



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Aplicación de la Migración
Reversa en Tiempo Elástica a
la Exploración Subsalina.

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniera Geofísica

P R E S E N T A

Kimberley Ponce Muñoz

DIRECTOR DE TESIS

Dr. José Carlos Ortiz Alemán



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla un nuevo esquema de inversión para la construcción de imágenes sísmicas en ambientes geológicos complejos. Para este fin, se resuelve la ecuación de onda en dos dimensiones mediante un esquema numérico denominado diferencias finitas de segundo orden, con una malla alternada. Además, para simular la propagación de las ondas en el subsuelo de manera realista, se introducen fronteras absorbentes en las fronteras del dominio computacional, previniendo con esto el reingreso de la energía sísmica a partir de reflejos espurios en dichas fronteras. El método de construcción de las imágenes sísmicas empleado en este trabajo se conoce como Migración Reversa en Tiempo Adjunta, que emplea como entrada los sismogramas observados antes de apilar y regresa como salida una imagen denominada kernel de sensibilidad, en el dominio de la profundidad. Este método de visualización del subsuelo a partir de datos sísmicos resulta poseer muchas ventajas sobre otras técnicas convencionales, especialmente cuando la región de interés presenta condiciones geológicas extremadamente complejas, como los medios con presencia de tectonismo salino.

El algoritmo desarrollado se utiliza para reconstruir las imágenes sísmicas correspondientes a una adquisición sísmica en un área con presencia de tectonismo salino, similar a las que existen en el Golfo de México. Como parte de este trabajo, se simuló tanto una adquisición tradicional acústica (ondas P únicamente) como una adquisición multicomponente (Ondas P y S), en dos dimensiones. El objetivo del trabajo es verificar a través de estas simulaciones si una adquisición de datos sísmicos que incluye ondas convertidas y que es mucho más costosa que una adquisición tradicional, permite construir imágenes subsalinas en profundidad con una resolución mejorada. En este trabajo, se establecen comparaciones entre las imágenes resultantes en el caso acústico y elástico, así como en el proceso de construcción de dichas imágenes a través de la formulación adjunta de la migración reversa en tiempo, con fronteras absorbentes tipo CPML.

ABSTRACT

In this work, a new inversion approach is developed for the construction of seismic images in complex geological environments. For this purpose, the wave equation is solved in two dimensions by means of a numerical scheme commonly referred as second order staggered grid finite differences. In addition, in order to realistically simulate wave propagation in a layered earth, absorbent boundaries were introduced at the edges of the computational domain, thus preventing the re-entry of seismic energy from spurious reflections in domain borders. The seismic imaging method used in this work, which is currently known as Adjoint Reverse Time Migration, requires as input, observed pre-stack records and returns as output seismic images in the depth domain called sensitivity kernels. This method of earth imaging from inversion of seismic data has many advantages over other conventional techniques, especially in the case of extremely complex geological conditions, such as salt tectonic settings.

The adjoint RTM algorithm is used to simulate a seismic acquisition in a salt tectonic region, with similar geological conditions to those found at several localities in the Gulf of Mexico. Finally, two-dimensional P-wave and multicomponent seismic acquisitions were simulated. One main goal of this work is to evaluate whether a multicomponent seismic acquisition, which is more expensive than a P-wave traditional acquisition, allows significant improvements in subsalt imaging. For this purpose, comparisons are established between the resulting images in the acoustic and elastic cases, as well as in the inversion process by using the adjoint formulation of reverse time migration with CPML absorbing boundary conditions.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	1
ABSTRACT.....	2
INTRODUCCIÓN	5
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
JUSTIFICACIÓN	5
OBJETIVOS	6
HIPÓTESIS.....	6
FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	8
LEY DE SNELL	8
ONDA CONVERTIDA.	9
SÍSMICA DE REFLEXIÓN.....	10
MIGRACIÓN PRE-APILAMIENTO.....	12
MIGRACIÓN DE TIEMPO REVERSO	12
TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.....	14
ESFUERZO.	14
DEFORMACIÓN.	17
LEY DE HOOK	20
DIFERENCIAS FINITAS	22
ESQUEMA NUMÉRICO.....	24
PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO BIDIMENSIONAL.....	24

<u>CASO DE ESTUDIO</u>	<u>37</u>
<u>RESULTADOS.....</u>	<u>43</u>
CASO ACÚSTICO.....	43
CASO ELÁSTICO.....	46
<u>CONCLUSIONES</u>	<u>50</u>
<u>BIBLIOGRAFÍA</u>	<u>51</u>

INTRODUCCIÓN

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Actualmente, el método sísmico de reflexión es la técnica geofísica más utilizada en la exploración de hidrocarburos, este permite estimar la composición geológica del subsuelo mediante la interpretación de las imágenes sísmicas que resultan de su aplicación. A pesar de la efectividad del método a través de los años, en regiones donde existe tectonismo salino, las imágenes sísmicas del subsuelo presentan graves problemas en cuanto a su resolución espacial. En principio, este efecto es debido a que los cuerpos de sal alóctona, cuya densidad suele ser ligeramente menor a la del medio circundante, se comportan como difractores complejos. Debido a la presencia de estos cuerpos irregulares de sal, se observan patrones de iluminación asociados con la dispersión y difracción de la energía sísmica, causados por la alta velocidad a la que las ondas sísmicas se propagan a través de estos, provocando zonas de sombra en las regiones ubicadas en la vecindad de los cuerpos de sal, principalmente en los flancos y por debajo de estos cuerpos, enmascarando la geometría real de los cuerpos salinos y dificultando así la interpretación geológica en este tipo de ambientes.

JUSTIFICACIÓN

Se estima que gran parte de las reservas de petróleo y gas del mundo se encuentra en ambientes geológicos de gran complejidad. En ambientes con tectónica de sal y arcilla, la exploración sísmica se complica debido a los fenómenos descritos en la sección anterior.

Obtener imágenes claras de la geometría de las estructuras salinas representa un reto para los geofísicos actuales. Definir la base de la sal y de las estructuras subsalinas, permite establecer el potencial de un yacimiento o reducir el riesgo en la perforación de pozos exploratorios o de producción.

En presencia de sal, ocurren conversiones de ondas provocadas por los altos contrastes de velocidad. Por un lado, las ondas P son difractadas y refractadas, y en presencia de cuerpos salinos estos fenómenos dan lugar a zonas de sombra, como se menciona arriba. Por otro lado, al tener una velocidad de propagación menor, las ondas convertidas, ondas S, suelen propagarse con menor distorsión. Generalmente el procesamiento de datos sísmicos marinos se realiza analizando únicamente las ondas P, en levantamientos de una sola componente. En este trabajo se propone realizar un análisis de ondas convertidas utilizando como caso de estudio un modelo en el que se representan las estructuras salinas típicas encontradas en el Golfo de México.

OBJETIVOS

El primer objetivo planteado en este trabajo es desarrollar un algoritmo en dos dimensiones para la migración RTM (Reverse Time Migration) adjunta, que funciones tanto para el caso acústico como elástico, con la finalidad de comparar las ventajas y desventajas de cada uno.

Una vez concluida la etapa anteriormente descrita, se emplearán los resultados obtenidos para el estudio de una región ubicada en el Golfo de México.

A partir de la comparación de resultados entre los modelos elástico y acústico, determinar si el algoritmo de migración propuesto es capaz de resolver el problema del enmascaramiento de la base de la sal y de la falta de resolución en sus flancos.

HIPÓTESIS.

El desarrollo y aplicación de nuevos algoritmos de migración, basados en el análisis de ondas convertidas, permitirá la construcción de imágenes sísmicas del subsuelo en profundidad que facilitarán la definición de la geometría de cuerpos de sal alóctona, así como de las estructuras subsalinas por debajo de ellos.

La migración adjunta del tipo RTM permitirá construir imágenes del subsuelo de muy buena resolución espacial. Este algoritmo nos permite construir imágenes disparando todas las fuentes sísmicas de manera simultánea, reduciendo drásticamente el tiempo de cómputo empleado en la simulación de una adquisición sísmica real.

Mediante la extensión en el desarrollo de algoritmos adjuntos al caso elástico, evaluaremos el nivel de mejora que produce la aplicación de la sísmica multicomponente, en comparación con los levantamientos convencionales de onda P.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En esta sección se discuten algunos conocimientos básicos que el lector debe conocer para poder comprender el desarrollo y construcción de un algoritmo de migración RTM, así como su aplicación en un caso de estudio.

LEY DE SNELL

Si se tiene una onda incidente sobre la interfaz que separa a dos medios, cierta parte de la energía incidente es reflejada en el mismo medio y otra parte es transmitida, o refractada, al medio dos. La geometría de la reflexión y refracción de ondas está gobernada por la Ley de Snell, figura 1, que relaciona los ángulos de incidencia, reflexión y refracción con las velocidades del medio a través de la siguiente expresión

$$\frac{\sin \theta_i}{V_1} = \frac{\sin \theta'_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2} \quad (1)$$

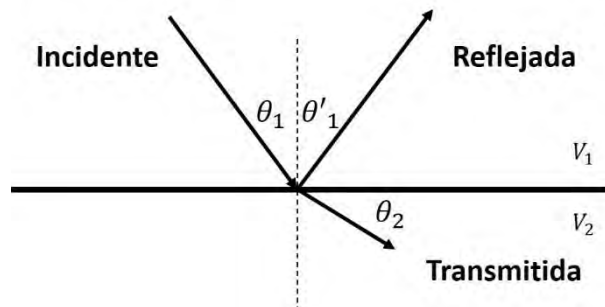


Figura 1. Liner, C. (2004) Geometría de reflexión y refracción.

ONDA CONVERTIDA.

De acuerdo con la definición de Sheriff (1994), la energía que ha viajado, como onda P u onda S y ha sido convertida de una a la otra a partir de la incidencia oblicua en una interfaz, es conocida como onda convertida. En ángulos de incidencia pequeños, el modo de conversión también resulta pequeño, de manera que dichos modos de conversión se vuelven prominentes cuando el ángulo de incidencia aumenta. A pesar de que se pueden generar conversiones de onda S a onda P, nos centraremos en la conversión de onda P a onda S. Cuando una onda P incide sobre el límite entre dos medios, las ondas S generadas se pueden clasificar como SH, cuando la onda es polarizada en el plano horizontal, y SV cuando la polarización ocurre en el plano vertical.

La geometría del patrón de rayos de una onda convertida, figura 2, está dada por la ley de Snell

$$\frac{\sin \theta}{V_p} = \frac{\sin \varphi}{V_s} \quad (2)$$

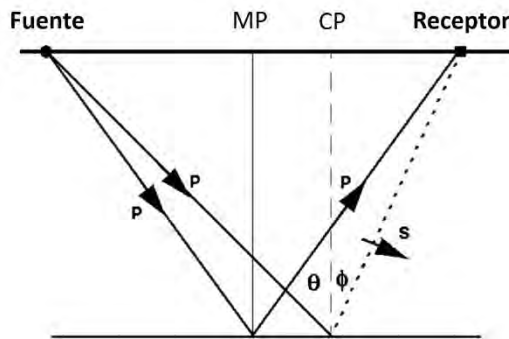


Figura 2. Stewart, R et al. (2002). Reflexión de una onda convertida en su punto de conversión (CP) comparada con la reflexión de una onda P en el punto medio.

Donde θ y φ corresponden a los ángulos de incidencia y reflexión, mientras que V_p y V_s son las velocidades de onda P y S, respectivamente.

SÍSMICA DE REFLEXIÓN

El método sísmico de reflexión es una técnica geofísica de exploración de gran precisión, alta resolución y alcance en profundidad. Este método consiste en generar ondas sísmicas, mediante una fuente controlada, que son detectadas por una serie de receptores, que las convierten en señales eléctricas, estos sensores graban la amplitud y el tiempo de retraso entre el disparo de la fuente y la llegada de la reflexión de las ondas a los sensores.

La geometría de adquisición sísmica de reflexión con un reflector plano tiene como resultado un grupo de trazas denominado shot gather, como se ilustra en la Figura 3. Comúnmente, se realizan varios disparos que son grabados por todos los receptores, el punto medio entre la fuente y el receptor situado en la superficie es denominado punto medio común CMP, por sus siglas en inglés, Common Mid Point (ver Figura 4), aquellas trazas que correspondan al mismo CMP son agrupadas, dando como resultado un CMP gather.

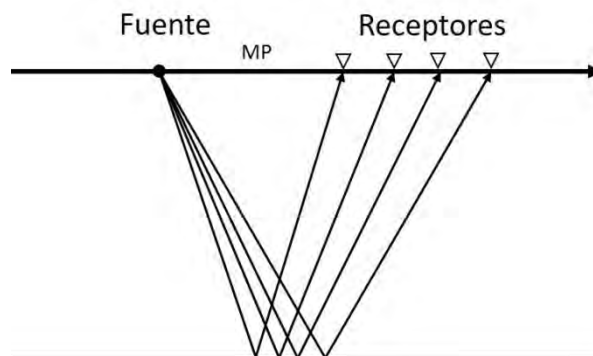


Figura 3. Yilmaz, Ö (2001). La adquisición de datos sísmicos es realizada en coordenadas que están en términos de la fuente y receptor. Los rayos están asociados a un reflector horizontal, estos son emitidos a partir de la fuente, indicada con un círculo sólido, reflejados y registrados en los receptores indicados con triángulos.

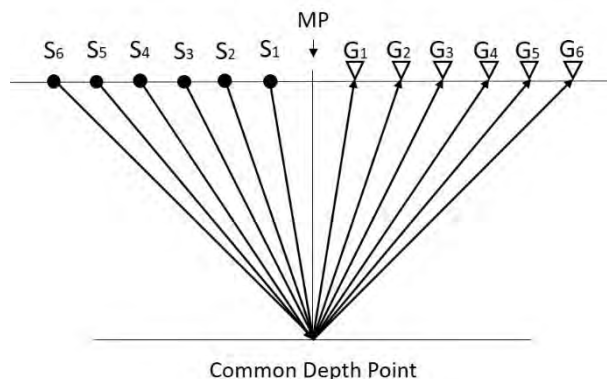


Figura 4. Yilmaz, Ö (2001). El procesamiento de datos sísmicos es realizado en coordenadas basadas en el punto medio, MP, Los rayos están asociados con un CMP gather ubicado en MP. Únicamente si el reflector es horizontal, el punto medio está ubicado en la misma coordenada x que el CDP Common Depth Point.

Para incrementar la calidad de los datos en la imagen sísmica y disminuir el ruido, las trazas contenidas en cada CMP gather son sumadas, de tal manera que al final cada CMP gather resulte en una traza 'mejorada'. Para poder sumar dichas trazas es necesario apilarlas a partir de la aplicación de la corrección por NMO, Normal Move Out, por sus siglas en inglés, que consiste en encontrar la velocidad, llamada velocidad de apilamiento, que permita que la reflexión de los reflectores sea llevada a una línea horizontal, una vez que la velocidad de apilamiento es encontrada, las trazas son corregidas y sumadas, como resultado se obtiene una traza apilada para cada CMP. La integración de las trazas apiladas concluye en una imagen sísmica del subsuelo que es relacionada con la información geológica del área de estudio con la finalidad de inferir la distribución de las rocas. En el caso de la exploración de hidrocarburos, dichas deducciones permiten la evaluación de posibles zonas productoras.

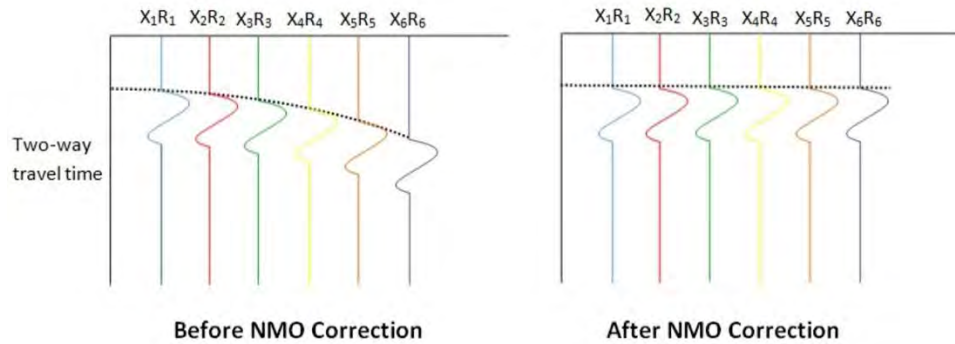


Figura 5. (2012) Corrección NMO. Recuperado de https://en.wikipedia.org/wiki/File:NMO_Correction.png

MIGRACIÓN PRE-APILAMIENTO

La migración es el proceso que repara los efectos producidos por la propagación de ondas y por la geometría de adquisición, reposicionando los eventos del subsuelo en tiempo y profundidad. El objetivo de la migración es hacer que la sección sísmica se asemeje, en la mayor medida posible, a una sección geológica; únicamente cuando los datos han sido migrados se puede pensar en la representación real de un modelo de la Tierra.

La migración puede tener dos tipos de datos de entrada, apilados y no apilados, esto genera la posibilidad de realizar migración post apilamiento, en la que el volumen de datos se considera en offset cero, lo que implica un menor costo computacional en comparación con la migración pre apilamiento, en la que se toman en cuenta todos los datos dentro de cada traza no apilada.

MIGRACIÓN DE TIEMPO REVERSO

La necesidad de obtener mejores imágenes en ambientes con estructuras geológicas complejas, ha estimulado el desarrollo de algoritmos de migración basados en la ecuación de onda completa. La RTM es una técnica de migración

pre apilamiento, su implementación en este trabajo consta de tres partes: la propagación directa a partir de la fuente, la propagación reversa a partir del campo de receptores y la aplicación de la condición de imagen en cada paso de tiempo.

El resultado de realizar la propagación hacia adelante a partir de una fuente explosiva, es un sismograma constituido por las trazas registradas por los receptores, realizar la propagación reversa consiste en calcular la propagación hacia atrás, comenzando en el plano $x - y$ que se encuentra al final del volumen de datos, como se ve en la Figura 6, y calculando la propagación en la dirección indicada por la flecha en azul. En cada paso de tiempo es insertada la información recabada por los receptores en la propagación directa, por lo que este campo se denomina campo de receptores. Por último, a medida que la propagación hacia atrás es calculada, se realiza una correlación a partir de una condición de imagen dada por la expresión:

$$I(x, z) = \int^T S(x, z, t)R(x, z, T - t)dt \quad (3)$$

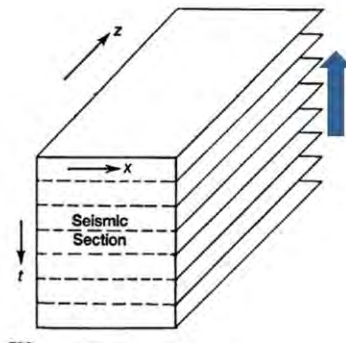


Figura 6. Yilmaz, Ö (2001). Migración en Tiempo Reverso.

Donde T es el tiempo total de registro, y x y z son las coordenadas espaciales. Los campos de fuente y receptores son propagados independientemente, el primero es calculado hacia adelante en tiempo y el segundo hacia atrás, de tal manera que

el resultado final de la RTM consiste en sumar las multiplicaciones realizadas en cada paso de tiempo del campo de fuente $s(x, z, t = 0: t = T)$ con el campo de receptores $R(x, z, T - t = T: T - t = 0)$.

TEORÍA DE LA ELASTICIDAD.

La propagación de ondas en la Tierra está basada en la teoría de la elasticidad, que establece que la manera en la que una onda se propaga a través de un medio está en función de las propiedades elásticas del mismo.

Cuando la superficie de un cuerpo es sometida a fuerzas externas, existen también fuerzas internas opuestas que se resisten a los cambios de tamaño y forma que pudieran ocurrir. La elasticidad es la propiedad que tiene un cuerpo para oponerse a dicha alteración y regresar a su estado original una vez que la acción de las fuerzas externas ha sido retirada.

La teoría de la elasticidad explica la relación que existe entre las fuerzas aplicadas y las variaciones en tamaño y forma presentadas, en términos de los conceptos de esfuerzo y deformación, que a continuación se describen.

ESFUERZO.

Está definido como la relación que existe entre la acción de una fuerza sobre el área en la que la fuerza es aplicada, generalmente se denota con la letra σ .

Cuando una fuerza es aplicada en dirección perpendicular al área en cuestión, el esfuerzo es conocido como esfuerzo normal, si dicha fuerza es aplicada tangencialmente, se dice que el esfuerzo es cortante. Existen esfuerzos que no son perpendiculares y no son paralelos al área, estos pueden ser descritos en términos de una componente normal y una perpendicular.

Considérese un pequeño elemento de volumen como el de la figura 7, en cuyas caras perpendiculares al eje x se aplica un esfuerzo que puede ser descrito por las

componentes σ_{xx} , σ_{yx} y σ_{zx} . El primer subíndice indica la dirección de acuerdo al sistema de referencia correspondiente y el segundo se refiere al eje coordenado perpendicular a la superficie sobre la cual es empleado el esfuerzo.

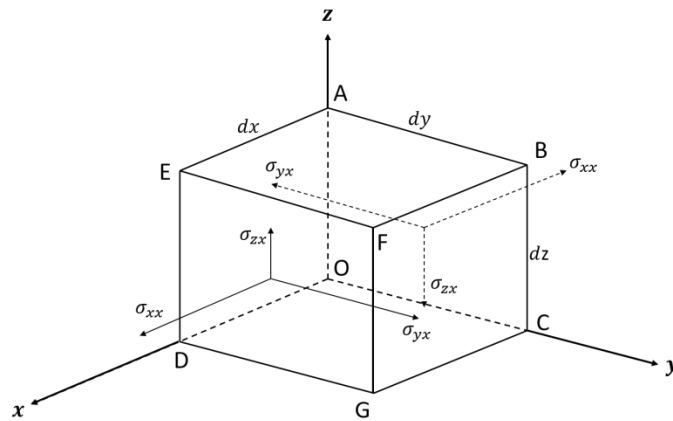


Figura 7. Sheriff, R. y Geldart, L. (1994). Componentes del tensor de esfuerzo en las caras paralelas al plano yz.

Cuando los elementos que conforman un sistema se encuentran en reposo, se dice que el sistema se encuentra en equilibrio estático. Para esto, es necesario que se cumplan las siguientes condiciones. La suma de las fuerzas externas en las direcciones x , y y z deben ser igual a cero $\sum F = 0$, de tal forma que no exista aceleración en ningún sentido. Por otro lado, para evitar la rotación del cuerpo la suma de momentos de todas las fuerzas externas debe ser nula $\sum M = 0$.

Dicho esto, y de vuelta con la figura 7, para que el elemento se encuentre en equilibrio la suma de fuerzas aplicadas al cuerpo en las caras opuestas del elemento deben ser cero y por lo tanto, los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yx} y σ_{zx} que se ejercen sobre la cara DEFG deben ser iguales y de sentido contrario a los que se ejercen sobre la superficie ABCD, si se realiza el mismo análisis para las caras restantes, los dieciocho esfuerzos originales se ven reducidos a nueve, mismos que constituyen el tensor de esfuerzos.

Por otro lado, el esfuerzo σ_{xy} constituye un par que tiende a rotar al elemento con respecto del eje z , la magnitud de dicho par es calculada mediante el producto de la fuerza por la longitud del brazo de palanca, de tal forma que dicha magnitud es $(fuerza)(brazo\ de\ palanca) = (\sigma_{yx}dydz)dx$. Al realizar este análisis para las cuatro caras restantes, podemos darnos cuenta que σ_{xy} es el único par que se opone a esta rotación y por lo tanto podemos asumir que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, de tal manera que cuando el cuerpo se encuentra en reposo solo es necesario conocer 6 componentes del tensor de esfuerzos.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Si ahora se considera que el cuerpo no se encuentra en equilibrio estático y si se supone que los esfuerzos que actúan sobre la cara ABCO son los siguientes, respectivamente

$$\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \quad \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx, \quad \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx$$

Tendremos que los esfuerzos netos son

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dx$$

Ya que estos esfuerzos actúan únicamente en un área $(dx dz)$ e influyen sobre un volumen $(dx dz)$, se obtiene que las fuerzas netas por volumen unitario en las direcciones x , y y z son respectivamente:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}$$

Si se realiza un análisis similar para las caras perpendiculares a los ejes y y z , las fuerzas netas por unidad de volumen en las tres direcciones corresponden a las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

Una vez realizado esto, se puede asumir que la fuerza total por unidad de volumen en dirección de los ejes x , y y z se obtienen mediante las siguientes expresiones.

$$F_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \quad (5)$$

$$F_y = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \quad (6)$$

$$F_z = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \quad (7)$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton que establece que la fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración, podemos obtener las ecuaciones que describen el movimiento en las tres direcciones del espacio.

$$F = ma \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (11)$$

DEFORMACIÓN.

La deformación está definida como el cambio relativo, de forma o tamaño, de un cuerpo que ha sido sometido a esfuerzos. Considérese el cuerpo bidimensional,

delimitado por los puntos $PQRS$, de la figura 8, una vez que se han ejercido esfuerzos sobre este elemento, los puntos P , Q , R y S se han desplazado a los puntos P' , Q' , R' y S' , respectivamente. Las coordenadas de PP' , tienen componentes $u_x(x, y)$ y $u_y(x, y)$, si dichas componentes son iguales para QQ' , RR' y SS' el resultado sería el desplazamiento del cuerpo y no existiría deformación, por lo tanto, las coordenadas del cuerpo antes y después de haber sufrido una deformación, tienen las siguientes coordenadas

$$P(x, y) \rightarrow P'(x + u_x, y + u_y)$$

$$Q(x + dx, y) \rightarrow Q'(x + dx + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx, y + u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx)$$

$$R(x, y + dy) \rightarrow R'(x + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy, y + dy + u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy)$$

$$S(x + dx, y + dy)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow S'(x + dx + u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy, y + dy + u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \\ &+ \frac{\partial u_y}{\partial y} dy) \end{aligned}$$

A partir de estas expresiones y la figura 8, se puede asumir que la longitud de PQ se ve afectada por la cantidad $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ en dirección al eje x y la longitud PR , se ve perjudicada por $\frac{\partial u_y}{\partial x}$; por otro lado, los ángulos infinitesimales δ_1 y δ_2 se pueden aproximar a las correspondientes cantidades $\frac{\partial u_y}{\partial x}$ y $\frac{\partial u_x}{\partial y}$, adicionalmente, el ángulo recto formado por PQ y PR se ve disminuido por la cantidad $\delta_1 + \delta_2$. Finalmente asumimos que el cuerpo en su totalidad ha sido rotado en sentido antihorario por la cantidad de $\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$.

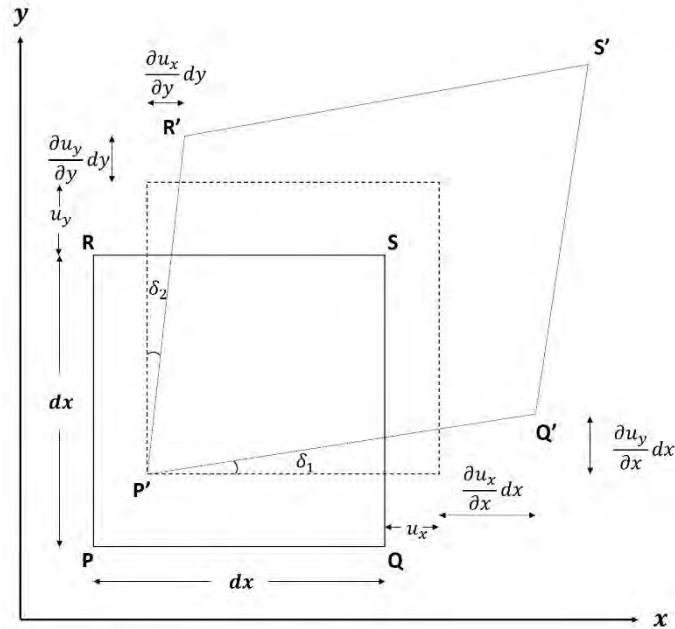


Figura 8. Sheriff, R. y Geldart, L. (1994). Análisis de la deformación en dos dimensiones.

Las deformaciones se pueden clasificar en deformaciones normales y deformaciones cortantes. Las primeras corresponden a los cambios relativos de longitud en los ejes x , y y z , mientras que las segundas están relacionadas con los cambios en la forma y son representadas por la reducción de un ángulo sobre un plano. Generalizando en tres dimensiones el análisis de la figura 8, las deformaciones normales y cortantes están dadas por las siguientes expresiones.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (15)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (17)$$

La rotación a la que está sujeto un cuerpo con respecto de un eje no implica cambios en la forma o el tamaño y por lo tanto no es considerada una deformación, esta rotación está dada por

$$\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (18)$$

$$\theta_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (19)$$

$$\theta_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (20)$$

Cuando un cuerpo está sujeto a esfuerzos, cambio de volumen de un cuerpo está dado por las deformaciones normales, este cambio de dimensiones por volumen unitario se denomina como dilatación y está denotada como Δ . Si se piensa en un paralelepípedo, que se somete a esfuerzos normales y cuyo volumen inicial está dado por $dx dy dz$, una vez aplicados los esfuerzos, las dimensiones del cuerpo deformado estarán dadas por $(1 + \varepsilon_{xx})dx$, $(1 + \varepsilon_{yy})dy$ y $(1 + \varepsilon_{zz})dz$ en las direcciones x , y y z , respectivamente y por lo tanto la ecuación 21, establece el valor de la dilatación.

$$\Delta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (21)$$

LEY DE HOOK

Cuando los esfuerzos son conocidos y la deformación producida es pequeña, es posible establecer una relación entre esfuerzos y deformaciones mediante la ley

de Hooke que establece que la deformación es directamente proporcional al esfuerzo que la produce. La deformación total de un cuerpo sujeto a varios esfuerzos, es la suma de las deformaciones producidas por cada esfuerzo individual y cada esfuerzo produce una deformación independiente de las otras, esto quiere decir que cada deformación es una función lineal de todos los esfuerzos y viceversa. Si se asume que el medio es isotrópico, es decir, que las propiedades no cambian en ninguna dirección, la ley de Hook puede expresarse mediante las siguientes expresiones.

$$\sigma_{ii} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{ii}, \quad i = x, y, z \quad (22)$$

$$\sigma_{ij} = \mu\varepsilon_{ij}, \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j \quad (23)$$

Las ecuaciones 22 y 23 y, pueden representarse también mediante la siguiente ecuación. Las cantidades λ y μ son conocidas como constantes de Lamé y describen las propiedades elásticas del medio.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} \quad (24)$$

La ley de Hooke tiene grandes aplicaciones, sin embargo, para los esfuerzos que son mayores a un límite elástico, se vuelve inútil puesto que después de dicho límite las deformaciones aumentan de manera más rápida. Una vez que se ha cruzado este límite, algunos materiales es posible alcanzar un punto de deformación plástica, es decir, que las deformaciones causadas son permanentes una vez que los esfuerzos se retiran, otros materiales no pasan por este proceso de deformación plástica y se rompen directamente.

DIFERENCIAS FINITAS

Las Ecuaciones Diferenciales Parciales describen muchas de las leyes fundamentales de la naturaleza, en la mayoría de los casos, las EDP no tiene una solución analítica, por lo tanto, se recurre al uso de un procedimiento numérico para aproximar su solución, un método utilizado es el método de Diferencias Finitas, que reemplaza el dominio en el que las variables independientes están definidas por una malla finita de puntos equidistantes en la que se aproxima el valor de la variable dependiente, este método tiene como fundamento el teorema de Taylor, que establece que si conocemos el valor de la función $f(x)$ y sus derivadas en el punto a , se puede estimar el valor de la función en torno al punto $x \in (a, b)$, por medio de un polinomio que depende de las derivadas de la función en el punto a , de tal manera que la serie de Taylor para la función $f(x)$ en su forma compacta es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (x - a)^n \quad (25)$$

Si se considera que los puntos x_i y x_{i+1} pertenecen a la malla y que $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$ son valores conocidos, sustituyendo en la ecuación 25 y truncando después del término de la primera derivada

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + O_2 \quad (26)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + O_2 \quad (27)$$

El término O_2 es una cantidad pequeña que corresponde a los términos que no se toman en cuenta, eliminando este término se obtiene la aproximación de $f'(x_i)$ de primer orden hacia adelante, ya que comenzamos en x_i y avanzamos al punto $x_i + \Delta x$.

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} \quad (28)$$

Si se realiza el mismo análisis con los puntos x_{i-1} y x_i , se obtiene la aproximación de $f'(x_i)$ de primer orden hacia adelante, ecuación 30.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f^1(x_i)(x_{i-1} - x_i) + O_2 \quad (29)$$

$$f^1(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\Delta x} \quad (30)$$

Mediante el método de Diferencias Finitas se pueden construir aproximaciones más precisas aumentando el orden de la aproximación, esto se logra tomando más términos de la serie de Taylor. A continuación, se obtiene la aproximación de segundo orden para una EDP de primer orden.

$$f(x) = f(a) + f^1(a)(x - a) + \frac{f^2(a)}{2}(x - a)^2 + O_3 \quad (31)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f^1(x_i)(\Delta x) + \frac{f^2(x_i)}{2}(\Delta x)^2 + O_3 \quad (32)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f^1(x_i)(\Delta x) + \frac{f^2(x_i)}{2}(\Delta x)^2 + O_3 \quad (33)$$

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) \approx 2f^1(x_i)(\Delta x) + O_3 \quad (34)$$

La ecuación siguiente corresponde a la aproximación de segundo orden centrada de la derivada.

$$f^1(x_i)(\Delta x) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} \quad (35)$$

ESQUEMA NUMÉRICO

A continuación, se describe la elaboración del esquema numérico que permitirá visualizar la propagación de ondas en un medio bidimensional que posee características elásticas específicas dadas en función de la densidad y de las constantes de Lamé, calculadas a partir de la velocidad de onda p V_p y la velocidad de onda s V_p .

PROPAGACIÓN DE ONDAS EN UN MEDIO BIDIMENSIONAL.

Para realizar la propagación de ondas sísmicas en un medio heterogéneo se utilizó el esquema propuesto por (Virieux, 1986). Este esquema utiliza el método de diferencias finitas y se caracteriza por la implementación de mallas escalonadas en las que se incluyen velocidades y esfuerzos.

El objetivo de la modelación numérica, en este caso, es evaluar el comportamiento de las ondas en un perfil sísmico, de tal manera que, siguiendo el procedimiento utilizado por Virieux (1986), la formulación del esquema para un medio bidimensional, consiste en la reducción de las ecuaciones 9, 10, 11, 22 y 2; utilizando únicamente los ejes coordenados x y z , que representan la coordenada en superficie y profundidad respectivamente. Adicionalmente, el conjunto de ecuaciones es transformado en un sistema hiperbólico de primer orden en el que v_x y v_z corresponden a las componentes del vector de velocidad.

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \quad (37)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (38)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (39)$$

$$\frac{\sigma_{xz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (40)$$

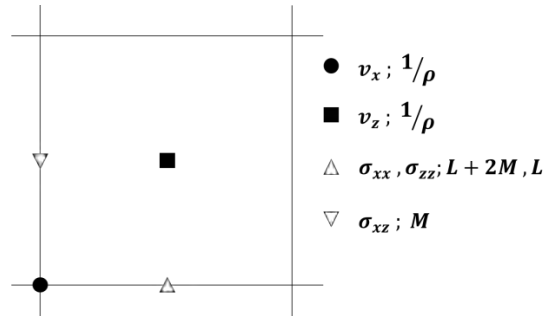


Figura 9. Virieux, J. (1986). Discretización del medio sobre una malla escalonada, se muestra la ubicación espacial de las componentes del vector de velocidades y el tensor de esfuerzos.

Virieux discretiza el medio de forma que las velocidades v_x y v_z no coexisten temporalmente con los esfuerzos σ_{xx} , σ_{xz} y σ_{zz} y únicamente los esfuerzos normales son calculados en el mismo nodo, Figura 9. Esto da como resultado un esquema escalonado en el que el cálculo de los esfuerzos en el tiempo $k\Delta t$ permite el cálculo de las velocidades en el tiempo $(k + 1/2)\Delta t$ y viceversa, generando un esquema que avanza cada $\frac{\Delta t}{2}$, como se muestra en la Figura 10.

La escritura de las ecuaciones de la elastodinámica en un lenguaje computacional, es realizada mediante el uso de diferencias finitas centradas, ecuación 35, dando lugar al siguiente cuadro numérico, en el que los índices i y j representan la discretización espacial con un avance de tamaño Δx en el eje x y Δz en el eje z , k corresponde a la discretización temporal.

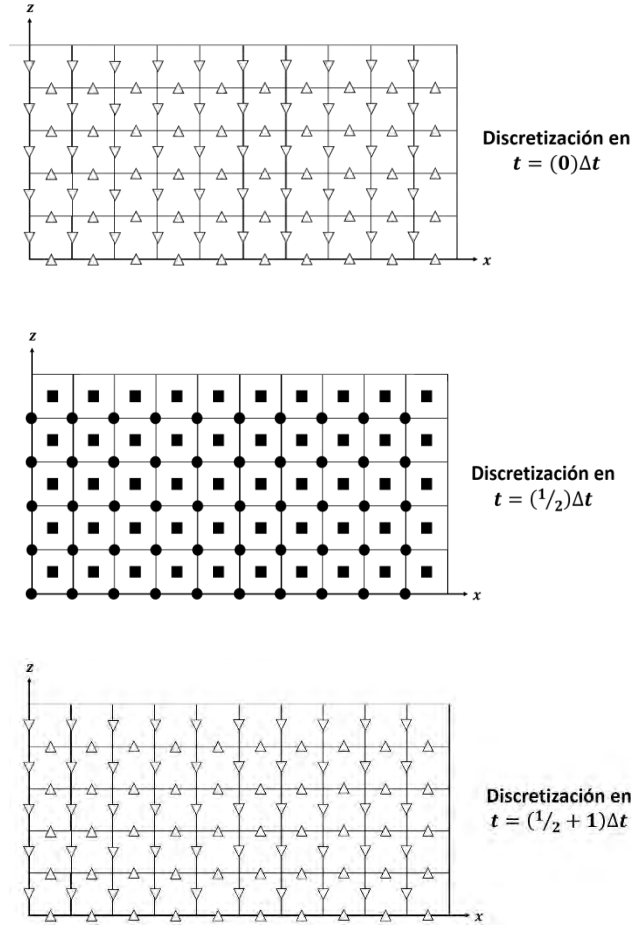


Figura 10. Distribución temporal de los nodos en la malla, las componentes del vector de velocidades se calculan en el tiempo $(k + 1/2)\Delta t$, mientras que las componentes del tensor de esfuerzos, en el tiempo $k\Delta t$.

$$\begin{aligned}
 v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} &= v_{x(i,j)}^{k-\frac{1}{2}} \\
 &+ \frac{1}{\rho_{(i,j)}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k - \sigma_{xx(i-\frac{1}{2},j)}^k \right) + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j-\frac{1}{2})}^k \right) \right] \quad (41)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} &= v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{1}{\rho_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}} \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\sigma_{xz(i+1,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k \right) \right. \\
&\left. + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j+1)}^k - \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k \right) \right] \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} &= \sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \left(v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\Delta z} \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \left(v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} &= \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \left(v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \left(v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^{k+1} &= \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k \\
&+ \mu_{(i,j+\frac{1}{2})} \left[\frac{\Delta t}{\Delta z} \left(v_{x(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right) \right] \quad (45)
\end{aligned}$$

La implementación de una fuente de excitación en el esquema numérico consiste en agregar el valor de la fuente sobre los nodos de los esfuerzos σ_{xx} y σ_{zz} donde se desee ubicar, conforme se avance en tiempo, el esquema numérico generará la propagación de las ondas. Como fuente se utilizó la derivada de un pulso

Gaussiano, dada por la ecuación 46, donde el parámetro α controla el contenido de frecuencia.

$$g(t) = -2\alpha(t - t_0)e^{-\alpha(t-t_0)^2} \quad (46)$$

La aplicación numérica de este método para un medio heterogéneo resulta sencilla, sin embargo, es necesario considerar la condición de estabilidad al momento de discretizarlo, ecuación 47, también hay que tomar en cuenta el contenido de frecuencia de la fuente de excitación, Virieux(1986) establece que deben de haber al menos 10 nodos por longitud de onda.

$$V_{p_max}\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} < 1 \quad (47)$$

En este esquema son consideradas cuatro fronteras que corresponden con los límites del medio que buscamos estudiar, dicho medio se encuentra dentro de un espacio en el que hay continuidad de las propiedades cruzando los límites laterales e inferior, y el límite superior corresponde con la interfaz medio-aire. En los límites laterales e inferior se utilizaron condiciones de frontera de superficie libre o de Neuman que establece que a lo largo de este límite los esfuerzos son nulos, para el borde superior se consideró la condición de frontera rígida, también conocida como condición de Dirichlet, en donde las velocidades tienen un valor igual a cero. Estas fronteras son los límites computacionales del dominio y a diferencia de lo que sucede en la realidad, donde el medio se considera infinito, una vez que la energía propagándose llega a estos límites en la simulación, dicha energía es traída de vuelta al dominio por efecto de reflexión.

Para resolver el problema en las fronteras, en este trabajo se utilizó la técnica denominada en idioma inglés como Convolutional Perfectly Matched Layers (PML convolucional) desarrollada por Komatitsch y Martin (2007), este procedimiento está basado en el modelo de PML desarrollado por Berenger (1994), escrito en forma de una convolución en tiempo. El método de las CPMLs consiste en agregar

capas adyacentes en los límites del dominio original donde se requiera absorber la energía. Esto genera un nuevo dominio en el espacio complejo, en donde las ecuaciones diferenciales del dominio original siguen siendo válidas y en el que se define un perfil de amortiguamiento d_x que hace decrecer exponencialmente la energía de las ondas.

De acuerdo con Komatitsch y Martin (2007), la PML puede ser vista como la continuación de las coordenadas reales en el espacio complejo. Considérese la Figura 11, la PML está ubicada en $x > 0$, y el vector de amortiguamiento $d_x(x)$ tiene un valor igual a cero dentro del dominio principal y $d_x > 0$ dentro del dominio de la PML, de tal forma que es definido un nuevo eje coordenado \tilde{x} en el espacio complejo, que en términos del vector de amortiguamiento está dado por

$$\tilde{x}(x) = x - \frac{i}{\omega} \int_0^x d_x(x) dx \quad (48)$$

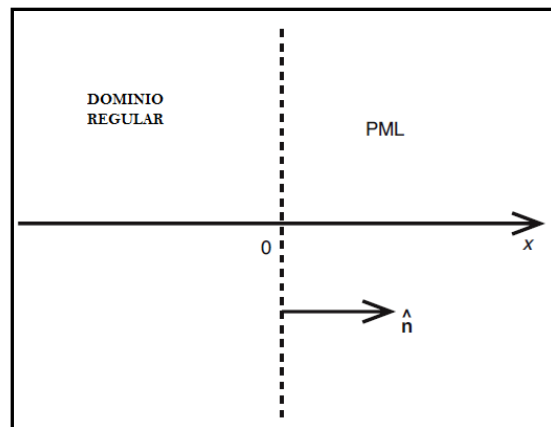


Figura 11. Komatitsch, D. y Martin, R. (2007). Definición del dominio principal y el dominio de la PML, cuya región comienza en $x = 0$, \hat{n} es el vector normal a la interfaz entre ambos dominios.

Diferenciando la ecuación 48

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{i\omega}{i\omega + d_x(x)} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (49)$$

En donde

$$s_x = \frac{i\omega + d_x(x)}{i\omega} = 1 + \frac{d_x(x)}{i\omega} \quad (50)$$

El concepto de la CPML consiste en tener un valor para s_x más general por lo que son introducidas las variables reales $\alpha_x \geq 0$ y $k_x \geq$ de tal manera que la ecuación 50 se puede reescribir como

$$s_x = k_x + \frac{d_x(x)}{\alpha_x + i\omega} \quad (51)$$

Esta expresión depende de la frecuencia, al regresar al dominio del tiempo, sustituyendo en la ecuación 49 y denotando \bar{s}_x como la transformada inversa de Fourier de s_x , se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \bar{s}_x * \frac{\partial}{\partial x} \quad (52)$$

Resolviendo la ecuación 52, se obtiene la siguiente expresión, donde $H(t)$ representa la función escalón unitario.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{d_x}{k_x^2} H(t) e^{-\left(\frac{d_x}{k_x} + \alpha_x\right)t} * \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \quad (53)$$

De tal manera que

$$\varphi_x(t) = \frac{d_x}{k_x^2} H(t) e^{-\left(\frac{d_x}{k_x} + \alpha_x\right)t} \quad (54)$$

El segundo término de la ecuación 53, se puede expresar como

$$\psi_x^n = \left(\varphi_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \right)^n = \int_{\tau=0}^{\tau=n\Delta t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{n\Delta t - \tau} \varphi_x(\tau) d\tau \quad (55)$$

Debido al escalamiento en tiempo del esquema numérico, la derivada espacial está en la mitad del intervalo entre $m\Delta t$ y $(m + 1)\Delta t$, por lo tanto, se puede escribir que

$$\psi_x^n = \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{n-(m+\frac{1}{2})} \int_{\tau=m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \varphi_x(\tau) d\tau \quad (56)$$

Resolviendo se tiene que

$$\psi_x^n = b_x \psi_x^{n-1} + a_x (\partial_x)^{n+1/2} \quad (57)$$

Donde

$$b_x = e^{-\left(\frac{d_x}{k_x} + \alpha_x\right)\Delta t} \quad (58)$$

$$a_x = \frac{d_x}{k_x(d_x + \alpha_x k_x)} (b_x - 1) \quad (59)$$

Finalmente, la aplicación de las fronteras absorbentes, en un modelo que utiliza el método de diferencias finitas, se puede realizar reemplazando el valor de la derivada ∂_x por la siguiente ecuación.

$$\partial_{\tilde{x}} = \frac{1}{k_x} \partial_x + \psi_x \quad (60)$$

La implementación de esta técnica en un modelo bidimensional consiste en anexas PMLs a lo largo de las fronteras laterales e inferior, como se muestra en la figura 12, en el nuevo modelo numérico existen cinco dominios y las PML's están definidas en las direcciones x y z , de tal manera que es necesario realizar un cambio de los ejes x y z , de acuerdo con Gedney (1995), las funciones de amortiguamiento quedan descritas como

$$d_x = d_{x0} \left(\frac{x}{L_x} \right)^N \quad (61)$$

$$d_z = d_{z0} \left(\frac{z}{L_z} \right)^N \quad (62)$$

En donde

$$d_{x0} = -(N - 1)V_p \frac{\log(Rc)}{2L_x} \quad (63)$$

$$d_{z0} = -(N - 1)V_p \frac{\log(Rc)}{2L_z} \quad (64)$$

L_x y L_z representan la longitud de las fronteras a lo largo del eje x y z respectivamente, se utilizó un coeficiente de reflexión $Rc = 2$, un valor de $N = 4$ y α_x y α_z son funciones que varían a lo largo de la PML en el intervalo $[\pi f, 0]$ que corresponde con el inicio y fin de la PML respectivamente, Gedney (1995). Al igual que Komatitsch y Martin (2007) se consideró un valor igual a 1 para k_x y k_z .

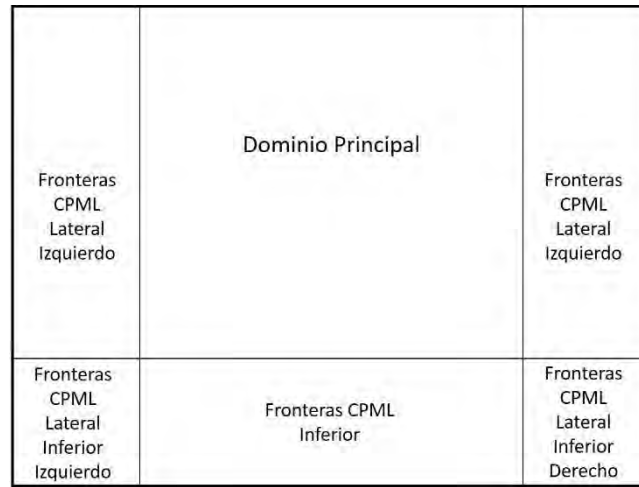


Figura 12. García, R. (2013). Representación del dominio principal y los dominios en donde se cumple las expresiones para las CPML.

A partir de la ecuación 57, se reescriben las funciones ψ_x en diferencias finitas para ambos ejes coordenados.

$$\psi_{\sigma_{xx-x}(i,j)}^k = b_{x(i)}\psi_{\sigma_{xx-x}(i,j)}^{k-1} + a_{x(i)} \left[\frac{\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k - \sigma_{xx(i-\frac{1}{2},j)}^k}{\Delta x} \right] \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma_{xz-x}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^k \\ = b_{x(i)}\psi_{\sigma_{xz-x}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-1} + a_{x(i)} \left[\frac{\sigma_{xz(i+1,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k}{\Delta x} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

$$\psi_{v_{x-x}(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} = b_{x(i+\frac{1}{2})}\psi_{v_{x-x}(i+\frac{1}{2},j)}^{k-\frac{1}{2}} + a_{x(i)} \left[\frac{v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right] \quad (67)$$

$$\psi_{v_{z-x}(i,j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} = b_{x(i+\frac{1}{2})}\psi_{v_{z-x}(i,j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} + a_{x(i)} \left[\frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right] \quad (68)$$

$$\psi_{\sigma_{zz-z}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^k = b_{z(j+\frac{1}{2})}\psi_{\sigma_{zz-z}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-1} + a_{x(j+\frac{1}{2})} \left[\frac{\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j+1)}^k - \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k}{\Delta z} \right] \quad (69)$$

$$\psi_{\sigma_{xz-z}(i,j)}^k = b_{z(j)}\psi_{\sigma_{xz-z}(i,j)}^{k-1} + a_{z(j)} \left[\frac{\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j-\frac{1}{2})}^k}{\Delta x} \right] \quad (70)$$

$$\psi_{v_{x-z}(i,j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} = b_{z(j+\frac{1}{2})}\psi_{v_{x-z}(i,j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} + a_{z(j+\frac{1}{2})} \left[\frac{v_{x(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] \quad (71)$$

$$\psi_{v_{z-z}(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} = b_{z(j)}\psi_{v_{z-z}(i+\frac{1}{2},j)}^{k-\frac{1}{2}} + a_{z(j)} \left[\frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] \quad (72)$$

Con las expresiones 65-71, se puede reescribir el esquema numérico descrito por las ecuaciones 41-45, para el dominio de las PML laterales ecuaciones 65-68 e inferiores ecuaciones 69-72.

$$v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} = v_{x(i,j)}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho(i,j)} \left[\frac{\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k - \sigma_{xx(i-\frac{1}{2},j)}^k}{\Delta x} + \psi_{\sigma_{xx-x}(i,j)}^k + \frac{\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j-\frac{1}{2})}^k}{\Delta z} \right] \quad (73)$$

$$v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} = v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})} \left[\frac{\sigma_{xz(i+1,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k}{\Delta x} + \psi_{\sigma_{xz-x}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^k + \frac{\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j+1)}^k - \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k}{\Delta z} \right] \quad (74)$$

$$\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} = \sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k + \Delta t \left[\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right] \left[\frac{v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \psi_{v_{x-x}(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} \right] + \Delta t \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \left[\frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] \quad (75)$$

$$\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} = \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k + \Delta t \left(\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \left[\frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right] + \Delta t \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \left[\frac{v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \psi_{v_{x-x}(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} \right] \quad (76)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^{k+1} &= \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k \\
&+ \Delta t \mu_{(i,j+\frac{1}{2})} \left[\frac{v_{x(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right. \\
&\left. + \psi_{v_{z-x}(i,j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right] \tag{77}
\end{aligned}$$

$$v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}} = v_{x(i,j)}^{k-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\rho_{(i,j)}} \left[\frac{\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k - \sigma_{xx(i-\frac{1}{2},j)}^k}{\Delta x} + \frac{\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j-\frac{1}{2})}^k}{\Delta z} + \psi_{\sigma_{xz-z}(i,j)}^k \right] \tag{78}$$

$$\begin{aligned}
v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} &= v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}} \left[\frac{\sigma_{xz(i+1,j+\frac{1}{2})}^k - \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k}{\Delta x} + \frac{\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j+1)}^k - \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k}{\Delta z} \right. \\
&\left. + \psi_{\sigma_{zz-z}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^k \right] \tag{79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} &= \sigma_{xx(i+\frac{1}{2},j)}^k + \Delta t \left[\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right] \left[\frac{v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \right. \\
&\left. + \Delta t \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \left[\frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \psi_{v_{z-z}(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} \right] \right] \tag{80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^{k+1} = & \sigma_{zz(i+\frac{1}{2},j)}^k + \Delta t \left(\lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} + 2\mu_{(i+\frac{1}{2},j)} \right) \left[\frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \psi_{v_{z-z}(i+\frac{1}{2},j)}^{k+\frac{1}{2}} \right] \\
& + \Delta t \lambda_{(i+\frac{1}{2},j)} \left[\frac{v_{x(i+1,j)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right]
\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^{k+1} = & \sigma_{xz(i,j+\frac{1}{2})}^k \\
& + \Delta t \mu_{(i,j+\frac{1}{2})} \left[\frac{v_{x(i,j+1)}^{k+\frac{1}{2}} - v_{x(i,j)}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta z} + \psi_{v_{x-z}(i,j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} \right. \\
& \left. + \frac{v_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} - v_{z(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \right]
\end{aligned} \tag{82}$$

Los dominios de las esquinas inferiores son espacios que se ven afectados por las contribuciones de las PMLs laterales, ya sea izquierda o derecha, e inferior; en estos sitios, basta con sumar la contribución de las funciones ψ correspondientes.

CASO DE ESTUDIO

La primera parte de este trabajo consistió en generar los sismogramas que resultarían de una adquisición sísmica en campo. Como se ha mencionado, el esquema numérico empleado requiere como datos de entrada la densidad, la velocidad de onda P y la velocidad de onda S para el medio geológico bajo estudio. Las figuras 13 y 14 corresponden a los dos primeros modelos, se utilizó un modelo de velocidad de onda S escalando los valores de velocidad de onda P, sobre un factor de $\sqrt{3}$. El programa de cómputo desarrollado permite calcular el caso elástico (donde se emplean como entradas densidad, velocidad de onda P y velocidad de onda S), así como el caso acústico, donde se considera nula la velocidad de onda S.

El modelo utilizado ejemplifica la geología típica de un ambiente con tectonismo salino del Golfo de México. Para efectos de este trabajo nos interesa un diapiro de sal con densidad de 2180 [kg/m³] y velocidades de onda P y S de 4000 [m/s] y 2830 [m/s], respectivamente. Originalmente el modelo consideraba un tirante de agua de poco más de un kilómetro de profundidad, sin embargo, los valores de este fueron modificados con la finalidad de poder registrar en superficie la onda convertida.

La longitud del perfil sísmico es de 17 [km] en la horizontal y tiene 11.28 [km] de profundidad, el espaciamiento entre nodos es de 20 [m] en ambas direcciones.

A continuación, en la figura 15 se muestran instantáneas de tiempo de la propagación de ondas. Se muestra la componente z de la velocidad, en el caso acústico; mientras que para el caso elástico se muestran ambas componentes. El tiempo total de la propagación es de 8 [s], la fuente fue colocada en la coordenada $x= 425$ y $z= 2$. Se colocaron receptores en cada nodo, sobre la coordenada $z=2$ y se utilizó un intervalo de tiempo, $dt= 0.0025$ [s].

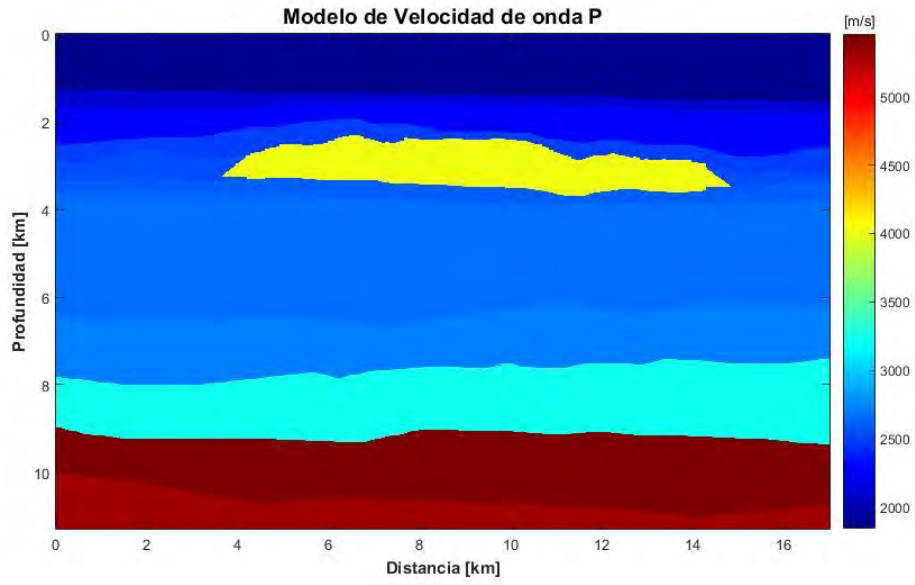


Figura 13. Modelo de velocidad de onda P empleado en este trabajo.

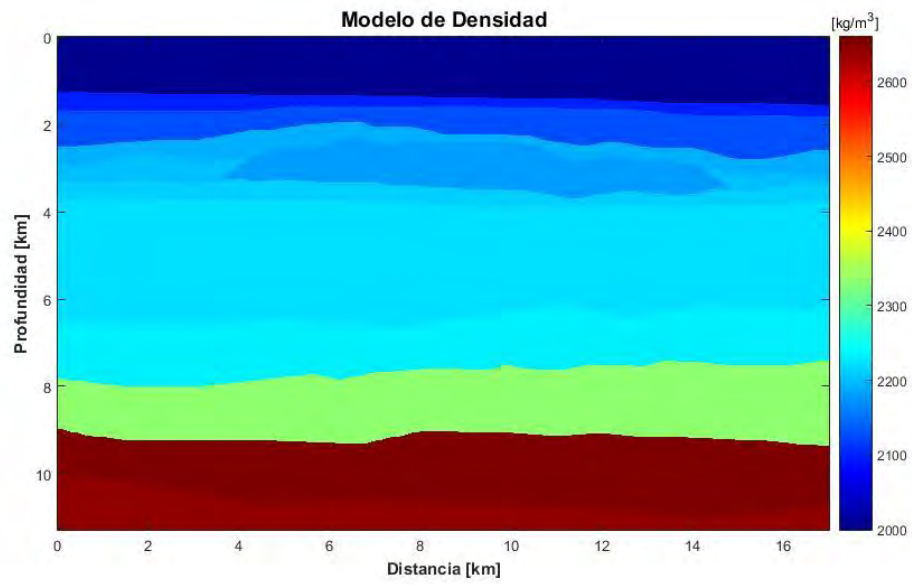
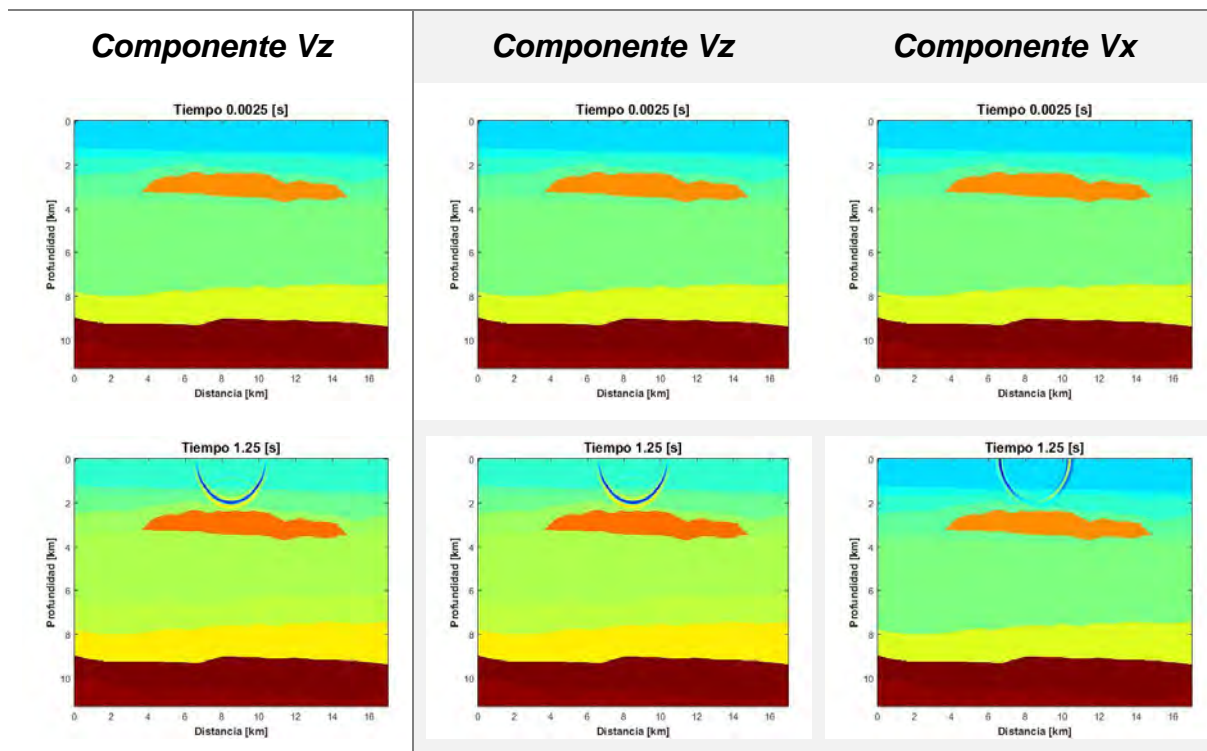


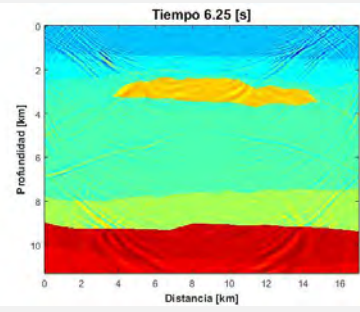
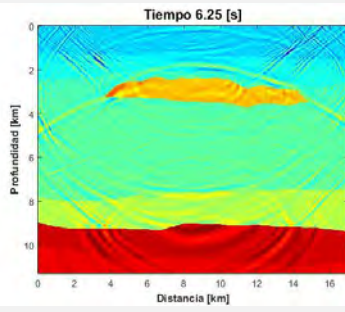
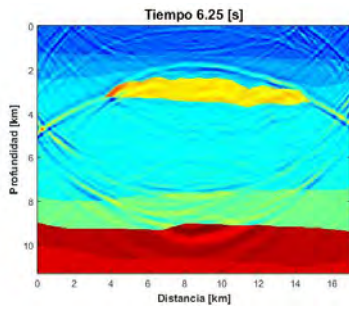
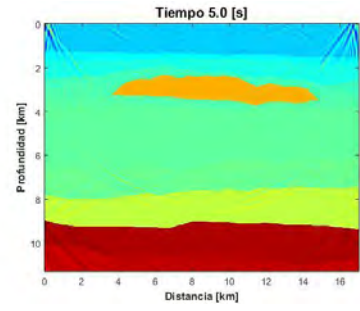
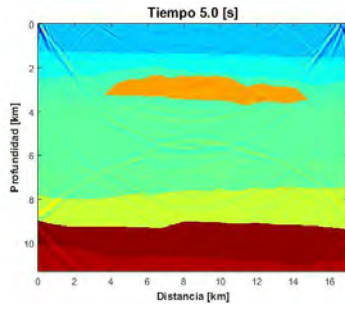
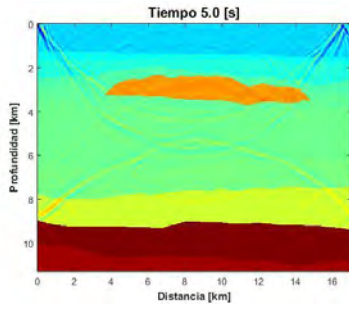
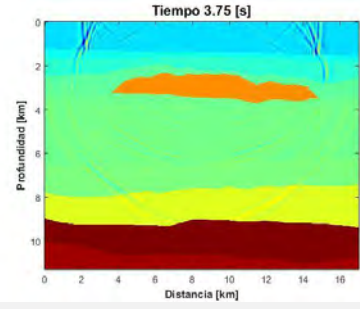
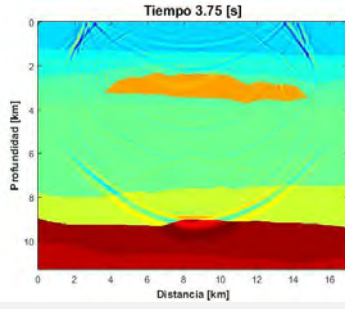
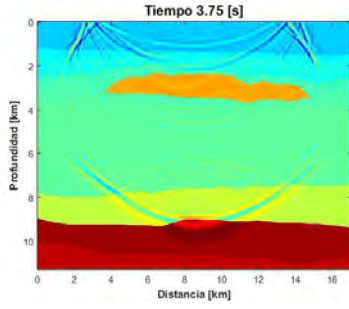
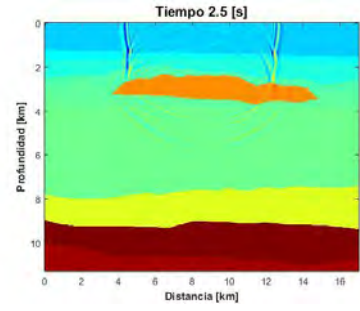
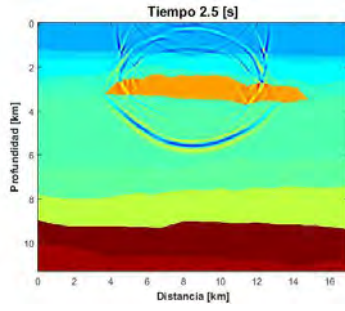
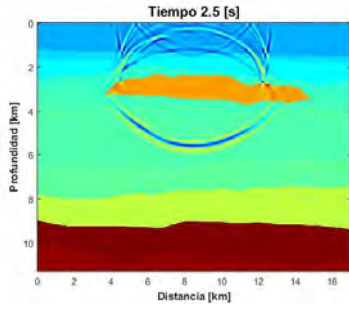
Figura 14. Modelo de Densidad utilizado en este trabajo.

A partir de la observación de los snapshots se identificaron, en los registros grabados por los receptores, los eventos de interés. A modo de comparación, en la figura 16 se muestra el sismograma correspondiente a una adquisición acústica, en la que se registra la componente Vz, y en la figura 17 se muestran los sismogramas correspondientes a una adquisición de las componentes Vz y Vx. Se puede observar que en el sismograma del modelo elástico se obtiene más información relacionada con los eventos principales esperados en este medio geológico específico.

CASO ACÚSTICO

CASO ELÁSTICO





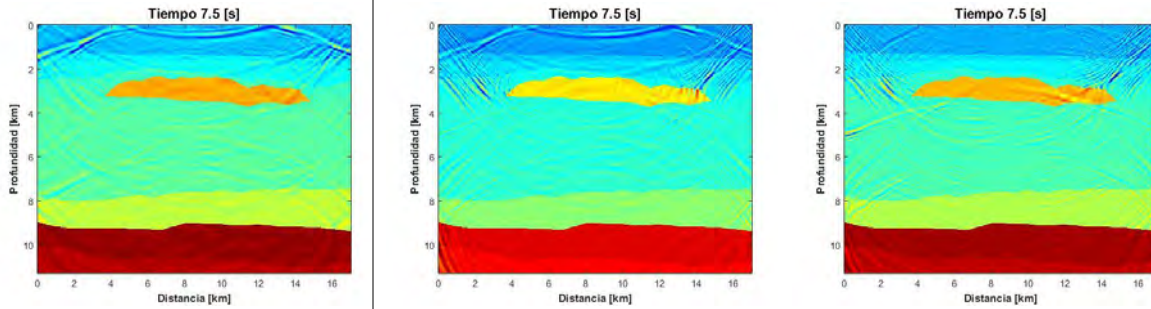


Figura 15. Comparación de Snapshots correspondientes a la propagación de ondas en un medio acústico y uno elástico.

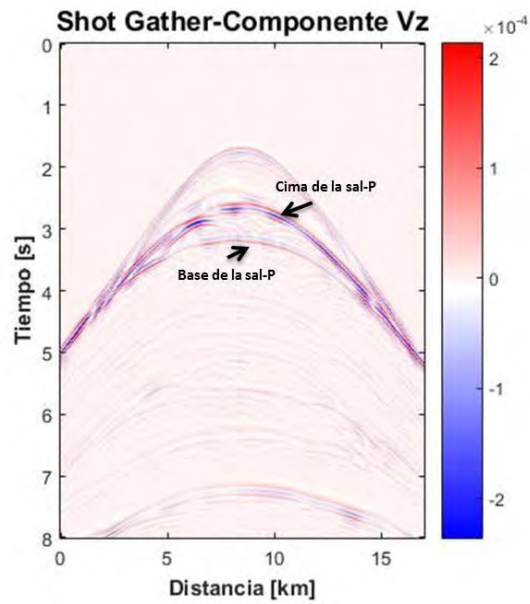


Figura 16. Sismograma obtenido a partir del registro de la componente vertical del modelo de estudio acústico.

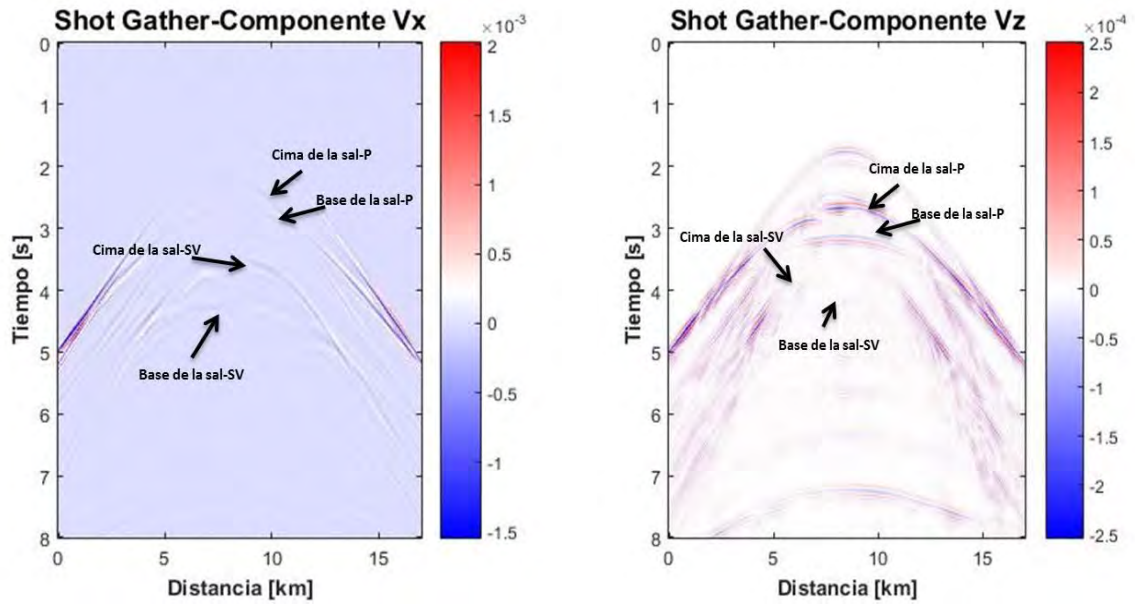


Figura 17. Sismograma obtenido a partir del registro de las componentes vertical y horizontal del modelo de estudio elástico.

RESULTADOS

En esta sección se muestran las imágenes obtenidas, para el caso de estudio descrito anteriormente, empleando el esquema de migración desarrollado en este trabajo.

CASO ACÚSTICO.

El proceso de construcción de las imágenes sísmicas del subsuelo, empleando la migración en profundidad antes de apilar, es un método iterativo que parte de un modelo inicial de velocidad-densidad que progresivamente se va actualizando. Este proceso inicia desde la superficie y continua hasta la parte profunda del modelo, pudiendo extenderse por espacio de 7 a 10 iteraciones para un procesador experto.

En la migración RTM adjunta, la imagen sísmica se construye a través del cálculo de un kernel de sensibilidad correspondiente a un cierto parámetro físico. La sensibilidad depende de la distribución de fuentes y receptores, así como de los valores de velocidad-densidad considerados. En este trabajo, se calculan los kernels para los parámetros Kappa y Rho, que son proporcionales a la velocidad de onda P y la densidad. Estos kernels mapean con precisión las interfaces entre los horizontes geológicos correspondientes a los eventos sísmicos principales.

En este trabajo se emplearon 8 iteraciones y a continuación se presentan las figuras 19-20, donde se muestran las imágenes correspondientes a las iteraciones más representativas del proceso de migración para nuestro caso de estudio.

El modelo inicial de velocidad-densidad, fue construido a partir de una distribución arbitraria de capas con un gradiente vertical de velocidad-densidad representativo del área de estudio.

En la Figura 18 se aprecia la imagen correspondiente a un modelo velocidad-densidad actualizado, donde se interpretó una primera capa de sedimentos

cercana a la superficie. En esta imagen, es posible apreciar varios horizontes sísmicos, incluyendo uno profundo asociado con el basamento. También es posible apreciar un cuerpo de sal alóctona, con una base parcialmente definida y una extensión lateral incierta.

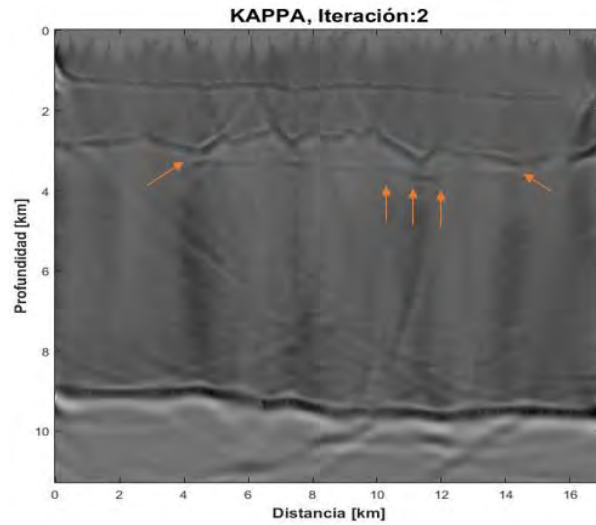


Figura 18. Kernel kappa, correspondiente a la migración acústica. Iteración 2.

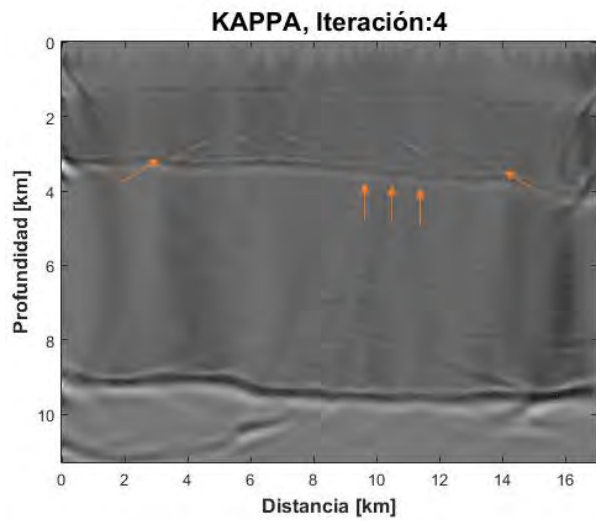


Figura 19. Kernel kappa, correspondiente a la migración acústica. Iteración 4.

En la cuarta iteración (Figura 19), se consigue definir mejor el cuerpo de sal, así como otros horizontes sísmicos intermedios. Sin embargo, persiste cierto nivel de incertidumbre en la definición de la base, que inclusive se superpone con un horizonte.

En la iteración 6 y 7, (Figuras 20 y 21) se consigue definir la forma del cuerpo de sal alóctona, con una mejor aproximación de la base. También es posible observar la geometría del basamento y de otros horizontes sísmicos profundos.

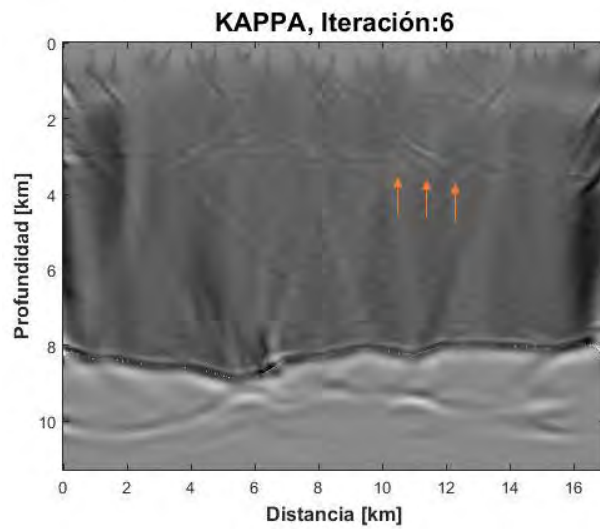


Figura 20. Kernel kappa, correspondiente a la migración acústica. Iteración 6.

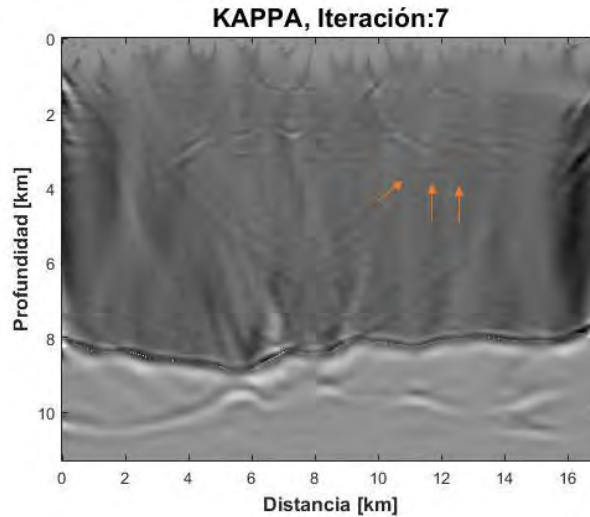


Figura 21. Kernel kappa, correspondiente a la migración acústica. Iteración 7.

CASO ELÁSTICO.

En este caso, se calculan los kernels elásticos para los parámetros Kappa, Rho y Beta, que son proporcionales a la velocidad de onda P y S, así como a la densidad. Estos kernels mapean con precisión las interfaces entre los horizontes geológicos correspondientes a los eventos sísmicos principales.

En el caso elástico se emplearon 5 iteraciones y a continuación se presentan las figuras 22, 23 y 24 donde se muestran las imágenes correspondientes a las iteraciones más representativas del proceso de migración para nuestro caso de estudio.

Como en el caso acústico, el modelo inicial de velocidad-densidad, fue construido a partir de una distribución arbitraria de capas con un gradiente vertical de velocidad-densidad representativo del área de estudio.

En la Figura 22 se aprecia la imagen correspondiente a este modelo inicial. En esta imagen, es posible apreciar varios horizontes sísmicos, incluyendo uno

profundo asociado con el basamento. También es posible apreciar el cuerpo de sal alóctona, con una base totalmente definida y una extensión lateral claramente delimitada.

En la Figura 23 se aprecia la imagen mejorada, que incluye una capa superficial interpretada a partir de la primera iteración. En esta imagen es posible apreciar el cuerpo de sal alóctona, con una base totalmente definida y una extensión lateral claramente delimitada, como en la Figura 22, correspondiente a la primera iteración.

Para propósitos de comparación, también se incluye el kernel Kappa elástico (Figura 24). Este Kernel contiene aproximadamente la misma información que su equivalente acústico, pero también muestra la geometría casi exacta del cuerpo de sal alóctona inclusive desde la primera iteración, la figura 25 muestra la segunda iteración del kernel kappa del caso elástico, es posible visualizar la geometría de la sal, sin embargo, en ambas figuras representativas del kernel kappa no se observa que los reflectores de la cima y de la base de la sal converjan en un punto pudiendo ocasionar una interpretación geológica errónea del cuerpo de sal.

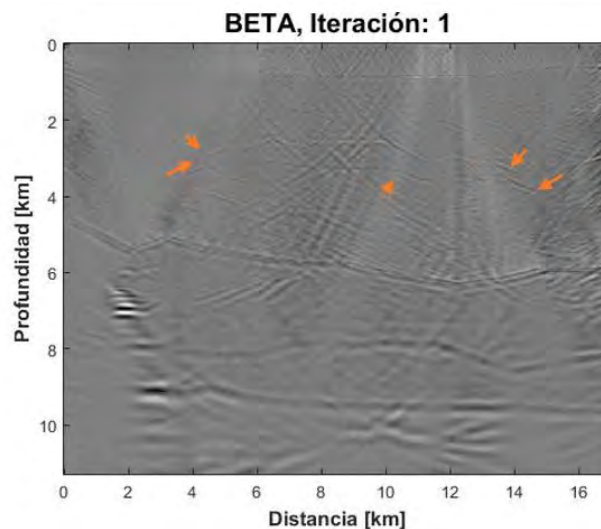


Figura 22. Kernel beta correspondiente a la migración elástica. Iteración 1.

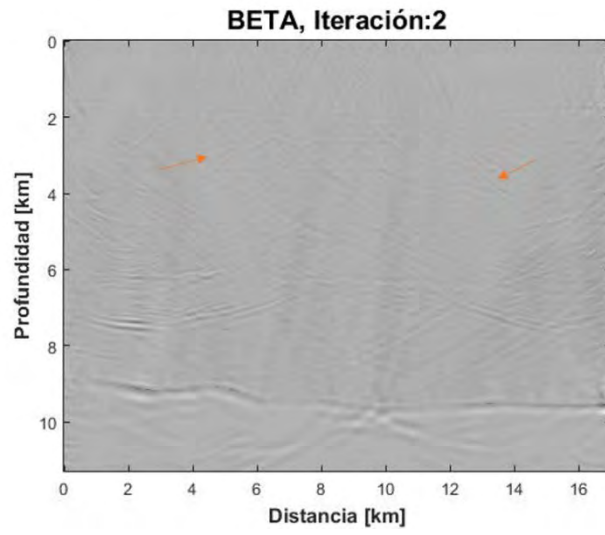


Figura 23. Kernel beta correspondiente a la migración elástica. Iteración 2.

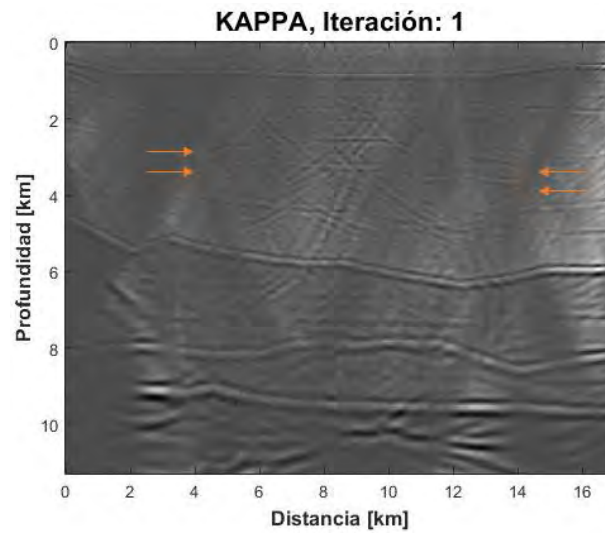


Figura 24. Kernel kappa correspondiente a la migración elástica. Iteración 1.

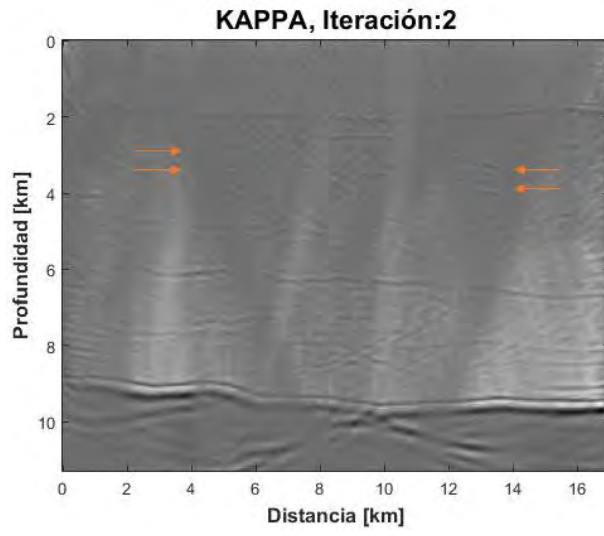


Figura 25. Kernel kappa correspondiente a la migración elástica. Iteración 2.

CONCLUSIONES

La migración RTM adjunta permite construir imágenes sísmicas de alta calidad en ambientes complejos con presencia de tectónica salina.

Es posible simular adquisiciones reales utilizando el esquema numérico desarrollado en este trabajo. Esta afirmación es válida, tanto en el caso de levantamientos convencionales de onda P, como en el caso de levantamientos multicomponente.

Simulando un levantamiento convencional y uno multicomponente, en un ambiente geológico con presencia de tectonismo salino, es posible establecer una serie de conclusiones generales: es posible definir la geometría aproximada de cuerpos de sal alóctona, utilizando la migración reversa en tiempo, a partir de datos acústicos de offset cercano; es posible inferir la forma exacta de los cuerpos de sal alóctona utilizando datos multicomponente con la misma distribución de fuentes y receptores; la construcción de la imagen sísmica se puede realizar en un número menor de iteraciones en el caso multicomponente, con respecto del caso acústico; gracias al empleo de fronteras absorbentes de tipo CPML, es posible realizar la simulación de la adquisición sísmica disparando todas las fuentes de manera simultánea, lo cual nos conduce a un ahorro significativo de tiempo de cómputo (en nuestro caso, empleamos 850 fuentes) y la posibilidad de realizar un número muy elevado de iteraciones de migración en una computadora personal.

BIBLIOGRAFÍA

Causon, D., Mingham, C., Introductory Finite Difference Methods for PDEs, Bookboon, 10-16.

García Reyes, J. L., Inversión de forma de onda completa. Universidad Nacional Autónoma de México, 2013, 31-50.

Gedney, S. D., An anisotropic perfectly matched layer-absorbing médium for the truncation of FDTD lattices, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, 1630-1639.

Jiang, Z., Bancroft, J., Lines, L., Reverse-time migration with/without multiples, Crewes Research Report, Vol. 22, 2010.

Komatitsch, D., Martin, R., An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation, Geophysics, 2007, Vol. 70, No., 155-167.

Liner, C., Elements of 3D Seismology, Segunda Edición, Penwell Corporation, 321-359.

Sheriff, R. E., Geldart, L. P. Exploration Seismology, Segunda Edición, Editorial Cambridge University Press, 1995, 592.

Stewart, R., Gaiser, J., James, R., Lawton, D., Converted-wave seismic exploration: a tutorial, Crewes research report, Vol. 11, 1999.

Stewart, R., Gaiser, J., James, R., Lawton, D., Converted-wave seismic exploration: Methods, Geophysics, Vol. 67, No. 5, 2002, 1348-1363.

Tarantola, A, A strategy of nonlinear elastic inversión of seismic reflection data, Geophysics, 1986, Vol. 51, No. 10, 1893-1903.

Tessmer, G., Bahle, A., Common reflection point data-stacking technique for converted waves, *Geophysical Prospecting*, Vol. 2, 1988, 671-688.

Tromp, A., Tape, C., Liu, Q., Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana doughnut kernels, *Geophys. J. Int.*, 2005, Vol. 160, 195-216.

Virieux, J., P-SV propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, 1986, Vol. 51, 889-901.

Yilmaz, Ö., *Seismic data Analysis*, Society of Exploration Geophysics, Vol. 1, 1987, 476-492.