UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

Álgebras de Hopf asociadas a torres de álgebras

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
LUIS ALBERTO GÓMEZ TELÉSFORO

DOCTOR DANIEL LABARDINI FRAGOSO
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

CIUDAD DE MÉXICO, ABRIL 2017

Álgebras de Hopf asociadas a torres de álgebras

Introducción

Las álgebras de Hopf han surgido en diversas áreas de las matemáticas y muchas de estas álgebras surgen graduadas. Existen muchos ejemplos de álgebras de Hopf graduadas que guardan relación con las categorías de módulos de álgebras de dimensión finita. Esta relación no es accidental, ya que aquéllas son la suma directa de los grupos de Grothendieck de éstas y las operaciones de biálgebra son inducidas por los funtores de inducción y restricción usuales. Siguiendo el trabajo de Nantel Bergeron y Huilan Li [**2**] daremos condiciones suficientes para que la suma directa de los grupos de Grothendieck de álgebras de dimensión finita sobre el campo de los números complejos sea una biálgebra y en consecuencia un álgebra de Hopf.

Comenzamos con álgebras de Hopf sobre una anillo conmutativo arbitrario. Para definirlas, se introduce la noción de coálgebra dualizando la definición de álgebra. Con ello a la mano definimos un álgebra de Hopf, que no es más que una biálgebra (un espacio que conjunta las propiedades de álgebra y coálgebra) que tiene un morfismo antípoda. Por supuesto estamos interesados en álgebras de Hopf graduadas, de modo que, brevemente, expondremos las propiedades de ellas que nos serán necesarias en las secciones posteriores. Continuamos con el grupo de Grothendieck, centrándonos ya en el caso de los números complejos. Damos inicio a esta sección con la definición del grupo de Grothendieck asociado a la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de dimensión finita y el asociado a su categoría de módulos proyectivos finitamente generados. Estos se definen a través de clases de isomorfismo y sucesiones exactas de las categorías mencionadas. Se verá que el grupo de Grothendieck se comporta de la mejor manera posible con respecto a módulos simples y proyectivos inescindibles, pues las clases de isomorfismo de ellos forman una base de aquél; además, el grupo de Grothendieck del producto tensorial de dos álgebras es el producto tensorial de los grupos de Grothendieck. Estos resultados permiten justificar la definición de torre de álgebras y son muy útiles para conseguir nuestro objetivo.

Los siguientes objetos de estudio son las torres de álgebras. Ellas son una clase especial de álgebras graduadas en las que cada componente es un álgebra de dimensión finita. Aquí mostramos que asociada a toda torre de álgebras se encuentran dos álgebras de Hopf graduadas que se obtienen a partir de los grupos de Grothendieck de las componentes de la torre y que los morfismos que dan la estructura de álgebra de Hopf son inducidos por los funtores de inducción y restricción. Terminamos con ejemplos. Aunque hay diversos enjemplos, aquí sólo estudiaremos torres de álgebras que se obtienen de álgebras de grupo de grupos finitos. Tratamos los ejemplos que trabajó Zelevinsky con respecto a grupos finitos en [**6**]; es decir, mostraremos que la suma directa de las álgebras de grupo del grupo simétrico y la de las álgebras de grupo del producto corona del grupo simétrico con un grupo finito son torres de álgebras. Para terminar observamos que el resultado de Bergeron y Li puede adecuarse para el caso del grupo general lineal finito también trabajado por Zelevinsky.

Agradezco a los lectores por tomarse el tiempo de revisar este trabajo. Es cuando ellos leen que cobra vida.

Álgebras de Hopf

En lo que sigue R denota un anillo conmutativo con uno y supondremos que la acción de R en cualquier R-módulo es central.

Definición 1.

- Una *R-álgebra* es una terna (A,μ,η) consistente de $A \in R$-Mód, $\mu \in \operatorname{Hom}_R(A \otimes_R A, A)$ (*multiplicación*) y $\eta \in \operatorname{Hom}_R(R, A)$ (*unidad*) tales que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} A \otimes_R A \otimes_R A \arrow[r, "Id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes Id_A"'] & A \otimes_R A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes_R A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \otimes_R A \arrow[r, "\eta \otimes Id_A"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes_R A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes_R R \arrow[l, "Id_A \otimes \eta"'] \arrow[dl, "\cong"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

  Nos referiremos a la conmutatividad del diagrama de la izquierda como *propiedad asociativa* y a la del diagrama de la derecha como *propiedad unitaria.*

- Si A y B son R-álgebras y $f \in \operatorname{Hom}_R(A,B)$. Decimos que f es un *morfismo de R-álgebras* cuando $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$ y $f \circ \eta_A = \eta_B$.
- Una *R-coálgebra* es una terna (C,Δ,ε) tal que $C \in R$-Mód, $\Delta \in \operatorname{Hom}_R(C, C \otimes_R C)$ (*comultiplicación*), $\varepsilon \in \operatorname{Hom}_R(C,R)$ (*counidad) y* los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C \otimes_R C \otimes_R C & C \otimes_R C \arrow[l, "\Delta \otimes Id_C"'] \\ C \otimes_R C \arrow[u, "Id_C \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes_R R & C \otimes_R C \arrow[l, "Id_C \otimes \varepsilon"'] \arrow[r, "\varepsilon \otimes Id_C"] & R \otimes_R C \\ & C \arrow[ul, "\cong"] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

  La conmutatividad del diagrama a la izquierda será referida como *propiedad coasociativa* y la del diagrama a la derecha como *propiedad counitaria.*

- Si C y D son R-coálgebras un morfismo $f \in \operatorname{Hom}_R(C,D)$ es *un morfismo de R-coálgebras* si $(f \otimes f) \circ \Delta_C = \Delta_D \circ f$ y $\varepsilon_D \circ f = \varepsilon_C$.
- Una *R-biálgebra* es una quinteta $(H,\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$ tal que (H,μ,η) es una R-álgebra, (H,Δ,ε) es una R-coálgebra y $\Delta : H \to H \otimes_R H$ y $\varepsilon : H \to R$ son morfismos de R-álgebras.
- Un *morfismo de R-biálgebras* es un morfismo de R-módulos que es morfismo de R-álgebras y R-coálgebras a la vez.

Es muy sencillo verificar que si (H,μ,η) es una R-álgebra y (H,Δ,ε) es una R-coálgebra, entonces $\Delta : H \to H \otimes_R H$ y $\varepsilon : H \to R$ son morfismos de R-álgebras si y sólo si $\mu : H \otimes_R H \to H$ y $\eta : R \to H$ son morfismos de R-coálgebras. Si (A,μ,η) es un álgebra la denotaremos con A; procederemos de forma análoga con coálgebras y biálgebras.

Proposición 1. *Si H es una R-álgebra (R-coálgebra), entonces $H^* = \operatorname{Hom}_R(H,R)$ es una R-coálgebra (R-álgebra) con las operaciones inducidas por el funtor* $\operatorname{Hom}_R(\_\,,R)$.

Demostración. Se sigue de que $\mathrm{Hom}_R(\_, R)$ es un funtor contravariante. $\square$

Si C es una R-coálgebra y A, una R-álgebra, $B = \mathrm{Hom}_R(C, A)$ y $f, g \in B$ definimos la *convolución* de f con g como $f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$. Un calculo directo sirve para demostrar que $\eta \circ \varepsilon \in B$ es el neutro con respecto a la convolución; además, la convolución es una multiplicación en B en el sentido de la definición 1 y la unidad de B es el morfismo cuya regla de correspondencia es $r \mapsto r(\eta \circ \varepsilon)$. Así, B tiene estructura de R-álgebra.

Definición 2.

- Sea H una R-biálgebra. Un *morfismo antípoda* para H es un morfismo $S \in \mathrm{Hom}_R(H, H)$ tal que S es inverso bilateral de Id_H con respecto a la convolución en $\mathrm{Hom}_R(H, H)$.
- Una *R-álgebra de Hopf* es una R-biálgebra con un morfismo antípoda.

Es sabido que un inverso bilateral siempre es único, de manera que los morfismos antípodas, cuando existen, son únicos. En principio deberíamos definir morfismo de álgebras de Hopf, pero la siguiente proposición nos exime de ello.

Proposición 2. *Si H y K son R-álgebras de Hopf con morfismos antípodas S y T respectivamente y $\gamma : H \to K$ es un morfismo de biálgebras, entonces*

$$\gamma \circ S = T \circ \gamma.$$

Demostración. Si verificamos que con respecto a la convolución en $\mathrm{Hom}_R(H, K)$ se satisface que

$$\gamma * (T \circ \gamma) = \eta_K \circ \varepsilon_H = (\gamma \circ S) * \gamma, \tag{1}$$

habremos demostrado la proposición; ya que

$$\begin{aligned} T \circ \gamma &= (\eta_K \circ \varepsilon_H) * (T \circ \gamma) \\ &= ((\gamma \circ S) * \gamma) * (T \circ \gamma) \\ &= (\gamma \circ S) * (\gamma * (T \circ \gamma)) \\ &= (\gamma \circ S) * (\eta_K \circ \varepsilon_H) \\ &= \gamma \circ S. \end{aligned}$$

Veamos que se satisface 1. Usando que S es morfismo antípoda y que γ es morfismo de biálgebras:

$$\begin{aligned} (\gamma \circ S) * \gamma &= \mu_K \circ (\gamma \circ S \otimes \gamma) \circ \Delta_H \\ &= \mu_K \circ (\gamma \otimes \gamma) \circ (S \otimes Id_H) \circ \Delta_H \\ &= \gamma \circ \mu_H \circ (S \otimes Id_H) \circ \Delta_H \\ &= \gamma \circ \eta_H \circ \varepsilon_H \\ &= \eta_K \circ \varepsilon_H. \end{aligned}$$

Análogamente podemos mostrar que $\gamma * (T \circ \gamma) = \eta_K \circ \varepsilon_H$. De esta forma terminamos. $\square$

Definición 3. i) Una R-álgebra A es *graduada* por $\mathcal{G} = \{A_n \mid A_n \text{ es un submódulo de } A \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ si como R-módulos $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y la multiplicación y unidad de A satisfacen que $\mu(A_n \otimes A_m) \leq A_{n+m}$ para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y $\eta(\mathbb{Z}) \leq A_0$.

ii) Una R-coálgebra C es *graduada* por $\mathcal{G} = \{C_n \mid C_n \text{ es un submódulo de } C \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}$ si C se descompone como $C = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} C_n$ y la comultiplicación y la counidad de C satisfacen que $\Delta(C_n) \leq \bigoplus_{i+k=n} C_i \otimes C_k$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon(C_n) = 0$ si $n \neq 0$.

iii) Una R-biálgebra es *graduada* si como R-álgebra y R-coálgebra es graduada por la misma familia de submódulos.

iv) Una R-álgebra de Hopf es *graduada* si como R-biálgebra lo es.

En la definición anterior volvemos a evitar el morfismo antípoda cuando hablamos de álgebras de Hopf, la razón es la siguiente proposición que se demuestra usando recursión y se encuentra en **[4]**.

Proposición 3. *Una R-biálgebra graduada H es una R-álgebra de Hopf y el morfismo antípoda es un morfismo graduado; es decir, si S es el morfismo antípoda, entonces $S(H_n) \leq H_n$.*

Notemos que si k es un campo y $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ es una k-álgebra (k-coálgebra) graduada y cada subespacio A_n es de dimensión finita (sobre k), entonces $H^* = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n^*$ es una k-coálgebra (k-álgebra) graduada, pues $(H_m \otimes H_n)^* \cong H_n^* \otimes H_m^*$.

Grupo de Grothendieck

En adelante, con álgebra querremos decir $\mathbb{C}$-álgebra de dimensión finita y el símbolo $\otimes$ representará el producto tensorial como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales.

Definición 4. Sea A un álgebra. Denotaremos con A-mód a la categoría de A módulos finitamente generados.

- El *grupo de Grothendieck* $G(A)$ de la categoría A-mód se define como el cociente F/E del grupo abeliano libre con base las clases de isomorfismo de A-mód por el subgrupo generado por los elementos de la forma $[V] - [W] - [U]$, donde $U, V, W \in A$-mód, la sucesión
$$0 \to W \to V \to U \to 0$$
es exacta y $[V]$ denota la clase de isomorfismo de V.
- Denotemos con $\mathcal{P}(A)$ a la categoría de A módulos proyectivos finitamente generados. El *grupo de Grothendieck* $K(A)$ de $\mathcal{P}(A)$ se define de manera análoga.

No mostraremos los siguientes resultados; la demostración del teorema 1 se puede hallar en **[1]** , mientras que el teorema 2 utiliza que todo A-módulo proyectivo finitamente generado es suma directa módulos proyectivos inescindibles finitamente generados y que estos están en biyección con los módulos simples.

Teorema 1. *El grupo de Grothendieck $G(A)$ es libre con base $\beta = \{[V_s] \mid V_s \text{ es simple}\}$.*

Teorema 2. *El grupo de Grothendieck $K(A)$ es libre con base $\beta = \{[P_s] \mid P_s \text{ es cubierta de } V_s\}$.*

Para poder dar la definición de torre de álgebras necesitamos algunos resultados.

Proposición 4. *Sean A y B álgebras de dimensión finita. Si $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$ son sistemas completos de idempotentes primitivos ortogonales, entonces $G = \{e \otimes f \mid e \in E \text{ y } f \in F\}$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales de $A \otimes B$.*

Demostración. Como la definición del producto en $A \otimes B$ es $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$, es claro que los elementos de G son idempotentes ortogonales y que

$$1 \otimes 1 = \sum_{e \in E, f \in F} e \otimes f.$$

Resta mostrar que cada $e \otimes f \in G$ es primitivo.

Para eso recordamos que para cualquier álgebra C, un idempotente $g \in C$ es primitivo si y sólo si gCg es un álgebra local, es decir, gCg tiene un único ideal izquierdo máximo. Sabiendo esto, con la siguiente proposición habremos terminado. □

Proposición 5. *El producto tensorial de dos álgebras locales de dimensión finita es un álgebra local.*

Demostración. Sean A y B álgebras locales de dimensión finita. Si M y N son los ideales izquierdos máximos de A y de B respectivamente, entonces $M \otimes B + A \otimes N$ es un ideal izquierdo de $A \otimes B$. Como A/M y B/N son álgebras con división de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$, concluimos que $A/M \cong B/N \cong \mathbb{C}$. Si mostramos que $(A \otimes B)/(M \otimes B + A \otimes N) \cong \mathbb{C}$, habremos terminado. Supongamos que $\gamma : A/M \to \mathbb{C}$ y $\varphi : B/N \to \mathbb{C}$ son isomorfismos, entonces el morfismo $\phi : A \otimes B \to \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ definido en los generadores como

$$\phi(a \otimes b) = \gamma(a + M) \otimes \varphi(b + N)$$

es suprayectivo con núcleo $M \otimes B + A \otimes N$. Por lo tanto $(A \otimes B)/(M \otimes B + A \otimes N) \cong \mathbb{C}$. □

De estos resultados se concluye el siguiente corolario.

Corolario 1. *Si A y B son álgebras de dimensión finita, entonces $K(A \otimes B) \cong K(A) \otimes_{\mathbb{Z}} K(B)$.*

Demostración. $K(A \otimes B)$ es libre con base

$$\{[P] \mid P \text{ es inescindible}\}.$$

□

Ahora mostraremos el análogo para $G(A \otimes B)$.

Proposición 6. *Sean A y B álgebras de dimensión finita. Los $A \otimes B$-módulos simples son de la forma $S \otimes R$ con S simple como A-módulo y R simple como B-módulo.*

Demostración. Recordemos que los A-módulos simples satisfacen ser de la forma $Ae/\mathrm{Rad}(Ae)$. Análogamente, para los simples de B. Así, es suficiente mostrar que para cualesquiera idempotentes primitivos $e \in A$ y $f \in B$, si $S = Ae/\mathrm{Rad}(Ae)$ y $R = Bf/\mathrm{Rad}(Bf)$, entonces $S \otimes R \cong (Ae \otimes Bf)/\mathrm{Rad}(Ae \otimes Bf)$.

Supongamos que $f : Ae \to S$ y $g : Bf \to R$ son proyecciones, entonces $f \otimes g : Ae \otimes Bf \to S \otimes R$ es un epimorfismo. Queda ver que $\text{núc}(f \otimes g) = \mathrm{Rad}(Ae \otimes Bf)$. Dado que $\mathrm{Rad}(Ae \otimes Bf)$ es el único submódulo máximo de $Ae \otimes Bf$, mostraremos que $\text{núc}(f \otimes g)$ es máximo. Sabemos que

$$\begin{aligned} \text{núc}(f \otimes g) &= \text{núc}(f) \otimes Bf + Ae \otimes \text{núc}(g) \\ &= \mathrm{Rad}(Ae) \otimes Bf + Ae \otimes \mathrm{Rad}(Bf), \end{aligned}$$

si $a \otimes b \notin \text{núc}(f \otimes g)$, entonces $a \notin \mathrm{Rad}(Ae)$ y $b \notin \mathrm{Rad}(Bf)$. Debido a que $\mathrm{Rad}(Ae)$ y $\mathrm{Rad}(Bf)$ son máximos en Ae y Bf respectivamente, para cada $x \in Ae$ y cada $y \in Bf$, existen $\lambda \in A$, $\mu \in B$, $r \in \mathrm{Rad}(Ae)$ y $s \in \mathrm{Rad}(Bf)$ tales que $x = \lambda a + r$ y $y = \mu b + s$. Por lo tanto,

$$x \otimes y = (\lambda \otimes \mu)(a \otimes b) + \lambda a \otimes s + r \otimes \mu b + r \otimes s.$$

Esto implica que $\text{núc}\,(f \otimes g)$ es máximo y así, $\text{núc}\,(f \otimes g) = \text{Rad}\,(Ae \otimes Bf)$. □

Corolario 2. *Para cualesquiera álgebras de dimensión finita A y B se satisface que $G\,(A \otimes B) \cong G\,(A) \otimes_{\mathbb{Z}} G\,(B)$.*

Demostración. $G\,(A \otimes B)$ es libre con base $\{[S] \mid S$ es un $A \otimes B$-módulo simple$\}$. □

Consideremos M, $P \in A \otimes B$-mód y P proyectivo. De los resultados anteriores, podemos escribir $[M] = \sum_i [S_i] \otimes [T_i]$ y $[P] = \sum_j [Q_j] \otimes [R_j]$ con $S_i \in A$-mód y $T_i \in B$-mód simples y $Q_j \in A$-mód y $R_j \in B$-mód proyectivos inescindibles.

Torres de álgebras

Los corolarios 1 y 2 hacen que el número 5 de la siguiente definición quede justificado. Recordemos que si $\varphi : B \to A$ un morfismo inyectivo de álgebras, podemos definir

$$\text{Ind}_B^A : B\text{-mód} \to A\text{-mód} \quad \text{y} \quad \text{Res}_B^A : A\text{-mód} \to B\text{-mód}$$

de la siguiente forma

$$\text{Ind}_B^A\,(M) = A \otimes_B M \quad \text{y} \quad \text{Res}_B^A\,(N) = \text{Hom}_A\,(A, N)\,.$$

Definición 5. Sea $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ un álgebra graduada con multiplicación μ. Decimos que A es una *torre de álgebras* si

1. Cada A_n es un álgebra de dimensión finita con unidad 1_n y $A_0 \cong \mathbb{C}$.
2. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se satisface que $\mu : A_n \otimes A_m \to A_{m+n}$ es un morfismo inyectivo de álgebras unitario.
3. El álgebra A_{n+m} es, con la acción inducida por μ, tanto módulo proyectivo sobre $A_n \otimes A_m$ por la izquierda como por la derecha para cualquier par de naturales m y n.
4. Si $g \in A_{n+m}$, $f_j \in A_m$ y $e_i \in A_n$ con $j, i \in \{1, \ldots, r\}$ son idempotentes primitivos ortogonales, entonces $A_{m+n}g \cong \bigoplus_{(i,j)} (A_n \otimes A_m)\,(e_i \otimes f_j)$ como $A_n \otimes A_m$-módulos izquierdos si y sólo si $gA_{m+n} \cong \bigoplus_{(i,j)} (e_i \otimes f_j)\,(A_n \otimes A_m)$ como $A_n \otimes A_m$-módulos derechos. Es decir, los módulos proyectivos inescindibles que aparecen en la descomposición de $A_{m+n}g$ provienen de los mismos idempotentes que generan a los inescindibles que aparecen en la de gA_{m+n}.
5. La siguiente ecuación se satisface en $\mathcal{G}\,(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} G\,(A_n)$ o en $\mathcal{K}\,(A) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} K\,(A_n)$, para cualesquiera simples $M \in A_m$-mód y $N \in A_n$-mód (o proyectivos en el caso de $\mathcal{K}$) [1]
$$\begin{aligned}&\left[\text{Res}_{A_k \otimes A_{m+n-k}}^{A_{m+n}} \left(\text{Ind}_{A_m \otimes A_n}^{A_{m+n}}\,(M \otimes N)\right)\right] \\ = &\sum_{t+s=k} \left[\text{Ind}_{A_t \otimes A_s \otimes A_{m-t} \otimes A_{n-s}}^{A_k \otimes A_{m+n-k}} \left(\text{Res}_{A_t \otimes A_{m-t}}^{A_m}\,(M) \otimes \text{Res}_{A_s \otimes A_{n-s}}\,(N)\right)\right],\end{aligned}$$
donde $0 < k < m + n$.

Antes de dar ejemplos vamos a enriquecer la estructura de $\mathcal{G}\,(A)$ y $\mathcal{K}\,(A)$ cuando A es una torre de álgebras.

[1] Escribir $\text{Ind}_{A_t \otimes A_s \otimes A_{m-t} \otimes A_{n-s}}^{A_k \otimes A_{m+n-k}} \left(\text{Res}_{A_t \otimes A_{m-t}}^{A_m}\,(M) \otimes \text{Res}_{A_s \otimes A_{n-s}}\,(N)\right)$ es un abuso de notación; sin embargo, la acción de $A_t \otimes A_s \otimes A_{m-t} \otimes A_{n-s}$ en $\text{Res}_{A_t \otimes A_{m-t}}^{A_m}\,(M) \otimes \text{Res}_{A_s \otimes A_{n-s}}\,(N)$ se induce por el isomorfismo $A_t \otimes A_s \otimes A_{m-t} \otimes A_{n-s} \cong A_t \otimes A_{m-t} \otimes A_s \otimes A_{n-s}$. Para no hacer la notación más difícil permitiremos el abuso, aunque en la sección de ejemplos sí verificamos con cuidado que la fórmula es válida.

Sea $A = \bigoplus A_n$ una torre de álgebras. Definamos, para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$,

$$r_{n,m} : G\left(A_{n+m}\right) \to G\left(A_n\right) \otimes_{\mathbb{Z}} G\left(A_m\right) \quad \text{e} \quad i_{n,m} : G\left(A_n\right) \otimes_{\mathbb{Z}} G\left(A_m\right) \to G\left(A_{n+m}\right)$$

mediante

$$r_{n,m}\left[M\right] = \left[\operatorname{Res}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m} M\right] \quad \text{e} \quad i_{n,m}\left(\left[M\right] \otimes \left[N\right]\right) = \left[\operatorname{Ind}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m}\left(M \otimes N\right)\right].$$

Proposición 7. *Las funciones $r_{n,m}$ e $i_{n,m}$ están bien definidas e inducen morfismos de grupos abelianos.*

Demostración. Primero notemos que para definir $r_{n,m}$ e $i_{n,m}$ usamos el corolario 2 y que es suficiente probar que $\operatorname{Ind}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m}$ y $\operatorname{Res}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m}$ preservan sucesiones exactas. Mostremos la proposición para $r_{n,m}$. Es claro que si

$$0 \to N'' \to N \to N' \to 0$$

es una sucesión exacta de A_{n+m} módulos, entonces

$$0 \to \operatorname{Res}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m} N'' \to \operatorname{Res}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m} N \to \operatorname{Res}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m} N' \to 0$$

es exacta como $A_n \otimes A_m$ módulos, por la definición de la multiplicación por escalares de $A_n \otimes A_m$. Así, $r_{n,m}$ está bien definida.

Continuamos considerando

$$0 \to M'' \to M \to M' \to 0$$

sucesión exacta de A_n módulos, dado que N es proyectivo como $\mathbb{C}$ espacio vectorial, la sucesión de de $A_n \otimes A_m$ módulos

$$0 \to M'' \otimes N \to M \otimes N \to M' \otimes N \to 0$$

es exacta (por la definición de la multiplicación por escalares de esta álgebra en los módulos de la sucesión). Como A_{n+m} es un $A_n \otimes A_m$ módulo proyectivo, concluimos que

$$0 \to A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} M'' \otimes N \to A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} M \otimes N \to A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} M' \otimes N \to 0$$

es exacta en A_{n+m}.mód. Análogamente si

$$0 \to N'' \to N \to N' \to 0$$

es una sucesión exacta en A_m-mód, entonces

$$0 \to \operatorname{Ind}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m}\left(M \otimes N''\right) \to \operatorname{Ind}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m}\left(M \otimes N\right) \to \operatorname{Ind}^{A_{n+m}}_{A_n \otimes A_m}\left(M \otimes N'\right) \to 0$$

es exacta. Por lo tanto, $i_{n,m}$ está bien definida. $\square$

Con esto definimos los morfismos de grupos abelianos

$$r : \mathcal{G}\left(A\right) \to \mathcal{G}\left(A\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}\left(A\right) \quad \text{e} \quad i : \mathcal{G}\left(A\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}\left(A\right) \to \mathcal{G}\left(A\right)$$

como

$$r|_{G(A_n)} = \bigoplus_{k+l=n} r_{k,l} \qquad \text{e} \qquad i|_{G(A_n) \otimes_{\mathbb{Z}} G(A_m)} = i_{n,m}.$$

Además definimos

$$\varepsilon : \mathcal{G}\left(A\right) \to \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \eta : \mathbb{Z} \to \mathcal{G}\left(A\right)$$

mediante

$$\varepsilon\left[M\right]=\begin{cases} a & \text{si } \left[M\right]\in G\left(A_0\right) \text{ y } \left[M\right]=a\left[\mathbb{C}\right] \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases} \qquad \text{y} \qquad \eta\left(a\right)=a\left[\mathbb{C}\right]\in G\left(A_0\right).$$

Más adelante veremos que con ellos $\mathcal{G}\left(A\right)$ es una biálgebra graduada. Mientras tanto realicemos construcciones similares para $\mathcal{K}\left(A\right)$. Sean

$$i'_{n,m}:K\left(A_n\right)\otimes_{\mathbb{Z}}K\left(A_m\right)\to K\left(A_{n+m}\right) \qquad \text{y} \qquad r'_{n,m}:K\left(A_{n+m}\right)\to K\left(A_n\right)\otimes_{\mathbb{Z}}K\left(A_m\right)$$

las funciones con regla de correspondencia

$$i_{n,m}\left(\left[P\right]\otimes\left[Q\right]\right)=\left[\mathrm{Ind}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}\left(P\otimes Q\right)\right] \qquad \text{y} \qquad r'_{n,m}\left[R\right]=\left[\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}R\right].$$

Proposición 8. *Las funciones $r'_{n,m}$ y $i'_{n,m}$ están bien definidas e inducen morfismos de grupos abelianos.*

Demostración. Por la proposición anterior es suficiente mostrar que $\mathrm{Ind}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}\left(P\otimes Q\right)$ y $\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}R$ son proyectivos toda vez que P, Q y R lo son.

Sea $R\in A_{n+m}$-mód proyectivo. Como $\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}R=\mathrm{Hom}_{A_{n,m}}\left(A_{n+m},R\right)$, si $R\oplus R'\cong\left(A_{n+m}\right)^k$, entonces

$$\left(\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}R\right)\oplus\left(\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}R'\right)\cong\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}\left(\left(A_{n+m}\right)^k\right).$$

Debido a que

$$\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}\left(\left(A_{n+m}\right)^k\right)\cong\left(A_{n+m}^k\right)$$

y $\left(A_{n+m}\right)^k$ es proyectivo como $A_n\otimes A_m$ módulo, colegimos que $\mathrm{Res}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}R$ es proyectivo.

Continuemos con $\mathrm{Ind}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}$ considerando $P\in A_n\otimes A_m$-mód proyectivo, $M,N\in A_{n+m}$-Mód, $f:N\to M$ epimorfismo y $g:A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}P\to M$ (morfismos de A_{n+m} módulos).

$$\begin{tikzcd}
& A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] \\
N \arrow[r, "f"'] & M
\end{tikzcd}$$

Si mostramos que existe un morfismo de A_{n+m} módulos

$$h:A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}P\to N$$

tal que

$$g=f\circ h,$$

podremos concluir que $A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}P=\mathrm{Ind}_{A_n\otimes A_m}^{A_{n+m}}\left(P\right)$ es proyectivo.

Dado que $g\in\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}P,M\right)$ y $\left(A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}\_,\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m},\_\right)\right)$ es una pareja de funtores adjuntos, es decir,

$$\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m}\otimes_{A_n\otimes A_m}P,M\right) \quad\cong\quad \mathrm{Hom}_{A_n\otimes A_m}\left(P,\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m},M\right)\right)$$

como $A_n\otimes A_m$ módulos a través de la asignación

$$\varphi\mapsto\hat{\varphi}$$

con
$$\hat{\varphi} : P \to \mathrm{Hom}_{A_{n+m}} (A_{n+m}, M)$$
definida mediante
$$\hat{\varphi}(p)(a) = \varphi(p \otimes a);$$
sabemos que g induce un morfismo $\hat{g} \in \mathrm{Hom}_{A_n \otimes A_m}\left(P, \mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m}, M)\right)$. Más aún, como $\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m}, M) \cong M$ a través del isomorfismo ϕ $(\phi(\gamma) = \gamma(1))$ y A_{n+m} es proyectivo como $A_n \otimes A_m$ módulos, tenemos el siguiente diagrama de $A_n \otimes A_m$ módulos

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\hat{g}"] \\ N \arrow[r, "\bar{f}"'] & M \end{tikzcd}$$

con $\bar{f}$ el epimorfismo inducido por f a través de $\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m}, \_)$ y ϕ. Así, existe $\hat{h} \in \mathrm{Hom}_{A_n \otimes A_m}(P, M)$ tal que
$$\bar{f} \circ \hat{h} = \hat{g}.$$
Afirmamos que $f \circ h = g$ y que $h \in \mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} P, M)$ es morfismo de A_{n+m} módulos. Veamos que h factoriza a g. Para $a \in A_{m+n}$ y $p \in P$,
$$\begin{aligned} f(h(a \otimes p)) &= \bar{f}\left(\hat{h}(p)(a)\right) \\ &= \hat{g}(p)(a) \\ &= g(a \otimes p). \end{aligned}$$
Para terminar, si $b \in A_{n+m}$, entonces
$$\begin{aligned} h(ba \otimes p) &= \hat{h}(p)(ba) \\ &= b\hat{h}(p)(a) \\ &= bh(a \otimes p). \end{aligned}$$
En conclusión, $A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} P$ es proyectivo. □

Usando $i'_{n,m}$ y $r'_{n,m}$ podemos definir
$$r' : \mathcal{K}(A) \to \mathcal{K}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}(A) \quad \text{e} \quad i' : \mathcal{K}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}(A) \to \mathcal{K}(A)$$
como
$$r'|_{K(A_n)} = \bigoplus_{k+l=n} r'_{k,l} \qquad \text{e} \qquad i'|_{K(A_n) \otimes_{\mathbb{Z}} K(A_m)} = i'_{n,m}.$$
Y consideramos las funciones
$$\varepsilon' : \mathcal{K}(A) \to \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad \eta' : \mathbb{Z} \to \mathcal{K}(A)$$
cuya regla de correspondencia es
$$\varepsilon[P] = \begin{cases} a & \text{si } [P] \in K(A_0) \text{ y } [P] = a[\mathbb{C}] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad \eta(a) = a[\mathbb{C}] \in K(A_0).$$

Nuestro objetivo es mostrar que $(\mathcal{G}(A), i, \eta, r, \varepsilon)$ y $(\mathcal{K}(A), i', \eta', r', \varepsilon')$ son álgebras de Hopf. Para esto necesitamos una construcción y un resultado más.

Tomemos $\langle \_, \_ \rangle : \mathcal{K}(A) \times \mathcal{G}(A) \to \mathbb{Z}$ y $\langle \_, \_ \rangle_{\otimes} : (\mathcal{K}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}(A)) \times (\mathcal{G}(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(A)) \to \mathbb{Z}$ las formas bilineales cuya regla de correspondencia en los generadores es

$$\langle [P], [M] \rangle = \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{A_n}(P, M) & \text{si } P, M \in A_n\text{-mód} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\langle [P] \otimes [Q], [M] \otimes [N] \rangle_{\otimes} = \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{A_n \otimes A_m}(P \otimes Q, M \otimes N) & \text{si } P, M \in A_n\text{-mód y } Q, N \in A_m\text{-mód} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Estas formas bilineales están bien definidas pues $\mathrm{Hom}(P, \_)$ es exacto si P es proyectivo y $\mathrm{Hom}(\_, M)$ es aditivo. Por la siguiente proposición y para facilitar la notación escribiremos ambas formas bilineales con el mismo símbolo.

Lema 1. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\langle [P] \otimes [Q], [M] \otimes [N] \rangle = \langle [P], [M] \rangle \langle [Q], [N] \rangle$.
2. $\langle i'([P] \otimes [Q]), [M] \rangle = \langle [P] \otimes [Q], r[M] \rangle$.
3. $\langle [P], i([M] \otimes [N]) \rangle = \langle r'[P], [M] \otimes [N] \rangle$.
4. $\langle \eta'(1), [M] \rangle = \varepsilon[M]$.
5. $\langle [P], \eta(1) \rangle = \varepsilon'[P]$.
6. *Si $E \subseteq A_n$ es un sistema completo de idempotentes primitivos ortogonales, entonces*

$$\langle A_n e, A_n f / \mathrm{Rad}(A_n f) \rangle = \delta_{e,f}$$

para cualesquiera $e, f \in E$.

Demostración. □

1. Se sigue de que $\mathrm{Hom}_{A_n \otimes A_m}(P \otimes Q, M \otimes N)$ es isomorfo como espacio vectorial a $\mathrm{Hom}_{A_n}(P, M) \otimes \mathrm{Hom}_{A_m}(Q, N)$.
2. Es consecuencia de que $\left(A_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} \_, \mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m}, \_)\right)$ es un par de funtores adjuntos.
3. Por linealidad, es suficiente mostrar que

$$\langle [A_{n+m} g], i([M] \otimes [N]) \rangle = \langle r'[A_{n+m} g], [M] \otimes [N] \rangle$$

con g un idempotente primitivo de A_{n+m}; es decir, queremos mostrar que, como espacios vectoriales

$$\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m} g, \mathrm{Ind}_{A_n \otimes A_m}^{A_{n+m}}(M \otimes N)\right) \cong \mathrm{Hom}_{A_n \otimes A_m}\left(\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m}, A_{n+m} g), M \otimes N\right).$$

Si recordamos [**1**] que $\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m} g, \mathrm{Ind}_{A_n \otimes A_m}^{A_{n+m}}(M \otimes N)\right)$ es isomorfo a $g\mathrm{Ind}_{A_n \otimes A_m}^{A_{n+m}}(M \otimes N)$ en A_{n+m}-mód, sólo necesitamos demostrar que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{A_n \otimes A_m}\left(\mathrm{Hom}_{A_{n+m}}(A_{n+m}, A_{n+m} g), M \otimes N\right) \cong \dim_{\mathbb{C}} g\mathrm{Ind}_{A_n \otimes A_m}^{A_{n+m}}(M \otimes N).$$

Supongamos que $A_{n+m} g$ se descompone en una suma de $A_n \otimes A_m$ módulos proyectivos inescindibles digamos

$$A_{m+n} g \cong \bigoplus_{e,f} (A_n \otimes A_m)(e \otimes f),$$

entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{A_{n+m}}\left(A_{n+m}, A_{n+m}g\right) &\cong A_{n+m}g \\ &\cong \bigoplus_{e,f}\left(A_n \otimes A_m\right)\left(e \otimes f\right) \qquad (2)\end{aligned}$$

y por la condición 4 de la definición de torre de álgebras $gA_{n+m} \cong \bigoplus_{e,f}\left(e \otimes f\right)\left(A_n \otimes A_m\right)$, lo que implica que

$$\begin{aligned}g\operatorname{Ind}_{A_n \otimes A_m}^{A_{n+m}}\left(M \otimes N\right) &= gA_{n+m} \otimes_{A_n \otimes A_m} M \otimes N \\ &\cong \bigoplus_{e,f}\left(\left(e \otimes f\right)\left(A_n \otimes A_m\right) \otimes M \otimes N\right) \\ &\cong \bigoplus_{e,f}\operatorname{Hom}_{A_n \otimes A_m}\left(\left(A_n \otimes A_m\right)\left(e \otimes f\right), M \otimes N\right) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{A_n \otimes A_m}\left(\bigoplus_{e,f}\left(A_n \otimes A_m\right)\left(e \otimes f\right), M \otimes N\right). \qquad (3)\end{aligned}$$

De 2 y 3 colegimos lo deseado.

Las propiedades 4 y 5 se siguen de la definición de η, η', ε y ε', mientras que la última propiedad se debe a que $\operatorname{Rad}\left(A_n e\right)$ es el único ideal máximo de $A_n e$ y al lema de Schur.

La siguiente proposición es lo último que necesitamos para mostrar que $\mathcal{G}\left(A\right)$ y $\mathcal{K}\left(A\right)$ son álgebras de Hopf.

Proposición 9. *Si i es asociativa, entonces r' es coasociativa. Si r es coasociativa, entonces i' es asociativa.*

Demostración. Sólo mostraremos que si r es coasociativa, entonces i' es asociativa, ya que la demostración del enunciado para i y r' es similar. Si r es coasociativa, entonces para cualesquiera $l, m, n \in \mathbb{N}$, $P \in A_l$-mód, $Q \in A_m$-mód y $R \in A_n$-mód proyectivos inescindibles y $S \in A_{l+m+n}$-mód simple sucede que

$$\begin{aligned}\left\langle i'\left(\left[P\right] \otimes i'\left(\left[Q\right] \otimes \left[R\right]\right)\right), \left[S\right]\right\rangle &= \left\langle \left[P\right] \otimes i'\left(\left[Q\right] \otimes \left[R\right]\right), r\left[S\right]\right\rangle \\ &= \left\langle \left[P\right] \otimes \left[Q\right] \otimes \left[R\right], \left(Id \otimes r\right) \circ r\left[S\right]\right\rangle \\ &= \left\langle \left[P\right] \otimes \left[Q\right] \otimes \left[R\right], \left(r \otimes Id\right) \circ r\left[S\right]\right\rangle \\ &= \left\langle i'\left(\left[P\right] \otimes \left[Q\right]\right) \otimes \left[R\right], r\left[S\right]\right\rangle \\ &= \left\langle i'\left(i'\left(\left[P\right] \otimes \left[Q\right]\right) \otimes \left[R\right]\right), \left[S\right]\right\rangle;\end{aligned}$$

usando 1 y 2 del lema 1. Por el número 6 del mismo lema podemos concluir que

$$i'\left(\left[P\right] \otimes i'\left(\left[Q\right] \otimes \left[R\right]\right)\right) = i'\left(i'\left(\left[P\right] \otimes \left[Q\right]\right) \otimes \left[R\right]\right).$$

Así, i' es asociativa. □

Teorema 3. *El morfismo i es asociativo, el morfismo r es coasociativo y si $\mathcal{G}\left(A\right)$ satisface la propiedad 5 de la definición de torre de álgebras, entonces r y ε son morfismos de álgebras y por tanto $\mathcal{G}\left(A\right)$ es un álgebra de Hopf y $\mathcal{K}\left(A\right)$ también lo es. Si $\mathcal{K}\left(A\right)$ satisface la propiedad 5 de la definición de torre de álgebras $\mathcal{K}\left(A\right)$ es un álgebra de Hopf y en consecuencia $\mathcal{G}\left(A\right)$ es un álgebra de Hopf.*

Demostración. Para mostrar la asociatividad de i, es suficiente mostrar que

$$\operatorname{Ind}_{A_{l+m} \otimes A_n}^{A_{l+m+n}}\left(\operatorname{Ind}_{A_l \otimes A_m}^{A_{l+m}}\left(L \otimes M\right) \otimes N\right) \cong \operatorname{Ind}_{A_l \otimes A_{m+n}}^{A_{l+m+n}}\left(L \otimes \operatorname{Ind}_{A_m \otimes A_n}^{A_{m+n}}\left(M \otimes N\right)\right)$$

en A_{l+m+n}-mód. Para eso, mostraremos que

$$\mathrm{Ind}_{A_{l+m}\otimes A_n}^{A_{l+m+n}}\left(\mathrm{Ind}_{A_l\otimes A_m}^{A_{l+m}}(L\otimes M)\otimes N\right)\cong A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_m\otimes A_n}L\otimes M\otimes N$$

y

$$\mathrm{Ind}_{A_l\otimes A_{m+n}}^{A_{l+m+n}}\left(L\otimes\mathrm{Ind}_{A_m\otimes A_n}^{A_{m+n}}(M\otimes N)\right)\cong A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_m\otimes A_n}L\otimes M\otimes N;$$

antes de dar los isomorfismos notemos que $A_l\otimes A_m\otimes A_n$ actúa en A_{l+m+n} por la izquierda y derecha a través de $\mu\circ(Id_{A_l}\otimes\mu)=\mu(\mu\otimes Id_{A_n})$.

Un cálculo sencillo muestra que

$$\varphi:\mathrm{Ind}_{A_{l+m}\otimes A_n}^{A_{l+m+n}}\left(\mathrm{Ind}_{A_l\otimes A_m}^{A_{l+m}}(L\otimes M)\otimes N\right)\to A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_m\otimes A_n}L\otimes M\otimes N$$

definida mediante

$$\varphi(a\otimes b\otimes x\otimes y\otimes z)=a\mu(b\otimes 1_n)\otimes x\otimes y\otimes z$$

es un isomorfismo de A_{l+m+n} módulos bien definido con inversa

$$\gamma(a\otimes x\otimes y\otimes z)=a\otimes 1_{l+m}\otimes x\otimes y\otimes z$$

y un cálculo similar, que

$$\alpha:\mathrm{Ind}_{A_l\otimes A_{m+n}}^{A_{l+m+n}}\left(L\otimes\mathrm{Ind}_{A_m\otimes A_n}^{A_{m+n}}(M\otimes N)\right)\to A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_m\otimes A_n}L\otimes M\otimes N$$

con regla de correspondencia

$$\alpha(a\otimes x\otimes b\otimes y\otimes z)=a\mu(1_l\otimes b)\otimes x\otimes y\otimes z$$

es un isomorfismo de A_{l+m+n} que está bien definido y su inverso es

$$\beta(a\otimes x\otimes y\otimes z)=a\otimes x\otimes 1_{m+n}\otimes y\otimes z.$$

De este modo i es asociativo.

La coasociatividad de r la demostramos como sigue. Por adjunción,

$$\mathrm{Res}_{A_l\otimes A_m\otimes A_n}^{A_{l+m}\otimes A_n}\mathrm{Res}_{A_{l+m}\otimes A_n}^{A_{l+m+n}}(M)\cong\mathrm{Hom}_{A_{l+m+n}}\left(A_{l+m+n}\otimes_{A_{l+m}\otimes A_n}(A_{l+m}\otimes A_n),M\right)$$

y

$$\mathrm{Res}_{A_l\otimes A_m\otimes A_n}^{A_l\otimes A_{m+n}}\mathrm{Res}_{A_l\otimes A_{m+n}}^{A_{l+m+n}}(M)\cong\mathrm{Hom}_{A_{l+m+n}}\left(A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_{m+n}}(A_l\otimes A_{m+n}),M\right),$$

además, como A_{l+m+n}-$A_l\otimes A_{m+n}$ bimódulos

$$A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_{m+n}}(A_l\otimes A_{m+n})\quad\cong\quad A_{l+m+n}$$

y como A_{l+m+n}-$A_{l+m}\otimes A_n$ bimódulos

$$A_{l+m+n}\cong A_{l+m+n}\otimes_{A_{l+m}\otimes A_n}A_{l+m}\otimes A_n.$$

Por lo tanto

$$A_{l+m+n}\otimes_{A_l\otimes A_{m+n}}(A_l\otimes A_{m+n})\cong A_{l+m+n}\otimes_{A_{l+m}\otimes A_n}A_{l+m}\otimes A_n$$

como $A_l\otimes A_m\otimes A_n$ módulos y el resultado se sigue.

Terminemos suponiendo sin pérdida de generalidad que $\mathcal{G}(A)$ satisface la condición 5 de la definición de torre de álgebras para demostrar que $\mathcal{G}(A)$ es un álgebra de Hopf. De la definición de r e i, para cualesquiera

$n, m \in \mathbb{N}$, $[M] \in G(A_m)$ y $[N] \in G(A_n)$ se tiene la siguiente igualdad

$$r\left(i\left([M] \otimes [N]\right)\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left[\operatorname{Hom}_{A_{m+n}}\left(A_{m+n}, A_{m+n} \otimes_{A_m \otimes A_n} M \otimes N\right)_{k,m+n-k}\right]$$

donde $\operatorname{Hom}_{A_{m+n}}\left(A_{mn}, A_{m+n} \otimes_{A_m \otimes A_n} M \otimes N\right)_{k,m+n-k}$ es el espacio vectorial

$$\operatorname{Hom}_{A_{m+n}}\left(A_{m+n}, A_{m+n} \otimes_{A_m \otimes A_n} M \otimes N\right)$$

visto como módulo sobre $A_k \otimes A_{m+n-k}$. Aparte sabemos que

$$\begin{aligned}(i \otimes i)\left(r[M] \otimes r[N]\right) &= i\left[\sum_{k=0}^{m+n} \sum_{a+b=k} \Big(\operatorname{Hom}_{A_m}\left(A_m, M\right)_{a,m-a} \otimes \operatorname{Hom}_{A_n}\left(A_n, N\right)_{b,n-b}\Big)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{a+b=k} \Big[A_k \otimes A_{m+n-k} \otimes_B \operatorname{Hom}_{A_m}\left(A_m, M\right)_{a,m-a} \otimes \operatorname{Hom}_{A_n}\left(A_n, N\right)_{b,n-b}\Big]\end{aligned}$$

con $B = A_a \otimes A_{m-a} \otimes A_b \otimes A_{n-b}$. Es claro que cuando $k = 0$ o $k = m + n$

$$\begin{aligned}&\Big[\operatorname{Hom}_{A_{m+n}}\left(A_{m+n}, A_{m+n} \otimes_{A_m \otimes A_n} M \otimes N\right)_{k,m+n-k}\Big] \\ &= \Big[A_k \otimes A_{m+n-k} \otimes_B \operatorname{Hom}_{A_m}\left(A_m, M\right)_{a,m-a} \otimes \operatorname{Hom}_{A_n}\left(A_n, N\right)_{b,n-b}\Big]\end{aligned}$$

pues en esos casos estamos considerando

$$\operatorname{Hom}_{A_{m+n}}\left(A_{m+n}, A_{m+n} \otimes_{A_m \otimes A_n} M \otimes N\right)$$

como A_{m+n} módulo. Si $k \neq 0$ y $k \neq m + n$, la propiedad 5 de la definición de torre de álgebras nos dice que

$$\begin{aligned}&\sum_{a+b=k} \Big[A_k \otimes A_{m+n-k} \otimes_B \operatorname{Hom}_{A_m}\left(A_m, M\right)_{a,m-a} \otimes \operatorname{Hom}_{A_n}\left(A_n, N\right)_{b,n-b}\Big] \\ &= \Big[\operatorname{Hom}_{A_{m+n}}\left(A_{m+n}, A_{m+n} \otimes_{A_m \otimes A_n} M \otimes N\right)_{k,m+n-k}\Big].\end{aligned}$$

En conclusión

$$(i \otimes i) \circ (r \otimes r) = r \circ i.$$

Es claro que

$$\varepsilon \circ i\left([M] \otimes [N]\right) = \varepsilon[M]\, \varepsilon[N].$$

Por tanto, $(\mathcal{G}(A), i, \eta, r, \varepsilon)$ es una biálgebra graduada, lo que implica que es un álgebra de Hopf. Nótese que la proposición 9 asegura que $(\mathcal{K}(A), i', \eta')$ es un álgebra y $(\mathcal{K}(A), r', \varepsilon')$ es una coálgebra; además ε' es morfismo de álgebras. Para mostrar que $(\mathcal{K}(A), i', \eta', r', \varepsilon')$ es una biálgebra graduada, resta mostrar que r' es morfismo de álgebras. Para $P \in A_n$-mód y $Q \in A_m$-mód proyectivos y $S \in A_k$-mód y $T \in A_l$-mód simples con $k + l = m + n$, el lema 1 nos permite saber que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\left\langle r' \circ i'\left([P] \otimes [Q]\right), [S] \otimes [T]\right\rangle &= \left\langle i'\left([P] \otimes [Q]\right), i\left([S] \otimes [T]\right)\right\rangle \\ &= \left\langle [P] \otimes [Q], r \circ i\left([S] \otimes [T]\right)\right\rangle \\ &= \left\langle [P] \otimes [Q], (i \otimes i) \circ (r \otimes r)\left([S] \otimes [T]\right)\right\rangle \\ &= \left\langle (i' \otimes i') \circ (r' \otimes r')\left([P] \otimes [Q]\right), [S] \otimes [T]\right\rangle.\end{aligned}$$

De manera que

$$r' \circ i' = (i' \otimes i') \circ (r' \otimes r').$$

Hemos terminado. □

Ejemplos

Terminamos con ejemplos sencillos de torres de álgebras. Empezamos con grupos finitos para estudiar sus álgebras de grupo sobre $\mathbb{C}$ y demostraremos que éstas forman torres de álgebras.

Para un grupo finito G y cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos:

1. S_n el grupo de permutaciones.
2. $S_n[G]$ el producto corona de G por S_n; es decir $S_n[G] = G^n \rtimes S_n$ con S_n actuando en G^n como $\sigma \cdot (g_i)_{i=1}^n = \left(g_{\sigma(i)}\right)_{i=1}^n$.

Fijemos $m, n \in \mathbb{N}$. Es sencillo ver que podemos identificar $S_m \times S_n$ con el subgrupo de S_{n+m} que consiste de las permutaciones σ tales que $\sigma(i) \leq n$ si $i \leq n$ y$\sigma(i) > n$ si $i > n$. Mediante esta identificación tenemos un morfismo unitario e inyectivo de álgebras

$$\mu_{m,n} : \mathbb{C}[S_m] \otimes \mathbb{C}[S_n] \to \mathbb{C}[S_{m+n}].$$

También es fácil observar que $S_m[G] \times S_n[G]$ se identifica con el subgrupo de $S_{m+n}[G]$ formado por las parejas $\left((g_i)_{i=1}^{m+n}, \sigma\right)$ con $\sigma \in S_m \times S_n$. Así que tenemos un morfismo inyectivo y unitario de álgebras

$$\bar{\mu}_{m,n} : \mathbb{C}[S_m[G]] \otimes \mathbb{C}[S_n[G]] \to \mathbb{C}[S_{m+n}].$$

De este modo, las álgebras

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[S_n]$$

y

$$B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}[S_n[G]]$$

con la multiplicación inducida por $\mu_{m,n}$ y $\bar{\mu}_{m,n}$ respectivamente satisfacen las propiedades 1 a 4 de nuestra definición de torre de álgebras:

- Satisfacen 1 pues S_0 y $S_0[G]$ son grupos triviales y todos los sumandos de ellas tienen como base un grupo finito.
- La propiedad 2 se sigue de la manera en que se definió la multiplicación.
- Del hecho de que cada álgebra $\mathbb{C}[S_n]$ y $\mathbb{C}[S_n[G]]$ es semisimple se colige que la propiedad ; más aún, $\mathcal{K}(A) = \mathcal{G}(A)$ y $\mathcal{K}(B) = \mathcal{G}(B)$.

Falta ver que se satisfacen las propiedades 4 y 5. Los detalles de la propiedad 5 para el álgebra A se pueden revisar en **[3]** , pero daremos un boceto que será útil para verificar la propiedad 5 en el álgebra B y en un ejemplo más que veremos al terminar con B.

Recordemos que la fórmula de restricción de Mackey dice:

Teorema. *Si G es un grupo finito, K y H subgrupos de G, $W \in \mathbb{C}[H]$-mód y definimos una acción de $K \times H$ en G dada por lo siguiente: para cada $(k,h) \in K \times H$ y $g \in G$ $(k,h)\, g = kgh^{-1}$, entonces*

$$\mathrm{Res}_K^G \circ \mathrm{Ind}_H^G(W) \cong \bigoplus_{s \in S} \mathrm{Ind}_{H_s}^K \circ \mathrm{F}_s \circ \mathrm{Res}_{s^{-1}H_s s}^H(W).$$

Donde S denota un conjunto completo de representantes de las órbitas de G bajo $K \times H$, $\mathrm{F}_s : \mathbb{C}\left[s^{-1}H_s s\right]$-mód $\to \mathbb{C}[H_s]$-mód es el funtor que cambia la acción mediante la conjugación y para cada $s \in S$ escribimos $H_s := sHs^{-1} \cap K$. Además, la descomposición no depende de la elección de S.

La elección de un conjunto de representantes S es el punto crucial de la demostración de la propiedad 5 para A. En este caso tenemos $G = S_n$, $K = S_k \times S_l$ y $H = S_{k'} \times S_{l'}$, quedémonos con esta notación.

Proposición 10. *Las órbitas de G bajo la acción de $K \times H$ están parametrizadas por matrices* $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ *tales que* $M_{ij} \in \mathbb{N}$, $k = M_{11} + M_{21}$, $l = M_{12} + M_{22}$, $k' = M_{11} + M_{12}$ *y* $l' = M_{21} + M_{22}$. *Además, para cada matriz M de la forma anterior, la función*

$$\sigma_M(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq M_{11} \\ a + M_{21} & \text{si } a = M_{11} + b \text{ y } 1 \leq b \leq M_{12} \\ a - M_{12} & \text{si } a = k' + b \text{ y } 1 \leq b \leq M_{21} \\ a & \text{si } a = k' + M_{21} + b \text{ y } 1 \leq b \leq M_{22} \end{cases}$$

es una permutación con inversa

$$\sigma_M^{-1}(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \leq M_{11} \\ a + M_{12} & \text{si } a = M_{11} + b \text{ y } 1 \leq b \leq M_{21} \\ a - M_{21} & \text{si } a = k + b \text{ y } 1 \leq b \leq M_{12} \\ a & \text{si } a = k + M_{12} + b \text{ y } 1 \leq b \leq M_{22} \end{cases}$$

es un elemento de la órbita que corresponde a M.

Con esto el siguiente lema es claro

Lema 2. *Para cada M,* $\sigma_M (S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}) \sigma_M^{-1} = S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}$. *Más aún, si* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}$, *entonces* $\sigma_M (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \sigma_M^{-1} = (\alpha, \gamma, \beta, \delta)$.

Eligiendo como sistema completo de representantes al conjunto de permutaciones σ_M sobre las matrices M, la fórmula de restricción de Mackey es

$$\mathrm{Res}_{S_k \times S_l}^{S_{k'+l'}} \circ \mathrm{Ind}_{S_{k'} \times S_{l'}}^{S_{k'+l'}} (W) \cong \bigoplus_M \mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_k \times S_l} \circ \mathrm{F}_{\sigma_M} \circ \mathrm{Res}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}}^{S_{k'} \times S_{l'}} (W)$$

para $W \in \mathbb{C}[S_{k'}] \otimes \mathbb{C}[S_{l'}]$-mód. Realicemos un análisis sencillo de cada sumando en la expresión anterior. Como vimos, cada $W \in \mathbb{C}[S_{k'}] \otimes \mathbb{C}[S_{l'}]$-mód simple es de la forma

$$W \cong U \otimes V$$

con $U \in \mathbb{C}[S_{k'}]$-mód y $V \in \mathbb{C}[S_{l'}]$-mód simples con lo que

$$\mathrm{Res}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}}^{S_{k'} \times S_{l'}} (U \otimes V) \cong \mathrm{Res}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{12}}}^{S_{k'}} (U) \otimes \mathrm{Res}_{S_{M_{21}} \times S_{M_{22}}}^{S_{l'}} (V).$$

Continuamos con el funtor F_{σ_M}. El lema 2 nos dice que

$$\mathrm{F}_{\sigma_M} (U' \otimes U'' \otimes V' \otimes V'') \cong U' \otimes V' \otimes U'' \otimes V''$$

para cualesquiera simples $U' \in \mathbb{C}[S_{M_{11}}]$-mód, $U'' \in \mathbb{C}[S_{M_{12}}]$-mód, $V' \in \mathbb{C}[S_{M_{21}}]$-mód y $V'' \in \mathbb{C}[S_{M_{22}}]$-mód. Luego, un cálculo sencillo ayuda a demostrar que

$$\mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}} \times S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_k \times S_l} (U' \otimes V' \otimes U'' \otimes V'') \cong \mathrm{Ind}_{S_{M_{11}} \times S_{M_{21}}}^{S_k} (U' \otimes V') \otimes \mathrm{Ind}_{S_{M_{12}} \times S_{M_{22}}}^{S_l} (U'' \otimes V'')$$

a través de la función

$$a \otimes b \otimes ((u' \otimes v') \otimes (u'' \otimes v'')) \mapsto (a \otimes (u' \otimes v')) \otimes (b \otimes (u'' \otimes v'')).$$

Con lo anterior se puede verificar la propiedad deseada para el álgebra A.

Demos paso al álgebra B. Nuevamente, por la fórmula de restricción de Mackey, necesitamos hallar un sistema completo de representantes para las órbitas de $S_n[G]$ bajo la acción de $(S_k[G] \times S_l[G]) \times (S_{k'}[G] \times S_{l'}[G])$. Para ello será suficiente mostrar la siguiente proposición.

Proposición 11. *Para cada* $((g_i)_{i=1}^n, \sigma) \in S_n[G]$ *existe una permutación* $\tau \in S_n$ *tal que* $((g_i)_{i=1}^n, \sigma)$ *está en la órbita de* $(\bar{e}, \tau)$*, donde* $\bar{e}$ *es el neutro de* G^n*.*

Demostración. Recordemos que el producto en $S_n[G]$ está dado por

$$((h_i), \gamma)((g_i), \sigma) = \left((h_i)\left(g_{\gamma(i)}\right), \sigma\gamma\right).$$

De modo que si elegimos, para $((g_i), \sigma) \in S_n[G]$, la pareja $\left(\left(g_{\gamma(i)}^{-1}\right), \gamma\right) \in (S_k[G] \times S_l[G])$; es decir $\gamma(i) \leq k$ si y sólo si $i \leq k$, se satisface lo deseado. $\square$

De la proposición anterior e identificando S_n con el subgrupo de $S_n[G]$ cuyos elementos son de la forma $(\bar{e}, \sigma)$, podemos concluir que las órbitas de $S_n[G]$ bajo la acción de $(S_k[G] \times S_l[G]) \times (S_{k'}[G] \times S_{l'}[G])$ están parametrizadas por la misma familia de matrices M de la forma mencionada anteriormente. Ya que cada órbita contiene una permutación. Así, los mismos razonamiento y sistema completo de representantes usados para el álgebra A nos dan la oportunidad de mostrar que el álgebra B satisface la propiedad 5.

Para finalizar con las álgebras A y B, demostraremos que la propiedad 4 se sigue solamente de que estamos considerando grupos finitos y módulos finitamente generados sobre el álgebra de grupo compleja de aquellos. En adelante Γ denotará un grupo finito. Recordemos que si W es un $\mathbb{C}[\Gamma]$-módulo izquierdo finitamente genrado, su caracter es la función ${}_W\chi : G \to \mathbb{C}$ definida mediante

$${}_W\chi(g) = \operatorname{Tr}(g)$$

donde $\operatorname{Tr}(g)$ es la traza del operador lineal obtenido de la acción de g en W. El caracter de un $\mathbb{C}[\Gamma]$-módulo derecho V lo denotaremos como χ_V.

Es claro que si V es un $\mathbb{C}[\Gamma]$-módulo izquierdo y $g \in G$ actúa mediante el morfismo lineal $\rho(g)$, entonces $V^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ es un $\mathbb{C}[\Gamma]$-módulo derecho con g actuando en $f \in V^*$ mediante

$$f \cdot g = (\rho(g))^*(f);$$

más aún,

$${}_V\chi = \chi_{V^*}.$$

Con la siguiente proposición podremos mostrar que la propiedad 4 de la definición de torre de álgebras se satisface siempre que las componentes de la torre sean álgebras de grupos finitos sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 12. *Si* $e \in \mathbb{C}[\Gamma]$ *es un idempotente primitivo, entonces*

$${}_{\mathbb{C}[\Gamma]e}\chi = \chi_{e\mathbb{C}[\Gamma]}.$$

Demostración. Demostraremos que como módulos izquierdos $(e\mathbb{C}[\Gamma])^* \cong \mathbb{C}[\Gamma]e$. Dado que

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(e\mathbb{C}[\Gamma], \mathbb{C}[\Gamma]) \cong \bigoplus_{i=1}^{\dim e\mathbb{C}[\Gamma]} \operatorname{End}_{\mathbb{C}[\lneqq]}(e\mathbb{C}[\lneqq]),$$

por el lema de Schur, todo morfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(e\mathbb{C}[\Gamma], \mathbb{C}[\Gamma])$ está definido en cada componente como la multiplicación por algún escalar complejo, digamos f_i. Considérese una $\mathbb{C}$-base, $\{ea_i \mid 1 \leq i \leq \dim e\mathbb{C}[\Gamma]\}$, de $e\mathbb{C}[\Gamma]$ y defínase la función

$$\eta : \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[\Gamma]}(e\mathbb{C}[\Gamma], \mathbb{C}[\Gamma]) \to (e\mathbb{C}[\Gamma])^*$$

mediante la regla

$$\eta\left(f\right)=\sum_{i=1}^{\dim e\mathbb{C}[\Gamma]}f_{i}\left(ea_{i}\right)^{*}.$$

Un cálculo sencillo permite probar que η es un isomorfismo de $\mathbb{C}\left[\Gamma\right]$-módulos izquierdos. Recordando que como $\mathbb{C}\left[\Gamma\right]$-módulos izquierdos $\mathbb{C}\left[\Gamma\right]e\cong\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[\Gamma]}\left(e\mathbb{C}\left[\Gamma\right],\mathbb{C}\left[\Gamma\right]\right)$, terminamos. □

Volvamos a nuestros ejemplos. Si $e\in A_{n+m}$ (o B_{n+m}) es un idempotente primitivo y $A_{n+m}e\cong\bigoplus_{(i,j)}A_{n}f_{i}\otimes A_{m}g_{j}$ como $A_{n}\otimes A_{m}$-módulos, entonces

$$\begin{aligned}
{}_{A_{m+n}e}\chi &= \sum_{(i,j)}{}_{A_nf_i\otimes A_mg_j}\chi\\
&= \sum_{(i,j)}\chi_{f_iA_n\otimes g_jA_m}\\
&= \chi_{eA_{m+n}};
\end{aligned}$$

por lo tanto, $eA_{n+m}\cong\bigoplus_{(i,j)}f_{i}A_{n}\otimes g_{j}A_{m}$. A fin de cuentas, hemos probado que A y B son torres de álgebras y por tanto $\mathcal{G}\left(A\right)$ y $\mathcal{G}\left(B\right)$ son álgebras de Hopf.

Lo último que haremos es dar un ejemplo en el que, modificando un poco las demostraciones de la sección de torres de álgebras, es posible demostrar que las suma directa de una familia de grupos de Grothendieck de álgebras de dimensión finita es un álgebra de Hopf. El primer paso es hacer las siguientes observaciones sobre las propiedades de una torre de álgebras:

Observación 1. Cuando cada componente de una torre de álgebras A es semisimple, la propiedad 3 se satisface trivialmente.

Observación 2. En ese caso, la demostración de que los morfismos inducidos por los funtores de inducción y restricción en $\mathcal{K}\left(A\right)$ están bien definidos, no es necesaria, ya que $\mathcal{K}\left(A\right)=\mathcal{G}\left(A\right)$; las formas bilineales también están bien definidas puesto que todo módulo es proyectivo.

Observación 3. La demostración de 2 en el lema 1 depende solamente del hecho de que inducción y restricción son funtores adjuntos. En el caso semisimple, el número 3 del mismo lema coincide con 2.

Observación 4. La demostración de la coasociatividad de la comultiplicación es consecuencia directa de la transitividad de restricción, mientras que la asociatividad de la multiplicación se sigue de la proposición 9.

Observación 5. La propiedad 5 de la definición de torre de álgebras es una fórmula de restricción.

Observación 6. Si las componentes del álgebra son álgebras de grupo, ya hemos probado, mediante caracteres, que la propiedad 4 se satisface.

Las observaciones 1 a 6 nos dicen que si $A=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}A_{n}$ satisface las propiedades 1 y 2 de la definición de torre de álgebras, cada A_{n} es un álgebra de grupo y tenemos funtores

$$\mathrm{I}_{n,m}:A_{n}\otimes A_{m}\text{-mód}\rightarrow A_{m+n}\text{-mód}$$

y

$$\mathrm{R}_{n.m}:A_{m+n}\text{-mód}\rightarrow A_{n}\otimes A_{m}\text{-mód}$$

que sean adjuntos, aditivos y donde $\mathrm{R}_{n.m}$ sea transitivo, entonces $\mathcal{G}\left(A\right)$ es un álgebra de Hopf con los morfismos inducidos por $\mathrm{R}_{n,m}$ e $\mathrm{I}_{n,m}$.

Nuestro último ejemplo exhibe un álgebra que satisface lo recién mencionado. Fijemos un número primo q y un campo finito de característica q, digamos $\mathbb{F}_q$. El grupo $G_n = GL_n(\mathbb{F}_q)$ es finito y $G_n \times G_m$ se identifica con el subgrupo de G_{m+n} que consiste de las matrices

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

con $(g,h) \in G_n \times G_m$. De manera que $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}[G_n]$ satisface 1 y 2 de la definición de torre de álgebras y cada sumando es semisimple. Resta construir los funtores que darán lugar a la multiplicación y comultiplicación.

Definición 6. Sea G un grupo y K un subgrupo normal de aquél.

La *inflación* de un $\mathbb{C}[G/K]$-módulo U es el $\mathbb{C}[G]$-módulo

$$\mathrm{Infl}_{G/K}^{G}(U)$$

cuyo espacio subyacente es U y la acción de G en él está dada mediante la proyección

$$G \to G/K.$$

El *espacio de puntos fijos* de un $\mathbb{C}[G]$-módulo V es el $\mathbb{C}[G/K]$-módulo

$$V^K = \{v \in V \mid kv = v \text{ para cada } k \in K\}.$$

Es claro que $\mathrm{Infl}_{G/K}^{G}$ y $(\_)^K$ son funtores adjuntos y aditivos. Ahora usaremos inflación y puntos fijos en G_n. Para $n, m \in \mathbb{N}$ denotemos con $P_{n,m}$ al subgrupo de G_{n+m} cuyos elementos son las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} g_n & p \\ 0 & g_m \end{pmatrix}$$

con $g_n \in G_n$, $g_m \in G_m$ y $p \in \mathbb{F}_q^{n\times m}$. Fácilmente se observa que $G_n \times G_m \cong P_{n,m}/K_{n,m}$ donde $K_{n,m}$ es el subgrupo de $P_{n,m}$ cuyos bloques de la diagonal son la identidad. Definimos los funtores

$$\mathrm{I}_{n,m} : \mathbb{C}[G_n] \otimes \mathbb{C}[G_m]\text{-mód} \to \mathbb{C}[G_{m+n}]\text{-mód}$$

y

$$\mathrm{R}_{n.m} : \mathbb{C}[G_{m+n}]\text{-mód} \to \mathbb{C}[G_n] \otimes \mathbb{C}[G_m]\text{-mód}$$

como

$$\mathrm{I}_{n,m} = \mathrm{Ind}_{P_{n,m}}^{G_{n+m}} \circ \mathrm{Infl}_{G_n\times G_m}^{P_{n,m}}$$

y

$$\mathrm{R}_{n,m} = (\_)^{K_{n,m}} \circ \mathrm{Res}_{P_{n,m}}^{G_{n+m}}.$$

Por construcción estos funtores son adjuntos y aditivos. Además los funtores $\mathrm{R}_{n,m}$ son transitivos pues si $V \in \mathbb{C}[G_{i+j+k}]$-mód, entonces para cada $v \in V$ que satisfaga que $av = bv = v$, para cualesquiera $a \in K_{i,j+k}$ y $b \in K_{i,j,k}$ ($K_{i,j,k}$ se define de manera análoga a $K_{n,m}$), se satisface que $cv = dv = v$ para toda $c \in K_{i+j,k}$ y $d \in K_{i,j,k}$.

Nuevamente, lo único que falta es que se satisfaga la propiedad 5 de la definición de torre de álgebras y ella viene de la fórmula de restricción de Mackey usando la construcción del sistema de representantes que se exhibió, caracteres y propiedades de inflación y puntos fijos. No daremos más detalles al respecto, estos se pueden hallar en [**4**].

Ejemplos del caso no semisimple también existen; sin embargo, no serán tratados en este trabajo. Quien esté interesado puede revisar [**2**] y [**5**].

Bibliografía

[1] ASSEM, Ibrahim *et al. Elements of the representation theory of associative algebras*. – New York: Cambridge University Press, 2006. – Vol. 1– 458 p. : il.– (London Mathematical Society Student Text, no. 65)

[2] BERGERON, Nantel y Huilan Li. *Algebraic Structures on Grothendieck Groups of a Tower of Algebras* [digitalizado].– p. 2068-2064.– *En Journal of Algebra*.– Vol. 321 no. 8 (abr. 2009) DOI: 10.1016/j.jalgebra.2008.12.005, disponible en http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869308006066

[3] GÓMEZ, Luis A.. *Las representaciones del grupo simétrico en el lenguaje de las álgebras de Hopf*. [digitalizado].– Tesis de licenciatura (2015) 63 p. :il.– disponible en http://oreon.dgbiblio.unam.mx:80/F/UAAAPNQ44H8LJJQX455QQQIDYD738I48IIMQTMM168ELQKGVKU-13597?func=service&doc_library=TES01&doc_number=000729188&line_number=0001&func_code=WEB-FULL&service_type=MEDIA

[4] GRINBERG, Darij y Victor Reiner. *Hopf algebras in combinatorics*. [digitalizado].– 186 p. disponible en https://arxiv.org/abs/1409.8356v1

[5] KROB, Daniel e Yves Thibon. *Noncommutative symmetric functions IV : Quantum linear groups and Hecke algebras at q = 0.* [digitalizado].– p. 339-376.– *En of Algebraic Combinatorics, Springer Verlag*.– Vol. 6 no. 4 (oct. 1197). DOI: 10.1023/A:1008673127310, disponible en https://hal-univ-diderot.archives-ouvertes.fr/hal-00018539/document

[6] ZELEVINSKY, Anderi V.. *Representations of finite classical groups : A Hopf algebra approach*.– Alemania : Springer-Verlag, c1981.– 184 p. – (Lecture notes in mathematics, no.869)