



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**

**RADIACIÓN DE TRANSICIÓN EN CRISTALES LÍQUIDOS  
COLESTÉRICOS**

**TESIS**  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

**PRESENTA:**  
CARLOS ALBERTO VELÁZQUEZ OLIVERA

**TUTOR:** JUAN ADRIÁN REYES CERVANTES  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# Agradecimientos

Agradecemos el apoyo prestado para la conclusión de esta tesis al proyecto PAPIIT-DGAPA IN101316.

Esta tesis es la conclusión de un largo camino, lleno de esfuerzo, tesón, giros inesperados, pero sobre todo de gratas sorpresas. Hace mucho tiempo, alguna vez pensé que el ser físico me revelaría todos los misterios de la naturaleza; ahora sé que la física no pretende tener la respuesta para todo, sino crear en los que la estudiamos una curiosidad insaciable por los fenómenos que pasan a nuestro alrededor, valentía para lanzarse decididamente hacia lo desconocido y un instinto para la universalidad. En este camino que he recorrido muchas personas muy queridas han estado a mi lado y me han apoyado y ayudado a crecer como persona. Dedico esta tesis a:

Todas y todos los maestros que he tenido y que han contribuido para que yo pudiera llegar hasta aquí.

A mis grandes amigos en las asambleas de posgrados: Ricardo, Hunter, Queletzu, Edgar, Joel, Mariana, Dalia, Enrique, Susana, Laura, Arely, Ernesto y un larguísimo etcétera.

A todos los jaraneros con los que he compartido bohemia y fandangos, en especial a: Juan Carlos (padre e hijo), Miguel, Alejandro, Fernando, Jedi, Eduardo, Quique, Juanca y el maestro Julio.

A todos los integrantes de Cienciorama, en especial a Ali, Luci y Lupita.

A mis hermanos, Ana y Pako.

A Susana, que ha estado a mi lado estos últimos años y ha sido mi más fiel compañera.

Por último, quiero que este trabajo sea un testimonio de gratitud hacia mis padres, que me lo han dado todo.



1 El saber está escondido  
en un fondo de materia  
tan profunda, limpia, etérea  
que en ella todo está asido.  
Tanto que hemos aprendido  
y es apenas un comienzo  
de esta gran pintura-lienzo  
del mundo que nos rodea  
A la iniciada tarea  
aún le falta trecho extenso.

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

3 Y permítanme empezar  
a decir esta versada.  
En una gesta esforzada  
Gauss y Coulomb como a un rey  
coronaron esta ley  
que es prodigio de la ciencia:  
“La eléctrica divergencia (es)  
4 $\pi$  la densidad  
de la carga en libertad  
o ligada si hay presencia”.

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

5 El gran Faraday lo dijo:  
“Aplica el rotacional  
al campo-electricidad”  
y con mérito predijo:  
“A este resultado fijo  
que lo cubren grandes mantos  
debes igualar por tanto  
a menos c fraccional  
por variación temporal  
de tu magnético campo”.

2 Trecho de felicidad  
pues es trecho de saber  
de pasión por aprender  
de vivir con dignidad  
de ejercer la libertad  
del pensar-discernimiento,  
pues no hay más noble esfuerzo  
que aprender para avanzar,  
dirigir y navegar  
la nave del pensamiento.

$$\nabla \times B = 0$$

4 Divergencia igual a cero  
nuestro próximo deber  
y es magnético saber  
sin fuentes ni sumideros  
solo giros verdaderos  
dentro de este campo todo.  
Esta es verdad sin dolo  
y surge la diferencia  
con la eléctrica elocuencia  
porque aquí no hay monopolos.

$$\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J$$

6 El rotacional magnético  
es prodigio maxweliano  
el el resumen, mi hermano,  
de un logro y saber poético: (pues)  
este es el campo eléctrico  
en el tiempo derivado  
entre c multiplicado  
y sumado a la corriente (y)  
4 $\pi$  entre c es la fuente  
como Ampere lo había soñado.

7 A través de la materia  
van partículas cargadas  
y así es que son emanadas  
tantas luces, ¡cosa seria!  
Polarización sin mella  
que ha avistado el gran Cherenkov  
y la explicación que tengo  
la encontraron Frank y Tamm  
¡Que pocas veces se dan  
tantos logros tan extensos!

9 De Jackson junto a Durand  
surge nueva inspiración  
y la polarización  
es lo que nos viene a guiar.  
Villavicencio *et. al.*  
tomaron pie de la nota  
y este saber no se acota  
a solo la transición  
Cherenkov sin discusión  
otro gran triunfo se anota.

11 Y termino relatando  
esta increíble fusión  
de Cherenkov, radiación  
y transición empalmando  
se enredan como jugando  
y crean al transitar  
por el líquido cristal  
toda una nueva idea  
y el que quiera ¡Que la lea,  
pues aquí está su nidal!

8 Y hay también emanaciones  
al cruzar una frontera.  
Impurezas ¡quien las viera!  
que suscitan radiaciones  
y han llevado a discusiones  
donde Ginzburg junto a Tamm  
lograron desentrañar  
con un método señero  
que la imagen, compañero,  
es la clave aquí a tratar.

10 Y de los siglos pasados  
otro gran frente ha surgido  
y te lo digo mi amigo  
existen otros estados  
que parecen combinados  
de nuestras antiguas fases:  
para fluir son voraces  
mantienen orden adentro  
de nueva ciencia epicentro  
y son líquidos cristales.

12 Aquí acaban estos versos  
y ahora viene la teoría  
con la historia, vida mía  
y haran un relato intenso.  
Y de temas tan diversos  
surgió aquí la inspiración,  
las ideas fueron creación  
y son Décima Espinela  
porque ella es la centinela  
de toda una tradición.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Radiación de Cherenkov</b>	<b>11</b>
2.1	Breve historia de la radiación de Cherenkov . . . . .	11
2.2	Teoría de Frank y Tamm de la radiación de Cherenkov . . . . .	20
2.2.1	Energía radiada y distribución espectral . . . . .	25
2.2.2	Campo de radiación en las cercanías del frente de onda . . . . .	27
2.2.3	Duración del destello luminoso . . . . .	28
2.3	Modificación de algunas de las suposiciones de Frank y Tamm . . . . .	28
2.3.1	Efectos por cambio de sistema de referencia . . . . .	28
2.3.2	Frenado de la partícula . . . . .	29
2.3.3	Modificaciones cuánticas del efecto Cherenkov . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Radiación de transición</b>	<b>33</b>
3.1	Teoría de las imágenes para la radiación de transición . . . . .	35
3.2	Teoría del campo de polarización variable para la radiación de transición	44
3.2.1	Características generales: cono de emisión, longitud de formación y volumen de coherencia . . . . .	44
3.2.2	Cálculo del campo de polarización . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Teoría alternativa para la radiación de Cherenkov</b>	<b>53</b>
4.1	Polarización dependiente del tiempo en un dieléctrico y radiación de Cherenkov . . . . .	53
4.2	Energía radiada por el medio . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Cristales líquidos colestéricos</b>	<b>61</b>
5.1	Breve historia de los cristales líquidos . . . . .	61
5.2	Tipos principales de cristales líquidos . . . . .	66
5.3	Cristales líquidos nemáticos y colestéricos . . . . .	68
5.3.1	Anisotropía dieléctrica . . . . .	71
5.3.2	Agentes que influyen para cambiar la periodicidad de la hélice .	71
5.4	Interacción de un colestérico con una onda electromagnética incidente en la dirección de la hélice . . . . .	73
5.5	Teoría de la propagación electromagnética en el formalismo de las ma- trices de Jones . . . . .	77
5.5.1	Propagación a lo largo del eje óptico para longitudes de onda mucho menores que la frecuencia de rotación . . . . .	77
5.5.2	Poder rotatorio . . . . .	81
5.5.3	Propagación a lo largo del eje de la hélice para longitudes de onda del orden de la frecuencia de giro . . . . .	83
5.5.4	Coeficientes de reflexión . . . . .	84
5.5.5	Teoría completa de la transmisión a lo largo del eje óptico . . .	87



<b>6</b>	<b>Radiación de transición en un cristal líquido colestérico</b>	<b>91</b>
6.1	Polarización inducida en un colestérico . . . . .	93
6.2	Partícula cargada moviéndose en un colestérico . . . . .	95
6.3	Aproximación de birrefringencia pequeña . . . . .	97
6.4	Partícula cargada a baja velocidad . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>111</b>
<b>8</b>	<b>Apéndice I</b>	<b>113</b>
<b>9</b>	<b>Apéndice II</b>	<b>115</b>
<b>10</b>	<b>Apéndice III</b>	<b>117</b>
<b>11</b>	<b>Apéndice IV</b>	<b>119</b>
<b>12</b>	<b>Apéndice V</b>	<b>121</b>

# 1 Introducción

En esta tesis presentamos los resultados de nuestra investigación entorno a la radiación emitida por cristales líquidos colestéricos debido al paso de una partícula cargada. Aunque este fenómeno es superficialmente parecido a la radiación de Cherenkov, como demostraremos a lo largo de esta tesis, este fenómeno reviste características únicas que nos hacen acercarlo al fenómeno de radiación de transición. Como demostraremos en el capítulo 5, este hecho se debe a la estructura especial que tiene el tensor dieléctrico en un cristal líquido colestérico, el cual varía de una manera helicoidal. Para entender cualitativamente este nuevo fenómeno, será necesario hacer primero una breve revisión de las principales características de la radiación de Cherenkov y de la radiación de transición, donde haremos además una descripción sucinta de las nuevas metodologías desarrolladas para investigar este fenómeno. Por otra parte, es necesario comprender sucintamente la fenomenología detrás de los cristales líquidos, y de los cristales líquidos colestéricos en particular, para finalmente conjuntar estos dos grandes tópicos y mostrar el nuevo desarrollo teórico.

A pesar de ser dos fenómenos macroscópicos ampliamente utilizados en las mismas áreas, la radiación de Cherenkov y la radiación de transición difieren en muchos aspectos clave: la radiación de Cherenkov se refiere a la emisión de radiación por el paso de una partícula cargada en el seno de un medio dispersivo con una velocidad constante mayor a la velocidad de fase de la luz en el medio. Por otra parte, la radiación de transición se presenta cuando una partícula cargada se desplaza a velocidad constante dentro de un medio inhomogéneo, y en el caso más sencillo, podemos considerar que la radiación de transición aparece cuando la partícula atraviesa la frontera entre dos medios homogéneos con características electromagnéticas (constante dieléctrica, conductividad, permeabilidad, etc.) diferentes. Durante este tránsito se emite un pulso radiativo y es a esta radiación a la conocemos como radiación de transición.

La radiación de Cherenkov y la radiación de transición varían tanto en la magnitud de las emisiones como en la dirección de la radiación y también en su dependencia con la velocidad de la partícula excitadora. En el caso de la radiación de Cherenkov, tenemos un límite inferior de la velocidad que la partícula debe tener para lograr emitir radiación a su paso por el medio; este límite inferior es la consabida velocidad de la luz en el medio. Por el contrario, en el caso de la radiación de transición cualquier valor de la velocidad de la partícula mientras atravieza la frontera de los medios dará pie a la emisión de radiación, si bien la intensidad de ésta se ve disminuida considerablemente a medida que la velocidad de la partícula es menor.

En el caso de la radiación de Cherenkov, para calcular la intensidad del campo radiado se suele hacer una transformación de Fourier en el tiempo del campo electromagnético de la carga dentro del medio y posteriormente se utilizan las ecuaciones de Maxwell transformadas con el término fuente apropiado para la carga puntal moviéndose a velocidad constante. Finalmente, se encuentra el campo de radiación a través del potencial vectorial. Este es el procedimiento estándar utilizado por Frank y Tamm [1]. Aunque las expresiones a las que Frank y Tamm llegaron parecían de manera cor-

recta la magnitud y la dirección de la radiación emitida, este método ha sido criticado por ser oscuro y por esconder la física que se encuentra detrás de este fenómeno.

Recientemente, Villavicencio *et. al.* han presentado un nuevo enfoque con el que es posible hacer un tratamiento más directo del fenómeno de radiación de Cherenkov. En esencia, este método consiste en darse cuenta de que la radiación no proviene directamente de la partícula, ya que esta tiene un movimiento a velocidad constante; lo que la partícula realmente hace es propiciar la aparición de dipolos atómicos o moleculares a medida que atraviesa el material. Estos dipolos desaparecen una vez que la partícula se encuentra suficientemente lejos, por lo tanto, son dipolos que varían su magnitud en el tiempo y por lo tanto radían. Cuando la velocidad es menor que la velocidad de fase de la luz dentro del medio, la radiación proveniente de los dipolos se suma de manera destructiva, de modo que no es posible detectar radiación a gran distancia. Sin embargo, cuando la partícula rebasa la velocidad de fase de la luz entonces los dipolos suman su contribución radiativa de manera constructiva y tenemos radiación a gran distancia. Las expresiones que se obtienen mediante este método directo coinciden de manera exacta con las expresiones encontradas por Frank y Tamm, e incluso permiten un cálculo más sencillo y directo de la radiación proveniente de otro tipo de distribuciones de carga que atraviesan el medio como pueden ser dipolos o pulsos electromagnéticos.

Debido a la sencillez de su manejo, esta nueva formulación resulta apropiada para investigar el paso de una partícula cargada a través de un cristal líquido colestérico.

Los cristales líquidos colestéricos están compuestos por el tipo de moléculas conocidas como calamíticas, que son moléculas de forma alargada. El caso más sencillo de cristal líquido de moléculas calamíticas es el llamado cristal líquido nemático. En un nemático, los centros de masa de cada una de las moléculas se desplazan libremente por el volumen del material como si de auténticas moléculas de un líquido se trataran, sin embargo, en su viaje a través del volumen mantienen una orientación preferencial, y esta orientación se convierte en un campo de orientaciones macroscópico. En su configuración de menor energía, el campo vectorial apunta en una sola dirección.

Otro caso ampliamente estudiado de cristal líquido de moléculas calamíticas son los llamados cristales líquidos quirales o cristales líquidos colestéricos. En este caso las moléculas que conforman al cristal líquido tienden a ordenarse en una estructura de planos con simetría de hélice. Podemos visualizar esta estructura de la siguiente manera: en un primer plano todas las moléculas tienden a apuntar en una dirección que se encuentra dentro del mismo plano, al avanzar al siguiente plano, todas las moléculas apuntarán nuevamente en una dirección determinada y dentro del plano pero esta nueva dirección será ligeramente distinta de la dirección del plano precedente. Este cambio en la dirección de orientación es constante a medida que nos desplazamos entre planos adyacentes, de modo que al acumular suficientes planos consecutivos obtendremos una estructura quiral y la dirección en la que apuntan las moléculas al avanzar entre planos es una función periódica del espacio. Esta estructura molecular se refleja de una manera directa sobre las propiedades ópticas del material. El tensor dieléctrico del cristal líquido tiene una periodicidad análoga a la periodicidad de la hélice de orientaciones.

La estructura única de los cristales líquidos colestéricos da pie a la aparición de

fenómenos de interacción entre la luz y el material que son únicos y los abordaremos con cierta profundidad a lo largo de este texto. Entre otros resultados podemos mencionar que existen algunas bandas de frecuencia donde el tránsito de una onda de luz polarizada circularmente está prohibida para el signo de giro igual al giro de la hélice del colestérico. En este caso, si tenemos incidencia de una onda como la hemos descrito, ésta se reflejará totalmente, mientras que la onda complementaria con la dirección de giro contraria ingresará por completo dentro del medio sin ser dispersada.

Con este panorama podemos entender las características generales de la radiación emitida por un colestérico al paso de una partícula cargada. En este caso tendremos dos emisiones radiativas distintas: la primera es análoga a la radiación de Cherenkov y cumple la condición usual de aparecer solamente cuando la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de fase de la luz dentro del medio. El otro tipo de emisión aparece independientemente de la velocidad de la partícula, y como demostraremos, es profundamente dependiente de la estructura quiral del cristal líquido. Este nueva radiación es análoga a la radiación de transición en el sentido de que aparece para cualquier velocidad, y podemos considerar que la estructura del colestérico, con su organización en planos, juega un papel análogo al de la inhomogeneidad generadora en el caso de la radiación de transición. Esta tesis ha sido escrita con el propósito de hacer una exposición exhaustiva de las propiedades de este nuevo fenómeno.

Los temas tratados dentro de este texto están organizados de la siguiente manera: en el capítulo 2 haremos una revisión de la radiación de Cherenkov y su tratamiento teórico usual. Tomaremos un poco de tiempo para desarrollar los principales acontecimientos históricos alrededor de este importante tipo de radiación debido a que no se le ha prestado la atención necesaria en textos en español. En el capítulo 3 desarrollaremos la teoría usual para la radiación de transición y también una propuesta novedosa hecha por Durand y Jack para comprender algunos aspectos claves de esta radiación. En el capítulo 4 presentaremos el nuevo tratamiento para la radiación de Cherenkov desarrollado por Villavicencio *et. al.* y discutiremos sus características. En el capítulo 5 haremos una exposición de las principales propiedades ópticas y electromagnéticas de los cristales líquidos colestéricos y deduciremos algunos de los principales resultados que se obtienen al hacerlos interactuar con campos electromagnéticos. En el capítulo 5 presentaremos el fenómeno de radiación de transición dentro de un cristal líquido colestérico. En este capítulo mostraremos las modificaciones que se tienen que hacer para poder utilizar el método del capítulo 4 cuando pasamos de tener una constante dieléctrica a un tensor dieléctrico. En el desarrollo de este caso mostraremos el surgimiento de los dos tipos de radiación que hemos mencionado e investigaremos de manera pormenorizada el segundo tipo de radiación. Por último, en el capítulo 6 haremos un recuento de todo lo expuesto en nuestro trabajo, discutiremos su pertinencia y mencionaremos las perspectivas de investigación a futuro que se abren a partir de este trabajo.

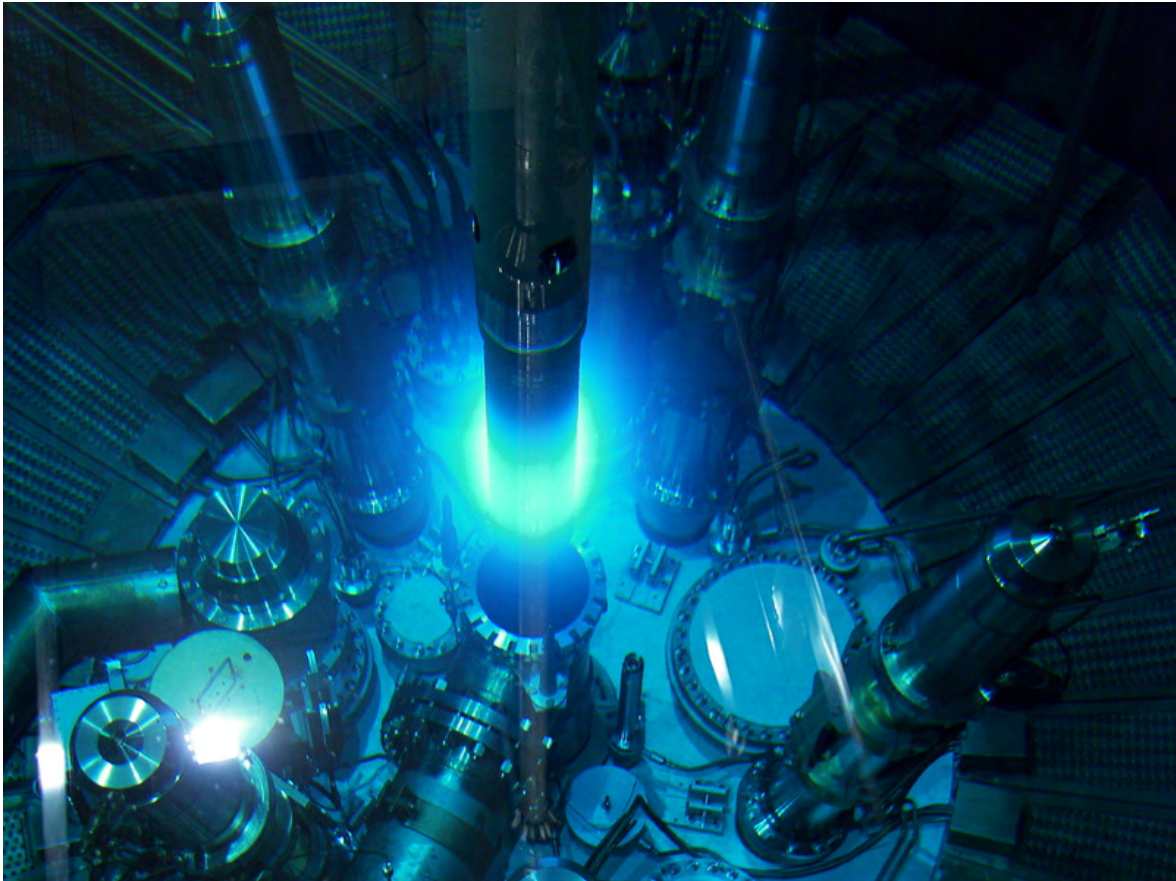


Figura 1. Resplandor de Cherenkov de las barras del reactor del Research Neutron Source Heinz Maier-Leibnitz (FRM II) de la Universidad Técnica de Munich.

## 2 Radiación de Cherenkov

La radiación de Cherenkov, o sea la radiación de choque que emite un medio dispersivo cuando una partícula cargada incide dentro de él a una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz para un cierto intervalo de frecuencias, constituye un fenómeno esencial para la física de hoy en día como lo atestiguan la multitud de detectores de partículas creados con base en este fenómeno y las décadas de su uso [2, 3, 4, 5]. La radiación de Cherenkov ha sido clave en muchas tareas científicas de gran importancia, entre las que podemos mencionar el descubrimiento y caracterización de partículas subatómicas [6], la comprensión de algunas propiedades de la radiación cósmica [2, 3, 5, 7], la detección de neutrinos [9, 10, 11, 12] y recientemente su aplicación en cuestiones médicas [13, 14, 15].

En este capítulo haremos una revisión exhaustiva de los principales tópicos alrededor de la radiación de Cherenkov. Comenzaremos haciendo una breve revisión histórica acerca de su descubrimiento, sobre el cual es difícil encontrar referencias escritas en español. Luego desarrollaremos la teoría clásica de Frank y Tamm, que fue la primera explicación teórica de este fenómeno y que causó no poco revuelo en la comunidad científica por las nuevas suposiciones que incluía. Por último, desarrollaremos algunas de las consecuencias de la teoría de Frank y Tamm, como el tiempo que dura el centelleo de Cherenkov, el efecto del frenado de la partícula y las correcciones cuánticas de los resultados originales de Frank y Tamm.

### 2.1 Breve historia de la radiación de Cherenkov

La historia del descubrimiento y explicación de la radiación de Cherenkov es un capítulo apasionante de la física que recorre todas las grandes escuelas de principios del siglo XX, y es un ejemplo perfecto de cómo el quehacer de la física está surcado por igual de teorías y experimentos unidos de manera inextricable para ayudarnos a ahondar en los secretos de la naturaleza.

La historia de la radiación de Cherenkov comenzó como una especulación en la mente de tres grandes científicos: Oliver Heaviside, William Thompson (Lord Kelvin) y Arnold Sommerfeld. Tanto Kelvin [16]<sup>1</sup> como Sommerfeld [17] especulaban que si una partícula viajaba una velocidad mayor que la de la luz debía aparecer un cono de radiación electromagnética de choque análogo al cono de choque supersónico descrito por Mach. Ambas propuestas revelan una gran intuición, pero fueron desechadas una vez que Einstein estableció la teoría de la relatividad en 1905.

Sorprendentemente las especulaciones de Heaviside [18, 19], que fueron anteriores a los escritos tanto de Kelvin como de Sommerfeld, se referían a partículas cargadas que

---

<sup>1</sup>*If this uniform final velocity of the atom exceeds the velocity of light, by ever so little, a non-periodic conical wave of equi-voluminal motion is produced, according to the same principle as that illustrated for sound by Mach's beautiful photographs of illumination by electric spark, showing, by changed refractivity, the condensational-rarefactional disturbance produced in air by the motion through it of a rifle bullet. The semi-vertical angle of the cone, whether in air or ether, is equal to the angle whose sine is the ratio of the wave velocity to the velocity of the moving body.*

viajan dentro de un dieléctrico con una velocidad mayor que la velocidad de la luz en el dieléctrico, lo cual no implicaba que la partícula superara la velocidad de la luz en el vacío. Con estas suposiciones, Heaviside fue capaz de probar que debía existir un cono de radiación en cuyo vértice estaba la partícula y que el semiángulo  $\theta$  del cono debía satisfacer

$$\text{sen}\theta = \frac{c_0}{v},$$

donde  $v$  es la velocidad de la carga y  $c_0$  es la velocidad de la luz en el medio.

Como ya dijimos, con la llegada de la relatividad la idea de que hubiera partículas que viajaban más rápido que la velocidad de la luz se volvió un tabú dentro de la física. Por otra parte, aún no se conocían fenómenos donde partículas cargadas pudieran cumplir las condiciones que Heaviside había planteado. Todas estas situaciones contribuyeron a que las ideas de estos grandes hombres fueran olvidadas [20].

Sin embargo, en otro frente de la física se estaban abriendo paso los fenómenos que llevarían al descubrimiento de la radiación de Cherenkov. Este otro frente era la investigación de las sustancias radiactivas.

La primera en notar la luminosidad característica de este fenómeno fue la pionera de la investigación de la radiactividad, madame Marie Curie. Ella se dio cuenta que cuando un líquido estaba cerca de una fuente radiactiva potente -como un compuesto de radio- emitía una característica luminosidad azul pálida; pero su preocupación por la naturaleza fundamental de la radiación la distrajo de indagar este brillo azulado [21].

El primer estudio exhaustivo de la radiación proveniente de los líquidos cercanos a fuentes radiactivas fue debido a Lucien Mallet. El primer artículo respecto a este tema, publicado por Mallet, apareció en 1926 bajo el título *Luminescence de l'eau et des substances organiques soumises au rayonnement gama* [22] (Luminiscencia del agua y otras sustancias orgánicas sometidas a radiación gamma). En su primer experimento determinó que la mayor intensidad de luz se obtenía cuando el contenedor tenía una profundidad de unos 10 cm de agua sometidos a radiación. Con menos o más agua la intensidad de la radiación era menor. Éstos sugería que el fenómeno de autoabsorción era muy pequeño o no estaba presente. En su siguiente experimento utilizó placas fotográficas para mostrar que el velado que producía la luz del líquido era mucho mayor -cinco o seis veces mayor- que el velado que producía la fuente radiactiva misma. Mallet también logró demostrar que la mayor parte de la radiación tenía una longitud de onda corta, como era de suponer a partir del color azulado de la luz.

En trabajos posteriores de 1928 y 1929 [23, 24], Mallet hizo una medición exhaustiva del espectro de esta radiación, encontrando que era continuo en un intervalo de 2400 Å a 4360 Å, aunque estos límites se debían a la capacidad de sus instrumentos de medición. El trabajo de Mallet significó un paso adelante en la investigación experimental del efecto Cherenkov, pero las mediciones y los experimentos de Mallet fueron olvidados por la comunidad científica y no tuvieron el impacto que merecían [25, 26, 27].

Poco tiempo después, en 1934, la investigación de la luminosidad proveniente de los líquidos en contacto con sustancias radiactivas fue retomada por una recién formada



Figura 2. Serguei Ivanovich Vavilov y Pavel Alekseevich Cherenkov.

escuela científica, la de la Unión Soviética. En este nuevo ambiente científico cuatro figuras claves le darían un lugar definitivo a esta radiación dentro de la física. El primero de estas cuatro figuras es Serguei Ivanovich Vavilov (figura 2).

Vavilov es recordado en Rusia como uno de los grandes pioneros para la creación de la gran escuela de física que surgió durante los primeros años de la Unión Soviética. Al provenir de una familia acomodada, Vavilov tuvo que sufrir los vaivenes políticos del nuevo estado soviético. Tanto él como su hermano fueron grandes científicos, pero las convulsiones políticas y sociales dentro de la URSS hicieron que su hermano fuera a prisión y acabara sus años cautivo mientras que Serguei subía cada vez más alto en sus responsabilidades administrativas y académicas [28].

A mediados de 1932 Vavilov fue nombrado jefe del Departamento de Física del Instituto de Física y Matemáticas de la Academia Soviética de Ciencias Físicas, que en ese momento se encontraba en Leningrado. Poco después este Departamento se convirtió en el Instituto de Física de la Academia de Ciencias y se trasladó a Moscú, con Vavilov como su director.

Con Vavilov la vida académica y científica en el Departamento, y posteriormente Instituto, incrementó su calidad a un ritmo constante. En una época en la que la ciencia soviética, y sobre todo la física, apenas se notaba en el mundo, Vavilov logró construir uno de los institutos que luego sería clave en el desarrollo de la Guerra Fría debido a la gran calidad de su enseñanza y a sus investigaciones en la frontera de la ciencia. Entre otras cosas, Vavilov creó seminarios en los que asistieron figuras prominentes de la física y las matemáticas, lo cual benefició al ambiente de investigación y a los alumnos de la



institución.

La atmósfera del instituto que dirigía Vavilov, que dio pie a grandes descubrimientos durante el siglo XX, era muy propia: grandes científicos con diferentes personalidades convivían en un ambiente que les posibilitaba discutir constantemente entre ellos y con los alumnos. Algunos de los lugares preferidos para discutir estaban fuera de los seminarios programados, y los pasillos solían ser los lugares predilectos de convivencia. Era un ambiente de confianza donde se hablaba con franqueza, y muchas grandes ideas surgieron en estas pláticas casuales, además de que no había una preocupación histórica por el robo de ideas. Aunque la especialidad de Vavilov era la óptica, supo ver que el futuro de la investigación estaba en la física nuclear, y como director se aseguró de darle un sitio prominente. Vavilov también dispuso que todos los alumnos graduados estuvieran bajo la tutela de algún investigador destacado. Uno de los estudiantes bajo su tutela directa, y el segundo personaje de esta historia, fue Pavel Alekseevich Cherenkov (figura 2). Entre todos los temas propuestos por Vavilov a Cherenkov para llevar a cabo sus investigaciones, él eligió el estudio de la luminiscencia de algunas sales de uranilo ( $\text{UO}_2^{+2}$ ) bajo la acción de la radiación gamma proveniente de compuestos de radio [30].

El propósito de Cherenkov en este tema era hacer algunas comprobaciones rutinarias acerca de las propiedades de la supuesta fluorescencia observada bajo la influencia de los rayos gamma [28, 31]. Ésto es muy natural si recordamos la formación y los intereses de Vavilov. En ese momento, ni Vavilov ni Cherenkov tenían idea de los trabajos hechos por Mallet o de las ideas expuestas por Heaviside [25].

Para llevar a cabo sus mediciones Cherenkov utilizó un método que Vavilov junto a otro científico, E. M. Brumberg, habían desarrollado para la medición de fuentes luminosas muy tenues, el llamado método de extinción visual (*quenching*) [29, 30]. A falta de aparatos sensibles de medición, este método resultó ser el mejor que Cherenkov tenía la mano para llevar a cabo sus mediciones. Este método se basa en dos características cruciales del ojo:

1. El ojo tiene un umbral mínimo de intensidad luminosa por debajo del cual no distingue ninguna iluminación.
2. Este umbral es aproximadamente constante para un mismo ojo si tiene las mismas condiciones cada vez que se mide.

El método consiste en lo siguiente: antes de iniciar las mediciones el observador tiene que adaptarse a condiciones de completa oscuridad por lo menos durante una hora. Después de este tiempo la sensibilidad del ojo aumenta decenas de miles de veces. Luego el observador procedía a hacer las mediciones. Para ello utilizaba el aparato que se muestra de manera esquemática en la figura 3. Este aparato está constituido de la siguiente manera: en 1 tenemos al líquido que emite la luz que vamos a medir. Debajo de él esta la fuente radiactiva que estimula la radiación luminosa. La luz del líquido es recolectada por la lente  $L_1$  y posteriormente se refleja en el prisma 2 para llegar hasta el lente  $L_2$  y luego pasar a través del diafragma 3, que tiene una pequeña abertura de 6 mm de diámetro. Luego de pasar por el diafragma la luz atraviesa la cuña óptica

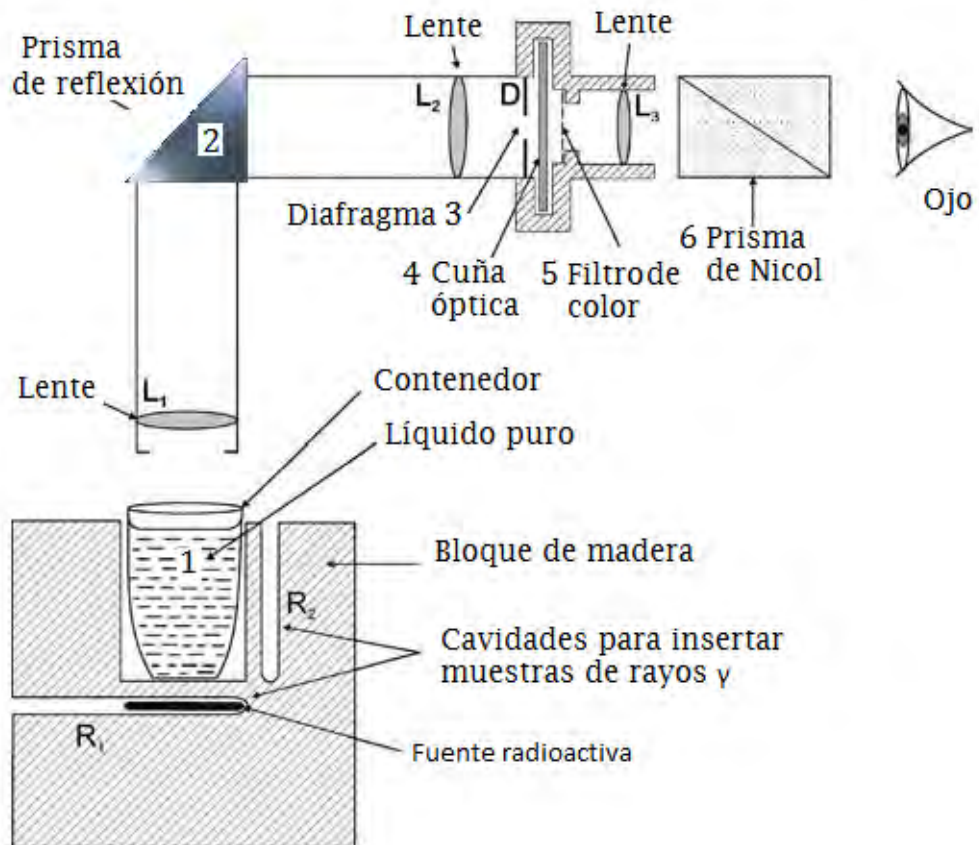


Figura 3. Arreglo experimental para la medición de la luz proveniente de un líquido sometido a radiación gamma utilizado por Cherenkov [28].

4. Esta cuña óptica es transparente en su extremo más angosto y se opaca a medida que avanzamos al otro extremo. El aparato tiene un mecanismo para poder cambiar la ubicación de la cuña óptica y así dejar pasar más o menos luz, además de estar graduada para saber cuánto se avanza. Opcionalmente, se pueden poner los filtros de color en 5 a la luz proveniente de la cuña óptica, mientras que  $L_3$  es una lente para amplificar la imagen proveniente de la cuña. El elemento en 6 es un prisma con el que es posible medir el estado de polarización de la luz. Los elementos 5 y 6 pueden ser removidos o agregados según se requiera. Por último, se puede agregar una placa de plomo para proteger al observador de la radiación proveniente de la fuente radiactiva [30]. A pesar de esta protección, la cantidad de radiactividad con la que Cherenkov trabajaba se consideraría bastante alta para los estándares de hoy en día.

El método de extinción consiste en utilizar la cuña óptica moviéndola desde su punto más transparente hasta el momento en el que el observador deje de notar la luz proveniente del líquido. Con esto podemos tener una medida relativa de la intensidad de distintas fuentes o de distintas longitudes de onda de la misma fuente. Este era un método de medición muy tedioso y agotador, ya que entre otras cosas se necesitaba la presencia de un ayudante que prendiera la luz y registrara la posición de la cuña óptica mientras el observador se ponía una gruesa protección en los ojos y no se podía hacer mediciones por más de dos horas y media al día, de lo contrario los ojos se cansaban y empezaban a aparecer errores en las mediciones.

Curiosamente la presencia de estos ayudantes fue crucial en el desarrollo de la teoría de la radiación de Cherenkov, ya que uno de los ayudantes esporádicos de Cherenkov fue el profesor adjunto Ilya Mikhailovich Frank [25] (figura 4). Vavilov también intervino de manera constante en las mediciones de Cherenkov, ayudando y sugiriendo nuevas ideas [27].

Las intenciones de Cherenkov eran investigar fenómenos de fluorescencia en soluciones de sales de uranilo. Sin embargo en el otoño de 1933, mientras Cherenkov realizaba sus primeras mediciones, decidió comprobar si el contenedor o el solvente aportaban alguna luminosidad extra para poder restarla a sus mediciones de la fluorescencia del compuesto. Cherenkov se llevó una gran sorpresa cuando encontró que el solvente mismo producía la radiación que había estado observando en la solución completa. Inmediatamente fue a la bodega del instituto para tomar todos los líquidos transparentes que pudo y repitió el experimento, y sorprendido observó como todos los líquidos que sometía a los rayos gamma emitían aproximadamente la misma intensidad de radiación ( $\pm 15\%$ ) [32]. Esto preocupó bastante a Cherenkov, ya que quería decir que todas las mediciones hechas hasta entonces eran erróneas. Sin embargo, cuando Vavilov supo de este hecho, se dio cuenta de que se encontraban ante un nuevo efecto que sería interesante investigar, así que le sugirió Cherenkov cambiar el curso de sus investigaciones e indagar la luminiscencia proveniente de los solventes puros.

Posteriormente, Cherenkov comprobó que la luminiscencia que estaba observando no tenía nada que ver con la fluorescencia observada hasta entonces. Un primer experimento que le ayudó a comprobarlo fue medir la luminiscencia proveniente de muestras cada vez más puras de agua. Cherenkov comprobó que la luminosidad de las muestras no

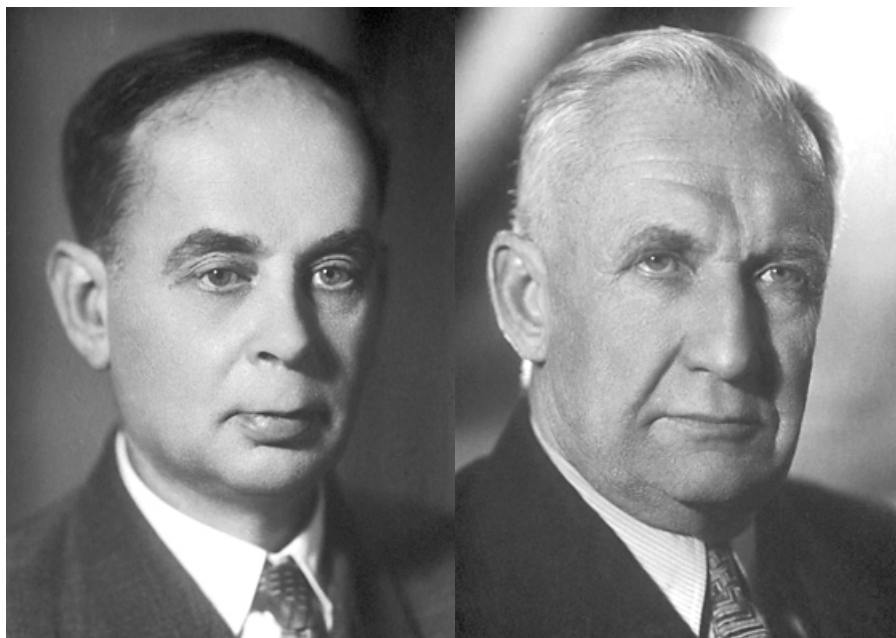


Figura 4. Ilya Mikhailovich Frank e Igor Yevgenyevich Tamm.

variaba apreciablemente. Por otra parte, si se agregaban inhibidores de fluorescencia, como nitrato de plata, yoduro de potasio o nitrobenceno, la luminiscencia tampoco se veía afectada, e incluso cuando el líquido se calentaba no había variación. Todos estos hechos estaban en flagrante contradicción con las propiedades conocidas de la fluorescencia.

Con todos estos experimentos Cherenkov puso fuera de toda duda que éste era un nuevo fenómeno y se dio a la tarea de investigar el espectro de esta nueva fuente luminosa. El primer artículo de Cherenkov reportando lo que había medido en esta luminiscencia fue publicado a finales de mayo de 1934 en los informes de la academia rusa de ciencias [33]. En otro artículo, aparecido ese mismo mes, Vavilov comentó algunas hipótesis acerca de las causas de esta luminosidad pero sin llegar a una conclusión definitiva, aunque consideró que los electrones liberados por la radiación gamma mediante el efecto Compton podían ser los causantes de la luminiscencia a través de un proceso de frenado (bremsstrahlung) [34].

Tomando esta sugerencia en cuenta, Cherenkov comprobó que la misma luminiscencia era obtenida si los líquidos se ponían cerca de una fuente de radiación beta. Aunque todos estos resultados eran excitantes, el interés por el nuevo fenómenos se mantuvo restringido a un número relativamente pequeño de investigadores dentro del Instituto, los allegados más próximos a Vavilov y Cherenkov, aunque éstos eran bastante entusiastas.

Otro de los experimentos claves para elucidar la naturaleza de la radiación fue someter al líquido a un campo magnético. Aunque no se sabe quién propuso esta idea, el hecho es que al hacerlo Cherenkov observó que la intensidad de la luz detectada por su aparato era menor. Esto no se debía a que la luminosidad emitida disminuyera, sino a que había una dirección con mayor luminosidad y al aplicar el campo magnético esta

dirección variaba.

La anisotropía en la distribución de la radiación fue el hecho clave que llevó al establecimiento de la teoría que explicó este fenómeno. Frank escribió tiempo después que cuando le comentó a Ígor Tamm (figura 4), otro alumno del instituto y amigo suyo, sobre este descubrimiento, éste le contestó inmediatamente: “esto significa que hay una radiación coherente en la trayectoria de los electrones de un tamaño comparable a la longitud de onda de la luz” [25]. Esta afirmación de Tamm tiene sentido si tomamos en cuenta que la dirección de la radiación está conectada con el tamaño de la región emisora. Si las regiones de emisión son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la luz emitida ( $L \ll \lambda$ ), el patrón de emisión está orientado en todas direcciones. Pero si el tamaño de la región de emisión es grande comparado con la longitud de onda ( $L \gg \lambda$ ), la radiación se vuelve direccional.

A partir de estas observaciones se desprenden otras: la radiación no puede ser el resultado de la interacción de un electrón con un sólo átomo, debido a que la región de interacción es el orden de magnitud de la luz emitida, y esto quiere decir que el electrón interactúa con cientos de miles de átomos a la vez. Frank tomó nota de todas las ideas de Tamm y creó un modelo simple para encontrar la adición de todas las ondas emitidas por una fuente en movimiento. Para esto utilizó la formulación de frentes de onda de Huygens (figura 5). Mediante este método podemos encontrar la conocida fórmula para el ángulo de emisión de la radiación de Cherenkov en términos de la velocidad del electrón y el índice de refracción del medio.

Frank discutió con muchos colegas esta formulación simple de la radiación de Cherenkov, y aunque más de uno se mostró escéptico, Vavilov encontró muy interesante la explicación y aprobó la formulación de Frank, alentándolo a llevarla hasta sus últimas consecuencias. Otro de los físicos del Instituto, L. I. Mandelstamm, les hizo notar a Frank y Tamm que una partícula moviéndose a velocidad constante no podía radiar, como se desprende de las ecuaciones de Maxwell. La única posibilidad que existía es que la presencia del medio modificara de alguna manera las ecuaciones y la radiación fuera posible. En ese momento esta posibilidad no era evidente.

Finalmente, en 1936 después de una serie de conversaciones con Frank, Tamm decidió escribir las ecuaciones de Maxwell para una carga puntual que se mueven uniformemente en línea recta en un medio dispersivo. El resultado fue sorprendente: todas las características de la radiación estaban presentes en esta formulación, incluso algunas adicionales como el estado de polarización de la luz emitida. El artículo con la teoría de Frank y Tamm fue publicado a inicios de 1937 [1]. Después de esta publicación, Cherenkov realizó nuevas mediciones que confirmaron todos los resultados predichos por la teoría.

A pesar de esto, todavía tendría que pasar tiempo para que la explicación de Frank y Tamm fuera ampliamente aceptada. Un primer intento de Cherenkov de publicar una nota en inglés en la revista Nature fue infructuoso [31], sin embargo Vavilov lo alentó para que mandara su publicación a la revista americana Physical Review, donde el artículo fue impreso en 1937 [35]. Al año siguiente, un par de científicos estadounidenses, G. B. Collins y V. G. Reiling sorprendidos por el resultado decidieron comprobar lo sug-

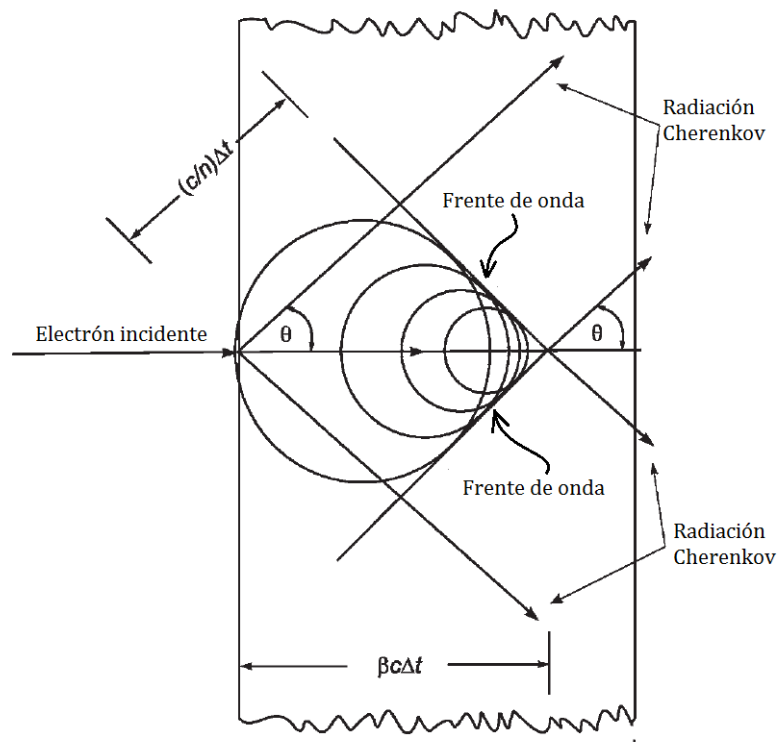
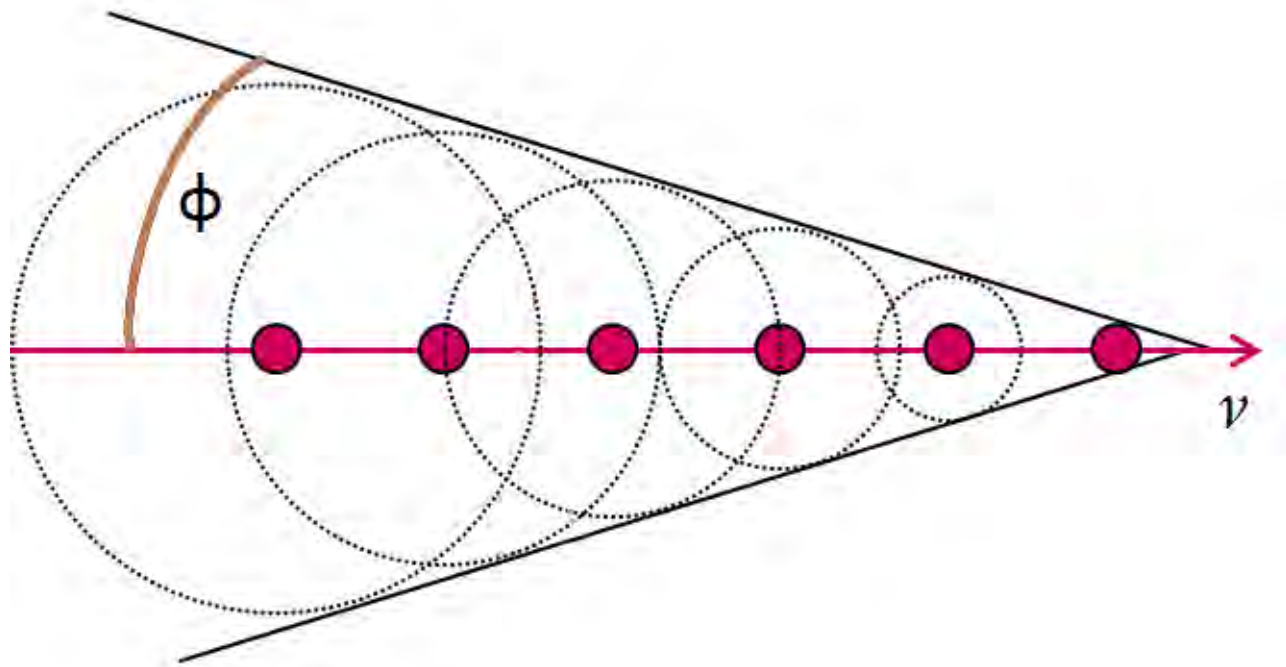


Figura 5. Adición constructiva de frentes de onda al paso de un electrón con una velocidad mayor que la velocidad de fase de la luz en el medio [28].

erido en el artículo para lo cual utilizaron electrones acelerados a energías de alrededor de 2 MeV, con una intensidad de corriente de aproximadamente 10 mA. En el reporte de sus mediciones [36], Collins y Reiling remarcan que sus experimentos están de acuerdo con las expresiones obtenidas por Frank y Tamm pero son renuentes a aceptar su explicación y argumentaron que era imposible que los electrones moviéndose a velocidad constante produjeran radiación, de modo que debía existir un proceso de frenado que era el responsable de las emisiones. Sin embargo, la teoría de Frank y Tamm superaría con el tiempo todas estas objeciones.

A partir de estas primeras publicaciones, la radiación de Cherenkov comenzó a abrirse paso a un fructífero camino dentro de la física. En la década siguiente, un nuevo aparato vendría a revolucionar este campo: el fotomultiplicador. El primer intento de combinar el efecto Cherenkov con el poder del fotomultiplicador fue hecho por Getting en 1947. El primero en lograr la medición de partículas aisladas cargadas viajando a gran velocidad fue Jelley en 1951. Poco después, Mather y Marshall publicaron sus primeras mediciones directas de velocidad de partículas aceleradas utilizando el efecto Cherenkov [27]. Posteriormente en 1955 Chamberlain y su equipo de trabajo anunciaron descubrimiento del antiprotón con una configuración que incluía detectores de Cherenkov [6].

Desde entonces la radiación de Cherenkov ha sido un aliado infaltable en la física de altas energías y en la investigación de partículas cósmicas. Un ejemplo en nuestro país es el *High Altitude Water Cherenkov detector* (HAWC), un detector de partículas cósmicas que utiliza agua como medio de emisión de radiación de Cherenkov [37].

## 2.2 Teoría de Frank y Tamm de la radiación de Cherenkov

A continuación expondremos la teoría desarrollada por Frank y Tamm. Esta explicación está basada principalmente en las referencias [1, 27].

Para el desarrollo de su teoría, Frank y Tamm tomaron en cuenta varias simplificaciones, entre otras que el medio era continuo, homogéneo e isotrópico. El valor del índice de refracción puede variar dependiendo de la frecuencia de la radiación considerada. Por otra parte el medio tiene una permeabilidad magnética  $\mu = 1$ . También supondemos que la trayectoria de la partícula es rectilínea y con velocidad constante.

Para proceder a realizar los cálculos debemos tomar la transformada de Fourier en el tiempo de todos los campos involucrados. En el caso del campo eléctrico tenemos:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_\omega e^{i\omega t} d\omega.$$

Procediendo de esta manera, la relación entre el campo eléctrico y el campo de desplazamientos dentro del medio es

$$\mathbf{D}_\omega = n^2 \mathbf{E}_\omega, \tag{1}$$

donde  $n$  es el índice de refracción del medio.

Las ecuaciones de Maxwell en el medio son:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (5)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el espacio libre,  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente y  $\rho$  la densidad de cargas libres.

Haciendo la transformada de Fourier en la variable tiempo de las ecuaciones de Maxwell y reescribiéndolas como funciones del potencial vectorial  $\mathbf{A}$  y del potencial escalar  $\phi$  llegamos al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\mathbf{H}_\omega = \nabla \times \mathbf{A}_\omega, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \mathbf{A}_\omega = -\frac{4\pi \mathbf{J}_\omega}{c}, \quad (7)$$

$$\nabla^2 \phi_\omega + \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \phi_\omega = -\frac{4\pi}{n^2} \rho, \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_\omega = -\frac{i\omega}{c} \mathbf{A}_\omega - \frac{ic}{\omega n^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}_\omega), \quad (9)$$

donde hemos hecho uso de la ecuación (1) y donde utilizaremos la norma de Lorenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\omega + \frac{i\omega}{c} n^2 \phi_\omega = 0. \quad (10)$$

Si una partícula con carga  $q$  se mueve a través del medio a lo largo del eje  $z$  con una velocidad constante  $\mathbf{v}$ , la densidad de corriente es igual a

$$\mathbf{J} = J_z \hat{z} = q \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) \mathbf{v}, \quad (11)$$

donde  $\delta$  denota la función de Dirac. Tomando en cuenta que  $\mathbf{v} = v\hat{z}$ , las componentes  $J_x$  y  $J_y$  son ambos cero. Tomando en cuenta que  $\delta(a\tau) = \frac{1}{|a|} \delta(\tau)$  y que  $\delta(\tau) = \delta(-\tau)$  podemos realizar la transformación de Fourier correspondiente en  $J_z$ :



$$\begin{aligned}
J_z(\omega) &= \mathcal{F}_t [J_z] \\
&= \mathcal{F}_t [qv\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt)] \\
&= q\delta(x)\delta(y)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t-\frac{z}{v}\right)e^{i\omega t}dt \\
&= \frac{q}{2\pi}\delta(x)\delta(y)e^{i\omega\frac{z}{v}},
\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{F}_t$  denota la transformada de Fourier en el tiempo. Si tomamos en cuenta que  $\delta(x)\delta(y) = \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$ , podemos relizar un cambio de coordenadas a coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$  y obtenemos

$$J_z(\omega) = q\frac{\delta(\rho)}{4\pi^2\rho}e^{-i\omega z/v}. \quad (12)$$

Para las componentes del potencial vectorial en la ecuación (7) podemos tomar  $A_\rho = A_\phi = 0$ ; para la componente  $A_z$  proponemos que

$$A_z(\omega) = u(\rho)e^{-i\omega z/v}. \quad (13)$$

Insertando esta propuesta en la ecuación (7) obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + s^2 u = \frac{q}{\pi c\rho}\delta(\rho), \quad (14)$$

donde

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2}(\beta^2 n^2 - 1) = -\sigma^2, \quad (15)$$

donde  $\beta = \frac{v}{c}$ . Por lo anterior podemos concluir que  $u$  es una función cilíndrica que satisface la ecuación de Bessel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + s^2 u = 0 \quad (16)$$

en todo punto del espacio con la excepción del polo  $\rho = 0$ . Para encontrar la condición que  $u$  debe satisfacer en  $\rho = 0$ , primero reemplazemos el lado derecho de la ecuación (14) por una función  $f(\rho)$  definida como

$$f(\rho) = \begin{cases} -\frac{2q}{\pi c\rho_0} & \rho < \rho_0 \\ 0 & \rho > \rho_0 \end{cases}.$$

Si integramos la ecuación (14) sobre la superficie de un disco de radio  $\rho_0$  y tomando el límite  $\rho_0 \rightarrow 0$  obtenemos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{q}{\pi c}. \quad (17)$$

Ahora, consideremos dos casos posibles: primero, la partícula que se mueve a baja velocidad, es decir a una velocidad tal que  $\beta n < 1$ . En este caso  $s^2 < 0$  y  $\sigma^2 > 0$ . La solución de la ecuación (16) que satisface la condición (17) y desaparece en el infinito es:

$$u = \frac{iq}{2c} H_0^{(1)}(i\sigma\rho), \quad (18)$$

donde  $H_0^{(1)}$  es la función de Hankel del primer tipo. Si  $\sigma\rho \gg 1$ , se puede usar el valor asintótico de  $H_0^{(1)}$  y obtener, de acuerdo con las ecuaciones (13) y (15), que

$$A_z = \frac{q}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\sigma\rho + i\omega(t - z/v)]}{\sqrt{2\pi\sigma\rho}} d\omega, \quad (19)$$

por lo tanto, en el caso de velocidades pequeñas, el campo de radiación de la partícula disminuye exponencialmente con  $\rho$ , de modo que en un punto alejado de la trayectoria no observaremos radiación.

Segundo caso, a velocidades altas, cuando  $\beta n > 1$ , el parámetro  $s$  en la ecuación (15) es real y la solución general de las ecuaciones (14) y (16) representa una onda cilíndrica. Especificando que la solución  $u$  represente una onda saliente y no una onda entrante, obtenemos la siguiente solución para la ecuación (16) y que satisface (17):

$$u = -\frac{iq}{2c} H_0^{(2)}(s\rho), \quad \omega > 0, \quad (20)$$

y una expresión conjugada compleja si  $\omega < 0$ , donde  $s$  es positiva. Usando el valor asintótico de  $H_0^{(2)}$  para  $s\rho \gg 1$  obtenemos que

$$A_z(\omega) = -\frac{q}{c\sqrt{2\pi s\rho}} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z\cos\theta + \rho\text{sen}\theta}{c/n}\right) + \frac{3}{4}\pi i\right], \quad \omega > 0,$$

donde  $\theta$  se define por la relación de coherencia  $\cos\theta = 1/\beta n$ , y por lo tanto si  $\beta n > 1$  observaremos una onda se propaga a lo largo de la dirección  $\theta$ . El vector del campo eléctrico de la onda se encuentra alineado con el plano meridiano  $(z, \rho)$ .

Calculando el valor de los campo en la zona de radiación con ayuda de la ecuación (6) y (7), hay tres y sólo tres componentes de campo distintas de cero, que son

$$\begin{aligned} H_\phi &= -\frac{a}{\sqrt{\rho}} \int \sqrt{s} \cos\chi \cdot d\omega \\ E_\rho &= -\frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \frac{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}{\beta^2 n^2 \sqrt{s}} \cos\chi \cdot \omega d\omega, \\ E_z &= +\frac{a}{c\sqrt{\rho}} \int \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \frac{1}{\sqrt{s}} \cos\chi \cdot \omega d\omega \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $a = \frac{q}{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  y

$$\chi = \omega \left[ t - \frac{z \cos \theta + \rho \sin \theta}{c/n} \right] + \frac{\pi}{4}.$$

Hay que recordar que al integrar alguna de las ecuaciones en (21) tenemos que tomar como intervalo de integración aquel cuyos valores de  $\omega$  sean tales que  $\beta n(\omega) \geq 1$ . La energía total irradiada a través de la superficie de un cilindro de longitud  $l$  cuyo eje coincide con trayectoria de la partícula es igual a:

$$\mathcal{E} = 2\pi \rho l \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}] dt.$$

Con ayuda de la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega' t + \beta) dt = \pi \delta(\omega - \omega'),$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos fases arbitrarias, podemos llegar a la ecuación fundamental para la potencia radiada por unidad de longitud de la radiación de Cherenkov:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{q^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) \cdot \omega d\omega. \quad (22)$$

Debemos analizar con cuidado esta expresión. Si consideramos que el índice de refracción es una constante, que no depende de  $\omega$ , entonces el resultado de la integración en ecuación (22) es infinito. Este resultado no tiene sentido físico, pero debemos recordar que el índice de refracción siempre depende de la frecuencia (medios dispersivos), y solo en un intervalo de frecuencias se puede cumplir con la condición  $\beta n(\omega) > 1$ .

Siendo más específicos, podemos decir que en la mayoría de los medios transparentes en longitudes de onda visibles las bandas de absorción suelen encontrarse en la región ultravioleta y en algunas longitudes de onda mayores que el visible. En la región de rayos X tenemos que siempre  $n(\omega) < 1$  y por lo tanto la radiación de Cherenkov está prohibida, mientras que en las frecuencias de radio  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon}$ , con  $\epsilon$  la constante dieléctrica del medio, y de nuevo hay una banda de paso como en la región visible.

Por último, señalaremos otra limitación de la radiación de Cherenkov, que aunque en la práctica es artificial, de todas maneras es instructiva, nos referimos al tamaño finito del electrón. Para que la radiación de Cherenkov tenga sentido, ésta debe limitarse a longitudes de onda mayores que el "diámetro"  $d$  clásico del electrón. Si integramos la ecuación (22) desde  $\omega = 0$  a  $\omega = c/nd$  (es decir, de  $\lambda = \infty$  a  $\lambda/2\pi = d$ ) obtenemos

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{q^2}{2n^2 d^2} \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right). \quad (23)$$

Puesto que  $d = 5.6 \times 10^{-13}$  cm y  $\lambda_{\min} = 2\pi d = 3,5 \times 10^{-4} \overset{\circ}{\text{A}}$ . Aunque este límite es artificial, ya que esta longitud de onda está en la región de los rayos  $\gamma$ , es interesante

saber que Sommerfeld[17] obtuvo una expresión muy similar a la ecuación (23) en el caso de un electrón que se mueve en el vacío con una velocidad constante  $v > c$ . Este resultado fue anterior al establecimiento de la teoría de la relatividad.

### 2.2.1 Energía radiada y distribución espectral

Con el propósito de encontrar la potencia radiada por un dieléctrico podemos proceder de dos maneras: podemos medir el índice de refracción para un conjunto suficientemente grande de frecuencias y construir la función de dispersión del material o podemos modelar el comportamiento del medio dispersivo a partir de algunas suposiciones razonables. Ambos procedimientos tienen ventajas y desventajas. En este capítulo nos interesa ganar intuición acerca de los procesos que se están llevando a cabo, así haremos una estimación de la potencia radiada tomando en cuenta un modelo sencillo para calcular el índice de refracción de un medio transparente. Comencemos considerando que el medio está constituido por un conjunto de átomos con sus electrones ligados pero que son capaces de desplazarse de su posición promedio al aplicar un campo eléctrico y crear un dipolo  $p$ , entonces

$$P = Np = -Nes,$$

donde  $N$  es la densidad de electrones ligados por unidad de volumen y  $e$  es la carga del electrón,  $p$  es el momento dipolar de cada uno de los dipolos,  $P$  es la polarización total y  $\mathbf{s}$  es el vector de desplazamiento de las cargas. Si consideramos que los electrones regresan de una manera suave a su posición de equilibrio cuando dejamos de aplicar el campo  $E$ , podemos modelar su comportamiento por la siguiente ecuación diferencial:

$$m\ddot{\mathbf{s}} + f\mathbf{s} = -eE,$$

donde  $f$  es la fuerza restituyente. Esta ecuación puede reescribirse como:

$$\ddot{\mathbf{s}} + \omega_0^2\mathbf{s} = -\frac{e}{m}E,$$

donde  $\omega_0^2 = \frac{f}{m}$ . Escribiendo esta ecuación en términos de la polarización  $P$  obtenemos que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)P = -\frac{Ne^2}{m}E. \quad (24)$$

Recordando las ecuaciones de Maxwell, ecuaciones (3) y (5) y considerando que el dieléctrico no tiene cargas ni corrientes libres podemos llegar a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(E + P) = \nabla^2 E. \quad (25)$$

Podemos eliminar a  $P$  en la ecuación (25) utilizando la ecuación (24) de modo que obtenemos

$$\frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} E - \nabla^2 E \right) + \frac{Ne^2}{m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0. \quad (26)$$

Tomando en cuenta que estamos trabajando con ondas planas, consideremos una onda plana dada por  $E_y = Ae^{i(kx - \omega t)}$ . Al sustituir esta expresión en ecuación (26) tenemos que

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) (-\omega^2 + c^2 k^2) - \frac{Ne^2 c^2}{m} \omega^2 = 0.$$

Al despejar a  $k$  obtenemos

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right).$$

A partir de esta expresión podemos calcular el cuadrado del índice de refracción que es

$$n^2(\omega) = \frac{c^2}{(\omega^2/k^2)} = 1 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (27)$$

donde  $A = Ne^2/m$ . La ecuación (27) es análoga a la ecuación (11) de la sección 17 de [38]. Con esta expresión, podemos hacer una estimación de la energía radiada utilizando la ecuación (22). Al sustituir la ecuación (27) en (22), obtenemos la siguiente expresión aproximada para la pérdida de energía por unidad de longitud para un electrón rápido ( $\beta \sim 1$ ):

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{q^2 \omega_0^2}{2c^2} (\epsilon - 1) \ln \left( \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} \right), \quad (28)$$

donde  $\epsilon = n^2(0) = 1 + A/\omega_0^2$  es la constante dieléctrica del medio.

En un medio típico  $\omega_0 = 6.10^{15} \text{s}^{-1}$ , entonces  $d\mathcal{E}/dl$  es del orden de varios keV por cm, o sea  $\sim 0.1\%$  de la pérdida de energía por ionización para varias partículas relativistas.

Con frecuencia es más útil expresar la intensidad de la radiación en términos del número de fotones. A partir de la ecuación (22) es fácil deducir que el número de fotones emitidos por un electrón dentro de un intervalo espectral definido por las longitudes de onda  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  es igual a

$$N = 2\pi\alpha l \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right),$$

o puesto que  $1/\beta n = \cos\theta$  (ángulo de emisión de Cherenkov) entonces

$$N = 2\pi\alpha l \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \text{sen}^2\theta,$$

donde  $\alpha$  es la constante de estructura fina  $e^2\hbar c = 1/137$  y  $n$  es el índice de refracción del medio. La distribución espectral de la radiación puede expresarse de varias maneras. Dado que la intensidad de la luz de frecuencia  $\nu = (\omega/2\pi)$  puede escribirse como

$\mathcal{E} = N \cdot h\nu$  donde  $h$  es la constante de Planck, podemos escribir la distribución espectral de cualquiera de las siguientes cuatro formas:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2 \mathcal{E}}{dl d\omega} \right) & \quad (\text{energía por unidad de trayecto y por} \\ & \quad \text{unidad de intervalo de frecuencia)} \\ \left( \frac{d^2 \mathcal{E}}{dl d\lambda} \right) & \quad (\text{energía por unidad de trayecto y por} \\ & \quad \text{intervalo de longitud de onda)} \\ \left( \frac{d^2 N}{dl d\omega} \right) & \quad (\text{número de fotones por unidad de trayecto} \\ & \quad \text{y por unidad de intervalo de frecuencias)} \\ \left( \frac{d^2 N}{dl d\lambda} \right) & \quad (\text{número de fotones por unidad de trayecto} \\ & \quad \text{y por intervalo de longitud de onda)} \end{aligned}$$

### 2.2.2 Campo de radiación en las cercanías del frente de onda

El campo, que es estacionario respecto al electrón, es discontinuo y está limitado por el cono

$$z = vt - \rho \sqrt{\beta^2 n^2 - 1},$$

para el cual el vértice  $\rho = 0$  y  $z = vt$ , coincide con la posición instantánea del electrón. Este cono no es el cono Cerenkov normal sino el complementario que coincide con el frente de onda.

Inmediatamente fuera de este cono el campo es cero. Si consideramos que el índice de refracción es constante, entonces en la superficie del cono los vectores  $A$ ,  $E$  y  $H$  son infinitos y disminuyen gradualmente a medida que nos movemos hacia el interior del cono. Dentro del cono la magnitud de los campos está dada por las siguientes relaciones simples

$$\begin{aligned} H_\phi &= -Q\beta\rho/R^3 \\ E_\phi &= -Q\rho/n^2 R^3 \\ E_z &= +Q(vt - z)/n^2 R^3 \end{aligned} \tag{29}$$

donde

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(z - vt)^2 - \rho^2 (\beta^2 n^2 - 1)} \\ Q &= 2q (\beta^2 n^2 - 1) \end{aligned} \tag{30}$$

En presencia de dispersión, los campos no son infinitos y las expresiones correspondientes a la ecuación (29) y (30) son mucho más complejas y dependen de  $\omega$  y de la ley de dispersión ( $dn/d\omega$ ) para el medio.

### 2.2.3 Duración del destello luminoso

Puesto que en un medio no dispersivo todas las frecuencias se suman en el mismo cono, la duración del impulso de luz en cualquier punto al que llegue la radiación será infinitamente corto. Sin embargo, si el medio es dispersivo, el ángulo de Cherenkov  $\theta$  es diferente para diferentes longitudes de onda y los trenes de ondas se separarán entre sí. La duración  $\Delta t$  del impulso luminoso observado a lo largo de una línea paralela al eje de la partícula, a una distancia  $\rho$  a partir de este eje es

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{\rho}{\beta c} \left\{ \sqrt{\beta^2 n^2 (\omega_2) - 1} - \sqrt{\beta^2 n^2 (\omega_1) - 1} \right\} \\ &= \frac{\rho}{\beta c} (\tan\theta_2 - \tan\theta_1)\end{aligned}\tag{31}$$

donde  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son los límites de frecuencia del receptor de luz y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los correspondientes ángulos de Cherenkov.

Por ejemplo, supongamos que consideramos la observación del flash de luz a una distancia de 10 cm al lado de la trayectoria de un electrón rápido que viaja a través de agua ( $\beta = 1$ ,  $n = 1.33$  y  $\theta = 41^\circ$ ). A partir de (31), tomando por ejemplo el intervalo de longitudes de onda entre  $\lambda_{\min} = 4000 \text{ \AA}$  y  $\lambda_{\max} = 6000 \text{ \AA}$  encontramos que  $\Delta t = 5 \times 10^{-12} \text{ s}$ .

## 2.3 Modificación de algunas de las suposiciones de Frank y Tamm

En la práctica, las suposiciones de Frank y Tamm son poco realistas, y nuevos e interesantes efectos pueden aparecer si permitimos que algunas de estas suposiciones se relajen. A continuación veremos algunas modificaciones en el caso de que tomemos en cuenta un cambio en las condiciones movimiento y ahora sea el líquido el que esté en movimiento, una expresión para el frenado de la partícula y algunas de las consecuencias de tomar en cuenta efectos cuánticos.

### 2.3.1 Efectos por cambio de sistema de referencia

Hasta este momento hemos trabajado sobre la base de pensar que el electrón se mueve a través de un medio dieléctrico y un observador mide los efectos producidos en un sistema de referencia inercial. En el caso de que el observador y el electrón estuvieran quietos dentro de su sistema inercial y fuera el medio dieléctrico fuera un líquido en movimiento, aparecerían ciertos efectos interesantes. Este problema fue investigado en 1956 por Nag y Sayied en [40].

Dado que el campo eléctrico en el sistema de reposo del electrón es estacionario, se deduce que la intensidad magnética  $H$  desaparecerá. Sin embargo, la inducción magnética  $B$  es distinta de cero siempre que  $n \neq 1$ . Este campo magnético es causado por las variaciones de la polarización del medio a medida que se mueve a través del

campo eléctrico no homogéneo que rodea al electrón (estacionario). Como podemos ver, la influencia del campo de polarización siempre resulta ser crítica. La presencia del vector  $B$ , y la influencia del movimiento del medio dispersivo en el campo del electrón, son responsables de la radiación que se observaría en un sistema que se mueve con respecto al medio y estacionario con respecto de la partícula.

Nag y Sayied asumieron que su medio tenía propiedades tanto magnéticas como dieléctricas, y por ello sus resultados son más generales que los de Frank y Tamm. El rendimiento de la radiación en la formación de Nag y Sayied está dado por

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{q^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} \mu \left( 1 - \frac{1}{\epsilon \mu \beta^2} \right) \omega d\omega$$

La asimetría de  $\epsilon$  y  $\mu$  en esta ecuación proviene de la asimetría entre  $D$  y  $B$  en las ecuaciones de divergencia (2) y (4), derivadas a su vez de la inexistencia de monopolos magnéticos libres.

### 2.3.2 Frenado de la partícula

Volviendo al caso de la radiación de Cherenkov normal, podemos preguntarnos cuan estricta es la condición, asumida durante el tratamiento de Frank y Tamm, de que la velocidad de la partícula es constante. A medida que la partícula atraviesa el medio, perderá energía por ionización y *bremstrahlung*, y su dirección de movimiento también se verá afectada por estos procesos y por difusión de Coulomb no radiativa. A medida que la partícula se ralentiza, el valor de  $\beta$  cambiará y, por lo tanto, el ángulo de Cherenkov  $\theta$ . Para que la coherencia se mantenga es necesario que la desaceleración de la partícula no sea demasiado rápida. La condición que hay que satisfacer puede escribirse como

$$T \cdot \left( \frac{dv}{dt} \right) \ll (c/n),$$

donde  $T$  es el período de la radiación que estemos considerando y  $(dv/dt)$  es la desaceleración del electrón. Esta condición en la práctica se satisface fácilmente en la región visible, incluso para la fuente dominante de pérdida de energía, a saber, ionización, que es  $(d\mathcal{E}/dl) \sim 2 \text{ MeV} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ .

### 2.3.3 Modificaciones cuánticas del efecto Cherenkov

Hasta ahora hemos presentado la teoría clásica de la radiación de Cherenkov y hemos despreciado muchos efectos microscópicos que tienen relevancia a ciertas escalas. En particular, hemos ignorado los efectos debidos a la reacción de la radiación emitida sobre el movimiento de la partícula. Cuando se tienen en cuenta estos efectos, las expresiones para la condición de radiación y la producción de energía tienen formas que difieren ligeramente de las obtenidas en la teoría original. Ginzburg hizo un tratamiento de los



efectos cuánticos en 1940 [41]. La discusión a continuación está basada en un artículo de R. T. Cox aparecido en 1944 [42].

Es posible llegar a la condición de radiación utilizando la conservación del momento y de la energía. Siguiendo a Cox, supongamos que una partícula cargada de masa en reposo  $m$  está viajando a través del medio a una velocidad  $u$  constante. Supongamos que en algún momento de su trayectoria emite un fotón de energía  $h\nu$  en un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección original de la partícula. Entonces la partícula experimentará una pérdida instantánea de energía y ahora viajará con una nueva velocidad  $v$  en algún ángulo  $\phi$  respecto a su dirección original. La conservación del momento nos dice que

$$mv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cos\phi + \frac{h}{\lambda} \cos\theta = mu \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

y

$$mv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{sen}\phi - \frac{h}{\lambda} \text{sen}\theta = 0.$$

Por otra parte, la conservación de la energía nos dice que

$$mc^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + h\nu.$$

Eliminando  $\phi$  y  $v$  y escribiendo  $\nu = c/n\lambda$ , donde  $n$  es el índice de refracción del medio, obtenemos:

$$\cos\theta = \frac{c}{nu} + h \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n^2 - 1}{2mun^2\lambda},$$

que podemos reescribir como

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n} + \left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2}\right), \quad (32)$$

donde  $\Lambda$  es la longitud de onda de Broglie de la partícula

$$\Lambda = \frac{h\sqrt{1 - \beta^2}}{mu} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} \lambda_0,$$

y  $\lambda_0$  es la longitud de onda Compton,  $\lambda_0 = 0.024 \overset{\circ}{\text{A}}$ .

El segundo término en la ecuación (32) por el cual la emisión cuántica difiere de la de la radiación clásica es extremadamente pequeño.

Con la condición cuántica para la radiación, ecuación (32), Ginzburg usó la ecuación de Schrödinger para obtener la siguiente expresión para la radiación emitida por una carga  $q$  sin momento magnético[41]:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{q^2}{c^2} \int \left\{ 1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)} \left[ 1 + \frac{n^4}{4} \left( \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right)^2 + n^2 \left( \frac{\hbar\omega}{mc^2} \right) \right] \right\} \omega d\omega. \quad (33)$$

Estrictamente hablando, la expresión (33) sólo es válida en el caso no relativista. Dado que  $\beta n > 1$  debemos asumir que  $n$  es grande. Hay que notar que la ecuación 33 difiere de la expresión clásica sólo por la presencia de dos términos pequeños de orden superior. Es interesante notar que mientras la expresión clásica para  $(d\mathcal{E}/dl)$  diverge para un medio dispersivo, la ecuación (33) no lo hace.

Como podemos ver, el campo de la radiación de Cherenkov se puede extender en muchas direcciones, pero el tratamiento que adoptemos influencia fuertemente la metodología que podemos utilizar. En la siguiente sección trataremos el problema de la radiación de transición, y veremos el enfoque clásico con el que está se ha comprendido y un enfoque alternativo que nos lleva a los mismos resultados.



### 3 Radiación de transición

Si una carga se mueve con velocidad constante dentro de un medio material con propiedades electromagnéticas constantes tanto en el espacio como en el tiempo la radiación de Cherenkov es la única forma de radiación que se genera. Pero si el medio no es homogéneo, o sus propiedades varían con el tiempo, entonces la situación cambia por completo y en este caso se puede presentar una nueva forma de radiación: la radiación de transición [43].

En la situación real la radiación de transición coexiste con la radiación de Cherenkov y también con otros tipos de radiación debidas al paso de partículas cargadas, como la radiación de *bremstrahlung* o la radiación de sincrotrón. Sin embargo la radiación de transición se diferencia claramente de cualquier otra forma de radiación, ya que a diferencia de la radiación de *bremstrahlung* y la radiación de sincrotrón, la radiación de transición ocurre bajo la condición de que la partícula se mueva en todo momento a velocidad constante, en lo cual es análoga a la radiación de Cherenkov, pero a diferencia de esta última la radiación se da para cualquier velocidad.

El caso más sencillo en el que podemos observar la generación de radiación de transición es cuando una partícula cargada cruza la frontera entre dos medios con propiedades eléctricas distintas, pudiendo ser uno de los medios el vacío. En este caso el origen de la radiación es sencillo de explicar: mientras la partícula viaja en el primer medio, el campo electromagnético total tiene dos componentes: i) el propio campo electromagnético de la partícula en el primer medio ii) más el campo de la partícula imagen que se forma en el otro medio. En el momento en el que la partícula cruza la frontera entre los dos medios ella y su imagen se aniquilan parcial o totalmente dependiendo de la situación concreta y al pasar al siguiente medio se crea una nueva partícula imagen que ahora está en el segundo medio y que es distinta de la primera imagen. En este proceso de aniquilación y reconstrucción es cuando la radiación se emite. La radiación de transición es un fenómeno asimétrico, ya que la intensidad de la radiación difiere dependiendo de cual sea el medio de origen y cual sea el medio en que incide la partícula.

La radiación de transición fue propuesta teóricamente en 1946 por I. Frank y V. L. Ginzburg [44] en un artículo publicado en ruso, y poco después en un breve resumen en inglés. En este artículo los autores consideraban que la partícula viajaba desde el vacío hacia un conductor perfecto (medio metálico). En este caso, el material se puede considerar como un espejo perfecto al crear la partícula imagen y la radiación emitida es igual a la radiación que tendríamos si una carga  $q$  y otra  $-q$  viajaran y frenaran abruptamente en un mismo punto [45].

En los años en que se propuso la existencia de la radiación de transición, no existían detectores suficientemente precisos ni fuentes de partículas aceleradas suficientemente poderosas para comprobar la existencia de este proceso [46]. Para finales de la década de 1950 se hicieron los primeros esfuerzos para detectar esta radiación. La característica crucial en la que se basaron estos experimentos era que la radiación debía tener un estado de polarización muy preciso según lo habían predicho Ginzburg y Frank, y como

lo remarcaron en otros trabajos [44, 46, 47]. La primer confirmación experimental del fenómeno fue hecha por Goldsmith y Jelley en 1959 [48], y a partir de esta comprobación la cantidad de artículos referentes al tema se incrementó exponencialmente, sobre todo en relación a la creación, comprensión y mejoramiento de detectores de partículas. Hoy en día la radiación de transición es un tópicamente ampliamente estudiado y los detectores basados en este principio se encuentran en una gran cantidad de aceleradores [49, 50, 51, 53]. A pesar de esto, no debemos dejar de lado el hecho de que la radiación de transición es un fenómeno ubicuo y su importancia teórica en áreas como la astrofísica está fuera de toda duda [54, 55].

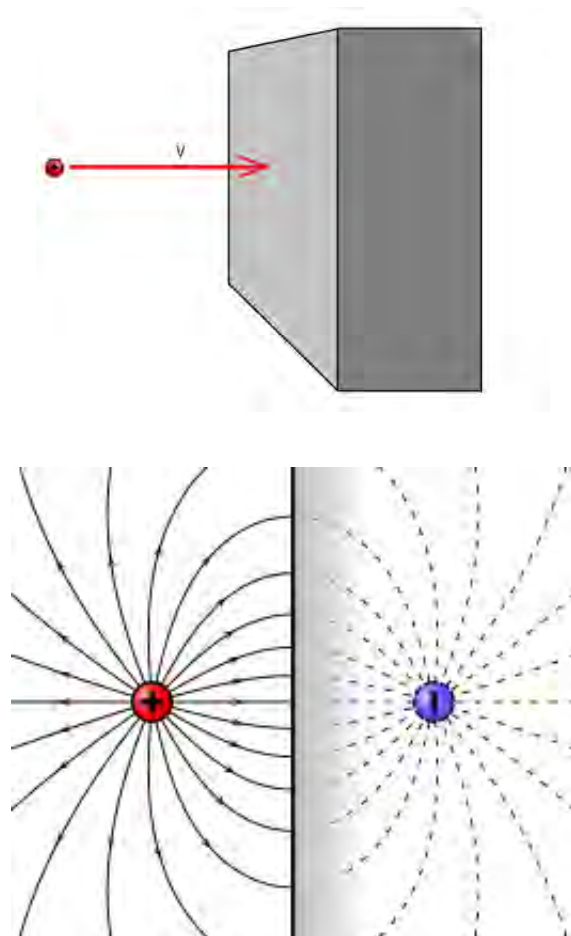


Figura 6. Representación esquemática de la radiación de transición y del establecimiento de la carga imagen cuando una partícula cargada incide en una superficie metálica

La radiación de transición ha sido estudiada en una gran variedad de medios, y en las últimas décadas, con el surgimiento de nuevos materiales con estructuras únicas

como los cristales líquidos, el estudio de este efecto en medios periódicos ha adquirido gran relevancia [56].

En la siguiente sección desarrollaremos una formulación para la radiación de transición conocida como el método de imágenes, de modo que podamos comprender sus características más relevantes. En la sección subsiguiente presentaremos un método nuevo propuesto por de Durand y Jackson que toma en cuenta ciertas restricciones y que es más sencillo que el método de imágenes y nos da mayor intuición sobre la situación física. Este nuevo método será la base para realizar nuestro análisis de la radiación de transición y la radiación de Cherenkov que ocurre en un cristal líquido colestérico.

### 3.1 Teoría de las imágenes para la radiación de transición

La siguiente discusión del método de imágenes para la radiación de transición está basada en las referencias [45, 57, 58, 59]. En lo que sigue supondremos que tenemos dos medios distintos con una frontera plana entre ellos y que una partícula viaja perpendicularmente a esta frontera (figura 6). Los dos medios son isotrópicos y con constantes de eléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . Las ecuaciones de Maxwell que tomaremos en cuenta son las ecuaciones para los rotacionales de los campo, o sea

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (34)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (35)$$

donde la densidad de corriente de la partícula es

$$\mathbf{J} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}) \equiv qv\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt). \quad (36)$$

Al igual que en el caso de la radiación de Cherenkov, es conveniente trabajar en una representación transformada. En este caso trabajaremos con las transformada de Fourier de todos los campos para llegar al espacio de frecuencias y también transformaremos al vector  $\mathbf{r}_\perp$ , que es el vector perpendicular a la trayectoria de la partícula, para llegar a la representación en el espacio de  $\kappa$ , el cual es un vector con las componentes  $\kappa_x$  y  $\kappa_y$ , mientras que en la coordenada  $z$  no haremos transformación, como indicamos a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \int \int \mathbf{J}_{\kappa, \omega} \exp(i\kappa \cdot \mathbf{r}_\perp - i\omega t) d^2\kappa d\omega, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \int \mathbf{E}_{\kappa, \omega} \exp(i\kappa \cdot \mathbf{r}_\perp - i\omega t) d^2\kappa d\omega, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int \int \mathbf{H}_{\kappa, \omega} \exp(i\kappa \cdot \mathbf{r}_\perp - i\omega t) d^2\kappa d\omega. \end{aligned} \quad (37)$$

En el caso de la densidad de corriente, a partir de la ecuación (36) podemos encontrar que

$$j_{\kappa,\omega} = \frac{qe^{i\omega z/v}}{(2\pi)^3}. \quad (38)$$

Resulta conveniente diferenciar a las componentes del vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en su componente paralela a la velocidad de la partícula  $E$  y su componente perpendicular a esta,  $\mathbf{E}_\perp$ . Por definición podemos escribir que

$$E = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{v}, \quad (39)$$

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}{v^2}. \quad (40)$$

El vector  $\mathbf{E}_\perp$  tiene dos componentes:  $E_x$  y  $E_y$ . Para simplificar la discusión, a partir de aquí omitiremos los subíndices  $\kappa$  y  $\omega$ , ya que sólo trabajaremos con las cantidades transformadas. Al proyectar las ecuaciones (34) y (35) en la dirección de la velocidad  $\mathbf{v}$  de la partícula y transformar obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\kappa_x H_y - \kappa_y H_x = -\frac{\omega}{c} \epsilon E - \frac{4\pi i}{c} j^q, \quad (41)$$

$$H_y = -\frac{c}{\omega} \left( \kappa_x E + i \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad (42)$$

$$H_x = \frac{c}{\omega} \left( \kappa_y E + i \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad (43)$$

y combinando el valor de  $H_y$  y  $H_x$  en las ecuaciones (42) y (43) obtenemos que

$$\left( \kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) E + i \frac{\partial}{\partial z} (\kappa \cdot \mathbf{E}_\perp) = \frac{4\pi i}{c^2 (2\pi)^3} q e^{i\omega z/v}, \quad (44)$$

donde  $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$ . Ahora proyectaremos las ecuaciones de Maxwell, ecuación (34) y (35), en la dirección perpendicular a la velocidad  $\mathbf{v}$ , y al combinarlas, eliminar  $\mathbf{H}$  y tomar la transformación obtenemos que

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \right) (\kappa \cdot \mathbf{E}_\perp) = i \kappa^2 \frac{\partial E}{\partial z}. \quad (45)$$

Al actuar con el operador  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon$  en ambos lados de la ecuación (44) y usando la ecuación (45) podemos eliminar  $\kappa \cdot \mathbf{E}_\perp$  para tener una sola ecuación para  $\mathbf{E}$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (\epsilon E) + \epsilon \left( \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon - \kappa^2 \right) E = -\frac{4\pi i \omega q}{c^2 (2\pi)^3} \left( \epsilon - \frac{c^2}{v^2} \right) e^{i\omega z/v} \quad (46)$$

Para llegar a estas ecuaciones hemos tomado en cuenta el hecho de que dentro de cada medio la constante de permitividad  $\epsilon$  es independiente de  $z$ , sin embargo al llegar a la frontera, la permitividad tiene una discontinuidad, de modo que tenemos que resolver la ecuación (46) en cada uno de los medios y después ajustarlos para que cumplan con las condiciones de frontera, que son las condiciones usuales, o sea, las componentes normales del vector de inducción magnética y la componente tangencial del campo eléctrico debe ser iguales en la frontera:

$$\epsilon_1 E_1|_{z=0} = \epsilon_2 E_2|_{z=0}, \quad (47)$$

$$(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}_\perp)_1|_{z=0} = (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}_\perp)_2|_{z=0}. \quad (48)$$

Consideremos la solución de la ecuación (46) en uno de los dos medios. Esta solución debe ser la suma del campo de la carga  $q$  dentro del medio, o sea

$$E^q = \frac{4\pi i q \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \epsilon}\right)}{\omega (2\pi)^3 \left(\epsilon - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right)} e^{i\omega z/v}, \quad (49)$$

y por otra parte el campo de radiación

$$E^R = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} a \exp \left[ \pm i \frac{\omega}{c} z \left( \epsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (50)$$

donde  $a$  es una constante de amplitud a determinar. Las componentes del campo  $\mathbf{E}$  paralelas a la velocidad  $\mathbf{v}$  de la carga cumplen que  $E = E^R + E^q$ . El signo positivo en ecuación (50) corresponde a una propagación en la dirección  $z > 0$ , y el signo negativo corresponde a una propagación en la dirección  $z < 0$ . El campo  $E^R$  en la zona de radiación es el campo de la radiación de transición. Como este campo se debe propagar hacia fuera de la frontera, en el medio 2 debemos tomar el signo positivo de la ecuación (50) y en el medio 1 debemos tomar el signo negativo de la ecuación (50). De todas maneras debemos tener en cuenta que el campo descrito por la ecuación (50) se convierte en un campo de radiación solamente si

$$\epsilon > \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \quad (51)$$

De otra manera, si  $\epsilon < \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}$  entonces el campo en ecuación (50) decae exponencialmente al alejarse de la frontera. Por esto, tanto para el signo positivo como negativo tenemos satisfacer que:

$$\left( \epsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} = i \frac{\omega}{|\omega|} \left( \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \epsilon \right)^{1/2} \quad (52)$$



Para poder hacer uso de las condiciones de frontera en las ecuaciones (47) y (48) debemos conocer las componentes tangenciales del campo eléctrico. Las podemos encontrar fácilmente a partir de (45) para el campo de la carga (superíndice  $q$ ) y para el campo de radiación (superíndice  $R$ )

$$(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}_\perp)^q = -\frac{\kappa^2 c^2 E^q}{v\omega \left(\epsilon - \frac{c^2}{v^2}\right)} \quad (53)$$

$$(\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E}_\perp)^R = \mp \frac{\omega}{c} E^R \left(\epsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \quad (54)$$

Ahora podemos ocupar las condiciones de frontera (47) y (48) para obtener las ecuaciones que determinen las amplitudes  $a_1$  y  $a_2$ , que provienen de la expresión general (50) donde tenemos una amplitud  $a$  indeterminada, de modo que  $a_1$  es una constante proporcional a la amplitud del campo en el medio 1 y  $a_2$  proporcional al campo en el medio 2, de modo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon_1 a_1 = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\epsilon_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2} - \epsilon_2 a_2, \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v\epsilon_1 (\epsilon_1 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} + \frac{a_1}{c} \left(\epsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \\ = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v\epsilon_2 (\epsilon_2 - c^2 / v^2 - \kappa^2 c^2 / \omega^2)} + \frac{a_2}{c} \left(\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (56)$$

Se puede obtener información de estas ecuaciones aún sin resolverlas. En particular en el caso de la radiación producida por partículas ultrarelativistas, ó sea cuando su energía total es grande comparada con su energía en reposo,  $\mathcal{E}/Mc^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$ , la ecuación (55) nos indica que hay una cantidad de radiación emitida muy considerable cuando los campos de la partícula difieren significativamente en los dos medios, o en otras palabras, si los factores  $-\epsilon + c^2/v^2 + \kappa^2 c^2/\omega^2$  tienen valores significativamente diferentes en los dos medios. Ahora consideremos el intervalo de altas frecuencias, en el cual podemos aplicar la fórmula del plasma para la permitividad,

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (57)$$

donde

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m},$$

donde  $N$  es la densidad de electrones libres en el medio y  $m$  la masa del electrón, que es válida para cualquier medio. En este caso tenemos que

$$\left(-\epsilon^2 + \frac{c^2}{v^2}\right) + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \quad (58)$$

Cuando  $\omega \gg \omega_p$  o sea para  $\epsilon \approx 1$  y  $\kappa^2 c^2 / \omega^2 \approx \theta^2 \ll 1$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{k}$ , el vector de onda de la radiación emitida, y  $\mathbf{v}$ , la velocidad de la partícula, todos los términos de la ecuación (58) tienen el mismo orden de magnitud si

$$\omega \sim \frac{\omega_p \mathcal{E}}{Mc^2}, \quad \theta \sim \frac{Mc^2}{\mathcal{E}}, \quad (59)$$

por lo tanto consideraremos mayormente la radiación de alta frecuencia emitida en la dirección delantera, asumiendo que las condiciones en (59) se cumplen. En este caso, las ecuaciones (55) y (56) adoptan la forma

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2} + a_1 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2} + a_2, \quad (60)$$

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2} - a_1 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2} + a_2, \quad (61)$$

donde  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$  son las frecuencias de plasma en el medio 1 y 2, respectivamente. Las ecuaciones (60) y (61) nos muestran que  $a_1 = 0$ , o sea, no hay radiación emitida hacia atrás, y la radiación dirigida hacia delante tiene una amplitud

$$a_2 = \frac{\theta^2 (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)}{\omega^2 [\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2] [\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]}. \quad (62)$$

Podemos adelantar que la intensidad de la radiación será proporcional a  $|a_2|^2$ . La desaparición de la radiación dirigida hacia atrás es consecuencia de las condiciones (59) que determina la aproximación que hemos utilizado. En realidad, esto sólo es una aproximación, como veremos a continuación. En el caso general tampoco es tan difícil encontrar las amplitudes  $a_1$  y  $a_2$  a partir de (55) y (56). En este caso obtenemos que

$$\begin{aligned} a_2 = & \frac{v \kappa^2 c^2}{c \omega^2 \epsilon_2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 - \frac{v}{c} \left( \epsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] \\ & \times \left\{ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) \left[ 1 - \frac{v}{c} \left( \epsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] \right. \\ & \left. \times \left[ \epsilon_1 \left( \epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} + \epsilon_2 \left( \epsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1}, \quad (63) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{v \kappa^2 c^2}{c \omega^2 \epsilon_1} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_1 - \frac{v}{c} \left( \epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] \\
&\times \left\{ \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_1 + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) \left[ 1 - \frac{v}{c} \left( \epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] \right. \\
&\times \left. \left[ \epsilon_1 \left( \epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} + \epsilon_2 \left( \epsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{-1}. \tag{64}
\end{aligned}$$

Bajo la condición (59), la ecuación (63) se convierte en (62) mientras que para la radiación hacia atrás tenemos que

$$\begin{aligned}
a_1 &\approx \frac{\theta^2 (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{4 [\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]} \\
&= \frac{\theta^2 (\omega_{p1}^2 - \omega_{p2}^2)}{4\omega [\theta^2 + (\omega_{p1}/\omega)^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]}, \tag{65}
\end{aligned}$$

con lo que vemos que la radiación realmente no desaparece. Para una partícula no relativista, o sea  $v \ll c$ , los parámetros de la radiación emitida hacia el medio 1 y hacia el medio 2 son aproximadamente iguales (siempre y cuando las magnitudes de las permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  sean parecidas).

Ahora que conocemos los campos radiados, calculemos la energía y expresémosla en términos de las amplitudes  $a_1$  y  $a_2$ . En este caso no será necesario calcular el vector de Poynting, sino que bastará calcular la energía del campo de radiación  $E^R$  para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ , cuando el campo de radiación y el campo de la carga se encuentran separados.

Por simplicidad, ignoraremos dispersiones en la ecuación para la energía y tomaremos en cuenta el hecho de que en la onda plana, ecuación (50), la energía eléctrica es igual a la energía magnética. De este modo la energía emitida será

$$W_2^R = \frac{1}{4\pi} \int \int \epsilon_2 \left[ (E_{\perp}^R(\mathbf{r}, t))^2 + (E^R(\mathbf{r}, t))^2 \right] d^2 r_{\perp} dz, \tag{66}$$

donde hemos considerado solamente el campo en el medio 2.

Dado que estamos interesados en la energía total emitida en el medio 2, debemos asumir que el campo de radiación está alejado a alguna distancia de la frontera y que forma un paquete de ondas que está enteramente contenido dentro del medio 2. De este modo podemos integrar sobre  $z$  desde  $-\infty$  a  $\infty$  sin tomar en cuenta las fronteras y las zonas amortiguadas. De acuerdo a la ecuación (51) tenemos que

$$|\mathbf{E}_{\perp,2}^R| = \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} \left( \epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) |E_2^R|^2, \tag{67}$$

donde hemos tomado en cuenta la colinealidad de los vectores  $E_{\perp}$  y  $\kappa$  debido a la simetría axial del problema.

Ahora sustituyamos las expansiones de la ecuación (37) en la ecuación (66), tomemos en cuenta la expresión (67) e integremos sobre las coordenadas  $z$ ,  $\mathbf{r}_{\perp}$ ,  $\omega'$  y  $\kappa'$ , haciendo uso de la definición y de las propiedades de la delta de Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} d\omega, \quad (68)$$

$$\int \varphi(x) \delta(f(x) - y) dx = \left[ \frac{\varphi(x)}{\left| \frac{df}{dx} \right|} \right]_{f(x)=y}. \quad (69)$$

Procediendo de este modo el resultado es

$$W_2^R = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} d\omega \epsilon_2 \left( \epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right)^{1/2} |a_2|^2. \quad (70)$$

Es conveniente considerar el ángulo  $\theta_2$  entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{v}$ , para el que tenemos  $\text{sen}^2\theta = \kappa^2 c^2 / \omega^2 \epsilon_2$ . De este modo, usando la ecuación (63) obtenemos para la radiación hacia adelante

$$W_2^R = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\pi/2} 2\pi \text{sen}\theta_2 d\theta_2 W_2^R(\omega, \theta_2), \quad (71)$$

y calculando explícitamente

$$\begin{aligned} W_2^R(\omega, \theta_2) &= \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \epsilon_2^{1/2} \cos^2\theta_2 \text{sen}^2\theta_2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2 \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 - \frac{v}{c} (\epsilon_1 - \epsilon_2 \text{sen}^2\theta_2)^{1/2} \right|^2 \\ &\times \left| \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 \cos^2\theta_2 \right) \left[ 1 - \frac{v}{c} (\epsilon_1 - \epsilon_2 \text{sen}^2\theta_2)^{1/2} \right] \right| \\ &\times \left\{ \epsilon_1 \cos\theta_2 + \left[ \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2 \text{sen}^2\theta_2)^{1/2} \right] \right\}^{-2}. \end{aligned} \quad (72)$$

Podemos encontrar la energía para la radiación emitida hacia atrás usando un procedimiento similar:

$$W_2^R = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\pi/2} 2\pi \text{sen}\theta_1 d\theta_1 W_2^R(\omega, \theta_1). \quad (73)$$

Aquí  $\theta_1$  es el ángulo entre  $\mathbf{k}$  y  $-\mathbf{v}$ , y

$$\begin{aligned}
W_2^R(\omega, \theta_1) &= \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \epsilon_2^{1/2} \cos^2 \theta_1 \sin^2 \theta_1 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2 \left| 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 - \frac{v}{c} (\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_1)^{1/2} \right|^2 \\
&\times \left| \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \epsilon_2 \cos^2 \theta_1 \right) \left[ 1 - \frac{v}{c} (\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_1)^{1/2} \right] \right. \\
&\times \left. \left\{ \epsilon_1 \cos \theta_1 + \left[ \epsilon_2 (\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_1)^{1/2} \right] \right\} \right|^{-2}. \tag{74}
\end{aligned}$$

Para partículas ultrarelativistas podemos encontrar el resultado para la radiación en la dirección hacia delante no solamente a partir de la ecuación (72) sino también directamente de la ecuación (62):

$$\begin{aligned}
W_2^R(\omega) &= \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \left\{ \left[ \theta^2 + \left( \frac{\omega_{p1}}{\omega} \right)^2 + \left( \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]^{-1} \right. \\
&\quad \left. + \left[ \theta^2 + \left( \frac{\omega_{p2}}{\omega} \right)^2 + \left( \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]^{-1} \right\}^2. \tag{75}
\end{aligned}$$

Si una partícula pasa hacia el medio con  $\epsilon_2$  proveniente del vacío ( $\epsilon_1 = 1$ ) entonces la ecuación (74) nos da

$$\begin{aligned}
W_2^R(\omega, \theta) &= \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \left| (\epsilon - 1) \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v}{c} (\epsilon - \sin^2 \theta)^{1/2} \right] \right| \\
&\times \left| \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta \right) \left[ 1 + \frac{v}{c} (\epsilon - \sin^2 \theta)^{1/2} \right] \left[ \epsilon \cos \theta + (\epsilon - \sin^2 \theta)^{1/2} \right] \right|^{-2}, \tag{76}
\end{aligned}$$

donde hemos omitido el subíndice 1 en  $\theta_1$ . Este resultado es precisamente el obtenido en [166]. Podemos encontrar la energía de radiación de una partícula que viaja del medio hacia el vacío reemplazando  $\mathbf{v}$  por  $-\mathbf{v}$ . Obtenemos el mismo resultado si ponemos  $\epsilon_1 = \epsilon$  y  $\epsilon_2 = 1$  en ecuación (72).

Para la radiación emitida hacia atrás por una partícula ultrarelativista en el intervalo de ángulos marcados por la ecuación (59) obtenemos la siguiente fórmula

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2}{\pi^2 c} \left| \frac{\epsilon^{1/2} - 1}{\epsilon^{1/2} + 1} \right|^2 \frac{\theta^2}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]^2}. \tag{77}$$

La densidad espectral de la radiación emitida hacia atrás exhibe un pico muy águo en  $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$ . Los ángulos  $\theta \sim 1$  también hacen una contribución a la intensidad cuando se integra sobre todos los ángulos. Esto lo podemos ver a partir de la divergencia logarítmica de la integral  $\int_0^\infty W_1^R(\omega, \theta) d\theta^2$  para valores grandes de  $\theta^2$ . Para valores

donde  $\ln(\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$  podemos ignorar la contribución de los ángulos mayores y obtenemos

$$W_1^R(\omega) \approx \int_0^{\theta_{\max} \sim 1} \pi d\theta^2 W_1^R(\omega, \theta) \approx 2 \frac{q^2}{\pi c} \left| \frac{\epsilon^{1/2} - 1}{\epsilon^{1/2} + 1} \right|^2 \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (78)$$

Para la dependencia en la frecuencia el procedimiento es similar. A frecuencias altas podemos usar la fórmula de plasma para la ecuación (78), lo que nos da  $W_1^R(\omega) \sim \omega^{-4}$  o sea, las frecuencias menores tienen la mayor contribución. Por lo tanto, no podemos utilizar la fórmula de plasma para un medio isotrópico arbitrario.

Como ya hemos notado, una partícula ultrarelativista emite la mayoría de su radiación en la dirección delantera paralela a su velocidad. En este caso la ecuación (75) muestra que no solamente la distribución angular de la radiación se elonga en la dirección del movimiento de la partícula sino que también la mayor parte de la energía se emite en unos ángulos del orden  $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$ . La aproximación de plasma para la permitividad prueba ser aplicable para cualquier medio al calcular la intensidad de la radiación integrada sobre los ángulos, dado que la mayor parte de la energía de radiación corresponde a frecuencias altas. Para finalizar, consideremos dos casos concernientes a la concentración de electrones libres en los medios: primero, cuando la diferencia en la concentración de electrones ( $N = |N_1 - N_2|$ ) en la frontera de los dos medios es pequeña,  $\Delta N/N \ll 1$ , la integración sobre la coordenada angular nos da

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{6\pi c} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{1}{[\omega_p^2/\omega^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]^2}. \quad (79)$$

La densidad espectral de la radiación se mantiene constante hasta la frecuencia  $\omega \approx \omega_p \mathcal{E}/Mc^2$  y luego decrece como  $\omega^4$ . Esto nos indica que la frecuencia característica es significativamente mayor que la frecuencia de plasma (para  $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$ ), y por lo tanto la aproximación de plasma es aplicable. La energía total radiada está dada por

$$W_2^R = \int_0^\infty W_2^R(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_p}{24c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left( \frac{\Delta N}{N} \right)^2. \quad (80)$$

Una comparación de la energía de radiación emitida hacia adelante y de la energía de radiación emitida hacia atrás confirma que la radiación emitida hacia adelante es la radiación dominante. El segundo caso, cuando la concentración de partículas varía de manera muy marcada al cruzar la frontera ( $\Delta N/N = 1$ ), tenemos que

$$W_2^R(\omega) = \frac{2q^2}{\pi c} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \left( \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \ln \left[ 1 + \left( \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \left( \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \right] - 1 \right\}. \quad (81)$$

Para frecuencias pequeñas  $\omega \ll \omega_p \mathcal{E}/Mc^2$  la densidad espectral de radiación no es constante sino que exhibe una dependencia logarítmica en la frecuencia de la radiación y la energía de la partícula:

$$W_2^R(\omega) \approx \frac{2q^2}{\pi c} \left( \ln \frac{\omega_p \mathcal{E}}{\omega M c^2} - 1 \right) \left( \omega \ll \omega_p \frac{\mathcal{E}}{M c^2} \right). \quad (82)$$

Para frecuencias altas,  $\omega \gg \omega_p \mathcal{E} / M c^2$ , de modo que sigue decreciendo como  $\omega^{-4}$ :

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2 \omega_p^4}{6\pi c \omega^4} \left( \frac{\mathcal{E}}{M c^2} \right)^4 \left( \omega \gg \omega_p \frac{\mathcal{E}}{M c^2} \right). \quad (83)$$

La energía de la radiación integrada sobre la frecuencia está dado por

$$W_2^R = \int_0^\infty W_2^R(\omega) d\omega = \frac{q^2}{3c} \omega_p \frac{\mathcal{E}}{M c^2}, \quad (84)$$

la cual se incrementa linealmente con la energía de la partícula.

En todo el tratamiento anterior hemos desarrollado el método de imágenes y nos hemos restringido sobre todo a los casos en los que la aproximación de plasma para el valor de la permitividad del medio es válida. Esta aproximación es de interés para muchas situaciones prácticas. Otros autores han utilizado otros enfoques, en particular Bolotovskii y Serov han desarrollado un método para calcular la radiación sin hacer una transformación de Fourier en la variable del tiempo [60]. Otros trabajos han criticado algunos de los resultados puntuales del formalismo del método de imágenes, señalando que con otras formulaciones se obtienen valores distintos para algunos ángulos de emisión [61, 62], mientras otros han puesto de relieve que la implementación computacional del método de imágenes tiene dificultades para algunas geometrías [63]. A continuación desarrollaremos una teoría alternativa para explicar el fenómeno de radiación de transición.

## 3.2 Teoría del campo de polarización variable para la radiación de transición

### 3.2.1 Características generales: cono de emisión, longitud de formación y volumen de coherencia

Como ya hemos mencionado, Durand [54] y Jackson [64] han desarrollado una nueva teoría para explicar la radiación de transición. Esta nueva teoría esta basada en el campo de polarización producido por la partícula al pasar de un medio dieléctrico al siguiente, y nos permite conocer el mecanismo físico que está detrás tanto de la radiación de transición como de la radiación de Cherenkov y por ello lo desarrollaremos con alguna amplitud. Consideraremos la misma geometría que en el caso anterior con una partícula relativista con velocidad  $\mathbf{v}$  que incide de manera normal a la frontera plana entre los dos medios, y nuevamente identificaremos a la velocidad de la partícula con el eje  $z$ . Consideraremos que la partícula proviene del vacío e ingresa en un medio caracterizado por un índice de refracción  $n(\omega)$ .

Como hemos adelantado en este caso la partícula cargada induce un campo de polarización  $\mathbf{P}(\mathbf{x}', t)$  dependiente del tiempo en el medio. La polarización emite radiación, y la radiación proveniente de distintos puntos dentro del medio se combina coherentemente en los alrededores de la trayectoria de la partícula para generar la radiación de transición.

Para empezar, queremos adquirir una visión general de los mecanismos detrás de la radiación de transición. La distribución angular y la existencia de una longitud de formación  $D$  dentro del dieléctrico, donde el fenómeno tiene lugar, son una consecuencia directa del requerimiento de coherencia para que tengamos una radiación apreciable a gran distancia. El campo de excitación de la partícula está dado por

$$E_z = -\frac{q\gamma vt}{(\rho^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}},$$

$$E_\rho = \frac{q\gamma vt}{(\rho^2 + \gamma^2(z - vt)^2)^{3/2}},$$

donde  $\gamma$  es el factor de Lorentz,  $v$  es la velocidad de la partícula,  $q$  la carga que tiene esta partícula y donde podemos ver que estamos trabajando en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \phi, z)$ . En la figura 7 se puede encontrar una representación esquemática del fenómeno y los ángulos involucrados. La dependencia de estos campos en un punto  $\mathbf{x} = (z, \rho, \phi)$  en potencias inversas de  $[\rho^2 + \gamma^2(z - vt)^2]$  implica que la componente de Fourier de frecuencia  $\omega$  se moverá en la dirección  $z$  con velocidad  $v$  y tendrá una amplitud proporcional a  $e^{i\omega z/v}$ , además de que tendrá una magnitud radial significativa solamente a distancias del orden  $\rho_{\max} \simeq \gamma v/\omega$ . Por otra parte, la polarización dependiente del tiempo  $t$  en el punto  $\mathbf{x}$  genera una onda cuya forma en la zona de radiación es

$$A \frac{e^{ikr}}{r} \cdot e^{-ik(z\cos\theta + \rho\sin\theta\cos\phi)}, \quad (85)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de emisión medido a partir de la dirección de desplazamiento de la partícula,  $k = n(\omega)\omega/c$  y  $A$  es proporcional a la fuerza excitadora de la partícula incidente. Asumimos que la radiación será observada en el hemisferio delantero. Una superposición coherente proveniente de diferentes puntos dentro del medio ocurrirá siempre que el producto del campo excitador de la partícula generadora no cambie su fase significativamente en la región considerada. Por lo tanto para saber si la radiación que observaremos será significativa, basta con multiplicar la amplitud de la transformada de Fourier del campo ( $e^{i\omega z/v}$ ) por el factor de fase en la ecuación (85), de modo que obtenemos

$$e^{i\frac{\omega}{v}z} e^{-i\frac{\omega}{c}n(\omega)\cos\theta z} e^{-i\frac{\omega}{c}n(\omega)\rho\sin\theta\cos\phi} = e^{i\frac{\omega}{c}\left(\frac{1}{\beta} - n(\omega)\cos\theta\right)z} e^{-i\frac{\omega}{c}n(\omega)\rho\sin\theta\cos\phi}. \quad (86)$$

En la dirección radial la coherencia se conservará solamente si la fase que involucra a  $\rho$  en (86) es unitaria o menor en la región  $0 < \rho \lesssim \rho_{\max}$  donde el campo de excitación es apreciable, de modo que sólo observaremos radiación si



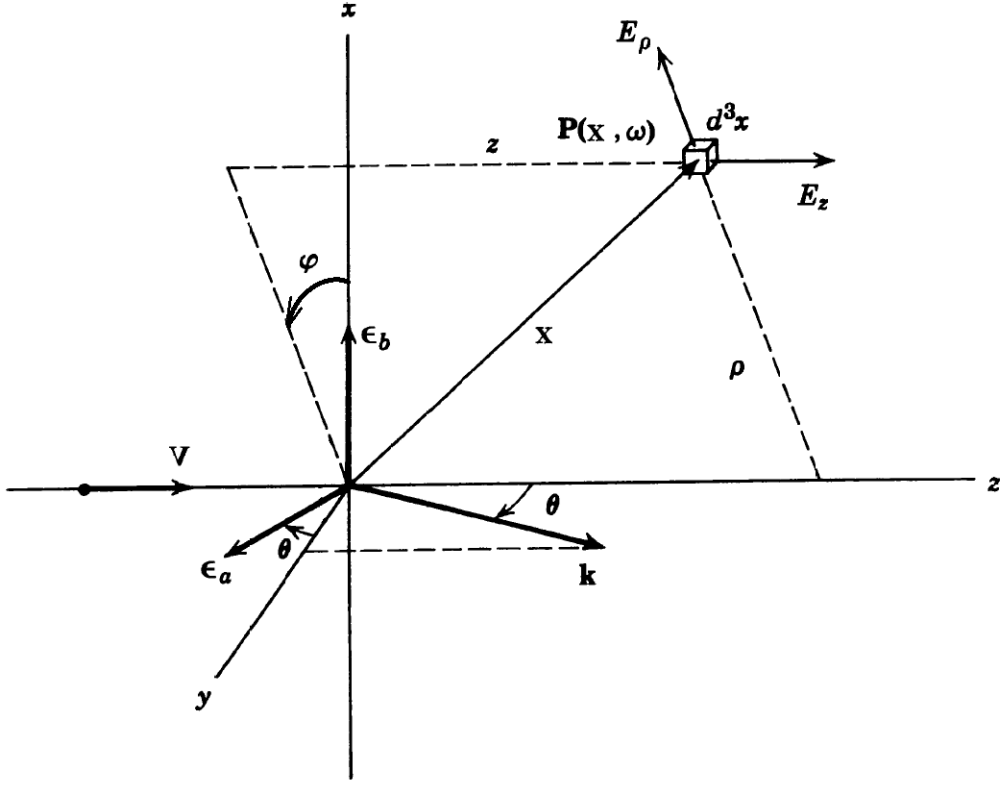


Figura 7. Representación esquemática de la radiación de transición. La partícula viaja a velocidad constante a lo largo del eje z y al ingresar a un medio dielectrico (caracterizado por  $\epsilon$ ) desde el vacío provoca un campo de polarización en el punto  $x$ .

$$\frac{\omega}{c} n(\omega) \frac{\gamma v}{\omega} \text{sen} \theta \lesssim 1$$

o bien, si consideramos que  $\gamma \gg 1$ , podemos aproximar esta expresión escribiéndola como

$$n(\omega) \gamma \theta \lesssim 1. \quad (87)$$

Dado lo anterior podemos afirmar que la distribución angular está confinada a un cono de semiángulo  $\theta$  dirigido hacia adelante con  $\gamma \theta \lesssim 1$ , como en todos los procesos de emisión relativista.

El factor dependiente de  $z$  en la amplitud es

$$e^{i \frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - n(\omega) \cos \theta \right) z},$$

donde  $\beta$  es el factor  $\beta$  de Lorentz. Por lo anterior podemos concluir que la profundidad de penetración  $d(\omega)$  hasta la cual la coherencia es mantenida está dada por

$$\frac{\omega}{c} \left( \frac{1}{\beta} - n(\omega) \cos\theta \right) d(\omega) \simeq 1.$$

Podemos utilizar la aproximación del plasma  $n(\omega) \simeq 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$  para frecuencias por encima de la región óptica donde la radiación de Cherenkov no ocurre,  $\beta^{-1} \simeq 1 + 1/2\gamma^2$  para una partícula relativista, y  $\cos\theta \simeq 1$  de modo que tenemos

$$d(\nu) \simeq \frac{2\gamma c/\omega_p}{\nu + \nu^{-1}}, \quad (88)$$

donde hemos introducido una frecuencia adimensional variable

$$\nu = \frac{\omega}{\gamma\omega_p}. \quad (89)$$

Definimos la longitud de formación  $D$  como el mayor valor de  $d(\nu)$  como función de  $\nu$ :

$$D = d(1) = \frac{\gamma c}{\omega_p} \quad (90)$$

Para sustancias con densidades del orden de la unidad la frecuencia de plasma es  $\omega_p \simeq 3 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$  lo que corresponde a una energía de  $\hbar\omega_p \simeq 20 \text{ eV}$ . De este modo,  $c/\omega_p \simeq 10^{-6}$  e incluso para  $\gamma \gtrsim 10^3$  la longitud de formación  $D$  es sólo de unos cuantos micrometros. En aire y en condiciones normales de presión y temperatura este factor es 30 veces más grande debido a la baja densidad. El volumen de coherencia adyacente a la trayectoria de la partícula y la superficie a partir de la cual una radiación de transición de frecuencia  $\omega$  proviene es

$$V(\omega) \sim \pi \rho_{\max}^2 d(\omega) \sim 2\pi\gamma \left( \frac{c}{\omega_p} \right)^3 \frac{1}{\nu(1+\nu^2)},$$

Este volumen decrece en tamaño rápidamente para  $\nu > 1$ . Por lo tanto podemos esperar que la ausencia de factores compensadores el espectro de la radiación de transición se extenderá hasta  $\nu \simeq 1$  pero no mucho más allá.

### 3.2.2 Cálculo del campo de polarización

Hasta aquí hemos obtenido una visión general del mecanismo de la radiación de transición. Bajo estas condiciones la radiación esta confinada a ángulos pequeños en la dirección delantera ( $\gamma\theta \lesssim 1$ ) y es producida por un campo de polarización variable en un pequeño volumen adyacente a la trayectoria de la partícula. Su espectro se extiende hasta frecuencia del orden  $\omega \sim \omega_p$ .

Ahora desarrollaremos explícitamente el mecanismo de radiación mediante el campo de polarización variable. Debemos enfatizar que este es un cálculo que sólo es válido bajo la condición de que nos encontremos en frecuencias por encima de la frecuencia de resonancia óptica. Para estas frecuencias el valor del índice de refracción no se encuentra lejos de ser unitario. El campo de la partícula incidente en estas frecuencias

no es significativamente diferente en el medio de como lo es en el vacío, esto significa que podemos evaluar la componente de Fourier de la polarización inducida  $\mathbf{P}(\mathbf{x}', \omega)$  mediante

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}', \omega) \simeq \left[ \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi} \right] \mathbf{E}_i(\mathbf{x}', \omega), \quad (91)$$

donde  $\mathbf{E}_i$  es la transformada de Fourier del campo eléctrico de la partícula en el vacío. La propagación de la onda radiada por la polarización se describe mediante el número de onda  $k = \omega n(\omega)/c$  apropiado para el medio. El campo de radiación lejos de la fuente cuasi-puntual  $\mathbf{P}(\mathbf{x}', \omega) d^3x'$  es

$$d\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e^{ikr}}{R} (\mathbf{k} \times \mathbf{P}) \times \mathbf{k} d^3x', \quad (92)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el vector de onda en la dirección de observación y  $R \simeq r - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}$ . Sustituyendo la ecuación (91) en la ecuación (92) e integrando sobre el hemisferio  $z > 0$  el campo total radiado a la frecuencia  $\omega$  es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi} \right] k^2 \int_{z' > 0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i) \times \hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d^3x'.$$

Tomando en cuenta nuevamente la aproximación de plasma para la permitividad eléctrica, ecuación (57)

$$\epsilon(\omega) \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

el campo radiado para  $\omega \gg \omega_p$  se convierte en

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{-\omega_p^2}{4\pi c^2} \right) \int_{z' > 0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i) \times \hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} d^3x'. \quad (93)$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = 2 |\mathbf{A}(\omega)|^2, \quad (94)$$

donde  $\mathbf{A}(\omega)$  es la transformada de Fourier del potencial vectorial es posible mostrar que

$$\frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{32\pi^3} \left( \frac{\omega_p}{c} \right)^4 \left| \int_{z > 0} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i) \times \hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x' \right| \quad (95)$$

corresponde a la energía radiada por unidad de ángulo sólido y por unidad de frecuencia. Los campos excitadores  $\mathbf{E}_i$  están dados por

$$E_\rho(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q\omega}{\gamma v^2} e^{i\omega z/v} K_1 \left( \frac{\omega \rho}{\gamma v} \right),$$

$$E_z(\mathbf{x}, \omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q\omega}{\gamma^2 v^2} e^{i\omega z/v} K_0\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right). \quad (96)$$

La integral en (95) se pueden evaluar de la siguiente manera. Primero notemos que la dependencia de  $E_i$  en  $z$  sólo es mediante el factor  $e^{i\omega z/v}$ , y por ello podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\equiv \int_{z>0} [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i] \times \hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3x' \\ &= \int \int dx dy [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i]_{z=0} \times \hat{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_0^\infty dz e^{i(\omega/v - k\cos\theta)z} \\ &= \frac{i - ie^{i(\omega/v - k\cos\theta)Z}}{(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta)} \int \int dx dy e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i]_{z=0} \times \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

El límite superior  $Z$  en la integración sobre  $z$  es un instrumento formal para mostrar que las contribuciones de diferentes valores de  $z$  se suman constructivamente y causan que la amplitud crezca hasta que  $Z \gtrsim D$ . Más allá de la profundidad  $D$  la rotación de la fase impide un mayor crecimiento. Para un medio realmente semi infinito (muestras de materiales con un grosor grande comparado con  $D$ ) podemos quitar la exponencial oscilante en  $Z$  y obtener para una sola de las interfaces

$$\mathbf{F} = \frac{i}{(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta)} \int \int dx dy e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i]_{z=0} \times \hat{\mathbf{k}}.$$

El campo eléctrico transversal a  $\hat{\mathbf{k}}$  se expresará en términos de las componentes  $E_\rho$  y  $E_z$  y de los vectores de polarización  $\epsilon_a$  y  $\epsilon_b$  como

$$[\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_i] \times \hat{\mathbf{k}} = (E_\rho \cos\theta \cos\phi - E_z \sin\theta) \epsilon_a + E_\rho \sin\phi \epsilon_b,$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar a partir de  $\hat{\mathbf{k}}$  y se ha suprimido la prima. La componente paralela a  $\epsilon_b$  se convierte en cero al realizar la integración debido a que ésta es impar en  $y$ . De este modo, sustituyendo (96) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{i\epsilon_a}{(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta)} \int \int dx dy e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \cos\theta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} E_\rho - \sin\theta E_z \right]_{z=0} \\ &= \frac{i\epsilon_a}{(\frac{\omega}{v} - k\cos\theta)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q\omega}{\gamma v^2} \int \int dx dy e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &\quad \left[ \cos\theta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} K_1\left(\frac{\omega}{\gamma v} \sqrt{x^2 + y^2}\right) + i \frac{\sin\theta}{\gamma} K_0\left(\frac{\omega}{\gamma v} \sqrt{x^2 + y^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

El primer término se puede transformar mediante una integración por partes en  $x$  utilizando la siguiente sustitución

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} K_1 \left( \frac{\omega}{\gamma v} \sqrt{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\gamma v}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} K_0 \left( \frac{\omega}{\gamma v} \sqrt{x^2 + y^2} \right),$$

de modo que

$$\mathbf{F} = \epsilon_a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q \text{sen} \theta}{v \left( \frac{\omega}{v} - k \cos \theta \right)} \left( k \cos \theta - \frac{\omega}{v \gamma^2} \right) \int \int dx dy e^{-i k \text{sen} \theta x} K_0 \left( \frac{\omega}{\gamma v} \sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

La integral restante se puede evaluar a partir de la transformación del coseno

$$\int_0^{\infty} K_0 \left( \beta \sqrt{z^2 + t^2} \right) \cos(\alpha z) dz = \frac{\pi}{2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \exp \left( -|t| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right), \quad (97)$$

el resultado para  $\mathbf{F}$  es

$$F = \epsilon_a \frac{2 \sqrt{2\pi} z e \text{sen} \theta \left( k \cos \theta - \frac{\omega}{v \gamma^2} \right)}{v \left( \frac{\omega}{v} - k \cos \theta \right) \left( \frac{\omega^2}{\gamma^2 v^2} + k^2 \text{sen}^2 \theta \right)}. \quad (98)$$

En la aproximación de movimiento relativista ( $\gamma \gg 1$ ), ángulos pequeños ( $\theta \ll 1$ ) y frecuencias altas ( $\omega \gg \omega_p$ ) esta expresión se convierte en

$$F \simeq \epsilon_a 4 \sqrt{2\pi} \frac{q}{c} \left( \frac{c}{\omega_p} \right)^2 \frac{\gamma}{\nu^2} \frac{\sqrt{\eta}}{\left( 1 + \frac{1}{\nu^2} + \eta \right) (1 + \eta)}, \quad (99)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia dimensional variable en (89) y  $\eta = (\gamma \theta)^2$  es una variable angular apropiada. Con  $d\Omega = d\phi(\cos \theta) \simeq d\phi d\eta / 2\gamma^2$ , la distribución de energía en  $\nu$  y  $\eta$  es

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{d\nu d\eta} &= \frac{\pi}{\gamma^2} \gamma \omega_p \frac{d^2 I}{d\omega d\Omega} \\ &\simeq \frac{q^2 \gamma \omega_p}{\pi c} \left[ \frac{\eta}{\nu^4 \left( 1 + \frac{1}{\nu^2} + \eta \right)^2 (1 + \eta^2)} \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

A bajas frecuencias el espectro alcanza su máximo en  $\eta \simeq 1$  para luego caer relativamente lento como  $\eta^{-1}$  hasta que el valor  $\eta = \nu^{-2}$  se alcanza. Entonces decae como  $\eta^{-3}$ . Para  $\nu \gtrsim 1$ , el espectro alcanza un pico en  $\eta \gtrsim \frac{1}{3}$  y cae como  $\eta^{-3}$  para  $\eta \gg 1$ . En  $\eta = 0$  el denominador en la ecuación (100) es  $(1 + \nu^2)^2$  lo que muestra que para  $\nu \gg 1$  hay una intensidad despreciable en cualquier ángulo.

Al integrar el espectro de energía sobre la variable angular  $\eta$  obtenemos

$$\frac{dI}{d\nu} = \frac{q^2\gamma\omega_p}{\pi c} \left[ (1 + 2\nu^2) \ln \left( 1 + \frac{1}{\nu^2} \right) - 2 \right], \quad (101)$$

que tiene los siguientes límites para  $\nu$  pequeña y  $\nu$  grande

$$\frac{dI}{d\nu} \simeq \frac{q^2\gamma\omega_p}{\pi c} \begin{cases} 2\ln \left( \frac{1}{\nu} \right) & \nu \ll 1 \\ \frac{1}{6\nu^4} & \nu \gg 1. \end{cases} \quad (102)$$

El espectro diverge logarítmicamente a bajas frecuencias la integral es finita. La energía total emitida en la radiación de transición por cada interface es

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\nu} = \frac{q^2\gamma\omega_p}{3c} = \frac{z^2}{3(137)}\gamma\hbar\omega_p. \quad (103)$$

donde hemos considerado  $q = ze$ . Podemos estimar que alrededor de la mitad de la energía se emiten en el intervalo  $0.1 \leq \nu \leq 1$ . En un lenguaje cuántico, podemos decir que una cantidad apreciable de la energía aparece como fotones relativamente energéticos. Por ejemplo con  $\gamma = 10^3$  y  $\hbar\omega_p = 20$  eV los quanta están en la región de los rayos X suaves entre 2 y 20 keV.

El factor  $\gamma$  que aparece en la ecuación (103) hace que la radiación de transición sea un mecanismo apropiado para identificar partículas e incluso para medir sus energías cuando éstas son muy grandes y otros mecanismos no son factibles.

En la práctica para construir detectores basados en el principio de transición de radiación se necesita construir medios hechos de varias capas con propiedades electromagnéticas distintas. Bajo esta circunstancia las partículas atraviesan y salen de cada medio emitiendo un pulso de radiación, y lo único que se necesita es que cada una de las capas tengan un grosor mayor a la longitud de formación  $D$ .

Como podemos ver el método del campo de polarización variable resulta de gran utilidad para comprender en una primera aproximación a la radiación de transición. En el siguiente capítulo presentaremos el desarrollo que hicieron esta teoría Villavicencio *et. al.* en el caso de la radiación de Cherenkov [65], la cual será nuestra base para abordar el problema de una partícula viajando dentro de un colestérico.



## 4 Teoría alternativa para la radiación de Cherenkov

### 4.1 Polarización dependiente del tiempo en un dieléctrico y radiación de Cherenkov

Como pudimos ver en el capítulo 2, la formulación clásica de Frank y Tamm [1] es capaz de reproducir las características principales experimentales de la radiación de Cherenkov, sin embargo, esta formulación ha sido criticada ya que en muchos aspectos resulta forzada y puede llevar a varios errores de interpretación, como Kobzev ha notado [66]. En esta formulación se considera explícitamente la carga como la fuente emisora de la radiación, lo cual está en contra de los conceptos usuales del electromagnetismo, ya que una carga que se mueve sin aceleración es incapaz de radiar. Por esta y otras razones fue que la radiación de Cherenkov tardó tiempo en ser tomada en cuenta por la comunidad científica, y como hemos visto incluso Collins y Reiling [36], que comprobaron experimentalmente su existencia, pensaban que la fuente de la radiación debía ser algún tipo de frenado de la carga dentro del medio.

A partir de 1995 Roa-Neri, Villavicencio y Jiménez han propuesto en varios artículos [65, 67, 68, 69] un nuevo enfoque para comprender la radiación de Cherenkov basados en las ideas expuestas por Durand [54] y Jackson [64] para el fenómeno de radiación de transición y que hemos revisado brevemente en el capítulo anterior. El argumento principal expuesto en estos artículos es que la radiación electromagnética es emitida de manera indirecta por la polarización que la partícula induce en el medio; esta polarización es mayor en el volumen cercano a la partícula, y decrece cuando ésta se aleja (figura 6). Este campo de polarización variable en el tiempo es el verdadero emisor tanto de la radiación de Cherenkov como de transición. Aunque Jackson [64] enfatiza que este es una simplificación para el caso de la radiación de transición, también nos trasmite que es una formulación físicamente correcta siempre y cuando se consideren frecuencias que estén por encima de la región de resonancia óptica, ya que en estas regiones el índice de refracción es cercano a la unidad. En el caso de la radiación de Cherenkov las frecuencias relevantes satisfacen esta misma condición como lo indican Villavicencio *et. al.* [69]. La siguiente discusión está basada en las referencias mencionadas en este párrafo.

Consideremos un medio lineal, homogéneo e isotrópico. Aplicando una transformación de Fourier en la variable temporal a la relación entre la polarización y el campo eléctrico dentro de este medio obtenemos:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) = \frac{\epsilon(\omega) - 1}{4\pi} \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) = \chi(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega). \quad (104)$$

Notemos que cuando la partícula entra en un medio con una susceptibilidad dependiente de la frecuencia  $\epsilon(\omega)$ , el campo sentido por el medio se verá apantallado de modo que tenemos que considerar una carga efectiva  $q/\epsilon(\omega)$ . La transformada de Fourier del campo eléctrico producido por una distribución de carga viajera  $\rho(\mathbf{r}', t) = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{v} \cdot t)$  es por lo tanto [64]



$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}', \omega) = \frac{2iq}{\epsilon(\omega)} \left[ \frac{\omega}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k}' \right] \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})}{k'^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}. \quad (105)$$

Ahora investiguemos cuáles son los campos de radiación producidos por una distribución dipolar que varía en el tiempo. El campo de radiación producido por un solo dipolo  $\mathbf{p}$  es el siguiente:

$$\mathbf{B} = k^2 \left( \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{p} \right) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (106)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{k}}. \quad (107)$$

Para obtener el campo de radiación total, tenemos que elegir un sistema de referencia. En nuestro caso optamos por el sistema de referencia donde el medio está en reposo. En este caso tendremos que cada punto del campo dipolar contribuye de la siguiente manera al campo total de radiación:

$$d\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikR}}{R} \hat{\mathbf{k}} \times \left( \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right) d^3r', \quad (108)$$

y

$$d\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} \hat{\mathbf{k}} \times d\mathbf{E}_{\text{rad}}(r, \omega). \quad (109)$$

La distancia  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  es la distancia entre el dipolo emisor y el lugar de medición de la onda radiada. En este caso también debemos tomar en cuenta que el vector  $\mathbf{k}$  es el vector de onda, que apunta en la dirección de observación y tiene una magnitud dada por  $k = \omega\sqrt{\epsilon(\omega)}/c$ . Como estamos considerando que el punto de observación está suficientemente alejado de la fuente y que el volumen emisor es finito, podemos hacer la siguiente aproximación para la distancia entre los puntos emisores y el punto de observación:  $R \simeq r - \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}$ , donde  $r$  es la distancia del origen de coordenadas al punto de observación,  $\hat{\mathbf{k}}$  es la dirección del vector de onda que apunta hacia el lugar de observación y  $\mathbf{r}'$  es la coordenada de la posición del punto emisor. Con estas aproximaciones podemos reescribir la ecuación (108) y obtenemos

$$d\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \times \left( \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}} d^3r'. \quad (110)$$

Para obtener la radiación total debemos hacer la integral de ecuación (110) sobre todo el volumen, de modo que:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \int \hat{\mathbf{k}} \times \left( \mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right) e^{-i\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}} d^3r'. \quad (111)$$

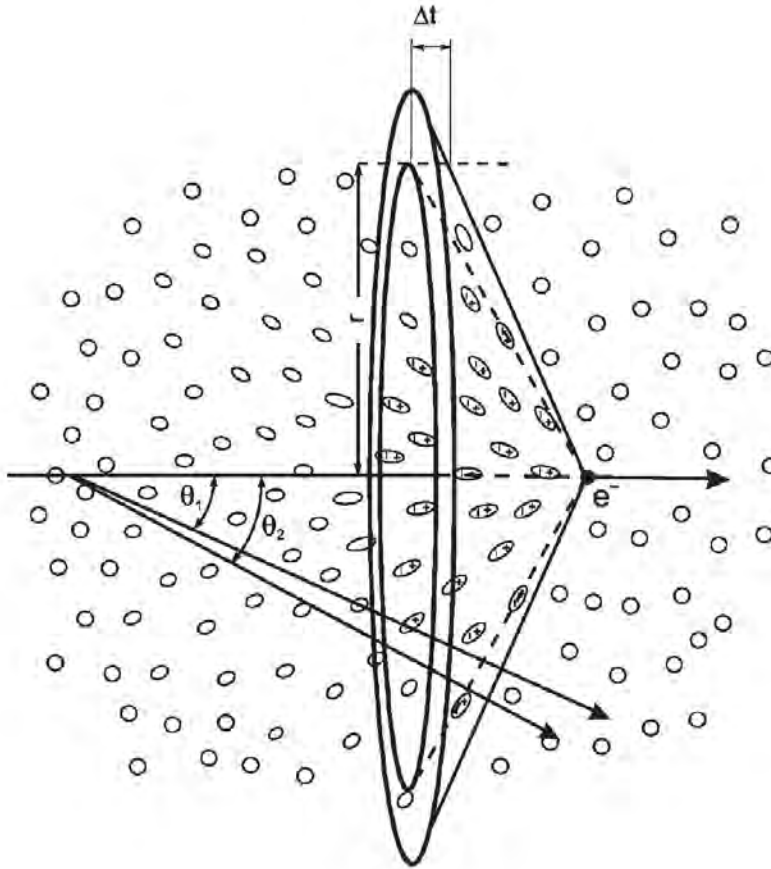


Figura 8. Campo de polarización variable inducido por el paso de la partícula cargada a través del medio [28].

Podemos sustituir  $\mathbf{P}(\mathbf{r}', \omega)$  en ecuación (111) por su transformada espacial de Fourier

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \mathbf{P}(\mathbf{k}'), \quad (112)$$

con esta expresión podemos realizar el siguiente manejo algebraico

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{k^2 e^{ikr}}{r} \int \hat{\mathbf{k}} \times \left[ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathbf{P}(\mathbf{k}', \omega) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d^3 k' \right] \times \hat{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{k}}} d^3 r' \\
&= \frac{(2\pi)^{3/2} k^2 e^{ikr}}{r} \int d^3 k' \left[ \left( \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{P}(\mathbf{k}', \omega) \right) \times \hat{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'} d^3 r' \right] \right] \\
&= \frac{(2\pi)^{3/2} k^2 e^{ikr}}{r} \int d^3 k' \left[ \left( \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{P}(\mathbf{k}', \omega) \right) \times \hat{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right] \\
&= (2\pi)^{3/2} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto el campo de una distribución de radiación dipolar se puede calcular a través de la expresión [65]

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{3/2} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{P}(\mathbf{k}, \omega) \times \hat{\mathbf{k}} \right]. \quad (113)$$

Hemos realizado una de las integraciones aprovechando el hecho de que obtenemos la función delta de Dirac en la variable  $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Podemos sustituir el campo de polarización por su expresión explícita en ecuación (104) en términos del campo de la partícula y la permitividad del medio

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = (2\pi)^{3/2} k^2 \chi(\omega) \frac{e^{ikr}}{r} \left[ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \right] \times \hat{\mathbf{k}}, \quad (114)$$

Ahora podemos sustituir la ecuación (105) en este resultado para obtener:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = (2\pi)^{3/2} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \chi \frac{2iq\omega}{\epsilon c^2} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left[ \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} \right] \times \hat{\mathbf{k}}, \quad (115)$$

donde hemos definido  $\chi \equiv \chi(\omega)$  y  $\epsilon \equiv \epsilon(\omega)$ . Definiendo el vector  $\hat{\phi}$  mediante

$$\hat{\phi} = \frac{(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}}}{|(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v}) \times \hat{\mathbf{k}}|},$$

podemos reescribir la ecuación (115) como:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = (2\pi)^{3/2} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\chi}{c^2 k^2 - \omega^2} \frac{2iq\omega}{\epsilon} \delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) v \text{sen} \theta \hat{\phi}. \quad (116)$$

Recordando que  $ck = \omega\sqrt{\epsilon}$  y que  $\chi = \frac{\epsilon-1}{4\pi}$ , podemos escribir  $\frac{\chi}{c^2 k^2 - \omega^2} = \frac{1}{4\pi\omega^2}$ , y al combinar este resultado con los otros factores podemos escribir la ecuación (116) como

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = (2\pi)^{1/2} \frac{i e^{ikr}}{r} \frac{q\omega}{c^2} \delta(\omega - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) v \text{sen} \theta \hat{\phi}. \quad (117)$$

Esta es nuestra expresión para el campo de radiación. Como vemos en el argumento de la delta de Dirac hemos recobrado la expresión usual para el ángulo de emisión de la radiación de Cherenkov, ya que

$$\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega - kv \cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{\beta \cdot n(\omega)},$$

donde nuevamente  $\beta$  es el factor de Lorentz,  $\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega}{k}$ , y  $\theta$  es el ángulo entre la velocidad de la partícula y la dirección de propagación de la onda de radiación. Para poder trabajar con la delta de Dirac que aparece en (117) es conveniente seguir un procedimiento heurístico propuesto por Panofsky y Phillips [71], y utilizar la definición de la función delta como el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) &= \delta(\omega - kv \cos\theta) = \frac{1}{v} \delta\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right) \\ &= \frac{1}{v} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} e^{i\left[\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right)z\right]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi v} \left[ \frac{e^{i\left[\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right)L/2\right]} - e^{-i\left[\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right)L/2\right]}}{i\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right)} \right] \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{L}{2\pi v} \frac{\text{sen}\left[\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right)\frac{L}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\omega}{v} - k \cos\theta\right)\frac{L}{2}\right]}. \end{aligned} \quad (118)$$

Para simplificar esta expresión podemos definir  $f = \frac{\omega}{v} - k \cos\theta$ . Con estas expresiones, ahora podemos escribir la ecuación (117) como:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{ie^{ikr}}{(2\pi)^{1/2} r} \frac{q\omega L}{c^2} \frac{\text{sen}\left[\frac{fL}{2}\right]}{\left(\frac{fL}{2}\right)} \text{sen}\theta \hat{\phi}. \quad (119)$$

En esta expresión, podemos entender a  $L$  como la distancia recorrida por la partícula dentro del medio, y por tanto podremos utilizarla sin el límite  $L \rightarrow \infty$  para considerar un recorrido limitado de la partícula.

## 4.2 Energía radiada por el medio

En los análisis usuales de la radiación de Cherenkov se suele calcular la energía radiada por unidad de distancia recorrida, para recuperar esta cantidad a partir de la ecuación (119) debemos calcular la energía radiada por unidad de frecuencia y por unidad de ángulo sólido. Como vimos en el capítulo anterior podemos obtener esta cantidad a partir de la ecuación (94). Al hacer los cálculos para nuestro caso obtenemos que

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\epsilon} |r \mathbf{E}_{\text{rad}}|^2. \quad (120)$$

Sustituyendo la ecuación (119) en la ecuación (120) obtenemos que

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\Omega d\omega} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\epsilon} \left| r \frac{e^{ikr}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{iq\omega L \operatorname{sen} \left[ \frac{fL}{2} \right]}{c^2 \left( \frac{fL}{2} \right)} \operatorname{sen}\theta \right|^2 = \frac{q^2\omega k L^2 \operatorname{sen}^2 \left[ \frac{fL}{2} \right]}{(2\pi)^2 c^2 \left( \frac{fL}{2} \right)^2} \operatorname{sen}^2\theta. \quad (121)$$

Integrando la ecuación (121) sobre el ángulo sólido obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} &= \frac{q^2\omega k L^2}{(2\pi)^2 c^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2(fL/2)}{(fL/2)^2} \operatorname{sen}^2\theta d\cos\theta \\ &= \frac{q^2\omega k L^2}{2\pi c^2} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen}^2 \left( \left( \frac{\omega}{v} - ku \right) \frac{L}{2} \right)}{\left( \left( \frac{\omega}{v} - ku \right) \frac{L}{2} \right)^2} (1 - u^2) du, \end{aligned} \quad (122)$$

donde  $u = \cos\theta$ . Notemos que de acuerdo con nuestro problema, en el punto donde  $u = u_c = \omega/(vk)$  la expresión  $fL/2$  se anula, por lo que en ese punto existe un máximo muy agudo en correspondencia con el ángulo de máxima emisión de la radiación de Cherenkov, y la mayor parte de la contribución de esta integral provendrá de este punto, esto nos asegura que el resultado prácticamente no variará si hacemos la sustitución  $u \rightarrow u_c$  en el factor  $1 - u^2$ , de modo la ecuación (122) se convertirá en:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\omega} &= \frac{q^2\omega k L^2}{2\pi c^2} (1 - u_c^2) \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen}^2 \left( \left( \frac{\omega}{v} - ku \right) \frac{L}{2} \right)}{\left( \left( \frac{\omega}{v} - ku \right) \frac{L}{2} \right)^2} du \\ &= \frac{q^2\omega L}{\pi c^2} (1 - u_c^2) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\alpha^2} d\alpha, \end{aligned} \quad (123)$$

donde

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v} - k \right) L, \quad \eta_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{v} + k \right) L.$$

Analicemos la integral en la ecuación (123), es una expresión por demás interesante, ya que su comportamiento depende de los valores adoptados por las variables  $\omega$ ,  $k$ , y  $v$ . No olvidemos que para obtener nuestras expresiones finales es necesario tomar el límite cuando  $L \rightarrow \infty$ . Para el límite superior  $\eta_2 = \frac{L}{2} \left( \frac{\omega}{v} + k \right)$ , debido a que tanto  $\omega$  como  $k$  y  $v$  son cantidades positivas, no importa cual sea su relación, al tomar el límite tendremos que este tiende a infinito. El caso del límite inferior  $\eta_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{\omega}{v} - k \right)$  es mucho más delicado, en este caso tenemos dos posibilidades:

1. Si  $\omega/v - k > 0$  entonces  $\eta_1 \rightarrow \infty$  y por lo tanto la integral en la ecuación (123) tiende a cero;

2. Si  $\omega/v - k < 0$  (y por lo tanto  $v > \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$ , la condición usual para la radiación de Cherenkov) entonces  $\eta_1 \rightarrow -\infty$  y por lo tanto la integral es igual a  $\pi$ , ya que el dominio de integración es toda la recta real.

Conjuntando estos resultados y realizando la integración llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\omega} = \frac{q^2\omega L}{c^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{v^2k^2}\right) \Theta\left(v - \frac{\omega}{k}\right), \quad (124)$$

donde  $\Theta$  es la función escalón de Heaviside. Como vemos, el comportamiento de esta integral nos advierte de una situación física muy clara: solamente cuando la velocidad de la partícula supera la velocidad de fase de una onda monocromática con frecuencia  $\omega$  tenemos la emisión de radiación con dicha frecuencia en el ángulo de Cherenkov, de otra manera, si la velocidad de la partícula es menor que la velocidad de fase, no habrá una onda emitida.

Para saber cual es la energía promedio emitida por el medio por unidad de longitud atravesada por la partícula y por unidad de frecuencia angular de las ondas emitidas debemos calcular

$$\frac{d^2\mathcal{E}}{d\omega dz} = \frac{q^2\omega}{c^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{v^2k^2}\right) \Theta\left(v - \frac{\omega}{k}\right). \quad (125)$$

Por último, para saber la energía irradiada por la partícula por unidad longitud atravesada, debemos integrar la ecuación 125 en  $\omega$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = \frac{q^2}{c^2} \int \omega d\omega \left(1 - \frac{\omega^2}{v^2k^2}\right) \Theta\left(v - \frac{\omega}{k}\right). \quad (126)$$

Esta expresión es la fórmula usual para la intensidad de radiación por unidad de longitud que se obtiene mediante la teoría usual de Frank y Tamm, ecuación (22).

Nuestro análisis acaba de mostrar su consistencia con la formulación clásica de Frank y Tamm. En el proceso hemos visto como al suponer que el campo de polarización es el responsable de la radiación hemos arribado de manera natural a las características conocidas de la radiación de Cherenkov, como el ángulo de emisión, la velocidad crítica y la intensidad de radiación por unidad de longitud. También podemos vislumbrar una explicación de por que la radiación solo se da para velocidades mayores que la velocidad de fase: la potencia radiada que vemos a gran distancia esta relacionado de manera crítica con la integral en la ecuación 123; esta integral solo es distinta de cero para velocidades mayores que la velocidad de fase, y esto no es más que un reflejo del hecho de que una superposición constructiva de las ondas que la partícula genera en el medio solo se puede dar cuando la velocidad de la partícula es mayor que la velocidad de fase.

Esta formulación de la radiación de Cherenkov resulta natural y también es un método muy poderoso, además de ser más sencillo, matemáticamente hablando, que la formulación usual de la radiación de Cherenkov.

Villavicencio *et. al.* han demostrado que esta formulación se puede extender para tratar distribuciones extensas de carga, además de que es posible obtener la radiación de Cherenkov inducida por otras distribuciones de carga como dipolos e incluso la radiación de Cherenkov ocasionada por el paso de un pulso electromagnético dentro del medio [67, 68].

Todas estas características convierten a esta formulación en una herramienta muy útil al abordar nuevos problemas relacionados con la emisión de radiación debida a partículas que viajan dentro de un medio material a velocidad constante. En el siguiente capítulo desarrollaremos los aspectos más relevante sobre la teoría de los cristales líquidos colestéricos y en el capítulo 6 presentaremos nuestra investigación sobre la radiación establecida en un colestérico por el paso de una partícula cargada utilizando el método que hemos expuesto en este capítulo.

## 5 Cristales líquidos colestéricos

La investigación de los cristales líquidos es un área hoy en día fuertemente cimentada dentro de la física. El término cristal líquido se refiere a un conjunto de fases de la materia que pueden alcanzar algunas sustancias. Cuando una sustancia se encuentra en una fase de cristal líquido adquiere propiedades únicas, ya que al igual que los líquidos tiene la capacidad de fluir pero a diferencia de estos tiene varios índices de refracción, más de un coeficiente de viscosidad, módulos elásticos y su susceptibilidad dieléctrica está representada por un tensor de manera análoga a lo que pasa con los cristales. Podemos decir que los cristales líquidos son fases intermedias entre el líquido isotrópico y el sólido cristalino, y es debido a esto que se acuñó uno de los nombres con los que se suelen conocer a estas fases: mesofases.

Todas estas características de los cristales líquidos son posibles debido a que las moléculas que los componen tienen libertad para desplazarse por el volumen de la sustancia como si fueran las moléculas de un líquido –aunque los grados de esta libertad dependen del cristal líquido que estemos considerando– pero al desplazarse conservan algún tipo de orden.

En el caso más sencillo un cristal líquido está constituido por moléculas con forma de barra alargada, las cuales apuntan en una dirección preferencial mientras se desplazan por el volumen del cristal líquido. Esta mesofase es conocida como nemático. Bajo ciertas circunstancias, se puede formar una mesofase en la cual la dirección preferencial en la que apuntan las moléculas es una función periódica del espacio y tiene la estructura de una hélice. A las sustancias que crean esta última estructura de una manera espontánea se les conoce como cristales líquidos quirales o cristales líquidos colestéricos (CLC).

La importancia que los cristales líquidos tienen el día de hoy es insoslayable. La gran mayoría de las pantallas planas que utilizamos, incluyendo las pantallas de los teléfonos celulares que están en todas partes, basan su funcionamiento en las características únicas de los cristales líquidos.

Existen muchos tipos de cristales líquidos, y en cada caso, para generar cada uno de los tipos de cristales líquidos, debemos poner restricciones a los grados de libertad del movimiento de las moléculas dentro del cristal líquido, o bien, romper simetrías dentro del material. En las siguientes secciones haremos una breve revisión de los principales tópicos alrededor de los cristales líquidos, y en particular describiremos las características únicas de los cristales líquidos colestéricos.

### 5.1 Breve historia de los cristales líquidos

Los cristales líquidos tienen una historia más que centenaria y son un ejemplo inmejorable de como la pasión por la investigación de la naturaleza sostenida por largo tiempo da lugar a impresionantes desarrollos tecnológicos. La investigación formal de los cristales líquidos comenzó en 1989 cuando Friedrich Reinitzer (figura 9), un botánico austriaco, notó que una sustancia derivada del colesterol de las zanahorias, benzoato



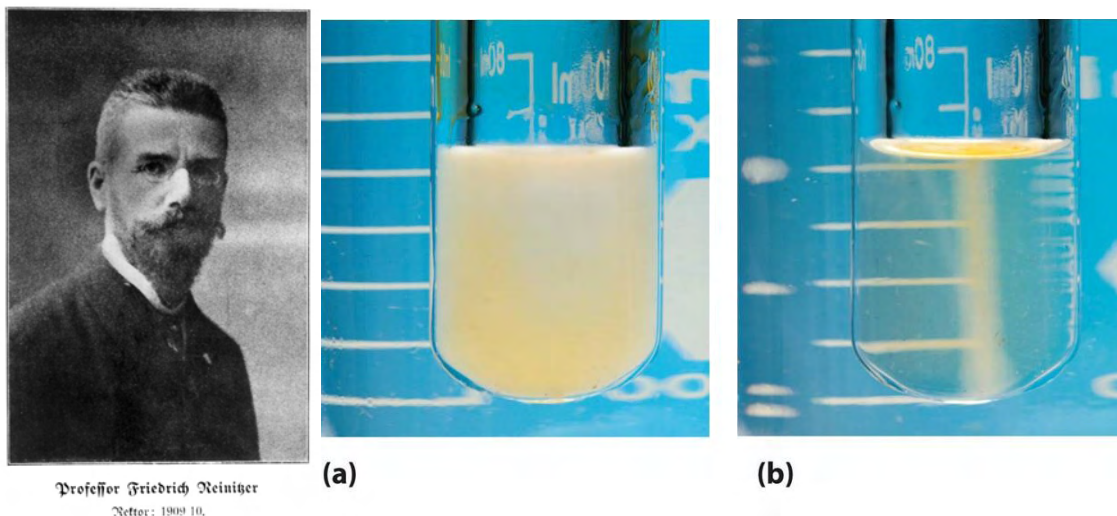


Figura 9. Friedrich Reinitzer, descubridor de los cristales líquidos. A la derecha un par de muestras de benzoato de colesterilo: (a) a una temperatura entre los 150 °C y los 189 °C; (b) a una temperatura ligeramente mayor a 189 °C.

de colesterilo, parecía tener dos puntos de fusión: en un primer punto, a unos 150 °C, la sustancia se convertía en un líquido lechoso y viscoso; al seguir aumentando la temperatura y hasta llegar a los 189 °C, el líquido súbitamente se volvía claro y disminuía su viscosidad [72, 73]. Asombrado, Reinitzer decidió que había que investigar más profundamente esta sustancia, y encontró que en su estado lechoso interactuaba de manera muy particular con la luz polarizada. Posteriormente, comunicó sus resultados al célebre cristalógrafo Otto Lehman (figura 10), quien hizo los primeros estudios cristalográficos de los cristales líquidos y con el tiempo se convirtió en el gran paladín de su estudio [74, 75, 76].

Durante los primeros años de investigación, los esfuerzos se centraron en describir la interacción de la luz polarizada con los cristales líquidos, concretamente en la descripción de lo que hoy en día conocemos como texturas, estudio para el que fue crucial el uso del microscopio de polarización perfeccionado por Lehman (figura 8). La primer gran compilación de estos resultados se la debemos al propio Lehman, con su monumental monografía aparecida en 1904 [77], donde se describían más de 400 texturas de cristales líquidos en láminas pintadas a mano.

Pocos años después se establecieron varios resultados cruciales. Alexander Vörländer lanzó la idea de que las moléculas de cristales líquidos debían tener una forma alargada, y que posiblemente en estas fases las moléculas se desplazaban manteniendo una orientación preferencial [78]. Charles Mauguin investigó la interacción de la luz con cristales líquidos encerrados dentro de una celda que le permitía crear una configuración quiral, análoga a la configuración que hoy en día sabemos que tienen los cristales líquidos colestéricos y que describiremos más adelante [79]. Mauguin también investigó la interacción de los cristales líquidos con campos magnéticos y llegó a la conclusión de

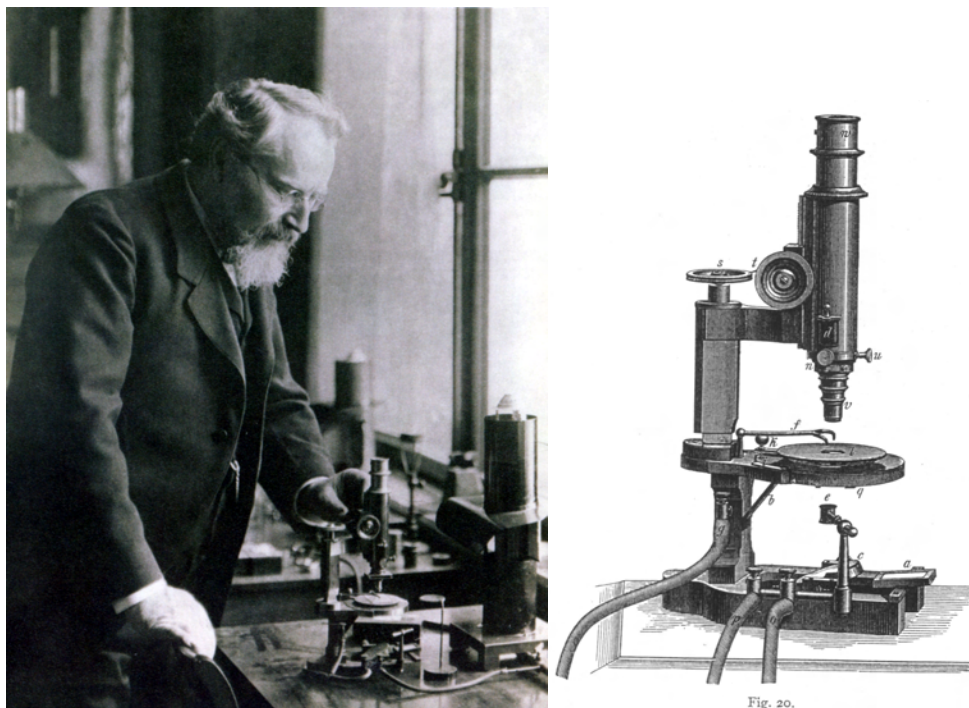


Figura 10. Otto Lehman, el gran paladín de las primeras investigaciones sobre los cristales líquidos. A la derecha una representación de su microscopio de polarización.

que era posible reorientar a las moléculas utilizando estos campos [80].

El siguiente gran paso adelante en la investigación de los cristales líquidos fue dado por George Friedel, quien en 1922 publicó una extensa investigación sobre las texturas observadas hasta ese momento en los cristales líquidos y postuló que los cristales líquidos se trataban de una nueva fase de la materia, y acuñó el término mesofase para referirse a ellos [81, 82]. Friedel también introdujo los nombres contemporáneos con los que conocemos a los distintos tipos de cristales líquidos, a saber: nemáticos, esmécticos y colestéricos. En la siguiente sección describiremos todos estos tipos de cristales líquidos.

Durante la década de 1920 y 1930 las investigaciones en torno a los cristales líquidos siguieron incrementándose, y en 1933 ocurrió una reunión científica crucial en la historia de la investigación de estos materiales: la reunión de estudiosos de los cristales líquidos bajo el auspicio de la Sociedad Faraday de Inglaterra. Esta reunión fue convocada por una de las grandes cabezas de la cristalografía en esos momentos, Sir William Bragg. Esta reunión cohesionó por primera vez a la comunidad interesada en los cristales líquidos. Entre los trabajos que se expusieron en la reunión se incluían cuestiones como la nomenclatura para los cristales líquidos, teorías moleculares, módulos elásticos y coeficientes de viscosidad. Un trabajo que vale la pena destacar es el de Vsevolod Frederiks, un científico ruso que hizo estudios muy precisos sobre la interacción de los cristales líquidos con campos electromagnéticos, descubriendo el efecto nombrado en honor a él y que más tarde tendría una importancia capital para el desarrollo de las modernas tecnologías de pantallas de cristales líquidos [76, 83, 84].

La investigación en torno a los cristales líquidos continuó su camino a lo largo de la década de 1930, pero a finales de esta década comenzó a abandonarse debido al cambio en las prioridades de las naciones debido al inminente comienzo de la Segunda Guerra Mundial. Durante una década la investigación en torno a los cristales líquidos quedó prácticamente paralizada. A mediados de la década de 1950 la investigación empezó a resurgir tanto en Inglaterra como en Alemania, donde vale la pena mencionar el trabajo de de Vries [85]. Para finales de la década los científicos estadounidenses mostraron interés por primera en este tópico.

Aunque la investigación básica en torno a los cristales líquidos continuó durante la década de 1960, en esta época se dio un cambio radical en el tema debido a la creación de las primeras aplicaciones tecnológicas de los cristales líquidos, que de inmediato atrajeron la atención de grandes compañías. Los primeros avances en este sentido se hicieron en los laboratorios de la RCA, y el primer efecto electroóptico observado en esta línea fue el de los llamados dominios de Williams [86], descubierto por Richard Williams. Al saber sobre este efecto, George Heilmeyer, también de la RCA, decidió centrarse en el estudio de los cristales líquidos, finalmente creando el primer dispositivo electroóptico de cristales líquidos [87], con los que fue posible crear prototipos de pantallas para relojes y ventanas opacables.

A pesar de estos primeros logros, la RCA abandonó la investigación en torno a los cristales líquidos [76]. En una de las mayores ironías de la historia, los desarrollos estadounidenses fueron retomados por un socio comercial menor y que en ese momento estaba tratando de hacerse un espacio dentro del mundo de la tecnología electrónica: Japón.

Durante la segunda mitad de la década de 1960 Japón se encontraba inmerso dentro de una guerra tecnológico-comercial en la que varias compañías japonesas trataban de crear un nuevo implemento electrónico clave: calculadoras. Los primeros modelos de calculadoras electrónicas creados por los japoneses eran pesadas, utilizaban una gran cantidad de energía y costaban tanto como un automóvil. Sin embargo, la exacerbada competencia, que en algún momento implicó a alrededor de 50 empresas creando calculadoras dentro de Japón, hizo que para finales de la década de 1960 se produjeran calculadoras fáciles de transportar que podían comprar todos los departamentos de contaduría de las empresas japonesas [88].

Para 1970, las grandes empresas japonesas se encontraban preparándose para un último asalto y la gran meta era crear una calculadora completamente portátil y que estuviera al alcance del bolsillo de cualquier persona. En esta línea, Casio creó en 1972 la primera calculadora realmente portátil. Sin embargo su principal inconveniente eran el gran consumo eléctrico de los tubos al vacío de su pantalla, que disminuían considerablemente la duración de sus pilas. En un intento por superar este producto, uno de los directivos de Sharp ordenó a sus equipos de investigación indagar en la viabilidad del uso de cristales líquidos para crear una pantalla. Este directivo tuvo esta idea después de ver los desarrollos hechos en la RCA a través de un documental de la televisión japonesa. Aunque nadie en el equipo de desarrollo tecnológico de la empresa sabía nada de estas sustancias, al cabo de poco tiempo se volvieron expertos en ellas, y



Figura 11. Elsi-mate 805, la primer calculadora portátil con pantalla de cristales líquidos  
[http://www.vintagecalculators.com/html/facit\\_1106\\_sharp\\_el-805s.html](http://www.vintagecalculators.com/html/facit_1106_sharp_el-805s.html)

en 1973 Sharp presentó la primera calculadora con pantalla de cristales líquidos (figura 11).

Hoy en día todas las calculadoras portátiles tienen pantallas que funcionan a base de cristales líquidos, pero la evolución de las pantallas de cristales líquidos no se detuvo en ese momento, y las generaciones posteriores vieron incrementarse el número de pantallas que presentaban, primero de una forma rudimentaria y luego cada vez más sofisticada, imágenes con información que permitía interactuar con los nuevos aparatos desarrollados. Las pantallas de la gran mayoría, si no es que todos, los celulares actuales funcionan con bases en las propiedades de los cristales líquidos, al igual que muchas de las pantallas planas gigantes que ahora vemos en todas partes, de ahí el nombre con el que se les conoce comunmente: *Liquid Crystal Displays* o LCD. El triunfo de Casio y Sharp selló la guerra de las calculadoras y le dieron a Japón un aparato con el que incursionó de manera exitosa en el mercado mundial de la tecnología. A partir de ese momento, la primicia en el desarrollo de la industria electrónica paso de los Estados Unidos al lejano oriente [88].

A pesar del predominio de las empresas japonesas en la creación de pantallas de cristales líquidos, gran parte de la investigación básica en torno a estas sustancias continuó haciéndose en Europa y los Estados Unidos y grandes descubrimientos fueron realizados ahí en las siguientes décadas. Podemos tomar como ejemplo la creación del modo de operación helicoidal por parte de Helfrich y Schadt en 1971 [89]. A partir de esta época, la investigación de los cristales líquidos han seguido un desarrollo fuertemente marcado por su utilización tecnológica, y su importancia ha permeado en áreas tan distantes como la medicina [90], pero los cristales líquidos son sin lugar a dudas

un t3pico que siempre tendr3a m3as que ofrecernos en su investigaci3n b3sica, como lo demuestra su utilizaci3n como moduladores espaciales de luz, cristales fot3nicos ajustables, interruptores 3pticos, etc. [91].

## 5.2 Tipos principales de cristales l3quidos

A continuaci3n haremos una discusi3n acerca de los principales tipos de cristales l3quidos, describiendo sus aspectos clave como su tensor diel3ctrico y la forma en que interactuan con la luz, haciendo hincapi3 en los cristales l3quidos nem3ticos y los cristales l3quidos colest3ricos. Para una mayor discusi3n del tema el lector puede refererirse a [92, 93, 94, 95].

Desde el inicio mismo de la investigaci3n en torno a los cristales l3quidos uno de los principales atractivos de estos fue su forma de interactuar con la luz, la cual s3lo hab3a sido vista antes en algunos tipos de minerales cristalinos. Dentro de cada tipo de cristal l3quido existe un tipo de orden particular, el cual es de largo alcance, y por otra parte tambi3n existe alg3n tipo de movimiento aleatorio propio de los l3quidos. En el caso de un cristal existen grupos de mol3culas que est3n arreglados de manera completamente regular, formando una red peri3dica en el espacio. En los l3quidos los centros de gravedad de las mol3culas var3an su posici3n de manera completamente aleatoria. Puesto de una manera matem3tica un cristal est3 definido por el hecho de que, si un patr3n primigenio (o base) est3 localizado en el punto  $\mathbf{x}_0$ , la probabilidad de encontrar un patr3n equivalente en el punto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{n}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{n}_3\mathbf{a}_3$  (siendo  $\mathbf{n}_i$  un entero,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , y  $\{\mathbf{a}_i\}$  un conjunto de vectores base) se mantiene finita cuando  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \rightarrow \infty$ . Como resultado, su patr3n de difracci3n de rayos X muestra reflexiones de Bragg muy agudas y bien localizadas caracter3sticas de una red. En otras palabras

$$\lim_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \rangle = F(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (127)$$

donde  $\langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \rangle$  es la funci3n de correlaci3n densidad-densidad y  $F(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  es una funci3n peri3dica con vector base  $\mathbf{a}_i$ .

Un l3quido isotr3pico se puede definir de una manera similar. Se puede decir que si existe alg3n patr3n en un punto  $\mathbf{x}_0$  entonces no hay manera de expresar la probabilidad de encontrar un patr3n similar en un punto  $\mathbf{x}$  lejano de  $\mathbf{x}_0$ , excepto a trav3s de la densidad promedio de part3culas  $\bar{\rho}$ , esto es

$$\lim_{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty} \langle \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \rangle \simeq \bar{\rho}^2. \quad (128)$$

En el caso de un l3quido existe una longitud de escala, que es la misma en cualquier direcci3n  $\xi$  fuera de la cual las correlaciones se pierden (o m3s bien se vuelven despreciables). El patr3n de difracci3n refleja este mismo hecho mostrando picos difusos con una anchura  $\xi^{-1}$ .

Con estas ideas en mente, es posible definir las caracter3sticas de un cristal l3quido. En el caso de los cristales l3quidos la funci3n de correlaci3n de densidades no depende

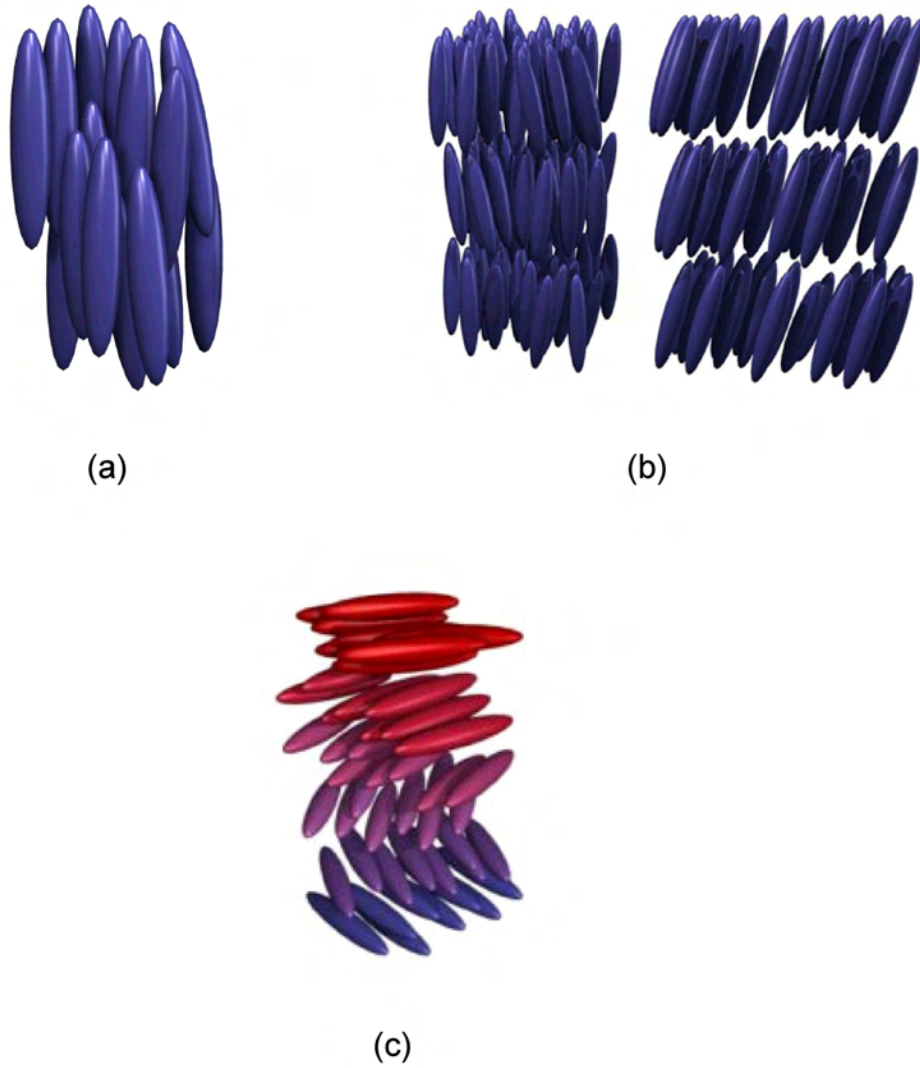


Figura 12: Distintos tipos de cristales líquidos constituidos por moléculas alargadas: (a) configuración de nemático; (b) dos tipos de cristal líquido esméctico; (c) cristal líquido quiral o colestérico

exclusivamente del módulo  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  sino que depende de la orientación  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  con respecto algún eje espacial. Esta definición nos deja amplias posibilidades para romper la simetría que existen un cristal, o para imponer una simetría dentro de un líquido. Para saber cuáles son las posibles mesofases existentes, comenzaremos rompiendo la simetría de orientación de las moléculas. Los casos más comunes de formas para estas moléculas son alargadas como un habano. Este tipo de moléculas suelen conocerse como calamíticas. También existen moléculas con forma de disco o puck de hokey. En ambos casos, obtenemos una fase de cristales líquidos si las moléculas apuntan preferentemente en una dirección sin perder la capacidad de moverse por el volumen de la sustancia en libertad. Este tipo de cristal líquido es conocido como cristal líquido nemático.

La siguiente restricción se la agregaremos el cristal líquido nemático de moléculas calamíticas, y consiste en que las moléculas estén constreñidas a permanecer preferentemente dentro de una capa. En este caso no sólo habrá una orientación preferencial, sino también una estructura suplementaria dentro del líquido. A pesar de esto las moléculas tienen dos grados de libertad para moverse libremente como líquido, ya que dentro de las capas se pueden desplazar libremente. Este tipo de cristales líquidos son conocidos como esmécticos (figura 12) y se conocen varias subclases dentro de ellos.

Existe otra fase de cristales líquidos que consiste en que las moléculas de tipo discótico se aglutinen en columnas. Esta es la llamada fase columnar en la cual tenemos la mayor restricción para el movimiento de las moléculas dentro del cristal líquido.

Es posible tener una sustancia con más de una mesofase, por ejemplo, puede ocurrir que al calentar una sustancia y fundirla esta pase de fase sólida a convertirse en un esméctico; luego al aumentar aún más la temperatura, puede convertirse en otro tipo de esméctico, y al seguir aumentando la temperatura puede convertirse en un nemático, y finalmente al seguir aumentando la temperatura la sustancia se volverá un líquido isotrópico [76].

### 5.3 Cristales líquidos nemáticos y colestéricos

Existe otro tipo de mesofase en la cual se mezclan las propiedades de los cristales líquidos nemáticos y las de los cristales líquidos esmécticos, los llamados cristales líquidos quirales o cristales líquidos colestéricos. Los cristales líquidos colestéricos (CLC) están compuestos por las moléculas del tipo alargado, sin embargo tienen la particularidad de que su configuración de mínima energía es una configuración helicoidal.

Esta configuración se crea de la siguiente manera: en una primera capa todas las moléculas apuntan preferentemente en una misma dirección que está dentro del mismo plano; en la siguiente capa las moléculas también apuntan en una sola dirección, pero esta nueva dirección es ligeramente distinta de la dirección anterior. Esta diferencia de orientación es constante al pasar de una capa a la siguiente, de modo que al pasar por una cantidad suficiente de capas volvemos a la orientación original de la primera capa. Ésta es la estructura característica de los CLC, en la cual una hélice indica las orientaciones preferenciales de las moléculas dentro de cada capa (figura 13).

Los cristales líquidos nemáticos y colestéricos tienen muchas características en común:

1. Tanto en los colestéricos como en los nemáticos los centros de gravedad de las moléculas no tienen un orden de largo alcance.
2. Existe orden en lo que se refiere la dirección en la que se orientan las moléculas: éstas tienden encontrarse paralelas con cierto eje común, el cual es conocido como el vector unitario (o director)  $\mathbf{n}$ . Esto se refleja en todas las propiedades sensoriales macroscópicas: por ejemplo, ópticamente un nemático es un medio uniaxial con el eje óptico a lo largo de  $\mathbf{n}$ . En el caso de los CLC el vector director coincide con la estructura helicoidal de orientaciones de las moléculas.
3. La dirección de  $\mathbf{n}$  es arbitraria en el espacio, pero en la práctica esta dirección se impone mediante la acción de fuerzas menores (como puede ser el efecto guía que tiene las paredes del contenedor). En el caso de los nemáticos esto nos da la posibilidad de crear campos de orientación muy complejos, e incluso podemos crear una estructura helicoidal a partir de un nemático. En el caso de los colestéricos también tenemos libertad para variar la estructura, por ejemplo alargando o disminuyendo la distancia de repetición de la hélice, sin embargo, al deformar mucho el estado del cristal líquido, la organización quiral se rompe y se generará una estructura de dominios donde solo localmente se tiene la configuración de mínima energía y la hélice cambia de orientación al pasar de un dominio a otro.
4. Los estados del director  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  son indistinguibles.
5. Las fases nemáticas ocurren solamente con materiales en los que no se distingue entre derecha e izquierda; puede ser que cada molécula que constituye material sea idéntica a su imagen en el espejo –moléculas aquirales– o bien, si este no es el caso, entonces el sistema debe ser ‘racémico’, o sea una mezcla 1:1 de las especies izquierdas y derechas de la molécula. En el caso de los CLC, las moléculas tienen una estructura quiral, o bien, con el agregado de un pequeño dopante la estructura preferida por el sistema es quiral.

Localmente un CLC es similar a un material nemático. Como el caso del nemático los centros de gravedad no tienen orden de largo alcance, pero la orientación de las moléculas si tiene un eje preferencial que se puede etiquetar mediante el vector director  $\mathbf{n}$ . Este vector no es constante en el espacio, y como ya dijimos, la configuración preferida por el material es helicoidal. Si llamamos  $z$  al eje en el cual se desarrolla la estructura de la hélice,  $\mathbf{n}$  se caracteriza por las siguientes ecuaciones [96]:

$$\begin{aligned}
 n_x &= \cos(q_0 z + \phi), \\
 n_y &= \text{sen}(q_0 z + \phi), \\
 n_z &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{129}$$

donde  $p = 2\pi/|q_0|$  es conocido como el pitch del CLC. Tanto el eje helicoidal como el valor de  $\phi$  son arbitrarios. Existe otro tipo de simetría rota: la estructura es periódica





Figura 13. Representaciones esquemáticas de la organización molecular en un cristal líquido colestérico.

a lo largo de  $z$  y el frecuencia de rotación espacial  $L$  es igual a la mitad del pitch (dado que los estados  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  son equivalentes):

$$L = \frac{\pi}{|q_0|}$$

Los valores típicos de  $L$  son del orden de  $3000 \text{ \AA}$ ; esta es una distancia mucho mayor que las dimensiones moleculares típicas. Dado que  $L$  es comparable con la longitud de onda de la luz visible, la periodicidad resulta en difracciones de Bragg de los rayos de luz incidentes. Discutiremos más ampliamente estos efectos ópticos en las siguientes secciones.

Tanto la magnitud como el signo de  $q_0$  tienen un significado físico. El signo distingue entre hélices derechas e izquierdas; una muestra dada a una temperatura dada siempre produce muestras con el mismo signo de giro. Si cambiamos la temperatura  $T$ , entonces  $q_0$  también cambiará. En algunos casos  $q_0(T)$  puede cambiar de signo en una temperatura particular  $T^*$ . Este caso es interesante, ya que en la temperatura  $T^*$  el material se comporta como un nemático convencional y al cruzar la temperatura  $T^*$  encontramos que las propiedades físicas tales como calores específicos, etc., mantienen variaciones suaves [93].

Por lo que hemos visto, los nemáticos y los colestéricos son hasta cierto punto dos subclases de la misma familia, con las siguientes reglas de correspondencia

Sistemas racémicos o aquirales  $\rightarrow$  nemáticos  
Sistemas diferentes de su imagen en el espejo  $\rightarrow$  colestéricos

### 5.3.1 Anisotropía dieléctrica

La constante dieléctrica estática medida a lo largo del vector director ( $\epsilon_{\parallel}$ ) y perpendicular a este ( $\epsilon_{\perp}$ ) son diferentes. Para una dirección arbitraria del campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , la relación entre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico adopta la forma [91, 93]:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_{\perp} \mathbf{E} + \epsilon_a \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}), \quad (130)$$

donde la diferencia

$$\epsilon_a = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp} \quad (131)$$

puede ser positiva o negativa dependiendo de la estructura química detallada de cada una de las moléculas constituyentes del CLC y de la frecuencia utilizada para excitar al medio. En términos generales, podemos hacer las siguientes consideraciones:

1. Si cada una de las moléculas tiene un momento dipolar paralelo (o casi paralelo) a su eje largo, el dipolo se puede orientar eficientemente mediante un campo  $\mathbf{E}$  a lo largo del eje del nemático (si el campo está a lo largo de la dirección  $+\mathbf{n}$ , entonces habrá más dipolo los apuntando la dirección  $+\mathbf{n}$  en la dirección  $-\mathbf{n}$ ). Pero un campo perpendicular a  $\mathbf{n}$  tendrá solamente efectos débiles. En este caso que acabamos de describir tendremos  $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$ .
2. Si hay un momento dipolar permanente que es más o menos normal a la dirección del eje largo, la situación será la inversa y tendremos que  $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$ .

### 5.3.2 Agentes que influyen para cambiar la periodicidad de la hélice

Como hemos visto hasta ahora, el comportamiento de un CLC está condicionado de una manera crítica por la longitud del periodo de la hélice. En el caso de la radiación proveniente del paso de una partícula por un CLC esto también es cierto, por lo que reviste interés conocer los principales agentes capaces de alterar el pitch de un CLC.

**Temperatura** El primer agente que debemos tomar en cuenta es la temperatura. En la mayor parte de los CLC, el pitch  $p$  decrece a medida que aumenta la temperatura.

$$\frac{dp(T)}{dT} < 0$$

Esta dependencia suele ser pronunciada como se puede ver en la figura 14. Esta remarcable dependencia ha sido utilizada desde hace varias décadas para la fabricación de dispositivos termosensibles. Como hemos visto, dependiendo de la longitud del pitch, aparece una banda de reflexión para los ángulos cercanos al eje del CLC. Por otra parte, tanto la región de reflexión como el rango de sensibilidad de la temperatura se pueden controlar con una mezcla apropiada de distintos CLC. Algunas de las aplicaciones que se han llevado adelante mediante las propiedades de variación de pitch son:

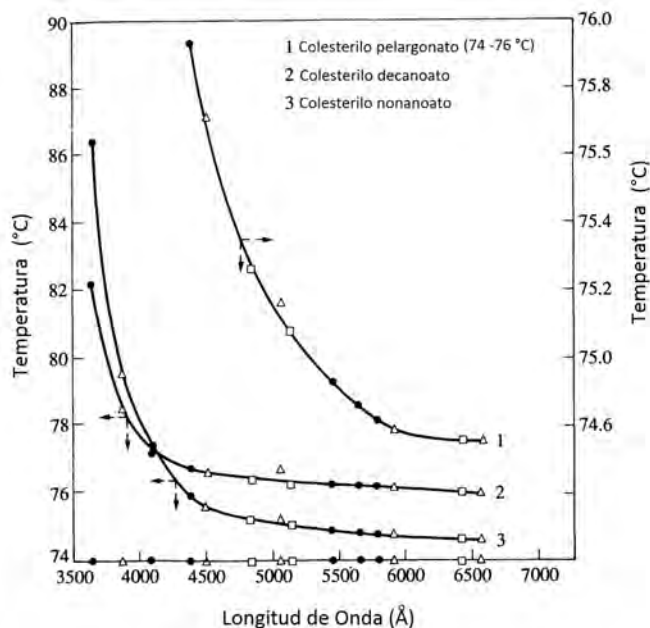


Figura 14. Relación entre la temperatura y la longitud del periodo de la hélice en algunos cristales líquidos colestéricos típicos. En la horizontal se representan la longitud de onda de las reflexiones de Bragg medidas en las sustancias, que es igual al pitch multiplicado por el índice de refracción  $n \sim 1.5$ . [93]

- a) Medición superficial de temperaturas. En este caso, la superficie a estudiar se cubre con una capa delgada de material con CLC. Las diferencias de temperatura se verán como diferencias de color.
- b) Conversión de imágenes infrarrojas a imágenes visibles. Al enfocar la imagen infrarroja en el CLC, unas partes aumentarán su temperatura más que otras, dando pie a variaciones en la longitud de pitch y la imagen infrarroja es traducida a un esquema de color [76].

**Composición química** La variabilidad mostrada por los CLC, tanto en pitch, dependencia con la temperatura, valor de constantes dieléctricas, etc., sugiere que las propiedades de mezclas de distintos CLC pueden ser altamente flexibles y que se pueden ajustadar a requerimientos preestablecidos.

Uno de los primeros mecanismos que se puede implementar con CLC es el dopamiento de cristales líquidos nemáticos. La presencia de una pequeña cantidad de moléculas quirales provoca que la estructura del nemático se vuelva quiral. En este caso, se sabe que la concentración y el pitch generado en el cristal líquido siguen una relación predecible como sigue:

$$P \cdot c = \text{cte},$$

donde  $P$  es el pitch del cristal líquido obtenido y  $c$  es la concentración de cristal líquido dopante.

En el caso de la mayor parte de las mezclas de CLC, el pitch resultante suele ser cercano al promedio del pitch de los componentes ponderado por la concentración de cada uno de los compuestos:

$$\tilde{q}(T) \simeq \sum_i c_i q_i(T).$$

Aquí,  $c_i$  es la concentración de cada uno de los componentes de la mezcla. Sin embargo, se debe considerar que suele haber excepciones a esta regla y se debe probar su validez en cada caso específico.

Por último, ciertos gases causan un cambio significativo en el pitch cuando son absorbidos por una película de colestéricos [93].

**Campos externos** Es posible distorsionar el campo de direcciones de un colestérico mediante la aplicación de un campo eléctrico o magnético. Esta es una de las características más sorprendentes y útiles de los cristales líquidos, y es por esto que han sido elegidos una y otra vez como el material principal para muchas aplicaciones de tecnología óptica.

## 5.4 Interacción de un colestérico con una onda electromagnética incidente en la dirección de la hélice

Los CLC interactúan de manera distinta con la radiación electromagnética dependiendo de la longitud de onda de esta radiación. En general podemos distinguir tres regímenes: i) cuando la longitud de onda es mucho mayor que el pitch del cristal líquido; ii) cuando es de la misma magnitud, y iii) cuando es mucho menor que él. Por otra parte la hélice es muy sensible a las condiciones provenientes del exterior, como campos electromagnéticos o superficies orientadoras. Esta combinación única lleva a la aparición de propiedades ópticas exclusivas de los CLC, las cuales tienen tanto interés científicos como aplicaciones tecnológicas prácticas. En esta sección haremos una breve revisión de las propiedades de interacción de un CLC con un onda incidente a lo largo del eje de la hélice.

Como hemos mencionado, la actividad óptica de los cristales líquidos se debe a su peculiar estructura helicoidal. Recordemos que el campo de orientaciones, si el eje de la hélice apuntan en la dirección  $z$  y nos encontramos ante un cristal líquido con giro derecho, es según la ecuación (129)

$$\begin{aligned} n_x &= \cos\theta = \cos(qz), \\ n_y &= \sin\theta = \sin(qz), \\ n_z &= 0. \end{aligned} \tag{132}$$

donde  $q = \frac{2\pi}{p}$  y donde  $p$  es el pitch. Podemos deducir la expresión para el tensor dieléctrico a partir de la ecuación (130)

$$\epsilon = \epsilon_{\perp} \mathbf{I} + \epsilon_a \mathbf{nn}, \quad (133)$$

y en el caso del campo de orientaciones (132) podemos escribir explícitamente que

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \cos^2 qz & \epsilon_a \text{sen} qz \cos qz & 0 \\ \epsilon_a \text{sen} qz \cos qz & \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \text{sen}^2 qz & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (134)$$

Podemos reescribirlo de una forma equivalente mediante:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2qz \right) & \epsilon_a \frac{1}{2} \text{sen} 2qz & 0 \\ \epsilon_a \frac{1}{2} \text{sen} 2qz & \epsilon_{\perp} + \epsilon_a \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2qz \right) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\perp} \end{pmatrix}. \quad (135)$$

Supongamos que tenemos una muestra de CLC con suficientes ciclos de la hélice como para poder despreciar los efectos de borde. Nos interesa saber la relación de dispersión para ondas electromagnéticas que viajan en el colestérico con una dirección paralela al eje de la hélice. En este caso las ecuaciones de Maxwell relevantes son las siguientes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (136)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (137)$$

donde hemos supuesto que el medio no es magnético ( $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ) y que no hay cargas ni corrientes libres. Podemos obtener una sola ecuación si aplicamos el rotacional a la ecuación (136) y combinamos el resultado con la ecuación (137), de modo que obtenemos que

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}. \quad (138)$$

Recordemos que  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ , y debido a que no tenemos fuentes de campo eléctrico, podemos reducir la ecuación (138) a:

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad (139)$$

donde hay que recordar que  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ . Nos interesa saber que pasa con las ondas planas que se propagan dentro del CLC. No tenemos una razón para pensar que estas ondas cambiarán su dirección, pero posiblemente si se presenten interacciones distintas para distintas formas de polarización y quizá en la magnitud de la radiación, de modo que proponemos las siguientes soluciones:

$$\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0(r) e^{-i\omega t}$$

$$\mathbf{D}(r, t) = \mathbf{D}_0(r) e^{-i\omega t} \quad (140)$$

Al sustituir la ecuación (140) en la ecuación (139) obtenemos la siguiente relación por componentes

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (141)$$

Debemos notar la presencia del tensor dieléctrico  $\epsilon$  que tendrá el efecto de mezclar las dos componentes  $E_x$  y  $E_y$ . Explícitamente tenemos que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon_{\perp} E_x + \epsilon_a E_x \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2qz \right) + \epsilon_a \frac{E_y}{2} \sin 2qz \right) = 0, \quad (142)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon_a \frac{E_x}{2} \sin 2qz + \epsilon_{\perp} E_y + \epsilon_a E_y \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2qz \right) \right) = 0. \quad (143)$$

La forma en que están mezcladas ambas componentes en las relaciones (142) y (143) nos sugiere que una combinación lineal de ambas puede ser solución de las ecuaciones. Basados en los resultados experimentales, que sugieren una fuerte interacción con ondas polarizadas circularmente, será interesante ver estas ecuaciones en la representación de ondas con polarización circular. Sean pues

$$E^{\pm} = E_x \pm E_y. \quad (144)$$

Para obtener las ecuaciones apropiadas basta con multiplicar a la ecuación (142) por  $i$  y sumarla en un caso y restarla en el otro a la ecuación (143) para obtener que

$$\frac{\partial^2 E^+}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) E^+ + \frac{\epsilon_a}{2} e^{2iqz} E^- \right] = 0, \quad (145)$$

$$\frac{\partial^2 E^-}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) E^- + \frac{\epsilon_a}{2} e^{-2iqz} E^+ \right] = 0. \quad (146)$$

Estas ecuaciones siguen estando acopladas, sin embargo, también nos sugieren que la diferencia entre las dos componentes no es más que una fase. Las siguientes expresiones nos darán la respuesta apropiada:

$$\begin{aligned} E^+ &= a e^{i(l+q)z}, \\ E^- &= b e^{i(l-q)z}. \end{aligned} \quad (147)$$

En este caso,  $a$  y  $b$  son dos constantes y  $l$  corresponde al número de onda de la radiación que se propaga en el colestérico en el caso de polarización circular.

Sustituyendo la ecuación (147) en las ecuaciones (145) y (146) obtenemos:

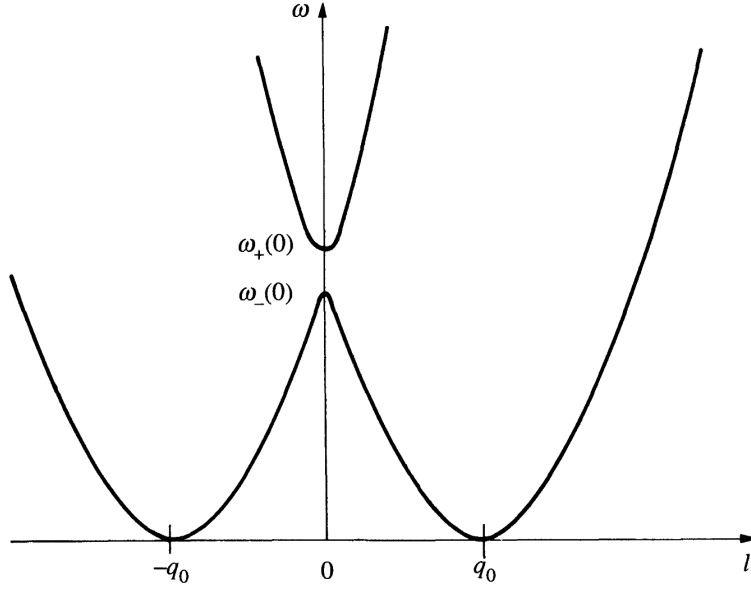


Figura 15. Relación entre la frecuencia y el vector de onda  $l$  para la propagación de modos electromagnéticos dentro de un colestérico en el caso de propagación a lo largo del eje principal. [93]

$$a(l+q)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) a + \frac{\epsilon_a}{2} b \right] = 0, \quad (148)$$

$$b(l-q)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right) b + \frac{\epsilon_a}{2} a \right] = 0. \quad (149)$$

Si definimos  $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2} \right)$  y  $k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_a}{2}$ , las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$[(l+q)^2 - k_0^2] a - [k_1^2] b = 0, \quad (150)$$

$$[(l-q)^2 - k_0^2] b - [k_1^2] a = 0. \quad (151)$$

Podemos escribir estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} (l+q)^2 - k_0^2 & -k_1^2 \\ -k_1^2 & (l-q)^2 - k_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

Este es un sistema de ecuaciones homogéneo, por lo tanto tiene solución no trivial solamente si el determinante de matriz se anula, o sea

$$\begin{vmatrix} (l+q)^2 - k_0^2 & -k_1^2 \\ -k_1^2 & (l-q)^2 - k_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Este determinante es equivalente a la siguiente ecuación

$$-k_1^4 + (-k_0^2 + l^2 + q^2)^2 - 4l^2 q^2 = 0. \quad (153)$$

Como vemos la ecuación (153) no depende de las intensidades de las ondas electromagnéticas circulares, solo depende del valor de la frecuencia de las ondas  $\omega$ , del valor de las constantes dieléctricas, del valor del pitch de la hélice colestérica y de la longitud de onda de la radiación. Esta es la relación de dispersión que estábamos buscando. Simplificando (153) tenemos que

$$\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel} \frac{\omega^4}{c^4} - (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}) (l^2 + q^2) \frac{\omega^2}{c^2} + (l^2 - q^2)^2 = 0. \quad (154)$$

Esta es una ecuación cuadrática para  $\omega^2$ , al resolverla obtenemos que:

$$\omega^2 = \frac{c^2 \left[ (l^2 + q^2) (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}) \pm \sqrt{(\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel})^2 (l^2 + q^2)^2 - 4\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (l^2 - q^2)^2} \right]}{2\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}. \quad (155)$$

Para esta ecuación tenemos dos soluciones posibles. Tomando la raíz cuadrada conservando solo la parte positiva de la ecuación (155) obtenemos [93, 94, 97] (figura 15):

$$\omega = c \sqrt{\frac{(l^2 + q^2) (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}) \pm \sqrt{(\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel})^2 (l^2 + q^2)^2 - 4\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} (l^2 - q^2)^2}}{2\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}}. \quad (156)$$

## 5.5 Teoría de la propagación electromagnética en el formalismo de las matrices de Jones

Podemos encontrar otras propiedades de los CLC en su interacción con la radiación electromagnética si trabajamos en otros formalismos. Uno de estos formalismos es el de las matrices y los vectores de Jones [98]. Como veremos en este capítulo, con esta herramienta se puede explicar de una manera alternativa las propiedades que hemos visto en las secciones anteriores y también algunas nuevas como el poder rotatorio y la transmisión para distintas longitudes de onda en la dirección del eje de la hélice.

### 5.5.1 Propagación a lo largo del eje óptico para longitudes de onda mucho menores que la frecuencia de rotación

Consideremos el campo de desplazamiento  $\mathbf{D}$  producido por un haz electromagnético desplazándose a lo largo del eje  $z$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{0x} e^{i(kz - \omega t + \varphi_x)} \\ D_{0y} e^{i(kz - \omega t + \varphi_y)} \\ 0 \end{pmatrix},$$



entonces, en el formalismo de Jones este haz luminoso se representa mediante el vector columna

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi_x} \\ e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},$$

este es el llamado vector de Jones del haz.  $A_1$  y  $A_2$  son dos cantidades complejas que contienen la información de correspondiente a la intensidad y al estado de polarización del haz original. La intensidad del campo la calculamos mediante  $|A_1|^2 + |A_2|^2$ . Por otra parte, podemos escribir el estado de polarización del haz de la siguiente manera: definiendo a  $\Lambda$  como el ángulo que hace el eje mayor de la elipse de polarización con el eje  $x$ , a  $\Delta$  como la diferencia de fase entre la componente  $x$  e  $y$  del haz, a  $\zeta$  como la elipticidad de la elipse de polarización y el parámetro  $\alpha$  mediante  $\tan\alpha = |A_1|/|A_2|$ , entonces

$$\tan 2\Lambda = \cos\Delta \tan 2\alpha,$$

$$\sin 2\zeta = \sin\Delta \sin 2\alpha.$$

Los componentes de un sistema óptico, como pueden ser retardadores de fase, polarizadores, etc., se representan mediante matrices de  $2 \times 2$  que actúan sobre el vector que representa al haz.

En nuestro caso vamos a calcular la matriz que representa el efecto que el medio colestérico tiene sobre un haz cuando éste se desplaza a través de su eje. Para lograrlo será necesario considerar que el material está compuesto por una gran cantidad de pequeñas capas de grosor pequeño, cada una de las cuales actúa de manera diferenciada sobre el haz, y el resultado de todas ellas se obtendrá sumando la interacción de cada una de estas capas hasta llegar a la longitud deseada. Como hemos mencionado, un CLC se comporta como un cristal líquido nemático localmente cuando consideramos sus propiedades ópticas. Esto nos indica que cada una de las capas se puede considerar como un material birrefringente y el CLC será un conjunto de estas capas con su eje principal ligeramente girado al pasar de una a otra.

La expresión de una matriz para un material birrefringente cuando sus ejes principales están alineadas con los ejes coordenados es:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \exp(-i\sigma) & 0 \\ 0 & \exp(i\sigma) \end{bmatrix},$$

donde  $\sigma$  es la mitad de la diferencia de fase que adquieren dos ondas linealmente polarizadas después de pasar a través de una sola capa de grosor  $g$ , en otras palabras  $\sigma = \pi g \delta n / \lambda$ , con  $\delta n = n_a - n_b$ . Si consideramos que esta capa está inclinada un ángulo  $\eta$  respecto de los ejes coordenados entonces debemos reescribir la matriz  $\mathbf{G}$  como

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S} \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1},$$

donde

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}(\eta) = \begin{bmatrix} \cos\eta & -\text{sen}\eta \\ \text{sen}\eta & \cos\eta \end{bmatrix},$$

y donde  $\mathbf{S}^{-1}$  es la inversa de  $\mathbf{S}$ .

De este modo, si una haz incidente  $\mathbf{D}_0$  pasa por esta capa, entonces tendremos un haz  $\mathbf{D}_1$  a la salida dado por

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{D}_0.$$

Sí ahora el haz  $\mathbf{D}_1$  incide nuevamente sobre otra capa birrefringente entonces tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2 &= \mathbf{S}^2 \mathbf{G} \mathbf{S}^{-2} \mathbf{D}_1 = \mathbf{S}^2 \mathbf{G} \mathbf{S}^{-2} \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{D}_0 \\ &= \mathbf{S}^2 (\mathbf{G} \mathbf{S}^{-1})^2 \mathbf{D}_0 = \mathbf{J}_2 \mathbf{D}_0, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{J}_2 = \mathbf{S}^2 (\mathbf{G} \mathbf{S}^{-1})^2$ . Podemos continuar este proceso hasta llegar al siguiente resultado para una pila de  $m$  capas:

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{S}^m (\mathbf{G} \mathbf{S}^{-1})^m = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (157)$$

Podemos demostrar que:

$$(\mathbf{G} \mathbf{S}^{-1})^m = \frac{\text{sen}m\theta}{\text{sen}\theta} \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1} - \frac{\text{sen}(m-1)\theta}{\text{sen}\theta} \mathbf{I}, \quad (158)$$

donde

$$\cos\theta = \cos\eta\cos\sigma.$$

Como estamos asumiendo que el grosor de las capas es pequeño, y también  $\sigma$  y  $\eta = 2\pi g/p$  son pequeños (con  $p$  el pitch del CLC), entonces podemos hacer la aproximación

$$\theta^2 \approx \eta^2 + \sigma^2, \quad (159)$$

y podemos escribir a partir de las ecuaciones (157) y (158) que

$$\begin{aligned} a &= \cos m\eta \cos m\theta + \frac{\tan\eta}{\tan\theta} \text{sen}m\eta \text{sen}m\theta \\ &\quad - i \frac{\text{sen}m\theta}{\text{sen}\theta} \text{sen}\sigma \cos(m+1)\eta, \end{aligned} \quad (160)$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\tan\eta}{\tan\theta} \cos m\eta \sin m\theta - \sin m\eta \cos m\theta \\
&\quad - i \frac{\sin m\theta}{\sin\theta} \sin\sigma \sin(m+1)\eta,
\end{aligned} \tag{161}$$

$$c = -b^*, \quad d = a^*.$$

Podemos sustituir a este sistema por un rotador y un retardador. Si  $\varrho$  es la rotación producida por el rotador,  $2\varphi$  el retardo de fase y  $\psi$  como el ángulo del retardador respecto a los ejes principales, los efectos de todos estos componentes ópticos se representan mediante:

$$\begin{aligned}
J_m &= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varrho & -\sin\varrho \\ \sin\varrho & \cos\varrho \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \exp(-i\varphi) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{162}$$

Entonces, a partir de las ecuaciones (157) y (162) tenemos que

$$a = \cos\varphi \cos\varrho - i \sin\varphi \cos(2\psi + \varrho), \tag{163}$$

$$b = -\cos\varphi \sin\varrho - i \sin\varphi \sin(2\psi + \varrho), \tag{164}$$

$$c = -b^*, \quad d = a^*. \tag{165}$$

Igualando las ecuaciones (160) y (163) obtendremos después de algunas manipulaciones que

$$\varrho = m(\eta - \theta'), \tag{166}$$

$$\varphi = \cos^{-1} (\sec^2 m\theta' / \sec^2 m\theta)^{1/2}, \tag{167}$$

$$\psi = \frac{1}{2} [(m+1)\eta - \varrho], \tag{168}$$

donde

$$\theta' = \frac{1}{m} \tan^{-1} \left( \frac{\tan\eta \tan m\theta}{\tan\theta} \right).$$

y donde  $m$  representa el número total de capas. El grosor de estas capas puede ser incluso de unos pocos Å, de modo que para todo fin práctico podemos considerar que  $m$  es un número muy grande.

### 5.5.2 Poder rotatorio

Cuando el pitch no es muy grande, lo que implica  $\frac{1}{2}p\delta n \ll \lambda$ , lo cual puede ocurrir cuando  $\eta \gg \sigma$  y  $\theta' \approx \theta$ , podemos obtener el poder rotatorio de la polarización producido por  $m$  capas de colestérico mediante

$$\varrho = m(\eta - \theta) = m \left[ \eta - (\eta^2 + \sigma^2)^{1/2} \right] = -m\sigma^2/2\eta,$$

y el retardo de fase será  $2\varphi \approx 0$ . Por lo tanto, en este caso el sistema se comportará como un rotador puro. Si ahora consideramos que  $m$  es el número de capas que tenemos por cada giro de la hélice, o sea  $m\eta = 2\pi$  y  $mg = p$ , entonces el poder de rotación en radianes por unidad de longitud será

$$\varrho = -\pi (\delta n)^2 p/4\lambda^2, \quad (169)$$

el signo negativo nos indica que el sentido de rotación es opuesto al giro de la hélice colestérica.

Cuando tenemos que  $\eta$  es comparable o menor que  $\sigma$ , el sistema ya no se puede representar como un rotador puro. Para valores grandes del pitch la ecuación (167) se puede escribir como

$$J_m = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi \\ \text{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \exp(-im\theta) & 0 \\ 0 & \exp(im\theta) \end{bmatrix} + \text{sen}m\theta \begin{bmatrix} \left( \frac{\text{sen}\sigma}{\text{sen}\theta} \cos\eta - 1 \right) & \left[ \frac{\text{sen}\eta}{\text{sen}\theta} \exp(-i\sigma) \right] \\ \left[ -\frac{\text{sen}\eta}{\text{sen}\theta} \exp(i\sigma) \right] & \left( \frac{\text{sen}\sigma}{\text{sen}\theta} \cos\eta - 1 \right) \end{bmatrix} \right\}. \quad (170)$$

Cuando  $\eta$  y  $\eta/\sigma$  son extremadamente pequeños, entonces  $\theta \rightarrow \sigma$  y la ecuación (170) se reduce a [94]:

$$J_m = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi \\ \text{sen}\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(-im\sigma) & 0 \\ 0 & \exp(im\sigma) \end{bmatrix}. \quad (171)$$

La ecuación (171) implica que en cualquier punto dentro del medio hay dos vibraciones lineales a lo largo de los ejes ópticos locales principales. Los ejes de polarización de cada una de estas vibraciones rota con los ejes principales a medida que viajan a lo largo de la hélice, y la diferencia de fase es la misma que tendría que si viajaran en un medio sin torsión. La figura 16 ilustra la variación que tiene el poder rotatorio como función del pitch y del grosor de las muestras.

Lo más notable de estos resultados es la dependencia del poder de rotación respecto del grosor de la muestra, a diferencia de otros elementos ópticos, y del pitch de la hélice. El poder de rotación cambia de signo a medida que cambia el pitch, lo cual es muy sorprendente y a primera vista no es intuitivo. Cuando el pitch es grande comparado con la longitud de onda del haz incidente –o como se le suele llamar, en el límite de Mauguin– entonces la rotación es en el mismo sentido que la hélice, pero a medida que el pitch se reduce, entonces la rotación primero disminuye hasta llegar

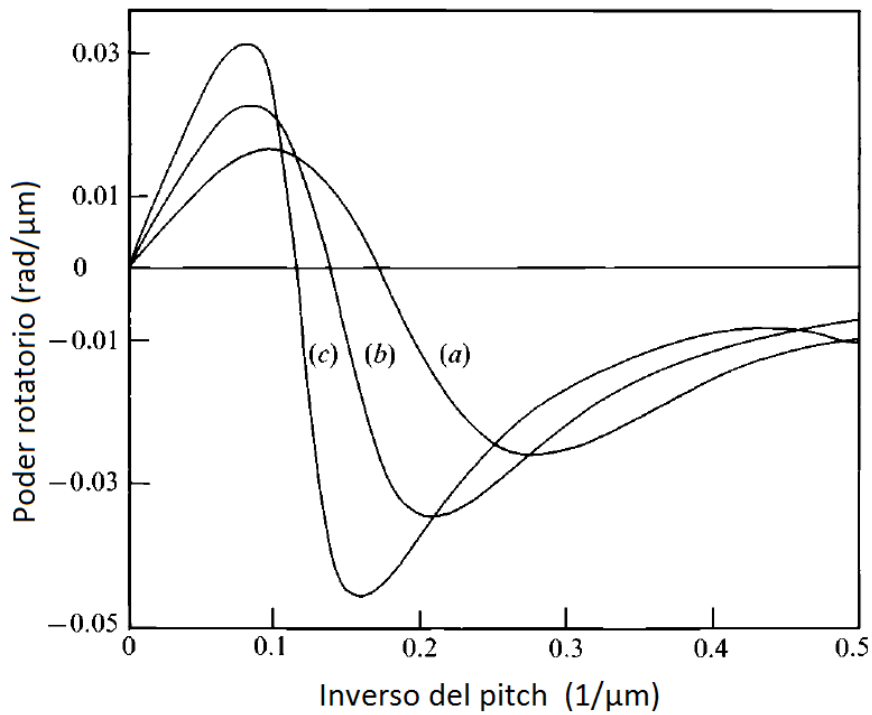


Figura 16. Cambio del poder rotatorio de cristales líquidos colestéricos con la longitud de onda de la luz incidente. El poder rotatorio se mide en radianes entre la longitud de material atravesado por la luz mientras que en el eje horizontal se considera una longitud de onda fija ( $0.5 \mu\text{m}$ ) mientras que el pitch varía. La birrefringencia de la capa es  $\delta n = 0.1$ . El grosor de las capas es: (a)  $1.0 \mu\text{m}$ , (b)  $1.25 \mu\text{m}$ , (c)  $1.5 \mu\text{m}$ . [94]

a cero para luego volverse negativa. En cuanto a la dependencia con el grosor de la muestra, podemos ver que a medida que el grosor es mayor, los máximos de los poderes de rotación incrementan su valor.

### 5.5.3 Propagación a lo largo del eje de la hélice para longitudes de onda del orden de la frecuencia de giro

Cuando la longitud de onda es del mismo orden de magnitud que el pitch, emerge una nueva fenomenología. El más notable de estos fenómenos es la reflexión total de los haces con polarización circular que giran en el mismo sentido que la hélice colestérica. Podemos tener una idea de por qué se da esta fenómeno si recordamos que cuando  $\frac{1}{2}p\delta n \ll \lambda$  podemos tratar al cristal como un rotador puro, o bien, podemos decir que los haces con polarización circular izquierda y derecha viajan sin cambio de forma pero a velocidades ligeramente distintas. Los índices de refracción para las polarizaciones izquierda y derecha son:

$$n_R = n - [(\delta n)^2 p / 8\lambda], \quad n_L = n + [(\delta n)^2 p / 8\lambda],$$

y el poder rotatorio es

$$\rho = -\pi (\delta n)^2 p / 4\lambda^2, \quad (172)$$

donde  $\delta n = n_a - n_b$  y  $n = \frac{1}{2}(n_a + n_b)$ .

Supongamos que la hélice del CLC tiene un giro positivo ( $\eta > 0$ ) y que incide un haz con polarización derecha, dado por  $\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ , a lo largo de la dirección  $z$ . Para calcular el coeficiente de reflexión entre la capa número  $(s + 1)$ -ésima y  $(s + 2)$ -ésima debemos calcular lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \xi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \exp \{i(s + 1)\eta - \varphi_{s+1}\}, \quad (173)$$

donde  $\varphi_{s+1} = 2\pi n_R (s + 1) g / \lambda$ , y donde  $g$  es el grosor de cada una de las capas. En la frontera, la vibración  $\xi$  emerge de un medio con un índice de refracción  $n_a$  y la vibración  $v$  emerge de un medio con índice de refracción  $n_b$ . Cualitativamente es obvio que dado que los ejes principales de la capa  $(s + 2)$  están rotados ligeramente con respecto a los ejes de la capa  $(s + 1)$  uno de los componentes de la ecuación (173) emergerá de la capa  $(s + 1)$  y se encontrará con un medio menos denso y otras de las componentes se encontrará con un medio más denso, y por ello una de las componentes se verá reflejada sin ningún cambio de fase y la otra sufrirá un cambio de fase igual a  $\pi$ . Aplicando las fórmulas usuales para la reflexión en incidencia normal de la superficie de un cristal anisotrópico, las componentes reflejadas referidas a los ejes principales de la capa  $(s + 2)$  son

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi' \\ v' \end{bmatrix} &= -\frac{\eta\delta n}{2n} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \exp \{i[s + 1\eta - \varphi_{s+1}]\} \\ &= -ih \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \exp \{i[s + 1\eta - \varphi_{s+1}]\}, \end{aligned}$$

donde  $q = \eta\delta n/2n$ . Haremos la aproximación  $\text{sen}\eta \approx \eta$ , dado que ya hemos asumido que  $\eta$  es muy pequeño. Transformando nuevamente a las coordenadas  $x$  e  $y$  la onda reflejada al llegar a la superficie del cristal líquido será

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = ih \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \exp \{2i[s + \eta - \varphi_{s+1}]\},$$

lo cual representa una vibración circular derecha viajando en la dirección negativa de  $z$ . Claramente la diferencia de fase entre esta onda y la reflejada entre la primera y la segunda capa es  $2(s\eta - \varphi_s)$ . Cuando  $\lambda = n_R$ , tenemos que  $2\pi n_R g/\lambda = \eta$  y  $\varphi_s = s\eta$  dado que  $mg = p$  y  $m\eta = 2\pi$ . Por lo tanto, el factor de fase  $\exp[2i(s\eta - \varphi_s)]$  se convierte en unidad sin importar el valor de  $s$ , y por lo tanto tenemos un fuerte máximo de interferencia. Para una hélice izquierda,  $\eta$  se vuelve negativa y  $(s\eta - \varphi_s)$  no se anula; por lo tanto, las ondas de diferentes capas no estarán en fase y la vibración se transmitirá prácticamente sin cambios.

Usando una aproximación cinemática, o sea despreciando las reflexiones múltiples entre las  $m$  capas, el coeficiente de reflexión por cada giro de la hélice será

$$|Q| = m|h| = \pi\delta n/n. \quad (174)$$

#### 5.5.4 Coeficientes de reflexión

Una solución completa del problema de la propagación a lo largo del eje de la hélice del CLC tiene que tomar en cuenta múltiples reflexiones. Para poder lograr esto es apropiado pensar en el cristal líquido como una serie de planos paralelos espaciados por una distancia  $p$ . Cada plano reemplaza las  $m$  capas de cada giro de la hélice.

Definiendo el coeficiente de reflexión  $-iQ$  para cada plano para la luz con polarización circular en incidencia normal, podemos asumir la condición dinámica que de  $Q$  esté dado por la ecuación (174). Estamos suponiendo además que la estructura del colestérico tiene un giro positivo.

Sean  $T_r$  y  $S_r$  como las amplitudes complejas de la onda primaria y de la onda reflejada respectivamente en un punto justo por encima del plano número  $r$ , y asignemos el número  $r = 0$  al primer plano de este arreglo. Si despreciamos la absorción en cada plano, podemos escribir la siguiente ecuación en diferencias para los coeficientes  $T_r$  y  $S_r$

$$S_r = -iQT_r + \exp(-i\varphi) S_{r+1}, \quad (175)$$

$$T_{r+1} = \exp(-i\varphi) T_r - iQ \exp(-2i\varphi) S_{r+1}, \quad (176)$$

donde  $\varphi = 2\pi n_{RP}/\lambda$ . En estas ecuación hemos tomado al coeficiente de reflexión igual para la propagación en la dirección  $+z$  y la dirección  $-z$ . Reemplazando a  $r$  por  $r - 1$  en ecuación (176) obtenemos que

$$T_{r+1} + T_{r-1} = yT_r, \quad (177)$$

$$S_{r+1} + S_{r-1} = yS_r, \quad (178)$$

donde

$$y = \exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi) + Q^2 \exp(-i\varphi). \quad (179)$$

Supongamos que el líquido está compuesto por  $v$  planos. Poniendo  $S_v = 0$ , podemos obtener a partir de la ecuación (178) que

$$\begin{aligned} S_{v-2} &= yS_{v-1}, \\ S_{v-3} &= yS_{v-2} - S_{v-1} = (y^2 - 1) S_{v-1}, \\ S_{v-4} &= (y^3 - 1) S_{v-1}, \end{aligned}$$

etc., además que

$$\begin{aligned} S_0 &= \left( y^{v-1} - \frac{v-2}{1!} y^{v-2} + \frac{(v-4)(v-3)}{2!} y^{v-5} - \dots \right) S_{v-1} \\ &= f_v(y) S_{v-1}. \end{aligned} \quad (180)$$

De manera similar, a partir de las ecuaciones (176), (177) y (179) podemos obtener

$$\begin{aligned} T_{v-1} &= \exp(i\varphi) T_v, \\ T_{v-2} &= [y \exp(i\varphi)] T_v \\ T_{v-3} &= [(y^2 - 1) \exp(i\varphi) - y] T_v \end{aligned}$$

y

$$T_0 = [f_v(y) \exp(i\varphi) - f_{v-1}(y)] T_v. \quad (181)$$

De este modo podemos escribir a partir de la ecuación (175) que

$$S_{v-1} = -iQT_{v-1} = -iQ \exp(i\varphi) T_v.$$

La razón de la amplitud reflejada a la amplitud incidente será



$$\frac{S_0}{T_0} = -\frac{iQf_v(y)\exp(i\varphi)}{f_v(y)\exp(i\varphi) - f_{v-1}(y)}. \quad (182)$$

Si asumimos una solución de la forma

$$T_{r+1} = xT_r, \quad (183)$$

donde  $x$  sea independiente de  $r$ , entonces tendremos que satisfacer la condición

$$x + \left(\frac{1}{x}\right) = y = \exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi) - Q^2\exp(-i\varphi),$$

de modo que las condiciones de reflexión son  $n_{Rp} = \lambda_0$  o bien  $\varphi_0 = 2\pi$ . De esta manera podemos escribir

$$\varphi = \frac{2\pi\lambda_0}{\lambda} = \varphi_0 + \chi,$$

donde

$$\chi = -2\pi(\lambda - \lambda_0)/\lambda,$$

que es una pequeña cantidad en la vecindad de la reflexión. Por lo tanto

$$x + \frac{1}{x} = \exp(i\chi) + \exp(-i\chi) + Q^2\exp(-i\chi). \quad (184)$$

Esto nos sugiere que en la vecindad de la reflexión podemos escribir

$$x = \exp(-\xi)\exp(-i\varphi_0) = \exp(-\xi), \quad (185)$$

donde  $\xi$  es una cantidad pequeña que puede ser compleja. A partir de las ecuaciones (184) y (185) podemos escribir

$$\xi = \pm (Q^2 - \chi^2)^{1/2}.$$

Cuando

$$y = \exp(\xi) + \exp(-\xi) = 2\cosh\xi,$$

la función  $f(y)$  esta dada por

$$f(y) = \frac{\sinh v\xi}{\sinh\xi}. \quad (186)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (182) obtenemos que

$$\frac{S_0}{T_0} \approx \frac{-iQ\exp(i\chi)}{i\chi + \xi\coth v\xi}, \quad (187)$$

o bien

$$R = \left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = \frac{Q^2}{\chi^2 + \xi^2 \coth^2 v \xi}.$$

Para un medio seminfinito,  $v = \infty$  en la ecuación (187) y

$$\frac{S_0}{T_0} = -\frac{Q}{\chi \pm i(Q^2 - \chi^2)^{1/2}}. \quad (188)$$

Cuando  $-Q < \chi < Q$ , entonces  $\xi$  es real y podemos escribir

$$R = \left| \frac{S_0}{T_0} \right|^2 = 1,$$

y la reflexión es total dentro de este intervalo. Por lo tanto el ancho de la banda de reflexión total es

$$\Delta\lambda = Q\lambda_0/\pi,$$

o bien, si usamos la ecuación (174)

$$\Delta\lambda = p\delta n. \quad (189)$$

Este resultado es precisamente el calculado por de Vries [85].

### 5.5.5 Teoría completa de la transmisión a lo largo del eje óptico

Con el propósito de formular una teoría completa sobre la transmisión de haces de luz a lo largo del eje óptico necesitamos una expresión para el tensor dieléctrico del CLC en la representación de las matrices de Jones. De manera análoga a como hicimos con la capa birrefringente pequeña, en el caso del tensor eléctrico podemos pensar en el CLC como una pila de capas cada una con las mismas características dieléctricas pero giradas ligeramente una respecto de la otra. Entonces, si  $q = 2\pi/p$  el tensor dieléctrico como función de la coordenada  $z$  está dado por

$$\begin{aligned} \epsilon &= \begin{bmatrix} \cos qz & -\operatorname{sen} qz \\ \operatorname{sen} qz & \cos qz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_a & 0 \\ 0 & \epsilon_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos qz & \operatorname{sen} qz \\ -\operatorname{sen} qz & \cos qz \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon + \alpha \cos 2qz & \alpha \operatorname{sen} 2qz \\ \alpha \operatorname{sen} 2qz & \epsilon - \alpha \cos 2qz \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (190)$$

donde  $\epsilon_a = n_a^2$ ,  $\epsilon_b = n_b^2$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}(\epsilon_a + \epsilon_b)$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}(\epsilon_a - \epsilon_b) = n\delta n$ . La ecuación de onda para la propagación a lo largo del eje  $z$  se representa mediante

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mathbf{E}. \quad (191)$$

Definiendo

$$E_{der} = 2^{-\frac{1}{2}} (E_x + iE_y),$$

$$E_{izq} = 2^{-\frac{1}{2}} (E_x - iE_y),$$

tenemos que  $E_{der}$  y  $E_{izq}$  son la propagación circular derecha e izquierda a lo largo del eje  $z$  respectivamente. Sustituyendo estas definiciones en la ecuación (191) obtenemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_{der}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_{izq}}{\partial z^2} \end{bmatrix} = -\frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} \epsilon & \alpha \exp(2iqz) \\ \alpha \exp(-2iqz) & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{der} \\ E_{izq} \end{bmatrix}. \quad (192)$$

La solución de la ecuación (192) tiene la forma

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} A_{der} \exp[i(k+q)z] \\ A_{izq} \exp[i(k-q)z] \end{bmatrix}, \quad (193)$$

que representa la superposición de dos ondas con polarizaciones circulares opuestas y con vectores de onda que difieren por  $2q$ . Sustituyendo la ecuación (192) en (193) obtenemos la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} (k+q)^2 - K_m^2 & -\alpha K^2 \\ -\alpha K^2 & (k-q)^2 - K_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{der} \\ A_{izq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (194)$$

donde  $K = 2\pi/\lambda$  y  $K_m = 2\pi n/\lambda$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda en el vacío. Esta ecuación matricial es análoga a la ecuación (153) de la sección 5.3 y como ya habíamos visto el sistema tiene soluciones no triviales solamente si el determinante de la matriz es distinto de cero, lo cual nos lleva a la siguiente ecuación:

$$[(k+q)^2 - K_m^2][(k-q)^2 - K_m^2] - \alpha^2 K^4 = 0. \quad (195)$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$k_1 = \left[ (K_m^2 + q^2) - (4K_m^2 q^2 + \alpha^2 K^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k_2 = \left[ (K_m^2 + q^2) + (4K_m^2 q^2 + \alpha^2 K^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (196)$$

Sustituyendo en la ecuación (193) podemos obtener el siguiente par de expresiones para  $A_{der}$  y  $A_{izq}$ :

$$\frac{A_{der}}{A_{izq}} = \frac{\alpha K^2}{(k_1 + q)^2 - K_m^2}, \quad (197)$$

$$\frac{A_{izq}}{A_{der}} = \frac{\alpha K^2}{(k_2 - q)^2 - K_m^2}. \quad (198)$$

También podemos reescribir la ecuación (193) como

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \exp(iK_1 z) \\ d \exp(i(K_1 - 2q) z) \end{bmatrix}, \quad (199)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} f \exp(i(K_2 + 2q) z) \\ \exp(iK_2 z) \end{bmatrix}, \quad (200)$$

donde

$$K_1 = k_1 + q = q + \left[ K_m^2 + q^2 - (4K_m^2 q^2 + \alpha^2 K^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$K_2 = k_2 - q = -q + \left[ K_m^2 + q^2 + (4K_m^2 q^2 + \alpha^2 K^4)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d = \frac{K_1^2 - K_m^2}{\alpha K^2},$$

$$f = \frac{K_2^2 - K_m^2}{\alpha K^2}.$$

La diferencia en los valores de los vector de onda  $K_1$  y  $K_2$  es la responsable de la actividad óptica de medio, siendo el valor de la rotación por unidad de longitud  $\varrho = \frac{1}{2}(K_1 - K_2)$  rad.

Ahora, si hacemos la aproximación de que  $(K_1 - K_2)/q \ll 1$ , o de que la rotación en cada giro de la hélice es pequeño comparado con  $\pi$ , lo cual es válido en la mayoría de los colestéricos, tenemos que

$$\varrho = \frac{1}{2}(K_1 - K_2) = \frac{x - (x^2 - \alpha^2 K^4)^{\frac{1}{2}}}{4q},$$

donde

$$x = K_m^2 - q^2.$$

Si  $x^2 < \alpha^2 K^4$ , entonces  $\varrho$  se convierte en una cantidad compleja, donde la parte real nos da el poder de rotación y la parte imaginaria nos da el dicroísmo circular. Dado que no hemos incluido un mecanismo disipativo, es claro que la parte imaginaria tiene que ver con la reflexión de una de las componentes. La banda de reflexión está centrada en  $x = 0$ , o bien en  $K_m = q$  ó  $\lambda_0 = np$ , donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el vacío. El intervalo de reflexión se extiende desde  $x = +\alpha K^2$  hasta  $x = -\alpha K^2$ , o sea desde  $+q^2 (\delta n/n)$  hasta  $-q^2 (\delta n/n)$ . Dado que

$$\delta x = \delta (K_m)^2 = 2K_m (\delta K_m) \sim 2q (\delta K_m),$$

el ancho espectral de las longitudes totalmente reflejadas es

$$\Delta\lambda = p\delta n. \quad (201)$$

que es el mismo ancho espectral que obtuvimos en la ecuación (189) y que fue obtenido por de Vries [85]. Lejos de la banda de reflexión, donde  $x^2 \gg \alpha^2 K^4$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \varrho &= -\frac{\alpha^2 K^4}{8qx} \\ &= -\frac{\pi (\delta n)^2 p}{4\lambda^2 [1 - (\lambda^2/\lambda_0^2)]}. \end{aligned} \quad (202)$$

El signo del poder de rotación cambia cuando se cruza la banda de reflexión ( $\lambda_0$ ). Cuando ( $\lambda \ll \lambda_0$ ), entonces la ecuación (193) se reduce a la ecuación (172), y cuando  $\lambda \gg \lambda_0$ ,  $\varrho$  tiende asintóticamente a 0.

Con esto terminamos nuestra breve revisión para la fenomenología de los cristales líquidos. En la siguiente sección presentaremos la radiación de Cherenkov y la radiación de transición presentes en un cristal líquido colestérico.

## 6 Radiación de transición en un cristal líquido colestérico

Como hemos visto en las secciones anteriores, lo único que necesitamos para propiciar la emisión de radiación en un medio a partir de una partícula cargada es que el medio sea inhomogeneo. En su versión más sencilla la radiación de transición requiere que la partícula cargada se acerque a la frontera entre dos medios homogéneos, sin embargo, este esquema tiene algunos inconvenientes, entre otros la baja emisión que se tiene por cada frontera atravesada y la limitada longitud de formación, lo cual ha llevado a la fabricación de complejos detectores de radiación basados en el principio de radiación de transición [64].

A continuación proponemos el uso de un cristal líquido colestérico (CLC). Como ya habíamos visto en el capítulo 5, la estructura de los CLC incorpora una estructura helicoidal. La radiación coherente emitida por una carga que se mueven uniformemente dentro de un medio dieléctrico, el cual puede ser un CLC, ha sido considerada previamente en otros estudios teóricos. Landau [99] propuso una explicación de algunas procesos radiativos en términos de la polarización inducida en el medio debido al paso de una partícula. Esta propuesta de Landau no es la única en este sentido [66], de hecho, debido al descubrimiento de la radiación de Cherenkov en la Unión Soviética, la escuela física que ahí se desarrolló y posteriormente en Rusia se ha mantenido constantemente interesada en este tema, lo cual esta demostrado en la proposición de la radiación de transición por esta misma escuela [44].

El paso de partículas cargadas a través de CLC también ha sido considerado en varios estudios teóricos [100, 101, 102, 103]. En todos estos trabajo se han establecido algunos resultados, que muestran que en términos generales el carácter de la radiación coherente emitida por las partículas rápidas dentro de los CLC es similar a aquella que se obtiene a partir de partículas que viajan en medios periódicos más simples, con estructura de capas o estratificados. Sin embargo, además de la radiación Cherenkov usual, que se emite solo cuando las partículas viajan a velocidades mayores que la velocidad de fase de la luz dentro del colestérico, en estos trabajos también se ha mencionado que los CLC emiten una forma diferente de radiación coherente que es inducida por la periodicidad espacial del cristal. Esta otra radiación emitida por los CLC es generada por su estructura periódica y por ello no emerge a lo largo del cono generador, el bien conocido cono de Cherenkov, cuyo eje coincide con la trayectoria de desplazamiento de la partícula y tiene un ángulo de apertura dado por  $\cos\theta = 1/\beta n$ , sino que emerge por el llamado cono de difracción, cuyo eje no es paralelo a la velocidad de la partícula.

Kats [100] ha mostrado que la polarización de la radiación de Cherenkov en un CLC es elíptica en general, y que los conos de emisión (Cherenkov y de difracción) tienen una estructura fina, de modo que hay varios ángulos de conos ligeramente diferentes, cada uno de los cuales tiene su propia polarización. Estas propiedades de la radiación de Cherenkov dentro de un CLC ha sido establecidas sobre la base de un análisis cualitativo

de las correspondientes ecuaciones para dispersión y difracción a primer orden de la radiación. Una descripción analítica de la emisión de Cherenkov fue obtenida para la dirección del eje óptico del CLC por Shipov y Belyakov [104]. En esta referencia el problema fue considerado de manera teórica e hicieron análisis de la emisión de radiación de Cherenkov dentro de un CLC bajo condiciones que corresponden a difracciones de órdenes mayores de la radiación emitida por la partícula. También se encontraron expresiones analíticas para la polarización angular y frecuencias características de la radiación de Cherenkov dentro del CLC asumiendo que la birrefringencia del CLC es pequeña, lo cual es confirmado por los valores experimentales de varias fases de CLC.

Una aproximación diferente fue adoptada por Shipov [105] en la cual se asume un periodo de longitud espacial de la estructura del CLC mucho más grande que la longitud de onda de la luz incidente. Existe otro estudio concerniente a la emisión Cherenkov en un CLC bajo condiciones de difracción de órdenes mayores. En este trabajo se muestra que bajo la condición mencionada, la densidad de energía radiada respecto al ángulo y frecuencia de la radiación Cherenkov en un CLC es muy diferente de la correspondiente para un medio homogéneo a pesar de que la radiación integrada es la misma que para un medio homogéneo [104].

A pesar de todas estas contribuciones al entendimiento de la radiación emitida por un CLC, aún hacía falta desarrollar una teoría rigurosa de la radiación establecida en un CLC debido al paso de una partícula cargada, así que en las secciones subsiguientes desarrollaremos esta teoría. El procedimiento usual para calcular la energía radiada por unidad de tiempo y de distancia cuando la partícula viaja a una velocidad constante dentro de cualquier medio consiste en obtener el vector de Poynting a partir de la solución de las ecuaciones de Maxwell [106], considerando a la trayectoria de la partícula como la fuente de la energía radiada. En este capítulo calcularemos la radiación producida por una partícula cargada que viaja en una dirección arbitraria dentro del cristal líquido colestérico, apegándonos a la exposición que hemos presentado previamente en . A partir de esto calcularemos la polarización inducida dentro del colestéricos por el campo eléctrico de esta partícula de manera análoga a como lo hicimos en el caso de la radiación de transición y del efecto Cerenkov en la sección 3.2 y el capítulo 4. Una vez que tengamos esta información expresaremos el campo de radiación originado por la distribución dipolar inducido en el colestérico en términos de las susceptibilidades del medio. Como ya lo hemos mencionado, este procedimiento esta basado en las ideas de Villavicencio et. al [65], y éstas a su vez en las ideas en [54, 64, 99].

Con el propósito de simplificar el procedimiento anterior vamos a escribir las ecuaciones de Maxwell y la ecuación constitutiva no local del colestéricos en el espacio de Fourier de frecuencias espaciales y temporales, lo que nos permitirá encontrar una expresión para la polarización dependiente del tiempo dentro del colestérico, para luego establecer las condiciones de la radiación a través de las ecuaciones de Maxwell. Este procedimiento nos llevará a en ecuaciones en diferencias que gobiernan la emisión radiativa del CLC. Utilizaremos un procedimiento iterativo para resolver estas ecuaciones y para lograrlo también asumiremos valores pequeños de la birrefringencia del colestérico, lo cual nos permitirá encontrar el campo eléctrico producido por la partícula a primer

orden. Finalmente, con todo esta información podemos encontrar la contribución dominante del campo de radiación, la cual es una expresión análoga a la del efecto Cherenkov usual más un término de radiación de transición. Una vez obtenido este resultado nos enfocaremos en los términos del desarrollo que aparecen para velocidades hipolumínicas de la partícula y calcularemos la energía radiante como una función del ángulo de observación, la frecuencia de la radiación emitida, y la dirección de la velocidad de la partícula respecto al eje del colestérico.

Debemos remarcar que a pesar de la simplicidad del método del cálculo de la polarización variable del medio, es extraño que esta idea no haya sido utilizado de manera más extendida para el estudio del efecto Cherenkov, de modo que en adelante alentamos a que esta poderosa herramienta sea utilizada para tratar este y otros problemas de radiación en la materia.

También debemos mencionar que aunque en la práctica un CLC no es exactamente un cristal unidimensional y sólo tenemos un número limitado de periodos dentro de una muestra real. Sin embargo, varios trabajos han exhibido que el efecto de un número finito de períodos consiste en suavizar los extremos de la banda de reflexión, y el estudio de estos efectos de borde dentro de una muestra finita se dejan para un estudio posterior. También asumiremos que nos encontramos con un cristal perfecto en el sentido de que no hay defectos dentro del medio, los cuales podrían radiar por acción del campo electromagnético cambiante y que nos encontramos en un medio no magnético.

## 6.1 Polarización inducida en un colestérico

Empezaremos analizando la respuesta dieléctrica del CLC ante un campo eléctrico aplicado. De (104) y (133) deducimos que la transformada temporal de Fourier del tensor de susceptibilidad es

$$4\pi \chi(\mathbf{r}, \omega) = [\epsilon_{\perp}(\omega) - 1] \mathbf{I} + \epsilon_a(\omega) \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^T, \quad (203)$$

donde  $\epsilon_{\perp}(\omega)$  es la constante dieléctrica perpendicular a la alineación molecular,  $\epsilon_a(\omega) = \epsilon_{\parallel}(\omega) - \epsilon_{\perp}(\omega)$  la anisotropía dieléctrica,  $\mathbf{I}$  la matriz identidad,  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector director unitario de la estructura helicoidal y  $\hat{\mathbf{n}}^T$  su transpuesto, que según la ecuación (129) es

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \cos qz \\ \text{sen} qz \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}}^T = (\cos qz, \text{sen} qz, 0), \quad (204)$$

donde  $q$  es la frecuencia espacial del CLC, que se relaciona con el pitch mediante  $p = \frac{2\pi}{q}$ , y donde hemos supuesto que el eje de la hélice coincide con el eje  $z$  (figura 17).

Dado que trabajaremos en los espacios  $(\mathbf{r}, \omega)$  y  $(\mathbf{k}, \omega)$ , omitiremos escribir la dependencia en  $\omega$  y debemos interpretar  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$  y  $\mathbf{A}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega)$ .

Definimos las matrices constantes  $T_{\pm 1}$  y  $T_0$  de la siguiente manera (ver Apéndice I):



$$T_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_0 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (205)$$

Con ayuda de estas matrices podemos escribir la ecuación (203) como:

$$4\pi \chi(\mathbf{r}) = 4\pi \bar{\chi} \mathbf{I} + \epsilon_a e^{2iqz} T_1 + \epsilon_a e^{-2iqz} T_{-1} + \epsilon_a T_0.$$

Utilizando la convención de suma sobre índices repetidos, podemos escribir (203) y el tensor dieléctrico,  $\epsilon(r) = 4\pi \chi(r) + \mathbf{I}$ , como

$$\begin{aligned} 4\pi \chi(\mathbf{r}) &= 4\pi \bar{\chi} \mathbf{I} + \epsilon_a e^{i(2qz)l} T_l, \\ \epsilon(\mathbf{r}) &= \bar{\epsilon} \mathbf{I} + \epsilon_a e^{i(2qz)l} T_l, \quad (l = -1, 0, 1) \end{aligned} \quad (206)$$

con la constante y la susceptibilidad dieléctricas promedio definidas como

$$\bar{\epsilon} \equiv \bar{\epsilon}(\omega) = \frac{\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel}}{2} = \epsilon_{\perp} + \frac{\epsilon_a}{2}, \quad 4\pi \bar{\chi} \equiv 4\pi \bar{\chi}(\omega) = \bar{\epsilon} - 1. \quad (207)$$

La transformada de Fourier espacial de (206) es

$$\begin{aligned} 4\pi \chi(\mathbf{k}) &= 4\pi \bar{\chi} \mathbf{I} \delta(\mathbf{k}) + \epsilon_a \delta(\mathbf{k} + l\mathbf{b}) T_l, \\ \epsilon(\mathbf{r}) &= \bar{\epsilon} \mathbf{I} \delta(\mathbf{k}) + \epsilon_a \delta(\mathbf{k} + l\mathbf{b}) T_l, \end{aligned} \quad (208)$$

donde  $\mathbf{b} = (0, 0, 2q)$  y hay que tomar en cuenta la suma sobre el índice  $l$ .

Como vimos en el capítulo 4, ecuación (113), el campo de radiación se relaciona con la transformada espacial de la polarización mediante

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{3/2} \frac{k^2 e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \times [\mathbf{P}(\mathbf{k}) \times \hat{\mathbf{k}}], \quad (209)$$

por lo que debemos calcular  $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ . La relación entre la polarización y el campo eléctrico es  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , y de acuerdo con Jackson [106], sección (7.10), en el espacio recíproco esta misma relación estará dada por la siguiente convolución

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \int \chi(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{E}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (210)$$

Si sustituimos (208) en (210) obtenemos

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \int \left[ \bar{\chi} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{I} + \frac{\epsilon_a}{4\pi} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}' + l\mathbf{b}) T_l \right] \mathbf{E}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}', \quad (211)$$

y utilizando la propiedad de paridad de la delta de Dirac,  $\delta(\mathbf{x}) = \delta(-\mathbf{x})$ , tenemos que

$$\mathbf{P}(\mathbf{k}) = \bar{\chi}\mathbf{E}(\mathbf{k}) + \frac{\epsilon_a}{4\pi}T_l\mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b}). \quad (212)$$

Por último al sustituir (212) en (209) obtenemos que

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{3/2} \frac{k^2 e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \times \left[ \bar{\chi}\mathbf{E}(\mathbf{k}) + \frac{\epsilon_a}{4\pi}T_l\mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b}) \right] \times \hat{\mathbf{k}}. \quad (213)$$

Ahora debemos calcular la transformada espacial de Fourier del campo eléctrico de un partícula cargada que viaja a velocidad constante dentro de un CLC.

## 6.2 Partícula cargada moviéndose en un colestérico

Para calcular el campo de la partícula dentro del CLC utilizaremos las transformadas temporales de las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas, en unidades gaussianas [64]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 4\pi\rho(\mathbf{r}), \quad (214)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0, \quad (215)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{c}\mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad (216)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (217)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (218)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (219)$$

Tomando el rotacional de (217) obtenemos

$$\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = -\frac{i\omega}{c} [\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})]. \quad (220)$$

Utilizando  $\nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] = -\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})]$  podemos escribir (220) como

$$-\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] = -\frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{J}(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{D}(\mathbf{r}), \quad (221)$$

donde hemos utilizado (216). Utilizando (218) la ecuación (221) se convierte en

$$-c^2\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + c^2\nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] - \omega^2\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -4\pi i\omega \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (222)$$

Para encontrar transformada espacial del campo eléctrico debemos transformar a (222). Si representamos la transformada espacial mediante  $\mathcal{F}_{\mathbf{k}}$ , entonces para el primero y el segundo término del lado izquierdo de (222) tenemos que

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}} \{ \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \} = k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{F}_{\mathbf{k}} \{ \nabla [\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] \} = -\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})). \quad (223)$$

Para el tercer término de (222) tenemos que

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}} \{ \epsilon(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \} = \int \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' = \bar{\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{k}) + \epsilon_a T_l \mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b}), \quad (224)$$

donde hemos utilizado (206) y notamos que el resultado es análogo a (212).

Para la transformada del término del lado derecho de (222) debemos tomar en cuenta que la densidad correspondiente a una partícula con carga  $Ze$  viajando con velocidad  $\mathbf{v}$  es  $\rho(\mathbf{r}, t) = Ze\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$  y su densidad de corriente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}$ . Esta última expresión contiene una delta de Dirac en el espacio  $(\mathbf{r}, t)$ , por lo tanto debemos aplicar la transformada de Fourier espacial y temporal. Explícitamente

$$\mathcal{F}_{(\mathbf{k}, \omega)} \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \} = \int \int e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{(2\pi)^2} d\mathbf{r} dt = -\frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{2\pi}. \quad (225)$$

Sustituyendo (223), (224) y (225) en (222) obtenemos que

$$c^2 k^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}) - c^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})) - \omega^2 \bar{\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{k}) - \omega^2 \epsilon_a T_l \mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b}) = 2i\omega Ze\mathbf{v}\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}),$$

o bien

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \frac{c^2}{c^2 k^2 - \bar{\epsilon}\omega^2} \left[ 2iZe\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\omega\mathbf{v}}{c^2} + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_a T_l \mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b}) \right]. \quad (226)$$

La expresión (226) es una ecuación en diferencias para el campo eléctrico en el espacio de Fourier, esto es consecuencia de la no localidad del medio generada por su distribución espacial, y es una ecuación exacta que gobierna el campo eléctrico de una partícula que se mueve dentro de un colestérico.

Podemos simplificar la ecuación (226) desarrollando la expresión para  $\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}))$ , para ello tomemos la transformada espacial de la ley de Gauss, ecuación (214):

$$\mathcal{F}_{\mathbf{k}} \{ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \} = 4\pi \mathcal{F}_{\mathbf{k}} \{ \rho(\mathbf{r}) \}; \quad (227)$$

tomando en cuenta (218) y  $\rho(\mathbf{r}, t) = Ze\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ , (227) resulta ser

$$-i\mathbf{k} \cdot \int \epsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathbf{E}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' = 4\pi Ze\mathcal{F}_{(\mathbf{k},\omega)} \{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\}, \quad (228)$$

Utilizando (224) y (225) podemos escribir (228) explícitamente como

$$i\mathbf{k} \cdot [\bar{\epsilon}\mathbf{E}(\mathbf{k}) + \epsilon_a T_l \mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b})] = 2Ze\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}),$$

y al despejar  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})$  y aplicar  $\mathbf{k}$  obtenemos que

$$\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k})) = -\frac{2}{\bar{\epsilon}} Zei\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} - \frac{\epsilon_a}{\bar{\epsilon}} \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot T_l \mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b})). \quad (229)$$

Esta ecuación es una segunda relación no local con argumentos retardados en  $\mathbf{k}$ . Finalmente, insertando (229) en la ecuación (226), obtenemos que

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}) = \frac{2iZec^2 \left( \frac{\omega\bar{\epsilon}}{c^2} \mathbf{v} - \mathbf{k} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + \epsilon_a c^2 \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\epsilon} \mathbf{I} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot) \right] T_l \mathbf{E}(\mathbf{k} + l\mathbf{b})}{(c^2 k^2 - \bar{\epsilon} \omega^2) \bar{\epsilon}}. \quad (230)$$

### 6.3 Aproximación de birrefringencia pequeña

A partir de este punto consideraremos que la anisotropía del CLC es pequeña comparada con el valor de la constante dieléctrica transversal,  $\epsilon_a \ll \epsilon_\perp$ . Esta condición está respaldada por mediciones experimentales. Con esta aproximación podemos reescribir la ecuación (230) como

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2Zec^2}{(c^2 k^2 - \epsilon_\perp \omega^2) \epsilon_\perp} \left( \frac{\omega}{c^2} \epsilon_\perp \mathbf{v} - \mathbf{k} \right) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (231)$$

Ahora podemos encontrar el campo de radiación inducido por la partícula cargada hasta primer orden en  $\epsilon_a(\omega)$  si sustituimos (231) en la ecuación para el campo de radiación (213)

$$\mathbf{E}_{rad}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{3/2} \frac{k^2 e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{k}} \times \left[ \bar{\chi} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}) + \frac{\epsilon_a}{4\pi} T_l \mathbf{E}_0(\mathbf{k} + l\mathbf{b}) \right] \times \hat{\mathbf{k}}. \quad (232)$$

En la ecuación (232) está indicada la suma de tres términos multiplicados por funciones delta de Dirac, ya que tenemos una repetición del índice  $l$ . Cada una de las deltas está ubicada en los puntos  $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  y  $\omega - (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}$ . Los términos multiplicados por  $\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$  nos llevan a un cono de radiación análogo al cono de Cherenkov para un medio isotrópico y homogéneo. Las propiedades de esta radiación son ampliamente conocidas, así que en esta sección omitiremos su desarrollo. Estamos interesados en indagar los nuevos términos radiativos con argumentos retardados, que nombraremos

$\mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}, \omega)$ . La radiación proveniente de estos términos diferentes del efecto Cherenkov es

$$\mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}) = (2\pi)^{3/2} \left( \frac{Ze\epsilon_a k^2}{2\pi\epsilon_\perp} \right) \frac{ie^{ikr}}{r} \frac{(\times T_\pm(\omega\epsilon\mathbf{v} - c^2(\mathbf{k} \pm \mathbf{b})) \times \hat{\mathbf{k}})}{(c^2|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \epsilon\omega^2)} \delta(\omega - (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}) \quad (233)$$

donde hemos definido  $T_\pm \equiv T_{\pm 1}$  y  $\epsilon \equiv \epsilon_\perp$  por simplicidad y hemos factorizado  $c^{-2}$ . Para calcular esta expresión necesitamos evaluar las proyecciones de  $T_\pm$  de la ecuación (205) sobre los vectores  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{b}$ , esto nos da

$$T_\pm \mathbf{v} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} v_x \pm iv_y \\ \pm iv_x - v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} v_x \pm iv_y \\ \pm i[v_x \mp iv_y] \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} v_\pm \mathbf{S}_\pm, \quad (234)$$

donde hemos introducido las componentes circulares de los vectores de velocidad y de posición dadas por  $v_\pm = \frac{v_x \pm iv_y}{\sqrt{2}}$ , y  $\mathbf{S}_\pm = \frac{\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}$ . Una identidad similar vale para la proyección del vector de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$

$$T_\pm \mathbf{k} = \frac{1}{2} k_\pm \mathbf{S}_\pm,$$

donde  $k_\pm = \frac{k_x \pm ik_y}{\sqrt{2}}$ . Finalmente  $T_\pm \mathbf{b} = 0$ , por lo que podemos escribir

$$T_\pm(\omega\epsilon\mathbf{v} - c^2(\mathbf{k} \pm \mathbf{b})) \times \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} (\omega\epsilon v_\pm - c^2 k_\pm) \mathbf{S}_\pm \times \hat{\mathbf{k}}, \quad (235)$$

de este modo al insertar esta expresión en la ecuación (233), nos damos cuenta de que

$$\mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}, \omega) = (2\pi)^{3/2} \left( \frac{Ze\epsilon_a k^2}{4\pi\epsilon} \right) \frac{ie^{ikr}}{r} \frac{\hat{\mathbf{k}} \times (\omega\epsilon v_\pm - c^2 k_\pm) \mathbf{S}_\pm \times \hat{\mathbf{k}}}{(c^2|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \epsilon\omega^2)} \delta(\omega - (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}) \quad (236)$$

Recordando la ecuación (120), la energía radiada por unidad de ángulo sólido y frecuencia es

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_\pm}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\epsilon} |r \mathbf{E}_\pm(\mathbf{r}, \omega)|^2. \quad (237)$$

Si sustituimos la ecuación (236) en (237) obtendremos

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_\pm}{d\omega d\Omega} = \left( \frac{(Ze\epsilon_a)^2 c k^4}{4\epsilon^{3/2}} \right) \frac{|\omega\epsilon v_\pm - c^2 k_\pm|^2}{(c^2|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \epsilon\omega^2)^2} \left| \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{S}_\pm \times \hat{\mathbf{k}} \right|^2 |\delta(\omega - (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v})|^2.$$

o bien, si definimos  $a = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 c k^4}{4\epsilon^{3/2}}$  y consideramos solo la derivada respecto a  $\omega$  tenemos que

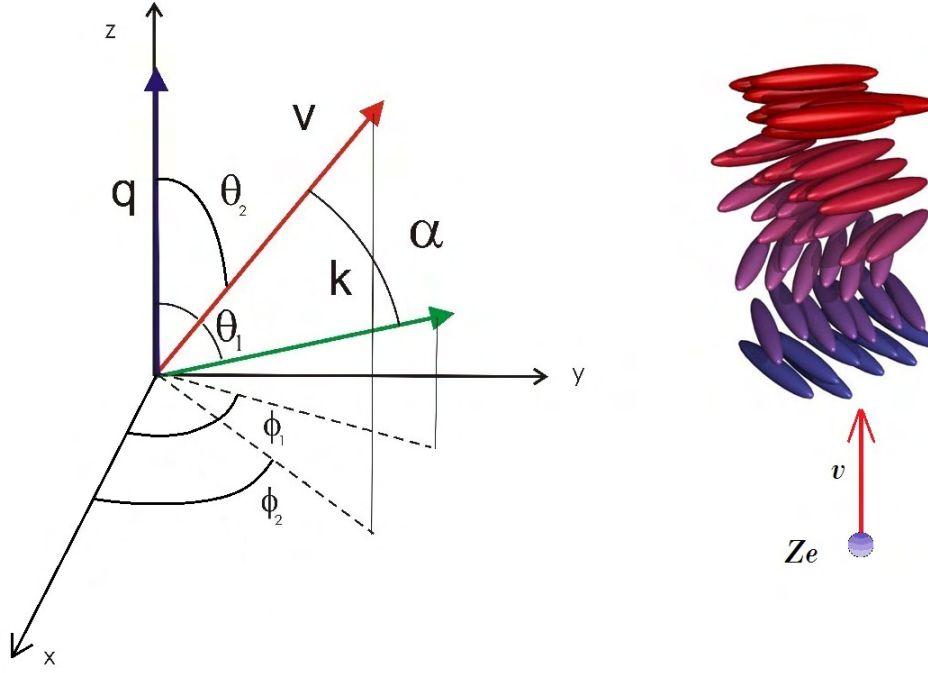


Figura 17. Geometría del problema y ángulos utilizados.

$$\frac{dE_{\pm}}{d\omega} = a \frac{|\omega \varepsilon v_{\pm} - c^2 k_{\pm}|^2}{(c^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \varepsilon \omega^2)^2} \left| \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{S}_{\pm} \times \hat{\mathbf{k}} \right|^2 |\delta(\omega - (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v})|^2 d\Omega. \quad (238)$$

Debemos desarrollar la ecuación (238) para llevarla a una forma más útil, para lo cual debemos trabajar en cada uno de los término a la derecha de la igualdad. En primer lugar tenemos que

$$b(u, \theta_1) \equiv \frac{|\omega \varepsilon v_{\pm} - c^2 k_{\pm}|^2}{(c^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \varepsilon \omega^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{c^4 k_{\perp}^2 + \varepsilon^2 \omega^2 v_{\perp}^2 - 2c^2 \omega \varepsilon \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}}{(c^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \varepsilon \omega^2)^2} \quad (239)$$

donde  $k_{\perp} \equiv |\mathbf{k}_{\perp}|$  y  $v_{\perp} = |\mathbf{v}_{\perp}|$  y donde para las expresiones  $\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}$  y  $|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} &= kv \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &= kv [\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2] = k(vu - v_z \cos \theta_1) \end{aligned} \quad (240)$$

$$|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 = k^2 \pm 4qk \cos \theta_1 + 4q^2 \quad (241)$$

y donde  $(\theta_1, \phi_1)$  son las coordenadas angulares esféricas del vector de onda con respecto a la dirección de la hélice del colestérico, mientras que  $(\theta_2, \phi_2)$  son las coordenadas angulares del vector de velocidad respecto al eje de la hélice y donde hemos definido  $u = \cos \alpha$  (ver figura 17). En el caso del producto cruz en (238) tenemos

$$c(\theta_1) \equiv \left| \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{S}_\pm \times \hat{\mathbf{k}} \right|^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_1). \quad (242)$$

El desarrollo algebraico de las expresiones de la ecuación 239 a 242 se pueden consultar en el Apéndice II.

Como podemos ver, en la ecuación (238) esta indicada una delta de Dirac elevada al cuadrado, así que usaremos el mismo procedimiento heurístico que utilizamos en la sección 4.1, de modo que para esta expresión podemos escribir que

$$h(u, \theta_1) = \delta(\omega - [\mathbf{k} \pm \mathbf{b}] \cdot \mathbf{v}) = \frac{L}{2\pi v} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\text{sen} \left( \frac{f_\pm L}{2} \right)}{\left( \frac{f_\pm L}{2} \right)}, \quad (243)$$

donde  $f_\pm = \frac{\omega}{v} - (k \cos \alpha \pm 2q \frac{v_z}{v}) = \frac{\omega}{v} - (ku \pm 2q \frac{v_z}{v})$  y  $\alpha$  es el ángulo entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{v}$ . Los detalles del manejo algebraicos de las deltas de Dirac en esta sección se pueden consultar en el Apéndice III.

Por último, es conveniente expresar el ángulo sólido  $d\Omega = \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1$  que aparece en la ecuación (238) en términos de los ángulos  $\alpha$  y  $\theta_1$ . En este caso llegamos a la siguiente expresión

$$d\Omega = \frac{kv \text{sen} \alpha d\alpha \text{sen} \theta_1 d\theta_1}{\sqrt{k^2 v_\perp^2 \text{sen}^2 \theta_1 - (kvu - kv_z \cos \theta_1)^2}} \equiv w(u, \theta_1) du \text{sen} \theta_1 d\theta_1, \quad (244)$$

donde hemos utilizado las identidades  $v_\perp = v \sin \theta_2$  and  $v_z = v \cos \theta_2$ . Los detalles del desarrollo de esta expresión se pueden consultar en el Apéndice IV.

Definimos la función  $g(u, \theta_1)$  como

$$g(u, \theta_1) = a \cdot b(u, \theta_1) \cdot c(\theta_1) \cdot w(u, \theta_1), \quad (245)$$

de este modo, podemos reescribir 238 como

$$\frac{d\mathbf{E}_\pm}{d\omega} = g(u, \theta_1) h^2(u, \theta_1) du \text{sen} \theta_1 d\theta_1, \quad (246)$$

y si derivamos respecto a  $\theta_1$  e integramos (246) con respecto a  $u = \cos \alpha$ , entonces

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_\pm}{d\omega d\theta_1} = \int_{-1}^1 du g(u, \theta_1) h^2(u, \theta_1) \text{sen} \theta_1 \simeq g(u_c, \theta_1) \text{sen} \theta_1 \left( \frac{L}{2\pi v} \right)^2 \int_{-1}^1 du \left\{ \frac{\text{sen}(f_\pm L/2)}{f_\pm L/2} \right\}^2, \quad (247)$$

donde  $u_c = (\omega \mp 2qv_z) / (kv)$ , es el valor adoptado por  $u$  en  $f = 0$ , que es donde la función contenida entre llaves presenta un máximo muy agudo, de modo que es razonable deshacerse del resto de la función  $g(u, \theta_1)$  después de evaluarla en este punto. Al evaluar la integral en (247) obtenemos que (ver Apéndice III)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}^2(f_{\pm}L/2)}{(f_{\pm}L/2)^2} du = \frac{2\pi}{kL} \Theta \left[ k - \frac{\omega}{v} \pm \frac{2qv_z}{v} \right], \quad (248)$$

donde  $\Theta$  es la función theta de Haviside. Cojuntando resultados podemos escribir (247) como

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_{\pm}}{d\omega d\theta_1} = \frac{L}{2\pi kv^2} g(u_c, \theta_1) \text{sen}\theta_1 \Theta \left[ k - \frac{\omega}{v} \pm \frac{2qv_z}{v} \right].$$

Integrando respecto a  $\theta_1$  y derivando respecto a  $L$  tenemos que

$$\frac{d\mathbf{E}_{\pm}}{d\omega dL} = \frac{1}{2\pi kv^2} \Theta \left[ k - \frac{\omega}{v} \pm \frac{2qv_z}{v} \right] \int_{-1}^1 \text{sen}\theta_1 d\theta_1 g(u_c, \theta_1), \quad (249)$$

y para la integral en (249) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d\theta_1 g(u_c, \theta_1) &= \int_{-1}^1 d\theta_1 a \cdot b_{\pm}(u_c, \theta_1) \cdot c(\theta_1) \cdot w(u_c, \theta_1) \\ &= \frac{a}{4} \int_{-1}^1 \frac{c^4 k_{\perp}^2 + \varepsilon^2 \omega^2 v_{\perp}^2 - 2c^2 \omega \varepsilon k (v u_c - \cos \theta_1 v_z)}{(c^2 k^2 \pm 4c^2 q k \cos \theta_1 + 4c^2 q^2 - \varepsilon \omega^2)^2} \frac{(1 + \cos^2 \theta_1) k v \text{sen}\theta_1 d\theta_1}{\sqrt{k^2 v_{\perp}^2 \text{sen}^2 \theta_1 - (k v u_c - k v_z \cos \theta_1)^2}}, \\ &= \int_{-1}^1 \frac{a k v \varepsilon^{1/2} [c^4 k^2 (1 - x^2) + \varepsilon^2 \omega^2 v_{\perp}^2 - 2c^2 \varepsilon \omega (\omega \mp 2qv_z - k x v_z)] (1 + x^2) dx}{4 (c^2 k^2 + 4c^2 q^2 - \varepsilon \omega^2 \pm 4c^2 q k x)^2 \sqrt{\varepsilon k^2 v_{\perp}^2 (1 - x^2) - \varepsilon (\omega \mp 2qv_z - k v_z x)^2}} \quad (250) \end{aligned}$$

donde  $x = \cos \theta_1$  y hemos tomado en cuenta que  $k v u_c = \omega \mp 2qv_z$  y  $k_{\perp} = k \text{sen}\theta_1$ . Definiendo los siguientes parámetros



$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= c^4 k^2 + \varepsilon^2 \omega^2 v_{\perp}^2 - 2c^2 \varepsilon \omega^2 \pm 4c^2 \varepsilon \omega q v_z, \\
\mathcal{B} &= 2c^2 \varepsilon \omega k v_z, \\
\mathcal{C} &= c^4 k^2 \\
\mathcal{D} &= c^2 k^2 + 4c^2 q^2 - \varepsilon \omega^2, \\
\mathcal{E} &= \pm 4c^2 q k \\
\mathcal{F} &= \varepsilon k^2 v_{\perp}^2 - \varepsilon \omega^2 \pm 4\varepsilon \omega q v_z - 4\varepsilon q^2 v_z^2, \\
\mathcal{G} &= 2\varepsilon \omega k v_z \mp 4\varepsilon q k v_z^2, \\
\mathcal{H} &= \varepsilon k^2 v_{\perp}^2 + \varepsilon k^2 v_z^2.
\end{aligned} \tag{251}$$

podemos reescribir la integral en (250) como (ver Apéndice III)

$$P(\omega) \equiv \int_{-1}^1 \frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B}x - \mathcal{C}x^2)(1 + x^2) dx}{(\mathcal{D} + \mathcal{E}x)^2 \sqrt{\mathcal{F} + \mathcal{G}x - \mathcal{H}x^2}}. \tag{252}$$

Sustituyendo (252) en (249) tenemos que

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_{\pm}}{d\omega dL} = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 ck^4}{32\pi v \varepsilon} \Theta \left[ k - \frac{\omega}{v} \pm \frac{2qv_z}{v} \right] P(\omega), \tag{253}$$

donde hemos utilizado  $a = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 ck^4}{4\varepsilon^{3/2}}$ . Ahora analizaremos (253); en consistencia con nuestra suposición inicial de anisotropía pequeña, supondremos la relación de dispersión  $k = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{c}\omega$ . Comenzamos reescribiendo (253) en términos de cantidades adimensionales, para lo cual definimos

$$\varpi = \frac{k}{q} = \frac{\omega}{q \left( \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \right)} = \frac{\omega}{qv_p} \quad ; \quad \beta = \frac{kv}{\omega} = \frac{v}{\left( \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \right)} = \frac{v}{v_p},$$

$\varpi$  mide la frecuencia de la onda en unidades del número de onda de la estructura del colestérico mientras que  $\beta$  mide la razón entre la velocidad de la partícula ( $v$ ) y la velocidad de fase de la luz en el medio ( $v_p$ ). Tomando

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} q \varpi; \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \beta; \quad k = q \varpi; \quad v_{\perp} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \beta \sin \theta_2; \quad v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \beta \cos \theta_2, \tag{254}$$

los parámetros de la ecuación (251) toman la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= c^4 q^2 [\varpi^2 \beta^2 \text{sen}^2 \theta_2 - \varpi^2 \pm 4\varpi \beta \cos \theta_2], \\
\mathcal{B} &= c^4 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2], \\
\mathcal{C} &= c^4 q^2 [\varpi^2], \\
\mathcal{D} &= 4c^2 q^2, \\
\mathcal{E} &= 4c^2 q^2 [\pm \varpi], \\
\mathcal{F} &= c^2 q^2 [\varpi^2 \beta^2 \text{sen}^2 \theta_2 - \varpi^2 - 4\beta^2 \cos^2 \theta_2 \pm 4\beta \varpi \cos \theta_2], \\
\mathcal{G} &= c^2 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2 \mp 4\varpi \beta^2 \cos^2 \theta_2], \\
\mathcal{H} &= c^2 q^2 [\varpi^2 \beta^2].
\end{aligned} \tag{255}$$

de modo que la expresión para la energía radiada (253) asume la siguiente forma

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_{\pm}}{d\omega dL} = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 q^4 \varpi^4}{32\pi\beta\sqrt{\epsilon}} \Theta \left[ \pm \frac{2\beta \cos \theta_2}{1 - \beta} - \varpi \right] P(\varpi). \tag{256}$$

Es importante mencionar que en contraste con el efecto Cherenkov en un medio isotrópico y homogéneo, en este caso obtenemos radiación para velocidades de la partícula menores que la velocidad de fase de la luz en el medio. Para tenerlo en claro, si suponemos que  $0 \leq \theta_2 < \frac{\pi}{2}$  y que  $0 < \beta < 1$ , entonces la ecuación (256) nos dice que obtendremos radiación solo si

$$\frac{2\beta \cos \theta_2}{1 - \beta} - \varpi > 0$$

donde hemos tomado el signo positivo dentro del argumento de la función de Heaviside. Esta desigualdad puede reescribirse como

$$v \geq v_p \left( \frac{\omega}{\omega + 2qv_p \cos \theta_2} \right) \tag{257}$$

La condición (257) nos dice que el CLC emitirá radiación con una frecuencia angular  $\omega$  solo si la velocidad de la partícula es mayor que la condición del lado derecho de (257). Notemos que cuando las frecuencias angulares son muy grandes comparadas con  $2qv_p \cos \theta_2$ , o sea, en el límite cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , recuperamos la condición usual para la radiación de Cherenkov  $v > v_p$ , además, la emisión de radiación será imposible para valores de la velocidad menores que  $v_p$  si la partícula viaja en dirección perpendicular al eje del colestérico ( $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ). Cuando  $\frac{\pi}{2} < \theta_2 \leq \pi$  debemos tomar el signo negativo dentro del argumento de la función de Heaviside y obtendremos

$$v \geq v_p \left( \frac{\omega}{\omega - 2qv_p \cos \theta_2} \right)$$

que es equivalente a (257). Podemos conocer el ancho de banda de emisión para una velocidad dada si escribimos la condición para la emisión de radiación de la siguiente manera:

$$\varpi \leq \pm \frac{2\beta \cos \theta_2}{1 - \beta} \quad \text{ó bien} \quad \omega \leq \pm \frac{2v_p v \cos \theta_2}{p(v_p - v)} \quad (258)$$

donde, nuevamente, si  $\theta_2$  esta en el intervalo  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$  entonces  $\varpi$  está restringida a la banda  $0 \leq \varpi \leq \frac{2\beta \cos \theta_2}{1 - \beta}$ , definida por el signo positivo de (258) y de manera complementaria, cuando tenemos que  $\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$  debemos usar el signo negativo de (258) para llegar a la misma restricción. Por lo tanto el espectro de radiación en la banda de frecuencias bajas es  $0 \leq \varpi \leq \frac{2\beta \cos \theta_2}{1 - \beta}$ . Éste ancho de banda se muestra en la figura 18 para el intervalo  $0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$  y para  $0 < \beta < 0.2$ . Es conveniente recalcar el hecho de que este resultado confirma que para cualquier velocidad  $\beta > 0$  obtenemos una emisión de radiación, sin embargo el ancho de banda se hace más estrecho ya sea que la velocidad de la partícula decrezca o que la velocidad de la partícula sea casi ortogonal al eje de periodicidad.

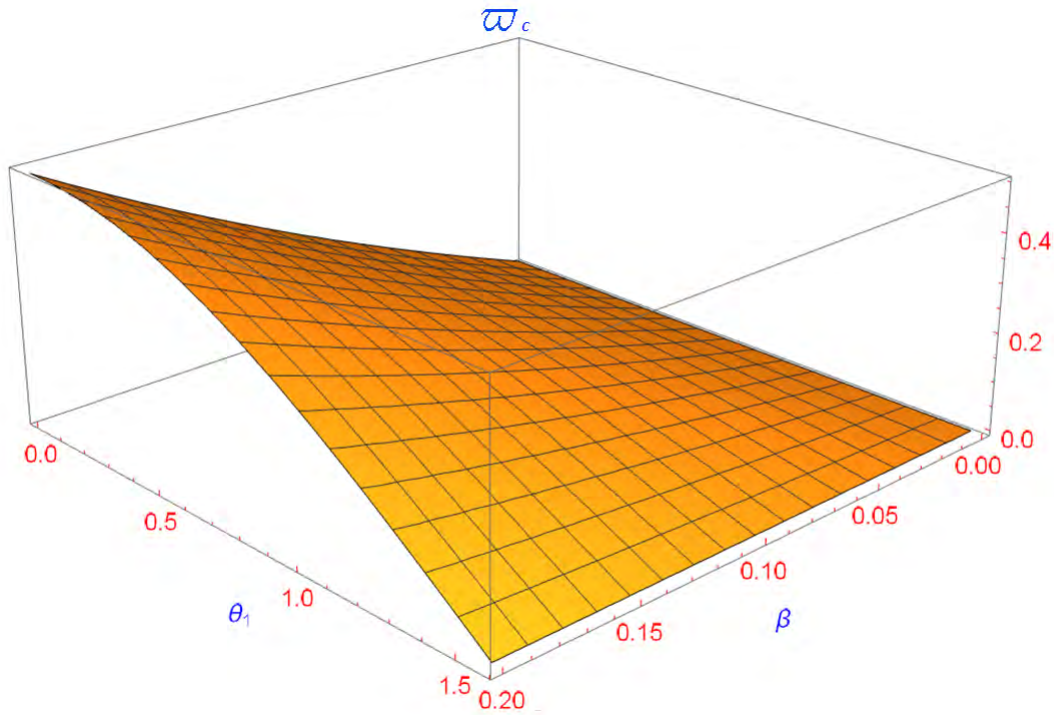


Figura 18. Ancho de banda de emisión ( $\varpi$ ) como función de la velocidad de la partícula ( $\beta$ ) y el ángulo de viaje respecto al eje de la hélice del colestérico ( $\theta_1$ ).

Por último antes de dejar esta sección será conveniente recordar que hemos supuesto que tanto  $\varepsilon \equiv \varepsilon_{\perp}(\omega)$  como  $\varepsilon_a \equiv \varepsilon_a(\omega)$  son cantidades reales de manera que consideramos que nuestro sistema es un medio transparente y sin absorción. Siempre que la radiación electromagnética que consideremos este lejos del espectro ultravioleta, donde las fases colestéricas suelen presentar algunas resonancias, y lejos de algunas regiones del infrarrojo cercano [91], esta es una suposición justificada.

## 6.4 Partícula cargada a baja velocidad

Consiredemos una partícula cargada que se mueve a una velocidad mucho menor que la velocidad de la luz en el medio, de modo que podamos considerar el límite  $\beta \rightarrow 0$ . En este caso podemos aproximar  $\frac{\beta}{1-\beta} \rightarrow \beta$ , y podemos reescribir el argumento de la función de Heaviside en (256) como

$$\Theta [\pm 2\beta \cos \theta_2 - \varpi],$$

por lo tanto, en este límite la energía será radiada en el intervalo de frecuencias tales que  $\varpi \leq \pm 2\beta \cos \theta_2$ , donde debemos tomar los signos de la forma que hemos indicado en los párrafos anteriores.

Por otra parte, en consistencia con la suposición de velocidades bajas debemos tomar solo los términos a primer orden en  $\beta$  en los parámetros definidos en (255):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= c^4 q^2 [\pm 4\varpi \beta \cos \theta_2 - \varpi^2], \\ \mathcal{B} &= c^4 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2], \\ \mathcal{C} &= c^4 q^2 [\varpi^2], \\ \mathcal{D} &= 4c^2 q^2, \\ \mathcal{E} &= 4c^2 q^2 [\pm \varpi], \\ \mathcal{F} &= c^2 q^2 [\pm 4\varpi \beta \cos \theta_2 - \varpi^2], \\ \mathcal{G} &= c^2 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2], \\ \mathcal{H} &= 0, \end{aligned} \tag{259}$$

con lo cual la función  $P(\varpi)$  se convierte en

$$P_{\pm}(\varpi) = \int_{-1}^1 \frac{[\varpi(2\varpi x \pm 4)\beta_z - \varpi^2(1+x^2)](1+x^2) dx}{16cq^3(1 \pm \varpi x)^2 \sqrt{\varpi(2\varpi x \pm 4)\beta_z - \varpi^2}}. \tag{260}$$

donde hemos definido  $\beta_z \equiv \beta \cos \theta_2$ . Sustituyendo estos resultados en (256) obtenemos que

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_{\pm}}{d\omega dL} = \frac{(Ze\varepsilon_a)^2 q}{2 \cdot 4^4 \pi \sqrt{\varepsilon} c} \Theta [\pm 2\beta_z - \varpi] \frac{\varpi^4}{\beta} \int_{-1}^1 \frac{(A + Bx - Cx^2)(1+x^2)}{(D + Ex)^2 \sqrt{F + Gx}} dx \tag{261}$$

o bien, definiendo la distancia adimensional  $\mathcal{L} = Lq$  y la frecuencia temporal adimensional  $\sigma = \frac{\omega}{vq}$  y tomando en cuenta la energía  $\mathcal{E}_0 = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 q}{4^4 \cdot 2\pi\epsilon}$  y obtenemos que

$$\frac{d^2\mathcal{E}_{\pm}}{d\sigma d\mathcal{L}} = \Theta[\pm 2\beta_z - \varpi] \varpi^4 \int_{-1}^1 \frac{(A + Bx - Cx^2)(1 + x^2)}{(D + Ex)^2 \sqrt{F + Gx}} dx$$

donde  $\mathcal{E}_{\pm} = \frac{E_{\pm}}{\mathcal{E}_0}$  es la energía adimensional.

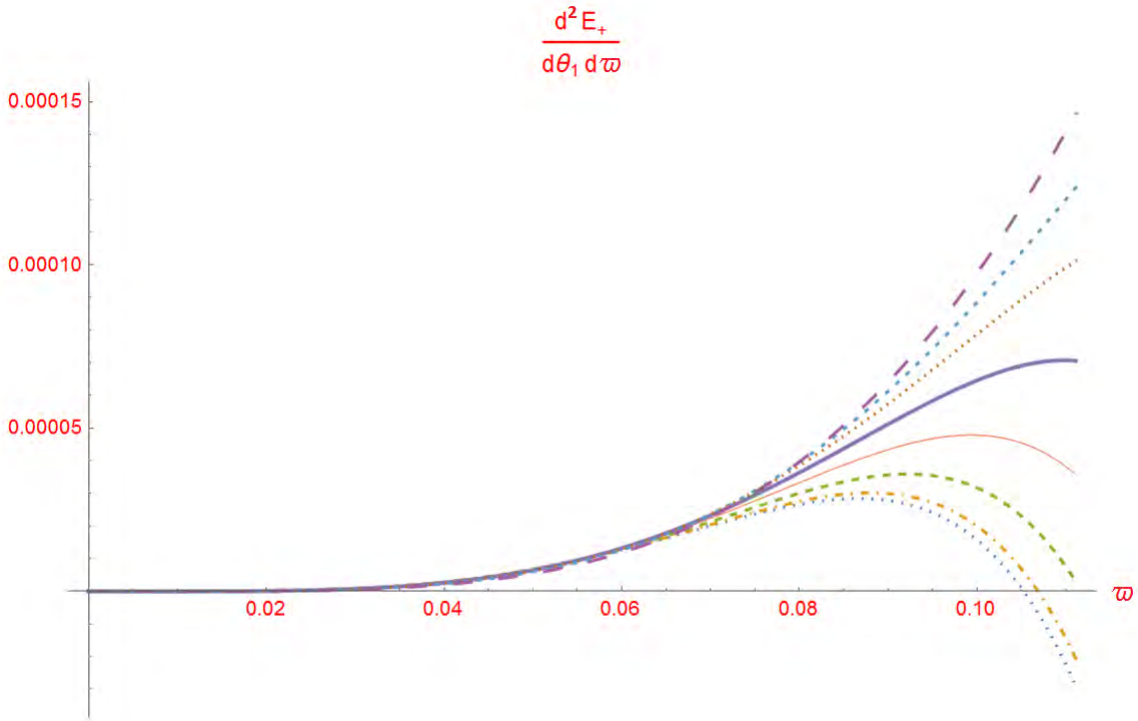


Figura 19. Derivada de la densidad de estados ( $E$ ) vs la frecuencia normalizada ( $\varpi$ ) parametrizada con el ángulo de emisión ( $\theta_1$ ). Los valores de los parámetros usados fueron  $\beta = 0.1$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ,  $\theta_1 = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$  (de abajo hacia arriba).

En la figura 19 hemos graficado la densidad de energía  $d^2E_+/(d\omega d\theta_1)$  como función de la frecuencia normalizada  $\varpi$  y hemos tomado distintos valores de  $\theta_1$  como parámetros. La energía radiada es máxima para  $\varpi$  alrededor de 0.08 cuando la emisión es paralela al eje del colestérico, mientras que para ángulos de emisión mayores vemos un corrimiento al azul. De hecho cuando  $\theta_1 = 40^\circ$ , la frecuencia  $\varpi$  para la cual energía radiada alcanza

su máximo es en el borde del ancho de banda y continúa así para ángulos mayores. Por otra parte aún cuando la expresión para  $d^2E_+/(d\omega d\theta_1)$  no es idéntica, la gráfica correspondiente si es la misma a esta escala, por esto la hemos omitido.

En la figura 20 presentamos  $d^2E_+/(d\omega d\theta_1)$  contra  $\theta_1$  y esto nos muestra como las frecuencias mayores contribuyen más a la energía radiada. También la dirección paralela al eje del la hélice es un máximo para las frecuencias menores y se convierte rápidamente en mínimo para las mayores. Esta variación en la distribución de la energía radiada también es evidente en la figura 21, donde  $d^2E_+/(d\omega d\theta_1)$  ha sido graficado como función de ambas variables. El máximo del energía radiada se traslada a grosso modo del esquina localizada en  $\theta_1 = 0, \varpi = 0.04$  hacia  $\theta_1 \simeq 90^\circ, \varpi = 0.06$ .

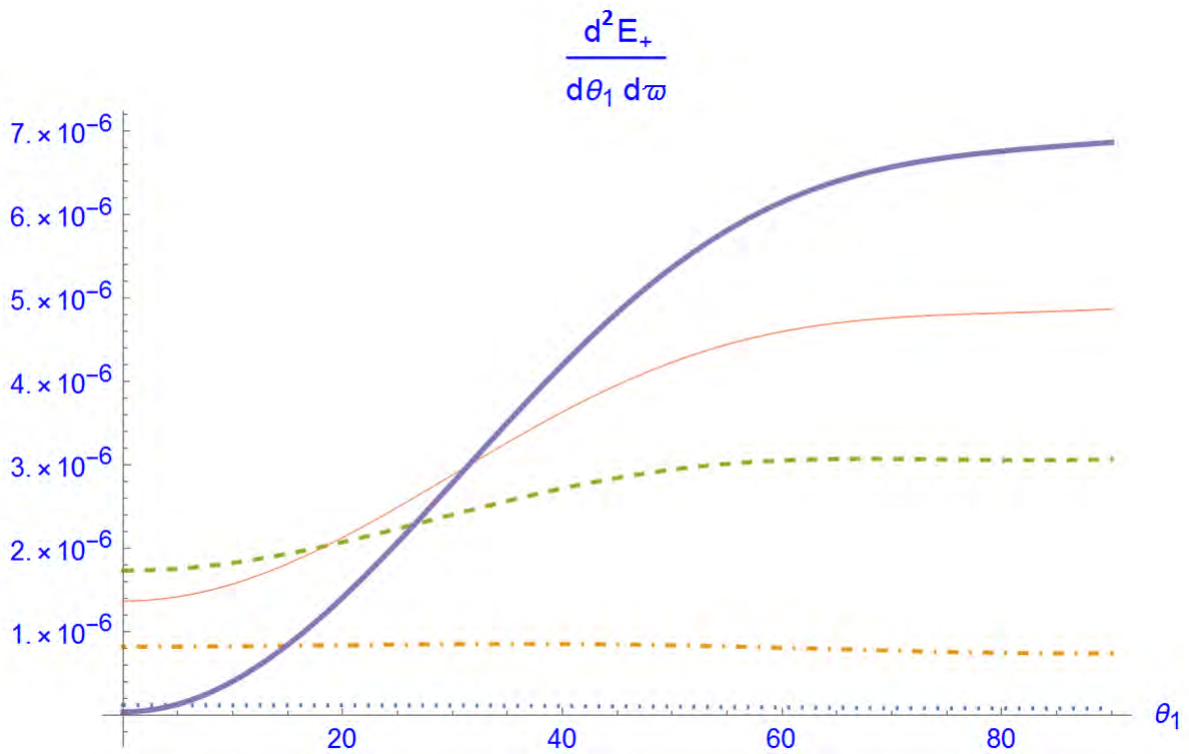


Figura 20. Derivada de la densidad de estados ( $E$ ) vs ángulo de emisión ( $\theta_1$ ) parametrizado con la frecuencia normalizada. Los valores de los parámetros son:  $\beta = 0.05, \theta_2 = 60^\circ, \varpi = 0.018, 0.03, 0.047,$  y  $0.0512,$  de arriba a abajo.

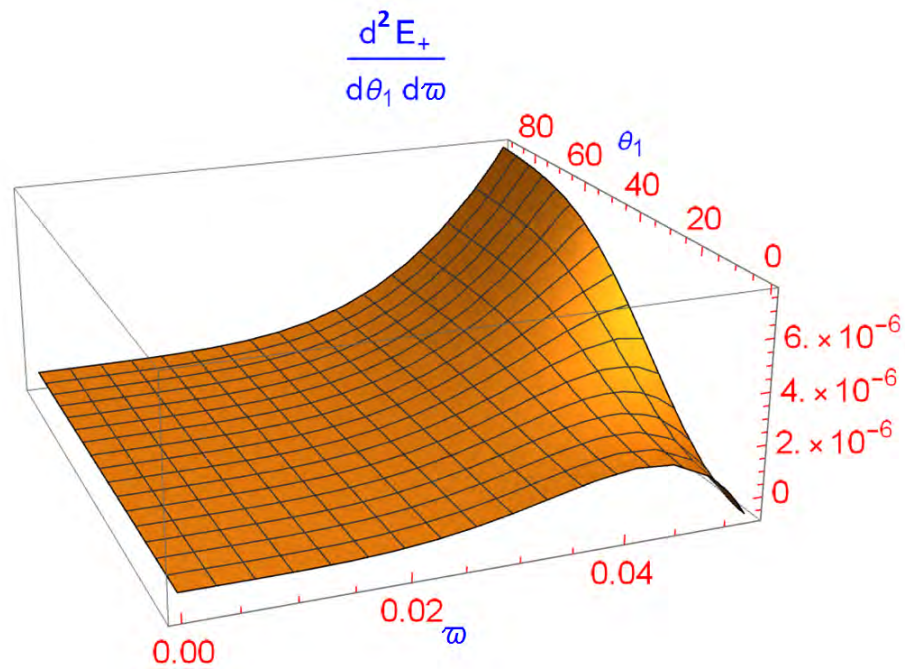


Figura 21. Derivada de la densidad de estados ( $E$ ) respecto al ángulo de emisión ( $\theta_1$ ) y la frecuencia normalizada ( $\omega$ ) dentro de la banda permitida.

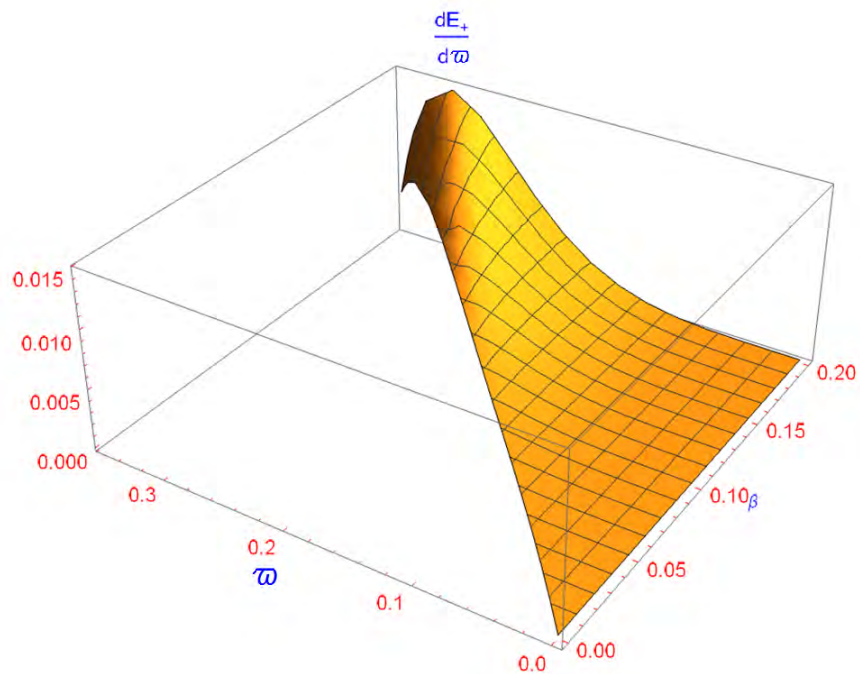


Figura 22. Densidad de estados ( $E$ ) derivada respecto a la frecuencia normalizada ( $\omega$ ) como función de la frecuencia y de la velocidad de la partícula ( $\beta$ ).

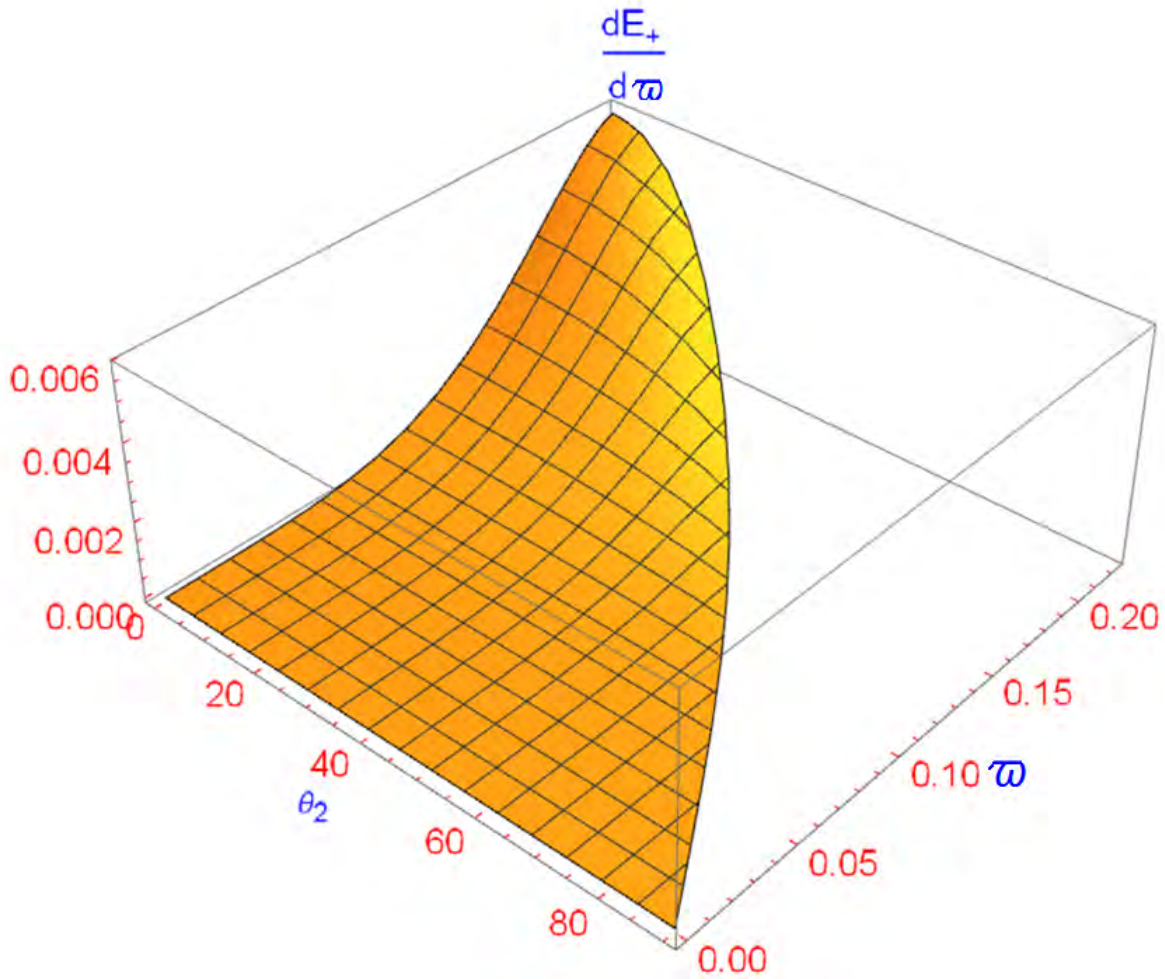


Figura 23. Densidad de estados ( $E$ ) derivado respecto a la frecuencia normalizada ( $\varpi$ ) vs ángulo de desplazamiento de la partícula ( $\theta_2$ ) y frecuencia de emisión ( $\varpi$ ).

En la figura 22 hemos trazado una superficie para la energía radiada  $dE_+/(d\omega)$  contra  $\varpi$  y  $\beta$  que nos muestra como la banda de frecuencias de emisión se reduce a medida que consideramos valores más y más pequeños para la velocidad de la partícula  $\beta$ . La frecuencia a la cual la energía irradiada es máxima coincide con la frontera superior de la banda permitida cuando consideramos valores pequeños de la velocidad, mientras que al considerar velocidades mayores este máximo es alcanzado un poco antes.

En la figura 23 presentamos el energía radiada  $dE_+/(d\omega)$  contra  $\varpi$  y  $\theta_2$ . Aquí mostramos que la energía radiada tiene su máximo cuando la partícula cargada se mueve paralela al eje del CLC y para frecuencias muy cercanas al límite superior de la banda. Este tipo de radiación refrena su emisión para intervalos más cortos de ángulos a medida que la frecuencia se incrementa hasta que desaparece para el borde superior



de frecuencias.

Para cerrar esta sección realizaremos una estimación numérica de la longitud de onda en la cual se espera observar la radiación emitida por el CLC. Como ya hemos calculado la frecuencia con la máxima emisión está alrededor de  $\varpi = 0.08$  para la radiación paralela al eje del CLC. De este modo, al usar la definición de  $\varpi$  de la ecuación (254) obtenemos  $\varpi = k/q = p/\lambda$  donde  $\lambda$  es la longitud de onda observada en el vacío y  $p$  es el pitch del CLC. Si asumimos que el valor del pitch es  $p = 0.6\mu m$  entonces obtendremos que  $\lambda \simeq 7.5\mu m$ , la cual es una longitud de onda dentro del espectro infrarrojo cercano.

## 7 Conclusiones

Hemos elaborado un modelo para calcular el espectro de la energía radiada por una partícula cargada que viaja dentro de un cristal líquido colestérico (CLC) a velocidad constante. Con este propósito hemos evaluado la polarización del colestérico inducida por una partícula cargada la cual puede expresarse en términos del campo eléctrico de la partícula moviéndose dentro del colestérico. Hemos establecido las ecuaciones de Maxwell que gobiernan este campo en el espacio recíproco y hemos resuelto estas ecuaciones en la aproximación de birrefringencia pequeña. Hemos mostrado que existe radiación para cualquier velocidad de la partícula y hemos calculado el energía radiada para partículas con velocidades hipolumínicas. Luego hemos calculado el espectro de radiación en términos de la velocidad de la partícula y el ángulo de desplazamiento de esta. También hemos obtenido la distribución de energía radiada contra la frecuencia, el ángulo de visión, la rapidez de la partícula y el ángulo de desplazamiento de la partícula respecto a la hélice del colestérico.

Este estudio constituye apenas el inicio de la exploración de un fértil campo de investigación, y las extensiones que se pueden hacer de esta teoría son múltiples e interesantes. Como ya se dijo explícitamente en el capítulo 6, los cálculos que hemos hecho consideran que el CLC presenta una anisotropía pequeña, de modo que resultará de interés explorar que pasa en el caso de anisotropías grandes y será de interés buscar expresiones generales para valores arbitrarios de la anisotropía. También hemos dejado de lado por el momento el cálculo de lo que pasa en el caso de longitudes de onda mucho mayores que el valor del pitch del CLC. Una exploración de estos fenómenos resulta necesaria, ya que como hemos visto en el capítulo sobre cristales líquidos, la interacción de los CLC con el campo electromagnético depende de la longitud de onda incidente, y en particular, dependiendo de la longitud de onda tenemos que el poder rotatorio del CLC será hacia una dirección u otra, o incluso impedirá el paso de luz a través de él.

Tomando una perspectiva mucho más general, el estudio no tiene por que restringirse a una fase quiral como lo es la fase CLC. Otras mesofases de cristales líquidos podrían albergar nuevas e interesantes fenomenologías en cuanto a la generación de radiación de transición y radiación de Cherenkov en su seno. Hoy en día se suele prestar una atención primaria a los CLC debido a su estructura única, pero el comportamiento periódico de los esmécticos podría guardar fenomenologías inesperadas, o aún en el caso de los nemáticos, con su capacidad de producir configuraciones quirales, podríamos esperar crear sistemas ajustables que podrían ayudarnos a identificar características de la radiación que de otra manera serían difíciles de encontrar. Todo esto pertenece por ahora al campo de la especulación, pero lo importante es darse cuenta de que el camino para comprobar esta y otras ideas está abierto.

Todo lo anterior se refiere al medio, sin embargo, una perspectiva realista, o quizás más general, también debería buscar los efectos que una carga con volumen finito provocaría en el medio. Estas ideas ya han sido presentadas en otros trabajos [67], pero hasta donde nosotros hemos sabido, su implementación en el caso de CLC u otros tipos de cristales líquidos sería novedosa. Siguiendo por esta línea, también investigar el

efecto de un pulso electromagnético dentro del cristal líquido sería importante [68], y también el efecto de un tren de ondas viajando dentro de un medio como los que hemos mencionado.

Como hemos dicho, la investigación respecto a la radiación de Cherenkov y la radiación de transición dentro de los cristales líquidos es en gran medida una tarea por emprender.

Por otra parte, esta investigación también se ha inspirado en el diseño de nuevos detectores de radiación que se dio a partir de la confirmación experimental de la radiación de transición. Esperamos que este estudio sea útil en el diseño de un aparato capaz de detectar partículas cargadas que se muevan a baja velocidad usando un colestérico como base de este instrumento. Nuestras estimaciones numéricas indican una frecuencia dentro del infrarrojo cercano al utilizar los parámetros típicos de un colestérico y para partículas que se mueven a una velocidad de un 5% de la velocidad de la luz dentro del colestérico.

Al igual que en los parafos anteriores, debemos decir que a este respecto aún falta emprender las investigaciones que nos llevaran, en el futuro, a una nueva generación de detectores de radiación basados en las propiedades únicas de los cristales líquidos y otras sustancias.

## 8 Apéndice I

El producto tensorial  $\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^T$  está dado por

$$\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^T = \begin{pmatrix} \cos qz \\ \text{sen}qz \\ 0 \end{pmatrix} (\cos qz, \text{sen}qz, 0) = \begin{bmatrix} \cos^2 qz & \cos qz \text{sen}qz & 0 \\ \text{sen}qz \cos qz & \text{sen}^2 qz & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (262)$$

Debido a que

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2} [e^{ix} + e^{-ix}] & ; & \quad \text{sen}x = \frac{1}{2i} [e^{ix} - e^{-ix}] \\ \cos^2 x &= \frac{1}{4} [e^{ix} + e^{-ix}]^2 = \frac{1}{4} [e^{2ix} + e^{-2ix} + 2] \\ \text{sen}^2 x &= -\frac{1}{4} [e^{ix} - e^{-ix}]^2 = -\frac{1}{4} [e^{2ix} + e^{-2ix} - 2] \\ \text{sen}x \cos x &= \frac{1}{2i} [e^{ix} - e^{-ix}] \frac{1}{2} [e^{ix} + e^{-ix}] = \frac{1}{4i} [e^{2ix} - e^{-2ix}], \end{aligned} \quad (263)$$

podemos escribir a la ecuación (262) como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{n}}^T &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} [e^{2iqz} + e^{-2iqz} + 2] & \frac{1}{i} [e^{2iqz} - e^{-2iqz}] & 0 \\ \frac{1}{i} [e^{2iqz} - e^{-2iqz}] & -[e^{2iqz} + e^{-2iqz} - 2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} [e^{2iqz} + e^{-2iqz} + 2] & -i [e^{2iqz} - e^{-2iqz}] & 0 \\ -i [e^{2iqz} - e^{-2iqz}] & -[e^{2iqz} + e^{-2iqz} - 2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \begin{bmatrix} e^{2iqz} & -ie^{2iqz} & 0 \\ -ie^{2iqz} & -e^{2iqz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2iqz} & ie^{-2iqz} & 0 \\ ie^{-2iqz} & -e^{-2iqz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \frac{e^{2iqz}}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{e^{-2iqz}}{4} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definiendo las matrices constantes  $T_{\pm 1}$  y  $T_0$  como

$$T_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T_0 = -\frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^T = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (264)$$

donde hemos utilizado que

$$\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

podemos escribir explícitamente la ecuación (203) como

$$4\pi \chi(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi \bar{\chi}(\omega) \mathbf{I} + \epsilon_a(\omega) e^{2iqz} T_1 + \epsilon_a(\omega) e^{-2iqz} T_{-1} + \epsilon_a(\omega) T_0$$

o bien, utilizando la convención de suma sobre índices repetidos

$$4\pi \chi(\mathbf{r}, \omega) = 4\pi \bar{\chi}(\omega) \mathbf{I} + \epsilon_a(\omega) e^{2i(qz)l} T_l$$

donde el índice  $l$  adopta los valores  $l = -1, 0, 1$ , y donde hemos definido la susceptibilidad dieléctrica promedio  $\bar{\chi}(\omega)$  de la siguiente manera:

$$4\pi \bar{\chi}(\omega) = \epsilon_{\perp}(\omega) - 1 + \frac{\epsilon_a(\omega)}{2}.$$

## 9 Apéndice II

La ecuación (236) es

$$\mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) = Zeic^2 \frac{\epsilon_a k^2 e^{ikr} \hat{\mathbf{k}} \times \left( \frac{\omega}{c^2} \epsilon_{\perp} v_{\pm} - k_{\pm} \right) \left[ \mathbf{S}_{\pm} \times \hat{\mathbf{k}} \right] \text{sen} \left[ \frac{L}{2} \left( \frac{\omega}{v} - k \cos \alpha \mp 2q \frac{v_z}{v} \right) \right]}{\epsilon_{\perp} r \quad 4\pi \left( c^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \epsilon_{\perp} \omega^2 \right) \quad \pi v f} \quad (265)$$

y debemos calcular la expresión para la energía radiada

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_{\pm}}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{2\pi} \epsilon^{1/2} |r \mathbf{E}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega)|^2. \quad (266)$$

de modo que tenemos que encontrar la norma al cuadrado de cada uno de los términos de  $\mathbf{E}_{\pm}$ . Tomando en cuenta que  $v_{\pm} = \frac{v_x \pm iv_y}{\sqrt{2}}$ ,  $k_{\pm} = \frac{k_x \pm ik_y}{\sqrt{2}}$  y considerando el término

$$b(u, \theta_1) \equiv \frac{|\omega \epsilon v_{\pm} - c^2 k_{\pm}|^2}{(c^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \epsilon \omega^2)^2} = \frac{c^4 k_{\perp}^2 + \epsilon^2 \omega^2 v_{\perp}^2 - 2c^2 \omega \epsilon \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}}{(c^2 |\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 - \epsilon \omega^2)^2} \quad (267)$$

podemos escribir que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\omega}{c^2} \epsilon v_{\pm} - k_{\pm} \right|^2 &= \frac{1}{2} \left| \omega \epsilon (v_x \pm iv_y) - c^2 (k_x \pm ik_y) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| (\omega \epsilon v_x - c^2 k_x) \pm i (\omega \epsilon v_y - c^2 k_y) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\omega \epsilon v_x - c^2 k_x)^2 + (\omega \epsilon v_y - c^2 k_y)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\omega \epsilon v_x)^2 + (c^2 k_x)^2 - 2\omega \epsilon v_x c^2 k_x + (\omega \epsilon v_y)^2 + (c^2 k_y)^2 - 2\omega \epsilon v_y c^2 k_y \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\omega \epsilon)^2 v_{\perp}^2 + c^4 k_{\perp}^2 - 2\omega \epsilon c^2 (v_x k_x + v_y k_y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \omega^2 \epsilon^2 v_{\perp}^2 + c^4 k_{\perp}^2 - 2\omega \epsilon c^2 (\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}) \right], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} &= k_x v_x + k_y v_y \\ &= k_x v_x + k_y v_y \\ &= kv (\text{sen} \theta_1 \cos \phi_1 \text{sen} \theta_2 \cos \phi_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \phi_1 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \phi_2) \\ &= kv (\text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \cos \phi_1 \cos \phi_2 + \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \text{sen} \phi_1 \text{sen} \phi_2) \\ &= k v \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \text{sen} \phi_1 \text{sen} \phi_2) \\ &= k v \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2 \cos (\phi_1 - \phi_2), \end{aligned}$$

y también podemos escribir a  $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp$  como

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp &= k_x v_x + k_y v_y + k_z v_z - k_z v_z \\
&= \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}}) (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \\
&= kv \left[ \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{v}} - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) (\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \right] \\
&= kv [\cos\alpha - \cos\theta_1 \cos\theta_2].
\end{aligned} \tag{268}$$

Para la magnitud de  $|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2$  en (267) tenemos que

$$\begin{aligned}
|\mathbf{k} \pm \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{k} \pm \mathbf{b}) \\
&= |\mathbf{k}|^2 \pm 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \\
&= k^2 \pm 2kb\cos\theta_1 + b^2 \\
&= k^2 \pm 4kq\cos\theta_1 + 4q^2.
\end{aligned}$$

En el caso del producto cruz dentro de (265) tenemos que

$$\left| \hat{\mathbf{k}} \times [\mathbf{S}_\pm \times \hat{\mathbf{k}}] \right|^2 = \left| (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathbf{S}_\pm - (\mathbf{S}_\pm \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}} \right|^2 = \left| \mathbf{S}_\pm - (\mathbf{S}_\pm \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}} \right|^2,$$

$$\mathbf{S}_\pm \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{(\hat{\mathbf{x}} \pm i \hat{\mathbf{y}}) \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{2}} = \frac{(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \pm i \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{2}} = \frac{k_x \pm ik_y}{\sqrt{2}k},$$

$$\begin{aligned}
\left| \mathbf{S}_\pm - (\mathbf{S}_\pm \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}} \right|^2 &= \frac{1}{2} \left| \hat{\mathbf{x}} - \frac{k_x}{k^2} (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) \pm i \left( \hat{\mathbf{y}} - \frac{k_y}{k^2} (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2k^4} \left[ k_x^2 \left| (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) - \frac{k^2}{k_x} \hat{\mathbf{x}} \right|^2 + k_y^2 \left| (k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}) - \frac{k^2}{k_y} \hat{\mathbf{y}} \right|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2k^4} \left[ k_x^2 \left| \left( k_x - \frac{k^2}{k_x} \right) \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} \right|^2 + k_y^2 \left| k_x \hat{\mathbf{x}} + \left( k_y - \frac{k^2}{k_y} \right) \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} \right|^2 \right] \\
&= \frac{k_x^2}{2k^4} \left( \left( k_x - \frac{k^2}{k_x} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \right) + \frac{k_y^2}{2k^4} \left( k_x^2 + \left( k_y - \frac{k^2}{k_y} \right)^2 + k_z^2 \right) \\
&= \frac{1}{2k^2} (k_y^2 + k_z^2) + \frac{1}{2k^2} (k_x^2 + k_z^2) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{k_z}{k} \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Notando que  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{z}} = k_z = k\cos\theta_1$ , o bien  $\frac{k_z}{k} = \cos\theta_1$ , podemos escribir

$$\left| \mathbf{S}_\pm - (\mathbf{S}_\pm \cdot \hat{\mathbf{k}}) \hat{\mathbf{k}} \right|^2 = \frac{1}{2} [1 + \cos^2\theta_1].$$

## 10 Apéndice III

En el caso de una delta de Dirac elevada al cuadrado tenemos lo siguiente

$$\delta [a\mathbf{k} - b] = \frac{1}{a} \delta \left[ \mathbf{k} - \frac{b}{a} \right] \quad (269)$$

de este modo, en el caso de la ecuación (243) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta [\omega - (\mathbf{k} \mp 2\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}] &= \delta [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \pm 2\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}] \\ &= \delta [\omega - kv \cos \alpha \pm 2qv_z] = \delta \left[ \frac{v(\omega - kv \cos \alpha \pm 2qv_z)}{v} \right] \\ &= \frac{1}{v} \delta \left[ \frac{\omega}{v} - k \cos \alpha \pm 2q \frac{v_z}{v} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi v} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp i \left[ \frac{\omega}{v} - k \cos \alpha \pm 2q \frac{v_z}{v} \right] z \\ &= \frac{1}{2\pi v} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp i [f z] \end{aligned} \quad (270)$$

donde hemos utilizado  $f = \frac{\omega}{v} - k \cos \alpha \pm 2q \frac{v_z}{v}$ . Dado que

$$\text{sinc}(a x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(a x)}{x} = \frac{\pi}{2} \delta [x] \quad (271)$$

entonces podemos escribir (270) como

$$\begin{aligned} \delta [\omega - (\mathbf{k} \mp 2\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}] &= \frac{1}{2\pi v} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp i f z \\ &= \frac{1}{v} \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} dz \exp i f z = \frac{1}{v} \text{sinc}(fL/2) \\ &= \frac{1}{\pi v} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin(fL/2)}{f} \end{aligned}$$

que es el resultado en (243). Para la integral en (248), notemos que  $\alpha = \left( \frac{\omega}{v} - (ku \pm 2q \frac{v_z}{v}) \right) \frac{L}{2}$ ,  $d\alpha = -kdu \frac{L}{2}$ , por tanto



$$\begin{aligned}
\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(f_{\pm} L/2)}{(f_{\pm} L/2)^2} du &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\omega}{v} - (ku \pm 2q \frac{v_z}{v})\right) \frac{L}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} - (ku \pm 2q \frac{v_z}{v})\right) \frac{L}{2}\right]^2} du \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} - \int_1^{-1} \frac{\text{sen}^2\left(\frac{\omega}{v} - (ku \pm 2q \frac{v_z}{v})\right) \frac{L}{2}}{\left[\left(\frac{\omega}{v} - (ku \pm 2q \frac{v_z}{v})\right) \frac{L}{2}\right]^2} du \\
&= \frac{2}{kL} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\alpha_-}^{\alpha_+} \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\alpha^2} d\alpha \\
&= \frac{2\pi}{kL} \Theta \left[ k - \frac{\omega}{v} \pm \frac{2qv_z}{v} \right].
\end{aligned}$$

## 11 Apéndice IV

Para el diferencial  $d\Omega$  tenemos que

$$d\Omega = \text{sen}\theta_1 d\theta_1 d\phi_1 = \text{sen}\theta_1 d\theta_1 \frac{d\phi_1}{d\alpha} d\alpha, \quad (272)$$

para calcular  $\frac{d\phi_1}{d\alpha}$  tomemos en cuenta la ecuación (240) que nos dice

$$\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad (273)$$

diferenciando implícitamente tenemos que

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \text{sen}(\phi_1 - \phi_2) \frac{d\phi_1}{d\alpha},$$

y despejando

$$\frac{d\phi_1}{d\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2 \text{sen}(\phi_1 - \phi_2)},$$

por lo tanto

$$d\Omega = \frac{\text{sen}\alpha d\theta_1 d\alpha}{\text{sen}\theta_2 \text{sen}(\phi_1 - \phi_2)}, \quad (274)$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (240) podemos escribir que

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2},$$

y desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned} \cos^2(\phi_1 - \phi_2) &= \left( \frac{\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2} \right)^2, \\ \text{sen}^2(\phi_1 - \phi_2) &= 1 - \left( \frac{\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2} \right)^2, \\ \text{sen}^2(\phi_1 - \phi_2) &= \frac{\sqrt{\text{sen}^2\theta_1 \text{sen}^2\theta_2 - (\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2)^2}}{\text{sen}\theta_1 \text{sen}\theta_2}, \\ \text{sen}\theta_2 \text{sen}(\phi_1 - \phi_2) &= \frac{\sqrt{\text{sen}^2\theta_1 \text{sen}^2\theta_2 - (\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2)^2}}{\text{sen}\theta_1}. \end{aligned} \quad (275)$$

Substituyendo la ecuación (275) en ecuación (274) obtenemos

$$d\Omega = \frac{kv \text{sen}\theta_1 \text{sen}\alpha d\theta_1 d\alpha}{\sqrt{k^2 v_{\perp}^2 \text{sen}^2\theta_1 - (kv \cos \alpha - kv_z \cos \theta_1)^2}}. \quad (276)$$



## 12 Apéndice V

En el caso de la función  $\frac{d^2\mathbf{E}_\pm}{d\omega d\theta_1}$  tenemos que

$$\frac{d^2\mathbf{E}_\pm}{d\omega d\theta_1} = \frac{L}{2\pi k v^2} g(u_c, \theta_1) \Theta \left[ k - \frac{\omega}{v} \pm \frac{2qv_z}{v} \right] \sin \theta_1 \quad (277)$$

donde  $g(u_c, \theta_1) = a \cdot b_\pm(u_c, \theta_1) \cdot c(\theta_1) \cdot w(u_c, \theta_1)$ . Recordemos que estas funciones están definidas por

$$a = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 ck^4}{4\epsilon^{3/2}}, \quad b(u_c, \theta_1) = \frac{1}{2} \frac{c^4 k_\perp^2 + \epsilon^2 \omega^2 v_\perp^2 - 2c^2 \omega \epsilon \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp}{(c^2 k^2 \pm 4kqc^2 \cos \theta_1 + 4q^2 c^2 - \epsilon \omega^2)^2},$$

$$c(\theta_1) = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_1), \quad w(u_c, \theta_1) = \frac{kv}{\sqrt{k^2 v_\perp^2 \sin^2 \theta_1 - (kvu_c - kv_z \cos \theta_1)^2}}.$$

tomando  $x = \cos \theta_1$  y recordando que  $kvu_c = \omega \mp 2qv_z$ ,  $k_\perp^2 = k^2 \sin^2 \theta_1 = k^2 (1 - x^2)$ ,  $\cos \alpha = u$ ,  $v_z = v \cos \theta_2$  y tomando en cuenta la ecuación (268) podemos reescribir  $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp$  como  $\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp = kv [\cos \alpha - \cos \theta_1 \cos \theta_2] = kvu_c - kv \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \omega \mp 2qv_z - kv_z x$ . Tomando en cuenta todas estas igualdades, podemos reescribir las funciones que componen a  $g$  como

$$a = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 ck^4}{4\epsilon^{3/2}}, \quad c(\theta_1) = \frac{1}{2} (1 + x^2),$$

$$b(u_c, \theta_1) = \frac{1}{2} \frac{(c^4 k^2 + \epsilon^2 \omega^2 v_\perp^2 - 2c^2 \epsilon \omega^2 \pm 4c^2 \epsilon \omega q v_z) + (2c^2 \epsilon \omega k v_z) x - (c^4 k^2) x^2}{(c^2 k^2 + 4c^2 q^2 - \epsilon \omega^2 \pm 4c^2 q k x)^2},$$

$$w(u_c, \theta_1) = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} kv}{\sqrt{(\epsilon k^2 v_\perp^2 - \epsilon \omega^2 \pm 4\epsilon \omega q v_z - 4\epsilon q^2 v_z^2) + (2\epsilon \omega k v_z \mp 4\epsilon q k v_z^2) x - (\epsilon k^2 v_\perp^2 + \epsilon k^2 v_z^2) x^2}}.$$

o bien, si definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= c^4 k^2 + \epsilon^2 \omega^2 v_\perp^2 - 2c^2 \epsilon \omega^2 \pm 4c^2 \epsilon \omega q v_z, \\ \mathcal{B} &= 2c^2 \epsilon \omega k v_z, \\ \mathcal{C} &= c^4 k^2 \\ \mathcal{D} &= c^2 k^2 + 4c^2 q^2 - \epsilon \omega^2, \\ \mathcal{E} &= \pm 4c^2 q k \\ \mathcal{F} &= \epsilon k^2 v_\perp^2 - \epsilon \omega^2 \pm 4\epsilon \omega q v_z - 4\epsilon q^2 v_z^2, \\ \mathcal{G} &= 2\epsilon \omega k v_z \mp 4\epsilon q k v_z^2, \\ \mathcal{H} &= \epsilon k^2 v_\perp^2 + \epsilon k^2 v_z^2. \end{aligned} \quad (278)$$

entonces estas ecuaciones son

$$a = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 ck^4}{4\epsilon^{3/2}}, \quad b(u_c, \theta_1) = \frac{1}{2} \frac{A + Bx - Cx^2}{(D + Ex)^2},$$

$$c(\theta_1) = \frac{1}{2} (1 + x^2), \quad w(u_c, \theta_1) = \frac{\epsilon^{\frac{1}{2}} kv}{\sqrt{F + Gx - Hx^2}}.$$

Como ya vimos en la sección 6.3, las cantidades en (278) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= c^4 q^2 [\varpi^2 \beta^2 \sin^2 \theta_2 - \varpi^2 \pm 4\varpi\beta \cos \theta_2], \\ \mathcal{B} &= c^4 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2], \\ \mathcal{C} &= c^4 q^2 [\varpi^2], \\ \mathcal{D} &= 4c^2 q^2, \\ \mathcal{E} &= 4c^2 q^2 [\pm\varpi], \\ \mathcal{F} &= c^2 q^2 [\varpi^2 \beta^2 \sin^2 \theta_2 - \varpi^2 - 4\beta^2 \cos^2 \theta_2 \pm 4\beta\varpi \cos \theta_2], \\ \mathcal{G} &= c^2 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2 \mp 4\varpi\beta^2 \cos^2 \theta_2], \\ \mathcal{H} &= c^2 q^2 [\varpi^2 \beta^2], \end{aligned}$$

y en el caso de bajas velocidades, podemos escribir que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= c^4 q^2 [\pm 4\varpi\beta \cos \theta_2 - \varpi^2] = c^4 q^2 A, \\ \mathcal{B} &= c^4 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2] = c^4 q^2 B, \\ \mathcal{C} &= c^4 q^2 [\varpi^2] = c^4 q^2 C, \\ \mathcal{D} &= 4c^2 q^2 = 4c^2 q^2 D, \\ \mathcal{E} &= 4c^2 q^2 [\pm\varpi] = 4c^2 q^2 E, \\ \mathcal{F} &= c^2 q^2 [\pm 4\beta\varpi \cos \theta_2 - \varpi^2] = c^2 q^2 F, \\ \mathcal{G} &= c^2 q^2 [2\varpi^2 \beta \cos \theta_2] = c^2 q^2 G, \\ \mathcal{H} &= 0, \end{aligned}$$

Sustituyendo estos resultados en (277) tenemos que

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_\pm}{d\omega d\theta_1} = \frac{L}{4 \cdot 2\pi v} \frac{(Ze\epsilon_a)^2 ck^4}{4\epsilon} \frac{1}{16cq^3} \frac{(A + Bx - Cx^2)(1 + x^2)}{(D + Ex)^2 \sqrt{F + Gx}} \Theta[\pm 2\beta_z - \varpi] \sin \theta_1$$

donde  $\beta_z = \beta \cos \theta_2$ . Integrando respecto a  $d\theta_1$  y derivando respecto a  $L$  tenemos que

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_\pm}{d\omega dL} = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 k^4}{2 \cdot 4^4 \pi v \epsilon q^3} \Theta[\pm 2\beta_z - \varpi] \int_{-1}^1 \frac{(A + Bx - Cx^2)(1 + x^2)}{(D + Ex)^2 \sqrt{F + Gx}} dx \quad (279)$$

o bien, recordando que  $k = \varpi q$  y  $\beta = \frac{v\sqrt{\epsilon}}{c}$

$$\frac{d^2\mathbf{E}_{\pm}}{d\omega dL} = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 q}{2 \cdot 4^4 \pi \sqrt{\epsilon} c} \Theta[\pm 2\beta_z - \varpi] \frac{\varpi^4}{\beta} \int_{-1}^1 \frac{(A + Bx - Cx^2)(1 + x^2)}{(D + Ex)^2 \sqrt{F + Gx}} dx \quad (280)$$

Podemos hacer una adimensionalización completa tomando en cuenta la variable energía  $\mathcal{E}_0 = \frac{(Ze\epsilon_a)^2 q}{4^4 \cdot 2\pi\epsilon}$  en la ecuación (279) y definiendo la distancia adimensional  $\mathcal{L} = Lq$  y la frecuencia adimensional  $\sigma = \frac{\omega}{vq}$  obtenemos que

$$\frac{d^2\mathcal{E}_{\pm}}{d\sigma d\mathcal{L}} = \Theta[\pm 2\beta_z - \varpi] \varpi^4 \int_{-1}^1 \frac{(A + Bx - Cx^2)(1 + x^2)}{(D + Ex)^2 \sqrt{F + Gx}} dx$$

donde  $\mathcal{E}_{\pm} = \frac{\mathbf{E}_{\pm}}{\epsilon_0}$  es la energía adimensional.



## Bibliografía

- [1] Tamm IE, Frank IM. *Когерентное излучение быстрого электрона в среде (Radiación coherente de electrones rápidos dentro de un medio)*. Dokl Akad Nauk 1937;17;107-112.
- [2] Mirzoyan, R. *Brief history of ground-based very high energy gamma-ray astrophysics with air cherenkov detectors*. Astroparticle Physics 2014;53;91-99.
- [3] Hillas AM. *Evolution of ground-based gamma-ray astronomy from the early days*. Astroparticle Physics, 2013;43;19-43.
- [4] Vivargent M, Von Darel G, Mermoud R, Weber G, Winter K. *A Threshold Gas Cherenkov Counter*. Nucl Instrum Meth 1963;22;165-168.
- [5] Allard D, Allekotte I, Alvarez C, Asorey H, Barros H, Bertou X, Burgoa O, Gomez Berisso M, Martínez O, Miranda Loza P, Murrieta T, Perez G, Rivera H, Rovero A, Saavedra O, Salazar H, Tello JC, Ticona Peralda R, Velarde A, Villaseñor L, *Use of water-Cherenkov detectors to detect Gamma Ray Bursts at the Large Aperture GRB Observatory (LAGO)*. Nucl Instrum Meth A 2008;595;70-72.
- [6] Chamberlain O, Segrè E, Clyde W. *Observation of antiprotons*. Phys. Rev. 1955;100;947.
- [7] Grichine VM. *On Cherenkov radiation from a shower*. Nucl Instrum Meth A 2012;664;75-77.
- [8] Nemethy P, Willis SE, Duclos J, Kaspar H. *A water Cherenkov neutrino detector*. 1980;173;251-257.
- [9] Hill GC. *Neutrino astronomy with IceCube and AMANDA*. Nuclear Physics B 2011;221;103-109.
- [10] D’Olivo JC, Nieves JF, Pal PB. *Cherenkov radiation by massless neutrinos*. Phys Lett. B. 1996;365(1):178-184.
- [11] Di Lodovico F. *Neutrino physics perspectives with Hyper-Kamiokande*. Nuclear and Particle Physics Proceedings 2015;265-266;275-280.
- [12] Hofestädt J. *ORCA: measuring the neutrino mass hierarchy with an underwater Cherenkov detector*. Nuclear and Particle Physics Proceedings 2016;273-275;2669-2671.
- [13] Ruggiero A, Holland JP, Lewis JS, Grimm J. *Cerenkov Luminescence Imaging of Medical Isotopes*. J Nucl Med. 2010;51(7);1123-1130.



- [14] Spinelli AE, Ferdeghini M, Cavedon C, Zivelonghi E, Calandrino R, Fenzi A, Sbarbati A, Boschid F. *First human Cherenkovography*. *Journals of Biomedical Optics* 2013;18(2).
- [15] Jarvis LA, Zhang R, Gladstone DJ, Jiang S, Hitchcock W, Friedman OD, Glaser AK, Jermyn M, Pogue BW. *Cherenkov Video Imaging Allows for the First Visualization of Radiation Therapy in Real Time*. *International Journal of Radiation Oncology* 2014;89(3);615-622. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijrobp.2014.01.046>
- [16] Lord Kelvin. (1901) *Nineteenth Century Clouds over the Dynamical Theory of Heat and Light*, *Phil.Mag.* 1901;6(2);1-40.
- [17] Sommerfeld A. *Zur Elektronentheorie*. *Getting, Nachricht*, 1904;2;99-130, 1904;5;363-439, 1905;3;203-235.
- [18] Heaviside O. *Electromagnetic waves, the propagation of potential, and the electromagnetic effects of a moving charge*. *The Electrician*, Parte I 1888;23, Parte II 1888;83, Parte III 1888;147, Parte IV 1889;458.
- [19] Heaviside O. *On the Electromagnetic Effects due to the Motion of Electrification through a Dielectric*. *Philos. Mag.* 1889;27;324.
- [20] Afanasiev GN. *Vavilov-Cherenkov and synchrotron radiation: foundations and applications*. New York (NY). Springer Science & Business Media; 2006.
- [21] Curie E. *La vida heroica de Marie Curie*. S. L. U. Espasa Libros; 1986.
- [22] Mallet ML. *Luminescence de l'eau et des substances organiques soumises au rayonnement gama*. *Comptes Rendus de L'Academie des Sciences*. 1926;183;274.
- [23] Mallet ML. *Étude spectrale de la luminescence de l'eau et du sulfure de carbone soumis au rayonnement gamma*. *Comptes Rendus de L'Academie des Sciences*. 1928;187;222.
- [24] Mallet ML. *Sur le rayonnement ultraviolet des corps soumis aux rayons gamma*. *Comptes Rendus de L'Academie des Sciences*. 1929;188;445.
- [25] Frank IM. *A conceptual history of the Vavilov-Cherenkov radiation*. *Sov. Phys. Usp.* 1984;27(5);385-395.
- [26] Jelley JV. *Heaviside-Mallet Radiation?* *Nature* 1974;247;401.
- [27] Jelley JV. *Cherenkov Radiation and its Applications*. Pergamon press; 1958.
- [28] L'Annunziata MF. *Radioactivity. Introduction and History*. Elsevier B. V.; 2007.
- [29] Brumberg EM, Vavilov SI. *The accuracy in the photometric method of quenching*. *Doklady Akad. Nauk* 1934;3(6);405.

- [30] Bolotovskij VM. *Излучение Вавилова-Черенкова: открытие и применение (Radiación de Vavilov-Cherenkov: historia y aplicaciones)*. Успехи Физических Наук 2009;179(11);1161-1173.
- [31] Cherenkov PA. *At the threshold of discovery*. Nucl Instrum Meth A 1986;248;1-4.
- [32] Govorkov BB. *Cherenkov detectors in Cherenkov's laboratory*. Nucl Instrum Meth A 2005;553;9-17.
- [33] Cherenkov P A. *Visible emission of clean liquids by action of  $\gamma$  radiation*. Dokl Akad Nauk. 1934;2:451-454.
- [34] Vavilov SI. *О возможных причинах синего  $\gamma$ -свечения жидкостей (Sobre las posibles causas de la luminosidad azul de los líquidos bajo radiación  $\gamma$ )*. Dokl Akad Nauk. 1934;2:457-459.
- [35] Cherenkov PA. *Visible Radiation Produced by Electrons Moving in a Medium with Velocities Exceeding that of Light*. Phys Rev 1937;52;378-379.
- [36] Collins GB, Reiling VG. *Cerenkov Radiation*. Phys Rev 1938;54; 499-503.
- [37] DeYoung T. *The HAWC observatory*. Nucl Instrum Meth A 2012;692;72-76.
- [38] Sommerfeld A. *Optics. Lectures on Theoretical Physics Vol. IV*. Academic Press Inc.; 1954.
- [39] Tamm IE. *Radiation emitted by uniformly moving electrons*. Journal of Physics USSR, 1939;1;439-454.
- [40] Nag BD, Sayied AM. *Electrodynamics of Moving Media and the Theory of the Cerenkov Effect*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, 1956;235(1203);544-551.
- [41] Ginzburg VL. *Radiation of an Electron Moving with Constant Velocity in a Crystal*. Zh Eksp Teor Fiz 1940;10;608-613.
- [42] Cox RT. *Momentum and Energy of Photon and Electron in the Cerenkov Radiation*. Phys Rev, 1944;66(5);106-107.
- [43] Ginzburg VL. *Radiation by uniformly moving sources*. Elsevier Science Publishers, 1993.
- [44] Ginzburg VL, Frank IM. *Radiation of a uniformly moving electron on its transition from one medium to another*. Zh Eksp Teor Fiz 1946;16(1);15-28.
- [45] Ginzburg VL. *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics*. Gordon and Breach Science Publishers, 1989.

- [46] Frank IM. *Переходное излучение и оптические свойства вещества (Radiación de transición y propiedades ópticas de la materia)*. Успехи Физических Наук, 1965;87(2);189-210.
- [47] Frank IM. *Переходное излучение и эффект Вавилова-Черенкова (Radiación de Transición y Radiación de Vavilov-Cherenkov)*. Успехи Физических Наук, 1961;75(2);231-240
- [48] Goldsmith P, Jelley JV. *Optical transition radiation from protons entering metal surfaces*. Philosophical Magazine, 1959;43(4);836-844.
- [49] Andronic A, et. al. *Transition radiation spectra of electrons from 1 to 10 GeV/c in regular and irregular radiators*. Nucl Instrum Meth A, 2006;558;516-525.
- [50] Bassompierre G, Bunyatov S, Fazio T, Gaillard J-M, Gouanere M, Manola-Poggioli E, Mossuz L, Mendiburu J-P, Nedelec P, Nefedov Y, Pessard H, Sillou D, Valuev V, Verfindt D. *Performance of the NOMAD transition radiation detector*. Nucl Instrum Meth A, 1998;411;62-74.
- [51] Mahmoud T. *The ALICE transition radiation detector*. Nucl Instrum Meth A, 2003;502;127-132.
- [52] Andronic A, Wessels JP. *Transition radiation detectors*. Nucl Instrum Meth A. 2012;666:130-147.
- [53] Denisov CP. *Переходное излучение: научное значение и практическое применение в физике высоких энергий (Radiación de Transición: implicaciones científicas y aplicaciones en física de altas energías)*. Успехи Физических Наук, 2007;177(4);394-396.
- [54] Durand L. *Transition Radiation from Interstellar dust grains*. The Astrophysical Journal, 1973;182;417-432.
- [55] Ionnisian AN, Ioannisian DA, Kazarian NA. *Transition radiation by neutrinos*. Physics Letters B, 2011;702;272-275.
- [56] Ter-Mikhaelyan ML. *Electromagnetic radiative processes in periodic media at high energies*. Physics Uspekhi 2001;44(6);571-596.
- [57] Ginzburg VL, Tsytovich VN. *Некоторые Вопросы Теории Переходного излучения и Переходного Рассеяния. (Algunas cuestiones acerca de la radiación de transición y de la dispersión de transición)*. Успехи Физических Наук, 1978;126(4);553-608.
- [58] Ginzburg VL, Tsytovich VN. *Several problems of the theory of transition radiation and transition scattering*. Physics Reports, 1979;49(1);1-89.

- [59] Ginzburg VL, Tsytovich VN. *Transition Radiation and Transition Scattering*. Nauka, Moscú, 1984.
- [60] Bolotovskii BM, Serov AV. *Особенности поля переходного излучения (Características del campo de radiación de transición)*. Успехи Физических Наук, 2009;179(5);517-524.
- [61] Hirose A, Wishart J. *On transition radiation*. Can J Phys 2000;78;997-1003.
- [62] Hirose A. *On transition radiation II*. Radiation Physics and Chemistry, 2002;64;261-266.
- [63] Karafotias A, Uzunoglu NK, Stamatakos GS. *On the Limits of Applicability of the Method of Auxiliary Sources: The Transition Radiation Electromagnetic Problem*. Electromagnetics, 2003;23;563-577.
- [64] Jackson JD. *Classical Electrodynamics*, 2nd Ed. Jhon Wiley and Sons, New York, 1975.
- [65] Roa-Neri JAE, Jiménez JL, Villavicencio M. Induced time-dependent polarization and the Cherenkov effect. European Journal of Physics, 1995;16;191-194.
- [66] Kobzev AP. The mechanism of Vavilov-Cherenkov radiation. Phys Part Nuclei. 2010;41(3):452-470.
- [67] Villavicencio M, Jiménez JL, Roa-Neri JAE. On the Cherenkov radiation from extended charge distribution. Canadian Journal of Physics 1999;77;775-784.
- [68] Jiménez JL, Villavicencio M, Roa-Neri JAE. The Vavilov-Cherenkov effect produced by an electromagnetic pulse. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2001;3;131-138.
- [69] Villavicencio M, Roa-Neri JAE, Jiménez JL. The role of a specific response of media in the Vavilov-Cherenkov effect. Foundations of Physics Letters, 2006;19(3);249-258.
- [70] Villavicencio M. *Análisis de algunos procesos radiativos en medios materiales en la electrodinámica clásica*. UNAM, México, 2016 (Tesis de doctorado).
- [71] Panofsky WK, Phillips M. *Classical Electricity and Magnetism, 2nd Ed*. Adison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, 1962.
- [72] Reinitzer F. Contributions to the understanding of cholesterol. Monatshefte für Chemie; 1888;9;421-441.
- [73] Reinitzer F. Sobre la historia de los Cristales Líquidos. Annalen der Physik, 1908;332(11);213-224.

- [74] Lehmann O. Sobre los cristales que fluyen. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 1889;4;462-472.
- [75] Lehmann O. Sobre la historia de los Cristales Líquidos. *Annalen der Physik*, 1908;330(5);852-860.
- [76] Dunmur D, Sluckin T. *Soap, Science & Flat-Screen TV. A History of Liquid Crystals*. Oxford University Press; 2011.
- [77] Lehmann O. Flüssige Kristalle sowie Plastizität von Kristallen im Allgemeinen, molekulare Umlagerungen und Aggregatzustandsänderungen (Liquid crystals as well as crystal plasticity in general, structural changes and changes in the state of aggregation). Wilhelm Engelmann; 1904.
- [78] Vorländer D. Einfluß der molekularen Gestalt auf den krystallinisch-flüssigen Zustand. (Influencia de la estructura molecular sobre el estados de cristales líquidos). *Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft*, (1907)1970–1972;40.
- [79] Mauguin C. Sobre los cristales líquidos de Lehmann. *Bulletin de la Societé française de Minéralogie*, 1911;34;71-117.
- [80] Mauguin C. Orientación de cristales líquidos mediante un campo magnético. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1911;152;1680-1683.
- [81] Friedel G. Los estados mesomórficos de la materia. *Annales de Physique* 1922;18;273-474.
- [82] *Crystals that Flows: Classic Papers from the History of Liquid Crystals*. Taylor & Francis Routledge; 2004.
- [83] Freedericksz V, Zolina V. Uso de un campo magnético en la medición de la fuerzas que tienden a reorientar a un líquido anisotrópico dentro de una delgada capa homogénea. *Transactions of the American Electrochemical Society*, 1929;55;85-96.
- [84] Yang DK, Wu ST. *Fundamentals of Liquid Crystal Devices*. John Wiley & Sons; 2006.
- [85] de Vries HL. Rotatory Power and Other Optical Properties of Certain Liquid Crystals. *Acta Crystallographica*, 1951;4;219-226.
- [86] Williams R. Domains in Liquid Crystals. *Journal of Chemical Physics*, 1963;39;348-388
- [87] Heilmeyer GH, Zanoni LA, Barton LA. Dynamic scattering: a new electrooptic effect in certain classes of nematic liquid crystals. *Proceedings of the I. E. E. E.*, 1968;56;1162-1171.

- [88] Kawamoto H. The History of Liquid Crystal Displays. Proceedings of the I. E. E. E. 2002;90(4);460-500.
- [89] Schadt M, Helfrich W. Voltage-dependent optical activity of a twisted nematic liquid crystal. Applied Physics Letters, 1971;18;127-128.
- [90] Woltman SJ, Jay GD, Crawford GP. Liquid Crystals. Frontiers in Biomedical Applications. World Scientific Publishing Co.; 2007.
- [91] Khoo IC. Liquid Crystals. Hoboken (NJ). John Wiley & Sons; 2007.
- [92] Chen RH. Liquid Crystal Displays. Fundamental Physics and Technology. John Wiley & Sons; 2011.
- [93] De Gennes PG, Proust J. The Physics of Liquid Crystals. Oxford (UK). Oxford University Press; 1993.
- [94] Chandrasekhar S. Liquid Crystals, 2nd Ed. Cambridge University Press; 1992.
- [95] Demus D, Goodby J, Gray GW, Spiess HW, Vill V. Handbook of Liquid Crystals. Vol I. Wiley -VHC; 1998.
- [96] Kitzerow HS, Bahr C. Chirality in Liquid Crystals. Springer-Verlag New York; 2001.
- [97] Oswald P, Pieranski P, Nematic and Cholesteric Liquid Crystals. Taylor and Francis Group; 2005.
- [98] Collet E. Field Guide to Polarization. SPIE Press; 2005.
- [99] Landau LD, Lifshitz EM. Electrodynamics of continuous media. Oxford (UK). Oxford: Pergamon Press; 1984.
- [100] Kats EI. Cherenkov radiation in cholesteric liquid crystals. Sov Phys JETP. 1972;34(4):899.
- [101] Belyakov VA, Orlov VP. Čerenkov structure radiation in cholesteric liquid-crystals. Phys Lett A. 1972;42(1):3-4.
- [102] Belyakov VA, Dmitrienko VE, Orlov VP. On the Vavilov-Cherenkov radiation in cholesteric liquid crystals. Sov Tech Phys Lett. 1975;1:978.
- [103] Belyakov VA. Diffraction Optics of Complex-Structured Periodic Media. Springer-Verlag; 1992.
- [104] Shipov NV, Belyakov VA. Theory of Vavilov-Cerenkov emission in cholesteric liquid crystals. Zh Eksp Teor Fiz. 1978;75:1589-1601.

- [105] Shipov NV. On the diffraction and threshold of Cherenkov radiation in cholesteric and chiral smectic with large lead of a helix. *Opt Spektrosk.* 1991;70(3):588-592.
- [106] Jakson DJ. *Classical Electrodynamics*. 3rd Ed. John Wiley & Sons; 1999.
- [107] Velazquez CA, Reyes JA, Vazquez GJ. Transition Radiation in Cholesteric Liquid Crystal. *Liquid Crystals*, DOI: 10.1080/02678292.2016.1263883.

## Créditos por imágenes

Las siguientes imágenes fueron obtenidas de las siguientes fuentes:

- Figura 1: <http://www.mlz-garching.de/englisch/neutron-research/neutron-source.html>
- Figura 2: [<http://www.nanonewsnet.ru/news/2011/120-let-so-dnya-rozhdeniya-akademika-si-vavilova>], [[http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1958/cherenkov-bio.html](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1958/cherenkov-bio.html)]
- Figura 4: [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1958](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1958)
- Figura 9: [<http://www.mlz-garching.de/englisch/neutron-research/neutron-source.html>], [<http://schoolbag.info/chemistry/central/105.html>]
- Figura 10: <http://www.mlz-garching.de/englisch/neutron-research/neutron-source.html>
- Figura 11: [http://www.vintagecalculators.com/html/facit\\_1106\\_sharp\\_el-805s.html](http://www.vintagecalculators.com/html/facit_1106_sharp_el-805s.html)
- Figura 12: <https://cnx.org/contents/wmOebPnI@2/The-Analysis-of-Liquid-Crystal>