



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ÓRBITA DE COMETAS "EXTRASOLARES"
BAJO GRAVEDAD EXTENDIDA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

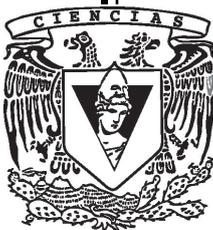
PRESENTA:

ARMANDO JOSÉ LARA DÍAZ INFANTE

TUTOR:

DR. XAVIER NICOLÁS HERNÁNDEZ DÖRING

Ciudad Universitaria, CDMX, 2016





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno.

Lara
Díaz Infante
Armando José
0445585324277
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
308011979

2. Datos del Tutor.

Dr.
Hernández
Doring
Xavier Nicolás

3. Datos del sinodal 1.

Dr.
Hernández
Döring
Xavier Nicolás

4. Datos del sinodal 2.

M.C.
Allen
Armiño
Christine Patricia

5. Datos del sinodal 3.

Dr.
Tonatiuh
Matos
Chassin

7. Datos del sinodal 4.

Dr.
Roberto Allan
Sussman
Livovsky

9. Datos de la tesis.

Órbita de Cometas "Extrasolares" Bajo
Gravedad Extendida
40 p.
2016

Dedicatoria

Este trabajo se lo dedico a toda mi familia por el cariño y apoyo que siempre me han dado, pero en particular:

A mi mamá, por siempre estar pendiente de las necesidades de la familia, núcleo en el cual crecí y me desarrollé.

A mi papá, por contagiarnos a mi hermana y a mí el gusto por la cultura y ser un ejemplo de amor y respeto dentro de la familia.

Y a mi hermana, a la cual amo, respeto y confío inmensamente y con la que comparto cada día de mi vida.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por el ejemplo que siempre me han dado y sé que son en gran medida responsables de mis éxitos en la vida.

A mis hermanos cuyo interés en el progreso de la humanidad me alenta a seguir adelante.

A mis amigos por siempre estar ahí cuando los necesito, en particular:

A Luis Armando, con el cual he vivido innumerables aventuras y estoy seguro que las seguiremos viviendo.

A Luis Ángel, con quien desde los primeros años de vida he compartido una amistad muy estrecha, así como tropiezos y logros que nos han tocado vivir.

A Edgar, en quien sé que puedo contar sin importar el momento o lugar, su amistad incondicional y objetividad me han ayudado a crecer como persona.

A Mario cuyo carisma, buen humor y preocupación por el bienestar de sus amigos y familia han logrado una armonía dentro de este grupo de amigos que considero familia y quienes saben que cuentan conmigo para lo que necesiten.

Agradezco también el apoyo de Pedro, Gerardo, Diego, Marduk y Welbanks quienes me han escuchado y apoyado en momentos difíciles durante la carrera y la realización de esta tesis.

A mis asesores Xavier Hernández Doring y Christine Allen por la oportunidad que me dan de trabajar en proyectos de vanguardia y de quienes he recibido mucho apoyo durante la realización de este proyecto.

Así mismo agradezco a mis profesores que fueron influencia en mi desarrollo académico a lo largo de mis estudios.

Agradezco al Colegio Nuevo Continente por inculcarme valores y su alto nivel académico, de igual manera agradezco a la UNAM la cual me ha permitido desarrollar aptitudes y crecer como persona.

A Nibiru, la Sociedad Astronómica de la Facultad de Ciencias donde aprendí que divulgar la ciencia es parte fundamental del desarrollo de un país.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM . IN100814 Cometas "Extrasolares" Bajo Gravedad Extendida. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice

1	Introducción	1
1.1	Antecedentes de Gravedad Extendida	1
1.2	Motivación	4
1.3	Dinámica de los Cometas	4
1.4	Dinámica del Lanzamiento Radial	7
1.4.1	Distancia Máxima	8
1.4.1.1	Caso Newtoniano	8
1.4.1.2	Caso MONDiano	8
1.5	Partículas de Prueba Utilizadas	10
1.5.1	Régimen Newtoniano	10
1.5.2	Régimen MONDiano	10
2	Programación del Código	11
2.1	Julia	11
2.2	Adimensionalización	11
2.3	Método de Euler Cromer	12
2.4	Tamaño de Paso Variable	13
2.5	Determinando el Factor de Adimensionalización	13
2.6	Probando el código.	14
2.6.1	En el régimen Newtoniano	15
2.6.2	En el régimen MONDiano	17
2.6.3	En ambos regímenes.	18
2.7	Manejo de Datos	19
3	Muestra de Cometas Hiperbólicos	21
4	Resultados	23
5	Análisis y Conclusiones	27
6	Anexo	28
6.1	Códigos Programados	28
6.1.1	Código para Calcular N en la Adimensionalización	29
6.1.2	Integrador de la Ley de Fuerzas de Newton	30
6.1.3	Integrador de las Leyes de Fuerza bajo Gravedad Extendida	32
6.1.4	Código para Calcular Trayectorias Elípticas	35
6.1.5	Código para Calcular Trayectorias Radiales	37
6.2	Condiciones Iniciales Utilizadas en los Códigos	39

Bibliografía

39

Resumen

Suponiendo que las leyes de la física desarrolladas hasta el momento son válidas en todas las escalas se requiere introducir la hipótesis ad hoc de la existencia de un componente dominante de materia oscura. Dicha materia nunca se ha observado y como alternativa se han desarrollado diferentes teorías, modificando la física a escalas de baja aceleración.

En este trabajo se hizo un estudio de la dinámica de los cometas Secchi y McNaught bajo un modelo de gravedad modificada tal que no se requiera materia oscura a escalas astronómicas de más de 7000 UA para que estos describan órbitas cerradas alrededor del Sol.

Se compara principalmente la dinámica del cometa Secchi, cuyo origen apunta a ser extra-solar, bajo gravedad Newtoniana y gravedad Extendida. Para ello se programó un código cuyo correcto funcionamiento se corroboró con resultados analíticos.

Se presta principal atención al cometa Secchi debido a que la órbita que este presenta antes de interactuar con el sistema planetario es hiperbólica a diferencia de otros cometas cuyas órbitas hiperbólicas resultan serlo después de haber interactuado con el Sistema Solar.

Los resultados obtenidos muestran que dentro de la dinámica Newtoniana el cometa una vez que pasa por el perihelio se aleja del Sol y no regresa mientras que bajo gravedad Extendida el cometa alcanza una distancia máxima y regresa describiendo órbitas cerradas.

Capítulo 1

Introducción

Los sentidos con los que nos ha dotado la naturaleza han sido potenciados a partir de la creación de instrumentos como son los telescopios los cuales nos han permitido observar el universo a distancias inimaginables. El hombre se ha maravillado con todo lo que ha observado pero a la vez su comprensión por el universo se ha visto comprometida pues al estudiar la dinámica que presentan los cuerpos a distancias de miles de unidades astronómicas se suelen observar anomalías en la física con la que describimos nuestro mundo empírico.

El físico inglés Sir Isaac Newton en el siglo XVII abrió las puertas para poder describir de una manera nueva el mundo que observábamos. Con sus leyes es posible describir la atracción gravitacional que dos cuerpos presentan entre si. Estas leyes físicas son la primera y segunda ley de Newton o también conocidas como Fuerza de Gravedad y Ecuación de Movimiento respectivamente. Estas quedan descritas por las ecuaciones 1.1 y 1.2.

$$\vec{F} = \frac{GMm}{|\vec{r}|^2} \hat{r} \quad (1.1)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1.2)$$

1.1 Antecedentes de Gravedad Extendida

Las leyes físicas desarrolladas por Newton presentan una relación entre cuánta fuerza ejerce una cierta cantidad de materia sobre otro cuerpo. La ecuación 1.1 nos dicen que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que existe entre los cuerpos. Sin embargo, en 1933 Fritz Zwicky (Zwicky 1933, 1937), quien estudiaba cúmulos de galaxias encontró que la masa de las galaxias era insuficiente para describir bajo las leyes de Newton la dinámica observada. En 1970 Vera Rubin (Rubin 1970) estudió la velocidad de rotación de las estrellas de una gran muestra de galaxias espirales. Las leyes de Newton predecían que la velocidad de rotación de las estrellas debería disminuir con la distancia entre esta y el bulbo galáctico, sin embargo se encontró que la curva de rotación era plana, es decir, no variaba con la distancia. Para explicar estas

observaciones es necesario hacer una de las siguientes consideraciones; 1) la masa visible faltante se compensa con una cantidad de masa invisible, llamada hoy en día materia oscura, necesaria para ajustar las curvas de rotación de las estrellas con las leyes de fuerza que conocemos, o 2) la ley de fuerza cambia para grandes escalas como lo es una galaxia.

Suponiendo que las leyes físicas desarrolladas hasta el momento son válidas en todas las escalas cosmológicas, se requiere introducir la hipótesis ad hoc de la existencia de la componente dominante de materia oscura. Dicha materia nunca se ha observado y como alternativa se han desarrollado diferentes teorías, modificando la física a escalas de baja aceleración.

La materia oscura es una materia hipotética cuya composición es desconocida y cuya existencia se infiere a partir de efectos gravitacionales solamente. Es un tipo de materia no disipativa, no colisional y no interactuante con la radiación electromagnética.

J. H. Oort en 1932 (Oort 1932) utilizó las observaciones del movimiento de las estrellas en la vecindad del sistema solar para describir la cinemática en esta región. Esto lo condujo a interpretar y construir un modelo de la Galaxia. Las observaciones de Oort junto con las de Zwicky (Zwicky 1933, 1937) para el cúmulo de Coma mostraron que los potenciales gravitacionales obtenidos de las distribuciones de luz observadas eran diferentes a los potenciales inferidos de mediciones cinemáticas. Los estudios de las curvas de rotación para las galaxias espirales, asumiendo que la ley de gravedad debía de ser Newtoniana, hicieron que fuera necesario introducir un elemento "invisible" denominado Materia Oscura pues para radios grandes (2kpc) las velocidades de las galaxias se mantenían aproximadamente constantes obteniendo curvas de rotación planas.

MODified Newtonian Dynamics (MOND) es un modelo teórico propuesto por M. Milgrom en 1983 (Milgrom 1983) como una alternativa para dar cuenta de las discrepancias de la masa faltante en las galaxias y los sistemas galácticos a escalas de baja aceleración, en vez de tener que utilizar la denominada materia oscura[7].

Milgrom propone modificar la segunda Ley de Newton (ver ecuación 1.3). La teoría MOND introduce una constante empírica, $a_0 = 1.2 \times 10^{-10} \frac{m}{s^2}$, que marca el límite entre los regímenes donde gobiernan esta nueva dinámica y las ya conocidas, la dinámica Newtoniana y la Relatividad General[8].

$$m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)a = \frac{GMm}{r^2} \quad (1.3)$$

Esta ecuación introduce la función $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)$ la cual depende de la relación entre la aceleración ejercida sobre un cuerpo y la constante a_0 tal que:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \begin{cases} \frac{a}{a_0} & \text{si } \frac{a}{a_0} \ll 1 \\ 1 & \text{si } \frac{a}{a_0} \gg 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Considerando que la aceleración de los objetos a distancias de decenas de miles de unidades astronómicas es muy pequeña ($\frac{a}{a_0} \ll 1$) se considera $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a}{a_0}$ por lo que al sustituir en la ecuación 1.3 la aceleración queda de la forma:

$$a^2 = \frac{GMa_0}{r^2} \quad (1.5)$$

Sustituyendo la aceleración centrípeta en la ecuación 1.5 se obtiene:

$$\left(\frac{v^2}{r}\right)^2 = \frac{GMa_0}{r^2} \quad (1.6)$$

De aquí se deduce que para aceleraciones muy bajas, tal que $\frac{a}{a_0} \ll 1$ se obtiene una velocidad de rotación constante dada por:

$$v = (GMa_0)^{\frac{1}{4}} \quad (1.7)$$

Esta ecuación conduce a curvas de rotación planas para galaxias espirales y a la relación Tully-Fisher, siendo las principales predicciones bajo este modelo donde la relación masa velocidad es de la forma $M \propto v^4$ [9]. Sin embargo, este modelo no se puede aplicar a cualquier caso pues cuando se presentan distribuciones de masa asimétricas el momento no se conserva[10]. Es por ello que la teoría de MOND debe considerarse como una aproximación válida en sistemas con una distribución específica de masa. Estas implicaciones físicas conducen a seguir desarrollando nuevas teorías que logren explicar la dinámica del cosmos de manera general sin violar la conservación de la energía. En el presente trabajo se usa una extensión de estos modelos físicos siguiendo la propuesta de X. Hernández y S. Mendoza[11].

En línea con la propuesta de Milgrom sobre la modificación a la dinámica Newtoniana para el régimen de aceleraciones bajas, X. Hernandez y S. Mendoza han propuesto una extensión a la gravedad Newtoniana, una modificación a la fuerza de gravedad (ecuación 1.2) [11]. En su trabajo se propone una fuerza adimensional (fuerza por unidad de masa en unidades de a_0) $f(x)$ tal que

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{x^2}{f(x)} \quad (1.8)$$

establece una correspondencia con MOND. Donde $x = \frac{lm}{r}$ con r la distancia a una masa central M y $lm = \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}$. Esta distancia lm es el límite entre el régimen Newtoniano y el régimen MONDiano y su valor aproximado para el caso del Sol es de 7011 UA.

Proponen que en la ecuación 1.8 $f(x) = x^2$ para el régimen Newtoniano y $f(x) = x$ para el régimen MONDiano. Siguiendo las condiciones para la función $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)$ de la ecuación 1.4 se llega a que la aceleración queda de la forma:

$$a = \begin{cases} \frac{GM}{r^2} & \text{en régimen Newtoniano} \\ \frac{(GMa_0)^{\frac{1}{2}}}{r} & \text{en régimen MONDiano} \end{cases} \quad (1.9)$$

Así, a partir de la ecuación 1.9 se puede modelar la trayectoria de objetos que recorren grandes distancias interaccionando con ambos regímenes. Como es de esperarse la dinámica de muchos de estos objetos, como es la trayectoria de cometas, puede arrojar resultados distintos a los predichos bajo gravedad Newtoniana.

1.2 Motivación

Algunos cometas presentan una excentricidad mayor a 1, esto los convierte en cometas con órbitas hiperbólicas. Al calcular su trayectoria se ha llegado a suponer que su origen radica en la nube de Oort, una nube hipotética de forma esférica constituida de objetos transneptunianos cuyas interacciones con los planetas los han alejado gravitacionalmente del Sol.

Debido a que esta nube no se ha observado directamente y en línea con la propuesta de gravedad extendida que se ha construido como alternativa a la materia oscura, se estudiará en este trabajo la dinámica de los cometas aparentemente de origen extrasolar con una trayectoria inicial hiperbólica. Esto no quiere decir que no haya cometas de origen extrasolar provenientes de algún sistema estelar, pero sí que muchos de los cometas que se creen de origen extrasolar pudieron haber sido formados en el Sistema Solar y más aún, seguir ligados a este a pesar de tener órbitas con excentricidad mayores a cero. Para ello se programará un código en computadora que simule la órbita de cometas a partir de la ley de fuerzas newtoniana y de la ley de fuerzas extendida. Se simularán las órbitas de objetos en el régimen Newtoniano y en el régimen MONDiano en interacción únicamente con el campo de fuerzas producido por el Sol y se analizará la dinámica que presentan.

1.3 Dinámica de los Cometas

Los cometas hiperbólicos son aquellos cuya energía orbital es positiva dentro del esquema Newtoniano. Esto implica que el cuerpo orbitante no está ligado al campo de fuerzas producido por el Sol, es decir, no regresará al Sistema Solar. Sin embargo, al investigar la trayectoria de estos cometas bajo gravedad extendida se obtiene que dichos cometas sí están ligados al Sistema Solar.

El origen de cometas con trayectorias hiperbólicas como el *Bowell* y *Humanson* ha sido estudiado y se ha llegado a la conclusión que es posible que originalmente hayan estado ligados al Sistema Solar pero la interacción gravitacional con los planetas los desviaron ligeramente provocando una trayectoria hiperbólica[5].

En este trabajo no se consideran las perturbaciones producidas por los planetas del Sistema Solar ni por ningún otro agente como la Galaxia. Este esquema simplificado sólo considera la interacción del cometa con el Sol, intentando obtener una explicación sencilla y directa a los cometas "extrasolares", en particular aquellos para los cuales estudios previos, e.g. Secchi, muestran que su energía positiva no se puede explicar como resultado de interacción con los planetas[14].

Dada la conservación del momento angular tanto en gravedad Newtoniana como Extendida, el movimiento de los cometas se supondrá en dos dimensiones. En el caso Newtoniano la velocidad en el perihelio (v_p) se puede calcular a partir de la ecuación 1.10 (e.g. Goldstein). En el caso de trayectorias circulares $e = 0$.

$$v_p = \left(\frac{GM(1+e)}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.10)$$

Los resultados que se obtengan de integrar la ley de fuerzas se compararán con un modelo analítico modelado a partir de la ecuación 1.11.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)} \quad (1.11)$$

$$x = r \cos(\theta) \quad (1.12)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (1.13)$$

La ecuación 1.11 es la ecuación de la elipse y sirve para determinar la posición de los cometas en función de θ , por lo que es necesario determinar el cambio de θ durante el transcurso del tiempo. Este cambio $d\theta$ se puede determinar a partir del cambio en la longitud de arco dS .

$$dS = r d\theta \quad (1.14)$$

El area barrida por el cometa a lo largo de dS es

$$dA = \frac{r^2}{2} d\theta \quad (1.15)$$

Por otro lado vemos que en un pequeño intervalo de tiempo dt el cometa recorra una distancia vdt tal que el área barrida será

$$dA = \frac{rv}{2} dt \quad (1.16)$$

Sustituyendo el momento angular L se obtiene

$$dA = \frac{L}{2m} dt \quad (1.17)$$

De la segunda ley de Kepler sabemos que en una órbita cerrada un cuerpo bajo la influencia gravitacional barre áreas iguales en tiempos iguales, esto quiere decir que si se recorrió $r d\theta$ en un tiempo dt las ecuaciones 1.15 y 1.17 se pueden igualar con lo que se obtiene

$$\frac{r^2}{2} d\theta = \frac{L}{2m} dt \quad (1.18)$$

$$d\theta = \frac{L}{r^2 m} dt \quad (1.19)$$

La ecuación 1.19 se utilizará para determinar el cambio en el ángulo de la ecuación 1.11 conforme transcurra el tiempo. Dada la conservación del Momento Angular tanto en Gravedad Newtoniana como Extendida, la ecuación 1.19 será una restricción contra la cual se compararán las trayectorias de las partículas de prueba que se simularán numéricamente.

A partir de la fuerza gravitacional y de movimiento (ver ecuaciones 1.1 y 1.2) se puede determinar el momento angular, pues al sustituir la aceleración centrípeta se obtiene

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (1.20)$$

$$m^2 GM r = r^2 m^2 v^2 \quad (1.21)$$

$$m^2 GM r = L^2 \quad (1.22)$$

$$(GMr)^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{m} \quad (1.23)$$

Donde r es la distancia medida desde el foco, para el caso de la elipse $r = a(1 - e^2)$ donde a es el semieje mayor y e la excentricidad.

En el régimen MONDiano se tiene que la velocidad de equilibrio centrífugo es $v = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}$. Por lo que al sustituir v en L se obtiene $L = rm(GMa_0)^{\frac{1}{4}}$, por lo tanto:

$$\frac{L}{m} = \begin{cases} (GMa(1 - e^2))^{\frac{1}{2}} & \text{en régimen Newtoniano} \\ r(GMa_0)^{\frac{1}{4}} & \text{en régimen MONDiano} \end{cases} \quad (1.24)$$

Dentro del marco Newtoniano otra característica de los cometas es su energía total. La energía de los cometas ligados al sol es menor que cero, mientras que la de los cometas no ligados es mayor que cero. La energía mecánica está dada por

$$E_t = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{GMm}{r} \quad (1.25)$$

1.4 Dinámica del Lanzamiento Radial

Otro tipo de prueba que se simulará será el de lanzar una partícula radialmente al campo gravitacional producido por el Sol. La partícula estará sometida a una aceleración variable por lo que la ecuación de tiro vertical quedará de la forma

$$r = r_i + v_i\Delta t - \frac{1}{2}g(r_i)\Delta t^2 \quad (1.26)$$

Donde v_i es la velocidad que tiene la partícula en la posición r_i . Δt será una pequeña fracción de tiempo transcurrida para determinar la nueva posición r , esta se utilizará como r_i en la siguiente fracción de tiempo. La velocidad en la nueva posición r será

$$v = v_i - g(r_i)\Delta t \quad (1.27)$$

$g(r_i)$ será la aceleración producida por el Sol en el punto r_i . Esta aceleración dependerá del régimen que se esta será:

$$g(r_i) = \begin{cases} \frac{GM}{r_i^2} & \text{en régimen Newtoniano} \\ \frac{(GMa_0)^{\frac{1}{2}}}{r_i} & \text{en régimen MONDiano} \end{cases} \quad (1.28)$$

1.4.1 Distancia Máxima

Debido a que la Ley de Fuerzas cambia a una distancia aproximada de 7000 UA la distancia máxima a la que llegará un objeto lanzado radialmente será diferente en ambos regímenes.

1.4.1.1 Caso Newtoniano

Para el caso Newtoniano es posible calcular analíticamente esta distancia máxima bajo el siguiente desarrollo:

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \quad (1.29)$$

$$\int_{v_i}^{v_f} v dv = -GM \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r^2} dr \quad (1.30)$$

$$\frac{(v_f^2 - v_i^2)}{2} = GM \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \quad (1.31)$$

$$r_f = \frac{1}{\left(\frac{(v_f^2 - v_i^2)}{2GM} + \frac{1}{r_i} \right)} \quad (1.32)$$

1.4.1.2 Caso MONDiano

Para el caso MONDiano se sigue un desarrollo análogo al anterior pero partiendo de la aceleración dada en la ecuación 1.5.

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{(GMa_0)^{\frac{1}{2}}}{r} \quad (1.33)$$

$$\int_{v_i}^{v_f} v dv = -(GMa_0)^{\frac{1}{2}} \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{r} dr \quad (1.34)$$

$$v_f^2 - v_i^2 = -2(GMa_0)^{\frac{1}{2}} (\ln(r_f) - \ln(r_i)) \quad (1.35)$$

$$\frac{v_i^2 - v_f^2}{2(GMa_0)^{\frac{1}{2}}} = (\ln(r_f) - \ln(r_i)) \quad (1.36)$$

Para un radio inicial $r_i = \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ (ver ecuación 1.8), velocidad final $v_f = 0$ y velocidad inicial igual a la velocidad de escape Newtoniana $v_e = \left(\frac{2GM}{r_i}\right)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene:

$$1 = \ln\left(\frac{r_f}{r_i}\right) \quad (1.37)$$

$$e = \frac{r_f}{r_i} \quad (1.38)$$

Es decir, la distancia máxima a la que llegará un objeto lanzado radialmente en el régimen MONDiano será:

$$r_f = er_i \quad (1.39)$$

1.5 Partículas de Prueba Utilizadas

Con las ecuaciones 1.32 y 1.39 se procederá a calcular analíticamente la distancia máxima a la que llegarán las partículas de prueba que serán utilizadas en las simulaciones para corroborar el funcionamiento correcto del código. A continuación se enlistan las condiciones iniciales escogidas y sus distancias máximas calculadas.

1.5.1 Régimen Newtoniano

Condiciones Iniciales y Finales para Objetos en el Régimen Newtoniano

Objeto	r_i [UA]	v_i $\frac{km}{s}$	r_f [UA]
Partícula con Órbita Circular	1	29.74	1
Cometa Halley	0.57	55.19	35.1
Partícula Lanzada Radialmente	1	14	1.12

Tabla 1.1: r_i : distancia inicial (en el perihelio); v_i : velocidad inicial (velocidad tangencial en el perihelio) para los casos 1 y 2; r_f : distancia final (afelio). Se muestra la distancia máxima calculada a partir de la ecuación 1.32 a la que llegará una partícula lanzada radialmente; con órbita circular; y el cometa Halley para su órbita conocida [12].

1.5.2 Régimen MONDiano

Condiciones Iniciales y Finales para Objetos en el Régimen MONDiano

Objeto	r_i [UA]	v_i $\frac{km}{s}$	r_f [UA]
Partícula con Órbita Circular	8000	0.35	8000
Partícula Lanzada Radialmente	7011.70	0.50	19059.78

Tabla 1.2: r_i : distancia inicial (en el perihelio); v_i : velocidad inicial (velocidad tangencial en el perihelio) para el caso 1; r_f : distancia final (afelio). Se escogió una partícula con órbita circular a 8000 UA donde la velocidad tangencial inicial es $v = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}$. A partir de la ecuación 1.39 se determinó la distancia máxima para una partícula lanzada radialmente a una distancia $r_i = \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ con una velocidad inicial igual a la velocidad de escape Newtoniana $v_i = \frac{2GM}{r}^{\frac{1}{2}}$.

Capítulo 2

Programación del Código

Las funciones programadas en computadora se muestran en el Anexo. En particular este trabajo se concentra en dos diferentes modelos de Fuerzas, estos son el de Newton y el de Gravedad Extendida por lo que en el código se utiliza un "if" como condición para utilizar la Ley de Fuerzas Newtoniana o Extendida según el régimen en el que orbite la partícula.

2.1 Julia

A lo largo de los últimos años ha habido un gran avance en la tecnología y éste ha proporcionando al hombre herramientas que facilitan su trabajo. El desarrollo en la computación le dan la capacidad al usuario de generar sus propios códigos para desarrollar su trabajo de una manera más eficiente y rápida. En línea con esta necesidad de eficiencia y rapidez se crearon más y mejores programas. En 2012 se presenta Julia, un lenguaje de programación dinámico de alto rendimiento para cómputo científico[18].

Su fácil uso, la rápida compilación y la amplia paquetería con la que cuenta fueron las razones principales por las que decidí utilizarlo en la realización de este trabajo.

Una comparación más precisa entre Julia y otros lenguajes de programación se encuentran en juliaang.org.

2.2 Adimensionalización

Para un mejor manejo de cifras durante las simulaciones con el código se usará una adimensionalización de la ecuación 1.9 de tal manera que quede de la forma:

$$a = \begin{cases} \frac{1}{r^2} & \text{en régimen Newtoniano} \\ \frac{1}{r} & \text{en régimen MONDiano} \end{cases} \quad (2.1)$$

Para ello se tiene que $GM = 1$ y $(GMa_0)^{\frac{1}{2}} = 1$ o lo que es lo mismo $GMa_0 = 1$. Por lo tanto de la ecuación 1.7 se obtiene que 1 unidad código de velocidad equivale a $355 \frac{m}{s}$.

Como segunda condición se toma la distancia al Sol en el que se cambia del régimen Newtoniano al régimen MONDiano. La condición de cambio entre una y otra ley de fuerzas en el código se da si la distancia al Sol es 1. Este límite queda determinado por $lm = \left(\frac{GM}{a_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ Por lo tanto 1 unidad código de distancia equivale a $7011UA$.

Por último se igual $GM = 1$ unidad código. Recordando que $[GM] = \frac{m^3}{s^2}$ y teniendo ya la equivalencia entre las unidades código y físicas de distancia se obtiene que 1 unidad código de tiempo equivale a 93864 años. En Tabla 2.1 se recopilan las equivalencias entre unidades código y físicas.

Equivalencias entre Unidades Código y Unidades Físicas

Unidades Código	Unidades Físicas
1 uc de distancia →	7011 UA
1 uc de velocidad →	$355 \frac{m}{s}$
1 uc de tiempo →	93864 años

Tabla 2.1: Las equivalencias entre unidades código (uc) y unidades físicas en esta sección solamente se muestran con número enteros. Las cifras completas utilizadas en el código se muestran en el Anexo.

2.3 Método de Euler Cromer

Para los propósitos del presente trabajo solo hace falta simular un periodo de cada partícula, por lo que el método de Euler Cromer es suficiente para dichas simulaciones. Para casos más complicados el método debe ser mejorado a RK4 o mayor.

El método de Euler Cromer para la ley de Fuerzas utilizado en el código (ver Anexo) es de la forma:

$$\vec{v} = \begin{cases} \vec{v}_i + \frac{k}{r^3} [\vec{r}] \Delta t & \text{en régimen Newtoniano} \\ \vec{v}_i + \frac{k}{r^2} [\vec{r}] \Delta t & \text{en régimen MONDiano} \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \vec{v} \Delta t \quad (2.3)$$

Donde k es $-GM$ en el caso Newtoniano, $-(GMa_0)^{\frac{1}{2}}$ en el caso MONDiano y -1 en el caso adimensionalizado, tanto Newtoniano como MONDiano. En el código se utiliza $k = -1$.

v_i y r_i son la velocidad y posición inicial respectivamente. Estas condiciones iniciales son los datos de entrada en el código.

2.4 Tamaño de Paso Variable

Para un mejor control del tiempo que tarda la computadora en integrar la ley de fuerzas y para mantener una precisión adecuada se utiliza un tamaño de paso variable, es decir, Δt de la ecuación 2.2 varía según la posición y la velocidad.

Sabiendo que el periodo para una órbita circular está definido como:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (2.4)$$

se utiliza un factor de adimensionalización que llamaremos " N " tal que Δt quede de la forma:

$$\Delta t = \left(\frac{2\pi r}{v} \right) \frac{1}{N} \quad (2.5)$$

Donde v y r son la velocidad y posición del objeto a determinado momento.

2.5 Determinando el Factor de Adimensionalización

Debido a que el método utilizado es no-conservativo se determinó un valor adecuado de N para la ecuación 2.5 con el fin de obtener una resolución adecuada del problema. Para ello se programó un código que graficara el cambio en el momento angular normalizado $\left(\left| \frac{\Delta L}{L} \right| \right)$ para varios valores de N . En el Anexo se muestra el código utilizado para calcular dicha N . A continuación se muestra la gráfica con los resultados obtenidos.

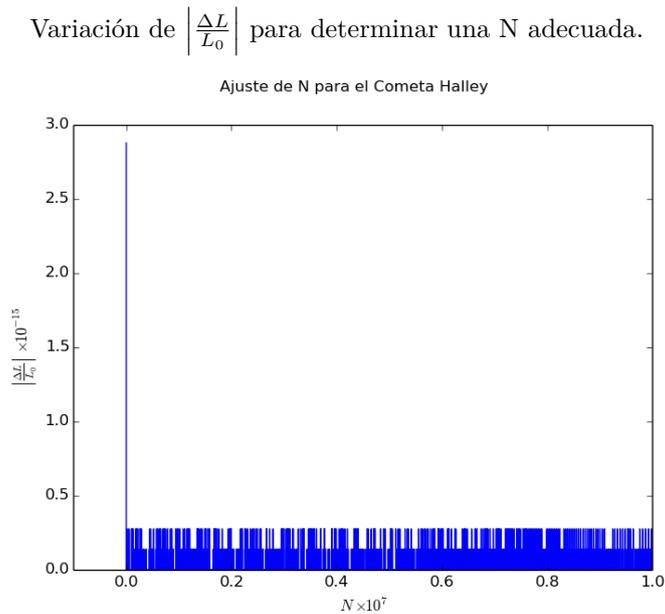


Figura 2.1: Se muestra $\left| \frac{\Delta L}{L_0} \right|$ obtenida para distintos valores de "N" comparando el valor del momento angular inicial y el momento angular después de una integración por Euler Cromer para un tamaño de paso Δt dependiente de N, según se muestra en la ecuación 2.5 para el cometa Halley con condiciones de velocidad inicial tangencial de $55.19 \frac{km}{s}$ y posición inicial en el perihelio de $0.57UA$.

El valor de N usado se ajustó en cada simulación, requiriendo que el valor relativo en la conservación del momento angular fuera en todos los casos de una parte en 10^{-13} o menor. Esto implicó valores de N de entre 5×10^{13} y 2.5×10^6 .

2.6 Probando el código.

Las especificaciones de cada una de las simulaciones hechas en computadora se muestran en el Anexo donde se detallan las condiciones iniciales usadas en cada uno de los casos. En las gráficas siguientes sólo se señalarán las unidades físicas relevantes. Los modelos teóricos mostrados en las gráficas se obtuvieron con los códigos titulados "TrayectoriaElíptica" y "TrayectoriaRadial". Los resultados con el código titulado "Extendida" (dichos códigos se encuentran en el Anexo). Las distancias máximas señaladas son las mencionadas en las Tablas 1.1 y 1.2.

2.6.1 En el régimen Newtoniano

Partícula con Órbita Circular en Régimen Newtoniano

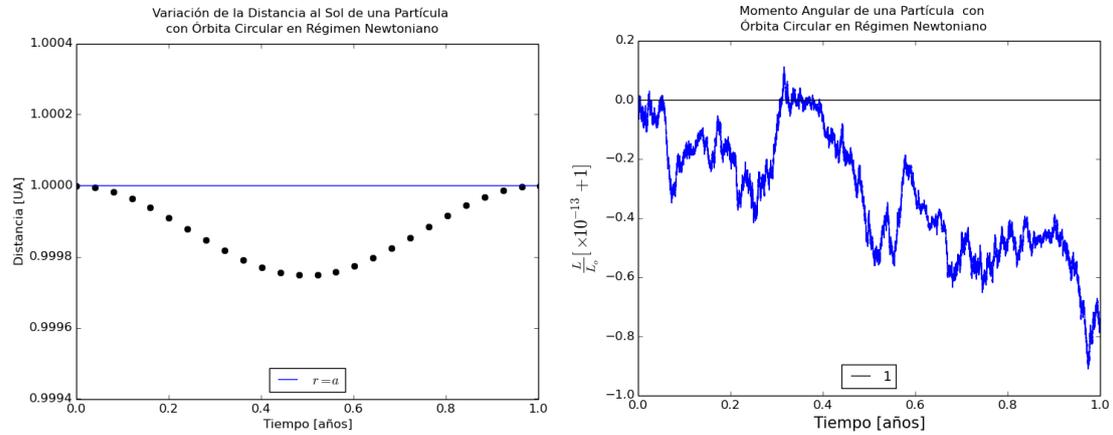


Figura 2.2: Se observa que la partícula simulada tiene una órbita casi circular. A la izquierda se muestra la variación del radio de la órbita de una partícula con trayectoria teórica circular. A la derecha se muestra el momento angular a lo largo de su periodo. Las líneas continuas muestran los valores analíticos y los puntos los valores simulados. Las condiciones iniciales fueron: velocidad tangencial inicial = $29.78 \frac{km}{s}$, distancia inicial = 1 UA. La simulación arrojó 1192064 datos, en la gráfica de la izquierda solamente se muestra uno cada 40000.

Cometa Halley

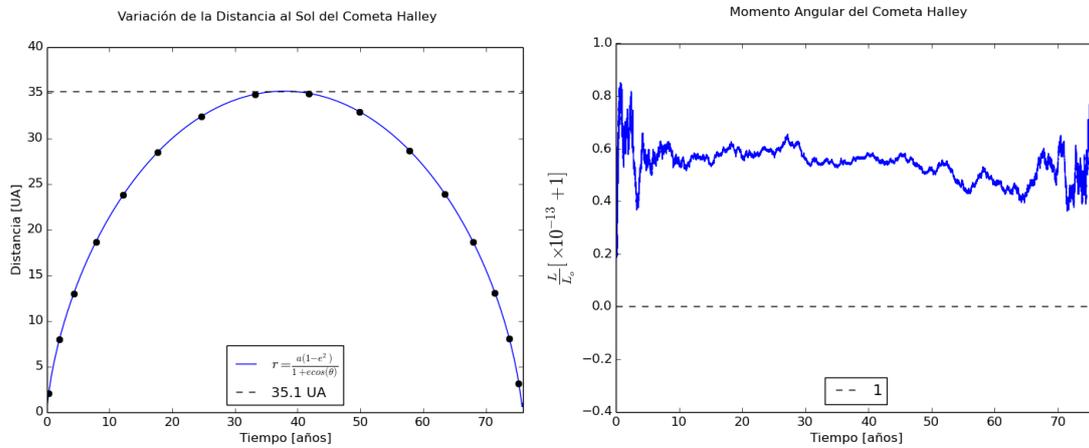


Figura 2.3: Se muestran las gráficas obtenidas a partir del código "Newton" para un periodo del cometa Halley al rededor del Sol con una velocidad tangencial inicial de $55.19 \frac{km}{s}$ y a una distancia inicial de 0.57 UA. En la gráfica de la izquierda, con una línea punteada, se señala la distancia máxima predicha en Tabla 1.1. Sobre el modelo teórico (línea continua en gráfica de la izquierda) se grafican 16 datos de los 1087457 obtenidos en la simulación con el código. En la gráfica de la derecha se observa que el error es de una parte en 10^{13} .

Partícula Lanzada Radialmente en Régimen Newtoniano

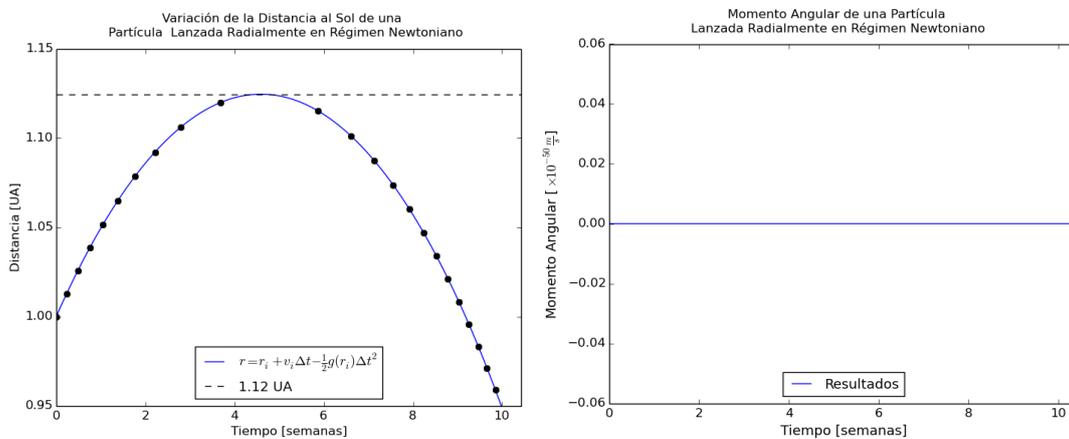


Figura 2.4: Se muestran los resultados obtenidos para una partícula lanzada en dirección radial en sentido opuesto al centro de fuerza con una velocidad inicial de $14 \frac{km}{s}$ y a una distancia de 1 UA. En la gráfica de la izquierda se señala con una línea punteada la distancia máxima predicha en Tabla 1.1. En la gráfica de la derecha el Momento Angular específico ($l = \frac{L}{m}$).

Trayectoria de la Partícula con Órbita Circular y del Cometa Halley

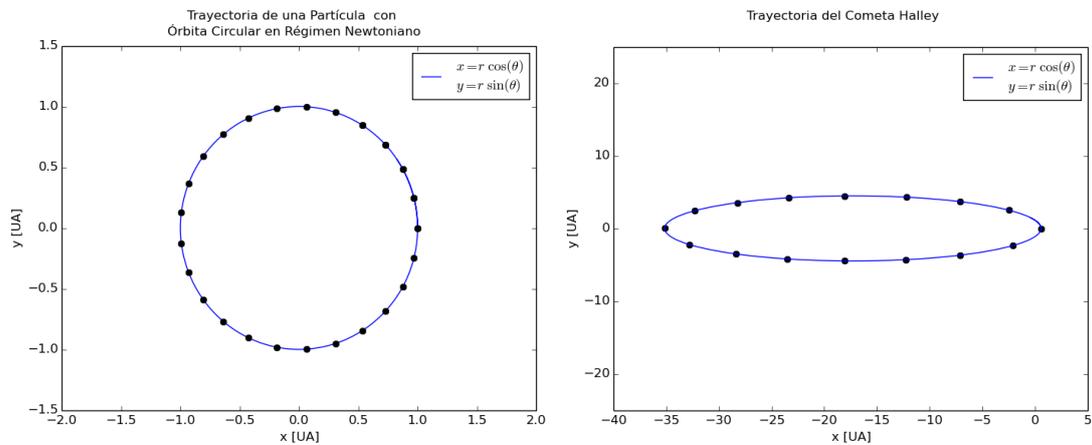


Figura 2.5: Se muestran las trayectorias de los objetos simulados en las Figuras 2.2 y 2.3.

2.6.2 En el régimen MONDiano

Partícula con Órbita Circular en Régimen MONDiano

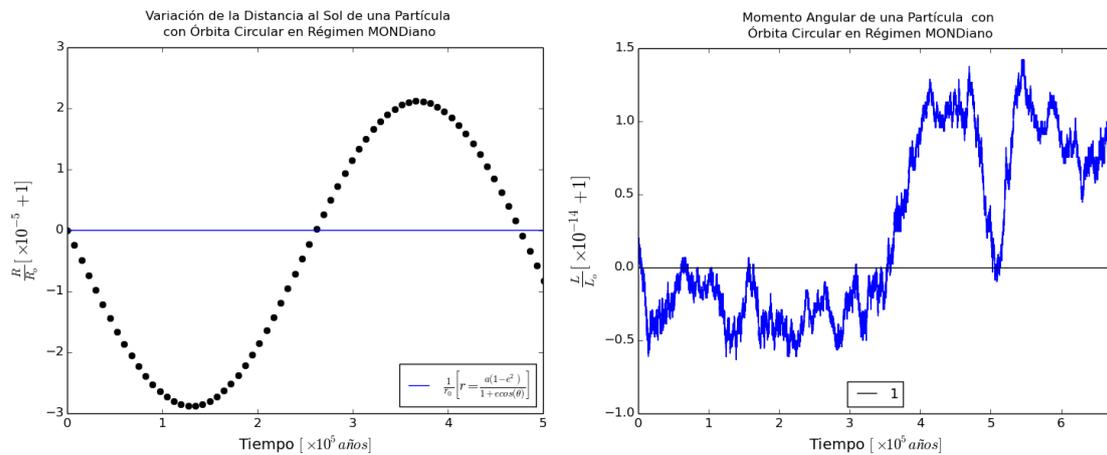


Figura 2.6: Se muestran los resultados obtenidos para una partícula lanzada a una velocidad tangencial inicial de $0.35 \frac{km}{s}$ y a una distancia de 8000 UA con el fin de observar la trayectoria que describe. Debido a que el cambio en la ley de fuerzas se da en 7011.70 UA, en esta simulación no se efectuó un cambio en la ley de fuerzas durante la integración y únicamente se manejó la ley de Fuerzas en el régimen MONDiano. En la gráfica de la izquierda se señala con una línea la distancia orbital analítica. En la gráfica de la derecha se observa que el error es de una parte en 10^{14} .

Partícula Lanzada Radialmente en Régimen MONDiano

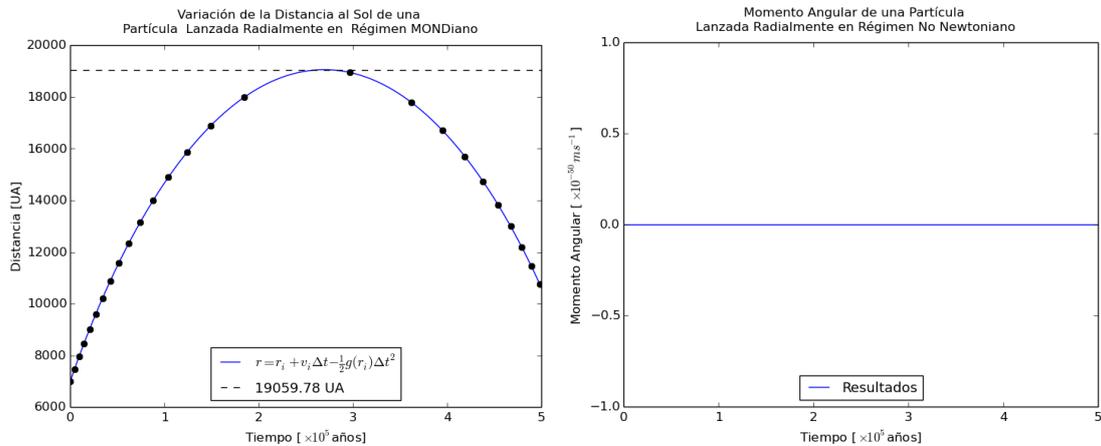


Figura 2.7: Se muestran los resultados para una partícula lanzada en dirección radial en sentido opuesto al centro de fuerza con una velocidad inicial de $0.50 \frac{km}{s}$ y a una distancia de 7011.70 UA. La velocidad inicial corresponde a la velocidad escape a 7011.70 UA. La simulación solamente se lleva a cabo en el régimen MONDiano. En la gráfica de la izquierda se señala con una línea punteada la distancia máxima predicha en Tabla 1.2. Además se muestran los resultados sobre el modelo teórico. En los resultados solo se muestra 1 dato de cada 1000 simulados.

2.6.3 En ambos regímenes.

Partícula en Interacción con los Regímenes Newtoniano y MONDiano

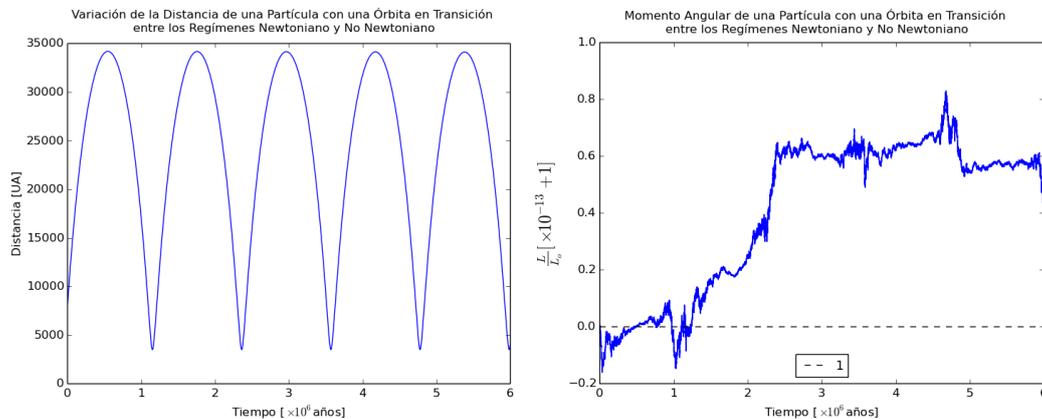


Figura 2.8: Se muestran las gráficas obtenidas a partir del código "Extendida" para una partícula lanzada con una velocidad inicial tangencial de $0.35 \frac{km}{s}$ y radial de $0.49 \frac{km}{s}$ a una distancia de 8000 UA. En esta simulación la partícula cambió de régimen durante su trayectoria por lo que se llevó a cabo el cambio en la Ley de Fuerzas durante la integración hecha con el código.

Trayectorias de Partículas en Régimen MONDiano

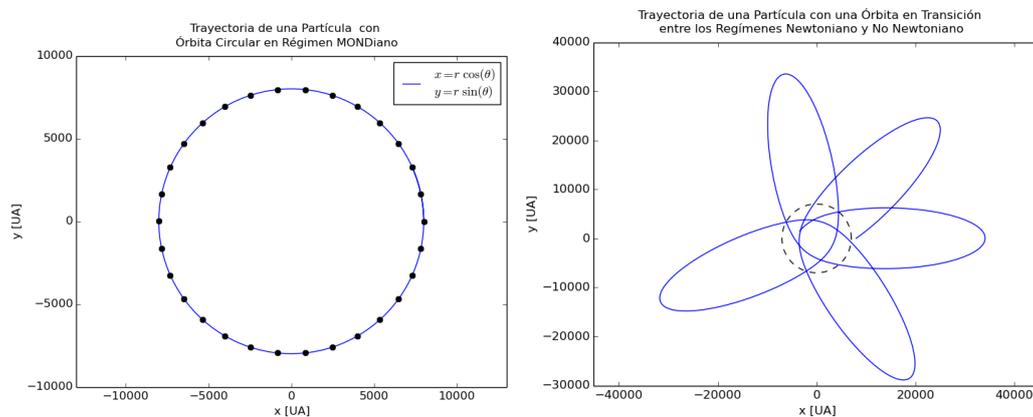


Figura 2.9: Se muestran las trayectorias de las partículas mencionadas en las Figuras 2.6 y 2.8 con sus respectivas condiciones iniciales. En la gráfica de la derecha se señala con una línea punteada el límite entre el régimen Newtoniano y MONDiano que se encuentra a una distancia aproximada de 7011 UA.

De esta manera, comparando con soluciones analíticas para órbitas circulares, radiales y elípticas en el caso Newtoniano y circulares en el caso de Gravedad Extendida, comprobamos que la simulación es exacta en términos de conservación del Momento Angular en una parte en 10^{13} y exacta en la descripción de las órbitas en una parte en 10^4 . El caso en el que la partícula cruza el radio de transición entre la ley de fuerzas Newtoniana y la extendida (Figura 2.8 derecha) resulta en órbitas tipo roseta no cerrada, que dentro de la zona Newtoniana corresponden a hipérbolas con energía positiva que al cruzar a la zona de Gravedad Extendida resultan en órbitas elongadas para partículas ligadas.

En cúmulos globulares (X. Hernández y S. Mendoza APJ750,9) se estudió la estructura interna de cúmulos globulares con una ley de fuerzas que transita entre una zona Newtoniana $a > a_0$ y una zona de Gravedad Extendida $a < a_0$, tomando como restricciones tanto los perfiles de distribución de velocidad como los perfiles de brillo superficial para una muestra de 8 cúmulos globulares. Se obtuvo que estos modelos pueden reproducir con éxito todas las restricciones observacionales siempre y cuando la transición entre las 2 regiones de la ley de fuerzas sea muy abrupta. Por esta razón en el presente trabajo no se introduce ninguna función de transición entre los 2 regímenes y se hace el estudio sólo para cuando esta transición es abrupta.

2.7 Manejo de Datos

De la Figura 2.2, en la gráfica de la izquierda, se puede observar que la variación de la distancia señalada en la línea punteada que se puede tomar como la distancia teórica y la distancia máxima a la cual llega la Tierra mediante la simulación es menor que 0.007 UA por lo que al sólo ser relevante 1 periodo en la mayoría de las simulaciones hechas en el presente trabajo se puede considerar que el ruido de la computadora no va sumando errores a las gráficas hechas y por lo tanto se tiene una precisión adecuada (con un error menor al 7%) para los propósitos de este trabajo.

Se concluye que el código funciona correctamente por lo que se da paso a las simulaciones hechas para cometas "extrasolares" como es el caso del cometa Secchi.

Capítulo 3

Muestra de Cometas Hiperbólicos

Antes de seleccionar los cometas que se estudiarán en este trabajo es necesario tener en cuenta que la órbita hiperbólica con la que actualmente cuentan pudo ser causa de la adición de energía por interacción con los planetas, es decir, en algunos casos su origen extrasolar bajo gravedad Newtoniana es debatible. Uno de los cometas que tiene una órbita con excentricidad mayor que 1, sin que ésta sea consecuencia de la adición de energía por los planetas, es el cometa C/1853 E1 (Secchi), como lo señala Branham: "Para el cometa Secchi (C/1853 E1), sin embargo, la órbita es hiperbólica a una distancia de más de 100000 AU del Sol y sin evidencia de fuerzas no gravitatorias. Si la órbita permanece hiperbólica a esa distancia, quizás su origen fuera de la nube de Oort." [14].

El cometa McNaught-Tritton, descubierto en 1978, fue caracterizado parabólico por Marsden en un principio [17]. Cálculos más precisos lo caracterizan como hiperbólico según la NASA [16]. Su origen no ha sido clasificado como extrasolar, sin embargo, se toma en cuenta dentro de esta muestra de cometas con el fin de exponer y comparar la dinámica que este cometa tiene bajo gravedad Newtoniana y extendida tras dejar el Sistema Solar.

Con los datos de excentricidad y perihelio consultados en la página de la NASA [13] se obtuvo, a partir de las ecuaciones 1.10, la velocidad tangencial en el perihelio de cada cometa. Además se calculó la energía total por unidad de masa para la muestra de cometas utilizando los datos de la tabla 3.1 teniendo en cuenta que energía mecánica positiva indica un cometa que no está ligado al Sol bajo gravedad Newtoniana.

Elementos Orbitales de una Muestra de Cometas Hiperbólicos

Cometa	q [UA]	e	v [$\frac{km}{s}$]	referencia
C/1853 E1 (Secchi)	1.09	1.000000	40.22	[15]
C/1978 G2 "McNaught-Tritton"	6.28	1.002136	16.79	[16]

Tabla 3.1: Se muestra el perihelio q y la excentricidad e obtenidos a partir de las fuentes bibliográficas mencionadas para distintos cometas y su velocidad en el perihelio calculada a partir de la ecuación 1.10.

Energía Total de la Muestra de Cometas Hiperbólicos

Cometa	$E_m \left[\frac{J}{m} \right]$
C/1853 E1 "Secchi"	61250.35
C/1978 G2 "McNaught-Tritton"	46908.81

Tabla 3.2: Se muestra la energía total positiva de la muestra de cometas en Tabla 3.1.

Capítulo 4

Resultados

Cometa C/1853 E1 Secchi

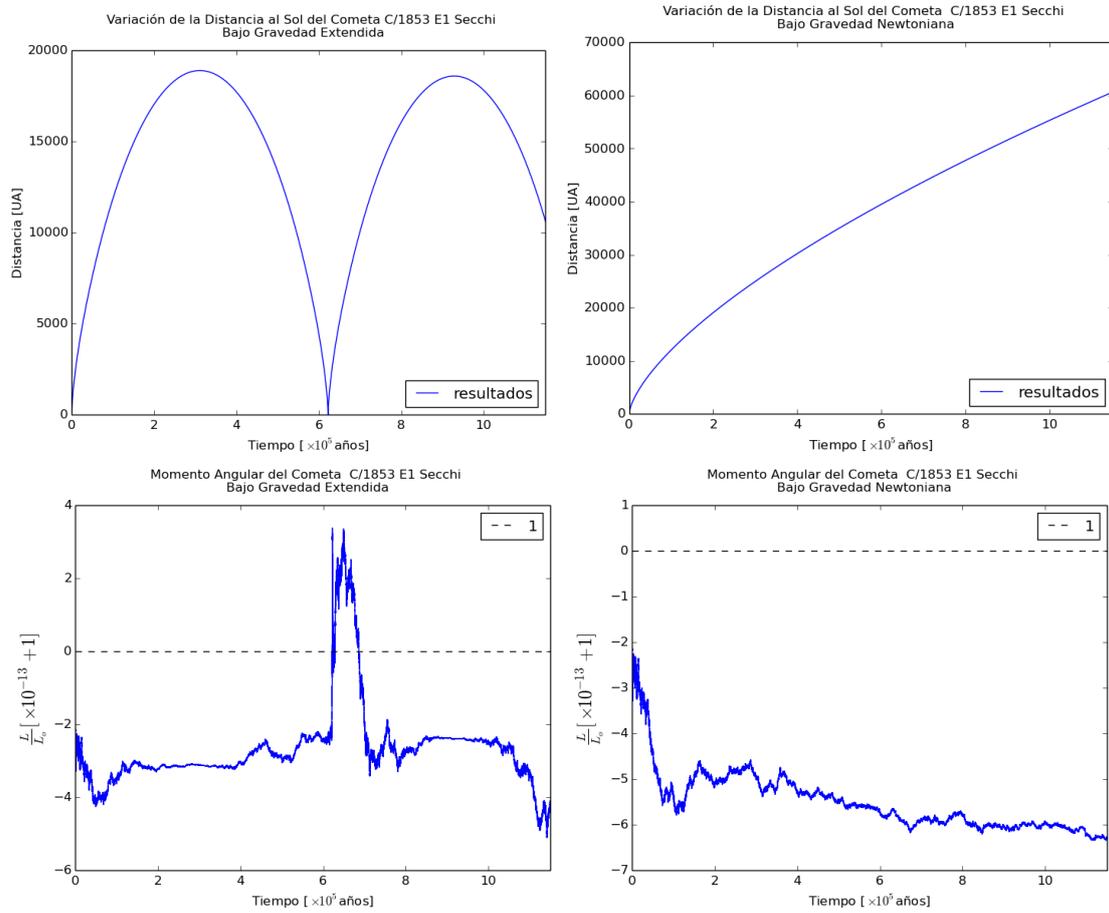


Figura 4.1: Se compara la dinámica del cometa C/1853 E1 Secchi bajo Gravedad Newtoniana y Extendida con velocidad inicial tangencial de $40.22 \frac{km}{s}$ y posición inicial de 1.09 UA. Se observa que bajo gravedad Newtoniana el cometa no regresa, la distancia que existe entre este y el Sol solamente crece. Por el contrario se observa que bajo gravedad Extendida el cometa regresa, esto lo hace cuando llega a una distancia máxima aproximada de 18000 UA como se observa en la primera gráfica.

Cometa C/1978 G2 McNaught-Tritton

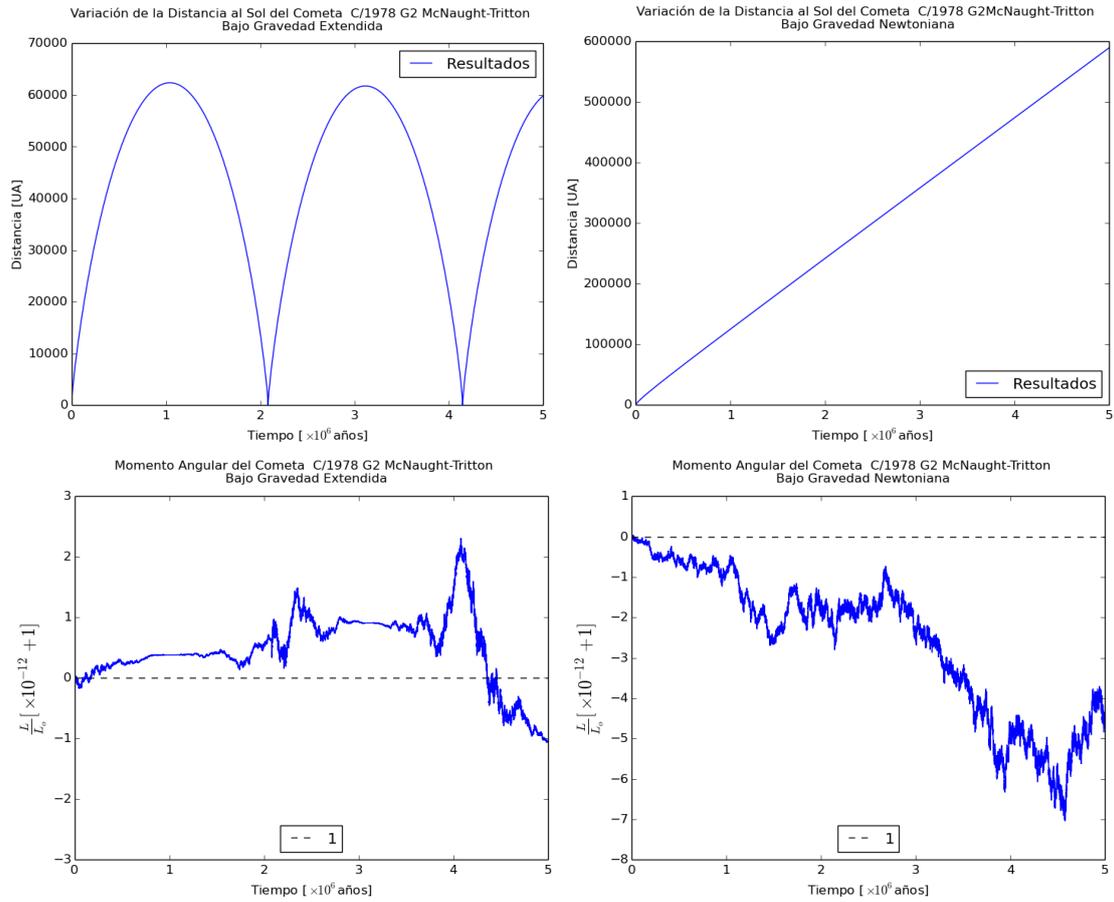


Figura 4.2: Se compara la dinámica que presenta el cometa C/1978 G2 McNaught-Tritton bajo Gravedad Newtoniana y Gravedad Extendida. En ambas pruebas se utilizó su posición en el perihelio de 6.28 UA y la velocidad tangencial en este punto de $16.79 \frac{km}{s}$ [16]. Se observa, al igual que en el caso del cometa Secchi que bajo gravedad Newtoniana el cometa no regresa, la distancia que existe entre éste y el Sol crece y no disminuye. Por el contrario se observa que bajo gravedad Extendida el cometa regresa. Esto lo hace cuando llega a una distancia máxima aproximada de 60000 UA.

Trayectoria de los Cometas

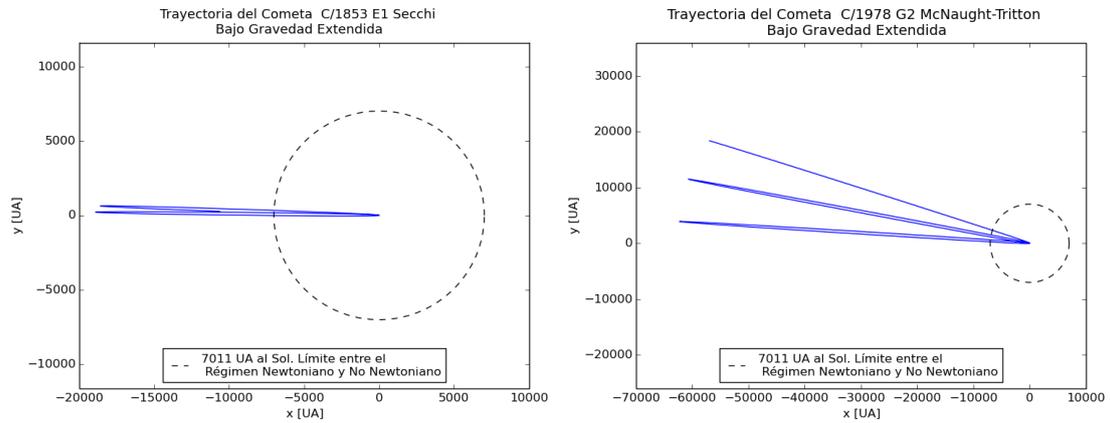


Figura 4.3: Se muestran la trayectorias que describen los cometas Secchi y McNaught bajo gravedad Extendida. La trayectoria que describen los cometas son rosetas abiertas. Los cometas regresan a distancias próximas a su perihelio, a diferencia del caso Newtoniano en el que los cometas se alejan del Sol y no regresan.

Capítulo 5

Análisis y Conclusiones

En 1950 Oort estudió la dinámica orbital de los cometas de periodo largo y concluyó que estos provenían de una región ligada al Sol conocida como Nube de Oort. Oort señaló que el origen de estos cometas no implicaba ser de índole extrasolar [19]. El cometa McNaught, a pesar de estar dentro de los cometas de periodo largo, no es clasificado como de origen "extrasolar" a diferencia del cometa Secchi [14]. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que dichos cometas, cuya órbita es hiperbólica bajo gravedad Newtoniana, se encuentran ligados al Sol mediante una órbita cerrada que describe rosetas cuando su dinámica orbital es simulada bajo gravedad extendida.

De la figura 4.1 se observa una notable diferencia entre la variación de la distancia al Sol del cometa C/1853 E1 Secchi bajo gravedad Newtoniana y Extendida. De esta variación resalta que bajo gravedad Extendida existe un radio orbital máximo al cual llega el cometa, por el contrario bajo gravedad Newtoniana éste no se aprecia. Esta distancia máxima a la cual llega el cometa Secchi es cerca de los 20000 UA el cual es uno de los límites que se ha propuesto que tiene la Nube de Oort en su extensión más próxima al Sol. Para el cometa McNaught, Figura 4.2, el cual es otro referente para este artículo pero cuyo origen no está confirmado como extrasolar, se observa que el radio máximo llega a un poco más de 60000 UA bajo gravedad Extendida. Es decir bajo gravedad Extendida también es posible encontrar un radio máximo orbital en este tipo de cometas.

La conclusión principal de este trabajo es que modificando la ley de fuerzas a grandes distancias astronómicas, del orden de 7000 UA, la dinámica de los cometas cambia pues bajo gravedad Newtoniana cometas que se creen hiperbólicos no regresan, mientras que bajo gravedad Extendida estos regresan al describir órbitas cerradas. Así pues, se concluye que cometas que se creen de origen extrasolar pueden estar ligados al Sol desde sus orígenes cuando estos son modelados bajo gravedad Extendida, quitándolos como candidatos de origen extrasolar.

Capítulo 6

Anexo

6.1 Códigos Programados

Los códigos se realizaron con el lenguaje de programación Julia utilizando la interfaz IJulia Notebooks en JuliaBox.org. En la entrada de los códigos se escriben las cantidades en UA , $\frac{km}{s}$ y años, el código las convierte a unidades código por lo que las ecuaciones programadas están escritas de tal forma que manejen estas unidades y no las unidades físicas. EL símbolo "#" representa un comentario y no forma parte del código.

En todos los códigos programados se utilizaron las siguientes relaciones:

```
q_cambio=7011.701267643015 # UA
v_cambio=0.35526134438969614 # km/s
t_cambio=93814.9426610015 # años
```

q0 es el vector de posición y defino sus elementos como:

```
x(q0)=q0[1]
y(q0)=q0[2]
z(q0)=q0[3]
```

Donde:

x es la primera entrada del vector de posición q0
y es la segunda entrada del vector de posición q0
z es la tercera entrada del vector de posición q0

La distancia entre los dos objetos queda definida como:

```
r(q0)=norm(q0)
```

Se utiliza el graficador PyPlot llamándolo con el comando:

```
using PyPlot
```

6.1.1 Código para Calcular N en la Adimensionalización

Se define la función que va a calcular para varias N's el momento angular inicial y el momento angular para un $\Delta t(N)$

```
function N(q0,v0,Ni,dN,Nf)
```

Donde q0 es el vector posición inicial, v0 el vector velocidad inicial, Ni la primera N que se quiere evaluar, Nf la última N que se quiere evaluar y dN el intervalo que habrá entre las N's evaluadas desde Ni hasta Nf.

Definimos los arreglos dónde se van a guardar $\left| \frac{\Delta L}{L_0} \right|$ y N.

```
Ls=Float64[ ]
Ns=Float64[ ]
```

Se convierten los valores (en unidades físicas) de las entradas a unidades código.

```
q0=q0/q_cambio
v0=v0/v_cambio
```

Se calcula el momento angular inicial L_0

```
L0=norm(cross(v0,q0))
```

Se inicia un loop para un intervalo de N's

```
for N in Ni:dN:Nf
```

Se calcula el tamaño de paso Δt dependiente de la N.

```
 $\Delta t = ((2 * \pi * (\text{norm}((q0))) / \text{norm}(v0))) / N$ 
```

Se calcula la velocidad y la posición nueva según la integración por Euler Cromer para el régimen Newtoniano

```
v_nueva=v0+((-1/(norm(q0)^3)).*q0)* $\Delta t$ 
x_nueva=q0+v_nueva* $\Delta t$ 
```

Se calcula el momento angular nuevo en esta posición, en seguida su norma y finalmente $\left| \frac{\Delta L}{L_0} \right|$

```
L=cross(x_nueva,v_nueva)
L=norm(L)
Lt=(abs(L-L0)/L0)
```

Guardamos en nuestros arreglos el valor de $\left| \frac{\Delta L}{L_0} \right|$ obtenido para cada N

```

push!(Ls,Lt)
push!(Ns,N)

# Finalizamos el loop.

end

# Le pedimos a la función que una vez que acabe el loop arroje las N's y las  $\left|\frac{\Delta L}{L_0}\right|$  calculadas.

Ns,Ls

# Finalizamos la función N

end

```

6.1.2 Integrador de la Ley de Fuerzas de Newton

```

# Se define la función.

function Newton(q0,v0,tf,N)

# q0: vector posición inicial
# v0: vecotr velocidad inicial
# tf: tiempo final
# N: factor por el cual se va a dividir el periodo para obtener el tamaño de paso

# Se convierten los valores (en unidades físicas) de las entradas a unidades código.

q0=q0/q_cambio
v0=v0/v_cambio
tf=tf/t_cambio

# Defino los arreglos donde se van a ir guardando los datos.

qs=VectorFloat64[ ]
vs=VectorFloat64[ ]
ts=Float64[ ]
Ls=Float64[ ]

# qs: Es el arreglo donde se van a ir guardando los vectores posición durante la integración.
# vs: Es el arreglo donde se van a ir guardando los vectores velocidad durante la integración.
# ts: Es el arreglo donde se va a ir guardando el tiempo físico dentro de la simulación para el
cual la integración se llevó a cabo, es decir, el tiempo ya transcurrido más el tamaño de paso
hecho.
# Ls: Es el arreglo donde se va a ir guardando el momento angular para las condiciones
calculadas en cada punto a lo largo de la trayectoria.

```

```

# Definimos la variable "t" igual a cero. "t" es la variable que determinará el tiempo
transcurrido durante la integración, es decir.  $t=t+\Delta t$ .

t=0

# Ahora se pone la condición que mientras este tiempo "t" no haya llegado al tiempo final "tf"
establecido en la condición inicial se hará la integración.

while t<tf

# A continuación se define el tamaño de paso ( $\Delta t$ ) que será variable. Dependerá de la posición
y velocidad en cada punto de la trayectoria.

 $\Delta t=((2*\pi*(r(q0))/\text{norm}(v0)))/N$ 

# Se define la integración con el método de Euler-Cromer

v_nueva=v0+((-1/(r(q0)^3)).*[x(q0),y(q0),z(q0)])* $\Delta t$ 
x_nueva=q0+v_nueva* $\Delta t$ 

# v_nueva: Es el vector velocidad nuevo después de la integración.
# x_nueva: Es el vector posición nuevo después de la integración.

# Una vez hecha la integración le sumamos ese pasito de tiempo a "t"

t= $\Delta t+t$ 

# Ahora calculamos el momento angular. Para ello transformamos el vector posición y vector
velocidad a unidades físicas.

q0=q0*q_cambio
v0=v0*v_cambio

# Ahora sacamos el producto cruz de dichos valores. (El momento Angular quedará expresado
sobre unidad de masa.)

L=cross(q0,v0)

# Ahora se saca la norma del momento angular obtenido en este punto.

L=norm(L)

# Finalmente regresamos los valores de la posición vectorial y de la velocidad vectorial a
unidades código.

q0=q0/q_cambio
v0=v0/v_cambio

```

```

# Ahora vamos a guardar en los arreglos definidos al principio las condiciones iniciales
utilizadas en la integración.

push!(qs,[q0])
push!(vs,[v0])
push!(ts,t)
push!(Ls,L)

# Ahora vamos a guardar en los arreglos definidos al principio las condiciones iniciales
utilizadas en la integración. # Ahora redefinimos q0 y v0 con los valores obtenidos en la
integración.

q0=x_nueva
v0=v_nueva

# Término de la condición "while".

end

# A continuación se multiplican los datos en los arreglos por la unidad física equivalente a la
unidad código con el fin de tener una mejor visualización de magnitudes en las gráficas.

qs=qs*q_cambio
vs=vs*v_cambio
ts=ts*t_cambio

# Por último se pide que muestre la lista de tiempos ts, vectores posición qs, vectores
velocidad vs y el momento angular a lo largo de la trayectoria Ls

ts,hcat(qs...)',hcat(vs...)',Ls

# Finalmente se da término a la función.

end

```

6.1.3 Integrador de las Leyes de Fuerza bajo Gravedad Extendida

Este código implementa un "if" para hacer un cambio en la ley de Fuerzas dependiendo de la distancia a la que se encuentre el objeto. Empiezo por definir la función que llamaré "Extendida".

```

function Extendida(q0,v0,tf,N)

# q0: vector posición inicial
# v0: vector velocidad inicial
# tf: tiempo final
# N: factor por el cual se va a dividir el periodo para obtener el tamaño de paso

# Se convierten los valores (en unidades físicas) de las entradas a unidades código.

```

```

q0=q0/q_cambio
v0=v0/v_cambio
tf=tf/t_cambio

# Defino los arreglos donde se van a ir guardando los datos.

qs=VectorFloat64[ ]
vs=VectorFloat64[ ]
ts=Float64[ ]
Ls=Float64[ ]

# qs: Es el arreglo donde se van a ir guardando los vectores posición durante la integración.
# vs: Es el arreglo donde se van a ir guardando los vectores velocidad durante la integración.
# ts: Es el arreglo donde se va a ir guardando el tiempo físico dentro de la simulación para el
cual la integración se llevó a cabo, es decir, el tiempo ya transcurrido más el tamaño de paso
hecho.
# Ls: Es el arreglo donde se va a ir guardando el momento angular para las condiciones
calculadas en cada punto a lo largo de la trayectoria.

# Definimos la variable "t" igual a cero. "t" es la variable que determinará el tiempo
transcurrido durante la integración, es decir.  $t=t+\Delta t$ .

t=0

# Ahora se pone la condición que mientras este tiempo "t" no haya llegado al tiempo final "tf"
establecido en la condición inicial se hará la integración.

while t<tf

# A continuación se define el tamaño de paso ( $\Delta t$ ) que será variable. Dependerá de la posición
y velocidad en cada punto de la trayectoria.

 $\Delta t=((2*\pi*(r(q0))/\text{norm}(v0)))/N$ 

# Ahora vamos a establecer una condición tal que cambie la ley de Fuerza según el régimen en
el que se encuentre. Como 7011.70126 UA equivalen a 1 unidad código, la condición para que
la ley de Fuerzas sea Newtoniana será que la distancia del objeto en unidades código sea menor
que 1 y se usará La Ley de Fuerzas Extendida para distancias mayores o iguales a 1. Se define
la integración con el método de Euler-Cromer

if r(q0)<1
v_nueva=v0+((-1/(r(q0)3)).*[x(q0),y(q0),z(q0)])* $\Delta t$ 
else
v_nueva=v0+((-1/(r(q0)2)).*[x(q0),y(q0),z(q0)])* $\Delta t$ 
end
x_nueva=q0+v_nueva* $\Delta t$ 

# v_nueva: Es el vector velocidad nuevo después de la integración.

```

```
# x_nueva: Es el vector posición nuevo después de la integración.

# Una vez hecha la integración le sumamos ese pasito de tiempo a "t"

t= $\Delta t$ +t

# Ahora calculamos el momento angular. Para ello transformamos el vector posición y vector
velocidad a unidades físicas.

q0=q0*q_cambio
v0=v0*v_cambio

# Ahora sacamos el producto cruz de dichos valores. (El momento Angular quedará expresado
sobre unidad de masa.)

L=cross(q0,v0)

# Ahora se saca la norma del momento angular obtenido en este punto.

L=norm(L)

# Finalmente regresamos los valores de la posición vectorial y de la velocidad vectorial a
unidades código.

q0=q0/q_cambio
v0=v0/v_cambio

# Ahora vamos a guardar en los arreglos definidos al principio las condiciones iniciales
utilizadas en la integración.

push!(qs,[q0])
push!(vs,[v0])
push!(ts,t)
push!(Ls,L)

# Ahora vamos a guardar en los arreglos definidos al principio las condiciones iniciales
utilizadas en la integración. # Ahora redefinimos q0 y v0 con los valores obtenidos en la
integración.

q0=x_nueva
v0=v_nueva

# Término de la condición "while".

end

# A continuación se multiplican los datos en los arreglos por la unidad física equivalente a la
unidad código con el fin de tener una mejor visualización de magnitudes en las gráficas.
```

```

qs=qs*q_cambio
vs=vs*v_cambio
ts=ts*t_cambio

# Por último se pide que muestre la lista de tiempos ts, vectores posición qs, vectores
velocidad vs y el momento angular a lo largo de la trayectoria Ls

ts, hcat(qs...)', hcat(vs...)', Ls

# Finalmente se da término a la función "Extendida".

end

```

6.1.4 Código para Calcular Trayectorias Elípticas

```

# Definimos la función

function TrayectoriaElíptica(a,e,N)

# a: semieje mayor.
# e: excentricidad.
# N: factor por el cual se va a dividir el periodo para obtener el tamaño de paso.

# Se convierte el valor del semieje mayor a a unidades código.

a=a/q_cambio

# Se definen los arreglos dónde se van a guardar los datos.

rs=Float64[ ]
ts=Float64[ ]
xs=Float64[ ]
ys=Float64[ ]

# rs: Arreglo donde se van a guardar las posiciones a lo largo del cálculo de la trayectoria.
# ts: Arreglo donde se va a guarda el tiempo conformado por el tiempo anterior (t) más el
tamaño de paso hecho ( $\Delta t$ ) a lo largo del cálculo de la trayectoria.
# xs: Es el arreglo donde se van a ir guardando las posiciones en x dependientes del ángulo
( $x(\theta) = r \cos(\theta)$ )
# ys: Es el arreglo donde se van a ir guardando las posiciones en y dependientes del ángulo
( $y(\theta) = r \sin(\theta)$ )

# Se calcula el periodo a partir de su semieje mayor.

T=sqrt(4*\pi^2*a^3)

# Se determina el tamaño de paso  $\Delta t$ 

 $\Delta t=T/N$ 

```

```

# Se define el momento angular sobre unidad de masa para el régimen Newtoniano.
Lμ1=sqrt(a*(1-e^2))

# Se define el momento angular sobre unidad de masa para el régimen MONDiano.
Lμ2=1

# Se define tiempo y el ángulo inicial igual a cero.

θ0=0
t=0

# Se define la posición inicial a partir del ángulo inicial θ0=0.
r=a*(1-e^2)/(1+e*cos(0))

# Se da la condición para que el código simule la órbita hasta que el tiempo transcurrido sea
igual a T (1 periodo)

while t<T

# Ahora se establece una condición tal que seleccione el cambio que hace θ en un tiempo Δt
dependiente del momento angular sobre unidad de masa según el régimen en el que se encuentre
la partícula. Como 7011.70126 UA equivalen a 1 unidad código la condición para que la ley de
Fuerzas sea Newtoniana será que la distancia del objeto en unidades código sea menor que 1 y
se usará La Ley de Fuerzas Extendida para distancias mayores o iguales a 1.

if r(q0)<1
Δθ=(Lμ1*Δt/(r^2))
else
Δθ=(Lμ2*Δt/(r))
end

# Se calcula el nuevo ángulo θ que forma entre su posición inicial y su posición actual.

θ_nueva=θ0+Δθ

# Con el nuevo ángulo se calcula la nueva distancia al Sol

r_nueva=a*(1-e^2)/(1+e*cos(θ_nueva))

# Se suma el paso de tiempo Δt transcurrido.

t=t+Δt

# Se determina la posición en el plano cartesiano.

```

```

x=r_nueva*cos(theta_nueva)
y=r_nueva*sin(theta_nueva)

# Redefinimos la nueva posición r y el nuevo ángulo theta.

r=r_nueva
theta=theta_nueva

# Se guardan los valores calculados en unidades físicas dentro de los arreglos definidos al principio del código.

push!(xs,x*q_cambio)
push!(ys,y*q_cambio)
push!(rs,r*q_cambio)
push!(ts,t*t_cambio)

# Término de la condición "while".

end

# Por último el código arroja las listas con los resultados de tiempos ts, posiciones xs, ys y distancias al Sol rs.

ts,rs,xs,ys

# Finalmente se da término a la función "TrayectoriaElíptica".

end

```

6.1.5 Código para Calcular Trayectorias Radiales

```

# Definimos la función

function TrayectoriaRadial(q0,v0,tf,N)

# q0: vector posición inicial
# v0: vector velocidad inicial
# tf: tiempo final
# N: factor por el cual se va a dividir el periodo para obtener el tamaño de paso

# Se convierten los valores (en unidades físicas) de las entradas a unidades código.

q0=q0/q_cambio
v0=v0/v_cambio
tf=tf/t_cambio

# Defino los arreglos donde se van a ir guardando los datos.

```

```

qs=VectorFloat64[ ]
ts=Float64[ ]

# qs: Es el arreglo donde se van a ir guardando los vectores posición durante la integración.
# ts: Es el arreglo donde se va a ir guardando el tiempo físico dentro de la simulación para el
cual la integración se llevó a cabo, es decir, el tiempo ya transcurrido más el tamaño de paso
hecho.
# Se determina el tamaño de paso  $\Delta t$ 


$$\Delta t = ((2 * \pi * (r(q_0)) / \text{norm}(v_0))) / N$$


# Se define tiempo inicial igual a cero.

t=0

# Se da la condición para que el código simule la órbita hasta que el tiempo transcurrido sea
igual a tf.

while t<tf

# Ahora se establece una condición tal que seleccione la aceleración que sentirá el objeto depen-
diendo de su posición según el régimen en el que se encuentre. Como 7011.70126 UA equivalen
a 1 unidad código la condición para que la ley de Fuerzas sea Newtoniana será que la distancia
del objeto en unidades código sea menor que 1.

if r(q0)<1
g=1/(q0^2)
else
g=1/q0
end

# Se calcula la nueva velocidad y con esta la nueva posición según la ecuación de tiro vertical.

v_nueva=v0-g* $\Delta t$ 
q_nueva=q0+v0* $\Delta t$ -0.5*g*( $\Delta t$ ^2)
# Se suma el paso de tiempo  $\Delta t$  transcurrido.

t=t+ $\Delta t$ 

# Se guardan los valores calculados en unidades físicas dentro de los arreglos definidos al prin-
cipio del código.

push!(qs,q0)
push!(ts,t)

# Redefinimos la nueva posición  $q_0$  y la nueva velocidad  $v_0$ .

q=q_nueva
v=v_nueva

```

```

# Término de la condición "while".

end

# A continuación se se transforman los datos de los arreglos a unidades físicas.

qs=qs*q_cambio
ts=ts*t_cambio

# Por último el código arroja las listas con los resultados de tiempos ts y posiciones qs.

ts,qs

# Finalmente se da término a la función "TrayectoriaRadial".

end

```

6.2 Condiciones Iniciales Utilizadas en los Códigos

Valores Utilizados en las Entradas de los Códigos

Figura	Código	q0	v0	tf	a	e	N
2.1	N	[0.571623,0,0]	[0.55.197099,0]	Ni=1	dN=100	NF=10000000	-
2.2	Extendida	[1,0,0]	[0,29.74625690738248,0]	1.2	-	-	1000000
2.2	TrayectoriaElíptica	-	-	-	1	0	500000
2.3	Extendida	[0.571623,0,0]	[0.55.197099,0]	76	-	-	500000
2.3	TrayectoriaElíptica	-	-	-	17.857619	0.967990	50000
2.4	Extendida	[0,1,0]	[0,14,0]	0.2	-	-	500000
2.4	TrayectoriaRadial	1	14	0.2	-	-	500000
2.6	Extendida	[8000,0,0]	[0,0.35526,0]	672923	-	-	90000
2.6	TrayectoriaElíptica	-	-	-	8000	0	50000
2.7	Extendida	[7011.70126,1,0]	[0.50241,0,0]	500000	-	-	500000
2.7	TrayectoriaRadial	7011.70126	0.50241	-	-	-	500000
2.8	Extendida	[8000,1,0]	[0.35526*1.4,0.35526,0]	6000000	-	-	50000
4.1	Extendida	[1.092195,0,0]	[0,40.255438629148465,0]	1150000	-	-	2500000
4.1	Newton	[1.092195,0,0]	[0,40.255438629148465,0]	1150000	-	-	2500000
4.2	Extendida	[6.28283,0,0]	[0,16.79301,0]	5000000	-	-	700000
4.2	Newton	[6.28283,0,0]	[0,16.79301,0]	5000000	-	-	700000

Tabla 6.1: Se muestran los valores escritos en las entradas de los códigos utilizadas en el código para hacer las simulaciones. Las unidades de q0, a, v0 y tf son [UA], [UA], $\frac{km}{s}$ y años respectivamente.

Bibliografía

- [1] Zwicky, F., 1933, *Helv. Phys. Acta*, 6, 110
- [2] Zwicky, F., 1937, *ApJ*, 86, 217
- [3] Rubin, V., Ford, W., 1970, *ApJ*, 159, 379.
- [4] Oort, J. H. 1932, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 6, 249
- [5] Branham, Richard L. (2013). New orbits for Comets C/1960 M1 (Humason), C/1980 E1 (Bowell), and musings on extrasolar comets. *Revista mexicana de astronomía y astrofísica*, 49(1), 111-116.
- [6] Goldstein, H., Poole, C., Safko, J., *Classical Mechanics*, 3er Edition, Addison Wesley.
- [7] *Current Issues in Cosmology*, 164, (2006); DOI: 10.1017/CBO9780511607028.014
- [8] M. Milgrom. *Astrophys. J.* 270, 371 (1983). doi:10.1086/161131
- [9] N.B. Tully and J.R. Fisher. *Astron. Astrophys.* 54, 661 (1977).
- [10] Felten J.E., 1984, *ApJ* 286, 3
- [11] *A natural approach to extended Newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales.*, Mendoza, S.; Hernandez, X.; Hidalgo, J.C.; Bernal, T., 2011MNRAS.411..226M
- [12] http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?ID=c00001_0
- [13] <http://ssd.jpl.nasa.gov>
- [14] R.L. Branham, Jr. (2012). Is Comet C/1853 E1 (Secchi) extrasolar?. doi:10.1002/asna.201111636
- [15] <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=1853E1>, 9 de marzo del 2016
- [16] <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=C%2F1978%20g2%20;old=0;orb=0;cov=0;log=0;cad=0#elem>
- [17] *Cometography: Volume 5, 1960-1982: A Catalog of Comets*, pag. 600
- [18] julialang.org
- [19] Oort, J. H. (1950). The structure of the cloud of comets surrounding the Solar System and a hypothesis concerning its origin. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, vol. 11, p. 91-110 (1950). 1950BAN....11...91O