Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ENCADENAMIENTO GENÉRICO: LA CONJETURA DE BERNOULLI

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

PRESENTA:

RODRIGO QUIJÓN HIPÓLITO

DIRECTOR DEL TRABAJO:

DRA. ANA MEDA GUARDIOLA

2016

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX

1. Datos del Alumno.
   Rodrigo Quijón Hipólito
   quihirodrigo@gmail.com
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   411074829

2. Datos del Tutor.
   Dra. Ana Meda Guardiola
   ana.meda@ciencias.unam.mx
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias

3. Datos del sinodal 1.
   Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet
   folchgab@matem.unam.mx
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Instituto de Matemáticas

4. Datos del sinodal 2.
   Dr. José María González Barrios Murguía
   gonzaba@sigma.iimas.unam.mx
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

5. Datos del sinodal 3.
   Dr. Fernando Baltazar Larios
   fernandobaltazar@ciencias.unam.mx
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias

6. Datos del sinodal 4.
   Dr. Sergio Iván López Ortega
   silo@ciencias.unam.mx Universidad Nacional Autónoma de México
   Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer sinceramente:

A mis padres por todo su apoyo incondicional y por siempre impulsarme a ser una mejor persona.

A mi hermanos, por los momentos que hemos vivido. En particular, a Mónica por su infinito apoyo desde que llegué a la Ciudad de México y a Ana María por cuidarme en la infancia.

A Cristina por acompañarme en este proceso.

A mi tutora la Dra. Ana Meda Guardiola por sus consejos matemáticos y personales que fueron fundamentales para este trabajo.

A mis sinodales: Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet, Dr. José María González-Barrios, Dr. Sergio Iván López Ortega y Dr. Fernando Baltazar Larios por sus correcciones.

Al Sistema de Becas para Estudiantes Indígenas (SBEI) del Programa Universitario de Estudios de la Diversidad Cultural y la Interculturalidad de la UNAM (PUIC) por su gran ayuda durante los dos últimos años de la carrera.

Glosario de símbolos

Antes de empezar demos las notaciones que aparecen por primera vez en cada capítulo.
Cabe mencionar que en este trabajo todas las variables aleatorias gaussianas tienen media cero, a menos que se especifique lo contrario.
En todos los capítulos utilizamos las letras $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... para las particiones de T y $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denotará una sucesión de particiones de T.

Capítulo 1:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Espacio de probabilidad.
$L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$	El conjunto de todas las variables aleatorias X con segundo momento finito ($\mathbb{E}[X^2] < \infty$).
N_n	Para $n = 0$, $N_0 = 1$ y para toda $n \in \mathbb{N}$; $N_n = 2^{2^n}$.
$\lvert A\rvert$	Cardinalidad de un conjunto A.
$\Delta(A)$	El diámetro de A: para $A \subset \mathcal{X}$ con $(\mathcal{X}, d)$ un espacio métrico se define $\Delta(A) = \sup\limits_{x,y\in A}\{d(x, y)\}$. En caso de ser necesario se especificará la distancia utilizada.
$d(y, U)$	La distancia de un punto y a un conjunto U: $d(y, U) = \inf\limits_{u\in U}\{d(y, u)\}$, con $U \subset \mathcal{X}$ y $(\mathcal{X}, d)$ espacio métrico.

Capítulo 2:

$\wp(A)$	La potencia de A; todos los subconjuntos de un conjunto A.
$\mathbb{R}^+$	Los reales positivos.
$\mathbb{Z}^+$	Los enteros no negativos.
$\mathbb{Z}^-$	Los enteros negativos.
$B(t, r)$	La bola con centro en $t \in X$ y radio $r > 0$, con $(\mathcal{X}, d)$ espacio métrico.

Capítulo 3:

$T_1 + T_2$	Suma de conjuntos T_1 y T_2: $T_1 + T_2 = \{t_1 + t_2; t_1 \in T_1 \ y \ t_2 \in T_2\}$, donde $T_1, T_2 \subset T$ y T es un espacio vectorial.

ℓ^p	La colección de todas las sucesiones reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert x_n\rvert^p < \infty$ $(1 \leq p < \infty)$. En particular nos concentraremos en ℓ^1 y ℓ^2. En ℓ^p usamos la distancia inducida por la norma usual.
$\lVert t\rVert_1$	La norma en ℓ^1 de un elemento $t \in \ell^1$, $\lVert t\rVert_1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert t_n\rvert < \infty$.
$\lVert t\rVert_2$	La norma en ℓ^2 de un elemento $t \in \ell^2$, $\lVert t\rVert_2 = \Big(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lvert t_n\rvert^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Capítulo 4:

l^∞	La colección de todas las sucesiones reales acotadas (recordemos que $l^1, l^2 \subset l^\infty$).
$\lVert t\rVert_\infty$	La norma en l^∞ de un elemento $t \in \ell^\infty$, $\lVert t\rVert_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\lvert t_n\rvert\}$.
$\lceil x\rceil$	El techo de x, con $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x\rceil = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z}; x \leq k\}$.

Introducción

En su libro *The Generic Chaining* publicado en el año 2005, Michel Pierre Talagrand intentaba resolver un problema que denominó *la Conjetura de Bernoulli*. Talagrand ofrecía 5,000 dólares como premio para la persona que lo resolviera. En el año 2013 Rafał Latała, basándose en un trabajo de Witold Bednorz, dio solución a este problema. Ésta fue publicada a mediados del año 2014.

Empezamos esta tesis estudiando cómo acotar un proceso gaussiano. Para poderlo acotar es necesario usar la condición de Dudley [3], el cual estudiamos en el capítulo 1.
La condición de Dudley fue presentada por Richard M. Dudley en 1967. El objetivo entonces del primer capítulo es encontrar una cota superior de un proceso gaussiano. Todo esto se reduce a un teorema denominado el *Teorema de medidas mayorizantes*.

El Teorema de medidas mayorizantes nos llevó a estudiar un nuevo objeto matemático, a saber, las sucesiones admisibles, el cual a su vez nos permitió estudiar unas funcionales especiales. Así, en el capítulo 2 nos dedicamos a estudiar dichas funcionales y encontrar una manera más efectiva de acotar los procesos gaussianos. Demostramos en este capítulo (capítulo 2) un teorema que denominamos el *Teorema de Talagrand*. Este teorema nos da otra cota superior para los procesos gaussianos.
El Teorema de Talagrand tiene como consecuencias resultados que se aplican a los espacios de Banach y a la solución débil de un problema abierto que Michel Talagrand bautizó como la *Conjetura de Bernoulli*. Éste era precisamente el objetivo de este trabajo cuando iniciamos, probar la conjetura débil de Bernoulli. Sin embargo, después nos percatamos de que Talagrand había publicado un libro a finales del año 2014 [10] en donde mencionaba que la Conjetura de Bernoulli había sido resuelta. Entonces decidimos analizar la demostración de dicha conjetura.

Expliquemos *grosso modo* qué haremos en cada capítulo.

Capítulo 1:

Nuestro objetivo en el capítulo 1 es encontrar una cota superior para los procesos estocásticos gaussianos, bajo la hipótesis de que $\mathbb{E}(X_t) = 0$ para toda $t \in T$, donde $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso estocástico gaussiano y (T, d) es un espacio métrico con la distancia d dada por:

$$para\ s, t \in T,\ d(s,t) = [\mathbb{E}(X_s - X_t)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

La cota encontrada es el Teorema de medidas mayorizantes.
Capítulo 2:
En este capítulo introduciremos el concepto de funcional y demostraremos el Teorema de Talagrand (Teorema 6). Este teorema encuentra una cota para la cantidad $\mathbb{E}[\sup\limits_{t \in T} X_t]$ que solo depende de una funcional, es decir, no necesitamos sucesiones admisibles.
Para este capítulo supondremos que T es totalmente acotado, esto es:
En el espacio métrico (T, d), para toda $\epsilon > 0$ existen $k \in \mathbb{N}$ y *$t_1, ..., t_k \in T$ tales que*

$$T \subset \bigcup_{1 \leq l \leq k} B(t_l, \epsilon). \tag{2}$$

¿Qué dice la Conjetura de Bernoulli? y ¿qué tiene que ver con el Teorema de medidas mayorizantes y el Teorema de Talagrand?.
Respondamos la primera pregunta.

Definición 1. *Decimos que ϵ es una variable aleatoria* **Rademacher** *si*

$$P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = -1) = \tfrac{1}{2}.$$

Definición 2. *Sean $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ y $\{\epsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias Rademacher independientes. $\{X_t\}_{t \in T}$ es un* **proceso estocástico Rademacher** *si para cada $t \in T$, $X_t = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} t_i \epsilon_i$.*

Para $T \subset \ell^2$ definimos el proceso estocástico Rademacher como $\{X_t\}_{t \in T}$. Luego definimos

$$b(T) = \mathbb{E}[\sup_{t \in T} \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i \epsilon_i]. \tag{3}$$

Notemos que si en la cantidad anterior consideramos sumas finitas obtenemos que $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^n t_i \epsilon_i] = \sum_{i=1}^n t_i \mathbb{E}[\epsilon_i] = 0$ pues la esperanza es lineal y $\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Podemos observar también de la definición de $b(T)$ en (3) que

$$Var\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i\epsilon_1\Big) = \sum_{i=1}^{n} t_i^2,$$

así que, si $t \in T \subset \ell^2$ entonces $\sum_{i\in\mathbb{N}} t_1^2 < \infty$, por lo que nuestro proceso es cuadrado integrable.
Por el Teorema de medidas mayorizantes 2 (de la sección $A.1$ del apéndice) la esperanza de los procesos gaussianos es acotada (por arriba y por abajo). El resultado que se prueba en este trabajo es análogo para procesos Rademacher ponderados por variables gaussianas. Para formalizar esta idea damos la siguiente definición e inmediatamente después escribiremos el Teorema principal que queremos demostrar.
Sea $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias normales estándar independientes. Definimos

$$g(T) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i g_i].$$

La Conjetura decía.

Teorema 1. Bednorz - Latała (BL). *Sea $\emptyset \neq T \subset \ell^2$. Supongamos que $b(T) < \infty$. Entonces existen conjuntos $\emptyset \neq T_1, T_2 \subset \ell^2$ y una constante $\mathbf{L} > 0$ tales que:*

1. $T \subset T_1 + T_2$ *y*
2. $\sup_{t\in T_1}\sum_{i\in\mathbb{N}} |t_i| \leq \mathbf{L}b(T)$ *y* $g(T_2) \leq \mathbf{L}b(T)$

Capítulo 3:
Respondamos la segunda pregunta.
Un resultado que se deriva del Teorema de Talagrand y del Teorema de las medidas mayorizantes es el Corolario 8, este resultado es usado en la demostración del *Lema de particiones* ([2], teorema 3.1), lema que cobrará gran importancia en esta teoría y es esencial para la Conjetura.
El Teorema de las medidas mayorizantes también se usa en la demostración de la Conjetura de Bernoulli.

Capítulo 4:
El Objetivo en los capítulos 4 y 5 es construir las hipótesis del Lema de particiones. Introduciremos unas funciones llamadas funciones por pedazos (chopping maps), que nos ayudarán a construir a las funcionales $F(J, u, k, j)$. Daremos varias proposiciones que involucran a estas funcionales lo que nos ayudará a demostrar un lema muy importante en el capítulo 5.

Capítulo 5:
En este capítulo demostramos el *Lema 2 de descomposición* que consiste en encontrar una sucesión admisible de particiones que cumple las hipótesis del *Lema* 5. En la demostración del lema usamos todas las herramientas que demostramos en el capítulo 4. En la segunda parte del capítulo escribimos la demostración del $Teorema\ BL$.
Finalmente hablamos de la Conjetura de Bernoulli para un espacio normado en general y damos algunos resultados del $Teorema\ BL$.
El material discutido en este trabajo aparece principalmente en los libros [9] y [7] y artículos [2], [1] y [6].

Capítulo 1

Encadenamiento Genérico

El objetivo en este capítulo es demostrar el Teorema de medidas mayorizantes. Definiremos un proceso gaussiano y veremos que estos procesos satisfacen la condición de Dudley (Teorema 2). Buscamos encontrar una cota superior para la siguiente cantidad,

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t], \tag{1.1}$$

donde $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso gaussiano.
T no necesariamente es finito, de hecho, T puede ser no numerable. Para esto definiremos $\mathbb{E}[\sup\limits_{t\in T} X_t]$ como

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] = \sup\{\mathbb{E}\sup_{t\in F}\{X_t\}; F\subset T,\ \ F\ finito\}. \tag{1.2}$$

Definición 3. *Una variable aleatoria real X en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con media igual a 0 tiene distribución gaussiana o normal en $\mathbb{R}$, si para toda $x \in \mathbb{R}$ su función de densidad f está dada por*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.3}$$

donde $0 < \sigma < \infty$.

Definición 4. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ es un* **proceso estocástico gaussiano** *(con T un espacio métrico) si para cualquier colección finita $t_1, ...t_n \in T$ y para cualesquiera números reales $a_1, ..., a_n$, la variable $\sum_{j=1}^n a_j X_{t_j}$ tiene distribución gaussiana.*

Definición 5. *Decimos que un proceso estocástico $\{X_t\}_{t\in T}$ es simétrico si $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{-X_t\}_{t\in T}$ tienen la misma distribución.*

En esta sección trabajamos con procesos estocásticos gaussianos simétricos. En general, para un proceso estócastico simétrico se tiene la siguiente propiedad:

Observación 1. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico simétrico. Entonces para cada $s \in T$ se tiene que $\mathbb{E}\{X_s\} = 0$.*

Demostración. Como $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico simétrico, entonces

$$\mathbb{E}\{X_s\} = -\mathbb{E}\{X_s\},$$

y esto pasa si y solo si $\mathbb{E}\{X_s\} = 0$, pues ya sabemos que la esperanza de X_s existe y es finita. □

1.1. Condición de Dudley

En esta sección demostraremos la Condición de entropía de Dudley (que llamamos Condición de Dudley). La idea de la demostración se basa en la función generadora de momentos de una variable aleatoria gaussiana.

Proposición 1.1. Desigualdades de Chernoff. *Sean X una variable aleatoria y $a > 0$, entonces*

$$P(X \geq a) \leq e^{-ta}M(t), \text{ para toda } t > 0 \text{ y}$$
$$P(X \leq a) \leq e^{-ta}M(t), \text{ para toda } 0 < t,$$

donde M es la función generadora de momentos de la variable aleatoria.

La prueba de la proposición anterior se encuentra en la página 416 de [8].

Teorema 2. Condición de Dudley. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano y (T, d) un espacio métrico con la distancia dada en (1). Entonces para toda $u > 0$ se cumple que*

$$P(|X_s - X_t| \geq u) \leq 2e^{-\frac{u^2}{2d(s,t)^2}}. \tag{1.4}$$

Demostración. Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano. Como $X_s - X_t$ tiene distribución gaussiana, entonces para $\lambda > 0$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ la función generadora de momentos de $X_s - X_t$ es

$$M_{X_s-X_t}(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[(X_s-X_t)^2]}. \tag{1.5}$$

Por la desigualdad de Chernoff, para $u > 0$ se tiene que para cada $\lambda > 0$,

$$P[(X_s - X_t) \geq u] \leq e^{\lambda u} M_{X_s - X_t}(\lambda) = e^{\lambda u + \frac{\lambda^2}{2} d(s,t)^2}. \tag{1.6}$$

Si definimos $h(\lambda) = e^{\lambda u + \frac{\lambda^2}{2} d(s,t)^2}$, entonces h tiene un mínimo en $\lambda_0 = -\frac{u}{d(s,t)^2}$ y se sigue que

$$P[(X_s - X_t) \geq u] \leq h(\lambda_0) = e^{-\frac{u^2}{2d(s,t)^2}}. \tag{1.7}$$

Como $\{X_t\}_{t\in T}$ es simétrico entonces también se cumple que

$$P[-(X_s - X_t) \geq u] \leq h(\lambda_0) = e^{-\frac{u^2}{2d(s,t)^2}}, \tag{1.8}$$

y por lo tanto $P(|X_s - X_t| \geq u) \leq 2e^{-\frac{u^2}{2d(s,t)^2}}$. □

La siguiente proposición relaciona $\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t]$ con una cantidad que será más fácil de acotar.

Proposición 1.2. *Sean $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico y t_0 en T, entonces*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t - X_{t_0}\}]. \tag{1.9}$$

Demostración. Como $\sup_{t\in T}\{X_t - X_{t_0}\} = \sup_{t\in T}\{X_t\} - X_{t_0}$ entonces

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t - X_{t_0}\}] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t\} - X_{t_0}] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] - \mathbb{E}[X_{t_0}],$$

pero en particular para $t_0 \in T$, $\mathbb{E}[X_{t_0}] = 0$ (por la Observación 1), por lo tanto $\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t - X_{t_0}\}]$. □

Si definimos $Y = \sup_{t\in T}\{X_t - X_{t_0}\}$, entonces $Y \geq 0$, y por lo tanto

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty P(Y > x)dx. \tag{1.10}$$

Luego, como queremos acotar (1.1), por (1.9) y (1.10) todo se reduce a acotar la siguiente cantidad,
para $u > 0$, con $u \in \mathbb{R}$,

$$P(\sup_{t\in T}\{X_t - X_{t_0}\} > u). \tag{1.11}$$

Ahora nuestro objetivo es acotar la cantidad dada en (1.11), lo que nos motiva a hacer la siguiente observación.

Observación 2. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico. $X_t - X_{t_0}, t \in T$ se puede escribir de manera telescópica como*

$$X_t - X_{t_0} = \sum_{n=1}^{k} (X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}), \tag{1.12}$$

donde $\pi_0(t) = t_0$ y $\pi_k(t) = t$.

Sea $T_0 = \{t_0\}$, así $T_0 \subset T$. Consideremos ahora $T_1 \subset T$, con $T_1 \neq \emptyset$ y con al menos k elementos. Sea $k \in \mathbb{N}$ cualquiera y tomemos $\{\pi_1(t), \ldots, \pi_k(t)\} \subset T_1$, así tenemos la suma telescópica $X_t - X_{t_0} = X_{\pi_1(t)} - X_{\pi_0(t)} + X_{\pi_2(t)} - X_{\pi_1(t)} + \ldots + X_{\pi_k(t)} - X_{\pi_{k-1}(t)}$ y separamos los índices en T_0 y T_1.

En la observación 2, si $\pi_n(t)$ es una sucesión que converge a t, por continuidad de los procesos gaussianos $X_{\pi_n(t)}$ converge a X_t, es este caso escribiremos

$$X_t - X_{t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}) \tag{1.13}$$

Si resulta que $\pi_n(t) = t$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces la suma de la ecuación (1.13) es finita. En ambos casos, decimos que hemos dado una descomposición a $X_t - X_{t_0}$ para cada $t \in T$ a través de la sucesión (o cadena) $\{\pi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$. A este proceso se le llama encadenamiento genérico.
Observemos que la suma telescópica tanto de la ecuación (1.12) como la de (1.13) dependen de t y t_0.

Nota 1. *Otra manera de ver la observación 2 es la siguiente. Sea $t \in T$ (fijo). Supongamos que $\pi_m(t) = t$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego, para $0 \leq n \leq m$, consideremos $T_n \subset T$ tal que $\pi_n(t) \in T_n$ y $|T_n| \leq N_n$. Así, escribimos la suma telescópica (definiendo $\pi_0(t) = t_0$)*

$$\begin{aligned} X_t - X_{t_0} &= X_{\pi_1(t)} - X_{\pi_0(t)} + X_{\pi_2(t)} - X_{\pi_1(t)} + \ldots + X_{\pi_k(t)} - X_{\pi_{k-1}(t)} \\ &= \sum_{n=1}^{m} (X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}). \end{aligned}$$

Si suponemos que $\lim_{n\to\infty} \pi_n(t) = t$, el mismo proceso funciona para la suma en (1.13). En este caso $|T_n|$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.
Por otro lado, como $|T_0| = N_0 = 1$, entonces $d(t, T_0) = d(t, t_0)$. Como estamos suponiendo que $\pi_n(t)$ es una aproximación de t podemos suponer que para $n \in \mathbb{N}$, también pasa que

$$d(t, \pi_n(t)) = d(t, T_n) \tag{1.14}$$

La ventaja de las igualdades dadas en (1.12) y (1.13), es que al descomponer a $X_t - X_{t_0}$, el trabajo se reduce a trabajar con $X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}$ que más adelante se irán escogiendo con ciertas propiedades.
Trabajemos entonces con $X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}$ en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano. Supongamos que $\pi_{n-1}(t) \neq \pi_n(t)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Para $u > 0$ se tiene que*

$$P(|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \geq u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))) \leq 2e^{-u^2 2^{n-1}}. \tag{1.15}$$

Demostración. Como $\pi_{n-1}(t) \neq \pi_n(t)$, entonces $d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) > 0$. Luego, del hecho que $u > 0$ se sigue que $u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) > 0$. Como $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso gaussiano, por el Teorema 2 se tiene que para $X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}$ y $u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) > 0$,

$$\begin{aligned} P[|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \geq u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))] &\leq 2e^{-\frac{[u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))]^2}{2d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))^2}} \\ &\leq 2e^{-u^2 2^{n-1}}. \end{aligned}$$

□

En lo que sigue supondremos que $\pi_{n-1}(t) \neq \pi_n(t)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 1. *Sean $\{T_n\}_{n\geq 0}$ una familia de subconjuntos de T tales que $|T_n| \leq N_n$ y $\pi_n(t) \in T_n$ para toda $t \in T$ y Ω el espacio de estados del proceso gaussiano $\{X_t\}_{t\in T}$. Si definimos a Ω_u como el evento*

$$\Omega_u = \Big\{\omega \in \Omega; \forall n \geq 1, \forall t \in T, |X_{\pi_n(t)}(\omega) - X_{\pi_{n-1}(t)}(\omega)| \leq u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))\Big\}$$

entonces $P(\Omega_u^c) \leq \sum_{n\geq 1} 2 \cdot 2^{2^{n+1}} e^{-u^2 2^{n-1}}$.

Si denotamos $\rho(u) = \sum_{n\geq 1} 2 \cdot 2^{2^{n+1}} e^{-u^2 2^{n-1}}$, entonces en la proposición anterior obtenemos que $P(\Omega_u^c) \leq \rho(u)$.

Demostración. Como

$$\Omega_u^c = \bigcup_{n\geq 1} \Big\{|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| > u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))\Big\},$$

entonces

$$P(\Omega_u^c) \leq \sum_{n\geq 1} P\Big(\Big\{|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| > u2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))\Big\}\Big). \tag{1.16}$$

Los sumandos que aparecen en esta última ecuación dependen de $\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)$, $n \in \mathbb{N}$. Como la cardinalidad de cada T_n es menor o igual que N_n, entonces el número de pares posibles está acotado por $N_n N_{n-1}$, pero

$$N_n N_{n-1} \leq 2^{2^{n+1}}, \tag{1.17}$$

(pues $N_n N_{n-1} = 2^{3\cdot 2^{n-1}} \leq 2^{4\cdot 2^{n-1}} = 2^{2^{n+1}}$). Así, aplicando (1.15) en (1.16) y usando (1.17) se sigue que $P(\Omega_u^c) \leq \sum\limits_{n\geq 1} 2 \cdot 2^{2^{n+1}} e^{-u^2 2^{n-1}}$. □

No olvidemos que queremos acotar (1.1). El siguiente corolario nos acerca más al objetivo.

Corolario 2. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico gaussiano. Supongamos que para cada $u > 0, u \in \mathbb{R}$ y para cada $n \geq 0$, $X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)} \in \Omega_u$. Definimos $S = \sup\limits_{t\in T}\{\sum\limits_{n\geq 1} 2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))\}$. Entonces*

$$P(\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| > uS) \leq \rho(u). \tag{1.18}$$

Cabe mencionar que en los dos corolarios anteriores estamos trabajando con un proceso gaussiano. Para los procesos gaussianos se vale la condición de Dudley, misma que usamos en el Corolario 1.

Demostración. Como $X_t - X_{t_0} = \sum_{n\geq 0} (X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)})$ (ver (1.11)) y para cada $n \geq 0$, $X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)} \in \Omega_u$ entonces

$$|X_t - X_{t_0}| \leq \sum_{n\geq 1} |X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \leq \sum_{n\geq 1} u 2^{\frac{n}{2}} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)),$$

por lo tanto para $u > 0$. Luego tomando el supremo sobre T se sigue que

$$\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| \leq uS,$$

donde S es como en el enunciado del corolario. Denotamos como Ψ_u el evento

$$\Psi_u = \{\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| \leq uS\}.$$

Entonces $\Omega_u \subset \Psi_u$, lo que implica que $\Psi_u^c \subset \Omega_u^c$. Como

$$\Psi_u^c = \{\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| > uS\},$$

por el corolario anterior sigue que

$$P(\{\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| > uS\}) = P(\Psi_u^c) \leq P(\Omega_u^c) \leq \rho(u).$$

□

Ya tenemos las herramientas suficientes para acotar superiormente la cantidad dada en (1.1). Esto lo presentamos en la siguiente sección.

1.2. Sucesiones Admisibles

Seguiremos trabajando con $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano, con (T,d) un espacio métrico con la distancia dada en (1) (y por lo tanto se cumple la condición de Dudley).
Para dar una primera cota superior a la cantidad dada en (1.1), demostremos el siguiente lema.

Lema 1. *Sea $\sqrt{2} < u$, $u \in \mathbb{R}$. Para toda $1 \leq n$ se cumple que*

$$\frac{u^2}{2} + 2^{n+1} \leq u^2 2^{n-1} \tag{1.19}$$

Demostración. La ecuación (1.19) se tiene porque $\frac{u^2}{2} + 2^{n+1} \leq u^2 2^{n-1}$ si y solamente si $2^{n+1} \leq u^2(2^{n-1} - \frac{1}{2})$ si y solo si $\frac{2^{n+1}}{2^n - 1} \leq \frac{u^2}{2}$ si y solo si $2 < u^2$ (pues $1 < \frac{2^{n+1}}{2^n-1}$). Notemos que $\frac{2^n}{2^n-1}$ tiene sentido por la hipótesis de que $n \geq 1$. □

Sea $\{T_n\}_{n\geq 0}$ una familia de subconjuntos de T, tales que para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n \neq \emptyset$, $|T_n| \leq N_n$ y elegimos $\pi_n(t) \in T_n$ para cada $t \in T$.

Proposición 1.4. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano con $\mathbb{E}(X_t) = 0$ para toda $t \in T$, entonces existe una constante $L > 0$, tal que*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} d(t, T_n)\}, \tag{1.20}$$

donde L no depende de la familia seleccionada.

Demostración. Por el lema 1, $e^{-u^2 2^{n-1}} \leq e^{\frac{-u^2}{2}} e^{-2^{n+1}}$ para $1 \leq n$ y $\sqrt{2} < u$; así $\rho(u) \leq L e^{\frac{-u^2}{2}}$ donde $L = \sum_{n\geq 1} 22^{n+1} e^{-2^{n+1}}$.

Como $\mathbb{E}(X_t) = 0$ para toda $t \in T$, por la Proposición 1.2 se tiene que $\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})]$.
Como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})] &= \int_0^\infty P(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0}) > x)dx \\ &\leq \int_0^\infty P(\sup_{t\in T}|X_t - X_{t_0}| > x)dx, \end{aligned}$$

Si $x = uS$ con S como en el Corolario 2 , entonces

$$\int_0^\infty P(\sup_{t\in T}|X_t - X_{t_0}| > x)dx = S\int_0^\infty P(\sup_{t\in T}|X_t - X_{t_0}| > uS)du,$$

por el Corolario 2. Del hecho que $\rho(u) \leq Le^{\frac{-u^2}{2}}$ para $\sqrt{2} < u$, obtenemos que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})] \leq SL\int_{\sqrt{2}}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du$$

si $L_1 = L\int_{\sqrt{2}}^{\infty} e^{\frac{-u^2}{2}} du$, entonces

$$E[\sup_{t\in T} X_t] \leq SL_1.$$

Para $0 < u \leq \sqrt{2}$ tenemos

$$S\int_0^{\sqrt{2}} P(\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| > u)du \leq S\int_0^{\sqrt{2}} du = S\sqrt{2},$$

pues $P(\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| > u) \leq 1$. Como consecuencia tenemos que

$$E[\sup_{t\in T} X_t] \leq \int_0^{\infty} P(\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| > x)dx \leq S(L_1 + \sqrt{2}) = SL_2,$$

con $L_2 = L_1 + \sqrt{2}$.
Por otro lado, por la desigualdad del triángulo

$$d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) \leq d(t, \pi_n(t)) + d(t, \pi_{n-1}(t)) = d(t, T_n) + d(t, T_{n-1}).$$

Pero por (1.14), $d(t, \pi_n(t)) = d(t, T_n)$ para toda $n \geq 0$ (como discutimos en la nota 1). Luego así, por la definición de S (del Corolario 2) se sigue que

$$E[\sup_{t\in T} X_t] \leq L_2 \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} d(t, T_n)\}. \tag{1.21}$$

Notemos que las constantes L, L_1 y L_2 son mayores que 0. □

Como dijimos al principio de esta capítulo, el objetivo es demostrar el teorema de medidas mayorizantes. Para la demostración de este teorema uno de los conceptos más importantes es el de sucesiones admisibles de particiones.

Definición 6. *Dado un conjunto $T \neq \emptyset$, una* **sucesión admisible de particiones** $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ *en T es una sucesión creciente de particiones de T tales que $|\mathcal{A}_0| = N_0$ y $|\mathcal{A}_n| \leq N_n$, para $1 \leq n$.*

En la definición anterior consideramos una sucesión creciente de particiones de T entendidas como familias completas de subconjuntos disjuntos entre si. Cuando decimos creciente nos referimos a que $\mathcal{A}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{A}_n$, es decir, si $B \in \mathcal{A}_{n+1}$ entonces B está contenido en algún elemento de $\mathcal{A}_n$.
La condición de que $|\mathcal{A}_n| \leq N_n$, para $1 \leq n$ la pedimos tal que la cantidad de elementos de $\mathcal{A}_n$ sea lo más cercano posible a N_n para que tengamos un buen

refinamiento. Para $t \in T$ fijo, denotaremos como $A_n(t)$ al único elemento de $\mathcal{A}_n$ que contiene a t.

Teorema 3. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso Gaussiano con $\mathbb{E}(X_t) = 0$ para toda $t \in T$. Entonces para cada sucesión admisible de T existe una constante $L > 0$, tal que:*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} \Delta(A_n(t))\}. \tag{1.22}$$

Demostración. La idea de la demostración es aplicar la proposición 1.4. Para esto vamos a construir la familia de subconjuntos $\{T_n\}_{n\geq 0}$ de T de la siguiente manera.
Sean $t \in T$ y $\mathcal{A}_n \in \{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ la n-ésima partición de una sucesión admisible de T. Construyamos T_n para cada $n \geq 0$ tomando un punto en cada elemento de $\mathcal{A}_n$, entonces $|T_n| \leq N_n$ pues $|\mathcal{A}_n| \leq N_n$. Como en particular tomamos un punto en $A_n(t)$, entonces definimos a ese punto como $\{\pi_n(t)\} = T_n \cap A_n(t)$. Luego, por (1.14), se tiene que $d(t, T_n) = d(\pi_n(t), T_n)$. Entonces $d(t, T_n) \leq \Delta(A_n(t))$. Por lo tanto por la Proposición 1.4, existe una constante $L > 0$, tal que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} \Delta(A_n(t))\}.$$

□

Para demostrar el último teorema necesitamos la siguiente definición.

Definición 7. *Sean $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y un espacio métrico (T, d). Definimos*

$$\gamma_\alpha(T, d) = \inf\{\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}} \Delta(A_n(t))\}\}, \tag{1.23}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones admisibles de T.

Ahora ya estamos listos para demostrar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 4. Teorema de las Medidas Mayorizantes. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano y sea $\gamma_\alpha(T, d)$ como en la definición 7. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L\gamma_2(T, d). \tag{1.24}$$

Demostración. Por el Teorema 3, existe $L > 0$ tal que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}} \Delta(A_n(t))\},$$

así, $\mathbb{E}[\sup\limits_{t\in T} X_t]$ es una cota inferior del conjunto $\{\sup\limits_{t\in T}\{\sum\limits_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n(t))\}\}$ para cada sucesión admisible de T. Por lo tanto, de la Definición 7 se sigue (1.24). $\square$

En el siguiente capítulo nos dedicaremos a estudiar a las sucesiones admisibles para poder dar una mejor cota a $\mathbb{E}[\sup\limits_{t\in T} X_t]$.

Comentario 1. *¿Cómo construimos a los conjuntos T_n que se dieron en la nota 1? El método tradicional de encadenamiento consiste en construir T_n tal que la cantidad*

$$\sup_{t\in T} d(t, T_n),$$

sea más pequeña posible para los subconjuntos T_n con $|T_n| \leq N_n$.
Esto define

$$e_n(T) = e_n(T, d) = \text{ínf}\Big\{\sup_{t\in T}\{d(t, T_n)\}; T_n \subset T \ y \ |T_n| \leq N_n\Big\}.$$

A $e_n(T)$ se le llama **número de entropía**.
Si $e_n(T) = \sup\limits_{t\in T}\{d(t, T_n)\}$ o sea cuando el ínfimo es mínimo, entonces obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 5. Condición de entropía de Dudley. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano. Si $\mathbb{E}(X_t) = 0$ para toda $t \in T$, entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L \sum_{n\geq 0} e_n(T).$$

La prueba del Teorema anterior se sigue directamente de la Proposición 1.4 (ver página 12 de [9]). El método de encadenamiento fue inventado por Kolmogorov (también lo menciona Talagrand en [9]).

Capítulo 2

Funcionales y Sucesiones Admisibles

El tema central de este capítulo es el Teorema de Talagrand. En la primera sección básicamente nos dedicaremos a demostrar el teorema y en la segunda sección daremos algunas de sus consecuencias.

2.1. Teorema de Talagrand

En el Teorema 4 usamos sucesiones admisibles. En esta sección nos dedicaremos a construir tales sucesiones con el objetivo de dar una mejor cota a $\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t]$. Veremos que esta cota ya no dependerá de una sucesión admisible de particiones sino de una funcional.

Definición 8. *Sea un conjunto T. Diremos que F es una* **funcional** *en T si*

1. $F : \wp(T) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *y*

2. *F es creciente, es decir, para $A \subset B \subset T$ entonces $F(A) \leq F(B)$.*

Consideremos un espacio métrico (T, d) (no necesariamente finito) y una sucesión decreciente de funcionales $(F_n)_{n\geq 0}$ en T, es decir
para todo $A \subset T$,

$$F_{n+1}(A) \leq F_n(A). \tag{2.1}$$

Notemos que la imagen de cada funcional pertenece al conjunto de los números reales, por lo tanto tiene sentido hablar de una sucesión decreciente de funcionales.
Una propiedad que queremos ocupar con estas funcionales es la siguiente, si

consideramos la unión de conjuntos ajenos, entonces la unión es significativamente más grande con respecto al uniendo más pequeño. Esta idea se formaliza en una condición que se denomina **condición de crecimiento**.
Las siguientes hipótesis serán fundamentales en este capítulo.

Hipótesis 1. *Sea θ una función tal que*

$$\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+. \tag{2.2}$$

Para la función θ supondremos la siguiente condición. Sean $1 \leq \beta$ con $\beta \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{N}$, tal que $4 \leq r$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $1 < \xi \leq 2$ tal que

$$\xi\theta(n) \leq \theta(n+1) \leq \frac{r^\beta}{2}\theta(n). \tag{2.3}$$

Hipótesis 2. *El conjunto T es totalmente acotado, es decir, que se cumple la ecuación (2).*

La definición siguiente está muy relacionado con la hipótesis anterior, de hecho tiene sentido gracias a esa hipótesis.

Definición 9. *Sean $a \in \mathbb{R}^+$, $4 \leq r$, $m, r \in \mathbb{N}$ con $1 \leq m$ y (T, d) espacio métrico. Decimos que los subconjuntos H_1,...,H_m de T son* **(a,r)-separados** *si*

1. *Existen $t_1, \ldots, t_m \in T$ tales que*

$$\textit{para cada } l = 1, \ldots, m, H_l \subset B(t_l, \frac{a}{r}). \tag{2.4}$$

2. *Los puntos t_1,...,t_m satisfacen que existe $s \in T$ tal que para todo $l = 1 \ldots m$, $t_l \in B(s, ar)$*

$$\textit{y si } l \neq l', 1 \leq l, l' \leq m \textit{ entonces } a \leq d(t_l, t_{l'}). \tag{2.5}$$

Una consecuencia natural de ser (a, r)- separados es la siguiente.

Observación 3. *Si $k \neq j$ y $1 \leq k, j \leq m$ y $H_1, \ldots, H_m$ subconjuntos de T (a, r)-separados, entonces $H_k \cap H_j = \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $H_k \cap H_j \neq \emptyset$ entonces existe $p \in H_k \cap H_j$. Como $H_k \subset B(t_k, \frac{a}{r})$ y $H_j \subset B(t_j, \frac{a}{r})$ entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(t_k, t_j) \leq 2\frac{a}{r}$; por otro lado como $k \neq j$ entonces $d(t_k, t_j) \geq a$, lo que es una contradicción. $\square$

A continuación relacionamos funcionales con (a, r)- separados.

Definición 10. *Sean* $1 \leq \tau$, $4 \leq r$, $\tau, r \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ *y* $\{F_n\}_{n\in N}$ *una sucesión decreciente de funcionales. Decimos que las funcionales* F_n *satisfacen la* **Condición de Crecimiento** *si se satisface lo siguiente:*
Considere $a \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ *y* $m = N_{n+\tau} = 2^{2^{n+\tau}}$. *Si los subconjuntos* $H_l, \ldots, H_m$ *de* T *son* (a, r)*-separados, entonces*

$$a^\beta \theta(n+1) + \min_{1\leq l\leq m}\{F_{n+1}(H_l)\} \leq F_n(\bigcup_{l=1}^{m} H_l). \tag{2.6}$$

No olvidemos que nuestro objetivo es trabajar con las sucesiones admisibles y encontrar alguna que nos genere una cota superior más efectiva.
Formalmente el objetivo central de esta sección es demostrar el siguiente Teorema.

Teorema 6. Teorema de Talagrand. *Sean* $\tau, r, j \in \mathbb{Z}$, $\xi, \beta \in \mathbb{R}$, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión decreciente de funcionales en* T *y* θ *que satisface la hipótesis (2.3).*
Supongamos que $1 \leq \tau$, $4 \leq r$, $1 \leq \beta$ *y que* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *cumple la condición de crecimiento (2.6). Entonces podemos encontrar una sucesión creciente de particiones* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ *de* T *con* $|\mathcal{A}_n| \leq N_{n+\tau}$ *y una constante* $L > 0$, *tales que*

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0}\theta(n)\Delta^\beta(A_n(t))\} \leq L(2r)^\beta\Big[\frac{F_0(T)}{\xi - 1} + \theta(0)\Delta^\beta(T)\Big]. \tag{2.7}$$

Recordemos que $A_n(t)$ *es el elemento de* $\mathcal{A}_n$ *que contiene a* t.

Antes de dar la prueba del Teorema 6, demostremos los siguientes lemas:

Lema 2. (Primer lema de Descomposición). *Sean* $\tau, r, j \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}^+$, (T, d) *espacio métrico y una sucesión decreciente de funcionales* $\{F_n\}_{n\geq 0}$ *en* T. *Supongamos que* $1 \leq \tau$, $4 \leq r$ *y que*

1. *La sucesión decreciente de funcionales* $\{F_n\}_{n\geq 0}$ *cumple la condición de crecimiento (2.6).*

2. *Existe* $G \subset T$ *con* $G \neq \emptyset$ *tal que para alguna* $s \in T$

$$G \subset B(s, r^{-j}). \tag{2.8}$$

Entonces podemos encontrar una partición $\mathcal{A}$ *de* G *con* $|\mathcal{A}| \leq m$, *donde* $m = N_{n+\tau}$, *tal que para toda* $A \in \mathcal{A}$ *existe* $t \in G$, *tal que*

$$A \subset B(t, r^{-j-1}) \tag{2.9}$$

o bien

$$\frac{1}{2}r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \sup_{t\in A}\{F_{n+1}(A \cap B(t, r^{-j-2}))\} \leq F_n(G). \tag{2.10}$$

Demostración. Haremos inducción sobre $1 \leq l \leq m$.
Sea $\epsilon > 0$. Construiremos puntos $t_l \in G$ y conjuntos $A_l \subset G$ como sigue.
Para $l = 1$ definimos $D_0 = G$ y escogemos $t_1 \in G$ tal que

$$\sup_{t \in G}\{F_{n+1}(G \cap B(t, r^{-j-2}))\} - \epsilon \leq F_{n+1}(G \cap B(t_1, r^{-j-2})), \tag{2.11}$$

(lo que es posible gracias a la definición de supremo). Luego consideremos

$$A_1 = G \cap B(t_1, r^{-j-1}). \tag{2.12}$$

Así, para t_1 se tiene que $t_1 \in G$ y $A_1 \subset B(t_1, r^{-j-1})$, es decir, se cumple (2.9). Ahora sea $D_1 = G \setminus A_1$. Si $D_1 = \emptyset$ habremos terminado (porque encontramos A_1 que cumple con (2.9)). Si $D_1 \neq \emptyset$ escogemos $t_2 \in D_1$ tal que

$$\sup_{t \in D_1}\{F_{n+1}(D_1 \cap B(t, r^{-j-2}))\} - \epsilon \leq F_{n+1}(D_1 \cap B(t_2, r^{-j-2})), \tag{2.13}$$

y consideramos

$$A_2 = D_1 \cap B(t_2, r^{-j-1}), \tag{2.14}$$

que cumple nuevamente (2.9) por los mismos argumentos.
Supongamos que tenemos construidos puntos $t_1, \ldots, t_l$ y $A_1, \ldots, A_l$ respectivamente que cumplen (2.9) y $D_1, \ldots, D_{l-1} \neq \emptyset$. Para construir t_{l+1} sea

$$D_l = G \setminus \bigcup_{p=1}^{l} A_p. \tag{2.15}$$

Si $D_l = \emptyset$ entonces hemos terminado, pues por construcción $A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j$ y $A_p \subset G$ para $1 \leq p \leq l$ y por lo tanto $G = \bigcup_{p=1}^{l} A_p$. Así, hemos particionado a G en l $(\leq m)$ partes y se satisface (2.9). Si $D_l \neq \emptyset$ entonces escojamos $t_{l+1} \in D_l$ tal que

$$\sup_{t \in D_l}\{F_{n+1}(D_l \cap B(t, r^{-j-2}))\} - \epsilon \leq F_{n+1}(D_l \cap B(t_{l+1}, r^{-j-2})), \tag{2.16}$$

y llamemos

$$A_{l+1} = D_l \cap B(t_{l+1}, r^{-j-1}). \tag{2.17}$$

Así para t_{l+1} se tiene que $t_{l+1} \in G$ y $A_{l+1} \subset B(t_{l+1}, r^{-j-1})$, es decir, cumple (2.9). Podemos continuar así hasta llegar a $m - 1$.
Sea

$$D_{m-1} = G \setminus \bigcup_{l<m} A_l. \tag{2.18}$$

Si $D_{m-1} = \emptyset$ entonces hemos terminado. Si $D_{m-1} \neq \emptyset$ hacemos $A_m = D_{m-1}$ y, así $A_1, ..., A_m$ forman una partición de G. Entonces hemos partido a C en a lo más m partes.
Ahora veremos que la conclusión del Lema se verifica para esta partición. De hecho veremos que si $D_{m-1} \neq \emptyset$ entonces para A_m se cumple (2.10).
Para $l < m$ tenemos que $t_l \in G$ y $A_l \subset B(t_l, r^{-j-1})$, es decir, cumple (2.9) la primera parte del lema. ¿Qué sucede con A_m (esto es cuando $D_{m-1} \neq \emptyset$)? Si A_m cumple también con (2.9) entonces ya no hay nada que hacer. Si no, para esto usaremos que las funcionales F_n satisfacen la condición de crecimiento. Observemos que para todo $l < m$

$$D_l = G \setminus \bigcup_{p=1}^{l} B(t_p, r^{-j-1}). \tag{2.19}$$

Para verificar esto, hagamos inducción sobre l. De (2.15) para $l = 1$,

$$D_1 = G \setminus A_1 = G \setminus G \cap B(t_1, r^{-j-1}) = G \setminus B(t_1, r^{-j-1}). \tag{2.20}$$

Ahora supongamos que

$$D_{l-1} = G \setminus \bigcup_{p=1}^{l-1} B(t_p, r^{-j-1}), \tag{2.21}$$

entonces de (2.15) se sigue

$$D_l = G \setminus \bigcup_{p=1}^{l} A_p = D_l \setminus A_l, \tag{2.22}$$

de (2.17) y (2.21) concluimos

$$D_l = D_l \setminus D_l \cap B(t_l, r^{-j-1}) = G \setminus \bigcup_{p=1}^{l} B(t_p, r^{-j-1}). \tag{2.23}$$

Por lo tanto se cumple (2.19). Así, si escogemos $t_{l+1} \in D_l$ como en (2.16), entonces por (2.19),

$$r^{-j-1} \leq d(t_{l+1}, t_p) \; para \; 1 \leq p \leq l < m.$$

Luego, si definimos $a = r^{-j-1}$ entonces de (2.8) y (2.9) (Recordemos que (2.9) ya se demostró para $l < m$) tenemos lo siguiente:
Para toda $1 \leq l < m$, $t_l \in B(s, ar)$ *(esto es cierto pues* $A_1, \ldots A_l$ *son subconjuntos de G) y para todo* $1 \leq l < m$,

$$a \leq d(t_l, t_{l+1}).$$

Así, si definimos $H_l = D_{l-1} \cap B(t_l, r^{-j-2})$, entonces para toda $l < m$

$$H_l \subset B(t_l, \tfrac{a}{r}).$$

Entonces se sigue que que $H_1, ..., H_l$ son (a, r) - separados. Luego, como la sucesión $\{F_n\}_{n\geq 0}$ satisface la condición de crecimiento y además para toda $1 \leq m, H_l \subset G$. De la definición 1 (segunda parte) y de (2.6) se sigue que

$$a^{\beta}\theta(n+1) + \min_{l \leq m-1}\{F_{n+1}(H_l)\} \leq F_n\Big(\bigcup_{l=1}^{m-1} H_l\Big) \leq F_n(G). \tag{2.24}$$

Por otro lado. De (2.16) obtenemos que para toda $1 \leq l < m$,

$$\sup_{t \in D_l}\{F_{n+1}(D_l \cap B(t, r^{-j-2}))\} - \epsilon \leq F_{n+1}(H_{l+1}). \tag{2.25}$$

Como $D_{m-1} \subset ... \subset D_1 \subset D_0 = G$ (por construcción) entonces de (2.25) se sigue que

$$\sup_{t \in D_{m-1}}\{F_{n+1}(D_{m-1} \cap B(t, r^{-j-2}))\} - \epsilon \leq F_{n+1}(H_{l+1}). \tag{2.26}$$

Como los conjuntos D_l decrecen para $1 \leq l < m$ y

$$B(t_l, r^{-j-2}) \subset B(t_l, r^{-j-1}) \cap \Big[G \setminus \textstyle\bigcup_{p=1}^{l-1} B(t_p, r^{-j-1})\Big] \neq \emptyset,$$

entonces $H_m \subset ... \subset H_1$.

Así

$$F_{n+1}(H_{l+1}) = \min_{1 \leq l \leq m}\{F_{n+1}(H_l)\}. \tag{2.27}$$

Luego de (2.24), (2.26), (2.27) y por definición de D_{m-1} concluimos que

$$a^{\beta}\theta(n+1) + \sup_{t \in A_m}\{F_{n+1}(A_m \cap B(t, r^{-j-2}))\} - \epsilon \leq F_n(G),$$

con $a = r^{-j-1}$, que implica (2.10). Cabe mencionar que la partición $\mathcal{A}$ de G que encontramos es la formada por $A_1, \ldots, A_m$. $\square$

Para continuar, recordemos que en la Hipótesis 2 pedimos que el espacio métrico T sea totalmente acotado lo cual en particular implica que

$$T \subset B(t_T, \alpha) \text{ p.a. } t_T \in T \ y \text{ p.a. } \alpha \in \mathbb{R}^+. \tag{2.28}$$

Además es cierto que para todo $t \in T$, $T \subset B(t, \alpha_t)$ para algún α_t positivo.

Observación 4. *Sea $t \in T$ (fijo) y $1 < r$, $r \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$j(T) = \max\{j \in \mathbb{Z} \ ; \ T \subset B(t, r^{-j})\}.$$

Entonces

$$r^{-j(T)-1} \leq \Delta(T).$$

Demostración. Si $\Delta(T) < r^{-j(T)-1}$ entonces, $\Delta(T) \leq 2r^{-(j(T)+1)}$. Por definición de $j(T)$ se deduce que $j(T)+1 < j(T)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $r^{-j(T)-1} \leq \Delta(T)$. □

Por (2.28) podemos suponer que

$$\textit{Existe } G \subset T \textit{ tal que } G \subset B(s, r^{-j}) \textit{ para algún } s \in T \textit{ y } j \in \mathbb{Z}, \tag{2.29}$$

(la hipótesis 2 del lema anterior).
Así obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3. *Para toda $k \in \mathbb{N}$ podemos construir una sucesión de particiones $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de T, tal que $|\mathcal{A}_k| \leq N_k$ y para toda $A \in \mathcal{A}_k$, $A \subset B(t_{k,A}, r^{-j_k(A)})$ es decir, este corolario afirma que para toda $A \in \mathcal{A}_k$, A cumple (2.9) o bien A cumple (2.10).*

Demostración. Por la ecuación (2.29) ya tenemos la hipótesis 2 del primer lema de descomposición, por lo tanto en lo que sigue usaremos este hecho.
Demostraremos el Corolario 3 por inducción.
Como $\mathcal{A}_0 = \{T\}$, $|\mathcal{A}_0| = 1 = N_0$ y por (2.28) el corolario se cumple para $k = 0$. Supongamos que tenemos construido $\mathcal{A}_{k-1}$ partición de T tal que $|\mathcal{A}_{k-1}| \leq N_{k-1}$ y $A \in \mathcal{A}_{k-1}$, con $A \subset B(t_{k-1,A}, r^{-j_{k-1}(A)})$ o A que cumple con (2.10). Como $A \subset T$ entonces por el Lema 2 podemos encontrar una partición $\{B_l^A\}_{l \leq N_{k-1}}$ de A que satisface (2.9) o (2.10). Luego

$$\mathcal{A}_k = \{B_l^A; A \in \mathcal{A}_{k-1} \text{ } y \text{ } l \leq N_{k-1}\},$$

es partición de T y $\mathcal{A}_k \leq N_{k-1}N_{k-1} = N_k$. Por lo tanto se cumple para k.

□

Observación 5. *Por el corolario anterior tenemos que $\mathcal{A}_k$ es refinamiento de $\mathcal{A}_{k-1}$.*

Demostración. Se sigue del paso inductivo en la inducción que se hizo en la demostración del corolario anterior. □

A partir de ahora supondremos que tenemos construida una sucesión de particiones $(\mathcal{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de T, tal que, $|\mathcal{A}_m| \leq N_m$ como en el corolario 3 y la observación 5. También que tenemos una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funcionales que satisfacen la condición de crecimiento.
Es conveniente recordar la definición de funcional (sobre todo la parte (2)) y que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente (ver (2.1)).

Lema 3. *Sea $C \in \mathcal{A}_n$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar puntos $t_{n,C}$ en T y $j_n(C) \in \mathbb{Z}$ que cumplen lo siguiente.*

I. $C \subset B(t_{n,C}, r^{-j_n(C)})$,

II. Para todo $t \in C, F_n(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-1})) \leq b_1(C)$,

III. Para todo $t \in C, F_n(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-2})) \leq b_2(C)$ *y*

IV. $b_0(C) - \frac{1}{2} r^{-\beta(j_n(C)+1)}\theta(n) \leq b_2(C) \leq b_0(C) + \epsilon_n,\ \epsilon_n = 2^{-n}F_0(T)$,

donde las constantes $b_i(C)$ para $i = 0, 1, 2$ serán determinadas en la demostración.

Demostración. Haremos inducción sobre n. Para $n = 0$ tenemos $C \in \mathcal{A}_0$, en este caso $C = T$. Por (2.28) podemos escoger $t_{0,T} \in T$ y $j_0(T) = j(T)$ ($j(T)$ como en la observación 4), tal que

$$T \subset B(t_{0,T}, r^{-j_0(T)}). \tag{2.30}$$

Definamos

$$F_0(T) = b_0(T) = b_1(T) = b_2(T). \tag{2.31}$$

Sea $t \in T$. Como $T \cap B(t, r^{-j(T)-1}) \subset T$ y $T \cap B(t, r^{-j(T)-2}) \subset T$ entonces por la definición de funcional concluimos que

$$\begin{aligned} F_0(T \cap B(t, r^{-j(T)-1})) \leq F_0(T) \leq b_1(T), \\ F_0(T \cap B(t, r^{-j(T)-2})) \leq F_0(T) \leq b_2(T), \end{aligned} \tag{2.32}$$

y

$$\begin{aligned} b_0(T) - \frac{1}{2} r^{-\beta(j(T)+1)}\theta(0) \leq b_0(C) = b_2(T) \leq b_0(C) + \epsilon_0, \\ \textit{con } \epsilon_0 = 2^{-0}F_0(T) = F_0(T). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Por lo tanto por (2.30), (2.31), (2.32) y (2.33) se cumple el lema para $n = 0$. Supongamos que para $C \in \mathcal{A}_n$ se cumple el lema. Así C en particular cumple (2.8) por hipótesis de inducción. Entonces por el Lema 2 podemos encontrar una partición $(A_l)_{l \leq m}$ de C, donde $l \leq m = N_{n+1}$ tal que para toda $l \leq m$ existe $t_l \in C$ y

$$A_l \subset B(t_l, r^{-j-1}), \tag{2.34}$$

o bien, para un elemento de la partición $(A_l)_{l \leq m}$ (que en la demostración lo definimos como A_m) se cumple (2.10). Veamos que se cumple el lema para $A_1, \ldots, A_l$ con $l < m$ y después que el lema se cumple para A_m.

Definiendo $j_{n+1}(A) = j_n(C)+1(=j+1), t_l = t_{n+1,A}$ para $A = A_l \in \mathcal{A}_{n+1}\setminus\{A_m\}$, se sigue que (I) es cierto para $n+1$.
Para seguir con las propiedades restantes, sean $A = A_l \in \mathcal{A}_{n+1} \setminus \{A_m\}$,

$$b_0(A) = b_2(A) = b_1(C), b_1(A) = min\{b_1(C), b_2(C)\}. \tag{2.35}$$

Como $A \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-1}) \subset C \cap B(t, r^{-j_n(C)-2})$ (y por la definición de $j_{n+1}(A)$), entonces $F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-1})) \leq F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-2}))$. Como la sucesión de funcionales $\{F_n\}$ es decreciente entonces

$$F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-2})) \leq F_n(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-2})).$$

Como $F_n(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-2})) \leq b_2(C)$ y $F_n(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-1})) \leq b_1(C)$ por hipótesis de inducción, entonces

$$F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-1})) \leq b_2(C),$$
$$F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-1})) \leq b_1(C),$$

entonces de la definición de $b_1(A)$ dada en (2.35) se sigue que (II) es cierto para $A = A_l \in \mathcal{A}_{n+1} \setminus \{A_m\}$.

Como $A \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-2}) \subset C \cap B(t, r^{-j_n(C)-3}) \subset B(t, r^{-j_n(C)-1})$ entonces

$$\begin{aligned} F_{n+1}(A \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-2})) &\leq F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j_n(C)-3})) \\ &\leq F_{n+1}(B(t, r^{-j_n(C)-1})). \end{aligned}$$

Luego, como la sucesión de funcionales $\{F_n\}$ es decreciente, se sigue que

$$F_{n+1}(B(t, r^{-j_n(C)-1})) \leq F_n(B(t, r^{-j_n(C)-1})),$$

por hipótesis de inducción tenemos que

$$F_n(B(t, r^{-j_n(C)-1})) \leq b_1(C).$$

Entonces

$$F_{n+1}(A \cap B(t, r^{-j_{n+1}(A)-2})) \leq b_1(C). \tag{2.36}$$

Por lo tanto lo por la definición de $b_1(A)$ se tiene que (III) es cierto para $A = A_l \in \mathcal{A}_{n+1} \setminus \{A_m\}$.
Por último, por (2.35) se sigue que (IV) es cierto para $A = A_l \in \mathcal{A}_{n+1} \setminus \{A_m\}$.

Para $A = A_m \in \mathcal{A}_{n+1}$, definimos,

$$\begin{gathered} b_0(A) = b_0(C), b_1(A) = b_1(C), \\ b_2(A) = b_0(C) - \frac{1}{2} r^{-\beta(j+1)\theta(n+1)} + \epsilon_{n+1}, \\ j = j_{n+1}(A) = j_n(C) \ y \ t_{n,A} = t_{n,C}, \end{gathered} \tag{2.37}$$

así

$$A \subset C \subset B(t_{n,A}, r^{-j=-j_{n+1}(A)}). \tag{2.38}$$

Por lo tanto se sigue (I) es cierto para $A = A_m \in \mathcal{A}_{n+1}$.

Como $A \cap B(t, r^{-j-1}) \subset C \cap B(t, r^{-j-1})$ entonces

$$F_{n+1}(A \cap B(t, r^{-j-1})) \leq F_n(C \cap B(t, r^{-j-1})) \leq b_1(C), \tag{2.39}$$

pero $b_1(C) = b_1(A)$ (por (2.37)), por lo tanto se tiene (II).
Por (2.37)

$$\begin{aligned} b_0(A) - \frac{1}{2}r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) &\leq b_2(A) \\ &= b_0(A) - \frac{1}{2}r^{-\beta(j+1)\theta(n+1)} + \epsilon_{n+1} \\ &\leq b_0(A) + \epsilon_{n+1},\ \epsilon_n = 2^{-n}F_0(T). \end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple (IV) para $A = A_m \in \mathcal{A}_{n+1}$.
Veamos primero que $F_n(A) \leq b_0(A)$ por inducción sobre n. Para $n = 0$ es cierto que $F_0(A) \leq b_0(A)$ por (2.31). Supongamos que $F_n(A) \leq b_0(A)$ vale para n (para $C \in \mathcal{A}_n$). Para $n+1$ se tiene

$$F_{n+1}(A) \leq F_n(C \cap B(t_A, r^{-j_n(C)-1})) \leq b_1(C). \tag{2.40}$$

Pero $b_1(C) = b_0(A)$ por (2.35). Esto es para $A = A_l$ con $l < m$.
Como $\{F_n\}$ es una sucesión decreciente y por hipótesis de inducción se sigue que

$$F_{n+1}(A) \leq F_n(C) \leq b_0(C),$$

pero $b_0(C) = b_0(A)$ por (2.37), de donde $F_n(A) \leq b_0(A)$. Entonces de (2.10) y despejando a $b_0(A) - r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \epsilon$ tenemos que

$$\sup_{t \in A_m = A} \{F_{n+1}(A \cap B(t, r^{-j-2}))\} \leq b_0(A) - r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \epsilon, \tag{2.41}$$

luego, por definición de $b_2(A)$ se concluye (III) para $A = A_m \in \mathcal{A}_{n+1}$. Así, el lema es cierto para $A_1, \ldots A_m$. Por lo tanto es cierto para $n+1$. $\square$

Para el siguiente corolario usaremos las definiciones respectivas de $b_i(C)$ para $i = 0, 1, 2$ y para el paso de inducción usaremos también a los conjuntos A_l que se usaron en la demostración anterior.

Corolario 4. *Sea $C \in \mathcal{A}_n$ y supongamos $t_{n,C} \in T$ y $j_n(C) \in \mathbb{Z}$ son como en el lema 3 para los casos correspondientes, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$b_1(C) \leq b_0(C).$$

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 0$. Por (2.31) se cumple. Supongamos que $b_1(C) \leq b_0(C)$ vale para n (para $C \in \mathcal{A}_n$). Para $n+1$ se cumple pues $b_1(C) = b_0(A)$ por (2.35), para $A = A_l$ con $l < m$.
Por (2.37) y por hipótesis de inducción de la parte (b) se tiene que $b_1(A) \leq b_0(A)$. □

Para el siguiente lema nuevamente usaremos la notaciones respectivas que usamos en Lema 3 y Corolario 4. No olvidemos que estamos suponiendo que tenemos una sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente de funcionales que satisface la condición de crecimiento. El siguiente lema depende del Corolario 4 y del Lema 3.

Lema 4. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, si $A \in \mathcal{A}_{n+1}$ y $A \subset C \in \mathcal{A}_n$ entonces*

$$\begin{aligned} &\sum_{0\leq i\leq 2} b_i(A) + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) r^{-\beta(j_{n+1}(A)+1)}\theta(n+1) \\ \leq &\sum_{0\leq i\leq 2} b_i(C) + \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) r^{-\beta(j_n(C)+1)}\theta(n) + \epsilon_n. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Demostración. Si $A = A_l$ con $l < m$, entonces del Corolario 4 y (2.33) obtenemos que

$$\sum_{0\leq i\leq 2} b_i(A) \leq \sum_{0\leq i\leq 2} b_i(C). \tag{2.43}$$

Por otro lado de (2.3) tenemos

$$r^{-\beta}\theta(n+1) \leq \tfrac{1}{2}\theta(n),$$

para $2 \leq r$ y $\beta \in \mathbb{R}^+$. Luego, como $j_{n+1}(A) = j_n(C) + 1$ entonces

$$r^{-\beta(j_{n+1}(A))} = r^{-\beta(j_n(C)+1)},$$

entonces se sigue que

$$r^{-\beta(j_{n+1}(A))} \leq \frac{1}{2} r^{-\beta(j_n(C)+1)}\theta(n). \tag{2.44}$$

Por lo tanto de (2.43) y (2.44) se sigue (2.42).
Si $A = A_m$, en este caso $j = j_n(C) = j_{n+1}(A)$. Nuevamente de (2.3) se tiene que $\frac{\theta(n+1)}{\xi} \leq \theta(n)$, entonces

$$-\frac{1}{2} r^{-\beta(j_{n+1}(A)+1)}\frac{\theta(n+1)}{\xi} \leq -\frac{1}{2} r^{-\beta(j_n(C)+1)}\theta(n), \tag{2.45}$$

así de (2.37) y (2.45) concluimos que

$$\begin{aligned}\sum_{0\le i\le 2} b_i(A) + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1)\\ \le 2b_0(C)+b_1(C)-\frac{1}{2}r^{-\beta(j+1)}\theta(n).\end{aligned} \tag{2.46}$$

Ahora por (IV) (del lema 3)

$$b_0(C)-\frac{1}{2}r^{-\beta(j+1)}\theta(n)\le b_2(C). \tag{2.47}$$

Luego de (2.46) y (2.47) conseguimos que

$$\sum_{0\le i\le 2} b_i(A) + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1)\le \sum_{0\le i\le 2} b_i(C),$$

y por lo tanto se sigue (2.42).

□

Ahora ya estamos preparados para demostrar el teorema de Talagrand. Recordemos que como consecuencia del Lema descomposición pudimos construir una sucesión creciente de particiones $(\mathcal{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de T, tal que, $|\mathcal{A}_m|\le N_m$, esto es el Corolario 3 y Observación 5. Esto último demuestra la primera parte del Teorema de Talagrand.

Demostración del Teorema 6. Para $k = N_{n+\tau}$ apliquemos el corolario 3. Entonces podemos encontrar una sucesión creciente de particiones $(\mathcal{A}_n)_{n\ge 0}$ de T tal que $|\mathcal{A}_n|\le N_{n+\tau}$.
Sea $t\in T$, $n\in\mathbb{N}$ y denotamos $j_n(t)=j(A_n(t))$. Como $A_{n+1}(t)\subset A_n(t)$ y $A_n(t)\in\mathcal{A}_n$, aplicando el lema 4 obtenemos que:

$$\begin{aligned}&\sum_{0\le i\le 2} b_i(A_{n+1}(t)) + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1)\\ &\le \sum_{0\le i\le 2} b_i(A_n(t)) + \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n)+\epsilon_n.\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{q}\Big[\sum_{0\le i\le 2} b_i(A_{n+1}(t)) + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1)\Big]\\ &\le \sum_{n=0}^{q}\Big[\sum_{0\le i\le 2} b_i(A_n(t)) + \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n)+\epsilon_n\Big],\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{q} b_0(A_{n+1}(t)) + \sum_{n=0}^{q} b_1(A_{n+1}(t)) + \sum_{n=0}^{q} b_2(A_{n+1}(t)) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1) \\
&\le \sum_{n=0}^{q} b_0(A_n(t)) + \sum_{n=0}^{q} b_1(A_n(t)) + \sum_{n=0}^{q} b_2(A_n(t)) \\
&\qquad + \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q}\Big[r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n)\Big] + F_0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Por el Lema 3 (parte II y III) y del hecho que para toda $n \in \mathbb{N}$, $F_n(A) \le b_0(A)$, tenemos que $b_i(A) \in \mathbb{R}^+$ para todo $A \in \mathcal{A}_k$ y para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{q-1} b_i(A_{n+1}(t)) \le \sum_{n=0}^{q} b_i(A_{n+1}(t)),$$

para $i = 0, 1, 2$.
Así de (2.48) se sigue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{q-1} b_0(A_{n+1}(t)) + \sum_{n=0}^{q-1} b_1(A_{n+1}(t)) + \sum_{n=0}^{q-1} b_2(A_{n+1}(t)) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q}\Big[r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1)\Big] \\
&\le \sum_{n=0}^{q} b_0(A_n(t)) + \sum_{n=0}^{q} b_1(A_n(t)) + \sum_{n=0}^{q} b_2(A_n(t)) \\
&\qquad + \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q}\Big(r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n)\Big) + F_0.
\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{n=0}^{q-1} b_i(A_{n+1}(t)) = \sum_{n=0}^{q}\Big[b_i(A_n(t))\Big] - b_i(A_0(t)) \text{ y } b_i(A_0(t)) = F_0(T)$$

con $i = 0, 1, 2$ (por (2.31)), entonces

$$\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1) \le \frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) + 4F_0.$$

Luego

$$\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1) \le \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi}\Big)\sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) + 8F_0.$$

Como $\theta(n) \in \mathbb{R}^+$ para todo n, entonces

$$\sum_{n=0}^{q-1} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1) \leq \sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1),$$

Como $\sum_{n=0}^{q-1} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1) = \sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) - r^{-\beta(j_0(t)+1)}\theta(0)$ y $j_0(t) = j(A_0(t)) = j(T)$, se deduce que

$$\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) \sum_{n=0}^{q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) \leq \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) r^{-\beta(j(T)+1)}\theta(0) + 8F_0. \tag{2.49}$$

Por el Lema 3 (parte I) se tiene que

$$A_n(t) \subset B(t_{n,A_n(t)}, r^{-j_n(t)}) \text{ para algún } t_{n,A_n(t)} \in T,$$

así $\Delta(A_n(t))^\beta \leq (2r)^{-j_n(t)\beta}$. Luego, usando lo anterior en la ecuación (2.49) obtenemos que

$$\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)(2r)^{-\beta} \sum_{n=0}^{q} \Delta(A_n(t))^\beta\theta(n) \leq \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big) r^{-\beta(j(T)+1)}\theta(0) + 8F_0,$$

Por la Observación 4 tenemos que $r^{-j(T)-1} \leq \Delta(T)$, entonces $r^{-\beta(j(T)+1)} \leq \Delta(T)^\beta$, de donde se sigue que

$$\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)(2r)^{-\beta} \sum_{n=0}^{q} \Delta(A_n(t))^\beta\theta(n) \leq \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\Delta(T)^\beta\theta(0) + 8F_0(T).$$

Como $\frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\Delta(T)^\beta\theta(0) + 8F_0 \leq 8\Big[\Big(1 - \frac{1}{\xi}\Big)\Delta(T)^\beta\theta(0) + F_0(T)\Big]$, entonces

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\xi - 1}{\xi}\Big) \sum_{n=0}^{q} \Delta(A_n(t))^\beta\theta(n) \leq (2r)^\beta 8\Big[\Big(\frac{\xi - 1}{\xi}\Big)\Delta(T)^\beta\theta(0) + F_0(T)\Big].$$

Despejando $\sum_{n=0}^{q} \Delta(A_n(t))^\beta\theta(n)$ en la desigualdad anterior obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{q} \Delta(A_n(t))^\beta\theta(n) \leq 16(2r)^\beta\Big[\Delta(T)^\beta\theta(0) + \frac{\xi}{\xi - 1}F_0(T)\Big].$$

Del hecho que $\xi \leq 2$ entonces $\frac{\xi}{\xi-1}F_0(T) \leq \frac{2}{\xi-1}F_0(T)$. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{q} \Delta(A_n(t))^\beta\theta(n) &\leq 16(2r)^\beta\Big[\Delta(T)^\beta\theta(0) + \frac{2}{\xi - 1}F_0(T)\Big] \\
&\leq 32(2r)^\beta\Big[\Delta(T)^\beta\theta(0) + \frac{F_0(T)}{\xi - 1}\Big],
\end{aligned}$$

de este modo

$$\sum_{n\geq 0} \Delta(A_n(t))^\beta \theta(n) \leq L(2r)^\beta \Big[\Delta(T)^\beta \theta(0) + \frac{F_0(T)}{\xi - 1}\Big],$$

donde $L = 32$.
Por lo tanto

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} \theta(n)\Delta^\beta(A_n(t))\} \leq L(2r)^\beta \Big[\frac{F_0(T)}{\xi - 1} + \theta(0)\Delta^\beta(T)\Big]. \tag{2.50}$$

□

2.2. Consecuencias del Teorema de Talagrand

En esta sección obtenemos dos resultados importantes, los Corolarios 6 y 8. El Corolario 6 da otra forma de acotar $\mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t]$ que depende de una funcional y el Corolario 8 es un resultado que se usará en la demostración del *Lema de particiones* en el siguiente capítulo.

Para la demostración del Teorema de Talagrand dos de las hipótesis fundamentales fueron que para la función θ se cumplía la condición (2.3) y que teníamos una sucesión de funcionales que satisfacía la condición de crecimiento. Entonces para demostrar algunas consecuencias del Teorema de Talagrand, hagamos las siguientes observaciones:

Observación 6. *Sean* $4 \leq r$, $0 < \beta$ *y* $m \in \mathbb{N}$.
Si $\theta(n) = m2^{\frac{n}{\alpha}-\delta}$ *con* $\min\{1, \dfrac{1}{2\beta - 1}\} \leq \alpha$ *y* $0 \leq \delta$ *entonces para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple la ecuación (2.3), es decir, existe* $1 < \xi \leq 2$ *tal que*

$$\xi\theta(n) \leq \theta(n+1) \leq \frac{r^\beta}{2}\theta(n). \tag{2.51}$$

Demostración. $\xi\theta(n) \leq \theta(n+1)$ si y solo si $\xi m2^{\frac{n}{\alpha}-\delta} \leq m2^{\frac{n+1}{\alpha}-\delta}$ si y solo si $\xi \leq 2^{\frac{1}{\alpha}}$ y esta última desigualdad es cierta tomando $\xi \leq 2^{\frac{1}{\alpha}}$. Luego usando que en particular $1 \leq \alpha$ se sigue que $1 < \xi \leq 2$.
Por otro lado $\theta(n+1) \leq \frac{r^\beta}{2}\theta(n)$ si y solo si $m2^{\frac{n+1}{\alpha}-\delta} \leq \frac{r^\beta}{2} m2^{\frac{n}{\alpha}-\delta}$ si y solo si $2^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{r^\beta}{2}$ si y solo si $22^{\frac{1}{\alpha}} \leq r^\beta$, esto último es cierto pues $4 \leq r$ y en particular $\frac{1}{2\beta-1} \leq \alpha$. □

Para la siguiente observación recordemos que

$$\gamma_\alpha(T,d) = \text{ínf}\{\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n(t))\}, \tag{2.52}$$

donde el ínfimo es tomado sobre las sucesiones admisibles $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ de T ($|\mathcal{A}_n| \leq N_n$). Definimos ahora $\gamma_{\alpha,n}(T,d)$ como

$$\gamma_{\alpha,n}(T,d) = inf\{\sup_{t\in T}\{\sum_{k\geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}}\Delta(A_n(t))\}, \tag{2.53}$$

donde el ínfimo es tomado sobre las mismas sucesiones admisibles $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 0}$ de T ($|\mathcal{A}_k| \leq N_k$). Así se tiene la siguiente observación.

Observación 7. *Sea $A \subset T$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

1. $F_n(A) = sup\{\gamma_{\alpha,n}(G,d); G \subset A \text{ } y \text{ } |G| < \infty\}$ *es funcional en* T.
2. $F_{n+1}(A) \leq F_n(A)$ *para* $A \subset T$.

Demostración. Para demostrar (1) necesitamos demostrar dos cosas

(*i*) $0 \leq F_n(A)$ y

(*ii*) $F_n(A) \leq F_n(B)$ para $A \subset B \subset T$.

Sea $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 0}$ una sucesión admisible de G. Como $0 \leq \Delta(A_k(t))$ entonces $0 \leq \gamma_{\alpha,n}(G,d)$, por lo tanto $0 \leq F_n(A)$.
Como $A \subset B$, entonces

$$\{\gamma_{\alpha,n}(G,d); G \subset A \text{ } y \text{ } |G| < \infty\} \subset \{\gamma_{\alpha,n}(G,d); G \subset B \text{ } y \text{ } |G| < \infty\},$$

luego así $F_n(A) \leq F_n(B)$. Por lo tanto por (*i*) y (*ii*) se concluye (1).
Ahora veamos que la sucesión de funcionales $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Sea $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión admisible de G. Como

$$\textstyle\sum_{k\geq n+1} 2^{\frac{k}{\alpha}}\Delta(A_k(t)) \leq \sum_{k\geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}}\Delta(A_k(t)),$$

entonces

$$\sup_{t\in G}\{\sum_{k\geq n+1} 2^{\frac{k}{\alpha}}\Delta(A_k(t))\} \leq \sup_{t\in G}\{\sum_{k\geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}}\Delta(A_k(t))\}.$$

Luego

$$F_{n+1}(A) \leq F_n(A),$$

por lo tanto se tiene (2).

$\square$

Otra sucesión de funcionales que usaremos más adelante es la siguiente.

Observación 8. *Sea* $T_n \subset T, \forall n \geq 0$. *Definimos* $F_n(A) = \sup_{t \in A}\{\sum_{k \geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(t, T_k)\}$ *con* $A \subset T$. *Entonces* $\forall n \geq 0$ *se satisface que*

1. $F_n(A)$ *es funcional en* T.

2. $F_{n+1}(A) \leq F_n(A)$ *para* $A \subset T$.

Demostración. Nuevamente para demostrar (1) necesitamos demostrar dos cosas:

(*a*) $0 \leq F_n(A)$,

(*b*) $F_n(A) \leq F_n(B)$ para $A \subset B \subset T$.

Como $d(t, T_k)$ es positivo se sigue que $F_n(A)$ es positivo y por lo tanto se tiene (*b*).
Como $A \subset B$ entonces

$$\sup_{t \in A}\{\sum_{k \geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(t, T_k)\} \leq \sup_{t \in B}\{\sum_{k \geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(t, T_k)\},$$

por lo tanto se tiene (*b*).
Luego

$$\sup_{t \in G}\{\sum_{k \geq n+1} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(t, T_k)\} \leq \sup_{t \in G}\{\sum_{k \geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(t.T_k)\}$$

entonces

$$F_{n+1}(A) \leq F_n(A).$$

Por lo tanto se tiene (2). □

Del Teorema 6 notemos lo siguiente.

* Encontramos una sucesión de particiones de T que no es admisible necesariamente pues para todo $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{A}_n| \leq N_{n+\tau}$ con $1 \leq \tau$, pero para ser admisible era necesario que $\tau = 0$.

* La cantidad que está en la parte de la derecha de la expresión (2.7), que es

$$L(2r)^{\beta}\Big[\frac{F_0(T)}{\xi - 1} + \theta(0)\Delta^{\beta}(T)\Big],$$

es finita porque T está totalmente acotada y por ello su diámetro es finito, y porque el valor de las funcionales son números reales. Esto hace aun más importante los corolarios que se obtendrán en este capítulo.

Si reemplazamos $\theta(n) = 2^{\frac{n}{\alpha}}$ (que satisface (2.3) por la observación 6) y $\beta = 1$ en (2.7) obtenemos que

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n(t))\} \leq L(2r)\Big[\frac{F_0(T)}{\xi - 1} + \theta(0)\Delta(T)\Big]. \tag{2.54}$$

Si definimos $S = \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n(t))\}$ entonces

$$S \leq L(2r)\Big[\frac{F_0(T)}{\xi - 1} + \theta(0)\Delta(T)\Big], \tag{2.55}$$

es decir, S es finito. El siguiente corolario nos permite construir sucesiones admisibles de T bajo la hipótesis de que se cumple (2.55).

Corolario 5. *Sean $1 < \alpha$ y $\tau \in \mathbb{Z}$. Sea $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones de T como en el Teorema de Talagrand. Entonces podemos encontrar una sucesión admisible $(\mathcal{A}'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de T y una constante $K(\alpha) > 0$ tales que*

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t))\} \leq 2^{\frac{\tau}{\alpha}}\Big(S + K(\alpha)\Delta(T)\Big), \tag{2.56}$$

donde $K(\alpha)$ denota una constante que depende de α.

Demostración. Recordemos que $2^{\frac{\tau}{\alpha}}\Big(S + K(\alpha)\Delta(T)\Big)$ es finito pues S también lo es.

Construyamos la sucesión $(\mathcal{A}'_n)_{n\geq 0}$ de la siguiente manera. Sea $\mathcal{A}'_n = \{T\}$ si $n \leq \tau$, así $|\mathcal{A}'_n| = 1 = N_0 \leq N_n$. Como $\Delta(A'_n(t)) \leq \Delta(T)$, entonces

$$\textstyle\sum_{n\leq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t)) \leq \Delta(T)\sum_{n\leq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}} = \Delta(T)2^{\frac{\tau}{\alpha}} + \Delta(T)\sum_{n\leq\tau-1} 2^{\frac{n}{\alpha}},$$

luego

$$\sum_{n\leq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t)) \leq \Delta(T)2^{\frac{\tau}{\alpha}}(1 + \sum_{n\leq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}) = \Delta(T)2^{\frac{\tau}{\alpha}}K(\alpha), \tag{2.57}$$

si $K(\alpha) = 1 + \sum_{n\leq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}$.

Ahora, si $n \geq \tau$, sea $\mathcal{A}'_n = \mathcal{A}_{n-\tau}$, asi $|\mathcal{A}'_n| = |\mathcal{A}_{n-\tau}| \leq N_n$. Para este caso

$$\textstyle\sum_{n\geq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t)) = 2^{\frac{\tau}{\alpha}}\Big(2^{\frac{0}{\alpha}}\Delta(A'_\tau(t)) + 2^{\frac{1}{\alpha}}\Delta(A'_{\tau+1}(t)) + 2^{\frac{2}{\alpha}}\Delta(A'_{\tau+2}(t)...\Big),$$

como $\mathcal{A}'_n = \mathcal{A}_{n-\tau}$ entonces $\mathcal{A}'_{n+\tau} = \mathcal{A}_n$, se sigue entonces que

$$\sum_{n\geq\tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t)) = 2^{\frac{\tau}{\alpha}}\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n(t)). \tag{2.58}$$

Por lo tanto de (2.57) y (2.58) para $n \geq 0$ obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n'(t)) &= \sum_{n\leq \tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n'(t)) + \sum_{n\geq \tau} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n'(t)) \\
&\leq \Delta(T)2^{\frac{\tau}{\alpha}}K(\alpha) + 2^{\frac{\tau}{\alpha}}\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n(t)).
\end{aligned} \tag{2.59}
$$

Como $2^{\frac{\tau}{\alpha}} > 0$ entonces de (2.59) y de la definición de S se sigue que

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A_n'(t))\} \leq 2^{\frac{\tau}{\alpha}}(\Delta(T)K(\alpha) + S). \tag{2.60}$$

Cabe mencionar que $K(\alpha)$ no depende de las sucesiones admisibles. □

La desigualdad

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t\}] \leq L\gamma_2(T,d) \tag{2.61}$$

fue la que principalmente nos motivó a estudiar las funcionales. El siguiente corolario nos permite dar una cota que solo involucra a las funcionales. De hecho solo involucra la primera funcional, lo que nos exime de trabajar con sucesiones admisibles de T. Es conveniente recordar que como T está acotado entonces $\Delta(T)$ es finito.

Corolario 6. *Sea $(F_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de funcionales en T que satisface la condición de crecimiento para $r \geq 4$, $\beta = 1$, $\tau = 1$ y $\theta(n) = c2^{\frac{n}{2}}$, donde $c > 0$. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\gamma_2(T,d) \leq \frac{Lr}{c}(F_0(T) + \Delta(T)). \tag{2.62}$$

Demostración. Por el Teorema de Talagrand podemos encontrar una sucesión creciente de particiones $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ de T con $|\mathcal{B}_n| \leq N_{n+1}$ tal que

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta^{\beta}(B_n(t))\} \leq \frac{L_0(2r)}{c}\Big[\frac{F_0(T)}{\xi - 1} + \Delta(T)\Big]. \tag{2.63}$$

Como

$$\tfrac{L_0(2r)}{c}\Big[\tfrac{F_0(T)}{\xi-1} + \Delta(T)\Big] = \tfrac{L_0(2r)}{c}\Big[\tfrac{F_0(T)+(\xi-1)\Delta(T)}{\xi-1}\Big],$$

y $\xi - 1 \leq 1$, se sigue que

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta^{\beta}(B_n(t))\} \leq \frac{L_1(r)}{c}\Big[F_0(T) + \Delta(T)\Big], L_1 = \frac{L_0 2}{\xi - 1}. \tag{2.64}$$

Por el Corolario 5, podemos encontrar una sucesión admisible $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ de T y una constante $K(2) > 0$, tales que

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta(A_n(t))\} \leq 2^{\frac{1}{2}}\Big(S + K(2)\Delta(T)\Big), \tag{2.65}$$

con $S = \sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta(B_n(t))\}$.
Entonces de (2.64) y (2.65) se deduce que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta(A_n(t))\} &\leq 2^{\frac{1}{2}}\Big\{\frac{L_1(r)}{c}\Big[F_0(T) + \Delta(T)\Big] + K(2)\Delta(T)\Big\} \\
&\leq 2^{\frac{1}{2}}r\Big\{\frac{L_1}{c}\Big[F_0(T) + \Delta(T)\Big] + K(2)\Delta(T)\Big\} \\
&= 2^{\frac{1}{2}}r\Big\{\frac{L_1\Big[F_0(T) + \Delta(T)\Big] + cK(2)\Delta(T)}{c}\Big\}.
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Si $L_2 = \text{máx}\{L_1, cK(2)\}$, se sigue que

$$\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta(A_n(t))\} \leq 2^{\frac{1}{2}}r\Big\{\frac{L_2}{c}\Big[F_0(T)+2\Delta(T)\Big] \leq \frac{Lr}{c}(F_0(T)+\Delta(T)), \tag{2.67}$$

con $L = 2^{\frac{1}{2}}L_2$. Por lo tanto, $\gamma_2(T, d) \leq \frac{Lr}{c}(F_0(T) + \Delta(T))$.
Así $\mathbb{E}(\sup_{t\in T}\{X_t\}) \leq \dfrac{L}{c}(F_0(T) + \Delta(T))$. □

Una de las consecuencias más importantes del teorema de Talagrand es el siguiente corolario que jugará un papel muy importante para el tema principal de nuestro trabajo.

Corolario 7. *Sean (T, d) $(T \neq \emptyset)$ un espacio métrico y $\tau' \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\{T_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de subconjuntos de T con $|T_0| = 1$ y $|T_n| \leq N_{n+\tau'}, \forall n \geq 1$.
Para cada $\alpha, S > 0$ definimos*

$$U = \{t \in T; \sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}} d(t, T_n) \leq S\}. \tag{2.68}$$

Entonces existe $K > 0$ $(K = K(\alpha, \tau'))$ tal que:

$$\gamma_\alpha(U, d) \leq K(\alpha, \tau')S,$$

donde $K(\alpha, \tau')$ denota una constante que depende de α y τ'.

Demostración. Sea $A \subset U$. Para cada $n \geq 0$ definimos

$$F_n(A) = \sup \sum_{k\geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(t, T_k).$$

Por la Observación 8, la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de funcionales. Más aún, veamos que esta sucesión cumple con la condición de crecimiento para $\tau = \tau' + 1$, $r = 4$, $\beta = 1$ y $m = N_{n+\tau'+1}$ (y también para una función θ que determinaremos en la demostración).
Sean $a > 0$, $\epsilon > 0$ y n fijo. Consideremos $t_1, \ldots, t_m$ puntos en U tales que

$$\text{si } 1 \leq l \neq l' \leq m \text{ entonces } a \leq d(t_l, t_{l'}), \tag{2.69}$$

y subconjuntos $H_1, \ldots, H_m$ de U, tales que $H_l \subset B(t_l, \frac{a}{4})$ para $l, \ldots, m$.
Por definición de F_{n+1} y de supremo, existe $u_l \in H_l$ tal que:

$$F_{n+1}(H_l) - \epsilon \leq \sum_{k\geq n+1} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(u_l, T_k). \tag{2.70}$$

Por la condición en (2.69) se sigue que para cada $1 \leq l \neq l' \leq m$, las bolas $B(t_l, \frac{a}{2})$ son ajenas dos a dos. Entonces hay m bolas ajenas. Como $|T_n| \leq N_{\tau+1}$, entonces existe $l \leq m$, tal que $\frac{a}{2} \leq d(t_l, T_n)$. Del hecho que $u_l \in H_l \subset B(t_l, \frac{a}{4})$, entonces $d(t_l, T_n) - d(t_l, u_l) = \frac{a}{4} \leq d(u_l, T_l)$. Así obtenemos que

$$2^{\frac{n}{\alpha}} \frac{(a}{4)} + \sum_{k\geq n+1} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(u_l, T_k) \leq \sum_{k\geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(u_l, T_k).$$

De (2.70), se sigue que

$$2^{\frac{n}{\alpha}-2} a + F_{n+1}(H_l) - \epsilon \leq \sum_{k\geq n} 2^{\frac{k}{\alpha}} d(u_l, T_k).$$

Como $u_l \in H_l$ y la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente, entonces

$$2^{\frac{n}{\alpha}-2} a + F_{n+1}(H_l) - \epsilon \leq F_n(\bigcup_{l\leq m} H_m). \tag{2.71}$$

Así las cosas, definiendo $\theta(n+1) = 2^{\frac{n}{\alpha}-2} a$ se deduce que la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisface la condición de crecimiento.
Es necesario mencionar que por la Observación 6 la función $\theta(n+1) = 2^{\frac{n}{\alpha}-2} a$ satisface las condición (4.3).
Luego, por el Teorema de Talagrand podemos encontrar una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de particiones de U y una constante $L > 0$ tales que $|A_n| \leq N_{n+\tau'+1}$ y

$$\sup_{t\in U}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}-2} a \Delta(A_n(t))\} \leq 4L\Big[\frac{F_0(U)}{\xi - 1} + 2^{-2}\Delta(U)\Big].$$

Luego, de la definición de S

$$a2^{-2}\sup_{t\in U}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{\alpha}} \Delta(A_n(t))\} = a2^{-2} S \leq 4L\Big[\frac{F_0(U)}{\xi - 1} + 2^{-2}\Delta(U)\Big]. \tag{2.72}$$

Por el Corolario 5, podemos encontrar una sucesión admisible $(\mathcal{A}'_n)_{n\geq 0}$ de particiones de U y una constante $K(\alpha)$ tales que

$$\sup_{t\in U}\{\sum_{n\geq 0}2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t))\}\leq 2^{\frac{\tau'}{\alpha}}\Big(S+K(\alpha)\Delta(U)\Big),$$

combinando la expresión anterior con la desigualdad en (2.72) obtenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t\in U}\{\sum_{n\geq 0}2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t))\} &\leq 2^{\frac{\tau'}{\alpha}}\Big[16L\Big(\frac{F_0(U)}{\xi-1}+2^{-2}\Delta(T)\Big)+K(\alpha)\Delta(U)\Big]\\ &= 2^{\frac{\tau'}{\alpha}}\Big[16L\Big(\frac{F_0(U)}{\xi-1}\Big)+(4L+K(\alpha))\Delta(U)\Big].\end{aligned}$$

Luego, de la definición de F_n se sigue que $F_0(U)\leq S$. Además, para $t,s\in U$

$$d(t,s)\leq d(t,T_0)+d(s,T_0),$$

pero $d(t,T_0)\leq S$ y $|T_0|\leq 1$, de donde conseguimos que $d(t,s)\leq d(t,T_0)+d(s,T_0)\leq 2S$ y entonces $\Delta(U)\leq 2S$. Por lo tanto

$$\sup_{t\in U}\{\sum_{n\geq 0}2^{\frac{n}{\alpha}}\Delta(A'_n(t))\}\leq 2^{\frac{\tau'}{\alpha}+1}\Big[\Big(\frac{16L}{\xi-1}\Big)+4L+K(\alpha)\Big]S.$$

Si

$$K(\alpha,\tau')=2^{\frac{\tau'}{\alpha}+1}\Big[\Big(\tfrac{16L}{\xi-1}\Big)+4L+K(\alpha)\Big],$$

entonces de la definición de $\gamma_\alpha(U,d)$ concluimos que $\gamma_\alpha(U,d)\leq K(\alpha,\tau')S$. □

El resultado anterior es consecuencia de los Teoremas de medidas mayorizantes y Talagrand. El resultado que sigue es en el fondo el objetivo principal de los capítulos anteriores porque es una herramienta indispensable para la demostración del Lema 5.

Corolario 8. *Sea (T,d) un espacio métrico. Si $\tau'=0$ y $T=U$, entonces*

$$\gamma_\alpha(T,d)\leq K(\alpha)\sup_{t\in T}\sum_{n\geq 0}2^{\frac{n}{\alpha}}d(t,T_n). \tag{2.73}$$

Demostración. Si $\tau'=0$, entonces en las hipótesis del Corolario 7, estamos considerando una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de T con $|T_0|=1$ y $|T_n|\leq N_n$. También en esta caso definimos $K(\alpha,\tau')=K(\alpha)$.
Luego, si $U=T$ entonces de la definición en (2.68)

$$\text{Para cada } t\in T,\ \sum_{n\geq 0}2^{\frac{n}{\alpha}}d(t,T_n)\leq S,$$

y del corolario 7

$$\gamma_\alpha(T,d)\leq K(\alpha)S.$$

Por lo tanto si tomamos $S=\sup_{t\in T}\sum_{n\geq 0}2^{\frac{n}{\alpha}}d(t,T_n)$ se sigue (2.73). □

Capítulo 3

Procesos Estocásticos Rademacher

En este capítulo daremos algunos resultados que nos servirán de ingredientes para demostrar el Teorema BL (la Conjetura de Bernoulli).
Un resultado fundamental en este capítulo es el *lema de particiones*, que es el punto de partida para la prueba de la conjetura. Los resultados que obtendremos en este capítulo se encuentran principalmente en [9], [7] y [2].

3.1. Acotación para Procesos Rademacher

De ahora en adelante trabajaremos en el espacio ℓ^2 a menos que se diga lo contrario. Recordemos que para $t \in \ell^2$,

$$\|t\|_2^2 = \textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} |t_i|^2.$$

Decimos que ϵ es una variable aleatoria *Rademacher* si

$$P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}.$$

Para $T \subset \ell^2$ definimos la siguiente cantidad

$$b(T) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T} \sum_{i\in I} t_i \epsilon_i]. \tag{3.1}$$

Observemos que T no denota el tiempo sino un subconjunto de ℓ^2.

3.1.1. Cotas superiores para $b(T)$

En las siguientes proposiciones obtenemos algunas cotas superiores de la cantidad $b(T)$.
Como las variables aleatorias ϵ_i toman valores 1 y -1, entonces $|\epsilon_i| = 1$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Así, obtenemos el siguiente resultado que acota superiormente a $b(T)$.

Proposición 3.1. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico Bernoulli, entonces*

$$b(T) \leq \sup_{t\in T}\{\|t\|_1\}. \tag{3.2}$$

Consideremos ahora una sucesión $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias normales estándar independientes y definimos

$$G_t = \sum_{i\in I} t_i g_i.$$

Entonces para $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ observemos que $\{G_t\}_{t\in T}$ es un proceso gaussiano. Para $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ definimos

$$g(T) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i g_i]. \tag{3.3}$$

La siguiente proposición nos da una cota superior para $b(T)$ que depende de $g(T)$.

Proposición 3.2. *Sean $\{X_t\}_{t\in T}$ y $\{G_t\}_{t\in T}$ procesos Bernoulli y gaussiano respectivamente. Supongamos que la sucesión $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es independiente de la sucesión $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces*

$$b(T) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}g(T). \tag{3.4}$$

Demostración. Como $\epsilon_i = 1$ ó $\epsilon_i = -1$ entonces

$$g(T) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i g_i] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i|g_i|].$$

Por la desigualdad de Jensen

$$\sup_{t\in T}\mathbb{E}[\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i|g_i|] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i|g_i|].$$

Como $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es independiente de $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\mathbb{E}|g_i| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i] \leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i|g_i|]] = g(T).$$

□

Para dar la siguiente proposición observemos lo siguiente.

Observación 9. *Sean* $T_1 \neq \emptyset, T_2 \neq \emptyset \subset \ell^2$*. Si* $T \subset T_1 + T_2$ *entonces*

$$b(T) \leq b(T_1) + b(T_2),$$

donde $T_1 + T_2 = \{t^1 + t^2; t^1 \in T_1 \text{ y } t^2 \in T_2\}$.

Demostración. Como $T \subset T_1 + T_2$, por definición de $b(T)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} b(T) &\leq b(T_1 + T_2) \\ &\leq b(T_1) + b(T_2). \end{aligned}$$

□

Supongamos que $T \subset T_1 + T_2$, así definimos $b^*(T)$ como

$$b^*(T) = \text{ínf}\{\sup_{t \in T} \|t\|_1 + L\gamma_2(T_2) \ ; \ T \subset T_1 + T_2\}. \tag{3.5}$$

La siguiente proposición nos dará otra manera de acotar superiormente a $b(T)$ bajo el supuesto de que T se pueda descomponer.

Proposición 3.3. *Sean* $T_1 \neq \emptyset, T_2 \neq \emptyset \subset \ell^2$*. Si* $T \subset T_1 + T_2$ *entonces existe una constante* $L \in \mathbb{R}^+$ *tal que*

$$b(T) \leq Lb^*(T). \tag{3.6}$$

Demostración. Como $T \subset T_1 + T_2$ entonces de la Observación 9 obtenemos que $b(T) \leq b(T_1) + b(T_2)$.
De la Proposición 3.1 se tiene que $b(T_1) \leq \sup_{t \in T_1}\{\|t\|_1\}$. Por otro lado, de la Proposición 3.2 se sigue que $b(T_2) \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} g(T_2)$, luego por el Teorema 4 (el Teorema de medidas mayorizantes) existe $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^+$ tal que $g(T_2) \leq \mathbf{L}\gamma_2(T_2)$. Entonces $b(T_2) \leq L\gamma_2(T_2)$ con $L = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \mathbf{L}$. Así

$$b(T) \leq \sup_{t \in T_1}\{\|t\|_1\} + L\gamma_2(T_2).$$

Por lo tanto de la Definición de $b^*(T)$ se sigue (3.6). □

3.1.2. Cotas inferiores para $b(T)$

Como para cada $i \in \mathbb{N}$, $P(\epsilon = 1) = P(\epsilon = -1) = \frac{1}{2}$, entonces $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso estocástico simétrico, así obtenemos el siguiente resultado que nos da una cota inferior para $b(T)$.

Proposición 3.4. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico Bernoulli. Entonces existe $L \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\Delta_2(T) \leq Lb(T) = L\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i\epsilon_i].$$

Demostración. Sean $s, t \in T$. Por definición de $b(T)$ obtenemos que

$$\mathbb{E}[\text{máx}\{X_t, X_s\}] \leq b(T).$$

Pero

$$\mathbb{E}[\text{máx}\{X_t, X_s\}] = \mathbb{E}[X_s + \text{máx}\{X_t - X_s, 0\}] = \mathbb{E}[X_s] + \mathbb{E}[\text{máx}\{X_t - X_s, 0\}].$$

Como $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico simétrico, entonces por la Observación 1 se deduce que $\mathbb{E}[X_s] = 0$ para cada $s \in T$. Luego,

$$\mathbb{E}[\text{máx}\{X_t - X_s, 0\}] \leq b(T).$$

Como

$$\text{máx}\{X_t - X_s, 0\} = \frac{X_t - X_s}{2} + \frac{|X_t - X_s|}{2},$$

usando nuevamente la Observación 1 para $\frac{X_t}{2}$ y $\frac{X_s}{2}$, se sigue que

$$\tfrac{1}{2}\mathbb{E}[|X_t - X_s|] \leq b(T).$$

Como $\mathbb{E}[|X_t - X_s|] = \mathbb{E}[|\sum_{i\in\mathbb{N}}(t_i - s_i)\epsilon_i|]$, por la desigualdad de Khinchin (ver la Proposición A.1 del apéndice A) existe $M^* \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\tfrac{1}{M^*}\left[\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}}(t_i - s_i)^2\right] \leq \mathbb{E}[|\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}}(t_i - s_i)\epsilon_i|],$$

por lo tanto se sigue que $\frac{2}{M^*}\|t - s\|_2 \leq b(T)$. Definiendo $M = \frac{M^*}{2}$ queda demostrado lo que queríamos. □

Para dar la siguiente cota inferior para $b(T)$ es necesario definir una función $1 - $ *Lipschitz*.

Definición 11. *Sea $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que ϕ es una función 1- Lipschitz si para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que*

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|.$$

Proposición 3.5. *Sea $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de funciones 1- Lipschitz tales que $\phi_i(0)=0$ para toda $i\in\mathbb{N}$. Entonces para $T\subset\ell^2$*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}\phi_i(t_i)\epsilon_i]\leq b(T)=\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}t_i\epsilon_i]. \tag{3.7}$$

Demostración. Demostraremos que para cualquier conjunto finito $F\subset\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t_i)\epsilon_i]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in F}\sum_{i=1}^{n}t_i\epsilon_i]. \tag{3.8}$$

Demostraremos (3.8) por inducción sobre n.

Para $n=1$, queremos probar que para $F\subset\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F}\phi_1(t_1)\epsilon_1]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in F}t_1\epsilon_1].$$

Esto último pasa si y solo si para $G\subset\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in G}\{\phi_1(t_1)\epsilon_1+t_2\}]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in G}\{t_1\epsilon_1+t_2\}],\ t=(t_1,t_2). \tag{3.9}$$

Demostremos entonces (3.9).
Sean $s=(s_1,s_2), s'=(s_1',s_2')\in G$. Luego

$$\text{máx}\{s_1'+s_2'-s_1+s_2, s_1+s_2-s_1'+s_2'\}\leq 2\mathbb{E}[\sup_{(t_1,t_2)\in G}\{t_1\epsilon_1+t_2\}],$$

pero

$$\text{máx}\{s_1'+s_2'-s_1+s_2, s_1+s_2-s_1'+s_2'\}=s_2+s_2'+|s_1'-s_1|.$$

Como ϕ_1 es 1-lipschitz entonces $\phi(s_1')-\phi(s_1)\leq|\phi(s_1')-\phi(s_1)|\leq|s_1'-s_1|$. Así, para cualquier $s=(s_1,s_2), s'=(s_1',s_2')\in G$

$$\phi(s_1')+s_2'-\phi(s_1)+s_2\leq 2\mathbb{E}[\sup_{(t_1,t_2)\in G}\{t_1\epsilon_1+t_2\}],$$

por lo que se sigue (3.9) y por lo tanto se cumple (3.8) para $n=1$.
Supongamos ahora que para $F\subset\mathbb{R}^{n-1}$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F}\sum_{i=1}^{n-1}\phi_i(t_i)\epsilon_i]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in F}\sum_{i=1}^{n-1}t_i\epsilon_i].$$

Entonces queremos demostrar que para $F'\subset\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F'}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t_i)\epsilon_i]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in F'}\sum_{i=1}^{n}t_i\epsilon_i]. \tag{3.10}$$

Pero (3.10) pasa si y solo si

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F'}\{\sum_{i=1}^{n-1}\phi_i(t_i)\epsilon_i+\phi_n(t_n)\epsilon_n\}]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in F'}\{\sum_{i=1}^{n-1}t_i\epsilon_i+t_n\epsilon_n\}],$$

y esto pasa si y solo si (por hipótesis de inducción)

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F''}\phi_n(t_n)\epsilon_n]\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in F''}t_n\epsilon_n],\ F''\subset\mathbb{R},$$

y esto último se demuestra de la misma manera que la base de inducción.
Ahora, como $F\subset T$ entonces

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F}\sum_{i=1}^{n}t_i\epsilon_i]\leq b(T)=\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}t_i\epsilon_i],$$

(esto se demostrará más en general en la Observación 18, pág.61), por lo tanto para cualquier conjunto finito F se cumple que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in F}\sum_{i=1}^{n}\phi_i(t_i)\epsilon_i]\leq b(T)=\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}t_i\epsilon_i].$$

Por lo tanto, por la definición en la ecuación (1.2) (página 8) se sigue lo que queríamos demostrar.
Es bueno mencionar que como $|\phi_t(t_i)|=|\phi_t(t_i)-\phi_i(0_i)|\leq|t_i|$, entonces

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\phi_t(t_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\leq\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|t_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

pero $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}\in\ell^2$, por lo tanto $\{\phi_i(t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ para cada $t\in T\subset\ell^2$. □

Concluimos esta sección con una consecuencia de la Proposición 3.5.

Corolario 9. *Sean $\emptyset\neq J\subset\mathbb{N}$ y $\{f_{i,j}\}_{i\in\mathbb{N},j\in J}$ y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dos familias de funciones en $\mathbb{R}$. Supongamos que*

1. *Para toda $j\in J$ y $x,y\in\mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{j\in J}f_{i,j}\epsilon_{i,j}(0)=0$ y*

$$\sum_{i\in J}|f_{i,j}(x)-f_{i,j}(x)|\leq|g_i(x)-g_i(y)|,\tag{3.11}$$

y

2. *Para $\emptyset\neq T\subset\ell^2$ se tiene que $\{g_i(t_i)\}_{i\in\mathbb{N}}\in\ell^2$ y $\{f_{i,j}(t_i)\}_{i\in\mathbb{N},i\in J}\in\ell^2(\mathbb{N}\times J)$ para toda $t\in T$.*

Entonces

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},j\in J}f_{i,j}(t_i)\epsilon_{i,j}]\leq\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}g_i(t_i)\epsilon_i].\tag{3.12}$$

Demostración. Para la demostración consideraremos sucesiones $\{\epsilon_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times J}$ y $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ independientes entre sí. Así que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},j\in J} f_{i,j}(t_i)\epsilon_{i,j}] = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j\in J} f_{i,j}(t_i)\epsilon_{i,j}\Big)\epsilon_i]. \tag{3.13}$$

Como $\epsilon_{i,j} = 1$ ó $\epsilon_{i,j} = -1$ para toda $(i,j) \in \mathbb{N}\times J$, entonces para toda $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\Big|\sum_{j\in J} f_{i,j}(x)\epsilon_{i,j} - \sum_{j\in J} f_{i,j}(y)\epsilon_{i,j}\Big| \leq \sum_{i\in J} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(x)|,$$

pero por la Hipótesis 1 se sigue que

$$\Big|\sum_{j\in J} f_{i,j}(x)\epsilon_{i,j} - \sum_{j\in J} f_{i,j}(y)\epsilon_{i,j}\Big| \leq |g_i(x) - g_i(y)|.$$

Como $\sum_{j\in J} f_{i,j}\epsilon_{i,j}(0) = 0$ para toda $j \in J$ y $x, y \in \mathbb{R}$ (por la hipótesis 1), por la Proposición 3.5 obtenemos que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}\Big(\sum_{j\in J} f_{i,j}(t_i)\epsilon_{i,j}\Big)\epsilon_i] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} g_i(t_i)\epsilon_i],$$

pero por (3.13) concluimos que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},j\in J} f_{i,j}(t_i)\epsilon_{i,j}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} g_i(t_i)\epsilon_i],$$

que es lo que se quería demostrar. Cabe mencionar que la Hipótesis 2 se usó para que la cantidad $\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},j\in J} f_{i,j}(t_i)\epsilon_{i,j}]$ tuviera sentido en ℓ^2. □

El Corolario 9 se usará principalmente en el Capítulo 4.

3.2. Particiones

En esta sección demostraremos el *Lema de particiones* (lema 5).
Recordemos que una **sucesión admisible de particiones** $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ de T es una sucesión creciente de particiones de T tales que la $|\mathcal{A}_0| = 1$ y $|\mathcal{A}_n| \leq 2^{2^n}$ (ver definición 6). Llamamos $A_n(t)$ al único elemento de la partición $\mathcal{A}_n$ que contiene a t para $t \in T$.
A cada $A \in \mathcal{A}_n$ le asociaremos un punto $\pi_n(A) \in T \subset \ell^2$ (entonces $\pi_n(A) = \{\pi_n(A)_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, es decir, es una sucesión en ℓ^2) y un entero $j_n(A)$. Para el caso en que $A = A_n(t)$, definimos $\pi_n(A) = \pi_n(t)$ *y* $j_n(A) = j_n(t)$.

Proposición 3.6. *Sean* $n_0 \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *(fijos) tal que* $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$. *Entonces*

$$\sum_{n_0 \leq n} \alpha^n \leq 2\alpha^{n_0}.$$

Demostración. Definimos $s_n = \alpha^{n_0} + \ldots + \alpha^{n_0+n}$, entonces

$$\alpha s_n = \alpha^{n_0+1} + \ldots + \alpha^{n_0+n+1},$$

luego

$$s_n - \alpha s_n = \alpha^{n_0} - \alpha^{n_0}\alpha^{n+1},$$

así,

$$s_n = \tfrac{\alpha^{n_0} - \alpha^{n_0}\alpha^{n+1}}{1-\alpha}.$$

Como $|\alpha| \leq \frac{1}{2} < 1$, se sigue que

$$\sum_{n_0 \leq n} \alpha^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n_0} - \alpha^{n_0}\alpha^{n+1}}{1-\alpha} = \frac{\alpha^{n_0}}{1-\alpha}.$$

Pero

$$\tfrac{\alpha^{n_0}}{1-\alpha} \leq 2\alpha^{n_0},$$

si y solamente si $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto $\sum\limits_{n_0 \leq n} \alpha^n \leq 2\alpha^{n_0}$. □

Corolario 10. *Sean $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no decreciente de naturales, $k \in \mathbb{N}$ $(fijo)$ y $2 \leq r$ con $r \in \mathbb{Z}$. Entonces*

$$\sum_{j_k \leq j_n} r^{-j_n} \leq 2r^{-j_k}.$$

Demostración. Como $r \leq 2$ entonces $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$. Luego, si $\alpha = \frac{1}{r}$ entonces $|\alpha| = |\frac{1}{r}| \leq \frac{1}{2}$, por lo tanto por la proposición 3.6

$$\sum_{j_k \leq j_n} r^{-j_n} \leq 2\alpha^{j_k} = 2r^{-j_k}.$$

□

Lema 5. Lema de Particiones. *Sean $M \in \mathbb{R}^+$, $2 \leq r$, $r \in \mathbb{Z}$, $\emptyset \neq T \subset \ell^2$, $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión admisible de T y para cada $A \in \mathcal{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión $\{j_n(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no decreciente de enteros positivos. Supongamos que se cumple lo siguiente.*

1. *Para cada $A \in \mathcal{A}_n$ existen un entero (positivo) $j_n(A)$ y un punto $\pi_n(A) \in T$ que satisfacen lo siguiente.*
   Si para cada $n \geq 1$ se tiene que $A \subset A'$ con $A \in \mathcal{A}_n$ y $A' \in \mathcal{A}_{n-1}$ entonces ocurre que

(1a) *Si* $j_n(A) = j_{n-1}(A')$ *entonces* $\pi_n(A) = \pi_{n-1}(A')$ *ó*

(1b) *Si* $j_{n-1}(A') < j_n(A)$ *entonces* $\pi_n(A) \in A'$ *y para todo* $t \in A$

$$\sum_{i \in I_n(A)} \min\{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_n(A)}\} \leq M2^n r^{-j_n(A)}, \tag{3.14}$$

donde
$I_n(A) = \{i \in \mathbb{N}; |\pi_{k+1}(A)_i - \pi_k(A)_i| \leq r^{-j_k(A)}, 0 \leq k \leq n-1\}$.

2. *Para cada* $s, t \in T$ *se tiene que* $\|t - s\|_2 \leq \sqrt{M} r^{-j_0(T)}$.

Entonces concluimos que existen conjuntos $T_1 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$ *y una constante* $L > 0$ *tales que* $T \subset T_1 + T_2$ *y*

(i) $\gamma_2(T_2) = \inf\{\sup_{t \in T}\{\sum_{n \geq 0} 2^{\frac{n}{2}} \Delta_{\ell^2}(A_n(t))\}\} \leq L\sqrt{M} \sup_{t \in T} \sum_{n \geq 0} 2^{-n} r^{-j_n(t)}$.

(ii) $\sup_{t^1 \in T_1}\{\|t^1\|_1\} \leq LM \sup_{t \in T} \sum_{n \geq 0} 2^{-n} r^{-j_n(t)}$.

En la demostración trabajaremos para el caso cuando $A = A_n(t)$, en este caso $I_n(A)$ queda definido de la siguiente manera.

$$I_n(A) = I_n(t) = \{i \in \mathbb{N}; |\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i| \leq r^{-j_k(t)}, 0 \leq k \leq n-1\}.$$

A continuación probaremos el lema de particiones. Solo en esta prueba denotaremos a $a \wedge b = \min\{a, b\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Esta demostración resulta un poco laboriosa.

Demostración. En la primera parte de la demostración construiremos los conjuntos T_1 y T_2 en función de $\pi(t)$, que a su vez estará determinado por una cantidad que denotaremos $m(t, i)$.
En la segunda parte de la demostración acotaremos las cantidades

$$\gamma_2(T_2) \text{ y } \sup_{t^1 \in T_1}\{\|t^1\|_1\}.$$

Si $\sum_{n \geq 0} 2^n r^{-j_n(t)} = \infty$, entonces ya no hay nada que probar y se sigue la conclusión del lema.
Supongamos que

$$\sum_{n \geq 0} 2^n r^{-j_n(t)} < \infty.$$

Así, para cada $t \in T$ se tiene que

$$\lim_{n \to \infty} j_n(t) = \infty.$$

Para $t \in T$ e $i \in \mathbb{N}$, definimos $m(t,i)$ como sigue

$$m(t,i) = \begin{cases} \text{ínf}\{n \in \mathbb{N}; r^{-j_n(t)} < |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i|\} & \text{si} \\ \quad \{n \in \mathbb{N}; r^{-j_n(t)} < |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i|\} \neq \emptyset, & \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que

$$I_n(t) = \{i \in \mathbb{N}; n \leq m(t,i)\} \ para \ n \geq 0. \tag{3.15}$$

Pues, si $n \leq m(t,i)$ entonces $|\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leq r^{-j_n(t)}$ ($I_n(t)$, k toma valores entre 0 a $k-1$), así $i \in I_n(t)$.
Si $i \in I_n(t)$, entonces $|\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i| \leq r^{-j_k(t)}$, por lo que $n \leq m(t,i)$. Por lo tanto se tiene (3.15).

Ahora, veamos que

$$|\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leq r^{-j_n(t)} \chi_{\{j_n(t) < j_{n+1}(t)\}} \ para \ 0 \leq n < m(t,i). \tag{3.16}$$

Si $0 \leq n < m(t,i)$ entonces $|\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leq r^{-j_n(t)}$. Luego, por la Hipótesis $1a$, si $j_{n+1}(t) = j_n(t)$ entonces $\pi_{n+1}(t) = \pi_n(t)$. Por lo que se sigue (3.16).
Si $\pi_{n+1}(t) \neq \pi_n(t)$, nuevamente por $1a$, $j_n(t) < j_{n+1}(t)$. Por la Hipótesis $1b$ se tiene que $\pi_{n+1}(t) \in A_n(t)$ lo que quiere decir que tiene sentido hablar de $I_n(t)$. Luego, por la definición de I_n se sigue (3.16).

Ahora, definimos $\pi(t)$ de la siguiente manera. Para cada $i \in \mathbb{N}$

$$\pi(t)_i = \begin{cases} \pi_{m(t,i)}(t)_i & \text{si} \quad m(t,i) < \infty, \\ \\ \pi_\infty(t)_i = \lim\limits_{n \to \infty} \pi_n(t)_i & \text{si} \quad m(t,i) = \infty. \end{cases} \tag{3.17}$$

Veamos que el límite en (3.17) existe. Como $m(t,i) = \infty$, entonces para toda $k \in \mathbb{N}$; $k < m(t,i)$. Luego usando el Corolario 10 y que $\{j_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de enteros positivos, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leq \sum_{n \leq k < m(t,i)} |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leq \sum_{j \geq j_n(t)} r^{-j} \leq 2r^{-j_n(t)},$$

y como $\lim\limits_{n \to \infty} j_n(t) = \infty$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} 2r^{-j_n(t)} = 0$. Así, para $i \in \mathbb{N}$ (fija), se sigue que $\{\pi_n(t)_i\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto el límite en (3.17) existe.
Definimos a los conjuntos T_1 y T_2 como sigue

$$T_1 = \{t - \pi(t); t \in T\} \text{ y } T_2 = \{\pi(t); t \in T\},$$

entonces $T \subset T_1 + T_2$.

Continuemos con la segunda parte de la demostración, que consiste en acotar superiormente $\sup\limits_{t^1 \in T}\{\|t^1\|_1\}$ y $\gamma_2(T_2)$.
Para acotar $\gamma_2(T_2)$ construiremos subconjuntos U_n de ℓ^2 de la siguiente manera. Definimos

$$U_n = \{\pi_{m(t,i)\wedge n}(t); t \in T\} \text{ y } U_0 = \{\pi_0(T)\},$$

donde $\pi_{m(t,i)\wedge n}(t) = \{\pi_{m(t,i)\wedge n}(t)_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Si $s \in A_n(t)$ entonces (por la definición de $A_n(t)$) $\pi_k(s) = \pi_k(t)$ para $k \leq n$. Por lo tanto $m(t,i) = m(s,i)$. Consecuentemente para $s, t \in A_n(t)$,

$$\pi_{m(t,i)\wedge n}(t) = \pi_{m(t,i)\wedge n}(s).$$

Por lo tanto $|U_0| = 1$ y $|U_n| \leq |\mathcal{A}_n| \leq N_n$ para $1 \leq n$. Por el Corolario 7 del Capítulo 2 (ecuación (2.73)), existe una constante $K(2) > 0$ tal que

$$\gamma_2(T_2) \leq K(2) \sup_{t\in T}\{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} d_2(\pi(t), U_n)\}. \tag{3.18}$$

Si logramos acotar $d_2(\pi(t), U_n)$, habremos acotado $\gamma_2(T_2)$.
Por la definición de $d_2(\pi(t), U_n)$, se sigue que $d_2(\pi(t), U_n) \leq \|\pi(t) - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2$.
Pero, por la definición de $\pi(t)$,

$$\|\pi(t) - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2 \leq \lim_{l\to\infty} \|\pi_{m(t,i)\wedge l}(t)_i - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2,$$

luego

$$\lim_{l\to\infty} \|\pi_{m(t,i)\wedge l}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2 \leq \sum_{l=n}^{\infty} \|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t)_i - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)_i\|_2,$$

por lo que

$$d_2(\pi(t), U_n) \leq \sum_{l=n}^{\infty} \|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)\|_2. \tag{3.19}$$

Ahora, observemos que

$$\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t) = (\pi_{l+1}(t) - \pi_l(t))\chi_{\{l<m(t,i)\}}. \tag{3.20}$$

Para esto, notemos que si $m(t,i) \leq n$, $\pi_{m(t,i)\wedge l}(t) = \pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) = \pi_{m(t,i)}(t)$, por lo que $\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t) = 0$.
Si $l < m(t,i)$ entonces $\pi_{m(t,i)\wedge l}(t) = \pi_l(t)$ y $\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) = \pi_{l+1}(t)$. Por lo tanto, se sigue (3.20).
De (3.20) y (3.15) se deduce que

$$|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)| \leq |\pi_{l+1}(t) - \pi_l(t)|\chi_{\{|\pi_{l+1}(t)_i - \pi_l(t)_i| \leq r^{-j_l(t)}\}\cap I_l(t)}. \tag{3.21}$$

Como

$$\|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)\|_2^2 = \sum_{1\leq i} |\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t)_i - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)_i|^2,$$

entonces de (3.21) se sigue que, para cada $l \in \mathbb{N}$

$$\|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)\|_2^2 \leq \sum_{i\in I_l(t)} |\pi_{l+1}(t)_i - \pi_l(t)_i|^2 \chi_{\{|\pi_{l+1}(t)_i - \pi_l(t)_i| \leq r^{-j_l(t)}\}},$$

luego

$$\|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)\|_2^2 \leq \sum_{i\in I_l(t)} \text{mín}\{(\pi_{l+1}(t)_i - \pi_l(t)_i)^2, r^{-2j_l(t)}\}. \quad (3.22)$$

Ahora, si $j_{l+1}(t) = j_l(t)$ entonces $\pi_{l+1}(t)_i = \pi_l(t)_i$, por lo que el lado derecho de la ecuación (3.22) es cero. Por lo tanto en este caso ya queda acotado $d(\pi(t), U_n)$.
Si $\pi_{l+1}(t)_i \neq \pi_l(t)_i$, entonces por la Hipótesis ($1a$) se sigue que $j_{l+1}(t) > j_l(t)$, así por (1b) $\pi_{l+1}(t) \in A_l(t)$. Luego también por (1b)

$$\sum_{i\in I_l(t)} \text{mín}\{(\pi_{l+1}(t)_i - \pi_l(t)_i)^2, r^{-2j_l(t)}\} \leq M2^l r^{-2j_l(t)}.$$

Por lo que

$$\|\pi_{m(t,i)\wedge l+1}(t) - \pi_{m(t,i)\wedge l}(t)\|_2 \leq \sqrt{M}2^{\frac{l}{2}} r^{-j_l(t)}. \quad (3.23)$$

Luego de (3.19) y (3.23),

$$d_2(\pi(t), U_n) \leq \sum_{l=n}^{\infty} \sqrt{M}2^{\frac{l}{2}} r^{-j_l(t)}.$$

Por lo tanto

$$\gamma_2(T_2) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} d_2(\pi(t), U_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{M} \sum_{n\leq l} 2^{\frac{l}{2}} r^{-j_l(t)},$$

pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n}{2}} \sum_{n\leq l} 2^{\frac{l}{2}} r^{-j_l(t)} \leq \sum_{0\leq l} 2^{\frac{l}{2}} r^{j_l(t)} \sum_{n=0}^{l} 2^{\frac{n}{2}} \leq L \sum_{0\leq l} 2^l r^{-j_l(t)},$$

donde $L = \sum_{n=0}^{l} 2^{\frac{n}{2}}$.
Así que

$$\gamma_2(T_2) \leq L\sqrt{M} \sum_{0\leq l} 2^l r^{-j_l(t)}.$$

lo que concluye la prueba de (**i**).

Para acotar superiormente $\sup_{t^1\in T_1}\{\|t-\pi(t)\|_1\}$, trabajaremos con $\|t-\pi(t)\|_1$.
Para esto introduzcamos dos nuevas definiciones.
Para $t\in T$ e $i\in\mathbb{N}$ definimos

$$\tau(t,i)=\begin{cases}\text{ínf}\{n\geq 0;|\pi_n(t)_i-t_i|>\dfrac{1}{2}r^{-j_n(t)}\} & \text{si}\\ \{n\geq 0;|\pi_n(t)_i-t_i|>\frac{1}{2}r^{-j_n(t)}\}\neq\emptyset, & \\ \infty & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Para $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$J_n(t)=\{i\in\mathbb{N};\tau(t,i)=n\}.$$

Observemos que

$$\|t-\pi(t)\|_1=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in J_n(t)}|t_i-\pi_{m(t,i)}(t)_i|. \tag{3.24}$$

Para esto, primero notemos que $\tau(t,i)\leq m(t,i)+1$. Esto se tiene pues si $0\leq n<\tau(t,i)$ entonces $|\pi_n(t)_i-t_i|<\frac{i}{2}r^{-j_n(t)}$. Por lo tanto, para $0\leq n+1<\tau(t,i)$ se tiene que

$$|\pi_{n+1}(t)_i-\pi_nt_i|\leq|\pi_{n+1}(t)_i-t_i|+|\pi_n(t)_i-t_i|\leq r^{-j_n(t)}.$$

Luego, si $m(t,i)+1<\tau(t,i)$ entonces $|\pi_{m(t,i)+1}(t)_i-\pi_{m(t,i)}(t)_i|\leq r^{-j_{m(t,i)}(t)}$, lo que contradice la definición de $m(t,i)$, de donde $\tau(t,i)\leq m(t,i)+1$.
Por lo tanto, si $m(t,i)=\infty$ entonces $\tau(t,i)=\infty$. Así $\pi_n(t)_i=t_i$ y de la definición de $\pi(t)$ conseguimos que $\pi(t)_i=\pi_\infty(t)_i=t_i$. En este caso $\|t-\pi(t)\|_1=0$, por lo tanto cualquier número funciona como cota superior.
Supongamos ahora que $m(t,i)<\infty$. En este caso $\pi(t)_i=\pi_{m(t,i)}(t)_i$. Como

$$\|t-\pi(t)\|_1=\sum_{i=0}^{\infty}|t_i-\pi(t)_i|,$$

entonces

$$\|t-\pi(t)\|_1=\sum_{i=0}^{\infty}|t_i-\pi_{m(t,i)}(t)_i|.$$

Notemos que si $n\neq m$, entonces $J_n(t)\cap J_m(t)=\emptyset$. Así, se sigue que

$$\|t-\pi(t)\|_1=\sum_{i=0}^{\infty}|t_i-\pi_{m(t,i)}(t)_i|=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i\in J_n(t)}|t_i-\pi_{m(t,i)}(t)_i|.$$

Para acotar $\|t-\pi(t)\|_1$ trabajaremos con el lado derecho de la ecuación (3.24). Para el primer término de la suma ($J_0(t)$) se tiene que, existe una constante $M^* > 0$ tal que

$$\sum_{i\in J_0(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq M^* r^{-j_0(t)}. \tag{3.25}$$

Demostremos (3.25). Por la desigualdad del triángulo

$$|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq |t_i - \pi_0(t)_i| + |\pi_0(t)_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i|.$$

Pero

$$|\pi_0 - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq \sum_{n=0}^{m(t,i)-1} |\pi_{n+1} - \pi_n(t)_i|.$$

Como $0 \leq n < m(t,i)$, de (3.16),

$$|\pi_0 - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq \sum_{n=0}^{m(t,i)-1} r^{j_n(t)} \leq \sum_{j=j_0(t)} r^{-j}.$$

Por el Corolario 10,

$$|\pi_0(t)_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq \sum_{j=j_0(t)} r^{-j} \leq 2r^{-j_0(t)}.$$

Por otro lado si $i \in J_0(T)$, entonces $\tau(t,i) = 0$. Por lo tanto

$$\tfrac{1}{2} r^{-j_0(t)} \leq |t_i - \pi_0(t)_i|.$$

Así, $r^{-j_0(t)}|t_i - \pi_0(t)_i| \leq 2|t_i - \pi_0(t)_i|^2$, por lo que

$$|t_i - \pi_0(t)_i| \leq 2r^{j_0(t)}|t_i - \pi_0(t)_i|^2 \text{ y } r^{-j_0(t)} \leq 2|t_i - \pi_0(t)_i|,$$

entonces

$$|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq 2r^{-j_0(t)} + 2r^{j_0(t)}|t_i - \pi_0(t)_i|^2 \leq |t_i - \pi_0(t)_i|^2(4 + 2r^{j_0(t)}).$$

Como $r \geq 2$, entonces $|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq 4r^{j_0(t)}|t_i - \pi_0(t)_i|^2$. Así

$$\sum_{i\in J_0(T)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq 4r^{j_0(t)} \sum_{i\in J_0(t)} |t_i - \pi_0(t)_i|^2 \leq 4r^{j_0(t)} \sum_{i\in \mathbb{N}^*} |t_i - \pi_0(t)_i|^2.$$

Por la Hipótesis 2, se concluye que

$$\sum_{i\in J_0(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq M^* r^{-j_0(T)},$$

donde $M^* = 4r^{j_0(t)}\sqrt{M}$. Por lo tanto se tiene (3.25).

Ahora, afirmamos que para $J_n(t)$ con $1 \leq n$ ocurre que

$$\sum_{i\in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq M^* r^{-j_0(t)} + 3\sum_{n=1}^{\infty} r^{-j_{n-1}(t)}|J_n(t)|. \tag{3.26}$$

Demostremos (3.26). Por (3.25)

$$\sum_{i\in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq M^* r^{-j_0(t)} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i|. \tag{3.27}$$

Por otra parte, por la desigualdad del triángulo,

$$|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq |t_i - \pi_{n-1}(t)_i| + \sum_{k=n-1}^{m(t,i)-1} |\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i|.$$

Además, si $i \in J_n(t)$ se tiene que $n-1 < \tau(t,i) = n$ por lo que $|\pi_{n-1}(t)_i - t_i| < \frac{i}{2}r^{-j_{n-1}(t)}$. Así,

$$|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq \tfrac{i}{2}r^{-j_{n-1}(t)} + \sum_{k=n-1}^{m(t,i)-1} |\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i|.$$

Como $\tau(t,i) \leq m(t,i)+1$, por (3.16) se sigue que

$$|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq \tfrac{1}{2}r^{-j_{n-1}(t)} + \sum_{k=n-1}^{m(t,i)-1} r^{-j_n(t)}\chi_{\{j_{n+1}(t)>j_n(t)\}} \leq \sum_{j\geq j_{n-1}(t)} r^{-j}.$$

Luego, por el Corolario 10,

$$|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq \tfrac{1}{2}r^{-j_{n-1}(t)} + 2^{-j_{n-1}(t)} \leq 3^{-j_{n-1}(t)}.$$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq 3\sum_{n=1}^{\infty} r^{-j_{n-1}(t)}|J_n(t)|.$$

Usando lo anterior en la desigualdad (3.27) se sigue que

$$\sum_{i\in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leq M^* r^{-j_0(t)} + 3\sum_{n=1}^{\infty} r^{-j_{n-1}(t)}|J_n(t)|.$$

Por lo tanto se sigue (3.27).
Observemos que para $|J_n(t)|$ con $n \geq 1$ se tiene que

$$|J_n(t)| \leq 9M2^{n-1}, \tag{3.28}$$

donde M es la constante utilizada en la Hipótesis 2b.

Para esto consideraremos dos casos, cuando $\tau(t,i) < m(t,i)+1$ ó $\tau(t,i) = m(t,i)+1$.
(I). Supongamos que $\tau(t,i) < m(t,i)+1$. Si $j_{n-1}(t) = j_n(t)$ entonces $\pi_{n-1}(t) = \pi_n(t)$ (por Hipótesis 1a), entonces $m(t,i) = \infty$. Como $\tau(t,i) < m(t,i)+1$, entonces $\tau(t,i) = \infty$, por lo tanto $|J_n(t)| = 0$ y se sigue (3.28).
Ahora, supongamos que $j_n(t) < j_{n-1}(t)$. Para $i \in J_n(t)$ tenemos que $\tau(t,i) = n$, entonces $\frac{1}{2}r^{-j_n(t)} < |\pi_n(t)_i - t_i|$, así

$$\frac{1}{4}r^{-2j_n(t)} < |\pi_n(t)_i - t_i|^2. \tag{3.29}$$

Como $n = \tau(t,i) < m(t,i)+1$ entonces por (3.15) se deduce que $i \in I_n(t)$, es decir $i \in J_n(t) \cap I_n(t)$. Luego, usando la Hipótesis 1a y (3.29) se sigue que

$$\frac{1}{4}r^{-2j_n(t)}|J_n(t) \cap I_n(t)| \leq \sum_{i \in I_n(t)} \min\{(t_i - \pi_n(t)_i)^2, r^{-2j_n(t)}\} \leq M2^n r^{-2j_n(t)}. \tag{3.30}$$

(II). Si $n = \tau(t,i) = m(t,i)+1$, entonces $r^{-j_{n-1}(t)} < |\pi_n(t)_i - \pi_{n-1}t_i|$, así

$$r^{-2j_{n-1}(t)} < |\pi_n(t)_i - \pi_{n-1}t_i|^2. \tag{3.31}$$

Luego definimos

$$n' = \inf\{k \leq m(t,i); j_{k-1}(t) = j_k(t)\}.$$

Como estamos en el caso en que $j_n(t) < j_{n-1}(t)$, entonces $\pi_n(t) \in A_{n-1}(t)$ (por la Hipótesis (1*b*)). Pero por la definición de n', $A_{n-1}(t) \subset A_{n'}(t)$. Además $j_{n-1} = j_{n'}(t)(> j_{n'-1}(t))$, entonces por (1a), $\pi_{n-1}(t) = \pi_{n'}(t)$ (esto último nos sirve para poder aplicar la Hipótesis (1b)). Por la Hipótesis 1b y (3.31) se sigue que

$$\begin{aligned} r^{-2j_{n-1}(t)}|\{i; m(t,i) = n-1\}| &\leq \sum_{i \in I_{n'}(t)} \min\{(\pi_n(t)_i - \pi_{n-1}(t)_i)^2, r^{-2j_{n-1}(t)}\} \\ &\leq M2^{n-1}r^{-j_{n-1}(t)}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Como $n = \tau(t,i) \leq m(t,i)+1$, se deduce que

$$J_n(t) \subset (J_n(t) \cap I_n(t)) \cup \{i; m(t,i) = n-1\}$$

(esto ya se de demostró en (I) y (II)).
Más aún,

$$\Big(J_n(t) \cap I_n(t)\Big) \cap \{i; m(t,i) = n-1\} = \emptyset.$$

Esto se tiene pues si $i \in (J_n(t) \cap I_n(t)) \cap \{i; m(t,i) = n-1\}$, entonces $m(t,i) \geq n$ y $m(t,i) = n-1$, lo que implica que $n \leq n-1$. Pero esto es una contradicción. Por lo tanto

$$|J_n(t)| \leq |J_n(t) \cap I_n(t)| + |\{i; m(t,i) = n-1\}|.$$

Por (3.30) y (3.32) deducimos que

$$|J_n(t)| \leq M2^{n-1} + 4M2^n = 9M2^{n-1},$$

que es (3.28).

Así, la desigualdad (3.27) queda

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| &\leq M^* r^{-j_0(t)} + 27M \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} r^{-j_{n-1}(t)} \\ &\leq 28 \max\{M, M^*\} \sup_{t \in T} \{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)}\}. \end{aligned}$$

Luego

$$\|t - \pi(t)\|_1 \leq 28 \max\{M, M^*\} \sup_{t \in T} \{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)}\},$$

(recordemos que $M^* = 4r^{j_0(t)}\sqrt{M}$). Por lo tanto queda demostrado (**ii**). $\square$

Capítulo 4

Funcionales Especiales

En este capítulo el objetivo es el estudio de las funcionales $F(J, u, kj)$ en base a las funciones por pedazos $\phi_{u,v}$ (chopping maps) que definiremos en la primera sección. Estas funcionales especiales jugarán un papel importante en la demostración del *Teorema BL* fundamentalmente en la demostración constructiva del *Lema 2 de descomposición* en donde usaremos fuertemente sus propiedades. Los resultados de este capítulo se encuentran fundamentalmente en [9] y [2].

4.1. Funciones por pedazos

En esta sección definiremos un proceso Bernoulli en función de una sucesión de particiones $\{\mathcal{G}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}$ y de una función 1-Lipchitz $\phi_{u,v}$.
Todas las propiedades que obtendremos de este proceso nos servirán para las demostraciones de los resultados de las secciones 4.2 y 4.3.

Definición 12. *Sean $u, v \in \mathbb{R}$, tales que $u < v$. Definimos una función $\phi_{u,v}$ con la siguiente regla de correspondencia.*
Para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\phi_{u,v}(x) = \text{mín}\{v, \text{máx}\{x, u\}\} - \text{mín}\{v, \text{máx}\{0, u\}\}. \tag{4.1}$$

Notemos las siguientes propiedades de la función ϕ.

Observación 10. *Sean $u, v, x \in \mathbb{R}$ con u, v fijos, tales que $u < v$. Para la función $\phi_{u,v}$ dada en (4.1) se tienen las siguiente propiedades.*

1. *$\phi_{u,v}(0) = 0$.*

2. *Si $x \in [u, v]$, entonces $\phi_{u,v}(x)$ es una recta con pendiente 1.*

3. *Si $x \leq u$ ó $v \leq x$, entonces $\phi_{u,v}(x)$ es constante.*

4. *Para todas $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $|\phi_{u,v}(x)| \leq v - u$ y $|\phi_{u,v}(x) - \phi_{u,v}(y)| \leq |x - y|$.*

Notemos que la parte (4) en particular dice que $\phi_{u,v}$ es 1-Lipchitz.

Demostración. Para la parte (1). Por definición

$$\phi_{u,v}(0) = \text{mín}\{v, \text{máx}\{0, v\}\} - \text{mín}\{v, \text{máx}\{0, v\}\} = 0.$$

Para la parte (2). Como $x \in [u, v]$, entonces $\text{mín}\{v, \text{máx}\{x, u\}\} = x$. La otra parte de la función ϕ, es decir, $\text{mín}\{v, \text{máx}\{0, v\}\}$ puede cambiar dependiendo del signo de u y v. Para esto consideremos los casos cuando $0 \leq u < v$, $u < 0 \leq v$ y $u < v \leq 0$. Así $\phi_{u,v}(x)$ queda definido de la siguiente manera.

$$\phi_{u,x}(x) = \begin{cases} x - u & \text{si} \quad 0 \leq u < v. \\ x & \text{si} \quad u < 0 \leq v. \\ x - v & \text{si} \quad u < v \leq 0. \end{cases}$$

Entonces los tres casos la pendiente de la recta es uno.
Para la parte (3). Si $x \leq u$, entonces $\phi_{u,v}(x)$ queda definido como

$$\phi_{u,x}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq u < v. \\ u & \text{si} \quad u < 0 \leq v. \\ u - v & \text{si} \quad u < v \leq 0. \end{cases}$$

En los tres casos obtenemos constantes.
Si $v \leq x$, entonces $\phi_{u,v}(x)$ queda como

$$\phi_{u,x}(x) = \begin{cases} v - u & \text{si} \quad 0 \leq u < v. \\ v & \text{si} \quad u < 0 \leq v. \\ 0 & \text{si} \quad u < v \leq 0. \end{cases}$$

Entonces en los tres casos es constante.
La parte (4) se obtiene de (1), (2) y (3). □

Proposición 4.1. *Sean números reales $u_0 < \ldots < u_k$. Entonces*

1. *Para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\phi_{u_0,u_k}(x) = \sum_{l=1}^{k} \phi_{u_{l-1},u_l}(x). \tag{4.2}$$

2. *Para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\sum_{l=1}^{k} |\phi_{u_{l-1},u_k}(x) - \phi_{u_{l-1},u_k}(y)| = |\phi_{u_0,u_k}(x) - \phi_{u_0,u_k}(y)| \leq |x - y|. \tag{4.3}$$

Demostración. Para (4.2).
Veamos que ϕ_{u_0,u_k} y $\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_l}$ tienen la misma regla de correspondencia.
Si $x=0$ entonces $\phi_{u_{i-1},u_i}(0)=0$ para $1\leq i\leq k$, por lo tanto $\phi_{u_0,u_k}(0)=0=\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_l}(0)$.
Para $x\neq 0$, sin pérdida de generalidad supongamos que $u_0<0<u_k$. Supongamos que estamos en la situación (2) de la Observación 10 ($x\in[u_0,u_k]$), entonces $\phi_{u_0,u_k}(x)=x$. En este caso queremos demostrar que $\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_l}(x)=x$. Como $x\in[u_0,u_k]$, entonces $x\in[u_{i-1},u_i]$ para $1\leq i\leq k$. Supongamos $0<u_{i-1}\leq x<u_i$. Así

$$u_0<\ldots<u_{j-1}<0\leq u_j<\ldots<u_{i-1}\leq x<u_i<\ldots<u_k \text{ para } 1\leq i\leq k.$$

Por la Observación 10

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_l}(x) &= \sum_{l=1}^{j-1}\phi_{u_{l-1},u_l}(x)+\phi_{u_{j-1},u_j}(x)\\
&+ \sum_{l=j}^{i-1}\phi_{u_{l-1},u_l}(x)+\phi_{u_{i-1},u_i}(x)+\sum_{l=i}^{k}\phi_{u_{l-1},u_l}(x)\\
&= 0+u_j+(u_{j+1}-u_j+u_{j+2}-u_{j+1}\\
&+ \ldots+u_{i-1}-u_{1-2})+x-u_{i-1}+0\\
&= x.
\end{aligned}$$

Análogamente se obtienen los demás casos.
Para (4.3).
Por la Observación 10, obtenemos que

$$|\phi_{u_0,u_k}(x)-\phi_{u_0,u_k}(y)|\leq|x-y|.$$

Lo que implica que la prueba se reduce a

$$\textstyle\sum_{l=1}^{k}|\phi_{u_{l-1},u_k}(x)-\phi_{u_{l-1},u_k}(y)|=|\phi_{u_0,u_k}(x)-\phi_{u_0,u_k}(y)|.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $y<x$. Así $\phi_{u,v}(y)<\phi_{u,v}(x)$ (esto se obtiene directamente de la Observación 10). Entonces

$$\sum_{l=1}^{k}|\phi_{u_{l-1},u_k}(x)-\phi_{u_{l-1},u_k}(y)|=\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_k}(x)-\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_k}(y).$$

Luego, por (4.2)

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_k}(x)-\sum_{l=1}^{k}\phi_{u_{l-1},u_k}(y) &= \phi_{u_0,u_k}(x)-\phi_{u_0,u_k}(y)\\
&= |\phi_{u_0,u_k}(x)-\phi_{u_0,u_k}(y)|.
\end{aligned}$$

□

Cabe mencionar que si $u_0 \leq x, y \leq u_k$ entonces se da la igualdad en (4.3), es decir,

$$\sum_{l=1}^{k} |\phi_{u_{l-1},u_k}(x) - \phi_{u_{l-1},u_k}(y)| = |x-y|. \tag{4.4}$$

La prueba de la ecuación (4.4) es análoga a la de (4.3).

Corolario 11. *Sean números reales $u_0 < \ldots < u_k$. Entonces*

$$\sum_{l=1}^{k} |\phi_{u_{l-1},u_k}(x)| \leq |x| \ y \quad \sum_{l=1}^{k} \phi_{u_{l-1},u_l}(x)^2 \leq x^2. \tag{4.5}$$

Demostración. Como $\phi_{u,v}(0) = 0$. Si hacemos $y = 0$ en (4.3) obtenemos que

$$\sum_{l=1}^{k} |\phi_{u_{l-1},u_k}(x)| \leq |x|.$$

Para la segunda parte haciendo nuevamente $y = 0$ en (4.3) se tiene que $|\phi_{u_0,u_k}(x)| \leq |x|$, es decir, $\sqrt{\phi_{u_0,u_k}(x)^2} \leq \sqrt{x^2}$. Elevando al cuadrado y usando (4.2) se sigue que $\sum_{l=1}^{k} \phi_{u_{l-1},u_l}(x)^2 \leq x^2$. □

Ahora, consideremos subconjuntos finitos $G_i = \{u_{i,0} < \ldots < u_{i,k_i}\}$ de $\mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$ (o bien particiones de un cierto intervalo). Después definimos $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$.
Para $t \in \ell^2$ definimos el proceso Bernoulli de la siguiente manera. Consideremos primero la siguiente suma para cada partición finita

$$X_t(G_i, i) = \textstyle\sum_{l=1}^{k_i} \phi_{u_{i.l-1},u_{i,l}}(t_i)\epsilon_{i,l}.$$

Ahora para cada $t \in T$ definimos

$$X_t(\mathcal{G}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} X_t(G_i, i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k_i} \phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i)\epsilon_{i,l} \tag{4.6}$$

Consecuentemente obtenemos el proceso Bernoulli $\{X_t(\mathcal{G})\}_{t\in T}$.

Observación 11. *Para cada $t \in T$ se tiene que $X_t(\mathcal{G})$ dado en (4.6) está en ℓ^2.*

Demostración. Como $\epsilon_{i,l} = 1$ ó $\epsilon_{i,l} = -1$ para $1 \leq l \leq k_i$ e $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k_i} |\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i)\epsilon_{i,l}|^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k_i} \phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i)^2.$$

Por la segunda parte de (4.5) se deduce que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{l=1}^{k_i}\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i)^2 \le \sum_{i\in\mathbb{N}} t_i^2.$$

Como $t\in\ell^2$ entonces $\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i^2 < \infty$. Por lo tanto para cada $t\in T$ se tiene que $X_t(\mathcal{G})\in\ell^2$. □

La siguiente proposición nos da la relación que existe entre un proceso Bernoulli cualquiera (ver Definición 2) y el proceso Bernoulli $\{X_t(\mathcal{G})\}_{t\in T}$. Además, da la relación que existe entre $\{X_t(\mathcal{G})\}_{t\in T}$ y $\{X_t(\mathcal{G}')\}_{t\in T}$ donde $\mathcal{G}'=\{G_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y G_i' es un refinamiento de G_i para cada $i\in\mathbb{N}$.

Proposición 4.2. *Sean $T\subset\ell^2$ y $\mathcal{G}=\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$. Entonces*

1.
$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t(\mathcal{G})\}] \le \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i\}] = b(T). \tag{4.7}$$

2. *Si $\mathcal{G}'=\{G_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es tal que $G_i\subset G_i'$, $\min_i G_i=\min_i G_i'$ y $\max_i G_i=\max_i G_i$, para cada $i\in\mathbb{N}$, entonces*
$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t(\mathcal{G}')\}] \le \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t(\mathcal{G})\}]. \tag{4.8}$$

Demostración. Si definimos $f_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x)=\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x)$ para cada $x\in\mathbb{R}$ y $J=\{1,\dots k_i\}$, entonces de (4.3)

$$\textstyle\sum_{l\in J}|f_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x)-f_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x)| \le |x-y|.$$

Por el Corolario 9,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{l=1}^{k_i}\phi_{u_{i.l-1},u_{i,l}}(t_i)\epsilon_{i,l}] &= \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},l\in J} f_{u_{i.l-1},u_{i,l}}(t_i)\epsilon_{i,l}]\\ &\le \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i].\end{aligned}$$

de donde se tiene (4.7).
Por hipótesis tenemos que G_i' es refinamiento de G_i y que además el refinamiento es sobre el mismo intervalo. Supongamos que $G_i=\{u_{i,0}<\ldots<u_{i,k_i}\}$ y $[u_{i,l-1},u_{i,l}]\cap G_i'=\{s_{i,l,0}<s_{i,l,1}<\ldots<s_{i,l,k_{i,l}}\}$. Así, G_i' está dado por

$$G_i'=\{s_{i,1,0}<\ldots<s_{i,1,k_{i,1}}\}\cup\{s_{i,2,0}<\ldots<s_{i,2,k_{i,2}}\}\cup\{s_{i,3,0}<\ldots< s_{i,3,k_{i,3}}\}\cup\ldots\cup\{s_{i,k_i,0}<\ldots<s_{i,k_i,k_{i,k_i}}\}.$$

Luego, por la definición de $X_t(\mathcal{G})$

$$X_t(\mathcal{G}') = \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{j=1}^{k_{i,1}} \phi_{s_{i,1,j-1},s_{i,1,j}}(t_i)\epsilon_{i,1,j} + \sum_{j=1}^{k_{1,2}} \phi_{s_{i,2,j-1},s_{i,2,j}}(t_i)\epsilon_{i,2,j} + \ldots + \sum_{j=1}^{k_{i,k_i}} \phi_{s_{i,k_i,j-1},s_{i,k_i,j}}(t_i)\epsilon_{i,k_i,j}\Big] = \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{l=1}^{k_i}\Big(\sum_{j=1}^{k_{i,l}} \phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i)\epsilon_{i,l,j}\Big)\Big]. \tag{4.9}$$

Observemos lo siguiente. Definimos para cada $x \in \mathbb{R}$

$$f_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(x) = \sum_{l=1}^{k_i} \phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(x) \ y \ g_{u_{i.l-1},u_{i.l}}(x) = \sum_{l=1}^{k_i} \phi_{u_{i.l-1},u_{i.l}}(x), \tag{4.10}$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{k_{i.l}} |f_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(x) - f_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(y)| \leq |g_{u_{i.l-1},u_{i.l}}(x) - g_{u_{i.l-1},u_{i.l}}(y)|. \tag{4.11}$$

Pues, por (4.2)

$$\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x) = \sum_{j=1}^{k_{1,l}} \phi_{s_{1,l,j-1},s_{1,l,j}}(x).$$

Luego, por (4.3)

$$\sum_{j=1}^{k_{i,l}} |\phi_{s_{1,l,j-1},s_{1,l,j}}(x) - \phi_{s_{1,l,j-1},s_{1,l,j}}(y)| = |\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x) - \phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(y)|.$$

Así,

$$\sum_{l=1}^{k_i}\sum_{j=1}^{k_{i,l}} |\phi_{s_{1,l,j-1},s_{1,l,j}}(x) - \phi_{s_{1,l,j-1},s_{1,l,j}}(y)| = \sum_{l=1}^{k_i} |\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(x) - \phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(y)|.$$

Intercambiando las sumas (en el lado izquierdo de la igualdad anterior) y usando nuevamente (4.3) se tiene (4.11) (de hecho se da la igualdad).
Usando la definición en (4.10), de (4.9), (4.11) y el Corolario 9, concluimos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t(\mathcal{G}')\}] &= \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}^*}\sum_{j=1}^{k_{i.l}} f_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i)\epsilon_{i,l,j}] \\
&\leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in N^*} g_{u_{i.l-1},u_{i.l}}(t_i)\epsilon_{i,l}] \\
&= \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\{X_t(\mathcal{G})\}].
\end{aligned}$$

□

Asociemos una distancia $d_{\mathcal{G}}$ al proceso $X_t(\mathcal{G})$. Para $s,t \in T \subset \ell^2$,

$$d_{\mathcal{G}}(s,t)^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k_i} |\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i) - \phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(s_i)|^2. \tag{4.12}$$

Observación 12. *Para $s,t \in T$ se tiene que $d_{\mathcal{G}}(s,t)$ definida como en la ecuación (4.12) es una distancia.*

Demostración. Por las propiedades del valor absoluto es inmediato ver que si $d_{\mathcal{G}}(s,t) = 0$, entonces $s = t$ y viceversa. La simetría de la distancia se sigue también por la simetría del valor absoluto.
Por último, la desigualdad del tríangulo se sigue por la desigualdad de Minkowski. □

La siguiente observación compara la distancia anterior con la distancia en ℓ^2.

Observación 13. *Para $s,t \in \ell^2$ se cumple que*

$$d_{\mathcal{G}}(s,t) \leq \|s-t\|_2.$$

Demostración. Por (4.3) se tiene que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{l=1}^{k_i} |\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i) - \phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(s_i)|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |t_i - s_i|^2,$$

por lo tanto $d_{\mathcal{G}}(s,t) \leq \|s-t\|_2$.

□

La siguiente proposición compara las distancias asociadas a los procesos $X_t(\mathcal{G})$ y $X_t(\mathcal{G}')$.

Proposición 4.3. *Sean $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{G}' = \{G'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $G_i \subset G'_i$ y $G_i = \{u_{i,0} < \ldots < u_{i,k_i}\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces:*

1. *Si $\min_i G_i = \min_i G'_i$ y $\max_i G_i = \max_i G_i$ entonces $d_{\mathcal{G}'} \leq d_{\mathcal{G}}$.*

2. *Si $|G'_i \cap (u_{i,l-1}, u_{i,l}]| \leq q$ para toda $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq k_i$ entonces $d_{\mathcal{G}} \leq \sqrt{q}\, d_{\mathcal{G}'}$.*

Demostración. Sean $s,t \in \ell^2$. Supongamos nuevamente que $[u_{i,l-1}, u_{i,l}] \cap G'_i = \{s_{i,l,0} < s_{i,l,1} < \ldots < s_{i,l,k_{i,l}}\}$. Así que

$$d_{\mathcal{G}'}(s,t)^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \Big[\sum_{l=1}^{k_i} \Big(\sum_{j=1}^{k_{i,l}} |\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i) - \phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(s_i)|^2 \Big) \Big].$$

Como $\sum_{k=1}^{l}|a_k|^2 \leq (\sum_{k=1}^{l}|a_k|)^2$, se sigue que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{G}'}(s,t)^2 &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{l=1}^{k_i}\Big(\sum_{j=1}^{k_{i,l}}|\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i)-\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(s_i)|^2\Big)\Big] \\ &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{l=1}^{k_i}\Big(\sum_{j=1}^{k_{i,l}}|\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i)-\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(s_i)|\Big)\Big]^2. \end{aligned}$$

Como $[u_{i,l-1},u_{i,l}]\cap G'_i = \{s_{i,l,0} < s_{i,l,1} < \ldots < s_{i,l,k_{i,l}}\}$, entonces por (4.2) y (4.3) concluimos que

$$d_{\mathcal{G}'}(s,t)^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{l=1}^{k_i}|\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(t_i)-\phi_{u_{i,l-1},u_{i,l}}(s_i)|^2 = d_{\mathcal{G}}(s,t)^2.$$

Lo que demuestra la primera parte.
Ahora, como $[u_{i,l-1},u_{i,l}]\cap G'_i = \{s_{i,l,0} < s_{i,l,1} < \ldots < s_{i,l,k_{i,l}}\}$, entonces de (4.2) y (4.3) y se deduce que

$$d_{\mathcal{G}}(s,t)^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{l=1}^{k_i}\Big(\sum_{j=1}^{k_{i,l}}|\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i)-\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(s_i)|\Big)^2\Big],$$

como $|G'_i\cap(u_{i,l-1},u_{i,l}]| \leq q$ por hipótesis y $(\sum_{k=1}^{q}|a_k|)^2 \leq l\sum_{k=q}^{l}|a_k|^2$(en nuestro caso $q=k_{i,l}$ para cada $i\in\mathbb{N}$), se sigue que

$$d_{\mathcal{G}}(s,t)^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\Big[\sum_{l=1}^{k_i}\Big(q\sum_{j=1}^{k_{i,l}}|\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(t_i)-\phi_{s_{i,l,j-1},s_{i,l,j}}(s_i)|^2\Big)\Big],$$

por lo tanto $d_{\mathcal{G}}(s,t)^2 \leq q d_{\mathcal{G}'}(s,t)^2$, de donde se sigue la parte (2). $\square$

4.2. Funcionales $F(J,u,k,j)$

En esta sección seguiremos trabajando con subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$. A la familia de estos subconjuntos nuevamente le asociaremos una distancia (como lo hicimos antes), pero algo más importante, *le asociaremos una funcional.* Todo el trabajo previo (de este capítulo) nos servirá para obtener rápidamente las propiedades de estas funcionales.

Sea $r\in\mathbb{N}$ tal que $4\leq r$. Para $x\in\mathbb{R}$ y $k\in\mathbb{Z}$ definimos el siguiente conjunto

$$G(x,k) = \{pr^{-k}; p\in\mathbb{Z}\ y\ x-4r^{-k}\leq pr^{-k} < x+4r^{-k}\}. \tag{4.13}$$

Si consideramos $\lceil r^{-k}x\rceil$. Entonces $G(x,k)$ lo podemos definir en términos de $\lceil r^{-k}x\rceil$.

Observación 14. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $r \geq 4$. Para $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que*

$$G(x, k) = \{pr^{-k}; p \in \mathbb{Z} \text{ y } \lceil r^k x \rceil - 4 \leq p \leq \lceil r^k x \rceil + 3\}. \tag{4.14}$$

Demostración. Notemos que $x - 4r^{-k} \leq pr^{-k} < x + 4r^{-k}$ si y solo si $xr^k - 4 \leq p \leq xr^k + 3$. Sabemos que $\lceil r^{-k}x \rceil \geq r^{-k}x$ entonces $p \leq xr^k + 3$ si y solo si $p \leq \lceil r^{-k}x \rceil + 3$. Por otro lado como $xr^k - 4 \leq p$ s si y solo si $xr^k \leq 4 + p$ si y solo si $\lceil xr^k \rceil \leq 4 + p$, pues 4 y p son enteros, por lo tanto $\lceil xr^k \rceil - 4 \leq p$. □

Observación 15. *Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $4 \leq r$. Para $x \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $|G(x, k)| \leq 8$*

Demostración. Se sigue inmediatamente de (4.14).

□

Ahora, sean $r, j \in \mathbb{Z}$ tales que $k \leq j$ y $4 \leq r$. Definamos el siguiente conjunto.

$$G(x, k, j) = \{pr^{-j}, p \in \mathbb{Z} \text{ y } (\lceil r^k x \rceil - 4)r^{-k} \leq pr^{-j} \leq (\lceil r^k x \rceil + 3)r^{-k}\}. \tag{4.15}$$

Notemos que $(\lceil r^k x \rceil - 4)r^{-k} \leq pr^{-j} \leq (\lceil r^k x \rceil + 3)r^{-k}$ si y solo si $(\lceil r^k x \rceil - 4)r^{j-k} \leq p \leq (\lceil r^k x \rceil + 3)r^{j-k}$ si y solo si $w_{k,j}(x) \leq p \leq v_{k,j}(x)$ donde $w_{k,j}(x) = (\lceil r^k x \rceil - 4)r^{j-k}$ y $v_{k,j}(x) = (\lceil r^k x \rceil + 3)r^{j-k}$, por lo que

$$G(x, k, j) = \{pr^{-j}, p \in \mathbb{Z} \text{ y } w_{k,j}(x) \leq p \leq v_{k,j}(x)\}. \tag{4.16}$$

De esta ultima definición de $G(x, k, j)$ se sigue que $G(x, k, k) = G(k, k)$.
Como en la definición de $G(x, k, j)$ pedimos que $k \leq j$ y $4 \leq r$, entonces de ahora en adelante en todas las hipótesis de la proposiciones que involucre a $G(x, k, j)$, aparecerán estas condiciones.
La siguiente proposición nos da un refinamiento de $G(x, k, j)$, más aún, nos da las hipótesis de la Proposición 4.2 parte (2).

Proposición 4.4. *Sean $r \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ y $k, j, j' \in \mathbb{Z}$. Si $k \leq j \leq j'$ y $4 \leq r$ entonces*

1. $G(x, k, j) \subset G(x, k, j')$.
2. $\max G(x, k, j) = \max G(x, k, j')$.
3. $\min G(x, k, j) = \min G(x, k, j')$.

Demostración. Sean x, j, j', k y r fijos. Así, la parte (2) y (3) se sigue de (4.16). Para probar (1), del hecho que $k \leq j \leq j'$ obtenemos que $w_{k,j'}(x) \leq w_{k,j}(x)$ y $v_{k,j}(x) \leq v_{k,j'}(x)$. De donde, si $pr^{-j} \in G(x, k, j)$ entonces

$$w_{k,j'}(x) \leq w_{k,j}(x) \leq pr^{-j} \leq v_{k,j}(x) \leq v_{k,j'}(x),$$

y así $G(x, k, j) \subset G(x, k, j')$. □

Consideremos ahora una familia de subconjuntos finitos formados por $G(x_i, k, j)$ de la siguiente manera.
Sean $u \in \ell^2$ $j, k \in \mathbb{Z}$ tales que $k \leq j$ y $J \subset \mathbb{N}$. Así obtenemos la familia $\{G(u_i, k, j)\}_{i\in J}$. Entonces para cada $t \in T \subset \ell^2$ obtenemos el proceso Bernoulli $\{X_t(\{G(u_i, k, j)\}_{i\in J})\}_{t\in T}$ dado por

$$X_t(\{G(u_i, k, j)\}_{i\in J}) = \sum_{i\in J}[\sum_{p=w_{k,j}(u_i)+1}^{v_{k,j}(u_i)} \phi_{(p-1)r^{-j}, pr^{-j}}(t_i)\epsilon_{i,p}]. \tag{4.17}$$

Por la Observación 11, el proceso $\{X_t(\{G(u_i, k, j)\}_{i\in J})\}_{t\in T}$ está bien definido. La distancia asociada a este proceso está dada por

$$d(J, u, k, j)(t, s)^2 = \sum_{i\in J}[\sum_{p=w_{k,j}(u_i)+1}^{v_{k,j}(u_i)} (\phi_{(p-1)r^{-j}, pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j}, pr^{-j}}(s_i))^2],$$
$$s, t \in \ell^2. \tag{4.18}$$

A la familia $\{G(u_i, k, j)\}_{i\in J})\}_{t\in T}$ le asociamos la siguiente funcional.
Para $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ definamos

$$F(J, u, k, j)(t, s) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t(J, u, k, j)]. \tag{4.19}$$

Observación 16. *Para $\emptyset \neq T \subset \ell^2$, $u \in \ell^2$, $j, k \in \mathbb{Z}$ con $k \leq j$ se tiene que*

$$F(J, u, k, j)(t, s) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t(J, u, k, j)],$$

es una funcional.

Demostración. Como el proceso Bernoulli $\{X_t(\{G(u_i, k, j)\}_{i\in J})\}_{t\in T}$ está bien definido (esto es por la Observación 11), entonces por la Proposición 3.4 se sigue inmediatamente que para toda $s, t \in T$, $F(J, u, k, j)(t, s) \geq 0$.
Ahora, si $A \subset B \subset T$, entonces por la definición de $F(J, u, k, j)(t, s)$ se sigue que $F(A, u, k, j)(t, s) \leq F(B, u, k, j)(t, s)$. □

Al diámetro de T con respecto a esta distancia $d(J, u, k, j)(t, s)$ la denotaremos como $\Delta(T, J, u, k, j)$, es decir

$$\textit{Para } s, t \in T,\ \Delta(T, J, u, k, j) = \sup_{s,t\in T}\{d(J, u, k, j)(t, s)\}.$$

Las siguientes dos observaciones se usarán para demostrar las dos últimas proposiciones de esta sección. Antes de dar la demostración de la observación 17 veamos los siguientes lemas.

Lema 6. *Sean $r \in \mathbb{N}$, $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(u) = (\lceil br^{\alpha u} \rceil + a) r^{\beta u}.$$

Entonces f es creciente.

Demostración. Sean $k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$, tal que $\lceil br^{\alpha u} \rceil = k_0$ para algún $u \in \mathbb{R}$ y $\lceil br^{\alpha w} \rceil = k_1$ para algún $w \in \mathbb{R}$ (estamos pensando que $k_0 \leq k_1$). Así, consideremos el intervalo $u \in (k_0, k_1]$. Como en ese intervalo la cantidad $\lceil br^{\alpha u} \rceil$ es igual a k_1, entonces $f'(u) = 0 + a\beta r^{\beta u} > 0$, pues por hipótesis $a, \alpha, \beta \geq 0$. Por lo tanto la función $f(u)$ es creciente. □

Análogamente se prueba el siguiente lema.

Lema 7. *Sean $r \in \mathbb{N}$, $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}$. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$g(u) = (\lceil br^{\alpha u} \rceil - a) r^{\beta u}.$$

Entonces g es decreciente.

Observación 17. *Sean $x, u \in \mathbb{R}$ y $j, k', k \in \mathbb{Z}$, Si $k \leq k' \leq j$ y $u \leq j$ entonces $G(x, k', j) \subset G(x, k, j)$.*

Demostración. Sea $pr^{-j} \in G(x, k', j)$, entonces

$$(\lceil r^{k'} x \rceil - 4) r^{-k'} \leq pr^{-j} \leq (\lceil r^{k'} x \rceil + 3) r^{-k'}.$$

Así,

$$(\lceil r^{k'} x \rceil - 4) r^{j-k'} \leq p \leq (\lceil r^{k'} x \rceil + 3) r^{j-k'}.$$

Si definimos $f(u) = (\lceil r^u x \rceil + 3) r^{j-u}$. Como $j - u \geq 0$, por el Lema 6 f es creciente para toda $u \in \mathbb{R}$. Entonces $f(k') \leq f(k)$ pues $k \leq k'$. Así, se sigue que $p \leq (\lceil r^k x \rceil + 3) r^{j-k}$. Análogamente por el Lema 7 se obtiene que $(\lceil r^k x \rceil - 4) r^{j-k} \leq p$. Así,

$$(\lceil r^k x \rceil - 4) r^{j-k} \leq p \leq (\lceil r^k x \rceil + 3) r^{j-k}.$$

Por lo tanto $pr^{-j} \in G(x, k, j)$.

□

Observación 18. *Sea $T \subset \ell^2$. Si $J \subset \mathbb{N}$ entonces*

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in T} \sum_{i \in J} t_i \epsilon_i] \leq \mathbb{E}[\sup_{t \in T} \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i \epsilon_i].$$

Demostración. Como $J \subset \mathbb{N}$, entonces

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in T} \sum_{i \in J} t_i \epsilon_i] + \mathbb{E}[\inf_{t \in T} \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus J} t_i \epsilon_i] \leq \mathbb{E}[\sup_{t \in T} \sum_{i \in \mathbb{N}} t_i \epsilon_i].$$

Por desigualdad de Jensen obtenemos que

$$\inf_{t\in T}\mathbb{E}[\sum_{i\in\mathbb{N}\setminus J} t_i\epsilon_i] \leq \mathbb{E}[\inf_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}\setminus J} t_i\epsilon_i].$$

pero $\inf_{t\in T}\mathbb{E}[\sum_{i\in\mathbb{N}\setminus J} t_i\epsilon_i] = 0$. Por lo tanto se sigue que

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in J} t_i\epsilon_i] \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N}} t_i\epsilon_i].$$

□

Las siguientes proposiciones son aplicaciones de lo que hicimos en la primera parte de este capítulo.

Proposición 4.5. *Para $J \subset \mathbb{N}$, $u \in \ell^2$, enteros $k \leq j$ y $T \subset \ell^2$ se cumple*

1. $F(T, J, u, k, j) \leq b(T) = \mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i\epsilon_i]$ *y*
2. $\Delta(T, J, u, k, j) \leq \Delta_{\ell^2}(T)$.

Demostración. La parte (1) se sigue inmediatamente de la Proposición 4.2. Por la Observación 13, para cada $s, t \in \ell^2$ se tiene que $d(J, u, k, j)(t, s) \leq \|s - t\|_2$, por lo tanto $\Delta(T, J, u, k, j) \leq \Delta_{\ell^2}(T)$, de donde se deduce la parte (2). □

Proposición 4.6. *Sean $u \in \ell^2$, $T \subset \ell^2$ y $j, j', k, k' \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $k \leq k' \leq j$, $j \leq j'$, $k' \leq j'$ y $J' \subset J \subset \mathbb{N}$ entonces*

1. $F(T, J', u, k', j') \leq F(T, J, u, k, j)$.
2. $\Delta(T, J', u, k', j') \leq \Delta(T, J, u, k, j)$.

Demostración. Como $J' \subset J$, entonces por la Observación 18 se tiene que $F(T, J', u, k', j') \leq F(T, J, u, k', j')$.
Del hecho que $k \leq k' \leq j'$, por la Observación 17 se deduce que $G(x, k', j') \subset G(x, k, j')$. Así que, por la definición de $X_t(J, u, k, j)$ y Observación 18 se sigue que $F(T, J, u, k', j') \leq F(T, J, u, k, j')$. Pero por la Proposición 4.4, obtenemos que

$$G(x, k, j') \subset G(x, k, j),\ \max G(x, k, j) = \max G(x, k, j') \text{ y}$$
$$\min G(x, k, j) = \min G(x, k, j').$$

De la Proposición 4.2 se deduce que

$$F(T, J', u, k', j') \leq F(T, J, u, k, j).$$

Análogamente se demuestra que $\Delta(T, J', u, k', j') \leq \Delta(T, J, u, k, j)$. □

El siguiente lema nos da una cota inferior para la distancia $d(J,u,k,j)(t,s)$. Este resultado se usará específicamente en el Capítulo 5.

Lema 8. *Sean $s,t,u \in \ell^2$, $J \subset \mathbb{N}$ y $j,k \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $k \leq j$ y $|s_i - u_i| \leq 2r^{-k}$ para toda $i \in J$, entonces*

$$\frac{1}{2}\sum_{i\in J} \text{mín}\{|s_i - t_i|^2, r^{-2j}\} \leq d(J,u,k,j)(t,s)^2. \tag{4.20}$$

Demostración. Supongamos que $|s_i - t_i| \leq r^{-j} \leq r^{-k}$. Así, $|s_i - u_i| \leq 2r^{-k}$ y $|s_i - t_i| \leq r^{-k}$. Por lo tanto $u_i - 3r^{-k} \leq s_i, t_i \leq u_i + 3r^{-k}$. Entonces, $\text{mín}\, G(u_i,k,j) \leq s_i \leq t_i \leq \text{máx}\, G(u_i,k,j)$. Luego, por la Ecuación (4.4) obtenemos que

$$|s_i - t_i| = \sum_{p=w_{k,j}(u_i)+1}^{v_{k,j}(u_i)} [\phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(s_i)],$$

pero como $|s_i - t_i| \leq r^{-j}$, entonces en la suma anterior hay a lo más dos sumandos. Como $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, se sigue que

$$|s_i - t_i|^2 \leq 2 \sum_{p\in G(u_i,k,j)} [\phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(s_i)]^2.$$

Así,

$$\frac{1}{2}\text{mín}\{|s_i - t_i|^2, r^{-2j}\} \leq \sum_{p\in G(u_i,k,j)} [\phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(s_i)]^2. \tag{4.21}$$

Por lo tanto, tomando la suma sobre J se sigue (4.20).
Observemos que siempre podemos restringirnos al caso cuando $|s_i - t_i| \leq r^{-j}$. Pues si $r^{-j} < |s_i - t_i|$, entonces $t_i < s_i$ ó $s_i < t_i$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $s_i \leq t_i \leq u_i$. Ahora consideremos $w = \text{máx}\{s_i, t_i - r^{-j}\}$, luego

$$\text{mín}\{|w - t_i|^2, r^{-2j}\} = \text{mín}\{|s_i - t_i|^2, r^{-2j}\},$$

y además

$$\sum_{p\in G(u_i,k,j)} [\phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(w)]^2 \leq \sum_{p\in G(u_i,k,j)} [\phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(s_i)]^2.$$

Es decir, sustituyendo w en la Ecuación (4.21), el lado izquierdo no cambia y además la cantidad que obtenemos en el lado derecho es menor que $\sum_{p\in G(u_i,k,j)} [\phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i) - \phi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(s_i)]^2$. $\square$

4.3. Lemas de descomposición

En esta sección obtendremos varios resultados de $F(T, J, u, k, j)$. Las primeras proposiciones están basadas en los resultados de las proposiciones de la sección 4.1 junto con los resultados de la sección anterior.

Proposición 4.7. *Sean $T \subset \ell^2$, $u \in \ell^2$, $J \subset \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $j, k, r \in \mathbb{Z}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^+$. Supongamos que $k \leq j$, $r^{-j}\sqrt{\log m} \leq \sigma$ y $\|t\|_\infty \leq r^{-j}$ para todo $t \in T$. Entonces existen conjuntos $C_1, \ldots, C_{m-1} \subset T$ y $L_6 > 0$ que satisfacen*

1. *$\Delta(C_l, J, u, k, j) \leq L_6\sigma$, para $l = 1, \ldots, m-1$.*
2. *Si $\emptyset \neq D \subset T \setminus \bigcup_{l<m} C_l$ con $\Delta(D, J, u, k, j) \leq \sigma$, entonces $F(D, J, u, k, j) \leq F(T, J, u, k, j) - \sigma\sqrt{\log m}$.*

En la demostración que sigue, usaremos las constantes L_4 y L_5 que se obtienen de la Proposición A.2 del apéndice.

Demostración. Definimos $L_6 = \max\{2, 2L_4(L_5 + 2)\}$ y $a = \frac{1}{2}L_6\sigma$, entonces

$$L_4(L_5 + 2)\sigma\sqrt{\log m} \leq \min\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{b}\} = a\sqrt{\log m}. \tag{4.22}$$

Sea $\epsilon = \sigma\sqrt{\log m} > 0$. Definimos $T_1 = T$ y $T_k = T \setminus \bigcup_{l<k} B(t_l, a)$ para $1 < k$. Si $T_k = T \setminus \bigcup_{l<k} B(t_l, a) \neq \emptyset$, escogemos $t_k \in T_k$ tal que (por definición de supremo)

$$\sup_{t \in T_k} F(T_k \cap B(t, \sigma), J, u, k, j) - \sigma\sqrt{\log m} \leq F(T_k \cap B(t_k, a), J, u, k, j).$$

Luego, definimos $C_k = T_k \cap B(t_k, a)$. Entonces $\Delta_{\ell^2}(C_k) \leq a = \sigma$. Pero por la proposición 4.5, $\Delta(C_k, J, u, k, j) \leq \Delta_{\ell^2}(C_k)$, así que

$$\Delta(C_k, J, u, k, j) \leq \sigma. \tag{4.23}$$

Si $T_m = T \setminus \bigcup_{k<m} C_k \neq \emptyset$. Consideremos $D \subset T_m$ con $\Delta(D, J, u, k, j) \leq \sigma$ y escogemos $t_m \in D$ tal que $D \subset B(t_m, \sigma) \cap T_m$. Así los puntos $t_1, \ldots, t_m$ ($t_1 \in T_1$) satisfacen por construcción que

$$a \leq \|t_l - t_{l'}\|_2 \textit{ para } 1 \leq l \neq l' \leq m, \tag{4.24}$$

y además por hipótesis

$$\|t_l\|_\infty \leq b \textit{ para } 1 \leq l \leq m. \tag{4.25}$$

Ahora, definimos $H_l = B(t_l, \sigma) \cap T_l$ para $l < m$ y $H_m = D$. Por lo tanto

$$H_l \subset B(t_l, \sigma) \textit{ para } 1 \leq l \leq m. \tag{4.26}$$

Por otro lado, por la elección de cada t_l se sigue que

$$F(D, J, u, k, j) - \sigma\sqrt{\log m} \leq \min_{1\leq l\leq m} F(H_l, J, u, k, j). \tag{4.27}$$

Por lo tanto, por la Proposición A.2

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_4}\min\Big\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{2}\Big\} - L_5\sigma\sqrt{\log m} \quad &+ \quad \min_{1\leq l\leq m} F(H_l, J, u, k, j)\\ &\leq \quad F\Big(\bigcup_{l\leq m} H_l, J, u, k, j\Big)\\ &\leq \quad F(T, J, u, k, j).\end{aligned}$$

De la desigualdad (4.27) se sigue

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_4}\min\Big\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{2}\Big\} + F(D, J, u, k, j) \quad &- \quad (L_5+1)\sigma\sqrt{\log m}\\ &\leq \quad F\Big(\bigcup_{l\leq m} H_l, J, u, k, j\Big)\\ &\leq \quad F(T, J, u, k, j),\end{aligned}$$

pero por (4.22) se deduce que

$$F(D, J, u, k, j) + \sigma\sqrt{\log m} \leq F(T, J, u, k, j).$$

Notemos que la expresión (4.23) es la parte (1) de nuestra proposición. Observemos que si $T_k = T \setminus \bigcup_{l<k} B(t_l, a) = \emptyset$ entonces no hay nada que probar, pues por vacuidad se sigue la parte (2) definiendo $C_l = B(t_l, a)$. La parte (1) también se sigue pues el radio $a = \frac{1}{2}L_6\sigma$ de cada bola es menor o igual que σ.
□

La Proposición 4.7 y la siguiente proposición nos servirán para demostrar un corolario muy importante en esta sección. Este corolario nos ayudará a encontrar la sucesión admisible de T que buscamos desde el Capítulo 3.

Proposición 4.8. *Sean $T \subset \ell^2$, $J' \subset J \subset \mathbb{N}$, $u, u' \in \ell^2$, $k \leq j$ y $2 \leq r$ $j, k, r \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ y $0 < L_8, c, \sigma$. Supongamos que*

1. *Para todo $s, t \in T$, $\|t - s\|_\infty \leq r^{-j-1}$.*

2. *Para toda $i \in J'$ se tiene que $|u_i - u'_i| \leq 2r^{-k}$.*

3. $\Delta(T, J, u, k, j+1) \leq c$.

4. $r^{-j-1}\sqrt{\log m} \leq \sigma$ *y* $L_8 c \leq r$.

Entonces, existen conjuntos $A_1, \ldots, A_m \subset T$ *y una constante* $L_9 > 0$ *tales que*

I. $\Delta(A_l, J, u, k, j+1) \leq \sigma$ *para* $1 \leq l \leq m$ *y* $T \subset \bigcup_{l \leq m} A_l$ *ó*

II. $F(T \setminus \bigcup_{l=1}^{m} A_l, J', u', j+2, j+2) \leq F(T, J, u, k, j+1) - \frac{1}{L_9}\sigma\sqrt{\log m}$.

Demostración. Definimos $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in J}$ y $\mathcal{G}' = \{G'_i\}_{i \in J}$ donde

$$G_i = G(u_i, k, j+1), \text{ si } i \in J,$$

y

$$G'_i = \begin{cases} G_i & \text{si} \quad i \in J \setminus J', \\ & \\ G_i \cup G(u'_i, j+2, j+2) & \text{si} \quad i \in J'. \end{cases}$$

Entonces $G_i \subset G'_i$. Mas aún, $\min G_i = \min G'_i$ y $\max G_i = \max G'_i$.
Veamos primero que $\max G_i = \max G'_i$.
Si $i \in J \setminus J$, se sigue de la definición de G' que $\max G_i = \max G'_i$.
Si $i \in J'$. Como $G(u'_i, j+2, j+2) = G(u'_i, j+2)$. Del hecho que $4 \leq r$ y $k \leq j$

$$G(u'_i, j+2, j+2) \subset [u'_i - 4r^{-j-2}, u'_i + 4r^{-j-2}) \subset (u'_i - r^{-k}, u'_i + r^{-k}).$$

Por hipótesis, para toda $i \in J'$ se tiene que $|u_i - u'_i| \leq 2r^{-k}$. Así, se sigue que $G(u'_i, j+2, j+2) \subset [u_i - 3r^{-k}, u_i + 3r^{-k}]$. Por lo tanto $\max G(u'_i, j+2, j+2) \in G_i$. Luego así $\max G'_i = \max G_i$ pues $G_i \subset G'_i$. Análogamente se prueba que $\min G_i = \min G'_i$. Por la Proposición 4.2

$$\mathbb{E}[\sup_{t \in T} X_t(G')] \leq \mathbb{E}[\sup_{t \in T} X_t(G)] = F(T, J, u, k, j+1). \tag{4.28}$$

Por la Observación 15, $|G(u'_i, j+2, j+2)| \leq 9$. Luego, de la Proposición 4.3, obtenemos que

$$d_{\mathcal{G}} \leq 3 d_{\mathcal{G}'}. \tag{4.29}$$

Ahora, observemos que

$$\Delta(T, J', u', j+2, j+2) \leq c. \tag{4.30}$$

Esto último se cumple pues, para toda $i \in J'$ se tiene que $|u_i - u'_i| \leq 2r^{-k}$. Así que

$$\text{si } |pr^{-j-2} - u'_i| \leq 4r^{-j-2} \text{ entonces } |pr^{-j-2} - u_i| \leq 2r^{-k} + 4r^{-j-2} \leq 3r^{-k},$$

y por lo tanto $G(u'_i, j+2, j+2) \subset G(u_i, k, j+2)$.
De la definición de $\Delta(T, J, u, k, j)$ se sigue

$$\Delta(T, J', u', j+2, j+2) \leq \Delta(T, J, u, k, j+1).$$

Así, por la Hipótesis (2) se concluye (4.30).
Ahora apliquemos la Proposición A.3. Para esto, definamos

$$\begin{gathered} b = r^{-j-1}, \\ \lambda = 6, \\ \sigma^* = \tfrac{\sigma}{6}, \\ I^* = \{(i,u); i \in J, u \in G'_i \setminus \{\min G_i\}\}, \\ J^* = \{(i,u); i \in J', u \in G(u'_i, j+2, j+2) \setminus \{\min G(u'_i, j+2, j+2)\}\} \text{ y} \\ \text{para } A \subset T,\ A^* = \{\{\phi_{u^-,u}(t_i)\}_{(i,u)}; t \in A, (i,u) \in I^*\}. \end{gathered}$$

donde $u^- = \max\{y \in G_i \ ; \ y \leq u\}$. Observemos que con la notación de la Proposición A.3, tenemos que para $A \subset T$

$$b_{I^*}(A^*) = \mathbb{E}[\sup_{t \in T} X_t(G')] \quad y \quad b_{J^*}(A^*) = F(A, J', u', j+2, j+2). \tag{4.31}$$

Por la hipótesis (4) tenemos que $r^{-j-1}\sqrt{\log m} \leq \sigma$, lo que implica que $b\sqrt{\log m} \leq \lambda\sigma^*$. Por otro lado, de (4.30) se sigue que,

$$\text{para todo } s, t \in T,\ d(J', u', j+2, j+2) \leq c.$$

Si usamos la notación de la Proposición A.3, de la definición de J^*,

$$\text{para todo } s^*, t^* \in T,\ d_{J^*}(s^*, t^*) \leq c. \tag{4.32}$$

Por la Proposición A.3, existen $t_1^*, \ldots t_m^* \in T^*$ tales que $T^* \subset \bigcup_{l \leq m} B_{I^*}(t_{l^*}, \sigma^*)$ o bien

$$b_{J^*}\Big(T \setminus \textstyle\bigcup_{l \leq m} B_{I^*}(t_{l^*,\sigma^*})\Big) \leq b_{I^*}(T^*) - \Big(\tfrac{1}{4\lambda L_3}\sigma^* - L_7 c\Big)\sqrt{\log m}.$$

Usando (4.28), (4.31), y sustituyendo σ^* y λ, se sigue que

$$F\Big(T \setminus \textstyle\bigcup_{l \leq m} B(t_l, \sigma)\Big) \leq F(T, J, u, k, j+1) - \Big(\tfrac{1}{144 L_3}\sigma - L_7 c\Big)\sqrt{\log m}.$$

Luego, si tomamos $L_7 = \frac{L_8}{288 L_3}$ y $L_9 = 288 L_3$ entonces se sigue (II).
Ahora veamos que si $T^* \subset \bigcup_{l \leq m} B_{\mathbb{N}^*}(t_{l^*}, \sigma^*)$, entonces $T \subset \bigcup_{l \leq m} A_l$. Para esto definimos la siguiente función.

$$\begin{array}{rccll} f_u = f: & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(I^*) & \\ & t = \{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \phi_t = \{\phi_{u^-,u}(t_i)_{i,u}\}_{\{(i,u) \in I^*\}}, & \text{donde } u \in \ell^2. \end{array}$$

Observemos que f es continua. Sea $\epsilon > 0$. Si $\|s - t\| < \delta$, con $\delta > 0$, entonces $|s_i - t_i| < \delta$. Luego, por la Observación 10, $|\phi_{u^-,u}(s_i)_{i,u} - \phi_{u^-,u}(t_i)_{i,u}| \leq |s_i - t_i|$. Así, si $\epsilon = \delta$ entonces $\|\phi_s - \phi_t\| < \epsilon$, por lo tanto f es continua. Por la definición de f se sigue que $f(T) = T^*$. Entonces $f(T) \subset \bigcup_{l \leq m} B_{\mathbb{N}^*}(t_{l^*}, \sigma^*)$. Como f es continua,

$$T \subset \bigcup_{l \leq m} f^{-1}[B_{I^*}(t_{l^*}, \sigma^*)] = \bigcup_{l \leq m} A_l,$$

donde $A_l = f^{-1}[B_{I^*}(t_{l^*}, \sigma^*)]$ para $l = 1, \ldots, m$. Así tenemos demostrado una parte de (I).
Ahora, sólo falta ver que $\Delta(A_l, J, u, k, j+1) \leq \sigma$ para $l = 1, \ldots, m$. Esto último se tiene, pues si $s, t \in A_l$ entonces $d_{J^*}(s^*, t^*) = d(J'.u', j+2, j+2) \leq \sigma^*$. Luego, de (4.29),

$$d(J, u, k, j+1) \leq 3d(J'.u', j+2, j+2) \leq 6\sigma^* = \sigma,$$

por lo tanto $\Delta(A_l, J, u, k, j+1) \leq \sigma$.

□

En la demostración anterior faltó probar que la relación que se da en la ecuación (4.31) es cierta. Esto lo hacemos en la siguiente observación y obviamente usaremos todas las notaciones de la demostración anterior.

Observación 19. *La Ecuación (4.31) es cierta.*

Demostración. Por definición

$$b_{J^*}(A^*) = \sup_{t \in A^*} \sum_{i \in I^*} \epsilon_i t_i,$$

(como aparece en el Apéndice A, página 105). Por la definición de I^*

$$\sup_{t \in A^*} \sum_{i \in I^*} \epsilon_i t_i = \sup_{t \in A^*} \sum_{i \in J(\subset \mathbb{N})} \sum_{u \in G_i' \setminus \{\min G_i\}} \epsilon_{i,u} t_{i,u}.$$

Luego, por la definición de A^* obtenemos que

$$\sup_{t \in A^*} \sum_{i \in J(\subset \mathbb{N})} \sum_{u \in G_i' \setminus \{\min G_i\}} \epsilon_{i,u} t_{i,u} = \sup_{t \in A} \sum_{i \in J(\subset \mathbb{N})} \sum_{u \in G_i' \setminus \{\min G_i\}} \epsilon_{i,u} \phi_{u^-,u}(t_i).$$

Entonces de la definición de $X_t(\mathcal{G})$ y u^- se sigue que

$$b_{J^*}(A^*) = \sup_{t \in A} \sum_{i \in J(\subset \mathbb{N})} \sum_{u \in G_i' \setminus \{\min G_i\}} \epsilon_{i,u} \phi_{u^-,u}(t_i) = \mathbb{E}[\sup_{t \in A} X_t(G')].$$

La prueba de que $b_{J^*}(A^*) = F(A, J', u', j+2, j+2)$ es análoga (de hecho de manera similar también se prueba (4.32)). □

Finalizaremos esta sección con el Corolario 12. Este corolario será fundamental para la prueba de la proposición de la sección posterior.

Corolario 12. *Sean $\emptyset \neq T \subset \ell^2$, $\emptyset \neq J \subset \mathbb{N}$, $u \in \ell^2$, $u' \in T$, $c \in \mathbb{R}^+$, $k \leq j$, $1 \leq n$, k, $n \in \mathbb{N}$ y $r_0 \leq r$, $r \in \mathbb{N}$. Definimos $J' = \{i \in J; |u_i - u_i'| \leq 2r^{-k}\}$. Entonces podemos encontrar una partición $\{A_l\}_{l \leq p}$ de T con $p \leq N_n$ y constantes L_{10}, L_{11} y L_{12} positivos. Tal que cada A_l satisface una de las siguientes propiedades:*

1. *Si* $D \subset A_l$ *y* $\Delta(D, J, u, k, j+2) \leq \frac{1}{L_{10}} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1}$ *entonces* $F(D, J, u, k, j+2) \leq F(T, J, u, k, j+2) - \frac{1}{L_{11}} 2^n r^{-j-1}$ *ó*

2:

2a. $\Delta(A_l, J', u', j+1, j+2) \leq \Delta(A_l, J, u, j+1, j+2) \leq 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1}$ *y*

2b. $F(A_l, J', u', j+2, j+2) \leq F(T, J, u, k, j+1) - \frac{1}{L_{12}} 2^n r^{-j-1}$ $\leq F(T, J, u, k, j) - \frac{1}{L_{12}} 2^n r^{-j-1}$ *ó*

3. $\Delta(A_l, J, u, k, j+1) \leq 2^n r^{-j-1}$.

En la demostración de esta proposición usaremos las constantes L_6, L_7, L_8 dadas en las proposiciones anteriores de esta sección.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la constante $1 \leq L_8$ (la constante dada en la Proposición 4.8).
Definimos $m = \sqrt{N_n}$, así $\sqrt{\log m} = 2^{\frac{(n-1)}{2}} \sqrt{\log 2}$. Si tomamos $\sigma = \frac{1}{L_6 L_8} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1}$ entonces

$$r^{-j-2}\sqrt{\log m} = r^{-j-2} 2^{\frac{(n-1)}{2}} \sqrt{\log 2} \leq r^{-j-2} 2^{\frac{(n-1)}{2}} \leq r^{-j-2} 2^{\frac{n}{2}}.$$

Si $L_6 L_8 \leq r_0 \leq r$, entonces $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{L_6 L_8}$. Luego así

$$r^{-j-2}\sqrt{\log m} \leq \sigma. \tag{4.33}$$

Aplicando la Proposición 4.7 para $j+2$ y usando (4.33) (todas las demás hipótesis del la Proposición 4.7, también son hipótesis de la proposición que estamos demostrando) podemos encontrar subconjuntos $C_1, \ldots C_m \subset T$ tales que.

Propiedad 01

- $\Delta(C_l, J, u, k, j+2) \leq L_6 \sigma = \frac{1}{L_8} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1}$, para $1, \ldots, m-1$.
- Si $\emptyset \neq D \subset T \setminus \bigcup_{l<m} C_l$ con $\Delta(D, J, u, k, j+2) \leq \sigma = \frac{1}{L_6 L_8} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1}$, entonces $F(D, J, u, k, j+2) \leq F(T, J, u, k, j+2) - \frac{1}{L_6 L_8} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1} \sqrt{\log m}$.

Definimos A_1 tal que

$$T = \bigcup_{l \leq m-1} C_l \cup A_1.$$

Veamos que A_1 satisface la Condición 1. Si $D \subset A_1$ entonces $D \subset T \setminus \bigcup_{l \leq m-1} C_l$. Por la Propiedad (01), si $\Delta(D, J, u, k, j+2) \leq \frac{1}{L_6 L_8} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1}$ entonces

$$F(D, J, u, k, j+2) \leq F(T, J, u, k, j+2) - \frac{1}{L_6 L_8} 2^{\frac{n}{2}} r^{-j-1} \sqrt{\log m},$$

tomando $L_{10} = L_6L_8$ y $L_{11} = \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{\frac{1}{2}} L_6L_8$ se sigue la Condición 1 para A_1.

Ahora, consideremos C_l para algún $l \leq m-1$(fijo). Tomemos $\sigma = 2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1}$ y $c = \frac{1}{L_8}2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1}$. Entonces

$$r^{-j-1}\sqrt{\log m} = r^{-j-1}2^{\frac{(n-1)}{2}}\sqrt{\log 2} \leq 2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1} = \sigma \text{ y}$$
$$L_8 c = L_8\frac{1}{L_8}2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1} \leq \sigma.$$

Además $\Delta(C_l, J, u, k, j+2) \leq \frac{1}{L_8}2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1} = c$ por la Propiedad (01). Entonces estamos en condiciones de aplicar la Proposición 4.8 para C_l (las otras hipótesis de la Proposición 4.8 son hipótesis de la proposición que estamos demostrando). Entonces existen subconjuntos $B_1, \ldots, B_m \subset C_l$ tales que

Propiedad 02

- $\Delta(B_l, J, u, k, j+1) \leq \sigma = 2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1}$ para $1 \leq l \leq m$ y
- $C_l \subset \bigcup_{l\leq m} B_l$ ó
  $F(C_l \setminus \bigcup_{l=1}^m B_l, J', u', j+2, j+2) \leq F(C_l, J, u, k, j+1) - \frac{1}{L_9}\sigma\sqrt{\log m}$
  $= F(C_l, J, u, k, j+1) - \frac{1}{L_9}2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1}\sqrt{\log m}$.

Sí tomamos $A_{l+1} = B_l$ para $1 \leq l \leq m$, entonces (por la Propiedad (02))

$$\Delta(A_l, J, u, k, j+1) \leq \sigma = 2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1} \text{ para } l = 1, \ldots, m,$$

lo que quiere decir que se satisface la Condición 4, o bien si $T \setminus \bigcup_{l=1}^m B_l \neq \emptyset$, definimos $A_m = T \setminus \bigcup_{l=1}^m B_l$ para algún $1 < m < \infty$. Luego, de la Propiedad (02) obtenemos que

$$F(A_m, J', u', j+2, j+2) \leq F(T, J, u, k, j+1) - \frac{1}{L_9}2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1}\sqrt{\log m}.$$

Definiendo $L_{12} = \left(\frac{2}{\log 2}\right)^{\frac{1}{2}} L_9$ se sigue la Condición $2b$.
Por último si no pasa que $\emptyset \neq D \subset T \setminus \bigcup_{l<m} C_l$. Como $G(u_i', j+2, j+2) \subset G(u_i, k, j+2)$ para $i \in J'$ entonces

$$\Delta(C_l, J', j+2, j+2) \leq \Delta(C_l, J, u, k, j+2) \leq \frac{1}{L_8}2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1}.$$

Como $1 \leq L_8$ entonces,

$$\Delta(C_l, J', j+2, j+2) \leq \Delta(C_l, J, u, k, j+2) \leq 2^{\frac{n}{2}}r^{-j-1} \text{ para } l = 1, \ldots, m.$$

Definiendo $A_l = C_l$ para $l = 1, \ldots, m$ se sigue la Propiedad $2a$.
En ambos casos descompusimos a T en a lo más $1 + (m-1)(m+1) = N_n$ piezas. $\square$

Capítulo 5

La Conjetura de Bernoulli

5.1. Construcción de Particiones

En esta sección demostraremos que se puede encontrar una sucesión admisible de particiones de $T \subset \ell^2$ tal que cumpla las hipótesis del lema de particiones. A este resultado le llamamos **Lema 2 de descomposición**.
Para empezar demos algunas notaciones.
Consideremos una sucesión admisible de particiones $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ de T. Así para cada $n \in \mathbb{N}$ utilizaremos la siguiente notación.

- Para cada $A \in \mathcal{A}_n$ denotemos como A' al único elemento de $\mathcal{A}_{n-1}$ tal que $A \subset A'$.

- A cada elemento $A \in A_n$ le asociaremos los puntos $u_n(A)$ y $\pi_n(A)$, números $j_n(A), k_n(A)$ y $p_n(A)$ o conjunto $J_n(A) \subset \mathbb{N}$. En particular, para $A = A_n(t)$ se tienen las notaciones $u_n(t)$, $\pi_n(t)$, $j_n(t), k_n(t)$, $p_n(t)$ y $J_n(t)$ respectivamente.

La función $p_n(A)$ la entenderemos de la siguiente manera. Si $p_n(A) = 0$ entonces ya podemos aplicar el Corolario 12 al conjunto A para descomponerlo. Si $p_n(A) > 0$ entonces pensaremos que esperamos $p_n(A)$ pasos para poder aplicar el Corolario 12 al conjunto A.
Antes de enunciar el Lema 2 de descomposición, demostremos el siguiente lema.

Lema 9. *Sean $\alpha > 1$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Definimos*

$$V = \{m \geq 0 \ ; \ a_n < a_m \alpha^{|n-m|} \text{ para todo } n \geq 0 \text{ y } n \neq m\}.$$

Si $\sup_{n\geq 0}\{a_n\} < \infty$, *entonces* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n \leq \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \sum_{m\in V} a_m$.

Demostración. Definimos la siguiente relación en $\mathbb{N}$. Decimos que $n \prec m$ si y sólo si $a_m \geq a_n \alpha^{|n-m|}$. Notemos que la relación $\prec$ es de orden parcial pues: Decimos que $n \prec n$ ya que $a_n \geq a_n = a_n \geq a_n \alpha^0$, es decir, es reflexiva. Ahora, si $n \prec m$ y $m \prec l$ entonces $a_m \geq a_n \alpha^{|n-m|}$ y $a_l \geq a_m \alpha^{|m-l|}$, así $a_l \geq a_n \alpha^{|n-m|} \alpha^{|m-l|}$, como $\alpha > 1$ entonces $a_l \geq a_n \alpha^{|n-l|}$, por lo tanto $n \prec l$, es decir, $\prec$ es transitiva. Por último, veamos que $\prec$ es antisimétrica. Si $n \prec m$ y $m \prec n$ entonces $a_m \geq a_n \alpha^{|n-m|}$ y $a_n \geq a_m \alpha^{|m-n|}$, así $a_m \geq a_m \alpha^{2|n-m|}$. Como $\alpha > 1$ entonces $a_m \geq a_m \alpha^{2|n-m|}$ ocurre solo cuando $n = m$. Observemos que si $m \in V$ y $m \prec m'$ entonces $m = m'$. Si no, como $m \in V$ y $m \prec m'$ se tiene que $a_{m'} \geq a_m \alpha^{|m-m'|}$ y $a_m \alpha^{|m'-m|} > a_{m'}$, entonces $a_{m'} > a_{m'}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $m = m'$. Es decir, V consta de todos los elementos maximales bajo la relación $\prec$.
Ahora, como $\sup_{n\geq 0}\{a_n\} < \infty$ entonces no puede haber una sucesión crecientes de naturales bajo la relación $\prec$. Así, se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay $m \in V$ existe tal que $n \leq m$. Por lo tanto $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \leq \sum\limits_{m\in V} a_m \sum\limits_{n\geq 0} \alpha^{-|n-m|}$. Pero

$$\sum_{n\geq 0} \alpha^{-|n-m|} = \sum_{n=0}^{m-1} \alpha^{-|n-m|} + \sum_{n\geq 0} \alpha^{-|n|} \leq 2\sum_{n\geq 0} \alpha^{-|n|} = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

Por lo tanto $\sum\limits_{n\geq 0} a_n \leq \dfrac{2\alpha}{\alpha-1} \sum\limits_{m\in V} a_m$.

□

La sucesión admisible de particiones $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ de $T \subset \ell^2$ que encontraremos cumplirá las siguientes propiedades.

- Propiedad 1 (P1).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$j_{n-1}(A') \leq j_n(A) \leq j_{n-1}(A') + 2 \text{ y } k_{n-1}(A') \leq k_n(A).$$

- Propiedad 2 (P2).
  Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } p_n(A) = 0 \text{ entonces } \Delta(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A)) \leq 2^{\frac{n}{2}} r^{-j_n(A)}.$$

- Propiedad 3 (P3).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } 0 < p_n(A) \text{ entonces}$$
  $$\Delta(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A)) \leq 2^{\frac{n-p_n(A)}{2}} r^{-j_n(A)+1}.$$

- Propiedad 4 (P4).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } p_n(A) \neq 1 \text{ entonces } k_n(A) = k_{n-1}(A'),\ u_n(A) = u_{n-1}(A') \text{ y } J_n(A) = J_{n-1}(A').$$

- Propiedad 5 (P5).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } p_n(A) = 1 \text{ entonces } u_n(A) \in A',\ j_n(A) = j_{n-1}(A') + 2 \text{ y } J_n(A) = \{i \in J_{n-1}(A')\ ;\ |u_n(A)_i - u_{n-1}(A')_i| \leq 2r^{-k_{n-1}(A')}\}.$$

- Propiedad 6 (P6).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } 0 < p_n(A) \text{ entonces } j_n(A) = j_{n-1}(A').$$

- Propiedad 7 (P7).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } 0 < p_n(A) \text{ entonces } p_n(A) = p_{n-1}(A') + 1.$$

- Propiedad 8 (P8).
  Para todo $n > 0$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

  $$\text{si } p_n(A) = 0 \text{ entonces } p_{n-1}(A') \in \{0, 2k-1\} \text{ y } j_n(A) \leq j_{n-1}(A') + 1.$$

- Propiedad 9 (P9).
  Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que, si definimos $F_n(A) = F(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A))$ entonces

  $$\text{si } p_n(A) = 1 \text{ entonces } F_n(A) \leq F_{n-1}(A') - \tfrac{1}{L_{12}} 2^{n-1} r^{-j_n(A)+1}.$$

- Propiedad 10 (P10).
  Para todo $n \geq 2$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que, si $p_n(A) = p_{n-1}(A') = 0$ y $j_n(A) = j_{n-1}(A')$, entonces para $D \subset A$ tal que $\Delta(D, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A) + 2) \leq \frac{1}{L_{10}} 2^{\frac{n-1}{2}} r^{-j_n(A)-1}$ se tiene que

  $$F(D, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A) + 2) \leq F(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A) + 2) - \tfrac{1}{L_{11}} 2^{n-1} r^{-j_n(A)-1}.$$

Cabe mencionar que las variables $J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A)$ y $p_n(A)$ se han obtenido de las secciones anteriores.
El siguiente lema es un resultado crucial para la demostración de la conjetura de Bernoulli, porque nos da la construcción de una sucesión admisible de T que satisface las hipótesis del *Lema de particiones.*

Lema 10. Lema 2 de descomposición.
Sean $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ y $\kappa, j_0 \in \mathbb{N}$ (κ suficientemente grande y j_0 cualquiera). Supongamos que $r = 2^\kappa$ y $\Delta_2(T) \leq r^{-j_0}$. Entonces, existe una sucesión admisible de particiones $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ de T, tal que, para cada $A \in \mathcal{A}_n$ existen puntos $u_n(A) \in T$, números $k_n(A), p_n(A) \in \mathbb{N}$ y conjuntos $J_n(A) \subset \mathbb{N}$ que satisfacen las siguientes propiedades

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $A \in \mathcal{A}_n$ se tiene que $k_n(A) \leq j_n(A)$ y $0 \leq p_n(A) \leq 2\kappa - 1$.*

2. *La sucesión admisible de particiones $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ satisface las propiedades (P1) a (P10).*

Demostración. La idea de la demostración es la misma que utilizamos en el Lema 1 de descomposición del Capítulo 2. Es decir, es constructiva.
Empecemos la construcción de la siguiente manera.
Sea $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \{T\}$. En este caso $A = A' = T$. Tomemos $t_0 \in T$ (cualquiera) y $j_0 \in \mathbb{Z}^+$ (j_0 dado en la hipótesis). Luego para $A = A' = T$, definimos

$$u_1(T) = u_0(T) = t_0,\ k_0(T) = k_1(T) = j_0(T) = j_1(T) = j_0,\ p_0(T) = p_1(T) = 0 \\ \text{y } J_0(T) = J_1(T) = \mathbb{N}.$$

Veamos ahora que $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ satisfacen (1) y (2).
Por construcción $k_0(T) = j_0(T)$ y $k_1(T) = j_1(T)$, en particular $k_0(T) \leq j_0$ y $k_1(T) \leq j_1(T)$. Como $p_0(T) = p_1(T) = 0$ entonces se cumple que $0 \leq p_n(T) \leq 2\kappa - 1$. Por lo tanto se tiene (1).
Veamos que se satisfacen las propiedades (P1) a (P10) para $\mathcal{A}_1$.
Como en nuestros caso $A' = A = T$. Por construcción se tiene que $k_0(T) = k_1(T)$ y $j_0(T) = j_1(T) = j_0$. Por lo tanto

$$j_0(T) \leq j_1(T) \leq j_0(T) + 2 \text{ y } k_0(T) \leq k_1(T).$$

Por la Proposición 4.5

$$\Delta(T, J_1(T), u_1(T), k_1(T), j_1(T)) \leq \Delta_2(T).$$

Ahora, por hipótesis $\Delta_2(T) \leq r^{-j_0}$. Así

$$\Delta(T, J_1(T), u_1(T), k_1(T), j_1(T)) = \Delta(T, J_0(T), u_0(T), k_0(T), j_0(T)) \leq \\ 2^{\frac{n}{2}} r^{-j_0(T)} = 2^{\frac{n}{2}} r^{-j_0}.$$

Por lo tanto se cumple (P2).
Se cumplen (P3) a (P7) (por vacuidad) porque $p_0(T) = p_1(T) = 0$.
Como $p_0(T) = p_1(T) = 0$ y $j_0(T) = j_1(T)$ (por construcción) entonces

$$p_0(T), p_1(T) \in \{0, 2\kappa - 1\} \text{ y } j_1(T) \leq j_0(T) + 1.$$

Por lo tanto se tiene (P8).
Se cumplen (P9) y (P10) pues $p_0(T) = p_1(T) = 0$ y $n < 2$ (por vacuidad).
Consecuentemente $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0$ satisfizo (P1) a (P10). Notemos además que $|\mathcal{A}_0| = |\mathcal{A}_1| = N_0 = 1$.

Supongamos ahora que ya tenemos construido $\mathcal{A}_n$ tal que satisface (1) y (2) (ósea (P1) a (P10)) con $|\mathcal{A}_n| \leq N_n$. Queremos ver entonces que $\mathcal{A}_{n+1}$ satisface (1) y (2) (ósea (P1) a (P10)). Para esto fijemos $B \in \mathcal{A}_n$. ¿Cómo construimos a $\mathcal{A}_{n+1}$? Esto dependerá de $p_n(B)$.
Entonces construyamos $\mathcal{A}_{n+1}$. Para esto consideremos los siguientes casos

I. $1 \leq p_n(B) < 2\kappa - 2$.

II. $p_n(B) = 2\kappa - 2$.

III. $p_n(B) = 0$.

Trabajemos con el caso(I).
En este caso no dividimos a B. Es decir, en este caso decidimos que $B \in \mathcal{A}_{n+1}$ y definimos

$$p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1,\ J_{n+1}(B) = J_n(B),\ u_{n+1}(B) = u_n(B),\ k_{n+1}(B) = k_n(B) \\ \text{y } j_{n+1}(B) = j_n(B).$$

Veamos que se cumplen (P1) a (P10) para $B \in \mathcal{A}_{n+1}$.
Como en este caso, $A = A' = B$, por definición $k_{n+1}(B) = k_n(B)$ y $j_{n+1}(B) = j_n(B)$. En particular $k_n(B) \leq k_{n+1}(B)$ y $j_n(B) \leq j_n(B)$. Se sigue entonces que

$$j_n(B) \leq j_{n+1}(B) \leq j_n(B) + 2 \text{ y } k_n(B) \leq k_{n+1}(B).$$

Por lo tanto se tiene (P1).
Como $p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1$ entonces $p_{n+1}(B) \neq 0$. De donde se tiene (P2).

Queremos ver que

$$\Delta(B, J_{n+1}(B), u_{n+1}(B), k_{n+1}(B), j_{n+1}(B)) \leq 2^{\frac{(n+1) - p_{n+1}(B)}{2}} r^{-j_{n+1}(B)+1}.$$

Pero

$$p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1,\ J_{n+1}(B) = J_n(B),\ u_{n+1}(B) = u_n(B) \text{ y } k_{n+1}(B) = k_n(B) \\ \text{y } j_{n+1}(B) = j_n(B),$$

y para $B \in \mathcal{A}_n$ se cumple (P3), por lo tanto

$$\Delta(B, J_{n+1}(B), u_{n+1}(B), k_{n+1}(B), j_{n+1}(B)) = \\ \Delta(B, J_n(B), u_n(B), k_n(B), j_n(B)) \leq 2^{\frac{n-p_n(B)}{2}} r^{-j_n(B)+1}.$$

Como $p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1$ y $j_{n+1}(B) = j_n(B)$ entonces

$$2^{\frac{n-p_n(B)}{2}} r^{-j_n(B)} = 2^{\frac{n+1-p_{n+1}(B)}{2}} r^{-j_{n+1}(B)}.$$

Entonces

$$\Delta(B, J_{n+1}(B), u_{n+1}(B), k_{n+1}(B), j_{n+1}(B)) \leq 2^{\frac{(n+1)-p_{n+1}(B)}{2}} r^{-j_{n+1}(B)+1}.$$

Por lo tanto se sigue (P3).

Por definición $J_{n+1}(B) = J_n(B)$, $u_{n+1}(B) = u_n(B)$ y $k_{n+1}(B) = k_n(B)$, de donde se sigue (P4).

Como $p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1$ y $1 \leq p_n(B) < 2\kappa - 2$ entonces $p_{n+1}(B) \neq 1$, así obtenemos la propiedad (P5).

Por definición $j_{n+1}(B) = j_n(B)$, lo que prueba (P6).

También por definición $p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1$, de donde obtenemos (P7), recordemos que en este caso $A' = B$.

Notemos que como $p_{n+1}(B) = p_n(B) + 1$, entonces $p_{n+1}(B) \neq 0$, por lo tanto se sigue (P8). Análogamente se siguen (P9) y (P10).

Trabajemos con el caso(II).
Si $p_n(B) = 2\kappa - 2$, tampoco dividimos B y nuevamente decidimos que $B \in \mathcal{A}_{n+1}$. Para esta caso definimos

$$p_{n+1}(B) = 0,\ J_{n+1}(B) = J_n(B),\ u_{n+1}(B) = u_n(B),\ k_{n+1}(B) = k_n(B) \text{ y } \\ j_{n+1}(B) = j_n(B).$$

Veamos que se cumplen (P1) a (P10) para $B \in \mathcal{A}_{n+1}$.

Queremos ver que $j_n(A') \leq j_{n+1}(A) \leq j_n(A') + 2$ y $k_n(A') \leq k_{n+1}(A)$. En este caso $A = A' = B$. Por definición $k_{n+1}(B) = k_n(B)$ y $j_{n+1}(B) = j_n(B)$. En particular $k_n(B) \leq k_{n+1}(B)$ y $j_n(B) \leq j_n(B)$. Se sigue entonces que

$$j_n(B) \leq j_{n+1}(B) \leq j_n(B) + 2 \text{ y } k_n(B) \leq k_{n+1}(B).$$

Así, se sigue (P1).
Para (P2) queremos ver que

$$\Delta(B, J_{n+1}(B), u_{n+1}(B), k_{n+1}(B), j_{n+1}(b)) \leq 2^{\frac{n+1}{2}} r^{-j_{n+1}(B)}.$$

Sabemos que para $B \in \mathcal{A}_n$ se tiene que

$$\Delta(B, J_n(b), u_n(B), k_n(B), j_n(B)) \leq 2^{\frac{n}{2}} r^{-j_n(B)}.$$

Como $J_{n+1}(B) = J_n(B), u_{n+1}(B) = u_n(B), k_{n+1}(B) = k_n(B), j_{n+1}(B) = j_n(B)$ y $2^{\frac{n}{2}} \leq 2^{\frac{n+1}{2}}$ entonces se deduce que

$$\Delta(B, J_{n+1}(B), u_{n+1}(B), k_{n+1}(B), j_{n+1}(B)) =$$
$$\Delta(B, J_n(b), u_n(B), k_n(B), j_n(B)) \leq 2^{\frac{n+1}{2}} r^{-j_{n+1}(B)},$$

de donde se concluye (P2).
Como $p_{n+1}(B) = 0 \neq p_n(B)$, entonces se cumplen (P3) a (P10).

Trabajemos en el caso(III).
Como $p_n(B) = 0$, entonces podemos aplicar Corolario 12 (es decir, en este caso sí vamos a dividir a B) para $T = B$, $u = u_n(B)$, $J = J_n(B)$, $k_n(B)$, $j = j_n(B)$ y $u' \in B$. Sabemos que $k_n(B) \leq j_n(B)$. Supongamos que $r_0 \leq r$. Entonces por el Corolario 12 podemos encontrar una partición $\{A_l\}_{l \leq m}$ para $m \leq N_n$, en donde cada A_l, para $1 \leq l \leq m \leq N_n$, satisface una de las condiciones de (1) a (3) de ese corolario. En esta caso $A_l \in \mathcal{A}_{n+1}$ para $1 \leq l \leq m$. Sea $A = A_l$ un elemento de la partición.
Si A satisface (1), entonces definimos

$$p_{n+1}(A) = 0,\ j_{n+1}(A) = j_n(B),\ k_{n+1}(A) = k_n(B),\ J_{n+1}(A) = J_n(B) \text{ y}$$
$$u_{n+1}(A) = u_n(B).$$

La demostración de que se cumplen (P1) a (P9) es análoga al caso (II).
Para ver (P10), supongamos que

$$D \subset A \text{ tal que}$$
$$\Delta(D, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), k_{n+1}(A), j_{n+1}(A) + 2) \leq \frac{1}{L_{10}} 2^n r^{-j_{n+1}(A)-1}.$$

Queremos demostrar que

$$F(D, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), k_{n+1}(A), j_{n+1}(A) + 2)$$
$$\leq F(A, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), k_{n+1}(A), j_{n+1}(A) + 2) - \frac{1}{L_{11}} 2^n r^{-j_{n+1}(A)-1}.$$

Pero esto último se sigue inmediatamente porque A satisface (1) del Corolario 12.
Si A satisface (2) del Corolario 12, definimos

$$p_{n+1}(A) = 1,\ j_{n+1}(A) = k_{n+1}(A) = k_n(B) = j_n(B) + 2\ u_{n+1}(A) = u' \text{ y}$$
$$J_{n+1}(A) = J' = \{i \in J_n(B)\ ;\ |u_n(B)_i - u'_i| \leq 2r^{-k_n(A)}\}.$$

Veamos que se cumplen (P1) a (P10) para A. Cabe mencionar que $A' = B$. Para (P1) queremos ver que $j_n(B) \leq j_{n+1}(A) \leq j_n(B) + 2$ y $k_n(B) \leq k_{n+1}(A)$. Pero $j_n(B) + 2 = j_{n+1}(A)$ por lo tanto $j_n(B) \leq j_{n+1}(A) \leq j_n(B) + 2$. Y como $k_{n+1}(A) = k_n(B)$, en particular concluimos que $k_n(B) \leq k_{n+1}(A)$.

Como tomamos $u' \in B$ y $u_{n+1}(A) = u'$ entonces $u_{n+1}(A) \in B$. Luego, por definición $j_{n+1}(A) = j_n(B) + 2$ y $J_{n+1}(A) = J' = \{i \in J_n(B)\ ;\ |u_n(B)_i - u'_i| \leq 2r^{-k_n(A)}\}$ de donde se sigue (P5).
Como $p_{n+1}(A) = 1$, entonces son ciertas (P2), (P3), (P4), (P6), (P7), (P8) y (P10).
Para (P9), queremos ver que $F_{n+1}(A) \leq F_n(B') - \frac{1}{L_{12}} 2^n r^{-j_{n+1}(A)+1}$. Como

$$F_{n+1}(A) = F(A, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), k_{n+1}(A), j_{n+1}(A)) \text{ y}$$
$$j_{n+1}(A) := k_{n+1}(A) = k_n(B) = j_n(B) + 2,$$

entonces $F_{n+1}(A) = F(A, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), j_n(B) + 2, j_n(B) + 2)$.
Como A satisface la Condición (2) del Corolario 12, se sigue que

$$\begin{aligned} F_{n+1}(A) &= F(A, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), j_n(B) + 2, j_n(B) + 2) \\ &\leq F(B, J_n(B), u_n(B), k_n(B), j_n(B)) - \frac{1}{L_{12}} 2^n r^{-j-1}, \end{aligned}$$

Del hecho que $F_n(B) = F(B, J_n(B), u_n(B), k_n(B), j_n(B))$ entonces se tiene (P9).
Por último, si A satisface la Condición (3) del Corolario 12. Definimos

$$p_{n+1}(A) = 0,\ j_{n+1}(A) = j_n(B) + 1,\ k_{n+1}(A) = k_n(B),\ J_{n+1}(A) = J_n(B) \text{ y}$$
$$u_{n+1}(A) = u_n(B).$$

Veamos que se satisfacen (P1) a (P10).
Como $p_{n+1}(A) = 0$, entonces son verdaderas (P3) a (P9).
Notemos que (P1) se sigue de la definición $j_{n+1}(A) = j_n(B) + 1$, $k_{n+1}(A) = k_n(B)$.
Luego,

$$\Delta(A, J_{n+1}(A), u_{n+1}(A), k_{n+1}(A), j_{n+1}(A)) \leq 2^{\frac{n+1}{2}} r^{-j_{n+1}(A)}.$$

Como A satisface (3) del corolario 12, entonces

$$\Delta(A, J_n(B), u_n(B), k_n(B), j_n(B) + 1) \leq 2^{\frac{n}{2}} r^{-j_n(B)+1}.$$

Pero

$$j_{n+1}(A) = j_n(B) + 1,\ k_{n+1}(A) = k_n(B),\ J_{n+1}(A) = J_n(B) \text{ y } u_{n+1}(A) = u_n(B),$$

y por lo tanto se sigue (P2).
Como $j_{n+1}(A) = j_n(B) + 1$ entonces $j_{n+1}(A) \neq j_n(B)$, por lo tanto (P10) es verdadero. Cabe mencionar que en todos los casos por construcción se satisface (1).
Notemos además, que a B lo dividimos en a lo más N_n partes, por lo que

$$|\mathcal{A}_{n+1}| \leq N_n N_n \leq N_{n+1}.$$

Así, concluimos que podemos encontrar una sucesión admisible de particiones $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ de T, tal que satisface (P1) a (P10).

□

Antes de dar el siguiente lema damos las siguientes notaciones.
Sea $t \in T$. Para $A = A_n(t)$, definamos $j_n = j_n(t) = j_n(A_n(t))$, $a_n = 2^n r^{-j_n}$, $F_n = F_n(A_n(t))$, $p_n = p_n(A_n(t))$ y un conjunto

$$V = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ j_n < j_{n+1}\},$$

el cual enumeramos como

$$V = \{1 \leq n_0 < n_1 < \ldots\}.$$

Luego definimos

$$C = \{0 \leq q\ ;\ \textit{para toda}\ 0 \leq q', a_{n_{q'}} 2^{-|q-q'|} < a_{n_q}\}.$$

Observación 20. *Propiedad (11). Sean $q \in C$ con $1 \leq q$ y $\{\mathcal{A}_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión admisible de particiones de T que satisfacen las propiedades (P1) a (P10).*
Supongamos que

$$\textit{si}\ n_q - 1 \leq m \leq n_{q+1} + 1\ \textit{entonces}\ p_m = 0. \tag{5.1}$$

Entonces existe una constante $L_{14} > 0$ tal que

$$a_{n_q} \leq L_{14}(F_{n_q} - F_{n_{q+1}+1}). \tag{5.2}$$

En la demostración de la Propiedad 11 usaremos las propiedades (P1) a (P10) para $A = A_n(t)$.

Demostración. Sea $n \in V$. Supongamos que $p(n+1) = 0$, entonces

$$J_{n_{q+1}+1} = j_{n_q} + 2. \tag{5.3}$$

Esto se tiene pues, si $n \in V$, entonces $n = n_q$ para algún $q \in N$. Notemos que si $p_{n_q+1} = 0$ entonces de la propiedad (P8) se sigue que $j_{n_q+1} \leq j_{n_q} + 1$.

Como $n_q \in V$ entonces $j_{n_q} < j_{n_q+1}$. Así, $j_{n_q} < j_{n_q+1} \leq j_{n_q} + 1$. Por lo tanto $j_{n_q+1} = j_{n_q} + 1$.
Ahora, combinando la expresión (5.1) con la ecuación (5.3) obtenemos que

$$\textit{si } m \in V \textit{ y } n_q - 1 \leq m \leq n_{q+1} + 1, \textit{ entonces } j_{m+1} = j_m + 1. \tag{5.4}$$

En particular para $m = n_{q+1} + 1$, $j_{n_{q+1}+1} = j_{n_{q+1}} + 1$. Pero $j_{n_{q+1}} = j_{n_q+1} = j_{n_q} + 1$. Por lo tanto

$$j_{n_{q+1}+1} = j_{n_{q+1}} + 1 = j_{n_q} + 1 + 1 = j_{n_q} + 2.$$

Por lo tanto queda demostrado (5.3).
El siguiente paso es aplicar (P10) para $n = n_q$. Entonces veamos que se cumplen sus hipótesis. Es decir, queremos ver que

A. $p_{n_q-1} = p_{n_q} = 0$,

B. $j_{n_q-1} = j_{n_q}$ y

C. $\Delta(A_{n_{q+1}+1}, J_{n_q}, u_{n_q}, k_{n_q}, j_{n_q} + 2) \leq \frac{1}{L_{10}} 2^{\frac{n_q-1}{2}} r^{-j_{n_q}(t)-1}$.

Demostración de (A):
Como $n_q - 1 \leq n_q \leq n_{q+1} + 1$ entonces $p_{n_q} = 0$ por hipótesis. Análogamente $p_{n_q-1} = 0$.
Demostración de (B):
Para esto notemos que $n_q - 1 \notin V$. Pues si $n_q - 1 \in V$, entonces $n_q - 1 = n_{q-1}$. Lo que implica que $j_{n_{q-1}} < n_q$. Así

$$\tfrac{r}{2} a_{n_q} \leq a_{n_q-1} = 2^{n_q-1} r^{-j_{n_k}-1}.$$

Como $4 \leq r$, entonces $a_{n_q} < a_{n_q-1}$, lo que contradice que $q \in C$ (tomando $q' = q+1$). Por lo tanto $n_q - 1 \notin V$, entonces no pasa que $j_{n_q-1} < j_{n_q}$. Por lo tanto por (P1), $j_{n_q-1} = j_{n_q}$.

Demostración de (C):
Como $n_q - 1 \leq n_{q+1} + 1 \leq n_{q+1} + 1$, entonces $p_{n_{q+1}+1} = 0$ por hipótesis. Entonces aplicando (P2) y definiendo $n^* = n_{q+1} + 1$ obtenemos que

$$\Delta(A_{n^*}, J_{n^*}(A_{n^*}), u_{n^*}(A_{n^*}), k_{n^*}(A_{n^*}), j_{n^*}(A_{n^*})) \leq 2^{\frac{n^*}{2}} r^{-j_{n^*}}. \tag{5.5}$$

Ahora, como $q \in C$ obtenemos que $\frac{a_{n_{q+1}}}{2} < a_{n_q}$ (tomando $q' = q+1$), es decir,

$$2^{-1} 2^{n_{q+1}} r^{-j_{n_{q+1}}} < 2^{n_q} r^{-j_{n_q}}.$$

Como $n_q - 1 \leq n_{q+1} = n_q + 1 \leq n_{q+1} + 1$ de (5.4), $j_{n_{q+1}} = j_{n_q} + 1$. Luego usando que $r = 2^\kappa$, se sigue que

$$2^{n_{q+1}}r^{-j_{n_q}} < 22^{n_q}r^{-j_{n_q}}r = r^{-j_{n_q}}2^{n_q+\kappa+1},$$

así, $n^* < n_q + \kappa + 2$.
Como $j_{n_{q+1}+1} = j_{n_q} + 2$ (por (5.3) pues $p_{n_{q+1}+1} = 0$) se sigue que

$$2^{\frac{n^*}{2}}r^{-j_{n^*}} \leq 2^{\frac{2+\kappa}{2}}2^{\frac{n_q}{2}}r^{-j_{n_q}-2} = \frac{2^{\frac{n_q}{2}}2^{\frac{1}{2}}r^{j_{n_q}-1}}{\sqrt{r}}.$$

Hasta ahora no hemos puesto ninguna restricción sobre κ. Es momento de hacerlo. Supongamos que $\max\{r_0, 4L_{10}^2\} \leq r = 2^\kappa$ con $L_{10} \geq 1$, entonces $2L_{10} \leq \sqrt{r}$. Así que

$$\frac{2^{\frac{n_q}{2}}2^{\frac{1}{2}}r^{j_{n_q}-1}}{\sqrt{r}} \leq \frac{2^{\frac{n_q}{2}}2^{\frac{1}{2}}r^{j_{n_q}-1}}{2L_{10}} \leq \frac{1}{L_{10}}2^{\frac{n_q-1}{2}}r^{j_{n_q}-1}.$$

Por lo tanto de (5.5) se sigue (C).
Ahora, si tomamos $D = A_{n^*(t)} \subset A_{n_q}(t)$, usando (A), (B) y (C) en (P10), obtenemos que

$$\begin{gathered}F(D, J_{n_q}(A_{n_q}(t)), u_{n_q}(A_{n_q}(t)), k_{n_q}(A_{n_q}(t)), j_{n_q}(A_{n_q}(t)) + 2) \leq \\ F(A_{n_q}(t), J_{n_q}(A_{n_q}(t)), u_{n_q}(A_{n_q}(t)), k_{n_q}(A_{n_q}(t)), j_{n_q}(A_{n_q}(t)) + 2) - \\ \frac{1}{L_{11}}2^{n_q-1}r^{-j_{n_q}-1}.\end{gathered}$$

Usando que $p_{n_{q+1}+1} = 0 \neq 1$ junto con la Propiedad (P4) y tomando $A' = A_{n_q}$, obtenemos que

$$k_{n^*} = k_{n_q}(A_{n_q}(t)),\ u_{n^*} = u_{n_q}(A_{n_q}(t)) \text{ y } J_{n^*} = J_{n_q}(A_{n_q}(t)).$$

Así (usando también (5.3)), conseguimos que

$$\begin{gathered}F_{n^*} \leq \\ F(A_{n_q}, J_{n_q}(A_{n_q}(t)), u_{n_q}(A_{n_q}(t)), k_{n_q}(A_{n_q}(t)), j_{n_q}(A_{n_q}(t)) + 2) - \frac{1}{L_{11}}2^{n_q-1}r^{-j_{n_q}-1}.\end{gathered}$$

Usando la Proposición(4.6) parte (1) para $k' = k_{n_q} = k, j' = j_{n_{q+2}}, j = j_{n_q}$ y $J' = J = J_{n_q}$, se tiene que

$$\begin{gathered}F(A_{n_q}, J_{n_q}(A_{n_q(t)}), u_{n_q}(A_{n_q(t)}), k_{n_q}(A_{n_q(t)}), j_{n_q}(A_{n_q}(t)) + 2) \leq \\ F(A_{n_q}(A_{n_q}(t)), J_{n_q}(A_{n_q}(t)), u_{n_q}(A_{n_q}(t)), k_{n_q}(A_{n_q}(t)), j_{n_q}(A_{n_q}(t))) = F_{n_q}.\end{gathered}$$

Por lo tanto

$$F_{n^*} = F_{n_{q+1}+1} \leq F_{n_q} - \frac{1}{L_{11}}2^{n_q-1}r^{-j_{n_q}-1}.$$

Como $a_{n_q} = 2^{n_q}r^{-j_{n_q}}$, entonces se sigue que

$$\frac{1}{L_{11}}2ra_{n_q} \leq F_{n_q} - F_{n_{q+1}+1}.$$

Concluimos entonces (5.6) tomando $L_{14} = L_{11}2r$. □

En la demostración del Lema 11 usaremos las notaciones de la observación anterior.

Lema 11. *Sean* $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ *y* $\kappa, j_0 \in \mathbb{N}$ *(*κ *suficientemente grande). Supongamos que* $r = 2^\kappa$ *y* $\Delta_2(T) \leq r^{-j_0}$*. Entonces existe una constante* $K(r)$ *tal que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)} \leq K(r)(r^{-j_0(T)} + b(T)), \tag{5.6}$$

donde $K(r)$ *es una constante que depende* r*.*

Demostración. Como las hipótesis de este lema son las mismas que la del Lema 2 de descomposición, entonces tenemos las conclusiones (1) y (2) del Lema 10. Sea $n_q \in V$ fijo. Entonces $j_{n_q} < j_{n_q+1}$. Así, por (P6) obtenemos que $p_{n_q} = 0$. Luego por (P8),

$$p_{n_q-1} \in \{0, 2\kappa - 1\} \text{ y } j_{n_q} \leq j_{n_{q-1}+1}.$$

En lo que sigue supondremos que $q \in C$.

CASO 1. Si $0 < p_{n_q+1}$, usando que $p_{n_q} = 0$, por (P7) obtenemos que $p_{n_q+1} = 1$. En este caso, por (P6) se obtiene que $j_{n_q+1} = j_{n_q} + 2$.
Por otro lado, por (P9) (usando que $p_{n_q+1} = 1$) obtenemos que

$$F_{n_{q+1}} \leq F_{n_q} - \tfrac{1}{L_{12}} 2^{n_q} r^{-j_{n_q+1}+1}.$$

Luego, se sigue que

$$a_{n_q} \leq L_{12} r (F_{n_q} - F_{n_q+1}). \tag{5.7}$$

Es decir, si para $q \in \mathbb{N}$ definimos

$$J_1 = \{n_q \geq 0; n_q \in J \ y \ p_{n_q+1} = 1\},$$

entonces,

$$\sum_{n_q \in J_1} a_{n_q} \leq L_{12} r \sum_{n_q \geq 0} (F_{n_q} - F_{n_q+1}).$$

Pero $L_{12} r \sum_{n_q \geq 0} (F_{n_q} - F_{n_q+1}) = L_{12} r F_0(T)$. Por lo tanto

$$\sum_{n_q \in J_1} a_{n_q} \leq L_{12} r F_0(T). \tag{5.8}$$

CASO 2. Si $p_{n_q+1} = 0$, en este caso veamos que si $0 < p_{n_{q+1}+1}$, entonces por (P7) se sigue que $p_{n_{q+1}+1} = 1$. Así, por (P6) obtenemos que $j_{n_{q+1}+1} = j_{n_{q+1}} + 2$. Como $p_{n_{q+1}+1} = 1$, entonces aplicando (P9) se sigue que

$$F_{n_{q+1}+1} \leq F_{n_{q+1}} - \tfrac{1}{L_{12}} 2^{n_{q+1}} r^{-j_{n_{q+1}+1}+1}.$$

Así,

$$2^{n_{q+1}} r^{-j_{n_{q+1}+1}} r \leq L_{12}(F_{n_{q+1}} - F_{n_{q+1}+1}),$$

entonces

$$2^{n_{q+1}} r^{-j_{n_q}} r^{-3} r \leq L_{12}(F_{n_{q+1}} - F_{n_{q+1}+1}).$$

Luego,

$$2^{n_{q+1}} r^{-j_{n_q}} \leq r^2 L_{12}(F_{n_{q+1}} - F_{n_{q+1}+1}).$$

Como $n_{q+1} = n_q + 1$, entonces

$$a_{n_q} = 2^{n_q} r^{-j_{n_q}} \leq \frac{1}{2} r^2 L_{12}(F_{n_{q+1}} - F_{n_{q+1}+1}). \tag{5.9}$$

Si definimos $J_2 = \{0 \leq n_{q+1}; n_{q+1} \in J_1\}$, entonces se sigue que

$$\sum_{q \in J_2} a_{n_q} \leq \frac{1}{2} r^2 L_{12} \sum_{q \geq 0} (F_{n_q} - F_{n_q+1}).$$

Pero $\sum_{q \geq 0} (F_{n_q} - F_{n_q+1}) = F_{n_0}$. Por lo tanto

$$\sum_{q \in J_2} a_{n_q} \leq \frac{1}{2} r^2 L_{12} F_{n_0}. \tag{5.10}$$

Cabe mencionar que para este caso no analizamos qué pasa cuando $p_{n_{q+1}+1} = 0$.

CASO 3. Si $p_{n_q-1} = 2\kappa - 1$, entonces en particular $0 < p_{n_q-1}$. Por lo tanto por (P7) se tiene que $p_{n_q-2} = 2\kappa - 2$, $p_{n_q-3} = 2\kappa - 3$. Así, sucesivamente obtenemos que $p_{n_q-k'} = 2\kappa - k'$ para cada $1 \leq n'$. Si $k' = 2\kappa - 1$ entonces $p_{n_q-2\kappa+1} = 1$. Usando (P9) para $p_{n_q-2\kappa+1} = 1$ obtenemos que

$$F_{n_q-2\kappa+1} \leq F_{n_q-2\kappa} - \tfrac{1}{L_{12}} 2^{n_q-2\kappa} r^{-j_{n_q-2\kappa+1}+1}.$$

Así

$$2^{n_q-2\kappa} r^{-j_{n_q-2\kappa+1}} \leq r^{-1} L_{12}(F_{n_q-2\kappa} - F_{n_q-2\kappa+1}).$$

Sabemos por hipótesis general que $j_{n_q} < j_{n_q+1}$ y además $j_{n_q} < j_{n_q} + 1$, lo que implica que $j_{n_q} + 1 \leq j_{n_q+1}$. Así que $j_{n_q+1} = j_{n_q+1}$. Entonces se sigue que

$$a_{n_q-2\kappa+1} \leq 2r^{-1} L_{12}[F_{n_q-2\kappa} - F_{n_q-2\kappa+1}].$$

Si denotamos $l_{q-1} = n_q - 2\kappa$. Entonces

$$a_{l_{q-1}+1} \leq 2r^{-1} L_{12}[F_{l_{q-1}} - F_{l_{q-1}+1}],$$

así, concluimos que

$$a_{n_q} = 2^{2\kappa-1} a_{l_{q-1}+1} \leq 2^{2\kappa-1} 2r^{-1} L_{12}(F_{l_{q-1}} - F_{l_{q-1}+1}).$$

Es decir, si definimos $J_3 = \{1 \leq k; 0 < p_{n_q-1}\}$, entonces se tiene que

$$\sum_{q\in J_3} a_{n_q} = 2^{2\kappa-1}2r^{-1}L_{12}\sum_{q\geq 1}(F_{l_{q-1}} - F_{l_{q-1}+1}).$$

Por lo tanto

$$\sum_{q\in J_3} a_{n_q} \leq 2^{2\kappa-1}2r^{-1}L_{12}F_{l_0}. \tag{5.11}$$

Notemos que el caso cuando $k=0$, $F_{l_{q-1}}$ no tiene sentido.

CASO 4. Notemos que en los casos 1, 2 y 3 no analizamos los casos cuando $p_{n_q-1}=0$ y $p_{n_{q+1}+1}=0$. Pero esto es un caso particular de la Propiedad (P11). Porque $n_q-1\leq n_q-1<n_{q+1}+1\leq n_{q+1}+1$ y ya tenemos que $p_{n_q-1}=0$ y $p_{n_{q+1}+1}=0$, entonces se cumple la hipótesis de la propiedad (11), por lo tanto, se sigue que

$$a_{n_q} \leq L_{14}(F_{n_q} - F_{n_{q+1}+1}) \text{ con } L_{14} = L_{11}2r.$$

Observemos que la propiedad (P11) solo se cumple para $1\leq q$. Si definimos $J_4 = C\setminus J_1\cup J_2\cup J_3$, entonces se sigue que

$$\sum_{q\in J_4} a_{n_q} \leq L_{11}2r\Big[\sum_{q\geq 1}(F_{n_q} - F_{n_{q+1}+1})\Big] + a_{n_0}.$$

Así, obtenemos que

$$\sum_{q\in J_4} a_{n_q} \leq 22^{n_0}rL_{11}(F_{n_1} + r^{-j_0}). \tag{5.12}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{q\in C} a_{n_q} \leq L_{12}rF_0(T) + \frac{1}{2}r^2L_{12}F_{n_0} + 2^{2\kappa-1}2r^{-1}L_{12}F_{l_0} \\ +22^{n_0}rL_{11}(F_{n_1} + r^{-j_0}).\end{aligned} \tag{5.13}$$

Por la Proposición 4.5 se tiene que $F_0(T), F_{n_0}, F_{l_0}, F_{n_1} \leq b(T)$, de donde deducimos que

$$\sum_{q\in C} a_{n_q} \leq b(T)[L_{12}rb + \frac{1}{2}r^2L_{12} + 2^{2\kappa-1}2r^{-1}L_{12} + 22^{n_0}rL_{11}] + r^{-j_0}.$$

Si denotamos como $K(r) = L_{12}rb + \frac{1}{2}r^2L_{12} + 2^{2\kappa-1}2r^{-1}L_{12} + 22^{n_0}rL_{11}$, concluimos que

$$\sum_{q\in C} a_{n_q} \leq K(r)[b(T) + r^{-j_0}]. \tag{5.14}$$

Para poder concluir la demostración, necesitamos hacer la siguiente observación sobre $a_n = 2^n r^{-j_n}$. Supongamos que $b(T)<\infty$ entonces

$$\sup_{n\geq 0}\{a_n\} < \infty. \tag{5.15}$$

Analizaremos los casos cuando $p_n = 0$ y $0 < p_n$ para $2 \leq n$.
Supongamos que $p_n = 0$, entonces por (P8) se tiene que $p_{n-1} \in \{0, 2\kappa - 1\}$. Luego de aquí tenemos dos casos.
Cuando $p_{n-1} = 0$.
Por (P1) se tiene (en particular) que $j_{n-1} \leq j_n$. Entonces tenemos nuevamente dos casos (cuando $j_{n-1} = j_n$ y $j_{n-1} < j_n$).
Si $j_{n-1} = j_n$, consideremos $x_0 \in A$, entonces consideremos $D = \{x_0\}$, así $\Delta(D, J_n, u_n, k_n, j_n + 2) \leq \frac{1}{L_{10}} 2^{n-1} r^{-j_n - 1}$. Es decir, tenemos todas las hipótesis de (P10). Por lo tanto

$$F(D, J_n, u_n, k_n, j_n + 2) \leq F(A_n(t), J_n, u_n, k_n, j_n + 2) - \frac{1}{L_{11}} 2^{n-1} r^{-j_n - 1},$$

así

$$2^n r^{-j_n} \leq 2rL_{11}[F(A_n(t), J_n, u_n, k_n, j_n + 2) - F(D, J_n, u_n, k_n, j_n + 2)].$$

Como $F(D, J_n, u_n, k_n, j_n + 2) = 0$, entonces

$$2^n r^{-j_n} \leq 2rL_{11} F(A_n(t), J_n, u_n, k_n, j_n + 2).$$

Como $A_n(t) \subset A_n(t), J_n \subset J_n(t), u_n \leq u_n, k_n \leq k_n$ y $j_n \leq j_n + 2$, entonces por la proposición 4.6 se tiene que

$$F(A_n(t), J_n, u_n, k_n, j_n + 2) \leq F(A_n(t), J_n, u_n, k_n, j_n) = F_n,$$

por lo tanto obtenemos que

$$a_n = 2^n r^{j_n} \leq 2rL_{11} F_n \leq 2rL_{11} b(T). \tag{5.16}$$

Para el caso cuando $j_{n-1} < j_n$, notemos que si para $2 \leq n$ se cumple que $j_{n-1} < j_n$ entonces

$$a_n < a_1. \tag{5.17}$$

Esto es, pues si $j_{n-1} < j_n$ entonces $a_n < \frac{a_{n-1}}{2}$. Así obtenemos que

$$a_n < \frac{a_{n-1}}{2} < \frac{a_{n-2}}{2^2} < \ldots < \frac{a_1}{2^{n-1}} < a_1.$$

Cuando $p_{n-1} = 2\kappa - 1$:
Para este caso $p_{n-1} = 2\kappa - 1$ y $0 < p_n$ se tiene que

$$a_n \leq L_{12} r b(T). \tag{5.18}$$

La prueba de la ecuación (5.8) es análoga al **CASO 1**.
Como $b(T) < \infty$ entonces concluimos que

$$\sup_{n \geq 0} \{a_n\} \leq \max\{a_0, a_1, L_{12} r b(T), 2rL_{11} b(T)\} < \infty.$$

Ahora, usando (5.14) y (5.15) junto con el lema 9 se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)} \leq K(r)(r^{-j_0(T)+b(T)}).$$

Por lo tanto queda demostrado (5.6). $\square$

Comentario 2. *Tanto en el artículo de Bednorz and R. Latala ([2]) y el libro de Michel Talagrand ([10]) el Lema 2 de descomposición es la unión de los Lemas 10 y 11 y Observación 20. Es por eso que en la demostración de todas ellas usamos la mismas notaciónes e hicimos mucho énfasis en las propiedades (P1) a (P10).*

5.2. Demostración de la Conjetura de Bernoulli (Teorema BL)

Recordemos que el Teorema BL dice.

Teorema 1. Bednorz - Latała (BL). *Sea $\emptyset \neq T \subset \ell^2$. Supongamos que $b(T) < \infty$. Entonces existen conjuntos $\emptyset \neq T_1, T_2 \subset \ell^2$ y una constante $\mathbf{L} > 0$ tales que*

1. $T \subset T_1 + T_2$ y

2. $\sup_{t \in T_1} \sum_{i \in \mathbb{N}} |t_i| \leq \mathbf{L} b(T)$ y $g(T_2) \leq \mathbf{L} b(T)$.

Básicamente en esta sección demostraremos la conjetura de Bernoulli (Teorema BL). Cabe mencionar de que si $b(T) = \infty$, entonces no hay nada que demostrar y la conjetura se sigue. Así que trabajaremos (como enunciado en el Teorema 1) para el caso cuando $b(T) < \infty$.

La demostración consiste en aplicar el *Lema de particiones* y el *Lema 2 de descomposición* (Lema 10). Primero construyamos las hipótesis del Lema 10 y posteriormente construiremos las hipótesis del Lema 5.

Es necesario mencionar que en la demostración del *Lema 2 de descomposición* tomamos un $j_0 \in \mathbb{Z}^+$ ($j_0(T)$) cualquiera.

Demostración del Teorema 1. Sea κ (suficientemente grande) tal que $r = 2^\kappa$. Como $b(T) < \infty$, consideremos $j_0 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$Lb(T) \leq r^{-j_0}.$$

Entonces por la Proposición 3.4 se tiene que

$$\Delta_2(T) \leq r^{-j_0}. \tag{5.19}$$

Usando lo anterior y el hecho que $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ (por hipótesis), por el *Lema 2 de descomposición*, podemos encontrar una sucesión admisible de particiones $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de T, números $p_n(A)$, $k_n(A)$ y $j_n(A)$, puntos $u_n(A)$ y conjuntos $J_n(t) \subset \mathbb{N}$ que satisfacen las propiedades (1) y (2) (mencionadas en el Lema).

Ahora vamos a construir las hipótesis del Lema 5. Para esto definimos los puntos $\pi_n(A)$ de la siguiente manera.

I. $\pi_0(T) = u_0(T)$.

II. Para toda $1 \leq n$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$, si $j_n(A) = j_{n-1}(A')$, entonces $\pi_n(A) = \pi_{n-1}(A)$.

III. Para toda $1 \leq n$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$, si $p_n(A) = 1$, entonces $\pi_n(A) = u_n(A)$.

IV. Para toda $1 \leq n$ y para toda $A \in \mathcal{A}_n$, si $\pi_n(A) = 0$ y $j_{n-1}(A) < j_n(A)$, entonces escogemos un punto arbitrario $\pi_n(A)$ en A.

Ahora veamos que en efecto se cumplen las hipótesis del Lema 5.

Hipótesis 1.
La hipótesis (1a) se tiene por (II). Por otro lado, la primera parte de la hipótesis (1b) se deduce de (IV), pues $A \subset A'$. Pero además, si $p_n(A) = 1$, entonces $\pi_n(A) = u_n(A) \in A'$, esto es por (P5).
Ya solamente falta demostrar que se cumple también la desigualdad (3.14). Es decir, queremos demostrar que para toda $t \in T$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i\in I_n(A)} \min\{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_n(A)}\} \leq M2^n r^{-j_n(A)}. \tag{5.20}$$

Para demostrar (5.20), usaremos el lema 8. Primero recordemos que para $1 \leq n$

$$I_n(t) = \{i \in \mathbb{N}; |\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i| \leq r^{-j_k(t)}, 0 \leq k \leq n-1\},$$

y para $n = 0$, $I_n(t) = \mathbb{N}$.
Veamos que si $i \in I_{n+1}(t)$ entonces

$$|\pi_{n+1}(t)_i - u_n(t)_i| \leq 2r^{-k_n(t)}. \tag{5.21}$$

Para esto definamos J' como $J' = \{0\} \cup \{n \geq 1;\ p_n(t) = 1\}$, entonces para $n \in J'$ se tiene que $\pi_n(t) = u_n(t)$ (por (II)). Luego fijemos $n \in \mathbb{N}$ y consideremos n' el elemento más grande de J' tal que $n' \leq n$. Si $n = n'$ entonces $u_n(t) = u_{n'}(t) = \pi_{n'}(t)$ y $k_n(t) = k_{n'}(t)$. Si $n' < n$, entonces $p_n(t) \neq 1$, por (P4) $u_n(t) = u_{n'}(t) = \pi_{n'}(t)$ y $k_{n'}(t) = k_n(t)$. De donde obtenemos que, si $n' \leq n$, entonces $u_n(t) = u_{n'}(t) = \pi_{n'}(t)$ y $k_{n'}(t) = k_n(t)$. Luego, usando la desigualdad del triángulo junto con la definición de $I_{n+1}(t)$, para $i \in I_{n+1}(t)$

$$|\pi_{n+1}(t)_i - u_n(t)_i| = |\pi_{n+1}(t)|_i - \pi_{n'}(t)| \leq \sum_{q=n'}^{n} |\pi_{q+1}(t)_i - \pi_q(t)_i| \leq \sum_{j \geq j_{n'}} r^{-j}.$$

Usando la Proposición 3.6 y del hecho que $k_{n'}(t) \leq j_{n'}(t)$ y $k_{n'}(t) = k_n(t)$ conseguimos que

$$|\pi_{n+1}(t)_i - u_n(t)_i| = |\pi_{n+1}(t)|_i - \pi_{n'}(t)| \leq 2r^{-j_{n'}(t)} \leq 2r^{-k_{n'}(t)} = 2r^{-k_n(t)}.$$

Lo que demuestra (5.21).

Ahora veamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $I_n(t) \subset J_n(t)$.
Demostremos esto último por inducción sobre n. Para $n = 0$, $I_0(t) = J_0(t) = \mathbb{N}$ ($J_0(t) = \mathbb{N}$ pues así lo hicimos en la base de inducción del Lema 2 de descomposición), entonces se cumple la base de inducción.
Supongamos ahora que $I_n(t) \subset J_n(t)$. Del hecho que $I_{n+1}(t) \subset I_n(t)$ obtenemos que si $p_{n+1}(t) \neq 1$, entonces por (P4), $J_n(t) = J_{n+1}(t)$, por lo tanto se sigue que $I_{n+1}(t) \subset J_{n+1}(t)$.
Si $p_{n+1} = 1$, entonces por (III) obtenemos que $\pi_{n+1}(t) = u_{n+1}(t)$. Así, por (5.21), $|u_{n+1}(t)_i - u_n(t)_i| \leq 2r^{-k_n(t)}$ para $i \in I_{n+1}(t)$. Usando que $I_{n+1}(t) \subset I_n(t) \subset J_n(t)$ y (P5) se sigue que $I_{n+1}(t) \subset J_{n+1}(t)$.
Ahora ya tenemos herramientas suficientes para demostrar (5.20). Sea $t \in A \subset A'$. Supongamos que $j_{n-1}(A') < j_n(A)$, entonces $p_{n-1}(A') = 0$. Pues de no ser así, por (P7) se sigue que $0 < p_n(A)$, lo que implica que $j_n(A) = j_{n-1}(A')$ por (P6), pero esto es una contradicción. Por lo tanto $p_{n-1}(A') = 0$. Así, por (IV) podemos tomar $\pi_n(A) \in A'$. Además, ya sabemos que $I_n(A) \subset J_n(A) \subset J_{n-1}(A')$ y para $i \in I_n(A)$, $|\pi_n(A)_i - u_{n-1}(A)_i| \leq 2r^{-k_{n-1}(A)}$ (es cierto que durante la demostración de estas propiedades trabajamos con $A = A_n(t)$, es por eso que pedimos $t \in A \subset A'$). Aplicando el lema 8 para $J = I_n(A)$, $u = u_{n-1}(A)$, $s = \pi_n(A)$, $j = j_{n-1}(A')$ y $k = k_{n-1}(A')$ (se puede aplicar el lema para $J = I_n(A)$, pues ya demostramos que $I_n(A) \subset J_n(A)$), y de la definición de $\Delta(A', J_{n-1}(A'), u_{n-1}(A'), j_{n-1}(A'), k_{n-1}(A'))$, obtenemos que

$$\sum_{i \in I_n(A)} \text{mín}\{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_{n-1}(A')}\} \leq$$
$$2\Delta(A', J_{n-1}(A'), u_{n-1}(A'), j_{n-1}(A'), k_{n-1}(A'))^2,$$

como $j_{n-1}(A') < j_n(A)$ entonces

$$\sum_{i \in I_n(A)} \text{mín}\{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_n(A)}\} \leq$$
$$2\Delta(A', J_{n-1}(A'), u_{n-1}(A'), j_{n-1}(A'), k_{n-1}(A'))^2.$$

Del hecho que $p_{n-1}(A')=0$, usando (P2) se sigue que

$$2\Delta(A', J_{n-1}(A'), u_{n-1}(A'), j_{n-1}(A'), k_{n-1}(A'))^2 \leq 2^n r^{-2j_{n-1}(A')}.$$

Luego, por (P1) se tiene que $j_n(A) \leq j_{n-1}(A')+2$, así $2j_{n-1}(A') \leq -2j_n(A)+4$, se sigue entonces que para toda $0<n$

$$\sum_{i\in I_n(A)} \text{mín}\{(t_i-\pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_n(A)}\} \leq r^4 2^n r^{-j_n(A)}.$$

Por lo tanto queda demostrado (5.21). Así, tenemos la Hipótesis 1 (definiendo $M=r^4$).
Hipótesis 2. Como $\Delta_2(T) \leq r^{-j_0(T)}$ (por (5.19)), entonces se sigue que para toda $s,t\in T$ se cumple que $\|s-t\|_2 \leq r^{-j_0(T)}$. Como $M=r^4$, entonces tenemos que

$$\textit{para toda } s,t\in T,\ \|s-t\|_2 \leq \sqrt{M}r^{-j_0(T)}.$$

Así, se cumple la hipótesis 2.
Por el Lema 5 existen conjuntos $T_1 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$ y una constante $L>0$ tales que $T\subset T_1+T_2$ y

$$\sup_{t^1\in T_1}\{\|t^1\|_1\} \leq Lr^4 \sup_{t\in T}\sum_{n\geq 0} 2^{-n}r^{-j_n(t)},$$
$$\gamma_2(T_2) = \text{ínf}\{\sup_{t\in T}\{\sum_{n\geq 0} 2^{\frac{n}{2}}\Delta_{\ell^2}(A_n(t))\}\} \leq L\sqrt{r^4}\sup_{t\in T}\sum_{n\geq 0} 2^{-n}r^{-j_n(t)}.$$

Por el Lema 11 obtenemos que

$$\sup_{t^1\in T_1}\{\|t^1\|_1\} \leq Lr^4 \sup_{t\in T}\sum_{n\geq 0} 2^{-n}r^{-j_n(t)} \leq Lr^4 K(r)(r^{-j_0(T)}+b(T))$$

y

$$\gamma_2(T_2) \leq L\sqrt{r^4}K(r)(r^{-j_0(T)}+b(T)).$$

Luego, por el Teorema de medidas mayorizantes existe una constante $L_g>0$ tal que

$$g(T_2) \leq L_g\gamma_2(T_2),$$

así,

$$g(T_2) \leq LL_g\sqrt{r^4}K(r)(r^{-j_0(T)}+b(T)).$$

Consideremos $\widehat{L_1}>0$ tal que

$$LL_g r^4 K(r)(r^{-j_0(T)}+b(T)) \leq \widehat{L_1}b(T)$$

y $\widehat{L_2}>0$ tal que

$$L\sqrt{r^4}K(r)(r^{-j_0(T)} + b(T)) \leq \widehat{L_2}b(T).$$

Luego, tomando $\mathbf{L} = \text{máx}\{\widehat{L_1}, \widehat{L_2}\}$ y recordando la definición de $\|\|_1$ se sigue que

$$\sup_{t\in T_1}\sum_{i\in\mathbb{N}}|t_i| \leq \mathbf{L}\cdot b(T) \ \text{ y } \ g(T_2) \leq \mathbf{L}\cdot b(T).$$

Por lo tanto queda demostrado el *Teorema de Bednorz-Latala.* □

5.3. Comentarios

En 1997, X. Fernique [4] demostró el siguiente resultado acerca de series aleatorias de Fourier.

Teorema 7. *Sean G un grupo abeliano compacto, $\{v_i\}_{i\in J}$ una colección finita de vectores en un espacio complejo de Banach $(F, \|\|)$, funciones características χ_i en G y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ variables gaussianas. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que:*

$$\mathbb{E}\sup_{h\in G}\Big\|\sum_i v_i g_i \chi_i(h)\Big\| \leq L\Big[\mathbb{E}\Big\|\sum_i v_i g_i\Big\| + \sup_{\|x^*\|\leq 1}\Big\{\mathbb{E}\sup\Big|\sum_i x^*(v_i)g_i\chi_i(h)\Big|\Big\}\Big].$$

Fernique se preguntó ¿qué sucede si en el teorema anterior trabajamos con variables aleatorias Bernoulli $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en lugar de variables aleatorias gaussianas?, entonces estableció la siguiente conjetura relativa a series aleatorias de Fourier.

Teorema 8. *Sean G un grupo abeliano compacto, $\{v_i\}_{i\in J}$ una colección finita de vectores en un espacio complejo de Banach $(F, \|\|)$ y funciones características χ_i en G. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}\sup_{h\in G}\Big\|\sum_i v_i \epsilon_i \chi_i(h)\Big\| \leq L\Big[\mathbb{E}\Big\|\sum_i v_i \epsilon_i\Big\| + \sup_{\|x^*\|\leq 1}\Big\{\mathbb{E}\sup\Big|\sum_i x^*(v_i)\epsilon_i\chi_i(h)\Big|\Big\}\Big].$$

La conjetura de Bernoulli permitió demostrar este resultado ([2]).
Otra consecuencia del teorema BL es la desigualdad *Levy-Ottaviani* para VC-clases (Vapnick - Chervonenkis class) que se menciona en [5] en 1999.

Teorema 9. *Sean $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes en un espacio de Banach separable $(F, \|\|)$ y Γ una VC- clase de $\mathbb{N}$ de orden d. Si $|\{i; X_i \neq 0\}| < \infty$ casi seguramente, entonces existe una constante $K(d) > 0$ tal que, para toda $u > 0$*

$$P\Big(\sup_{C\in\Gamma}\|\sum_{i\in C}X_i\| \geq u\Big) \leq K(d)\sup_{C\in\Gamma\cup\{\mathbb{N}\}}P\Big(\|\sum_{i\in C}X_i\| \geq \frac{u}{K(d)}\Big),$$

donde $K(d)$ depende de d.

Una generalización de la conjetura de Bernoulli formulada por S. Kwapien (en [2]) es la siguiente.

Conjetura
Sea $(F, \|\|)$ un espacio normado completo. Sea $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F tal que la serie $\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i\epsilon_i$ converge casi seguramente. ¿Existe una constante L>0 y una descomposición $u_i = v_i + w_i$ tal que

$$\mathbb{E}\Big\|\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} v_i g_i\Big\| \leq L\mathbb{E}\Big\|\textstyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i\epsilon_i\Big\| \text{ y } \sup_{\eta=1,-1}\Big\|\sum_{i\in\mathbb{N}} w_i\eta_i\Big\| \leq L\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i\epsilon_i\Big\|?$$

Apéndice A

Apéndice: Procesos gaussianos y Rademacher

Los resultados que se mencionan en este capítulo se encuentran particularmente en los libros de Talagrand ([10]) y Ledoux ([7]).

A.1. Teorema de Medidas Mayorizantes 2

El Teorema 4, no solo nos motivó a estudiar las funcionales y al Teorema de Talagrand, también fue de gran importancia para demostrar la conjetura de Bernoulli.
El Teorema de medidas mayorizantes sólo nos da una cota superior para un proceso estocástico gaussiano, el siguiente teorema acota por ambos lados al proceso.

Teorema 10. Teorema de Medidas Mayorizantes 2. *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso gaussiano y (T, d) un espacio métrico con la distancia dada en (1) (ver página 6). Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\frac{1}{L}\gamma_2(T, d) \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t] \leq L\gamma_2(T, d) \tag{A.1}$$

Ya demostramos la parte de la derecha de la desigualdad (A.1) en el capítulo 1. Para probar otra desigualdad, es decir,

$$\tfrac{1}{L}\gamma_2(T, d) \leq \mathbb{E}[\sup_{t\in T} X_t],$$

se usa el Teorema de Talagrand. La demostración se encuentra en el capítulo 2 de [10].

A.2. Estimadores para procesos Rademacher

El siguiente resultado es una consecuencia del Teorema de Marcus-Pisier (capítulo 3 de [10]). También es conocido como la desigualdad de Khinchin.

Proposición A.1. Desigualdad de Khinchin. *Sean $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ y $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias Rademacher independientes. Entonces existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\frac{1}{L}\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \mathbb{E}\Big|\sum_{i\in\mathbb{N}} \epsilon_i a_i\Big|. \tag{A.2}$$

El siguiente teorema es un resultado fundamental en concentración de espacios producto (capítulo 4 de [7]). De este teorema se derivan dos resultados referentes para nuestro trabajo, las proposiciones A.2 y A.3

Teorema 11. *Sean $\emptyset \neq T \subset \ell^2$ y $\{a_t\}_{t\in T}$ una sucesión de números reales. Definimos $S = \sup_{t\in T}(a_t + \sum_{i\in I} t_i\epsilon_i)$. Supongamos que $|S| < \infty$ casi seguramente, entonces para $u \in \mathbb{R}^+$ se cumple que*

$$P(|S - M(S)| \geq u) \leq 4e^{-\frac{u^2}{16\sigma^2}}, \tag{A.3}$$

donde $\sigma = \sup_{t\in T}\{\|t\|_2\}$.
En particular si $\mathbb{E}|S| < \infty$, entonces existen $L, L_1 > 0$ tales que

$$|\mathbb{E}(S) - M(S)| \leq L\sigma$$

y

$$P(|S - \mathbb{E}(S)| \geq u) \leq 2e{-}\frac{u^2}{L_1\sigma^2}, \tag{A.4}$$

donde $M(S)$ es la mediana de S.

La siguiente proposición se puede ver en la página 147 de [10].

Proposición A.2. *Sean $J \subset \mathbb{N}$, $T \subset \ell^2$, $k \leq j$, $j, k \in \mathbb{N}$ y $a, b \in \mathbb{R}^+$ Considere $t_1, \ldots, t_m \in \ell^2$ tales que, para toda $l \neq l'$ se satisface que*

$$a \leq \|t_l - t_{l'}\|_2, \tag{A.5}$$

y para toda $1 \leq l \leq m$ se cumple que

$$\|t_l\|_\infty \leq b. \tag{A.6}$$

Entonces para $\sigma \in \mathbb{R}^+$ y conjuntos $H_l \subset B_{\ell^2}(t_l, \sigma)$, existen constantes L_4 y L_5 positivos tales que

$$\tfrac{1}{L_4}\,\mathrm{mín}\Big\{a\sqrt{\log m},\frac{a^2}{b}\Big\} - L_5\sigma\sqrt{\log m} + \min_{l\le m}\{F(H_l,J,u,k,j)\} \le F\Big(\bigcup_{l\le m} H_l,J,u,k,j\Big)$$

Antes de mencionar la siguiente proposición, demos las siguientes notaciones. Para $T\subset \ell^2$ $J\subset\mathbb{N}$, $t\in\ell^2$ definimos:

1. $t_J=\{t_i\}_{\{i\in J\}}\in\ell^2(J)$
2. $b_J(T)=\mathbb{E}[\sup_{t\in T}\sum_{i\in J}\epsilon_i t_i]$
3. Para $t,s\in T$, $d_J(t,s)=\|t_J-s_J\|_2$.
4. Para $a\ge 0$, $B_J(t,a)=\{s\in\ell^2; d_J(s,t)\le a\}$.

Ahora ya estamos listos para enunciar la siguiente proposición.

Proposición A.3. *Sean $T\subset\ell^2$, $b,c,\sigma>0$, $\lambda\ge 1$ y $m\in\mathbb{N}$ tales que:*

a. $b\sqrt{\log m}\le\lambda\sigma$.

b. Para todo $s,t\in T$ se tiene que $d_J(t,s)\le c$; $\|t-s\|_\infty\le b$.

Entonces existen $t_1,\ldots,t_m\in T$ y constantes $L_4,L_5>0$ tales que:

I. $T\subset\bigcup_{l\le m}B_{\mathbb{N}}(t_l,\sigma)$ *ó*

II. $b_J(T\subset\bigcup_{l\le m}B_{\mathbb{N}}(t_l,\sigma))\le b_{\mathbb{N}}(T)-\Big(\frac{1}{4\lambda}L_3-L_7\Big)\sqrt{\log m}$.

La Proposición anterior se encuentra en la página 12 [2].

Bibliografía

[1] W. Bednorz, *A theorem on mayorizing measures*, Ann, Probab. **34**(5), (2006), 1771-1781.

[2] W. Bednorz and R. Latala, *On the suprema of Bernoulli Processes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), 131-134.

[3] R. M. Dudley, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Functional Analysis 1 (1967), 290-330.

[4] X. Fernique, *Regularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes,* Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1997.

[5] R. Latala, *A note on the maximal inequalities for VC classes*, Ad- vances in stochastic inequalities (Atlanta, GA, 1997), 125-134, Con- temp. Math. 234, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[6] R. Latala, *On the boundedness of Bernoulli processes over thin sets*, Electron. Commun. Probab. 13 (2008), 1751-86.

[7] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenom*, AMS, Providence, RI, 2001.

[8] S. M. Ross *A First Course in Probability (8th Edition)*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2009.

[9] M. Talagrand, *The generic chaining* , Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[10] M. Talagrand, *The generic chaining: Upper and Lower bounds of stochastic processes* , Springer-Verlag, Berlin, 2014.