



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

Clasificación de familias de 1-formas racionales sobre la esfera de Riemann

POR DEFENSA DE TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
M. C. Julio César Magaña Cáceres

Dr. Jesús R. Muciño Raymundo  
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, campus Morelia

Dr. José Ferrán Valdez  
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, campus Morelia

Dr. Jorge Luis López López  
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás  
de Hidalgo

Ciudad de México, Agosto. 2017



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Índice general

Agradecimientos	III
Resumen y Abstract	V
Introducción	VII
<b>1 ¿Por qué son importantes las 1–formas racionales?</b>	<b>1</b>
1.1 1–Formas racionales sobre la esfera de Riemann. . . . .	1
1.2 Haces lineales complejos y secciones racionales. . . . .	2
1.3 Campos vectoriales reales y parámetros distinguidos. . . . .	4
1.4 Superficies planas $S_\omega$ y ejemplos. . . . .	9
<b>2 El estrato de 1–formas racionales con polos simples <math>\Omega^1(-s)</math></b>	<b>15</b>
2.1 Parametrización mediante coeficientes. . . . .	16
2.2 Parametrización mediante residuos–polos. . . . .	18
2.3 Parametrización mediante ceros–polos. . . . .	20
2.4 Equivalencia de las estructuras complejas para la familia $\Omega^1(-s)$ . . . . .	22
2.5 La subfamilia de 1–formas isocronas. . . . .	28
<b>3 El cociente de 1–formas racionales biholomorfamente equivalentes</b>	<b>31</b>
3.1 Acción del grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	31
3.2 Acciones propias y grupos de isotropía. . . . .	38
3.3 El cociente $\Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	44
3.4 Parametrización de $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	45
3.5 El cociente $\Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	47
3.6 El cociente $\Omega^1(-4)/PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	51
3.7 El cociente $\Omega^1(-5)/PSL(2, \mathbb{C})$ . . . . .	54

<b>4 Conclusiones y problemas futuros</b>	<b>55</b>
4.1 El cociente de superficies planas asociadas $S_\omega$ módulo isometrías.	55
4.2 Conclusiones. . . . .	60
4.3 Problemas futuros. . . . .	60
<b>Bibliografía</b>	<b>62</b>

# Agradecimientos

A mi familia, que con sus esfuerzos y sacrificios logre mis objetivos. Especialmente a mi abuelita por guiarme y mostrarme cómo ser una buena persona.

A mi asesor, el Dr. Jesús R. Muciño Raymundo por sus consejos, enseñanzas y paciencia que sin ello este trabajo no sería posible.

A mi comité tutorial, el Dr. Ferrán Valdez y el Dr. Jorge Luis López López por todas sus observaciones y consejos en este trabajo.

A mis sinodales, Dr. Xavier Gomez Mont, Dr. Martín Eduardo Frías Armenta, Dr Angel Cano, Dr. Ferrán Valdez, Dr. Jesús Muciño y Dra. Leticia Brambila; por todos sus comentarios para mejorar este escrito.

A mis amigos, que hicieron menos estresante este camino con su apoyo y momentos de diversión. En especial a los del cubículo 106, Luis Jorge y Jose Antonio.

Por su puesto quiero agradecer a mi compañera de vida, Ana Karen Pérez Gaytan por estar a mi lado en situaciones buenas y malas. Nada sería lo mismo sin ella.



# Resumen

Estudiamos la familia de 1-formas racionales sobre la esfera de Riemann con exactamente  $-s \leq -2$  polos simples  $\Omega^1(-s)$ . Reconocemos tres estructuras biholomorfas sobre  $\Omega^1(-s)$  usando los coeficientes, residuos-polos y ceros-polos. Decimos que una 1-forma racional es isocrona si todos sus polos son simples y tienen residuos imaginarios puros. Probamos que la subfamilia de 1-formas isocronas  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  es una subvariedad real analítica  $(3s - 1)$ -dimensional de la variedad compleja  $\Omega^1(-s)$ . El grupo de Lie complejo  $PSL(2, \mathbb{C})$  actúa de manera holomorfa en  $\Omega^1(-s)$ . Para  $s \geq 3$ , la  $PSL(2, \mathbb{C})$ -acción es propia. Por lo tanto, el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  admite una estratificación por tipos de órbitas. Parametrizamos los cocientes  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  y  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ , usando suficientes invariantes para la  $PSL(2, \mathbb{C})$ -acción.

**Palabras clave:** 1-formas racionales · centros isocronos ·  $PSL(2, \mathbb{C})$ -acción propia ·  $PSL(2, \mathbb{C})$ -haz principal · estratificación por tipos de órbitas

# Abstract

We study the family  $\Omega^1(-s)$  of rational 1-forms on the Riemann sphere, which has exactly  $-s \leq -2$  simple poles. Three equivalent complex structures on  $\Omega^1(-s)$ , using coefficients, residues–poles and zeros–poles of the 1-forms, are recognized. A rational 1-form is isochronous if for every pole its residue is purely imaginary. We prove that the subfamily  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  of isochronous 1-forms is a  $(3s - 1)$ -dimensional real analytic submanifold of the complex manifold  $\Omega^1(-s)$ . The complex Lie group  $PSL(2, \mathbb{C})$  acts holomorphically on  $\Omega^1(-s)$ . For  $s \geq 3$ , the  $PSL(2, \mathbb{C})$ -action is proper. Therefore, the orbit space  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  admits a stratification by orbit types. A parametrization for the quotient  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  and  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ , using the explicit invariant for the  $PSL(2, \mathbb{C})$ -action, are given.

**Keywords:** Rational 1-forms · isochronous centers · proper  $PSL(2, \mathbb{C})$ -action · principal  $PSL(2, \mathbb{C})$ -bundle · stratification by orbit types

# Introducción

Una superficie de Riemann compacta  $M_g$  está completamente determinada por su espacio vectorial de 1-formas holomorfas. Para  $g \geq 1$ , la variedad Jacobiana  $J(M_g)$  se define usando este espacio. A grandes rasgos, el teorema de Torelli (ver [11] pág. 359) dice que podemos recuperar la superficie de Riemann  $M_g$  conociendo  $J(M_g)$ . Por otro lado, para  $g \geq 2$  un resultado clásico de Hurwitz (ver [7] Cap. V) afirma que el grupo de automorfismos holomorfos de  $M_g$ ,  $Aut(M_g)$ , es finito. De hecho,  $Aut(M_g)$  casi siempre es trivial. Para  $g = 0$ , existen tres afirmaciones conocidas. La primera es una consecuencia inmediata del teorema de uniformización, esto es, existe una única estructura compleja, la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ . La segunda dice que cualquier 1-forma holomorfa en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es idénticamente cero. Finalmente, el grupo de automorfismos  $PSL(2, \mathbb{C})$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  es el más grande (es de dimensión compleja 3) entre todos los grupos de automorfismos de cualquier superficie de Riemann compacta o no.

*Para cada  $s \geq 2$ , un problema natural es la clasificación de la familia de 1-formas racionales sobre la esfera de Riemann con exactamente  $-s$  polos simples  $\Omega^1(-s)$ , módulo la acción natural del grupo de automorfismos  $PSL(2, \mathbb{C})$ .*

Nosotros convenimos que la multiplicidad de los polos es negativa

• • •

Como motivación para dicha clasificación, recordemos la siguiente afirmación. Sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ , existe una *correspondencia* uno a uno entre:

- 1-Formas racionales  $\omega = \frac{Q(z)}{P(z)}dz$ .

- Diferenciales cuadráticas racionales orientables  $\omega \otimes \omega = \frac{Q^2(z)}{P^2(z)} dz^2$ .
- Campos vectoriales racionales  $X_\omega = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\partial}{\partial z}$ .
- Parejas de campos vectoriales  $(\Re(X_\omega), \Im(X_\omega))$  reales analíticos sobre  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{Q = 0\}$  y con singularidades en  $\{P = 0\} \cup \{Q = 0\}$ .
- Superficies planas  $S_\omega = (\widehat{\mathbb{C}}, g_\omega)$  provistas con dos campos reales geodésicos  $\Re(X_\omega)$  e  $\Im(X_\omega)$  y con singularidades adecuadas en  $\{P = 0\} \cup \{Q = 0\}$ .

Las métricas riemannianas  $g_\omega$  son real analíticas en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{Q = 0\} \cup \{P = 0\}$ , ellas provienen de las diferenciales cuadráticas  $\omega \otimes \omega$ . En este trabajo, usaremos libremente la correspondencia para establecer nuestro lenguaje. Varios de los resultados se traducen de la familia de 1-formas  $\Omega^1(-s)$ , para cada  $-s \leq -2$ , a la familia respectiva de campos vectoriales y viceversa. Algunas propiedades de la correspondencia se recuerdan en el Capítulo 1. Para más detalles ver [37] Cap. 2 § 5, [31] y [1].

Como primer paso en este trabajo (Capítulo 2) reconocemos tres estructuras complejas sobre la familia  $\Omega^1(-s)$ . Estas se determinan por diferentes expresiones de las 1-formas; mediante coeficientes  $\Omega_{coef}^1(-s)$ , usando residuos-polos  $\Omega_{rp}^1(-s)$  y por medio de ceros-polos  $\Omega_{zp}^1(-s)$ . Nuestro resultado es como sigue.

**Teorema 2.10.** *Las variedades complejas  $\Omega_{coef}^1(-s)$ ,  $\Omega_{rp}^1(-s)$  y  $\Omega_{zp}^1(-s)$  son biholomorfas, ellas son espacios de parámetros para la familia  $\Omega^1(-s)$ .*

Como es usual en variedades complejas que parametrizan ciertos objetos, imponer condiciones geométricas en los objetos determinan subfamilias de la variedad. En muchos casos, estas subfamilias son de manera natural subvariedades. Nosotros estamos interesados en estudiar la subfamilia de 1-formas racionales  $\{\omega\}$  de  $\Omega^1(-s)$  tales que todo polo de  $\omega$  tiene residuo imaginario puro. Estas son llamadas *1-formas isocronas* y a la subfamilia que determinan la denotamos por  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$ . Nuestro resultado es el siguiente.

**Corolario 2.11.** *La subfamilia  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  es una subvariedad real analítica  $(3s - 1)$ -dimensional de  $\Omega^1(-s)$ .*

Usando la correspondencia, la condición de que  $\omega$  sea una 1-forma isocrona se traduce a que su campo real asociado  $\Re(X_\omega)$  tiene singularidades que

son centros isocronos, en todos los polos de  $\omega$ . Más aún, el recíproco es cierto.

Como segundo paso (Capítulo 3), notamos que el grupo de automorfismos  $PSL(2, \mathbb{C})$  actúa naturalmente sobre  $\Omega^1(-s)$  de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s : PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega^1(-s) \\ (T, \omega) &\longmapsto T_*\omega. \end{aligned}$$

Existen varios caminos para estudiar el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ . Nosotros usamos la teoría clásica de acciones propias de grupos de Lie siguiendo a J. J. Duistermaat *et. al.* en [6] Cap. 2.

El caso  $s = 2$  es trivial y se omite en esta discusión. Para  $s \geq 3$ , probamos que la  $PSL(2, \mathbb{C})$ -acción es *propia* (ver Lema 3.7). Una subfamilia abierta y densa en  $\Omega^1(-s)$  esta dada por las 1-formas genéricas

$$\mathcal{G}(-s) := \{\omega \in \Omega^1(-s) \mid PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \{Id\}\},$$

donde  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  denota el grupo de isotropía de  $\omega$ . Para  $\mathcal{G}(-s)$ , reconocemos un  $PSL(2, \mathbb{C})$ -haz principal holomorfo

$$\pi_s : \mathcal{G}(-s) \longrightarrow \mathcal{G}(-s)/PSL(2, \mathbb{C}),$$

donde  $\pi_s$  denota la proyección natural a órbitas. Para  $s = 3$  (resp.  $s = 4$ ), probamos que el  $PSL(2, \mathbb{C})$ -haz principal es trivial (resp. no trivial). Por otro lado, para toda  $\omega \in \Omega^1(-s) \setminus \mathcal{G}(-s)$ , su grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  es un subgrupo finito no trivial de  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Los subgrupos finitos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  son bien conocidos por un resultado clásico de F. Klein [22], pág. 126. Ellos son cíclicos, diédricos y grupos de rotaciones de sólidos Platónicos. En nuestro contexto, la restricción de la acción  $\mathcal{A}_s$  sobre  $\mathcal{R}\mathcal{I}\Omega^1(-s)$  está bien definida. Una respuesta positiva para el problema de realización de grupos de isotropía es como sigue.

**Teorema 3.13.** *Todo subgrupo finito  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  aparece como grupo de isotropía de una 1-forma  $\omega \in \mathcal{R}\mathcal{I}\Omega^1(-s)$  adecuada con  $s \geq 3$ .*

Obviamente, el grado  $-s$  de la 1-forma  $\omega$  adecuada depende del orden del grupo  $G$ .

Los residuos proveen *funciones invariantes* naturales en  $\Omega^1(-s)$  bajo la  $PSL(2, \mathbb{C})$ -acción  $\mathcal{A}_s$ . Ellos son usados para describir el espacio de parámetros de 1-formas asociadas a campos vectoriales polinomiales (ver [9]). Retomando la teoría de acciones propias de grupos de Lie como en [6] pág. 113,

reconocemos que los cocientes  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  y  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  admiten una estratificación, complejo y real respectivamente, por *tipos de órbitas*. Para describir con más precisión estos cocientes, los parametrizamos usando las funciones  $PSL(2, \mathbb{C})$ -invariantes. Para  $s = 3$ , los residuos inducen un conjunto completo de funciones invariantes, esto es, que nos permiten la parametrización del cociente. Para  $s \geq 4$ , la afirmación anterior es falsa. Los residuos no es un conjunto de funciones  $PSL(2, \mathbb{C})$ -invariantes suficientemente grande. Por ello, es natural completar este conjunto agregando funciones invariantes que se construyen con las razones cruzadas de los polos de las 1-formas respectivas. Reconocemos explícitamente el espacio de parámetros de los cocientes  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  y  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  utilizando los parámetros residuos-polos y una acción del grupo simétrico de  $s$  elementos  $\mathcal{S}(s)$ , ver respectivamente Teorema 3.20 y Corolario 3.21.

Por último (Capítulo 4), a grandes rasgos estudiamos los cocientes

$$\mathfrak{M}(-s) := \frac{\{S_\omega \mid \omega \in \Omega^1(-s)\}}{\{\text{Isometrías}\}} \quad \text{y} \quad \mathcal{RI}\mathfrak{M}(-s) := \frac{\{S_\omega \mid \omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)\}}{\{\text{Isometrías}\}},$$

extendiendo de manera adecuada la acción  $\mathcal{A}_s$  (ver Observación 4.4). Para  $s = 3$ , identificamos a los cocientes anteriores con el espacio de triángulos Euclidianos módulo las isometrías de  $\mathbb{C}$  que preservan la orientación. Usando el Teorema 3.20 y el Corolario 3.21, parametrizamos los cocientes  $\mathfrak{M}(-s)$  y  $\mathcal{RI}\mathfrak{M}(-s)$ , respectivamente. Lo principales resultados que presentamos en este trabajo han sido sometidos para su publicación, ver [27].

• • •

Durante nuestro estudio, hemos podido apreciar algunos puntos históricos sobre la correspondencia que identifica a las 1-formas con diferenciales cuadráticas, campos vectoriales complejos, parejas de campos vectoriales reales y superficies planas, como siguen. Hasta donde nosotros conocemos, el primero en usar implícitamente parte de dicha correspondencia fue F. Klein en [21] Cap. 1; al reconocer que las imágenes de las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  e  $\Im(X_\omega)$  bajo la función  $\Psi(z) = \int^z \omega$  son las trayectorias horizontales y verticales canónicas del contradominio  $\mathbb{C}$  de  $\Psi$ , respectivamente. Diversos autores, por ejemplo S. Kerkhoff *et. al.* en [20] usaron la correspondencia implícitamente en problemas de billares. Varios aspectos sobre la dinámica de los campos vectoriales meromorfos y los campos vectoriales reales analíticos, usando fuertemente la correspondencia, se consideran en los trabajos de

C. Valero–Valdéz *et al.* [32], J. Muciño–Raymundo [31] y A. Alvarez–Parrilla *et al.* [1]. K. Strebel en [37] Cap. 2 § 5 describe la identificación entre las diferenciales cuadráticas con las superficies planas y estudia sus singularidades para ceros y polos de todos los ordenes. Un trabajo más actual sobre la identificación entre 1–formas racionales sobre la esfera de Riemann y superficies planas la realizan E. Frías–Armenta *et al.* en [8].

Pasando a una breve historia sobre el estudio de los centros isocronos para campos vectoriales y 1–formas hasta la actualidad; C. Huygens en [16] y [39] pág. 72 da fórmulas para el periodo de centros isocronos en el modelo de un péndulo simple. Las diferenciales cuadráticas con trayectorias cerradas fueron consideradas primero por O. Teichmüller en su “*Habilitationsschrift*” [38]. K. Strebel [36], [37] prueba que ciertas diferenciales cuadráticas con trayectorias horizontales regulares cerradas realizan el problema de métricas extremas introducido por J. A. Jenkins [17]. Recientemente, J. Langer [25] grafica y describe geoméricamente las trayectorias horizontales de diferenciales cuadráticas meromorfas no orientables con trayectorias cerradas.

Otra faceta interesante de las 1–formas isocronas  $\omega$  es de la siguiente manera. El plano fase del campo vectorial asociado  $\Re(X_\omega)$  es la unión de cuencas de centros isocronos y anillos. Esto quiere decir que, cualquier par de trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  que pertenecen a una cuenca de un centro isocrono tienen el mismo periodo. P. Mardešić *et al.* [28] estudiaron el problema de linealización de centros para campos reales analíticos. L. Gavrilov [10] considera la aparición de centros isocronos en sistemas Hamiltonianos polinomiales en  $\mathbb{C}^2$  y su relación con la famosa conjetura Jacobiana. Una caracterización de campos vectoriales, asociados a 1–formas isocronas, es realizado por J. Muciño–Raymundo en [31]. E. Frías–Armenta *et al.* [9] realizaron una clasificación analítica y topológica para campos vectoriales polinomiales sobre  $\mathbb{C}$ , con únicamente centros isocronos.



# Capítulo 1

## ¿Por qué son importantes las 1-formas racionales?

### 1.1. 1-Formas racionales sobre la esfera de Riemann.

Recordemos que la estructura compleja de la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C}_z \cup \{\infty\}$  tiene asociada las cartas

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{C}_z \\ z & \longmapsto & z, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \varphi_2 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}_w \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z} = w. \end{array}$$

Los contradominios de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  son llamados coordenadas locales  $\mathbb{C}_z$  y  $\mathbb{C}_w$  respectivamente. El cambio de coordenadas asociado a la estructura compleja de  $\widehat{\mathbb{C}}$  es  $\varphi_{21} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2|_{\mathbb{C}_z \setminus \{0\}}$ , donde el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{\mathbb{C}} & \\ \varphi_1 \swarrow & & \searrow \varphi_2 \\ \mathbb{C}_z \setminus \{0\} & \xrightarrow{\varphi_{21}} & \mathbb{C}_w \setminus \{0\}. \end{array}$$

**Definición 1.1.** Una *1-forma racional*  $\omega$  sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  es una expresión, en coordenadas locales  $\mathbb{C}_z$

$$\omega = \frac{Q(z)}{P(z)} dz, \tag{1.1}$$

donde  $P$  y  $Q$  son dos polinomios primos relativos entre sí (ver [29], pág 105).

El grupo de automorfismos complejos de  $\widehat{\mathbb{C}}$  es el grupo de transformaciones de Möbius

$$PSL(2, \mathbb{C}) := \left\{ T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Para  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  y una 1-forma racional  $\omega$ , *empujar*  $\omega$  con  $T$  es

$$T_*\omega = T_* \left( \frac{Q(z)}{P(z)} dz \right) := \frac{Q(T^{-1}(\zeta))}{P(T^{-1}(\zeta))} (T^{-1})'(\zeta) d\zeta. \quad (1.2)$$

**Ejemplo 1.2.** Consideremos una 1-forma  $\omega$  en coordenadas locales  $\mathbb{C}_z$  como en la Ecuación (1.1). La expresión de  $\omega$  en coordenadas locales  $\mathbb{C}_w$  resulta de empujar a  $\omega$  con el cambio de coordenadas  $\varphi_{21}(z) = 1/z \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Esto es

$$\omega = -\frac{1}{w^2} \frac{Q(1/w)}{P(1/w)} dw \quad (1.3)$$

en coordenadas locales  $\mathbb{C}_w$ .

**Observación 1.3.** Las 1-formas racionales sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  están únicamente determinadas por una de sus expresiones en coordenadas locales,  $\mathbb{C}_z$  o  $\mathbb{C}_w$ .

En este trabajo siempre denotamos a las 1-formas racionales usando las coordenadas locales  $\mathbb{C}_z$ .

## 1.2. Haces lineales complejos y secciones racionales.

Consideremos una superficie de Riemann compacta  $M_g$  de género  $g \geq 0$ . Cuatro haces lineales notables sobre  $M_g$  son el haz trivial  $\mathcal{O}_{M_g}$ , el haz tangente  $\mathcal{T}_{M_g}$ , el haz cotangente  $\mathcal{K}_{M_g}$  y el haz de diferenciales cuadráticas  $\mathcal{K}_{M_g} \otimes \mathcal{K}_{M_g}$ . Para  $M_g = \widehat{\mathbb{C}}$ , las 1-formas racionales son secciones racionales del haz  $\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ . Análogamente, una función racional, un campo vectorial racional y una diferencial cuadrática racional sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  son secciones racionales de los haces  $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ ,  $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbb{C}}}$  y  $\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}} \otimes \mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}}$  respectivamente. Del mismo modo que las 1-formas, las secciones racionales de  $\mathcal{T}_{\widehat{\mathbb{C}}}$  y  $\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}} \otimes \mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}}$  se determinan únicamente por sus expresiones en coordenadas locales  $\mathbb{C}_z$ . Las 1-formas racionales se relacionan con los campos vectoriales racionales mediante contracción,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\widehat{\mathbb{C}}} \times \mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}} &\longrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}} \\ (X, \omega) &\longmapsto \omega(X). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para una 1-forma racional  $\omega$  como en la Ecuación (1.1), el campo vectorial asociado  $X_\omega$  y la diferencial cuadrática asociada  $\omega \otimes \omega$ , respectivamente son

$$X_\omega := \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{y} \quad \omega \otimes \omega := \frac{Q^2(z)}{P^2(z)} dz^2.$$

Podemos notar que la expresión de  $X_\omega$  se obtiene de invertir multiplicativamente la expresión de  $\omega$ , mientras que la expresión de  $\omega \otimes \omega$  se obtiene elevando al cuadrado la expresión de  $\omega$ . Esto induce una correspondencia biyectiva natural entre 1-formas racionales, campos vectoriales racionales y diferenciales cuadráticas

$$\begin{array}{ccc} & \left\{ \omega = \frac{Q(z)}{P(z)} dz \right\} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \left\{ X_\omega = \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right\} & \longleftrightarrow & \left\{ \omega \otimes \omega = \frac{Q^2(z)}{P^2(z)} dz^2 \right\}, \end{array} \quad (1.5)$$

donde  $\omega(X_\omega) \equiv 1$  y  $\omega \otimes \omega$  tiene ceros y polos de orden par (ver [5], pág. 185). Consideremos un haz lineal complejo  $L$  sobre  $M_g$  y una sección meromorfa  $\sigma : M_g \rightarrow L$ . Definimos la *clase de Chern*  $c_1(L) \in \mathbb{Z}$  del haz  $L$  por

$$c_1(L) := \#\{\text{ceros de } \sigma\} - \#\{\text{polos de } \sigma\},$$

donde  $\#$  denota el cardinal de un conjunto. Los polos y ceros de  $\sigma$  son contados con multiplicidad (ver [5], pág. 187).

**Lema 1.4.** *Si  $L$  es un haz lineal complejo, entonces la clase de Chern  $c_1(L)$  no depende de la sección elegida.*

*Demostración.* Consideremos  $s_1$  y  $s_2$  secciones meromorfas de  $L$ . Esto implica que  $1/s_2$  es una sección meromorfa del haz dual  $L^*$  (ver [5], pág. 185), por lo tanto  $s_1/s_2$  es una sección del haz trivial  $\mathcal{O}_{M_g}$ . Así

$$\begin{aligned} 0 &= c_1(\mathcal{O}_{M_g}) \\ &= \#\{\text{ceros de } s_1/s_2\} - \#\{\text{polos de } s_1/s_2\} \\ &= \#\{\text{ceros de } s_1\} + \#\{\text{polos de } s_2\} - \#\{\text{polos de } s_1\} - \#\{\text{ceros de } s_2\}. \end{aligned}$$

Despejando la expresión anterior

$$\#\{\text{ceros de } s_1\} - \#\{\text{polos de } s_1\} = \#\{\text{ceros de } s_2\} - \#\{\text{polos de } s_2\},$$

lo cual prueba el resultado.  $\square$

**Ejemplo 1.5.** Si  $M_g = \widehat{\mathbb{C}}$ , entonces

$$c_1(\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}) = 0, \quad c_1(\mathcal{T}_{\widehat{\mathbb{C}}}) = 2, \quad c_1(\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}}) = -2.$$

Esto es, una 1-forma racional  $\omega$  (resp. campo vectorial  $X$ ) sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  siempre tiene dos polos (resp. ceros) más que ceros (resp. polos) contados con multiplicidad (ver [5], pág. 207).

Recordemos que el divisor de una 1-forma racional

$$\omega = \frac{(z - c_1) \cdots (z - c_{s-2})}{(z - p_1) \cdots (z - p_s)} dz,$$

es la suma formal

$$1c_1 + \dots + 1c_{s-2} - 1p_1 - \dots - 1p_s.$$

ver [11], pág. 135. El grado del divisor de polos es  $-s \leq -2$ . Nuestra convención es como sigue.

**Definición 1.6.** El *grado de una 1-forma*  $\omega$  es el grado del divisor de polos

$$\text{grad}(\omega) := -\#\{\text{polos de } \omega\} \leq -2.$$

Esta noción de grado para  $\omega$  no coincide con la definición usual de grado para secciones de haces lineales. Sin embargo, es adecuada para nuestros fines. Por ejemplo, en la Sección 2.2 el espacio de parámetros mediante residuos-polos  $\Omega_{rp}^1(-s)$  describirá a la familia de 1-formas racionales con polos simples, sin importar las multiplicidades de sus ceros. Esto es,  $\Omega_{rp}^1(-s)$  determina información fijando sólo el divisor de polos.

### 1.3. Campos vectoriales reales y parámetros distinguidos.

Recordemos el comportamiento de las 1-formas racionales cerca de sus singularidades.

**Definición 1.7.** Las singularidades de una 1-forma racional  $\omega$  en la esfera de Riemann son

$$\text{Sing}(\omega) = \{\text{ceros de } \omega\} \cup \{\text{polos de } \omega\}.$$

El siguiente resultado clasifica localmente a las 1–formas en vecindades, suficientemente pequeñas de sus singularidades. En este caso, la noción de 1–formas equivalentes que utilizamos es como sigue. Decimos que dos 1–formas  $\omega$ ,  $\eta$  son *localmente equivalentes* si existe un biholomorfismo local  $\mathfrak{h} : U \rightarrow V$ , tal que  $\eta = \mathfrak{h}_*\omega$ .

**Lema 1.8 (Formas normales locales para 1–formas racionales, [37] Cap. III).** *Consideremos  $\omega$  una 1–forma racional tal que  $0 \in \text{Sing}(\omega)$ .*

1. *Si 0 es un cero de orden  $k$ , entonces  $\omega$  es localmente equivalente con*

$$z^k dz.$$

2. *Si 0 es un polo simple, entonces  $\omega$  es localmente equivalente con*

$$\frac{r_0}{z} dz,$$

donde  $r_0 = \text{Res}(\omega, 0)$ .

3. *Si 0 es un polo de orden  $-s \leq -2$ , entonces  $\omega$  es localmente equivalente con*

$$\left( \frac{1}{z^s} + \frac{r_0}{z} \right) dz,$$

donde  $r_0 = \text{Res}(\omega, 0)$ . □

Omitimos la demostración ya que esta se sale del objetivo en este escrito. Ampliamos la correspondencia (1.5) de la siguiente manera. Consideremos una 1–forma racional  $\omega$  como en la Ecuación (1.1). Los *campos vectoriales real e imaginario* asociados a  $\omega$ , respectivamente, son

$$\Re(X_\omega) := \Re \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \Im \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\Im(X_\omega) := -\Im \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \Re \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \frac{\partial}{\partial y},$$

donde  $\Re(\cdot)$  e  $\Im(\cdot)$  denotan las funciones parte real y parte imaginaria sobre los números complejos.

Una trayectoria del campo vectorial real  $\Re(X_\omega)$ , resp. del campo vectorial imaginario  $\Im(X_\omega)$ ,

$$z(t) : (a, b) \subset \mathbb{R}_t \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\text{ceros de } \omega\},$$

es una solución al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Re\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right) \\ \frac{dy}{dt} = \Im\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right), \end{cases} \quad \text{resp.} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\Im\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right) \\ \frac{dy}{dt} = \Re\left(\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right), \end{cases}$$

donde  $z = x + iy$  como es usual.

En efecto, los campos vectoriales  $\Re(X_\omega)$  e  $\Im(X_\omega)$  son diferenciables en  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\text{ceros de } \omega\}$ . Usando la definición de  $\Re(X_\omega)$ , reconocemos que  $Sing(\omega)$  corresponde con las singularidades de dicho campo vectorial real. Recordemos la topología de las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  en sus singularidades. Sin pérdida de generalidad, como en el Lema 1.8 supongamos que  $0 \in Sing(\omega)$ . Un *sector hiperbólico* de  $\Re(X_\omega)$  en 0 es un sector angular con vértice en 0, tal que sus trayectorias son topológicamente como en la Figura 1.1.(a). Un *sector elíptico* de  $\Re(X_\omega)$  en 0 es un sector angular con vértice en 0, tal que sus trayectorias son topológicamente como en la Figura 1.1.(b). Un *centro* de  $\Re(X_\omega)$  en 0 es una vecindad alrededor de 0, tal que sus trayectorias son topológicamente como en la Figura 1.1.(c).

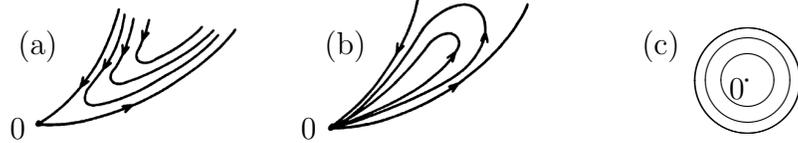


Figura 1.1: (a) Sector hiperbólico. (b) Sector elíptico. (c) Centro.

Por ejemplo, una singularidad de  $\Re(X_\omega)$  donde sus trayectorias tienen cuatro sectores hiperbólicos se llama de tipo *silla*.

El siguiente resultado es bien conocido y relaciona las formas normales de las 1-formas racionales que aparecen en el Lema 1.8, con la topología de las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$ .

**Lema 1.9 (Formas normales locales para las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$ , [37], Cap. III).** Consideremos una 1-forma racional  $\omega$  como en la Ecuación (1.1) y  $0 \in \text{Sing}(\omega)$ .

1. Si 0 es un cero de orden  $k$  de  $\omega$ , entonces las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  en una vecindad de 0 son topológicamente equivalentes con una multisilla de  $2(k+1)$  sectores hiperbólicos. En particular, si  $k=1$  entonces 0 es una singularidad de tipo silla.
2. a) Si 0 es un polo simple de  $\omega$  y además

$$\left. \frac{d}{dz} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \right|_{z=0} \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^*,$$

entonces las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  en una vecindad de 0 son topológicamente equivalentes con un pozo o una fuente.

- b) Si 0 es un polo simple de  $\omega$  y además

$$\left. \frac{d}{dz} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \right|_{z=0} \in i\mathbb{R}^*,$$

entonces las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  en una vecindad de 0 son topológicamente equivalentes con un centro.

3. Si 0 es un polo de orden  $-s \leq -2$  de  $\omega$ , entonces las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  en una vecindad de 0 son topológicamente equivalentes con  $2(s-1)$  sectores elípticos.  $\square$

Las pruebas de los lemas 1.8 y 1.9 eran conocidas desde mediados del siglo XX. Una listado de referencias se encuentra en [1], pág. 133.

**Lema 1.10.** Si 0 es un centro topológico de  $\Re(X_\omega)$ , entonces es un centro isocrono, esto es, los periodos de las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$  en una vecindad de 0 son iguales a

$$T_0 = 2\pi|r_0| > 0 \quad \text{donde } r_0 = \text{Res}(\omega, 0).$$

*Demostración.* Usando el Lema 1.9 necesariamente  $\omega$  satisface la opción 2 b). Esto es,  $\omega$  tiene un polo simple en 0 y su residuo es imaginario puro. Aplicando el Lema 1.8,  $\omega$  es localmente equivalente con  $\eta = r_0 dz/z$ . Calculando la ecuación diferencial de  $\Re(X_\eta)$ , es fácil ver que 0 es un centro isocrono de  $\eta$  y por lo tanto la misma propiedad se cumple para  $\Re(X_\omega)$ .  $\square$

La siguiente definición es natural para que  $\omega$  cumpla que todos sus polos correspondan con centros isocronos de  $\Re(X_\omega)$ .

**Definición 1.11.** Una 1-forma racional es *isocrona* si todos sus polos son simples y tienen residuos imaginarios puros.

Para una 1-forma racional es fácil de calcular los residuos como sigue.

**Lema 1.12.** Para una 1-forma racional  $\omega$  con polos simples y con expresión como en la Ecuación (1.1), su residuo en el polo  $p_l$  es

$$r_l = \frac{Q(p_l)}{P_l(p_l)}, \quad (1.6)$$

donde  $P_l(z)$  es el polinomio  $P(z)$  removiendo el factor  $(z - p_l)$ .

*Demostración.* Usando la definición de residuo y la fórmula integral de Cauchy

$$r_l = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{Q(z)}{P(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{Q(z)/P_l(z)}{(z - p_l)} dz = \frac{Q(p_l)}{P_l(p_l)}.$$

□

El siguiente resultado es conocido (ver [37], Cap. 3)

**Lema 1.13.** Una 1-forma racional  $\omega$  es isocrona si y sólo si cada polo  $p_l$  es simple y es una singularidad de tipo centro isocrono para  $\Re(X_\omega)$ .

*Demostración.* Usando el Lema 1.12, es fácil ver que

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{P(z)}{Q(z)} \right) \Big|_{z=p_l} = \frac{P_l(p_l)}{Q(p_l)} = \frac{1}{Res(\omega, p_l)}.$$

Aplicando el Lema 1.9.2 b) obtenemos el resultado. □

Usando la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias y los lemas anteriores se prueba el siguiente resultado. Omitimos su demostración ya que esta se sale del objetivo en este escrito.

**Corolario 1.14.** Para una 1-forma isocrona  $\omega$ , el retrato fase de  $\Re(X_\omega)$  es la unión disjunta de cuencas de centros isocronos y anillos.

Para  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{Sing}(\omega)$ , siguiendo el lenguaje de diferenciales cuadráticas (ver [37], pág. 20), la función

$$\begin{aligned} \Psi_{(\omega, z_0)} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \text{Sing}(\omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int_{z_0}^z \omega \end{aligned} \quad (1.7)$$

es conocida como el *parámetro distinguido* de la diferencial cuadrática  $\omega \otimes \omega$ . Nosotros consideramos a la función  $\Psi_{(\omega, z_0)}$  definida globalmente, por lo que ella es multivaluada si y sólo si  $\omega$  tiene polos simples (ver Ejemplo 1.17).

**Definición 1.15.** Una curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  con  $\alpha(0) = z_0$  se llama *trayectoria horizontal* (resp. *trayectoria vertical*) de  $\omega$  si cumple que

$$\Psi_{(\omega, z_0)}(\alpha(t)) = t \in \mathbb{R} \quad (\text{resp. } \Psi_{(\omega, z_0)}(\alpha(t)) = \sqrt{-1}t \in \sqrt{-1}\mathbb{R}).$$

**Lema 1.16.** Para una 1-forma racional  $\omega$ , su trayectoria  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es horizontal (resp. vertical) si y sólo si  $\alpha$  es una trayectoria de  $\Re(X_\omega)$  (resp. de  $\Im(X_\omega)$ ).

*Demostración.* Supongamos que la expresión de  $\omega$  es como en la Ecuación (1.1) y  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una trayectoria horizontal de  $\omega$ . Derivando la expresión  $\Psi_{(\omega, z_0)}(\alpha(t)) = t$  respecto de  $t$  y aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d\Psi_{(\omega, z_0)}(\alpha(t))}{dt} = \frac{Q(\alpha(t))}{P(\alpha(t))} \frac{d\alpha}{dt}(t) \\ \frac{P(\alpha(t))}{Q(\alpha(t))} &= \frac{d\alpha}{dt}(t), \end{aligned}$$

lo cual es cierto si y sólo si  $\alpha$  es trayectoria solución de  $\Re(X_\omega)$ . Análogamente se prueba el caso cuando  $\alpha$  es trayectoria vertical de  $\omega$  (ver [30], pág. 138).  $\square$

**Ejemplo 1.17.** Consideremos la 1-forma racional  $\omega$  tal que 0 es un polo simple con residuo  $r_0 = -i$ . Usando el Lema 1.8,  $\omega$  es localmente equivalente con  $-idz/z$ . Por lo tanto las trayectorias horizontales de  $\omega$  cerca de 0 son periódicas (ver Figura 1.2).

## 1.4. Superficies planas $S_\omega$ y ejemplos.

Recordemos que una superficie plana es una superficie de Riemann, cuyos cambios de coordenadas son restricción de translaciones ( $z \longmapsto z + c_{ij}$ ) en

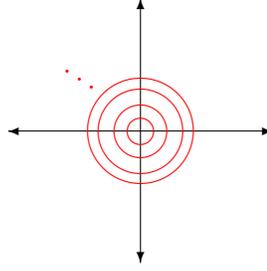


Figura 1.2: Trayectorias horizontales de la 1-forma racional  $-idz/z$  en una vecindad del polo 0.

$\mathbb{C}$ . Podemos construir una estructura de superficie plana singular sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  usando las cartas

$$\varphi_U(z) = \int_{z_0}^z \omega : U \subset \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Estas funciones son conocidas como el *parámetro distinguido local* para una vecindad  $U$  de un punto regular  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  de  $\omega$ , ver [30] y [15]. La métrica riemanniana asociada a la superficie plana es

$$g_\omega(z) := \begin{pmatrix} \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 & 0 \\ 0 & \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 \end{pmatrix}.$$

Abusando de notación, la superficie plana es la pareja  $S_\omega := (\widehat{\mathbb{C}}, g_\omega)$ . El producto escalar asociado al plano tangente  $T_z S_\omega$  es

$$\begin{aligned} g_\omega(\cdot, \cdot)_z : T_z S_\omega \times T_z S_\omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2, \end{aligned}$$

donde  $\cdot$  es el producto punto Euclidiano usual en  $\mathbb{C}$  y  $z$  un punto regular de  $S_\omega$ . Esto implica que  $g_\omega$  satisface ser bilineal, simétrico y definido positivo.

**Observación 1.18.** Las trayectorias horizontales y verticales de  $\omega$  son geodésicas de  $S_\omega$ .

En el siguiente diagrama mostramos la correspondencia entre los objetos que hemos definido, 1-formas, campos vectoriales, diferenciales cuadráticas,

parejas de campos vectoriales reales, parámetros distinguidos globales y superficies planas.

$$\begin{array}{ccc}
 & \omega & \longleftrightarrow & \omega \otimes \omega \\
 & \swarrow & & \searrow \\
 X_\omega & & & (\Re(X_\omega), \Im(X_\omega)) \\
 & \searrow & & \swarrow \\
 & \Psi_{(\omega, -)} & \longleftrightarrow & S_\omega
 \end{array} \quad (1.8)$$

Para estudiar con detalle el diagrama anterior, las referencias más actuales son [31] y [1]. Los siguientes ejemplos muestran explícitamente la correspondencia.

**Ejemplo 1.19.** Consideremos  $\omega = z dz$ .

- Diferencial cuadrática asociada  $\omega \otimes \omega = z^2 dz^2$ .
- Campo vectorial asociado  $X_\omega = 1/z \partial/\partial z$ .
- Campos vectoriales parte real y parte imaginaria, respectivamente son

$$\begin{aligned}
 \Re(X_\omega) &:= \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{-y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}, \\
 \Im(X_\omega) &:= \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, asociado a  $\Re(X_\omega)$  es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Reescalando el sistema anterior obtenemos la ecuación diferencial lineal

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -y. \end{cases} \quad (1.10)$$

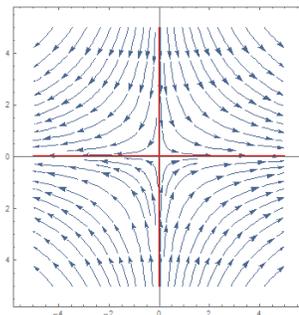


Figura 1.3: Campo vectorial  $\Re(X_\omega)$  cerca del origen.

De este sistema, es inmediato que  $0 \in \mathbb{C}$  es una singularidad de tipo silla (ver Figura 1.3).

- La superficie  $S_\omega$  tiene asociada la métrica

$$g_\omega = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Para  $z = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$ , el producto escalar asociado a  $g_\omega$  es

$$\begin{aligned} g_\omega(\cdot, \cdot)_z : T_z S_\omega \times T_z S_\omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y} \right) &\longmapsto (x_0^2 + y_0^2)((a + ib) \cdot (c + id)). \end{aligned}$$

- Parámetro distinguido global.

$$\begin{aligned} \Psi_{(\omega,0)}(z) = \int_0^z \zeta \, d\zeta : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^2/2. \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos decir que  $(S_\omega, g_\omega)$  se obtiene de pegar por isometrías 4 copias del semi-plano Euclideo.

**Ejemplo 1.20.** Consideremos  $\omega = 1/z \, dz$ .

- Diferencial cuadrática asociada  $\omega \otimes \omega = 1/z^2 \, dz^2$
- Campo vectorial asociado  $X_\omega = z \, \partial/\partial z$ .

- Campos vectoriales reales

$$\begin{aligned}\Re e(X_\omega) &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Im m(X_\omega) &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, asociado a  $\Re e(X_\omega)$  es

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases} \quad (1.11)$$

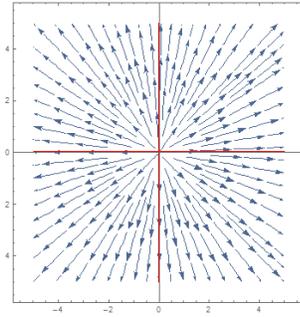


Figura 1.4: Campo vectorial  $\Re e(X_\omega)$  cerca del origen.

- La superficie  $S_\omega$  tiene asociada la métrica

$$g_\omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Para  $z = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}^*$ , el producto escalar asociado a  $g_\omega$  es

$$\begin{aligned} g_\omega(\cdot, \cdot)_z : T_z S_\omega \times T_z S_\omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y} \right) &\longmapsto \left( \frac{((a+ib) \cdot (c+id))}{x_0^2 + y_0^2} \right). \end{aligned}$$

- Parámetro distinguido global.

$$\begin{aligned} \Psi_{(\omega,1)}(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \ln(z). \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $\Psi_{(\omega,1)}$  es multivaluada, explícitamente tenemos

$$\Psi_{(\omega,1)}(z) = \ln(z).$$

Estudiaremos con más detalle las superficies asociadas  $S_\omega$  en la Sección 4.1.

## Capítulo 2

# El estrato de 1–formas racionales con polos simples $\Omega^1(-s)$

Recordemos que el espacio vectorial de 1–formas racionales sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  coincide con el espacio de secciones meromorfas  $\Gamma(\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}})$  de su haz cotangente (ver [15], pág. 9). Siguiendo la notación en [31] y [8], el espacio  $\Gamma(\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}})$  está estratificado por las multiplicidades de los divisores de ceros y polos. Esto es, para dos sucesiones de enteros  $\{k_1, \dots, k_m\}$  y  $\{-s_1, \dots, -s_n\}$ , positivos y negativos respectivamente, denotamos el estrato de 1–formas racionales con  $m$  ceros de multiplicidades  $\{k_j\}$  y  $n$  polos de multiplicidades  $\{-s_i\}$  por

$$\Omega^1\{k_1, \dots, k_m; -s_1, \dots, -s_n\} \subset \Gamma(\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}}).$$

M. Kontzevich en [24] describe las componentes conexas de estos estratos para 1–formas holomorfas sobre superficies de Riemann compactas  $M_g$  con  $g \geq 2$ . Posteriormente, C. Boissy en [3] extiende estos resultados para 1–formas meromorfas sobre  $M_g$  con  $g > 0$ . En este trabajo, estudiamos la familia de 1–formas racionales sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$  con exactamente  $-s \leq -2$  polos simples

$$\Omega^1(-s) := \bigsqcup_{\{k_1, \dots, k_m\}} \Omega^1\{k_1, \dots, k_m; \underbrace{-1, \dots, -1}_{s\text{-veces}}\},$$

donde la unión se toma sobre todas la multiplicidades admisibles  $\{k_1, \dots, k_m\}$ , esto es que  $k_1 + \dots + k_m - s = -2$ .

Las 1–formas en  $\Omega^1(-s)$  se caracterizan de la siguiente manera.

**Observación 2.1.** Una sección  $\omega \in \Gamma(\mathcal{K}_{\widehat{\mathbb{C}}})$ , cuya expresión en coordenadas locales  $\mathbb{C}_z$  es como en (1.1), pertenece a  $\Omega^1(-s)$  si y sólo si cumple lo siguiente.

i) Las raíces de  $P$  son simples,

$$\text{ii) } \deg(Q) - \deg(P) = \begin{cases} -1 & \text{si } \infty \text{ es un polo de } \omega, \\ -2 & \text{si } \infty \text{ es un punto regular de } \omega, \\ -3 & \text{si } \infty \text{ es un cero de } \omega. \end{cases}$$

Nuestro siguiente paso es definir tres estructuras de variedad compleja sobre la familia  $\Omega^1(-s)$ .

## 2.1. Parametrización mediante coeficientes.

Por la Observación 2.1, existen tres posibles expresiones para  $\omega \in \Omega^1(-s)$ . Estas son

$$\omega = \begin{cases} \frac{a_{s-2}z^{s-2} + \dots + a_0}{b_{s-1}z^{s-1} + \dots + b_0} dz & \text{si } \infty \text{ es un polo,} \\ \frac{a_{s-2}z^{s-2} + \dots + a_0}{b_s z^s + \dots + b_0} dz & \text{si } \infty \text{ es un punto regular,} \\ \frac{a_{s-3}z^{s-3} + \dots + a_0}{b_s z^s + \dots + b_0} dz & \text{si } \infty \text{ es un cero.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Usemos los coeficientes  $\{a_j\}$  y  $\{b_l\}$  para determinar a  $\omega$ . Recordemos que, el resultante de dos polinomios  $Q(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$  y  $P(z) = b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m$  es el determinante de la matriz de tamaño  $(n+m) \times (n+m)$ ,

$$\mathcal{D}(Q, P) := \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

donde la fila de los coeficientes de  $Q$  aparece  $m$  veces y la fila de los coeficientes de  $P$  aparece  $n$  veces, recorriéndose un lugar a la derecha.

**Ejemplo 2.2.** Para el polinomio  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$  y su derivada compleja  $P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2$ , el resultante es

$$\mathcal{D}(P, P') := \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \end{pmatrix},$$

el cual coincide con el discriminante de un polinomio de grado 3.

El siguiente resultado describe dos puntos importantes sobre el uso del resultante. Para la demostración ver [13], pág. 36.

**Observación 2.3.** i) Los polinomios  $Q$  y  $P$  son primos relativos si y sólo si  $\mathcal{D}(Q, P) \neq 0$ .

ii) El polinomio  $P$  tiene raíces simples si y sólo si  $\mathcal{D}(P, P') \neq 0$ .

Denotamos por  $[a_{s-2} : \dots : a_0 : b_s : \dots : b_0]$  a la clase del punto  $(a_{s-2}, \dots, a_0, b_s, \dots, b_0) \in \mathbb{C}^{2s} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  en el espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2s-1}$ . Una cálculo directo muestra que la aplicación

$$\begin{aligned} F_s : \Omega^1(-s) &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{2s-1} \\ \frac{a_{s-2}z^{s-2} + \dots + a_0}{b_s z^s + \dots + b_0} dz &\longmapsto [a_{s-2} : \dots : a_0 : b_s : \dots : b_0], \end{aligned}$$

es inyectiva y los coeficientes  $a_{s-2}$  y  $b_s$  pueden ser cero, pero no simultáneamente. La imagen de  $F_s$  es

$$F_s(\Omega^1(-s)) = \left\{ [a_{s-2} : \dots : a_0 : b_s : \dots : b_0] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^{2s-1} \mid \begin{array}{l} \mathcal{D}(P, Q) \neq 0 \\ \mathcal{D}(P, P') \neq 0 \end{array} \right\},$$

donde  $Q(z) = a_{s-2}z^{s-2} + \dots + a_0$  y  $P(z) = b_s z^s + \dots + b_0$ . Es fácil ver que los resultantes son ecuaciones polinomiales en las variables  $(a_{s-2}, \dots, a_0, b_s, \dots, b_0)$ . Por lo tanto, obtenemos el siguiente resultado.

**Observación 2.4.** El conjunto  $\Omega_{coef}^1(-s) := F_s(\Omega^1(-s))$  es una variedad compleja, quasi-proyectiva (ver [14], Sección 1.2), no compacta y de dimensión  $2s - 1$ .

La familia  $\Omega^1(-s)$  hereda el atlas de la variedad compleja  $\Omega_{coef}^1(-s)$  jalandolo la estructura con la aplicación  $F_s$ .

La variedad compleja  $\Omega_{coef}^1(-s)$  es la *parametrización mediante coeficientes* para la familia  $\Omega^1(-s)$ .

## 2.2. Parametrización mediante residuos–polos.

Por la Observación 2.1 y usando fracciones parciales, existen dos posibles expresiones para  $\omega \in \Omega^1(-s)$ . Estas son

$$\omega = \begin{cases} \sum_{\substack{\iota=1 \\ \iota \neq \kappa}}^s \frac{r_\iota}{z - p_\iota} dz & \text{si } p_\kappa = \infty \text{ es un polo,} \\ \sum_{\iota=1}^s \frac{r_\iota}{z - p_\iota} dz & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.3)$$

donde  $r_\iota$  denota el residuo de  $\omega$  en el polo  $p_\iota \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Recordemos que por el teorema de residuo,  $r_1 + \dots + r_s = 0$ . Usemos los residuos  $\{r_\iota\}$  y polos  $\{p_\iota\}$  para parametrizar a  $\Omega^1(-s)$ . Una diferencia entre las expresiones (2.1) y (2.3) es que en la segunda no identificamos cuándo  $\infty$  es un cero de  $\omega$ . Un cálculo directo muestra el siguiente resultado.

**Observación 2.5.** Consideremos  $\omega \in \Omega^1(-s)$  tal que  $\infty$  no es un polo de  $\omega$ . El  $\infty$  es un cero de  $\omega$  si y sólo si

$$-\sum_{\kappa=1}^s \sum_{\iota \neq \kappa} r_\kappa p_\iota = 0.$$

Para  $s \geq 2$ , el grupo simétrico de permutaciones  $\mathcal{S}(s)$  actúa sobre las variedades complejas

$$\begin{aligned} H_s &:= \{(r_1, \dots, r_s) \in (\mathbb{C}^*)^s \mid r_1 + \dots + r_s = 0\}, \\ \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta &:= \{(p_1, \dots, p_s) \in \widehat{\mathbb{C}}^s \mid p_\iota \neq p_\kappa, \text{ si } \iota \neq \kappa\}, \end{aligned}$$

permutando sus entradas. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(s) \times (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta) &\longrightarrow H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta \\ (\sigma, (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s)) &\longmapsto (r_{\sigma(1)}, \dots, r_{\sigma(s)}, p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(s)}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Observación 2.6.** La acción (2.4) es libre de puntos fijos y propiamente discontinua. El espacio de órbitas

$$\Omega_{rp}^1(-s) := \frac{H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta}{\mathcal{S}(s)},$$

es una variedad compleja abierta de dimensión  $2s - 1$ .

Denotamos a la clase del punto  $(r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) \in H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta$  por  $\langle r_1, \dots, r_s; p_1, \dots, p_s \rangle \in \Omega_{rp}^1(-s)$  y la proyección al espacio de órbitas bajo la acción (2.4) es

$$\begin{aligned} \pi_0 : H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta &\longrightarrow \Omega_{rp}^1(-s) \\ (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) &\longmapsto \langle r_1, \dots, r_s; p_1, \dots, p_s \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Es fácil observar que la aplicación

$$\begin{aligned} K_s : \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega_{rp}^1(-s) \\ \sum_{\iota=1}^s \frac{r_\iota}{z - p_\iota} dz &\longmapsto \langle r_1, \dots, r_s; p_1, \dots, p_s \rangle, \end{aligned}$$

es una biyección.

**Observación 2.7.** La familia  $\Omega^1(-s)$  hereda el atlas de la variedad compleja  $\Omega_{rp}^1(-s)$  jalando la estructura con la aplicación  $K_s$ .

En este trabajo entendemos por configuración de puntos  $\{p_\iota\}$  a un conjunto sin orden. Geométricamente, un elemento de  $\Omega_{rp}^1(-s)$  es una configuración de puntos marcados  $\{p_\iota\}$  con sus respectivos pesos  $\{r_\iota\}$ , ver Figura 2.1.

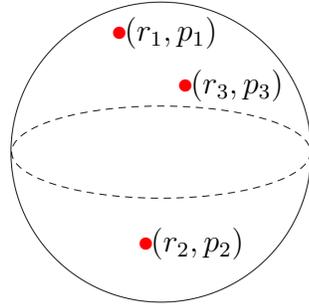


Figura 2.1: Configuración geométrica de  $\langle r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3 \rangle \in \Omega_{rp}^1(-3)$ .

La variedad compleja  $\Omega_{rp}^1(-s)$  es la *parametrización mediante residuos-polos* para la familia  $\Omega^1(-s)$ .

### 2.3. Parametrización mediante ceros–polos.

Por la Observación 2.1, existen tres posibles expresiones para  $\omega \in \Omega^1(-s)$ . Estas son

$$\omega = \begin{cases} \lambda \frac{(z - c_1) \cdots (z - c_{s-2})}{(z - p_1) \cdots (z - p_{s-1})} dz & \text{si } \infty \text{ es un polo,} \\ \lambda \frac{(z - c_1) \cdots (z - c_{s-2})}{(z - p_1) \cdots (z - p_s)} dz & \text{si } \infty \text{ es un punto regular,} \\ \lambda \frac{(z - c_1) \cdots (z - c_{s-3})}{(z - p_1) \cdots (z - p_s)} dz & \text{si } \infty \text{ es un cero,} \end{cases}$$

donde  $c_j \in \widehat{\mathbb{C}}$  y  $p_l \in \widehat{\mathbb{C}}$  denotan los ceros y polos de  $\omega$  respectivamente. Recordemos que la aplicación de *Viète* identifica las raíces de un polinomio mónico de grado  $s$  con sus coeficientes, esto es

$$\begin{aligned} \nu_s : \frac{\mathbb{C}^s}{\mathcal{S}(s)} &\longrightarrow \mathbb{C}^{s+1} \\ [p_1, \dots, p_s] &\longmapsto \left( 1, -\sum_{j=1}^s p_j, \sum_{1 \leq l < j} p_l p_j, \dots, (-1)^s \prod_{j=1}^s p_j \right). \end{aligned}$$

La aplicación  $\nu_s$  induce un biholomorfismo entre  $\widehat{\mathbb{C}}^s/\mathcal{S}(s)$  y  $\mathbb{C}\mathbb{P}^s$ . Usemos el factor  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , los ceros  $\{c_j\}$  y los polos  $\{p_l\}$  de  $\omega$  para parametrizar a  $\Omega^1(-s)$ . Primero, definimos

$$M_s := \left\{ \{c_1, \dots, c_{s-2}, p_1, \dots, p_s\} \in \frac{\widehat{\mathbb{C}}^{s-2}}{\mathcal{S}(s-2)} \times \frac{\widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta}{\mathcal{S}(s)} \mid c_j \neq p_l \right\}.$$

Claramente,  $M_s$  es una variedad compleja de dimensión  $2s - 2$  ya que  $M_s$  es un subconjunto abierto de  $\widehat{\mathbb{C}}^{s-2}/\mathcal{S}(s-2) \times \widehat{\mathbb{C}}^s/\mathcal{S}(s) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{s-2} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^s$ .

**Proposición 2.8.** *La familia de 1-formas  $\Omega^1(-s)$  es el espacio total de un  $\mathbb{C}^*$ -haz principal no trivial sobre la variedad  $M_s$ .*

*Demostración.* Primero construimos las funciones de transición. Para  $u = \{c_1, \dots, c_{s-2}, p_1, \dots, p_s\} \in M_s$ , definimos los polinomios

$$Q_u(z) := \begin{cases} (z - c_1) \cdots (z - c_{s-2}) & \text{si } c_j \neq \infty, \\ (z - c_1) \cdots (z - c_{j-1})(z - c_{j+1}) \cdots (z - c_{s-2}) & \text{si } c_j = \infty. \end{cases}$$

$$P_u(z) := \begin{cases} (z - p_1) \cdots (z - p_s) & \text{si } c_i \neq \infty, \\ (z - p_1) \cdots (z - p_{i-1})(z - p_{i+1}) \cdots (z - p_s) & \text{si } p_i = \infty. \end{cases}$$

Consideremos  $\mathcal{U}_\alpha := \{u \in M_s \mid Q_u(\alpha) \neq 0, P_u(\alpha) \neq 0\}$ , donde  $\alpha \in I := \{1, 2, \dots, 2s - 1\}$ . Es inmediato que  $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  es una cubierta abierta de la variedad  $M_s$ . Para  $\alpha, \beta \in I$ , definimos la función de transición

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ u &\longmapsto \frac{Q_u(\alpha)}{P_u(\alpha)} \left( \frac{P_u(\beta)}{Q_u(\beta)} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Una cuenta directa muestra que las funciones  $\phi_{\alpha\beta}$  cumplen la condición de cociclos

$$\phi_{\alpha\beta}(u) = \phi_{\alpha\gamma}(u) \cdot \phi_{\gamma\beta}(u),$$

para todo  $u \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$  (ver [23], Sección 1.5). Probemos que  $\phi_{\alpha\beta}$  es holomorfa. Supongamos que ninguna entrada de  $u \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$  es infinito. Por lo que existe una carta  $\psi : U \subset M_s \rightarrow \mathbb{C}^{2s-2}$  tal que  $\psi$  es la identidad en  $U$ . Además la función

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ u &\longmapsto \frac{(\alpha - c_1) \cdots (\alpha - c_{s-2})(\beta - p_1) \cdots (\beta - p_s)}{(\alpha - p_1) \cdots (\alpha - p_s)(\beta - c_1) \cdots (\beta - c_{s-2})}, \end{aligned}$$

es holomorfa. Supongamos que  $u$  tiene un cero  $c_j = \infty$ . Esto implica que existe una carta  $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}^{2s-2}$  tal que en cada entrada distinta de la  $j$ -ésima, la función es la identidad y en la entrada  $j$ -ésima es la función  $z \mapsto 1/z$ . Además, la función

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ (c_1, \dots, \tilde{c}_j, \dots, c_{s-2}, p_1, \dots, p_s) &\longmapsto \\ &\frac{(\alpha - c_1) \cdots (\alpha - c_{j-1})(\alpha \tilde{c}_j - 1)(\alpha - c_{j+1}) \cdots (\alpha - c_{s-2})(\beta - p_1) \cdots (\beta - p_s)}{(\alpha - p_1) \cdots (\alpha - p_s)(\beta - c_1) \cdots (\beta - c_{j-1})(\beta \tilde{c}_j - 1)(\beta - c_{j+1}) \cdots (\beta - c_{s-2})}, \end{aligned}$$

es holomorfa. El resultado es análogo para  $p_i = \infty$  y por lo tanto la función  $\phi_{\alpha\beta}$  es holomorfa en todos los casos.

Construimos un  $\mathbb{C}^*$ -haz principal no trivial  $\Omega_{cp}^1(-s)$  sobre  $M_s$  usando las funciones de transición  $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ , ver [23], Sección 1.5. Esto es,

$$\Omega_{cp}^1(-s) := \frac{\bigsqcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C}^*}{(u, z) \sim (u', z')},$$

donde  $(u, z) \sim (u', z')$  si  $(u, z) = (u', z') \in \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C}^*$  o  $(u', z') = (u, \phi_{\beta\alpha}(u)z) \in \mathcal{U}_\beta \times \mathbb{C}^*$ . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega_{cp}^1(-s) \\ \lambda \frac{(z-c_1)\cdots(z-c_{s-2})}{(z-p_1)\cdots(z-p_s)} dz &\longmapsto \left[ \{c_1, \dots, c_{s-2}, p_1, \dots, p_s\}, \lambda \frac{Q_u(\alpha)}{P_u(\alpha)} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde  $u = \{c_1, \dots, c_{s-2}, p_1, \dots, p_s\} \in \mathcal{U}_\alpha$ . Para  $u \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ , es fácil ver que

$$\lambda \frac{Q_u(\beta)}{P_u(\beta)} = \phi_{\beta\alpha}(u) \lambda \frac{Q_u(\alpha)}{P_u(\alpha)}.$$

Esto implica que la aplicación (2.7) está bien definida. Más aún, ésta es biyectiva. Jalando la estructura compleja de  $\Omega_{cp}^1(-s)$ , obtenemos el resultado.  $\square$

En la prueba anterior están considerados los casos cuando  $\infty$  es un cero o un polo de  $\omega$ , en la definición de los polinomios  $Q_u$  y  $P_u$ .

La variedad compleja  $\Omega_{cp}^1(-s)$  es la *parametrización mediante ceros-polos* para la familia  $\Omega^1(-s)$ .

## 2.4. Equivalencia de las estructuras complejas para la familia $\Omega^1(-s)$ .

En las secciones anteriores construimos tres atlas complejos para la familia de 1-formas racionales  $\Omega^1(-s)$ . Una pregunta natural es si las variedades  $\Omega_{coef}^1(-s)$ ,  $\Omega_{rp}^1(-s)$  y  $\Omega_{cp}^1$  son biholomorfas o no. El Teorema 2.10 nos responde la pregunta.

Para demostrar el resultado, es útil saber cómo pasamos de la expresión (2.1) a la expresión (2.3). Recordemos que la aplicación de *Viète* reducida es

$$\begin{aligned} \nu_s^o : \frac{\mathbb{C}^s}{\mathcal{S}(s)} &\longrightarrow \mathbb{C}^s \\ [p_1, \dots, p_s] &\longmapsto \left( -\sum_{j=1}^s p_j, \sum_{1 \leq i < j} p_i p_j, \dots, (-1)^s \prod_{j=1}^s p_j \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

El siguiente resultado es conocido (ver [19], pág. 260).

**Lema 2.9.** *La aplicación  $\nu_s^o$  restringida a  $(\mathbb{C}^s \setminus \Delta)/\mathcal{S}(s)$  es un biholomorfismo sobre su imagen.*

*Demostración.* Por el teorema fundamental del álgebra, la aplicación  $\nu_s^o$  es biyectiva, identificando los puntos de  $\mathbb{C}^s$  con los coeficientes de los polinomios mónicos de grado  $s$ . Consideremos  $[p_1, \dots, p_s] \in (\mathbb{C}^s \setminus \Delta)/\mathcal{S}(s)$  y  $\psi : U_{[p_1, \dots, p_s]} \longrightarrow V_{(p_1, \dots, p_s)}$  una carta de esta variedad.

Probemos que la diferencial  $D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s)$  tiene rango máximo. Es inmediato ver que

$$D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ \sum_{j \neq 1} p_j & \sum_{j \neq 2} p_j & \dots & \sum_{j \neq s} p_j \\ -\sum_{j, \ell \neq 1} p_j p_\ell & -\sum_{j, \ell \neq 2} p_j p_\ell & \dots & -\sum_{j, \ell \neq s} p_j p_\ell \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^s \prod_{j \neq 1} p_j & (-1)^s \prod_{j \neq 2} p_j & \dots & (-1)^s \prod_{j \neq s} p_j \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Si  $s = 2$  entonces  $\det(D(\nu_2^o \circ \psi^{-1})(p_1, p_2)) = p_2 - p_1 \neq 0$ , por lo que el rango es máximo.

Para  $s \geq 3$ , aplicamos inducción para demostrar que

$$\det(D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s)) = (-1)^{s-1} \prod_{\alpha < \beta} (p_\alpha - p_\beta).$$

Consideremos  $s = 3$ , así  $\nu_3^o \circ \psi^{-1}(p_1, p_2, p_3) = (-(p_1 + p_2 + p_3), p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3, -p_1 p_2 p_3)$  y la diferencial es

$$D(\nu_3^o \circ \psi^{-1})(p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ p_2 + p_3 & p_1 + p_3 & p_1 + p_2 \\ -p_2 p_3 & -p_1 p_3 & -p_1 p_2 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por  $E_{ji}(K)$  a la operación elemental de matrices que multiplica la columna  $i$  por  $K$  y el resultado se suma a la columna  $j$ . Aplicando  $E_{j1}(-1)$  para  $j = 2, 3$  a  $D(\nu_3^o \circ \psi^{-1})(p_1, p_2, p_3)$ , obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ p_2 + p_3 & p_1 + p_3 & p_1 + p_2 \\ -p_2 p_3 & -p_1 p_3 & -p_1 p_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ p_2 + p_3 & p_1 - p_2 & p_1 - p_3 \\ -p_2 p_3 & p_3(p_2 - p_1) & p_2(p_3 - p_1) \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \det(D(\nu_3^o \circ \psi^{-1})(p_1, p_2, p_3)) &= \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ p_2 + p_3 & p_1 - p_2 & p_1 - p_3 \\ -p_2 p_3 & p_3(p_2 - p_1) & p_2(p_3 - p_1) \end{pmatrix} \\ &= (p_1 - p_2)(p_1 - p_3) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ p_2 + p_3 & 1 & 1 \\ -p_2 p_3 & -p_3 & -p_2 \end{pmatrix} \\ &= -(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_3 - p_2) \\ &= (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_2 - p_3), \end{aligned}$$

luego  $\det(D(\nu_3^o \circ \psi^{-1})(p_1, p_2, p_3)) = (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_2 - p_3)$ .

Supongamos que

$$\det(D(\nu_{s-1}^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_{s-1})) = (-1)^{s-2} \prod_{\alpha < \beta} (p_\alpha - p_\beta),$$

y calculemos  $\det(D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s))$ . Aplicando las operaciones elementales  $E_{j1}(-1)$  para  $j = 2, \dots, s$  a la diferencial  $D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s)$ , obtenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & & & -1 \\ \sum_{j \neq 1} p_j & \sum_{j \neq 2} p_j & \cdots & \sum_{j \neq s} p_j \\ -\sum_{j, \iota \neq 1} p_j p_\iota & -\sum_{j, \iota \neq 2} p_j p_\iota & \cdots & -\sum_{j, \iota \neq s} p_j p_\iota \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^s \prod_{j \neq 1} p_j & (-1)^s \prod_{j \neq 2} p_j & \cdots & (-1)^s \prod_{j \neq s} p_j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{j \neq 1} p_j & (p_1 - p_2) & \cdots & (p_1 - p_s) \\ -\sum_{j, \iota \neq 1} p_j p_\iota & -(p_1 - p_2) \sum_{j \neq 1, 2} p_j & \cdots & -(p_1 - p_s) \sum_{j \neq 1, s} p_j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^s \prod_{j \neq 1} p_j & (-1)^s (p_1 - p_2) \prod_{j \neq 1, 2} p_j & \cdots & (-1)^s (p_1 - p_s) \prod_{j \neq 1, s} p_j \end{pmatrix}.$$

Esto implica

$$\begin{aligned} \det(D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s)) &= -\prod_{j=2}^s (p_1 - p_s) \det \begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1, 2} p_j & \cdots & -\sum_{j \neq 1, s} p_j \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^s \prod_{j \neq 1, 2} p_j & \cdots & (-1)^s \prod_{j \neq 1, s} p_j \end{pmatrix} \\ &= (-1)^s \prod_{j=2}^s (p_1 - p_s) \det \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ \sum_{j \neq 1, 2} p_j & \cdots & \sum_{j \neq 1, s} p_j \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^{s-1} \prod_{j \neq 1, 2} p_j & \cdots & (-1)^{s-1} \prod_{j \neq 1, s} p_j \end{pmatrix} \\ &= (-1)^s \prod_{j=2}^s (p_1 - p_s) \det(D(\widehat{\nu}_{s-1} \circ \psi^{-1})(p_2, \dots, p_s)) \\ &= (-1)^s \prod_{\alpha < \beta} (p_\alpha - p_\beta). \end{aligned}$$

Así,  $D(\nu_s^o \circ \psi^{-1})(p_1, \dots, p_s)$  tiene rango  $s$ . Por lo tanto la aplicación de *Viète* reducida con dominio  $(\mathbb{C}^s \setminus \Delta)/\mathcal{S}(s)$  es un biholomorfismo sobre su imagen.  $\square$

**Teorema 2.10.** *Las variedades complejas  $\Omega_{coef}^1(-s)$ ,  $\Omega_{rp}^1(-s)$  y  $\Omega_{cp}^1(-s)$  son biholomorfas, ellas son espacios de parámetros para la familia  $\Omega^1(-s)$ .*

*Demostración.* Probemos que  $\Omega_{coef}^1(-s)$  y  $\Omega_{rp}^1(-s)$  son biholomorfas. Consideremos la aplicación  $C_s : \Omega_{rp}^1(-s) \rightarrow \Omega_{coef}^1(-s)$ , tal que para  $\langle P \rangle =$

$\langle r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s \rangle \in \Omega_{rp}^1(-s)$  su regla de correspondencia es

$$C_s \langle P \rangle := \begin{cases} \left[ \begin{array}{l} -\sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota \neq j} p_\iota : \sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota, \kappa \neq j} p_\iota p_\kappa : \dots : \\ (-1)^{s-1} \sum_{j=1}^s r_j \prod_{\iota \neq j} p_\iota : \nu_s [p_1, \dots, p_s] \end{array} \right] & \text{si } p_\iota \in \mathbb{C}, \\ \left[ \begin{array}{l} \sum_{j \neq \kappa} r_j : -\sum_{j \neq \kappa} r_j \sum_{\iota \neq j} p_\iota : \dots : \\ (-1)^{s-2} \sum_{j \neq \kappa} r_j \prod_{\iota \neq j} p_\iota : 0 : \nu_{s-1} [p_1, \dots, \widehat{p}_\kappa, \dots, p_s] \end{array} \right] & \text{si } p_\kappa = \infty, \end{cases}$$

donde el gorro sobre el polo  $p_\kappa$  indica que es removido de la expresión. Probemos que  $C_s$  es un homeomorfismo. La aplicación  $C_s$  es continua ya que

$$\lim_{p_\kappa \rightarrow \infty} C_s \langle P \rangle = C_s \left\langle \lim_{p_\kappa \rightarrow \infty} P \right\rangle,$$

para todo punto  $\langle P \rangle \in \Omega_{rp}^1(-s)$  con  $p_j \neq \infty$ . Como las entradas de la aplicación  $C_s$  son polinomiales, falta demostrar que  $C_s$  es biyectiva para que sea un homeomorfismo.

Probemos que  $C_s$  es inyectiva. Consideremos  $\langle P \rangle, \langle P' \rangle \in \Omega_{rp}^1(-s)$  tales que  $C_s \langle P \rangle = C_s \langle P' \rangle$ . La dificultad de la inyectividad es la igualdad entre los residuos de  $\langle P \rangle$  y  $\langle P' \rangle$ . Si  $p_j \neq \infty$  para toda  $j = 1, \dots, s$ , entonces

$$\left[ -\sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota \neq j} p_\iota : \sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota, \kappa \neq j} p_\iota p_\kappa : \dots : (-1)^{s-1} \sum_{j=1}^s r_j \prod_{\iota \neq j} p_\iota : \nu_s [p_1, \dots, p_s] \right] =$$

$$\left[ -\sum_{j=1}^s r'_j \sum_{\iota \neq j} p'_\iota : \sum_{j=1}^s r'_j \sum_{\iota, \kappa \neq j} p'_\iota p'_\kappa : \dots : (-1)^{s-1} \sum_{j=1}^s r'_j \prod_{\iota \neq j} p'_\iota : \nu_s [p'_1, \dots, p'_s] \right].$$

Luego existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota \neq j} p_\iota &= -\lambda \sum_{j=1}^s r'_j \sum_{\iota \neq j} p'_\iota \\
\sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota, \kappa \neq j} p_\iota p_\kappa &= \lambda \sum_{j=1}^s r'_j \sum_{\iota, \kappa \neq j} p'_\iota p'_\kappa \\
&\vdots \\
(-1)^{s-1} \sum_{j=1}^s r_j \prod_{\iota \neq j} p_\iota &= (-1)^{s-1} \lambda \sum_{j=1}^s r'_j \prod_{\iota \neq j} p'_\iota \\
\nu_s [p_1, \dots, p_s] &= \lambda \nu_s [p'_1, \dots, p'_s].
\end{aligned}$$

De la última ecuación, tenemos que  $\lambda = 1$  y sin pérdida de generalidad  $p_j = p'_j$  para todo  $j = 1, \dots, s$ . Si  $Q$  y  $Q'$  son los polinomios del numerador de  $\langle P \rangle$  y  $\langle P' \rangle$  respectivamente, entonces las otras ecuaciones muestran que  $Q = Q'$ . Usando el Lema 1.12,

$$r_j = \frac{Q(p_j)}{P_j(p_j)} = \frac{Q'(p'_j)}{P'_j(p'_j)} = r'_j.$$

Por lo tanto  $\langle P \rangle = \langle P' \rangle$  y la aplicación  $C_s$  es inyectiva. Si  $p_j = \infty$  para algún  $j$ , entonces el argumento es análogo.

Probemos que  $C_s$  es sobreyectiva. Consideremos  $[a_{s-2} : \dots : a_0 : b_s : \dots : b_0] \in \Omega_{coef}^1(-s)$ . Por definición de  $\Omega_{coef}^1(-s)$ , el polinomio  $P(z) = b_s z^s + \dots + b_0$  tiene raíces simples. Definamos por  $Q(z) := a_{s-2} z^{s-2} + \dots + a_0$  y  $p_1, \dots, p_s$  las raíces de  $P$ . Usando el Lema 1.12,

$$r_j := \frac{Q(p_j)}{P_j(p_j)}.$$

Por lo tanto  $C_s \langle r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s \rangle = [a_{s-2} : \dots : a_0 : b_s : \dots : b_0]$  y la aplicación  $C_s$  es sobre.

Probemos que  $C_s$  es un biholomorfismo. Para esto consideremos dos casos; primero  $p_j \neq \infty$  para todo  $j = 1, \dots, s$  y segundo  $p_j = \infty$  para algún  $j$ .

*Caso 1.* Una cuenta directa muestra que existe un abierto  $U \subset \Omega_{rp}^1(-s)$  tal que  $\langle r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s \rangle \in U$  y la expresión en esta carta de la aplicación

$C_s$  es

$$\tilde{C}_s(r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) = \left( - \sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota \neq j} p_\iota, \sum_{j=1}^s r_j \sum_{\iota, \kappa \neq j} p_\iota p_\kappa, \dots, (-1)^{s-1} \sum_{j=1}^s r_j \prod_{\iota \neq j} p_\iota, \nu_s^o [p_1, \dots, p_s] \right).$$

La diferencial de la aplicación  $\tilde{C}_s$  es la matriz por bloques

$$D\tilde{C}_s(r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) = \left( \begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & D\nu_s^o[p_1, \dots, p_s] \end{array} \right),$$

donde la matriz  $A$  es

$$\begin{pmatrix} \sum_{j \neq 1} p_j & \sum_{j \neq 2} p_j & \dots & \sum_{j \neq s} p_j \\ - \sum_{j, \iota \neq 1} p_j p_\iota & - \sum_{j, \iota \neq 2} p_j p_\iota & \dots & - \sum_{j, \iota \neq s} p_j p_\iota \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^s \prod_{j \neq 1} p_j & (-1)^s \prod_{j \neq 2} p_j & \dots & (-1)^s \prod_{j \neq s} p_j \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

Por lo tanto  $D\tilde{C}_s$  tiene rango máximo ya que las filas forman un conjunto de vectores linealmente independientes.

*Caso 2.* Consideramos las cartas  $\psi_j : U \subset \Omega_{rp}^1(-s) \rightarrow H_s \times \mathbb{C}^s$ ,  $\varphi_{2s-2} : V \subset \Omega_{coef}^1(-s) \rightarrow \mathbb{C}^{2s-1}$ , donde  $\psi_j$  es la aplicación  $z \mapsto \frac{1}{z}$  en la  $j$ -ésima entrada de  $\mathbb{C}^s$  y la identidad en las demás, mientras que  $\varphi_{2s-2}$  es la carta del espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2s-1}$  removiendo la entrada  $(2s-2)$ -ésima. Análogamente al caso anterior, la diferencial de  $\tilde{C}_s = \varphi_{2s-2} \circ C_s \circ \psi_j$  tiene rango máximo y por lo tanto, la aplicación  $C_s$  es un biholomorfismo.

Probemos que  $\Omega_{cp}^1(-s)$  y  $\Omega_{coef}^1(-s)$  son biholomorfas. Consideremos  $u = \{c_1, \dots, c_{s-2}, p_1, \dots, p_s\} \in M_s$ . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s : \Omega_{cp}^1(-s) &\longrightarrow \Omega_{coef}^1(-s) \\ [u, \lambda] &\longmapsto \left[ \lambda \frac{P_u(\alpha)}{Q_u(\alpha)} \nu_{s-2} [c_1, \dots, c_{s-2}] : \nu_s [p_1, \dots, p_s] \right], \end{aligned}$$

para  $u \in \mathcal{U}_\alpha$ .

La aplicación  $\mathcal{F}_s$  está bien definida, ya que para todo  $\alpha \in I$ , la aplicación

$$\begin{aligned} F_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C}^* &\longrightarrow \Omega_{coef}^1(-s) \\ (u, \lambda) &\longmapsto \left[ \lambda \frac{P_u(\alpha)}{Q_u(\alpha)} \nu_{s-2} [c_1, \dots, c_{s-2}] : \nu_s [p_1, \dots, p_s] \right], \end{aligned}$$

y la función de transición  $\phi_{\beta\alpha}$ , hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\phi_{\beta\alpha}} & (\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \times \mathbb{C}^* \\ & \searrow F_\alpha & \swarrow F_\beta \\ & \Omega_{coef}^1(-s) & \end{array}$$

Una cuenta directa muestra que  $\mathcal{F}_s$  es un biholomorfismo (ver [8], pág. 10).  $\square$

En conclusión, los espacios de parámetros  $\Omega_{coef}^1(-s)$ ,  $\Omega_{rp}^1(-s)$  y  $\Omega_{cp}^1(-s)$  determinan la misma estructura compleja para la familia  $\Omega^1(-s)$ . En adelante no haremos distinción entre ellas.

## 2.5. La subfamilia de 1–formas isocronas.

Recordemos que una 1–forma racional es *isocrona* si todos sus polos tienen residuos imaginarios puros. La subfamilia de 1–formas isocronas es denotada por

$$\mathcal{RI}\Omega^1(-s) := \{ \omega \in \Omega^1(-s) \mid \omega \text{ es isocrona} \}.$$

Esta subfamilia es interesante por la topología de las trayectorias de  $\Re(X_\omega)$ ; ver Corolario 1.14.

En esta sección usamos los parámetros residuos–polos  $\Omega_{rp}^1(-s)$  para construir un atlas real analítico sobre la subfamilia de 1–formas racionales isocronas  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s) \subset \Omega^1(-s)$ .

**Corolario 2.11.** *La subfamilia  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  es una subvariedad real analítica  $(3s - 1)$ –dimensional de  $\Omega^1(-s)$ .*

*Demostración.* Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^{s-1} \\ (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) &\longmapsto (\Re(r_1), \dots, \Re(r_{s-1})). \end{aligned}$$

Probemos que  $\mathcal{R}$  es una submersión real analítica. Consideremos una carta  $\varphi : V \subset H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^{4s-2}$ . La diferencial de la aplicación  $\mathcal{R} \circ \varphi^{-1}$  es

$$D(\mathcal{R} \circ \varphi^{-1})(r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) = \left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \end{array} \middle| \mathbf{0} \right),$$

para todo punto  $(r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s) \in V$ , incluso si  $p_\iota = \infty$  para algún  $\iota = 1, \dots, s$ . Esto implica que todo valor  $(x_1, \dots, x_{s-1}) \in \mathbb{R}^{s-1}$  es regular. En particular, lo es  $\bar{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{s-1}$  para la aplicación restringida

$$\mathcal{R}|_{\pi_0^{-1}(\Omega_{rp}^1(-s))} : \pi_0^{-1}(\Omega_{rp}^1(-s)) \subset H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^{s-1},$$

donde  $\pi_0$  es la aplicación proyección definida en (2.5). Por el Teorema de la Preimagen (ver [12], pág. 21), el conjunto

$$\mathcal{R}|_{\pi_0^{-1}(\Omega_{rp}^1(-s))}(\bar{0}) \subset H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta,$$

es una subvariedad real analítica de dimensión real

$$\dim(\pi_0^{-1}(\Omega_{rp}^1(-s))) - \dim(\mathbb{R}^{s-1}) = (4s - 2) - (s - 1) = 3s - 1.$$

Restringiendo la acción (2.4) sobre esta subvariedad, obtenemos una acción propiamente discontinua, esto implica que el espacio de órbitas

$$\frac{\mathcal{R}|_{\pi_0^{-1}(\Omega_{rp}^1(-s))}(\bar{0})}{\mathcal{S}(s)} = \mathcal{R}\mathcal{I}\Omega^1(-s),$$

es una subvariedad real analítica de  $\Omega^1(-s)$ , de dimensión real  $3s - 1$ .  $\square$



# Capítulo 3

## El cociente de 1–formas racionales biholomorfamente equivalentes

### 3.1. Acción del grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Consideremos el grupo de Lie complejo  $PSL(2, \mathbb{C})$  y su acción holomorfa sobre  $\Omega^1(-s)$  definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s : PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega^1(-s) \\ (T, \omega) &\longmapsto T_*\omega, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $T_*\omega$  está dada por la Ecuación (1.2). En esta sección estudiamos las propiedades de esta acción. Recordemos que el *grupo de isotropía* y la *órbita* de  $\omega \in \Omega^1(-s)$ , respectivamente son

$$PSL(2, \mathbb{C})_\omega := \{T \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid T_*\omega = \omega\},$$

$$PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega := \{\eta \in \Omega^1(-s) \mid T_*\eta = \omega \text{ para algún } T \in PSL(2, \mathbb{C})\}.$$

Decimos que dos 1–formas  $\omega, \eta \in \Omega^1(-s)$  son *biholomorfamente equivalentes* si  $\eta \in PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega$ . Es un resultado conocido que esta relación es de equivalencia. Denotamos a la clase de  $\omega = \langle r_1, \dots, r_s; p_1, \dots, p_s \rangle$  por

$$\langle\langle \omega \rangle\rangle = \langle\langle r_1, \dots, r_s; p_1, \dots, p_s \rangle\rangle \in \frac{\Omega^1(-s)}{PSL(2, \mathbb{C})}.$$

La proyección a órbitas es la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_s : \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C}) \\ \omega &\longmapsto \langle\langle \omega \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

El siguiente resultado es inmediato de la definición de residuos y de  $T_*\omega$ .

**Observación 3.1.** Los residuos de  $\omega$  son invariantes bajo la acción  $\mathcal{A}_s$ . Más aún, la subvariedad  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  es invariante bajo  $\mathcal{A}_s$ .

Usando la parametrización mediante residuos–polos  $\Omega_{rp}^1(-s)$  es fácil probar que la expresión de la acción  $\mathcal{A}_s$  es

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_s : PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega_{rp}^1(-s) &\longrightarrow \Omega_{rp}^1(-s) \\ (T, \langle r_1, \dots, r_s; p_1, \dots, p_s \rangle) &\longmapsto \langle r_1, \dots, r_s; T(p_1), \dots, T(p_s) \rangle. \end{aligned}$$

Geoméricamente, la transformación  $T$  mueve la configuración de polos  $\{p_i\}$  a la configuración de polos  $\{T(p_i)\}$  dejando invariante sus respectivos pesos  $\{r_i\}$ . Una pregunta que nos hacemos es qué estructura tiene el espacio de órbitas. Para responder, usamos la teoría desarrollada en [6], Capítulo 2, esto es, si la acción  $\mathcal{A}_s$  es propia, entonces el cociente admite una estratificación por tipos de órbitas<sup>1</sup>.

Recordemos que una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es propia si para cualquier conjunto compacto  $K \subset Y$ , su preimagen  $f^{-1}(K)$  es compacta. Una acción  $A : G \times X \rightarrow X$  es *propia* si la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{A} : G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, y) &\longmapsto (A(g, y), y), \end{aligned}$$

es propia (ver [6], pág. 53).

Probemos que la acción  $\mathcal{A}_s$  es propia. En nuestro caso, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_s : PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega^1(-s) \times \Omega^1(-s) \\ (T, \omega) &\longmapsto (T_*\omega, \omega). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Recordemos unos resultados básicos de aplicaciones propias.

**Lema 3.2.** *Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación cerrada y existe  $U \subset X$  abierto tal que  $f^{-1}(y) \subset U$  para algún  $y \in Y$ , entonces existe  $W$  vecindad abierta de  $y$  tal que  $f^{-1}(W) \subset U$ .*

---

<sup>1</sup>A continuación definimos qué es una acción propia, en la Sección 3.2 explicamos con detalle la definición de la estratificación por tipos de órbitas.

*Demostración.* Supongamos que existe un conjunto abierto  $U$ , tal que  $f^{-1}(y) \subset U$ . Como  $f$  es una aplicación cerrada y  $X \setminus U$  es un conjunto cerrado, el conjunto  $f(X \setminus U)$  es cerrado en  $Y$ . Es fácil ver que  $y \notin f(X \setminus U)$ . Por lo tanto, el conjunto  $W := Y \setminus f(X \setminus U)$  es una vecindad abierta de  $y$  tal que  $f^{-1}(W) \subset U$ .  $\square$

El siguiente resultado caracteriza las aplicaciones propias. Para más detalles ver [4] Sección 1.10.

**Lema 3.3.** *La aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es propia si y sólo si  $f$  es cerrada y para toda  $y \in Y$  su preimagen  $f^{-1}(y)$  es compacta.*

*Demostración.* Supongamos que la aplicación  $f$  es cerrada y para todo  $y \in Y$  la preimagen  $f^{-1}(y)$  es compacta. Consideremos  $K \subset Y$  conjunto compacto y  $\{U_\alpha\}$  cubierta abierta de  $f^{-1}(K)$ . Para  $y \in K$  la familia  $\{U_\alpha\}$  es una cubierta abierta de  $f^{-1}(y)$ . Si la preimagen  $f^{-1}(y)$  es compacta entonces existe una subcubierta finita  $\{U_j(y)\}_{j=1}^n$  de  $\{U_\alpha\}$ . Esto es,  $f^{-1}(y) \subset U_y$  donde

$$U_y := \bigcup_{j=1}^n U_j(y).$$

Usando el Lemma 3.2 existe  $W_y$  vecindad abierta de  $y$  tal que  $f^{-1}(W_y) \subset U_y$ . Por construcción,  $\{W_y\}_{y \in K}$  es una cubierta abierta de  $K$ , luego existe una subcubierta finita  $\{W_{y_1}, \dots, W_{y_m}\}$ . Así

$$\begin{aligned} K &\subset \bigcup_{\iota=1}^m W_{y_\iota} \\ f^{-1}(K) &\subset f^{-1}\left(\bigcup_{\iota=1}^m W_{y_\iota}\right) \\ f^{-1}(K) &\subset \bigcup_{\iota=1}^m f^{-1}(W_{y_\iota}). \end{aligned}$$

Si  $f^{-1}(W_{y_\iota}) \subset U_{y_\iota}$ , entonces

$$f^{-1}(K) \subset \bigcup_{\iota=1}^m U_{y_\iota}.$$

Para  $j = 1, \dots, n$  y  $\iota = 1, \dots, m$ , la familia  $\{U_j(y_\iota)\}$  es una subcubierta finita de  $\{U_\alpha\}$ . Por lo tanto  $f^{-1}(K)$  es un subconjunto compacto de  $X$  y  $f$  es una

aplicación propia.

Si la aplicación  $f$  es propia es fácil ver que  $f$  es cerrada y para todo  $y \in Y$  su preimagen  $f^{-1}(y)$  es compacta.  $\square$

Una herramienta básica que usaremos es la razón cruzada de cuatro puntos  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{C}$  dada por

$$(p_1, p_2, p_3, p_4) := \frac{(p_3 - p_2)(p_4 - p_1)}{(p_3 - p_1)(p_4 - p_2)}.$$

La definición se extiende para  $p_i = \infty$  tomando el límite de la expresión anterior. Recordemos que para cuatro puntos distintos  $p_1, p_2, p_3, p_4$  la razón cruzada  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ . Además, la razón cruzada es invariante bajo transformaciones de Möbius. Esto es, para toda  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ ,  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (T(p_1), T(p_2), T(p_3), T(p_4))$ . Más aún,  $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (q_1, q_2, q_3, q_4)$  si y sólo si existe una única  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T(p_i) = q_i$  para  $i = 1, \dots, 4$ . El siguiente resultado es fácil de probar y extiende la propiedad anterior (ver [13], pág. 12).

**Observación 3.4.** Consideremos dos subconjuntos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  y  $\{q_1, \dots, q_n\}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Si  $(p_1, p_2, p_3, p_i) = (q_1, q_2, q_3, q_i)$  entonces existe una única transformación de Möbius  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T(p_i) = q_i$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

El siguiente resultado es consecuencia de la tres-transitividad de las transformaciones de Möbius.

**Lema 3.5.** Para  $s \geq 3$ , si  $(\eta, \omega) \in \Omega^1(-s) \times \Omega^1(-s)$ , entonces  $\tilde{\mathcal{A}}_s^{-1}(\eta, \omega) \subset PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega^1(-s)$  es un subconjunto finito.

**Corolario 3.6.** Para  $s \geq 3$  y cada  $\omega \in \Omega^1(-s)$ , su grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  es finito en  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

*Demostración.* Si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  entonces  $T$  permuta los polos de  $\omega$ . Esto implica que solo existen un número finito de elementos en  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ .  $\square$

**Proposición 3.7.** Para  $s \geq 3$ , la acción  $\mathcal{A}_s$  es propia.

*Demostración.* Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}_s : PSL(2, \mathbb{C}) \times (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta) &\longrightarrow (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta)^2 \\ (T, (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s)) &\longmapsto ((r_1, \dots, r_s, Tp_1, \dots, Tp_s), \\ &\quad (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s)). \end{aligned}$$

Primero, probemos que  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  es cerrada. Consideremos  $C$  un subconjunto cerrado de  $PSL(2, \mathbb{C}) \times (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta)$  y una sucesión convergente

$$\{((r_{m1}, \dots, r_{ms}, q_{m1}, \dots, q_{ms}), (r_{m1}, \dots, r_{ms}, p_{m1}, \dots, p_{ms}))\}_m \subset \widehat{\mathcal{A}}_s(C),$$

con punto límite  $((r_1, \dots, r_s, q_1, \dots, q_s), (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s))$ . Para  $s \geq 3$  y cada  $m$ , existe una única transformación de Möbius  $T_m \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T_m p_{m\iota} = q_{m\iota}$  donde  $\iota = 1, \dots, s$ . Más aún,  $(T_m, (r_1, \dots, r_s, p_{m1}, \dots, p_{ms})) \in C$ . Si  $s = 3$ , entonces existe una única  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T p_\iota = q_\iota$  para  $\iota = 1, 2, 3$ . Si  $s \geq 4$ , entonces para todo  $\iota = 4, \dots, s$

$$\begin{aligned} (q_1, q_2, q_3, q_j) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (q_{m1}, q_{m2}, q_{m3}, q_{mj}) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (T_m(p_{m1}), T_m(p_{m2}), T_m(p_{m3}), T_m(p_{mj})) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (p_{m1}, p_{m2}, p_{m3}, p_{mj}) = (p_1, p_2, p_3, p_j). \end{aligned}$$

Por la Observación 3.4 existe una única transformación  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ , tal que  $T p_j = q_j$ . Probemos que la sucesión  $\{T_m\}$  converge a  $T$ . Supongamos que  $p_\iota \neq \infty$ . Para  $m$  suficientemente grande,  $p_{m\iota} \neq \infty$ . Consideremos

$$T_m(z) = \frac{a_m z + b_m}{c_m z + d_m} \quad \text{y} \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde  $a_m d_m - b_m c_m = 1$  y  $ad - bc = 1$ . Así

$$q_{mj} = T_m(p_{mj}) = \frac{a_m p_{mj} + b_m}{c_m p_{mj} + d_m}. \quad (3.4)$$

Es fácil ver que la sucesión  $\{(p_{m1} - p_{mj})/(q_{m1} - q_{mj})\}$  converge a  $(p_1 - p_j)/(q_1 - q_j)$ . Simplificando tenemos

$$\begin{aligned} \frac{p_{m1} - p_{mj}}{q_{m1} - q_{mj}} &= (c_m p_{m1} + d_m)(c_m p_{mj} + d_m), \\ \frac{p_1 - p_j}{q_1 - q_j} &= (cp_1 + d)(cp_j + d). \end{aligned}$$

Análogamente, la sucesión  $\{(c_m p_{m2} + d_m)(c_m p_{mj} + d_m)\}$  converge a  $(cp_2 + d)(cp_j + d)$  y la resta

$$\{(c_m p_{m1} + d_m)(c_m p_{mj} + d_m) - (c_m p_{m2} + d_m)(c_m p_{mj} + d_m)\},$$

es una sucesión convergente a  $c(p_1 - p_2)(cp_j + d)$ . Como  $p_{m1} - p_{m2} \neq 0$  converge a  $p_1 - p_2 \neq 0$ , la sucesión

$$\{c_m(c_m p_{mj} + d_m)\}, \quad (3.5)$$

converge a  $c(cp_j + d)$ . Realizando el mismo procedimiento para  $j = 3, 4$ , la resta

$$\{c_m(c_m p_{m3} + d_m) - c_m(c_m p_{m4} + d_m)\},$$

es una sucesión convergente a  $c^2(p_3 - p_4)$ , esto implica que la sucesión  $\{c_m^2\}$  converge a  $c^2$ .

Usando que las sucesiones  $\{c_m(c_m p_{mj} + d_m)\}$ ,  $\{c_m^2\}$  y  $\{p_{mj}\}$  son convergentes, probamos que la sucesión  $\{c_m d_m\}$  converge a  $cd$ . Por otro lado, sabemos que

$$p_{mj} = \frac{d_m q_{mj} - b_m}{a_m - c_m q_{mj}}.$$

Realizando un procedimiento análogo, probamos que la sucesión  $\{c_m a_m\}$  converge a  $ca$ . Por la Ecuación (3.4), la sucesión  $\{c_m b_m\}$  converge a  $cb$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m z + b_m}{c_m z + d_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_m a_m z + c_m b_m}{c_m^2 z + c_m d_m} \\ &= \frac{caz + cb}{c^2 z + cd} = \frac{az + b}{cz + d} = T(z). \end{aligned}$$

Supongamos que  $p_\iota = \infty$  para algún  $\iota$ . Sabemos que existe  $L \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $Lp_\iota \neq \infty$  para todo  $\iota = 1, \dots, s$ . Definimos

$$C_L := \{(T \circ L^{-1}, (r_1, \dots, r_s, Lp_1, \dots, Lp_s)) \mid (T, (r_1, \dots, p_s)) \in C\},$$

Es fácil ver que  $C_L$  es un subconjunto cerrado de  $PSL(2, \mathbb{C}) \times (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta)$  y la sucesión

$$\{((r_{m1}, \dots, r_{ms}, q_{m1}, \dots, q_{ms}), (r_{m1}, \dots, r_{ms}, Lp_{m1}, \dots, Lp_{ms}))\} \subset \widehat{\mathcal{A}}_s(C_L)$$

converge a

$$\begin{aligned} ((r_1, \dots, r_s, q_1, \dots, q_s), (r_1, \dots, r_s, Lp_1, \dots, Lp_s)) = \\ \widehat{\mathcal{A}}_s(T \circ L^{-1}, (r_1, \dots, r_s, Lp_1, \dots, Lp_s)). \end{aligned}$$

Usando lo anterior, la sucesión  $\{(T_m, \omega_m)\}$  converge a  $(T, \omega) \in C$  y la aplicación  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  es cerrada.

Segundo, es fácil ver que la aplicación  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  es inyectiva. Esto es, para todo valor  $((r'_1, \dots, r'_s, q_1, \dots, q_s), (r_1, \dots, r_s, p_1, \dots, p_s)) \in (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta)^2$  su fibra bajo  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  tiene cardinalidad menor o igual que 1. Por el Lema 3.3, la aplicación  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  es propia.

Por último, si consideramos los parámetros residuos-polos, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{C}) \times (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta) & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}_s} & (H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta)^2 \\ \begin{array}{c} Id \times \pi_0 \\ \downarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \pi_0 \times \pi_0 \end{array} \\ PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega^1(-s) & \xrightarrow{\widehat{\mathcal{A}}_s} & \Omega^1(-s) \times \Omega^1(-s). \end{array}$$

Como la acción del grupo  $\mathcal{S}(s)$  sobre  $H_s \times \widehat{\mathbb{C}}^s \setminus \Delta$  es propiamente discontinua, la aplicación  $\pi_0 \times \pi_0$  es propia. Consideremos  $K \subset \Omega^1(-s) \times \Omega^1(-s)$  subconjunto compacto. Si las aplicaciones  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  y  $\pi_0 \times \pi_0$  son propias, entonces  $[(\pi_0 \times \pi_0) \circ \widehat{\mathcal{A}}_s]^{-1}(K)$  es un subconjunto compacto. Como  $Id \times \pi_0$  es continua, la imagen  $(Id \times \pi_0)((\pi_0 \times \pi_0) \circ \widehat{\mathcal{A}}_s]^{-1}(K))$  es un conjunto compacto. Esto es

$$\begin{aligned} (Id \times \pi_0)((\pi_0 \times \pi_0) \circ \widehat{\mathcal{A}}_s]^{-1}(K) &= (Id \times \pi_0)([\tilde{\mathcal{A}}_s \circ (Id \times \pi_0)]^{-1}(K)) \\ &= (Id \times \pi_0)((Id \times \pi_0)^{-1}(\tilde{\mathcal{A}}_s^{-1}(K))) \\ &= \tilde{\mathcal{A}}_s^{-1}(K), \end{aligned}$$

es un subconjunto compacto de  $PSL(2, \mathbb{C}) \times \Omega^1(-s)$ . Por lo tanto la acción  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  es propia.  $\square$

**Observación 3.8.** Para  $s \geq 3$ , la acción  $\mathcal{A}_s$  restringida a la variedad  $\mathcal{RL}\Omega^1(-s)$  es propia.

**Lema 3.9.** Para  $\omega \in \Omega^1(-s)$ , su órbita  $PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega$  es una subvariedad compleja biholomorfa al espacio de clases laterales derechas  $PSL(2, \mathbb{C}) / PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ .

*Demostración.* Consideremos  $\omega \in \Omega^1(-s)$ . Es inmediato ver que la acción derecha del grupo  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  sobre  $PSL(2, \mathbb{C})$ ,

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{C}) \times PSL(2, \mathbb{C})_\omega & \longrightarrow & PSL(2, \mathbb{C}) \\ (T, L) & \longmapsto & T \circ L, \end{array}$$

es libre de puntos fijos y propia. Por el Teorema 1.11.4 de [6], pág. 53, el espacio de órbitas  $PSL(2, \mathbb{C})/PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ , es una variedad compleja tal que la proyección  $P : PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})/PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  es un  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ -haz principal holomorfo. Más aún, el espacio de órbitas coincide con el espacio de clases laterales derechas de  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  en  $PSL(2, \mathbb{C})$ .

Definimos la aplicación holomorfa

$$\begin{aligned} A_\omega : PSL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \Omega^1(-s) \\ T &\longmapsto T_*\omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una aplicación holomorfa e inyectiva

$$B_\omega : \frac{PSL(2, \mathbb{C})}{PSL(2, \mathbb{C})_\omega} \longrightarrow \Omega^1(-s),$$

tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{A_\omega} & \Omega^1(-s) \\ P \downarrow & \nearrow B_\omega & \\ \frac{PSL(2, \mathbb{C})}{PSL(2, \mathbb{C})_\omega} & & \end{array}$$

Más aún,

$$\frac{PSL(2, \mathbb{C})}{PSL(2, \mathbb{C})_\omega} \cong \text{Im}(B_\omega) = PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega,$$

donde  $PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega$  es la órbita de  $\omega$  bajo la acción  $\mathcal{A}_s$ . □

**Observación 3.10.** Para la órbita  $PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega$ , su dimensión compleja es

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}}(PSL(2, \mathbb{C}) \cdot \omega) &= \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{PSL(2, \mathbb{C})}{PSL(2, \mathbb{C})_\omega} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(PSL(2, \mathbb{C})) - \dim_{\mathbb{C}}(PSL(2, \mathbb{C})_\omega) \\ &= 3 - 0 = 3. \end{aligned}$$

## 3.2. Acciones propias y grupos de isotropía.

Para la acción propia  $\mathcal{A}_s$ , la variedad compleja de 1-formas racionales  $\Omega^1(-s)$  y el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  admiten una estratificación por tipos de órbitas (ver [6], Teorema 2.7.4). En nuestro caso, las siguientes propiedades se cumplen para  $\omega \in \Omega^1(-s)$ .

- Las componentes conexas del tipo de órbita, definida por

$$\Omega^1(-s)_\omega^\sim := \left\{ \eta \in \Omega^1(-s) \mid \begin{array}{l} PSL(2, \mathbb{C})_\eta = T \circ PSL(2, \mathbb{C})_\omega \circ T^{-1} \\ \text{para algún } T \in PSL(2, \mathbb{C}) \end{array} \right\},$$

son subvariedades complejas de  $\Omega^1(-s)$ , posiblemente de dimensiones distintas. Estas componentes conexas son los *estratos* de la descomposición.

- Para el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ , el respectivo tipo de órbita es  $\Omega^1(-s)_\omega^\sim/PSL(2, \mathbb{C})$  y los estratos sus componenetes conexas.

Usando el Corolario 3.6, se deduce el siguiente resultado (ver [18], Sección 2.13).

**Observación 3.11.** Los grupos de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  y  $PSL(2, \mathbb{C})_\eta$  son isomorfos si y sólo si son conjugados. Por lo tanto

$$\Omega^1(-s)_\omega^\sim = \{ \eta \in \Omega^1(-s) \mid PSL(2, \mathbb{C})_\eta \cong PSL(2, \mathbb{C})_\omega \}.$$

Usando el Lema 3.9, es fácil probar que la proyección restringida

$$\pi_s : \Omega^1(-s)_\omega^\sim \longrightarrow \Omega^1(-s)_\omega^\sim/PSL(2, \mathbb{C})$$

es un haz fibrado con fibra  $PSL(2, \mathbb{C})/PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ . En particular, para  $\omega_0 \in \Omega^1(-s)$  con grupo de isotropía trivial, su tipo de órbita  $\Omega^1(-s)_{\omega_0}^\sim$  coincide con el subconjunto abierto y denso de 1-formas genéricas en  $\Omega^1(-s)$ ,

$$\mathcal{G}(-s) := \{ \eta \in \Omega^1(-s) \mid PSL(2, \mathbb{C})_\eta \cong \{Id\} \}.$$

El tipo de órbita  $\mathcal{G}(-s)$  tiene un  $PSL(2, \mathbb{C})$ -haz principal asociado

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(-s) \\ & & \downarrow \pi_s \\ & & \mathcal{E}(-s), \end{array}$$

donde  $\mathcal{E}(-s) := \mathcal{G}(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  es una variedad compleja de dimensión  $2s - 4$ .

Análogamente, la subvariedad de 1-formas isocronas  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  y su cociente

$\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  admiten una estratificación por tipos de órbitas. Para  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$ , su tipo de órbita lo denotamos por

$$\mathcal{RI}\Omega^1(-s)_{\omega}^{\sim} := \{\eta \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s) \mid PSL(2, \mathbb{C})_{\eta} \cong PSL(2, \mathbb{C})_{\omega}\}.$$

Sus componentes conexas son los estratos de la descomposición y son subvariedades reales analíticas de  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$ , posiblemente de dimensiones distintas. El estrato con la dimensión más grande posible, coincide con el abierto y denso de 1-formas isocronas genéricas

$$\mathcal{RI}\mathcal{G}(-s) := \{\eta \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s) \mid PSL(2, \mathbb{C})_{\eta} \cong \{Id\}\}.$$

El  $PSL(2, \mathbb{C})$ -haz principal asociado es

$$\begin{array}{ccc} PSL(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{RI}\mathcal{G}(-s) \\ & & \downarrow \pi_s \\ & & \mathcal{RI}\mathcal{E}(-s), \end{array}$$

donde  $\mathcal{RI}\mathcal{E}(-s) := \mathcal{RI}\mathcal{G}(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  es una variedad real analítica de dimensión  $3s - 7$ .

Todos los subgrupos finitos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  están completamente determinados. Enunciemos sin demostración el resultado de clasificación realizado por F. Klein [22], pág. 126. Para una referencia moderna ver [18], pág. 49.

**Proposición 3.12.** *Consideremos  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  subgrupo finito. Al menos una de las siguientes condiciones es cierta.*

- $G$  es isomorfo a un grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$ .
- $G$  es isomorfo a un grupo diédrico  $D_n$ .
- $G$  es isomorfo a un grupo de rotaciones  $G(S)$  de un sólido platónico  $S$ .

Recordemos que el grupo de rotaciones para el tetraedro es el grupo alternante  $A_4$  cuyo orden es 12, para el cubo u octaedro es el grupo simétrico  $\mathcal{S}(4)$  de orden 24, y para el dodecaedro e icosaedro es el grupo alternante  $A_5$  de orden 60. El problema de encontrar los vértices de un tetraedro, cubo (rep. octaedro) y dodecaedro (resp. icosaedro), sobre la esfera de Riemann es muy conocido. A. Solynin en [35], construye diferenciales cuadráticas sobre una superficie de Riemann  $\mathcal{R}$  asociadas a gráficas encajadas en la misma  $\mathcal{R}$ . En particular, construye diferenciales cuadráticas con ceros en los vértices de un sólido platónico y polos en los centros de sus caras. Prosigamos a enunciar y demostrar el problema de realización para estos subgrupos.

**Teorema 3.13.** *Todo subgrupo finito  $G < PSL(2, \mathbb{C})$  aparece como grupo de isotropía de una 1-forma adecuada  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  con  $s \geq 3$ .*

*Demostración.* Caso  $G = \mathbb{Z}_2$ . Para  $\langle i, i, -2i; 0, \infty, 1 \rangle \in \mathcal{RI}\Omega^1(-3)$ , el grupo de isotropía es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

Para  $n \geq 3$ , consideremos  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  las raíces  $n$ -ésimas de la unidad (ver Figura 3.1).

Caso  $G = \mathbb{Z}_n$ . Para

$$\omega = \left\langle \underbrace{i, \dots, i}_{n+1\text{-veces}}, -(n+1)i; \zeta_1, \dots, \zeta_n, 0, \infty \right\rangle \in \mathcal{RI}\Omega^1(-(n+2)),$$

su grupo de isotropía es isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .

Caso  $G = D_n$ . Para

$$\eta = \left\langle \underbrace{i, \dots, i}_{n\text{-veces}}, -\frac{n}{2}i, -\frac{n}{2}i; \zeta_1, \dots, \zeta_n, 0, \infty \right\rangle \in \mathcal{RI}\Omega^1(-(n+2)),$$

su grupo de isotropía es isomorfo a  $D_n$ .

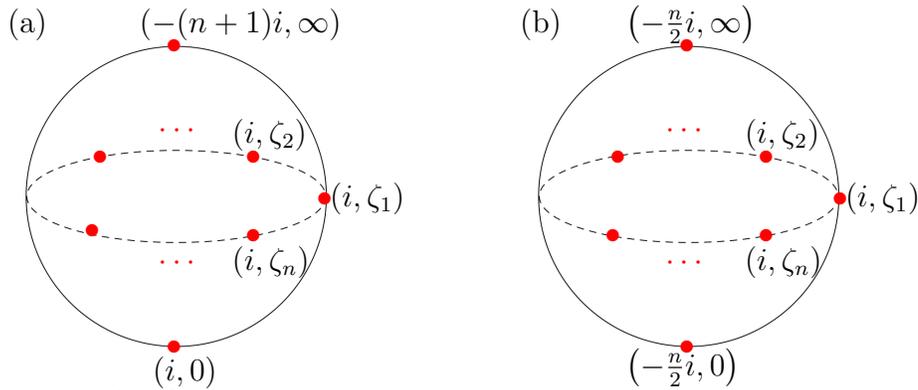


Figura 3.1: Configuración geométrica de residuos-polos para  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-(n+2))$ , con grupo de isotropía cíclico y diédrico respectivamente. (a)  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_n$ . (b)  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong D_n$ .

Caso  $G = G(S)$ . Para realizar los grupos de rotaciones de los sólidos platónicos hacemos la siguiente construcción. Definimos una 1-forma  $\omega$  cuyos polos son el conjunto de vértices de un sólido platónico  $S$  y su dual  $S^*$ , ambos en la

esfera de Riemann. Asignamos  $i$  y  $-ki$  como los residuos correspondientes a los vértices de  $S$  y  $S^*$  respectivamente, donde

$$k := \begin{cases} 1 & \text{donde } S \text{ es el tetraedro,} \\ 4/3 & \text{donde } S \text{ es el cubo,} \\ 3/4 & \text{donde } S \text{ es el octaedro,} \\ 3/5 & \text{donde } S \text{ es el dodecaedro,} \\ 5/3 & \text{donde } S \text{ es el icosaedro.} \end{cases}$$

Por construcción, el grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  es isomorfo a  $G(S)$ . Abajo contruimos dos ejemplos de esto.  $\square$

Claramente, el grado  $-s$  de las 1-formas anteriores depende del orden del grupo  $G$ . A continuación construimos explícitamente dos ejemplos de 1-formas isocronas con sus grupos de isotropía isomorfos a  $A_4$  y  $\mathcal{S}(4)$  respectivamente, cuyas diferenciales cuadráticas asociadas son diferentes a las de A. Solynin. El caso de una 1-forma isocrona con grupo de isotropía isomorfo a  $A_5$  es análogo y se le deja al lector como ejercicio.

### Ejemplo 3.14.

1. Si  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  son las raíces de la ecuación  $z^3 + 1 = 0$ , entonces

$$\omega = \left\langle \underbrace{i, \dots, i}_{4\text{-veces}}, \underbrace{-i, \dots, -i}_{4\text{-veces}}; \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_1, \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_2, \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_3, \infty, \sqrt{2}\epsilon_1, \sqrt{2}\epsilon_2, \sqrt{2}\epsilon_3, 0 \right\rangle,$$

tiene grupo de isotropía isomorfo al grupo de rotaciones de un tetraedro  $A_4$ .

2. Si  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4 \in \mathbb{C}$  son las raíces de la ecuación  $z^4 + 1 = 0$  y  $\lambda = (\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$ , entonces

$$\omega = \left\langle \underbrace{i, \dots, i}_{8\text{-veces}}, \underbrace{-\frac{4}{3}i, \dots}_{6\text{-veces}}; \lambda, -\lambda, i\lambda, -i\lambda, \frac{1}{\lambda}, -\frac{1}{\lambda}, \frac{i}{\lambda}, -\frac{i}{\lambda}, \epsilon_1, \dots, \epsilon_4, 0, \infty \right\rangle,$$

tiene grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  isomorfo al grupo de rotaciones de un cubo u octaedro  $\mathcal{S}(4)$ .

**Observación 3.15.** Para  $s \geq 3$ , existe  $\omega \in \Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ . Probemos esto. Consideremos  $s = 2n$  y  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$  las raíces  $n$ -ésimas de la unidad. Si  $\omega = \langle \zeta_1, \dots, \zeta_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n; 2, \dots, (n+1), 1/2, \dots, 1/(n+1) \rangle$  entonces el grupo de isotropía es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ .

Si  $s = 2n + 1$ , entonces

$$\omega = \langle 1, \dots, n, 1, \dots, n, -n(n+1); 2, \dots, (n+1), 1/2, \dots, 1/(n+1), 1 \rangle$$

tiene grupo de isotropía  $\mathbb{Z}_2$ .

Todos los grupos finitos de  $PSL(2, \mathbb{C})$  se realizan como grupos de rotaciones  $G(S)$ , permitiendo que  $S$  sea una pirámide con base poligonal o una doble pirámide poligonal, adicionalmente a un sólido platónico en la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Fijemos  $S$  y consideremos dos puntos  $p_0, q_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  con órbitas disjuntas bajo la acción de  $G(S)$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Elijiendo adecuadamente los residuos, las órbitas de  $p_0$  y  $q_0$  determinan los polos de una 1-forma racional con grupo de isotropía isomorfo a  $G(S)$ . Así, el siguiente resultado queda probado.

**Lema 3.16.** Consideremos  $n \geq 3$  y  $n_1, n_2$  tales que  $n_1 + n_2 \geq 2$ .

1. Si  $s \geq (n+1)$  y  $s \equiv 1$  ó  $2 \pmod{n}$ , entonces existe  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_n$ .
2. Si  $s \equiv 0 \pmod{4}$ , entonces existe  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .
3. Si  $s \geq (n+2)$  y  $s \equiv 2 \pmod{n}$ , entonces existe  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong D_n$ .
4. Si  $s = 12n_1 + n_2$  con  $n_2 \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$ , entonces existe  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong A_4$ .
5. Si  $s = 24n_1 + n_2$  con  $n_2 \in \{0, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 26\}$ , entonces existe  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathcal{S}(4)$ .
6. Si  $s = 60n_1 + n_2$  con  $n_2 \in \{0, 12, 20, 30, 32, 42, 50, 62\}$ , entonces existe  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  tal que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong A_5$ .

Las 1-formas que aparecen en la prueba de la Proposición 3.13 y en el Ejemplo 3.14, tienen ceros simples. Antes de dar una parametrización del cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ , estudiaremos un caso particular.

### 3.3. El cociente $\Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$ .

El caso  $s = 2$  es especial, ya que la acción  $\mathcal{A}_2$  no es propia. Esta afirmación es cierta porque los grupos de isotropía de una acción propia son compactos (ver [6], pág. 99). Calculemos dichos grupos.

**Lema 3.17.** *Si  $\omega \in \Omega^1(-2)$ , entonces su grupo de isotropía es isomorfo a  $\mathbb{C}^*$ .*

*Demostración.* Probemos la afirmación para  $\omega_r = \langle r, -r; 0, 1 \rangle$ , con  $r \in \mathbb{C}^*$ . Si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})_{\omega_r}$ , entonces  $T(0), T(\infty) \in \{0, \infty\}$ .

- Si  $T(0) = \infty$  y  $T(\infty) = 0$ , entonces  $T(z) = \frac{1}{cz}$ , pero  $T_*\omega_r = -\omega_r$ .
- Si  $T(0) = 0$  y  $T(\infty) = \infty$ , entonces  $T(z) = az$ , además  $T_*\omega_r = \omega_r$ .

Esto implica que  $PSL(2, \mathbb{C})_{\omega_r} = \{T(z) = az \mid a \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$ .

Para  $\omega = \langle r, -r, p_1, p_2 \rangle \in \Omega^1(-2)$ , existe una transformación  $L \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $L_*\omega = \omega_r$ . Por lo tanto  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong PSL(2, \mathbb{C})_{\omega_r} \cong \mathbb{C}^*$ .  $\square$

**Ejemplo 3.18.** El espacio cociente  $\Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$  es biholomorfo a  $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_2$ , donde la acción del grupo  $\mathbb{Z}_2$  es multiplicar por  $\{\pm 1\}$ . La proyección a órbitas  $\pi_2 : \Omega^1(-2) \rightarrow \Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$  es un haz fibrado con fibra  $\widehat{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta$ .

Probemos esto. Definimos la función holomorfa

$$\begin{aligned} \mu_2 : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \Omega^1(-2) \\ r &\longmapsto \langle r, -r; 0, \infty \rangle. \end{aligned}$$

Usando la tres-transitividad de las transformaciones de Möbius, la aplicación  $\pi_2 \circ \mu_2$  es  $\mathbb{Z}_2$ -invariante. Más aún,  $\pi_2 \circ \mu_2$  es sobre. Por lo tanto, existe un homeomorfismo  $\tilde{\mu}_2 : \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$ , tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^* & \\ & \swarrow & \downarrow \pi_2 \circ \mu_2 \\ \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\tilde{\mu}_2} & \Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C}) \end{array}$$

Esto implica que el cociente  $\Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$  es una superficie de Riemann biholomorfa a  $\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}_2$ . Es fácil ver que  $\pi_2^{-1}[r] = \{\langle r, -r; p_1, p_2 \rangle \in \Omega^1(-2) \mid (p_1, p_2) \in \widehat{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta\} \cong \widehat{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta$ .

**Ejemplo 3.19.** El espacio cociente  $\mathcal{RI}\Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}^+$ . La proyección a órbitas  $\pi_2 : \mathcal{RI}\Omega^1(-2) \rightarrow \mathcal{RI}\Omega^1(-2)/PSL(2, \mathbb{C})$  es un haz fibrado trivial con fibra  $\widehat{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta$ .

### 3.4. Parametrización de $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ .

Para  $s \geq 3$ , parametrizamos el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  usando el conjunto de  $PSL(2, \mathbb{C})$ -invariantes. Primero, consideramos el conjunto ordenado de residuos como el complemento de un arreglo de  $s$  hiperplanos

$$\mathbb{A}_s = \mathbb{C}_{(r_1, \dots, r_{s-1})}^{s-1} \setminus \{r_1 + \dots + r_{s-1} = 0, r_\iota = 0 \ \iota = 1, \dots, s-1\}.$$

Para  $s = 2, 3$  los residuos son un conjunto completo de invariantes. Pero con  $s \geq 4$ , los residuos son insuficientes. Para completar nuestros invariantes, fijamos tres polos en  $\{0, \infty, 1\}$  y parametrizamos el conjunto ordenado de polos como

$$[\mathbb{C}^* \setminus \{1\}]^{s-3} \setminus \Delta := \{(p_4, \dots, p_s) \in [\mathbb{C}^* \setminus \{1\}]^{s-3} \mid p_\iota \neq p_\kappa \text{ para } \iota \neq \kappa\}.$$

Para una configuración  $\{q_1, \dots, q_s\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , existen  $\binom{s}{s-3} 3!$  transformaciones de Möbius  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ , tales que  $\{T(q_1), \dots, T(q_s)\} = \{0, \infty, 1, p_4, \dots, p_s\}$ . Dada una colección ordenada

$$(r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s) \in \mathbb{A}_s \times [\mathbb{C}^* \setminus \{1\}]^{s-3} \setminus \Delta := \mathcal{M}(-s),$$

y una permutación  $\sigma \in \mathcal{S}(s)$  existe una única  $T_\sigma \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que

$$\begin{aligned} (r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s) &\longmapsto \\ &\{(r_{\sigma(1)}, 0), (r_{\sigma(2)}, \infty), (r_{\sigma(3)}, 1), (r_{\sigma(4)}, T(p_4)), \dots, (r_{\sigma(s)}, T(p_s))\} \\ &:= \langle\langle r_1, \dots, r_s; 0, \infty, 1, p_4, \dots, p_s \rangle\rangle \in \Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Note que en el lado derecho de la expresión anterior aparecen convenientemente el residuo  $r_s = -(r_1 + \dots + r_{s-1})$  y los polos  $0, \infty, 1$ . Existe una  $\mathcal{S}(s)$ -acción natural sobre  $\mathcal{M}(-s)$ . Para expresarla, recordemos la *presentación de Coxeter* del grupo simétrico  $\mathcal{S}(s)$ ,

$$\left\langle \sigma_j = (j \ j+1) \mid \begin{array}{l} \sigma_j^2 = 1, (\sigma_j \sigma_{j+1})^3 = 1, (\sigma_j \sigma_k)^2 = 1 \\ \forall |j-k| \geq 2, j = 1, \dots, s-1 \end{array} \right\rangle, \quad (3.6)$$

ver [2] Sec. 1.2. Definimos una representación de grupos, en los generadores de Coxeter, como

$$\rho_s : \mathcal{S}(s) \longrightarrow GL_{s-1}(\mathbb{Z}) \times \text{Bir}(\widehat{\mathbb{C}}^{s-3})$$

$$\sigma_j \longmapsto (A_j, f_j) = \begin{cases} \left( A_1, \left( \frac{1}{z_4}, \dots, \frac{1}{z_s} \right) \right) \\ \left( A_2, \left( \frac{z_4}{z_4-1}, \dots, \frac{z_s}{z_s-1} \right) \right) \\ \left( A_3, \left( \frac{1}{z_4}, \frac{z_5}{z_4}, \dots, \frac{z_s}{z_4} \right) \right) \\ \left( A_j, (z_{\sigma_l(4)}, \dots, z_{\sigma_j(s)}) \right), \text{ si } j = 4, \dots, s-1. \end{cases}$$

Donde  $\text{Bir}(\widehat{\mathbb{C}}^{s-3})$  es el grupo de aplicaciones complejas birracionales sobre  $\widehat{\mathbb{C}}^{s-3}$ , la aplicación  $f_1 : \widehat{\mathbb{C}}^{s-3} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}^{s-3}$  proveniente de  $\sigma_1$  se debe entender como  $(z_4, \dots, z_s) \longmapsto (1/z_4, \dots, 1/z_s)$  y análogamente con las otras. Es un resultado conocido que el espacio de Torelli para la esfera con  $s$  ponchaduras es biholomorfo a  $[\mathbb{C}^* \setminus \{1\}]^{s-3} \setminus \Delta$ . Usando esta identificación, el subgrupo de funciones birracionales  $\{f_\sigma\}$  coincide con el grupo modular de Torelli respectivo; ver [33].

Para  $j = 1, \dots, s-2$ , las matrices  $A_j$  vienen de la identidad intercambiando los renglones  $j$  y  $j+1$ , y la matriz  $A_{s-1}$  resulta de remplazar en la identidad el renglón  $(s-1)$  por  $(-1, \dots, -1)$ . Es un cálculo directo que  $\{\rho_s(\sigma_l)\}$  satisfacen las relaciones en la presentación de Coxeter (3.6). Usando  $\rho_s$ , definimos la  $\mathcal{S}(s)$ -acción sobre  $\mathcal{M}(-s)$  como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(s) \times \mathcal{M}(-s) &\longrightarrow \mathcal{M}(-s) \\ (\sigma, (r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s)) &\longmapsto \left( A_\sigma \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{s-1} \end{pmatrix}, f_\sigma(p_4, \dots, p_s) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para reconocer el espacio de órbitas  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ , la aplicación

$$\begin{aligned} \mu_s : \mathcal{M}(-s) &\longrightarrow \Omega^1(-s) \\ (r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s) &\longmapsto \langle r_1, \dots, r_s; 0, \infty, 1, p_4, \dots, p_s \rangle = \omega, \end{aligned}$$

será útil. El número de preimágenes  $\mu_s^{-1}(\omega)$  es  $(s-3)!$  Esto implica que el número de preimágenes  $(\pi_s \circ \mu_s)^{-1}(\langle \omega \rangle)$  es menor o igual que  $s!$  La igualdad se realiza cuando  $\omega \in \mathcal{G}(-s)$ .

**Teorema 3.20.** *Para  $s \geq 3$ , el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  es homeomorfo a  $\mathcal{M}(-s)/\mathcal{S}(s)$ .*

*Demostración.* Probemos que  $\pi_s \circ \mu_s$  es una aplicación  $\rho_s$ -equivariante. *i. e.*

$(\pi_s \circ \mu_s)(\sigma \cdot (r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s)) = (\pi_s \circ \mu_s)(r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s)$ ,  
para todo  $\sigma \in \mathcal{S}(s)$ . Basta verificar la igualdad anterior para los generadores de Coxeter. Por ejemplo, considerando  $\sigma_1 = (1\ 2) \in \mathcal{S}(s)$ , la cuenta explícita es

$$\begin{aligned} & (\pi_s \circ \mu_s)(\sigma_1 \cdot (r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s)) \\ &= (\pi_s \circ \mu_s)(r_2, r_1, r_3, \dots, r_{s-1}, 1/p_4, \dots, 1/p_s) \\ &= \langle \langle r_2, r_1, r_3, \dots, r_s; 0, \infty, 1, 1/p_4, \dots, 1/p_s \rangle \rangle \\ &= \langle \langle (1/z)_* \langle r_2, r_1, r_3, \dots, r_s; \infty, 0, 1, p_4, \dots, p_s \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle \langle r_1, \dots, r_s; 0, \infty, 1, p_4, \dots, p_s \rangle \rangle \\ &= (\pi_s \circ \mu_s)(r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s). \end{aligned}$$

Los cálculos son análogos en los otros casos. Por otro lado, la aplicación  $(\pi_s \circ \mu_s)$  es sobre. Por lo tanto, existe un homeomorfismo  $\tilde{\mu}_s : \mathcal{M}(-s)/\mathcal{S}(s) \rightarrow \Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M}(-s) & \\ & \swarrow & \downarrow \pi_s \circ \mu_s \\ \frac{\mathcal{M}(-s)}{\mathcal{S}(s)} & \xrightarrow{\tilde{\mu}_s} & \frac{\Omega^1(-s)}{PSL(2, \mathbb{C})} \end{array}$$

Lo cual prueba el resultado.  $\square$

Análogamente, contruimos el espacio de parámetros para el cociente de 1-formas isocronas  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$ . Basta considerar

$$\mathfrak{Im}(\mathbb{A}_s) := \{(ir_1, \dots, ir_{s-1}) \in \mathbb{A}_s \mid r_\iota \in \mathbb{R}^*, \iota = 1, \dots, s-1\},$$

y es fácil ver que la  $\mathcal{S}(s)$ -acción (3.7) se restringe al espacio

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s)) := \mathfrak{Im}(\mathbb{A}_s) \times [\mathbb{C}^* \setminus \{1\}]^{s-3} \setminus \Delta.$$

**Corolario 3.21.** *Para  $s \geq 3$ , el cociente  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  es homeomorfo a  $\mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s))/\mathcal{S}(s)$ .*

### 3.5. El cociente $\Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$ .

El primer caso donde aplicamos la teoría de acciones propias es para  $s = 3$ . Calculemos los grupos de isotropía.

**Lema 3.22.** Una 1-forma  $\omega \in \Omega^1(-3)$  tiene dos residuos iguales si y sólo si su grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ . En otro caso, el grupo de isotropía es trivial.

*Demostración.* Consideremos  $\omega = \langle r_1, r_2, r_3; 0, \infty, 1 \rangle \in \Omega^1(-3)$ . Como  $r_1 + r_2 + r_3 = 0$  no existen tres residuos iguales. Supongamos que  $r_1 = r_2$ . La tres-transitividad de  $PSL(2, \mathbb{C})$  implica que existe una única  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T(0) = \infty$ ,  $T(\infty) = 0$  y  $T(1) = 1$ . Por lo tanto  $T \in PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  y es el único elemento no trivial ya que el polo 1 queda fijo. Esto es,  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .

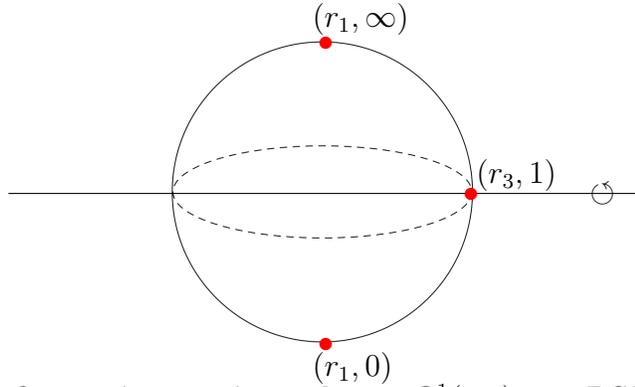


Figura 3.2: Configuración geométrica de  $\omega \in \Omega^1(-3)$  con  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .

En general, para  $\eta = \langle r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3 \rangle \in \Omega^1(-3)$  y  $r_1 = r_2$ , existe  $L \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $L_*\eta = \omega$  y  $PSL(2, \mathbb{C})_\eta \cong PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .

Los casos  $r_1 = r_3$  y  $r_2 = r_3$  son análogos.

Si los tres residuos son distintos, entonces  $T \in PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  fija los tres polos. Usando la tres-transitividad de  $PSL(2, \mathbb{C})$  vemos que  $T$  es la identidad y por lo tanto  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \{Id\}$ .  $\square$

**Observación 3.23.** La variedad  $\Omega^1(-3)$  admite una estratificación con dos tipos de órbitas y están dados por

$$\begin{aligned} & \{ \langle r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3 \rangle \in \Omega^1(-3) \mid r_\iota = r_\kappa \text{ con } \iota \neq \kappa \}, \\ \mathcal{G}(-3) = & \{ \langle r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3 \rangle \in \Omega^1(-3) \mid r_\iota \neq r_\kappa \text{ con } \iota \neq \kappa \}. \end{aligned}$$

Usando la tres-transitividad de  $PSL(2, \mathbb{C})$ , una clase en el cociente  $\Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$  no depende de la elección de los polos. Por ello, usando los residuos, identificamos el cociente  $\Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$  con el espacio de triángulos

Euclidianos

$$\Delta_{Euc} := \mathbb{C}_{(r_1, r_2, r_3)}^3 \setminus \{r_1 = r_2 = r_3\} / \mathcal{S}(3),$$

módulo el grupo de translaciones  $\mathbb{C}_b := \{L : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \mid L(z) = z + b, b \in \mathbb{C}\}$ . Notemos que en  $\Delta_{Euc}$  están considerados los triángulos degenerados, esto es, triángulos con vértices alineados. La acción se define por

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_b \times \Delta_{Euc} &\longrightarrow \Delta_{Euc} \\ (L, [r_1, r_2, r_3]) &\longmapsto [Lr_1, Lr_2, Lr_3]. \end{aligned}$$

Es un resultado conocido que

$$\mathcal{T}\Delta_{Euc} := \frac{\Delta_{Euc}}{\mathbb{C}_b} = \frac{\{(r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{C}^3 \mid r_i \neq 0, r_1 + r_2 + r_3 = 0\}}{\mathcal{S}(3)}.$$

En otras palabras, cada clase en  $\mathcal{T}\Delta_{Euc}$  es un triángulo Euclideano con vértices en  $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$  y gravicentro en el origen.

**Lema 3.24.** *Los cocientes  $\mathcal{T}\Delta_{Euc}$  y  $\Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$  son homeomorfos.*

*Demostración.* Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} f : \Omega^1(-3) &\longrightarrow \mathcal{T}\Delta_{Euc} \\ \langle r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3 \rangle &\longmapsto [r_1, r_2, r_3], \end{aligned}$$

Es inmediato ver que  $f$  es  $PSL(2, \mathbb{C})$ -equivariante y sobre. Por lo tanto existe un homeomorfismo  $\tilde{f} : \Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{T}\Delta_{Euc}$  tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} & \Omega^1(-3) & \\ & \swarrow \pi_3 & \downarrow f \\ \frac{\Omega^1(-3)}{PSL(2, \mathbb{C})} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{T}\Delta_{Euc}. \end{array}$$

□

**Observación 3.25.** Una 1-forma tiene isotropía no trivial si y sólo si el triángulo asociado es degenerado con dos vértices iguales.

Usando la identificación anterior, asignamos de manera natural una forma pseudo-hermitiana al cociente  $\Omega^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \frac{\Omega^1(-3)}{PSL(2, \mathbb{C})} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle \langle r_1, r_2, r_3; p_1, p_2, p_3 \rangle \rangle &\longmapsto \frac{i}{4} \sum_{i=1}^3 (r_i \bar{r}_{i+1} - r_{i+1} \bar{r}_i). \end{aligned}$$



### 3.6. El cociente $\Omega^1(-4)/PSL(2, \mathbb{C})$ .

Como mencionamos anteriormente, para  $s \geq 4$  los residuos no son suficientes invariantes para parametrizar el cociente. Analicemos el caso  $s = 4$ .

**Lema 3.27.** *Para  $\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \in \Omega^1(-4)$ , la razón cruzada  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  es raíz del polinomio*

$$R_4(z) = (r_1 + r_3)^2 z^2 + 2(r_1 r_2 + r_3 r_4)z + (r_1 + r_4)^2, \quad (3.8)$$

si y sólo si  $\omega$  tiene un cero de multiplicidad dos.

*Demostración.* Si  $q = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , entonces existe  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T_*\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; 0, \infty, 1, q \rangle$ . Esto es,

$$T_*\omega = \left( \frac{r_1}{z} + \frac{r_3}{z-1} + \frac{r_4}{z-q} \right) dz = \frac{-r_2 z^2 - [(r_1 + r_4) + (r_1 + r_3)q]z + r_1 q}{z(z-1)(z-q)} dz.$$

Por lo tanto  $\omega$  tiene un cero doble si y sólo si  $T_*\omega$  tiene un cero doble si y sólo si

$$[(r_1 + r_4) + (r_1 + r_3)q]^2 + 4r_1 r_2 q = 0,$$

lo cual es equivalente a  $R_4(q) = 0$ . □

**Lema 3.28.** *Consideremos  $\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle \in \Omega^1(-4)$ .*

- *Si  $\omega$  tiene exactamente dos residuos iguales y  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$  entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .*
- *Si  $\omega$  tiene dos pares de residuos iguales y además*
  - *$(p_1, p_2, p_3, p_4) \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ , entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .*
  - *$(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ , entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .*
- *Si  $\omega$  tiene tres residuos iguales y  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \{(1 \pm \sqrt{3})/2\}$ , entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_3$ .*

*En otro caso el grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  es trivial.*

*Demostración.* Consideremos  $\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; 0, \infty, 1, q \rangle \in \Omega^1(-4)$ .

Supongamos que  $r_1 = r_2$ ,  $r_3 \neq r_4$  y  $q = -1$ . Es fácil ver que  $(0, \infty, 1, -1) = (\infty, 0, 1, -1)$ . Esto es, existe  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  no trivial y de orden dos, tal que  $T_*\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; \infty, 0, 1, -1 \rangle = \omega$ . Como  $r_3 \neq r_4$ ,  $T$  es el único elemento de  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ , por lo tanto  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .

El resultado es análogo para los casos

$$\begin{aligned} r_1 \neq r_2, \quad r_3 = r_4, \quad q = -1, \quad r_1 = r_4, \quad r_2 \neq r_3, \quad q = 2, \\ r_1 = r_3, \quad r_2 \neq r_4, \quad q = 1/2, \quad r_1 \neq r_4, \quad r_2 = r_3, \quad q = 2. \\ r_1 \neq r_3, \quad r_2 = r_4, \quad q = 1/2, \end{aligned}$$

Supongamos que  $r_1 = r_2$ ,  $r_3 = r_4$  y  $q \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ . Es fácil ver que  $(0, \infty, 1, q) = (\infty, 0, q, 1)$ . Esto es, existe  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  no trivial y de orden dos, tal que  $T_*\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; \infty, 0, q, 1 \rangle = \omega$ . Como  $q \notin \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$ ,  $T$  es el único elemento de  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ , por lo tanto  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ .

Supongamos que  $r_1 = r_2$ ,  $r_3 = r_4$  y  $q = -1$ . Es fácil ver que  $(0, \infty, 1, -1) = (\infty, 0, -1, 1) = (\infty, 0, 1, -1) = (0, \infty, -1, 1)$ , esto implica que existen tres transformaciones  $T_1, T_2, T_3 \in PSL(2, \mathbb{C})$  involuciones no triviales, tales que

$$\begin{aligned} T_{1*}\omega &= \langle r_1, r_2, r_3, r_4; \infty, 0, -1, 1 \rangle = \omega, \\ T_{2*}\omega &= \langle r_1, r_2, r_3, r_4; \infty, 0, 1, -1 \rangle = \omega, \\ T_{3*}\omega &= \langle r_1, r_2, r_3, r_4; 0, \infty, -1, 1 \rangle = \omega. \end{aligned}$$

Como los cuatro residuos no son iguales,  $T_1, T_2, T_3$  son los únicos elementos de  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$ . Por lo tanto  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

El resultado es análogo para los casos

$$\begin{aligned} r_1 = r_3, \quad r_2 = r_4, \quad q = 1/2, \\ r_1 = r_4, \quad r_2 = r_3, \quad q = 2. \end{aligned}$$

Supongamos que  $r_1 = r_2 = r_3$  y  $q = (1 + \sqrt{3})/2$ . Si  $\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$  son las raíces cúbicas de la unidad, entonces  $(0, \infty, 1, q) = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \infty)$  y existe  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que

$$T_*\omega = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \infty \rangle.$$

Es fácil ver que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong PSL(2, \mathbb{C})_{T_*\omega} \cong \mathbb{Z}_3$ . Los otros casos son análogos.

Si  $\eta = \langle r_1, r_2, r_3, r_4; p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$  y  $q = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , entonces existe  $L \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $L_*\eta = \omega$ . Esto implica que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong PSL(2, \mathbb{C})_\eta$ . En otros casos el grupo de isotropía es trivial.  $\square$

**Ejemplo 3.29.** (Dos residuos iguales y distintos a los demás con isotropía no trivial). Para  $\omega = \langle i, i, 2i, -4i; 1, -1, i, -i \rangle$ , la función  $T(z) = -1/z \in PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  y la isotropía de  $\omega$  no es trivial.

**Ejemplo 3.30.** (Dos residuos iguales y distintos a los demás con isotropía trivial). Para  $\omega = \langle i, i, 2i, -4i; 1, -1, 2, -2 \rangle$ , si  $T \in PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  no es la identidad, entonces  $T(1) = -1$ ,  $T(-1) = 1$ ,  $T(2) = 2$  y  $T(-2) = -2$ , lo cual es cierto si sólo si  $(1, -1, 2, -2) = (-1, 1, 2, -2)$  y es una contradicción ya que

$$\begin{aligned} (1, -1, 2, -2) &= -8, \\ (-1, 1, 2, -2) &= 8/9. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega = \{Id\}$ .

**Observación 3.31.** El cociente  $\Omega^1(-4)/PSL(2, \mathbb{C})$  admite una estratificación con 4 tipos de órbitas.

**Ejemplo 3.32.** El cociente  $\mathcal{R}\mathcal{I}\Omega^1(-4)/PSL(2, \mathbb{C})$  tiene 3 componentes conexas y admite una estratificación con 4 tipos de órbitas.

Verifiquemos esto. Es fácil ver que el número de componentes conexas de  $\mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4))$  depende sólo del número de componentes conexas de  $\mathfrak{I}m(\mathbb{A}_4)$ . Por lo tanto  $\mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4))$  tiene 14 componentes conexas, las cuales denotamos por

$$\begin{aligned} X_j^+ &:= \left\{ (r_1, r_2, r_3, q) \in \mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4)) \mid \begin{array}{l} -\mathfrak{I}m(r_1 + r_2 + r_3) > 0, \\ \mathfrak{I}m(r_j) > 0, \mathfrak{I}m(r_i) < 0 \ \iota \neq j \end{array} \right\}, \\ X_j^- &:= \left\{ (r_1, r_2, r_3, q) \in \mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4)) \mid \begin{array}{l} -\mathfrak{I}m(r_1 + r_2 + r_3) < 0, \\ \mathfrak{I}m(r_j) > 0, \mathfrak{I}m(r_i) < 0 \ \iota \neq j \end{array} \right\}, \\ X_{j_1 j_2}^+ &:= \left\{ (r_1, r_2, r_3, q) \in \mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4)) \mid \begin{array}{l} -\mathfrak{I}m(r_1 + r_2 + r_3) > 0, \\ \mathfrak{I}m(r_{j_1}) > 0, \mathfrak{I}m(r_{j_2}) > 0 \end{array} \right\}, \\ X_{j_1 j_2}^- &:= \left\{ (r_1, r_2, r_3, q) \in \mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4)) \mid \begin{array}{l} -\mathfrak{I}m(r_1 + r_2 + r_3) < 0, \\ \mathfrak{I}m(r_{j_1}) > 0, \mathfrak{I}m(r_{j_2}) > 0 \end{array} \right\}, \\ X_+ &:= \{(r_1, r_2, r_3, q) \in \mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4)) \mid \mathfrak{I}m(r_j) > 0, \ j = 1, 2, 3\}, \\ X_- &:= \{(r_1, r_2, r_3, q) \in \mathfrak{I}m(\mathcal{M}(-4)) \mid \mathfrak{I}m(r_j) < 0, \ j = 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Estas componentes se identifican bajo la  $\mathcal{S}(4)$ -acción como sigue.

$$\begin{aligned} X_+ &\sim X_{23}^+ \sim X_{13}^+ \sim X_{12}^+, \\ X_- &\sim X_1^- \sim X_2^- \sim X_3^-, \\ X_1^+ &\sim X_2^+ \sim X_3^+ \sim X_{23}^- \sim X_{13}^- \sim X_{12}^-. \end{aligned}$$

Usando el Corolario 3.21, la afirmación queda probada.

### 3.7. El cociente $\Omega^1(-5)/PSL(2, \mathbb{C})$ .

**Lema 3.33.** *Consideremos  $\omega \in \Omega^1(-5)$ . Si el grupo de isotropía  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  no es trivial, entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$  o  $D_3$ .*

*Demostración.* Consideremos  $\omega = \langle r_1, \dots, r_5, p_1, \dots, p_5 \rangle \in \Omega^1(-5)$ . Si el grupo de isotropía no es trivial, entonces  $\omega$  tiene al menos tres residuos iguales o dos pares de residuos iguales.

Supongamos que  $\omega$  tiene dos pares de residuos iguales y un residuo distinto a los demás. Si  $r_5$  es el residuo distinto, entonces el polo  $p_5$  es un punto fijo bajo la acción de  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Esto implica que el grupo de isotropía es cíclico (ver [18], pág. 44). Si los dos pares de residuos son distintos, entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2$ . Si los cuatro residuos son iguales, entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$ , ó  $\mathbb{Z}_4$ .

Supongamos que existe un par y una terna de residuos iguales y que  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  no es cíclico. Si  $r_4 = r_5$  entonces  $\{p_4, p_5\}$  es una órbita de orden dos bajo la acción de  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Esto implica que el grupo de isotropía es isomorfo a un grupo diédrico (ver [18], pág. 46). Si  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega$  no es cíclico, entonces  $PSL(2, \mathbb{C})_\omega \cong D_3$ .  $\square$

**Observación 3.34.** El cociente  $\Omega^1(-5)/PSL(2, \mathbb{C})$  admite una estratificación con 5 tipos de órbitas.

# Capítulo 4

## Conclusiones y problemas futuros

### 4.1. El cociente de superficies planas asociadas $S_\omega$ módulo isometrías.

Un problema natural es reconocer el cociente de superficies planas  $\{S_\omega\}$  módulo isometrías. En esta sección, mostramos algunos resultados parciales en el caso particular cuando  $\omega \in \Omega^1(-s)$ . Recordemos que la superficie de Riemann asociada a  $\omega \in \Omega^1(-s)$  es  $S_\omega = (\widehat{\mathbb{C}}, g_\omega)$ , con su métrica plana

$$g_\omega(z) = \begin{pmatrix} \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 & 0 \\ 0 & \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Abusando de notación, el producto interno asociado a  $g_\omega$  en el punto  $z \in S_\omega$  es

$$\begin{aligned} g_\omega(\cdot, \cdot)_z : T_z S_\omega \times T_z S_\omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\zeta_1, \zeta_2) &\longmapsto \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2, \end{aligned}$$

donde  $\cdot$  representa el producto punto Euclidiano usual.

Para  $\omega \in \Omega^1(-s)$  (resp  $\omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)$ ), denotamos a los cocientes de

superficies planas  $\{S_\omega\}$  módulo isometrías por

$$\mathfrak{M}(-s) := \frac{\{S_\omega \mid \omega \in \Omega^1(-s)\}}{\{\text{Isometrías}\}}, \quad \text{resp. } \mathcal{RIM}(-s) := \frac{\{S_\omega \mid \omega \in \mathcal{RI}\Omega^1(-s)\}}{\{\text{Isometrías}\}}.$$

La circunferencia unitaria, vista como subgrupo de  $\mathbb{C}^*$ , es denotada por  $S^1$ .

**Proposición 4.1.** *Consideremos  $\omega, \eta \in \Omega^1(-s)$ , las superficies respectivas  $S_\omega$  y  $S_\eta$  son isométricas si y sólo si existen  $\lambda \in S^1$  y  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tales que  $\eta = \lambda T_* \omega$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\lambda$  y  $T$  existen. Primero probemos que  $\omega$  y  $\lambda\omega$  son isométricas. Como conjuntos, es fácil ver que  $S_\omega = S_{\lambda\omega}$ . Más aún, usando la expresión (4.1) las métricas  $g_\omega$  y  $g_{\lambda\omega}$  son iguales para  $|\lambda| = 1$ . Esto implica que  $S_\omega$  y  $S_{\lambda\omega}$  son isométricas.

Como segundo paso, probemos que  $S_\omega$  y  $S_{T_*\omega}$  son isométricas. Consideremos  $z \in S_\omega$ ,  $\zeta_1, \zeta_2 \in T_z S_\omega$  y  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ . Usando la regla de la cadena  $(T^{-1})'(T(z)) = 1/T'(z)$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} g_{T_*\omega}(T'(z)\zeta_1, T'(z)\zeta_2)_{T(z)} &= |T'(z)|^2 g_{T_*\omega}(\zeta_1, \zeta_2)_{T(z)} \\ &= |T'(z)|^2 \left| \frac{Q(T^{-1}(T(z)))}{P(T^{-1}(T(z)))} \right|^2 |(T^{-1})'(T(z))|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2 \\ &= |T'(z)|^2 \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 \left| \frac{1}{T'(z)} \right|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2 \\ &= \left| \frac{Q(z)}{P(z)} \right|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2 = g_\omega(\zeta_1, \zeta_2)_z. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las superficies  $S_\omega$  y  $S_{\lambda T_*\omega}$  son isométricas.

Inversamente, consideremos  $\omega, \eta \in \Omega^1(-s)$  tales que las respectivas superficies  $S_\omega$  y  $S_\eta$  son isométricas. Denotemos por

$$\omega = \frac{Q_1(z)}{P_1(z)} dz, \quad \text{y} \quad \eta = \frac{Q_2(z)}{P_2(z)} dz.$$

Usando las formas normales para polos y ceros de las 1-formas, es posible reconocer que cada polo y cero es una ponchadura conforme, esto es, existe una vecindad  $U \setminus \{z_0\}$  biholomorfa a un disco  $D_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$  para cada polo y cero  $z_0$ . Por el teorema de extensión de Riemann, si  $\mathfrak{J} : S_\omega \rightarrow S_\eta$  es una isometría, entonces  $\mathfrak{J}$  se extiende a un biholomorfismo sobre  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $T \in PSL(2, \mathbb{C})$  tal que  $T|_{S_\omega} = \mathfrak{J}$ . Para  $z \in S_\omega$ , aplicando la métrica plana tenemos

que

$$\begin{aligned} g_\eta(T'(z)\zeta_1, T'(z)\zeta_2)_{T(z)} &= |T'(z)|^2 \left| \frac{Q_2(T(z))}{P_2(T(z))} \right|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2. \\ &= \left| \frac{Q_1(z)}{P_1(z)} \right|^2 \zeta_1 \cdot \zeta_2 = g_\omega(\zeta_1, \zeta_2)_z. \end{aligned}$$

De la segunda igualdad, sabemos que existe  $\lambda \in S^1$  tal que

$$T'(z) \frac{Q_2(T(z))}{P_2(T(z))} = \lambda \frac{Q_1(z)}{P_1(z)}.$$

Usando el cambio de variable  $\zeta = T(z)$  y la regla de la cadena obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(T^{-1})'(\zeta)} \left( \frac{Q_2(\zeta)}{P_2(\zeta)} \right) &= \lambda \frac{Q_1(T^{-1}(\zeta))}{P_1(T^{-1}(\zeta))} \\ \frac{Q_2(\zeta)}{P_2(\zeta)} &= \lambda (T^{-1})'(\zeta) \frac{Q_1(T^{-1}(\zeta))}{P_1(T^{-1}(\zeta))}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\eta = \lambda T_* \omega$ . □

El Lema 1.9 nos caracteriza las singularidades de  $S_\omega$ . Para las 1-formas racionales en  $\Omega^1(-s)$ , enunciamos este lema en términos de la superficie asociada. Omitimos la demostración ya que esta se sale del objetivo del escrito.

**Lema 4.2 (Formas normales para superficies  $S_\omega$  asociadas a 1-formas con polos simples y ceros, [37] Cap. III).** *Consideremos una 1-forma racional  $\omega \in \Omega^1(-s)$  y  $0 \in \text{Sing}(\omega)$ .*

1. *Si 0 es un cero de orden  $k$  de  $\omega$ , entonces es una singularidad cónica con ángulo  $2(k+1)\pi$ .*
2. *Si 0 es un polo simple entonces es un fin cilíndrico, esto es, existe una vecindad de 0 isométrica a un semi-cilindro  $S_{2\pi|r_0|}^1 \times \mathbb{R}^+$  de diámetro  $2\pi|r_0|$ , donde  $r_0 = \text{Res}(\omega, z_0)$*  □.

**Ejemplo 4.3.** Consideremos la 1-forma  $\omega = \langle -i, i; 0, \infty \rangle = -idz/z \in \mathcal{R}\mathcal{I}\Omega^1(-2)$ . El parámetro distinguido es  $\Psi_{(\omega,1)}(z) = -i\ln(z)$  (ver Ejemplo 1.17). Usando la rama principal de la función logaritmo,  $\Psi_{(\omega,1)}$  manda las trayectorias horizontales de  $\omega$  en segmentos horizontales de tamaño  $2\pi$  (ver Figura 4.1). Esto es, la superficie  $S_\omega$  es isométrica al cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

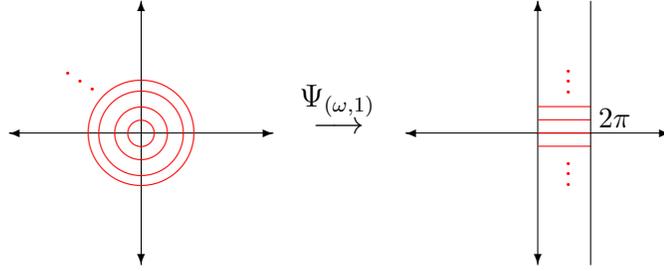


Figura 4.1: Parámetro distinguido usando la rama principal de la función logaritmo.

La Proposición 4.1 permite extender de manera natural la acción  $\mathcal{A}_s$  como sigue. Consideremos el grupo de Lie  $S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})$  y definamos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}_s : (S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})) \times \Omega^1(-s) &\longrightarrow \Omega^1(-s) \\ (\lambda, T, \omega) &\longmapsto \lambda T_* \omega. \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  es propia.

**Observación 4.4.** Como conjuntos, cada clase de superficies isométricas  $[S_\omega] \in \mathfrak{M}(-s)$  se identifica con una única clase  $[[\omega]] \in \Omega^1(-s)/S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})$  e inversamente. Por lo que existe una correspondencia biyectiva

$$\mathfrak{M}(-s) \cong \frac{\Omega^1(-s)}{S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})}.$$

El cociente de superficies  $\mathfrak{M}(-s)$  hereda la estratificación por tipos de órbitas del cociente  $\Omega^1(-s)/S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})$ . Esto es, existe un estrato, el de dimensión más grande, que es una variedad abierta y densa, real analítica y de dimensión real  $4s - 9$ .

En el caso de 1-formas isocronas, restringiendo la acción  $\widehat{\mathcal{A}}_s$  sobre el subgrupo  $\mathbb{Z}_2 \times PSL(2, \mathbb{C})$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  es el subgrupo multiplicativo  $\{\pm 1\} < S^1$ , obtenemos la correspondencia biyectiva

$$\mathcal{RIM}(-s) \cong \frac{\mathcal{RI}\Omega^1(-s)}{\mathbb{Z}_2 \times PSL(2, \mathbb{C})}.$$

En este caso, el estrato de dimensión más grande es una variedad real analítica de dimensión real  $3s - 7$ .

Parametrizamos el cociente  $\Omega^1(-s)/S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})$  extendiendo la  $\mathcal{S}(s)$ -acción (3.7) por la acción del grupo  $S^1 \times \mathcal{S}(s)$  sobre  $\mathcal{M}(-s)$  como sigue.

$$\begin{aligned} (S^1 \times \mathcal{S}(s)) \times \mathcal{M}(-s) &\longrightarrow \mathcal{M}(-s) \\ ((\lambda, \sigma), (r_1, \dots, r_{s-1}, p_4, \dots, p_s)) &\longmapsto \left( \lambda A_\sigma \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{s-1} \end{pmatrix}, f_\sigma(p_4, \dots, p_s) \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por lo tanto existe un homeomorfismo

$$\mathfrak{M}(-s) \cong \frac{\mathcal{M}(-s)}{S^1 \times \mathcal{S}(s)}.$$

Restringiendo la acción (4.2) sobre el subgrupo  $\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{S}(s)$  y la subvariedad  $\mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s))$ , el homeomorfismo inducido es

$$\mathcal{RIM}(-s) \cong \frac{\mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s))}{\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{S}(s)}.$$

**Ejemplo 4.5.** El cociente  $\mathfrak{M}(-3)$  es homeomorfo al espacio de triángulos Euclidianos módulo isometrías que preservan la orientación en el plano  $\mathbb{C}$ . Para verificar esto basta ver que  $S^1$  actúa por rotaciones en los triángulos asociados a las 1-formas  $\omega \in \Omega^1(-3)$ .

**Ejemplo 4.6.** El cociente  $\mathcal{RIM}(-3)$  es conexo admite una estratificación con dos tipos de órbitas. Su dominio fundamental se obtiene de identificar las dos componentes conexas del cociente  $\mathcal{RIM}^1(-3)/PSL(2, \mathbb{C})$ , ver Figura 4.2.

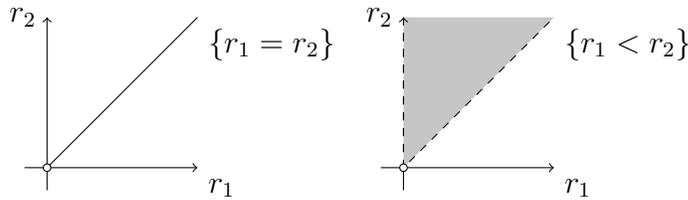


Figura 4.2: Tipos de órbitas para el cociente  $\mathcal{RIM}(-3)$ .

## 4.2. Conclusiones.

En el Diagrama (4.3) mostramos los espacios de parámetros para los cocientes de la variedad compleja  $\Omega^1(-s)$  bajo la acción de  $PSL(2, \mathbb{C})$  y  $S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})$  respectivamente.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{M}(-s) & \longrightarrow & \frac{\mathcal{M}(-s)}{\mathcal{S}(s)} & \longrightarrow & \frac{\mathcal{M}(-s)}{S^1 \times \mathcal{S}(s)} \\
 \downarrow \mu_s & & \updownarrow \tilde{\mu}_s & & \updownarrow \\
 \Omega^1(-s) & \xrightarrow{\pi_s} & \frac{\Omega^1(-s)}{PSL(2, \mathbb{C})} & \longrightarrow & \frac{\Omega^1(-s)}{S^1 \times PSL(2, \mathbb{C})} \\
 & & & & \updownarrow \\
 & & & & \mathfrak{M}(-s).
 \end{array} \tag{4.3}$$

Por otro lado, en el Diagrama (4.4) mostramos los espacios de parámetros para los cocientes de la subvariedad real analítica  $\mathcal{RI}\Omega^1(-s)$  bajo la acción de  $PSL(2, \mathbb{C})$  y  $\mathbb{Z}_2 \times PSL(2, \mathbb{C})$  respectivamente.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s)) & \longrightarrow & \frac{\mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s))}{\mathcal{S}(s)} & \longrightarrow & \frac{\mathfrak{Im}(\mathcal{M}(-s))}{\mathbb{Z}_2 \times \mathcal{S}(s)} \\
 \downarrow \mu_s & & \updownarrow \tilde{\mu}_s & & \updownarrow \\
 \mathcal{RI}\Omega^1(-s) & \xrightarrow{\pi_s} & \frac{\mathcal{RI}\Omega^1(-s)}{PSL(2, \mathbb{C})} & \longrightarrow & \frac{\mathcal{RI}\Omega^1(-s)}{\mathbb{Z}_2 \times PSL(2, \mathbb{C})} \\
 & & & & \updownarrow \\
 & & & & \mathcal{RI}\mathfrak{M}(-s).
 \end{array} \tag{4.4}$$

Toda flecha en ambos diagramas son aplicaciones continuas, sin embargo, si nos restringimos a los estratos, de la descomposición en tipos de órbitas, las flechas son aplicaciones holomorfas en (4.3) y real analíticas en (4.4), respectivamente.

## 4.3. Problemas futuros.

En esta sección mencionamos algunos problemas que nos parecieron interesantes para su estudio futuro.

Primero, para  $\omega, \eta \in \Omega^1(-s)$  decimos que  $\omega$  es *topológicamente equivalente* con  $\eta$  si los campos reales  $\Re(X_\omega)$  y  $\Re(X_\eta)$  lo son con la definición clásica de sistemas dinámicos, ver [34] Sección 3.1. Esta relación extiende de manera natural la de 1-formas biholorfamente equivalentes definida en este escrito.

*Un problema en esta dirección es la clasificación del espacio de clases de 1-formas racionales topológicamente equivalentes.*

Segundo, estudiar el cociente  $\Omega^1(-s)/PSL(2, \mathbb{C})$  usando GIT. Esto es, calcular los puntos estables y semiestables en  $\Omega^1(-s)$  bajo la  $PSL(2, \mathbb{C})$ -acción.

Por último, el estudio de 1-formas biholomorfamente equivalentes visto como problema moduli. La dificultad en este problema es la definición de familias de 1-formas racionales.



# Bibliografía

- [1] Alvaro Alvarez-Parrilla y Jesús Muciño-Raymundo, *Dynamics of singular complex analytic vector fields with essential singularities I*, Conform. Geom. Dyn. **21** (2017), 126–224.
- [2] Anders Björner y Francesco Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Springer, New York, 2005.
- [3] Corentin Boissy, *Connected components of the strata of the moduli space of meromorphic differentials.*, Comment. Math. Helv. **90** (2015), no. 2, 255–286.
- [4] Nicolas Bourbaki, *General Topology. Chaps. 1–4*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [5] Leticia Brambila-Paz y Jesús Muciño-Raymundo, *Geometría de superficies de Riemann y haces lineales holomorfos*, Aportaciones Mat. Comun. **22** (1998), 179–207.
- [6] Johannes J. Duistermaat y Johan A. Kolk, *Lie Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [7] Hershel M. Farkas e Irwin Kra, *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [8] Martín-Eduardo Frías-Armenta, Luis Hernández-Moguel y Jesús Muciño-Raymundo, *Spaces of singular flat metrics from meromorphic 1-forms on the Riemann sphere*, Pre-print, 1-37, 2014.
- [9] Martín-Eduardo Frías-Armenta y Jesús Muciño-Raymundo, *Topological and analytical classification of vector fields with only isochronous centres*, J. Difference Equ. Appl. **19** (2013), no. 10, 1694–1728.

- [10] Lubomir Gavrilov, *Isochronicity of plane polynomial Hamiltonian systems*, *Nonlinearity* **10** (1997), no. 2, 433–448.
- [11] Phillip Griffiths y Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [12] Victor Guillemin y Alan Pollack, *Differential Topology*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2010.
- [13] Joe Harris, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [14] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [15] Luis Hernández-Moguel, *El conjunto de 1-formas diferenciales meromorfas sobre la esfera de riemann*, Tesis de maestría, 2006.
- [16] Christiaan Huygens, *Horologium oscillatorium: sive, de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, F. Muguet, 1673.
- [17] James A. Jenkins, *On the existence of certain general extremal metrics*, *Ann. of Math.(2)* **66** (1957), 440–453.
- [18] Gareth A. Jones y David Singerman, *Complex Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [19] Gabriel Katz, *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties*, *Expo. Math.* **21** (2003), no. 3, 219–261.
- [20] Steven Kerckhoff, Howard Masur y John Smillie, *Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials*, *Ann. of Math.(2)* **124** (1986), no. 2, 293–311.
- [21] Felix Klein, *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals. A supplement to the usual treatises*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [22] Felix Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Birkhäuser Verlag, Basel; B. G. Teubner, Stuttgart, 1993.

- [23] Shoshichi Kobayashi y Kazumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry. Vol. I*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [24] Maxim Kontsevich y Anton Zorich, *Connected components of the moduli spaces of Abelian differentials with prescribed singularities.*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 631–678.
- [25] Joel C. Langer, *Plotting the polyhedral geometry of a quadratic differential*, Journal of Geometry (2017), 1–13.
- [26] Jorge L. López-López, *The area as a natural pseudo-Hermitian structure on the spaces of plane polygons and curves*, Differential Geom. Appl. **28** (2010), no. 5, 582–592.
- [27] Julio C. Magaña-Cáceres, *Families of rational 1-forms on Riemann sphere*, Submitted, 1-12, 2017.
- [28] Pavao Mardešić, Christiane Rousseau y Bourama Toni, *Linearization of isochronous centers*, J. Differential Equations **121** (1995), no. 1, 67–108.
- [29] Rick Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.
- [30] Jesús Muciño-Raymundo, *Integración, geometría Euclidea y campos vectoriales meromorfos*, **20** (1997), 135–156.
- [31] Jesús Muciño-Raymundo, *Complex structures adapted to smooth vector fields*, Math. Ann. **322** (2002), no. 2, 229–265.
- [32] Jesús Muciño-Raymundo y Carlos Valero-Valdés, *Bifurcations of meromorphic vector fields on the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynam. Systems **15** (1995), no. 6, 1211–1222.
- [33] David B. Patterson, *Some remarks on the moduli of punctured spheres.*, Am. J. Math. **95** (1973), 713–719.
- [34] Lawrence Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, third ed., Springer-Verlag, New York, 2001.
- [35] Alexander Yu. Solynin, *Quadratic differentials and weighted graphs on compact surfaces*, (2009), 473–505.

- [36] Kurt Strebel, *On quadratic differentials with closed trajectories and second order poles*, J. Analyse Math. **19** (1967), 373–382.
- [37] Kurt Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [38] Oswald Teichmüller, *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung.*, Deutsche Math. **3** (1938), 621–678.
- [39] Edmund T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.