



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
MECÁNICA – TERMOFLUIDOS

ESTUDIO ANALÍTICO DE ELECTROFORESIS DE UNA PARTÍCULA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
CÉSAR YEPEZ TERREROS

TUTOR
DR. JORGE LUIS NAUDE DE LA LLAVE..
FACULTAD DE INGENIERÍA

CIUDAD DE MÉXICO, SEPTIEMBRE 2017



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Méndez Lavielle Federico

Secretario: Dr. González Oropeza Rogelio

Vocal (1er. vocal): Dr. Naude De la Llave Jorge L.

1 er. Suplente (2do. vocal): Dra. Navarrete Montesinos Margarita

2 d o. Suplente (3er. vocal): Dra. Oropeza Ramos Laura A.

Lugar donde se realizó la tesis: Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jorge Luis Naude de la Llave.

FIRMA

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized initials and a surname, is written over a horizontal line. The signature is enclosed within a hand-drawn oval shape.

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por la beca otorgada para la realización de mis estudios de maestría y proyecto de tesis.

Resumen

El objetivo de esta tesis es analizar la velocidad y movilidad electroforética de una partícula simétrica no conductora en un medio infinito con altos potenciales zeta, tomando en cuenta el denominado efecto viscoeléctrico, y observar la contribución de los parámetros involucrados y el impacto de dicho efecto en el desarrollo del fenómeno. Para obtener la distribución de potencial, se obtuvo la solución de la ecuación de Poisson-Boltzmann (que describe el campo eléctrico) utilizando el método de expansión asintótica, para después, mediante la misma técnica, determinar los campos de velocidad y presión a partir de la ecuación de momentum y conservación de masa, considerando que la viscosidad del electrolito cambia de acuerdo a la expresión $\eta = \eta_0 [1 + fE^2]$, donde η_0 es la viscosidad en ausencia del campo eléctrico, f es la constante viscoeléctrica, y E el campo eléctrico intrínseco.

Para determinar la aproximación asintótica, las ecuaciones que describen el fenómeno se adimensionalizan, en las que se encuentran cuatro parámetros: el número de Reynolds, Re ; un parámetro electrocinético, κ^* relacionado con el espesor de la doble capa eléctrica (EDL por sus siglas en inglés), la constante viscoeléctrica \bar{f} , y el potencial en la pared o potencial zeta, ζ^* .

Como parte de la solución se determinan el potencial eléctrico, las componentes de la velocidad (v_r^* , v_θ^*), la distribución de la presión π^* , y la movilidad electroforética μ^* en forma adimensional, en términos de los parámetros involucrados en el análisis.

El efecto viscoeléctrico tiende a disminuir la velocidad alrededor de la partícula, en similitud a los resultados obtenidos para otros fenómenos del mismo tipo (electroosmosis), pero esto solo se nota cuando el valor del parámetro \bar{f} es alto en comparación a los valores comunmente encontrados en este tipo de fenómenos.

Objetivos

Objetivo general.

-Desarrollar un modelo matemático para emular el fenómeno de electroforesis de una partícula esférica, considerando el efecto viscoeléctrico (variación de la viscosidad debido al potencial eléctrico).

Objetivos particulares.

-Estudiar el impacto que tiene dicho efecto en la velocidad y movilidad electroforética considerando una partícula esférica rígida y no conductora.

Índice general

1. Introducción	1
Definiciones	1
Antecedentes	6
2. Desarrollo	9
Definición del problema	9
Potencial eléctrico	16
Campos de velocidad y presión	18
Movilidad electroforética	28
3. Resultados	33
Potencial eléctrico	33
Campos de velocidad y presión	36
Movilidad electroforética	40
4. Conclusiones	44
A. Relaciones matemáticas	46
Relaciones matemáticas	46

B. Solución de Henry	48
Solución de Henry	48
Evaluación del término $\bar{\xi}$	49
Bibliografía y referencias	50

Índice de figuras

1.1. Dispositivo microfluídico. Imagen modificada de [1].	2
1.2. Doble capa eléctrica EDL. Imagen tomada de www.depa.fquim.unam.mx . . .	3
1.3. Fenómenos electrocinéticos: a) Electroosmosis, b) Electroforesis. Imagen modificada de [2].	4
1.4. Electroforesis de una partícula esférica. Imagen tomada de www.ocw.mit.edu	5
2.1. Esquema del modelo físico del problema. Donde λ_D representa la longitud de la doble capa eléctrica. Modificado de [13].	10
2.2. Fuerzas superficiales eléctrica e hidrodinámica sobre la partícula. Tomado de [13].	28
3.1. Comparación entre el potencial eléctrico obtenido por Chew y Sen y el desarrollado en este trabajo para $\kappa^* = 1$ y $\zeta^* = 10$	34
3.2. Comparación entre la solución numérica, la obtenida por Henry y la desarrollada en este trabajo de tesis variando κ^* , con $\zeta^* = 1$	34
3.3. Comparación entre la solución numérica, la obtenida por Henry y la desarrollada en este trabajo de tesis variando ζ^* , con $\kappa^* = 10$	35
3.4. Variación de κ^* y ζ^* y su efecto sobre el potencial eléctrico.	35
3.5. Comparación entre la solución obtenida por Henry y la desarrollada en esta tesis para $\kappa^* = 1, 5, 10, 50$, con $\zeta^* = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$	36
3.6. Comparación entre la solución obtenida por Henry y la desarrollada en esta tesis para $\zeta^* = 1, 5, 10, 50$, con $\kappa^* = 5$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$	37

3.7. Variación de κ^* y ζ^* para $\theta = \frac{\pi}{2}$	38
3.8. Efecto de la constante viscoeléctrica \bar{f} sobre la magnitud de la velocidad, $\kappa^* = 5$, $\zeta^* = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$	38
3.9. Efecto de los parámetros κ^* , ζ^* y \bar{f} sobre la presión del sistema, con $\theta = \frac{\pi}{2}$	39
3.10. Comparación entre el perfil para la movilidad electroforética obtenido por Henry y el correspondiente a este trabajo para diferentes valores de κ^*	40
3.11. Variación de la movilidad electroforética en KCl con el potencial ζ^* , obtenido por O'Brien y White y el correspondiente a este trabajo para diferentes valores de κ^*	41
3.12. Comparación entre el perfil obtenido con el modelo de Henry para la movilidad electroforética con potencial eléctrico constante.	42
3.13. Efecto de la constante viscoeléctrica \bar{f} sobre la movilidad electroforética μ^* para $\kappa^* = 10$	43

Índice de tablas

1.1. Parámetros físicos en fenómenos electrocinéticos. Tomada de [6].	5
---	---

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se establecen los antecedentes de la electroforesis. Se introducen conceptos básicos relacionados con los fenómenos electrocinéticos y se presentan de manera general los tipos de fenómenos mediante los cuales se manipulan fluidos en dispositivos microfluídicos. De igual manera se dan algunas definiciones fundamentales asociadas a este tipo de fenómenos como son la longitud de Debye, potencial zeta (ζ), potencial eléctrico, etcétera. Adicionalmente, se presentan otras referencias bibliográficas relacionadas a los fenómenos electrocinéticos.

Definiciones

El estudio del movimiento mecánico impulsado eléctricamente de partículas o fluidos cargados, comúnmente en electrolitos o líquidos iónicos hace referencia a los denominados fenómenos electrocinéticos. Estos mecanismos son los siguientes:

1.- Electroforesis: movimiento de superficies cargadas y de macromoléculas relativo a un líquido ionizado en reposo mediante la aplicación de un campo eléctrico.

2.- Electroosmosis: movimiento de un líquido ionizado relativo a una superficie cargada e inmóvil, mediante la aplicación de un campo eléctrico.

3.- Potencial de sedimentación: potencial eléctrico que se genera por el movimiento de partículas cargadas relativo a un líquido ionizado en reposo.

4.- Potencial de flujo o de corriente: potencial eléctrico generado por el movimiento de un fluido ionizado a lo largo de una superficie cargada e inmóvil.

El reciente interés en los fenómenos electrocinéticos ha sido impulsado por sus aplicaciones en dispositivos microfluídicos (ver Fig. 1.1), los cuales tienen el potencial para revolucionar los métodos comunes de análisis químico, diagnóstico médico, síntesis de materiales, detección de drogas, etc. El uso actual de técnicas electrocinéticas en dispositivos microfluídicos se debe a las múltiples ventajas que presentan, entre ellas: i) los dispositivos son impulsados por electricidad, la cual es fácil de manipular; ii) no se involucran partes móviles por lo que se presentan menos fallas; iii) la velocidad inducida en el líquido o partícula es independiente de la geometría de los dispositivos; iv) los dispositivos se integran rápidamente con otras unidades de control para lograr una operación automatizada total.

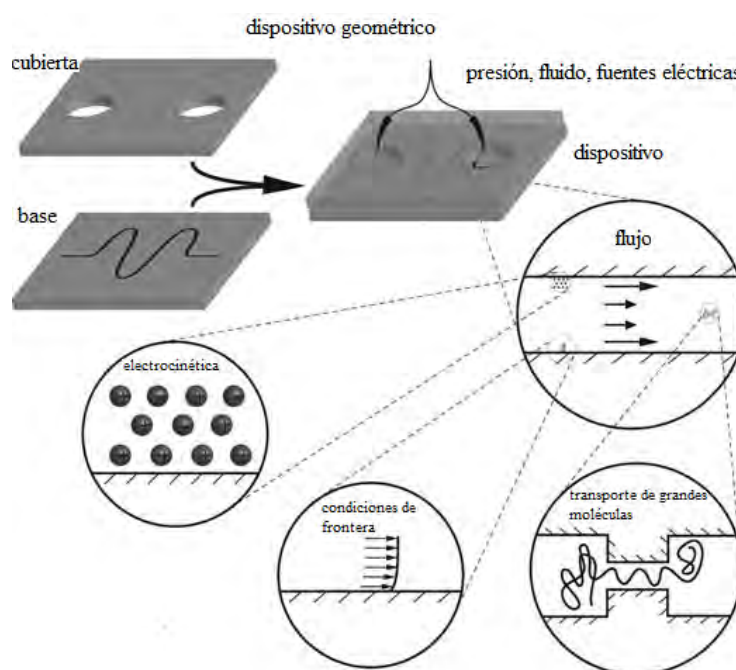


Figura 1.1: Dispositivo microfluídico. Imagen modificada de [1].

La principal aplicación de la electroforesis radica en ser una manera sencilla de manipular partículas en dispositivos microfluídicos, tanto para posicionar como para separar, útil como método de laboratorio en el que se utiliza una corriente eléctrica controlada con la finalidad de separar biomoléculas según su tamaño y carga eléctrica a través de una matriz gelatinosa; así como método para mover partículas en dispositivos MEMS y microlaboratorios (lab-on-a-chip) [1].

El principio de funcionamiento de este tipo de fenómenos es el siguiente: cuando una superficie sólida es puesta en contacto con una solución electrolítica, la superficie obtiene cargas electrostáticas. La presencia de dichas cargas causa la redistribución de iones y forma entonces una capa difusa cargada en la solución electrolítica cerca de la superficie sólida

para neutralizar su propia carga eléctrica como se muestra en la Fig. 1.2. Tal capa difusa eléctricamente no neutra es generalmente conocida como doble capa eléctrica (EDL por sus siglas en inglés), y es responsable de dos tipos de fenómenos electrocinéticos: i) fenómenos electrocinéticos impulsados eléctricamente, y ii) no impulsados eléctricamente. La física básica detrás del primer tipo es la siguiente: cuando un campo eléctrico externo es aplicado tangencialmente a la superficie cargada, la capa difusa cargada experimenta una fuerza de cuerpo electrostática que produce movimiento relativo entre la superficie cargada y la solución electrolítica. El movimiento relativo del líquido con respecto a la superficie cargada inmóvil es conocido como electroosmosis, y el movimiento de las partículas cargadas relativo al líquido en reposo es conocido como electroforesis.

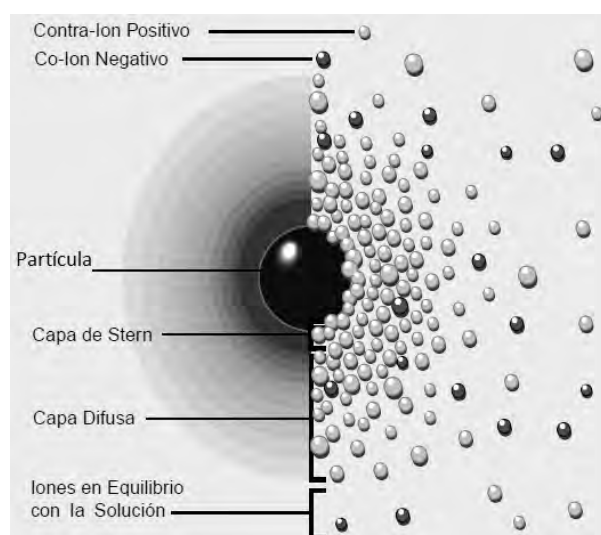


Figura 1.2: Doble capa eléctrica EDL. Imagen tomada de www.depa.fquim.unam.mx.

Tanto la electroforesis como la electroosmosis son causadas por el mismo fenómeno físico: fuerzas electroestáticas en la pared y una doble capa eléctrica contraatacada en estado estacionario por fuerzas viscosas en el fluido o fuerzas elásticas en el sólido. La principal diferencia entre ambas es tan solo la consideración de las condiciones de frontera. En electroosmosis se describe el movimiento de un fluido en un marco de referencia en el cual se mantiene a la pared sin movimiento, mientras que en electroforesis, se describe el movimiento de la partícula en un marco de referencia en el cual las fuerzas viscosas en el líquido mantienen el fluido sin movimiento lejos de la partícula (ver Fig. 1.3).

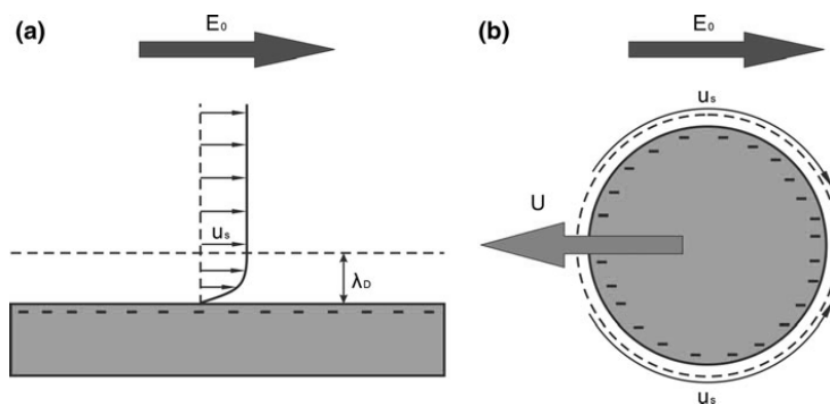


Figura 1.3: Fenómenos electrocinéticos: a) Electroosmosis, b) Electroforesis. Imagen modificada de [2].

Si consideramos al fenómeno de electroosmosis modificando el sistema de referencia imaginando que el fluido alrededor de la superficie cargada es estacionario, y que la superficie cargada se mueve con una velocidad igual pero en sentido opuesto a la velocidad característica del fenómeno, entonces el desarrollo para obtener la velocidad para flujo electroosmotico puede ser naturalmente aplicado en el análisis de la velocidad electroforética de una partícula con una EDL delgada en un dominio fluido sin restricciones, tan solo con el cambio de signo y el cambio del potencial zeta de la pared del canal por el de la partícula cargada [2].

La velocidad que caracteriza al movimiento de una partícula en un fluido newtoniano, es la llamada velocidad de deslizamiento de Helmholtz-Smoluchowski, la cual es determinada por el balance entre las fuerzas eléctrica y viscosa que actúan sobre la partícula, un balance fuertemente afectado por la concentración de los iones en el solvente. Para entender la manera en que los iones afectan las fuerzas que actúan en la partícula, se debe considerar su movimiento alrededor de una partícula esférica moviéndose bajo la acción de un campo eléctrico estacionario [3]. Cuando se ha alcanzado el estado estacionario esta velocidad se representa como:

$$U = \frac{\epsilon \zeta}{\eta} E ,$$

donde ϵ y η son la permitividad eléctrica y viscosidad del fluido respectivamente, y ζ es el potencial eléctrico en la superficie (potencial zeta). Dicha velocidad esta linealmente relacionada a $|E|$, la magnitud del campo eléctrico aplicado. Para una partícula esférica esta relación es de la forma:

$$U = \mu E ,$$

siendo μ la denominada movilidad electroforética de la partícula.

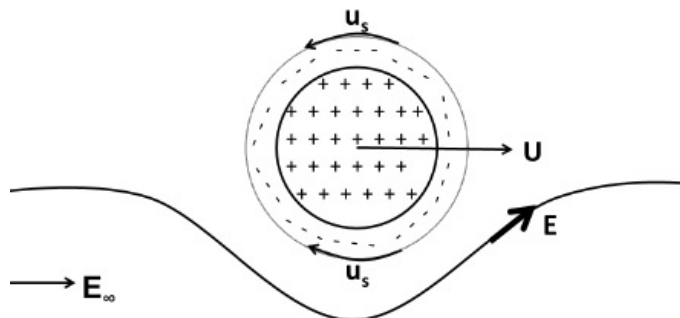


Figura 1.4: Electroforesis de una partícula esférica. Imagen tomada de www.ocw.mit.edu.

Para el caso particular, en el cual el potencial zeta en la pared es del orden de $100\text{--}200\text{mV}$, como ocurre frecuentemente en aplicaciones típicas de flujos electroosmóticos, la viscosidad en la EDL es una función del campo eléctrico, fenómeno conocido como el efecto viscoeléctrico, reportado experimentalmente por primera vez por Andrade y Dodd [4]. Ellos sugieren que la viscosidad local cerca de superficies sólidas altamente cargadas se incrementa a causa de campos eléctricos fuertes normales a la superficie dentro de la EDL [5].

Algunos valores característicos para los parámetros que intervienen en el fenómeno son [6]:

Parámetros	Orden
Radio de la partícula, a (m)	$10^{-9} \sim 10^{-6}$
Potencial zeta, ζ (V)	$10^{-3} \sim 10^{-1}$
Potencial característico, ψ_c (V)	$10^{-3} \sim 10^{-2}$
Campo eléctrico, E (V/m)	$10^3 \sim 10^5$
Longitud de EDL, λ_D (m)	$10^{-9} \sim 10^{-7}$
Coefficiente viscoeléctrico, f ($V^{-2}m^2$)	$\sim 10^{-15}$
Velocidad electroforética, U_{HS} (m/s)	$\sim 10^{-3}$
Número de Reynolds, Re	$\sim 10^{-4}$

Tabla 1.1: Parámetros físicos en fenómenos electrocinéticos. Tomada de [6].

En este trabajo se utiliza un electrolito simétrico como fluido de trabajo. El término de soluciones electrolíticas se refiere a soluciones en las cuales algunos o todos los solutos están ionizados, y usamos el término electrolito para los solutos ionizados. Un electrolito simétrico

es un sistema de electrolitos en el que las magnitudes de las cargas del anión y catión son las mismas [1].

Antecedentes

La electroforesis, o en algunas referencias antiguas, cataforesis, es el movimiento estacionario de una partícula bajo la influencia de un campo eléctrico externo. Existe vasta literatura al respecto dado que la medición de la movilidad electroforética es usada ampliamente para cuantificar la carga de partículas pequeñas. Según Abramson, Moyer y Gorin (1942) y Dukhin y Derjaguin (1974) la electroforesis fue descrita inicialmente por F. Reuss en un artículo publicado en 1809, quien observó el movimiento de partículas de arcilla, así como la electroosmosis de agua a través de un lecho de arena de cuarzo, descubriendo que las partículas coloidales se cargan de manera natural.

El trabajo de Schultz (1882) y Hardy (1900) proveyó evidencia acerca de la estabilidad generada por repulsión electrostática en dispersiones acuosas. Sin embargo, no existía una teoría para describir la repulsión filtrada o para relacionar la carga de la partícula con su movilidad en un campo eléctrico, aún cuando Helmholtz había formulado su modelo del condensador molecular. Su análisis sobre el movimiento de un líquido a través de un capilar bajo la acción de un campo eléctrico introdujo la noción del potencial ζ para describir el estado electrostático de una superficie. Smoluchowski derivó su celebrada fórmula para relacionar el potencial ζ con la movilidad electroforética (1903) reconociendo la similaridad entre el movimiento producido por un campo externo aplicado actuando sobre una pequeña partícula (electroforesis) y sobre un líquido en un capilar (electroosmosis). Como resultado el potencial ζ se cuantifica midiendo la velocidad de la partícula. La carga eléctrica podía ser estimada, pero el efecto del electrolito sobre el espesor de la doble capa eléctrica aun no se entendía [7].

La teoría original acerca de los fenómenos referentes a la doble capa eléctrica provienen de los trabajos de Quincke y Helmholtz, donde se consideraba a la EDL como un condensador de placas paralelas hecho de dos distribuciones laminares eléctricas, la llamada capa interna, se encuentra firmemente sujeta a la fase rígida, mientras que la otra, la capa externa, reside en la fase móvil; la separación entre ambas fue considerada del orden molecular. El punto de vista aceptado actualmente, iniciado por Gouy, difiere del anterior principalmente en que la capa externa de la doble capa es considerada una distribución eléctrica difusa, una atmósfera iónica del tipo investigado por Debye y sus colaboradores en conexión con la teoría de fuertes electrolitos.

En una deducción consistente con este punto de vista acerca de la doble capa, Smoluchowski dedujo la expresión para la velocidad electroforética ($a \gg \lambda_D$, donde λ_D es la longitud de la doble capa eléctrica y κ su inverso):

$$U = \frac{\epsilon\zeta}{\eta} E .$$

La ecuación es idéntica a la desarrollada por Helmholtz excepto por la inclusión de la permitividad eléctrica (ϵ), pero fue deducida sobre una base más general, y válida para partículas rígidas eléctricamente aisladas de cualquier forma. La expresión anterior es algo restrictiva y en el caso de una partícula esférica, es válida solo cuando $\kappa a \gg 1$, donde a es el radio de la partícula y κ es el recíproco del espesor de la capa iónica que la rodea (EDL). Debye y Hückel criticaron algunas de las condiciones establecidas en el trabajo de Smoluchowski, desarrollando su propio modelo ($\lambda_D > a$):

$$U = \frac{2}{3} \frac{\epsilon\zeta}{\eta} E .$$

En 1931 Henry desarrolló un modelo general que tiene como casos extremos los modelos de Smoluchowski y Hückel, válido para cualquier relación entre a y λ_D [8], [9]:

$$U = f_0 \frac{\epsilon\zeta}{\eta} E ,$$

donde f_0 representa una serie asintótica función de κa .

Efecto viscoeléctrico

Como ya se mencionó, cuando el potencial ζ en la pared es del orden $\zeta > 25$ mV, la viscosidad en la EDL es proporcional al campo eléctrico, fenómeno conocido como efecto viscoeléctrico [10]. En este contexto, Andrade y Dodd [4] propusieron que la viscosidad de un líquido varía con la magnitud del campo eléctrico externo según:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = f E^2 ,$$

donde $\Delta\eta$ es el incremento en la viscosidad debido al campo eléctrico aplicado E y f es el coeficiente viscoeléctrico, con valores del $O(10^{-16})$ hasta $O(10^{-15})$ m^2/V^2 [11].

Los trabajos pioneros en este tema se deben a Lyklema y Overbeek [11] quienes determinaron experimentalmente el valor de la constante viscoeléctrica f para el agua, $1,02 *$

$10^{-15} \text{ m}^2\text{V}^{-2}$ y probaron que el efecto viscoeléctrico modifica la velocidad convencional de Helmholtz-Smoluchowski. Bajo la consideración de EDL muy delgadas, del orden de $O(10^{-9})$, Lyklema y Overbeek [11] modificaron la ecuación de Helmholtz-Smoluchowski para la variación de la viscosidad de acuerdo a $\eta = \eta_0 [1 + fE^2]$, donde η_0 es la viscosidad del fluido en ausencia de un campo eléctrico y $E = \frac{d\psi}{dy}$ es el campo eléctrico intrínseco en la doble capa, con y representando la coordenada normal a la superficie. A partir de sus resultados, probaron que cuando el efecto viscoeléctrico es lo suficientemente grande la ecuación de Helmholtz-Smoluchowski es afectada considerablemente.

El efecto viscoeléctrico ha sido revisitado por Hunter [10], y recientemente por Zhao y Yang [2], quienes presentaron una revisión sobre los fenómenos electrocinéticos donde el efecto viscoeléctrico es discutido a detalle. Mientras tanto, Bazant et al. [12] realizaron una revisión crítica concerniente a fenómenos electrocinéticos no lineales en cargas inducidas con grandes voltajes aplicados en soluciones concentradas, donde el efecto viscoeléctrico y otros fenómenos relacionados están presentes.

Aun cuando existe una gran cantidad de investigación sobre los fenómenos electrocinéticos con altos potenciales zeta, las investigaciones sobre la influencia directa del efecto viscoeléctrico en especial en electroforesis de partículas son pocas. El trabajo realizado por Marroquín Desentis et al [5], es una referencia acerca del fenómeno para flujo electroosmótico en un microcapilar cilíndrico, y sirve como partida para el desarrollo de este trabajo de tesis.

Capítulo 2

Desarrollo

En este capítulo se presentan las ecuaciones fundamentales que describen el movimiento electroforético de una partícula. De igual manera se presentan las condiciones de frontera asociadas al problema en cuestión. Las ecuaciones gobernantes se adimensionalizan con el fin de simplificar el modelo matemático y otorgarle generalidad, al mismo tiempo se determinan los parámetros adimensionales relevantes del fenómeno. Se describe brevemente la teoría general del método de expansión asintótica, mediante el cual se resuelven de manera analítica las ecuaciones diferenciales que describen el campo eléctrico (ecuación de Poisson-Boltzmann) y el campo de flujo (ecuación de Navier-Stokes).

Definición del problema

En esta sección se hace un desarrollo de las ecuaciones gobernantes aplicadas al problema de la electroforesis de una partícula esférica rígida y no conductora bajo las siguientes consideraciones:

- i) Estado estacionario y flujo completamente desarrollado.
- ii) La viscosidad en la EDL depende del campo eléctrico, y las otras propiedades físicas son constantes.
- iii) El electrolito es simétrico 1 : 1.
- iv) Partícula esférica rígida no conductora en un medio infinito.
- v) Se asume que no existe deformación de la doble capa eléctrica.

La condición de la viscosidad como función del campo eléctrico es representada mediante la formulación presentada por Lyklema y Overbeek [11]:

$$\eta = \eta_0 \left[1 + f \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right].$$

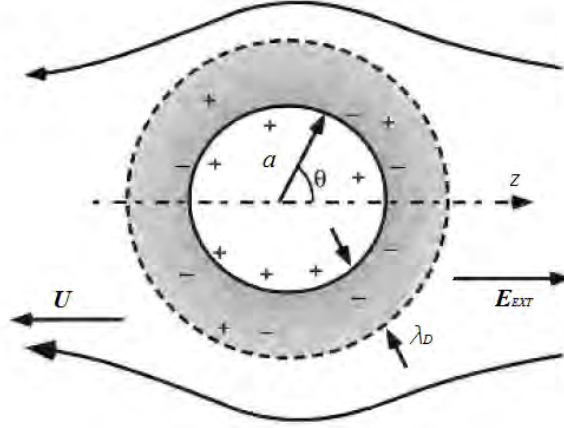


Figura 2.1: Esquema del modelo físico del problema. Donde λ_D representa la longitud de la doble capa eléctrica. Modificado de [13].

Considerando una esfera no conductora, y coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera, y eje polar ($\theta = 0$) en el eje z , campo eléctrico externo E_{Ext} aplicado al sistema en dirección paralela al eje z de coordenadas (la partícula asumirá la velocidad electroforética U en la misma dirección) e imponiendo una velocidad $-U$ al sistema (la partícula no tiene movimiento, mientras el fluido lejos de la superficie se mueve a una velocidad $-U$ en la dirección del eje z) como se muestra en la Fig. 2.1 [13], se tienen las siguientes ecuaciones gobernantes:

-Ecuación de conservación de momentum en coordenadas esféricas, expresada para las componentes r y θ . Se ha omitido la componente ϕ , así como se ha supuesto que $v_r = v_r(r, \theta)$, $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$, $v_\phi = 0$ dada la simetría esférica y la naturaleza de la solución esperada [8], [14]:

Componente r :

$$\begin{aligned} \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] = & -\frac{\partial p}{\partial r} - \epsilon \nabla^2 \psi(r) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \\ & + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \frac{\eta}{r} \left[4 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 4 \frac{v_r}{r} - 2 \frac{v_\theta \cot \theta}{r} + r \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Componente θ :

$$\rho \left[v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \epsilon \nabla^2 \psi(r) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{2\eta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \right] \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{v_\theta}{r} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\eta}{r} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \cot \theta + 3 \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \right]. \quad (2.2)$$

-Ecuación de continuidad en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0. \quad (2.3)$$

-Ecuación de Poisson-Boltzmann para electrólito simétrico 1 : 1:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_e}{\epsilon} = 2 \frac{ze n_\infty}{\epsilon} \sinh \left(\frac{ze\psi}{k_B T} \right) = \frac{k_B T}{ze} \kappa^2 \sinh \left(\frac{ze\psi}{k_B T} \right). \quad (2.4)$$

Asumiendo:

$$v_r = v_r(r, \theta), v_\theta = v_\theta(r, \theta), v_\phi = 0, \\ p = p(r, \theta), \eta = \eta_0 [1 + f E_{DL}^2], \eta = \eta(r), \\ \psi = \psi(r), \phi = \phi(r, \theta). \quad (2.5)$$

Para simplificar la ecuación de conservación de momentum se realiza un cambio de variable sobre la presión:

$$p_1 = p - \int_\infty^r \rho_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr. \quad (2.6)$$

Con lo que:

$$\nabla p_1 = \nabla p - \nabla \left(\int_\infty^r \rho_e \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr \right), \quad (2.7)$$

$$\nabla p_1 = \nabla p - \rho_e \nabla \psi = \nabla p + \epsilon \nabla^2 \psi \nabla \psi . \quad (2.8)$$

Dicho cambio de variable se realiza para pasar de considerar a la componente de fuerza eléctrica como la suma de los potenciales ϕ (potencial aplicado) y ψ (potencial inducido en la EDL), a solo un término debido al campo aplicado. Para este caso, solo la ecuación de la componente r se ve afectada, dado que $\psi = \psi(r)$:

$$\begin{aligned} \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right] &= -\frac{\partial p_1}{\partial r} - \epsilon \nabla^2 \psi(r) \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \\ &+ \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \frac{\eta}{r} \left[4 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 4 \frac{v_r}{r} - 2 \frac{v_\theta \cot \theta}{r} + r \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$\begin{aligned} \psi &= \zeta, \quad v_r = 0, \quad v_\theta = 0 \quad \text{cuando } r = a, \\ \psi &= 0, \quad v_r = -U \cos(\theta), \quad v_\theta = U \sin(\theta) \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2.10)$$

las cuales refieren a la condición de no deslizamiento en la superficie de la partícula ($r = a$), y las condiciones lejos de la partícula, consideradas cuando $r \rightarrow \infty$, y que tratan acerca de la caída de potencial eléctrico y la existencia de una velocidad constante U en dirección del eje z , paralela al campo aplicado.

Adimensionalización

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r}{a}, \quad v_r^* = \frac{v_r}{U_{HS}}, \quad v_\theta^* = \frac{v_\theta}{U_{HS}}, \quad \pi^* = \frac{a(p_1 - p_0)}{\eta_0 U_{HS}}, \quad U^* = \frac{U}{U_{HS}}, \\ \kappa^* &= \kappa a, \quad \psi^* = \frac{\psi}{\psi_c}, \quad \phi^* = \frac{\phi}{\psi_c}, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{\psi_c}, \quad f^* = f \left(\frac{\psi_c}{a} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$Re = \frac{\rho U_{HS} a}{\eta_0}, \quad \beta = \frac{\epsilon \psi_c^2}{a U_{HS} \eta_0}, \quad (2.12)$$

donde:

$$U_{HS} = \frac{\epsilon \zeta}{\eta_0} E_{ext}, \quad \psi_c = \frac{k_B T}{ze}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2e^2 z^2 n_\infty}{\epsilon k_B T}}. \quad (2.13)$$

U_{HS} es la velocidad electroforética o de Helmholtz-Smoluchowsky, ψ_c es el potencial característico, y κ representa el inverso de la longitud de Debye o doble capa eléctrica. k_B y T representan la constante de Boltzmann y la temperatura absoluta del sistema, mientras que ϵ , e , z y n_∞ son la permitividad eléctrica del medio (solución electrolítica), la carga elemental, el número de valencia de la solución electrolítica y la concentración iónica en la solución respectivamente.

A continuación se presentan las ecuaciones en su forma adimensional:

-Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas esféricas adimensionalizada y expresada para cada componente: -Componente r:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_{HS}^2}{a} \left[v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^{*2}}{r^*} \right] &= -\frac{1}{a} \frac{\partial p_1}{\partial r^*} - \frac{\epsilon \psi_c}{a^2} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) \left(-\frac{\psi_c}{a} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \right) \\
+ 2 \frac{U_{HS} \eta_0}{a^2} \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \left(f^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right\} \right) \right] \\
+ \frac{U_{HS} \eta_0}{a^2} \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \right. \\
\left. + \left[4 \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} - \frac{2}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - 4 \frac{v_r^*}{r^*} - 2 \frac{v_\theta^* \cot \theta}{r^*} + r^* \cot \theta \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{\cot \theta}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \right), \tag{2.14}
\end{aligned}$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_{HS} a}{\eta_0} \left[v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^{*2}}{r^*} \right] &= -\frac{a}{U_{HS} \eta_0} \frac{\partial p_1}{\partial r^*} - \frac{\epsilon \psi_c}{U_{HS} \eta_0} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) \left(-\frac{\psi_c}{a} \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \right) \\
+ 2 \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \left(f^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right\} \right) \right] \\
+ \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \right. \\
\left. + \left[4 \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} - \frac{2}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - 4 \frac{v_r^*}{r^*} - 2 \frac{v_\theta^* \cot \theta}{r^*} + r^* \cot \theta \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{\cot \theta}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \right). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

-Componente θ :

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_{HS}^2}{a} \left[v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{v_r^* v_\theta^*}{r^*} \right] &= -\frac{1}{r^* a} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} - \frac{\epsilon \psi_c}{a^2} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) \left(-\frac{\psi_c}{ar^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} \right) \\
+ \frac{2}{r^{*2}} \frac{U_{HS} \eta_0}{a^2} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + v_r^* \right) \\
+ \frac{U_{HS} \eta_0}{a^2} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right) \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \right] \\
+ \frac{U_{HS} \eta_0}{a^2} \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left[2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^* \cot \theta}{r^*} \right) \cot \theta + 3 \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \right], \tag{2.16}
\end{aligned}$$

equivalentemente:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{U_{HS} a}{\eta_0} \left[v_r^* \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} + \frac{v_\theta^*}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{v_r^* v_\theta^*}{r^*} \right] &= -\frac{a}{U_{HS} \eta_0} \frac{1}{r^*} \frac{\partial p_1}{\partial \theta} - \frac{\epsilon \psi_c}{U_{HS} \eta_0} \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) \left(-\frac{\psi_c}{ar^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} \right) \\
+ \frac{2}{r^{*2}} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + v_r^* \right) \\
+ \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right) \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \right] \\
+ \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left[2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^* \cot \theta}{r^*} \right) \cot \theta + 3 \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \right]. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Se desprecian los términos inerciales en la ecuación de conservación de momentum (Ecs. 2.15 y 2.17) dado el orden de magnitud del número $Re = \frac{\rho U_{HS} a}{\eta_0}$ ($Re \ll 1$) que se reporta en este tipo de fenómenos [3] (tabla 1.1):

-Componente r:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial \pi^*}{\partial r^*} + \beta \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right) \\
&+ 2 \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} \left(f^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \left(-\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right\} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right] \\
&+ \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left[4 \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} - \frac{2}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - 4 \frac{v_r^*}{r^*} - 2 \frac{v_\theta^* \cot \theta}{r^*} + r^* \cot \theta \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{\cot \theta}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right].
\end{aligned} \tag{2.18}$$

-Componente θ :

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \pi^*}{\partial \theta} + \beta \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} \right) \\
&+ \frac{2}{r^{*2}} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} + v_r^* \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right) \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \right] \\
&+ \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left[2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_\theta^*}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^* \cot \theta}{r^*} \right) \cot \theta + 3 \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Y para la ecuación de continuidad:

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^{*2} v_r^*) + \frac{1}{r^* \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta^*) = 0. \tag{2.20}$$

Para la ecuación de Poisson-Boltzmann se considera un electrolito simétrico 1:1, lo que nos lleva a la forma adimensional siguiente:

$$\nabla^{*2} \psi^* = \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} \right) = \kappa^{*2} \sinh(\psi^*) . \tag{2.21}$$

Las condiciones de frontera en forma adimensional son:

$$\begin{aligned} \psi^* &= \zeta^*, v_r^* = 0, v_\theta^* = 0 \text{ en } r^* = 1, \\ \psi^* &= 0, v_r^* = -U^* \cos(\theta), v_\theta^* = U^* \sin(\theta) \text{ cuando } r^* \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Análisis asintótico para el potencial eléctrico

Considerando un análisis de capa límite en el límite $\kappa^* \gg 1$ e introduciendo el siguiente reescalamiento para la variable r^* : $x = \kappa^*(r^* - 1)$, se tiene para la ecuación de Poisson-Boltzmann:

$$\frac{d^2\psi^*}{dx^2} + \frac{2}{\kappa^*} \frac{d\psi^*}{dx} = \sinh(\psi^*) . \quad (2.23)$$

Zona interna.

Suponiendo una aproximación asintótica como solución de la ecuación (2.23) del tipo $\psi_i^* = \psi_i^{*(0)} + \frac{1}{\kappa^*} \psi_i^{*(1)} + \dots$, se tiene:

$$\frac{d^2\psi_i^{*(0)}}{dx^2} + \frac{2}{\kappa^*} \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} + \frac{1}{\kappa^*} \frac{d^2\psi_i^{*(1)}}{dx^2} + \frac{2}{\kappa^{*2}} \frac{d\psi_i^{*(1)}}{dx} + \dots = \sinh\left(\psi_i^{*(0)} + \frac{1}{\kappa^*} \psi_i^{*(1)} + \dots\right) , \quad (2.24)$$

y para el orden cero (0):

$$\frac{d^2\psi_i^{*(0)}}{dx^2} = \sinh\left(\psi_i^{*(0)}\right) . \quad (2.25)$$

Sujeta a las condiciones de frontera:

$$\psi_i^{*(0)} = \zeta^* \text{ en } x = 0, \text{ y } \psi_i^{*(0)} = 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty . \quad (2.26)$$

La solución en la región interior es:

$$\psi_i^{*(0)} = 2 \ln \left[\frac{1 + te^{-x}}{1 - te^{-x}} \right] , \quad (2.27)$$

con:

$$t = \tanh\left(\frac{\zeta^*}{4}\right) . \quad (2.28)$$

Solución muy conocida dada su presencia en otro tipo de problemas [5].

Zona externa.

Para la solución de orden cero en la región exterior, el término derecho de la ecuación de Poisson-Boltzmann (2.4) se linealiza ($\sinh \psi_o^{*(0)} \rightarrow \psi_o^{*(0)}$) debido a que $\psi_o^{*(0)} \rightarrow 0$ cuando $r^* \rightarrow \infty$, teniéndose:

$$\frac{1}{r^{*2}} \frac{d}{dr^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) = \kappa^{*2} \psi_o^{*(0)} . \quad (2.29)$$

Sujeta a la condición de frontera:

$$\psi_o^{*(0)} = 0 \text{ para } r^* \gg 1 . \quad (2.30)$$

Cuya solución resulta:

$$\psi_o^{*(0)} = \frac{Ae^{-\kappa^*(r^*-1)}}{r^*} . \quad (2.31)$$

Igualando la expansión de la solución de orden cero interior cuando $x \gg 1$ con la solución exterior en términos de la variable x (proceso conocido como matching) se obtiene el valor de la constante A :

$$\psi_i^{*(0)} = 2 \ln \left[\frac{1 + te^{-x}}{1 - te^{-x}} \right] \approx 4te^{-x} , \quad (2.32)$$

$$A = 4t . \quad (2.33)$$

Con lo que:

$$\psi_o^{*(0)} = \frac{4te^{-\kappa^*(r^*-1)}}{r^*} . \quad (2.34)$$

Y entonces la solución total de orden cero resulta, de unir la solución interior mas la exterior menos la parte en común [16]:

$$\psi^{*(0)} = 2 \ln \left[\frac{1 + te^{-\kappa^*(r^*-1)}}{1 - te^{-\kappa^*(r^*-1)}} \right] + \frac{4te^{-\kappa^*(r^*-1)}}{r^*} - 4te^{-\kappa^*(r^*-1)} . \quad (2.35)$$

Debe notarse que solo se toma en cuenta la solución de orden cero, dado que es suficiente para entender la física del problema [15].

Análisis asintótico para el campo de velocidades

Potencial eléctrico aplicado

El potencial aplicado adimensional (ϕ^*) es un término que aparece en las ecuaciones de momentum y sigue la siguiente ecuación:

$$\nabla^{*2}\phi^* = 0 . \quad (2.36)$$

Con condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} &= 0 \text{ en } r^* = 1, \\ \phi^* &= -E_\infty^* r^* \cos \theta \text{ cuando } r^* \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (2.37)$$

La solución a la ecuación 2.36 es [14]:

$$\phi^* = -E_\infty^* \left[r^* + \frac{1}{2r^{*2}} \right] \cos \theta . \quad (2.38)$$

A partir de lo cual:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} = -E_\infty^* \left[1 - \frac{1}{r^{*3}} \right] \cos \theta , \quad (2.39)$$

y

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} = E_\infty^* \left[1 + \frac{1}{2r^{*3}} \right] \sin \theta . \quad (2.40)$$

Estas expresiones se utilizan en el desarrollo de las ecuaciones de momentum para las componentes r^* y θ^* en la sección siguiente.

Solución para la zona interna

Utilizando la variable interna x , definida para el cálculo del potencial eléctrico ψ^* y tomando en cuenta la solución para el potencial aplicado ϕ^* (Ec. 2.38), se tienen las siguientes ecuaciones de conservación de momentum para la zona interna:

-En r^* :

$$\begin{aligned} 0 = & -\kappa^* \frac{\partial \pi}{\partial x} + \beta \frac{\kappa^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)^2 \kappa^* \frac{d\psi_i^*}{dx} \right) \left(-\frac{3x}{\kappa^*} E_\infty^* \cos \theta \right) \\ & + 2 \left[\left\{ 1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^*}{dx} \right)^2 \right\} \kappa^{*2} \frac{\partial^2 v_{ri}^*}{\partial x^2} + \kappa^* \frac{\partial v_{ri}^*}{\partial x} \left(\bar{f} \kappa^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi_i^*}{dx} \right)^2 \right) \right] \\ & + \frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \left\{ 1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^*}{dx} \right)^2 \right\} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right) \kappa^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{\theta i}^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial v_{ri}^*}{\partial \theta} \right] + 4\kappa^* \frac{\partial v_{ri}^*}{\partial x} - \frac{2}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial v_{\theta i}^*}{\partial \theta} - \frac{4}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} v_{ri}^* - \frac{2v_{\theta i}^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \cot \theta \\ & + \left(\frac{x}{\kappa^*} + 1 \right) \cot \theta \kappa^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{\theta i}^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \right) + \frac{\cot \theta}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial v_{ri}^*}{\partial \theta} \left. \right] . \quad (2.41) \end{aligned}$$

-En θ :

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial \pi}{\partial \theta} + \beta \frac{\kappa^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)^2 \kappa^* \frac{d\psi_i^*}{dx} \right) \left(\left(\frac{3}{2} - \frac{3x}{2\kappa^*}\right) E_\infty^* \sin \theta \right) \\
& + \frac{2}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)^2} \left[1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^*}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_{\theta i}^*}{\partial \theta} + v_{ri}^* \right) \\
& + \kappa^* \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^*}{dx} \right)^2 \right) \left\{ \left(\frac{x}{\kappa^*} + 1 \right) \kappa^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{\theta i}^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \right) + \frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial v_{ri}^*}{\partial \theta} \right\} \right] \\
& + \frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \left[1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^*}{dx} \right)^2 \right] \left[2 \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial v_{\theta i}^*}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta i}^* \cot \theta}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \right) \cot \theta \right. \\
& \left. + 3 \left\{ \left(\frac{x}{\kappa^*} + 1 \right) \kappa^* \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_{\theta i}^*}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \right) + \frac{1}{\left(\frac{x}{\kappa^*} + 1\right)} \frac{\partial v_{ri}^*}{\partial \theta} \right\} \right]. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Donde $\bar{f} = f^* \kappa^{*2}$.

Utilizando la siguiente expansión en $\frac{1}{\kappa^*}$ como solución en la capa límite para las componentes de velocidad, dado que este parámetro resulta ser característico del problema y pequeño en comparación al resto, se tiene:

$$v_{ri}^* = v_{ri}^{*(0)} + \frac{1}{\kappa} v_{ri}^{*(1)} + \dots, \tag{2.43}$$

$$v_{\theta i}^* = v_{\theta i}^{*(0)} + \frac{1}{\kappa} v_{\theta i}^{*(1)} + \dots. \tag{2.44}$$

Y al considerar solo los términos de orden principal en ambas ecuaciones resulta:

$$0 = \left\{ 1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 v_{ri}^{*(0)}}{\partial x^2} + \frac{\partial v_{ri}^{*(0)}}{\partial x} \left(\bar{f} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right), \tag{2.45}$$

$$0 = \frac{3}{2} \beta E_\infty^* \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{\partial v_{\theta i}^{*(0)}}{\partial x} \right]. \tag{2.46}$$

Tomando en cuenta que:

$$\beta E_{\infty}^* = \frac{\psi_c}{\zeta} = \frac{1}{\zeta^*}. \quad (2.47)$$

La ecuación (2.46) queda como:

$$0 = \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{\partial v_{\theta i}^{*(0)}}{\partial x} \right]. \quad (2.48)$$

Con condiciones de frontera:

$$v_{ri}^{*(0)} = 0, \quad v_{\theta i}^{*(0)} = 0, \quad \psi_i^{*(0)} = \zeta^* \text{ en } x = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v_{ri}^{*(0)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_{\theta i}^{*(0)}}{\partial x} = 0, \quad \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} = 0 \text{ cuando } x \rightarrow \infty. \quad (2.50)$$

Solución:

Para la coordenada r^* , la ecuación (2.45) se reescribe como:

$$\frac{\partial^2 v_{ri}^{*(0)}}{\partial x^2} + \frac{2\bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \psi_i^{*(0)}}{dx^2} \right) \partial v_{ri}^{*(0)}}{1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2} = 0, \quad (2.51)$$

que se linealiza considerando $\bar{f} \ll 1$ como:

$$\frac{\partial^2 v_{ri}^{*(0)}}{\partial x^2} + 2\bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right) \left(\frac{d^2 \psi_i^{*(0)}}{dx^2} \right) \frac{\partial v_{ri}^{*(0)}}{\partial x} = 0. \quad (2.52)$$

Cuya solución general resulta:

$$v_{ri}^{*(0)} = \int e^{\bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2} C_1(\theta) dx + C_2(\theta). \quad (2.53)$$

Y finalmente, al emplear las condiciones de frontera 2.49 y 2.50 se tiene:

$$v_{ri}^{*(0)} = 0. \quad (2.54)$$

Mientras que para la coordenada θ la ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{\partial v_{\theta i}^{*(0)}}{\partial x} \right] = -\frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right). \quad (2.55)$$

Integrando una vez:

$$\left(1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right) \frac{\partial v_{\theta i}^{*(0)}}{\partial x} = -\frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} \sin \theta \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} + C_3(\theta). \quad (2.56)$$

Utilizando la condición de frontera 2.50 se tiene que $C_3(\theta) = 0$, con lo que:

$$\frac{\partial v_{\theta i}^{*(0)}}{\partial x} = \frac{-\frac{3}{2} \frac{\sin \theta}{\zeta^*} \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx}}{1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2}. \quad (2.57)$$

Integrando nuevamente:

$$v_{\theta i}^{*(0)} = -\frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \int \frac{d\psi_i^{*(0)}}{1 + \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2} + C_4(\theta). \quad (2.58)$$

Ahora bien, considerando la expresión 2.25, se toma el siguiente cambio de variable:

$$w = \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \rightarrow \frac{d^2\psi_i^{*(0)}}{dx^2} = \frac{dw}{d\psi_i^{*(0)}} \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} = w \frac{dw}{d\psi_i^{*(0)}}, \quad (2.59)$$

por lo que

$$w \frac{dw}{d\psi_i^{*(0)}} = \sinh(\psi_i^{*(0)}). \quad (2.60)$$

Integrando lo anterior se tiene

$$\frac{w^2}{2} = \cosh(\psi_i^{*(0)}) + B . \quad (2.61)$$

Considerando $\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} = \psi_i^{*(0)} = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$, entonces:

$$0 = \cosh(0) + B \rightarrow B = -1 , \quad (2.62)$$

y modificando la expresión mediante una relación de $\cosh(\psi_i^{*(0)})$:

$$\cosh(\psi_i^{*(0)}) = 2 \sinh^2\left(\frac{\psi_i^{*(0)}}{2}\right) + 1 , \quad (2.63)$$

se tiene:

$$\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} = w = 2 \sinh\left(\frac{\psi_i^{*(0)}}{2}\right) . \quad (2.64)$$

Retomando el cálculo de la solución para la zona interior de la velocidad y la expresión anterior, si se considera $\bar{f} \ll 1$, la Ec. 2.58 se linealiza como:

$$v_{\theta i}^{*(0)} = -\frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \int \left[1 - \bar{f} \left(\frac{d\psi_i^{*(0)}}{dx} \right)^2 \right] d\psi_i^{*(0)} + C_4(\theta) , \quad (2.65)$$

$$v_{\theta i}^{*(0)} = -\frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \int \left[1 - 4\bar{f} \sinh^2\left(\frac{\psi_i^{*(0)}}{2}\right) \right] d\psi_i^{*(0)} + C_4(\theta) , \quad (2.66)$$

$$v_{\theta i}^{*(0)} = \frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \left[-\psi_i^{*(0)} - 2\bar{f}\psi_i^{*(0)} + 2\bar{f} \sinh(\psi_i^{*(0)}) \right] + C_4(\theta) . \quad (2.67)$$

Aplicando la condición de frontera restante para determinar $C_4(\theta)$:

$$v_{\theta i}^{*(0)} = 0 , \quad \psi_i^{*(0)} = \zeta^* \text{ en } x = 0 , \quad (2.68)$$

se tiene

$$0 = \frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} [-\zeta^* - 2\bar{f}\zeta^* + 2\bar{f} \sinh(\zeta^*)] + C_4(\theta) , \quad (2.69)$$

con lo que

$$C_4(\theta) = \frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} [\zeta^* + 2\bar{f}\zeta^* - 2\bar{f} \sinh(\zeta^*)] . \quad (2.70)$$

Finalmente:

$$v_{\theta i}^{*(0)} = \frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \left[\zeta^* - \psi_i^{*(0)} + 2\bar{f}(\zeta^* - \psi_i^{*(0)}) + 2\bar{f}(\sinh(\psi_i^{*(0)}) - \sinh(\zeta^*)) \right] . \quad (2.71)$$

Solución para la zona exterior

Para la zona exterior, las ecuaciones diferenciales a ser resueltas son respectivamente:

-Componente r^* :

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{\partial \pi^*}{\partial r^*} + \beta \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \right) \\ & + 2 \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 v_{ro}^{*(0)}}{\partial r^{*2}} + \frac{\partial v_{ro}^{*(0)}}{\partial r^*} \left(f^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left\{ \left(-\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right\} \right) \right] \\ & + \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_{\theta o}^{*(0)}}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{ro}^{*(0)}}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right] \left[4 \frac{\partial v_{ro}^{*(0)}}{\partial r^*} - \frac{2}{r^*} \frac{\partial v_{\theta o}^{*(0)}}{\partial \theta} - 4 \frac{v_{ro}^{*(0)}}{r^*} - 2 \frac{v_{\theta o}^{*(0)} \cot \theta}{r^*} \right. \\ & \left. + r^* \cot \theta \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_{\theta o}^{*(0)}}{r^*} \right) + \frac{\cot \theta}{r^*} \frac{\partial v_{ro}^{*(0)}}{\partial \theta} \right] . \end{aligned} \quad (2.72)$$

-Componente θ :

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{r^*} \frac{\partial \pi^*}{\partial \theta} + \beta \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta} \right) \\
&+ \frac{2}{r^{*2}} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v_{\theta o}^{*(0)}}{\partial \theta} + v_{r o}^{*(0)} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\left(1 + f^* \left(\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right) \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_{\theta o}^{*(0)}}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{r o}^{*(0)}}{\partial \theta} \right\} \right] \\
&+ \frac{1}{r^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right] \left[2 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{\theta o}^{*(0)}}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta o}^{*(0)} \cot \theta}{r^*} \right) \cot \theta + 3 \left\{ r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_{\theta o}^{*(0)}}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_{r o}^{*(0)}}{\partial \theta} \right\} \right].
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Sujetas a las condiciones de frontera:

$$\psi_o^{*(0)} = 0, v_{r o}^{*(0)} = -U^* \cos(\theta), v_{\theta o}^{*(0)} = U^* \sin(\theta) \text{ cuando } r^* \rightarrow \infty. \tag{2.74}$$

Usando la solución obtenida por Henry [8] como la solución para la zona exterior, lo cual es válido despreciando el efecto viscoeléctrico en esta región ($f = 0$) y una vez adimensionalizada se tiene (ver apéndice):

-Para la componente r de la velocidad:

$$v_{r o}^{*(0)} = \cos \theta \left[\frac{B_1}{r^*} - U^* + \frac{B_2}{r^{*3}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{r^{*3}} \int^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \right]. \tag{2.75}$$

-Para la componente θ de la velocidad:

$$v_{\theta o}^{*(0)} = \sin \theta \left[-\frac{B_1}{2r^*} + U^* + \frac{B_2}{2r^{*3}} - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + \frac{1}{2r^{*3}} \int^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \right]. \tag{2.76}$$

-Para la presión:

$$\pi^* = \cos \theta \left[\frac{B_1}{r^{*2}} - \frac{1}{\zeta^*} \left(3 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} - 2\bar{\xi} \right) \right], \tag{2.77}$$

donde (ver apéndice):

$$\bar{\xi} = \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} + \frac{r^*}{2} \int_{\infty}^{r^*} \frac{1}{r^{*6}} \frac{d}{dr^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) dr^* . \quad (2.78)$$

Las constantes indeterminadas B_1 y B_2 son obtenidas mediante el empare con la zona interior en la sección siguiente (matching).

Solución compuesta

La solución compuesta (o total) se compone de: solución en la región interna + solución en la región externa – parte en común [16]. En este caso es la solución interna expresada en términos de la variable independiente externa (r^*).

Para $v_r^{*(0)}$ tenemos:

$$v_r^{*(0)} = 0 - 0 + \cos \theta \left[\frac{B_1}{r^*} - U^* + \frac{B_2}{r^{*3}} + \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{r^{*3}} \int^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \right] . \quad (2.79)$$

Con una condición de frontera por evaluar: $r^* \rightarrow 1$, $v_r^* = 0$.

Al evaluar resulta:

$$0 = B_1 - U^* + B_2 + \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \lim_{r^* \rightarrow 1} \int^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) . \quad (2.80)$$

Mientras que para $v_{\theta}^{*(0)}$ se tiene:

$$\begin{aligned} v_{\theta}^{*(0)} = & \frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \left[-\psi^{*(0)} + \zeta^* + 2\bar{f}(\zeta^* - \psi^{*(0)}) + 2\bar{f}(\sinh(\psi^{*(0)}) - \sinh(\zeta^*)) \right] \\ & + \sin \theta \left[-\frac{B_1}{2r^*} + U^* + \frac{B_2}{2r^{*3}} - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + \frac{1}{2r^{*3}} \int^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \right] \\ & - \frac{3 \sin \theta}{2 \zeta^*} \left[-\bar{\psi} + \zeta^* + 2\bar{f}(\zeta^* - \bar{\psi}) + 2\bar{f}(\sinh(\bar{\psi}) - \sinh(\zeta^*)) \right] , \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde $\bar{\psi}$ representa la solución para el potencial eléctrico en la zona de igualación.

Al evaluar la condición de frontera: $r^* \rightarrow 1$, $v_{\theta}^* = 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{B_1}{2} + U^* + \frac{B_2}{2} - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + \frac{1}{2} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \\
& + \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] .
\end{aligned} \tag{2.82}$$

De esta manera, al relacionar las ecuaciones (2.80) y (2.82) se determinan B_1 y B_2 , quedando como:

$$B_1 = \frac{3}{2} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] . \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & -\frac{1}{2} U^* + \frac{1}{\zeta^*} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + 2 \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \\
& - \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] .
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Sustituyendo los valores para B_1 y B_2 se tiene finalmente:

$$\begin{aligned}
v_r^{*(0)} = & \cos(\theta) \left\{ \frac{3}{2} \frac{U^*}{r^*} - \frac{1}{\zeta^*} \frac{1}{r^*} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - U^* - \frac{U^*}{2r^{*3}} \right. \\
& + \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta^* r^{*3}} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + 2 \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{r^{*3}} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \\
& \left. + \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] \left(\frac{1}{r^*} - \frac{1}{r^{*3}} \right) \right\} .
\end{aligned} \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
v_{\theta}^{*(0)} = & \frac{3 \sin(\theta)}{2} \frac{1}{\zeta^*} \left\{ -\psi_i^{*(0)} + \bar{\psi} + 2\bar{f}(\bar{\psi} - \psi_i^{*(0)}) + 2\bar{f}(\sinh(\psi_i^{*(0)}) - \sinh(\bar{\psi})) \right\} \\
& + \sin(\theta) \left\{ -\frac{3}{4} \frac{U^*}{r^*} + \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta^* r^*} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + U^* - \frac{1}{4} \frac{U^*}{r^{*3}} \right. \\
& + \frac{1}{6} \frac{1}{\zeta^* r^{*3}} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + 2 \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + \frac{1}{2r^{*3}} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \\
& \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] \left(\frac{1}{2r^*} + \frac{1}{2r^{*3}} \right) \right\} .
\end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\pi^* = \cos(\theta) \left\{ \frac{3}{2r^{*2}} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \frac{1}{r^{*2}} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{\zeta^*} \left(3 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} - 2\bar{\xi} \right) + \frac{3}{2r^{*2}\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] \right\}. \quad (2.87)$$

Al volver a la variable original de presión antes del cambio de variable, se tiene:

$$\pi^* = \cos(\theta) \left\{ \frac{3}{2r^{*2}} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \frac{1}{r^{*2}} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{\zeta^*} \left(3 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} - 2\bar{\xi} \right) + \frac{3}{2r^{*2}\zeta^*} [4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t))] \right\} + \frac{1}{\zeta^*} \int_{\infty}^1 \frac{1}{r^{*2}} \frac{d}{dr^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} dr^* . \quad (2.88)$$

Movilidad electroforética μ

Para obtener la movilidad electroforética de la partícula se requiere efectuar un balance entre las fuerza presentes. En estado estacionario la fuerza hidrodinámica (F_h) y la fuerza eléctrica (F_e) deben de estar en equilibrio [8], [13], [14] (ver Fig. 2.2).

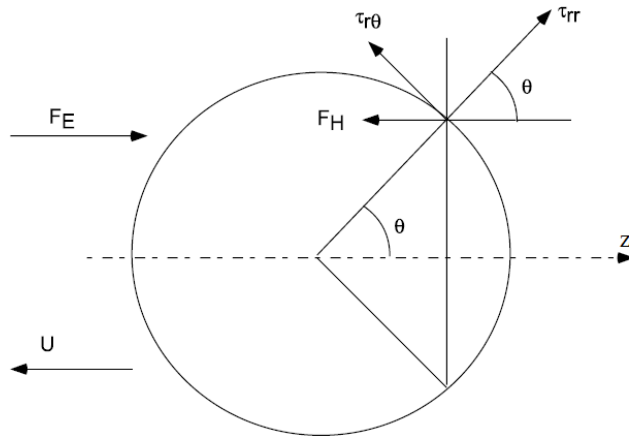


Figura 2.2: Fuerzas superficiales eléctrica e hidrodinámica sobre la partícula. Tomado de [13].

La fuerza hidrodinámica ejercida por el fluido sobre la partícula se calcula como [13]:

$$F_h = 2\pi a^2 \int_0^\pi [-\tau_{rr} \cos \theta + \tau_{r\theta} \sin \theta]_{r=a} \sin \theta d\theta , \quad (2.89)$$

donde:

$$\tau_{rr} = -p + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} , \quad (2.90)$$

y

$$\tau_{r\theta} = \eta \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] , \quad (2.91)$$

representan los esfuerzos normal y tangencial sobre la partícula por parte del fluido. De forma adimensional F_h se muestra como:

$$F_h^* = 2\pi \int_0^\pi [-\tau_{rr}^* \cos \theta + \tau_{r\theta}^* \sin \theta]_{r^*=1} \sin \theta d\theta , \quad (2.92)$$

con:

$$\tau_{rr}^* = -\pi^* + 2 \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} , \quad (2.93)$$

y

$$\tau_{r\theta}^* = \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^*}{dr^*} \right)^2 \right] \left\{ \frac{\partial v_\theta^*}{\partial r^*} - \frac{v_\theta^*}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta} \right\} . \quad (2.94)$$

Al sustituir las componentes de la velocidad y presión se tiene:

$$F_h^* = 2\pi \int_0^\pi \left[\cos \theta \left(\pi^* - 2 \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right] \frac{\partial v_r^{*(0)}}{\partial r^*} \right) + \sin \theta \left(\left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \right] \left\{ \frac{\partial v_\theta^{*(0)}}{\partial r^*} - \frac{v_\theta^{*(0)}}{r^*} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^{*(0)}}{\partial \theta} \right\} \right) \right]_{r^*=1} \sin \theta d\theta , \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned}
F_h^* = & 2\pi \int_0^\pi \left[\cos^2 \theta \left\{ \frac{3}{2} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \int_\infty^1 \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{\zeta^*} \left(3 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - 2\bar{\xi} \Big|_{r^*=1} \right) \right. \right. \\
& + \frac{3Q}{2\zeta^*} - \frac{6Q}{\zeta^*} \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \right] \left. \right\} + \frac{\cos \theta}{\zeta^*} \int_\infty^1 \frac{1}{r^{*2}} \frac{d}{dr} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr} \right) \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr} dr^* \\
& + \left[1 + f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \right] \sin^2 \theta \left\{ \frac{3}{2} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \int_\infty^1 \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{\zeta^*} \bar{\xi} \Big|_{r^*=1} + \frac{3Q}{\zeta^*} + \frac{3Q}{2\zeta^*} - \frac{3H}{2\zeta^*} \Big|_{r^*=1} \right. \\
& + \frac{3}{2\zeta^*} \left[\left(\frac{d\bar{\psi}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) (2\bar{f} + 1) \right. \\
& \left. \left. + 2\bar{f} \left(\cosh \psi_i^{*(0)} \Big|_{r^*=1} \frac{d\psi_i^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - \cosh \bar{\psi} \Big|_{r^*=1} \frac{d\bar{\psi}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \right) \right] \right\} \sin \theta d\theta .
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Al integrar la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
F_h^* = & \frac{2\pi}{3\zeta^*} \left(-6U^* f^* \zeta^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 4f^* \bar{\xi} \Big|_{r^*=1} \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 6f^* H \Big|_{r^*=1} \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \right. \\
& - 6f^* \frac{dH}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 4f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \int_\infty^1 \bar{\xi} dr^* + 6f^* Q \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \\
& \left. - 9U^* \zeta^* + 6 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + 6 H \Big|_{r^*=1} - 6 \frac{dH}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + 6 \int_\infty^1 \bar{\xi} dr^* + 9Q \right) ,
\end{aligned} \tag{2.97}$$

donde:

$$Q = 4t - \zeta^* + 2\bar{f}(4t - \zeta^*) + 2\bar{f}(\sinh(\zeta^*) - \sinh(4t)) , \tag{2.98}$$

y

$$H = -\psi_i^{*(0)} + \bar{\psi} + 2\bar{f}(\bar{\psi} - \psi_i^{*(0)}) + 2\bar{f} \left(\sinh(\psi_i^{*(0)}) - \sinh(\bar{\psi}) \right) , \tag{2.99}$$

con $\bar{f} = f^* \kappa^{*2}$.

Notesé que F_h es fijada como positiva cuando es medida a lo largo de la dirección de U , en sentido opuesto a z [13].

Por otra parte, la fuerza eléctrica debida al campo eléctrico sobre una partícula esférica de radio a es:

$$F_e = \int [q_s E_z]_a ds , \quad (2.100)$$

donde q_s es la densidad de carga eléctrica dada por $q_s = -\epsilon \left(\frac{d\psi}{dr} \right)_{r=a}$. Dado que ψ solo depende de r y $\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$ para $r = a$, se tiene (para mayor referencia consultar las fuentes [14], [13]):

$$E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{d\psi}{dr} \cos \theta . \quad (2.101)$$

Y con la solución para el potencial externo ϕ (2.38), se tiene de las expresiones anteriores:

$$F_e = \left(-4\pi a^2 \epsilon \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=a} E_\infty . \quad (2.102)$$

Que de forma adimensional se representa como:

$$F_e^* = \left(\frac{-4\pi}{\zeta^*} \frac{d\psi^*}{dr^*} \right)_{r^*=1} . \quad (2.103)$$

Al sustituir el potencial eléctrico obtenido:

$$F_e^* = \left(\frac{-4\pi}{\zeta^*} \left[4te^{-\kappa^*(r^*-1)} \left(\frac{-\kappa^*}{(1+te^{-\kappa^*(r^*-1)})(1-te^{-\kappa^*(r^*-1)})} - \left(\frac{\kappa^*}{r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \right) + \kappa^* \right) \right] \right)_{r^*=1} , \quad (2.104)$$

$$F_e^* = \left(\frac{-4\pi}{\zeta^*} \left[\frac{-4t\kappa^*}{(1+t)(1-t)} - 4t \right] \right) . \quad (2.105)$$

Con las fuerzas hidrodinámica y eléctrica desarrolladas, se efectúa el balance:

$$F_h^* + F_e^* = 0 . \quad (2.106)$$

Lo cual permite obtener una relación para la movilidad electroforética a través de la velocidad y el campo eléctrico. Una vez que se despeja a U^* del balance anterior y se multiplica por $\frac{3}{2}\zeta^*$ la movilidad electroforética adimensional (denominada movilidad electroforética reducida en algunas fuentes) resulta:

$$\mu^* = \frac{3\eta_0 e}{2\epsilon k_B T} \mu = \frac{3U^* \zeta^*}{2}. \quad (2.107)$$

Y para el potencial, velocidad y presión obtenidas en este trabajo se presenta la forma final de la movilidad electroforética adimensional:

$$\begin{aligned} \mu^* = & \frac{1}{2 \left(2f^* t^2 \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} - 2f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 3t^2 - 3 \right)} \left[-24t + 6 \frac{dH}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - 6 H \Big|_{r^*=1} \right. \\ & + 9Q - 6 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + 24t^3 + 6t^2 \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{r^*=1} + 6t^2 H \Big|_{r^*=1} - 6t^2 \frac{dH}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - 9Qt^2 + 6t^2 \int_{\infty}^1 \bar{\xi} dr^* \\ & - 24t\kappa^* - 4f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \int_{\infty}^1 \bar{\xi} dr^* - 6Qf^* t^2 \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 4f^* t^2 \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \int_{\infty}^1 \bar{\xi} dr^* \\ & + 4f^* t^2 \bar{\xi} \Big|_{r^*=1} \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 6f^* t^2 \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} H \Big|_{r^*=1} - 6f^* t^2 \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \frac{dH}{dr^*} \Big|_{r^*=1} \\ & - 6f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} H \Big|_{r^*=1} + 6f^* \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \frac{dH}{dr^*} \Big|_{r^*=1} - 4f^* \bar{\xi} \Big|_{r^*=1} \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} \\ & \left. + 6f^* Q \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} \right)^2 \Big|_{r^*=1} + 6 \int_{\infty}^1 \bar{\xi} dr^* \right]. \quad (2.108) \end{aligned}$$

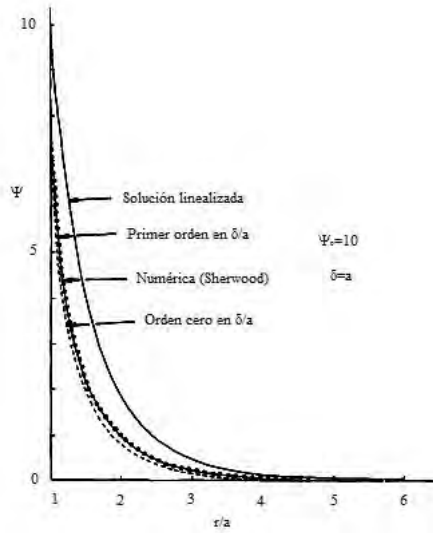
Capítulo 3

Resultados

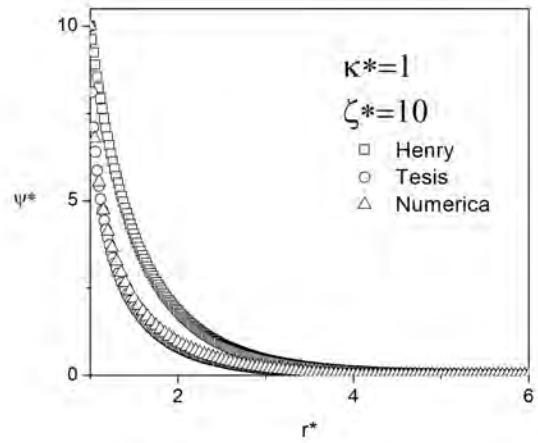
En este capítulo se presentan los resultados mas significativos de esta tesis. Se muestran gráficas para el potencial eléctrico, los perfiles de velocidad y presión así como para la movilidad electroforética, variando los parámetros relevantes para observar su efecto.

Perfiles del potencial eléctrico

Se presenta la gráfica para el potencial eléctrico adimensional resultado de este trabajo (Ec. 2.35), comparado con el resultado que se obtendría para bajos potenciales eléctricos (Ec. B.4, correspondiente a una linealización de la ecuación de Poisson-Boltzmann) y la solución numérica de la misma (Ec. 2.21), observándose gran semejanza. En la figura 3.1 se observa la comparación directa entre la gráfica obtenida por Chew y Sen [18] (Fig. 3.1a) y la desarrollada en este trabajo (Fig. 3.1b) para $\kappa^* = 1$ y $\zeta^* = 10$.



(a) Chew. Imagen modificada de [18].



(b) Tesis

Figura 3.1: Comparación entre el potencial eléctrico obtenido por Chew y Sen y el desarrollado en este trabajo para $\kappa^* = 1$ y $\zeta^* = 10$.

La figura 3.2 muestra el potencial eléctrico (ψ^*) manteniendo $\zeta^* = 1$ y variando κ^* .

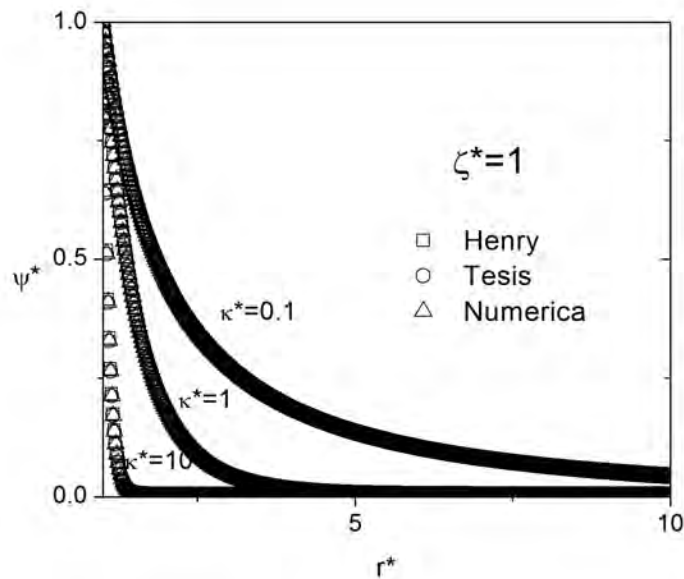


Figura 3.2: Comparación entre la solución numérica, la obtenida por Henry y la desarrollada en este trabajo de tesis variando κ^* , con $\zeta^* = 1$.

En la Fig. 3.3 se observa el potencial eléctrico manteniendo $\kappa^* = 10$ y variando ζ^* .

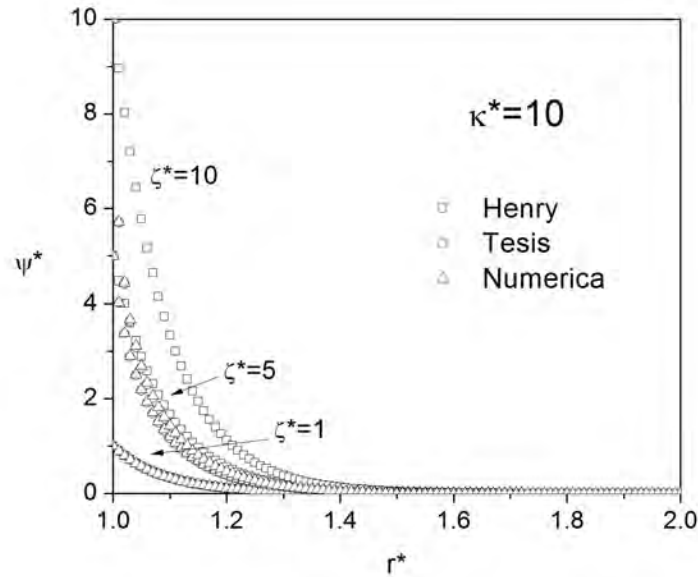
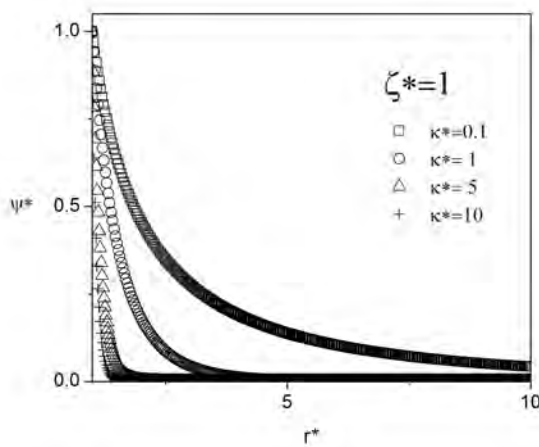
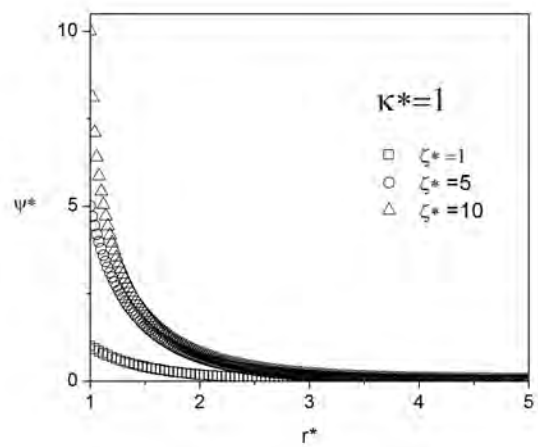


Figura 3.3: Comparación entre la solución numérica, la obtenida por Henry y la desarrollada en este trabajo de tesis variando ζ^* , con $\kappa^* = 10$.

Las siguientes figuras muestran el comportamiento del potencial eléctrico ψ^* ante las variaciones de los parámetros κ^* (Fig. 3.4a) y ζ^* (Fig. 3.4b).



(a) $\zeta^* = 1$, $\kappa^* = 0,1, 1, 5, 10$



(b) $\kappa^* = 1$, $\zeta^* = 1, 5, 10$

Figura 3.4: Variación de κ^* y ζ^* y su efecto sobre el potencial eléctrico.

Perfiles de los campos de velocidad y presión

Para presentar los resultados de una mejor manera, se opta por utilizar la magnitud de la velocidad en lugar de las componentes individuales, así como usar el ángulo de $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ como valor representativo y fijar $U^* = 1$, lo que equivale a tener una velocidad lejos de la partícula (condición de frontera) igual a la velocidad de referencia U_{HS} (velocidad de deslizamiento de Helmholtz-Smoluchowsky).

A continuación se presenta la gráfica para la magnitud de la velocidad, comparando el modelo obtenido en esta tesis (sin considerar el efecto viscoeléctrico, $\bar{f} = 0$) con el presentado por Henry [8], variando en el primer caso el parámetro adimensional κ^* con $\zeta^* = 1$ (Fig. 3.5), mientras que en la segunda gráfica se varía el potencial eléctrico en la pared ζ^* con $\kappa^* = 5$ (Fig. 3.6).

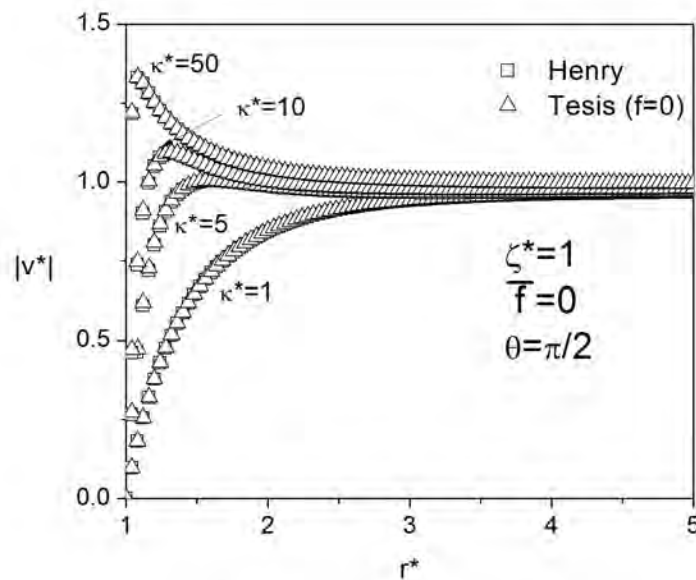


Figura 3.5: Comparación entre la solución obtenida por Henry y la desarrollada en esta tesis para $\kappa^* = 1, 5, 10, 50$, con $\zeta^* = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

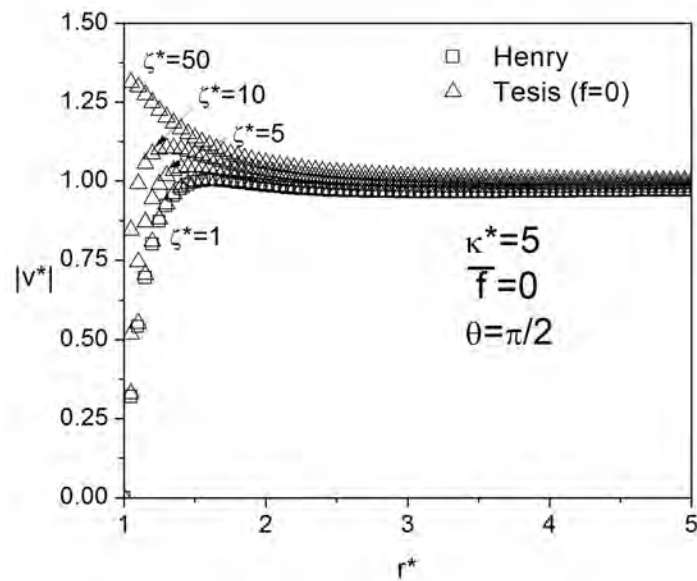
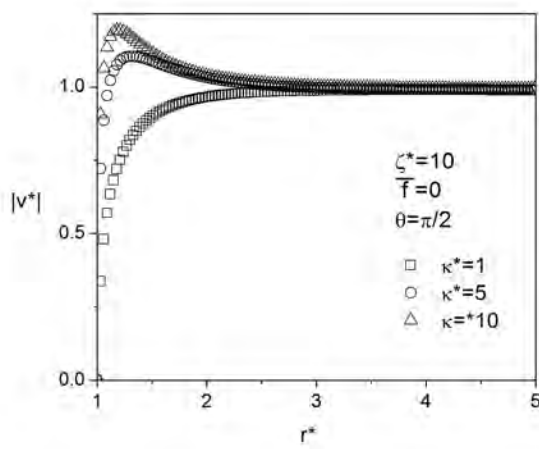


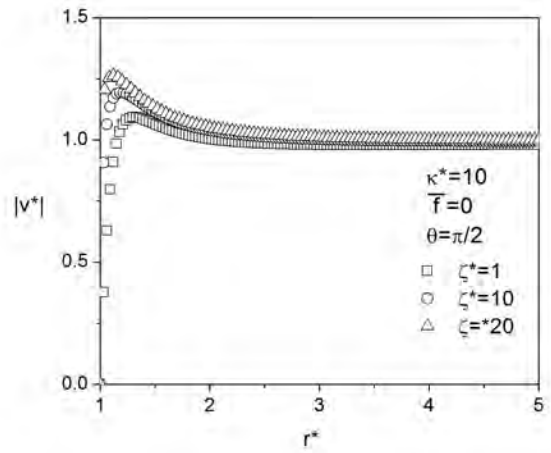
Figura 3.6: Comparación entre la solución obtenida por Henry y la desarrollada en esta tesis para $\zeta^* = 1, 5, 10, 50$, con $\kappa^* = 5$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En la Fig. 3.5 no se aprecia diferencia considerable entre los resultados propios de este trabajo y los obtenidos con el modelo de Henry, mientras que en la Fig. 3.6 y para el modelo de Henry todos los valores caen en el perfil para $\zeta^* = 1$, de nueva cuenta es un efecto de la consideración de bajos potenciales ζ utilizada en el desarrollo del trabajo de Henry.

La Fig. 3.7 muestra el comportamiento de la velocidad ante las variaciones de los parámetros κ^* (Fig. 3.7a) y ζ^* (Fig. 3.7b).



(a) $\zeta^* = 10$, $\bar{f} = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\kappa^* = 1, 5, 10$



(b) $\kappa^* = 10$, $\bar{f} = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\zeta^* = 1, 10, 20$

Figura 3.7: Variación de κ^* y ζ^* para $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La siguiente figura muestra el cambio que genera la introducción de la constante viscoeléctrica \bar{f} sobre la magnitud de la velocidad (manteniendo $\kappa^* = 5$, $\zeta^* = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$):

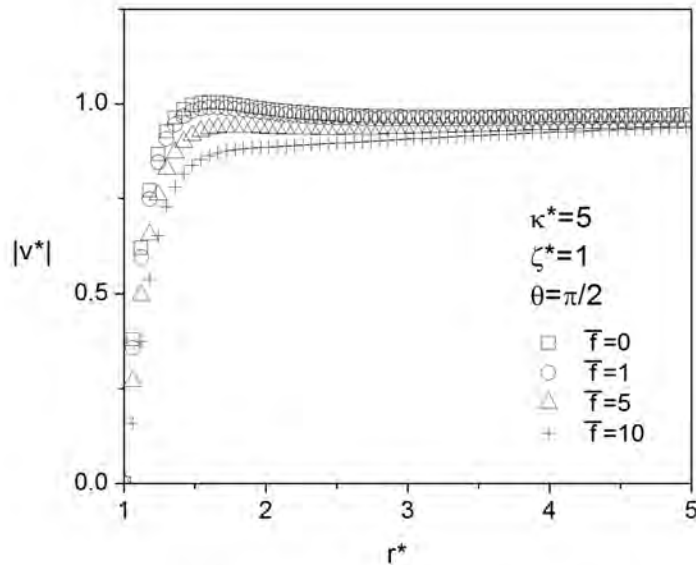


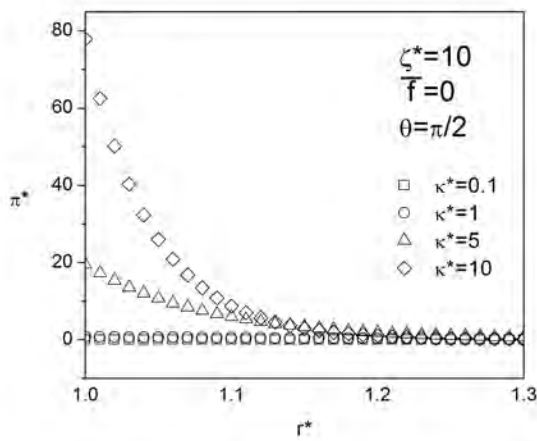
Figura 3.8: Efecto de la constante viscoeléctrica \bar{f} sobre la magnitud de la velocidad, $\kappa^* = 5$, $\zeta^* = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Como mas adelante se verá, los valores utilizados para \bar{f} son exagerados, pero solo gracias

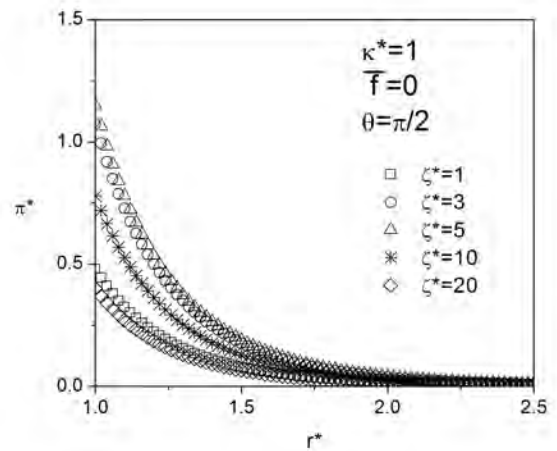
a ello se observa el efecto que tiene este parámetro en la velocidad del fluido.

Presión

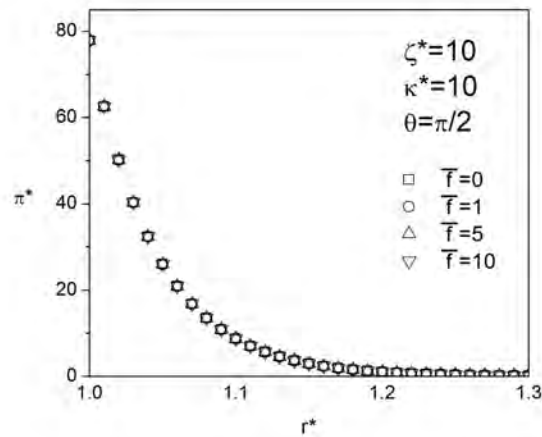
En las siguientes gráficas se observa el comportamiento de la presión (Ec. 2.88) sobre el sistema ante la variación de los parámetros de interés en el fenómeno de electroforesis.



(a) $\zeta^* = 10, \bar{f} = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$



(b) $\kappa^* = 1, \bar{f} = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$



(c) $\kappa^* = 10, \zeta^* = 10, \theta = \frac{\pi}{2}$

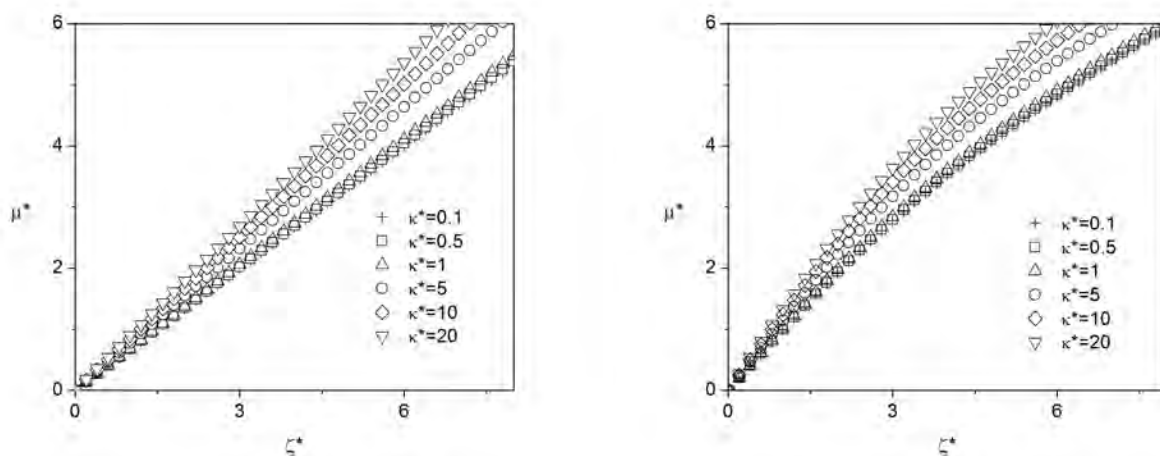
Figura 3.9: Efecto de los parámetros κ^* , ζ^* y \bar{f} sobre la presión del sistema, con $\theta = \frac{\pi}{2}$.

La presión tiene un valor máximo en las cercanías de la partícula para luego caer a un valor de referencia lejos de esta, en este caso 0. Mientras que con κ^* y ζ^* el valor de la presión aumenta, con respecto a la variación de \bar{f} no existe cambio. Un efecto que rompe lo anterior se presenta cuando el potencial ζ^* alcanza valores grandes ($\zeta^* > 5$), revirtiéndose la tendencia Fig. 3.9b.

Perfiles de movilidad electroforética

La movilidad electroforética es uno de los parámetros de mayor relevancia en electroforesis de partículas, como se ha hecho notar en la introducción, es a partir de este término que se determina el potencial ζ a través del conocimiento previo del potencial eléctrico aplicado y la medición de la velocidad de la partícula, y respecto a las gráficas anteriores es un parámetro que no depende de las coordenadas espaciales (r^* , θ).

A continuación se presentan las gráficas que se obtienen para la movilidad electroforética adimensional μ^* como función del potencial ζ^* , para la solución de Henry y para el propio modelo de la tesis (Ec. 2.108) (Fig. 3.12), y para el electrolito simétrico KCl (Fig. 3.11) utilizado en el trabajo de O'Brien y White [3].



(a) Movilidad electroforética con el modelo de Henry. (b) Movilidad electroforética con el modelo desarrollado en este trabajo, $\bar{f} = 0$.

Figura 3.10: Comparación entre el perfil para la movilidad electroforética obtenido por Henry y el correspondiente a este trabajo para diferentes valores de κ^* .

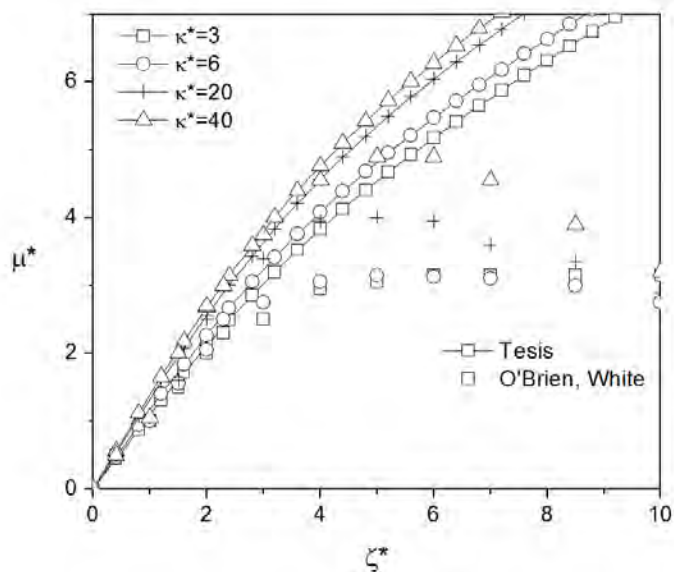
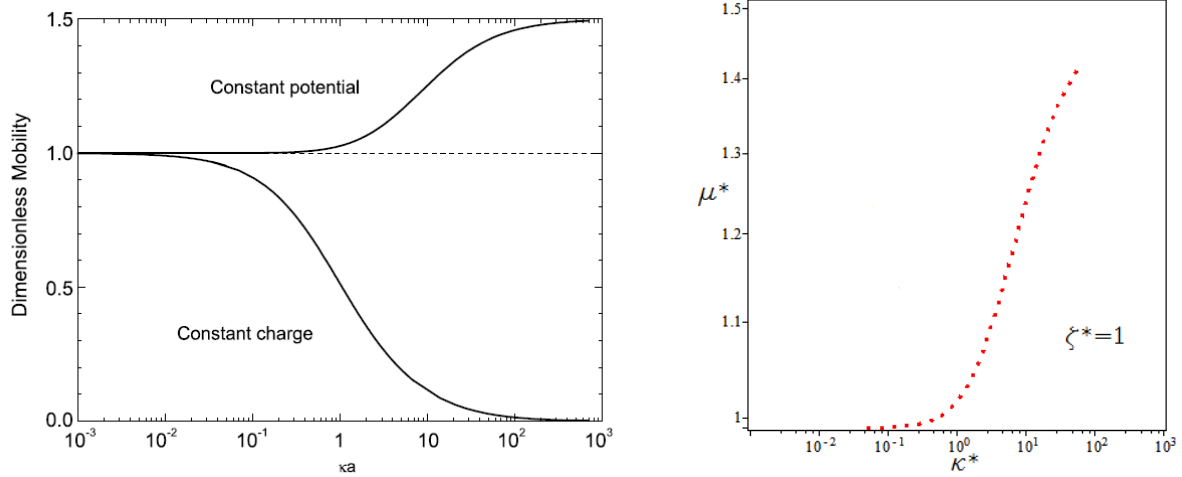


Figura 3.11: Variación de la movilidad electroforética en KCl con el potencial ζ^* , obtenido por O'Brien y White y el correspondiente a este trabajo para diferentes valores de κ^* .

El perfil que se obtiene con el modelo desarrollado no alcanza un valor máximo como si lo hace con el que se compara, esto se debe a que el propio modelo de Henry tiene esta particularidad, y dado que dicho modelo es base para el trabajo presente se tiene el mismo problema.

La siguiente figura muestra el comportamiento de la movilidad electroforética para potencial eléctrico constante como función de κ^* según el modelo de Henry [13] y el correspondiente a esta tesis:



(a) Variación de la movilidad electroforética escalada con κa para partículas con potencial constante y carga superficial constante basadas en la solución de Henry. Imagen tomada de [13].

(b) $\zeta^* = 1, f^* = 0$

Figura 3.12: Comparación entre el perfil obtenido con el modelo de Henry para la movilidad electroforética con potencial eléctrico constante.

Se observan como límite inferior el valor de 1 mientras que como límite superior se tiene 1,5, lo cual coincide con la tendencia mostrada por la curva obtenida en este trabajo (Fig. 3.12b).

Con estas figuras, se pretende verificar el modelo de movilidad electroforética desarrollado en este trabajo, ya que el modelo de Henry sirve como base para el desarrollo del mismo.

Por último, se presenta la gráfica del comportamiento de la movilidad electroforética con respecto a la variación del parámetro viscoeléctrico \bar{f} .

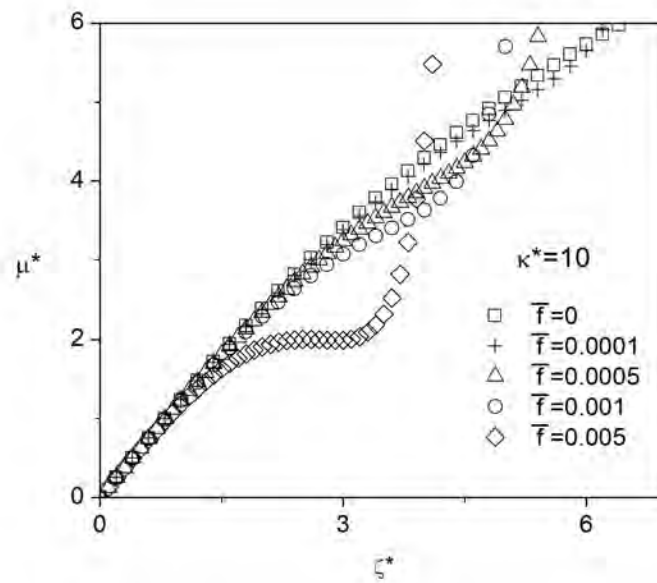


Figura 3.13: Efecto de la constante viscoeléctrica \bar{f} sobre la movilidad electroforética μ^* para $\kappa^* = 10$.

Se observa que para valores relativamente pequeños de la variable \bar{f} , mientras esta aumenta, la movilidad muestra una disminución en su pendiente, conforme ζ aumenta, se presenta una contracción y un aumento en su pendiente después de cierto valor crítico (correspondiente al propio valor de \bar{f}). Si el valor de \bar{f} se incrementa un orden de magnitud en relación a los aquí mostrados, los perfiles se disparan y se pierde la interpretación física que pueda darse al problema.

Capítulo 4

Conclusiones

Este capítulo está dedicado a resaltar los resultados que se tiene en este trabajo. Se mencionan aspectos importantes a considerar en un trabajo futuro relacionado con el tema.

Como se observa en las figuras 3.1 a 3.3 referentes al potencial eléctrico, cuando el parámetro que se varía es κ^* , la diferencia entre la solución linealizada, la solución numérica y la desarrollada en este trabajo es prácticamente nula, pero si el parámetro que se modifica (aumenta) es ζ^* , se presenta una mayor similitud entre el modelo de este trabajo y la solución numérica. Esto se debe a la simplificación que se asumió para la linealización de la ecuación de Poisson-Boltzmann, la cual es válida solo para potenciales ζ bajos.

La velocidad electroforética de acuerdo a las ecuaciones 2.85 y 2.86 se ve afectada principalmente por tres factores: el coeficiente viscoeléctrico f , el potencial zeta (ζ), y la longitud de Debye o de la doble capa eléctrica, representada por el parámetro $\kappa = \frac{1}{\lambda_D}$. La función determinada para cada una de las componentes de velocidad es similar a la obtenida por Henry, salvo por la inclusión de términos adicionales derivados de las constantes de integración que aparecen durante el desarrollo, y para el caso de la componente θ (Ec. 2.86) además se tienen términos por el tipo de solución empleada. La división en dos zonas con una fuerte presencia de los parámetros eléctricos en una de ellas, genera una solución interna diferente de cero (como sucede para la componente r^*) y similar a la presentada en el artículo de Marroquín Desentis et al [5] para el caso de flujo electroosmótico en un microcanal. La solución de Henry tuvo que ser adaptada de forma adimensional, ya que su trabajo original no estaba desarrollado de esta manera y su principal interés era obtener una función para relacionar velocidad electroforética y campo aplicado más general que las de Smoluchowski y Debye y Hückel.

Los resultados (Fig. 3.7) muestran el efecto que el coeficiente viscoeléctrico f tiene en el desarrollo de la velocidad electroforética, el cual tiende a disminuir la velocidad conforme

su valor aumenta, en concordancia con otros artículos de la misma naturaleza [5], efecto contrario al que generan los parámetros κ^* y ζ^* (Fig. 3.7), que conforme su valor aumenta la magnitud de la velocidad también lo hace.

La presión no muestra un cambio respecto a la variación de \bar{f} , sin embargo, este parámetro se encuentra presente en la función de la presión (Ec. 2.88), por lo que para valores extremos de los parámetros restantes tendería a mostrar cambios entre los perfiles. El efecto de revertir la tendencia con respecto a la variación de ζ debe ser estudiado y verificar que efectivamente se tenga este comportamiento con otros modelos, y que se presente solo con altos potenciales eléctricos, lo que podría considerarse un efecto no lineal del fenómeno.

La movilidad electroforética aumenta conforme el parámetro adimensional κ^* aumenta, mientras que para un valor constante de ζ^* , se presenta siempre el mismo perfil, aunque modificándose los valores límites, creciendo mientras el potencial lo hace. Se observa que para valores relativamente pequeños de la variable \bar{f} , siguiendo los utilizados en [5], mientras esta aumenta, la movilidad muestra una disminución en su pendiente, conforme ζ^* aumenta, se presenta una contracción y un aumento en su pendiente después de cierto valor crítico, correspondiente al propio valor de \bar{f} , lo que mostraría una tendencia a generar una línea recta con gran pendiente para valores altos de la variable. Dados los resultados mostrados con respecto a este parámetro en los perfiles de magnitud de la velocidad 3.8 y la movilidad electroforética 3.13 se concluye que el valor característico en este tipo de problemas es pequeño, y según el modelo desarrollado, no tiene gran relevancia en la velocidad del fenómeno, aunque sí lo tiene en la movilidad electroforética.

En un trabajo futuro se considerara la inclusión de otros efectos como el retraso electroforético y la relajación [9], incluyendo estos efectos se tendrían perfiles más cercanos a los presentes en otros trabajos, pero complicarían el estudio y la inclusión de otros fenómenos como el propio efecto viscoeléctrico. Además se tratará la solución numérica de las ecuaciones gobernantes del problema.

Apéndice A

Relaciones matematicas

-Operaciones vectoriales en coordenadas esféricas [19]:

Gradiente:

$$\nabla\Phi_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla\Phi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla\Phi_\phi = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\phi} \quad (\text{A.3})$$

Divergencia:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \quad (\text{A.4})$$

Laplaciano:

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} \quad (\text{A.5})$$

-Ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible en coordenadas esféricas:

Componente r:

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial r} + F_r + 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \right] & \\
+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\eta \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right\} \right] & \\
+ \frac{\eta}{r} \left[4 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 4 \frac{v_r}{r} - \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - 2 \frac{v_\theta \cot \theta}{r} + r \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] &
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Componente θ :

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + F_\theta \\
+ \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} v_r \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\eta \left\{ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right\} \right] & \\
+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{v_\theta}{r} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \right] & \\
+ \frac{\eta}{r} \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} - \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right) \cot \theta + 3 \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right\} \right] &
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Componente ϕ :

$$\begin{aligned}
\rho \left[\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + F_\phi \\
+ \frac{2}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\eta}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\eta v_r}{r} + \eta \frac{v_\theta}{r} \cot \theta \right) & \\
+ \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right\} \right] & \\
+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\eta \left\{ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right\} \right] & \\
+ \frac{\eta}{r} \left[3 \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right\} + 2 \cot \theta \left\{ \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right\} \right] &
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Apéndice B

Solución de Henry

Se muestra la solución adimensionalizada obtenida por Henry [8], la cual es comparada en la sección de resultados con la desarrollada en este trabajo.

$$\begin{aligned}
 v_r^* = \cos(\theta) & \left\{ \frac{3}{2r^*} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \frac{1}{r^*} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - U^* - \frac{U^*}{2r^{*3}} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} \frac{1}{\zeta^* r^{*3}} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + 2 \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{r^{*3}} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \right\}, \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{\theta}^* = \sin(\theta) & \left\{ -\frac{3}{4r^*} U^* + \frac{1}{2} \frac{1}{\zeta^* r^*} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + U^* - \frac{1}{4r^{*3}} U^* \right. \\
 & \left. + \frac{1}{6} \frac{1}{\zeta^* r^{*3}} \left(\lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + 2 \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{\zeta^*} \left(\int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* + \frac{1}{2r^{*3}} \int_{\infty}^{r^*} r^{*3} \bar{\xi} dr^* \right) \right\}, \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

$$\pi^* = \cos(\theta) \left\{ \frac{3}{2r^{*2}} U^* - \frac{1}{\zeta^*} \frac{1}{r^{*2}} \lim_{r^* \rightarrow 1} \int_{\infty}^{r^*} \bar{\xi} dr^* - \frac{1}{\zeta^*} \left(\frac{d\psi^{*(0)}}{dr^*} - 2\bar{\xi} \right) \right\}. \quad (B.3)$$

Con potencial eléctrico:

$$\psi^* = \frac{\zeta^*}{r^*} e^{-\kappa^*(r^*-1)}. \quad (B.4)$$

Evaluación del término $\bar{\xi}$

$\bar{\xi}$ es un término que aparece en el desarrollo realizado por Henry y que es función del potencial en la doble capa ψ^* y r^* , por lo que en esta parte se desarrolla y se muestra su expresión final.

$$\bar{\xi} = \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} + \frac{r^*}{2} \int_{\infty}^{r^*} \frac{1}{r^{*6}} \frac{d}{dr^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) dr^* . \quad (\text{B.5})$$

Mediante integración por partes del segundo término de la expresión anterior se tiene:

$$\int_{\infty}^{r^*} \frac{1}{r^{*6}} \frac{d}{dr^*} \left(r^{*2} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \right) dr^* = \frac{1}{r^{*4}} \frac{d\psi_o^{*(0)}}{dr^*} \Big|_{\infty}^{r^*} + \frac{6}{r^{*5}} \psi_o^{*(0)} \Big|_{\infty}^{r^*} + 30 \int_{\infty}^{r^*} \frac{1}{r^{*6}} \psi_o^{*(0)} dr^* . \quad (\text{B.6})$$

La integral anterior, es nuevamente desarrollada mediante integración por partes, y considerando a ψ_o^{*0} como $\frac{4te^{-k^*(r^*-1)}}{r^*}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{r^*} \frac{1}{r^{*6}} \left(\frac{4te^{-k^*(r^*-1)}}{r^*} \right) dr^* &= 4t \left(-\frac{e^{-k^*(r^*-1)}}{6r^{*6}} + \frac{k^*e^{-k^*(r^*-1)}}{30r^{*5}} - \frac{k^{*2}e^{-k^*(r^*-1)}}{120r^{*4}} \right. \\ &\left. + \frac{k^{*3}e^{-k^*(r^*-1)}}{360r^{*3}} - \frac{k^{*4}e^{-k^*(r^*-1)}}{720r^{*2}} + \frac{k^{*5}e^{-k^*(r^*-1)}}{720r^*} - \frac{1}{720} e^{k^*} Ei(1, k^*r^*) \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Donde el último término representa la denominada función integral exponencial [20], expresado como:

$$\int_{\infty}^{r^*} \frac{k^*e^{-k^*(r^*-1)}}{r^*} dr^* = -e^{k^*} Ei(1, k^*r^*) . \quad (\text{B.8})$$

Retomando la ecuación (B.5) se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{-4te^{-k^*(r^*-1)}}{r^{*2}} (k^*r^* + 1) - \frac{2te^{-k^*(r^*-1)}}{r^{*5}} (k^*r^* + 1) + \frac{12te^{-k^*(r^*-1)}}{r^{*5}} \\ &+ 60r^*t \left(e^{-k^*(r^*-1)} \left[-\frac{1}{6r^{*6}} + \frac{k^*}{30r^{*5}} - \frac{k^{*2}}{120r^{*4}} + \frac{k^{*3}}{360r^{*3}} - \frac{k^{*4}}{720r^{*2}} + \frac{k^{*5}}{720r^*} \right] \right. \\ &\left. - \frac{1}{720} e^{k^*} Ei(1, k^*r^*) \right) . \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Bibliografía

- [1] KIRBY, B. J. (2010). *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transport in microfluidic devices*. United States of America: Cambridge University Press.
- [2] ZHAO, C. y YANG, C. *Electrokinetics of non-Newtonian fluids: A review*. Advances in Colloid and Interface Science, 201-202 (2013), pp. 94-108.
- [3] O'BRIEN, R. W., y WHITE, L. R. *Electrophoretic Mobility of a Spherical Colloidal Particle*. J. Chem. Soc., Faraday Trans. 2 74 (1978), pp. 1607-1626.
- [4] ANDRADE, E. N. DA C y DODD, C. *The effect of an electric field on the viscosity of liquids*. Proc. Roy. Soc. Lond., A187 (1946), pp. 296.
- [5] MARROQUÍN-DESENTIS, J., MÉNDEZ, F. y BAUTISTA, O. *Viscoelectric effect on electroosmotic flow in a cylindrical microcapillary*. Fluid Dynamics Research, 48 (2016), pp. 1-15.
- [6] VELÁZQUEZ JIMÉNEZ, F. (2017). *Análisis del flujo electroosmótico de un fluido newtoniano en un microcanal de paredes onduladas*. Licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México.
- [7] RUSSEL, W. B., SAVILLE, D. A. y SCHOWALTER, W. R. (1989). *Colloidal Dispersions*. United States of America: Cambridge University Press.
- [8] HENRY, D. C. *The cataphoresis of suspended particles. Part I.- The equation of cataphoresis*. Proc R Soc London, Ser A 133 (1931), pp. 106-129.
- [9] WIERSEMA, P. H., LOEB, A. L., y OVERBEEK, J. TH. G. *Calculation of the Electrophoretic Mobility of a Spherical Colloid Particle*. J. Colloid Interface Sci. 22 (1966), pp. 78-99.
- [10] HUNTER R. J. *Zeta Potential in Colloid Science: Principles and Applications* (1988, London: Academic).
- [11] LYKLEMA, J. y OVERBEEK, J. TH. G. *On the interpretation of electrokinetic potentials*. Journal of colloid science, 16 (1961), pp. 501-512.

-
- [12] BAZANT, M. Z., KILLIC, M. S., STOREY, B. D. y AJDARI, A. *Towards an understanding of nonlinear electrokinetics at large applied voltages in concentrated solutions*. Adv. Colloid Interface Sci., 152 (2009), pp. 48-88.
- [13] MASLIYAH, J. y BHATTARCHARJEE, S. (2006). *Electrokinetic and colloid transport phenomena*. Willey- Interscience.
- [14] PARK, H. M. *Electrophoresis of particles with Navier velocity slip*. Electrophoresis, 34 (2013), pp. 651-661.
- [15] BENDER, C.M. AND ORZAG S. A. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers: Asymptotic Methods and Perturbation Theory* (1999, New York: Springer).
- [16] VAN DYKE, B. J. (1975). *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. United States of America: The Parabolic Press.
- [17] SAVILLE, D. A. *Electrokinetic effects with small particles*. Ann. Rev. Fluid Mech., 9 (1977), pp. 321-337.
- [18] CHEW, W.C. y SEN, P.N. *Potential of a sphere in an ionic solution in thin double layer approximations*. J. Chem. Phys., 77(4) (1982), pp. 2042-2044.
- [19] HUGHES, W. F. y GAYLORD, E. W. (1964). *Basic equations of engineering science*. United States of America: Schaum Publishing Company.
- [20] ARFKEN, G. B. AND WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. sixth edition, Elsevier Academic Press, United States of America, 2005.