



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA QUÍMICA – INGENIERÍA DE PROCESOS

RECUBRIMIENTO DE SUPERFICIES CON FLUIDOS NEWTONIANOS Y NO
NEWTONIANOS CON REACCIÓN QUÍMICA

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
I.Q. LEONARDO DAMIÁN SORIA RODRÍGUEZ

TUTORES PRINCIPALES
DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS
FACULTAD DE QUÍMICA, UNAM

DR. JUAN PABLO AGUAYO VALLEJO
CENTRO DE CIENCIA APLICADA Y DESARROLLO TECNOLÓGICO, UNAM

MÉXICO, Cd. Mx., JULIO 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente:	Dr. Gabriel Ascanio Gasca	(CCADET)
Secretario:	Dr. Rafael Herrera Nájera	(FQ)
Vocal:	Dr. René Osvaldo Vargas Aguilar	(IPN)
1 ^{er.} Suplente:	Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo	(CCADET)
2 ^{do.} Suplente:	Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos	(FQ)

Lugar donde se realizó la tesis:

Departamento de Ingeniería Química, Conjunto "E", Edificio de Ingeniería Química, Facultad de Química, Ciudad Universitaria, Coyoacán, 04510, Ciudad de México.

TUTORES DE TESIS:

Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos

FIRMA

Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo

FIRMA

Resumen

En esta tesis se analizaron los procesos de recubrimiento sin reacción química y con reacción química utilizando fluidos newtonianos y no newtonianos (tres versiones del fluido de Maxwell) en dos geometrías diferentes (rodillo aplicador y placas paralelas).

Se utilizaron métodos analíticos y aproximados para resolver las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento y de masa asociadas a los procesos antes mencionado. Para modelar el proceso de recubrimiento sin reacción química y con fluidos no newtonianos, se utilizaron tres derivadas convectivas, con el objetivo de comparar el comportamiento que predicen modelos que integran en su ecuación constitutiva diferentes tipos de derivadas convectivas. De aquí se obtuvo que al incluir la derivada configuracional en la ecuación constitutiva de Maxwell establece un modelo general, ya que arroja un parámetro que modela los efectos de rotación en el fluido (su valor oscila entre cero y uno), se encontró que si éste parámetro toma sus valores límite, se obtienen los resultados al utilizar la derivada corrotacional o al usar la derivada codeformacional.

Los perfiles de velocidades presentados para los diversos casos del proceso sin reacción química fueron resultado de utilizar la aproximación de lubricación y utilizar la teoría de métodos perturbativos, donde el parámetro de perturbación fue el número adimensional de Weissenberg que relaciona el tiempo de relajación de fluido con el tiempo de proceso.

Para el proceso de recubrimiento con fluido newtoniano en placas paralelas y con reacción química, se obtuvo una solución analítica incompleta ya que no se pudo obtener una expresión analítica para calcular los valores propios debido a que en el perfil de concentraciones tiene una forma hipergeométrica no lineal dada por las funciones de Airy (asociadas al proceso difusivo con reacción química).

Agradecimientos

A mi familia a la que amo y respeto, a mi mamá Paola Rodríguez y mi papá Leonardo Soria quienes siempre han estado conmigo para apoyarme y protegerme a mi hermano Carlos Soria con quien he pasado momentos extraordinarios de mi vida.

Quiero agradecer especialmente a mi profesor y amigo el Dr. Ángel Enrique Chávez Castellanos, quien en todo momento me apoyo.

Al Dr. Juan Pablo Aguayo Vallejo y al Dr. Rafael Herrera Nájera, por el apoyo recibido en la realización de ésta tesis.

Al Dr. Gabriel Ascanio y al Dr. Rene Vargas, por las observaciones académicas para hacer de éste un mejor trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la Facultad de Química y a mis extraordinarios amigos, con quienes me he divertido y aprendido.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca No. 394772 otorgada para realizar los estudios de maestría.

Dedicatoria

A Paola, Valente Leonardo y Carlos Alejandro

Índice

Resumen.....	3
Agradecimientos	4
Dedicatoria	5
Índice	1
Nomenclatura.....	3
Lista de acrónimos	5
Lista de figuras	5
Lista de tablas.....	6
Números adimensionales *	7
Introducción	8
Capítulo I	10
Antecedentes	11
Recubrimiento sin reacción química.....	11
Objetivos	13
Proceso de recubrimiento sin reacción química.....	13
1. Desarrollo y análisis del problema con fluido newtoniano.....	14
1.1.1 Caso rodillo aplicador.....	14
1.1.2 Caso placas paralelas	20
2. Desarrollo y análisis del problema con fluidos no newtonianos viscoelásticos.....	22
2.1 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional (FMDCor). 22	
2.1.1 Caso rodillo aplicador.....	28
2.1.2 Caso placas paralelas	35
2.2 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional (FMDCod)	39
2.2.1 Caso rodillo aplicador.....	43
2.2.2 Caso placas paralelas	46
2.3 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva configuracional (FMDCon)	48
2.3.1 Caso rodillo aplicador.....	54

2.3.2	<i>Caso placas paralelas</i>	57
3.	Comparación de modelos	59
4.	Conclusiones.....	64
4.1	Recubrimiento sin reacción química	64
Capítulo II.....		66
Antecedentes		67
Recubrimiento con reacción química.....		67
Objetivos		68
Proceso de recubrimiento con reacción química.....		68
1.	Desarrollo y análisis del problema con reacción química en fluidos newtonianos	69
1.1	Recubrimiento con fluido newtoniano con reacción química de primer orden en placas paralelas y sin gradiente de presión.	69
2.	Conclusiones.....	77
2.1	Recubrimiento con reacción química.....	77
Anexos.....		78
Anexo 1 “Teoría de métodos perturbativos”		78
Anexo 2 “Datos para elaboración de gráficos”		83
Anexo 3 “Cálculo de la norma del tensor adimensional total solo considerando esfuerzos normales”. Datos gráfica 3.		84
Anexo 4 “Adimensionalización de componentes del tensor de esfuerzos”		85
Bibliografía		90

Nomenclatura

p	Presión dimensional fluido newtoniano
t	Tiempo
u_x	Perfil de velocidad dimensional en la dirección x
P	Presión adimensional
R	Radio del rodillo
H_0	Distancia característica que separa al rodillo de la superficie a recubrir (espesor de recubrimiento)
U	Velocidad característica
\hbar	Distancia adimensional en función de la posición entre el rodillo y toda la zona a recubrir
Q	Flujo volumétrico dimensional
N	Parámetro que modela la región de separación
$\underline{\underline{D}}$	Tensor deformación
\underline{u}	Vector velocidad
N_1	Primera diferencia de esfuerzos normales
Θ	Primera diferencia adimensional de esfuerzos normales
$\frac{\mathcal{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathcal{D}t}$	Derivada convectiva de Jaumann
$\frac{\mathfrak{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathfrak{D}t}$	Derivada convectiva de Oldroyd
$\frac{\mathbb{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathbb{D}t}$	Derivada convectiva mixta
W_S	Número de Weissenberg
C_B	Perfil de concentraciones dimensional de la especie B (reactivo limitante)
C_{B0}	Concentración inicial de la especie B (reactivo limitante)
D_{AB}	Coefficiente de difusión de masa
Pe_M	Peclet de masa
Da_I	Damköhler I
Da_{II}	Damköhler II

Ai Función de Airy Ai

Bi Función de Airy Bi

Letras griegas

μ Viscosidad fluido newtoniano

ξ Coordenada adimensional dirección x

η Coordenada adimensional en la dirección y

φ Perfil de velocidades adimensional en la dirección x

$\frac{dP}{d\xi}$ Gradiente de presión

λ Flujo volumétrico adimensional

λ_0 Flujo volumétrico del orden cero de la teoría perturbativa

λ_1 Flujo volumétrico del orden uno de la teoría perturbativa

ϑ Tensión superficial

$\underline{\underline{\omega}}$ Tensor vorticidad

$\underline{\underline{\tau}}$ Tensor de esfuerzos

ρ Densidad

η_0 Viscosidad de fluidos no newtonianos

τ_{xx} Esfuerzo normal en la dirección xx

τ_{yy} Esfuerzo normal en la dirección yy

τ_{xy} Esfuerzo cortante xy

ζ Parámetro de rotación de la derivada convectiva configuracional

$\sigma_{\xi\xi}$ Esfuerzo normal adimensional $\xi\xi$

$\sigma_{\eta\eta}$ Esfuerzo normal adimensional $\eta\eta$

$\sigma_{\xi\eta}$ Esfuerzo cortante adimensional $\xi\eta$

Ω Distribución de concentraciones adimensional de la especie B (reactivo limitante)

ϵ Parámetro métodos perturbativos

- ε Parámetro asociado a efectos de rotación
- Θ Primera diferencia adimensional de esfuerzos normales

Lista de acrónimos

Frase	Acrónimo
Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional.	FMDCor
Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional.	FMDCod
Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva configuracional.	FMDCon

Lista de figuras

Figura	Página
Figura 1. Proceso de recubrimiento sin reacción química con rodillo aplicador.	14
Figura 2. Proceso de recubrimiento sin reacción química en placas paralelas.	20
Figura 3. Proceso de recubrimiento con reacción química en placas paralelas.	60
Gráfica 1. Flujo volumétrico adimensional vs número de Weissenberg.	61
Gráfica 2. Componente cortante adimensional del tensor esfuerzos vs número de Weissenberg.	62
Gráfica 3. Primera diferencia de esfuerzos normales adimensionales vs número de Weissenberg	63

Lista de tablas

Tabla	Página
Tabla 1. Comparación de la estructura de los componentes normales y cortante del tensor de esfuerzos.	59
Tabla 2. Comparación de la estructura adimensional de los componentes normales y cortante del tensor de esfuerzos.	60

Números adimensionales *

Los números adimensionales que se presentan en este trabajo y que modelan los procesos de recubrimiento con y sin reacción química son el número de Weissenberg, el Peclet de masa, el Damköhler I y el Damköhler II.

Número de Weissenberg (W_s)

El número de Weissenberg es el que caracteriza la viscoelasticidad de un fluido y está definido como:

$$W_s = \frac{\theta_R U}{L}$$

donde θ_R es el tiempo de relajación característico, U es una velocidad característica y L es la longitud característica, la relación entre U y L puede ser interpretada como una rapidez de deformación característica.

Número de Peclet de masa (Pe_M)

El número de Peclet en general es una relación entre el proceso convectivo y el proceso difusivo, está definido en esta tesis como:

$$Pe_M = \frac{U H_0^2}{L D_{AB}}$$

donde H_0 es una longitud característica (espesor de recubrimiento) y el D_{AB} es el coeficiente de difusión de masa entre la especie A y B, este número relaciona entonces el proceso difusivo y convectivo de masa.

Número de Damköhler I (Da_I)

Es el número que relaciona la velocidad de reacción con la velocidad del proceso convectivo de masa, está definido en el trabajo como:

$$Da_I = \frac{L C_{B0} k_1}{C_{B0} U}$$

donde C_{B0} es la concentración inicial de la especie B y k_1 es la constante de reacción

Número de Damköhler II (Da_{II})

Es el número que relaciona la velocidad de reacción con la velocidad del proceso difusivo de masa, está definido como:

$$Da_{II} = Pe_M Da_I = \frac{H_0^2 k_1}{D_{AB}}$$

Introducción

El recubrimiento es un proceso en el cual un líquido es aplicado de manera continua a una superficie fija o en movimiento a fin de producir una película uniforme del fluido sobre superficie.

La importancia de realizar el análisis a una forma en que se procesan los polímeros, en este caso el proceso de recubrimiento, es el de conocer los parámetros que gobiernan a dicho proceso, ya que si se conocen estos se puede modelar las características de la película de recubrimiento.

Existe una variedad de propósitos que tiene el recubrimiento por ende hay una correspondiente cantidad de métodos para recubrir.

El análisis para fluidos newtonianos y no newtonianos sin reacción química estará centrado en el recubrimiento con sistema aplicador que consiste en un rodillo inferior que recoge líquido y lo lleva directamente a la superficie en movimiento donde el fluido es presionado para generar la película de recubrimiento. El espesor de ésta se controla tomando en consideración las características del fluido y del equipo.

Los fluidos para modelar el proceso de recubrimiento entre placas paralelas y en sistema aplicador fueron:

- Newtoniano.
- Maxwelliano con derivada convectiva corrotacional (FMDCor).
- Maxwelliano con derivada convectiva codeformacional (FMDCod).
- Maxwelliano con derivada convectiva configuracional (FMDCon).

Para el desarrollo de los modelos con fluidos maxwellianos y sus diversas modificaciones de acuerdo a la derivada convectiva usada, se utilizó la aproximación de lubricación y se demostró que la misma puede ser aplicada para las condiciones de proceso a las cuales se trabajó. Se midió para probar lo anterior los efectos causados por los esfuerzos normales y el esfuerzo cortante.

Para la resolución de los casos con fluidos maxwellianos, se utilizó la teoría de métodos perturbativos.

Se modelaron cuáles serían los efectos de variar la rotación y de variar la viscoelasticidad, la cual se encuentra representada en el número de Weissenberg.

Uno de los objetivos fue comparar el comportamiento que predicen modelos que integran en su ecuación constitutiva diferentes tipos de derivada convectiva. De aquí se obtuvo que al incluir la derivada convectiva configuracional en la ecuación constitutiva de Maxwell establece un modelo general, ya que arroja un parámetro que modela los efectos de rotación en el fluido (su valor oscila entre cero y uno), se encontró que si éste parámetro toma sus valores límite, se obtienen los resultados al utilizar la derivada corrotacional o al usar la derivada codeformacional.

Para el proceso de recubrimiento con reacción química se consideró un geometría entre placas y se utilizó para modelar el proceso un fluido newtoniano y una reacción química de primer orden, un objetivo fue encontrar los parámetros que modelan a éste proceso, se encontró que éstos son el número de Peclet de Masa, el número de Damköhler I y el número de Damköhler II, siendo el número de Damköhler II el parámetro que complica el cálculo de los valores propios y el que impida el hacer una transformación inmediata de funciones de Airy a funciones de Bessel de orden fraccionario y poder obtener el perfil de concentraciones completo.

Se obtuvo para éste proceso una solución analítica incompleta ya que no se pudieron calcular los valores propios de forma analítica debido a que en la distribución de concentraciones las funciones de Airy (asociadas al proceso difusivo con reacción química) tienen una contribución de la misma magnitud, lo que ocasiona que se tengan valores propios diferentes (esto dependerá de cada función Airy), además de que la forma para el cálculo de estos valores propios tiene una estructura no lineal, por lo que se decidió dejar expresada la solución particular en términos de los valores propios.

Capítulo I

Proceso de recubrimiento sin reacción química

Para aquellos que preguntan cuál es la cantidad más infinitamente pequeña en las matemáticas, la respuesta es cero. Por lo tanto no hay tantos misterios ocultos en este concepto, ya que por lo general se cree que sí.

Leonhard Euler

Antecedentes

Recubrimiento sin reacción química

El proceso de recubrimiento es utilizado principalmente en industrias como la de pigmentos, papel, plásticos, metales y fibras textiles (Middleman, 1978 y Carreau,1993). Con el propósito de mejorar alguna de las propiedades de la superficie del material, tales como la resistencia mecánica, brillo, color, etcétera.

Estos son algunos ejemplos en donde se utiliza el recubrimiento:

- Al papel o al cartón se le puede recubrir con un adhesivo.
- Las películas celulósicas, que son utilizadas en el revestimiento de una fotografía.
- Películas plásticas (como en el revestimiento de la superficie magnética de la cinta de grabación).
- En fibras textiles se puede recubrir para evitar que al derramarse un líquido sobre ella no se humedezca o se moje.
- En cuanto al recubrimiento reactivo se encuentran las pinturas antigrafiti.

El proceso de recubrimiento es un proceso en el cual un líquido es aplicado de manera continua a una superficie en movimiento a fin de depositar sobre ella una capa. Existen diversos tipos de recubrimiento tales como:

- Con rodillo aplicador
- de contacto,
- de extrusión,

Para el caso del recubrimiento sin reacción química con fluidos newtonianos y no newtonianos viscoelásticos se centra en los procesos de “rodillo aplicador” y placas paralelas porque el desarrollo de las ecuaciones constitutivas se resuelve de forma aproximada al utilizar la teoría de métodos perturbativos y la aproximación de lubricación, de las soluciones aproximadas se puede observar cual es la contribución de la parte viscoelástica y como es el perfil de velocidades, además de

que al utilizar la teoría perturbativa se observa que el orden cero corresponde a la parte newtoniana y que el orden uno corresponde a la parte viscoelástica. Lo que implica que el número Weissenberg es un parámetro importante en el recubrimiento con fluidos maxwellianos.

El análisis y desarrollo de esta parte del trabajo cuantifica cual es la sensibilidad de modificar parámetros y variables del proceso de recubrimiento en el sistema de rodillo aplicador y en placas paralelas, como se observa en la gráfica 1.

Objetivos

Proceso de recubrimiento sin reacción química

- I. Modelar el proceso de recubrimiento de una superficie en movimiento con el sistema aplicador (rodillo aplicador) y entre placas paralelas, con fluidos newtonianos y no newtonianos viscoelásticos sin reacción química.
- II. Comparar el comportamiento que predicen modelos que integran en su ecuación constitutiva diferentes tipos de derivada convectiva.
- III. Estimar la validez de la aproximación de lubricación en el proceso de recubrimiento sin reacción química.

1. Desarrollo y análisis del problema con fluido newtoniano

1.1.1 Caso rodillo aplicador

En la figura 1 se muestra cómo es éste proceso, que geometría se usará y qué variables caracterizan en particular al sistema:

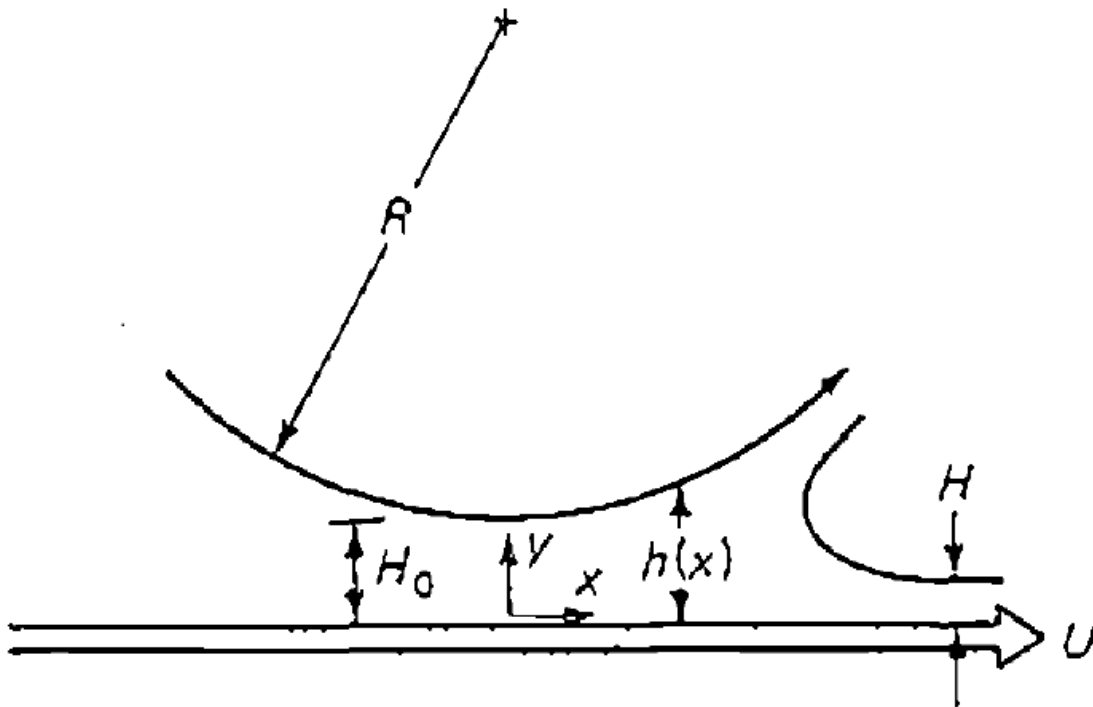


Figura 1. Proceso de recubrimiento rodillo aplicador (Middleman, 1978).

Se parte de la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = 0$$

Si $\underline{u} = (u_x, u_y, u_z) = (u_x, 0, 0)$

Considerando estado estacionario y que el fluido es incompresible

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = 0$$

$$\therefore u_x \neq u_x(x)$$

Al ser un fluido newtoniano se utilizarán las ecuaciones de Navier-Stokes para hallar la ecuación dinámica que gobierna el fluido (Bird,1976):

Notación vectorial:

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$$

Notación indicial:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \rho g_i$$

La ecuación dinámica a la que se llega, al considerar un fluido newtoniano, incompresible, en estado estacionario, flujo laminar, proceso isotérmico, propiedades físicas constantes, no existen fuerzas externas y que existen las fuerzas viscosas, se obtiene:

Dirección x:

$$\cancel{\rho \frac{\partial u_x}{\partial t}} + \cancel{\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}} + \cancel{\rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}} + \cancel{\rho u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \cancel{\rho g_x}$$

Dirección y:

$$\cancel{\rho \frac{\partial u_y}{\partial t}} + \cancel{\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}} + \cancel{\rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}} + \cancel{\rho u_z \frac{\partial u_y}{\partial z}} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \cancel{\rho g_y}$$

Dirección z:

$$\cancel{\rho \frac{\partial u_z}{\partial t}} + \cancel{\rho u_x \frac{\partial u_z}{\partial x}} + \cancel{\rho u_y \frac{\partial u_z}{\partial y}} + \cancel{\rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \cancel{\rho g_z}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (\text{Ec.1})$$

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\xi = \frac{x}{(RH_0)^{\frac{1}{2}}} ; \eta = \frac{y}{H_0} ; \varphi = \frac{u_x}{U} ; P = \frac{pH_0^{\frac{3}{2}}}{\mu UR^{\frac{1}{2}}}$$

se observa que existe una relación entre las escalas de longitud (H_0 y R), en la variable adimensional asociada a la coordenada x , esta variable es la más importante ya que de ella depende el proceso de contracción, recubrimiento y expansión; se observa que la relación entre la longitud de radio rodillo y el espesor de recubrimiento están en función de estas dos escalas de longitud.

La variable adimensional para la presión es función de la relación entre la presión generada por el rodillo, la fuerza viscosa y la velocidad característica, además de que tiene asociada un factor de caracterización geométrica $\left(\frac{H_0}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$; se toma en cuenta que el gradiente de presión está en función de la variable x .

La adimensionalización de la Ec.1:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\mu UR^{\frac{1}{2}}}{H_0^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{R^{\frac{1}{2}} H_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu U}{H_0} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{U}{H_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{H_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}$$

la ecuación adimensional queda:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = \frac{\partial P}{\partial \xi} \quad (\text{Ec.2})$$

Si se considera la aproximación de lubricación, la cual establece que en geometrías no paralelas, si la distancia entre el rodillo y la placa en movimiento es menor que uno, se puede considerar que se tiene un proceso entre placas paralelas (Tadmor, Z. Gogos, C., 2006), entonces se dice que P es independiente de η y por tanto se resuelve la Ec.1 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \int d\left(\frac{du_x}{dy}\right) &= \int \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} dy \\ \frac{du_x}{dy} &= \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \\ \int du_x &= \int \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1\right) dy \\ u_x &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2\end{aligned}$$

Adimensionalizando la ecuación anterior:

$$\varphi = \frac{u_x}{U} = \frac{\eta^2 H_0 \mu U}{2\mu U H_0} \frac{\partial p}{\partial \xi} + C_1 \eta + C_2$$

Con lo que queda la distribución de velocidades adimensional como sigue:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{dp}{d\xi}\right) \eta^2 + c_1 \eta + c_2 \quad (\text{Ec.3})$$

Se utilizan las condiciones de frontera siguientes

$$\varphi = 1 \text{ y } \eta = 0 \quad ; \quad \varphi = 1 \text{ y } \eta = \hbar(\xi)$$

$$\text{Donde } \hbar(\xi) = \frac{h(x)}{H_0} = 1 + \frac{1}{2} \xi^2 \quad \forall \frac{H_0}{R} \ll 1 \quad (\text{Ec.4})$$

La Ec.4 establece la forma geométrica que se considera para el rodillo.

Utilizando la condición de frontera Ec. 1A

$$1 = C_2 + C_1(0) + \frac{0}{2} \frac{\partial p}{\partial \xi}$$

$$\therefore C_2 = 1$$

Ahora se utiliza la segunda condición de frontera dada por la Ec. 2A

$$1 = \frac{\hbar^2(\xi)}{2} \frac{dp}{d\xi} + C_1 \hbar(\xi) + 1$$

$$C_1 = -\frac{\hbar^2(\xi)}{2\hbar(\xi)} \frac{dp}{d\xi}$$

$$\therefore C_1 = -\frac{\hbar(\xi)}{2} \frac{dp}{d\xi}$$

$$\varphi = \frac{\eta^2}{2} \frac{dp}{d\xi} - \frac{\hbar(\xi)}{2H_0} \eta H_0 \frac{dp}{d\xi} + 1$$

$$\varphi = \frac{\eta^2}{2} \frac{dp}{d\xi} - \frac{\hbar(\xi)}{2} \frac{dp}{d\xi} + 1$$

Se factoriza y se obtiene que el perfil de velocidades en el seno del fluido es:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} (\eta^2 - \hbar \eta) + 1 \quad (\text{Ec.5})$$

el flujo volumétrico adimensional en el plano xy se calcula con la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{Q}{UWH_0} = \int_0^{\hbar} \varphi d\eta \quad (\text{Ec.6})$$

$$\lambda = \int_0^{\hbar} \left(\frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} (\eta^2 - \hbar \eta) + 1 \right) d\eta$$

$$\lambda = \left(\frac{\eta^3}{6} \frac{dP}{d\xi} - \frac{\hbar(\xi)\eta^2}{4} \frac{dP}{d\xi} + \eta \right) \Big|_0^{\hbar}$$

$$\lambda = \frac{\hbar^3}{6} \frac{dP}{d\xi} - \frac{\hbar^3}{4} \frac{dP}{d\xi} + \hbar = \hbar - \frac{1}{12} \left(\frac{dP}{d\xi} \right) \hbar^3$$

$$\frac{\hbar^3}{12} \frac{\partial p}{\partial \xi} = \hbar - \lambda$$

Se tiene entonces que el gradiente de presión es:

$$\frac{dP}{d\xi} = 12 \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.7})$$

$$\int dP = \int_{-\xi_0}^{\xi} \left(12 \frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \right) d\xi$$

Por lo que la presión es:

$$P(\xi) = 12 \int_{-\xi_0}^{\xi} \left(\frac{\hbar - \lambda}{\hbar^3} \right) d\xi \quad (\text{Ec.8})$$

Greener y Middleman en 1975 (Middleman, 1978), proponen un parámetro dimensional, para describir la región de separación, el cual contempla los efectos viscosos y la tensión superficial, el cual es:

$$N = \frac{\vartheta}{\mu U} \left(\frac{H_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Ec. 9})$$

Se observa que incluye la relación del efecto causado por la tensión superficial (ϑ) con respecto a los efectos viscosos (μ) así como el factor geométrico $\left(\frac{H_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$.

En la mayoría de los sistemas de recubrimiento industrial N es menor a uno (Middleman, 1978 y Dutta, 1982).

1.1.2 Caso placas paralelas

Se realiza el análisis del proceso de recubrimiento en placas paralelas, en la figura 2 se muestra el proceso. En el cual el fluido está confinado entre dos placas, la placa superior e inferior se mueven con una velocidad U , el fluido es presionado por la placa superior de tal forma que se obtiene un recubrimiento de espesor H_0 , a diferencia del proceso con rodillo aplicador la condición a la frontera de la placa superior no se ve afectada por la geometría.

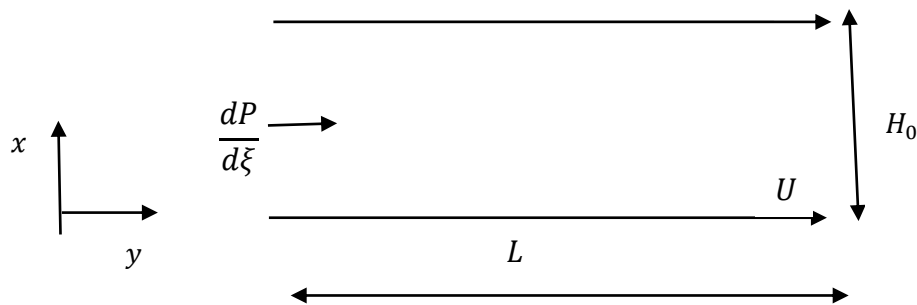


Figura 2. Proceso de recubrimiento en placas paralela.

La ecuación movimiento al considerar el estado estacionario, flujo laminar, proceso isotérmico, propiedades físicas constantes, no existen fuerzas externas y que existen las fuerzas viscosas es la Ec. 1, ya que el proceso sigue siendo el mismo, solo que la geometría es diferente y esto se verá reflejado en las condiciones a la frontera

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\xi = \frac{x}{L}; \quad \eta = \frac{y}{H_0}; \quad \varphi = \frac{u_x}{U}; \quad P = \frac{\rho H_0^2}{\mu U L}$$

La variable x se adimensionaliza por medio de la longitud de la placa, la variable y se adimensionaliza a través del espesor de recubrimiento, la velocidad u_x se hace por medio de la velocidad característica de la placa inferior y la presión de manera similar a como se realizado en el proceso con rodillo aplicador.

Al realizar la adimensionalización de la Ec.1 con las variables anteriores se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\mu UL}{H_0^2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{L} = \frac{\mu U}{H_0^2} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{U}{H_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{H_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}$$

Con lo que la ecuación adimensional tiene la misma forma que la Ec. 2 y por ende la solución es la Ec. 3. Ahora al aplicar las condiciones a la frontera es donde se verá la diferencia en el perfil de velocidades de ambos procesos.

Se utilizan las siguientes condiciones de frontera siguientes

$$\varphi = 1 \quad \eta = 0 \text{ (Ec. 3A)} \quad \text{y} \quad \varphi = 1 \quad \eta = 1 \text{ (Ec. 4A)}$$

Estás condiciones lo que expresan es que la velocidad va a ser cero en el espesor de recubrimiento y esto tiene sentido debido a que esta placa no se encuentra en movimiento, mientras que al estar sobre la placa va estar a la velocidad con que se mueve la placa inferior (U).

Aplicando las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones Ec. 3A y Ec. 3B, se obtiene que el perfil de velocidades en el seno del fluido es:

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{dP}{d\xi} (\eta^2 - \eta) + 1 \quad \text{(Ec.10)}$$

Para este caso la distribución de velocidades solo es función de la posición η , es decir, $\varphi = \varphi(\eta)$, a diferencia del proceso en rodillo aplicador donde la distribución de velocidades es función de las dos posiciones, es decir, $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$, esto está dado por la condición a la frontera superior del rodillo que se encuentra expresada por la Ec. 4.

2. Desarrollo y análisis del problema con fluidos no newtonianos viscoelásticos.

En esta sección lo que se realizará es el análisis del proceso de recubrimiento utilizando tres versiones del fluido de Maxwell esto debido a que se utilizarán tres tipos de derivadas convectivas que será incluidas en la ecuación constitutiva de Maxwell.

2.1 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional (FMDCor).

Basados en la aproximación de lubricación que establece que si la velocidad en dirección x es mayor que el en dirección y y por tanto el cambio en el componente cortante del tensor de esfuerzo es mucho más grande en dirección y que en dirección x ($\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \gg \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$) lo que implica que el cambio en la presión no depende de la coordenada y sino únicamente de la dirección x , esto siempre y cuando la relación de separación entre las fronteras (no paralelas) sea mucho menor a uno, para el caso del rodillo que la relación entre el espesor de recubrimiento y el radio del rodillo sea mucho menor que uno ($\frac{H_0}{R} \ll 1$). De lo contrario se tendría un problema más difícil, que implicaría resolver un problema de flujo viscoelástico de dos dimensiones descrito por ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas.

La ecuación de movimiento es:

$$\frac{d}{dx}(p - \tau_{yy}) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (\text{Ec.11})$$

Con base en la aproximación de lubricación se argumenta entonces que la magnitud de $\frac{d\tau_{yy}}{dx}$ es considerablemente menor que $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$. Se considera, que es justamente lo que sucede en placas paralelas (Tadmor,Z., Gogos, C., 2006).

Por lo que ahora se puede dar una solución de la ecuación:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (\text{Ec.12})$$

Esta ecuación tiene la misma solución que la del fluido no newtoniano puramente viscoso, pero el interés de esta tesis es analizar qué sucede si se tiene un fluido viscoelástico, que no se encuentra explícito en la ecuación de movimiento.

Para ello se emplea la ecuación constitutiva de Maxwell, en la cual se usará la derivada convectiva de Jaumann.

$$\underline{\underline{\tau}} + \theta_R \frac{D\underline{\underline{\tau}}}{Dt} = \eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.13})$$

Donde la variable θ_R es el tiempo de relajación del fluido y la viscoelasticidad se encuentra incorporada en la derivada convectiva para ello se define la derivada convectiva de Jaumann (Middleman, 1978 y Manero, s.f.), la cual se usará para analizar un flujo con efectos rotacionales:

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \omega_{jm} \tau_{mi} - \frac{1}{2} \omega_{im} \tau_{mj} \quad (\text{Ec.14})$$

Se define el tensor rapidez de deformación ($\underline{\underline{D}}$) y el tensor vorticidad ($\underline{\underline{\omega}}$)

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.15})$$

$$\underline{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.16})$$

Ahora se sustituyen las Ec.14, Ec.15 y Ec.16 en la Ec.13:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \theta_R \left(\frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial z} - \right. \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} \\ \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} \\ \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} - \\
 & \left. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} \\ \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} \\ \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} \right) = \\
 & \eta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{Ec.17}
 \end{aligned}$$

Se simplifica la Ec.17 considerando las siguientes suposiciones: estado estacionario, el componente del vector de velocidades es $\underline{u} = (u_x, 0, 0)$, y se sustituyen los términos del tensor de esfuerzos así como los del tensor vorticidad.

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left(\begin{pmatrix} 0\tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xx} + 0\tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\tau_{yx} + 0\tau_{zx} \\ 0\tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy} + 0\tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\tau_{yy} + 0\tau_{zy} \\ 0\tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\tau_{zz} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xz} + 0\tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\tau_{zz} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\tau_{yz} + 0\tau_{zz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\tau_{zx} & 0\tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\tau_{zy} & 0\tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\tau_{zz} \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xx} + 0\tau_{yx} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy} + 0\tau_{yy} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xz} + 0\tau_{yz} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\tau_{zz} \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\tau_{xx} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\tau_{yx} + 0\tau_{zx} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\tau_{xy} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\tau_{yy} + 0\tau_{zy} & \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\tau_{xz} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\tau_{yz} + 0\tau_{zz} \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{Ec.18}$$

Se simplifica la Ec.18

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xx} & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yy} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{yy} & 0 \\ \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{Ec.19}$$

Se suman los tensores de la Ec.19

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \begin{pmatrix} 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & -2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.20})$$

Se calculan los esfuerzos de la Ec.20, mismos que ya incluyen el término de lubricación:

$$\tau_{xx} - \frac{1}{2} \theta_R 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.21})$$

$$\tau_{xx} - \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.22})$$

$$\tau_{xx} = -\tau_{yy} \quad (\text{Ec.23})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2} \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.24})$$

Se distribuye el signo de la Ec. 24:

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) (\tau_{xx} - \tau_{yy}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.25})$$

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \left(\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} + \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \tau_{yx} \right) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.26})$$

$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 (2\tau_{yx}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.27})$$

$$\tau_{xy} \left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.28})$$

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right)} \quad (\text{Ec.29})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (\text{Ec.30})$$

Las expresiones más importantes son la Ec. 22, Ec.23 y la Ec. 29.

Se sustituye la Ec.29 en la Ec.22:

$$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2}{\left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right)} \quad (\text{Ec.31})$$

Se sustituye la Ec.31 en la Ec.23:

$$\tau_{yy} = -\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2}{\left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2\right)} \quad (\text{Ec.32})$$

Considerando la expresión dada por la aproximación de lubricación:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau_{xy}}{dy} \quad (\text{Ec.33})$$

Ahora se integra la Ec. 33 para obtener una expresión de componente cortante del tensor de esfuerzos:

$$\int d\tau_{xy} dy = \int \frac{dp}{dx} dy \quad (\text{Ec.34})$$

$$\tau_{xy} = y \frac{dp}{dx} + c_1 \quad (\text{Ec.35})$$

Sustituyendo en la Ec. 29

$$y \frac{dp}{dx} + c_1 = \frac{\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{Ec.36})$$

Se tiene la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{1}{\eta_0} \left(y \frac{dp}{dx} + c_1 \right) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2} \quad (\text{Ec.37})$$

Ahora con esta ecuación se procede a realizar el análisis del recubrimiento con los procesos rodillo aplicador y placas paralelas.

2.1.1 Caso rodillo aplicador

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi ; \frac{y}{H_0} = \eta ; \xi = \frac{x}{(RH_0)^{\frac{1}{2}}} ; P = \frac{\rho H_0^{\frac{3}{2}}}{\mu U R^{\frac{1}{2}}} ; Ws = \text{Número de Weissenberg} = \frac{\theta_R U}{H_0}$$

Se utilizan las mismas variables adimensionales para el proceso con fluido newtoniano, pero ahora incluyendo una expresión del número de Weissenberg, cuyo tiempo característico está dado por el tiempo de relajación y el tiempo de proceso por la relación entre la velocidad característica y el espesor de recubrimiento.

Se realiza la adimensionalización de la Ec.37:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\eta_0 U (RH_0)^{\frac{1}{2}}}{H_0^2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{(RH_0)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

Sustituyendo en la Ec.37:

$$\frac{1}{\eta_0} \left(\eta H_0 \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} + c_1 \right) = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.38})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \left(\theta_R \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.39})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.40})$$

$$\eta \frac{dP}{d\xi} + \frac{H_0}{U \eta_0} c_1 = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.41})$$

Se realiza un cambio de variable del Ws^2 por el parámetro ϵ y se utiliza $P' = \frac{dP}{d\xi}$ y

$C = \frac{H_0 c_1}{U \eta_0}$ es la constante de integración que proviene de la Ec.36, a la que más adelante se da solución a través de métodos perturbativos.

Con lo que la Ec.41 tiene la siguiente forma:

$$\eta P' + C = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \epsilon \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2} \quad (\text{Ec.42})$$

Para resolver la Ec.42 se utilizará la teoría de métodos perturbativos, que tiene como base las siguientes restricciones:

1. Se debe restringir la solución para valores pequeños de ϵ , ya que se sabe que (Ec.29) tiene validez limitada (por la utilización de la aproximación de lubricación).
2. Cuando el parámetro $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene la solución del fluido newtoniano.
3. Por pequeño que sea ϵ se puede esperar que las funciones $\varphi(\xi, \eta, \epsilon)$ y $P(\xi, \epsilon)$ puedan apartarse de su límite (newtoniano) dando así que el comportamiento dependa de la ϵ (Middleman, 1978).

Se utiliza la siguiente serie de potencias con una dependencia de ϵ para dar solución a la Ec.42, donde φ_0 es la solución del fluido newtoniano.

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k \varphi_k \quad (\text{Ec.43})$$

La solución de perturbativa es:

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + \epsilon^2 \varphi_2 + \dots \quad (\text{Ec.44})$$

$$P = P_0 + \epsilon P_1 + \epsilon^2 P_2 + \dots \quad (\text{Ec.45})$$

$$C = C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \quad (\text{Ec.46})$$

De la Ec.42 se obtiene el término $\frac{d\varphi}{d\eta}$ y se sustituye las (Ec. 44, Ec.45 y Ec.46):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = (\eta P' + C) \cdot \left(1 + \epsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right) \quad (\text{Ec.47})$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \epsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \epsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots = \left[1 + \epsilon \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \epsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \epsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots\right)^2\right] \cdot [\eta P'_0 + \epsilon \eta P'_1 + \epsilon^2 \eta P'_2 + C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots] \quad (\text{Ec.48})$$

Se igualan los términos con factores comunes de ϵ :

$$\text{Orden cero:} \quad \frac{d\varphi_0}{d\eta} = \eta P'_0 + C_0 \quad (\text{Ec.49})$$

$$\text{Orden uno:} \quad \frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^2 (\eta P'_0 + C_0) \quad (\text{Ec.50})$$

Las condiciones de frontera que se requieren son las siguientes:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{en } \eta = \hbar(\xi) = \frac{h(x)}{H_0} = 1 + \frac{1}{2}\xi^2 \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. 1B})$$

Estas condiciones son válidas para cualquier ϵ . De tal forma que:

$$\varphi_0 = \begin{cases} 1 & \text{en } \eta = \hbar(\xi) = \frac{h(x)}{H_0} = 1 + \frac{1}{2}\xi^2 \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases} \quad (\text{Ec. 2B})$$

Y todas las velocidades $\varphi_k = 0$ en ambas condiciones de frontera para $k > 0$. Ahora se resuelve la Ec. 49:

$$\int d\varphi_0 = \int (\eta P'_0 + C_0) d\eta \quad (\text{Ec.51})$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\eta^2 P'_0 + \eta C_0 + C_{01} \quad (\text{Ec.52})$$

Se evalúan en la condición de frontera $\varphi_0 = 1$ y $\eta = 0$:

$$1 = \frac{1}{2}0^2 P'_0 + 0C_0 + C_{01} \quad (\text{Ec.53})$$

$$C_{01} = 1 \quad (\text{Ec.54})$$

Se evalúan en la siguiente condición de frontera:

$$\text{en } \varphi_0 = 1 \quad \text{y} \quad \eta = \hbar(\xi) = \frac{h(x)}{H_0} = 1 + \frac{1}{2}\xi^2$$

$$1 = \frac{1}{2}\hbar^2 P'_0 + C_0 \hbar + 1 \quad (\text{Ec.55})$$

$$\hbar C_0 = -\frac{1}{2} \hbar^2 P'_0 \quad (\text{Ec.56})$$

$$C_0 = -\frac{1}{2} \hbar P'_0 \quad (\text{Ec.57})$$

Con lo que φ_0 es:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \eta^2 P'_0 + \eta \left(-\frac{1}{2} \hbar P'_0 - \frac{1}{\hbar} \right) + 1 \quad (\text{Ec.58})$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} P'_0 (\eta^2 - \hbar \eta) + 1 \quad (\text{Ec.59})$$

Para encontrar el gradiente de presión se debe establecer la condición de conservación de masa, el cual tiene la siguiente forma:

$$\frac{Q}{W} = \int_0^{h(x)} u_x dy \quad \text{o} \quad \lambda = \int_0^{\hbar(\xi)} \varphi(\xi, \eta) d\eta \quad (\text{Ec.60})$$

Se considera que λ es el flujo volumétrico y el espesor de recubrimiento. Con lo que se puede expresar en la forma de la Ec.43.

$$\lambda = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \epsilon^2 \lambda_2 + \dots \quad (\text{Ec.61})$$

Y se deduce que:

$$\lambda_k = \int_0^{\hbar} \varphi_k d\eta \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{Ec.62})$$

Se calcula λ_0 para la ecuación de orden cero (newtoniano) y se obtiene también el valor de P'_0 :

$$\lambda_0 = \int_0^{\hbar} \varphi_0 d\eta = \int_0^{\hbar} \left[\frac{1}{2} P'_0 (\eta^2 - \hbar \eta) + 1 \right] d\eta \quad (\text{Ec.63})$$

$$\lambda_0 = \left[\frac{1}{6} \eta^3 P'_0 - \frac{1}{4} \eta^2 \hbar P'_0 + \eta \right]_0^{\hbar} \quad (\text{Ec.64})$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{6} \hbar^3 P'_0 - \frac{1}{4} \hbar^3 P'_0 + \hbar \quad (\text{Ec.65})$$

$$\lambda_0 = \hbar - \frac{1}{12} \hbar^3 P'_0 \quad (\text{Ec.66})$$

Se despeja de la Ec.66 P'_0 :

$$\lambda_0 - \hbar = -\frac{1}{12} \hbar^3 P'_0 \quad (\text{Ec.67})$$

$$P'_0 = \frac{12}{\hbar^2} - \frac{12\lambda_0}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.68})$$

Para obtener la contribución viscoelástica se repite el método pero ahora para calcular el valor de φ_1 , para ello se tiene que resolver la Ec.50, se reescribe de la siguiente manera:

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}\right)^3 \quad (\text{Ec.69})$$

Se calcula $\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3$:

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \left(P'_0\eta - \frac{1}{2}P'_0\hbar\right)^3$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \left(P'_0\eta - \frac{1}{2}P'_0\hbar\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - 3(\eta^2 P_0'^2) \left(\frac{1}{2}P'_0\hbar\right) + 3(\eta P'_0) \left(\frac{1}{2}P'_0\hbar\right)^2 - \left(\frac{1}{2}P'_0\hbar\right)^3$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - \frac{3}{2}\eta^2 P_0'^3 \hbar + \frac{3}{4}\eta P_0'^3 \hbar^2 - \frac{1}{8}P_0'^3 \hbar^3 \quad (\text{Ec.70})$$

Sustituyendo la Ec.70 en la Ec.69 se obtiene:

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \eta^3 P_0'^3 - \frac{3}{2}\eta^2 P_0'^3 \hbar + \frac{3}{4}\eta P_0'^3 \hbar^2 - \frac{1}{8}P_0'^3 \hbar^3 \quad (\text{Ec.71})$$

Se resuelve la Ec.71:

$$\int d\varphi_1 = \int \left[\eta P'_1 + C_1 + \eta^3 P_0'^3 - \frac{3}{2}\eta^2 P_0'^3 \hbar + \frac{3}{4}\eta P_0'^3 \hbar^2 - \frac{1}{8}P_0'^3 \hbar^3 \right] d\eta \quad (\text{Ec.72})$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P'_1}{2} + C_1 \eta + \frac{\eta^4 P_0'^3}{4} - \frac{1}{2}\eta^3 P_0'^3 \hbar + \frac{3}{8}\eta^2 P_0'^3 \hbar^2 - \frac{1}{8}P_0'^3 \hbar^3 \eta + C_{02}$$

$$\varphi_1 = \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2}\eta^3 P_0'^3 \hbar + \eta^2 \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8}P_0'^3 \hbar^2 \right) + \eta \left(C_1 - \frac{1}{8}P_0'^3 \hbar^3 \right) + C_{02} \quad (\text{Ec.73})$$

Utilizando las condiciones de frontera $\varphi_1 = 0$ cuando $\eta = 0$ y $\eta = \hbar$.

Se encuentra el valor de las constantes cuando $\varphi_1 = 0$ y $\eta = 0$:

$$0 = 0 * \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot P_0'^3 \hbar + 0 \cdot \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^2 \right) + 0 \cdot \left(C_1 - \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^3 \right) + C_{02}$$

$$C_{02} = 0$$

Cuando $\varphi_1 = 0$ y $\eta = \hbar$:

$$0 = \hbar^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \hbar^3 P_0'^3 \hbar + \hbar^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^2 \right) + \hbar \left(C_1 - \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^3 \right)$$

$$0 = \hbar^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \hbar^4 P_0'^3 + \hbar^2 \frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^4 + C_1 \hbar - \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^4$$

$$C_1 \hbar = -\hbar^2 \frac{P_1'}{2}$$

$$C_1 = -\hbar \frac{P_1'}{2}$$

Se sustituye en la Ec.73 las constantes de integración.

$$\varphi_1 = \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 \hbar + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^2 \right) - \eta \left(\hbar \frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^3 \right) \quad (\text{Ec.74})$$

Se calcula el valor del flujo volumétrico viscoelástico λ_1 .

$$\lambda_1 = \int_0^{\hbar} \varphi_1 d\eta = \int_0^{\hbar} \left[\eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 \hbar + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^2 \right) - \eta \left(\hbar \frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^3 \right) \right] d\eta \quad (\text{Ec.75})$$

$$\lambda_1 = \left[\eta^5 \frac{P_0'^3}{20} - \frac{1}{8} \eta^4 P_0'^3 \hbar + \eta^3 \left(\frac{P_1'}{6} + \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^2 \right) - \eta^2 \left(\frac{P_1'}{4} \hbar + \frac{1}{16} P_0'^3 \hbar^3 \right) \right]_0^{\hbar}$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{80} P_0'^3 \hbar^5 - \frac{1}{12} \hbar^3 P_1'$$
(Ec.76)

Se calcula el valor de P_1 , sustituyendo la (Ec.68) en la Ec. 76:

$$\lambda_1 = \frac{9}{80} \left(\frac{12}{\hbar^2} - \frac{12\lambda_0}{\hbar^3} \right)^3 \hbar^5 - \frac{1}{12} \hbar^3 \frac{dP_1}{d\xi}$$

$$\frac{1}{12} \hbar^3 \frac{dP_1}{d\xi} = \frac{9}{80} \left(\frac{12}{\hbar^2} - \frac{12\lambda_0}{\hbar^3} \right)^3 \hbar^5 - \lambda_1$$

$$\frac{dP_1}{d\xi} = \frac{27}{20} \left(\frac{12}{\hbar^2} - \frac{12\lambda_0}{\hbar^3} \right)^3 \hbar^2 - 12 \frac{\lambda_1}{\hbar^3}$$
(Ec.77)

Para el cálculo del perfil de velocidades adimensional, aproximado a términos de orden se utiliza la definición dada por la Ec.44.

$$\varphi = \varphi_0 + \epsilon \varphi_1 + O(\epsilon^2)$$
(Ec.78)

$$\varphi = \frac{1}{2} P_0' (\eta^2 - \hbar \eta) + 1 + Ws^2 \left\{ \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 \hbar + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^2 \right) - \eta \left(\hbar \frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^3 \right) \right\}$$
(Ec.79)

Se calcula la primera diferencia de esfuerzos normales.

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = 2\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2}{\left(1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \right)}$$
(Ec.80)

En forma adimensional:

$$\Theta = 2Ws \left(\frac{H_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}$$
(Ec.81)

2.1.2 Caso placas paralelas

Las variables adimensionales asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi ; \frac{y}{H_0} = \eta ; \frac{x}{L} = \xi ; \frac{H_0^2 p}{\eta_0 UL} = P ; Ws = \text{Número de Weissenberg} = \frac{\theta_R U}{H_0}$$

Y son las que se utilizaron para el caso newtoniano y la expresión del número de Weissenberg está dado por la misma expresión que se utilizó para el proceso con rodillo aplicador.

Se realiza la adimensionalización de la Ec.31:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\eta_0 UL}{H_0^2} \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{L} = \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{\partial P}{\partial \xi}$$

Se llega entonces a la expresión dada por Ec.41 del proceso con rodillo aplicador, por lo que se utilizará la misma técnica de resolución (métodos perturbativos), la diferencia se encontrará en las condiciones a la frontera, ya que no se considera la geometría del rodillo.

Las condiciones de frontera que se requieren son las siguientes:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{en } \eta = 1 \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

Estas condiciones son válidas para cualquier ϵ . De tal forma que:

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0 & \text{en } \eta = 1 \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

Y todas la velocidad $\varphi_k = 0$ en ambas condiciones de frontera para $k > 0$. La solución general está dada por la Ec.46.

Se evalúa la primera condición a la frontera en la Ec.46.

En $\varphi_0 = 1$ cuando $\eta = 0$:

$$1 = \frac{1}{2} 0^2 P'_0 + 0C_0 + C_{01}$$

$$C_{01} = 1 \tag{Ec.82}$$

Se evalúan la segunda condición a la frontera.

En $\varphi_0 = 1$ cuando $\eta = 1$:

$$1 = \frac{1}{2}P'_0 + C_0 + 1$$

$$C_0 \hbar = -\frac{1}{2}P'_0$$

$$C_0 = -\frac{1}{2}P'_0 \quad (\text{Ec.83})$$

Se sustituyen las Ec. 82 y 83 en la Ec.46.

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\eta^2 P'_0 - \frac{1}{2}\eta P'_0 + 1$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}P'_0(\eta^2 - \eta) + 1 \quad (\text{Ec.84})$$

Para el cálculo del flujo volumétrico se utiliza la Ec. 61.

$$\lambda_0 = \int_0^1 \varphi_0 d\eta = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}P'_0(\eta^2 - \eta) + 1 \right] d\eta \quad (\text{Ec.85})$$

$$\lambda_0 = \left[\frac{1}{6}P'_0\eta^3 - \frac{1}{4}P'_0\eta^2 + \eta \right]_0^1$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{6}P'_0 - \frac{1}{4}P'_0 + 1$$

$$\lambda_0 = -\frac{1}{12}P'_0 + 1 \quad (\text{Ec.86})$$

Para obtener la contribución viscoelástica se repite el método pero ahora para calcular el valor de φ_1 , para ello se emplea la expresión dada por la Ec.69.

Se calcula $\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3$:

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \left(P'_0\eta - \frac{1}{2}P'_0\right)^3$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \left(P'_0\eta - \frac{1}{2}P'_0\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - 3(\eta^2 P_0'^2) \left(\frac{1}{2}P'_0\right) + 3(\eta P'_0) \left(\frac{1}{2}P'_0\right)^2 - \left(\frac{1}{2}P'_0\right)^3 \quad (\text{Ec. 87})$$

Con lo que la Ec. 87 se expresa como:

$$\left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 = \eta^3 P_0'^3 - \frac{3}{2}(\eta^2 P_0'^3) + \frac{3}{4}(\eta P_0'^3) - \frac{1}{8}P_0'^3 \quad (\text{Ec.88})$$

Se sustituye la Ec. 88 en la Ec. 69.

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \eta^3 P_0'^3 - \frac{3}{2}(\eta^2 P_0'^3) + \frac{3}{4}(\eta P_0'^3) - \frac{1}{8} P_0'^3 \quad (\text{Ec.89})$$

Se resuelve la Ec. 89.

$$\int d\varphi_1 = \int \left[\eta P'_1 + C_1 + \eta^3 P_0'^3 - \frac{3}{2}(\eta^2 P_0'^3) + \frac{3}{4}(\eta P_0'^3) - \frac{1}{8} P_0'^3 \right] d\eta \quad (\text{Ec.90})$$

$$\varphi_1 = \frac{\eta^2 P'_1}{2} + C_1 \eta + \frac{\eta^4 P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 + \frac{3}{8} \eta^2 P_0'^3 - \frac{1}{8} P_0'^3 \eta + C_{02}$$

$$\varphi_1 = \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 + \eta^2 \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) + \eta \left(C_1 - \frac{1}{8} P_0'^3 \right) + C_{02} \quad (\text{Ec.91})$$

Utilizando las condiciones de frontera $\varphi_1 = 0$ cuando $\eta = 0$ y $\eta = 1$.

Se encuentra el valor de las constantes cuando $\varphi_1 = 0$ cuando $\eta = 0$:

$$0 = 0^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} 0^3 P_0'^3 + 0^2 \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) + 0 \left(C_1 - \frac{1}{8} P_0'^3 \right) + C_{02}$$

$$C_{02} = 0$$

Cuando $\varphi_1 = 0$ cuando $\eta = 1$:

$$0 = \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} P_0'^3 + \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) + \left(C_1 - \frac{1}{8} P_0'^3 \right)$$

$$C_1 = -\frac{P_0'^3}{4} + \frac{1}{2} P_0'^3 - \frac{P'_1}{2} - \frac{3}{8} P_0'^3 + \frac{1}{8} P_0'^3$$

$$C_1 = -\frac{P'_1}{2}$$

Se sustituye en la (Ec.91) las constantes de integración.

$$\varphi_1 = \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 + \eta^2 \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) - \eta \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \right) \quad (\text{Ec.92})$$

Se calcula el valor del flujo volumétrico viscoelástico λ_1 integrando la Ec.92.

$$\lambda_1 = \int_0^1 \varphi_1 d\eta = \int_0^1 \left[\eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) - \eta \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \right) \right] d\eta \quad (\text{Ec.93})$$

$$\lambda_1 = \left[\frac{1}{20} \eta^5 P_0'^3 - \frac{1}{8} \eta^4 P_0'^3 + \eta^3 \left(\frac{P_1'}{6} + \frac{1}{8} P_0'^3 \right) - \eta^2 \left(\frac{P_1'}{4} + \frac{1}{16} P_0'^3 \right) \right]_0^1 \quad (\text{Ec.94})$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{20} P_0'^3 - \frac{1}{8} P_0'^3 + \left(\frac{P_1'}{6} + \frac{1}{8} P_0'^3 \right) - \left(\frac{P_1'}{4} + \frac{1}{16} P_0'^3 \right) \quad (\text{Ec.95})$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{80} P_0'^3 - \frac{1}{12} P_1' \quad (\text{Ec.96})$$

Se calcula entonces el perfil de velocidades adimensional aproximado a términos de orden uno al sustituir la Ec. 84 y la Ec. 92 en la Ec.78.

$$\varphi = \frac{1}{2} P_0' (\eta^2 - \eta) + 1 + Ws^2 \left\{ \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) - \eta \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \right) \right\} \quad \text{Ec.97}$$

La expresión de la primera diferencia de esfuerzos normales está determinada por la Ec. 80, pero en forma adimensional tiene la siguiente estructura:

$$\Theta = 2Ws \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.98})$$

2.2 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva codeformacional (FMDCod)

Para el estudio de este tipo de recubrimiento no se van a considerar los efectos causados por la rotación ya que la derivada convectiva que se utilizará solo considera los efectos causados por la deformación del fluido, que es el caso opuesto presentado anteriormente.

Para describir el recubrimiento de una superficie con un flujo codeformacional se utiliza la misma estructura de la ecuación constitutiva del fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional Ec.13, pero en vez de utilizar la derivada de Jaumann, se utilizará la derivada de Oldroyd, quedando la ecuación constitutiva:

$$\underline{\underline{\tau}} + \theta_R \frac{\mathfrak{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathfrak{D}t} = \eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.99})$$

Se define la derivada de Oldroyd (Middleman, 1978 y Oldroyd 1958), la cual se usará por ser un flujo con efectos codeformacionales:

$$\frac{\mathfrak{D}\tau_{ij}}{\mathfrak{D}t} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \tau_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (\text{Ec.100})$$

Y se utilizan las mismas definiciones de las (Ec.15) y (Ec.16).

Ahora se sustituyen las Ec.15, Ec.16 y Ec.100 en la Ec.99.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \theta_R \left(\frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial z} - \right. \\
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{xz} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \tau_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{xz} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \tau_{xx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \tau_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial u_z}{\partial z} & \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} - \\
 & \left. \begin{pmatrix} \tau_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{xx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{xx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{yx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{yx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_x}{\partial z} & \tau_{zx} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_y}{\partial z} & \tau_{zx} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial u_z}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right) = \\
 & \eta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(Ec.101)

Se simplifican la Ec.101 de acuerdo a las condiciones del problema que son las mismas utilizadas para el caso con derivada convectiva corrotacional.

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \theta_R \left(\begin{pmatrix} \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} & \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.102})$$

Se suman los tensores y se simplifica la Ec.102.

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \theta_R \left(\begin{pmatrix} 2\tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} & \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Ec.103})$$

Se calculan de la Ec.103 los esfuerzos, mismos que ya incluyen el tiempo de relajación:

$$\tau_{xx} - 2\theta_R \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ec.104})$$

$$\tau_{xx} = 2\theta_R \tau_{yx} \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.105})$$

$$\tau_{yy} = 0 \quad (\text{Ec.106})$$

$$\tau_{xy} - \theta_R \tau_{yy} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.107})$$

Se sustituye la (Ec.106) en la (Ec.107) quedando:

$$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{du_x}{dy} \quad (\text{Ec.108})$$

Se parte de la aproximación de lubricación con lo que se tiene que resolver la Ec. 33 y se obtiene la solución general dada por la Ec. 35, por tanto se sustituye en ésta la Ec. 108 y se obtiene la siguiente expresión:

$$y \frac{dp}{dx} + c_1 = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.109})$$

La siguiente ecuación diferencial lineal, por lo que no será necesario utilizar la teoría de perturbativa para su resolución, ya que para este flujo la contribución viscoelástica no se presenta.

$$\frac{1}{\eta_0} \left(y \frac{dp}{dx} + c_1 \right) = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec.110})$$

2.2.1 Caso rodillo aplicador

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi; \quad \frac{y}{H_0} = \eta; \quad \xi = \frac{x}{(RH_0)^{\frac{1}{2}}}; \quad P = \frac{\rho H_0^{\frac{3}{2}}}{\mu U R^{\frac{1}{2}}}$$

Y que son las mismas utilizadas para el caso del flujo corrotacional pero ahora para el flujo codeformacional no se tiene el W_s , ya que para este régimen de flujo no existen contribuciones viscoelásticas, por tanto son las mismas expresiones que se utilizaron para el caso newtoniano.

La adimensionalización de la Ec.110 se realiza de la misma manera que se hizo para la Ec. 37. Por tanto se obtiene

$$\frac{1}{\eta_0} \left(\eta H_0 \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} + c_1 \right) = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.111})$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\eta \frac{dP}{d\xi} + \frac{H_0}{U\eta_0} c_1 = \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.112})$$

Se utilizará $P' = \frac{dP}{d\xi}$ y $C = \frac{H_0 c_1}{U\eta_0}$ es la constante de integración adimensional que proviene de la (Ec.112).

$$\eta P' + C = \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec.113})$$

Las condiciones de frontera que se requieren son las mismas que para el caso newtoniano:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{en } \eta = \hbar(\xi) \\ 0 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

Ahora se resuelven la Ec.113:

$$\int d\varphi = \int (\eta P' + C) d\eta$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\eta^2 P' + \eta C + C_1 \quad (\text{Ec.114})$$

Se aplica la condición de frontera $\varphi = 1$ cuando $\eta = 0$

$$1 = \frac{1}{2}0^2 P' + 0C + C_1$$
$$C_1 = 1 \quad (\text{Ec.115})$$

Se aplica la segunda condición de frontera que establece que $\varphi = 1$ en $\eta = \hbar$:

$$1 = \frac{1}{2}\hbar^2 P' + C\hbar + 1$$
$$C_1 \hbar = -\frac{1}{2}\hbar^2 P'$$
$$C_1 = -\frac{1}{2}\hbar P' \quad (\text{Ec.116})$$

Con lo que el perfil de velocidades admensional φ es:

$$\varphi = \frac{1}{2}\eta^2 P' - \frac{1}{2}\eta \hbar P' + 1$$
$$\varphi = \frac{1}{2}P'(\eta^2 - \hbar\eta) + 1 \quad (\text{Ec.117})$$

Para encontrar el gradiente de presión se debe establecer una condición de conservación de masa, la cual está dada por la Ec.6, entonces se calcula λ que es el flujo volumétrico y el espesor de recubrimiento.

$$\lambda = \int_0^{\hbar} \varphi d\eta = \int_0^{\hbar} \left[\frac{1}{2} P' (\eta^2 - \hbar\eta) + 1 \right] d\eta$$

$$\lambda = \left[\frac{1}{6} \eta^3 P' - \frac{1}{4} \eta^2 \hbar P' + \eta \right]_0^{\hbar}$$

$$\lambda = \frac{1}{6} \hbar^3 P' - \frac{1}{4} \hbar^3 P' + \hbar$$

$$\lambda = \hbar - \frac{1}{12} \hbar^3 P' \quad (\text{Ec.118})$$

De la Ec.118 se obtiene el gradiente de presión P'

$$\lambda - \hbar = -\frac{1}{12} \hbar^3 P'$$

$$12\hbar - 12\lambda = \hbar^3 P'$$

$$P' = \frac{12}{\hbar^2} - \frac{12\lambda}{\hbar^3} \quad (\text{Ec.119})$$

Finalmente se calcula la primera diferencia de esfuerzos normales.

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \quad (\text{Ec.120})$$

En forma adimensional:

$$\Theta = 2W_S \left(\frac{H_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec.121})$$

2.2.2 Caso placas paralelas

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las siguientes:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi ; \frac{y}{H_0} = \eta ; \xi = \frac{x}{L} ; P = \frac{\rho H_0^2}{\mu U L}$$

Las variables adimensionales son las utilizadas para el caso newtoniano, debido a que no hay contribución viscoelástica.

La adimensionalización de la Ec.110 se realiza de la misma manera que se hizo para la Ec. 37 y para este caso tiene la misma forma que la Ec. 112. Por tanto son las mismas consideraciones para el gradiente de presiones y para la constante de integración utilizadas en el caso con rodillo aplicador.

Las condiciones de frontera que se requieren son las mismas que para el caso newtoniano:

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{en } \eta = 1 \\ 1 & \text{en } \eta = 0 \end{cases}$$

La solución general de la Ec.113 está dada por la Ec. 114 por lo que se aplican las condiciones de frontera a esta última.

Se aplica la condición de frontera $\varphi = 1$ cuando $\eta = 0$:

$$1 = \frac{1}{2} 0^2 P' + 0C + C_1$$

$$C_1 = 1 \quad (\text{Ec.122})$$

Se aplica la segunda condición de frontera que establece que en $\varphi = 1$ en $\eta = 1$:

$$1 = \frac{1}{2} P' + C + 1$$

$$C_1 = -\frac{1}{2} P' \quad (\text{Ec.123})$$

Con lo que el perfil de velocidades adimensional φ es:

$$\varphi = \frac{1}{2} P' (\eta^2 - \eta) + 1 \quad (\text{Ec.124})$$

Para encontrar el gradiente de presión se utilizan las mismas consideraciones utilizadas para el caso de rodillo aplicador.

Se calcula λ que es el flujo volumétrico.

$$\lambda = \int_0^1 \varphi \, d\eta = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} P' (\eta^2 - \eta) + 1 \right] d\eta$$

$$\lambda = \left[\frac{1}{6} \eta^3 P' - \frac{1}{4} \eta^2 P' + \eta \right]_0^1$$

$$\lambda = \frac{1}{6} P' - \frac{1}{4} P' + 1$$

$$\lambda = \frac{1}{12} P' + 1 \quad (\text{Ec.125})$$

De la Ec.125 se despeja la expresión del gradiente de presiones P' :

$$\lambda - 1 = -\frac{1}{12} P'$$

$$P' = 12 - 12\lambda \quad (\text{Ec.126})$$

La expresión de la primera diferencia de esfuerzos normales está determinada por la Ec. 120, pero en forma adimensional presenta la siguiente forma:

$$\Theta = 2W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. 127})$$

2.3 Recubrimiento con fluido maxwelliano con derivada convectiva configuracional (FMDCon)

Para describir el proceso recubrimiento con FMDCon se utiliza la estructura de la ecuación constitutiva del fluido Maxwell, se utilizará la derivada de configuracional, que adelante se definirá, quedando la ecuación constitutiva:

$$\underline{\underline{\tau}} + \theta_R \frac{\mathbb{D}\underline{\underline{\tau}}}{\mathbb{D}t} = \eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{Ec.128})$$

Se define la derivada convectiva de configuracional (Manero, s.f.), la cual se usará para modelar cualquier flujo con propiedades rotacionales y deformacionales al variar el parámetro de rotación ε en un intervalo de 0 a 1.

$$\frac{\mathbb{D}\tau_{ij}}{\mathbb{D}t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \omega_{jm} \tau_{mi} - \frac{1}{2} \omega_{im} \tau_{mj} - (1 - \varepsilon) \left(\frac{1}{2} D_{im} \tau_{mj} + \frac{1}{2} \tau_{im} D_{mj} \right) \quad (\text{Ec.129})$$

Y nuevamente se utilizan las mismas definiciones de las Ec.15 y Ec.16.

Ahora se sustituyen las Ec.15, Ec.16 y Ec.129 en la Ec. 128

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} + \theta_R \left(\frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}}{\partial z} - \right. \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} \\ \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} \\ \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} - \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_{xx}\tau_{xx} + \omega_{xy}\tau_{yx} + \omega_{xz}\tau_{zx} & \omega_{xx}\tau_{xy} + \omega_{xy}\tau_{yy} + \omega_{xz}\tau_{zy} & \omega_{xx}\tau_{xz} + \omega_{xy}\tau_{yz} + \omega_{xz}\tau_{zz} \\ \omega_{yx}\tau_{xx} + \omega_{yy}\tau_{yx} + \omega_{yz}\tau_{zx} & \omega_{yx}\tau_{xy} + \omega_{yy}\tau_{yy} + \omega_{yz}\tau_{zy} & \omega_{yx}\tau_{xz} + \omega_{yy}\tau_{yz} + \omega_{yz}\tau_{zz} \\ \omega_{zx}\tau_{xx} + \omega_{zy}\tau_{yx} + \omega_{zz}\tau_{zx} & \omega_{zx}\tau_{xy} + \omega_{zy}\tau_{yy} + \omega_{zz}\tau_{zy} & \omega_{zx}\tau_{xz} + \omega_{zy}\tau_{yz} + \omega_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} - (1 - \\
 & \varepsilon) \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} D_{xx}\tau_{xx} + D_{xy}\tau_{yx} + D_{xz}\tau_{zx} & D_{xx}\tau_{xy} + D_{xy}\tau_{yy} + D_{xz}\tau_{zy} & D_{xx}\tau_{xz} + D_{xy}\tau_{yz} + D_{xz}\tau_{zz} \\ D_{yx}\tau_{xx} + D_{yy}\tau_{yx} + D_{yz}\tau_{zx} & D_{yx}\tau_{xy} + D_{yy}\tau_{yy} + D_{yz}\tau_{zy} & D_{yx}\tau_{xz} + D_{yy}\tau_{yz} + D_{yz}\tau_{zz} \\ D_{zx}\tau_{xx} + D_{zy}\tau_{yx} + D_{zz}\tau_{zx} & D_{zx}\tau_{xy} + D_{zy}\tau_{yy} + D_{zz}\tau_{zy} & D_{zx}\tau_{xz} + D_{zy}\tau_{yz} + D_{zz}\tau_{zz} \end{pmatrix} + \right. \\
 & \left. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau_{xx}D_{xx} + \tau_{xy}D_{yx} + \tau_{xz}D_{zx} & \tau_{xx}D_{xy} + \tau_{xy}D_{yy} + \tau_{xz}D_{zy} & \tau_{xx}D_{xz} + \tau_{xy}D_{yz} + \tau_{xz}D_{zz} \\ \tau_{yx}D_{xx} + \tau_{yy}D_{yx} + \tau_{yz}D_{zx} & \tau_{yx}D_{xy} + \tau_{yy}D_{yy} + \tau_{yz}D_{zy} & \tau_{yx}D_{xz} + \tau_{yy}D_{yz} + \tau_{yz}D_{zz} \\ \tau_{zx}D_{xx} + \tau_{zy}D_{yx} + \tau_{zz}D_{zx} & \tau_{zx}D_{xy} + \tau_{zy}D_{yy} + \tau_{zz}D_{zy} & \tau_{zx}D_{xz} + \tau_{zy}D_{yz} + \tau_{zz}D_{zz} \end{pmatrix} \right) = \\
 & \eta_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{Ec. 130}
 \end{aligned}$$

Se simplifica la Ec.131 quedando:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left(\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & 0 \\ \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & \left(-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \varepsilon) \left[\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yy} & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \tau_{xx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \\ \tau_{yy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \tau_{yx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ec.132)

Se suman los tensores de la Ec.132:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \theta_R \left(\begin{pmatrix} 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) & -2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 2\tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} + \tau_{xx}) & 0 \\ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{xx} + \tau_{yy}) & 2\tau_{yx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \eta_0 \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Ec.133)

Se calculan los esfuerzos de la Ec. 133 de forma simultánea, mismos que ya incluyen el término de lubricación y el parámetro asociado a la rotación:

$$\tau_{xx} - \frac{1}{2}\theta_R 2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} - \frac{1}{2}\theta_R(1 - \varepsilon) 2\tau_{yx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{Ec. 134})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2}\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} - \tau_{xx}) - \frac{1}{2}\theta_R(1 - \varepsilon) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (\tau_{yy} + \tau_{xx}) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 135})$$

$$\tau_{yy} - \frac{1}{2}\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) (-2)\tau_{xy} - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) 2\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec. 136})$$

$$\tau_{xx} - \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} - \theta_R(1 - \varepsilon) \tau_{yx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0 \quad (\text{Ec. 137})$$

$$\tau_{xx} - \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (1 + (1 - \varepsilon)) = 0 \quad (\text{Ec. 138})$$

$$\tau_{xx} = \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (1 + (1 - \varepsilon)) \quad (\text{Ec. 139})$$

$$\tau_{yy} + \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} - \theta_R(1 - \varepsilon) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{yx} = 0 \quad (\text{Ec.140})$$

$$\tau_{yy} + \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (1 - (1 - \varepsilon)) = 0 \quad (\text{Ec. 141})$$

$$\tau_{yy} = -\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (1 - (1 - \varepsilon)) \quad (\text{Ec. 142})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2}\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \left(-\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \varepsilon \tau_{xy} - \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (2 - \varepsilon)\right) - \frac{1}{2}\theta_R(1 - \varepsilon) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \left(-\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \varepsilon \tau_{xy} + \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (2 - \varepsilon)\right) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 143})$$

$$\tau_{xy} - \frac{1}{2}\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \left(-2\theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy}\right) - \frac{1}{2}\theta_R(1 - \varepsilon) \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tau_{xy} (2 - 2\varepsilon) \theta_R \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 144})$$

$$\tau_{xy} + \theta_R^2 \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 \tau_{xy} (2 - 2\varepsilon) (1 - \varepsilon) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 145})$$

$$\tau_{xy} + \theta_R^2 \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}\theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 \tau_{xy} (2 - 2\varepsilon) (1 - \varepsilon) = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 146})$$

$$\tau_{xy} \left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}(2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)\right) \right] = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 147})$$

$$\tau_{xy} \left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2) \right] = \eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (\text{Ec. 148})$$

Se tiene entonces que componentes del tensor de esfuerzos son:

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \quad (\text{Ec. 149})$$

Se sustituye la Ec. 149 en la Ec.139:

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= \theta_R \left(\frac{du_x}{dy}\right) (2 - \varepsilon) \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \\ \tau_{xx} &= \frac{\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R (2 - \varepsilon)}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 150})$$

Se sustituye la Ec. 149 en a Ec. 142:

$$\begin{aligned} \tau_{yy} &= -\theta_R \left(\frac{du_x}{dy}\right) \varepsilon \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \\ \tau_{yy} &= -\frac{\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R \varepsilon}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 151})$$

Nuevamente se parte de la aproximación de lubricación con lo que se tiene que resolver la Ec. 33 y se obtiene la solución general dada por la Ec. 35, por tanto se sustituye en ésta la Ec. 149 y se obtiene la siguiente expresión:

$$y \frac{dp}{dx} + c_1 = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[1 + \theta_R^2 \tau_{xy} \left(2\varepsilon \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 - \varepsilon^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2\right)\right]} \quad (\text{Ec.152})$$

Se tiene la siguiente ecuación diferencial no lineal, se usa la teoría de métodos perturbativos para su resolución.

$$\frac{1}{\eta_0} \left(y \frac{dp}{dx} + c_1\right) = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left[1 + \theta_R^2 \tau_{xy} \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \quad (\text{Ec.153})$$

2.3.1 Caso rodillo aplicador

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las mismas que se utilizaron para el FMDCor.

La adimensionalización de las derivadas de la Ec.153 es la misma que las de las derivadas de la Ec.37. Se sustituye entonces en la Ec.153

$$\frac{1}{\eta_0} \left(\eta H_0 \frac{\eta_0 U}{H_0^2} \frac{dP}{d\xi} + c_1 \right) = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)}$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \left(\theta_R \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)}$$

$$\frac{\eta U}{H_0} \frac{dP}{d\xi} + \frac{1}{\eta_0} c_1 = \frac{\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + W_S^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)}$$

$$\eta \frac{dP}{d\xi} + \frac{H_0}{U \eta_0} c_1 = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + W_S^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec.154})$$

Se reemplaza el W_S^2 por el parámetro ε y se utilizará $P' = \frac{dP}{d\xi}$ y $C = \frac{H_0 c_1}{U \eta_0}$ es la constante de integración adimensional que proviene de la Ec.153, a la que más adelante se dará solución a través de métodos perturbativos y $\zeta = (2\varepsilon - \varepsilon^2)$, que es el parámetro asociado al efecto de rotación del fluido.

Con lo que la ecuación adimensional queda

$$\eta P' + C = \frac{\frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \zeta \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec.155})$$

Utilizando polinomio de la Ec.43.

De la Ec.155 se despeja $\frac{d\varphi}{d\eta}$ y se sustituye las Ec. 44, Ec.45 y Ec.46.

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = (\eta P' + C) \cdot \left(1 + \zeta \epsilon \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2\right) \quad (\text{Ec.156})$$

$$\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \epsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \epsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots = \left[1 + \zeta \epsilon \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta} + \epsilon \frac{d\varphi_1}{d\eta} + \epsilon^2 \frac{d\varphi_2}{d\eta} + \dots\right)^2\right] \cdot [\eta P'_0 + \epsilon \eta P'_1 + \epsilon^2 \eta P'_2 + C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots] \quad (\text{Ec.157})$$

Se igualan los términos con factores comunes de ϵ .

El orden cero es el mismo que la Ec.157 ya que es el flujo adimensional de este orden, que es el que corresponde al fluido newtoniano.

Orden uno:
$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^2 \zeta (\eta P'_0 + C_0) \quad (\text{Ec.158})$$

Las condiciones de frontera que se requieren son las utilizadas para el FMDCor.

Se utilizan la definición del flujo adimensional expresada en la Ec.60.

La resolución de φ_0 , λ_0 y P_0 para este problema se encuentra en las Ecs. 51 a 68, ya que la primera es la velocidad adimensional, la segunda es el flujo adimensional y la tercera la presión, todas del fluido newtoniano y no cambian.

Se obtiene φ_1 , para ello se tiene que resolver la (Ec.158), se reescribe de la siguiente manera:

$$\frac{d\varphi_1}{d\eta} = \eta P'_1 + C_1 + \left(\frac{d\varphi_0}{d\eta}\right)^3 \quad (\text{Ec.158})$$

El cálculo para la obtención de φ_1 se encuentra desarrollado en el caso con derivada convectiva corrotacional y el resultado está dado por la Ec.74 y se reescribe.

$$\varphi_1 = \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 \hbar + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \hbar^2\right) - \eta \left(\hbar \frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \hbar^3\right) \quad (\text{Ec.74})$$

Por tanto los valores del flujo adimensional λ_1 y del gradiente de presión P_1' están expresados por las Ec. 76 y 77.

La diferencia con el modelo del fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional se encuentra en el término ζ que multiplica al parámetro de perturbación (Ws^2), este parámetro ζ relaciona los efectos de rotación del fluido, al incluirlo permite modelar un fluido que presente efectos rotacionales y deformacionales al mismo tiempo.

Con lo que se calcula la distribución de velocidades adimensional aproximada a términos de orden uno para el proceso de recubrimiento con rodillo aplicador con fluido maxwelliano con derivada convectiva configuracional está dado por la siguiente ecuación

$$\varphi = \varphi_0 + \zeta \varepsilon \varphi_1 + O(\varepsilon^2) \quad (\text{Ec.159})$$

$$\varphi = \frac{1}{2} P'_0 (\eta^2 - \hbar \eta) + 1 + (2\varepsilon - \varepsilon^2) Ws^2 \left\{ \eta^4 \frac{P'_0{}^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P'_0{}^3 \hbar + \eta^2 \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8} P'_0{}^3 \hbar^2 \right) - \eta \left(\hbar \frac{P'_1}{2} + \frac{1}{8} P'_0{}^3 \hbar^3 \right) \right\} \quad (\text{Ec.160})$$

Se calcula la primera diferencia de esfuerzos normales

$$N_1 = \tau_{xx} - \tau_{yy} = \frac{2\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \theta_R}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2) \right]} \quad (\text{Ec.161})$$

En forma adimensional

$$\Theta = \frac{2Ws \left(\frac{H_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{\left[1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2) \right]} \quad (\text{Ec.162})$$

2.3.2 Caso placas paralelas

Las variables adimensionales que asociadas para este proceso son las mismas que se utilizaron para el fluido maxwelliano con derivada convectiva corrotacional.

La adimensionalización de la Ec.153 ya se realizó previamente. Se sustituye entonces en la Ec.153 con lo que se llega a la expresión dada por Ec.154 del proceso con rodillo aplicador, se realizan los mismos cambios para el gradiente de presión y para las constantes de integración por lo que se llega a la expresión dada por la Ec. 155 que se resolverá utilizando la misma técnica de resolución (métodos perturbativos) aplicada en el proceso con derivada convectiva corrotacional.

Se utilizan las condiciones a la frontera que en el proceso con FMDCor.

Para el orden cero se tiene el perfil de velocidades adimensional del fluido newtoniano previamente calculado.

La resolución de φ_0 y λ_0 para este problema se encuentra en las Ecs. 82 a 86, ya que la primera es la velocidad adimensional y la segunda es el flujo adimensional, todas del fluido newtoniano.

Se obtiene φ_1 , para ello se tiene que resolver la Ec.158, el cálculo para la obtención de φ_1 se encuentra desarrollado en el caso con FMDCor y el resultado está dado por la Ec.92 y se reescribe:

$$\varphi_1 = \eta^4 \frac{P_0'^3}{4} - \frac{1}{2} \eta^3 P_0'^3 + \eta^2 \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{3}{8} P_0'^3 \right) - \eta \left(\frac{P_1'}{2} + \frac{1}{8} P_0'^3 \right) \quad (\text{Ec.92})$$

La diferencia con el modelo del FMDCor se explicó previamente en el proceso con rodillo aplicador.

Con lo que se calcula la distribución de velocidades adimensional aproximada a términos de orden uno para el proceso de recubrimiento con rodillo aplicador con fluido maxwelliano con derivada convectiva configuracional al sustituir las Ec. 86 y 92 en la Ec. 159.

$$\varphi = \frac{1}{2}P'_0(\eta^2 - \eta) + 1 + (2\varepsilon - \varepsilon^2)W_s^2 \left\{ \eta^4 \frac{P'_0{}^3}{4} - \frac{1}{2}\eta^3 P'_0{}^3 + \eta^2 \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{3}{8}P'_0{}^3 \right) - \eta \left(\frac{P'_1}{2} + \frac{1}{8}P'_0{}^3 \right) \right\}$$

(Ec.163)

La expresión de la primera diferencia de esfuerzos normales está determinada por la Ec. 161, pero en forma adimensional presenta la siguiente forma

$$\Theta = \frac{2W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{\left[1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2) \right]}$$

(Ec.164)

3. Comparación de modelos

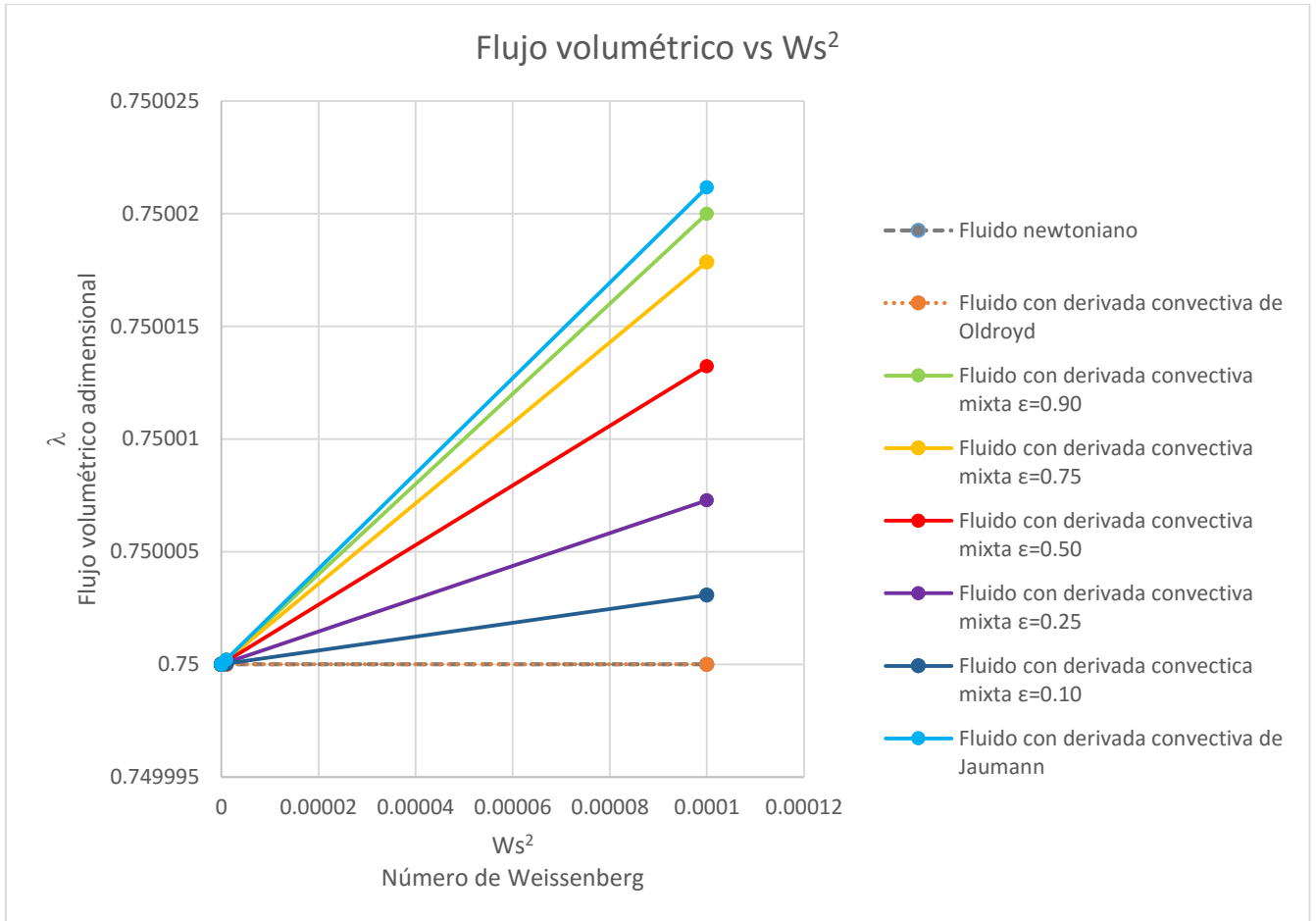
Componente del tensor de esfuerzos	Modelo		
	FMDCor	FMDCod	FMDCon
τ_{xy}	$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{du_x}{dy}$	$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$
τ_{xx}	$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$\tau_{xx} = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$	$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R (2 - \varepsilon)}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$
τ_{yy}	$\tau_{yy} = -\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$\tau_{yy} = 0$	$\tau_{yy} = -\frac{\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R \varepsilon}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$
Primera diferencia de esfuerzos normales	$N_1 = 2\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2}$	$N_1 = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$	$N_1 = \frac{2\eta_0 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 \theta_R}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$

Tabla 1. Comparación de la estructura de los componentes normales y cortante del tensor de esfuerzos.

	Modelo en forma adimensional		
Componente del tensor adimensional de esfuerzos	FMDCor	FMDCod	FMDCon
$\sigma_{\xi\eta}$	$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\sigma_{\xi\eta} = \frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}$	$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta}}{\left[1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$
$\sigma_{\xi\xi}$	$\sigma_{\xi\xi} = Ws \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\sigma_{\xi\xi} = 2Ws \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2$	$\sigma_{\xi\xi} = \frac{Ws \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2 - \varepsilon)}{\left[1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$
$\sigma_{\eta\eta}$	$\sigma_{\eta\eta} = -Ws \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\sigma_{\eta\eta} = 0$	$\sigma_{\eta\eta} = -\frac{Ws \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 \varepsilon}{\left[1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$
Primera diferencia de esfuerzos normales $\Theta = \sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}$	$\Theta = 2Ws \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}$	$\Theta = 2Ws \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2$	$\Theta = \frac{2Ws \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2}{\left[1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]}$

La adimensionalización de los tensores se encuentra en el anexo 3.

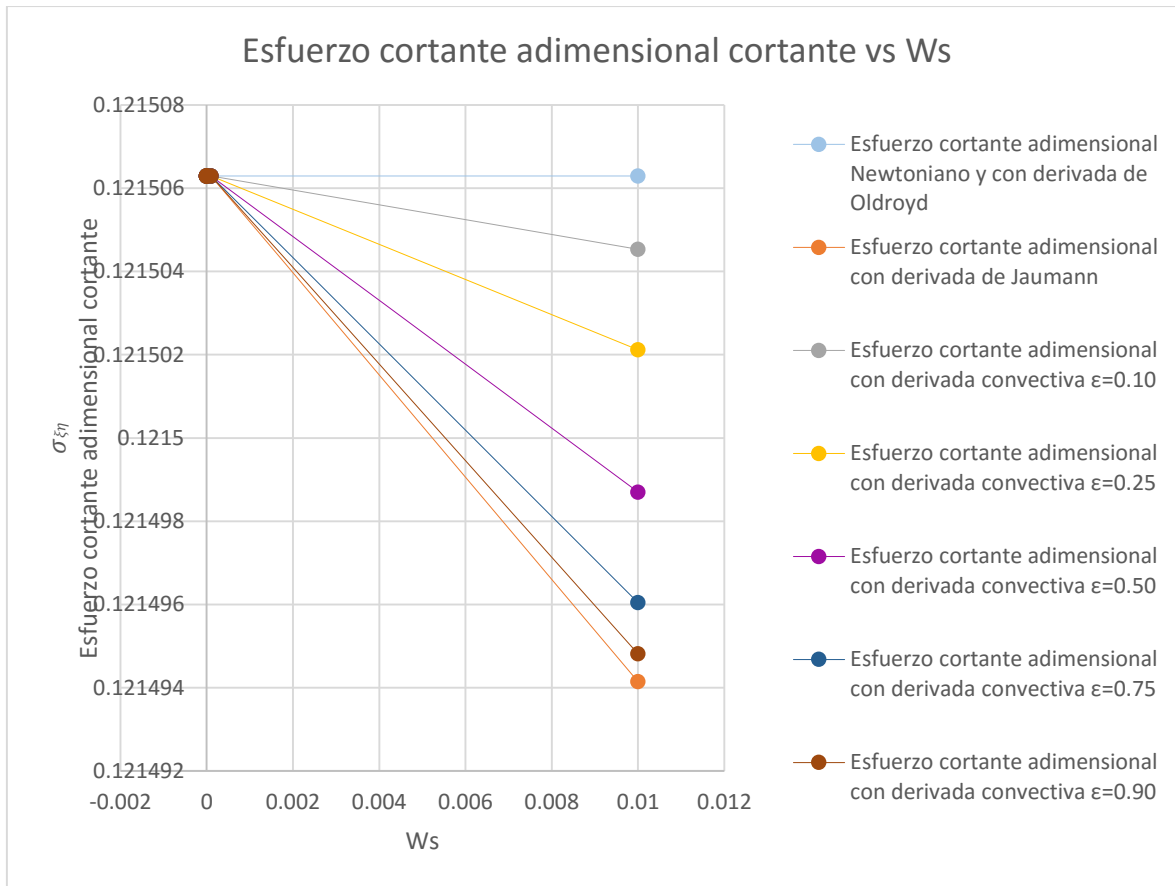
Tabla 2. Comparación de la estructura adimensional de los componentes normales y cortante del tensor de esfuerzos. 60



Gráfica 1. Flujo volumétrico adimensional vs número de Weissenberg

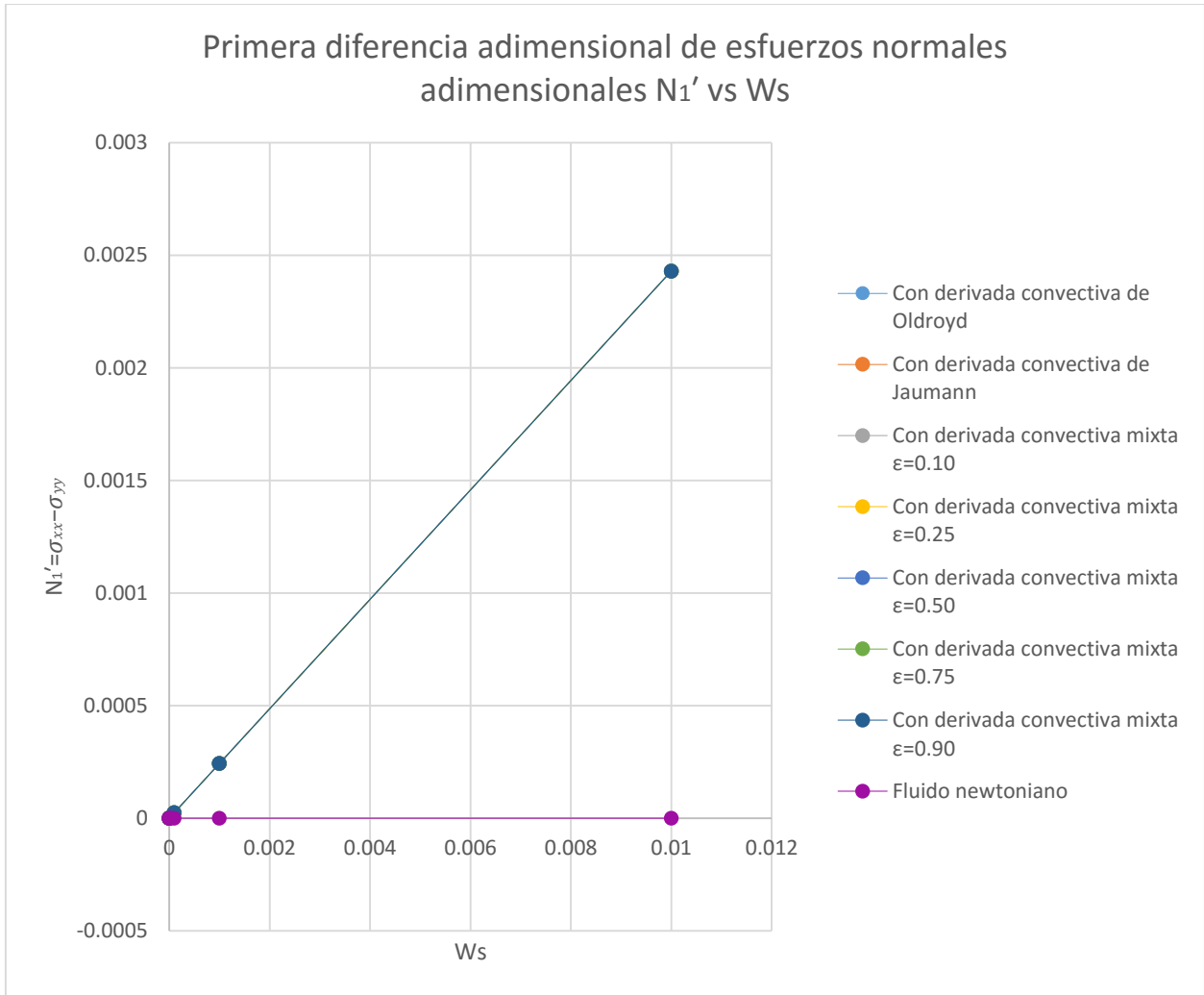
Se observa que conforme aumenta la viscoelasticidad aumenta el flujo. Además de que si el fluido tiende a tener un comportamiento con mayor rotación favorece a tener un aumento en el flujo, además se observa que el máximo flujo que se puede obtener es con un fluido que tiene únicamente efectos rotacionales mientras que los fluidos con efectos únicamente deformacionales tienen un flujo constante que es lo que también sucede en el fluido newtoniano.

Esta gráfica fue elaborada para el proceso de rodillo aplicador ya que solamente se encuentran datos en la literatura (Middleman, 1978) para su elaboración.



Gráfica 2. Componente cortante adimensional del tensor esfuerzos vs número de Weissenberg

La gráfica dos muestra como las fuerzas viscosas disminuyen al aumentar los efectos viscoelásticos lo cual explica el comportamiento de la gráfica 1, por tanto se puede concluir que al aumentar los efectos viscoelásticos, principalmente el efecto de rotación favorece que el flujo aumente.



Gráfica 3. Primera diferencia de esfuerzos normales adimensionales vs número de Weissenberg

Se demuestra entonces que los efectos normales con respecto a los efectos cortantes tienen un efecto del 2% en comparación con el efecto cortante, lo cual cumple la suposición que establece “la aproximación de lubricación”, la cual supone la no existencia de los esfuerzos normales, lo cual se observa en este gráfico.

4. Conclusiones

4.1 Recubrimiento sin reacción química

Del modelo newtoniano se obtuvo que los parámetros más importantes para llevar a cabo un recubrimiento son el parámetro para modelar la región de separación N el cual contempla los efectos viscosos y la tensión superficial, esto para el caso del fluido newtoniano y λ que es el flujo volumétrico adimensional, ya que el primero incluye la relación del efecto causado por la tensión superficial con respecto a los efectos viscosos así como la caracterización geométrica y el segundo parámetro es un valor característico en el límite de la desaparición de N , y es el que se utiliza en la industria del recubrimiento, el cual debe ser siempre menor a la unidad o ligeramente mayor a ésta.

Del análisis del proceso de recubrimiento sin reacción química con FMDCon es un tipo de derivada convectiva general, ya que se encontró que en los casos límites cuando se varía el parámetro ε (parámetro asociado a la rotación) se obtiene lo siguiente:

- Cuando $\varepsilon = 0$ se tiene el FMDCod.
- Cuando $\varepsilon = 1$ se tiene el FMDCor.

Con este último modelo se pueden modelar fluidos maxwellianos con efectos codeformacionales y corrotacionales tan sólo variando el parámetro ε . Los fluidos codeformacionales son aquellos que al fluir solo presentan efectos por deformación mientras que los corrotacionales solo presentan efectos por rotación.

Los parámetros más importantes que se encontraron para el proceso de recubrimiento sin reacción química fueron el número de Weissenberg y el parámetro ε que modela los efectos de rotación en un fluido (su intervalo es de 0 y 1, que representan lo antes citado).

Se calculó el esfuerzo total sin considerar el esfuerzo cortante, para ver la magnitud del esfuerzo por contribución de esfuerzos normales y se puede observar en el anexo 3, que el orden en el cual contribuye se encuentra entre 10^{-13} y 10^{-2} dependiendo el valor de W_s que se tome, mientras que tan sólo el esfuerzo cortante es del orden de 10^{-1} lo cual sustenta el uso de la aproximación de lubricación.

Capítulo II

Proceso de recubrimiento con reacción química

Las personas tranquilas y silenciosas son las que tienen las mentes más fuertes y ruidosas.

Stephen Hawking

Antecedentes

Recubrimiento con reacción química

El modelado y simulación en el procesamiento de polímeros reactivos han sido áreas de investigación activos durante los últimos decenios en las instituciones académicas, así como dentro de la industria. Ambas áreas han jugado un papel clave en el avance y la optimización de las operaciones de procesamiento de polímeros reactivos (Castro, 2004).

Pero en la literatura solo se encuentran reacciones para producir polímeros que formen películas de recubrimiento con ciertas propiedades. Y dentro del modelado lo que se encuentra son modelos empíricos, por lo que este trabajo partiendo de un sistema sencillo como es el de placas paralelas con una reacción química con cinética de primer orden, se buscó modelar el proceso de recubrimiento partiendo de las ecuaciones de transporte de masa y de cantidad de movimiento y se supuso un proceso isotérmico.

El análisis y desarrollo de esta parte de la tesis encontró que los parámetros que modelan al proceso son el número de Peclet de masa, el Damköhler I y el Damköhler II.

Objetivos

Proceso de recubrimiento con reacción química

- I. Modelar el proceso de recubrimiento de una superficie fija en el sistema placas paralelas y con una reacción química de cinética de primer orden, con fluido newtoniano.
- II. Obtener los parámetros de los cuales depende el proceso de recubrimiento con fluidos newtoniano con una reacción química de primer orden.

1. Desarrollo y análisis del problema con reacción química en fluidos newtonianos

Para el proceso de recubrimiento con fluido newtoniano con reacción química se considera un sistema de placas paralelas en el cual no hay gradiente de presiones

1.1 Recubrimiento con fluido newtoniano con reacción química de primer orden en placas paralelas y sin gradiente de presión.

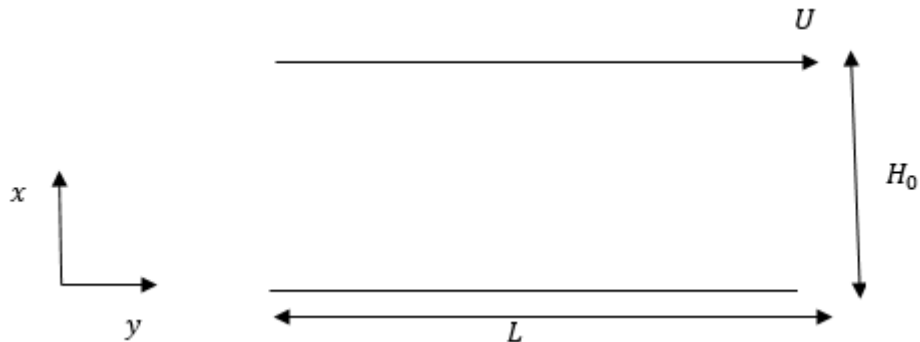
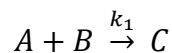


Fig. 3 Proceso de recubrimiento con reacción química

Se obtendrá el desarrollo para obtener el perfil de concentraciones de la especie B, se propone una reacción química de primer orden entre la especie A y B para producir la especie C que será la capa de recubrimiento, a continuación se presenta la reacción química que se propone



La reacción que se propone es una reacción irreversible, equimolar y con una cinética de primer orden. Se consideran las siguientes suposiciones:

- I. Fluido newtoniano e incompresible.
- II. Proceso en estado estacionario.
- III. Las propiedades físicas de la fase fluida se mantienen constantes, incluyendo también al coeficiente de difusión D_{AB} .
- IV. Flujo laminar.

Para la reacción química planteada, su rapidez de reacción se expresa como.

$$R_B = -k_1 C_A C_B \quad (\text{Ec. 165})$$

$$C_A \gg C_B \quad (\text{Ec. 166})$$

$$R_B = -k_1 C_B \quad (\text{Ec. 167})$$

En esta ecuación se puede observar que el orden de reacción con respecto a la especie A es de primer orden y el orden de reacción para la especie B también, por lo tanto el orden global de la reacción es de segundo orden (Smith, 1986). Pero para este proceso se considera que la especie A se encuentra en exceso, por lo que no afecta considerablemente la reacción química la concentración C_A como se muestra en la Ec. 165. Por este motivo la rapidez de reacción sólo dependerá de la concentración de la especie B (C_B) esto se describe en la Ec. 167 y por ello podemos considerarla reacción de primer orden.

Se retoman las suposiciones citadas anteriormente y se parte de la ecuación de continuidad para coordenadas rectangulares con densidad y coeficiente de difusión constante (Bird, 1976).

$$\cancel{\frac{\partial C_B}{\partial t}} + u_x \frac{\partial C_B}{\partial x} + u_y \cancel{\frac{\partial C_B}{\partial y}} + u_z \cancel{\frac{\partial C_B}{\partial z}} = D_{AB} \left(\frac{\partial^2 C_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_B}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 C_B}{\partial z^2}} \right) + R_B \quad (\text{Ec. 168})$$

De la figura 3, se observa que el efecto de la difusión será mayor en el eje y con respecto al eje x , debido a que el eje x se encuentra dominado por el efecto conectivo ya que la velocidad del fluido se encuentra en esa dirección por esto en la el eje y el efecto difusivo será mayor que lo que lo es en el eje x . Por lo que la Ec. 168 se reduce a

$$u_x \frac{\partial C_B}{\partial x} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_B}{\partial y^2} + R_B \quad (\text{Ec.169})$$

Para este proceso el perfil de velocidades u_x es el lineal, por lo que

$$u_x = \frac{U}{H_0} y \quad (\text{Ec. 170})$$

Se adimensionalizará la Ec. 169 en términos de las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{C_B}{C_{B0}}, \eta = \frac{y}{H_0}, \xi = \frac{x}{L}, \varphi = \frac{u_x}{U}, \\ \frac{\partial C_B}{\partial x} &= \frac{\partial C_B}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{C_{B0}}{L} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 C_B}{\partial y^2} &= \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial C_B}{\partial \Omega} \frac{\partial C_B}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{C_{B0}}{H_0^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Se sustituyen estas expresiones y la Ec. 167 en la Ec. 169

$$\begin{aligned} U \varphi \frac{C_{B0}}{L} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= D_{AB} \frac{C_{B0}}{H_0^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - k_1 \Omega C_{B0} \\ \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= D_{AB} \frac{C_{B0}}{H_0^2} \frac{L}{C_{B0}} \frac{1}{U} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - \Omega C_{B0} k_1 \frac{L}{C_{B0}} \frac{1}{U} \\ \varphi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= \frac{D_{AB}}{U} \frac{L}{H_0^2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - \Omega \frac{L C_{B0} k_1}{C_{B0} U} \end{aligned}$$

De la adimensionalización se encuentran los números adimensionales de Peclet de masa, Damkhöler I y Damkhöler II, su estructura fue comparada con publicada en la literatura (McKinley, 2005).

$$\begin{aligned} Pe_M &= \frac{U H_0^2}{L D_{AB}} \\ Da_I &= \frac{Da_{II}}{Pe_M} = \frac{L C_{B0} k_1}{C_{B0} U} \end{aligned}$$

Por lo que la forma adimensional de la Ec.169 es:

$$\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{1}{Pe_M} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - \Omega \frac{Da_{II}}{Pe_M} \quad (\text{Ec. 171})$$

Se adimensionaliza la Ec. 170 y se sustituye en la Ec. 171

$$\varphi = \frac{u_x}{U} = \frac{y}{H_0} = \eta$$

$$\eta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{1}{Pe_M} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - \Omega \frac{Da_{II}}{Pe_M}$$

(Ec. 172)

Para obtener la solución de la Ec. 172 se utilizará el método de separación de variables (Trim, 2011), para ello se propone una solución para la distribución de concentraciones

$$\Omega(\xi, \eta) = X(\xi) H(\eta) \quad (\text{Ec. 173})$$

Se sustituye en la Ec. 172

$$\eta \frac{\partial X(\xi) H(\eta)}{\partial \xi} = \frac{1}{Pe_M} \frac{\partial^2 X(\xi) H(\eta)}{\partial \eta^2} - \frac{Da_{II}}{Pe_M} X(\xi) H(\eta) \quad (\text{Ec. 174})$$

$$\eta H(\eta) \frac{dX(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{Pe_M} X(\xi) \frac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2} - \frac{Da_{II}}{Pe_M} X(\xi) H(\eta) \quad (\text{Ec. 175})$$

Se divide entre la Ec. 173

$$\eta \frac{\frac{dX(\xi)}{d\xi}}{X(\xi)} = \frac{1}{Pe_M} \frac{\frac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2}}{H(\eta)} - \frac{Da_{II}}{Pe_M} \quad (\text{Ec. 176})$$

Se reescribe la Ec. 176, para mostrar que es de variables separables

$$\frac{X'(\xi)}{X(\xi)} = \frac{1}{Pe_M} \frac{1}{\eta} \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} - \frac{Da_{II}}{Pe_M} \frac{1}{\eta}$$

(Ec.177)

Se iguala la Ec. 177 a una constante de separación y se reemplaza la distribución de velocidades

$$\frac{X'(\xi)}{X(\xi)} = \frac{1}{Pe_M} \frac{1}{\eta} \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} - \frac{Da_{II}}{Pe_M} \frac{1}{\eta} = -\lambda^2 \quad (\text{Ec. 178})$$

Las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen son las siguientes

$$\frac{X'(\xi)}{X(\xi)} = -\lambda^2 \quad (\text{Ec. 179})$$

$$\frac{1}{Pe_M} \frac{1}{\eta} \frac{H''(\eta)}{H(\eta)} - \frac{Da_{II}}{Pe_M} \frac{1}{\eta} = -\lambda^2 \quad (\text{Ec. 180})$$

La Ec. 179 tiene la siguiente forma

$$X'(\xi) + \lambda^2 X(\xi) = 0 \quad (\text{Ec. 181})$$

Cuya solución general de acuerdo al teorema de Sturm-Liouville es:

$$X(\xi) = c_1 e^{-\lambda^2 \xi} \quad (\text{Ec. 182})$$

Mientras que la Ec. 180 tiene la siguiente estructura

$$H''(\eta) - Da_{II} H(\eta) + \lambda^2 \eta Pe_M H(\eta) = 0 \quad (\text{Ec. 183})$$

Cuya solución general de acuerdo al teorema de Sturm-Liouville es:

$$H(\eta) = c_2 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda^2 \eta}{(-Pe_M \lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \right) + c_3 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda^2 \eta}{(-Pe_M \lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (\text{Ec. 184})$$

Finalmente la distribución general de concentraciones de acuerdo a la Ec. 173 es:

$$\Omega(\xi, \eta) = c_1 e^{-\lambda^2 \xi} \left[c_2 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda^2 \eta}{(-Pe_M \lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \right) + c_3 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda^2 \eta}{(-Pe_M \lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right] \quad (\text{Ec. 185})$$

$$\Omega(\xi, \eta) = e^{-\lambda^2 \xi} \left[c_4 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda^2 \eta}{(-Pe_M \lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \right) + c_5 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda^2 \eta}{(-Pe_M \lambda^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right] \quad (\text{Ec. 186})$$

Las condiciones de frontera que se utilizarán para obtener las constantes de integración de la Ec. 186 son las siguientes:

$$\Omega(\xi, 0) = 0 \quad (\text{Ec. 187})$$

$$\Omega(\xi, 1) = 0 \quad (\text{Ec. 188})$$

$$\Omega(0, \eta) = 1 \quad (\text{Ec. 189})$$

Para el cálculo de las constantes se supondrá primero que $c_5 = 0$ y se resolverá la ecuación diferencial, después se supondrá que $c_4 = 0$ y se resolverá la ecuación diferencial, finalmente se aplicará el principio de superposición (Trim, 2011) y la suma de ambas soluciones será solución de la ecuación diferencial. Lo anterior debido a la forma no lineal de las funciones de Airy.

Se aplica la condición de frontera dada por la Ec. 189 y utilizando el principio de ortogonalidad se obtienen las constantes.

Caso $c_5 = 0$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_4 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right)$$

(Ec. 190)

Para obtener la función peso de las funciones de Airy y poder aplicar el principio de ortogonalidad se recurre a la estructura de la ecuación diferencial ordinaria (Jiji, 2009), en este caso dada por la Ec. 183 y se obtiene que η es la función peso.

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) d\eta = C_4 \int_0^1 \left[\text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]^2 \eta d\eta \quad (\text{Ec. 191})$$

Con lo que la constante quedan como:

$$C_4 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) d\eta}{\int_0^1 \left[\text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]^2 \eta d\eta}$$

(Ec. 192)

Caso $c_4 = 0$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_5 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right)$$

(Ec. 193)

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) d\eta = C_5 \int_0^1 \left[\text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]^2 \eta d\eta$$

(Ec. 194)

Con lo que la constante quedan como:

$$C_5 = \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) d\eta}{\int_0^1 \left[\text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]^2 \eta d\eta}$$

(Ec. 195)

Finalmente se sustituye c_4 y c_5 en la siguiente ecuación y se tiene la distribución de concentraciones

$$\Omega(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \xi} \left[c_4 \text{AiryAi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) + c_5 \text{AiryBi} \left(\frac{Da_{II} - Pe_M \lambda_n^2 \eta}{(-Pe_M \lambda_n^2)^{\frac{2}{3}}} \right) \right]$$

(Ec. 196)

2. Conclusiones

2.1 Recubrimiento con reacción química

Para el proceso con reacción química en fluido newtoniano se encontró que los parámetros que gobiernan el proceso son el número de Damköhler II y el Peclet de masa y que la variación en la coordenada donde se da el proceso difusivo tiene un comportamiento hipergeométrico expresado en término de las funciones de Airy, pese a que se obtuvo una expresión de la distribución analítica de concentraciones del reactivo limitante no fue posible obtener una expresión para el cálculo de los valores propios, ya que ambas funciones hipergeométricas tienen contribución en la región del espacio donde se estudia el proceso de recubrimiento, por lo que se tiene que calcular una expresión particular para los valores propios para cada función de Airy, a diferencia de cómo se encuentra en la literatura donde alguna de las funciones hipergeométricas es anulada y es posible calcular una expresión global de los valores propios, además de que las expresiones para encontrar estas expresiones de los valores propios tiene una forma no lineal, por lo que se deja para trabajo futuro encontrar las expresiones.

Como trabajo futuro se incluirán a la Ec. 171 los perfiles de velocidades encontrados en las soluciones del proceso de recubrimiento con fluidos newtonianos y no newtonianos sin reacción química, y además incluir el análisis en condiciones no isotérmicas.

Anexos

Anexo 1 “Teoría de métodos perturbativos”

Perturbaciones regulares

Bender y OrSzag (Bender, 1987) definen a las perturbaciones regulares como:

“Una serie de perturbación cuya serie de potencias toma un parámetro ϵ con un radio de no anulación de la convergencia”.

Una característica básica de todos los problemas de perturbación regulares, es que la solución exacta para ϵ pequeño, pero distinto de cero, se acerca suavemente a la imperturbable o una solución de orden cero cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Como ejemplo se tiene el siguiente problema (Alistair, s.f.)

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\epsilon \frac{dy}{d\tau} - 1$$

$$y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{d\tau}(0) = 0$$

El parámetro ϵ está definido como $\epsilon = \frac{kv_0}{mg}$.

Se asume que la solución se puede expresar como una expansión de Taylor, de tal forma que:

$$y(\tau) = y_0(\tau) + \epsilon y_1(\tau) + \epsilon^2 y_2(\tau) + \dots$$

Se sustituye en la ecuación diferencial y las condiciones iniciales, se hace una expansión hasta el tercer término.

$$\frac{d^2y_0}{d\tau^2} + 1 + \epsilon \left(\frac{d^2y_1}{d\tau^2} + \frac{dy_0}{d\tau} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{d^2y_2}{d\tau^2} + \frac{dy_1}{d\tau} \right) + O(\epsilon^3) = 0$$

$$y(\tau) = y_0(0) + \epsilon y_1(0) + \epsilon^2 y_2(0) + O(\epsilon^3) = 0$$

$$\frac{dy_0}{d\tau}(0) + 1 + \epsilon \frac{dy_1}{d\tau}(0) + \epsilon^2 \frac{dy_2}{d\tau}(0) + O(\epsilon^3) = 0$$

Se resuelven las ecuaciones para cada orden

$$O(1): \frac{d^2 y_0}{d\tau^2} + 1 = 0 \quad \text{cuando} \quad y_0(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dy_0}{d\tau}(0) - 1 = 0$$

$$\frac{d^2 y_0}{d\tau^2} + 1 = 0$$

$$\frac{d^2 y_0}{d\tau^2} = -1$$

$$\int d\left(\frac{dy_0}{d\tau}\right) = -\int d\tau$$

$$\frac{dy_0}{d\tau} = -\tau + c_1$$

$$\int dy_0 = \int (-\tau + c_1) d\tau$$

$$y_0 = -\frac{\tau^2}{2} + c_1\tau + c_2$$

Evaluando las condiciones de frontera:

$$\frac{dy_0}{d\tau}(0) = c_1$$

$$c_1 - 1 = 0$$

$$c_1 = 1$$

$$y_0(0) = \frac{0^2}{2} + 0 + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

Queda entonces:

$$y_0 = -\frac{\tau^2}{2} + \tau$$

Ahora se calcula para orden uno:

$$O(\epsilon): \frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \frac{dy_0}{d\tau} = 0 \quad \text{cuando} \quad y_1(0) = 0 \quad y \quad \frac{dy_1}{d\tau}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} + \frac{dy_0}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 y_1}{d\tau^2} = -\frac{dy_0}{d\tau}$$

$$\int d\left(\frac{dy_1}{d\tau}\right) = -\int \frac{dy_0}{d\tau} d\tau$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = -y_0 + c_3$$

$$\int dy_1 = \int (-y_0 + c_3) d\tau$$

$$\int dy_1 = -\int \left(-\frac{\tau^2}{2} + \tau\right) d\tau + \int c_3 d\tau$$

$$y_1 = \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} + c_3\tau + c_4$$

Evaluando las condiciones de frontera:

$$\frac{dy_1}{d\tau}(0) = \frac{0^2}{2} + 0 + c_3 = 0$$

$$c_3 = 0$$

$$y_1(0) = \frac{0^3}{6} - \frac{0^2}{2} + 0 + c_4$$

$$c_4 = 0$$

De donde queda:

$$y_1 = \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2}$$

Ahora se calcula para orden dos:

$$O(\epsilon): \frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + \frac{dy_1}{d\tau} = 0 \quad \text{cuando} \quad y_2(0) = 0 \quad y \quad \frac{dy_2}{d\tau}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} + \frac{dy_1}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2 y_2}{d\tau^2} = -\frac{dy_1}{d\tau}$$

$$\int d\left(\frac{dy_2}{d\tau}\right) = -\int \frac{dy_1}{d\tau} d\tau$$

$$\frac{dy_2}{d\tau} = -y_1 + c_5$$

$$\int dy_1 = \int (-y_1 + c_5) d\tau$$

$$\int dy_1 = -\int \left(\frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2}\right) d\tau + \int c_5 d\tau$$

$$y_1 = -\frac{\tau^4}{24} + \frac{\tau^3}{6} + c_5\tau + c_6$$

Evaluando las condiciones de frontera:

$$\frac{dy_2}{d\tau}(0) = -\frac{0^2}{6} + \frac{0}{2} + c_5 = 0$$

$$c_5 = 0$$

$$y_2(0) = -\frac{0^4}{24} + \frac{0^3}{6} + 0 + c_6 = 0$$

$$c_6 = 0$$

De donde se obtiene:

$$y_1 = -\frac{\tau^4}{24} + \frac{\tau^3}{6}$$

Quedando el polinomio de solución aproximado:

$$y(\tau) \approx \left(\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) + \epsilon \left(\frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^4}{24} \right)$$

Se generaliza el polinomio anterior y se obtiene un polinomio de la forma Taylor:

$$y(\tau) \approx \left(\tau - \frac{\tau^2}{2!} \right) + \epsilon \left(\frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^2}{2!} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\tau^3}{3!} - \frac{\tau^4}{4!} \right) + O(\epsilon^3)$$

Anexo 2 “Datos para elaboración de gráficos”

Se utilizaron datos comunes de la literatura referidos al óxido de polietileno al 0.75% (Middleman, 1978).

Propiedades

H_o (m)	0.0015
R (m)	0.1016
$L=(RHo)^{(1/2)}$ (m)	0.01234504
$dP/d\xi$	0.33333333

Gráfico 1

	FMDCor ($\epsilon=1.0$)	FMDCon $\epsilon=0.1$	FMDCon $\epsilon=0.25$	FMDCon $\epsilon=0.50$	FMDCon $\epsilon=0.75$	FMDCon $\epsilon=0.90$	FMDCod ($\epsilon=0.0$)	Fluido newtoniano
Ws²	λ_{total}	λ_{total}	λ_{total}	λ_{total}	λ_{total}	λ_{total}	λ_{total}	λ_{total}
1x10⁻⁷	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
1x10⁻⁶	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
1x10⁻⁵	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
1x10⁻⁴	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75
1x10⁻³	0.75000021	0.75000003	0.75000007	0.75000013	0.75000018	0.7500002	0.75	0.75
1x10⁻²	0.75002117	0.75000307	0.75000728	0.75001323	0.75001786	0.7500200	0.75	0.75

Anexo 3 “Cálculo de la norma del tensor adimensional total solo considerando esfuerzos normales”. Datos gráfica 3.

	FMDCod ($\epsilon=0.0$)	FMDCor ($\epsilon=1.0$)	FMDCon $\epsilon=0.1$	FMDCon $\epsilon=0.25$	FMDCon $\epsilon=0.50$	FMDCon $\epsilon=0.75$	FMDCon $\epsilon=0.90$
Ws	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$	$\sqrt{\sigma_{\xi\xi}^2 + \sigma_{\eta\eta}^2}$
1x10⁻⁷	2.43013E-13	1.71836E-13	2.30862E-13	2.1264E-13	1.8226E-13	1.5188E-13	1.3366E-13
1x10⁻⁶	2.43013E-11	1.71836E-11	2.30862E-11	2.1264E-11	1.8226E-11	1.5188E-11	1.3366E-11
1x10⁻⁵	2.43013E-09	1.71836E-09	2.30862E-09	2.1264E-09	1.8226E-09	1.5188E-09	1.3366E-09
1x10⁻⁴	2.43013E-07	1.71836E-07	2.30862E-07	2.1264E-07	1.8226E-07	1.5188E-07	1.3366E-07
1x10⁻³	2.43013E-05	1.71836E-05	2.30862E-05	2.1264E-05	1.8226E-05	1.5188E-05	1.3366E-05
1x10⁻²	0.002430126	0.001718187	0.002308586	0.00212629	0.00182248	0.0015187	0.00133644

Anexo 4 “Adimensionalización de componentes del tensor de esfuerzos”

Se utilizó para adimensionalizar los componentes del tensor de esfuerzos:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi ; \frac{y}{H_0} = \eta ; \frac{x}{L} = \xi ; \frac{H_0^2 \tau_{ij}}{\eta_0 UL} = \sigma_{ij}; \quad Ws = \frac{\theta_R U}{H_0}$$

Componentes del tensor con modelo asociado a una derivada convectiva corrotacional:

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{du_x}{dy}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.1})$$

Se despeja τ_{xy} de la variable adimensional:

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.2})$$

Se sustituye en Ec. A 5.1:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.3})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.4})$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0 d\varphi}{L d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.5})$$

para τ_{xx} se tiene que:

$$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy} \right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.6})$$

Se despeja τ_{xx} de la variable adimensional:

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.7})$$

Se sustituye en Ec. A 5.6:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{\theta_R \eta_0 \left(\frac{H_0 d\varphi}{L d\eta} \right)^2}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.8})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{W_S \eta_0 \frac{U}{H_0} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.9})$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{W_S \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.10})$$

Se demostró anteriormente que para está derivada el τ_{yy} es:

$$\tau_{yy} = -\tau_{xx} \quad (\text{Ec. A 5.11})$$

Por lo que $\sigma_{yy} = -\sigma_{xx}$, quedando entonces que:

$$\sigma_{\eta\eta} = -\frac{W_S \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.12})$$

Finalmente la diferencia de esfuerzos normales adimensionales es:

$$N'_1 = 2W_S \frac{H_0}{L} \frac{\left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2}{1 + W_S^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2} \quad (\text{Ec. A 5.13})$$

Componentes del tensor de esfuerzos con modelo asociado a una derivada convectiva codeformacional:

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\tau_{xy} = \eta_0 \frac{du_x}{dy} \quad (\text{Ec. A 5.14})$$

Se despeja τ_{xy} de la variable adimensional:

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.15})$$

Se sustituye en Ec. A 5.14:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec. A 5.16})$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{H_0}{L} \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (\text{Ec. A 5.17})$$

Para τ_{xx} se tiene que:

$$\tau_{xx} = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.18})$$

Se despeja τ_{xx} de la variable adimensional:

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.19})$$

Se sustituye en Ec. A 5.18:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = 2\theta_R \eta_0 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.20})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = 2Ws \eta_0 \frac{U}{H_0} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.21})$$

$$\sigma_{\xi\xi} = 2Ws \frac{U}{H_0} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.22})$$

El τ_{yy} se sabe que es para este modelo:

$$\tau_{yy} = 0 \quad (\text{Ec. A 5.23})$$

Por lo que $\sigma_{\eta\eta} = 0$, quedando entonces que:

$$\sigma_{\eta\eta} = 0 \quad (\text{Ec. A 5.24})$$

Finalmente la diferencia de esfuerzos normales adimensionales es:

$$N'_1 = 2Ws \frac{U}{H_0} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \quad (\text{Ec. A 5.25})$$

Se utilizó para adimensionalizar los tensores:

$$\frac{u_x}{U} = \varphi ; \frac{y}{H_0} = \eta ; \frac{x}{L} = \xi ; \frac{H_0^2 \tau_{ij}}{\eta_0 UL} = \sigma_{ij} ; Ws = \frac{\theta_R U}{H_0}$$

Componentes del tensor de esfuerzos con modelo asociado a una derivada convectiva configuracional:

$$\frac{du_x}{dy} = \frac{du_x}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} = U \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{1}{H_0} = \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 \frac{\partial u_x}{\partial y}}{\left[1 + \theta_R^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)\right]} \quad (\text{Ec. A 5.26})$$

Se despeja τ_{xy} de la variable adimensional:

$$\tau_{xy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.27})$$

Se sustituye en Ec. A 5.26:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.28})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\eta}}{H_0^2} = \frac{\eta_0 \frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.29})$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{\frac{H_0 d\varphi}{L d\eta}}{1 + Ws^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.30})$$

Para τ_{xx} se tiene que:

$$\tau_{xx} = \theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.31})$$

Se despeja τ_{xx} de la variable adimensional:

$$\tau_{xx} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.32})$$

Se sustituye en Ec. A 5.31:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{\theta_R \eta_0 \left(\frac{H_0 \partial \varphi}{L \partial \eta} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.33})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\xi\xi}}{H_0^2} = \frac{W_s \eta_0 \frac{U}{H_0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.34})$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2-\varepsilon)}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.35})$$

Para el τ_{yy} es:

$$\tau_{yy} = -\theta_R \eta_0 \frac{\left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 \varepsilon}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{du_x}{dy} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.36})$$

Se despeja τ_{yy} de la variable adimensional:

$$\tau_{yy} = \frac{\eta_0 UL \sigma_{\eta\eta}}{H_0^2} \quad (\text{Ec. A 5.37})$$

Se sustituye en Ec. A 5.31:

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\eta\eta}}{H_0^2} = -\frac{\theta_R \eta_0 \left(\frac{H_0 d\varphi}{L d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + \theta_R^2 \left(\frac{U}{H_0} \frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.38})$$

$$\frac{\eta_0 UL \sigma_{\eta\eta}}{H_0^2} = -\frac{W_s \eta_0 \frac{U}{H_0} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.39})$$

$$\sigma_{\eta\eta} = -\frac{W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.40})$$

Finalmente la diferencia de esfuerzos normales adimensionales es:

$$\Theta = \frac{2W_s \frac{H_0}{L} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 \varepsilon}{1 + W_s^2 \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 (2\varepsilon - \varepsilon^2)} \quad (\text{Ec. A 5.41})$$

Bibliografía

1. Middleman, S., (1978), "Fundamentals of Polymer Processing", McGraw-Hill, U.S.A.
2. Soria, L., (2013), Tesis : Recubrimiento de superficies con fluidos newtonianos y no newtonianos, UNAM, México.
3. Tadmor, Z., Gogos, G.C., (2006), "Principles of Polymer Processing", 2nd edition, Wiley-Interscience, U.S.A.
4. Bird, R. B., Stewart, W. E., & Lightfoot, E. N. (1976). Fenómenos de Transporte (1° ed.). Ciudad de México: Editorial Reverté.
5. Trim, Donald, (2011), Applied Partial Differential Equations.
6. McKinley, G.H., (2005), "Dimensionless Groups for Understanding Free Surface Flows of Complex Fluids", M.I.T., U.S.A.
7. Ashmore, J., Shen, A.Q., Kavhpour, H.P., Stone, H.A., McKinley, G.H., (2007), "Coating Flows of Non-Newtonian Fluids: Weakly and Strongly Elastic Limits".
8. Washo, B.D., (1976), "Rheology and Modeling of the Spin Coating Process", U.S.A.
9. Smith, J., (1985), "Ingeniería de la cinética química", Editorial Continental, 3a. edición, México.
10. Dae, H.C., (2007), "Rheology and Processing of Polymeric Materials", Vol. 1, Polymer Rheology, Oxford University Press, U.S.A.
11. Blank, W., Berndlmaier R., Miller, D., (2008), "Coating Rheology", King Industries.
12. Jiji, L., (2009), "Heat conduction", Third edition, Springer, U.S.A.
13. Bender, C., Orszag, S., (1987), "Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, U.S.A.
14. Alistair Harper, (s.f.), Notas Asymptotic Methods, sin pie de imprenta
15. Manero, O., (s.f.), Notas de Reología, sin pie de imprenta

16. Pekka, P.J., Karvinen, T., Karvinen R., (2009), "Methods to Analyze Problems in Coating Flows by Non-Newtonian Fluid Dynamics", Annual Transactions of the Nordic Rheology Society.
17. Kwon, H.S., Myeong, S.D., Yeon, P.H., Wook, J.H., Chun, H.J., (2007), "Effect of viscoelasticity on dynamics and stability in roll coatings", Francia.
18. Carreau, P.J., Lavoie, P-A., (1993), "Rheology of Coating Colours: a Rheologist Point of view", TAPPI Notes, Advanced Coating Fundamentals.
19. Castro, J., Cabrera, M., Mount, C., (2006), "Modelling and simulation in reactive polymer processing", Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, Volume 12, Number 3.
20. D.F. James, (January 2009), "Boger Fluids", Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 41: 129-142
21. J.G. Oldroyd, (1958), "Non Newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids", (Proc. R. Soc. A 245).