



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**TRAZO DE RAYOS EN LENTES BIRREFRINGENTES
UNIAXIALES**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

LUIS ARTURO ALEMÁN CASTAÑEDA



**DIRECTOR DE TESIS:
DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR
2016**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Alemán
Castañeda
Luis Arturo
56897618
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
308754263

2. Datos del tutor

Dra.
Martha
Rosete
Aguilar

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Rocío
Jáuregui
Renaud

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Alfred Barry
U'Ren
Cortés

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Victor Manuel
Romero
Rochín

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Oscar Gabriel
Rodríguez
Herrera

7. Datos del trabajo escrito

Trazo de rayos en lentes birrefringentes uniaxiales
140 p
2016

A mis abuelos.

Reifen wie der Baum, der seine Säfte nicht drängt und getrost in den Stürmen des Frühlings steht ohne die Angst, daß dahinter kein Sommer kommen könnte. Er kommt doch. Aber er kommt nur zu den Geduldigen, die da sind, als ob die Ewigkeit vor ihnen läge, so sorglos still und weit. Ich lerne es täglich, lerne es unter Schmerzen, denen ich dankbar bin: Geduld ist alles!

Rainer Maria Rilke

Agradecimientos

A la UNAM y a la Facultad de Ciencias, por haber sido un segundo hogar y por haberme permitido crecer como persona.

Al Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (CCADET-UNAM), por su apoyo en general y por haber sido un maravilloso lugar de trabajo, y a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA-UNAM), por el apoyo económico (proyecto PAPIIT-IG100615)

A mi asesora, Martha, por haber creído en mí durante este proceso, por haberme tenido paciencia cuando lo necesité y por el apoyo que siempre me ha brindado.

A mis sinodales: Óscar Rodríguez, Rocío Jaureguí, Victor Romero y Alfred U'Ren, por revisar este trabajo y por sus correcciones.

A Jesús Garduño y Neil Bruce, por sus observaciones y apoyo a lo largo de este último año. De igual forma, agradezco a Maximino Avendaño sus comentarios.

A mis profesores Manuel Calderón y Lasse Clausen, por todo su apoyo y por haberme enseñado tanto.

A mis profesoras, Guadalupe García Merlín, por introducirme a las ciencias, Karin Vogt, por todo lo que me enseñó, y Miss Megumi, por enseñarme to embrace diversity (así, en spanglish).

A mi padres, por todo lo que me han dado, por haber sido y ser mi sostén, y por haberme enseñado con el ejemplo que el trabajo rinde frutos, que el trabajo fortalece. Igualmente a Lázaro, por haber sido como un segundo padre.

A mi hermana, compañera de juegos, pleitos y vivencias

A mis abuelos: Güicha y Vacha, por todo el amor, por las tardes en las que oíamos la radio, por los desayunos, comidas y reuniones; Hilda por haberme brindado una maravillosa infancia, y haberme dejado desordenar su sala y cocina jugando; Pino, por las salidas al terreno, por seguir apoyando a la familia.

A mis tíos: Goro, Manuel, Claudia, Mónica, Jorge, Gerardo, Anita, Bubú, Rocío, Odino, Chava, Azu, Alex, y en especial, Ady, por haber sido como una segunda madre y velar por mí. A mis primos, en particular a Edgar, mi camarada de la infancia y de videojuegos.

A dos personas que han estado ahí cuando más se les ha necesitado: Estela, compañera de los desayunos que más atesoro, y tía Bety, que estuvo presente en el suceso más doloroso que he vivido. Gracias, muchas gracias.

A la Zoe y al Bobby, a quienes extraño tanto.

A mis amigos que compartieron su vida conmigo, me han brindado su amistad y apoyo: Jorge, Eréndira, Montse, Arturo, Tiramisú (ya tú sabe), Andrea, Fernando, Andrés, Katia, Argel, Rodrigo, Leo, Marco, Marissa, Marianita, Billarent, Anthony, el señor Edgar, Carlos, Jonathan, César, Rosa, Memo, David, Teddy, José Miguel, Juan Francisco, Lorena, Vidal, Ana Paula, Brenda, Edgar, Kathia Peña, Pamela, Yasab, Paola,

Diego B., Thomas, Charlotte, Pako y Carolina. Particularmente quisiera agradecer a Sam, a Jackie y a Serratos, con ellos he vivido muchas cosas, tanto buenas como malas, y siempre han estado ahí 3:

A mis compañeros del laboratorio, por haberme alegrado mi último año de la carrera, enseñádome tanto y por todos los cafés que nos tomamos: Itzeliña, Gustavo, Benjas, Ramiro, Catalina, Chucho, Jenny, Juan, Omar, Pablo, Sergio, Mitzi y Agustín.

A Charlie, por haber sido un genial roommate, y por la gran amistad que surgió de ahí.

A Elena, Emilia, Raúl y Diego, por haber sido los mejores amigos que pude hacer. Con ellos crecí, aprendí a ver y oír la vida, las palabras y las cosas de forma diferente. Nunca podré expresar todo el amor que les procuro, así como mi agradecimiento.

Índice general

Introducción	vii
1 Teoría electromagnética: ondas electromagnéticas planas en materiales anisotrópicos	1
1.1 Tensor dieléctrico	1
1.2 Cristales birrefringentes	3
1.3 Vector de onda y vector de Poynting	4
1.4 Superficie normal	7
1.4.1 Caso uniaxial	9
1.5 Ecuaciones de Fresnel y propagación de rayos	11
1.5.1 Caso uniaxial	13
1.6 Campos eléctrico y desplazamiento eléctrico	13
1.6.1 Polarización en materiales uniaxiales	17
1.7 Interfases: Condiciones a la frontera	18
1.7.1 Refracción en materiales birrefringentes uniaxiales	21
1.7.2 Reflexión total interna: isotrópico a birrefringente uniaxial	28
1.7.3 Reflexión en birrefringentes uniaxiales	31
1.7.4 Polarización de las ondas refractadas y reflejadas	32
1.8 Aproximación Paraxial	36
1.8.1 Eje del cristal ortogonal a la normal o cercano a la ortogonalidad	38
1.8.2 Eje del cristal paralelo a la normal o cercano al paralelismo	39
1.8.3 Polarización bajo la aproximación paraxial	39
2 Principio y Modelo de Huygens para la birrefringencia en materiales uniaxiales	41
2.1 Principio de Huygens	41
2.2 Sistema de referencia	42
2.3 Materiales isotrópicos	42
2.3.1 Reflexión	43
2.3.2 Refracción	44
2.4 Materiales anisotrópicos uniaxiales	45
2.4.1 Refracción de entrada: ordinario	47
2.4.2 Refracción de entrada: extraordinario	50
2.4.3 Refracción de salida	58
2.4.4 Reflexión de rayos ordinarios dentro de birrefringentes uniaxiales	60
2.4.5 Reflexión de rayos extraordinarios dentro de materiales birrefringentes uniaxiales	62
2.5 Aproximación paraxial	63
2.5.1 Refracción	63
2.5.2 Reflexión de rayos ordinarios	66
2.5.3 Reflexión de rayos extraordinarios	68
3 Trazo de rayos	71

3.1	Preliminares	71
3.1.1	Punto conocido	71
3.1.2	Punto de intersección	72
3.2	Sistemas coordenados	74
3.2.1	Sistema global, SG	74
3.2.2	Sistema local del punto conocido, SLP	74
3.2.3	Sistema local rotado, SLR	74
3.3	Resumen de fórmulas: utilizando las superficies normales	76
3.4	Resumen de fórmulas: Modelo de Huygens	77
3.5	Aproximación paraxial: matrices de transferencia y refracción en lentes esféricas/placas planas	79
3.5.1	Eje del cristal paralelo al eje óptico de la lente	80
3.5.2	Eje del cristal ortogonal al eje óptico de la lente pero yaciendo en el plano de incidencia	84
3.5.3	Eje del cristal ortogonal tanto al eje óptico de la lente como al plano de incidencia . .	86
4	Calculos numéricos y ejemplos	89
4.1	Ortogonalidad entre las polarizaciones de los rayos ordinario y extraordinario: calcita y cuarzo	89
4.2	Análisis de la diferencia bajo la aproximación paraxial entre los modelos de las superficies normales y de Huygens	93
4.3	Aproximación paraxial: lente plano-convexa	94
4.4	Diagramas de manchas	96
5	Conclusiones y trabajo a futuro	101
5.1	Conclusiones particulares de cada capítulo	101
5.2	Comparación entre los modelos/metodologías de las superficies normales y de Huygens	102
5.3	Trabajo a futuro	103
	Appendices	105
A	Identidades Vectoriales	107
B	Elipse extraordinaria rotada	108
C	Envolventes	110
D	Ecuaciones de refracción completas a partir del Modelo de Huygens	111
E	Dirección local del eje del cristal para el trazo de rayos paraxial	114
F	Fórmula para el cálculo de los índices de refracción ordinario y extraordinario para la calcita y el cuarzo	116
G	Programa de trazo de rayos	117

Introducción

La refracción en cristales uniaxiales da origen a dos rayos refractados, uno llamado ordinario, que sigue la ley de Snell, y uno extraordinario, que no lo hace. Así mismo, los rayos refractados tendrán polarizaciones casi ortogonales (ortogonales en muchos casos) entre sí. Los materiales birrefringentes uniaxiales son de uso muy común y tienen siglos de ser utilizados, y hasta cierto grado entendidos.

Existen diversos artículos concernientes al trazo de rayos en materiales anisotrópicos, específicamente para uniaxiales, algunos enfocándose en el trazo de rayos sin tomar en cuenta la polarización inducida por la birrefringencia, como [1, 2, 3, 4], y otros discutiendo un trazo de rayos con polarización completa, como [5, 6, 7]. Existen de igual forma otros trabajos en los que se realiza propagación de haces más generalizados, alejados de la idea de rayos, como [8, 9, 10].

El trazo de rayos a través de materiales anisotrópicos es de gran importancia, en particular por los estados de polarización que inducen, para el diseño óptico de diversos sistemas, no sólo para la formación de imágenes, sino también en cavidades láser para la generación de armónicos, pantallas de cristal líquido y experimentos de óptica cuántica, véase [11], entre otras aplicaciones.

Como se mencionó, la birrefringencia está caracterizada no sólo por la doble refracción que induce a partir de un rayo incidente, sino también por los estados de polarización que tienen los rayos refractados, y en general cualquier onda propagándose dentro del material la cual se descompondrá forzosamente en un modo ordinario y un modo extraordinario de propagación. En este trabajo se discuten las generalidades de la birrefringencia, e.g. el ángulo de desviación entre el vector de onda y el vector de Poynting extraordinarios, así como se busca expresar de forma directa y clara las propiedades de los rayos refractados dentro de un material birrefringente uniaxial, en particular sus estados de polarización.

Se escogieron dos modelos para abordar la birrefringencia: el método de las superficies normales que es el procedimiento de teoría electromagnética y el común en la literatura, y el modelo de Huygens, que precede históricamente al electromagnetismo y fue una de las primeras victorias de la teoría ondulatoria. Aunque ambos modelos están conectados formalmente, sus metodologías son distintas y por ello se estudian por separado, intentando señalar los puntos comunes y las disparidades existentes, en particular una dentro de la aproximación paraxial.

El primer capítulo resume de forma general el fenómeno de la birrefringencia, es decir, es una revisión de la teoría electromagnética que lo fundamenta, y que puede ser encontrada en [12, 13]. Sin embargo, se extiende el desarrollo para obtener fórmulas explícitas para la refracción y reflexión extraordinaria, y a partir de ellas se discuten el ángulo de desviación entre el vector de onda y el vector de Poynting extraordinarios, la relación entre las polarizaciones de los rayos ordinario y extraordinario, el ángulo crítico para la reflexión total interna, y una posible segunda refracción extraordinaria (que de igual forma se podría extender a reflexión).

En cuanto a las polarizaciones de los rayos refractados, se derivó una expresión para el ángulo entre dichas polarizaciones, tanto para el campo de desplazamiento eléctrico, \mathbf{D} , como del eléctrico, \mathbf{E} , mostrando que no siempre serán ortogonales entre sí las polarizaciones, pero que, sin embargo, para cristales con poca birrefringencia, como el cuarzo, es una buena y práctica aproximación. Se encontró que las condiciones para la ortogonalidad son las mismas para que se mantenga el rayo extraordinario en el plano de incidencia. La

mayoría de la literatura no deja muy claro que no siempre son ortogonales las polarizaciones, e incluso hay artículos en lo que se dice que lo son, como [14]. De igual forma, se demuestra un comportamiento distinto entre los cristales positivos y negativos: en los primeros los campos **D** están más cercanos a la ortogonalidad, mientras que en los segundos los campos **E**.

En el segundo capítulo se realizó la deducción de las fórmulas de refracción según el modelo de Huygens se realizó siguiendo el procedimiento de Maximino Avendaño y Orestes Stavroudis en [3, 4], pero utilizando un sistema de referencia particular para simplificar el álgebra, y se muestran todos los pasos de la deducción para esclarecer su obtención. Como aportación a este modelo, se dedujeron las fórmulas para la reflexión de rayos ordinarios y extraordinarios dentro de cristales uniaxiales, y de igual forma se discute una posible segunda refracción extraordinaria. También se demuestra que las condiciones para que el rayo extraordinario se mantenga en el plano de incidencia son equivalentes bajo este modelo a las condiciones encontradas en el primer capítulo.

Para obtener resultados analíticos más concluyentes, tanto en el primer como en el segundo capítulo, se recurrió a la aproximación paraxial para simplificar las ecuaciones de ambos modelos, con lo que se pudo recuperar las fórmulas de [15]. Igualmente se encontró una discrepancia entre los modelos bajo la aproximación paraxial, ya que se requiere de otra aproximación más dentro del modelo electromagnético para obtener las mismas fórmulas que en el modelo de Huygens, lo que indicaría que este último modelo está perdiendo más información al momento de realizar la aproximación. La diferencia entre modelos se puede resumir en que para el modelo de Huygens el índice efectivo del rayo extraordinario es dependiente únicamente de la orientación del cristal, y los índices ordinario y extraordinario, mientras que para el modelo de las superficies normales el índice efectivo también depende del ángulo de incidencia.

En el tercer capítulo, se discuten las generalidades para realizar trazo de rayos en lentes con cuádricas con un eje de simetría (eje óptico) como superficies refractivas, como el punto conocido al pie de la perpendicular, al igual que los sistemas de referencia comúnmente utilizados. Por último, se utilizaron las ecuaciones del modelo de Huygens para calcular las matrices de transferencia y refracción de una lente esférica y una placa plana uniaxial con orientaciones particulares del eje del cristal con respecto a los rayos incidentes bajo la aproximación paraxial, con ello se obtuvieron las distancias focales de dichas lentes y se corrigió un error mostrado en [15].

En el cuarto capítulo se realizaron cálculos numéricos en temas específicos que se abordaron en la tesis y en trazo de rayos en ejemplos particulares de lentes. Se analizaron casos para la polarización de los rayos refractados dentro del bulto, para superficies planas y superficies esféricas de refracción, tanto para los campos **D** como **E**, en calcita y cuarzo, demostrando que la desviación es mayor en el cuarzo debido a su alta birrefringencia. De igual forma se analizó la discrepancia bajo la aproximación paraxial entre los modelos de la superficie normal y el de Huygens, mostrando que para el cuarzo es una buena aproximación, mientras que para la calcita no. En cuanto al trazo de rayos, se obtuvieron las distancias focales para una lente plana-convexa de calcita, y señalando el astigmatismo existente, el cual depende de la orientación de la lente. Finalmente, un programa de trazo de rayos fue implementado en C++ a partir del modelo de Huygens y se reprodujeron los diagramas de manchas para una lente de calcita plano-convexa mostrados en [7]. Sin embargo, se reprodujeron hasta cierto punto ya que creemos que los diagramas de manchas mostrados en el artículo no están completos. El código del programa, el cual fue escrito usando clases, se dejará abierto para su uso por otros usuarios.

Al final de este trabajo se resume más específicamente lo encontrado en y se discute el trabajo a futuro a seguir, en particular, en lo referente a los coeficientes de fresnel para realizar un trazo de rayos con polarización completo, y bajo la aproximación paraxial, la formulación de matrices de refracción y transferencia extendidas para los rayos extraordinarios.

Capítulo 1

Teoría electromagnética: ondas electromagnéticas planas en materiales anisotrópicos

En este capítulo procederemos de forma análoga a muchos libros que tratan el estudio de la óptica en materiales anisotrópicos, en particular [12, 13] para las primeras secciones. Sin embargo, debido a que las fórmulas en estas referencias no son de utilidad para implementar trazo de rayos con o sin polarización, se desarrollará la teoría a mayor profundidad, haciendo hincapié en los estados de polarización de los rayos ordinarios y extraordinarios, así como en la relación entre ellos, y por último, bajo la aproximación paraxial.

1.1 Tensor dieléctrico

La óptica en vacío y en materiales isotrópicos puede variar considerablemente de la óptica en materiales anisotrópicos, como por ejemplo, algunos cristales. La óptica física tiene sus bases en las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_f & \text{(ii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{(iii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.1)$$

y en las ecuaciones constitutivas, o ecuaciones del material,

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.2)$$

Sin embargo, estas últimas ecuaciones son sólo válidas en materiales isotrópicos y lineales, en los cuales los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} son paralelos, al igual que \mathbf{B} y \mathbf{H} . En materiales anisotrópicos, esto deja de cumplirse y en general se tiene que la permitividad eléctrica, ϵ_{kl} , y permeabilidad magnética, μ_{kl} , son tensores, por lo que

$$D_k = \sum_l \epsilon_{kl} E_l \quad (1.3)$$

$$B_k = \sum_l \mu_{kl} H_l \quad (1.4)$$

dónde k y l pueden ser x , y y z . Puede verse que, en general, los campos \mathbf{D} y \mathbf{E} , y \mathbf{B} y \mathbf{H} ya no son paralelos.

En este trabajo se realizarán las siguientes aproximaciones: se asumirán medios homogéneos, libres de cargas, no conductores, i.e. $\sigma = 0$, y magnéticamente isotrópicos. Esta aproximación¹ es válida ya que, primero, los cristales de interés son dieléctricos, y por lo tanto no conductores, y segundo, el efecto de la magnetización en los fenómenos ópticos es pequeño, y por lo tanto la anisotropía magnética puede ignorarse; valiéndose la relación:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (1.5)$$

Es necesario, para entender el fenómeno de la birrefringencia, exhibir las propiedades, tanto de los materiales anisotrópicos, e.g. el tensor dieléctrico, como de la propagación de las ondas electromagnéticas en ellos. Empezando por el tensor dieléctrico, que es inherente a la estructura atómica de los materiales, habrá que considerar al termino de la energía transportada por una onda electromagnética. Sabemos que la energía de una onda electromagnética, w , estará dada por

$$w = w_e + w_m \quad (1.6)$$

donde w_e es la energía debido al campo eléctrico

$$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \epsilon_{kl} E_k E_l \quad (1.7)$$

y w_m la energía contenida en el campo magnético

$$w_m = \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2. \quad (1.8)$$

Haciendo el producto punto de la ecuación (1.1.ii) con \mathbf{H} y de (1.1.iv) con $-\mathbf{E}$, luego sumándolas y utilizando la identidad vectorial (A.3) obtenemos

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = - \left(\mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{D}}{dt} + \mathbf{H} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right). \quad (1.9)$$

Usando las ecuaciones (1.3) y (1.5), y recordando que el vector de Poynting está definido por

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (1.10)$$

se puede llegar a

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \left(\sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} \frac{dE_l}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu H^2) \right). \quad (1.11)$$

Por otra lado, como por el teorema de Poynting, sabemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{dw}{dt} \quad (1.12)$$

y recordando las expresiones que obtuvimos para las energías eléctrica y magnética, (1.7) y (1.8) respectivamente,

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \left(\frac{1}{2} \sum_{kl} \left(E_k \epsilon_{kl} \frac{dE_l}{dt} + E_l \epsilon_{kl} \frac{dE_k}{dt} \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu H^2) \right), \quad (1.13)$$

¹Para entender a otros materiales, como los dielectricos, no se puede hacer esta aproximación y se requiere que sean tratados también como conductores, aunque anisotrópicos.

se obtiene que al igualar ambas expresiones de la conservación de la energía

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{kl} \left(E_k \epsilon_{kl} \frac{dE_l}{dt} + E_l \epsilon_{kl} \frac{dE_k}{dt} \right) &= \sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} \frac{dE_l}{dt} \\ \sum_{kl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{lk}) \frac{dE_k}{dt} E_l &= 0 \\ \implies \epsilon_{kl} &= \epsilon_{lk} \end{aligned} \quad (1.14)$$

el tensor dieléctrico tiene que ser simétrico, esto reduce las 9 componentes independientes a sólo 6:

$$\epsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Sustituyendo ésto último en la expresión de la energía eléctrica w_e , (1.7), obtenemos

$$w_e = \epsilon_{xx} E_x^2 + \epsilon_{yy} E_y^2 + \epsilon_{zz} E_z^2 + 2\epsilon_{xy} E_x E_y + 2\epsilon_{yz} E_y E_z + 2\epsilon_{xz} E_z E_x \quad (1.16)$$

que es la ecuación de un elipsoide, que siempre puede ser rotado para expresarse de forma canónica como

$$\begin{aligned} w_e &= \epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2 \\ &= \frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} \end{aligned} \quad (1.17)$$

que es un elipsoide en el sistema rotado con sus ejes principales $\sqrt{\epsilon_i}$ con $i = x, y, z$. Este sistema rotado es conocido como el sistema de los ejes dieléctricos principales, que corresponde a una diagonalización del tensor dieléctrico:

$$\epsilon = \epsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

A partir de la ecuación (1.17) se puede ver que el elipsoide corresponde a una esfera en el caso en el que $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$, y coincidirá con un elipsoide de revolución en caso de que sólo dos direcciones de los ejes principales sean equivalentes. Al elipsoide (1.17) se le conoce como elipsoide de índices.

Por último, es importante recalcar que como la permitividad dieléctrica es dependiente de la frecuencia, i.e., las componentes del tensor ϵ_{kl} varían, existe un efecto de dispersión, por el cual no sólo los valores de los ejes dieléctricos principales cambian, sino sus direcciones. A esto se le conoce como dispersión de ejes, que sin embargo, sólo sucede en cristales cuya estructura no determine una triada de direcciones principales ortogonales, e.g. los sistemas monoclinicos y triclinicos.

1.2 Cristales birrefringentes

Entre los medios anisotrópicos, se encuentran ciertos cristales. Un cristal se define como un sólido que presenta un arreglo periódico, en las tres direcciones espaciales, en su estructura molecular y/o atómica. Debido a esto mismo, presentan propiedades o respuestas anisotrópicas a diferentes fenómenos físicos, ya sea en propiedades ópticas como la birrefringencia, elásticas, de conductividad, entre otras. Los cristales transparentes pueden ser clasificados en tres grupos distintos según sus propiedades ópticas:

- *Isotrópicos:* Cristales con tres direcciones cristalográficas equivalentes y ortogonales entre sí. Estos cristales son los que presentan el sistema cristalino cúbico². Los ejes dieléctricos principales corresponden a estas direcciones, y se tiene, ya que son equivalentes, $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon$, por lo que $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, induciendo un comportamiento ópticamente isotrópico.
- *Uniaxiales:* Cristales en los que dos o más direcciones cristalográficas equivalentes pueden ser escogidas en un plano, que no pertenecen al grupo anterior. Estos cristales pertenecen a los sistemas cristalinos trigonales, tetragonales y hexagonales. El plano que contiene a las direcciones equivalentes es perpendicular al eje de simetría triple, cuádruple o séxtuple. Uno de los ejes dieléctricos principales debe coincidir con esta dirección particular, mientras que los otros dos se pueden escoger en cualquier dirección perpendicular a el primero. Se tendría entonces, en un ejemplo particular, que $\epsilon_x \neq \epsilon_y = \epsilon_z$. La calcita, el cuarzo y la vaterita.
- *Biaxiales:* Cristales en los que no hay dos direcciones cristalográficas equivalentes. Estos cristales pertenecen a los sistemas cristalinos ortorrómbicos, monoclínicos y triclínicos. En estos las direcciones de los ejes dieléctricos pueden o no estar determinados por alguna simetría y serán, por consecuencia, dependientes de la longitud de onda. Así mismo $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$. Un cristal biaxial es el aragonito.

Los materiales birrefringentes, desde el punto de vista de la óptica física, se pueden clasificar como *uniaxiales* y *biaxiales*. Los materiales uniaxiales se caracterizan porque las ondas planas ordinarias y extraordinarias se convierten en una sola a lo largo de una única dirección que se nombra como eje del cristal³. Mientras que los biaxiales tienen dos direcciones en la que la velocidad de ondas planas es independiente de la orientación de las ondas de vibración (con ondas de vibración nos referimos a las oscilaciones del campo eléctrico). Los materiales uniaxiales pueden ser considerados como un caso especial de cristales biaxiales en los cuales el ángulo entre los dos ejes es cero.

Los cristales uniaxiales pueden ser divididos en dos clases, *negativos* y *positivos*. Un cristal negativo, como la calcita, cuenta con un índice de refracción extraordinario menor que el índice ordinario, traduciéndose a una velocidad mayor para el rayo extraordinario que para el ordinario, mientras que uno positivo, como el cuarzo, cuenta con un índice extraordinario mayor que el ordinario, siendo la velocidad del rayo ordinario mayor.

Lo dicho anteriormente será abordado en las secciones siguientes.

1.3 Vector de onda y vector de Poynting

Sabemos que para ondas viajeras planas, el campo eléctrico puede ser expresado como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.19)$$

análogamente para el campo magnético $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, donde ω es la frecuencia de la onda, y el vector de onda \mathbf{k} es

$$\mathbf{k} = \omega \frac{n}{c} \mathbf{g}, \quad (1.20)$$

siendo n el índice de refracción efectivo que percibe la onda dentro del material, c la velocidad de luz, y \mathbf{g} el vector unitario en dirección del vector de onda, i.e. los cosenos directores de \mathbf{k} . Es fácil obtener después de

²Es importante recordar que hay varias formas de clasificar los cristales, ya sea en sistemas de redes (de Bravais, por ejemplo), familias cristalinas o sistemas cristalinos. La diferencia entre las últimas dos formas reside en el grupo o característica que los determina, un sistema cristalino se determina a partir de un grupo de puntos, mientras que una familia cristalina a partir de los grupos de redes y puntos. En este trabajo nos referimos a sistemas cristalinos.

³Al eje del cristal se le nombra, en inglés, *optic axis*, que no debe confundirse con *optical axis* que es el eje óptico del sistema o de la lente. Esto último puede generar confusiones en español, por la carencia de palabras que signifiquen *optic* y *optical*.

un poco de álgebra que

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\mathbf{k} \times \mathbf{H} \quad (1.21)$$

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt} = -i\omega\mathbf{E}, \quad \frac{d\mathbf{H}}{dt} = -i\omega\mathbf{H} \quad (1.22)$$

que al sustituir en las ecuaciones de Maxwell (1.1.ii) y (1.1.iv) llevan a

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu\mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega\epsilon\mathbf{E} = -\omega\mathbf{D} \end{aligned} \quad (1.23)$$

y al combinar para eliminar \mathbf{H} se obtiene

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\omega^2\mu\mathbf{D}. \quad (1.24)$$

Luego, al utilizar la identidad vectorial (A.2) se tiene

$$(k^2\mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k}) = k^2(\mathbf{E} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})\mathbf{g}) = k^2\mathbf{E}_\perp \quad (1.25)$$

donde \mathbf{E}_\perp es la componente del campo eléctrico en dirección perpendicular al vector de onda \mathbf{k} , véase la fig.(1.1), y por lo que esta se relaciona con el vector de desplazamiento \mathbf{D} de la siguiente forma

$$\mathbf{D} = \frac{k^2}{\omega^2\mu}\mathbf{E}_\perp = \frac{n^2}{c^2\mu}\mathbf{E}_\perp \quad (1.26)$$

Tenemos que la dirección del rayo, i.e. de la propagación de la energía, \mathbf{S} , que esta dada por (1.10) será perpendicular tanto a \mathbf{H} , \mathbf{B} , como a \mathbf{E} . Así mismo, a partir de (1.23) podemos ver que el vector de onda \mathbf{k} , será perpendicular a \mathbf{H} , \mathbf{B} , y \mathbf{D} . Por lo tanto, \mathbf{S} , \mathbf{k} , \mathbf{E} y \mathbf{D} son coplanares. Se puede ver que el ángulo entre \mathbf{S} y \mathbf{k} , que en la fig.(1.1) está denominado por θ , es el mismo que entre \mathbf{E} y \mathbf{D} .

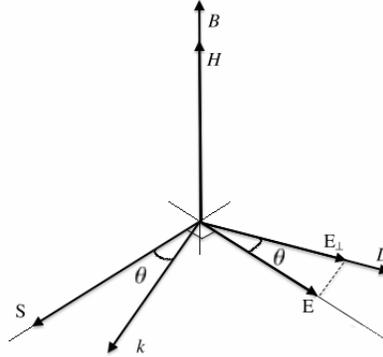


Figura 1.1: El ángulo θ entre el vector de onda \mathbf{k} y el vector de Poynting \mathbf{S} , es el mismo que el ángulo entre el campo \mathbf{E} y \mathbf{D}

Sería natural preguntarse si la velocidad con la que se propaga la energía del rayo es la misma que la velocidad de fase dada por

$$v_f = \frac{c}{n}. \quad (1.27)$$

Para encontrar la relación entre ellas habrá que recordar que el vector de Poynting indica la dirección de propagación de la energía del rayo, por lo que se puede definir una velocidad dada como la razón entre el vector de Poynting y la energía total transportada por este, i.e.

$$v_e = \frac{S}{w} \quad (1.28)$$

y usando las ecuaciones de la energía (1.6), (1.7) y (1.8), así como las relaciones encontradas para el vector de onda (1.23), obtenemos

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{E}}{\omega} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{k}) + \frac{\mathbf{H}}{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) \right) \quad (1.29)$$

que al utilizar la identidad vectorial (A.1) se reduce a

$$w = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}. \quad (1.30)$$

De aquí obtenemos la relación entre la velocidad de fase y la velocidad de propagación del rayo, usando la expresión del vector de onda (1.20):

$$v_f = v_e \cos \theta, \quad (1.31)$$

por lo que la velocidad de fase puede ser vista como una proyección de esta velocidad, que definimos como la velocidad de propagación del rayo, sobre la dirección de propagación del vector de onda.

Resta ver como se puede expresar la llamada velocidad de grupo, que en medio isotrópicos es la velocidad con la que se propaga la energía, y que de igual forma lo hará en anisotrópicos. La velocidad de grupo de un paquete de ondas está dada por

$$\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega(k). \quad (1.32)$$

Recordando las ecuaciones en (1.23), si tomamos una variación infinitesimal $\delta \mathbf{k}$, al igual que $\delta \omega$, $\delta \mathbf{E}$, y $\delta \mathbf{H}$, podemos llegar a

$$\delta \mathbf{k} \times \mathbf{E} + \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = \delta \omega \mu \mathbf{H} + \omega \mu \delta \mathbf{H} \quad (1.33)$$

$$\delta \mathbf{k} \times \mathbf{H} + \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E} = -\delta \omega \epsilon \mathbf{E} - \omega \epsilon \delta \mathbf{E}. \quad (1.34)$$

Haciendo el producto punto de la primera con \mathbf{H} y de la segunda con \mathbf{E} , luego utilizando la identidad vectorial (A.1) y que el tensor ϵ es simétrico, las ecuaciones se convierten en

$$\delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \delta \mathbf{E} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{H}) = \delta \omega (\mathbf{H} \cdot \mu \mathbf{H}) + \delta \mathbf{H} \cdot (\omega \mu \mathbf{H}) \quad (1.35)$$

$$-\delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \delta \mathbf{H} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\delta \omega (\mathbf{E} \cdot \epsilon \mathbf{E}) - \delta \mathbf{E} \cdot (\omega \epsilon \mathbf{E}). \quad (1.36)$$

Restando la segunda expresión a la primera se llega, después de un poco de álgebra a

$$2\delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \delta \omega (\mathbf{H} \cdot \mu \mathbf{H} + \mathbf{E} \cdot \epsilon \mathbf{E}) = \delta \mathbf{E} (\mathbf{k} \times \mathbf{H} + \omega \epsilon \mathbf{E}) + \delta \mathbf{H} (\omega \mu \mathbf{H} - \mathbf{k} \times \mathbf{E}), \quad (1.37)$$

que al utilizar (1.23) termina dándonos la relación

$$\delta \mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \delta \omega \frac{(\mathbf{E} \cdot \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mu \mathbf{H})}{2} = w \delta \omega. \quad (1.38)$$

Finalmente se obtiene

$$\mathbf{v}_g \cdot \delta \mathbf{k} = (\nabla_{\mathbf{k}} \omega) \cdot \delta \mathbf{k} = \delta \omega = \delta \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{S}}{w} = \delta \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_e \quad (1.39)$$

de donde concluimos

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_e \quad (1.40)$$

es decir, que se recupera el resultado conocido en materiales isotrópicos, que es que la energía viaja con la velocidad de grupo en un paquete de ondas.

1.4 Superficie normal

La ecuación (1.24), al utilizar la definición de producto diádico puede verse como

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} - \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ (k^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}) - \omega^2 \mu \epsilon \mathbf{E} &= 0 \\ (k^2 - (\mathbf{k} \mathbf{k}) - \omega^2 \mu \epsilon) \mathbf{E} &= 0 \end{aligned} \quad (1.41)$$

que en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (1.42)$$

y para que exista una solución no trivial, el determinante de la matriz (1.42) debe hacerse cero, lo que lleva a

$$\mathfrak{G} : \begin{vmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \epsilon_y - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & \omega^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.43)$$

que corresponde a una superficie tridimensional en el espacio de momentos, \mathbf{k} , que es llamada la superficie normal y que denotaremos por \mathfrak{G} . La superficie normal (1.43) se puede reducir a:

$$\boxed{\mathfrak{G} : (\omega^2 \mu \epsilon_x - k^2) \{ (\omega^2 \mu \epsilon_y - k^2)(\omega^2 \mu \epsilon_z - k^2) + k_z^2 (\omega^2 \mu \epsilon_y - k^2) + k_y^2 (\omega^2 \mu \epsilon_z - k^2) \} + k_x^2 (\omega^2 \mu \epsilon_y - k^2)(\omega^2 \mu \epsilon_z - k^2) = 0.} \quad (1.44)$$

Esta superficie consiste en dos cascarones que, de forma general, tienen cuatro puntos comunes (en el caso biaxial son cuatro, mientras que para el uniaxial son dos). Las líneas que pasan por el origen y estos puntos son los llamados ejes del cristal (dos para el biaxial, uno para el uniaxial, de ahí los nombres). La figura (1.2) muestra los dos cascarones de la superficie normal para el caso biaxial.

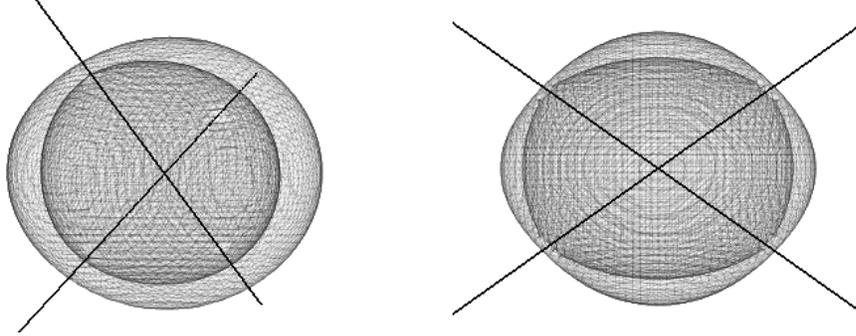


Figura 1.2: Se muestran dos perspectivas distintas de la superficie normal para el caso particular $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$: los ejes del cristal se muestran en color sólido y cruzan las intersecciones de los dos cascarones.

Para dejar esto más explícito, hay que realizar unos cortes a esta superficie, tomando el caso particular $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$ (otros casos en los que no haya igualdad de valores son sólo rotaciones de este caso). Para el caso del plano $k_x k_y$, i.e. $k_z = 0$, tenemos

$$\begin{vmatrix} \omega^2 \mu \epsilon_x - k_y^2 & k_x k_y & 0 \\ k_y k_x & \omega^2 \mu \epsilon_y - k_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.45)$$

que nos lleva a

$$(\omega^2 \mu \epsilon_z - k_x^2 - k_y^2) \{ (\omega^2 \mu \epsilon_x - k_y^2)(\omega^2 \mu \epsilon_y - k_x^2) - k_x^2 k_y^2 \} = 0 \quad (1.46)$$

que corresponden a un círculo de radio $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_z}$ y a una elipse de eje mayor $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_y}$ y eje menor $\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon_x}$

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 \mu \epsilon_z \quad (1.47)$$

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu \epsilon_y} + \frac{k_y^2}{\omega^2 \mu \epsilon_x} = 1. \quad (1.48)$$

Si seguimos realizando cortes en los distintos planos $k_x = 0$ y $k_y = 0$, obtendremos un grupo de círculos y elipses, véase la fig.(1.3), que no se intersectarán salvo los del plano $k_y = 0$, que lo hacen en 4 puntos, de la forma,

$$\mathbf{k}^* = \left(\pm \sqrt{\frac{\mu \omega^2 \epsilon_z (\epsilon_y - \epsilon_x)}{\epsilon_z - \epsilon_x}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\mu \omega^2 \epsilon_x (\epsilon_z - \epsilon_y)}{\epsilon_z - \epsilon_x}} \right) \quad (1.49)$$

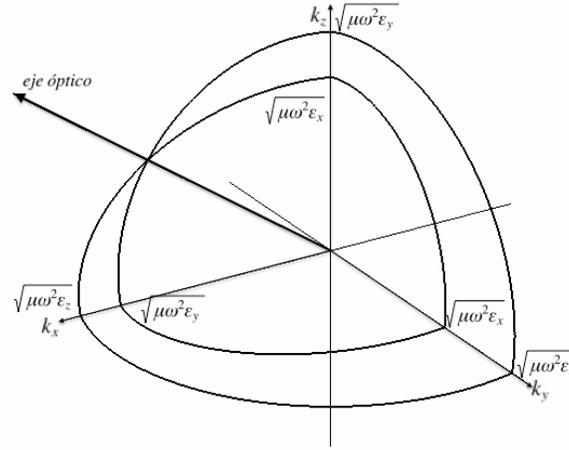


Figura 1.3: Superficie normal para el caso particular $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$: los puntos comunes de los cascarones se encuentran en el plano $k_x k_z$. Se muestra, por claridad, sólo el primer cuadrante.

Se ve con claridad que dada una dirección de propagación se tendrán dos vectores de onda \mathbf{k} , salvo en la dirección de los ejes del cristal en los que sólo existirá un valor. Esto mismo inducirá dos polarizaciones del campo eléctrico, una para cada vector de onda, y así mismo, dos velocidades de fase.

Ahora, la superficie normal, \mathfrak{S} , es una superficie con ω constante, es decir, $\delta\omega = 0$ al desplazarse sobre dicha superficie una $\delta\mathbf{k}$, que representa un vector tangente a dicha superficie. Recordando la ecuación (1.38), podemos concluir que al ser la variación en la frecuencia cero

$$\delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = 0, \quad (1.50)$$

es decir, el vector de Poynting siempre será perpendicular a la superficie normal, por lo que

$$\mathbf{S} \parallel \nabla \mathfrak{S}. \quad (1.51)$$

Entonces, de forma general habrá dos vectores de Poynting, uno por cada dirección de propagación del vector de onda, que presentarán un cierto ángulo de desviación (en la literatura a este ángulo se le conoce como *walk-off angle*), salvo a lo largo de los ejes principales que serán paralelos. En particular, si la dirección de propagación es la del eje del cristal, se tendrá en el caso uniaxial dos vectores de Poynting paralelos, mientras

que en el biaxial, dada la discontinuidad en las normales debido a la intersección de los cascarones, sucederá la llamada refracción cónica.

Si escogemos, por ejemplo, un ordenamiento arbitrario $\epsilon_i < \epsilon_j < \epsilon_k$, con $i, j, k \in \{x, y, z\}, i \neq j \neq k$, de las direcciones principales, y obtenemos el gradiente de las curvas con $k_i = 0$ (análogo a lo hecho anteriormente, véase (1.47), para $k_z = 0$), llegamos a las expresiones

$$\mathbf{S}_1 \parallel \nabla \mathfrak{G}_1 = (0, k_j, k_k) \quad \mathbf{S}_2 \parallel \nabla \mathfrak{G}_2 = (0, \frac{k_j}{\epsilon_k}, \frac{k_k}{\epsilon_j}) \quad (1.52)$$

Es decir, que para ondas propagándose a lo largo de cualquier plano principal en materiales birrefringentes, existirá una polarización en la que el vector de Poynting y el vector de onda sean paralelos (análogamente al caso isotrópico) y otra en la que exista un cierto ángulo de desviación entre éstos.

1.4.1 Caso uniaxial

Para el caso uniaxial, i.e., en el que dos valores de los ejes principales del tensor dieléctrico son iguales, que nosotros escogeremos $\epsilon_y = \epsilon_x$ sin pérdida de generalidad, se puede obtener de forma análoga que los cascarones sólo tendrán dos intersecciones a lo largo del eje $k_z = 0$. Véase la fig.(1.4).

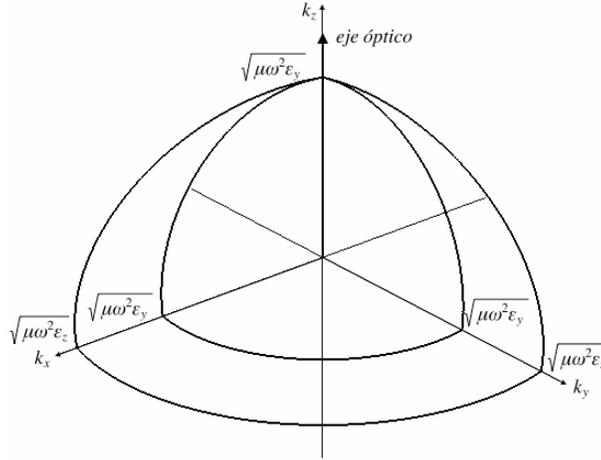


Figura 1.4: Superficie normal para el caso particular $\epsilon_x = \epsilon_y < \epsilon_z$: los puntos comunes de los cascarones se encuentran en el eje k_z . Se muestra, por claridad, sólo el primer cuadrante.

Así mismo, se puede expresar de forma sencilla la superficie normal para el caso uniaxial, expresión que permite tener mayor intuición. Al tratarse de un material uniaxial, $\epsilon_y = \epsilon_x$, la expresión se simplifica con algo de álgebra a

$$\mathfrak{G} : (\omega^2 \mu \epsilon_x - k^2) [\omega^2 \mu \epsilon_x \epsilon_z - (k_x^2 + k_y^2) \epsilon_x - k_z^2 \epsilon_z] = 0. \quad (1.53)$$

Esta última puede ser llevada a una forma más sugerente nombrando a las permitividades relativas principales $n_o^2 = \epsilon_x / \epsilon_o$, $n_e^2 = \epsilon_z / \epsilon_o$, en donde ϵ_o es la permitividad eléctrica en el vacío, que se nombran, respectivamente, el índice ordinario y extraordinario. Entonces, la superficie normal puede ser escrita de la siguiente forma

$$\mathfrak{G} : \left(\frac{k^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0, \quad (1.54)$$

que corresponden a una esfera y a un elipsoide de revolución⁴ con respecto al eje z . Podemos referirnos a la esfera

$$\frac{k^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.55)$$

nos referimos como el cascarón o superficie de soluciones ordinarias mientras que al elipsoide de revolución

$$\frac{k_x^2 + k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (1.56)$$

como el cascarón o superficie de soluciones extraordinarias⁵.

Se puede ver que existen dos opciones para un material uniaxial: uniaxial positivo $n_o < n_e$, en la que el elipsoide envuelve la esfera, y uniaxial negativo $n_e < n_o$, en la que el elipsoide está contenido por la esfera. La fig.(1.5) muestra las superficies normales de un cristal positivo y uno negativo.

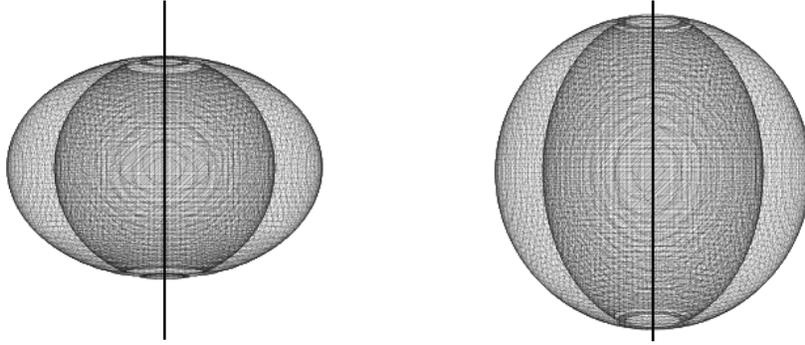


Figura 1.5: Superficies normales uniaxiales para materiales (de izq. a der.) positivos y negativos. El eje del cristal se encuentra en color sólido y coincide con el eje z .

En cuanto a la dirección del vector de Poynting, esta quedará expresada como

$$\mathbf{S}_1 \parallel \nabla \mathcal{G}_1 = (k_x, k_y, k_z), \quad \mathbf{S}_2 \parallel \nabla \mathcal{G}_2 = (\epsilon_x k_x, \epsilon_x k_y, \epsilon_z k_z) \text{ ó } \left(\frac{k_x}{n_e^2}, \frac{k_y}{n_e^2}, \frac{k_z}{n_o^2} \right), \quad (1.57)$$

por lo que se puede ver que para el rayo ordinario no hay ángulo de desviación entre el vector de onda \mathbf{k} y el vector de Poynting \mathbf{S} , mientras que para el extraordinario generalmente lo habrá, véase la fig.(1.6). Finalmente, el tensor dieléctrico en este sistema coordenado se puede expresar como

$$\epsilon = \epsilon_o \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

A partir del cual se puede escribir de forma general, sin importar el sistema de referencia:

$$\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_o n_o^2 \mathbf{E}_\perp + \epsilon_o n_e^2 \mathbf{E}_\parallel \quad (1.59)$$

en donde $\mathbf{E}_\perp \perp \mathbf{A}$ y $\mathbf{E}_\parallel \parallel \mathbf{A}$, y \mathbf{A} es la dirección del eje del cristal.

⁴En inglés estos son llamados *spheroids*.

⁵Esto es herencia de los nombres utilizados para los rayos resultantes en la refracción

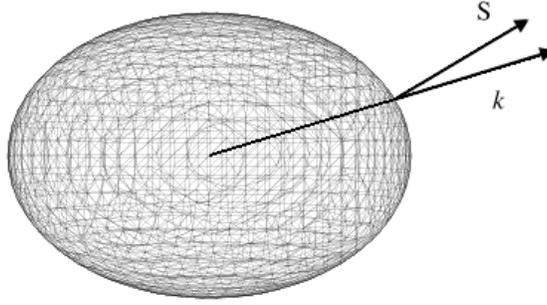


Figura 1.6: El vector normal a la superficie generalmente no es paralelo al vector de onda \mathbf{k} para el elipsoide de revolución.

1.5 Ecuaciones de Fresnel y propagación de rayos

A partir de las ecuaciones (1.42) se puede obtener la siguiente expresión

$$E_j = \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})k_j}{k^2 - \mu\omega^2\epsilon_j}, \quad (1.60)$$

donde el subíndice j representa cualquiera de las coordenadas cartesianas x, y, z . Utilizando la relación entre el vector de onda y sus cosenos directores (1.20), y la aproximación $\mu \approx \mu_o$, lo anterior toma la forma

$$E_j = \frac{(\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_j}{n^2 - \epsilon_j / \epsilon_o}. \quad (1.61)$$

Multiplicando por g_j , sumando las tres ecuaciones resultantes, y dividiendo por el factor común $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})$, se llega a

$$\frac{g_x^2}{n^2 - \epsilon_x / \epsilon_o} + \frac{g_y^2}{n^2 - \epsilon_y / \epsilon_o} + \frac{g_z^2}{n^2 - \epsilon_z / \epsilon_o} = \frac{1}{n^2} \quad (1.62)$$

que es conocida como la ecuación de Fresnel, y puede ser resuelta para los eigeníndices de refracción. Hay una manera análoga de representar la ecuación de Fresnel, y resulta de multiplicarla por n^2 y restarle la expresión $g_x^2 + g_y^2 + g_z^2 = 1$, obteniendo, después de un poco de álgebra,

$$\frac{g_x^2 \epsilon_x / \epsilon_o}{n^2 - \epsilon_x / \epsilon_o} + \frac{g_y^2 \epsilon_y / \epsilon_o}{n^2 - \epsilon_y / \epsilon_o} + \frac{g_z^2 \epsilon_z / \epsilon_o}{n^2 - \epsilon_z / \epsilon_o} = 0. \quad (1.63)$$

Es importante señalar que la ecuación de Fresnel no es más que la exigencia de que el vector de desplazamiento eléctrico, \mathbf{D} , sea ortogonal al vector de onda.

Así mismo, nos puede ser útil representar la ecuación pasada como

$$\frac{g_x^2}{c^2/n^2 - c^2\epsilon_o/\epsilon_x} + \frac{g_y^2}{c^2/n^2 - c^2\epsilon_o/\epsilon_y} + \frac{g_z^2}{c^2/n^2 - c^2\epsilon_o/\epsilon_z} = 0, \quad (1.64)$$

si se recuerda la definición de la velocidad de fase, uno puede definir las velocidades principales de propagación como⁶

$$v_i^2 = \frac{c^2\epsilon_o}{\epsilon_i} \quad v_p = \frac{c}{n} \quad (1.65)$$

⁶ Es importante denotar que estas velocidades principales de propagación no son componentes de alguna velocidad en particular, sino la velocidad de fase misma de la onda viajando en dichas direcciones principales, refiérase a la pag 671 de [12].

con lo cual la ecuación pasada se transforma en

$$\frac{g_x^2}{v_p^2 - v_x^2} + \frac{g_y^2}{v_p^2 - v_y^2} + \frac{g_z^2}{v_p^2 - v_z^2} = 0 \quad (1.66)$$

que es una ecuación de segundo orden en v_p^2 :

$$v_p^4 - [g_x^2(v_y^2 + v_z^2) + g_y^2(v_x^2 + v_z^2) + g_z^2(v_x^2 + v_y^2)]v_p^2 + g_x^2v_y^2v_z^2 + g_y^2v_x^2v_z^2 + g_z^2v_x^2v_y^2 = 0. \quad (1.67)$$

La solución para esta ecuación puede ser fácilmente encontrada utilizando la fórmula general, pero la interrogante principal es si siempre existirán dos o al menos una solución para la velocidad de fase. Para responder esto tenemos que fijarnos en el llamado *discriminante* de la ecuación

$$\begin{aligned} \Delta &= B^2 - 4AC \\ A &= 1 \\ B &= -[g_x^2(v_y^2 + v_z^2) + g_y^2(v_x^2 + v_z^2) + g_z^2(v_x^2 + v_y^2)] \\ C &= g_x^2v_y^2v_z^2 + g_y^2v_x^2v_z^2 + g_z^2v_x^2v_y^2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Aunque la literatura, [12] y [13], indica que siempre existe al menos una solución, la demostración no aparece en las fuentes citadas, y por ello se incluye en este capítulo. Desglosaremos parte por parte:

$$\begin{aligned} B^2 &= g_x^4(v_z^2 + v_y^2)^2 + g_y^4(v_x^2 + v_z^2)^2 + g_z^4(v_x^2 + v_y^2)^2 + 2g_x^2g_y^2(v_z^2 + v_y^2)(v_x^2 + v_z^2) + 2g_y^2g_z^2(v_x^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2) \\ &\quad + 2g_x^2g_z^2(v_z^2 + v_y^2)(v_x^2 + v_y^2) \\ &= g_x^4(v_z^4 + v_y^4) + g_y^4(v_x^4 + v_z^4) + g_z^4(v_x^4 + v_y^4) + 2[v_z^2v_y^2(g_x^2 + g_y^2g_z^2) + v_z^2v_x^2(g_y^2 + g_x^2g_z^2) + v_x^2v_y^2(g_x^2 + g_y^2g_z^2)] \\ &\quad + 2(v_z^4g_x^2g_y^2 + v_y^4g_x^2g_z^2 + v_x^4g_z^2g_y^2). \end{aligned}$$

Al sustituir en el discriminante y realizar un poco de álgebra

$$\begin{aligned} \Delta &= g_x^4(v_z^4 + v_y^4) + g_y^4(v_x^4 + v_z^4) + g_z^4(v_x^4 + v_y^4) + 2[v_z^2v_y^2(g_y^2g_z^2 - g_x^2) + v_z^2v_x^2(g_x^2g_z^2 - g_y^2) + v_x^2v_y^2(g_y^2g_x^2 - g_z^2)] \\ &\quad + 2v_z^4g_x^2g_y^2 + v_y^4g_x^2g_z^2 + v_x^4g_z^2g_y^2 \\ &= g_x^4(v_z^2 - v_y^2)^2 + g_y^4(v_x^2 - v_z^2)^2 + g_z^4(v_x^2 - v_y^2)^2 + 2v_z^2v_y^2(g_y^2g_z^2 - g_x^2g_y^2 - g_x^2g_z^2) \\ &\quad + 2v_z^2v_x^2(g_x^2g_z^2 - g_x^2g_y^2 - g_y^2g_z^2) + 2v_x^2v_y^2(g_y^2g_x^2 - g_x^2g_z^2 - g_y^2g_z^2) + 2(v_z^4g_x^2g_y^2 + v_y^4g_x^2g_z^2 + v_x^4g_z^2g_y^2) \\ &= g_x^4(v_z^2 - v_y^2)^2 + g_y^4(v_x^2 - v_z^2)^2 + g_z^4(v_x^2 - v_y^2)^2 + 2g_x^2g_y^2(v_z^2 - v_y^2)(v_z^2 - v_x^2) + 2g_y^2g_z^2(v_x^2 - v_z^2)(v_x^2 - v_y^2) \\ &\quad + 2g_x^2g_z^2(v_y^2 - v_z^2)(v_y^2 - v_x^2), \end{aligned}$$

llevándonos a la expresión final

$$\begin{aligned} \Delta &= g_x^4(v_z^2 - v_y^2)^2 + g_y^4(v_x^2 - v_z^2)^2 + g_z^4(v_x^2 - v_y^2)^2 + 2g_x^2g_y^2(v_z^2 - v_y^2)(v_z^2 - v_x^2) + 2g_y^2g_z^2(v_x^2 - v_z^2)(v_x^2 - v_y^2) \\ &\quad + 2g_x^2g_z^2(v_y^2 - v_z^2)(v_y^2 - v_x^2). \end{aligned} \quad (1.69)$$

Este discriminante es mayor o igual que cero siempre y cuando ϵ_i sean valores reales. Para el caso general, heurísticamente puede verse que el discriminante es mayor o igual que cero de la siguiente forma: dado un ordenamiento de los valores principales de la permisividad eléctrica, $\epsilon_i < \epsilon_j < \epsilon_k$, con $i, j, k \in \{x, y, z\}$ y $i \neq j \neq k$, todos los términos de (1.69) serían positivos excepto por el término que es de la forma $(v_j^2 - v_i^2)(v_j^2 - v_k^2)$, que resulta ser la multiplicación de las dos diferencias más pequeñas de los cuadrados de las velocidades principales de propagación (debido al orden supuesto), por lo que su valor absoluto será menor a los demás términos positivos, y da como resultado un discriminante positivo, haciéndose cero únicamente para valores específicos del vector \mathbf{g} .

Para el caso isotrópico, $\epsilon = \epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$, se puede ver que el discriminante se hace cero asegurando una única solución para la velocidad de fase, lo cual es lo esperado, y se llega a una solución para la velocidad de fase (recordando que estamos bajo la aproximación $\mu \approx \mu_o$) con un respectivo índice de refracción.

$$v_p = c\sqrt{\frac{\epsilon_o}{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_o}}. \quad (1.70)$$

1.5.1 Caso uniaxial

Para el caso uniaxial se puede llegar a una solución analítica útil: supongamos el orden $\epsilon_i = \epsilon_j < \epsilon_k$, que inmediatamente define la dirección del eje del cristal a lo largo del eje \hat{k} . Usando las definiciones de las velocidades principales, el discriminante puede ser llevado a,

$$\Delta = g_i^4(v_o^2 - v_e^2)^2 + g_j^4(v_o^2 - v_e^2)^2 + 2g_i^2g_j^2(v_e^2 - v_o^2)(v_e^2 - v_o^2) = (v_o^2 - v_e^2)^2(g_i^2 + g_j^2)^2 \quad (1.71)$$

que siempre será positivo, salvo en el caso que $g_i = g_j = 0$, que implica que $g_k = 1$, i.e. el vector de onda viaja a lo largo del eje del cristal, en el que se hace cero el discriminante arrojando un único valor para la velocidad de fase. Ahora, este discriminante nos lleva a dos soluciones de forma general:

$$v_{p1}^2 = v_o^2 \quad v_{p2}^2 = v_o^2g_k^2 + v_e^2(1 - g_k^2), \quad (1.72)$$

una solución independiente de la dirección del vector de onda, y otra dependiente que puede representarse con una elipse. Para ver esto hay que llevarlo a una forma más sugerente, si se renombra $g_k^2 = \cos^2 \theta$, con θ el ángulo con respecto al eje del cristal,

$$v_{p2}^2 = v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta \quad (1.73)$$

que es una elipse de velocidad de fase con ejes principales v_o y v_e . De forma general, las expresiones para los dos índices de refracción en el caso uniaxial son:

$n_1^2 = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_o}, \quad n_2^2 = \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\epsilon_i \epsilon_k}{\epsilon_k \cos^2 \theta + \epsilon_i \sin^2 \theta},$	ó	$n_1 = n_o, \quad n_2 = \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}}.$	(1.74)

Hay que recordar que estas soluciones tienen sus respectivas polarizaciones, en \mathbf{D} y \mathbf{E} , las cuales son solución a la ecuación (1.42), y que son la clave del fenómeno de la birrefringencia: dos modos de propagación para dos polarizaciones características.

Las dos soluciones corresponden a las dos superficies que componen a la superficie normal, i.e., a la esfera y al elipsoide de revolución. La esfera corresponde a una solución parecida a la isotrópica, $n_1 = n_o$, mientras que la segunda solución, n_2 , al elipsoide de revolución.

En la siguiente sección se abordará a profundidad la polarización de las ondas, y se verá que dichos modos son ortogonales para el vector de desplazamiento eléctrico.

1.6 Campos eléctrico y desplazamiento eléctrico

Tenemos que las soluciones de (1.42) corresponden a las polarizaciones del campo eléctrico dado un vector de onda \mathbf{k} . Dicha solución se puede deducir de la expresión (1.61), en la que las componentes del campo

eléctrico, E_i , con $i = x, y, z$, tienen un factor común $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2$, por lo que se podría prescindir de dicho factor, obteniéndose

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{g_x}{n^2 - \epsilon_x / \epsilon_o} \\ \frac{g_y}{n^2 - \epsilon_y / \epsilon_o} \\ \frac{g_z}{n^2 - \epsilon_z / \epsilon_o} \end{pmatrix}, \quad (1.75)$$

que pueden ser expresadas de igual forma con respecto al vector de onda \mathbf{k} , es decir,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{k_x}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_x} \\ \frac{k_y}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_y} \\ \frac{k_z}{k^2 - \omega^2 \mu \epsilon_z} \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

Estas expresiones son ampliamente conocidas y pueden ser encontradas en varios libros, refiérase a [12, 13].

Es importante recordar que este vector únicamente indica la dirección de las vibraciones del campo eléctrico, mas no su intensidad, ya que cualquier vector paralelo a (1.75) o a (1.76) es solución de (1.42). También hay que recalcar que estas expresiones dejan de ser válidas en los casos particulares con $n^2 = \epsilon_j / \epsilon_o$, y recordando los resultados obtenidos en la sección anterior para el caso uniaxial (1.74), sabemos que siempre ocurre, por lo que será importante encontrar una expresión alterna, y esto será visto en la siguiente sección.

A estas polarizaciones del campo eléctrico les corresponderán polarizaciones del vector de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\epsilon_x g_x}{n^2 - \epsilon_x / \epsilon_o} \\ \frac{\epsilon_y g_y}{n^2 - \epsilon_y / \epsilon_o} \\ \frac{\epsilon_z g_z}{n^2 - \epsilon_z / \epsilon_o} \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

Con esta última expresión es fácil ver que la ecuación de Fresnel (1.63) no es más que la consecuencia de que el vector de desplazamiento eléctrico sea ortogonal al vector de onda, i.e. $\mathbf{D} \cdot \mathbf{g} = 0$.

Como se mencionó en las secciones anteriores, las dos soluciones a las ecuaciones de Fresnel, ya sean expresadas en términos de la velocidad de fase, v_{p1} y v_{p2} , o del índice de refracción, n_1 y n_2 , les corresponderán polarizaciones del campo \mathbf{D}_i ortogonales entre sí. Es importante denotar que los campos eléctricos \mathbf{E}_i no serán ortogonales entre si, excepto en cristales uniaxiales.

Primero se demostrará que $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0$, debido a que su demostración no es común encontrarla en la literatura, por que se suele dejar como ejercicio. Renombrando las llamadas permitividades relativas $\epsilon_j / \epsilon_o = j$, con $j \in \{x, y, z\}$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 &= \frac{\epsilon_x^2 g_x^2}{(n_1^2 - \epsilon_x / \epsilon_o)(n_2^2 - \epsilon_x / \epsilon_o)} + \frac{\epsilon_y^2 g_y^2}{(n_1^2 - \epsilon_y / \epsilon_o)(n_2^2 - \epsilon_y / \epsilon_o)} + \frac{\epsilon_z^2 g_z^2}{(n_1^2 - \epsilon_z / \epsilon_o)(n_2^2 - \epsilon_z / \epsilon_o)} \\ &= \epsilon_o^2 \left(\frac{x^2 g_x^2}{(n_1^2 - x)(n_2^2 - x)} + \frac{y^2 g_y^2}{(n_1^2 - y)(n_2^2 - y)} + \frac{z^2 g_z^2}{(n_1^2 - z)(n_2^2 - z)} \right) \end{aligned}$$

haciendo separación por fracciones parciales podemos expresar cada término de la ecuación pasada como

$$\frac{j^2 2g_j}{(n_1^2 - j)(n_2^2 - j)} = \frac{1}{(n_2^2 - n_1^2)} \frac{g_j^2 j}{(n_1^2 - j)} - \frac{1}{(n_2^2 - n_1^2)} \frac{g_j^2 j}{(n_2^2 - j)}, \quad j \in \{x, y, z\}$$

lo que nos lleva a

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = \frac{\epsilon_o^2}{n_2^2 - n_1^2} \left[\left(\frac{g_x^2 x}{n_1^2 - x} + \frac{g_y^2 y}{n_1^2 - y} + \frac{g_z^2 z}{n_1^2 - z} \right) - \left(\frac{g_x^2 x}{n_2^2 - x} + \frac{g_y^2 y}{n_2^2 - y} + \frac{g_z^2 z}{n_2^2 - z} \right) \right] = 0,$$

que es igual a cero al utilizar la ecuación de Fresnel (1.63). Análogamente, utilizando separación por fracciones parciales, se pueden demostrar las siguientes relaciones, que con la anterior forman:

$$\boxed{\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0, \quad \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0}, \quad (1.78)$$

que más adelante se demostrarán válidas siempre en todo material anisotrópico lineal.

Sin embargo, para los campos eléctricos en general no se tiene esta relación de ortogonalidad entre sí, sino

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 &= \frac{g_x^2}{(n_1^2 - x)(n_2^2 - x)} + \frac{g_y^2}{(n_1^2 - y)(n_2^2 - y)} + \frac{g_z^2}{(n_1^2 - z)(n_2^2 - z)} \\
&= \frac{1}{n_2^2 - n_1^2} \left[\left(\frac{g_x}{n_1^2 - x} + \frac{g_y}{n_1^2 - y} + \frac{g_z}{n_1^2 - z} \right) - \left(\frac{g_x}{n_2^2 - x} + \frac{g_y}{n_2^2 - y} + \frac{g_z}{n_2^2 - z} \right) \right] \\
&= \frac{1}{n_2^2 - n_1^2} \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] = \frac{1}{n_1^2 n_2^2} \neq 0,
\end{aligned} \tag{1.79}$$

por lo que cuando la expresión (1.75) sea válida, i.e. $n^2 \neq \epsilon_j / \epsilon_o$, los campos eléctricos no serán ortogonales.

De aquí que si uno desea entender a profundidad los medios anisotrópicos, ya sean uniaxiales o biaxiales, se deba estudiar los casos particulares en los que las expresiones antes dadas para sus polarizaciones no sean válidas, o que al menos para una de las soluciones no lo sea, algo que suele pasarse por alto como en [12]. En particular, dado que en los medios uniaxiales siempre una de las expresiones no será válida (véase la expresión encontrada para los índices de refracción en medios uniaxiales (1.74)), se abordará con cierto detenimiento a continuación.

Para el caso general, tenemos, recordando expresión (1.61), el sistema de ecuaciones que expresaremos de forma general con los subíndices $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$:

$$\begin{aligned}
E_i(n^2 - i) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_i \\
E_j(n^2 - j) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_j \\
E_k(n^2 - k) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_k,
\end{aligned} \tag{1.80}$$

donde seguimos nombrando a las permitividades relativas principales $i = \epsilon_i / \epsilon_o$, y análogamente para j y k .

Primero sería útil estudiar qué sucede cuando la onda se propaga en alguna de las direcciones principales, e.g. $g_i = 1$, $g_j = 0$, $g_k = 0$. Fácilmente se puede ver que (1.80), nos lleva a

$$\begin{aligned}
E_i(n^2 - i) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 \\
E_j(n^2 - j) &= 0 \\
E_k(n^2 - k) &= 0,
\end{aligned}$$

donde es evidente que E_j y E_i no pueden hacerse cero al mismo tiempo, ya que implicaría que \mathbf{E} sería paralelo a la dirección principal en la que se propaga el vector de onda, y sabemos que en ese caso \mathbf{D} sería paralelo, i.e. $\mathbf{D} \parallel \mathbf{g}$, que es una contradicción. Entonces las soluciones serán

$$n_1^2 = j \quad n_2^2 = k,$$

y como \mathbf{D} se encuentra en el plano ortogonal a la dirección principal, \mathbf{E} también lo estará y por lo tanto será ortogonal al vector de onda, i.e. $\mathbf{g} \cdot \mathbf{E} = 0$. Sustituyendo esta nueva condición en las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
n_1^2 = j &\implies E_k = E_i = 0 \\
n_2^2 = k &\implies E_j = E_i = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando el vector de onda es paralelo a alguna de las direcciones principales, lo que se obtiene es una triada ortogonal dada por \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , y \mathbf{g} , que coinciden con las direcciones principales del cristal, véase la fig.(1.7).

La interpretación física es sencilla: una onda plana cuyo vector de onda sea paralelo a una de las direcciones principales en el medio anisotrópico, tendrá dos eigenmodos de propagación, correspondientes a las dos

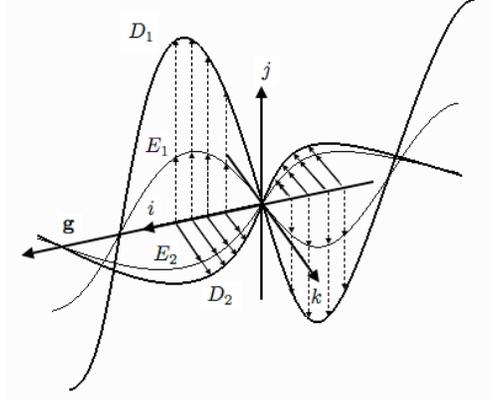


Figura 1.7: Dos ondas propagándose en la misma dirección, que coincide con una de las direcciones principales, en este caso i . La primera onda \mathbf{k}_1 viaja con una velocidad v_{p1} y tiene una polarización lineal en la dirección j , mientras que la segunda onda \mathbf{k}_2 viaja con una velocidad v_{p2} y tiene una polarización lineal en la dirección k . Aquí se representan tanto el campo eléctrico \mathbf{E} como el campo de desplazamiento \mathbf{D} .

polarizaciones ortogonales entre sí y paralelas a las direcciones principales restantes. Estos modos tendrán sus respectivas velocidades de fase debido a la respuesta anisotrópica del medio al campo eléctrico.

Como se mencionó anteriormente, para demostrar completamente que las polarizaciones del campo de desplazamiento eléctrico de cada una de las soluciones obtenidas de las ecuaciones de Fresnel son ortogonales, i.e. $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0$, requerimos estudiar los casos en los que la solución del índice de refracción sea igual a la raíz de alguna de las permitividades relativas, $n^2 = i = \epsilon_i/\epsilon_o$, con $i \in \{x, y, z\}$.

Si sustituimos esto en las ecuaciones (1.80), obtenemos que

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{ó} \quad g_i = 0,$$

en las que es fácil ver que la primera implica la segunda (debido a la exigencia de que el vector de onda sea ortogonal al vector de desplazamiento eléctrico), por lo que sólo hace falta enfocarnos en esta última. Entonces, si utilizamos $g_i = 0$ y lo sustituimos en (1.67), obtenemos las velocidades de fase y con ellas los dos índices de refracción

$$n_1^2 = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_o} = i, \quad n_2^2 = \frac{\epsilon_j \epsilon_k}{\epsilon_o (g_k^2 \epsilon_k + g_j^2 \epsilon_j)} = \frac{jk}{g_k^2 k + g_j^2 j}.$$

Para la segunda solución, tenemos que las expresiones (1.77) se siguen valiendo, obteniendo después de un poco de álgebra

$$E_{2i} = 0, \quad E_{2j} \frac{g_k^2 k + g_j^2 j}{k - j} \frac{1}{j g_j}, \quad E_{2k} = \frac{g_j^2 j + g_k^2 k}{j - k} \frac{1}{k g_k}$$

que nos lleva al omitir los factores comunes, ya que nos interesa únicamente las direcciones de las polarizaciones, a

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/j g_j \\ -1/k g_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/g_j \\ -1/g_k \end{pmatrix}. \quad (1.81)$$

De donde es fácil ver que $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{g} = 0$. En cambio para \mathbf{E}_1 uno debe de ser más cuidadoso puesto que la expresión para E_{1i} deja de ser válida. Entonces según (1.80) y (1.75), tenemos que al menos la solución del campo eléctrico podría ser de las formas

$$\text{i) } \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ g_j / (i-j) \\ g_k / (i-k) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

dependiendo de si el campo eléctrico es ortogonal al vector de onda i), o si no ii). Si suponemos que la solución correcta es el caso ii), tenemos que la condición $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{g} = 0$ nos lleva a

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{g} &= \frac{jg_j^2}{(i-j)} + \frac{kg_k^2}{(i-k)} = 0 \\ \implies \frac{ig_j^2}{k} + \frac{ig_k^2}{j} &= 1\end{aligned}$$

que no se cumple, ya que la condición para n_1 cuando se pide que el determinante del sistema de ecuaciones se haga cero no lo satisface (análogo a las ecuación (1.47)). Por lo tanto, el campo eléctrico y el campo de desplazamiento eléctrico serán

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Es importante recordar que aquí lo que estamos obteniendo es tan sólo la dirección de los campos, mas no su magnitud, ya que esta dependerá del haz incidente y de las condiciones de la frontera. Se puede ver que cuando las expresiones para las polarizaciones del campo eléctrico generales (1.75) no son válidas (para vectores de onda paralelos a los planos definidos por los ejes principales), las relaciones entre los campos de las dos soluciones cumplirán:

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0, \quad \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0, \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_2 = 0, \quad \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0. \quad (1.83)$$

1.6.1 Polarización en materiales uniaxiales

Todo lo escrito anteriormente se mantiene para materiales uniaxiales, sin embargo, ya que la finalidad de esta tesis es enfocarse en materiales uniaxiales, lo desarrollaremos con detalle. Suponiendo que $\epsilon_i = \epsilon_j \neq \epsilon_k$, con los subíndices $i, j, k \in \{x, y, z\}$, con $i \neq j \neq k$, para materiales uniaxiales tenemos que las soluciones a la ecuación de Fresnel (1.74) se pueden expresar (utilizando la notación antes convenida) como

$$n_1^2 = n_o^2, \quad n_2^2 = \frac{n_o^2 n_e^2}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}, \quad (1.84)$$

así como las ecuaciones de las relaciones entre el vector de onda y los campos eléctricos (1.80) quedan

$$\begin{aligned}E_i(n^2 - n_o^2) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_i \\ E_j(n^2 - n_o^2) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_j \\ E_k(n^2 - n_e^2) &= (\mathbf{g} \cdot \mathbf{E})n^2 g_k.\end{aligned} \quad (1.85)$$

Es importante remarcar que la dirección del eje del cristal, dado este ordenamiento de los ejes principales, es a lo largo de la dirección k .

La primera solución, $n_1 = n_o$, nos lleva a las posibles condiciones

$$\begin{aligned}\mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 & \quad \text{ó} \quad g_i = 0 \\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_1 = 0 & \quad \text{ó} \quad g_j = 0,\end{aligned}$$

las cuales todas llevan a $\mathbf{g} \cdot \mathbf{E}_1 = 0$, esto como consecuencia de exigir que el vector \mathbf{D}_1 sea ortogonal a \mathbf{g} . Dicha condición, obliga a $E_k = 0$, por lo que dada una $\mathbf{g} = (g_i, g_j, g_k)$ arbitraria, se tiene que las direcciones de las polarizaciones son

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \frac{g_j}{\epsilon_i} \\ -\frac{g_i}{\epsilon_i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} g_j \\ -g_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} g_j \\ -g_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.86)$$

donde sólo nos interesa las direcciones de las polarizaciones, mas no su magnitud, por lo que para fines prácticos, como $\mathbf{E}_1 \parallel \mathbf{D}_1$, estos tienen la misma expresión.

Lo importante de la primer solución con $n_1 = n_o$ es que le corresponde una polarización tal que sea perpendicular a la dirección del eje del cristal (en nuestro caso en dirección \hat{z}), y a \mathbf{g} , lo cual puede ser expresado de forma general, suponiendo que la dirección del eje del cristal es \mathbf{A} , como

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 = \mathbf{g} \times \mathbf{A}. \quad (1.87)$$

Además, es de igual importancia que el ángulo de desviación entre el vector de Poynting y el vector de onda es cero, ya que $\mathbf{D}_1 \parallel \mathbf{E}_1$. A los rayos que se propagan en este primer eigenmodo, es decir, que corresponden a las intersecciones con la esfera de la superficie normal \mathfrak{G} , se les llama rayos **ordinarios**.

En cuanto a la segunda solución, n_2 , se sigue valiendo la expresión (1.75), de la que con un poco de álgebra se puede llevar a (omitiendo los factores comunes, puesto que sólo nos interesa la dirección)

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} \frac{g_i}{n_o^2(1-g_k^2)} \\ \frac{g_j}{n_o^2(1-g_k^2)} \\ \frac{-1}{n_c^2 g_k} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \frac{g_i}{(1-g_k^2)} \\ \frac{g_j}{(1-g_k^2)} \\ \frac{-1}{g_k} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

A los rayos que se propaguen en este segundo eigenmodo, es decir, que corresponden a la intersección con el elipsoide de revolución de la superficie normal \mathfrak{G} , se les llama rayos **extraordinarios**.

Es fácil ver que las relaciones de ortogonalidad (1.83) se preservan. La fig.(1.8) muestra, dada una dirección de propagación \mathbf{k} , las polarizaciones de los dos eigenmodos de propagación.

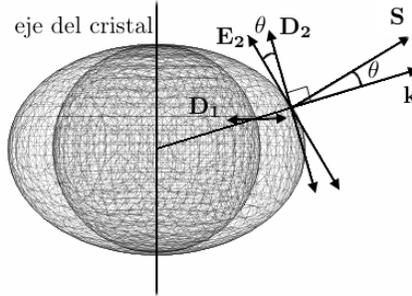


Figura 1.8: Gráficamente se puede ver el origen de la desviación entre el vector de Poynting y el vector de onda: para la superficie normal, en específico, para el elipsoide de revolución, el vector de onda k (que es en dirección radial), generalmente no es paralelo al vector normal (el gradiente de la superficie normal es paralelo al flujo de energía, i.e. al vector de Poynting) en su intersección con el elipsoide.

1.7 Interfases: Condiciones a la frontera

Hasta ahora sólo se ha expuesto lo que le sucede a una onda plana propagándose en un medio anisotrópico, en particular, de su descomposición natural en dos eigenmodos con sus respectivas velocidades de fase y polarizaciones del campo \mathbf{D} , que además resultan ser ortogonales. Sin embargo, no se ha expuesto lo que sucede en la frontera: lo que da origen al fenómeno llamado birrefringencia. Generalmente, lo que sucede es que dado un rayo incidente viajando en un material isotrópico a uno birrefringente, dará origen a un rayo reflejado y a dos rayos refractados (de ahí el nombre).

La fig.(1.9) ilustra en general los posibles escenarios para la reflexión y refracción. Para interfases en las que al menos uno de los materiales adyacentes sea birrefringente, las condiciones de frontera ya conocidas

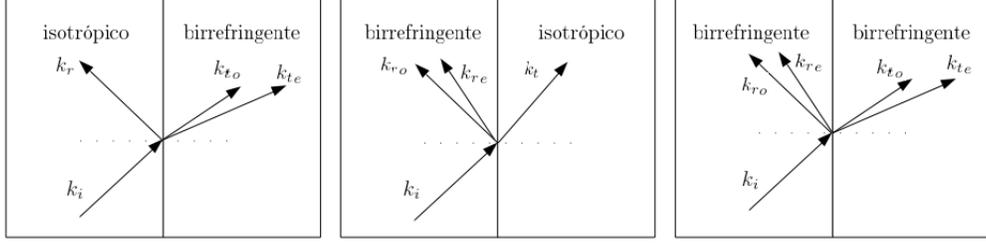


Figura 1.9: Se muestran varias interfaces para la refracción y reflexión de un haz incidente.

para materiales isotrópicos siguen siendo válidas y simplemente pueden ser usadas para refractar y reflejar un rayo. A continuación se deducirán para mayor claridad.

Consideremos una interfase entre dos materiales, pueden ser éstos isotrópicos o anisotrópicos. Tomemos un cilindro de altura δh y área de base δA , que atraviesa la interfase, tal y como lo muestra la figura(1.10a). Utilizando las ecuaciones de Maxwell que hasta ahora no han sido utilizadas, (1.1.i) y (1.1.iii),

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

se puede llegar usando el teorema de Gauss, así como tomando el límite cuando $\delta h \rightarrow 0$ y considerando que δA es lo suficientemente pequeña como para que el campo magnético en el material, \mathbf{B}_i , sea prácticamente constante, al igual que la normal \mathbf{n}_i

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1)\delta A - (\mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2)\delta A + (\text{contribución de las paredes})\delta h \\ &= (B_{1n} - B_{2n})\delta A, \end{aligned}$$

que lleva finalmente a la condición

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (1.89)$$

Es decir, que la componente normal del campo magnético \mathbf{B} se conserva, mientras que para el campo de desplazamiento eléctrico \mathbf{D} se obtiene, análogamente, que existirá una discontinuidad en presencia de cargas en la frontera

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_f, \quad (1.90)$$

donde σ_f es una densidad superficial de carga.

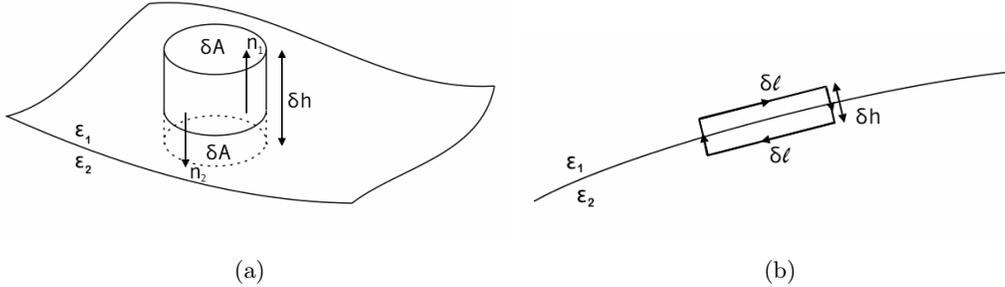


Figura 1.10: Dedución de las condiciones a la frontera.

Considerando la interfase y un circuito rectangular que la atraviese, con lados δh y δl , tal como se muestra en la fig.(1.10b), podemos utilizar las otras dos ecuaciones de Maxwell (1.1.ii) y (1.1.iv),

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

para obtener las otras dos condiciones a la frontera. Usando el teorema de Stokes y considerando que δl es lo suficientemente chica como para que el campo eléctrico en el material, \mathbf{E}_i , sea prácticamente constante, tomando el límite cuando $\delta h \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned}\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{E} \cdot d\ell \\ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \delta h \delta l &= (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1) \delta l - (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2) \delta l \\ 0 &= (E_{1t} - E_{2t}) \delta l.\end{aligned}$$

Entonces, la componente tangencial al plano del campo eléctrico \mathbf{E} se conserva, ya que la orientación del rectángulo fue arbitrario. De forma general, se puede expresar esta condición como

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (1.91)$$

Análogamente, se obtiene para el campo magnético \mathbf{H} ,

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{K}_f, \quad (1.92)$$

que implica que existirá una discontinuidad en presencia de corrientes superficiales \mathbf{K}_f .

Por último, si consideramos una onda plana incidiendo sobre una interfase, podemos nombrar su campo eléctrico como \mathbf{E}_i , y a los campos eléctricos de las ondas reflejadas y refractadas como \mathbf{E}_r y \mathbf{E}_t , respectivamente. Utilizando la condición del campo eléctrico (1.91), tendremos que

$$(\mathbf{E}_i \times \hat{\mathbf{n}}) + (\mathbf{E}_r \times \hat{\mathbf{n}}) = (\mathbf{E}_t \times \hat{\mathbf{n}}), \quad (1.93)$$

que suponiendo ondas planas $E = E_o e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ nos lleva a

$$(\mathbf{E}_i \times \hat{\mathbf{n}}) e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} + (\mathbf{E}_r \times \hat{\mathbf{n}}) e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \epsilon_r)} = (\mathbf{E}_t \times \hat{\mathbf{n}}) e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \epsilon_t)}. \quad (1.94)$$

Para que esta ecuación se valga para toda \mathbf{r} y todo t llegamos a las ecuaciones

$$\omega_i = \omega_t = \omega_r \quad (1.95)$$

y

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r} = \epsilon_r, \quad (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r} = \epsilon_t. \quad (1.96)$$

Ahora, como \mathbf{r} describe un plano con una cierta normal $\hat{\mathbf{n}}$, se sabe que su componente normal es constante, mientras que la tangencial varía. Teniendo esto en mente podemos descomponerlo en términos del vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ y un vector tangente al plano $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) + N\mathbf{n}, \quad (1.97)$$

donde N es la componente normal constante para todos los puntos en un plano dado, i.e., $N := \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ y el vector $\boldsymbol{\tau}$ es una función de \mathbf{r} . Con esta descomposición las expresiones de (1.96) quedan

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) + N(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \epsilon_r, \quad (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) + N(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \epsilon_t, \quad (1.98)$$

que para ser válidas para toda \mathbf{r} , los coeficientes del término del vector tangente deben anularse, i.e.,

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.99)$$

entonces, las componentes tangentes al plano de la interfase del vector de onda son constantes al reflejarse y transmitirse. Además, el vector $\boldsymbol{\tau}$ puede ser expresado de forma general como

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}), \quad (1.100)$$

en la que se utilizó la identidad vectorial (A.2). La condición de frontera para el vector de onda usando (A.1) se convierte

$$(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot [(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \times \hat{\mathbf{n}}] = 0, \quad (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot [(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \times \hat{\mathbf{n}}] = 0, \quad (1.101)$$

y ya que $(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}) \neq 0$, la condición es finalmente

$$(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \times \hat{\mathbf{n}} = 0, \quad (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (1.102)$$

Para resumir, las condiciones de frontera clave para materiales isotrópicos y anisotrópicos, pero sin corrientes y sin cargas, son

$$\boxed{\begin{array}{lll} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \\ (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 & (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \times \hat{\mathbf{n}} = 0 \end{array}} \quad (1.103)$$

Para ver como se refracta y se refleja un rayo en una interfase debemos utilizar la condición de que la componente tangencial de \mathbf{k} se conserva, aunado con la superficie normal correspondiente al medio, ya sea de incidencia o de transferencia. Lo primero que se puede obtener de esta condición, sin realizar ningún desarrollo matemático, es que los vectores de onda incidentes, reflejado y refractado, son coplanares⁷, y al plano en el que yacen se le llama plano de incidencia, definido por el vector de onda incidente \mathbf{k}_i y la normal al punto de incidencia $\hat{\mathbf{n}}$. Sin embargo, esto mismo no va a suceder de forma general con los vectores de Poynting, es decir, para los rayos incidente, reflejado y refractado.

Como se sabe, la superficie normal es la superficie en el espacio de las \mathbf{k} conformada por los vectores de onda permitidos en un material. Utilizando la condición de que la componente tangente a la interfase se debe de conservar, se pueden obtener las soluciones de los vectores refractados, \mathbf{k}_t , y reflejados, \mathbf{k}_r . Como la superficie normal consta de dos cascarones, habrá en general dos soluciones, i.e. dos rayos refractados o reflejados.

Se debe de precisar que las ecuaciones hasta ahora obtenidas se encuentran en distintos sistemas coordenados. La superficie normal fue deducida para el sistema de los ejes principales dieléctricos, y las condiciones a la frontera están dados en un sistema coordenado dependiente de la normal de la superficie y el rayo incidente. Ya que el sistema coordenado último es más intuitivo y fácil de visualizar, se preferirá trabajar en éste y sólo restaría rotar la superficie normal a este sistema.

1.7.1 Refracción en materiales birrefringentes uniaxiales

Como se mencionó, para obtener la refracción de un rayo en una interfase es necesario utilizar la superficie normal \mathfrak{S} y las condiciones de frontera. Se debe rotar la superficie normal al sistema coordenado definido por el plano de incidencia. Se tomará la siguiente convención: el eje z se encontrará en dirección de la normal a la interfase, el eje y será ortogonal pero coplanar a este, mientras que el eje x es normal al plano de incidencia, véase la fig.(1.11a). Si se tuviese incidencia normal, en el que se indefine el sistema coordenado escogido, se escogerá como plano YZ al plano que contenga al vector incidente y al eje del cristal⁸, véase la fig.(1.11b). De hecho, de esta forma uno puede caracterizar el plano en el que se encuentra el eje del cristal de algún material: uno hace incidir luz de forma normal a la interfase y se encuentra el plano en el que el extraordinario es refractado.

Para el caso uniaxial, la superficie normal (1.54) está conformada por una esfera y un elipsoide de revolución, que se tocan sólo en la dirección del eje del cristal. La esfera ordinaria, véase (1.55), es

$$k^2 = \frac{\omega^2 n_o^2}{c^2}, \quad (1.104)$$

⁷Los vectores de onda, al igual que el rayo ordinario, serán coplanares, sin embargo, no lo será el rayo extraordinario.

⁸Se escogerá este puesto que los rayos quedarán contenidos en este plano en caso de incidencia normal, lo que más adelante se demostrará, y esto facilita el trazo de rayos.

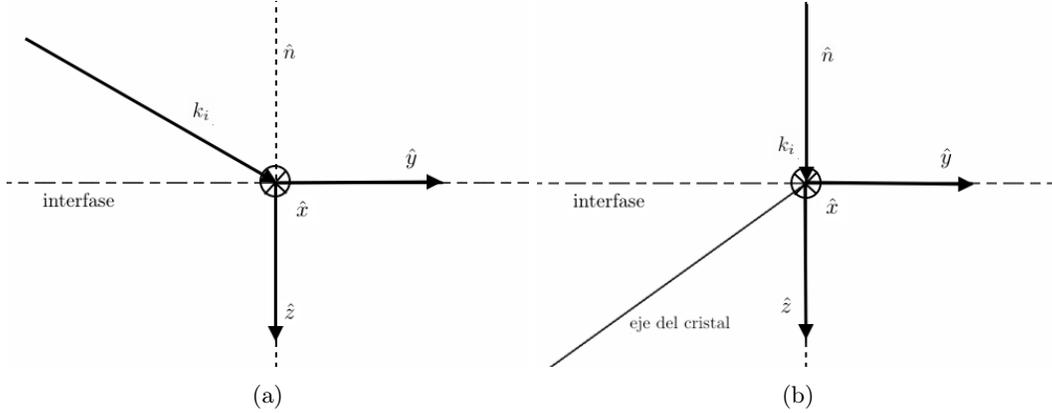


Figura 1.11: Sistemas coordenados utilizados para realizar la refracción, en (a) se muestra el general salvo en los casos de incidencia normal, en los que se opta por escoger el plano que contiene al eje del cristal (b).

mientras que el elipsoide de revolución extraordinario (1.56), suponiendo una dirección del eje del cristal en el sistema coordenado escogido $\mathbf{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$, podemos expresarlo de forma general como⁹

$$\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})^2}{n_o^2} + \frac{(\mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A})^2}{n_e^2} = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (1.105)$$

dónde se utiliza que en la dirección del cristal el elipsoide extraordinario debe de tocar a la esfera ordinaria y por lo tanto se hace una descomposición en la dirección del eje \mathbf{A} y en cualquier dirección ortogonal a él, véase la fig.(1.12). Realizando un poco de álgebra, es fácil llevar esta expresión a

$$\boxed{n_o^2 k^2 - N(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})^2 = \left(\frac{\omega n_o n_e}{c}\right)^2}, \quad (1.106)$$

en dónde definimos $N := n_o^2 - n_e^2$, término que utilizaremos continuamente a partir de esta sección.

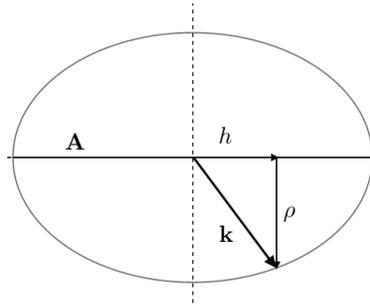


Figura 1.12: En este caso $\rho = \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$ y $h = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$.

Para obtener los vectores de onda refractados \mathbf{k}_o , llamado ordinario y que corresponde a la esfera, y \mathbf{k}_e , llamado extraordinario que corresponde al elipsoide de revolución, necesitamos imponer las condiciones a la frontera, i.e. $k_{ey} = k_{oy} = k_y = (\omega n_i / c) \sin \theta_i$ donde θ_i es el ángulo de incidencia, y $k_{ex} = k_{ox} = 0$, en las ecuaciones (1.104) y (1.106). En el caso ordinario se obtiene

$$k_{oz} = \frac{\omega n_o}{c} \sqrt{1 - \frac{n_i^2}{n_o^2} \sin^2 \theta_i}. \quad (1.107)$$

⁹Existe otra forma de realizar esto utilizando una transformación de coordenadas bajo una rotación, que aunque menos inmediata, puede ser más ilustrativa. Véase el apéndice B.

Ésta ecuación tendrá dos soluciones, una positiva y una negativa, pero sólo la positiva tiene sentido físico. La ley de Snell puede obtenerse fácilmente con un poco de álgebra

$$\boxed{n_o \sin \theta_o = n_i \sin \theta_i}, \quad (1.108)$$

con θ_o ángulo de refracción del rayo ordinario.

El caso extraordinario lleva a la ecuación cuadrática

$$k_z^2 \Gamma - 2k_z k_y N \beta \gamma + k_y^2 (n_o^2 - N \beta^2) - \left(\frac{\omega n_o n_e}{c} \right)^2 = 0 \quad (1.109)$$

dónde

$$\Gamma = n_o^2 - N \gamma^2 \quad (1.110)$$

y cuya solución en k_{ez} es

$$k_{ez} = \frac{N k_{iy} \beta \gamma \pm \sqrt{\Gamma \left(\frac{\omega n_o n_e}{c} \right)^2 + k_{iy}^2 n_o^2 [N \beta^2 - \Gamma]}}{\Gamma}, \quad (1.111)$$

que lleva a

$$\boxed{k_{ez} = \frac{\omega N n_i \sin \theta_i \beta \gamma \pm n_o \sqrt{\Gamma n_e^2 + n_i^2 \sin^2 \theta_i [N \beta^2 - \Gamma]}}{\Gamma}}. \quad (1.112)$$

Generalmente existirán dos soluciones para la ecuación (1.107), excepto para los casos extremales en los que sólo hay una solución, y en los que no hay rayo transmitido (para esto se requiere que al menos el índice de refracción del medio incidente sea mayor que el índice ordinario o extraordinario, $n_i > n_o$ ó $n_i > n_e$). Una de las dos soluciones corresponde comúnmente a una intersección fuera del medio anisotrópico, es decir, negativa en k_{ez} , por lo que carece de sentido físico y se ignora¹⁰. Sin embargo, dado a que es una elipse y no una esfera, existirán casos en los que las dos soluciones de k_{ez} sean positivas y por lo tanto podrían existir dos rayos extraordinarios refractados. Esta posible segunda onda extraordinaria refractada será analizada con detenimiento al final de esta sección y se discutirá si podría o no tener sentido físico. La fig(1.13) muestra varias orientaciones del cristal y las respectivas intersecciones de la superficie normal con el plano de incidencia, es decir, la refracción de los vectores de onda.

Para obtener el índice de refracción efectivo correspondiente al cascarón extraordinario, se puede utilizar la relación del vector de onda (1.20)

$$n' = \frac{c}{\omega} k_e = \frac{c}{\omega} \sqrt{k_i^2 \sin^2 \theta_i + k_{ez}^2}, \quad (1.113)$$

mientras que el ángulo de refracción para el vector extraordinario puede ser obtenido de (1.112) o expresado de la siguiente manera

$$\theta_{ke} = \arctan\left(\frac{k_i \sin \theta_i}{k_{ez}}\right) = \frac{n_i \Gamma}{N n_i \beta \gamma \pm n_o \sqrt{\Gamma n_e^2 + n_i^2 \sin^2 \theta_i [N \beta^2 - \Gamma]}}. \quad (1.114)$$

Resumiendo, la birrefringencia tiene lugar porque existen dos cascarones de la superficie normal, y cada una da origen a un vector de onda refractado. Como se había mencionado en secciones anteriores, a la solución del cascarón esférico se le suele llamar solución ordinaria, \mathbf{k}_o , mientras que a la del elipsoide de revolución solución extraordinaria, \mathbf{k}_e . La refracción aunque implícitamente no depende de la frecuencia de la onda incidente, sí lo hace implícitamente por los índices de refracción.

¹⁰En realidad se verá más adelante que la razón principal para ignorar a esta segunda solución es que su vector de Poynting, ie. rayo, es retrogrado, por lo que correspondería a una reflexión. Sólo se le podría considerar una solución si se tratase de metamateriales, en los que se toma la otra solución y \mathbf{k} y \mathbf{S} están en sentidos opuestos.

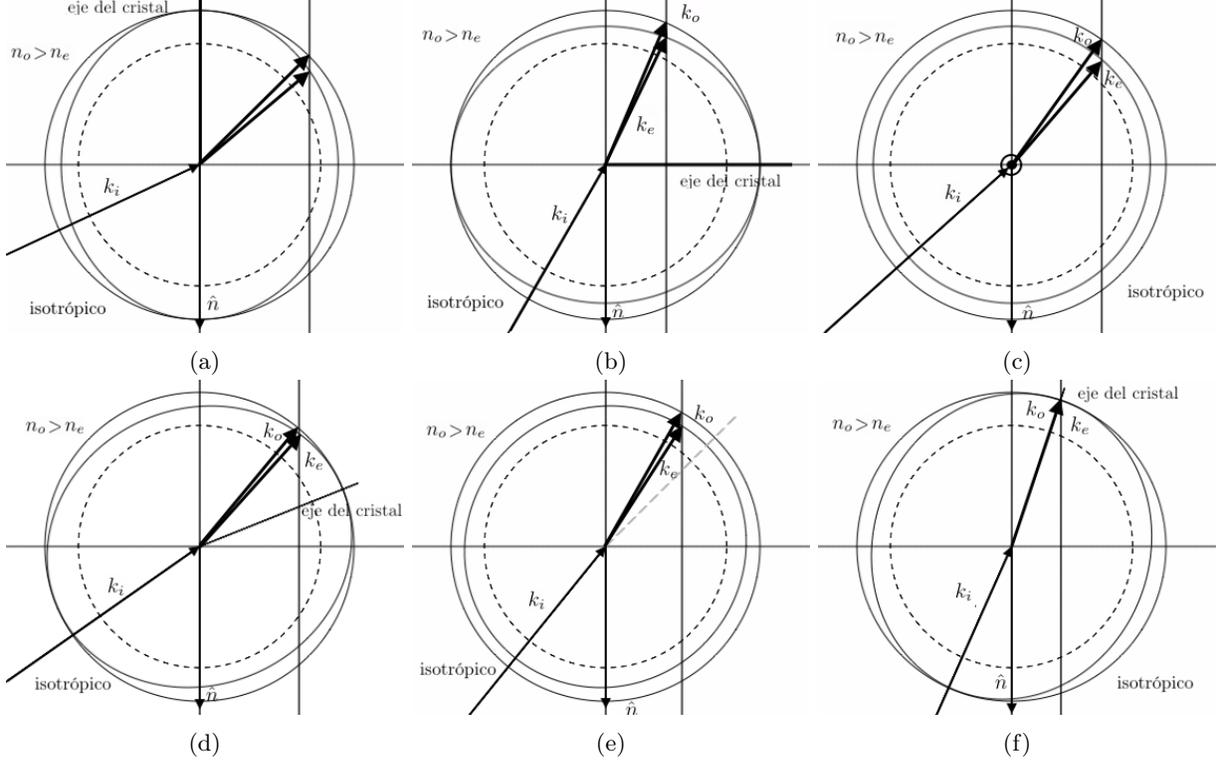


Figura 1.13: Refracción para distintas direcciones del eje del cristal, la dirección del eje del cristal se muestra al igual que la curvas normales y la curva normal correspondiente al medio de incidencia (línea punteada). Eje del cristal: (a) normal a la interfase, (b) paralelo a la interfase, (c) normal al plano de incidencia, (d) y (f) yace en el plano de incidencia, (e) oblicuo al plano de incidencia. En (f) se muestra que a lo largo de la dirección del cristal k_e y k_o son los mismos.

Vector de Poynting: Rayo refractado

Si se desea calcular la dirección del vector de Poynting, el cual lejos del foco representa localmente la dirección del rayo¹¹, se requiere obtener primero la dirección de los campos eléctrico y magnético, $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$, respectivamente. En las que se deben utilizar las relaciones

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{H} \times \mathbf{D}}{|\mathbf{H} \times \mathbf{D}|}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \frac{\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}}{|\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}|}, \quad \hat{\mathbf{S}} = \frac{\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}}{|\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}|}, \quad (1.115)$$

en dónde se requiere rotar el inverso del tensor dieléctrico ϵ^{-1} al sistema coordenado del plano de incidencia, o realizar una descomposición utilizando la propiedad (1.59).

Sin embargo, existe una forma más sencilla de obtenerlo utilizando que el vector de Poynting es normal a la superficie normal, i.e. $\hat{\mathbf{S}} \parallel \nabla \mathcal{G}$. Entonces, recordando (1.106) tenemos que

$$\nabla \mathcal{G} = \nabla \left(n_o^2 (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{k}_e) - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})^2 - \left(\frac{\omega n_o n_e}{c} \right)^2 \right) \quad (1.116)$$

que al utilizar la identidad vectorial (A.4) y viendo que $\nabla \times \mathbf{k}_e = 0$, se llega a

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{G} &= 2n_o^2 (\mathbf{k}_e \cdot \nabla) \mathbf{k}_e - 2N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{k}_e \\ &= 2[n_o^2 \mathbf{k}_e - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A}], \end{aligned} \quad (1.117)$$

¹¹El Dr. Miguel Alonso discute la relación entre el vector de Poynting y la dirección del rayo en [16], en el capítulo 8.

con lo que obtenemos la dirección del rayo extraordinario refractado normalizando el resultado anterior

$$\mathbf{S} = \frac{n_o^2 \mathbf{k}_e - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}}{\sqrt{n_o^4 k_e^2 - (n_o^4 - n_e^4)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}_e)^2}}. \quad (1.118)$$

Algo interesante que señalar, es que existen casos (se requiere al menos que el eje del cristal sea oblicuo a la normal o a la interfase) en los que el rayo extraordinario se refracta hacia el mismo lado de incidencia, i.e. con $S_y < 0$, en lugar de cruzar, y conforme el ángulo de incidencia aumenta el rayo se acerca a la normal y luego cambia de lado, véase la fig.(1.14).

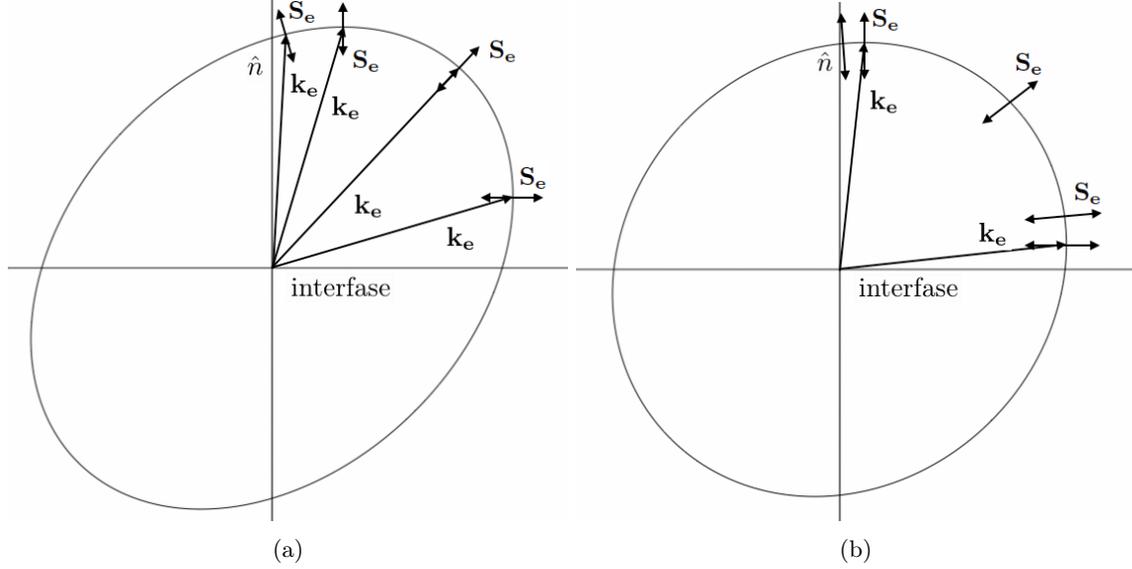


Figura 1.14: (a) Un material hipotético con índices $n_o = 1.9$ y $n_e = 1.3$, con la orientación del eje del cristal adecuada, ejemplificando las secciones de la orientación del vector de Poynting extraordinario refractado para estos casos. (b) Calcita con índices $n_o = 1.658$ y $n_e = 1.468$.

Condiciones para que el rayo extraordinario se mantenga dentro del plano de incidencia

Ahora, hace falta detenerse en un aspecto interesante de la refracción extraordinaria: el rayo extraordinario no suele mantenerse en el plano de incidencia, sino que salta de éste complicando el trazo de rayos utilizado comúnmente¹².

Sin embargo hay casos en los que el rayo extraordinario sí se mantiene en el plano de incidencia, y se pueden encontrar fácilmente. Nos serán de utilidad conocerlos al momento de realizar el trazo de rayos, en particular al realizar la aproximación paraxial y querer obtener analíticamente resultados. Para ello requerimos hacer $S_{ex} = 0$, obteniendo

$$S_x = n_o^2 k_{ex} - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})\alpha = 0, \quad (1.119)$$

y debido al sistema de referencia utilizado, tenemos que $k_{ex} = 0$, por lo que la condición termina siendo

$$N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})\alpha = 0. \quad (1.120)$$

Existen, entonces, tres casos en los que los rayos extraordinarios estarán contenidos en el plano de incidencia:

¹²En el trazo de rayos común se utiliza que los rayos, al menos en casos isotrópicos así como para los rayos ordinarios, se mantienen en el plano de incidencia para utilizar así matrices de 2×2 entradas. En el caso extraordinario se requeriría matrices de 4×4 . Se abordará esto con mayor detenimiento en la sección de trazo de rayos.

1. $\alpha = 0$, el eje del cristal yaciendo en el plano de incidencia, y que de hecho incluye el caso de incidencia normal,
2. $N = 0$, que el material no sea birrefringente, el cual se desprecia porque en dado caso no tiene caso hablar de un rayo extraordinario,
3. $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A} = 0$, el eje del cristal ortogonal al vector de onda extraordinario.

En caso de incidencia normal, se tiene que el rayo extraordinario (que incluso seguirá no siendo paralelo a \mathbf{k}_e) se quedará en el plano definido por el vector normal al punto de incidencia, $\hat{\mathbf{n}}$, y el eje del cristal \mathbf{A} , por ello se escoge como sistema de referencia. Esta conclusión es inmediata si se considera al vector normal a dicho plano $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}$, y que en este caso $\mathbf{k}_e \parallel \hat{\mathbf{n}}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) &= (n_o^2 \mathbf{k}_e - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) \\ &= n_o^2 \mathbf{k}_e \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})\mathbf{A} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.121)$$

por ello en caso de incidencia normal tendremos $\alpha = 0$, asegurando que el rayo extraordinario se quedará en el plano escogido.

En resumen, las condiciones para que el rayo extraordinario se mantenga en el plano de incidencia son que el eje del cristal yazca en el mismo, o que sea ortogonal al vector de onda extraordinario. Más adelante, se verá que son las mismas condiciones necesarias para que las polarizaciones de los rayos ordinario y extraordinario sean ortogonales.

Observaciones sobre el segundo posible rayo refractado

La segunda solución de (1.112) da como origen a un posible segundo vector de onda extraordinario refractado, cuya componente en k_{ez} estaría dado por

$$k_{ez} = \frac{\omega}{c} \frac{N n_i \sin \theta_i \beta \gamma - n_o \sqrt{\Gamma n_e^2 + n_i^2 \sin^2 \theta_i [N \beta^2 - \Gamma]}}{\Gamma}. \quad (1.122)$$

Esta solución suele carecer de sentido físico ya que suele ser negativa e implicaría la propagación en sentido contrario del frente de onda, y sólo sería de importancia dentro de metamateriales¹³. Sin embargo, existen casos en los que ambas soluciones tengan sentido físico, al menos en lo que respecta al vector de onda (se debe de contemplar el vector de Poynting para hacer un análisis completo). Gráficamente se ilustran los casos en los que esto ocurre, véanse las figs. (1.15a) y (1.15b).

Los casos en los que esto es posible se requiere que la elipse extraordinaria cruce la interfase y tenga puntos con una componente k_y mayor a su intersección, i.e. que el valor de $k_{y_{max}}$ le corresponda una $k_z > 0$, y que a su vez sea mayor que la $k_{y_{int}}$, véase la fig.(1.15c). Esto impone la siguiente condición: si es positivo el material requiere que la proyección del eje del cristal en el plano de incidencia sea negativa, mientras que si es negativo el material se requerirá que la proyección del eje del cristal en el plano de incidencia sea positiva; traduciéndose en

$$N\beta\gamma > 0. \quad (1.123)$$

Para que la posible doble refracción extraordinaria tuviese un mayor rango (rango de existencia, al menos en el vector de onda) se requiere que la excentricidad de la elipse sea grande, es decir, una diferencia importante entre los índices ordinario y extraordinario, al igual que una gran componente tangencial a la interfaz del vector de onda incidente, que al menos exige un índice del medio incidente mayor a alguno de los dos índices del material birrefringente.

¹³En los metamateriales se escoge la segunda solución de la superficie normal, y se tendrán por lo tanto un vector de onda retrógrado, entre otras particularidades. Sería interesante realizar esto con cuidado para metamateriales.

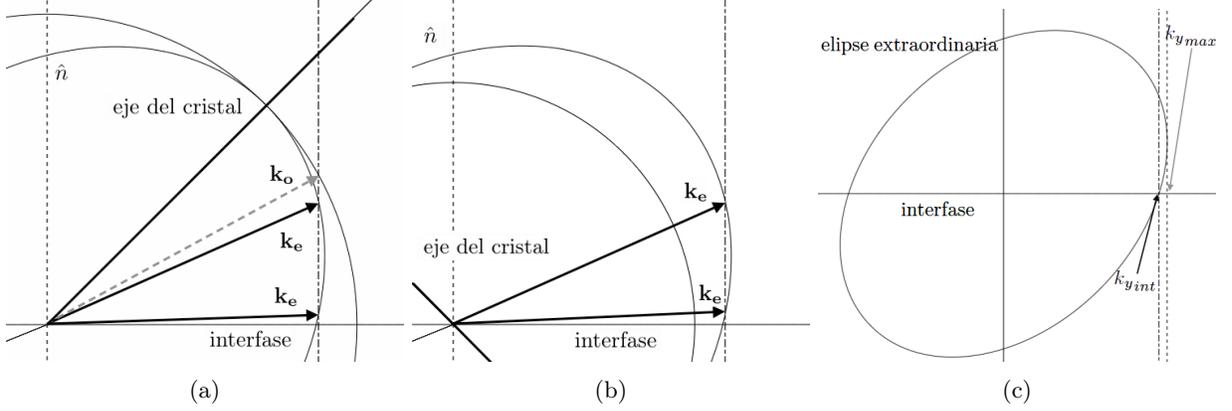


Figura 1.15: Casos en los que podría existir un segundo vector de onda extraordinario refractado: (a) cristal negativo con el eje del cristal con pendiente positiva [I y III cuadrantes], (b) cristal positivo con el eje del cristal con pendiente negativa [II y IV cuadrantes]. (c) Se muestra el rango en el que existen dos soluciones para el vector extraordinario, se aprecia que es pequeño a pesar de que se exageró la diferencia entre los índices, $\Delta n = 0.5$.

Una manera de obtener analíticamente el rango de doble refracción es mediante la diferencia entre las $k_{y_{int}}$ y la $k_{y_{max}}$. Primeramente para obtener la $k_{y_{int}}$ uno debe de imponer a la ecuación del elipsoide (1.106) $k_x = 0$ y $k_z = 0$, con lo que después de un poco de álgebra se obtiene

$$k_{y_{int}} = \frac{\omega n_o n_e}{c} \frac{1}{\sqrt{n_o^2 - N\beta^2}}, \quad (1.124)$$

luego, para obtener la $k_{y_{max}}$ uno debe de derivar con respecto de k_z la ecuación del elipsoide (1.106) e igualar a cero, lo que nos da

$$n_o^2 k_z - N(k_y \beta + k_z \gamma) \gamma = 0, \quad (1.125)$$

de donde se obtiene

$$k_z = \frac{N\beta\gamma k_y}{\Gamma}, \quad (1.126)$$

el cual sustituyéndolo en la ecuación del elipsoide, al igual que $k_x = 0$, resulta

$$k_{y_{max}} = \frac{\omega n_e}{c} \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + N^2 \gamma^2 \beta^2 - N\beta^2 n_o^2}}, \quad (1.127)$$

y haciendo algo de álgebra se obtiene lo siguiente

$$k_{y_{max}} = \frac{\omega n_e}{c} \frac{\sqrt{\Gamma}}{\sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} = \frac{\omega n_e}{c} \frac{\sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{\sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}}. \quad (1.128)$$

El ancho del rango de k_y para la doble posible refracción será

$$\begin{aligned} k_{y_{max}} - k_{y_{int}} &= \frac{\omega n_e}{c} \left(\frac{\sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{\sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} - \frac{n_o}{\sqrt{n_o^2 - N\beta^2}} \right) \\ &= \frac{\omega n_e}{c} \left(\frac{\sqrt{n_o^4 - N n_o^2 (\beta^2 + \gamma^2) + N^2 \gamma^2 \beta^2} - \sqrt{n_o^2 n_e^2 + n_o^2 N \alpha^2}}{\sqrt{n_o^2 - N\beta^2} \sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} \right) \\ &= \frac{\omega n_e}{c} \left(\frac{\sqrt{n_o^2 n_e^2 + n_o^2 N \alpha^2 + N^2 \gamma^2 \beta^2} - \sqrt{n_o^2 n_e^2 + n_o^2 N \alpha^2}}{\sqrt{n_o^2 - N\beta^2} \sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} \right), \end{aligned} \quad (1.129)$$

es decir, depende de

$$N^2\gamma^2\beta^2, \quad (1.130)$$

y como habíamos deducido geoméricamente, lo es de la excentricidad del elipsoide de revolución (siendo más estrictos, depende de la excentricidad de la elipse en el plano de incidencia, que a sus vez es un corte principal, i.e. por un plano que pasa por el centro, del elipsoide), cantidad relacionada con N . Así mismo, una forma de maximizar este rango sería fijándonos en que $\beta\gamma$ alcanza su máximo cuando $\beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, que sería cuando el eje del cristal yace en el plano de incidencia y forma un ángulo de 45° con la normal.

Falta considerar el vector de Poynting correspondiente a la segunda posible refracción para concluir si esta tiene sentido físico y caracterizarla por completo. Para ello debemos recordar que el vector de Poynting (la dirección local de rayo) tiene que ser normal a la superficie normal, con esto en mente es sencillo de ver gráficamente que la segunda refracción parecería carecer de sentido físico por la dirección de su normal, véase las figs.(1.16a) y (1.16b).

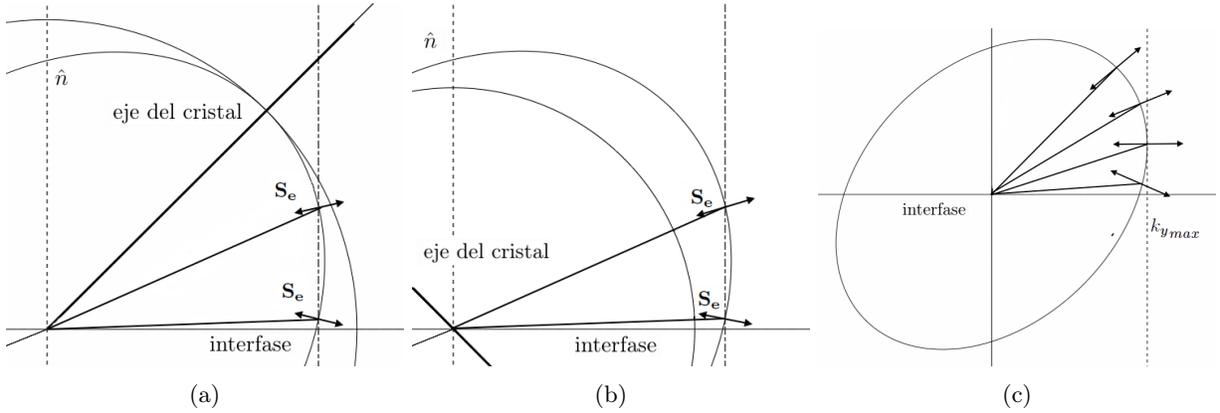


Figura 1.16: (a) Cristal negativo y (b) cristal positivo. (c) Se muestra el rango en el que existen dos posibles soluciones para el vector de onda extraordinario.

Como se puede ver, en $k_{y_{max}}$ la normal del elipsoide queda paralela a la interfase y a partir de ella hay un cambio en la pendiente de las normales, representando un punto de inflexión. A la segunda refracción le correspondería un rayo que se refleja (sin sentido físico) o un rayo que se refracta hacia el otro lado, véase la fig.(1.16c), dando como resultado dos rayos extraordinarios refractándose hacia lados contrarios con respecto a la normal. Físicamente si la segunda refracción realmente existiera, lo que uno vería sería una discontinuidad en la refracción: pasando una cierta θ_i tal que se sobrepase la $k_{y_{int}}$, aparecería un segundo rayo refractado, tal y como se muestra en la figs.(1.17a) y (1.17b), y conforme siga aumentando θ_i ambos rayos se irían acercando a la superficie hasta que fueran antiparalelos, lo cual es discontinuo en $k_{y_{max}}$.

Sin embargo, hay una última consideración: la disposición de los campos \mathbf{E} y \mathbf{D} requerida para que la segunda refracción tuviera sentido no es posible dadas las relaciones requeridas para \mathbf{k} y \mathbf{S} , véase la fig.(1.17c). Por lo tanto, no es posible una doble refracción extraordinaria.

En resumen, la segunda refracción extraordinaria aunque pudiera tener sentido considerando el vector de onda, su vector de Poynting, que desde un inicio es contraintuitivo, lleva a una contradicción para materiales comunes. De forma más general, cualquier solución que corresponda a las que se ignoran comúnmente, tendrán $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} < 0$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} < 0$. Sería pertinente desarrollar un poco más para metamateriales.

1.7.2 Reflexión total interna: isotrópico a birrefringente uniaxial

En esta sección se estudiará cuando alguno de los rayos resultantes de la refracción en un medio birrefringente uniaxial, ya sea el ordinario o el extraordinario, se frustra, es decir, cese de existir debido a las condiciones a la

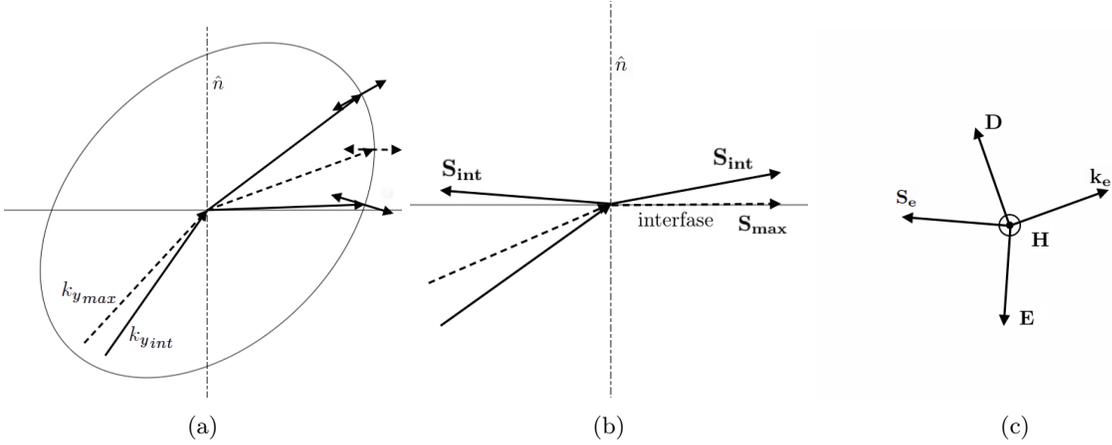


Figura 1.17: (a) Doble refracción vista con la superficie normal en el espacio de la k , (b) la posible interpretación física que tendría, (c) diagrama de los campos E , H y D , esta disposición lleva a una contradicción.

frontera. Como sabemos, una de las condiciones a la frontera exige que se conserve la componente tangencial a la interfase del vector de onda, pero la superficie normal es la que señala todos los valores permitidos para el vector de onda en el nuevo medio, por ello habrá veces que la k_y conservada no pertenecerá a esta porque será mayor a cualquier valor permitido, dando como resultado una reflexión total.

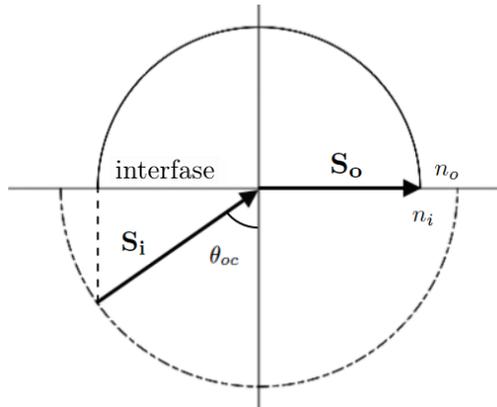


Figura 1.18: Ángulo crítico para el rayo ordinario: dado a que su superficie normal es una esfera, éste no depende mas que de los índices de incidencia y ordinario.

Para que el rayo ordinario se vea frustrado se requiere que $n_i > n_o$, véase la fig.(1.18), dando un ángulo crítico de

$$\theta_{oc} = \arcsin\left(\frac{n_o}{n_i}\right), \quad (1.131)$$

mientras que para el rayo extraordinario la fórmula será bastante distinta por que dependerá de la orientación del cristal. Existen dos casos esencialmente, como muestra la fig.(1.19). Los dos casos se desprenden de la orientación relativa del eje del cristal, al igual de si el cristal es positivo o negativo:

- Caso 1: $\beta\gamma < 0$ y $N < 0$, ó $N > 0$ y $\beta\gamma > 0$

En este caso, el valor máximo para k_y estará dado por k_{max}

$$k_{y_{max}} = \frac{\omega n_e}{c} \frac{\sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{\sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}}, \quad (1.132)$$

por lo que

$$k_{y_{max}} = \frac{\omega n_e}{c} \frac{\sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{\sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} = \frac{\omega n_i \sin \theta_i}{c} = k_{yi}, \quad (1.133)$$

obteniéndose un ángulo crítico

$$\theta_{ec} = \arcsin \left(\frac{n_e \sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{n_i \sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} \right), \quad (1.134)$$

es decir, el índice del medio incidente debe de cumplir que

$$n_i \geq \frac{n_e \sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{\sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}}. \quad (1.135)$$

- Caso 2: $\beta\gamma < 0$ y $N > 0$, ó $N > 0$ y $\beta\gamma < 0$

En este caso, el valor máximo para k_y , que de alguna \mathbf{k}_e que se desplace dentro del material, estará dado por k_{int}

$$k_{y_{int}} = \frac{\omega n_e n_o}{c \sqrt{n_o^2 - N\beta^2}}, \quad (1.136)$$

por lo que

$$k_{y_{int}} = \frac{\omega n_e n_o}{c \sqrt{n_o^2 - N\beta^2}} = \frac{\omega n_i \sin \theta_i}{c} = k_{yi}, \quad (1.137)$$

obteniéndose un ángulo crítico

$$\theta'_{ec} = \arcsin \left(\frac{n_e n_o}{n_i \sqrt{n_o^2 - N\beta^2}} \right), \quad (1.138)$$

requiriendo que el índice del medio inicial cumpla

$$n_i \geq \frac{n_e n_o}{\sqrt{n_o^2 - N\beta^2}}. \quad (1.139)$$

Sin embargo, como se puede ver en la fig.(1.19b) el vector de Poynting del rayo refractado aún no se encuentra totalmente rasante, por lo que existirán aún más soluciones físicamente posibles, aunque su vector de onda sea contraintuitivo. El valor máximo para k_y nuevamente estará dado por $k_{y_{ext}}$, dando el mismo resultado que (1.134)

$$\theta_{ec} = \arcsin \left(\frac{n_e \sqrt{n_o^2 - N\gamma^2}}{n_i \sqrt{n_e^2 + N\alpha^2}} \right). \quad (1.140)$$

Se puede ver fácilmente que estas fórmulas concuerdan entre sí para los casos en los que el eje del cristal es muy cercano a ser ortogonal con la interfaz, $\gamma \approx 1$ tal que $\alpha^2 \approx \beta^2 \approx 0$,

$$\theta_{ec} = \arcsin \left(\frac{n_e}{n_i} \right) \quad (1.141)$$

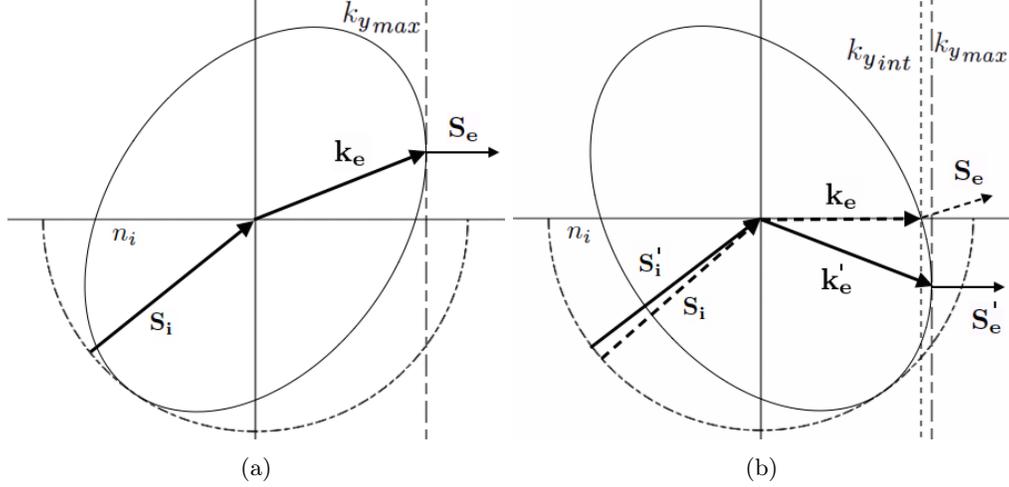


Figura 1.19: (a) $\beta\gamma < 0$ y $N < 0$, ó $N > 0$ y $\beta\gamma > 0$, en este caso $k_{y,max}$ es el valor último para la refracción, con un rayo, i.e. vector de Poynting, rasante. (b) $\beta\gamma < 0$ y $N > 0$, ó $N > 0$ y $\beta\gamma < 0$, en este casl $k_{y,int}$ parecería ser el último valor para un vector de onda, sin embargo, el vector de Poynting (que tiene sentido físico) admite hasta $k_{y,max}$ aunque le correspondan vectores de onda propgándose en sentido sentido contrario a lo que uno esperaría.

o es casi paralelo a ella ya sea próximo al plano de incidencia, $\beta \approx 1$ tal que $\alpha^2 \approx \gamma^2 \approx 0$,

$$\theta_{ec} = \arcsin\left(\frac{n_o}{n_i}\right) \quad (1.142)$$

o siendo casi ortogonal a éste, $\alpha \approx 1$ tal que $\gamma^2 \approx \beta^2 \approx 0$,

$$\theta_{ec} = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_i}\right). \quad (1.143)$$

1.7.3 Reflexión en birrefringentes uniaxiales

Para obtener la reflexión en materiales uniaxiales se debe de proceder análogamente que con la refracción, es decir, se imponen las condiciones a la frontera para los vectores de onda \mathbf{k} sobre los cascarones de la superficie normal, por lo que de igual forma se tendrán en cada reflexión dos rayos reflejados: uno perteneciente a la esfera ordinaria y otro al elipsoide de revolución. Las fórmulas de reflexión quedan iguales a las deducidas en la sección anterior sólo que el índice de refracción del rayo incidente dependerá de si el rayo incidente se propagaba en algún modo ordinario o en algún modo extraordinario. La reflexión estará dada por:

$$\boxed{\begin{aligned} k_{roz} &= -\frac{\omega n_o}{c} \sqrt{1 - \frac{n^2}{n_o^2} \sin^2 \theta_i}, \\ k_{rez} &= \frac{\omega}{c} \frac{N n \beta \gamma - n_o \sqrt{\Gamma n_e^2 + n^2 \sin^2 \theta_i [N \beta^2 - \Gamma]}}{\Gamma}. \end{aligned}} \quad (1.144)$$

Recordando que los índices efectivos de los modos de propagación están dados por (1.74), tenemos que de forma general

$$\begin{aligned} n &= n_o, & \text{si el rayo incidente era ordinario,} \\ n &= \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \phi + n_o^2 \sin^2 \phi}}, & \text{si el rayo incidente era extraordinario,} \end{aligned} \quad (1.145)$$

en donde ϕ es el ángulo del vector de onda con respecto al eje del cristal. Se puede obtener que para las soluciones correspondientes a la esfera ordinaria, un rayo ordinario incidente se reflejará siguiendo

$$\theta_o = \theta_{oro}, \quad (1.146)$$

mientras que para un rayo extraordinario incidente lo hace siguiendo

$$n(\phi) \sin \theta_e = n_o \sin \theta_{ero}, \quad (1.147)$$

en donde θ_o es el ángulo de incidencia de un rayo ordinario, θ_e de uno extraordinario, y θ_{oro} , el ángulo de una reflexión ordinaria de un rayo ordinario, y θ_{ero} , el ángulo de una reflexión ordinaria a partir de un rayo extraordinario incidente. Vemos que sólo la reflexión ordinaria de un rayo propagándose en modo ordinario será reflejado siguiendo la ley de reflexión en materiales isotrópicos, mientras que para el reflejo correspondiente al rayo extraordinario incidente, éste seguirá algo parecido a una ley de Snell.

La imposibilidad de asegurar el índice efectivo con el que se propagan los rayos extraordinarios, sin que se tomen en cuenta su "origen", es decir, la refracción que los generó, evita dar una ley general de reflexión. La fig.(1.20) ilustra la reflexión ya sea de un rayo propagándose en algún modo ordinario, o extraordinario.

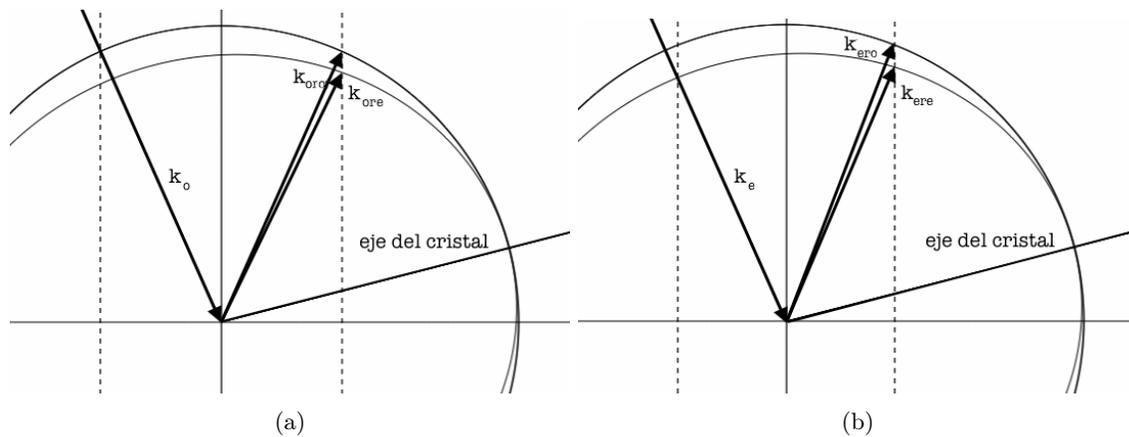


Figura 1.20: Reflexión en un medio uniaxial de una onda propagándose en (a) modo ordinario y (b) modo extraordinario.

De igual forma que en la refracción, podrían existir soluciones para una segunda reflexión extraordinaria, pero nuevamente, por las mismas consideraciones que en la refracción, no tendrían sentido físico las segundas soluciones.

Vector de Poynting: Rayo reflejado

Al igual que para los rayos refractados, la dirección de los rayos reflejados de forma extraordinaria se puede obtener con el gradiente de la curva normal. Por ello la fórmula (1.118) sigue siendo válida y no hay nada particular que agregar a lo discutido anteriormente.

1.7.4 Polarización de las ondas refractadas y reflejadas

La polarización de los dos rayos refractados, ordinario y extraordinario, \mathbf{k}_o y \mathbf{k}_e , puede ser obtenida utilizando las expresiones antes encontradas (1.86) y (1.88), puntualizando que las expresiones están en otro marco de referencia y que éstos deben rotarse al igual que se hizo en la sección anterior con la superficie normal, o

viceversa. Aunque existe una forma más sencilla de determinar la polarización de los rayos refractados o reflejados, que es haciendo uso de los eigenmodos de propagación para una dirección determinada:

1. \mathbf{D}_o , i.e., la polarización correspondiente a la solución del cascarón esférico \mathbf{k}_o (primer eigenmodo de propagación) es normal al plano generado por dicho vector de onda y el eje del cristal, el cual llamamos \mathbf{A} .
2. \mathbf{D}_e , i.e., la polarización correspondiente a la solución del cascarón elipsoidal \mathbf{k}_e (segundo eigenmodo de propagación) es ortogonal al vector de onda y a la polarización que le correspondería para el cascarón esférico (primer eigenmodo).

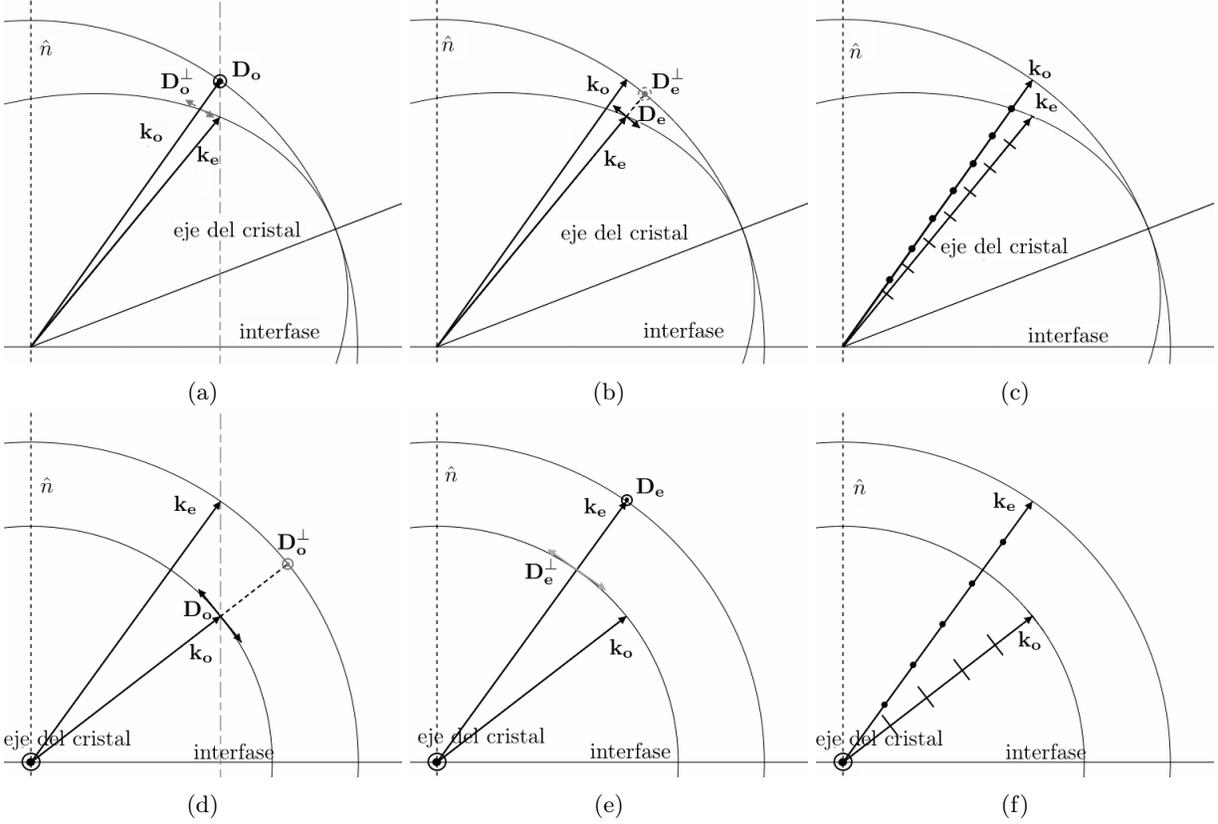


Figura 1.21: Polarización de las ondas ordinaria y extraordinaria, para los casos: (a), (b) y (c) con el eje del cristal en el plano de incidencia y siendo un material uniaxial negativo; y (d), (e) y (f) con el eje del cristal normal a él y siendo un material uniaxial positivo.

Entonces, suponiendo los vectores refractados/reflejados \mathbf{k}_o , \mathbf{k}_e , y un eje del cristal \mathbf{A} , expresados en el sistema de referencia que se prefiera, podemos calcular la dirección de $\hat{\mathbf{D}}_o$, véase las figs. (1.21a) y (1.21d).

$$\hat{\mathbf{D}}_o = \frac{\mathbf{k}_o \times \mathbf{A}}{|\mathbf{k}_o \times \mathbf{A}|}. \quad (1.148)$$

Mientras que para $\hat{\mathbf{D}}_e$ primero se necesita obtener la polarización que le correspondería a su modo ordinario, es decir, al otro eigenmodo en dicha dirección de propagación, ya que es sencillo de obtener, y luego utilizar

la ortogonalidad entre los modos, véase las figs. (1.21b) y (1.21e):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_e &= \mathbf{k}_e \times \mathbf{A} \\ \hat{\mathbf{D}}_e &= \frac{\mathbf{k}_e \times \mathbf{D}'_e}{|\mathbf{k}_e \times \mathbf{D}'_e|} = \frac{\mathbf{k}_e \times (\mathbf{k}_e \times \mathbf{A})}{|\mathbf{k}_e \times (\mathbf{k}_e \times \mathbf{A})|}, \end{aligned} \quad (1.149)$$

que utilizando la identidad vectorial (A.2) puede expresarse como

$$\hat{\mathbf{D}}_e = \frac{(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})\mathbf{k}_e - k_e^2 \mathbf{A}}{k_e \sqrt{k_e^2 - (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})^2}}, \quad (1.150)$$

con esto finalmente se tendrán las polarizaciones de las onda refractadas, véase las figs. (1.21c) y (1.21f). De igual forma, las polarizaciones ordinarias y extraordinarias pueden expresarse en términos de los vectores unitarios de onda \mathbf{g}_e y \mathbf{g}_o , con lo que las expresiones se simplifican:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_o &= \frac{\mathbf{g}_o \times \mathbf{A}}{|\mathbf{g}_o \times \mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{g}_o \times \mathbf{A}}{\sqrt{1 - (\mathbf{g}_o \cdot \mathbf{A})^2}} \\ \hat{\mathbf{D}}_e &= \frac{\mathbf{g}_e \times (\mathbf{g}_e \times \mathbf{A})}{|\mathbf{g}_e \times (\mathbf{g}_e \times \mathbf{A})|} = \frac{(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})\mathbf{g}_e - \mathbf{A}}{\sqrt{1 - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2}}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Un malentendido común es que se cree que los rayos refractados \mathbf{k}_o y \mathbf{k}_e tienen polarizaciones ortogonales siempre, como se maneja en libros clásicos de óptica, como [17], y sin embargo, esto no es cierto, algo curioso tomando en cuenta que hay libros de mineralogía óptica en los que se menciona explícitamente que no lo son, como en [18]. En la sección 1.6.1, al igual que lo que se tiene en la literatura [12, 13], se demostró que, dada **una** dirección para el vector de onda \mathbf{k} , existirán dos modos de propagación, debido a las intersecciones con los dos cascarones (esfera-ordinaria, elipsoide-extraordinaria) de la superficie normal, en dicha dirección con polarizaciones ortogonales, ya sea en \mathbf{E} o \mathbf{D} . Para la refracción/reflexión existen **dos** vectores de onda \mathbf{k}_o y \mathbf{k}_e , y no se puede suponer la ortogonalidad entre las soluciones ordinarias y extraordinarias. La fig. (1.22) ilustra un caso en el que las polarizaciones no son ortogonales, su representación es en 3D ya que hacerlo en el plano de incidencia no es concluyente.

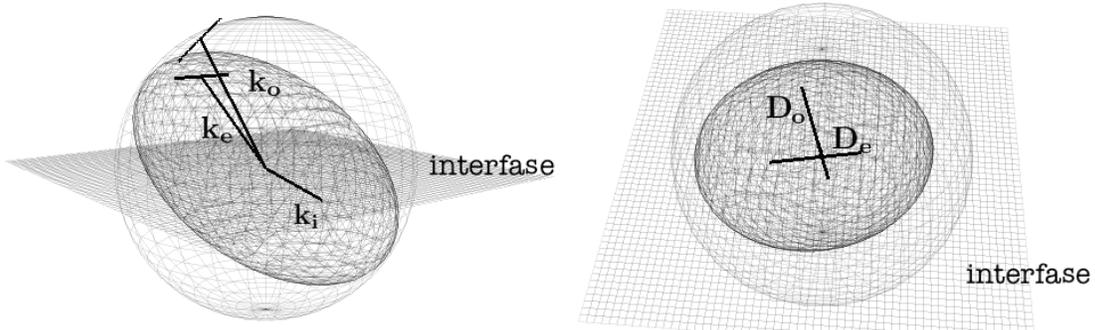


Figura 1.22: Polarizaciones ordinaria, $\hat{\mathbf{D}}_o$, y extraordinaria, $\hat{\mathbf{D}}_e$. En este caso no son ortogonales entre sí, aquí se ilustra un material hipotético con índices $n_o = 1.9$ y $n_e = 1.2$, i.e. uniaxial negativo, con una gran diferencia entre los índices para magnificar la desviación de la ortogonalidad.

Sin embargo, experimentalmente parecen serlo o al menos estar cercanos a una ortogonalidad. Entonces la pregunta es: ¿Existen casos u orientaciones donde sí sean ortogonales? Y si no lo son, ¿qué tan lejanos de la ortogonalidad se encuentran?. Para responder estas preguntas supongamos dos vectores de onda arbitrarios uno viajando en algún modo ordinario y el otro en uno extraordinario, y una dirección del eje del cristal

$$\mathbf{k}_o = (k_{ox}, k_{oy}, k_{oz}), \quad \mathbf{k}_e = (k_{ex}, k_{ey}, k_{ez}), \quad \mathbf{A} = (\alpha, \beta, \gamma),$$

podemos calcular el producto punto entre sus polarizaciones fácilmente,

$$\cos \theta_D = \hat{\mathbf{D}}_o \cdot \hat{\mathbf{D}}_e = \frac{(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})[\mathbf{g}_e \cdot (\mathbf{g}_o \times \mathbf{A})]}{\sqrt{1 - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2} \sqrt{1 - (\mathbf{g}_o \cdot \mathbf{A})^2}} = \frac{(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{g}_e \times \mathbf{g}_o)]}{\sqrt{1 - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2} \sqrt{1 - (\mathbf{g}_o \cdot \mathbf{A})^2}}. \quad (1.152)$$

Si queremos obtener las condiciones para la ortogonalidad entre sus polarizaciones debemos hacer $\hat{\mathbf{D}}_e \cdot \hat{\mathbf{D}}_o = 0$, i.e.

$$(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{g}_e \times \mathbf{g}_o)] = 0. \quad (1.153)$$

La condición, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{g}_e \times \mathbf{g}_o) = 0$, implica que el eje del cristal debe de ser coplanar con los dos vectores de onda, y la condición, $\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A} = 0$, que el eje del cristal debe de ser ortogonal al vector de onda propagándose en el modo extraordinario. Por ello las figuras de (1.21) muestran modos ortogonales de polarización, ya que cumplen con una de las condiciones antes mencionadas, y en general, los casos que son fáciles de representar y que suelen estar ilustrados en los libros cumplen alguna de igual forma.

Aún falta mostrar que las polarizaciones del campo eléctrico tampoco son siempre ortogonales. Para ello necesitamos recordar que $\hat{\mathbf{D}}_o \parallel \hat{\mathbf{E}}_o$ ya que $\hat{\mathbf{A}}_o$ (la solución correspondiente a la esfera) es un eigenvector del tensor dieléctrico, por lo que $\hat{\mathbf{D}}_e \cdot \hat{\mathbf{D}}_o = \hat{\mathbf{D}}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_o$ y

$$\hat{\mathbf{D}}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_e = \frac{\hat{\mathbf{E}}_o \cdot (\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}_e)}{|\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}_e|} = \frac{(\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{E}}_o) \cdot \hat{\mathbf{D}}_e}{|\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}_e|} = \frac{\hat{\mathbf{E}}_o \cdot \hat{\mathbf{D}}_e}{\epsilon_o n_o^2 |\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}_e|}, \quad (1.154)$$

donde se utiliza que el tensor dieléctrico tiene la propiedad¹⁴, véase (1.58)

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{E} &= \epsilon_o n_e^2 \mathbf{E}, & \mathbf{E} &\parallel \mathbf{A}, \\ \epsilon \mathbf{E} &= \epsilon_o n_o^2 \mathbf{E}, & \mathbf{E} &\perp \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Definiendo θ_D como el ángulo entre las direcciones de polarización del vector de desplazamiento eléctrico de ambos vectores de onda, y, de forma análoga, θ_E con respecto al campo eléctrico, i.e. $\cos \theta_D = \hat{\mathbf{D}}_o \cdot \hat{\mathbf{D}}_e$ y $\cos \theta_E = \hat{\mathbf{E}}_o \cdot \hat{\mathbf{E}}_e$, llegamos a la relación

$$\cos \theta_E = \frac{\cos \theta_D}{(\epsilon_o n_o^2) |\epsilon^{-1} \hat{\mathbf{D}}_2|}. \quad (1.156)$$

Esta relación es muy interesante ya que su dependencia en los índices n_o y n_e , en particular de la relación entre ellos, si reescribimos la expresión como

$$\cos \theta_E = \frac{\cos \theta_D}{\sqrt{\frac{n_e^4}{n_o^4} D_{e\parallel}^2 + D_{e\perp}^2}}, \quad (1.157)$$

dónde $D_{e\parallel}$ es la componente paralela al eje del cristal y $D_{e\perp}$ la perpendicular a este, nos indica que

$$\begin{aligned} \cos \theta_D &\geq \cos \theta_E, & \text{cuando } n_e < n_o \\ \cos \theta_D &\leq \cos \theta_E, & \text{cuando } n_e > n_o, \end{aligned} \quad (1.158)$$

por lo que cristales negativos ($n_e < n_o$) y cristales positivos ($n_e > n_o$) tendrán comportamientos distintos: en los primeros las polarizaciones del campo eléctrico están más cercanas a la ortogonalidad, mientras que en los segundos lo están las polarizaciones del campo de desplazamiento eléctrico. Sin embargo, aún la relación entre los ángulos puede desarrollarse más utilizando (1.151), obteniendo

$$\cos \theta_E = \frac{\cos \theta_D}{\sqrt{(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2 + \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^4 (1 - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2)}}. \quad (1.159)$$

¹⁴Esto se debe a que la permitividad eléctrica no es constante en todas las direcciones, y justo en la dirección del cristal la permitividad eléctrica tiene uno de los valores extremales, mientras que en las direcciones ortogonales el valor extremal restante.

Todo lo anterior ha sido obtenido para dos vectores de onda arbitrarios, hace falta considerar que estos provienen de una refracción/reflexión y que no son tan arbitrarios. Las condiciones de frontera dictan que dado un vector de onda incidente $\mathbf{k}_i = (0, k_y, k_z)$, se tendrán un vector de onda ordinario, $\mathbf{k}_o = (0, k_y, k_{oz})$, y uno extraordinario $\mathbf{k}_e = (0, k_y, k_{ez})$, en el sistema de referencia que privilegia al plano de incidencia. Sustituyendo en la parte superior de la polarización extraordinaria dada en (1.151) se tendrá

$$(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{g}_e \times \mathbf{g}_o)] = \frac{k_y(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})(k_{oz} - k_{ez})}{k_o k_e} \quad (1.160)$$

con lo que la condición para la ortogonalidad se vuelve

$$\alpha k_y(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A})(k_{oz} - k_{ez}) = 0. \quad (1.161)$$

Entonces existirán 4 casos en los que las polarizaciones de los rayos ordinarios y extraordinarios serán ortogonales:

1. $\alpha = 0$, el eje del cristal yaciendo en el plano de incidencia
2. $k_y = 0$, incidencia normal
3. $k_{oz} = k_{ez}$, los vectores de onda ordinario y extraordinario iguales, es decir, propagándose paralelos al eje del cristal (que sería un subcaso de la primer condición)
4. $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A} = 0$, el eje del cristal ortogonal al vector de onda extraordinario

con lo que realmente no se gana nada más allá de lo encontrado anteriormente, i.e., a que el eje del cristal yazca al plano de incidencia o que sea ortogonal al vector de onda extraordinario. Nuevamente se puede ver que los casos sencillos de representar gráficamente suelen cumplir alguna de estas condiciones, por lo que se suele creer erróneamente que siempre son ortogonales las polarizaciones, además de que muchas construcciones experimentales suelen cumplir alguna de ellas, como [19]. Es importante hacer hincapié en que las condiciones para la ortogonalidad entre las polarizaciones ordinaria y extraordinaria son las mismas que para que el rayo extraordinario se mantenga en el plano de incidencia.

Un análisis más profundo a partir de (1.151) requiere que se sustituyan los términos k_{ez} y k_{oz} de (1.112) y (1.107) respectivamente para rayos refractados, y de (1.144) para reflejados. Haciendo esto deja al ángulo θ_D dependiendo de muchas variables y una solución analítica, así como su comportamiento cualitativo no puede encontrarse de forma sencilla. Sin embargo, se puede concluir algo a partir del término $k_{oz} - k_{ez}$, ya que depende de la diferencia entre los cascarones de la superficie normal (la esfera y el elipsoide de revolución). Debido a que los índices ordinario y extraordinario no difieren mucho entre sí (e.g. cuarzo tiene una diferencia de $\Delta n \approx 0.009$), la excentricidad del elipsoide será cercana a cero, por lo que fijando una k_y obliga a que $k_{oz} - k_{ez} \ll 1$, lo que explicaría porque se ha mantenido este malentendido e implicaría que la ortogonalidad sí es una suposición práctica. En la sección 4.1 se hace unas simulaciones numéricas de dos casos particulares en los que se muestra la desviación de la originalidad de los rayos refractados para el cuarzo y la calcita.

Finalmente, para hacer un trazo de rayos con polarización de forma completa faltaría calcular los coeficientes de Fresnel para las refracciones y reflexiones. El artículo [6] discute brevemente como calcularlos numéricamente.

1.8 Aproximación Paraxial

La aproximación paraxial es muy útil ya que puede ser utilizada para obtener los focos de una lente y describir a grandes rasgos el comportamiento de un un sistema óptico. La aproximación paraxial es únicamente válida para rayos cuyo ángulo de incidencia, θ_i , cumpla $\theta_i \ll 1$, tal que $\sin \theta_i \approx \theta_i$ y $\theta_i^2 \approx 0$. Entonces los rayos incidentes serán de la forma

$$\mathbf{g}_i = (0, \theta_i, 1), \quad (1.162)$$

por lo que los rayos ordinarios refractados serán

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{g}_o = \left(0, \frac{n_i}{n_o} \theta_i, 1\right). \quad (1.163)$$

En cuanto al vector de onda extraordinario tenemos que la fórmula (1.112) se reduce a

$$k_{ez} \approx \frac{\omega}{c} \frac{n_o n_e \sqrt{\Gamma} + N n_i \beta \gamma \theta_i}{\Gamma}, \quad (1.164)$$

dónde Γ se definió en (1.110). Se puede ver que la componente normal del vector de onda depende de dos términos, el primero que sólo toma en cuenta la orientación del eje del cristal, así como los índices ordinarios y extraordinarios, y el segundo que también considera el ángulo de incidencia. Con ello se puede concluir que aún bajo la aproximación paraxial, el índice de refracción efectivo del rayo extraordinario no sólo dependerá del eje del cristal y de n_e y n_o , sino también del ángulo de incidencia,

$$n(\theta_i) = \frac{\sqrt{n_o^2 n_e^2 \Gamma + 2N n_i n_o n_e \beta \gamma \theta_i \sqrt{\Gamma}}}{\Gamma}, \quad (1.165)$$

que puede ser escrito de una forma más sugerente como

$$n(\theta_i) = \frac{n_o n_e}{\sqrt{\Gamma}} \sqrt{1 + \frac{2N n_i \beta \gamma \theta_i}{n_o n_e \sqrt{\Gamma}}}. \quad (1.166)$$

De aquí se puede ver que el primer término, que depende únicamente de la proyección del eje del cristal sobre la normal en el punto de incidencia y de los índices de refracción, es el que domina¹⁵, ya que el primer término depende de variables que son todas menores o cercanas a uno, e.g. $\beta \gamma \leq 1/2$, $N < 1$, $\theta_i \ll 1$, etc. Si uno normaliza el vector de onda extraordinario para enfocarse únicamente en la dirección de éste, es fácil demostrar que se obtiene

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \theta_i \Gamma}{\sqrt{n_o^2 n_e^2 \Gamma + 2N n_o n_e n_i \beta \gamma \theta_i \sqrt{\Gamma}}}, 1\right). \quad (1.167)$$

Incluso se podría aún simplificar más la k_{ez} ignorando su primer término

$$k_{ez} \approx \frac{\omega}{c} \frac{n_o n_e}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{\omega}{c} \frac{n_o n_e}{\sqrt{n_o^2 - N \gamma^2}}, \quad (1.168)$$

y haciendo evidente su dependencia principal en γ (la proyección del eje del cristal con respecto a la normal), con lo que la dirección del vector de onda queda expresada como

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \sqrt{\Gamma}}{n_o n_e} \theta_i, 1\right). \quad (1.169)$$

Esta expresión extra no es totalmente arbitraria, ya que con ella se llega a las ecuaciones deducidas por el modelo de Huygens bajo el régimen paraxial, además de que numéricamente lleva a errores menores al 0.25% para la calcirita, y al 0.015% para el cuarzo dentro del régimen paraxial ($\theta_i < 2^\circ$), esto se demuestra en la sección 4.2. Con la nueva aproximación, el índice efectivo queda definido únicamente por la orientación del cristal,

$$n = \frac{n_o n_e}{\sqrt{\Gamma}}. \quad (1.170)$$

¹⁵De hecho la dependencia en la proyección del eje del cristal con respecto a la normal en el punto de incidencia para la refracción extraordinaria, tanto del vector de onda como del rayo, es determinante. En las secciones siguientes quedará claro esto en las lentes plano convexas en las que existe un astigmatismo dependiente de su orientación, que es reflejo de la normal fija para la cara plana y variable para la convexa.

En cuanto al vector de Poynting, i.e. el rayo, se puede ya dar una fórmula analítica más explícita a partir de la aproximación paraxial

$$\mathbf{S}_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} = \frac{1}{\Xi} \left\{ n_o^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\Gamma} n_i \theta_i \\ n_o n_e \end{pmatrix} + (\sqrt{\Gamma} \beta n_i \theta_i + \gamma n_o n_e) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (1.171)$$

dónde se definió

$$\Xi = \sqrt{n_o^6 n_e^2 - (n_o^4 - n_e^4) (\sqrt{\Gamma} \beta n_i \theta_i + \gamma n_o n_e)^2}. \quad (1.172)$$

Se puede ver de forma analítica que el rayo extraordinario bajo la aproximación paraxial tampoco yacerá siempre en el plano de incidencia .

Se analizarán con algo de detenimiento dos casos específicos fijando el eje del cristal, \mathbf{A} , para compararlos con las otras fórmulas de refracción obtenidas mediante otros métodos, como las obtenidas por Avendaño y Rosete en [15].

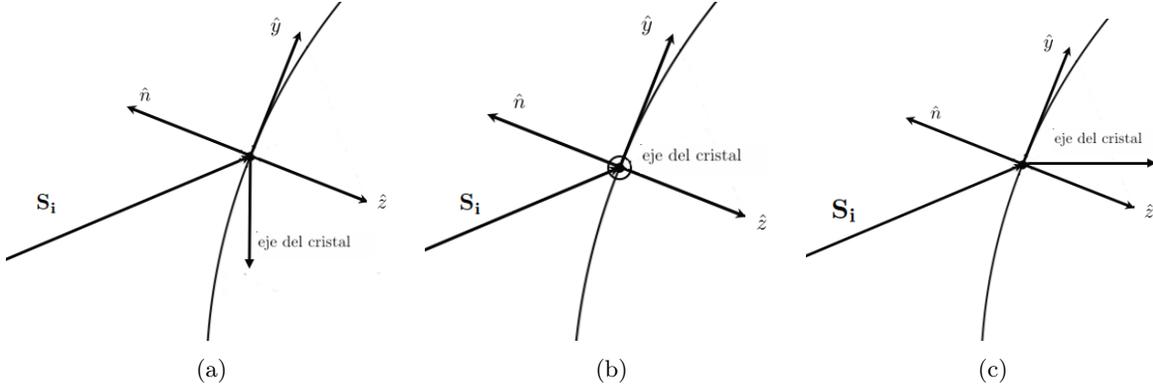


Figura 1.23: De izquierda a derecha: ejemplo de un eje del cristal casi ortogonal a la normal pero yaciendo en el plano de incidencia, un eje del cristal casi ortogonal al plano de incidencia, y un eje del cristal cercano a ser paralelo a la normal.

1.8.1 Eje del cristal ortogonal a la normal o cercano a la ortogonalidad

Si fijamos $\gamma \ll 1$, tal que $\gamma^2 \approx 0$, que para un lente significaría que el eje del cristal es (casi) ortogonal a la normal, obtenemos que $\Gamma \approx n_o$ con lo que se llega a algo similar a la ley de Snell

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \theta_i}{n_e}, 1 \right) \quad (1.173)$$

y en particular para la componente en z del vector de onda

$$k_{ez} \approx \frac{\omega n_e}{c}. \quad (1.174)$$

En cuanto al vector de Poynting, que localmente nos dice la dirección del rayo, obtenemos después de un poco de álgebra

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{N(\beta n_i \theta_i + \gamma n_e) \alpha}{n_o^2 n_e} \\ \theta_i n_i \left[\frac{n_o^2 - N \beta^2}{n_o^2 n_e} \right] - \frac{N \gamma \beta}{n_o^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.175)$$

Esta fórmula concuerda con [15] para lentes esféricas birrefringentes en los dos subcasos particulares, véase la fig.(1.23), en los que el eje del cristal, \mathbf{A} , yace en el plano de incidencia, $\beta \approx 1$ tal que $\alpha\gamma \approx 0$ y $\alpha\theta_i \approx 0$,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i n_e}{n_o^2} \theta_i - \frac{\gamma N}{n_o^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.176)$$

o es casi perpendicular a él, $\alpha \approx 1$ tal que $\beta\gamma \approx 0$ y $\beta^2 \approx 0$,

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{N\gamma}{n_o^2} \\ \frac{n_i}{n_e} \theta_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.177)$$

que en el caso límite en el que $\alpha = 1$, se convierte en

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i}{n_e} \theta_i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.178)$$

1.8.2 Eje del cristal paralelo a la normal o cercano al paralelismo

Si se fija $\gamma \approx 1$, i.e. con el eje del cristal paralelo a la normal o casi, se obtiene que $\Gamma \approx n_e^2$, por lo que el vector de onda extraordinario se refracta igual que el ordinario, ya que

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \theta_i}{n_o}, 1\right) \quad (1.179)$$

y en la componente en z del vector de onda

$$k_{ez} \approx \frac{\omega n_o}{c}. \quad (1.180)$$

El rayo estará expresado por

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{N\alpha}{n_e^2} \\ \frac{n_i n_o}{n_e^2} \theta_i - \frac{N\beta}{n_e^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.181)$$

que para el caso en el que es totalmente paralelo al eje óptico, $\alpha = 0$, se recupera el resultado de [15] para lentes esféricas, véase fig.(1.23).

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i n_o}{n_e^2} \theta_i - \frac{N\beta}{n_e^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.182)$$

1.8.3 Polarización bajo la aproximación paraxial

Usando (1.151) se pueden obtener las polarizaciones del campo de desplazamiento eléctrico, \mathbf{D} , para el rayo ordinario

$$\hat{\mathbf{D}}_o = \frac{(n_i \theta_i \gamma - \beta n_o, \alpha n_o, -\alpha n_i \theta_i)}{\sqrt{n_o(1 - \gamma^2) - 2\beta\gamma n_i \theta_i}}, \quad (1.183)$$

y del rayo extraordinario

$$\hat{\mathbf{D}}_e = \frac{(-\alpha n_o n_e, \sqrt{\Gamma} \gamma n_i \theta_i - \beta n_o n_e, \beta \sqrt{\Gamma} n_i \theta_i)}{\sqrt{n_o n_e [n_o n_e (1 - \gamma^2) - 2\beta \gamma n_i \theta_i \sqrt{\Gamma}]}}, \quad (1.184)$$

por lo que la expresión para el ángulo entre ellos (1.152) se convierte en

$$\cos \theta_D = \frac{\alpha \gamma n_i \theta_i (\sqrt{\Gamma} - n_e)}{\sqrt{n_o n_e (1 - \gamma^2)} \sqrt{(1 - \gamma^2) n_o n_e - 2\beta \gamma n_i \theta_i (n_e + \sqrt{\Gamma})}}. \quad (1.185)$$

Esto implica que aún dentro de la aproximación paraxial la ortogonalidad entre las polarizaiones de los rayos refractados no se mantiene, aunque la desviación será chica debido a su dependencia con θ_i .

Analizando en detalle (1.185), se puede ver que existe una mayor dependencia en la desviación de la ortogonalidad con respecto a γ que con respecto a β , por lo que extrapolando la aproximación paraxial, esperamos que un eje del cristal yaciendo en el plano tangente a la interfase en el punto de incidencia genere rayos con una polarización más cercana a la ortogonalidad a un eje que no yazca en él, comportamiento que se verá en los ejemplos numéricos de la sección 4.1. Aquí se puede apreciar la utilidad de la aproximación paraxial, ya que en (1.185) se muestra explícita y analíticamente la mayor dependencia en γ .

Capítulo 2

Principio y Modelo de Huygens para la birrefringencia en materiales uniaxiales

2.1 Principio de Huygens

El principio de Huygens nos dice que dado un frente de onda cualquiera en un tiempo t , podemos ver a todos los puntos que lo conforman como fuentes puntuales de ondas secundarias esféricas, *wavelets*, o en español ondeletas u onditas, que emiten en la misma frecuencia, y que el nuevo frente de onda en un tiempo t' será la envolvente de todas las ondas esféricas secundarias, véase la fig.(2.1).

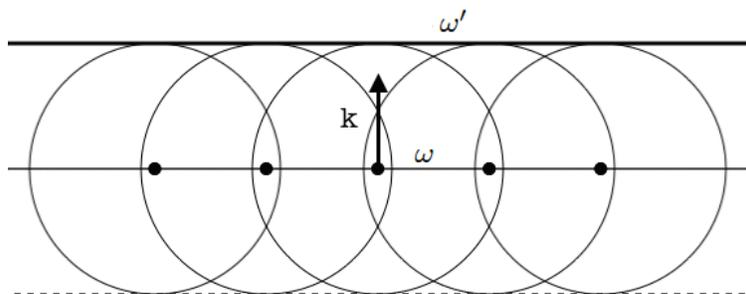


Figura 2.1: Principio de Huygens: dado un frente de onda ω a un tiempo t , el frente de onda a un tiempo t' , que llamaremos ω' , será la envolvente a todas las ondas esféricas secundarias emitidas desde los puntos del frente de onda original ω . La línea punteada es la otra posible envolvente, pero que se descarta por carecer de sentido físico.

Este principio es de mucha utilidad ya que nos permite propagar frentes de onda, ya sea a través de algún medio isotrópico o interfase. Su extensión, el principio de Huygens-Fresnel, permite no sólo reconstruir el frente de onda sino recuperar las amplitudes de dicho frente de onda, por lo que es clave en la teoría escalar de la difracción.

2.2 Sistema de referencia

En este capítulo consideraremos el sistema coordenado tal que nuestra dirección z sea paralela a la normal en el punto de incidencia, y paralela a la interfase pero yaciendo en el plano de incidencia, y x ortogonal al plano de incidencia, véase fig.(2.2a). En caso de que la incidencia sea normal, se escogerá como plano YZ al plano que contenga al rayo incidente y al eje del cristal, véase fig.(2.2b). En éste trabajo se tomará de igual forma la convención de escoger las direcciones y y z tales que su producto interno con el rayo incidente, \mathbf{S}_i , sea positivo (por las gráficas en particular), i.e.

$$\hat{z} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i}{|\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i|} \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{y} = \frac{\mathbf{S}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i)\hat{z}}{|\mathbf{S}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i)\hat{z}|}, \quad \hat{x} = \hat{y} \times \hat{z}. \quad (2.1)$$

Hay que puntualizar que utilizaremos vectores normalizados ya que sólo nos interesan las direcciones, por lo que no habrá que confundir \mathbf{S}_i con el vector de Poynting, a pesar de que estos son paralelos localmente. Para distinguir estas coordenadas normalizadas de rayos de las de posición, utilizaremos las variables ξ , η y ζ , para x , y y z respectivamente. Con esto se consigue el rayo incidente, \mathbf{S}_i , sea de la forma

$$\mathbf{S}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = (0, \eta_i, \zeta_i). \quad (2.2)$$

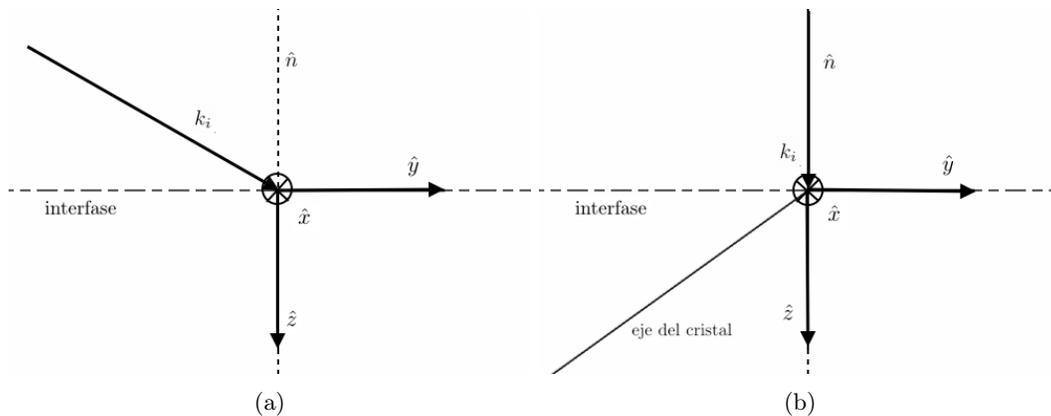


Figura 2.2: Sistemas coordenados utilizados para realizar la refracción, en (a) se muestra el general salvo en los casos de incidencia normal, en los que se opta por escoger el plano que contiene al eje del cristal (b).

2.3 Materiales isotrópicos

Que el principio de Huygens para materiales isotrópicos utilice ondas esféricas como ondas secundarias no es fortuito, ya que la isotropía se ve reflejada en las mismas ondas esféricas: en un medio isotrópico la velocidad de propagación debe ser la misma sin importar la dirección de propagación, recuérdese (1.70). Como sabemos que la velocidad de propagación es inversamente proporcional al índice de refracción, el mismo índice tampoco será dependiente de la dirección.

El principio de Huygens recupera la llamada "ley de reflexión" y la ley de Snell para fronteras entre materiales isotrópicos. A continuación se mostrará la deducción de estas leyes básicas de la óptica geométrica a partir de este principio.

2.3.1 Reflexión

Consideremos una interfase, suficientemente suave como para que en una cierta región pueda ser aproximada por un plano, entre dos medios isotrópicos con índices de refracción n_i y n_o , y un frente de onda plano ω_i incidente a un cierto ángulo θ_i y cuyo primer punto de contacto con la interfase es $\mathbf{H} = (h, k, 0)$, en donde la interfase está en $z = 0$ (aproximando la superficie localmente con un plano), y h, k son las coordenadas locales en ella. Después de un cierto tiempo t el frente de onda ω_t se ha desplazado y el punto de contacto con la frontera ha cambiado, y para simplificar cálculos¹ escogeremos que éste sea el origen de coordenadas \mathbf{O} , véase la fig.(2.3).

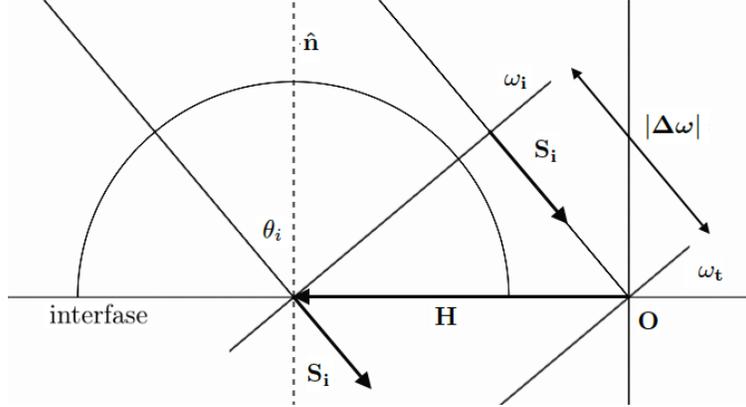


Figura 2.3: Dado un punto $\mathbf{H} = (h, k, 0)$ en la interfase, se escoge la familia de esferas tal que el último punto en contacto del frente de onda incidente coincida con el origen.

Nombrando la dirección de propagación incidente, que es normal a los frentes de onda ω_i y ω_t , como $\mathbf{S}_i = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, el vector de desplazamiento entre ambos frentes de onda $\Delta\omega$ estará dado por

$$\Delta\omega = -(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)\mathbf{S}_i, \quad (2.3)$$

y como la velocidad de propagación es $v_i = \frac{c}{n_i}$

$$v_i t = |\Delta\omega| = \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i, \quad (2.4)$$

por lo que el tiempo que requirió el frente de onda para propagarse hasta \mathbf{O} es

$$t = \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i}{v_i}, \quad (2.5)$$

que es el mismo tiempo que tuvo la onda secundaria proveniente del punto en \mathbf{H} para propagarse. Como estamos estudiando la reflexión, la propagación de la onda secundaria es en el mismo medio que en el incidente, por lo que su velocidad de propagación es la misma. Entonces, esto define un tiempo para cada punto dado por alguna \mathbf{H} y por consiguiente una familia de esferas centradas en $\mathbf{H} = (h, k, 0)$, dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(h, k) &:= (\mathbf{P}_r - \mathbf{H})^2 - \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)^2}{v_i^2} v_i^2 = 0 \\ &(\mathbf{P}_r - \mathbf{H})^2 - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

dónde $\mathbf{P}_r = (x_r, y_r, z_r)$ son los puntos en las wavelets esféricas. Como queremos conseguir la envolvente de dicha familia de curvas, lo que debemos realizar es derivar con respecto a los parámetros h y k , igualar a

¹La simplificación, que no es muy grande, consiste en que si el último punto de contacto es el origen, el frente de onda reflejado resultante será un plano que cruce por el origen, en lugar de uno desplazado.

cero y resolver el sistema de ecuaciones resultantes, véase el apéndice C, i.e.

$$\frac{\partial \mathcal{C}_r}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{C}_r}{\partial k} = 0, \quad \mathcal{C}_r = 0. \quad (2.7)$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_r}{\partial h} = 0 &\implies (x_r - h) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)\xi_i = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{C}_r}{\partial k} = 0 &\implies (y_r - k) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)\eta_i = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

el cual, dado nuestro sistema coordenado en el que $\xi_i = 0$, que implica que $\zeta_i^2 = 1 - \eta_i^2$, puede ser expresado como

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \xi_i^2 & -\eta_i \xi_i \\ -\eta_i \xi_i & 1 - \eta_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

de donde los parámetros h y k quedan en términos de x_r y y_r

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta_i^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Sustituyendo los parámetros encontrados en (2.6) obtenemos después de un poco de álgebra

$$-\zeta_i^2 z_r^2 + \eta_i^2 y_r^2 = 0, \quad (2.11)$$

que puede ser factorizada como

$$(-\zeta_i z_r + \eta_i y_r)(\zeta_i z_r + \eta_i y_r) = 0. \quad (2.12)$$

Estas son la ecuaciones de dos planos con normales $\mathbf{S}_r = (0, \eta_i, -\zeta_i)$ y $\mathbf{S}_r' = (0, \eta_i, \zeta_i)$, que corresponderían a dos frentes de onda planos, y ya que sólo el primero tiene sentido físico (debido a que es una reflexión), descartamos el segundo y tenemos que la dirección del frente reflejado será

$$\mathbf{S}_r = (0, \eta_i, -\zeta_i), \quad (2.13)$$

recuperando la ley de reflexión ya conocida, véase fig.(2.5).

2.3.2 Refracción

Consideremos ahora el mismo caso de incidencia, véase la fig.(2.4), sólo que nos enfocaremos en el frente de onda transmitido en el nuevo medio, es decir, en las wavelets propagándose en el medio con índice n_o . En la sección pasada habíamos obtenido que el tiempo de propagación, t , de las ondas secundarias esféricas, wavelets, centradas en $\mathbf{H} = (h, k, 0)$ esta dado por (2.5). De esta forma la familia de esferas centradas en $(h, k, 0)$ propagándose en el segundo medio con velocidad v_o está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_o(h, k) &:= (\mathbf{P}_r - \mathbf{H})^2 - \frac{(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)^2}{v_i^2} v_o^2 = 0 \\ (\mathbf{P}_r - \mathbf{H})^2 &- (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i)^2 \frac{n_i^2}{n_o^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si queremos obtener la envolvente, i.e. el frente de onda refractado, debemos proceder análogamente a la sección pasada utilizando las condiciones (2.7), obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_o}{\partial h} = 0 &\implies (x_r - h) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i) \frac{n_i^2}{n_o^2} \xi_i = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{C}_o}{\partial k} = 0 &\implies (y_r - k) + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_i) \frac{n_i^2}{n_o^2} \eta_i = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

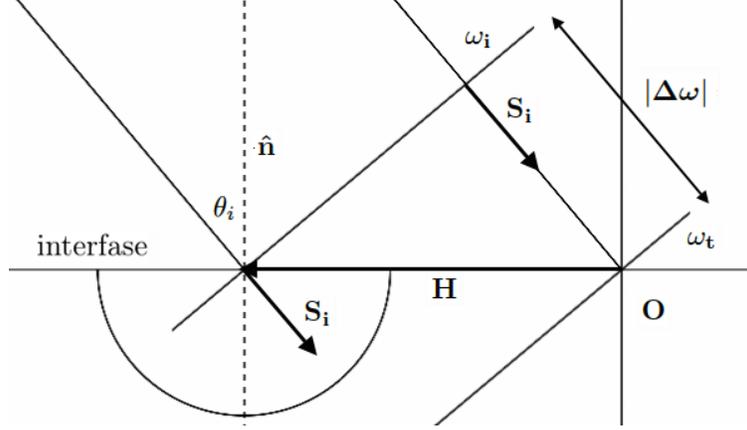


Figura 2.4: Dado un punto $\mathbf{H} = (h, k, 0)$ en la interfase, se escoge la familia de esferas tal el último punto en contacto del frente de onda incidente coincide con el origen.

que al utilizar $\xi_i = 0$ el sistema de ecuaciones puede ser expresado como

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

De esta última relación podemos escribir los parámetros h y k en términos de las coordenadas de las wavelets,

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

que al sustituirlas en (2.14) y realizar un poco de álgebra llevan a

$$\left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2 y_o^2 - \left(1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2\right) z_o^2 = 0, \quad (2.18)$$

factorizándose en

$$\left(y_o \frac{n_i \eta_i}{n_o} + z_o \sqrt{1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2}\right) \left(y_o \frac{n_i \eta_i}{n_o} - z_o \sqrt{1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2}\right) = 0, \quad (2.19)$$

pero ya que el segundo carece de sentido físico por lo que sólo conservamos el primero. Por lo tanto, la dirección de la onda refractada es

$$\mathbf{S}_o = \left(0, \frac{n_i}{n_o} \eta_i, \sqrt{1 - \frac{n_i^2}{n_o^2} \eta_i^2}\right), \quad (2.20)$$

que es sencillamente la ley de Snell, véase la fig.(2.5).

2.4 Materiales anisotrópicos uniaxiales

Utilizar esferas para el principio de Huygens es reflejo de la isotropía de los materiales. Sin embargo, cuando los materiales son anisotrópicos, las esferas deberían de ser cambiadas por algo que refleje la anisotropía. En

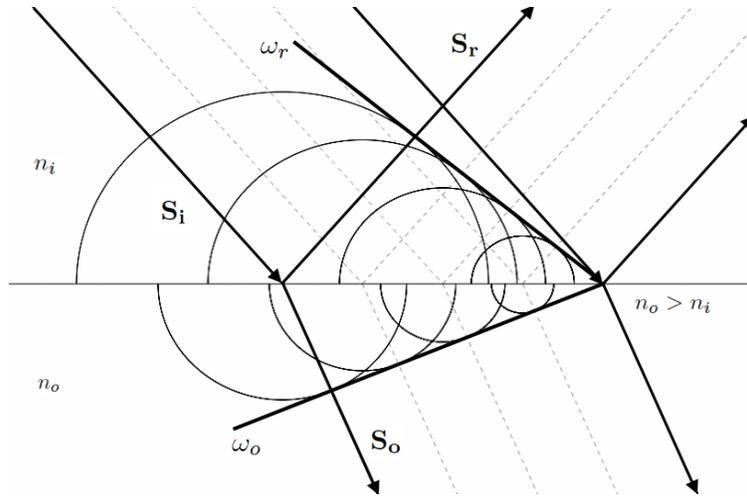


Figura 2.5: Dado un punto $\mathbf{H} = (h, k, 0)$ en la interfase, se escoge la familia de esferas tal que el último punto en contacto del frente de onda incidente coincida con el origen.

el capítulo anterior se vio que para materiales uniaxiales se tienen dos rayos refractados y dos rayos reflejados (por cada rayo incidente), unos llamados ordinarios que muestran un carácter isotrópico en su velocidad de fase, y otros llamados extraordinarios que no tienen una velocidad de fase (o índice de refracción) constante y que varía según la dirección. Por lo anterior, tendría sentido seguir utilizando el principio de Huygens original para recuperar la refracción y reflexión ordinaria, mientras que para las extraordinarias habría que cambiarlo. Recordando como las velocidades de fase estaban dadas en materiales uniaxiales (1.72),

$$v_o = \frac{c}{n_o}, \quad v_e = \sqrt{v_o^2 \cos^2 \theta + v_e^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.21)$$

con θ el ángulo del vector de onda extraordinario con respecto al eje del cristal, podemos ver que la velocidad ordinaria consiste en una esfera mientras que la velocidad de fase extraordinaria consiste en un elipsoide de revolución cuyo eje de revolución es el eje del cristal, véase la fig.(2.6). Esto último será el fundamento para

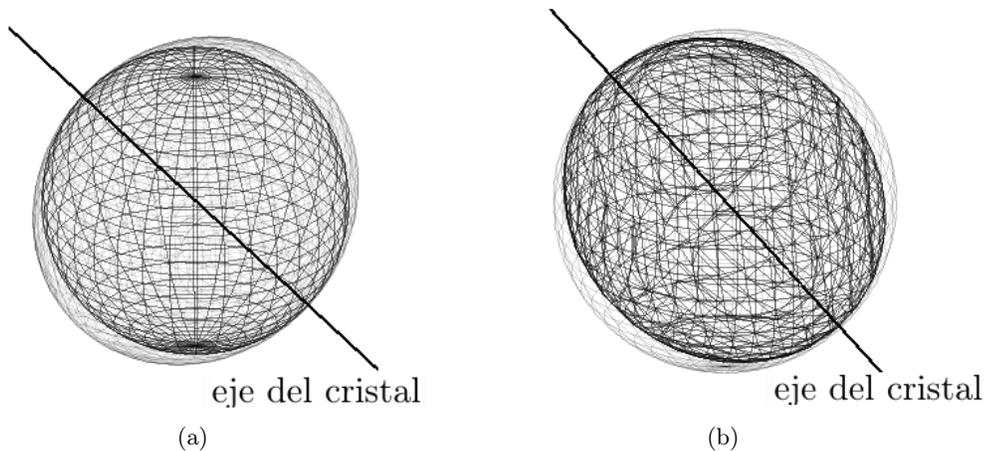


Figura 2.6: Se muestra las velocidades de fase para los modos ordinarios y extraordinarios, tanto para (a) materiales negativos, como para (b) positivos. Vemos que se invierte el comportamiento de los cascarones de la superficie normal.

el modelo de Huygens para la birrefringencia en materiales uniaxiales: utilizar ondas secundarias esféricas sólo para los rayos ordinarios, y elipsoides de revolución para los extraordinarios.

El modelo de Huygens para la birrefringencia consistirá en el principio de Huygens original con un cambio importante en las wavelets: dado un frente de onda cualquiera, que llamaremos ω , en un tiempo t , en un material uniaxial con índices ordinario n_o y extraordinario n_e , podemos ver a todos los puntos que lo conforman como fuentes puntuales de ondas secundarias en la misma frecuencia. Dichas ondas secundarias o wavelets consistirán en ondas esféricas con velocidad de propagación $v_o = c/n_o$ y en elipsoides de revolución cuyo eje de simetría sea en la dirección del eje del cristal, \mathbf{A} , y con velocidades principales $v_o = c/n_o$ a lo largo del eje del cristal y $v_e = c/n_e$ en cualquier dirección ortogonal. La envolvente de las ondas esféricas será el frente ordinario, ω_o , y la envolvente de los elipsoides el frente extraordinario, ω_e . Véase la fig. (2.7).

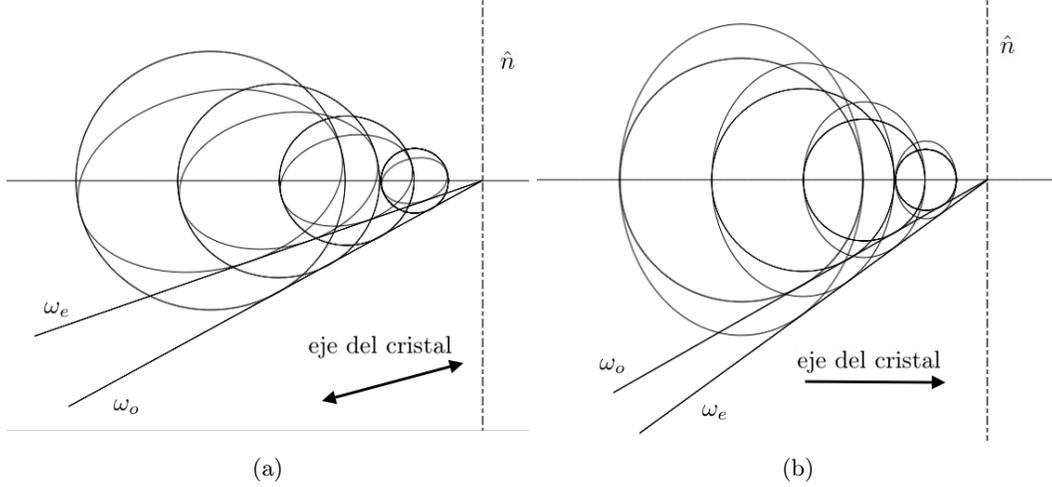


Figura 2.7: Modelo de Huygens para materiales anisotrópicos uniaxiales. Para el frente de onda ordinario se utilizan esferas (círculos en el plano de incidencia), y para el extraordinario elipsoides (elipses en dicho plano): (a) cristal positivo y (b) cristal negativo.

El rayo extraordinario \mathbf{S}_e , que localmente es en la dirección del vector de Poynting, será el vector del centro del elipsoide al punto de tangencia con el frente de onda, y que de forma general no será paralelo a la dirección del vector de onda $\hat{\mathbf{k}}_e$. Para el rayo ordinario, \mathbf{S}_o , éste coincidirá con la dirección del vector de onda ordinario $\hat{\mathbf{k}}_o$. Véase la fig.(2.8) en el que se ejemplifica una refracción.

Este modelo había sido utilizado únicamente de forma geométrica y sus ecuaciones generales se deben al trabajo de Avendaño y Stavroudis, el cual puede revisarse en [3, 4]. En este trabajo se realizará una deducción de las fórmulas basada en sus ecuaciones generales, pero se hará uso del sistema de referencia escogido, en particular de que $\xi_i = 0$, para simplificar el álgebra y tener mayor claridad.

2.4.1 Refracción de entrada: ordinario

Para realizar la refracción utilizaremos la ley de Snell para refractar al rayo ordinario, con lo que obtenemos la familia de esferas que le corresponde, y a partir de ello obtener la familia de elipsoides al saber que estos se han propagado el mismo "tiempo" y que son tangentes entre sí ambas familias a lo largo de la dirección del eje del cristal.

Utilizando el sistema coordenado expresado en fig.(2.2), tenemos que dado un rayo incidente $\mathbf{S}_i = (0, \eta_i, \zeta_i)$, el rayo ordinario refractado será

$$\mathbf{S}_o = (\xi_o, \eta_o, \zeta_o) = \left(0, \frac{n_i \eta_i}{n_o}, \sqrt{1 - \frac{n_i}{n_o} (\xi_i^2 + \eta_i^2)}\right). \quad (2.22)$$

Si nuevamente consideramos que el punto de incidencia en la superficie tiene coordenadas $\mathbf{H} = (h, k, 0)$,

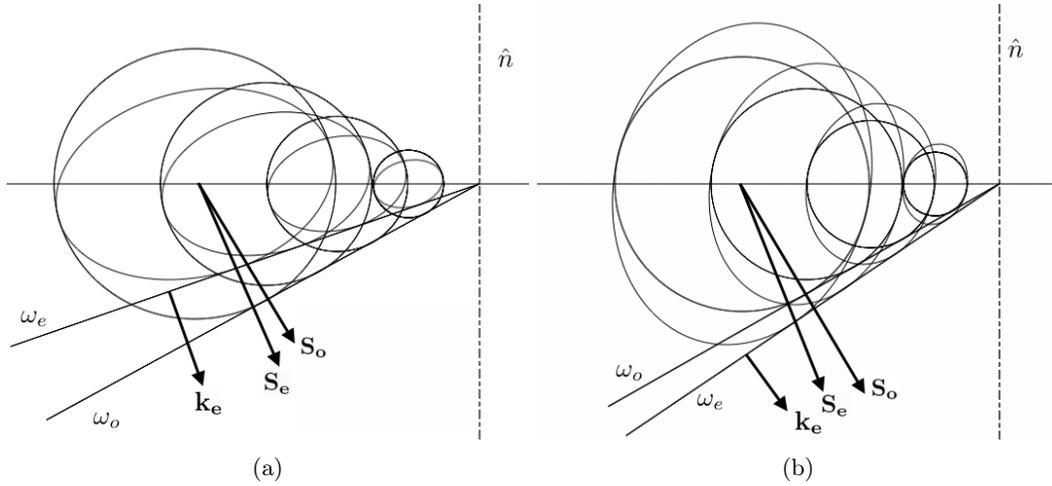


Figura 2.8: Se muestra una refracción utilizando el Modelo de Huygens. Para la solución extraordinaria se puede ver que el vector de onda, que es normal al frente, no es paralelo a la dirección del rayo, construido del centro del elipsoide al punto de tangencia con el frente: (a) cristal positivo y (b) cristal negativo.

tenemos que todo punto del rayo ordinario estará dado por

$$\mathbf{P}_o = \mathbf{H} + \frac{\lambda}{n_o} \mathbf{S}_o, \quad (2.23)$$

donde λ es un parámetro relacionado con un cierto camino óptico o incluso con un tiempo de viaje. Conforme λ varíe habrá distintos frentes, pero escogeremos aquel que pase por el origen (análogamente a lo que se hizo en las secciones anteriores para simplificar), y dicho frente cumple con, véase fig.(2.9),

$$\mathbf{P}_o \cdot \mathbf{S}_o = 0, \quad (2.24)$$

por lo que haciendo el producto punto de (2.23) con \mathbf{S}_o , y utilizando que este último está normalizado, es posible obtener que

$$\lambda = -n_o \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o, \quad (2.25)$$

que tiene todo el sentido puesto que es la proyección de \mathbf{H} en \mathbf{S}_o que se multiplica por el índice de refracción para volverlo un camino óptico, y el signo menos tiene que ver con el sentido, véase nuevamente fig.(2.9).

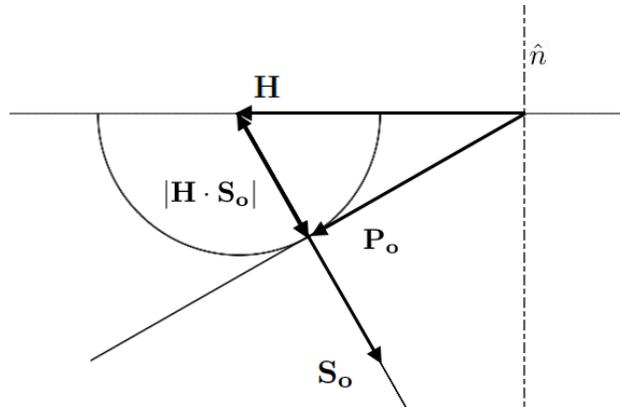


Figura 2.9: Construcción geométrica del rayo ordinario.

Entonces, la familia de esferas con respecto a \mathbf{H} está dada por

$$\mathcal{C}_o(h, k) := (\mathbf{P}_o - \mathbf{H})^2 = \frac{\lambda^2}{n_o^2}, \quad (2.26)$$

que se reduce a

$$\mathcal{C}_o(h, k) := \boxed{(\mathbf{P}_o - \mathbf{H})^2 - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o)^2 = 0}. \quad (2.27)$$

Ahora, si deseamos obtener la envolvente², debemos derivar con respecto a los parámetros h y k ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_o}{\partial h} = 0 &\implies (x_o - h) + \xi_o(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_o}{\partial k} = 0 &\implies (y_o - k) + \eta_o(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o) = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas de forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \xi_o^2) & \xi_o \eta_o \\ \xi_o \eta_o & (1 - \eta_o^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

que al utilizar $\xi_o = 0$ y haciendo un poco de álgebra se convierte en

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Fácilmente se puede invertir esta matriz y obtener los parámetros h y k en términos de las coordenadas del rayo,

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta_o^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

con lo que restaría sustituir en $\mathcal{C}_o(h, k)$. Si desarrollamos término a término

$$(\mathbf{P}_o - \mathbf{H})^2 = y_o^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta_o^2}\right)^2 + z_o^2 \quad (2.32)$$

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o)^2 = \frac{y_o^2 \eta_o^2}{\zeta_o^2}, \quad (2.33)$$

se puede obtener que (2.27) se reduce a

$$\begin{aligned} y_o^2 \left(1 - \frac{1}{\zeta_o^2}\right)^2 + z_o^2 - \frac{y_o^2 \eta_o^2}{\zeta_o^2} &= 0 \\ -y_o^2(1 - \zeta_o^2) + \zeta_o^2 z_o^2 &= 0 \\ (z_o \zeta_o - y_o \eta_o)(z_o \zeta_o + y_o \eta_o) &= 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

que son las ecuaciones de las dos envolventes, en las que sólo la última tiene sentido físico (la primera va en dirección contraria a la propagación), por lo que el frente de onda ordinario estará dado por

$$\omega_o := z_o \zeta_o + y_o \eta_o = 0, \quad (2.35)$$

al que le corresponderá un vector de onda unitario, i.e., su dirección,

$$\boxed{\mathbf{g}_o = (0, \eta_o, \zeta_o)}. \quad (2.36)$$

²Esto quizá parezca ocioso puesto que basta saber \mathbf{S}_i para obtener \mathbf{S}_o mediante ley de Snell, sin embargo, será útil para ejemplificar el proceso que se utilizará.

2.4.2 Refracción de entrada: extraordinario

Ahora, hay que realizar lo mismo para el frente de onda extraordinario y así obtener el rayo extraordinario refractado, \mathbf{S}_e . Primeramente, tenemos que el elipsoide de revolución rotado tal que su eje de revolución sea a lo largo de $\mathbf{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$, i.e., coincidiendo con el eje del cristal, puede ser expresado análogamente a (1.105) como

$$\frac{(\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{A})^2}{\lambda^2/n_o^2} + \frac{(\mathbf{r}_e - (\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{A})\mathbf{A})^2}{\lambda^2/n_e^2} = 1, \quad (2.37)$$

que realizando un poco de álgebra se reduce a

$$n_e^2 \mathbf{r}_e^2 + N(\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{A})^2 = \lambda^2, \quad (2.38)$$

donde al igual que en los capítulos anteriores definimos

$$N = n_o^2 - n_e^2, \quad (2.39)$$

y centrado en \mathbf{H} ,

$$n_e^2(\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^2 + N((\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A})^2 = \lambda^2. \quad (2.40)$$

Como sabemos que el mismo tiempo de propagación ha tenido esta onda secundaria que la onda esférica, es decir, que el camino óptico a lo largo del eje del cristal ha sido el mismo, podemos utilizar (2.25) para obtener la familia de elipsoides de revolución con respecto a \mathbf{H}

$$\mathcal{C}_e(h, k) := n_e^2(\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^2 + N((\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A})^2 = n_o^2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o)^2, \quad (2.41)$$

que expresaremos como

$$\mathcal{C}_e(h, k) := \boxed{n_e^2(\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^2 + N((\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A})^2 - n_o^2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o)^2 = 0}. \quad (2.42)$$

Para obtener la envolvente se deriva con respecto a los parámetros h y k ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_e}{\partial h} = 0 &\implies n_e^2(x_e - h) + \alpha N[(\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}] + n_o^2 \xi_o(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_e}{\partial k} = 0 &\implies n_e^2(y_e - k) + \beta N[(\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A}] + n_o^2 \eta_o(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o) = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Al utilizar que $\xi_o = 0$ el sistema de ecuaciones queda

$$\begin{aligned} n_e^2 h + \alpha N(h\alpha + k\beta) &= n_e^2 x_e + \alpha N[\alpha x_e + \beta y_e + \gamma z_e] \\ n_e^2 k + \beta N(h\alpha + k\beta) - n_o^2 \eta_o^2 k &= n_e^2 y_e + \beta N[\alpha x_e + \beta y_e + \gamma z_e], \end{aligned} \quad (2.44)$$

el cual puede ser expresado de forma matricial como

$$\begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 - n_o^2\eta_o^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} + N\gamma z_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Tenemos que invertir la primer matriz para poder expresar \mathbf{H} en términos de \mathbf{A} y \mathbf{P}_e . Para invertirla primero hay que sacar el determinante de dicha matriz, que denominaremos Δ^2 ,

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (n_e^2 + N\alpha^2)(N\beta^2 - n_o^2\eta_o^2) - (N\beta\alpha)^2 \\ &= n_e^4 + n_e^2 N(1 - \gamma^2) - n_o^2 \eta_o^2 (n_e^2 + N\alpha^2) \\ &= n_e^2 (n_o^2 - N\gamma^2) - n_o^2 \eta_o^2 (n_e^2 + N\alpha^2). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Hay que puntualizar que se necesita que $\Delta^2 \neq 0$ para nuestro método. Definiendo

$$\Gamma = n_o^2 - N\gamma^2, \quad (2.47)$$

el determinante queda

$$\Delta^2 = n_e^2 \Gamma - n_o^2 \eta_o^2 (n_e^2 + N\alpha^2). \quad (2.48)$$

De esta forma podemos despejar y obtener

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} n_e^2 + N\beta^2 - n_o^2 \eta_o^2 & -N\beta\alpha \\ -N\beta\alpha & n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} + N\gamma z_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right], \quad (2.49)$$

que al realizar el álgebra se reduce a

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \left[\begin{pmatrix} \Delta^2 & -n_o^2 \eta_o^2 N\alpha\beta \\ 0 & n_e^2 \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} + N\gamma z_e \begin{pmatrix} n_e^2 + N\beta^2 - n_o^2 \eta_o^2 & -N\beta\alpha \\ -N\beta\alpha & n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right]. \quad (2.50)$$

Hace falta ver que el segundo término puede ser simplificado al descomponerlo en dos matrices

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} n_e^2 + N\beta^2 - n_o^2 \eta_o^2 & -N\beta\alpha \\ -N\beta\alpha & n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} n_e^2 - n_o^2 \eta_o^2 & 0 \\ 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N\beta^2 & -N\beta\alpha \\ -N\beta\alpha & N\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_e^2 - n_o^2 \eta_o^2 & 0 \\ 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

y darnos cuenta que una componente se anula. Entonces, definiendo

$$\delta_o^2 = n_e^2 - n_o^2 \eta_o^2, \quad (2.52)$$

los parámetros h y k quedan expresados de la forma

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \left[\begin{pmatrix} \Delta^2 & -n_o^2 \eta_o^2 N\alpha\beta \\ 0 & n_e^2 \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} + N\gamma z_e \begin{pmatrix} \delta_o^2 & 0 \\ 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right], \quad (2.53)$$

y de forma general, el vector \mathbf{H} lo escribiremos como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} \Delta^2 & -n_o^2 \eta_o^2 N\alpha\beta & N\gamma \delta_o^2 \alpha \\ 0 & n_e^2 \Gamma & N\gamma n_e^2 \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Lo que resta es sustituir en la familia de elipsoides (2.42) para hallar los frentes de onda extraordinarios. Para ello calcularemos cada término, el primero

$$\mathbf{P}_e - \mathbf{H} = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} 0 & n_o^2 \eta_o^2 N\alpha\beta & -N\gamma \delta_o^2 \alpha \\ 0 & \Delta^2 - n_e^2 \Gamma & -N\gamma n_e^2 \beta \\ 0 & 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

el segundo

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^\top \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} (x_e \ y_e \ z_e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_o^2 \eta_o^2 N\alpha\beta & \Delta^2 - n_e^2 \Gamma & 0 \\ -N\gamma \delta_o^2 \alpha & -N\gamma n_e^2 \beta & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} (x_e \ y_e \ z_e) \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(n_o^2 \eta_o^2 N\alpha^2 + \Delta^2 - n_e^2 \Gamma) \\ \gamma[\Delta^2 - N(\delta_o^2 \alpha^2 + n_e^2 \beta)] \end{pmatrix} \\ &= -\frac{n_e^2}{\Delta^2} (n_o^2 \eta_o^2 \beta y_e - \gamma \delta_o^2 z_e), \end{aligned} \quad (2.56)$$

y el último

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o &= \mathbf{H}^\top \mathbf{S}_o \\
&= \frac{1}{\Delta^2} (x_e \quad y_e \quad z_e) \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 & 0 \\ -n_o^2 \eta_o^2 N \alpha \beta & n_e^2 \Gamma & 0 \\ N \gamma \delta_o^2 \alpha & N \gamma n_e^2 \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta^2} (x_e \quad y_e \quad z_e) \begin{pmatrix} 0 \\ n_e^2 \Gamma \eta_o \\ N \gamma n_e^2 \beta \eta_o \end{pmatrix} \\
&= \frac{n_e^2 \eta_o}{\Delta^2} (y_e \Gamma + N \gamma \beta z_e).
\end{aligned} \tag{2.57}$$

A partir de los términos anteriores se pueden calcular fácilmente los cuadrados, excepto del primero y por ello se muestra el álgebra:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^2 &= (\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^\top (\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \\
&= \frac{1}{\Delta^4} (x_e \quad y_e \quad z_e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_o^2 \eta_o^2 N \alpha \beta & \Delta^2 - n_e^2 \Gamma & 0 \\ -N \gamma \delta_o^2 \alpha & -N \gamma n_e^2 \beta & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_o^2 \eta_o^2 N \alpha \beta & -N \gamma \delta_o^2 \alpha \\ 0 & \Delta^2 - n_e^2 \Gamma & -N \gamma n_e^2 \beta \\ 0 & 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mathbf{P}_e^\top}{\Delta^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (n_o^2 \eta_o^2 N \alpha \beta)^2 + (\Delta^2 - n_e^2 \Gamma)^2 & N \gamma \beta [\delta_o^2 \alpha^2 n_o^2 \eta_o^2 + n_e^2 (\Delta^2 - n_e^2 \Gamma)] \\ 0 & N \gamma \beta [\delta_o^2 \alpha^2 n_o^2 \eta_o^2 + n_e^2 (\Delta^2 - n_e^2 \Gamma)] & (N \gamma \delta_o^2 \alpha)^2 + (N \gamma n_e^2 \beta)^2 + \Delta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta^4} (x_e \quad y_e \quad z_e) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 \eta_o^2 (N^2 \alpha^2 \beta^2 + [n_e^2 + N \alpha^2]^2) & N \gamma \beta n_o^2 \eta_o^2 (n_e^4 + n_o^2 N \eta_o^2 \alpha^2) \\ 0 & N \gamma \beta n_o^2 \eta_o^2 (n_e^4 + n_o^2 N \eta_o^2 \alpha^2) & (N \gamma \delta_o^2 \alpha)^2 + (N \gamma n_e^2 \beta)^2 + \Delta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\Delta^4} (y_e^2 n_o^4 \eta_o^4 (N^2 \alpha^2 \beta^2 + [n_e^2 + N \alpha^2]^2) + 2y_e z_e N \gamma \beta n_o^2 \eta_o^2 (n_e^4 + n_o^2 N \eta_o^2 \alpha^2) \\
&\quad + z_e^2 [(N \gamma \delta_o^2 \alpha)^2 + (N \gamma n_e^2 \beta)^2 + \Delta^4])
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Al sustituir las expresiones pasadas en la ecuación de la familia de elipsoides extraordinarios (2.42) podemos obtener que la expresión se reduce a

$$[(\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2) z_e - N \eta_o^2 \beta \gamma y_e]^2 - \Delta^2 \eta_o^2 y_e^2 = 0, \tag{2.59}$$

que nos conduce a

$$[(\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2) z_e - \eta_o y_e (N \beta \gamma \eta_o + \Delta)][(\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2) z_e - \eta_o y_e (N \beta \gamma \eta_o - \Delta)] = 0. \tag{2.60}$$

Estos serán los dos posibles frentes de onda extraordinarios, y sabemos que comúnmente uno no tendrá sentido físico por propagarse en sentido contrario, pero no podemos asegurar que siempre pasará eso, véase la sección 1.7.1, como en el caso ordinario. Por lo tanto, el frente o los frentes de onda extraordinario(s) se podrán expresar como

$$\omega_{e\pm} := (\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2) z_e - \eta_o y_e (N \beta \gamma \eta_o \pm \Delta) = 0, \tag{2.61}$$

con un vector unitario de propagación de onda

$$\mathbf{g}_{e\pm} = \frac{1}{\Gamma_\pm} (0, \quad -\eta_o (N \beta \gamma \eta_o \pm \Delta), \quad (\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2)), \tag{2.62}$$

dónde Γ_\pm es un factor de normalización

$$\Gamma_\pm = \sqrt{(\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2)^2 + \eta_o^2 (N \beta \gamma \eta_o \pm \Delta)^2}. \tag{2.63}$$

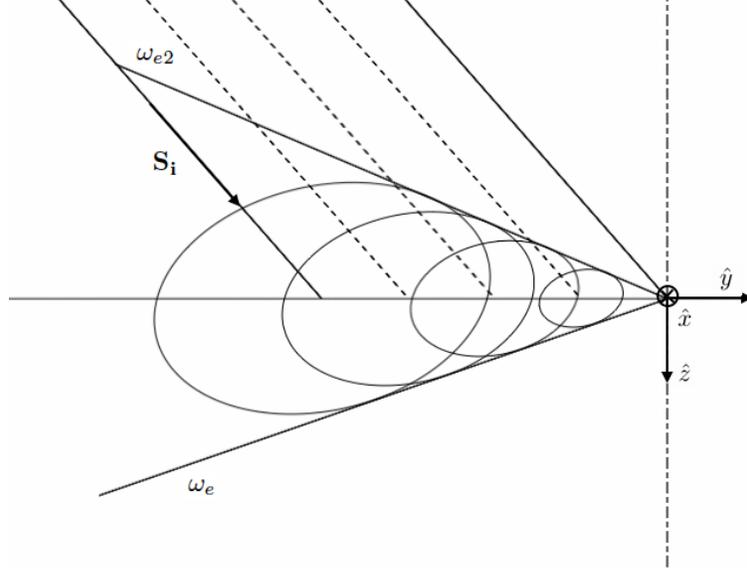


Figura 2.10: Existen dos envolventes, sin embargo sólo se toma en cuenta la que tiene sentido físico comúnmente, i.e. ω_e .

De ahora en adelante nos referiremos al primer posible frente de onda como "primario" y se usará $\Gamma_e = \Gamma_-$ y $\mathbf{g}_e = \mathbf{g}_{e-}$, mientras que al otro posible frente de onda se le llamará "secundario" utilizando $\Gamma_{e2} = \Gamma_+$ y $\mathbf{g}_{e2} = \mathbf{g}_{e+}$, véase la fig.(2.10). El frente de onda primario es la solución que tiene sentido físico, mientras que el secundario no, puesto que suele propagarse fuera del material, sin embargo, podrían existir casos en los que no lo haga y sí se propague en el material, esto como consecuencia de que se usan elipsoides y no esferas como wavelets. Nos enfocaremos en el primario y discutiremos al final de esta sección la segunda solución que podría, incluso, ser análoga a la segunda solución, aunque sin sentido físico, encontrada en el primer capítulo.

El frente de onda primario está dado entonces por

$$\omega_e := (\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)z_e - \eta_o y_e (N\beta\gamma\eta_o - \Delta) = 0, \quad (2.64)$$

con una dirección de propagación, i.e. dirección del vector de onda

$$\mathbf{g}_e = \frac{1}{\Gamma_e} (0, -\eta_o(N\beta\gamma\eta_o - \Delta), (\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)). \quad (2.65)$$

Ahora, si deseamos obtener el rayo extraordinario, puesto que sólo hemos obtenido los frentes de onda locales y su vector de onda, debemos recordar que éste será el rayo que parta del centro de los elipsoides, \mathbf{H} , al punto de tangencia del frente de onda con el elipsoide secundario correspondiente. Nosotros podemos expresar al rayo extraordinario en función del rayo ordinario ya que \mathbf{H} los relaciona. Primero habrá que encontrar una relación que nos será útil, igualando h y k de (2.31) y (2.53),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta_o^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta^2} \left[\begin{pmatrix} \Delta^2 & -n_o^2\eta_o^2 N\alpha\beta \\ 0 & n_e^2\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} + N\gamma z_e \begin{pmatrix} \delta_o^2 & 0 \\ 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right], \quad (2.66)$$

de donde queremos despejar x_e y y_e ,

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_o^2\eta_o^2 N\alpha\beta}{\Delta^2} \\ 0 & \frac{n_e^2\Gamma}{\Delta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta_o^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} - \frac{N\gamma z_e}{\Delta^2} \begin{pmatrix} \delta_o^2 & 0 \\ 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Para invertir la matriz primero debemos de sacar su determinante y es fácil ver que éste será $\frac{n_e^2\Gamma}{\Delta^2}$. Invertiendo y después de realizar algo de álgebra se llega a

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \frac{1}{n_e^2\Gamma\zeta_o^2} \begin{pmatrix} \zeta_o^2 & n_o^4\eta_o^2 N\alpha\beta \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix} - \frac{N\gamma z_e}{\Gamma\Delta^2} \begin{pmatrix} n_e^2\Gamma\delta_o^2 & n_o^2\eta_o^2 N\alpha\beta \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Si de esta expresión sólo nos fijamos en las segundas entradas llegamos a la ecuación

$$y_e = \frac{\Delta^2}{n_e^2\Gamma} \left(\frac{y_o}{\zeta_o^2} - N\gamma z_e n_e^2 \beta \right), \quad (2.69)$$

que al usar (2.35) se convierte en

$$y_e = -\frac{\Delta^2 z_o + N z_e n_e^2 \gamma \beta \eta_o \zeta_o}{\eta_o \zeta_o n_e^2 \Gamma}. \quad (2.70)$$

Al sustituir en los frentes de onda uno obtiene

$$(\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)z_e + \frac{(\Delta^2 z_o + N z_e n_e^2 \gamma \beta \eta_o \zeta_o)(N\beta\gamma\eta_o - \Delta)}{\zeta_o n_e^2 \Gamma} = 0, \quad (2.71)$$

que con un poco de álgebra se reduce a

$$\begin{aligned} -(N\beta\gamma\eta_o - \Delta)\Delta^2 z_o &= z_e [\zeta_o n_e^2 \Gamma (\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2) + N n_e^2 \gamma \beta \eta_o \zeta_o (N\beta\gamma\eta_o - \Delta)] \\ &= z_e n_e^2 \zeta_o (\Gamma \delta_o^2 + N\beta^2 n_o^2 \eta_o^2 - N\beta\gamma\eta_o \Delta) \\ &= \Delta z_e n_e^2 \zeta_o (\Delta - N\beta\gamma\eta_o), \end{aligned} \quad (2.72)$$

lo que nos lleva a la relación

$$\frac{z_e}{z_o} = \frac{\Delta}{n_e^2 \zeta_o}, \quad (2.73)$$

correspondiente al rayo que generalmente existe en la refracción extraordinaria, el cual denotamos \mathbf{S}_{e1} .

Se busca eliminar los términos x_e y y_e , para dejar a \mathbf{S}_e sólo en términos de \mathbf{S}_o y \mathbf{A} . Para ello necesitamos ver que el rayo extraordinario, el cual es de la forma

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{H} + \frac{\lambda}{n_e} \mathbf{S}_e, \quad (2.74)$$

puede ser expresado de forma matricial, análogamente a lo realizado con el ordinario en cuanto al análisis geométrico, en el plano perpendicular al plano de incidencia como

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \frac{z_e}{\zeta_e} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Si se le sustituye en (2.45) y se trabaja un poco el álgebra se obtiene

$$-n_o^2\eta_o^2 \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} = \frac{z_e}{\zeta_e} \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} + N\gamma z_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Por otro lado, al utilizar (2.33) y (2.35) se llega a

$$-(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o) = -\eta_o k = \frac{z_o}{\zeta_o}, \quad (2.77)$$

con lo que la expresión pasada se convierte en

$$\begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} = \frac{\zeta_e z_o n_o^2}{z_e \zeta_o} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_o \end{pmatrix} - N\gamma \zeta_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.78)$$

Al utilizar (2.73) obtenemos

$$\begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} = \frac{\zeta_e n_e^2 n_o^2}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_o \end{pmatrix} - N\gamma\zeta_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

Finalmente, para despejar ξ_e y η_e se tiene que invertir la matriz, y no es difícil calcular que el determinante de dicha matriz es $n_e^2\Gamma$, con lo que se obtiene

$$\begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} = \frac{\zeta_e}{n_e^2\Gamma} \begin{pmatrix} n_e^2 + N\beta^2 & -N\beta\alpha \\ -N\beta\alpha & n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} \left[\frac{n_e^2 n_o^2}{\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_o \end{pmatrix} - N\gamma \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right], \quad (2.80)$$

el cual, por razones análogas al (2.51), se reduce a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} &= \frac{\zeta_e}{\Gamma} \left\{ \frac{n_o^2}{\Delta} \begin{pmatrix} n_e^2 + N\beta^2 & -N\beta\alpha \\ -N\beta\alpha & n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_o \end{pmatrix} - N\gamma \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{\zeta_e}{\Gamma} \left\{ \frac{n_o^2 \eta_o}{\Delta} \begin{pmatrix} -N\beta\alpha \\ n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} - N\gamma \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Sólo resta hallar qué es ζ_e , y para ello nos podemos valer de la relación $1 - \zeta_e^2 = \xi_e^2 + \eta_e^2$,

$$\begin{aligned} 1 - \zeta_e^2 &= \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} \\ &= \frac{\zeta_e^2}{\Delta^2 \Gamma^2} [n_o^4 \eta_o^2 (N^2 \alpha^2 \beta^2 + (n_e^2 + N\alpha^2)^2) + \Delta^2 N^2 \gamma^2 (1 - \gamma^2) - 2N\gamma \eta_o n_o^2 n_e^2 \beta \Delta] \end{aligned} \quad (2.82)$$

de donde utilizando las definiciones de Γ y Δ^2 se puede llegar a

$$\begin{aligned} \zeta_e^2 &= \Gamma^2 \Delta^2 \{ \Gamma^2 \Delta^2 + n_o^4 \eta_o^2 (N^2 \alpha^2 \beta^2 + n_e^4 + N^2 \alpha^2 + 2n_e^2 N(1 - \gamma^2) - Nn_e^2 \beta) - N^2 \gamma^4 \Delta + n_o^2 N \gamma^2 \Delta^2 \\ &\quad - n_e^2 N(\gamma^2 \Delta^2 + n_o^4 \eta_o^2 \beta + 2\gamma \Delta \beta \eta_o n_o^2) \}^{-1} \\ &= \Gamma^2 \Delta^2 \{ \Delta^2 n_o^2 \Gamma + n_o^4 \eta_o^2 [n_e^4 + N(N\alpha^2(1 - \gamma^2) + 2n_e^2(1 - \gamma^2) - n_e^2 \beta)] - n_e^2 N(\Delta\gamma + n_o^2 \beta \eta_o)^2 \}^{-1} \\ &= \Gamma^2 \Delta^2 \{ n_e^2 n_o^2 \Gamma^2 - n_e^2 N(\Delta\gamma + n_o^2 \beta \eta_o)^2 + n_o^4 \eta_o^2 [n_e^4 - n_o^2 n_e^2 \\ &\quad + N(N\alpha^2(1 - \gamma^2) + 2n_e^2(1 - \gamma^2) - n_e^2 \beta + n_e^2 \gamma - n_o^2 \alpha^2 + N\alpha^2 \gamma^2)] \}^{-1} \\ &= \Gamma^2 \Delta^2 \{ n_e^2 (n_o^2 \Gamma^2 - N[\Delta\gamma + n_o^2 \eta_o \beta]^2) \}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

es decir,

$$\zeta_e = \frac{\Gamma \Delta}{n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma + n_o^2 \eta_o \beta)^2}}. \quad (2.84)$$

Habiendo hallado ζ_e se consigue expresar al rayo extraordinario primario en términos del rayo ordinario y del eje del cristal

$$\begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_e} \left\{ n_o^2 \begin{pmatrix} -N\alpha\beta\eta_o \\ (n_e^2 + N\alpha^2)\eta_o \\ \Delta \end{pmatrix} - \gamma N \Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.85)$$

en donde se definió

$$\delta_e = n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma + n_o^2 \eta_o \beta)^2}. \quad (2.86)$$

Condiciones para que el rayo extraordinario se mantenga dentro del plano de incidencia

Hace falta detenerse, al igual que se hizo en el primer capítulo, en un aspecto interesante de la refracción extraordinaria: el rayo extraordinario no suele mantenerse en el plano de incidencia, sino que salta de éste

complicando el trazo de rayos utilizado comúnmente³. Sin embargo hay casos en los que el rayo extraordinario sí se mantiene en el plano de incidencia, y nos serán de utilidad conocerlos al momento de realizar el trazo de rayos. En particular al realizar la aproximación paraxial y querer obtener analíticamente resultados. Se esperaría llegar a las mismas condiciones que las encontradas en el primer capítulo con el método de las superficies normales.

Para encontrar las condiciones requerimos hacer $\xi_e = 0$, obteniendo

$$\alpha N(\beta \eta_o n_o^2 + \gamma \Delta) = 0 \quad (2.87)$$

Existen, entonces, tres casos en los que los rayos extraordinarios estarán contenidos en el plano de incidencia:

1. $\alpha = 0$, el eje del cristal yaciendo en el plano de incidencia, que incluye el caso de incidencia normal,
2. $N = 0$, que el material no sea birrefringente, el cual se desprecia porque en dado sentido no tiene caso hablar de un rayo extraordinario,
3. $\beta \eta_o n_o^2 + \gamma \Delta = 0$, cuya interpretación física no es inmediata, pero se esperaría que fuera análoga a que el vector de onda extraordinario fuera ortogonal al eje del cristal.

Hay que analizar con más cuidado las implicaciones de la última condición. Según lo deducido con teoría electromagnética en el primer capítulo, la última condición era $\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A} = 0$. En el modelo de Huygens dicho producto se traduce en

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\Gamma_e} (-\beta \eta_o (N \beta \gamma \eta_o - \Delta) + \gamma (\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2)) \\ &= \Delta \eta_o \beta + \gamma \delta_o^2, \end{aligned} \quad (2.88)$$

que no parece tener relación con la encontrada con el modelo de Huygens. Si uno despeja Δ de la tercer condición y la sustituye en la expresión anterior se llega con un poco de álgebra a

$$-\beta^2 \eta_o^2 n_o^2 + \gamma^2 \delta_o^2 = n_e^2 \gamma^2 - n_o^2 \eta_o^2 (1 - \alpha^2), \quad (2.89)$$

que no es concluyente. Sin embargo, si uno calcula $\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta_e(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}) &= -N \alpha^2 \beta \eta_o n_o^2 - \gamma N \Delta \alpha^2 + n_o^2 n_e^2 \eta_o \beta + N \alpha^2 \eta_o n_o^2 \beta^2 + n_o^2 \Delta \gamma - \gamma^3 N \Delta \\ &= -\gamma N \Delta (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + n_o^2 n_e^2 \eta_o \beta + n_o^2 \Delta \gamma \\ &= n_o^2 n_e^2 \eta_o \beta + \Delta \gamma n_e^2 \\ &= n_e^2 (n_o^2 \eta_o \beta + \Delta \gamma) = 0, \end{aligned} \quad (2.90)$$

es decir, la tercera condición implica la ortogonalidad entre el rayo extraordinario (vector de Poynting) y el eje del cristal. De aquí podemos concluir que la tercera condición también exige la ortogonalidad entre el vector de onda extraordinario y el eje del cristal, esto debido a que como los campos \mathbf{D}_e y \mathbf{E}_e siempre son coplanares⁴ a \mathbf{k}_e y \mathbf{A} , al ser ortogonal, ya sea el vector de Poynting o el vector de onda al eje del cristal, su respectivo campo eléctrico o de desplazamiento eléctrico será paralelo al eje del cristal y por lo tanto los campos serían paralelos entre sí, lo que lleva a $\mathbf{k}_e \parallel \mathbf{S}_e$, i.e. $\mathbf{k}_e \perp \mathbf{A} \iff \mathbf{S}_e \perp \mathbf{A}$

Por último, cabe señalar que en incidencia normal, el rayo extraordinario va a yacer en el plano definido por la normal al punto de incidencia, $\hat{\mathbf{n}}$, y el eje del cristal, \mathbf{A} , debido a las condiciones encontradas arriba. De igual forma, se puede calcular de forma sencilla que $\mathbf{S}_e \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}) = 0$, que sería la demostración explícita de ello.

³En el trazo de rayos común se utiliza que los rayos, al menos en casos isotrópicos así como para los rayos ordinarios, se mantienen en el plano de incidencia para utilizar así matrices de 2×2 entradas. En el caso extraordinario se requeriría matrices de 4×4 . Se abordará esto con mayor detenimiento en la sección de trazo de rayos.

⁴Esto es consecuencia de la polarización de cualquier rayo extraordinario y a la forma del tensor dieléctrico del material.

Observaciones sobre la segunda envolvente

La segunda envolvente encontrada o frente de onda en (2.64) está dada por

$$\mathbf{g}_{e2} = \frac{1}{\Gamma_{e2}} (0, -\eta_o(N\beta\gamma\eta_o + \Delta), (\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)), \quad (2.91)$$

dónde Γ_{e2} es un factor de normalización

$$\Gamma_{e2} = \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)^2 + \eta_o^2(N\beta\gamma\eta_o + \Delta)^2}. \quad (2.92)$$

Para que este segundo vector pudiera ser la segunda posible refracción encontrada con el método de las superficies normales, debería cumplir

$$N\beta\gamma\eta_o + \Delta \leq 0 \quad \text{y} \quad \delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2 \geq 0 \quad (2.93)$$

que sólo puede ser posible (al menos la primer condición) si

$$N\beta\gamma < 0, \quad (2.94)$$

lo que se traduce en condiciones, véase la fig.(2.11), opuestas a las requeridas con el método del primer capítulo (con las superficies normales), las cuales exigen para materiales positivos, $N < 0$, un eje A tal que $\beta\gamma < 0$, y para materiales negativos, $N > 0$, un eje A tal que $\beta\gamma > 0$. Por lo tanto, no puede tratarse de las mismas soluciones.

La otra condición para que fuera la segunda posible refracción encontrada con el método de las superficies normales es

$$N\beta\gamma\eta_o + \Delta \geq 0 \quad \text{y} \quad \delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2 \leq 0, \quad (2.95)$$

la cual si puede cumplirse y podría tratarse de la misma segunda supuesta refracción extraordinaria de la que se discute en el primer capítulo. Sin embargo, para que el frente de onda secundario tuviera sentido físico requeriría formarse dentro del material, i.e. que los puntos de tangencia con los elipsoides sean dentro del material, y al no cumplirse esto, se obtiene un supuesto rayo reflejado sin interpretación física.

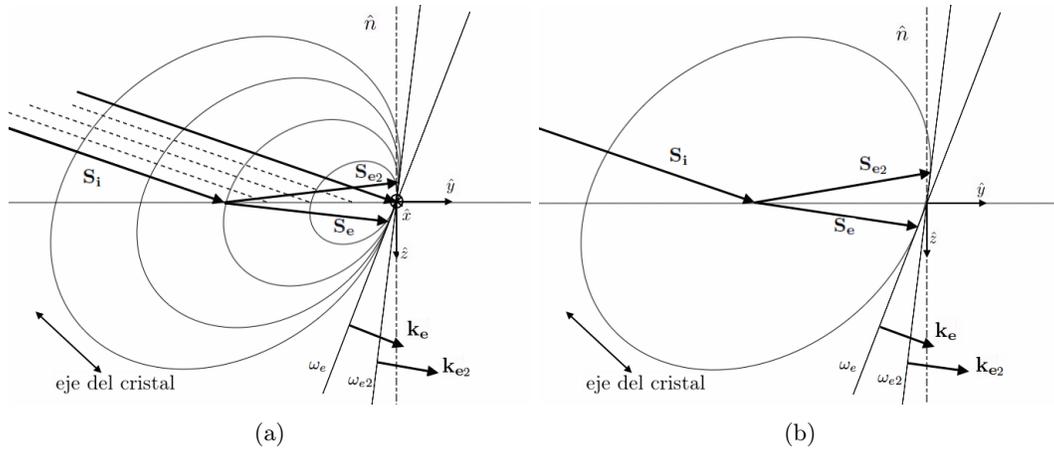


Figura 2.11: Los índices ordinario y extraordinario de la calcita son usados para esta imagen. (a) Caso en el que dos envolventes tendrían una orientación con sentido físico, pero al corresponderle a la segunda envolvente un rayo que se refleja, no tiene interpretación física. (b) La misma imagen se muestra con tan sólo el primer elipsoide secundario para mayor claridad.

Sin embargo, sólo de forma ilustrativa⁵ se deducirán las fórmulas del rayo correspondiente: de forma análoga a lo hecho para la solución primaria, podemos obtener una relación como la (2.73). Sustituyendo en (2.71) el segundo frente de onda se obtiene

$$(\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)z_e + \frac{(\Delta^2 z_o + Nz_e n_e^2 \gamma \beta \eta_o \zeta_o)(N\beta\gamma\eta_o + \Delta)}{\zeta_o n_e^2 \Gamma} = 0, \quad (2.96)$$

que con álgebra da la relación

$$\frac{z_e}{z_o} = -\frac{\Delta}{n_e^2 \zeta_o}. \quad (2.97)$$

De esta relación uno ya puede deducir que el rayo extraordinario secundario obtenido de esta forma carecerá de sentido físico. Para este rayo tenemos que al sustituir en (2.78) la relación del frente de onda, la expresión (2.81) se transformaría en

$$\begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} = -\frac{\zeta_e}{\Gamma} \left\{ \frac{n_o^2 \eta_o}{\Delta} \begin{pmatrix} -N\beta\alpha \\ n_e^2 + N\alpha^2 \end{pmatrix} + N\gamma \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.98)$$

y de manera análoga a lo realizado para el otro rayo extraordinario, salvo por un cambio de signo, se llega a que

$$\zeta_e = -\frac{\Gamma\Delta}{n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma - n_o^2 \eta_o \beta)^2}}, \quad (2.99)$$

en donde nos quedamos con la raíz negativa ya que sabemos que el rayo se formará yendo en sentido contrario, con lo que el rayo extraordinario secundario queda

$$\begin{pmatrix} \xi_{e2} \\ \eta_{e2} \\ \zeta_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{e2}} \left\{ \begin{pmatrix} -n_o^2 N\alpha\beta\eta_o \\ n_o^2 (n_e^2 + N\alpha^2)\eta_o \\ -\Gamma\Delta \end{pmatrix} + \gamma N\Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.100)$$

que se puede llevar a

$$\begin{pmatrix} \xi_{e2} \\ \eta_{e2} \\ \zeta_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{e2}} \left\{ n_o^2 \begin{pmatrix} -N\alpha\beta\eta_o \\ (n_e^2 + N\alpha^2)\eta_o \\ -\Delta \end{pmatrix} + \gamma N\Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.101)$$

en donde definimos

$$\delta_{e2} = n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma - n_o^2 \eta_o \beta)^2}. \quad (2.102)$$

Entonces, se ve que intrínsecamente el rayo viajaría en sentido contrario a la propagación esperada, y deberá ser ignorado⁶.

2.4.3 Refracción de salida

En cuanto a la segunda refracción, no hay nada interesante que aclarar o anotar para un rayo ordinario, ya que éste se refractará siguiendo la ley de Snell ya conocida y su tratamiento es igual al de la sección (2.4.1). Sin embargo, el rayo extraordinario sí difiere en su segunda refracción. Para refractar al rayo extraordinario nos valdremos del principio de reversibilidad, con el cual buscaríamos expresar a partir del rayo extraordinario un rayo ordinario ficticio y a este último refractarlo utilizando la ley de Snell, véase la fig.(2.12), Es importante remarcar que para esta refracción no podemos utilizar que $\xi_o = 0$, ya que el sistema de referencia va a ser escogido a partir del rayo extraordinario incidente.

⁵En realidad la deducción de las fórmulas serán de utilidad para la reflexión dentro de un material uniaxial, lo cual será abordado en la siguiente sección.

⁶Realizar un experimento sería interesante para descartar totalmente la inexistencia de este rayo, además de que serviría para caracterizar la reflexión total interna tratándose de un material incidente de mayor índice de refracción al del medio birrefringente.

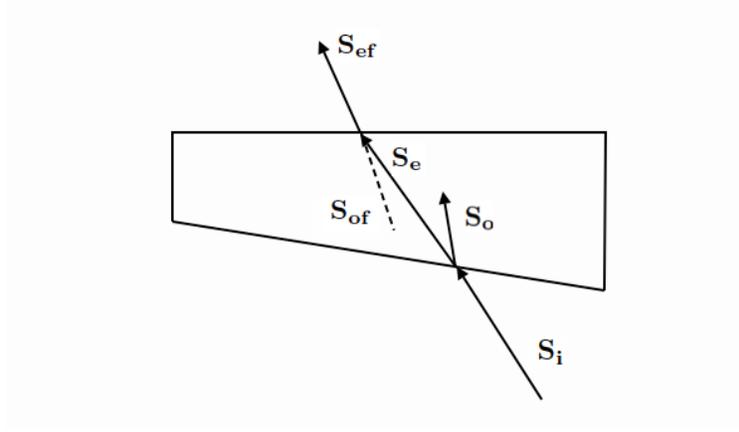


Figura 2.12: Si se utiliza el principio de reversibilidad, uno se puede dar cuenta de que calculando un rayo ordinario ficticio se puede realizar la refracción de salida.

Recordando los elipsoides secundarios extraordinarios dados por (2.42)

$$n_e^2(\mathbf{P}_e - \mathbf{H})^2 + N((\mathbf{P}_e - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{A})^2 - n_o^2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_o)^2 = 0, \quad (2.103)$$

podemos utilizar (2.77) y (2.74) para llegar a

$$\frac{n_e^2 z_e^2}{\zeta_e^2} + N\left(\frac{z_e}{\zeta_e} \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}\right)^2 - \frac{n_o^2 z_o^2}{\zeta_o^2} = 0, \quad (2.104)$$

que nos lleva a la relación

$$\frac{z_o}{z_e} = \frac{\mu \zeta_o}{n_o \zeta_e}, \quad (2.105)$$

en donde De la ecuación (2.45) se puede deducir de forma análoga a lo realizado en las ecuaciones (2.74)-(2.78) pero sin utilizar que $\xi_o = 0$

$$\begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\beta\alpha \\ N\beta\alpha & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} = \frac{\zeta_e z_o n_o^2}{z_e \zeta_o} \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{pmatrix} - N\gamma\zeta_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (2.106)$$

de la cual despejaremos ξ_o y η_o usando la relación antes hallada

$$\begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o \mu} \left[\begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\alpha\beta \\ N\alpha\beta & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} + N\gamma\zeta_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right]. \quad (2.107)$$

Nuevamente requerimos calcular ζ_o valiéndonos de $1 - \zeta_o^2 = \xi_o^2 + \eta_o^2$

$$\begin{aligned} 1 - \zeta_o^2 &= \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n_o^2 \mu^2} \left\{ \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\alpha\beta \\ N\alpha\beta & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \end{pmatrix} + N^2 \gamma^2 \zeta_e^2 (1 - \gamma^2) \right. \\ &\quad \left. + 2N\gamma\zeta_e \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\alpha\beta \\ N\alpha\beta & n_e^2 + N\beta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{n_o^2 \mu^2} \left\{ \xi_e^2 [n_e^2 (n_e^2 + 2N\alpha^2) + N^2 \alpha^2 (1 - \gamma^2)] + \xi_e \eta_e [n_e^2 (n_e^2 + 2N\alpha^2) + N^2 \alpha^2 (1 - \gamma^2)] \right. \\ &\quad \left. + 2N\xi_e \eta_e \alpha \beta (N\alpha\beta (1 - \gamma^2) + 2n_e^2) + 2N\gamma\zeta_e (n_e^2 + N(1 - \gamma^2)) (\xi_e \alpha + \eta_e \beta) + N^2 \alpha^2 (1 - \gamma^2) \right\} \\ &= \frac{1}{n_o^2 \mu^2} \left\{ N^2 (1 - \gamma^2) (\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})^2 + n_e^4 (\xi_e^2 + \eta_e^2) + 2Nn_e^2 (\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}) (\xi_e \alpha + \eta_e \beta) \right\}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

y haciendo un poco de álgebra se obtiene

$$\begin{aligned}
\zeta_e^2 &= \frac{1}{n_o^2 \mu^2} \{n_o^2(n_e^2 + N(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})) - N^2(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})^2(1 - \gamma^2) - n_e^4(1 - \zeta_e^2) - 2Nn_e^2(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})(\xi_e \alpha + \eta_e \beta)\} \\
&= \frac{1}{n_o^2 \mu^2} \{n_e^2 N + n_o^2 N(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})^2 - N(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})^2(1 - \gamma^2) + n_e^4 \zeta_e^2 - 2N(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})^2 n_e^2 + 2N(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}) \zeta_e \gamma n_e^2\} \\
&= \frac{1}{n_o^2 \mu^2} \{n_e^2 N(1 - (\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A})^2) + [N\gamma(\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}) + n_e^2 \zeta_e]^2\},
\end{aligned} \tag{2.109}$$

donde nombrando

$$\cos \psi = (\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}) \tag{2.110}$$

y

$$\Delta_e = \sqrt{n_e^2 N \sin^2 \psi + (N\gamma \cos \psi + n_e^2 \zeta_e)^2} \tag{2.111}$$

se llega a

$$\zeta_o = \frac{\Delta_e}{n_o \mu}, \tag{2.112}$$

en el que μ toma la forma

$$\mu = \sqrt{n_e^2 \sin^2 \psi + n_o^2 \cos^2 \psi}. \tag{2.113}$$

Finalmente, podemos expresar al rayo ordinario ficticio como

$$\begin{pmatrix} \xi_{of} \\ \eta_{of} \\ \zeta_{of} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o \mu} \left\{ \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\alpha\beta & 0 \\ N\alpha\beta & n_e^2 + N\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_e}{\zeta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} + N\gamma\zeta_e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\}, \tag{2.114}$$

el cual en el sistema de referencia tal que $\xi_e = 0$, dado que ahora ese es el rayo incidente que da origen al sistema que por convención usamos, queda

$$\boxed{\begin{pmatrix} \xi_{of} \\ \eta_{of} \\ \zeta_{of} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o \mu} \left\{ \begin{pmatrix} N\alpha\beta\eta_e \\ (n_e^2 + N\beta^2)\eta_e \\ \Delta_e \end{pmatrix} + N\gamma\zeta_e \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}. \tag{2.115}$$

Por lo tanto, para obtener el rayo refractado final, uno sólo debe de aplicar la matriz de refracción de materiales isotrópicos, i.e. usar ley de Snell.

Condiciones para que el rayo refractado de salida se mantenga dentro del plano de incidencia

Sabemos que las mismas condiciones que las encontradas para la refracción de entrada deben de exigirse para esto. Puede verse que esto es así si se exige que $\xi_{of} = 0$, con lo que se llega a

$$N\alpha(\beta\eta_e + \gamma\zeta_e) = 0, \tag{2.116}$$

es decir, las mismas condiciones que ya habíamos encontrado para la refracción de entrada y que sabemos, por el primer capítulo, siempre se exigirán.

2.4.4 Reflexión de rayos ordinarios dentro de birrefringentes uniaxiales

Como se discutió en el primer capítulo, a cualquier rayo que se refleje, le corresponderán dos reflexiones, una ordinaria y otra extraordinaria, por lo que, en total, si hubieron dos rayos incidentes, uno ordinario y otro extraordinario, habrían cuatro rayos reflejados resultantes, como se aprecia en la fig.(2.13). En esta parte

se discutirán los rayos reflejados provenientes de un rayo ordinario incidente, este tiene como ventaja tener siempre un índice n_o ⁷ fijo. Reflejar a S_o es sencillo de forma ordinaria, ya que sigue la ley de reflexión, i.e.

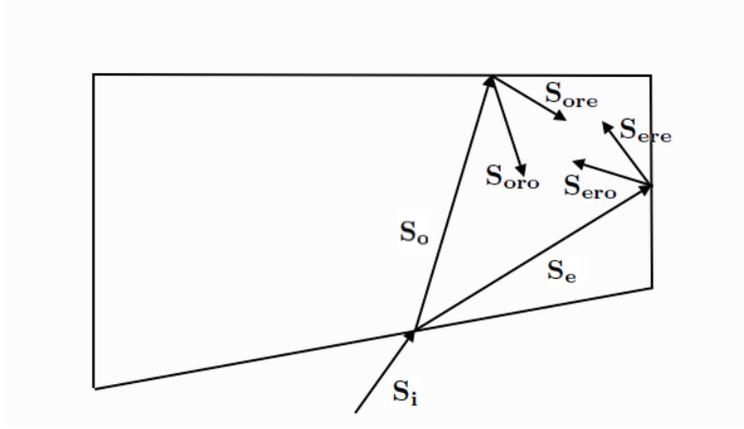


Figura 2.13: Se ilustra la reflexión dentro de materiales birrefringentes uniaxiales.

$$\theta_o = \theta_{oro}, \quad (2.117)$$

donde si el rayo ordinario incidente es en nuestro sistema coordinado particular

$$\mathbf{S}_o = (0, \eta_o, \zeta_o), \quad (2.118)$$

su reflejo ordinario será

$$\mathbf{S}_{oro} = (0, \eta_o, -\zeta_o). \quad (2.119)$$

Para su reflejo extraordinario, que nombraremos \mathbf{S}_{ore} , podemos utilizar la fórmula de la segunda envolvente que calculamos en la sección de refracción de entrada, con lo que

$$\mathbf{g}_{ore} = \frac{1}{\Gamma_{er}} (0, \eta_o(N\beta\gamma\eta_o + \Delta), -(\delta_o^2 + N\beta\eta_o^2)), \quad (2.120)$$

en el que

$$\Gamma_{er} = \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta\eta_o^2)^2 + \eta_o^2(N\beta\gamma\eta_o + \Delta)^2}, \quad (2.121)$$

y el rayo reflejado estará dado por

$$\mathbf{S}_{ore} = \begin{pmatrix} \xi_{ore} \\ \eta_{ore} \\ \zeta_{ore} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{er}} \left\{ n_o^2 \begin{pmatrix} -N\alpha\beta\eta_o \\ (n_e^2 + N\alpha^2)\eta_o \\ -\Delta \end{pmatrix} + \gamma N \Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.122)$$

con

$$\delta_{er} = n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma - n_o^2 \eta_o \beta)^2}. \quad (2.123)$$

donde se siguen utilizando las definiciones antes dadas de

$$\begin{aligned} N &= n_o^2 - n_e^2 \\ \Gamma &= n_o^2 - N\gamma^2 \\ \delta_o^2 &= n_e^2 - n_o^2 \eta_o^2 \\ \Delta^2 &= n_e^2 \Gamma - n_o^2 \eta_o^2 (n_e^2 + N\alpha^2). \end{aligned}$$

⁷La reflexión de un rayo extraordinario incidente es más compleja dado a que su índice puede variar de n_e a n_o , lo cual requeriría en primera instancia saber su origen, i.e. la refracción que le dio origen.

Condiciones para que el rayo reflejado de forma extraordinaria se mantenga en el plano de incidencia

Para obtener las condiciones⁸, nuevamente necesitamos exigir que $\xi_{ore} = 0$, llegando a

$$N\alpha(\gamma\Delta - n_o^2\eta_o\beta) = 0, \quad (2.124)$$

que resultan ser las mismas condiciones que para el caso de refracción. Para ello uno debe de ver que el producto escalar entre la dirección del eje del cristal y el rayo extraordinariamente reflejado es

$$\mathbf{S}_{ore} \cdot \mathbf{A} = n_e^2(n_o^2\eta_o\beta - \gamma\Delta). \quad (2.125)$$

2.4.5 Reflexión de rayos extraordinarios dentro de materiales birrefringentes uniaxiales

Para poder reflejar a un rayo extraordinario incidente lo que se puede utilizar es el principio de reversibilidad, véase la fig.(2.14), del que concluimos que si calculamos el rayo ordinario ficticio correspondiente, sólo bastaría utilizar las ecuaciones de la sección anterior. Tenemos que dado un S_e , podemos calcular un rayo ordinario

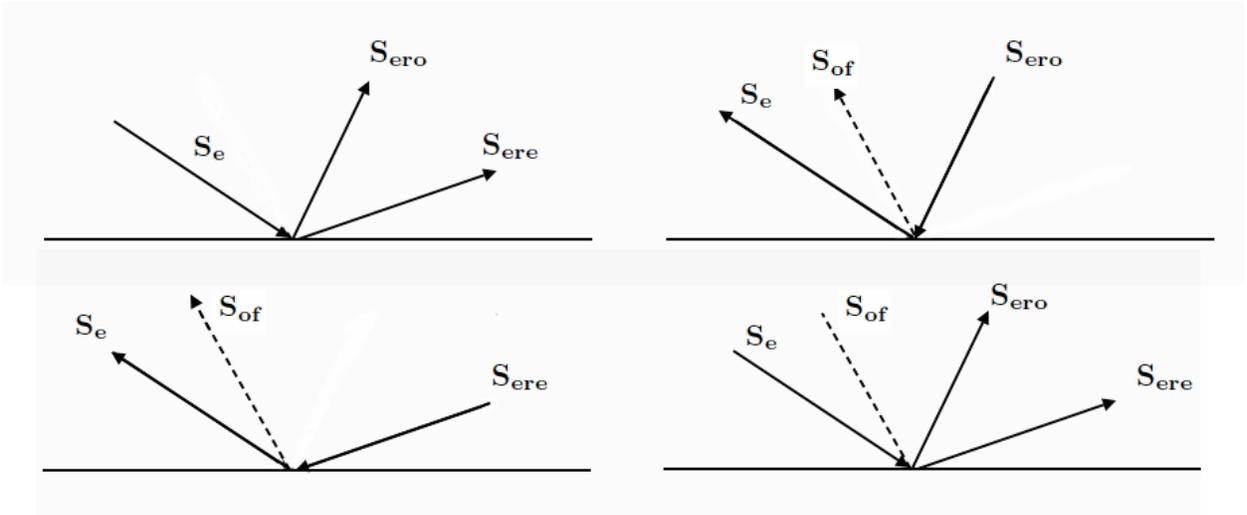


Figura 2.14: Se muestra como el principio de reversibilidad puede ser utilizado para obtener las respectivas reflexiones a partir de la reflexión de un rayo ordinario ficticio.

ficticio utilizando (2.115), por lo que de las ecuaciones de la reflexión para rayos ordinarios obtenemos para la reflexión ordinaria

$$\mathbf{S}_{ero} = \begin{pmatrix} \xi_{ero} \\ \eta_{ero} \\ \zeta_{ero} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o\mu} \begin{pmatrix} N\alpha \cos \psi \\ n_e^2\eta_e + N\beta \cos \psi \\ -\Delta_e \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

donde se usan las definiciones

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A} \\ \mu &= \sqrt{n_e^2 \sin^2 \psi + n_o^2 \cos^2 \psi} \\ \Delta_e &= \sqrt{n_e^2 N \sin^2 \psi + (N\gamma \cos \psi + n_e^2 \zeta_e)^2}. \end{aligned}$$

⁸Se van a obtener las mismas condiciones que para la refracción, esto lo concluimos en el primer capítulo.

Mientras que para la reflexión extraordinaria el rayo sería

$$\mathbf{S}_{\text{ere}} = \begin{pmatrix} \xi_{\text{ere}} \\ \eta_{\text{ere}} \\ \zeta_{\text{ere}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{\text{er}}} \left\{ n_o^2 \begin{pmatrix} -N\alpha\beta\eta_{\text{ero}} \\ (n_e^2 + N\alpha^2)\eta_{\text{ero}} \\ -\Delta \end{pmatrix} + \gamma N\Delta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.127)$$

y la dirección de su vector de onda

$$\mathbf{g}_{\text{ere}} = \frac{1}{\Gamma_{\text{er}}} (0, \eta_{\text{ero}}(N\beta\gamma\eta_{\text{ero}} + \Delta), -(\delta_o^2 + N\beta\eta_{\text{ero}}^2)), \quad (2.128)$$

en donde como rayo ordinario se utilizará el rayo ordinariamente reflejado \mathbf{S}_{ero} , i.e.

$$\begin{aligned} \delta_{\text{er}} &= n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma - n_o^2 \eta_{\text{ero}} \beta)^2} \\ \Gamma_{\text{er}} &= \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta\eta_{\text{ero}}^2)^2 + \eta_{\text{ero}}^2 (N\beta\gamma\eta_{\text{ero}} + \Delta)^2}. \end{aligned}$$

Condiciones para que el rayo reflejado de forma extraordinaria se mantenga en el plano de incidencia

No hay nada que agregar, se tienen las mismas tres condiciones para que el rayo se mantenga en el plano de incidencia: eje del cristal en dicho plano, que el material no sea birrefringente, y que el rayo extraordinario sea ortogonal al eje del cristal. Todo esto debido a que la fórmula de reflexión se basa en otros dos casos ya discutidos y que comparten las mismas condiciones.

2.5 Aproximación paraxial

2.5.1 Refracción

Como se mencionó en el capítulo anterior, en la sección 1.8, la aproximación paraxial es muy útil ya que puede ser utilizada para obtener los focos de una lente y describir a grandes rasgos el comportamiento de un sistema óptico. La aproximación paraxial es únicamente válida para rayos cuyo ángulo de incidencia, θ_i , cumpla $\theta_i \ll 1$, tal que $\sin \theta_i \approx \theta_i$ y $\theta_i^2 \approx 0$. Entonces los rayos incidentes serán de la forma

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{g}_i = (0, \theta_i, 1), \quad (2.129)$$

por lo que el rayo ordinario (2.22) quedará

$$\mathbf{S}_o = (\xi_o, \eta_o, \zeta_o) = (0, \frac{n_i}{n_o} \theta_i, 1), \quad (2.130)$$

y la refracción de salida de un rayo ordinario incidente con ángulo de incidencia θ_o ,

$$\mathbf{S}_f = (\xi_f, \eta_f, \zeta_f) = (0, \frac{n_o}{n_i} \theta_o, 1). \quad (2.131)$$

En cuanto al rayo extraordinario, dado por (2.85), la aproximación paraxial no es de mucha utilidad sin fijar la dirección del eje del cristal, \mathbf{A} , sin embargo, sí es útil para la dirección del vector de onda extraordinario, dado por (2.62). Los términos comunes definidos en las secciones anteriores se convierten en

$$\begin{aligned} N &= n_o^2 - n_e^2 \\ \delta_o^2 &= n_e^2 - n_o \eta_o^2 \approx n_e^2 \\ \Gamma &= n_o^2 - N\gamma^2 \\ \Delta^2 &= n_e^2 \Gamma - n_o^2 \eta_o^2 (n_e^2 + N\alpha^2) \approx n_e^2 \Gamma \\ \Gamma_e &= \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta^2 \eta_o^2)^2 + \eta_o^2 (N\beta\gamma\eta_o - \Delta)^2} \approx n_e^2, \end{aligned} \quad (2.132)$$

por lo que la dirección del vector de onda estará dada por

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \sqrt{\Gamma}}{n_o n_e} \theta_i, 1 \right), \quad (2.133)$$

concordando con la expresión (1.169) obtenida en el primer capítulo usando teoría electromagnética, aunque cabe señalar que se usó aún otra aproximación en dichas ecuaciones, por lo que parecería que la metodología a partir del modelo de Huygens pierde algo de información (que se hace evidente al realizar la aproximación paraxial).

Nuevamente, para ahondar un poco en la aproximación paraxial debemos indicar la dirección del eje del cristal. Estudiaremos los casos en los que el eje del cristal es cercano o igual a la normal en el punto de incidencia, $\hat{\mathbf{n}}$, y ortogonal o cercano a la ortogonalidad con respecto a la normal, i.e., paralelo a la superficie refractiva. Se mostrará que el modelo concuerda con las fórmulas anteriores obtenidas en el capítulo anterior (al menos ya sabemos que el vector de onda lo hará, pero falta demostrarlo para el rayo), al igual que con las de [15].

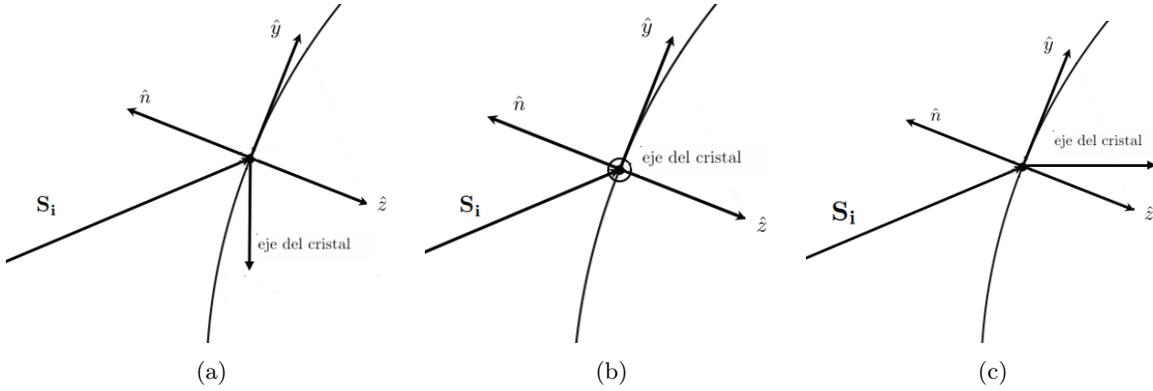


Figura 2.15: De izquierda a derecha: ejemplo de un eje del cristal casi ortogonal a la normal pero yaciendo en el plano de incidencia, un eje del cristal casi ortogonal al plano de incidencia, y un eje del cristal cercano a ser paralelo a la normal.

Eje del cristal ortogonal a la normal o cercano a la ortogonalidad

Si fijamos $\gamma \ll 1$, tal que $\gamma^2 \approx 0$, que para un lente significaría que el eje del cristal es (casi) ortogonal a la normal, obtenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma &\approx n_o^2 \\ \Delta^2 &\approx n_e^2 n_o^2 \\ \delta_e &= n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma + n_o^2 \eta_o \beta)^2} \approx n_e n_o^3, \end{aligned} \quad (2.134)$$

con lo que se llega a algo similar a la ley de Snell para la dirección del vector de onda,

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \theta_i}{n_e}, 1 \right), \quad (2.135)$$

y el rayo extraordinario

$$\mathbf{S}_e \approx \frac{1}{n_e n_o^3} \begin{pmatrix} -\alpha N n_o (n_i \theta_i \beta + n_e \gamma) \\ n_o n_i (n_e^2 + N \alpha^2) \theta_i - N n_o n_e \beta \gamma \\ n_e n_o^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha N (n_i \theta_i \beta + n_e \gamma)}{n_e n_o^2} \\ \frac{n_i (n_o^2 - N \beta^2)}{n_e n_o^2} \theta_i - \frac{N \beta \gamma}{n_o^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.136)$$

donde para el último paso se utilizó que $\alpha^2 = 1 - \gamma^2 - \beta^2 \approx 1 - \beta^2$. Esta expresión es idéntica a la (1.175) encontrada en el primer capítulo y por lo tanto sabemos que obtendremos los mismos resultados de aquí en adelante. Sin embargo, se volverán a deducir en los casos con $\beta \approx 1$, véase la fig.(2.15a),

$$\mathbf{S}_e \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i n_e}{n_o^2} \theta_i - \frac{\gamma N}{n_o^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.137)$$

es decir, el rayo refractado se mantendrá en el plano de incidencia, y $\alpha \approx 1$, véase la fig.(2.15b),

$$\mathbf{S}_e \approx \begin{pmatrix} -\frac{N\gamma}{n_o^2} \\ \frac{n_i}{n_e} \theta_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.138)$$

que para el último, su fórmula es muy similar a la del vector de onda, salvo por la componente que obliga a que el rayo se escape del plano de incidencia, pero que sabemos, debido a sus términos $N < 1$ y $\gamma < 1$, que será muy chica. Nótese que si $\alpha = 1$, el rayo se mantendrá dentro del plano de incidencia.

Falta considerar la refracción de salida, que supondremos pasará a un medio con índice n_{i2} . Para ello vemos primero que los términos comunes definidos en su fórmula se convierten en

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \beta \eta_e + \gamma \zeta_e \approx \beta \theta_i + \gamma \\ \mu &= \sqrt{n_e^2 \sin^2 \psi + n_o^2 \cos^2 \psi} \approx n_e \\ \Delta_e &= \sqrt{n_e^2 N \sin^2 \psi + (N\gamma \cos \psi + n_e^2 \zeta_e)^2} \approx n_e n_o, \end{aligned} \quad (2.139)$$

con lo que el rayo ordinario ficticio queda dado por

$$\mathbf{S}_{of} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha(\beta\theta_i + \gamma)}{\frac{n_e n_o}{(n_o^2 \beta^2 - n_e^2 \alpha^2) \theta_i} + \frac{N\beta\gamma}{n_o n_e}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.140)$$

y el rayo final

$$\mathbf{S}_{ef} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha(\beta\theta_i + \gamma)}{\frac{n_e n_{i2}}{(n_o^2 \beta^2 - n_e^2 \alpha^2) \theta_i} + \frac{N\beta\gamma}{n_e n_{i2}}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.141)$$

De aquí se puede obtener que cuando $\beta \approx 1$, véase la fig.(2.15a),

$$\mathbf{S}_{ef} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_o^2}{n_e n_{i2}} \theta_i + \frac{N\gamma}{n_e n_{i2}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.142)$$

que se mantiene en el plano de incidencia, y cuando $\alpha \approx 1$, véase la fig.(2.15b),

$$\mathbf{S}_{ef} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\gamma}{n_e n_{i2}} \\ \frac{n_e}{n_{i2}} \theta_i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.143)$$

el cual ya no se mantiene en el plano de incidencia, a menos que $\alpha = 1$.

Eje del cristal paralelo a la normal o cercano al paralelismo

Si se fija $\gamma \approx 1$, i.e., con el eje del cristal paralelo a la normal o casi, véase la fig.(2.15c), se obtiene que $\Gamma \approx n_e^2$, por lo que el vector de onda extraordinario se refracta igual que el ordinario, ya que

$$\mathbf{g}_e \approx \left(0, \frac{n_i \theta_i}{n_o}, 1 \right). \quad (2.144)$$

En cuanto al rayo extraordinario, primero necesitamos escribir los términos comunes que se convierten en

$$\begin{aligned} \Gamma &\approx n_e^2 \\ \Delta^2 &\approx n_e^4 \\ \delta_e &\approx n_e^4, \end{aligned} \quad (2.145)$$

teniendo esto, su expresión se vuelve

$$\mathbf{S}_e \approx \begin{pmatrix} -\frac{\alpha N}{n_e^2} \\ \frac{n_i n_o}{n_e^2} \theta_i - \frac{N\beta}{n_e^2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.146)$$

Para la refracción de salida del rayo extraordinario, si consideramos que pasará a un medio con índice n_{i2} , los términos comunes serán

$$\begin{aligned} \cos \psi &\approx 1 \\ \mu &\approx n_o \\ \Delta_e &\approx n_o^2, \end{aligned} \quad (2.147)$$

con lo que la expresión del rayo ordinario ficticio será

$$\mathbf{S}_{of} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha}{n_o^2} \\ \frac{n_e^2}{n_o^2} \theta_i + \frac{N\beta}{n_o^2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.148)$$

y el rayo final refractado

$$\mathbf{S}_{ef} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha}{n_o n_{i2}} \\ \frac{n_e^2}{n_o n_{i2}} \theta_i + \frac{N\beta}{n_o n_{i2}} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.149)$$

2.5.2 Reflexión de rayos ordinarios

Al igual que se hizo en la sección pasada, bajo la aproximación paraxial obtendremos las fórmulas de reflexión dentro de un material birrefringente, haciendo hincapié en los mismos casos particulares. Como mencionamos en la sección anterior, la aproximación paraxial es únicamente válida para rayos cuyo ángulo de incidencia, θ_i , cumpla $\theta_i \ll 1$, tal que $\sin \theta_i \approx \theta_i$ y $\theta_i^2 \approx 0$. En el caso de las reflexiones vamos a distinguir a rayos incidentes extraordinarios y ordinarios, por lo que $\theta_i = \theta_e$ ó $\theta_i = \theta_o$.

De esta forma, dado un rayo ordinario

$$\mathbf{S}_o = (0, \theta_i, 1), \quad (2.150)$$

tendremos que la reflexión ordinaria del rayo ordinario será

$$\mathbf{S}_{oro} = \mathbf{g}_{oro} \approx (0, \theta_i, -1). \quad (2.151)$$

En cuanto a la reflexión extraordinaria de un rayo ordinario incidente, la aproximación paraxial nuevamente no es de mucha utilidad sin fijar la dirección del eje del cristal. Sin embargo, sí es concluyente en la dirección

del vector de onda. Los términos comunes a la reflexión extraordinaria quedan

$$\begin{aligned}
N &= n_o^2 - n_e^2 \\
\delta_o^2 &= n_e^2 - n_o\eta_o^2 \approx n_e^2 \\
\Gamma &= n_o^2 - N\gamma^2 \\
\Delta^2 &= n_e^2\Gamma - n_o^2\eta_o^2(n_e^2 + N\alpha^2) \approx n_e^2\Gamma \\
\Gamma_{er} &= \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta^2\eta_o^2)^2 + \eta_o^2(N\beta\gamma\eta_o + \Delta)^2} \approx n_e^2,
\end{aligned} \tag{2.152}$$

con lo que la dirección del vector de onda es

$$\mathbf{g}_{ore} \approx \left(0, \frac{\sqrt{\Gamma}}{n_e}\theta_i, -1 \right). \tag{2.153}$$

Para ahondar más en el alcance de la aproximación paraxial es necesario fijar la dirección del eje del cristal, y estudiaremos los mismos casos que en la refracción.

Eje del cristal ortogonal a la normal o cercanos a la ortogonalidad

Si fijamos $\gamma \ll 1$, tal que $\gamma^2 \approx 0$, que para un lente significaría que el eje del cristal es (casi) ortogonal a la normal, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma &\approx n_o^2 \\
\Delta^2 &\approx n_e^2 n_o^2 \\
\delta_{er} &= n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma + n_o^2 \eta_o \beta)^2} \approx n_e n_o^3,
\end{aligned} \tag{2.154}$$

con lo que se llega a algo similar a la ley de Snell para la dirección del vector de onda (sólo que en reversa)

$$\mathbf{g}_{ore} = \left(0, \frac{n_o}{n_e}\theta_i, -1 \right), \tag{2.155}$$

y un rayo

$$\mathbf{S}_{ore} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha\gamma}{n_o^2} - \frac{N\alpha\beta}{n_e n_o} \theta_i \\ \frac{N\gamma\beta}{n_o^2} + \frac{n_e^2 + N\alpha^2}{n_e n_o} \theta_i \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.156}$$

Si aún escogemos $\beta \approx 1$, $\alpha \ll 1$ y $\gamma \ll 1$, es decir, con el eje del cristal yaciendo o cercano a yacer en el plano de incidencia, el rayo del reflejo extraordinario quedará expresado como

$$\mathbf{S}_{ore} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_e}{n_o}\theta_i + \frac{N\gamma}{n_o^2} \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.157}$$

que se puede apreciar que se mantendrá en el plano de incidencia bajo este régimen. Si en cambio escogemos $\alpha \approx 1$, $\beta \ll 1$ y $\gamma \ll 1$, i.e., el eje del cristal cerca de ser ortogonal al plano de incidencia, el rayo reflejado será

$$\mathbf{S}_{ore} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\gamma}{n_o^2} \\ \frac{n_e}{n_o}\theta_i \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.158}$$

que es idéntico al vector de onda, salvo por el término que lo obliga a salirse del plano. Sin embargo, dicho término es la componente más pequeña, por uno o dos órdenes de magnitud debido a la N .

Eje del cristal paralelo a la normal o cercano al paralelismo

Si se fija $\gamma \approx 1$, i.e., con el eje del cristal paralelo a la normal o casi, véase la fig.(2.15c), se obtiene que

$$\begin{aligned}\Gamma &\approx \bar{n}_e^2 \\ \Delta^2 &\approx n_e^4 \\ \delta_{er} &\approx n_e^4,\end{aligned}\tag{2.159}$$

por lo que la dirección del vector de onda es

$$\mathbf{g}_{ore} = (0, \theta_i, -1),\tag{2.160}$$

mientras que el rayo será

$$\mathbf{S}_{ore} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha}{n_e^2} \\ \frac{n_o^2}{n_e^2}\theta_i + \frac{N\beta}{n_e^2} \\ -1 \end{pmatrix}.\tag{2.161}$$

2.5.3 Reflexión de rayos extraordinarios

Dado un rayo extraordinario incidente,

$$\mathbf{S}_e = (0, \theta_i, 1),\tag{2.162}$$

con $\theta_i \ll 1$ no se puede concluir nada significativo, ni siquiera para la dirección del vector de onda, sin fijar la dirección del eje del cristal.

Eje del cristal ortogonal a la normal o cercanos a la ortogonalidad

Si fijamos $\gamma \ll 1$, tal que $\gamma^2 \approx 0$, que para un lente significaría que el eje del cristal es (casi) ortogonal a la normal, obtenemos que los términos comunes se convierten en

$$\begin{aligned}\cos \psi &= \beta\eta_e + \gamma\zeta_e \approx \beta\theta_e + \gamma \\ \mu &= \sqrt{n_e^2 \sin^2 \psi + n_o^2 \cos^2 \psi} \approx n_e \\ \Delta_e &= \sqrt{n_e^2 N \sin^2 \psi + (N\gamma \cos \psi + n_e^2 \zeta_e)^2} \approx n_e n_o,\end{aligned}\tag{2.163}$$

con lo que el rayo del reflejo ordinario es

$$\mathbf{S}_{ero} = \begin{pmatrix} \xi_{ero} \\ \eta_{ero} \\ \zeta_{ero} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha\beta}{n_o n_e} \theta_i + \frac{N\alpha\gamma}{n_o n_e} \\ \frac{(n_e^2 + N\beta^2)}{n_o n_e} \theta_i + \frac{N\beta\gamma}{n_o n_e} \\ -1 \end{pmatrix}.\tag{2.164}$$

Si escogiéramos aún $\beta \approx 1$, el rayo se convertiría en

$$\mathbf{S}_{ero} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_o}{n_e} \theta_i + \frac{N\gamma}{n_o n_e} \\ -1 \end{pmatrix},\tag{2.165}$$

que se queda contenido dentro del plano de incidencia, mientras que si se escoge $\alpha \approx 1$

$$\mathbf{S}_{ero} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\gamma}{n_o n_e} \\ \frac{n_o}{n_e} \theta_i \\ -1 \end{pmatrix}.\tag{2.166}$$

Falta obtener la aproximación para la reflexión extraordinaria, \mathbf{S}_{ere} . Para ello primero debemos de calcular los términos comunes,

$$\begin{aligned}
N &= n_o^2 - n_e^2 \\
\delta_o^2 &= n_e^2 - n_o \eta_{ero}^2 \approx n_e^2 \\
\Gamma &= n_o^2 - N\gamma^2 \approx n_o^2 \\
\Delta^2 &= n_e^2 \Gamma - n_o^2 \eta_{ero}^2 (n_e^2 + N\alpha^2) \approx n_e^2 n_o^2 \\
\Gamma_{er} &= \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta^2 \eta_{ero}^2)^2 + \eta_{ero}^2 (N\beta\gamma \eta_{ero} + \Delta)^2} \approx n_e^2 \\
\delta_{er} &= n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta\gamma + n_o^2 \eta_{ero} \beta)^2} \approx n_e n_o^3,
\end{aligned} \tag{2.167}$$

con ellos, dicha reflexión tendrá una dirección del vector de onda

$$\mathbf{g}_{ere} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_e^2 + N\beta^2}{n_e^2} \theta_i + \frac{N\beta\gamma}{n_e^2} \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.168}$$

y será un rayo

$$\mathbf{S}_{ere} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\gamma}{n_o^2} - \frac{N\alpha\beta}{n_e n_o} \eta_{ero} \\ \frac{n_e^2 + N\alpha^2}{n_e n_o} \eta_{ero} + \frac{N\beta\gamma}{n_o^2} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.169}$$

Si se fija $\beta \approx 1$, la reflexión extraordinaria estará dada por

$$\mathbf{g}_{ere} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_o^2}{n_e^2} \theta_i + \frac{N\gamma}{n_e^2} \\ -1 \end{pmatrix} \tag{2.170}$$

y

$$\mathbf{S}_{ere} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_e}{n_o} \eta_{ore} + \frac{N\gamma}{n_o^2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_i + \frac{2N\gamma}{n_o^2} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{2.171}$$

Mientras que si se fija $\alpha \approx 1$, la reflexión extraordinaria será

$$\mathbf{g}_{ere} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_i \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.172}$$

y tendrá un rayo

$$\mathbf{S}_{ere} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\gamma}{n_o^2} \\ \frac{n_o}{n_e} \eta_{ero} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N\gamma}{n_o^2} \\ \theta_i \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{2.173}$$

que es como si sufriera una reflexión común, salvo por la componente ortogonal al plano del incidente, que aunque pequeña no puede despreciarse del todo.

Eje del cristal paralelo a la normal o cercano al paralelismo

Si se fija $\gamma \approx 1$, i.e. con el eje del cristal paralelo a la normal o casi, véase la fig.(2.15c), los términos comunes para la reflexión ordinaria⁹ se vuelven

$$\begin{aligned}
\cos \psi &\approx 1 \\
\mu &\approx n_o \\
\Delta_e &\approx n_o^2,
\end{aligned} \tag{2.174}$$

⁹Es importante no confundir la reflexión ordinaria con la reflexión de un rayo ordinario. En general en las reflexiones se tendrán reflexiones ordinarias y extraordinarias, lo que variará es si el rayo incidente era ordinario o extraordinario.

con lo que

$$\mathbf{S}_{ero} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha}{n_o^2} \\ \frac{n_e^2}{n_o^2}\theta_i + \frac{N\beta}{n_o^2} \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.175)$$

En cuanto a la reflexión extraordinaria, los términos comunes se vuelven

$$\begin{aligned} N &= n_o^2 - n_e^2 \\ \delta_o^2 &= n_e^2 - n_o\eta_{ero}^2 \approx n_e^2 \\ \Gamma &= n_o^2 - N\gamma^2 \approx n_e^2 \\ \Delta^2 &= n_e^2\Gamma - n_o^2\eta_{ero}^2(n_e^2 + N\alpha^2) \approx n_e^2n_o^2 \\ \Gamma_{er} &= \sqrt{(\delta_o^2 + N\beta^2\eta_{ero}^2)^2 + \eta_{ero}^2(N\beta\gamma\eta_{ero} + \Delta)^2} \approx n_e^2 \\ \delta_{er} &= n_e\sqrt{n_o^2\Gamma^2 - N(\Delta\gamma + n_o^2\eta_{ero}\beta)^2} \approx n_en_o^3, \end{aligned} \quad (2.176)$$

por lo que la dirección de propagación del frente de onda extraordinario será

$$\mathbf{S}_{ere} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_e^2}{n_o^2}\theta_i + \frac{N\beta}{n_o^2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.177)$$

y tendrá un rayo

$$\mathbf{S}_{ere} \approx \begin{pmatrix} \frac{N\alpha}{n_e^2} \\ \frac{n_o^2}{n_e}\eta_{ero} + \frac{N\beta}{n_e^2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N\alpha}{n_e^2} \\ \theta_i + \frac{2N\beta}{n_e^2} \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.178)$$

Capítulo 3

Traza de rayos

En este capítulo se desarrollará el trazo de rayos en placas plano-paralelas y lentes que tengan por superficies refractivas cuádricas de revolución, aunque se hará énfasis en las lentes esféricas, en particular, para la aproximación paraxial y las matrices de transferencia y refracción.

Se explicarán los sistemas coordenados comúnmente utilizados para el trazo de rayos y los que serán utilizados, así como se propone un algoritmo para el trazo de rayos utilizando, ya sea, las ecuaciones provenientes de la teoría formal electromagnética o del método de Huygens, deducidas en los capítulos 1 y 2 respectivamente. Sin embargo, se dará prioridad al último ya que está en términos del ángulo de incidencia.

Por último se realizará la aproximación paraxial para obtener las matrices de transferencia y refracción y así obtener una expresión para los focos de varios tipos de lentes y discutir la corrección realizada al artículo de Avendaño y Rosete [15] para las lentes plano convexas, al igual que el astigmatismo que pareciera inherente a los rayos extraordinarios y que para las lentes plano convexas es dependiente de la orientación de estas.

3.1 Preliminares

Para realizar el trazo de rayos es necesario introducir el concepto de *punto conocido* que es ampliamente utilizado, al igual que se debe establecer las superficies refractivas que se estudiarán, que en nuestro caso son cuádricas de revolución, e.g. elipsoides, esferas, hiperboloides, entre otras.

3.1.1 Punto conocido

Primeramente, definiremos la ecuación de un rayo, que geoméricamente es representado por una recta, de la forma

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_o + t\mathbf{S}, \quad (3.1)$$

donde \mathbf{S} es el vector de dirección del rayo, i.e. los cosenos directores del rayo y t un parámetro libre, análogo a la distancia recorrida. Dada una cuádrlica como superficie refractiva, al plano tangente al vértice o polo de dicha cuádrlica se le denominará plano frontal, y por comodidad, se escogerá en el sistema local del punto conocido, SLP, como $z=0$. Comúnmente se define al punto conocido como la intersección del rayo incidente \mathbf{S}_i con el plano frontal

$$P_z(t') = 0 \implies t' = -\frac{P_{oz}}{S_z}. \quad (3.2)$$

Sin embargo, en el caso en el que el \mathbf{S}_i sea paralelo al plano frontal, es decir, $S_z = 0$, el punto de intersección estará indefinido. Para evitar esta indefinición, se puede definir como punto conocido al pie de la perpendicular al rayo incidente trazada desde el origen de coordenadas, \mathbf{P}_p . Véase la fig.(3.1). Por el dibujo anterior

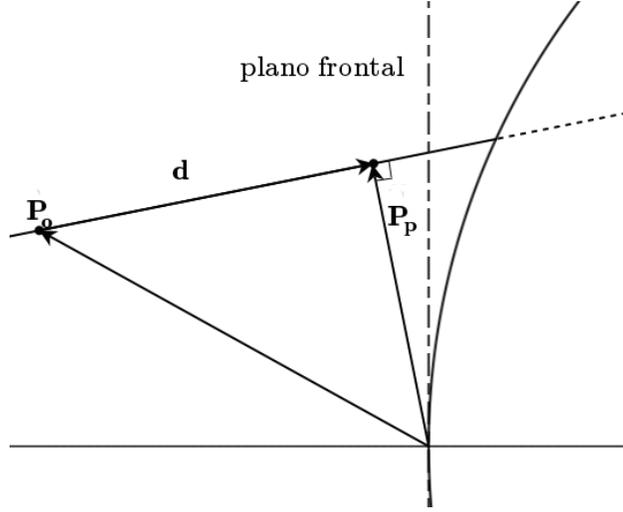


Figura 3.1: Punto conocido al pie de la perpendicular al origen, que nombraremos \mathbf{P}_p

se puede ver que el vector \mathbf{P}_p puede ser expresado de la siguiente forma

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{P}_o + \mathbf{d} = \mathbf{P}_o + d\mathbf{S}_i, \quad (3.3)$$

como queremos el punto al pie de la perpendicular, sabemos que $\mathbf{P}_p \perp \mathbf{d}$, por lo que se puede llegar a la expresión de la distancia

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_p \cdot \mathbf{d} &= 0 = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{P}_o + \mathbf{d}) = d^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{P}_o \\ d^2 &= d(x_o S_x + y_o S_y + z_o S_z) \\ \overline{P_o P_p} &= d = t' = x_o S_x + y_o S_y + z_o S_z \end{aligned} \quad (3.4)$$

Habiendo determinado este parámetro, sólo resta sustituirlo en las expresiones de (3.1) para obtener el punto conocido. La nueva ecuación del rayo resulta

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_p + t\mathbf{S}_i \quad (3.5)$$

3.1.2 Punto de intersección

En este trabajo se utilizan como superficies de refracción las lentes cuádricas y planos, que pueden ser expresados de forma general con una misma ecuación, pero utilizando dos parámetros: la excentricidad, e , y el radio de curvatura, R . A partir de la definición de una cuádrlica, como el *lugar geométrico* de los puntos P tales que su distancia al punto fijo F (foco) y a la recta/plano ℓ , llamada directriz, tienen una razón fija e , excentricidad, obtenemos

$$d(P, F) = e \cdot d(P, \ell) \quad (3.6)$$

Para una cuádrlica cuyo vértice se encuentre en el eje z y éste mismo sea uno de sus ejes principales, se puede dejar como parámetros libres A y B con la finalidad de imponer como condición que el vértice o polo se encuentre justo en el origen, véase la fig.(3.2). La ecuación (3.6) queda

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - A)^2} = e \cdot |z - B| \quad (3.7)$$

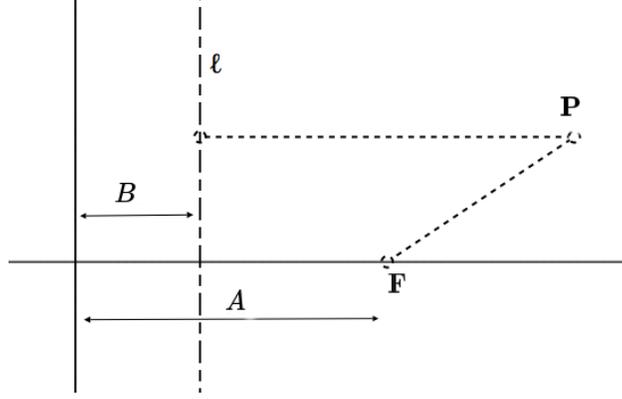


Figura 3.2: Definición general de una cuádrica, a partir de la distancia a un punto F, foco, y a un plano/recta ℓ , directriz.

y con un poco de álgebra se llega a la expresión

$$(1 - e^2)z^2 + x^2 + y^2 - 2z(A - B) + A^2 - e^2B^2 = 0. \quad (3.8)$$

Para imponer que el vértice o polo de la cuádrica se encuentre en el origen, sólo se necesita que el origen cumpla con la ecuación (3.8), ya que al ser el eje \mathbf{Z} su eje principal o de simetría, el o los vértices de las cuádricas serán los únicos puntos en dicho eje. Dando como condición

$$A = Be, \quad (3.9)$$

y reconociendo de la fig.(3.2) que la expresión $A - B$ es denotada en la literatura como p obtenemos

$$(1 - e^2)z^2 + x^2 + y^2 - 2pz = 0, \quad (3.10)$$

donde

$$A = \frac{ep}{e - 1}, \quad B = \frac{p}{e - 1}. \quad (3.11)$$

Geoméricamente, p sería análogo al radio de curvatura (es idéntico en el caso de la esfera $e = 0$), R , y para dar más intuición, en el caso específico de la parábola, p es el doble de la distancia del vértice al foco. Reconociendo esto y renombrando $K = -e^2$ como la constante cónica, se llega a

$$[(K + 1)z^2 + x^2 + y^2] \frac{1}{R} - 2z = 0. \quad (3.12)$$

Puede verse que con la ecuación (3.12) se puede rescatar inclusive el caso del plano $x = 0$, donde $R \rightarrow \infty$. Véase la fig.(3.3). Una vez expresada la superficie de refracción, para encontrar el punto de intersección sólo resta sustituir en la ecuación (3.12) la ecuación del rayo a partir del punto conocido (3.5), obteniendo

$$\begin{aligned} (x_p + tS_x)^2 + (y_p + tS_y)^2 + (z_p + tS_z)^2(1 + K) - 2R(z_p + tS_z) &= 0, \\ (1 + KS_z^2)t^2 + 2[x_pS_x + y_pS_y + z_pS_z(1 + K) - RS_z]t + x_p^2 + y_p^2 + z_p^2(1 + K) - 2Rz_p &= 0 \\ (1 + KS_z^2)t^2 + 2[\mathbf{P}_p \cdot \mathbf{S}_i + Kz_pS_z - RS_z]t + P_p^2 + (Kz_p - 2R)z_p &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y recordando que por construcción $\mathbf{P}_p \cdot \mathbf{S}_i = 0$

$$at^2 + bt + c = 0, \quad (3.14)$$

donde

$$a = 1 + KS_z^2, \quad b = 2(Kz_p - R)S_z, \quad c = P_p^2 + (Kz_p - 2R)z_p,$$

la cual puede ser resuelta de forma analítica para t . En caso de tener más de una intersección, $P_I(t_i^*)$'s, habrá de escogerse la que corresponda a la t^* cuyo valor absoluto sea el menor.

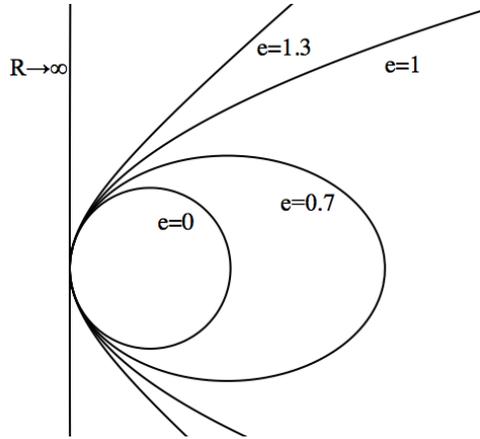


Figura 3.3: Corte con el plano YZ: cuádricas con distintas excentricidades y radios de curvatura.

3.2 Sistemas coordenados

En este trabajo se utilizarán distintos sistemas coordenados, uno global para todo el sistema de lentes, y los demás, locales.

3.2.1 Sistema global, SG

Para distinguir a este sistema coordenado, se utilizarán variables y coordenadas primadas. El sistema global tendrá al eje Z' paralelo al eje óptico, mientras que los ejes Y' y X' se dejarán libres debido a que sólo se manejarán superficies de revolución con respecto al eje óptico.

Dada una dirección del eje del cristal global A' , esta se puede expresar en términos de un ángulo polar, i.e., el ángulo de éste con respecto al eje óptico, y un ángulo azimutal, véase la fig. (3.4a). De esta forma el eje del cristal se podrá expresar como

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

3.2.2 Sistema local del punto conocido, SLP

Es un sistema trasladado al vértice o polo de la superficie de refracción en cuestión, utilizado para expresar el punto conocido, y sólo es una traslación. Éste es comúnmente usado para el análisis de las aberraciones. Para diferenciar las coordenadas en este sistema de las otras, usaremos coordenadas doblemente primadas. Véase la fig.(3.1).

3.2.3 Sistema local rotado, SLR

Se encontrará centrado en el punto de intersección del rayo con la lente y rotado de tal forma que el plano YZ sea el plano de incidencia. El eje Z será paralelo a la normal a la superficie, \hat{n} , en el punto de intersección, y cuya proyección con respecto al rayo incidente sea positiva. Mientras que para el eje Y se escogerá el

ortogonal cuya proyección con respecto al rayo también sea positiva. Con la restricción de las proyecciones se asegura que los ejes coordenados estén orientados en la dirección de propagación del rayo y tengan valores positivos. Una vez determinados los ejes \mathbf{Y} y \mathbf{Z} , el eje \mathbf{X} se escogerá de tal forma que se tenga un sistema derecho.

Para realizar esto es necesario encontrar primero el punto de intersección del rayo incidente \mathbf{S}_i con la superficie refractante. En nuestro caso sólo consideraremos cuádricas de revolución. Una vez encontrado el punto de intersección, es necesario realizar la rotación del sistema coordenado bajo la convención antes mencionada, en forma resumida:

$$\hat{\mathbf{z}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i}{|\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i|} \hat{\mathbf{n}} = \text{sgn}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{S}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{S}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{z}}\|}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.16)$$

dónde $\text{sgn}()$ es la función signo. Para distinguir las coordenadas en este sistema de los demás, se utilizarán (ξ, η, ζ) . Con esto conseguimos que el rayo incidente \mathbf{S}_i sea de la forma

$$\mathbf{S}_i = (0, \eta_i, \zeta_i). \quad (3.17)$$

En caso de incidencia normal, por lo discutido en los capítulos anteriores, el rayo extraordinario siempre quedará contenido en el plano definido por el eje del cristal y la normal, por lo que puede utilizarse este plano para definir el eje \mathbf{Y} . Sin embargo, para cómputo numérico pueden privilegiarse las direcciones de las coordenadas globales (corrigiéndolas tan sólo por el nuevo eje \mathbf{Z}). Véase la fig.(3.4b).

Los dos vectores primordiales para realizar esta rotación son el vector normal a la superficie y el vector de dirección del rayo incidente. Para obtener el primero se puede simplemente sacar el gradiente de la ecuación (3.12), y como queremos sólo la dirección obtenemos

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\Lambda} (x, y, (K+1)z - R), \quad (3.18)$$

donde

$$\Lambda = \sqrt{x^2 + y^2 + [(K+1)z - R]^2}. \quad (3.19)$$

Es fácil ver que en el caso en que $R \rightarrow \infty$, la normal se convierte en $\hat{\mathbf{n}} = -(0, 0, 1)$, que como esperábamos, coincide con la normal a un plano.

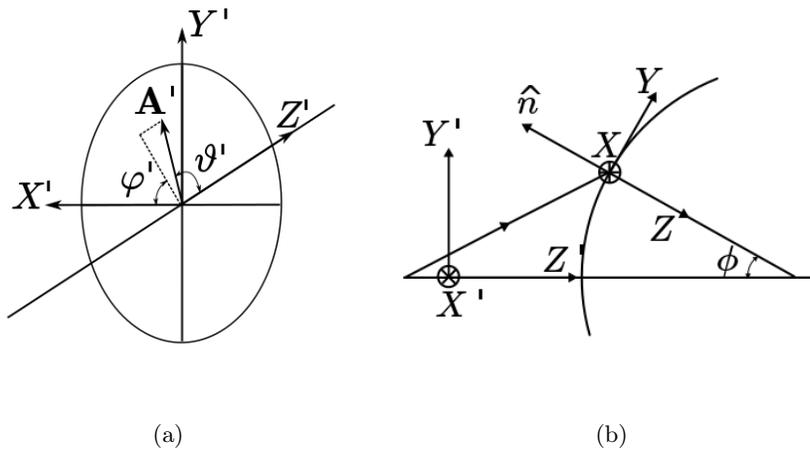


Figura 3.4: (a) Disposición global del eje del cristal \mathbf{A}' , (b) relación entre el sistema coordenado local y global.

3.3 Resumen de fórmulas: utilizando las superficies normales

En esta sección presentamos un resumen de las fórmulas de refracción en materiales uniaxiales, fórmulas que se encuentran en el sistema de referencia local rotado, SLR, descrito en la sección pasada, Eje del cristal

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Refracción

Rayo incidente

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Rayo ordinario y dirección de vector de onda ordinario

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{g}_o = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i}{n_o} \eta_i \\ \sqrt{1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Vector de onda ordinario

$$\mathbf{k}_o = \frac{\omega n_o}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Definiendo

$$N = n_o^2 - n_e^2 \quad (3.24)$$

$$\Gamma = n_o^2 - N\gamma^2. \quad (3.25)$$

Vector de onda extraordinario

$$k_{ey} = \frac{\omega n_i \eta_i}{c}, \quad (3.26)$$

$$k_{ez} = \frac{\omega N n_i \eta_i \beta \gamma + n_o \sqrt{\Gamma n_e^2 + n_i^2 \eta_i^2 [N \beta^2 - \Gamma]}}{\Gamma}, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{k}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{ey} \\ k_{ez} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Rayo extraordinario

$$\mathbf{S}_e = \frac{n_o^2 \mathbf{k}_e - N(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{A}) \mathbf{A}}{\sqrt{n_o^4 k_e^2 - (n_o^4 - n_e^4)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}_e)^2}}. \quad (3.29)$$

Reflexión

Rayo incidente

$$\mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Reflexión ordinaria

$$\mathbf{S}_{or} = \mathbf{g}_{or} = \begin{pmatrix} \xi_{or} \\ \eta_{or} \\ \zeta_{or} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i \eta_i}{n_o} \\ -\sqrt{1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Vector de onda de la reflexión extraordinaria

$$k_{ery} = \frac{\omega n_i \eta_i}{c}, \quad (3.32)$$

$$k_{erz} = \frac{\omega}{c} \frac{N n_i \eta_i \beta \gamma + n_o \sqrt{\Gamma n_e^2 + n_i^2 \eta_i^2 [N \beta^2 - \Gamma]}}{\Gamma}, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{k}_{er} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{ery} \\ k_{erz} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Rayo de la reflexión extraordinaria

$$\mathbf{S}_{er} = \frac{n_o^2 \mathbf{k}_{er} - N(\mathbf{k}_{er} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}}{\sqrt{n_o^4 k_{er}^2 - (n_o^4 - n_e^4)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}_{er})^2}}. \quad (3.35)$$

3.4 Resumen de fórmulas: Modelo de Huygens

En esta sección presentamos un resumen de las fórmulas de refracción en materiales uniaxiales, fórmulas que se encuentran en el sistema de referencia local rotado, SLR, descrito en la sección pasada, en el cual las fórmulas de refracción se simplifican. Si se desean ver las fórmulas de refracción menos restringidas en cuanto al sistema de referencia véase el apéndiceD.

Refracción de entrada

Rayo ordinario

$$\mathbf{S}_o = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i \eta_i}{n_o} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{n_i \eta_i}{n_o}\right)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Definiendo

$$N = n_o^2 - n_e^2, \quad (3.37)$$

$$\delta_o^2 = n_e^2 - n_o^2 \eta_o^2, \quad (3.38)$$

$$\Gamma = n_o^2 - N \gamma^2, \quad (3.39)$$

$$\Delta^2 = n_e^2 \Gamma - n_o^2 \eta_o^2 (n_e^2 + N \alpha^2), \quad (3.40)$$

$$\delta_e = n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta \gamma + n_o^2 \eta_o \beta)^2}, \quad (3.41)$$

$$\Gamma_e = \sqrt{(\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2)^2 + \eta_o^2 (N \beta \gamma \eta_o - \Delta)^2}. \quad (3.42)$$

Rayo extraordinario

$$\mathbf{S}_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_e} \begin{pmatrix} -\alpha N (n_o^2 \beta \eta_o + \Delta \gamma) \\ n_o^2 (n_e^2 + N \alpha^2) \eta_o - N \Delta \beta \gamma \\ \Gamma \Delta \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Dirección del vector de onda extraordinario

$$\mathbf{g}_e = \frac{1}{\Gamma_e} (0, -\eta_o (N \beta \gamma \eta_o - \Delta), (\delta_o^2 + N \beta^2 \eta_o^2)). \quad (3.44)$$

Refracción de salida

Definiendo

$$\cos \psi = (\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}), \quad (3.45)$$

$$\mu = \sqrt{n_e^2 \sin^2 \psi + n_o^2 \cos^2 \psi}, \quad (3.46)$$

$$\Delta_e = \sqrt{n_e^2 N \sin^2 \psi + (N \gamma \cos \psi + n_e^2 \zeta_e)^2}. \quad (3.47)$$

Rayo ordinario ficticio

$$\mathbf{S}_{of} = \begin{pmatrix} \xi_{of} \\ \eta_{of} \\ \zeta_{of} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o \mu} \begin{pmatrix} N \alpha \cos \psi \\ n_e^2 \eta_e + N \beta \cos \psi \\ \Delta_e \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Rayo final

$$\mathbf{S}_{ef} = \begin{pmatrix} \xi_{ef} \\ \eta_{ef} \\ \zeta_{ef} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_o \xi_{of}}{n_{i2}} \\ \frac{n_o \eta_{of}}{n_{i2}} \\ \sqrt{1 - \left(\frac{n_o (\eta_{of} + \xi_{of})}{n_{i2}} \right)^2} \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Reflexión de un rayo ordinario

Reflexión ordinaria

$$\mathbf{S}_{oro} = (0, \quad \eta_o \quad -\zeta_o). \quad (3.50)$$

Definiendo

$$\delta_{er} = n_e \sqrt{n_o^2 \Gamma^2 - N(\Delta \gamma - n_o^2 \eta_o \beta)^2}, \quad (3.51)$$

$$\Gamma_{er} = \sqrt{(\delta_o^2 + N \beta \eta_o^2)^2 + \eta_o^2 (N \beta \gamma \eta_o + \Delta)^2}, \quad (3.52)$$

Rayo de la reflexión extraordinaria

$$\mathbf{S}_{ore} = \begin{pmatrix} \xi_{ore} \\ \eta_{ore} \\ \zeta_{ore} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{er}} \begin{pmatrix} \alpha N (\gamma \Delta - n_o \beta \eta_o) \\ n_o^2 (n_e^2 + N \alpha^2) \eta_o + N \Delta \gamma \beta \\ -\Gamma \Delta \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Dirección del vector de onda de la reflexión extraordinaria

$$\mathbf{g}_{ore} = \frac{1}{\Gamma_{er}} (0, \quad \eta_o (N \beta \gamma \eta_o + \Delta), \quad -(\delta_o^2 + N \beta \eta_o^2)). \quad (3.54)$$

Reflexión de un rayo extraordinario

Rayo de la reflexión ordinaria

$$\mathbf{S}_{ero} = \begin{pmatrix} \xi_{ero} \\ \eta_{ero} \\ \zeta_{ero} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o \mu} \begin{pmatrix} N \alpha \cos \psi \\ n_e^2 \eta_e + N \beta \cos \psi \\ -\Delta_e \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Rayo de la reflexión extraordinaria

$$\mathbf{S}_{ere} = \begin{pmatrix} \xi_{ere} \\ \eta_{ere} \\ \zeta_{ere} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{er}} \begin{pmatrix} N \alpha (\gamma \Delta - n_o^2 \beta \eta_{ero}) \\ n_o^2 (n_e^2 + N \alpha^2) \eta_{ero} + N \Delta \gamma \beta \\ -\Gamma \Delta \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Dirección del vector de onda de la reflexión extraordinaria

$$\mathbf{g}_{ere} = \frac{1}{\Gamma_{er}} (0, \quad \eta_{ero} (N \beta \gamma \eta_{ero} + \Delta), \quad -(\delta_o^2 + N \beta \eta_{ero}^2)). \quad (3.57)$$

En donde se utiliza al rayo \mathbf{S}_{ero} para las definiciones de la fórmula.

3.5 Aproximación paraxial: matrices de transferencia y refracción en lentes esféricas/placas planas

La aproximación paraxial es muy útil ya que puede ser utilizada para obtener los focos de una lente y describir a grandes rasgos el comportamiento de un sistema óptico. En esta sección se recuperarán las fórmulas para lentes derivadas en [15], así como se indicará una corrección a la misma. La aproximación paraxial es únicamente válida para rayos cercanos al eje óptico y/o que forman un ángulo pequeño con éste, en otras palabras, que su ángulo de incidencia cumpla $\theta_i \ll 1$, tal que $\sin \theta_i \approx \theta_i$ y $\theta_i^2 \approx 0$, al igual que el ángulo entre la normal en el punto de incidencia con respecto al eje óptico, que llamaremos ϕ , véase la fig.(3.5a), deberá cumplir que $\phi \ll 1$ y $\sin \phi \approx \phi$ y $\phi^2 \approx 0$. Entonces los rayos incidentes serán de la forma

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{g}_i = (0, \theta_i, 1), \quad (3.58)$$

por lo que los rayos ordinarios refractados serán

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{g}_o = (0, \frac{n_i}{n_o} \theta_i, 1). \quad (3.59)$$

Sin embargo, como se ha visto tanto en el primer capítulo, como en el segundo, la refracción de los rayos extraordinarios es mucho más compleja, empezando por no mantenerse siempre dentro del plano de incidencia, así como por su dependencia con respecto a la orientación relativa del eje del cristal. Esto obliga a analizar por separado ciertos casos específicos en los que se asegure que el rayo se mantenga en dicho plano para poder utilizar las herramientas comunes de trazo de rayos, e.g., matrices de refracción y de transferencia de 2×2 .

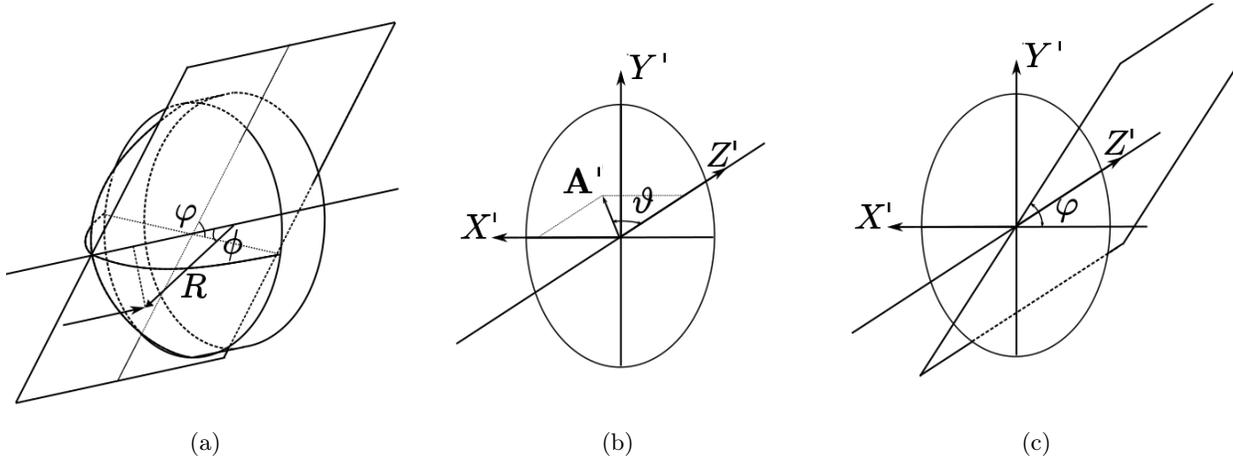


Figura 3.5: (a) El ángulo ϕ se definirá como el ángulo entre el eje óptico y la normal al punto de incidencia, (b) se escogerá un eje del cristal yaciendo en el plano $X'Z'$, haciendo un ángulo ϑ con el eje óptico de la lente, (c) los planos de incidencia que contienen al eje óptico de la lente se pueden caracterizar por el ángulo φ con respecto al plano $X'Z'$.

En esta sección utilizaremos las fórmulas de refracción derivadas del modelo de Huygens para la aproximación paraxial, y resumidas en la sección anterior. De igual forma, se utilizará la convención de que el eje del cristal, \mathbf{A}' yace en el plano $\mathbf{X}'\mathbf{Z}'$, tal como se ve en la fig.(3.5b), i.e. $\varphi = 0$, por lo que (3.15), tendrá coordenadas

$$\mathbf{A}' = (\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta) \quad (3.60)$$

dónde ϑ es el ángulo con respecto al eje óptico de la lente. Localmente, como en esta sección sólo estudiaremos rayos que se propaguen en planos principales, i.e., planos que contengan al eje óptico de la lente, utilizaremos

φ (sin prima) para denotar el ángulo entre el plano de incidencia y el plano global $\mathbf{X}'\mathbf{Y}'$, tal como se ve en la fig.(3.5c). De esta forma, la dirección del eje del cristal en el SLR será para superficies convexas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \phi + \cos \phi \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \phi - \sin \phi \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

y para cóncavas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \phi - \cos \phi \cos \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cos \phi + \sin \phi \cos \varphi \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.62)$$

dónde ϕ es el ángulo que haría la normal en el punto de incidencia con respecto al eje óptico, como en la fig.(3.4b), véase la deducción en el apéndice E.

3.5.1 Eje del cristal paralelo al eje óptico de la lente

Para este caso $\vartheta = 0$, como se puede apreciar en la fig.(3.6), por lo que la orientación global del eje del cristal es

$$\mathbf{A}' = (0, 0, 1) \quad (3.63)$$

y la dirección local, según (3.61), es

$$\mathbf{A} = (0, \sin \phi, \cos \phi). \quad (3.64)$$

Bajo la aproximación paraxial, tenemos que no sólo $\theta_i \ll 1$, sino que $\phi \ll 1$, siendo ϕ el ángulo de la normal en el punto de incidencia con respecto al eje óptico, tales que $\theta_i^2 \approx \phi^2 \approx 0$, por lo que el la dirección del eje del cristal queda definida como

$$\mathbf{A} = (0, \phi_1, 1). \quad (3.65)$$

Esto lo podemos identificar con (2.146), y obtener entonces que dado un rayo incidente

$$\mathbf{S}_i \approx (0, \theta_{i1}, 1), \quad (3.66)$$

que viene de un medio con índice n_1 , el rayo extraordinario quedará definido por

$$\mathbf{S}_{e1} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_1 n_o}{n_e^2} \theta_{i1} - \frac{N}{n_e^2} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.67)$$

Mientras que para la refracción de salida, si pensamos que el rayo extraordinario incidente, que será $S_{e1} = (0, \theta_{i2}, 1)$, véase la fig.(.), pasará a un medio con índice n_2 , y que el eje del cristal se puede expresar

$$\mathbf{A} = (0, \phi_2, 1), \quad (3.68)$$

se obtiene que el rayo extraordinario refractado final, expresado en (2.149), se convierte en

$$\mathbf{S}_{e2} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_e^2}{n_o n_2} \theta_{i2} + \frac{N}{n_o n_2} \phi_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

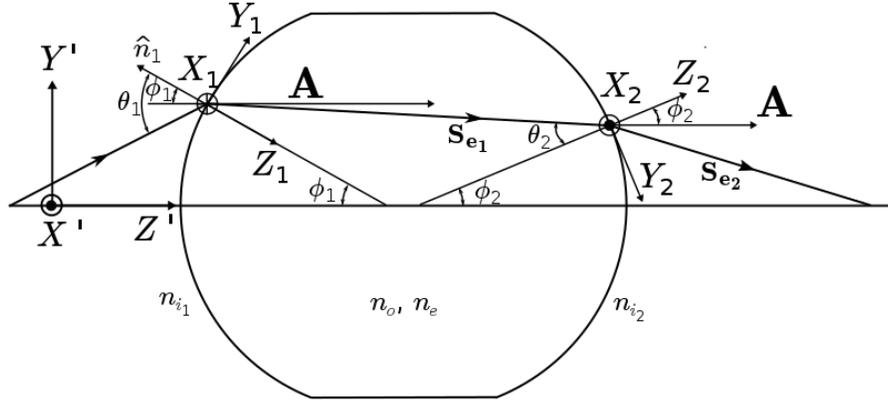


Figura 3.6: Diagrama de la disposición del eje del cristal con respecto al plano de los rayos incidentes.

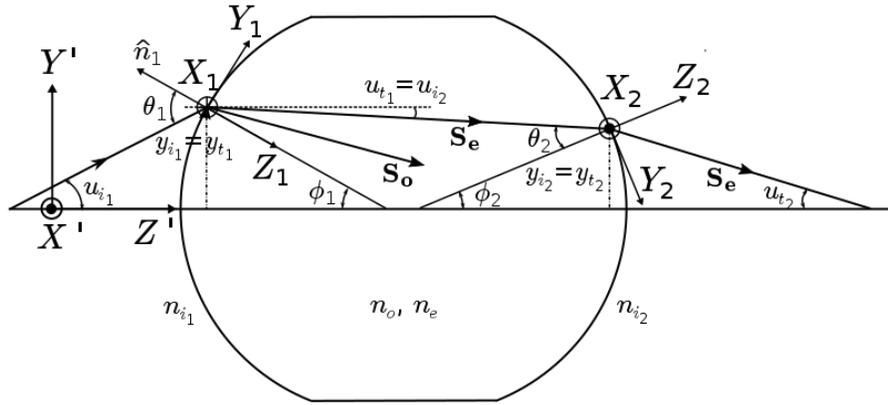


Figura 3.7: Diagrama para las matrices de transferencia.

Matrices de refracción y transferencia

La fig.(3.7) ilustra las relaciones entre los ángulos que comúnmente se definen para las matrices de transferencia y refracción, que denotaremos con la letra u , estos ángulos son el ángulo entre el eje óptico del sistema, y sus respectivos rayos. Para la primer refracción, las relaciones entre los ángulos son

$$\begin{aligned}\theta_{i1} &= u_{i1} + \phi_1 \\ \theta_{t1} &= u_{t1} + \phi_1.\end{aligned}\quad (3.70)$$

De igual forma, definiremos las "alturas", i.e. la lejanía del rayo con respecto del eje óptico a una cierta z' ; para ellas se tienen las relaciones

$$y_{i1} = y_{t1}.\quad (3.71)$$

Entonces, según la fórmula de refracción antes encontrada, tenemos

$$\theta_{t1} = \frac{n_1 n_o}{n_e^2} \theta_{i1} - \frac{N}{n_e^2} \phi_1,\quad (3.72)$$

en la que al sustituir las relaciones entre los ángulos y hacer un poco de álgebra encontramos que

$$\begin{aligned}\phi_1 + u_{t1} &= \frac{n_1 n_o}{n_e^2} (u_{i1} + \phi_1) + \phi_1 - \frac{n_o^2}{n_e^2} \phi_1, \\ \frac{n_e^2}{n_o} u_{t1} &= n_i u_{i1} + \phi_1 (n_1 - n_o),\end{aligned}\tag{3.73}$$

y al utilizar

$$\phi_1 \approx \sin \phi_1 = \frac{y_{i1}}{R_1},\tag{3.74}$$

dónde R_1 es el radio de curvatura de la primer interfase, se llega a la expresión final

$$\frac{n_e^2}{n_o} u_{t1} = n_1 u_{i1} - \frac{n_o - n_1}{R_1} y_{i1},\tag{3.75}$$

la cual lleva al sistema siguiente,

$$\begin{pmatrix} \frac{n_e^2}{n_o} u_{t1} \\ y_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_o - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 u_{i1} \\ y_{i1} \end{pmatrix},\tag{3.76}$$

siendo la matriz de refracción

$$R_1^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_o - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{3.77}$$

La diferencia entre y_{i1} y y_{i2} está dada, bajo cierta aproximación, por $u_{t1} \cdot t$, donde t es el grosor de la lente. Esto último nos lleva a

$$\begin{pmatrix} \frac{n_e^2}{n_o} u_{i2} \\ y_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_o}{n_e^2} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n_e^2}{n_o} u_{t1} \\ y_{t1} \end{pmatrix},\tag{3.78}$$

dónde la matriz de transferencia será

$$T^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_o}{n_e^2} t & 1 \end{pmatrix}.\tag{3.79}$$

En cuanto a la segunda interfase de la lente, tenemos las relaciones

$$\begin{aligned}\theta_{i2} &= \phi_2 - u_{i2} \\ \theta_{t2} &= \phi_2 - u_{t2},\end{aligned}\tag{3.80}$$

las cuales llevan, según la refracción de salida que obtuvimos, a

$$\begin{aligned}\theta_{t2} &= \frac{n_e^2}{n_o n_2} \theta_{i2} + \frac{N}{n_o n_2} \phi_2, \\ -u_{t2} &= -\frac{n_e^2}{n_o n_2} u_{i2} + \frac{n_e^2 + N}{n_o n_2} \phi_2, \\ u_{t2} &= \frac{n_e^2}{n_o n_2} u_{i2} - \frac{n_o - n_2}{n_2} \phi_2,\end{aligned}\tag{3.81}$$

y como

$$\phi_2 \approx -\frac{y_{i2}}{R_2},\tag{3.82}$$

dónde R_2 es el radio de curvatura de la segunda interfase. La refracción quedará expresada entonces como

$$\begin{pmatrix} n_2 u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_o}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n_e^2}{n_o} u_{i2} \\ y_{i2} \end{pmatrix},\tag{3.83}$$

con una matriz de refracción

$$R_2^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_o}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Finalmente, la matriz que representa a la lente completa, que llamaremos M , será la multiplicación (ordenadamente) de las tres matrices antes encontradas, i.e.

$$M^{\parallel} = R_2^{\parallel} T^{\parallel} R_1^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_o}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_o}{n_e} t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_o - n_i}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.85)$$

que lleva a

$$M^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_o}{n_e} D_1^{\parallel} t & -D_1^{\parallel} - D_2^{\parallel} + \frac{n_o}{n_e} D_1^{\parallel} D_2^{\parallel} t \\ \frac{n_o}{n_e} t & 1 - \frac{n_o}{n_e} D_1^{\parallel} t \end{pmatrix}, \quad (3.86)$$

en donde definimos

$$D_1^{\parallel} = \frac{n_o - n_1}{R_1} \quad D_2^{\parallel} = \frac{n_2 - n_o}{R_2}. \quad (3.87)$$

Límite de la lente infinitamente delgada

Si se supone una lente infinitamente delgada, i.e. $t \approx 0$, la matriz de la lente se reduce a

$$M^{\parallel} \approx \begin{pmatrix} 1 & -D_1^{\parallel} - D_2^{\parallel} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.88)$$

que se relaciona con la distancia focal, la cual si suponemos que $n_1 = n_2 = n_i$, es decir, está inmersa en un sólo medio, se convierte en

$$\frac{1}{f_e^{\parallel}} = \frac{n_o - n_i}{n_i} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.89)$$

que es justamente la misma fórmula que para un rayo en un material isotrópico, y en el caso de un birrefringente uniaxial, es la misma fórmula que para los rayos ordinarios, i.e. $f_e^{\parallel} = f_o$, al igual que no hay astigmatismo extraordinario, ya que el eje del cristal bajo esta "iluminación" siempre está contenido en el plano de incidencia. Véase la fig.(3.8).

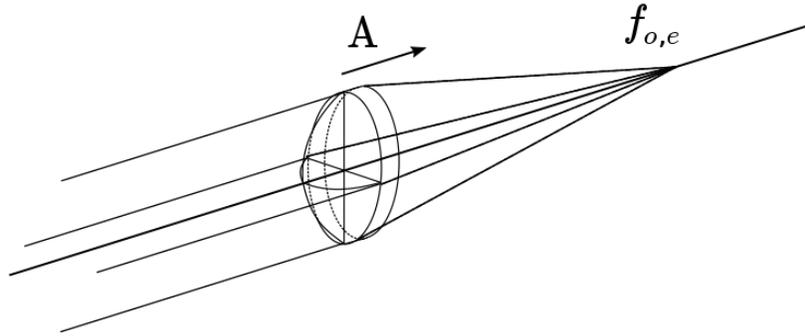


Figura 3.8: Diagrama de distancias focales, bajo la aproximación de lente infinitamente delgada, para una lente cuyo eje del cristal es paralelo al eje óptico de la misma.

Placas planas

Para hacer el análisis en placas planas, sólo hace falta utilizar el límite cuando $R_1 \rightarrow \infty$ y $R_2 \rightarrow \infty$, con esto, la matriz de transferencia del sistema se vuelve,

$$M^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_o}{n_e^2} t & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

con lo que se llega al sistema

$$\begin{pmatrix} n_2 u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 u_{i1} \\ \frac{n_o n_1}{n_e^2} u_{i1} t + y_{i1} \end{pmatrix}, \quad (3.91)$$

entonces, para una placa plana sumergida en el mismo medio, $n_1 = n_2 = n_i$, se tendrá

$$\begin{pmatrix} u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \frac{n_o n_i}{n_e^2} u_{i1} t + y_{i1} \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

3.5.2 Eje del cristal ortogonal al eje óptico de la lente pero yaciendo en el plano de incidencia

En [15] es para este caso donde se encuentra el error: al momento de aproximar al eje del cristal localmente había un cambio de signo en una de las componentes, esto levaba a la predicción de tres focos, dos focos extraordinarios y uno ordinario, un comportamiento que no era observado experimentalmente.

A este plano escogido, que lo llamaremos meridional, le corresponden $\vartheta = 90^\circ$ y $\varphi = 0$, como se puede apreciar en la fig.(3.9), por lo que la orientación local del eje del cristal es

$$\mathbf{A} = (0, \cos \phi, -\sin \phi) \approx (0, 1, -\phi_1), \quad (3.93)$$

por lo que le corresponde la fórmula (2.137), i.e.

$$\mathbf{S}_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i n_e}{n_o^2} \theta_{i1} + \frac{N}{n_o^2} \phi_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.94)$$

Mientras que para la refracción de salida, véase la fig.(3.9), la dirección del eje del cristal será

$$\mathbf{A} \approx (0, -1, \phi) \quad (3.95)$$

por lo que el rayo extraordinario al refractarse se convertirá en, pensando que pasa a un medio isotrópico con índice n_2

$$\mathbf{S}_{e2} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_o^2}{n_e n_2} \theta_2 - \frac{N}{n_e n_2} \phi_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Matrices de refracción y transferencia

La fig.(3.7) es de utilidad para seguir la deducción de las matrices de refracción y transferencia, la cual se realizará de forma análoga al caso anterior. Tenemos que en la refracción de entrada se cumple

$$\theta_{t1} = \frac{n_i n_e}{n_o^2} \theta_{i1} + \frac{N}{n_o^2} \phi_1 \quad (3.97)$$

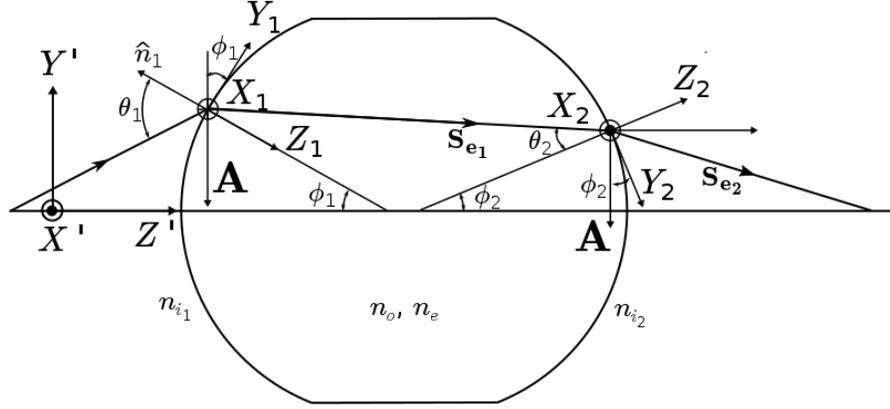


Figura 3.9: Diagrama de la disposición del eje del cristal con respecto al plano de los rayos incidentes.

que al utilizar las relaciones de (3.70) y (3.74) llevan, después de un poco de álgebra, a

$$\begin{pmatrix} \frac{n_o^2}{n_e} u_{t1} \\ y_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_e - n_1}{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 u_{i1} \\ y_{i1} \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

es decir, a una matriz de refracción

$$R_1^\perp = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_e - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Mientras que la matriz de transferencia será

$$T^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_e}{n_o^2} t & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

En cuanto a la refracción de salida, las relaciones (3.80) y (3.82) siguen siendo válidas, y teniendo en mente la refracción de salida

$$\theta_{t2} = \frac{n_o^2}{n_e n_2} \theta_2 - \frac{N}{n_e n_2} \phi_2, \quad (3.101)$$

se puede llegar a

$$\begin{pmatrix} n_2 u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_e}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{n_o^2}{n_e} u_{i2} \\ y_{i2} \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

donde la matriz de refracción es

$$R_2^\perp = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_e}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.103)$$

Con estas matrices calculadas, se puede obtener la matriz que describe al sistema completo

$$M^\perp = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n_e}{n_o^2} D_1^\perp t & -D_1^\perp - D_2^\perp + \frac{n_e}{n_o^2} D_1^\perp D_2^\perp t \\ \frac{n_e}{n_o^2} t & 1 - \frac{n_e}{n_o^2} D_1^\perp t \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

donde

$$D_1^\perp = \frac{n_e - n_1}{R_1} \quad D_2^\perp = \frac{n_2 - n_e}{R_2} \quad (3.105)$$

Límite de la lente infinitamente delgada

Si se supone una lente infinitamente delgada, i.e. $t \approx 0$, la matriz de la lente se reduce a

$$M^\perp \approx \begin{pmatrix} 1 & -D_1^\perp - D_2^\perp \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.106)$$

que se relaciona con la distancia focal, la cual si suponemos que $n_1 = n_2 = n_i$, es decir, está inmersa en un sólo medio, se convierte en

$$\frac{1}{f_e^\perp} = \frac{n_e - n_i}{n_i} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.107)$$

que es justamente la misma fórmula que para un rayo en un material isotrópico, pero utilizando el índice extraordinario. La fig.(3.11) ejemplifica este caso.

Placas planas

Para hacer el análisis en placas planas, sólo hace falta utilizar el límite cuando $R_1 \rightarrow \infty$ y $R_2 \rightarrow \infty$, con esto, la matriz de transferencia del sistema se vuelve,

$$M^\perp = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_e}{n_o} t & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

y el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} n_2 u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 u_{i1} \\ \frac{n_e n_1}{n_o} u_{i1} t + y_{i1} \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Para una placa plana sumergida en el mismo medio, $n_1 = n_2 = n_i$, se tendrá

$$\begin{pmatrix} u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \frac{n_e n_i}{n_o} u_{i1} t + y_{i1} \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

3.5.3 Eje del cristal ortogonal tanto al eje óptico de la lente como al plano de incidencia

A este plano, al que se le nombrará sagital, le corresponden $\vartheta = 90^\circ$ y $\varphi = 90^\circ$, como se puede apreciar en la fig.(3.10), por lo que la orientación global del eje del cristal es

$$\mathbf{A} = (-1, 0, 0) \quad (3.111)$$

por lo que le corresponde la fórmula (2.138), i.e.,

$$\mathbf{S}_e \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_i}{n_e} \theta_{i1} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

Mientras que para la refracción de salida, véase la fig.(3.10), la dirección del eje del cristal será

$$\mathbf{A} \approx (1, 0, 0), \quad (3.113)$$

por lo que el rayo final quedará

$$\mathbf{S}_{ef} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{n_e}{n_2} \theta_{i2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.114)$$

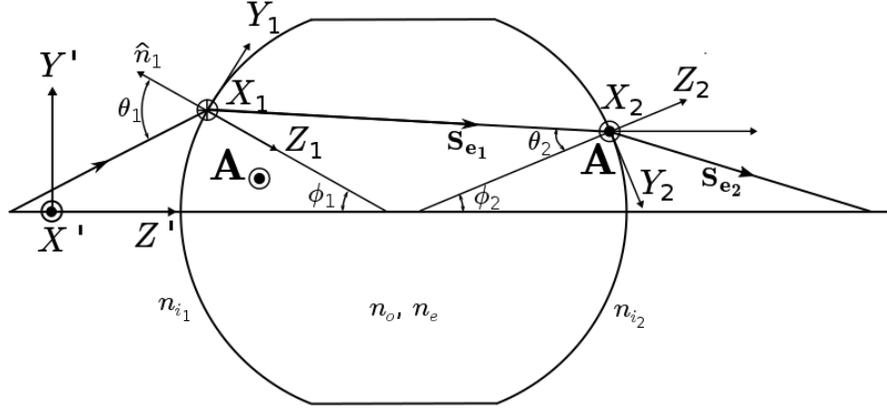


Figura 3.10: Diagrama de la disposición del eje del cristal con respecto al plano de los rayos incidentes.

Matrices de refracción y transferencia

La fig.(3.7) es de utilidad para seguir la deducción de las matrices de refracción y transferencia, la cual se realizará de forma análoga a los casos anteriores. Tenemos que en la refracción de entrada, para este caso, se cumple

$$\theta_{t1} = \frac{n_1}{n_e} \theta_{i1}. \quad (3.115)$$

Al utilizar las relaciones de (3.70) y (3.74) se llega a

$$\begin{pmatrix} n_e u_{t1} \\ y_{t1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_e - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 u_{i1} \\ y_{i1} \end{pmatrix}, \quad (3.116)$$

es decir, a una matriz de refracción

$$R_1^\odot = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_e - n_1}{R_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.117)$$

Mientras que la matriz de transferencia será, análogamente a lo hecho para el primer caso, cambiando únicamente el factor que multiplica a t (este depende de la matriz de refracción de cada caso),

$$T^\odot = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n_e} t & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

Para la refracción de salida, se utilizan las relaciones (3.80) y (3.82) en conjunto con la ecuación para la refracción de salida

$$\theta_{t2} = \frac{n_e}{n_2} \theta_{i2}, \quad (3.119)$$

para llegar a la matriz de refracción

$$R_2^\odot = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{n_2 - n_e}{R_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.120)$$

Entonces, la matriz que describa a la lente completa será la multiplicación de las tres matrices anteriores, y esta será

$$M^\odot = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n_e} D_1^\odot t & -D_1^\odot - D_2^\odot + \frac{1}{n_e} D_1^\odot D_2^\odot t \\ \frac{1}{n_e} t & 1 - \frac{1}{n_e} D_1^\odot t \end{pmatrix}, \quad (3.121)$$

en donde

$$D_1^\odot = \frac{n_e - n_1}{R_1} \quad D_2^\odot = \frac{n_2 - n_e}{R_2}. \quad (3.122)$$

Límite de la lente infinitamente delgada

Si se supone una lente infinitamente delgada, i.e. $t \approx 0$, la matriz de la lente se reduce a

$$M^\odot \approx \begin{pmatrix} 1 & -D_1^\odot - D_2^\odot \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.123)$$

que se relaciona con la distancia focal, la cual si suponemos que $n_1 = n_2 = n_i$, es decir, está inmersa en un sólo medio, se convierte en

$$\frac{1}{f_e^\odot} = \frac{n_e - n_i}{n_i} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (3.124)$$

que es justamente la misma fórmula que para el caso anterior. Sin embargo, se puede ver que si no se realiza esta aproximación, intrínsecamente los rayos que se propaguen en los planos meridional y sagital se enfocarán en puntos distintos, originando un astigmatismo para los rayos extraordinarios. La fig.(3.11) ilustra este caso.

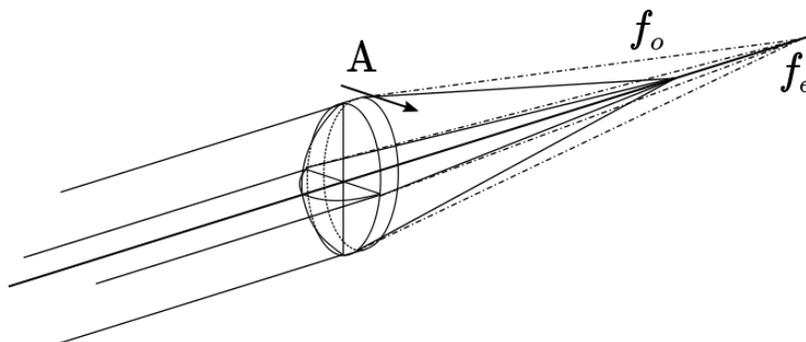


Figura 3.11: Diagrama de distancias focales, bajo la aproximación de lente infinitamente delgada, para una lente cuyo eje del cristal es ortogonal al eje óptico, se usan líneas sólidas para los rayos ordinarios y líneas punteadas para los extraordinarios.

Placas planas

Para hacer el análisis en placas planas, sólo hace falta utilizar el límite cuando $R_1 \rightarrow \infty$ y $R_2 \rightarrow \infty$, con esto, la matriz de transferencia del sistema se vuelve,

$$M^\odot = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{n_e}t & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.125)$$

y el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} n_2 u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 u_{i1} \\ \frac{n_1}{n_e} u_{i1} t + y_{i1} \end{pmatrix}. \quad (3.126)$$

Para una placa plana sumergida en el mismo medio, $n_1 = n_2 = n_i$, se tendrá

$$\begin{pmatrix} u_{t2} \\ y_{t2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \frac{n_i}{n_e} u_{i1} t + y_{i1} \end{pmatrix}. \quad (3.127)$$

Capítulo 4

Calculos numéricos y ejemplos

4.1 Ortogonalidad entre las polarizaciones de los rayos ordinario y extraordinario: calcita y cuarzo

Utilizando las expresiones derivadas para las polarizaciones de los rayos ordinarios y extraordinarios refractados en los materiales birrefringentes en la sección 1.7.4, se procedió a hacer una simulación numérica de la desviación de la ortogonalidad entre las polarizaciones de los rayos ordinarios y extraordinarios del campo de desplazamiento eléctrico, \mathbf{D}_i , y eléctrico, \mathbf{E} .

La calcita dada su gran birrefringencia, es decir, a su gran diferencia entre los índices ordinario y extraordinario, $|\Delta n \approx 0.17|$ para $\lambda = 589nm$, es un buen candidato para mostrar la desviación de la ortogonalidad, mientras que el cuarzo, $|\Delta n \approx 0.009|$, no. A partir de (1.152), definimos el ángulo de desviación de la ortogonalidad de los campos \mathbf{D} como

$$\delta_D = \left| 90^\circ - \arccos \left(\frac{(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})[\mathbf{A} \cdot (\mathbf{g}_e \times \mathbf{g}_o)]}{\sqrt{1 - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2} \sqrt{1 - (\mathbf{g}_o \cdot \mathbf{A})^2}} \right) \right| \quad (4.1)$$

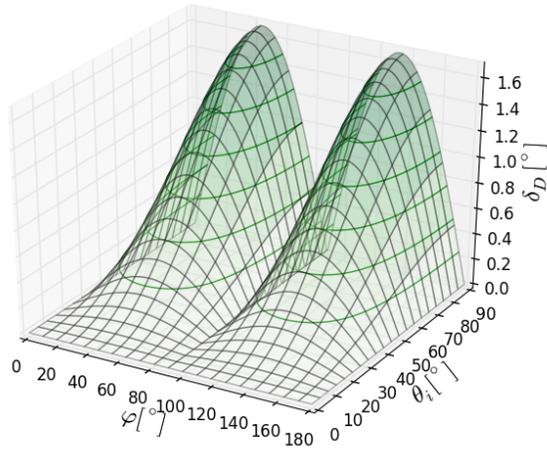
donde el eje del cristal es $\mathbf{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

Se decidió graficar este ángulo de desviación para el caso específico en el que el eje del cristal yace paralelo a la superficie de refracción, i.e., $\mathbf{A} = (\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$, donde φ es el ángulo entre el eje del cristal y el plano de incidencia. Se muestra la desviación en función del ángulo φ y del ángulo de incidencia θ_i para rayos provenientes del aire, para calcita fig.(4.1a) y para cuarzo fig.(4.1b). Para este caso el ángulo de desviación en la calcita es mucho mayor que en el cuarzo, ya que el ángulo de desviación máxima para la calcita fue de $\delta_D = 1.681^\circ$, mientras que para el cuarzo fue de $\delta_D = 0.091^\circ$.

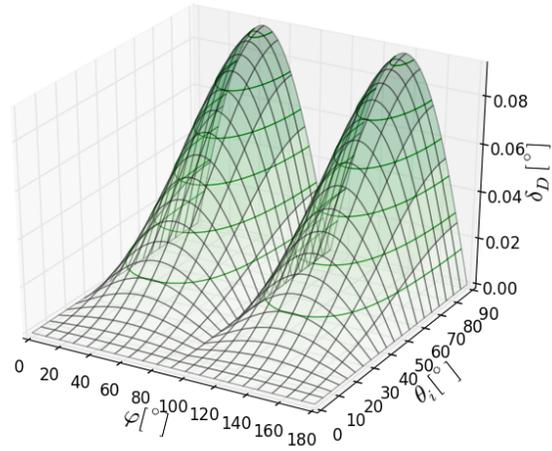
En cuanto a la desviación para los campos eléctricos, δ_E , véase las figs.(4.1d) y (4.1d), es apreciable la diferencia en la calcita con respecto a δ_D , mientras que en el cuarzo no. Esto último se debe a la poca birrefringencia del cuarzo, ya que habrá que recordar (1.159)

$$\cos \theta_E = \frac{\cos \theta_D}{\sqrt{(\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2 + \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^4 (1 - (\mathbf{g}_e \cdot \mathbf{A})^2)}}. \quad (4.2)$$

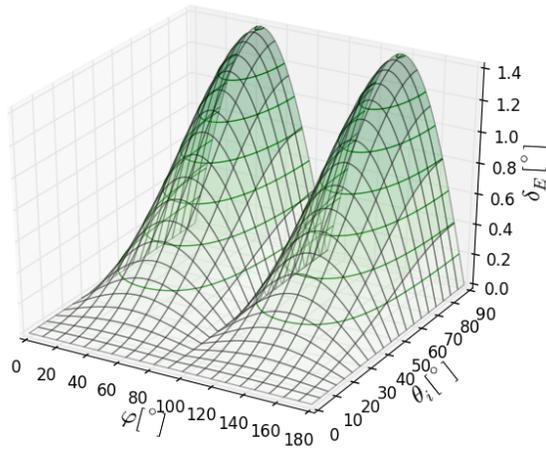
nos da la relación entre los ángulos de los campos \mathbf{E} y los campos \mathbf{D} , y el término de la raíz es cercano a uno cuando los índices ordinario y extraordinario no tienen una diferencia grande. De igual forma, se aprecia un comportamiento distinto entre la calcita, que es un cristal negativo y $\delta_E < \delta_D$, y el cuarzo, que es positivo y $\delta_E > \delta_D$.



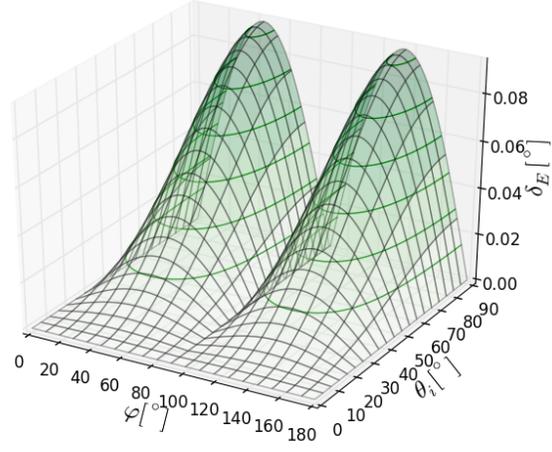
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.1: Ángulo de desviación de la ortogonalidad de: (a) y (b) $\delta_D = |90^\circ - \theta_D|$, (c) y (d) $\delta_E = |90^\circ - \theta_E|$, para los rayos provenientes de una refracción con un ángulo de incidencia θ_i , el eje del cristal paralelo a la superficie y haciendo un ángulo φ con el plano de incidencia. (a) y (c) Calcita: $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$; (b) y (d) cuarzo: $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$, para $\lambda = 589\text{nm}$.

Finalmente se graficó en ángulo de desviación para el caso de interfases esféricas aire-calcita y aire-cuarzo con rayos colimados paralelos al eje óptico de la interfaz y con eje del cristal siendo ortogonal al eje óptico de la interfaz y yaciendo en el plano horizontal, i.e. $\varphi = 0^\circ$ (ó $\varphi = 180^\circ$), tal y como se muestra en la fig.(4.2a).

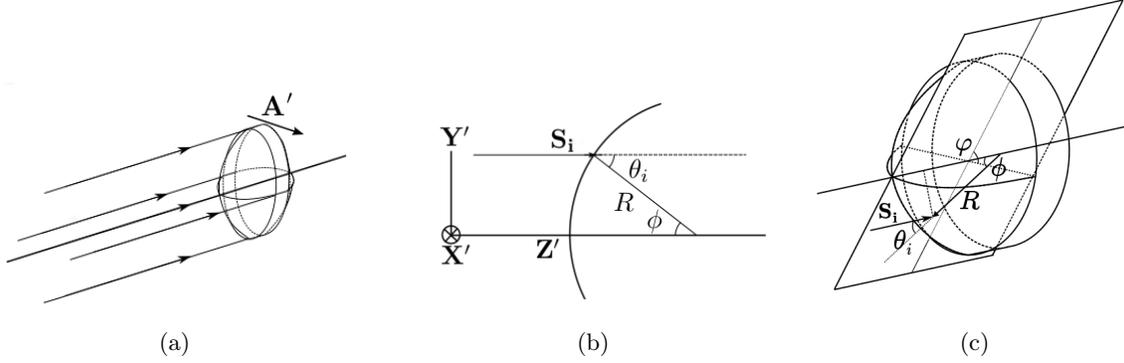


Figura 4.2: (a) Imagen de los rayos colimados paralelos al eje óptico de la interfase y la disposición del eje del cristal, (b) muestra la correspondencia entre el ángulo de incidencia, θ_i , y el ángulo ϕ , (c) es un diagrama completo del plano de incidencia.

Se utilizaron variables adimensionales definidas de la forma

$$r' = \sqrt{\left(\frac{x'}{R}\right)^2 + \left(\frac{y'}{R}\right)^2} \quad (4.3)$$

dónde R es el radio de curvatura de la lente. Es fácil ver que ésta nueva variable definida así se puede relacionar con el ángulo que hace la normal en el punto de incidencia con respecto al eje óptico, que nombraremos ϕ , que a su vez es igual al ángulo de incidencia para el caso de rayos colimados paralelos a él, véase las figs.(4.2b) y (4.2c). Por lo tanto,

$$\sin \phi = \sin \theta_i = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{R} = r' \quad (4.4)$$

que va desde cero, en el vértice, hasta 1 en los límites del borde de la superficie. Se encontró que no es dependiente del signo de R , por lo que el comportamiento es válido para toda interfase convexa o cóncava (sólo reescalando).

Como se esperaba, los rayos ordinario y extraordinario, ya sean meridionales o sagitales, tienen polarizaciones ortogonales, y conforme se vuelven oblicuos estas dejan de serlo. Para la calcita se tuvo una desviación máxima de $\delta_D = 2.02^\circ$ cercano a $\varphi = 45^\circ$, por lo que es un gran candidato para medir experimentalmente esta desviación de la ortogonalidad, véase las figs. (4.3a) y (4.3b). Como se predijo utilizando la aproximación paraxial en la sección 1.8.3, la desviación para este ejemplo es mayor que para el caso con el eje del cristal yaciendo en la superficie de refracción, indicando que existe una mayor dependencia en la componente normal a la interfase, γ .

Nuevamente la diferencia entre δ_E y δ_D no es apreciable para el cuarzo, sin embargo, para la calcita sí, las figs. (4.3c) y (4.3d) muestran la desviación de los campos eléctricos.

Se podría pensar falsamente que ambas figuras presentan tan sólo un escalamiento constante entre sí, sin embargo, existe una dependencia tanto en φ como en ϕ , por ello se decidió graficar el cociente entre las desviaciones, véase las figs.(4.4a) y (4.4b). Se puede apreciar el comportamiento característico de cada tipo de cristal uniaxial, para la calcita el cociente es mayor que uno, mientras que para el cuarzo es menor. Igualmente se aprecia que para ϕ chicos, el cociente se hace más constante y se acerca al valor n_o^2/n_e^2 ,

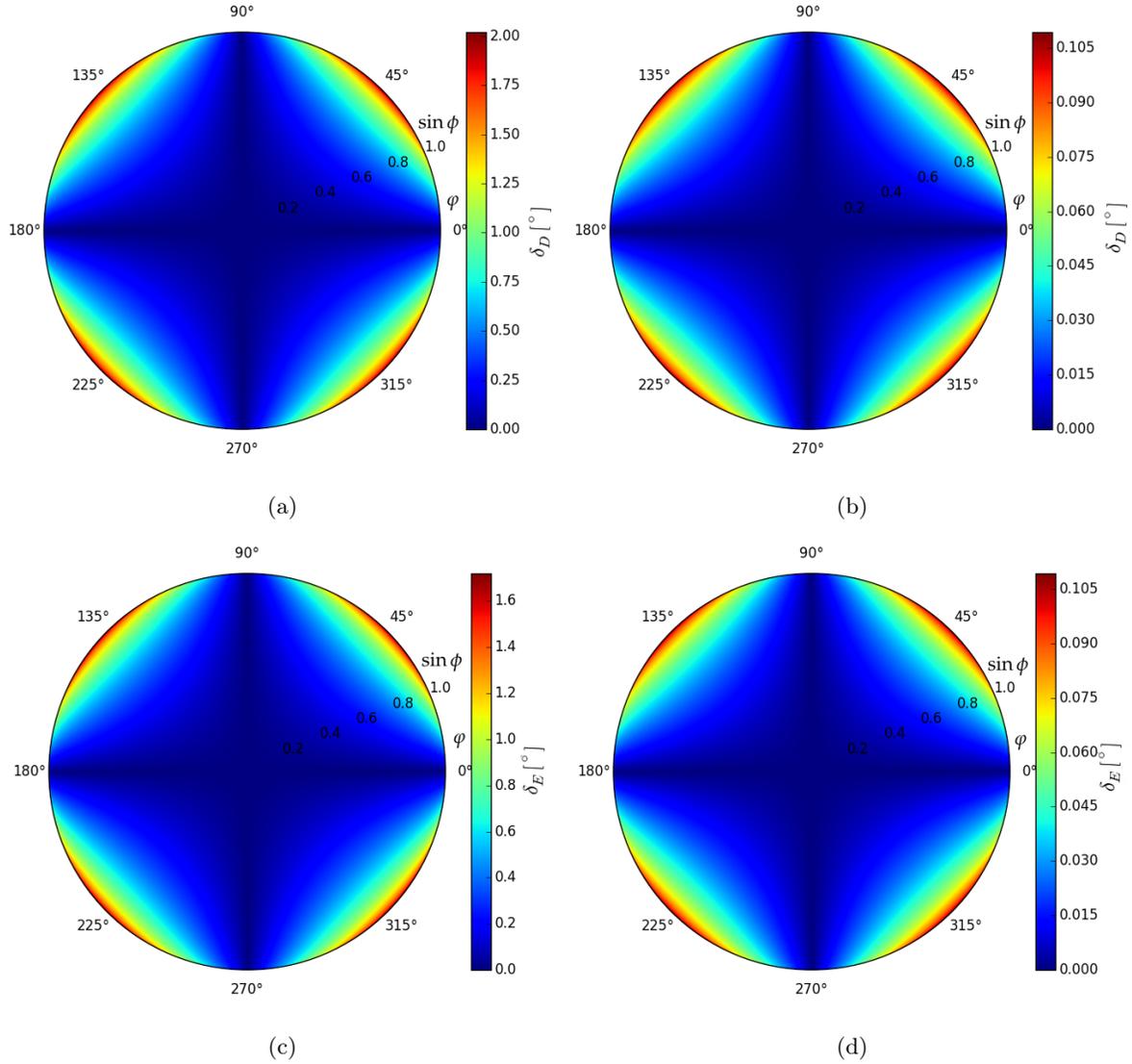
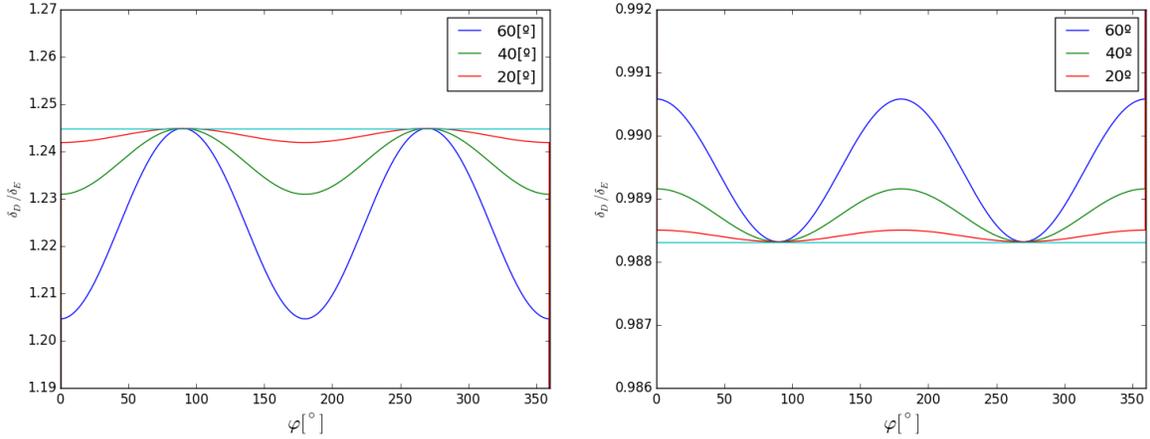


Figura 4.3: (a) y (b) muestran el ángulo de desviación de la ortogonalidad, $\delta_D = |90^\circ - \theta_D|$, dentro del material, para superficies convexas iluminadas por luz colimada paralela al eje óptico de la lente, la vista es de frente a la lente, (c) y (d) muestran para el mismo caso la desviación de la ortogonalidad de los campos eléctricos, $\delta_E = |90^\circ - \theta_E|$. (a) y (c) Calcita: $n_o = 1.658$, $n_e = 1.486$, para $\lambda = 589nm$; (b) y (d) cuarzo: $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$, para $\lambda = 589nm$.



(a) Cuarzo: $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$, para $\lambda = 589nm$. (b) Cuarzo: $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$, para $\lambda = 589nm$.

Figura 4.4: (a) y (b) Muestran el cociente δ_D/δ_E , en $\phi = 20^\circ$, 40° , 60° , para mostrar su variación en φ . En turquesa se muestra el cociente entre n_o^2/n_e^2 , valor al que tienden conforme ϕ se hace más chica, al igual que cuando $\varphi \approx (n + 1/2)\pi$.

comportamiento que sucede para valores $\varphi \approx (n + 1/2)\pi$ (sólo cercanos a ese valor, ya que en el valor exacto serán cero ambas desviaciones y el factor de escalamiento de indetermina).

En resumen, es apreciable que para materiales con poca birrefringencia, i.e con. índices ordinario y extraordinario no tan distintos, como el cuarzo, suponer ortogonalidad en las polarizaciones es práctico y válido como aproximación, mientras que para materiales como la calcita, si se requiere de más precisión para el estado de polarización de los rayos¹, no siempre será correcto suponerlo.

4.2 Análisis de la diferencia bajo la aproximación paraxial entre los modelos de las superficies normales y de Huygens

Como se discutió en las secciones 1.8 y 2.5.1, existe una discrepancia en la refracción extraordinaria bajo el régimen paraxial. En esta sección realizaremos un cálculo numérico para caracterizar esta diferencia en materiales como la calcita y el cuarzo, ya que la aproximación paraxial es una herramienta de mucha utilidad. Según la metodología de las superficies normales, la componente normal a la interfase del vector de onda extraordinario es (1.164)

$$k_{ez} \approx \frac{\omega}{c} \frac{n_o n_e \sqrt{\Gamma} + N n_i \beta \gamma \theta_i}{\Gamma}, \quad (4.5)$$

es decir, es dependiente tanto de la orientación del eje del cristal y de los índices ordinario y extraordinario, como del ángulo de incidencia, mientras que bajo el modelo de Huygens, es decir, con la aproximación extra, 1.168

$$k'_{ez} \approx \frac{\omega}{c} \frac{n_o n_e}{\sqrt{\Gamma}}, \quad (4.6)$$

i.e., depende únicamente de la orientación del eje del cristal y de n_o y n_e .

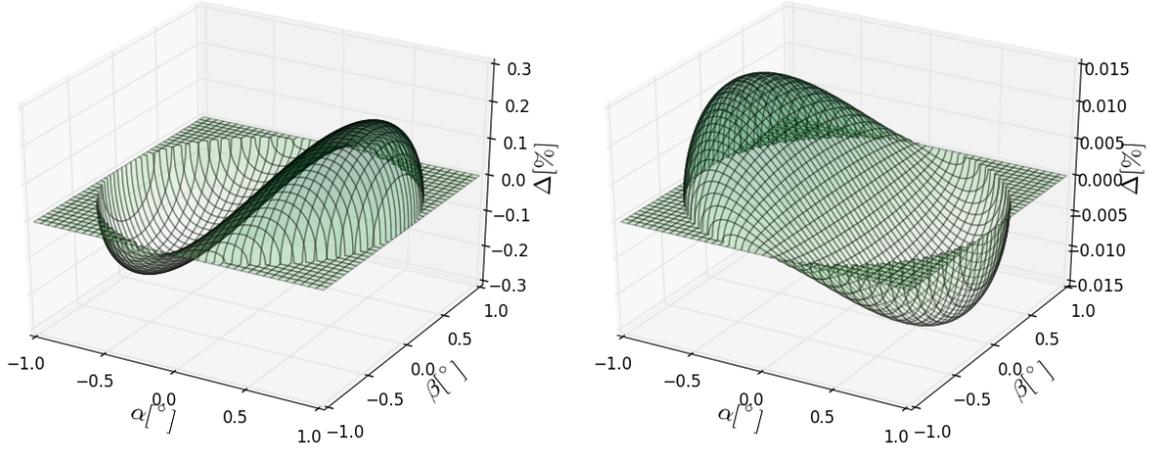
Como se mencionó en la sección 1.8, hacer la aproximación extra no es totalmente arbitrario ya que sí suele ser muy pequeña la contribución del término que se omite. Sin embargo, es importante caracterizar el error que representa, en particular para la calcita por su alta birrefringencia.

¹Actualmente hay polarímetros comerciales que miden diferencias de hasta 0.2° .

Se implementó un cálculo numérico del error relativo, para la calcita y el cuarzo, que definimos como

$$\Delta = \frac{k_{ez} - k'_{ez}}{k'_{ez}} \times 100\% = \frac{N\beta\gamma n_i \theta_i}{n_o n_e \sqrt{\Gamma}} \times 100\%. \quad (4.7)$$

Las figs.(4.5a) y (4.5b) muestran el error relativo, como se esperaba, en el cuarzo el error es muy pequeño, ya que es menor al 0.015%, en cambio, en la calcita el error es mayor, sin embargo, el error es menor al 0.25%. Por lo tanto, se justifica la aproximación extra, aún para un material con una birrefringencia alta como la calcita. Sin embargo, para ángulos de incidencia mayores, que no estén estrictamente en el régimen paraxial, la desviación aumentará, ya que depende de θ_i , y esperamos que la extrapolación de los resultados paraxiales fallen antes.



(a) Calcita: $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$, para $\lambda = 589nm$. (b) Cuarzo: $n_o = 1.544$, $n_e = 1.553$, para $\lambda = 589nm$.

Figura 4.5: Error relativo, Δ , al realizar la segunda aproximación para k_{ez} en los límites del régimen paraxial $\theta_i = 2^\circ$. α y β son las componentes del eje del cristal perpendicular al plano de incidencia y paralelo a la interfaz, respectivamente.

4.3 Aproximación paraxial: lente plano-convexa

En esta sección aplicaremos las fórmulas deducidas en 3.5 para obtener las distancias focales de una lente plano convexa de calcita con un eje del cristal paralelo a la cara plana, con la que se contaba en el laboratorio. Usando unos índices ordinario, $n_o = 1.658$, y uno extraordinario, $n_e = 1.486$, para $\lambda = 589nm$, calculados utilizando [20]. En el apéndice F se muestran las fórmulas utilizadas.

Para los rayos ordinarios, tenemos que ante la aproximación de lente infinitamente delgada, la distancia focal está dada por

$$\frac{1}{f_o} = \frac{n_o - n_i}{n_i} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.8)$$

mientras que para los rayos extraordinarios, ya sean del plano meridional (plano que contiene al eje del cristal) o del plano sagital (plano que es ortogonal al eje del cristal), la distancia focal es

$$\frac{1}{f_e} = \frac{n_e - n_i}{n_i} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.9)$$

La lente que es plano convexa tiene unos respectivos radios de curvatura de $R_1 = \infty$ y $R_2 = -59.22mm$, que dan como resultado unas distancias focales de $f_o = 90mm$ y $f_e = 121.852mm$. Las cuales cualitativamente corresponden con la lente del laboratorio. Originalmente, debido a un error en la aproximación hecha en [15], se habían predicho 3 distancias focales para esta lente, una ordinaria, y dos extraordinarias para los planos meridional y sagital.

Como sabemos que no hay lente que sea realmente infinitamente delgada, y que al existir un grosor finito, los rayos de distintos planos se enfocarán en puntos diferentes. Para obtener un estimación, se recurrió al programa de trazo de rayos, véase el apéndice G para mayor información acerca del programa de trazo de rayos, y se calcularon los puntos focales para los rayos extraordinarios, la tabla siguiente muestra los resultados comparados con los analíticos de lente infinitamente delgada.

En la Tabla 4.1 se muestra algo muy interesante, ya que está indicando un astigmatismo dependiente de la orientación de la lente, véase la fig.(4.6): cuando la primera superficie es plana, que denominamos P-C, no existe astigmatismo, mientras que si la primera superficie es la esférica, que denominaremos C-P, el astigmatismo es notable. Esto era de esperarse, ya que como se había visto en el primera y en el segundo capítulo, bajo la aproximación paraxial, la dependencia principal sobre la orientación del eje del cristal se centra en la proyección del eje del cristal con respecto a la normal en el punto de incidencia (que llamamos γ). Cuando se trata de una superficie plana, no importando el sistema local de referencia y el punto de incidencia, la proyección del eje del cristal sobre la normal es constante dando comportamientos similares. En cambio, cuando la primera superficie es esférica, la componente γ va variando tanto de magnitud como de signo, por lo que origina refracciones más disímiles entre sí.

Plano	Paraxial - inf. delgada [mm]	Plano-Convexa [mm]	Convexa-Plano [mm]
Meridional	121.852	124.352	123.000
Sagital	121.852	124.352	122.669
Oblicuo (45°)	-	124.352	122.835

Tabla 4.1: Comparación de distancias focales.

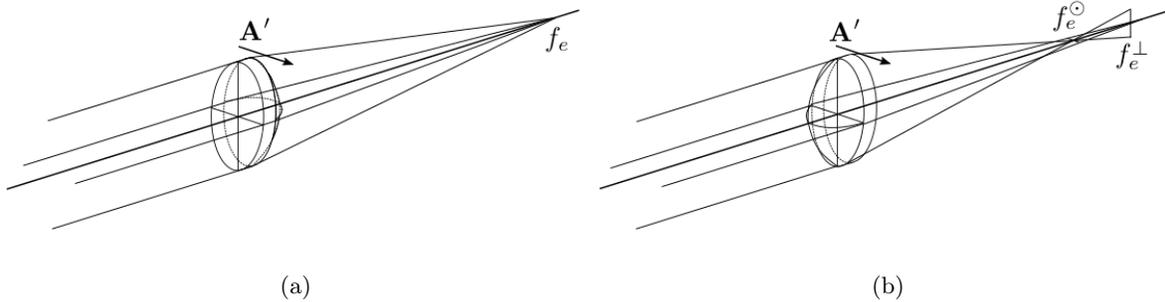


Figura 4.6: El astigmatismo de los rayos extraordinarios bajo la aproximación paraxial es dependiente de la orientación de la lente: (a) orientación P-C, plana-convexa, no presenta astigmatismo y (b) orientación C-P, convexa-plana, en dónde ya existe un astigmatismo, en la figura se está exagerado el astigmatismo.

En la siguiente sección se comprueba el astigmatismo con el trazo de rayos finito, sin embargo, la física del problema se puede perder en los calculos

En resumen, la utilidad de la aproximación paraxial se exhibe en este caso, ya que no sólo predice el astigmatismo dependiente de la orientación, sino que lo describe a grandes rasgos.

4.4 Diagramas de manchas

En esta sección realizamos varios diagramas de manchas para la misma lente plano-convexa de calcita estudiada en la sección anterior, en las que se muestra, claramente, el astigmatismo dependiente de la orientación de la lente. Para realizar los diagramas de manchas se implementó una rutina utilizando las clases definidas en el apéndice G.

Se utilizaron familias de rayos colimados paralelos al eje óptico y fuera de él, con ángulos con respecto al eje óptico de 0° , 2.5° y 5° . Se escogieron dos ángulos para los rayos fuera del eje, α que es el ángulo dentro del plano perpendicular al eje del cristal, véase la fig.(4.7a), y β que es el ángulo del plano coplanar al eje del cristal, véase la fig.(4.7b). Es importante mencionar que los diagramas de manchas fueron realizados al rededor del círculo de mínima confusión (que dependía de la orientación), en los planos con $\Delta_z = \pm 0.2, \pm 0.1, 0$, dónde Δz es la distancia con respecto al círculo de menor confusión. De igual forma, se rotaron las imágenes para que el "corrimiento" fuera siempre hacia arriba del centro de la imagen, con el fin de facilitar la comparación entre los distintos casos. La finalidad de estos diagramas era reproducir los resultados de [7], y aunque se consiguió a grandes rasgos, creemos que sus resultados no son representativos de un diagrama de manchas completo, sino sólo de un corte central.

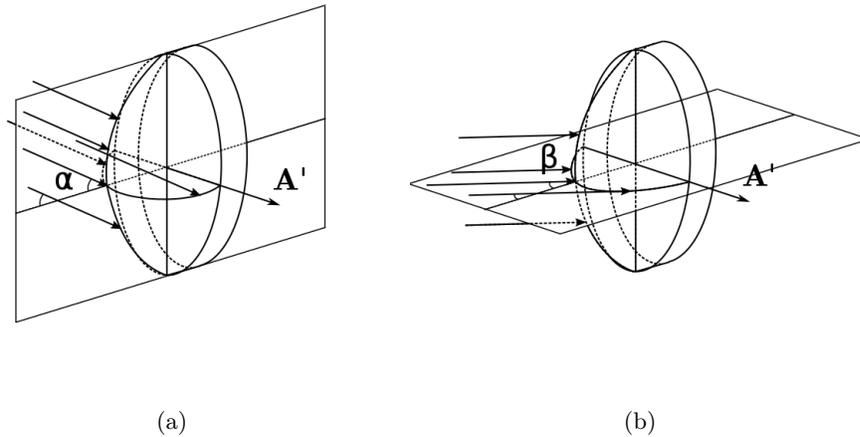


Figura 4.7: (a) α es el ángulo dentro del plano perpendicular al eje del cristal, (b) β es el ángulo del plano coplanar al eje del cristal.

La Tabla 4.2 muestra los diagramas de manchas para la lente cuando primero se encuentra la cara convexa y luego sigue la plana. Se puede observar que hay un astigmatismo en el sistema ya que se están formando elipses y por lo tanto los rayos de diferentes planos están enfocándose en distancias distintas. La Tabla 4.3 muestra los diagramas de manchas para la lente cuando primero se encuentra la cara plana y luego la convexa. Se puede observar que no existe un astigmatismo apreciable ya que se están formando círculos, que aunque no concéntricos, al menos en los casos con $\alpha \neq 0$ ó $\beta \neq 0$, siguen guardando la simetría de entrada por separado.

La diferencia en los tamaños de los diagramas de manchas según la orientación de la lente, cuando es C-P los diagramas de manchas caben dentro de regiones de $200\mu m$ por $200\mu m$, mientras que con la orientación P-C lo hacen dentro de áreas de $800\mu m$ por $800\mu m$, se debe principalmente a la geometría de la lente, ya que cuando la primer cara es la plana, sólo la cara convexa tendrá un peso significativo en la refracción de los rayos. Por ejemplo, cuando se tratan de materiales isotrópicos, bajo esta orientación se dice que se está dejando sólo a la segunda cara la refracción, porque la cara plana no refracta los rayos incidentes (incidencia normal). Sin embargo, esto se debe de tratar con cuidado para los rayos extraordinarios, debido a que incidencia normal no implica que los rayos refractados salgan normales (sólo se puede asegurar que saldrán

cercanos a ser normales), esto se conseguirá con orientaciones específicas del eje del cristal.

Para nuestra lente, como el eje del cristal yace en la interfase, entonces talos rayos extraordinarios tampoco se refractarán dejándo toda la refracción a la segunda cara, por lo que esperamos un círculo de mínima confusión más grande. En [7] esta diferencia de anchos en el spot no se aprecia, por lo que creemos que se tratan de diagramas de manchas de secciones centrales de la lente únicamente, y no de la lente completa.

Rayos ordinarios					α°	β°
Δz						
-0.2	-0.1	0	0.1	0.2		
					5	0
					2.5	0
					0	0

Rayos extraordinarios					α°	β°
Δz						
-0.2	-0.1	0	0.1	0.2		
					5	0
					2.5	0
					0	0
					0	2.5
					0	5

Tabla 4.2: Diagramas de manchas para un lente plano-convexa de calcita, con un factor de forma $SF=+1$, y distancias focales $f_o \approx 90mm$ y $f_e \approx 120mm$ a $f/6$ y $f/8$ respectivamente. Todos los diagramas de manchas están contenidos en cuadrados de $200\mu m$ por $200\mu m$. Δz representa la distancia del círculo de menor confusión, que se calculó para el ordinario, $z_o \approx 90.08mm$, y para el extraordinario $z_e = 124.65mm$.

Rayos ordinarios					α°	β°
Δz						
-0.2	-0.1	0	0.1	0.2		
					5	0
					2.5	0
					0	0

Rayos extraordinarios					α°	β°
Δz						
-0.2	-0.1	0	0.1	0.2		
					5	0
					2.5	0
					0	0
					0	2.5
					0	5

Tabla 4.3: Diagramas de manchas para un lente plano-convexa de calcita, con un factor de forma $SF=-1$, y distancias focales $f_o \approx 90mm$ y $f_e \approx 120mm$ a $f/6$ y $f/8$ respectivamente. Todos los diagramas de manchas están contenidos en cuadrados de $800\mu m$ por $800\mu m$. Δz representa la distancia del círculo de mínima confusión, que se calculó para el ordinario, $z_o \approx 88.34mm$, y para el extraordinario $z_e = 119.9mm$.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

5.1 Conclusiones particulares de cada capítulo

En el primer capítulo se logró resumir las generalidades de la birrefringencia, tanto uniaxial como biaxial, siguiendo los procedimientos usuales encontrados en la literatura, e.g., [12, 13], pero sólo se hizo hincapié en los primeros para discutir refracción y la polarización resultante de los rayos refractados y reflejados. Se hizo bastante detenimiento en cosas sutiles que suelen obviarse en la literatura, o que por lo general no son mencionadas y llevan a ideas erróneas sobre la birrefringencia, como la supuesta ortogonalidad entre las polarizaciones de \mathbf{S}_e y \mathbf{S}_o . Se derivaron fórmulas analíticas para la refracción y reflexión extraordinarias (1.112) y (1.144), utilizando la metodología común a partir de las superficies normales y las condiciones a la frontera, así como el cálculo del vector de Poynting (1.118) y los estados de polarización. Esto se hizo ya que las fórmulas encontradas en la literatura no son de utilidad para realizar trazo de rayos.

Se discutieron las condiciones tanto para que el rayo extraordinario se mantenga dentro del plano de incidencia, como para que tenga un estado de polarización ortogonal al ordinario, y se muestra que son las mismas condiciones. Se obtuvo una expresión cerrada (1.152) para el ángulo entre las polarizaciones de los campos, tanto para \mathbf{D} , como para \mathbf{E} y encontró un comportamiento distinto entre los cristales positivos y los negativos: en los primeros los campos del vector de desplazamiento eléctrico son más cercanos a la ortogonalidad, mientras que en los segundos los del campo eléctrico. Sobre este tema se escribió un artículo titulado "Deviation from orthogonal polarization for ordinary and extraordinary rays in uniaxial crystals", el cual ya fue aceptado en la JOSAA y próximamente será publicado.

En el segundo capítulo se consiguió realizar la derivación¹ de las ecuaciones de refracción a partir del modelo de Huygens, siguiendo el procedimiento de [4, 3], pero utilizando un sistema de referencia particular para facilitar los cálculos. Como aportación a este modelo, se dedujeron las fórmulas para la reflexión de rayos ordinarios y extraordinarios, mostrados en las secciones 2.4.4 y 2.4.5.

Al final de los dos primeros capítulos se analizaron ambos modelos bajo la aproximación paraxial, y se obtuvo una fórmula explícita para el vector de Poynting bajo el modelo de las superficies normales 1.171. Se demostró que existe una discrepancia entre los modelos, ya que la metodología de las superficies normales requiere de una aproximación más para recuperar las fórmulas deducidas a partir del modelo de Huygens, y la diferencia se puede resumir en el índice de refracción efectivo del rayo extraordinario, que para el modelo de Huygens depende únicamente de la orientación del eje del cristal, así como de n_o y n_e , expresado en (1.170), mientras que para el modelo de las superficies normales también depende del ángulo de incidencia, expresado (1.166). Esto se compara numéricamente en el quinto capítulo, en la sección .

¹A pesar de que se siguieron los mismos procedimientos para la derivación que en los trabajos citados, el álgebra no es nada trivial, por lo que la reconstrucción misma de los pasos no es sencilla.

En el tercer capítulo se discutieron términos que son usados comúnmente para el trazo de rayos, e.g., punto al pie de la perpendicular, y se realizó una derivación de las matrices de refracción y transferencia para lentes birrefringentes, utilizando las fórmulas derivadas con el modelo de Huygens, y corrigiendo una de las conclusiones de [15]. Se discutió, así mismo, el caso particular de una lente plano-convexa, en la que existe astigmatismo extraordinario (un astigmatismo de los rayos extraordinarios) dependiente de la orientación de la lente, la cual fue comprobada con el trazo finito en el capítulo 5 en la sección 4.4.

En el cuarto capítulo se implementaron numéricamente varias de las fórmulas derivadas a lo largo de este trabajo. Se empezó discutiendo la polarización de los rayos ordinarios y extraordinarios dentro de una lente birrefringente a partir de ciertos ángulos de incidencia, así como para el caso particular de una lente convexa/cóncava iluminada con rayos colimados paralelos al eje óptico. También se realizaron cálculos numéricos para probar la validez de la segunda aproximación que debe de ser utilizada en el modelo de las superficies normales para llegar a las expresiones bajo el modelo de Huygens. Se muestra que aún en la calcita, que tiene una gran birrefringencia, esta aproximación no lleva a errores mayores al .25%.

De igual forma, con ayuda del programa de trazo de rayos basado en las fórmulas del modelo de Huygens, a diferencia de otros artículos y trabajos, tales como [7], [6] y [21], se obtuvieron varios diagramas de manchas para una lente de calcita plano convexa, comparándose los resultados con [7], y se verificó las predicciones del astigmatismo bajo la aproximación paraxial. A esto último debemos agregar que se cree que los diagramas de manchas de dicho artículo no son representativos de la lente, ya que son muy pequeños y creemos que se tratan de sólo secciones centrales.

5.2 Comparación entre los modelos/metodologías de las superficies normales y de Huygens

Se demostró, que tal y como se esperaba, ambos modelos llegan a las mismas condiciones tanto para que el rayo extraordinario se mantenga dentro del plano de incidencia, como para que tenga un estado de polarización ortogonal al ordinario.

Es importante señalar las diferencias entre las fórmulas deducidas en este trabajo para cada metodología: La metodología de las superficies normales hace hincapié en los vectores de onda y para refractar o reflejar exige de su conocimiento, mientras que la del modelo de Huygens requiere sólo del ángulo de incidencia del rayo (sin olvidar la orientación del cristal, pero esta es común para ambos modelos), lo cual es preferido comúnmente para realizar trazo de rayos. Sin embargo, la llamada refracción de salida resultaría más sencilla numéricamente utilizando la ley de Snell (pensando que se transfiere a un material isotrópico), en lugar de las fórmulas más complejas del modelo de Huygens.

Bajo la aproximación paraxial se llega a fórmulas ligeramente distintas, ya que con las superficies normales se requiere hacer aún una aproximación más para conseguir el mismo resultado que con el modelo de Huygens, esto se discute em 1.8, lo que sugeriría que hay algo de información que se está perdiendo en el último modelo. Mesiante un análisis numérico se comprobó que la diferencia es menor al 0.25% para la calcita, y al 0.015% para el cuarzo. Haría falta implementar un programa que realizara el trazo de rayos a partir de las fórmulas del primer capítulo para compararlas con las de Huygens y verificar la relevancia de esta discrepancia fuera del régimen paraxial. Así mismo, se compararía la eficiencia de cada metodología para el trazo de rayos, aunque de forma general se puede intuir que las diferencias no será grandes, ya que ambas metodologías recurren a las mismas subrutinas y pasos (como la rotación al sistema local rotado).

5.3 Trabajo a futuro

Se espera acabar de desarrollar el programa de trazo de rayos en C++, completando las clases y generando más rutinas comunes que se pudieran agregar para la caracterización de sistemas ópticos. Hasta ahora el programa sólo funciona para lentes que se encuentran a lo largo del eje óptico, haría falta extenderlo a más casos, así como permitir la generación de diagramas de forma automática en lugar del uso de archivos .txt. También se desea escribir una versión del programa para el lenguaje julia, ya que este es muy eficiente en tiempo, permite graficar de forma más sencilla y es un lenguaje mucho más amigable con los usuarios ajenos al programa, sin olvidar que es un software libre.

De igual forma se buscaría escribir un programa que realice el trazo de rayos utilizando las ecuaciones de refracción bajo la metodología de las superficies normales, y comparar resultados con el actual programa, y así determinar de manera certera los pro's y los contras de cada metodología. De igual forma, hace falta para alcanzar un trazo de rayos con polarización completo el cálculo de los coeficientes de Fresnel, tal y como es señalado en [5] y [6], tanto numéricamente, como sacar soluciones analíticas bajo la aproximación paraxial, ya que las soluciones analíticas permiten tener una mejor intuición física.

En cuanto a las matrices de transferencia y refracción, se buscaría con la finalidad de obtener fórmulas cerradas y analíticas para la distancia focal, una ampliación de estas matrices a matrices de 4×4 , ya que el rayo extraordinario suele salirse del plano de incidencia y requiere más parámetros para ser caracterizado: generalmente se tiene un parámetro de "inclinación" y uno de altura, pero como el rayo extraordinarios suele salirse del plano de incidencia, haría falta en su lugar tomar parámetros radiales de altura e inclinación y dos parámetros de azimutales.

Apéndices

Apéndice A

Identidades Vectoriales

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (\text{A.4})$$

Apéndice B

Elipse extraordinaria rotada

Para el caso uniaxial, la superficie normal (1.54) está conformada por una esfera y un elipsoide de revolución, que se tocan sólo en la dirección del eje del cristal. Suponiendo una dirección del eje del cristal en el sistema coordenado escogido $\mathbf{A} = (\alpha, \beta, \gamma)$, o expresándolo en coordenadas esféricas $\mathbf{A} = (1, \theta, \varphi)$, podemos obtener la matriz de rotación, pensando que el eje del cristal en el sistema de los ejes dieléctricos principales estaba en z' .

$$\begin{aligned}k'_x &= k_x \cos \varphi - k_y \sin \varphi, \\k'_y &= k_x \sin \varphi \cos \theta + k_y \cos \varphi \cos \theta - k_z \sin \theta, \\k'_z &= k_x \sin \varphi \sin \theta + k_y \cos \varphi \sin \theta + k_z \cos \theta.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Con esta transformación la ecuación de la esfera queda invariante, tal y como se espera, pero la ecuación del elipsoide cambia. Como sólo nos interesa su intersección con el plano de incidencia, i.e., $k_x = 0$, el elipsoide se reduce a una elipse rotada:

$$\begin{aligned}(n_o^2[\sin^2 \varphi + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi] + n_e^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta)k_y^2 + (n_o^2 \sin^2 \theta + n_e^2 \cos^2 \theta)k_z^2 \\+ \sin(2\theta) \cos \varphi (n_o^2 - n_e^2)k_y k_z = \frac{\omega^2 n_o^2 n_e^2}{c^2},\end{aligned}\tag{B.2}$$

mientras que para el cascarón de soluciones ordinarias, la esfera, como es invariante ante rotaciones, su corte en el plano de incidencia es un círculo (se puede aplicar la transformación de la rotación y realizar el álgebra):

$$k^2 = \frac{\omega^2 n_o^2}{c^2}\tag{B.3}$$

La ecuación del elipsoide rotado se reduce a una esfera en el caso $n_o = n_e$. De igual forma, se pueden obtener los casos comúnmente ilustrados en los libros, e.g., cuando el eje del cristal es paralelo a la normal, i.e., $\theta = 0$, véase la fig(1.13a),

$$\frac{c^2 k_y^2}{\omega^2 n_e^2} + \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2 n_o^2} = 1,$$

que es una elipse que se toca con el círculo de soluciones ordinarias a lo largo del eje z ; o cuando el eje del cristal está ortogonal al plano de incidencia, i.e. $\theta = \varphi = \pi/2$, véase fig(1.13c)

$$k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2 n_e^2}{c^2}$$

en la que la superficie normal constaría de dos círculos concéntricos.

Podemos expresar al elipsoide (B.2) de forma más compacta definiendo $N = n_o^2 - n_e^2$,

$$(n_o^2 - N \cos^2 \theta) k_z^2 - N \sin(2\theta) \cos \varphi k_y k_z + (n_o^2 - N \cos^2 \varphi \sin^2 \theta) k_y^2 = \frac{\omega^2 n_o^2 n_e^2}{c^2}. \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, si se utiliza que las coordenadas del eje del cristal en este sistema son

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \cos \theta), \quad (\text{B.5})$$

la fórmula de la elipse rotada se reduce a

$$\boxed{n_o^2 k^2 - N(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A})^2 = \left(\frac{\omega n_o n_e}{c}\right)^2}, \quad (\text{B.6})$$

que de hecho es la fórmula general para todo elipsoide de revolución con eje de rotación \mathbf{A} , si no se utilizara desde un inicio $k_x = 0$.

Apéndice C

Envolventes

Dada una familia de curvas con parámetro c

$$f(x, y, c) = 0 \quad (\text{C.1})$$

y suponiendo que existe una envolvente $\mathfrak{E}(c)$ dada por

$$x = x(c) \quad y = y(c), \quad (\text{C.2})$$

el vector tangente a la envolvente debe de ser de la forma

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\frac{dx}{dc}, \frac{dy}{dc} \right) \quad (\text{C.3})$$

mientras que un vector normal a las curvas, y a la misma envolvente en los puntos de tangencia, estará dado por

$$\mathbf{N} = \nabla f = (f_x, f_y). \quad (\text{C.4})$$

La expresión de la familia de curvas (C.1) al ser derivada con respecto al parámetro c lleva a

$$f_x \frac{dx}{dc} + f_y \frac{dy}{dc} + f_c = 0, \quad (\text{C.5})$$

la cual como $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{N} son ortogonales, i.e. $\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, se convierte en

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\tau} + f_c = f_c = 0. \quad (\text{C.6})$$

Entonces, se puede ver que la envolvente \mathfrak{E} debe de cumplir las siguientes condiciones:

$$f = 0 \quad \text{y} \quad f_c = 0. \quad (\text{C.7})$$

La generalización a más dimensiones y parámetros es inmediata, ya que es una extensión de lo que se ha realizado, por ejemplo, para una familia de superficies con dos parámetros

$$f(x, y, z, h, k) = 0, \quad (\text{C.8})$$

las condiciones para obtener la envolvente $\mathfrak{E}(h, k)$ son

$$f = 0, \quad f_h = 0, \quad f_k = 0. \quad (\text{C.9})$$

Apéndice D

Ecuaciones de refracción completas a partir del Modelo de Huygens

En esta sección presentamos un resumen de las fórmulas de refracción y reflexión en materiales uniaxiales en un sistema en el que sólo la dirección z está definida por la normal a la superficie en el punto de contacto, como fueron deducidas en [4]. Al final se describe la solución de la segunda envolvente (aunque esta carezca de sentido dentro del modelo) por completitud.

Primer Refracción

Rayo ordinario

$$\mathbf{S}_o = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_i}{n_o} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_i}{n_o} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\zeta_i} \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_o}\right)^2 (1 - \zeta_i^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Rayo extraordinario

$$\mathbf{S}_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_e} \left\{ \begin{pmatrix} n_o^2(n_e^2 + N\beta^2) & -n_o^2 N\alpha\beta & 0 \\ -n_o^2\alpha\beta & n_o^2(n_e^2 + N\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma\Delta}{\zeta_o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} - \gamma N\Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{D.2})$$

Dirección del vector de onda extraordinario

$$\mathbf{g}_e = \frac{1}{\Gamma_e} (-\xi_o[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) - \Delta], \quad -\eta_o[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) - \Delta], \quad (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2)), \quad (\text{D.3})$$

Dónde

$$N = n_o^2 - n_e^2 \quad (\text{D.4})$$

$$\delta_o^2 = n_e^2 - n_o^2\eta_o^2 \quad (\text{D.5})$$

$$\Gamma = n_o^2 - N\gamma^2 \quad (\text{D.6})$$

$$\Delta^2 = \Gamma\delta_o^2 + n_o^2 N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2 \quad (\text{D.7})$$

$$\delta_e^2 = n_e^2 \{n_o^2\Gamma^2 - N[\Delta\gamma + n_o^2(\alpha\xi_o + \eta_o\beta)]^2\} \quad (\text{D.8})$$

$$\Gamma_e^2 = (1 - \zeta_o^2)[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) - \Delta]^2 + (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2)^2 \quad (\text{D.9})$$

Rayo extraordinario secundario (solución de la segunda envolvente, carece de sentido físico.)

$$\mathbf{S}_{e2} = \begin{pmatrix} \xi_{e2} \\ \eta_{e2} \\ \zeta_{e2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\delta_{e2}} \left\{ \begin{pmatrix} n_o^2(n_e^2 + N\beta^2) & -n_o^2 N\alpha\beta & 0 \\ -n_o^2 N\alpha\beta & n_o^2(n_e^2 + N\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma\Delta}{\zeta_o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} + \gamma N\Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{D.10})$$

Dirección del vector de onda extraordinario secundario

$$\mathbf{g}_{e2} = \frac{1}{\Gamma_{e2}} (-\xi_o[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) + \Delta], \quad -\eta_o[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) + \Delta], \quad (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2)), \quad (\text{D.11})$$

donde

$$\delta_{e2}^2 = n_e^2 \{n_o^2 \Gamma^2 - N[\Delta\gamma - n_o^2(\alpha\xi_o + \eta_o\beta)]^2\} \quad (\text{D.12})$$

$$\Gamma_{e2}^2 = (1 - \zeta_o^2)[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) + \Delta]^2 + (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2)^2. \quad (\text{D.13})$$

Refracción de salida

Rayo ordinario ficticio

$$\mathbf{S}_{of} = \begin{pmatrix} \xi_{of} \\ \eta_{of} \\ \zeta_{of} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o\mu} \left\{ \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\alpha\beta & 0 \\ N\alpha\beta & n_e^2 + N\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_e}{\zeta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} + \zeta_e\gamma N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{D.14})$$

Rayo final

$$\mathbf{S}_{ef} = \begin{pmatrix} \xi_{ef} \\ \eta_{ef} \\ \zeta_{ef} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_i}{n_o} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_i}{n_o} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\zeta_i} \sqrt{1 - \left(\frac{n_i}{n_o}\right)^2 (1 - \zeta_{of}^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{of} \\ \eta_{of} \\ \zeta_{of} \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Dónde

$$\cos \psi = (\mathbf{S}_e \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{D.16})$$

$$\mu = \sqrt{n_e^2 \sin^2 \psi + n_o^2 \cos^2 \psi}. \quad (\text{D.17})$$

$$\Delta_e = \sqrt{n_e^2 N \sin^2 \psi + (N\gamma \cos \psi + n_e^2 \zeta_e)^2} \quad (\text{D.18})$$

Reflexión de un rayo ordinario

Rayo ordinario incidente

$$\mathbf{S}_o = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

Reflejo ordinario

$$\mathbf{S}_{oro} = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ -\zeta_o \end{pmatrix} \quad (\text{D.20})$$

Rayo reflejado extraordinariamente

$$\mathbf{S}_{ore} = \begin{pmatrix} \xi_{ore} \\ \eta_{ore} \\ \zeta_{ore} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{er}} \left\{ \begin{pmatrix} n_o^2(n_e^2 + N\beta^2) & -n_o^2 N\alpha\beta & 0 \\ -n_o^2 N\alpha\beta & n_o^2(n_e^2 + N\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Gamma\Delta}{\zeta_o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_o \\ \eta_o \\ \zeta_o \end{pmatrix} + \gamma N\Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{D.21})$$

Dirección del vector de onda

$$\mathbf{g}_{\text{ore}} = \frac{1}{\Gamma_{er}} (-\xi_o[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) + \Delta], \quad -\eta_o[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) + \Delta], \quad (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2)) \quad (\text{D.22})$$

Dónde

$$\delta_{er}^2 = n_e^2 \{n_o^2 \Gamma^2 - N[\Delta\gamma - n_o^2(\alpha\xi_o + \eta_o\beta)]^2\} \quad (\text{D.23})$$

$$\Gamma_{er}^2 = (1 - \zeta_o^2)[N\gamma(\alpha\xi_o + \beta\eta_o) + \Delta]^2 + (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_o + \beta\eta_o)^2)^2 \quad (\text{D.24})$$

Reflexión de un rayo extraordinario

Rayo extraordinario incidente

$$\mathbf{S}_e = \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} \quad (\text{D.25})$$

Reflexión ordinaria

$$\mathbf{S}_{\text{ero}} = \begin{pmatrix} \xi_{ero} \\ \eta_{ero} \\ \zeta_{ero} \end{pmatrix} = \frac{1}{n_o\mu} \left\{ \begin{pmatrix} n_e^2 + N\alpha^2 & N\alpha\beta & 0 \\ N\alpha\beta & n_e^2 + N\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta_e}{\zeta_e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_e \\ \eta_e \\ \zeta_e \end{pmatrix} + \zeta_e\gamma N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{D.26})$$

Rayo de la reflexión extraordinaria

$$\mathbf{S}_{\text{ere}} = \begin{pmatrix} \xi_{ere} \\ \eta_{ere} \\ \zeta_{ere} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta_{er}} \left\{ \begin{pmatrix} n_o^2(n_e^2 + N\beta^2) & -n_o^2 N\alpha\beta & 0 \\ -n_o^2 N\alpha\beta & n_o^2(n_e^2 + N\alpha^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\Gamma\Delta}{\zeta_o} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{ero} \\ \eta_{ero} \\ \zeta_{ero} \end{pmatrix} + \gamma N \Delta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{D.27})$$

Dirección del vector de onda

$$\mathbf{g}_{\text{ere}} = \frac{1}{\Gamma_{er}} (-\xi_{ero}[N\gamma(\alpha\xi_{ero} + \beta\eta_{ero}) + \Delta], \quad -\eta_{ero}[N\gamma(\alpha\xi_{ero} + \beta\eta_{ero}) + \Delta], \quad (\delta_o^2 + N(\alpha\xi_{ero} + \beta\eta_{ero})^2)) \quad (\text{D.28})$$

En donde se utiliza al rayo \mathbf{S}_{ero} para las definiciones de la fórmula.

Apéndice E

Dirección local del eje del cristal para el trazo de rayos paraxial

Si tenemos un eje del cristal con una dirección global tal que yace en el plano $\mathbf{X}'\mathbf{Z}'$, i.e.,

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

donde ϑ es el ángulo con respecto al eje óptico de la lente, véase la fig.(E.1a).

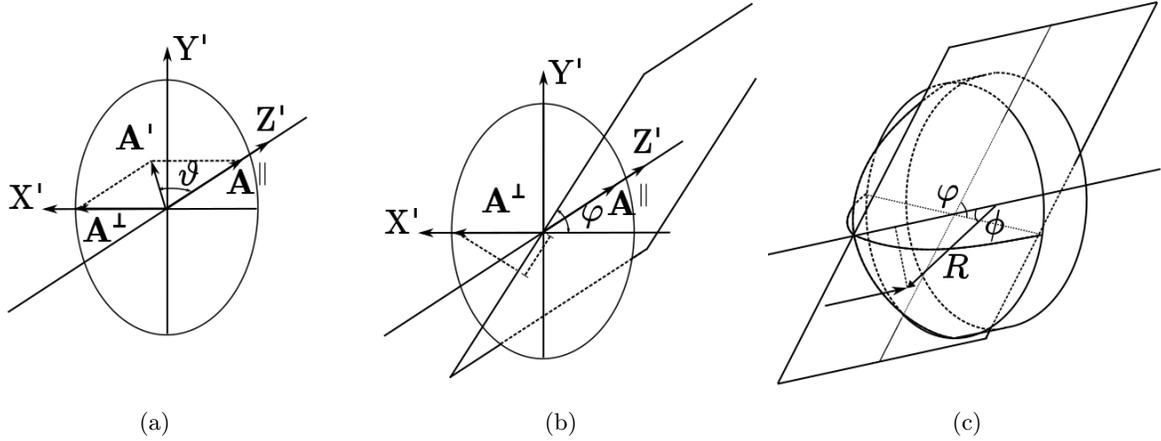


Figura E.1: (a) Eje del cristal, \mathbf{A} yaciendo en el plano $\mathbf{X}'\mathbf{Z}'$ y haciendo un ángulo ϑ con el eje óptico, (b) los planos de incidencia principales, i.e., que contienen al eje óptico se pueden caracterizar por φ , y (c) el ángulo ϕ es el ángulo entre la normal y el eje óptico.

Para planos de incidencia que contengan el eje de la lente, que llamaremos planos principales, pueden ser caracterizados por su ángulo con respecto al plano $\mathbf{X}'\mathbf{Z}'$, que nombraremos φ , véase la fig.(E.1b). De igual forma, dado un rayo incidente con un ángulo θ_i de incidencia, también se podrá definir un ángulo ϕ , que será el ángulo entre la normal en el punto de incidencia y el eje óptico, véase la fig.(E.1c).

En la deducción de la dirección local del eje del cristal, en el sistema coordenado SLR, el cual está dado por

$$\hat{\mathbf{z}} = \text{sgn}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{S}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{z}}}{\|\mathbf{S}_i - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{S}_i) \hat{\mathbf{z}}\|}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{E.2})$$

se requiere separar \mathbf{A}' en su componente paralela al eje óptico, que nombraremos \mathbf{A}'_{\parallel} que es invariante sin importar el plano de incidencia, i.e. invariante en φ , y que además que siempre yacerá en el plano de incidencia, y en su componente ortogonal a el eje del cristal, que llamaremos \mathbf{A}'_{\perp} , el cual sí variará. A su vez, \mathbf{A}'_{\perp} , se podrá descomponer en sus componentes ortogonal y paralela al plano de incidencia, esta última junto con \mathbf{A}'_{\parallel} deben de ser rotadas un ángulo ϕ .

El término paralelo al eje óptico, según la fig.(E.1a), es la proyección $\mathbf{A}'_{\parallel} = \cos \vartheta \hat{z}'$, y se descompondrá localmente en

$$\mathbf{A}_{\parallel} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (\text{E.3})$$

mientras que el término ortogonal, véase la fig.(E.1a), será $\mathbf{A}'_{\perp} = \sin \vartheta \hat{x}'$, y localmente

$$\mathbf{A}_{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \phi \\ \sin \vartheta \cos \phi \cos \varphi \\ -\sin \phi \sin \vartheta \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{E.4})$$

Por lo tanto el eje óptico en el SLR será

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi + \sin \vartheta \cos \phi \cos \varphi \\ \cos \vartheta \cos \phi - \sin \vartheta \sin \phi \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{E.5})$$

Es importante recalcar que la última fórmula fue derivada para superficies cóncavas, mas no convexas. Va a existir un cambio de signo (por la orientación) que afectará a la componente perpendicular. Por ello para superficies convexas se usará

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \phi \\ \cos \vartheta \sin \phi - \sin \vartheta \cos \phi \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \phi + \sin \vartheta \sin \phi \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (\text{E.6})$$

que es como si se hiciera un cambio de $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$.

Apéndice F

Fórmula para el cálculo de los índices de refracción ordinario y extraordinario para la calcita y el cuarzo

Se utilizó para calcular los índices de refracción ordinario y extraordinario, tanto para la calcita como para el cuarzo, la ecuación de dispersión, así como los coeficientes de dispersión, descritos en [20].

La ecuación utilizada fue

$$n_{o,e}^2 = A_{o,e} + \frac{B_{o,e}\lambda^2}{\lambda^2 - C_{o,e}} + \frac{D_{o,e}\lambda^2}{\lambda^2 - F_{o,e}}, \quad (\text{F.1})$$

en dónde los coeficientes de dispersión están dados por la tabla F.1.

Cristal	Modo de propagación	Coeficientes de dispersión				
		A	B	C	D	F
Calcita	o	1.73358749	0.96464345	1.94325203	1.82831454	120
	e	1.35859695	0.82427830	1.06689543	0.14429128	120
Cuarzo	o	1.28604141	1.07044083	1.00585997	1.10202242	100
	e	1.28851804	1.09509924	1.02101864	1.15662475	100

Tabla F.1: Coeficientes de dispersión para la calcita y el cuarzo.

Apéndice G

Programa de trazo de rayos

Se escribió un programa en C++ para el trazo de rayos a través de materiales uniaxiales. El programa fue escrito utilizando clases para facilitar su uso por otros usuarios y resumir líneas de código. Se escogió C++ debido a que es un lenguaje básico de alta velocidad, así como un lenguaje estándar en programación, que va más allá de la programación científica. De igual forma es un lenguaje de libre acceso, que no requiere el pago de licencias, como lo es Matlab o Mathematica.

Las dos clases principales que se definieron fueron la de los rayos y la de las lentes. Estas contienen funciones de uso común que conciernen sus distintas propiedades o magnitudes de interés. Para la clase de las lentes, se definieron funciones para la refracción en cada una de sus superficies por separado, y una función global que hacía las refracciones y transferencia total a través de la lente completa.

El programa usa unidades en *mm*. Es importante mencionar que los comentarios dentro del programa se encuentran escritos en inglés ya que en un futuro, en cuanto se haya terminado de desarrollar el programa, se compartirá para que otros usuarios tengan acceso a él¹.

Clase de las lentes

Header file

```
#ifndef LENS_H
#define LENS_H
#include <cmath>
#include <iostream>
#include "ray.h"
using namespace std;

class Lens
{
public:
// G_V is vertex position, Axis is the crystal axis
double* G_V;
double* Axis;
double RAxis[3];
double X[3],Y[3],Z[3];
double ni,ne,no,diameter,thick;
// Surface 1 curvature and excentricity
double k1,e1;
// Surface 2 curvature and excentricity
```

¹Actualmente existen muchos grupos de investigación que desarrollan software de trazo de rayos en materiales birrefringentes, sin embargo, no siempre son de libre acceso.

```

double k2,e2;
double* P_L;
double* S_L;
Lens();
Lens(double* G_V, double* Axis, double thick, double diameter, double ni, double ne,
      double no, double k1, double e1, double k2, double e2);
void Move(double x, double y, double z);
double Distance();
void Transfer(Ray *ray1, int j);
void Rotate(Ray *ray1, int j);
void Returnrot(Ray* ray1);
void Refractionordin(Ray* ray1, Ray* ordinary);
void Refractionordext(Ray* ray1, Ray* ordinary);
void Refractionextin(Ray* ray1, Ray* extraordinary);
void Refractionextout(Ray* extraordinary);
void Status();
void GoThrough(Ray *ray1, Ray* ordinary, Ray* extraordinary, bool log);
};

#endif // LENS_H

```

Las funciones de la clase.

```

#include "lens.h"
// Default constructor
Lens::Lens()
{
// Constructor: first vertex position, crystal axis, thickness, diameter, index of the
// surrounding media
// extraordinary index, ordinary index, curvature 1, eccentricity 1, curvature 2,
// eccentricity 2.
}

Lens::Lens(double* G_V, double* Axis, double thick, double diameter, double ni, double ne,
           double no, double k1, double e1, double k2, double e2)
{
    this->G_V=G_V;
    this->Axis=Axis;
    for(int i=0;i<3;i++){
        X[i]=0;
        Y[i]=0;
        Z[i]=0;
        RAxis[i]=0;
    }
    this->thick=thick;
    this->diameter=diameter;
    this->ni=ni;
    this->ne=ne;
    this->no=no;
    this->k1=k1;
    this->k2=k2;
    this->e1=e1;
    this->e2=e2;
}

void Lens::Move(double x, double y, double z){
    G_V[0]+=x;
    G_V[1]+=y;
    G_V[2]+=z;
}

double Lens::Distance(){
    double d=0;
    for(int i=0; i<3;i++){
        d+=pow(G_V[i],2);
    }
}

```

```

    }
    return sqrt(d);
}
}
/* Function which transfers the rays from their known points and cosines,
to the new "known point" at the foot of the perpendicular from the origin
to the original ray. After getting the new known point, it gets it's intersection with the
surface.
*/
void Lens::Transfer(Ray *ray1,int j){
// I define the distance between the points
if(ray1->useful==false){return;}
double Q,e,d;
if(j==1){
    cout << "Transfer: surface 1"<<endl;
    e= 1-pow(this->e1,2);
    Q=this->k1;
    d=this->G_V[2];
    ray1->Move(this->G_V[0],this->G_V[1],this->G_V[2]);
}
else if(j==2){
    cout << "Transfer: surface 2"<<endl;
    e= 1-pow(this->e2,2);
    Q=this->k2;
    d=this->G_V[2]+this->thick;
    ray1->Move(this->G_V[0],this->G_V[1],this->G_V[3]+this->thick);
}

double PPo=0;
for(int i=0; i<3;i++){
    PPo+=ray1->G_P[i]*ray1->G_S[i];
}
// I compute the new known point
for(int i=0; i<3;i++){
    ray1->G_P[i]-=PPo*ray1->G_S[i];
}

// Now I get the intersection between the ray and the surface
double t, t2, disc, a, b, c;
a=(e*pow(ray1->G_S[2],2)+pow(ray1->G_S[1],2)+pow(ray1->G_S[0],2))*Q;
b= Q*(e*ray1->G_P[2]*ray1->G_S[2]+ray1->G_P[1]*ray1->G_S[1]+ray1->G_P[0]*ray1->G_S
[0]) -2*ray1->G_S[2];
c=(pow(ray1->G_P[0],2)+pow(ray1->G_P[1],2)+e*pow(ray1->G_P[2],2))*Q-2*ray1->G_P[2];
if(pow(b,2)-4*a*c>=0){
    disc=sqrt(pow(b,2)-4*c*a);
}
else {
    cout<< "The ray doesn't intersect the surface"<< endl;
    ray1->useful=false;
    return;
}
/* I compute the parameter t and t2, and then proceed to compare them
and keep the lowest value.
*/
if(a==0){
    t=-c/b;
    t2=-c/b;
}
else{
    t=(-b+disc)/(2*a);
    t2=(-b-disc)/(2*a);
}
if(abs(t)>abs(t2)){
    t=t2;
}
}
// I give the values

```

```

for(int i=0; i<3;i++){
    if(i<2){
        ray1->I_P[i]=ray1->G_P[i]+t*ray1->G_S[i];
        ray1->GI_P[i]=ray1->I_P[i];
    }
    else{
        ray1->I_P[i]=ray1->G_P[i]+t*ray1->G_S[i];
        ray1->GI_P[i]=ray1->I_P[i]+d;
    }
}
if(pow(ray1->I_P[0],2)+pow(ray1->I_P[1],2)>=(pow(this->diameter,2))/4){
    cout<< "The ray doesn't intersect the surface(diam)"<< endl;
    ray1->useful=false;
    return;
}
if(j==1){
    ray1->Move(-this->G_V[0],-this->G_V[1],-this->G_V[2]);
}
else if(j==2){
    ray1->Move(-this->G_V[0],-this->G_V[1],-this->G_V[3]-this->thick);
}
cout << "Transfer done"<<endl;
}

/*Function which rotates the coordinate system given a surface of incidence.
It reads: intersection point, incidence cosines vector, crystal axis,
rotated new coordinates, rotated crystal coordinates, curvature,
body's eccentricity, X axis, Y axis, and Z axis*/
void Lens::Rotate(Ray *ray1,int j){
    if(ray1->useful==false){return;}
    double Q,e;
    if(j==1){
        cout<<"Rotation on surface 1"<<endl;
        Q=this->k1;
        e=1-pow(this->e1,2);
    }
    else if(j==2){
        cout<<"Rotation on surface 2"<<endl;
        Q=this->k2;
        e=1-pow(this->e2,2);
    }
    double derv[3]={0,0,0};
    double k=0;
    double thet=0;
    double dot=0;
    for(int i=0;i<3;i++){
        if(i<2){
            derv[i]=2*ray1->I_P[i]*Q;
        }
        else{
            derv[i]=2*(e*ray1->I_P[i]*Q-1);
        }
        k+=derv[i]*derv[i];
    }
    k=sqrt(k);
    dot=(derv[0]*ray1->G_S[0]+derv[1]*ray1->G_S[1]+derv[2]*ray1->G_S[2])/(k*k);
    double sign=dot/abs(dot);
    //I compute Z direction coord. system.
    for(int i=0;i<3;i++){
        this->Z[i]=sign*derv[i]/k;
    }
    k=0;
    //I compute Y direction
    for(int i=0;i<3;i++){
        this->Y[i]=ray1->G_S[i]-dot*derv[i];
    }
}

```

```

        k+=this->Y[i]*this->Y[i];
    }
    k=sqrt(k);
    if(k>0.0000004){
        for(int i=0;i<3;i++){
            this->Y[i]=this->Y[i]/k;
        }
    }
    else{
        cout <<"Ray ortogonal to the surface"<<endl;
        dot=this->Y[0]*this->Z[0]+this->Y[1]*this->Z[1]+this->Y[2]*this->Z[2];
        this->Y[0]=0-dot*this->Z[0];
        this->Y[1]=1-dot*this->Z[1];
        this->Y[2]=0-dot*this->Z[2];
    }
    this->X[0]=(this->Y[1])*(this->Z[2])-(this->Z[1])*(this->Y[2]);
    this->X[1]=this->Y[2]*this->Z[0]-this->Z[2]*this->Y[0];
    this->X[2]=this->Y[0]*this->Z[1]-this->Z[0]*this->Y[1];
    //the new vector in the coordinate system comes from the dot product
    // between the original ray with the new basis
    ray1->L_S[0]=this->X[0]*ray1->G_S[0]+this->X[1]*ray1->G_S[1]+this->X[2]*ray1->G_S
        [2];
    ray1->L_S[1]=this->Y[0]*ray1->G_S[0]+this->Y[1]*ray1->G_S[1]+this->Y[2]*ray1->G_S
        [2];
    ray1->L_S[2]=this->Z[0]*ray1->G_S[0]+this->Z[1]*ray1->G_S[1]+this->Z[2]*ray1->G_S
        [2];
    ray1->Normalize(ray1->L_S);
    this->RAxis[0]=(this->X[0]*this->Axis[0]+this->X[1]*this->Axis[1]+this->X[2]*this->
        Axis[2]);
    this->RAxis[1]=(this->Y[0]*this->Axis[0]+this->Y[1]*this->Axis[1]+this->Y[2]*this->
        Axis[2]);
    this->RAxis[2]=(this->Z[0]*this->Axis[0]+this->Z[1]*this->Axis[1]+this->Z[2]*this->
        Axis[2]);
    dot=this->RAxis[0]*ray1->L_S[0]+this->RAxis[1]*ray1->L_S[1]+this->RAxis[2]*ray1->L_S
        [2];

    cout<< "Rotation done"<<endl;
}

// Function that computes the G_S of a ray from it's L_S and from a previous rotation
void Lens::Returnrot(Ray* ray1){
    for(int i=0; i <3; i++){
        ray1->G_S[i]=(ray1->L_S[0]*this->X[i])+(ray1->L_S[1]*this->Y[i])+(ray1->L_S
            [2]*this->Z[i]);
    }
    ray1->Normalize(ray1->G_S);
}

/* Function that refracts the incident ray using snell's law, i.e., it computes the ordinary
ray
*/
void Lens::Refractionordin(Ray* ray1, Ray* ordinary){
    if(ray1->useful==false){return;}
    cout<< "Ordinary refraction"<<endl;
    ordinary->L_S[0]=ray1->L_S[0]*this->ni/this->no;
    ordinary->L_S[1]=ray1->L_S[1]*this->ni/this->no;
    if(abs(ray1->L_S[2])<0.00003){
        ordinary->L_S[2]=0;
    }
    else{
        ordinary->L_S[2]=sqrt(1-(this->ni/this->no)*(this->ni/this->no)*(1-ray1->L_S
            [2]*ray1->L_S[2]));
    }
    for(int i=0;i<3;i++){
        ordinary->I_P[i]=ray1->I_P[i];
    }
}

```

```

        ordinary->G_P[i]=ray1->GI_P[i]+this->G_V[i];
    }
    ordinary->Normalize(ordinary->L_S);
    cout<< "Ordinary refraction done"<<endl;
}

void Lens::Refractionordext(Ray* ray1, Ray* ordinary){
    if(ray1->useful==false){return;}
    cout<< "Ordinary refraction"<<endl;
    ordinary->L_S[0]=ray1->L_S[0]*this->no/this->ni;
    ordinary->L_S[1]=ray1->L_S[1]*this->no/this->ni;
    if(abs(ray1->L_S[2])<0.000003){
        ordinary->L_S[2]=0;
    }
    else{
        ordinary->L_S[2]=sqrt(1-(this->no/this->ni)*(this->no/this->ni)*(1-ray1->L_S
            [2]*ray1->L_S[2]));
    }
    for(int i=0;i<3;i++){
        ordinary->I_P[i]=ray1->I_P[i];
        ordinary->G_P[i]=ray1->GI_P[i]+this->G_V[i];
    }
    ordinary->Normalize(ordinary->L_S);
    cout<< "Ordinary refraction done"<<endl;
}

/* Extraordinary refraction for the incoming ray*/
void Lens::Refractionextin( Ray* ordinary,Ray* extraordinary){
    cout<< "Extraordinary refraction"<<endl;
    double no2=pow(this->no,2);
    double ne2=pow(this->ne,2);
    double dif=no2-ne2;
    double sum= this->no*(this->RAxis[0]*ordinary->L_S[0]+this->RAxis[1]*ordinary->L_S
        [1]);
    double delo=ne2-no2*(1-pow(ordinary->L_S[2],2));
    double Gamma=no2-dif*pow(this->RAxis[2],2);
    double Delta=sqrt(Gamma*delo+dif*pow(sum,2));
    double deleg=ne2*sqrt(no2*pow(Gamma,2)-dif*pow((this->RAxis[2]*Delta+this->no*sum
        ,2));
    double mat2=no2*(ne2+dif*pow(this->RAxis[0],2));
    double mat1=no2*(ne2+dif*pow(this->RAxis[1],2));
    double subd1=-no2*dif*this->RAxis[0]*this->RAxis[1];
    double sec=this->RAxis[2]*dif*Delta;
    extraordinary->L_S[0]=(mat1*ordinary->L_S[0]+subd1*ordinary->L_S[1]-sec*this->RAxis
        [0])/deleg;
    extraordinary->L_S[1]=(subd1*ordinary->L_S[0]+mat2*ordinary->L_S[1]-sec*this->RAxis
        [1])/deleg;
    extraordinary->L_S[2]=(Gamma*Delta)/deleg;
    for(int i=0;i<3;i++){
        extraordinary->GI_P[i]=ordinary->I_P[i];
        extraordinary->G_P[i]=ordinary->G_P[i];
    }
    cout<< "Extraordinary refraction done"<<endl;
}

/* Funtion for the outgoing extraordinary refraction*/
void Lens::Refractionextout(Ray* extraordinary){
    cout<< "Extraordinary refraction out"<<endl;
    double Se[3]={0,0,0};
    double dif=pow(this->no,2)-pow(this->ne,2);
    double cosphi=this->RAxis[0]*extraordinary->L_S[0]+this->RAxis[1]*extraordinary->L_S
        [1]+this->RAxis[2]*extraordinary->L_S[2];
    double sinphi;
    if(abs(cosphi)>=1){
        sinphi=0;
    }
}

```

```

}
else{sinphi=sqrt(1-cosphi*cosphi);}
double Delta=sqrt(pow(this->ne,2)*dif*sinphi*sinphi+pow((dif*this->RAxis[2]*cosphi+
this->ne*this->ne*extraordinary->L_S[2]),2));
double Gamma=sqrt(pow(this->ne,2)*sinphi*sinphi+pow(this->no,2)*cosphi*cosphi);
double mat1=pow(this->ne,2)+dif*pow(this->RAxis[0],2);
double mat2=pow(this->ne,2)+dif*pow(this->RAxis[1],2);
double subd1=dif*this->RAxis[0]*this->RAxis[1];
double sec=this->RAxis[2]*dif*Delta;
Se[0]=(mat1*extraordinary->L_S[0]+subd1*extraordinary->L_S[1]+dif*this->RAxis[2]*
this->RAxis[0]*extraordinary->L_S[2])/(Gamma*this->ni);
Se[1]=(mat2*extraordinary->L_S[1]+subd1*extraordinary->L_S[0]+dif*this->RAxis[2]*
this->RAxis[1]*extraordinary->L_S[2])/(Gamma*this->ni);
double ze=(Delta)/(no*Gamma);
Se[2]=sqrt(pow(this->ni,2)-pow(this->no,2)*(1-ze*ze))/this->ni;
for(int i=0; i<3;i++){
    extraordinary->L_S[i]=Se[i];
    extraordinary->G_P[i]=extraordinary->GI_P[i];
}
    extraordinary->Normalize(extraordinary->L_S);
    cout<< "Extraordinary refraction done"<<endl;
}

void Lens::Status()
{
    cout<<"Lens status: "<<endl;
    cout<< "G_V"<<setw(15)<<"Axis"<<setw(15)<<"RAxis"<<setw(15)<<"X"<<setw(15)<<"Y"<<
    setw(15)<<"Z"<<endl;
    for(int i=0; i<3;i++){
        cout<< G_V[i]<<setw(15)<<Axis[i]<<setw(15)<<RAxis[i]<<setw(15)<<X[i]<<setw
        (15)<<Y[i]<<setw(15)<<Z[i]<<endl;
    }
}

/*Function which transfers and refracts a ray through the whole lens, instead of using
refraction in each surface*/
void Lens::GoThrough(Ray *original, Ray* ordinary, Ray* extraordinary, bool log){
    if(log==true){
        this->Transfer(original,1);
        original->Status();
        this->Rotate(original,1);
        original->Status();
        this->Refractionordin(original,ordinary);
        this->Returnrot(ordinary);
        ordinary->Status();
        this->Refractionextin(ordinary,extraordinary);
        this->Returnrot(extraordinary);
        extraordinary->Status();
        this->Transfer(ordinary,2);
        ordinary->Status();
        this->Rotate(ordinary,2);
        this->Status();
        ordinary->Status();
        this->Refractionordext(ordinary,ordinary);
        this->Returnrot(ordinary);
        ordinary->Status();
        this->Transfer(extraordinary,2);
        extraordinary->Status();
        this->Rotate(extraordinary,2);
        extraordinary->Status();
        this->Refractionextout(extraordinary);
        this->Returnrot(extraordinary);
        extraordinary->Status();
    }
    else{

```

```

        this->Transfer(original,1);
        this->Rotate(original,1);
        this->Refractionordin(original,ordinary);
        this->Returnrot(ordinary);
        this->Refractionextin(ordinary,extraordinary);
        this->Returnrot(extraordinary);
        this->Transfer(ordinary,2);
        this->Rotate(ordinary,2);
        this->Refractionordext(ordinary,ordinary);
        this->Returnrot(ordinary);
        this->Transfer(extraordinary,2);
        this->Rotate(extraordinary,2);
        this->Refractionextout(extraordinary);
        this->Returnrot(extraordinary);
    }
}

```

Clase de los rayos

Header file

```

#ifndef RAY_H
#define RAY_H
#include <cmath>
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <sstream>
using namespace std;

class Ray
{
public:
    // G_P global position, G_S global direction cosines, Polari global polarization direction,
    // I_P intersection,
    // L_S local direction cosines,
    double G_P[3];
    double G_S[3];
    double Polari[3];
    double I_P[3];
    double GI_P[3];
    double L_S[3];
    bool useful;
    Ray();
    Ray(double* P, double* S, double* Polar);
    ~Ray();
    void Move(double x, double y, double z);
    double Distance();
    void Status();
    void Normalize(double* S);
    void Transfer(double Z);
    void Print(ofstream& myfile);
    void Focci(double & Focus, double & distance);
};

#endif // RAY_H

```

Las funciones de la clase.

```

#include "ray.h"
//Default constructor
Ray::Ray()
{

```

```

}
/*Constructor with parameters. In the global system, G_P is the position, S_P is the
direction, and Polari is the direction of polarization, L_S is the local direction and
I_P is the intersection with the lense using as reference the vertex*/
Ray::Ray(double* P,double* S,double* Polar)
{
useful=true;
for(int i=0;i<3;i++){
    G_P[i]=P[i];
    G_S[i]=S[i];
    Polari[i]=Polar[i];
    L_S[i]=-9999;
    I_P[i]=-9999;
    GI_P[i]=-9999;
}
}
Ray::~~Ray()
{
}
//To change global system via a translation
void Ray::Move(double x, double y, double z)
{
    G_P[0]-=x;
    G_P[1]-=y;
    G_P[2]-=z;
}
//To compute distance, from the optical axis
double Ray::Distance()
{
    double d=0;
    for(int i=0; i<2;i++){
        d+=pow(G_P[i],2);
    }
    return sqrt(d);
}
void Ray::Status()
{
    cout<<"Ray status: "<<endl;
    cout<< "G_P"<<setw(15)<<"G_S"<<setw(15)<<"GI_P"<<setw(15)<<"I_P"<<setw(15)<<"L_S"<<
    endl;
    for(int i=0; i<3;i++){
        cout<< this->G_P[i]<<setw(15)<<this->G_S[i]<<setw(15)<<this->GI_P[i]<<setw
        (15)<<this->I_P[i]<<setw(15)<<this->L_S[i]<<endl;
    }
}
void Ray::Normalize(double* S)
{
    double k=0;
    for(int i=0;i<3;i++){
        if(abs(S[i])<0.000000000006){
            S[i]=0;
        }
        k+=S[i]*S[i];
    }
    k=sqrt(k);
    for(int i=0;i<3;i++){
        S[i]*=(1.0/k);
    }
}
// to transfer the ray to a "screen" or just to a plane in Z
void Ray::Transfer(double Z)

```

```

{
    double t;
    if(G_S[2]!=0){
        t = (Z-G_P[2])/G_S[2];
        for(int i=0; i<3;i++){
            G_P[i]+=t*G_S[i];
        }
    }
    else cout<< "the ray is not traveling in z direction"<<endl;
}

void Ray::Print(ofstream& myfile)
{
    myfile<< setprecision(8) <<G_P[0]<<setw(15)<<G_P[1]<<setw(15)<<G_P[2]<<endl;
}

void Ray::Focci(double & Focus, double & distance)
{
    double F[3]={0,0,0};
    double t=-(this->G_P[0]*this->G_S[0]+this->G_P[1]*this->G_S[1])/(pow(this->G_S[1],2)
        +pow(this->G_S[0],2));
    for(int i=0;i<3;i++){
        F[i]=this->G_P[i]+this->G_S[i]*t;
    }
    Focus=F[2];
    distance=sqrt(pow(F[0],2)+pow(F[1],2));
}
}

```

Ejemplo

Se hace pasar a un rayo a través de una lente convexa-plana de calcita, mostrando todos los datos relevantes durante su refracción, por ello se escogió

log=true

, y luego se transfiere al rayo extraordinario hasta una cierta distancia d=120 mm después de la lente y se muestra su estado.

```

#include <iostream>
#include <string>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <sstream>
#include <vector>
#include "ray.h"
#include "lens.h"
using namespace std;

int main()
{
    double PR[3]={0,1,-40};
    double SR[3]={0,0,1};
    double P1[3]={0,0,0};
    double Axis1[3]={0,1,0};
    double Dummy[3]={-9999,-9999,-9999};
    bool log=true;
    Ray* original;
    Ray* ordinary1;
    Ray* extraordinary1;
    Lens lens1(P1,Axis1,2.5,60,1,1.486,1.658,0.0168861871,0,0,0);
    original=new Ray(PR,SR,SR);
    ordinary1=new Ray(Dummy,Dummy,Dummy);
    extraordinary1=new Ray(Dummy,Dummy,Dummy);
}

```

```
||  
    lens1.GoThrough(original, ordinary1, extraordinary1, log);  
    extraordinary1->Transfer(120);  
    extraordinary1->Status();  
}
```


Referencias

- [1] Maria C. Simon and R. M. Echarri. Ray tracing formulas for monoaxial optical components: vectorial formulation. *Appl. Opt.*, 25(12):1935–1939, Jun 1986.
- [2] Quan-Ting Liang. Simple ray tracing formulas for uniaxial optical crystals. *Appl. Opt.*, 29(7):1008–1010, Mar 1990.
- [3] Maximino Avendaño-Alejo, Orestes N. Stavroudis, and Ana Rosa Boyain y Goitia. Huygens’s principle and rays in uniaxial anisotropic media. I. crystal axis normal to refracting surface. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(8):1668–1673, Aug 2002.
- [4] Maximino Avendaño-Alejo and Orestes N. Stavroudis. Huygens’s principle and rays in uniaxial anisotropic media. II. crystal axis orientation arbitrary. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(8):1674–1679, Aug 2002.
- [5] Stephen C. McClain, Lloyd W. Hillman, and Russell A. Chipman. Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. I. algorithms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(11):2371–2382, Nov 1993.
- [6] Stephen C. McClain, Lloyd W. Hillman, and Russell A. Chipman. Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. II. theory and physics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(11):2383–2393, Nov 1993.
- [7] J. Paul Lesso, Alan J. Duncan, Wilson Sibbett, and Miles J. Padgett. Aberrations introduced by a lens made from a birefringent material. *Appl. Opt.*, 39(4):592–598, Feb 2000.
- [8] Shahen Hacyan. Derivation of the paraxial equation for extraordinary waves in uniaxial media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(3):602–604, Mar 2010.
- [9] Shahen Hacyan. Paraxial theory of electromagnetic waves in plane inhomogeneous media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 27(9):2091–2096, Sep 2010.
- [10] S Hacyan and R Jáuregui. Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 11(8):085204, 2009.
- [11] Radhika Rangarajan, Luis Edgar Vicent, Alfred B. U’Ren, and Paul G. Kwiat. Engineering an ideal indistinguishable photon-pair source for optical quantum information processing. *Journal of Modern Optics*, 58(3-4):318–327, 2011.
- [12] Max Born and Emil Wolf. *Principles in Optics*. Pergamon Press, 6th edition, 1985. Chapter XIV.
- [13] Amnon Yariv and Pochi Yeh. *Optical Waves in Crystals*. John Wiley & Sons, 1983. Chapter 4.
- [14] Maximino Avenda no Alejo, Rufino Díaz-Urbe, and Ivan Moreno. Caustics caused by refraction in the interface between an isotropic medium and a uniaxial crystal. *J. Opt. Soc. Am. A*, 25(7):1586–1593, Jul 2008.
- [15] Maximino Avendaño-Alejo and Martha Rosete-Aguilar. Paraxial theory for birefringent lenses. *J. Opt. Soc. Am. A*, 22(5):881–891, May 2005.

- [16] M. Testorf, B. Hennelly, and J. Ojeda-Castaneda. *Phase-Space Optics: Fundamentals and Applications: Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill Education, 2009.
- [17] Francis A. Jenkins and Harvey E. White. *Fundamentals of Optics*. McGraw Hill, 3rd edition, 1957. Section 26.
- [18] P.F. Kerr. *Optical Mineralogy*. Textbook Publishers, 2003.
- [19] Gary D. Landry and Theresa A. Maldonado. Ray tracing through a two ball uniaxial sapphire lens system in a single mode fiber-to-fiber coupler. *Journal of Lightwave Technology*, 14(3):509–512, March 1996.
- [20] Gorachand Ghosh. Dispersion-equation coefficients for the refractive index and birefringence of calcite and quartz crystals. *Optics Communications*, 163(1-3):95 – 102, 1999.
- [21] James D. Trolinger, Russell A. Chipman, and Donald K. Wilson. Polarization ray tracing in birefringent media. *Optical Engineering*, 30(4):461–466, 1991.