero. El resultado es

que el funcional de entropía de entrelazamiento holográfica recibe contribuciones de todos estos términos como si fuesen teorías independientes, y la potencia del campo escalar que aparecía en la acción se hereda al funcional de entropía de entrelazamiento holográfica. Una conclusión importante es que este funcional debe ser evaluado en la solución a las ecuaciones de movimiento de gravedad, y una vez que se obtiene la localización de la superficie de codimensión 2 en la que hay que evaluar el funcional, solo basta sustituir el perfil  $r(\theta)$  correspondiente en esta solución, que representa una superficie de codimensión dos con simetría esférica, parametrizada por la coordenada  $\theta$ , en el funcional de HEE. El resultado principal de este trabajo es que el funcional de HEE está dado por

$$S_{EE} = \int d^3y \sqrt{h} \left( \frac{1}{4G} + 4\pi(\beta_1 \phi^{15} + \beta_2 \mathcal{R} \phi^5 - 60\beta_2 \phi^3 h^{ij} \partial_i \phi \partial_j \phi - 40\beta_2 \phi^4 h^{ij} \partial_i \partial_j \phi) \right. \\ \left. + 2\beta_2 \int d^2y \sqrt{h} \phi^5 K \right) \quad (5.1)$$

Una vez que tenemos la forma general del funcional de HEE, podemos estudiar cuál es la forma que toma cuando nos restringimos a las soluciones esféricas que estudiamos en la Sección 2. Calculamos las cantidades geométricas que aparecen en el funcional obtenido, como son la métrica inducida, el escalar de curvatura, y la traza del tensor de curvatura extrínseca. Debido a la simetría esférica y a la forma de la solución para el campo, el cálculo se simplifica bastante, y de hecho se puede obtener a partir de resultados obtenidos anteriormente [24, 56], con la diferencia de que tenemos que incluir las potencias del campo escalar que aparecen en el funcional de entropía de entrelazamiento. El resultado que obtuvimos es:

$$S_{EE} = 4\pi \int_0^{\theta_0} d\theta \left[ r^2 \sin^2(\theta) \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right)^{1/2} \right] \left( \frac{1}{16\pi G} - 12\beta_2 \frac{N^5 r'^2}{r^3} \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) \right. \\ \left. + 8\beta_2 \frac{N^5 r''}{r^2} \left( \frac{r'^2}{f(r)} + r^2 \right) + 2\beta_2 \frac{N^5}{r^3} \sin^{-2}(\theta) + \beta_1 \frac{N^{15}}{r^3} \right) \quad (5.2) \\ \left. + 8\pi\beta_2 \int_0^{\theta_0} d\theta \left( \frac{(r')^2}{f(r)} + r^2 \right)^{-1/2} \frac{N^5}{r} (r \cos(\theta) + r' \sin(\theta))^2 \right.$$

Como trabajo futuro, podríamos intentar verificar que este funcional es independiente de la elección del peso conforme, lo cual es natural, dado que las ecuaciones de movimiento de nuestra teoría son invariantes bajo una transformación de Weyl. Además de esto sería también interesante estudiar cómo transforma este funcional bajo la dualidad de marco estudiada en la Sección 2.4. Como se ha mostrado en otros trabajos, es posible obtener el funcional de HEE en teorías con correcciones a orden superior mediante una redefinición de campos que transforma por ejemplo, una teoría del tipo  $f(R)$  en la teoría de gravedad de Einstein. Haciendo entonces la transformación inversa correspondiente. El funcional (4.44) presenta también otras propiedades que comparte con resultados análogos obtenidos por ejemplo, para gravedad de Gauss-Bonnet. En particular, para estas teorías se cumple que la contribución adicional al término de área tiene signo negativo, y por lo tanto, la entropía de entrelazamiento sólo es no-negativa para un rango particular de entre todos los posibles valores del acoplamiento. Esto puede intentar relacionarse con las condiciones de estabilidad termodinámica de la solución en el espacio de parámetros.

Claramente, un trabajo futuro inmediato es resolver el problema de demostrar que la superficie de codimensión dos en la que tenemos que evaluar este funcional realmente corresponde a la que nosotros proponemos aquí. Para ello, debemos insertar la expansión de la métrica y del campo escalar directamente en las ecuaciones de movimiento. Estas

ecuaciones, pueden determinarse hasta orden  $k = 2$  (siendo  $k$  el orden en el que aparece el tensor de Riemann) a partir de las contracciones de tensores de materia conforme que listamos en el Apéndice B. La superficie de codimensión dos se determina entonces bajo la condición de que los términos que contienen divergencias en las coordenadas complejas se anulen. Como en todos los casos donde se ha realizado este cálculo, esperaríamos que la respuesta a esta pregunta sea que la superficie de codimensión dos que buscamos sea la que minimice el correspondiente funcional de HEE <sup>1</sup>. Para ello, debemos deducir las ecuaciones que resultan de pedir esta última condición. Por otro lado podemos insertar las expansiones (3.41) y (C.18) en las ecuaciones de movimiento de la teoría e imponer la condición de que los términos con divergencias se anulen. Empatando estas constricciones, podremos obtener el resultado deseado.

Una vez que hayamos demostrado esta conjetura, podremos evaluar con seguridad este funcional explícitamente para superficies de entrelazamiento con simetría esférica, principalmente, aunque también esperamos que el procedimiento se pueda llevar a cabo en otras configuraciones. Para realizar este cálculo, se deberá recurrir seguramente a métodos numéricos que nos permitan resolver la ecuación diferencial que determina a la superficie buscada. Debido a la complejidad del funcional que obtuvimos, esperaríamos que esta ecuación sea bastante complicada. En particular, podríamos trabajar en un ensemble a temperatura  $T$  en la vecindad de la transición de fase tipo Van der Waals y estudiar si la ley de áreas iguales de Maxwell se satisface también para la entropía de entrelazamiento holográfica, como se ha hecho en trabajos anteriores para gravedad de Einstein y gravedad de Gauss-Bonnet. Un resultado importante de este trabajo es que entendimos como llevar a cabo el procedimiento de Lewkowycz-Maldacena en una teoría que incluye tanto correcciones de orden superior como contribuciones no triviales del campo escalar al funcional de entropía de entrelazamiento.

Además de la teoría tipo Lovelock que estudiamos en este trabajo, existen teorías que comparten propiedades similares, y que también tienen soluciones tipo agujero negro. Un caso particular es la teoría de gravedad cuasi-topológica de [9]. La forma de los términos de acoplamiento en la acción en ambos casos es similar, en el sentido de que se construye a partir de convoluciones del tensor de Riemann con potencias del campo escalar. Por lo tanto, podríamos aplicar todas las herramientas de este trabajo al cálculo del funcional de entropía de entrelazamiento también a este tipo de teorías. Dado que ya hemos demostrado que las potencias del campo escalar no producen contribuciones anómalas al funcional de HEE, el cálculo en ese caso debería ser relativamente sencillo.

---

<sup>1</sup>Durante la realización de este trabajo se publicó [23], donde se demuestra de manera general que en una teoría de gravedad con correcciones a orden superior en la curvatura, la superficie de codimensión dos se obtiene a partir de la extremización del funcional de HEE.

# Apéndice A

## Geometría diferencial de hipersuperficies

Este apéndice contiene las fórmulas y resultados más importantes en geometría diferencial de superficies de codimensión arbitraria, con énfasis en las herramientas que se utilizan en la relatividad general y la teoría de cuerdas.

Sea una variedad  $M$  ( $D$ -dimensional) descrita por las  $D$  coordenadas  $x^\mu$ . Una hipersuperficie de  $M$  es una subvariedad  $S$  descrita por las  $D-1$  coordenadas  $y^i$ . El encaje de  $S$  en  $M$  se denota por la función  $X^\mu(y)$ , y la derivada de esta función es una matriz  $D \times (D-1)$ :

$$M_i^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}, \quad (\text{A.1})$$

que es el jacobiano de la transformación, con el cual podemos formar la *retracción* o *pull-back* de  $M$  en  $S$ :

$$v_i = M_i^\mu v_\mu. \quad (\text{A.2})$$

Análogamente podemos definir un *empuje*, o *push-forward* de  $S$  en  $M$ :

$$v^\mu = M_i^\mu V^i. \quad (\text{A.3})$$

Si en nuestra  $M$  variedad hay definida una métrica  $g_{\mu\nu}$ , lo anterior se puede generalizar fácilmente. Por ejemplo, podemos retraer la métrica para formar la métrica inducida:

$$\gamma_{ij} = M_i^\mu M_j^\nu g_{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

Notemos que podemos usar  $g_{\mu\nu}$  para subir y bajar índices griegos, mientras que usamos  $\gamma_{ij}$  para subir y bajar índices latinos. Se dice que un vector  $v^\mu$  en  $M$  es tangente a  $S$  si existe un vector  $v^i$  en el espacio tangente a  $S$  tal que se satisfaga (A.3). Las operaciones de retracción y empuje aplicadas consecutivamente a un vector  $v^i$  da como resultado este mismo vector. El empuje de la retracción de un vector  $v^\mu$  es tangente a  $S$ , y esta operación define un operador de proyección ortogonal:

$$P_\nu^\mu = M_i^\mu M_\nu^i. \quad (\text{A.5})$$

Para hipersuperficies que no sean nulas, o tipo luz, podemos siempre definir un covector unitario normal  $n_\mu$  por medio de las ecuaciones:

$$M_i^\mu n_\mu = 0, \quad n_\mu n^\mu = \sigma. \quad (\text{A.6})$$

$$P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu - (\pm 1)n^\mu n_\nu, \quad (\text{A.7})$$

La métrica inducida  $\gamma_{ij}$  contiene la información acerca de la geometría intrínseca de la hipersuperficie, y podemos calcular tensores de curvatura al igual que con la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Podemos definir también una curvatura asociada al encaje de  $S$ , que es capturada por la derivada covariante del vector unitario normal a lo largo de  $S$ :

$$K_{i\nu} = M_i^\rho \nabla_\rho n_\nu. \quad (\text{A.8})$$

Esta definición puede ponerse en términos de un tensor con índices solamente en  $S$ , tomando la retracción de  $K_{i\nu}$ :

$$M_j^\nu M_i^\rho \nabla_\rho n_\nu = -n_\nu M_i^\rho \nabla_\rho M_j^\nu, \quad (\text{A.9})$$

o de manera alternativa, podemos construir un tensor con índices solamente en  $M$  por medio del push-forward del mismo tensor:

$$K_{\mu\nu} = P_\mu^\rho \nabla_\rho n_\nu. \quad (\text{A.10})$$

A estos dos tensores que acabamos de definir se les conoce indistintamente como *tensor de curvatura extrínseca*. La curvatura promedio de la hipersuperficie puede codificarse entonces en la traza del tensor de curvatura extrínseca:

$$K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = \gamma^{ij} K_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Si escogemos un conjunto de coordenadas en  $M$  dadas por  $(\sigma, y^i)$ , y elegimos  $S$  como una hipersuperficie de  $\sigma$  constante, descrita por las coordenadas  $y^i$ . Entonces se satisfacen las siguientes identidades:

$$M_i^\mu : \quad M_i^\sigma = 0, \quad M_i^j = \delta_i^j, \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_{ij} = g_{ij}, \quad (\text{A.13})$$

$$n_\sigma = \pm |g^{\sigma\sigma}|^{-1/2}, \quad n_i = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$K_{ij} = -n_\sigma \Gamma_{ij}^\sigma. \quad (\text{A.15})$$

Un caso particular de esta elección de coordenadas son las *coordenadas normales Gaussianas*. Desde cada punto en  $S$  podemos enviar geodésicas con velocidad inicial paralela al vector  $n^\mu$ . Entonces cada punto de  $S$  tendrá una sola geodésica pasando por éste, con la coordenada  $y^i$  describiendo el punto  $q(p)$  y el parámetro afín  $\sigma$  parametrizando a la geodésica en el punto  $p$ .

Por definición tenemos que el vector normal unitario en coordenadas normales Gaussianas sobre la superficie  $S$  es:

$$n^\sigma = 1, \quad n^i = 0. \quad (\text{A.16})$$

En la vecindad de  $S$ , podemos ver que este mismo vector es el normal unitario a las superficies  $S$  aún lejos de estas. Por lo tanto, podemos definir la métrica como:

$$ds^2 = \pm d\sigma^2 + \gamma_{ij}(y, \sigma) dy^i dy^j. \quad (\text{A.17})$$

Usando esta ecuación, y la definición de la métrica inducida podemos obtener también el tensor de curvatura extrínseca en estas coordenadas:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \partial_\sigma \gamma_{ij}. \quad (\text{A.18})$$

A continuación se lista una serie de fórmulas útiles para describir la geometría de  $M$  en términos de las coordenadas Gaussianas para una superficie de  $\sigma$  constante  $S$ :

$$g^{\sigma\sigma} = \pm 1 \quad (\text{A.19})$$

$$g^{i0} = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$g^{ij} = \gamma^{ij} \quad (\text{A.21})$$

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|\gamma|} \quad (\text{A.22})$$

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i \quad (\text{A.23})$$

$$\Gamma_{jk}^\sigma = \mp K_{ij} \quad (\text{A.24})$$

$$\Gamma_{\sigma j}^i = K^i_j \quad (\text{A.25})$$

$$\Gamma_{\sigma\sigma}^i = \Gamma_{i\sigma}^\sigma = \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$R_{ijkl} = R'_{ijkl} \mp (K_{ik}K_{jl} - K_{jk}K_{il}) \quad (\text{A.27})$$

$$R_{ijk\sigma} = \nabla'_i K_{jk} - \nabla'_j K_{ik} \quad (\text{A.28})$$

$$R_{i\sigma j\sigma} = -\dot{K}_{ij} + K_i^m K^{mj} \quad (\text{A.29})$$

$$R_{ij\sigma\sigma} = R_{i\sigma\sigma\sigma} = R_{\sigma\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$R_{ij} = R'_{ij} \mp \left( \dot{K}_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik}K^k_j \right) \quad (\text{A.31})$$

$$R_{i\sigma} = \nabla'_j K^j_i - \partial_i K \quad (\text{A.32})$$

$$R_{\sigma\sigma} = -\gamma^{ij} \dot{K}_{ij} + K^{ij} K_{ij} \quad (\text{A.33})$$

$$R = R' \mp \left( 2\gamma^{ij} \dot{K}_{ij} + K^2 - 3K^{ij} K_{ij} \right) \quad (\text{A.34})$$



# Apéndice B

## Tensores en las ecuaciones de movimiento de Lovelock + Materia conforme

### B.1. Acción de gravedad

En este apéndice escribiremos explícitamente la acción de gravedad de Lovelock acoplada a materia conforme hasta orden  $k = 2$ , dejando la dimensión  $D$  y el peso conforme  $s$  arbitrarios.

$$\begin{aligned}
I[g, \phi] &= \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{D-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k} \delta_{c_1 d_1 \dots c_k d_k}^{a_1 b_1 \dots a_k b_k} \left( \alpha_k R_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots R_{a_k b_k}^{c_k d_k} + \beta_k \phi^{m_k} S_{a_1 b_1}^{c_1 d_1} \dots S_{a_k b_k}^{c_k d_k} \right) \\
&= \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} \left( \frac{\Lambda}{8\pi G} + \frac{R}{16\pi G} + a_2 (R_{cdab} R^{cdab} - 4R_{ab} R^{ab} + R^2) + \beta_0 \phi^{m_0} \right. \\
&\quad \left. + \beta_1 \phi^{m_1} S + \beta_2 \phi^{m_2} (S_{cdab} S^{cdab} - 4S_{ab} S^{ab} + S^2) \right),
\end{aligned} \tag{B.1}$$

donde hemos usado la definición de la delta de Kronecker generalizada

$$\delta_{a_1 b_1 \dots a_k b_k}^{c_1 d_1 \dots c_k d_k} = (2k)! \delta_{[c_1}^{a_1} \delta_{d_1}^{b_1} \dots \delta_{c_k}^{a_k} \delta_{d_k}^{b_k]} \tag{B.2}$$

y recordamos que la potencia del campo escalar  $\phi$  a orden  $k$  está determinada por  $m_k = \frac{2k(1-s)-D}{s}$ . Recordamos también la definición del tensor de acoplamiento conforme con materia:

$$S_{cd}^{ab} = \phi^2 R_{cd}^{ab} + \frac{4}{s} \phi \delta_{[c}^{[a} \nabla_{d]} \nabla^{b]} \phi + \frac{4(1-s)}{s^2} \delta_{[c}^{[a} \nabla_{d]} \phi \nabla^{b]} \phi - \frac{2}{s^2} \delta_{[c}^{[a} \delta_{d]}^{b]} \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi \tag{B.3}$$

Primero calcularemos las contracciones de este tensor que aparecen en la tercera línea de la ecuación B.1. Para esto, sustituimos las definiciones B.3 y B.2, y el hecho de que el tensor  $S$  cumple con las mismas propiedades de simetría que el tensor de Riemann.

$$\begin{aligned}
S_{cdab} S^{cdab} &= \phi^4 R_{cdab} R^{cdab} + 2\phi^2 \left( \frac{4}{s} \phi R_{ab} \nabla^a \nabla^b \phi + \frac{4(1-s)}{s^2} R_{ab} \nabla^a \phi \nabla^b \phi - \frac{2}{s^2} R \nabla_{\mu} \phi \nabla^{\mu} \phi \right) \\
&\quad + \frac{8(2-s-D)}{s^3} (\phi \square \phi) (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) + \frac{2(D-1)(D+2s^2-2)}{s^4} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi)^2 + \frac{4}{s^2} (\phi \square \phi)^2 \\
&\quad + \frac{8(1-s)(D-2)}{s^3} \phi \nabla_a \phi \nabla_b \phi \nabla^a \nabla^b \phi + \frac{4(D-2)}{s^2} \phi^2 \nabla_a \nabla_b \phi \nabla^a \nabla^b \phi.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Ahora calculamos la contracción  $S_{ab} = g_{bc}S_{da}{}^{dc}$ :

$$S_{ab} = \phi^2 R_{ab} + \frac{D-2}{s} \phi \nabla_a \nabla_b \phi + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{(2-s-D)}{s^2} g_{ab} \nabla_c \phi \nabla^c \phi + \frac{1}{s} g_{ab} \phi \square \phi, \quad (\text{B.5})$$

con la cual podemos construir el segundo término que aparece en la acción:

$$\begin{aligned} S_{ab}S^{ab} &= \phi^4 R_{ab}R^{ab} + 2\phi^2 \left( R_{ab} \left( \frac{D-2}{s} \phi \nabla^a \nabla^b \phi + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2} \nabla^a \phi \nabla^b \phi \right) \right. \\ &+ R \left( \frac{(2-s-D)}{s^2} \nabla_c \phi \nabla^c \phi + \frac{1}{s} \phi \square \phi \right) + \left( \frac{2(1-s)(D-2)^2}{s^3} (\phi \square \phi) \nabla_c \phi \nabla^c \phi + \frac{D^2-D}{s^2} (\phi \square \phi)^2 \right. \\ &+ \frac{(2-s-D)(2(1-s)(D-2) + (2-s-D)D)}{s^4} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi)^2 \\ &\left. \left. + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2} \nabla_a \phi \nabla_b \phi \nabla^a \phi \nabla^b \phi + \frac{2(1-s)(D-2)^2}{s^3} \nabla^a \phi \nabla^b \phi \phi \nabla_a \nabla_b \phi \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Falta calcular la contracción escalar  $S$ , que obtenemos a partir de ref.:

$$S = \phi^2 R + \frac{2(D-1)}{s} \phi \square \phi + \frac{(-D^2 + 3D - 2sD + 2s - 2)}{s^2} \nabla_c \phi \nabla^c \phi \quad (\text{B.7})$$

Tomando el cuadrado de este escalar obtenemos:

$$\begin{aligned} S^2 &= \phi^4 R^2 + \frac{4(D-1)^2}{s^2} (\phi \square \phi)^2 + \frac{4(D-1)}{s} \phi^3 \square \phi R \\ &+ \frac{2(-D^2 + 3D - 2sD + 2s - 2)}{s^2} \phi^2 R (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) + \frac{(-D^2 + 3D - 2sD + 2s - 2)^2}{s^4} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi)^2 \\ &+ \frac{4(D-1)(-D^2 + 3D - 2sD + 2s - 2)}{s^3} (\phi \square \phi) (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.4), (B.6) y (B.8) en la acción gravitacional obtenemos la forma explícita de la acción.

### B.1.1. Contracciones a segundo orden en la curvatura

Ahora escribiremos explícitamente la ecuación de campo que resulta de variar la acción. Haremos esto a partir de la forma general, evaluándola hasta segundo orden en  $k$ . Usando

la delta de Kronecker generalizada, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
S_{acde}S_b{}^{cde} &= g_{af}S^{fc}{}_{de}S_{bc}{}^{de} = \phi^4 R_{acde}R_b{}^{cde} + 2\phi^2 \left( \frac{4}{s}\phi R_{acbe}\nabla^c\nabla^e\phi + \frac{4(1-s)}{s^2}\phi R_{acbe}\nabla^c\phi\nabla^e\phi \right. \\
&- \frac{2}{s^2}R_{ab}\nabla_c\phi\nabla^c\phi \left. \right) + g_{ab} \left( \frac{2(D-2)-4s(1-s)}{s^4}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)^2 + \frac{4}{s^2}\phi^2(\nabla_a\nabla_b\phi\nabla^a\nabla^b\phi) \right. \\
&- \frac{4}{s^3}\phi\Box\phi(\nabla_c\phi\nabla^c\phi) + \frac{8(1-s)}{s^3}\phi\nabla_c\nabla_e\phi\nabla^c\phi\nabla^e\phi \left. \right) + \frac{4}{s^2}\phi^2(\nabla_a\nabla_b\phi\Box\phi - 2\nabla_a\nabla_c\phi\nabla^c\nabla_b\phi) \\
&+ \frac{-4(1-s)((D-s-1))}{s^4}(\nabla_a\phi\nabla_b\phi)(\nabla_c\phi\nabla^c\phi) + \frac{4(4-2s-D)}{s^3}\phi\nabla_a\nabla_b\phi(\nabla_c\phi\nabla^c\phi) \\
&- \frac{4(1-s)}{s^3}\phi(\nabla_c\nabla_a\phi\nabla^c\phi\nabla_b\phi + \nabla_c\phi\nabla_a\phi\nabla^c\nabla_b\phi)
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
S^{cd}S_{cabd} &= \phi^4 R^{cd}R_{cabd} + \phi^2 \left( \frac{1}{s}\phi(R_b^c\nabla_c\nabla_a\phi - R\nabla_a\nabla_b\phi - g_{ab}R^{cd}\nabla_c\nabla_d\phi + R_a^c\nabla_c\nabla_b\phi) + \right. \\
&\frac{(1-s)}{s^2} \left( R_b^c\nabla_c\phi\nabla_a\phi - R\nabla_a\phi\nabla_b\phi - g_{ab}R^{cd}\nabla_c\phi\nabla_d\phi + R_a^c\nabla_c\phi\nabla_b\phi \right) - \frac{1}{s^2}(R_{ab} - g_{ab}R)(\nabla_c\phi\nabla^c\phi) \left. \right) + \\
&\phi^2 \left( R_{cabd} \left( \frac{D-2}{s}\phi\nabla^c\nabla^d\phi + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2}\nabla^c\phi\nabla^d\phi \right) - R_{ab} \left( \frac{(2-s-D)}{s^2}\nabla_c\phi\nabla^c\phi + \frac{1}{s}\phi\Box\phi \right) \right) \\
&- \frac{D(D-2)}{s^3}(\phi\nabla_a\nabla_b\phi)(\nabla_c\phi\nabla^c\phi) + \frac{(2D+s-4)}{s^3}g_{ab}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)(\phi\Box\phi) \\
&+ \frac{(1-s)(D-2)}{s^4}(\nabla_a\phi\nabla_b\phi)(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)
\end{aligned} \tag{B.10}$$

$$\begin{aligned}
SS_{ab} &= \phi^4 RR_{ab} + \phi^2 R \left( \frac{D-2}{s}\phi\nabla_a\nabla_b\phi + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2}\nabla_a\phi\nabla_b\phi + \frac{(2-s-D)}{s^2}g_{ab}\nabla_c\phi\nabla^c\phi \right. \\
&+ \frac{1}{s}g_{ab}\phi\Box\phi \left. \right) + \phi^2 R_{ab} \left( \frac{2(D-1)}{s}\phi\Box\phi + \frac{(-D^2+3D-2sD+2s-2)}{s^2}\nabla_c\phi\nabla^c\phi \right) - \\
&\frac{2(D-1)(D-2)}{s^2}\phi^2\Box\phi(\nabla_a\nabla_b\phi) + \frac{2(D-1)(D-2)(1-s)}{s^2}\phi^2(\nabla_a\nabla_b\phi)(\Box\phi) + \frac{2(D-1)}{s^2}g_{ab}(\phi\Box\phi)^2 \\
&+ \frac{(-D^2+3D-2sD+2s-2)(D-2)}{s^3}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)(\phi\nabla_a\nabla_b\phi) \\
&+ \frac{(-3D^2+9D-4sD+4s-6)}{s^3}g_{ab}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)(\phi\Box\phi) + \frac{(-D^2+3D-2sD+2s-2)(2-s-D)}{s^4} \\
&\times g_{ab}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)^2 + \frac{(-D^2+3D-2sD+2s-2)(1-s)(D-2)}{s^4}g_{ab}(\nabla_c\phi\nabla^c\phi)\nabla_a\phi\nabla_b\phi
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
S_{ac}S_b{}^c &= \phi^4 R_{ac}R_b{}^c + \phi^2 R_{ac} \left( \frac{D-2}{s} \phi \nabla^c \nabla_b \phi + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2} \nabla^c \phi \nabla_b \phi \right) \\
&+ \phi^2 R_b{}^c \left( \frac{D-2}{s} \phi \nabla_a \nabla_c \phi + \frac{(1-s)(D-2)}{s^2} \nabla_a \phi \nabla_c \phi \right) + 2\phi^2 R_{ab} \left( \frac{(2-s-D)}{s^2} \nabla_c \phi \nabla^c \phi + \frac{1}{s} \phi \square \phi \right) \\
&\frac{(D-2)^2}{s^2} \phi^2 \nabla_a \nabla_c \phi \nabla^c \nabla_b \phi + \frac{(1-s)^2 (D-2)^2}{s^4} \nabla_a \phi \nabla_c \phi \nabla^c \phi \nabla_b \phi \\
&+ \frac{(1-s)(D-2)^2}{s^3} \phi (\nabla_a \phi \nabla_c \phi \nabla^c \nabla_b \phi + \nabla_a \nabla_c \phi \nabla^c \phi \nabla_b \phi) \\
&+ \frac{1}{s^2} g_{ab} (\phi \square \phi)^2 + \frac{(2-s-D)^2}{s^4} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi)^2 + \frac{2(2-s-D)}{s^3} (\phi \square \phi) (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) \\
&+ \frac{2(2-s-D)(D-2)}{s^3} \phi \nabla_a \nabla_b \phi (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) + \frac{2(2-s-D)(1-s)(D-2)}{s^4} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi) \nabla_a \phi \nabla_b \phi \\
&+ \frac{2(D-2)}{s^3} \phi \nabla_a \nabla_b \phi (\phi \square \phi) + \frac{2(1-s)(D-2)}{s^3} \nabla_a \phi \nabla_b \phi (\phi \square \phi)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

# Apéndice C

## Geometría del cono aplastado

En este apéndice desarrollaremos los pasos necesarios para la obtención de la expansión ref para la métrica y para el campo escalar. Como se mencionó en la Sección ref, partimos del espacio réplica  $B_n$ , que está definido como  $n$  copias de la variedad  $B_1$ , sujeto a las condiciones cíclicas de periodicidad  $\tau = \tau + 2\pi n$ . En este espacio, la métrica del cono aplastado puede escribirse en términos de las coordenadas cuasi-cilíndricas  $(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}, \tilde{y}^i)$ , en una vecindad suficientemente pequeña de  $C_n$ , la superficie de codimensión 2 que queda fija bajo la acción de la simetría  $\mathbb{Z}^n$ . Esta simetría intercambia cíclicamente las réplicas, de manera que al nivel de la coordenada periódica actúa como una rotación discreta de la forma  $\tilde{\tau} \rightarrow \tilde{\tau} + 2\pi/n$ .

La tarea es obtener la continuación analítica de la métrica en el orbifoldio  $\hat{B}_n = B_n/\mathbb{Z}^n$ . En  $B_n$ , se debe pedir entonces que se satisfaga la condición de regularidad en el origen, además de la simetría  $\mathbb{Z}^n$ . Esta simetría implica que toda la dependencia en  $\tau$  debe aparecer en la forma  $e^{\pm in\tau}$ . La regularidad en  $\tilde{\rho} = 0$  implica además que este término debe venir acompañado por una potencia  $\tilde{\rho}^n$ . En esta elección particular de las coordenadas, la coordenada  $r\tilde{h}\tilde{o}$  se define en la dirección de las geodésicas que parten de  $C_n$ , y por lo tanto debe ser ortogonal a las coordenadas  $y^i$  fijando la componente  $g_{\tilde{\rho}i}$  a cero. La coordenada  $\tilde{\tau}$  es a su vez ortogonal a la coordenada espacial en  $B_n$ , y esto implica que  $g_{\tilde{\rho}\tilde{\tau}a} = 0$ . De esta manera, sabemos que la métrica más general en estas coordenadas puede escribirse como

$$ds^2 = d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 F(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau}^2 + G(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) dy^i dy^j + H(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} dy^i. \quad (\text{C.1})$$

Las funciones  $F$ ,  $G$  y  $H$  se determinan a partir de las condiciones sobre la dependencia en  $\tilde{\rho}$  y  $\tilde{\tau}$  mencionadas anteriormente, y escribiendo esta dependencia explícita en términos de una expansión de Taylor para  $\tilde{\rho}^2$  y  $e^{\pm in\tau}$ :

$$\mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm in\tau}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{C}_{km} \tilde{\rho}^{2m} \right) \tilde{\rho}^{|k|n} e^{\pm ikn\tilde{\tau}}, \quad (\text{C.2})$$

donde los  $\tilde{C}_{km}$  son los correspondientes coeficientes de la expansión. Obtenemos que los coeficientes que aparecen en ref, toman la forma:

$$F(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = 1 + \tilde{\rho}^2 \mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm in\tau}) \quad (\text{C.3})$$

$$G(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = g_{ij} + \mathcal{O}(\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau}) \quad (\text{C.4})$$

$$H(\tilde{\rho}, \tilde{\tau}) = \tilde{\rho}^2 \mathcal{O}(\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau}), \quad (\text{C.5})$$

donde  $\mathcal{O}(\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau})$  denota la parte de  $\mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau})$  que no contiene la constante que proviene de tomar  $k = m = 0$ .

Podemos pasar al orbifolio  $\hat{B}^n$  haciendo una transformación de coordenadas, de manera que la periodicidad cambie de  $\tilde{\tau} = \tilde{\tau} + 2\pi n$  a  $\tau = \tau + 2\pi$ . Esto implica la siguiente transformación:

$$\rho \equiv \left(\frac{\tilde{\rho}}{n}\right)^n, \quad \tau \equiv n\tilde{\tau}. \quad (\text{C.6})$$

En términos del parámetro auxiliar  $\epsilon = 1 - \frac{1}{n}$ , y sustituyendo este cambio de variables en la métrica (C.1), obtenemos la siguiente expresión para la métrica:

$$ds^2 = \rho^{-2\epsilon} \{ d\rho^2 + \rho^2 [1 + \rho^{2-2\epsilon} \mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau})] d\tau^2 \} \\ + [g_{ij} + \mathcal{O}(\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau})] dy^i dy^j + \rho^{2-2\epsilon} \mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau}) d\tau dy^i \quad (\text{C.7})$$

Ahora procedemos a realizar la continuación analítica a valores reales arbitrarios de  $\epsilon$ . Para ello, sustituimos en la expansión de Taylor (C.2) la definición de  $\epsilon$ :

$$\mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm i n \tau}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} C_{km} \tilde{\rho}^{(2-2\epsilon)m} \right) \tilde{\rho}^{|k|} e^{\pm i k \tilde{\tau}}, \quad (\text{C.8})$$

En [11] se menciona que aunque esta es la prescripción más sencilla y natural para realizar la continuación anítica al orbifolio  $\hat{B}_n$ , no es la única. En particular, otras prescripciones podrían afectar la definición de  $q_\alpha$  en (3.70). Ahora podemos pasar a coordenadas complejas  $z = \rho e^{i\tau}$ ,  $\bar{z} = e^{-i\tau}$ , y escribir la métrica en la forma:

$$ds^2 = e^{2A} [dz d\bar{z} + e^{2A} T (\bar{z} dz - z d\bar{z})^2] + (g_{ij} + 2K_{aij} x^a + Q_{abij} x^a x^b) dy^i dy^j \\ + 2ie^{2A} (U_i + V_{ai} x^a) (\bar{z} dz - z d\bar{z}) dy^i + \dots, \quad (\text{C.9})$$

donde los coeficientes tensoriales  $T$ ,  $K_{aij}$ ,  $Q_{abij}$ ,  $U_i$  y  $V_{ai}$  se obtienen a partir de la expansión en Taylor (C.8). En particular,  $K_{aij}$  resulta ser el tensor de curvatura extrínseca definido en ref, y ninguno de estos coeficientes contiene dependencia alguna en  $z$  o  $\bar{z}$ , a excepción de  $Q_{abij}$ , que contiene una potencia  $\rho^{2-2\epsilon}$ . Los puntos suspensivos denotan términos en la expansión de Taylor que aparecen solamente a orden mayor a  $\rho^{(2-2\epsilon)}$ . Usando la expansión anterior podemos obtener todas las componentes del tensor de Riemann:

$$R_{abcd} = 12e^{4A} T \hat{\epsilon}_{ab} \hat{\epsilon}_{cd}, \quad (\text{C.10})$$

$$R_{abci} = 3e^{2A} \hat{\epsilon}_{ab} V_{ci}, \quad (\text{C.11})$$

$$R_{abij} = 2e^{2A} \hat{\epsilon}_{ab} (\partial_i U_j - \partial_j U_i) + g^{kl} (K_{ajk} K_{bil} - K_{aik} K_{bjl}), \quad (\text{C.12})$$

$$R_{aibj} = e^{2A} [\hat{\epsilon}_{ab} (\partial_i U_j - \partial_j U_i) + 4\hat{g}_{ab} U_i U_j] + g^{kl} K_{ajk} K_{bil} - Q_{abij}, \quad (\text{C.13})$$

$$R_{aijk} = \partial_k K_{aij} - \gamma_{ik}^l K_{ajl} + 2\hat{\epsilon}_{ab} \hat{g}^{bc} K_{cij} U_k - (j \leftrightarrow k), \quad (\text{C.14})$$

$$R_{ikjl} = r_{ikjl} + e^{-2A} \hat{g}_{ab} (K_{ail} K_{bjk} - K_{aij} K_{bkl}) \quad (\text{C.15})$$

El análisis anterior es igualmente válido si consideramos un campo escalar  $\phi$  acoplado a la métrica de manera arbitraria. En este caso la regularidad en  $\rho = 0$  dicta que la continuación analítica al orbifold  $\hat{B}^n$ , debe ser una expansión en términos de  $\rho^2$  y  $\rho^n e^{\pm in\tau}$ :

$$\phi = \mathcal{O}(1, \tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm in\tau}) = \phi(y)^{(o)} + \mathcal{O}(\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^n e^{\pm in\tau}), \quad (\text{C.16})$$

donde hemos elegido el término constante como la solución del campo, que en principio depende de las coordenadas, evaluado en una parametrización particular que determinamos a partir de la forma de la superficie de entrelazamiento. Por ejemplo, en el caso de superficies esféricas en 5 dimensiones, donde el campo escalar sólo depende de la coordenada radial  $r$ , podemos parametrizarla como  $r(\theta)$ , que corresponde a tomar  $\phi(r(y)) = \phi(y)^{(o)}$ . Evaluando explícitamente la expansión en Taylor hasta orden  $\rho^{2-2\epsilon}$  obtenemos:

$$\phi = \phi^{(o)} + \phi_z z + \phi_{\bar{z}} \bar{z} + \phi_{zz} z^2 + \phi_{\bar{z}\bar{z}} \bar{z}^2 + \phi_{z\bar{z}} (z\bar{z})^{1-\epsilon} + \dots \quad (\text{C.17})$$

Si consideramos potencias del campo escalar de la forma  $\phi^n$ , podemos extraer la dependencia en  $\epsilon$  en la siguiente expresión:

$$\phi^n = (\phi^{(o)})^n + \sum_{l=0}^k \sum_{k=0}^{n-1} C_{lk} \rho^{2((l+n-k)-\epsilon(n-k))} + \dots, \quad (\text{C.18})$$

donde los  $C_{lk}$  son los coeficientes de la expansión. Los puntos suspensivos denotan términos que no dependen de  $\epsilon$ . Notemos que en esta expresión toda la dependencia en  $\epsilon$  está contenida en potencias de la forma  $\rho^{\alpha\epsilon+\beta}$ .



# Bibliografía

- [1] Leonard Susskind. *The World as an Hologram*, J. Math. Phys. 36, 6377 (1995) [arXiv:hep-th/9409089].
- [2] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. 116, 241103 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.241103 [arXiv:1606.04855 [gr-qc]]
- [3] A. Einstein, B.Podolsky and N.Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Can Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47, (1935).
- [4] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics 1, 195 (1964).
- [5] R. M. Wald, *Black Hole entropy is Noether Charge*, Phys. Rev. D 48, 3427 (1993) [arXiv:gr-qc/9307038].
- [6] M. Chemicoff, et al., *Black hole thermodynamics, conformal couplings, and  $R^2$  terms*, JHEP 06, 159 (2016) [arXiv:1604.08203 [hep-th]].
- [7] J. Oliva and S. Ray, *Conformal couplings of a scalar field to higher curvature terms*, Class. Quant. Grav. 29 (2012) 205008. [arXiv:1112.4112 [hep-th]].
- [8] C. Garraffo and G. Giribet, *The Lovelock Black Holes*, Mod. Phys. Lett. A 23, 1801 (2008) doi:10.1142/S0217732308027497 [arXiv:0805.3575 [gr-qc]].
- [9] M. Chemicoff, O. Fierro, G. Giribet and J. Oliva, *Black holes in quasi-topological gravity and conformal couplings*, JHEP 02 (2017) 010, [1612.00389].
- [10] A. Lewkowycz and J. Maldacena, *Generalized gravitational entropy*, JHEP 1308 (2013) 090, [arXiv:1304.4926 [hep-th]].
- [11] X. Dong, *Holographic Entanglement Entropy for General Higher Derivative Gravity*, JHEP 01 (2014) 044, [arXiv:1310.5713].
- [12] J. Camps, *Generalized entropy and higher derivative Gravity*, JHEP 03 (2014) 070, [arXiv:1310.6659]
- [13] J. R.G. Cai, *Gauss-Nonnet Black Holes in AdS Spaces*, Phys. Lett. 582, 237 (2004)
- [14] Y.-G. Miao and Z.-M. Xu, *Validity of Maxwell equal area law for black holes conformally coupled to scalar fields in AdS5 Spacetime*, arXiv:1610.01769 [hep-th].
- [15] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics.*, Second edition, Cambridge University Press , U.S.A, (2007).

- [16] M. Peskin and D.Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, First edition, Perseus Books, U.S.A, (1995).
- [17] R. Blumenhagen, E. Plauschinn, *Introduction to Conformal Field Theory With Applications to String Theory*, Lect. Notes Phys. 779, Springer, Berlin Heidelberg, (2009).
- [18] I. Antoniadis, P. O. Mazur and E. Mottola, *Conformal Symmetry and Central Charges in 4 Dimensions*, Nucl. Phys. B 388, 627 (1992) [hep-th/9205015].
- [19] P. Calabrese and J. Cardy, *Entanglement entropy and quantum field theory*, J. Stat. Mech. 0406, P002 (2004) [arXiv:hep-th/0405152].
- [20] E. Cáceres, P. Nguyen, *Notas sobre entropía de entrelazamiento holográfica en gravedad de Horndeski*, Aún por publicar.
- [21] G. W. Horndeski, *Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*, Int. J. Theor. Phys. 10 (1974) 363;
- [22] S. W. Hawking and D. N. Page, *Thermodynamics Of Black Holes In Anti-De Sitter Space*, Commun. Math. Phys. 87 577 (1983).
- [23] X. Dong and A. Lewkowycz, *Entropy, Extremality, Euclidean Variations, and the Equations of Motion*, 1705.08453. <https://arxiv.org/abs/1705.08453>.
- [24] A. Bhattacharyya, A. Kaviraj, and A. Sinha, *Entanglement entropy in higher derivative holography*, JHEP 08 (2013) 012, [arXiv:1305.6694].
- [25] S. Hawking, *Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse*, Phys. Rev. D 14 (1976) 2460.
- [26] D. V. Fursaev, A. Patrushev and S. N. Solodukhin, *Distributional Geometry of Squashed Cones*, 1306.4000.
- [27] T. Faulkner, M. Guica, T. Hartman, R. C. Myers and M. Van Raamsdonk, *Gravitation from Entanglement in Holographic CFTs*, JHEP 1403, 051 (2014) doi:10.1007/JHEP03(2014)051 [arXiv:1312.7856 [hep-th]].
- [28] S.W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Cambridge U. Aug 1975. 22 pp. Published in Commun.Math.Phys. 43 (1975) [Erratum-ibid.46, 206 (1976)].
- [29] D. Kubiznak, R. B. Mann, *P - V criticality of charged AdS black holes*, JHEP 7 (2012) 33
- [30] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D7, 2333 (1973).
- [31] B. J. Carr, S.W. Hawking, *Black holes in the early Universe*, Cambridge U., Inst. of Astron. and Cambridge U., DAMTP. Feb 1974. 17 pp. Published in Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 168 (1974)
- [32] Heusler M. (1996), *Black Hole Uniqueness Theorems. Cambridge Lecture Notes in Physics*, Cambridge Univ. Press.
- [33] H. Casini and M. Huerta, *Entanglement entropy in free quantum field theory*, [arXiv:hep-th/09052562].

- [34] V. G. Knizhnik, *Analytic Fields On Riemannian Surfaces*, Phys. Lett. B 180, 247 (1986); “Analytic Fields On Riemann Surfaces. 2,” Commun. Math. Phys. 112, 567 (1987).
- [35] H. Casini and M. Huerta, *A finite entanglement entropy and the c-theorem*, Phys. Lett. B 600, 142 (2004) [arXiv:hep-th/0405111].
- [36] Y.-G. Miao and Z.-M. Xu, *Validity of Maxwell Equal Area Law for Black Holes Conformally Coupled to Scalar Fields in AdS5 Spacetime*, [arXiv:hep-th/1610.01769]
- [37] K. Becker, M. Becker, and J. Schwarz, *String Theory and M-Theory; A Modern Introduction* Cambridge University Press, Cambridge, (2006).
- [38] Clifford V. Johnson *D-Branes* Cambridge University Press, (2003).
- [39] J. M. Maldacena, *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. 38 , 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
- [40] J. M. Maldacena and A. Strominger, *Black hole grey body factors and d-brane spectroscopy* Phys.Rev. D55 (1997) 861–870, [arXiv:hep-th/9609026].
- [41] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, *Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions*, Cambridge University Press 2014, [arXiv:1101.0618 [hep-th]].
- [42] A. V. Ramallo, *Introduction to the AdS/CFT correspondence*, Springer Proc. Phys. 161, 411 (2015) [arXiv:1310.4319 [hep-th]].
- [43] G. T. Horowitz and A. Strominger, *Black strings and P-branes*, Nucl. Phys. B360 (1991) 197–209.
- [44] V.E. Hubeny, *The AdS/CFT Correspondence* [arXiv:1501.00007].
- [45] S. Hawking, J. M. Maldacena and A. Strominger, *De-Sitter entropy, quantum entanglement and AdS/CFT*, JHEP 0105, 001 (2001).
- [46] S. W. Hawking and D. N. Page, “Thermodynamics Of Black Holes In Anti-De Sitter Space,” Commun. Math. Phys. 87, 577 (1983).
- [47] H. Osborn and G. M. Shore, *Correlation functions of the energy momentum tensor on spaces of constant curvature*, Nucl. Phys. B 571, 287 (2000) [arXiv:hep-th/9909043].
- [48] V. E. Hubeny, M. Rangamani and T. Takayanagi, *A Covariant holographic entanglement entropy proposal*, JHEP 07 (2007) 062, [arXiv:hep-th/07050016].
- [49] ] X. Dong, A. Lewkowycz, and M. Rangamani, *Deriving covariant holographic entanglement*, JHEP 11 (2016) 028, [arXiv:1607.07506].
- [50] V. E. Hubeny, H. Maxfield, M. Rangamani and E. Tonni, *Holographic entanglement plateaux*, JHEP 1308, 092 (2013), [arXiv:1306.4004]
- [51] E. Witten, *Quantum gravity in de Sitter space*, [arXiv:hep-th/0106109]; A. Strominger, JHEP 0110, 034 (2001).
- [52] M. Srednicki, *Entropy and area* Phys. Rev. Lett. 71, 666 (1993), [arXiv:hep-th/9303048]

- [53] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT*, Phys. Rev. Lett. 96, 181602 (2006) [arXiv:hep-th/0603001].
- [54] S. Ryu and T. Takayanagi, *Aspects of holographic entanglement entropy*, JHEP 0608 (2006) 045 [arXiv:hep-th/0605073].
- [55] D. V. Fursaev, *Proof of the holographic formula for entanglement entropy*, JHEP 0609 (2006) 018 [arXiv:hep-th/0606184].
- [56] L.-Y. Hung, R. C. Myers, and M. Smolkin, *On Holographic Entanglement Entropy and Higher Curvature Gravity*, JHEP 1104 (2011) 025, [arXiv:1101.5813].
- [57] T. Hirata and T. Takayanagi, *AdS/CFT and strong subadditivity of entanglement entropy*, JHEP 0702 (2007) 042 [arXiv:hep-th/0608213].
- [58] R. A. Janik, *The Dynamics of Quark-Gluon Plasma and AdS/CFT*, Lect. Notes Phys. 828, 147 (2011).
- [59] D. V. Fursaev and S. N. Solodukhin, *On the description of the Riemannian geometry in the presence of conical defects*, Phys. Rev. D 52, 2133 (1995) [arXiv:hep-th/9501127].
- [60] T. Nishioka, S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic Entanglement Entropy: An Overview*, J. Phys. A 42 (2009) 504008 [arXiv:hep-th/09050932].
- [61] T. Takayanagi, *Entanglement Entropy from a Holographic Viewpoint*, Class. Quant. Grav. 29 (2012) 153001 [arXiv:1204.2450 [gr-qc]].