UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO
Doctorado en Ciencias Matemáticas

ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER CON DERIVADA FRACCIONÁRIA DE TIPO RIESZ SOBRE UNA SEMIRRECTA.

Tesis
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
LILIANA KATHERINE ESQUIVEL MORA

TUTORA
Dra. Elena Kaikina
Centro de Ciencias Matemáticas. UNAM

Morelia, Michoacán. 2 de Febrero de 2016.

A Victoria, Fabian, Rosalba y Juan Carlos.

Imposible ganar sin saber perder.
Imposible andar sin saber caer.
Imposible acertar sin saber errar.
Imposible vivir sin saber revivir.

MARIO BENEDETTI,

Agradecimientos.

Resumen

En la presente tesis consideramos el siguiente problema de valores iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u_t + iu_{xx} + i|u|^2u + |\partial_x|^{\frac{1}{2}}u = 0, \ t \geq 0, \ x \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ x > 0 \\ u_x(0,t) = h(t), \ t > 0. \end{cases}$$

donde $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$ es el operador módulo fraccionario definido por el potencial de Riesz modificado. Nosotros estudiamos la existencia local y global en tiempo de soluciones a este problema de valores iniciales, además de esto damos una solución asintótica del mismo. Los resultados de la presente tesis han sido publicados en [**22**]

Abstract

We consider the initial-boundary value problem for the modified Schrödinger equation, posed on positive half-line $x > 0$:

$$\begin{cases} u_t + iu_{xx} + i|u|^2u + |\partial_x|^{\frac{1}{2}}u = 0, \ t \geq 0, \ x \geq 0; \\ u(x,0) = u_0(x), \ \ x > 0 \\ u_x(0,t) = h(t), \ t > 0. \end{cases}$$

where $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$ is the module-fractional derivative operator defined by the modified Riesz Potential. We study the local and global existence in time of solutions to the initial-boundary value problem. These results can be found in [**22**]

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nosotros consideramos el siguiente problema de valores iniciales y de frontera (PVIF) para una clase de ecuaciones no lineales de Schrödinger fraccionarias (NLS) con no linealidad de tipo cúbico planteado sobre la semirrecta:

$$(0.1)\qquad \begin{cases} u_t + \alpha_1 i u_{xx} + \alpha_2 |\partial_x|^{\frac{1}{2}} u + \alpha_3 |u|^2 u = 0, t > 0, x > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u_x(0,t) = h(t), \end{cases}$$

donde $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. El operador derivada fraccionaria $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$ está definido por el operador de Riesz como sigue (ver [**60**] sec 12.)

$$|\partial_x|^{\frac{1}{2}} u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{sign\,(x-y)}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} u_y(y) dy.$$

Este tipo de ecuaciones ha asumido un importante papel, al modelar la dinámica anómala de numerosos procesos relacionados con los sistemas complejos, en muchas áreas de la ciencia y de la ingeniería. Se trata de aplicaciones donde el proceso es ordinario (es decir, sigue las leyes clásicas), pero el medio es complejo, no sólo por ser no-homogéneo en el sentido clásico, sino además porque el medio se descompone de modo más o menos aleatorio en componentes altamente heterogéneas con muy distinta escalabilidad. En la literatura física N. Laskin, en el 2002 [**47**], propuso

$$u_t + i|\partial_x|^\gamma u + |u|^2 u = 0, \quad \gamma > 0,$$

como una generalización de la ecuación de Schrodinger, la cual se obtiene mediante una aproximación a la integral de camino de Lévy siguiendo el método introducido por Feynman. Se trata de una formulación no relativística, equivalente a la ecuación de Schrödinger y a la mecánica matricial de Heisenberg, la cual permite abordar algunos problemas de forma más simple. Algunas aplicaciones físicas de la ecuación fraccionaria de Schrodinger están relacionadas con el espectro de la energía para un átomo fraccionario hidrogenoide y el espectro de un oscilador fraccionario en la aproximación semiclásica (ver [**29**], [**47**]).

El objetivo central de este trabajo es investigar la existencia de soluciones globales en tiempo, y analizar el comportamiento asintótico de las mismas, el cual se espera que sea uniforme para $(x,t) \in \mathbb{R}^{+2}$. Respondemos a la pregunta de cuánta influencia tiene el dato de frontera $h(t)$ sobre el comportamiento, en tiempos grandes, de la solución.

Observese que al considerar $\alpha_1 = 1 = \alpha_3, \alpha_2 = 0$, en (0.1), se obtiene la clásica NLS, la cual ha sido ampliamente estudiada cuando la variable espacial $x \in \mathbb{R}$. En este caso, para $u_0 \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R})$ se conocen resultados sobre la existencia y unicidad de soluciones tanto locales como globales en tiempo, ver [**9**], [**15**], [**16**] y referencias citadas en ellos.

Cuando ha sido planteada sobre un domínio con frontera menos estudios se han realizado, esto debido a la dificultad que genera la presencia del operador dispersivo $i\partial_{xx}$, pues en este caso la existencia de soluciones se garantiza mediante la aplicación de leyes de conservación. Algunos autores, considerando condiciones no homogéneas de tipo Dirichlet, han demostrado existencia local en algunos espacios de Sobolev, ver [**14**] y [**36**]. En [**65**], Q.Bu y W. Srauss muestran la existencia de soluciones globales en tiempo en el espacio de energía siempre que el dato inicial sea tomado en $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+)$ y el dato de frontera pertenezca a $\mathbf{C}^3(\mathbb{R}^+)$ con soporte compacto. Utilizando transformaciones de Bäcklund se estudia el problema de valores iniciales y de frontera para la NLS con dato de frontera de tipo Robin [**8**]. Para ciertos datos de frontera, ya seán homogéneos o aquellos llamados linealizables, A.Fokas en [**25**] establece la existencia de soluciones globales para la NLS.

R.Weder demostró en [**68**] que el problema de valores iniciales y de frontera para la NLS forzada con potencial sobre la semirrecta esta localmente bien planteada y bajo ciertas condiciones adicionales se obtiene el buen planteamiento global. En [**13**] se consideraron datos de frontera periódicos y se analizó el comportamiento asintótico en diferentes regiones.

Por su parte E.Kaikina en [**41**] introduce un método para estudiar PVIF en ecuaciones de tipo dispersivas, este se basa en el conocido método de factorización. Allí se demuestra la existencia global y expone el comportamiento asintótico de las soluciones cuando el dato de frontera no homogéneo ($h(t) \neq 0$) ha sido considerado de tipo Dirichlet ($u(0,t) = h(t)$), además se comprobó que en una dimensión se produce la dispersión de largo alcance (es decir, la dispersión a un perfil no lineal). Con base a éste método, E. Kaikina demuestra la existencia de soluciones globales cuando el dato de frontera es de tipo Neumann ($u_x(0,t) = h(t)$) [**42**] o de tipo Robin ($u(0,t) + \beta u_x(0,t) = h(t)$) [**43**].

Resultados relacionados con el problema de valores iniciales para la NLS fraccionaria ($\alpha_2 \neq 0$) que abordan la existencia de soluciones pequeñas, y en particular la cuestión de la dispersión modificada, pueden ser encontrados en [**20**], [**48**] y [**55**]. Por su parte A. Ionescu en [**37**] demostró que (0.1) con $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = i$ admite soluciones globales cuyo comportamiento asintótico esta completamente determinado por la nolinealidad.

La autora en [**21**], basandose en el método de la energía, demuestra la existencia de soluciones globales para el problema (0.1) al considerar $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ y un dato de frontera no homogéneo de tipo Dirichlet. Como continuación a este trabajo, se estudió el problema con dato de frontera de tipo Neumann $u_x(0,t) = h(t)$, en el cual hemos centrado esta tesis y para el cual obtuvimos el siguiente teorema.

TEOREMA 0.1. *(L. Esquivel, E. Kaikina) Para* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$*,* $u_0 \in \mathbf{Z} = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)$ *y* $h \in \mathbf{Y} = \mathbf{H}^{1,\beta}_{\infty}$*,* $\beta > \frac{1}{2}$ *con* $\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|h\|_{\mathbf{Y}} \leq \epsilon$*, donde* $\epsilon > 0$ *es suficientemente pequeño, existe una única solución global al problema* (0.1)

$$u \in \mathbf{C}\left([0,\infty) ; \mathbf{X} = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)\right).$$

Además la siguiente fórmula asintótica se satisface

$$u(x,t) = h(t)\mathcal{B}_c^*\left\{\frac{1}{K}\right\}(x) + At^{-2}\Lambda(xt^{-2}) + O(t^{-2-\gamma})\left(\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|u\|^3_{\mathbf{X}}\right) + O(t^{-\beta-\gamma})\|h\|_{\mathbf{Y}}, \tag{0.2}$$

con $\gamma > 0$*, uniformemente con respecto* $t \to \infty$*, donde* $K(z) = iz^2 + \sqrt{z}, z > 0$*,* $\Lambda \in \mathbf{L}^{\infty}$

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &:= \mathcal{F}_c\{e^{-\sqrt{z}}\} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{z}} \int_0^{\infty} e^{-pzs} \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}} - 1)((-ip)^{\frac{1}{2}} - 1)} dp\, dz, \\ A &:= \mathcal{B}_c\left(\int_0^{\infty} |u|^2 u(\tau) dt + u_0\right)\Bigg|_{p=0} + \theta(\beta)\left(\mathcal{L}h\right)(0) < \infty, \end{aligned}$$

siendo θ *la función característica del intervalo* $[1,\infty)$*,* $\mathcal{L}$ *el operador transformada de Laplace y* $\mathcal{F}_c$ *,* $\mathcal{B}_c^*$ *los operadores respectivamente definidos en* (4.6) *y* (4.7).

El trabajo desarrollado por N. Hayashi y E. Kaikina en [**34**] es el primer intento de desarrollar una teoría general para los problemas iniciales y de frontera para ecuaciones de evolución con operadores pseudodiferenciales planteados sobre la semirrecta o sobre un segmento, esto es problemas del tipo

$$u_t + \mathcal{N}u + \mathbb{K}u = 0,\ x \in (a,b),$$

con $a \geq 0$ y $b \in (0,\infty]$, donde el término no lineal $\mathcal{N}(u)$ depende de la función desconocida u y de sus derivadas, y $\mathbb{K}$ es el operador pseudodiferencial definido por

$$\mathbb{K}u = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\left(\lim_{\substack{z\to p \\ \mathrm{Re}z>0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} K(q)\widehat{u}(q,t)dq\right) dp, \tag{0.3}$$

donde la función $K : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, conocida como el símbolo del operador, ha sido considerada analítica en el semiplano derecho. Los resultados obtenidos en este libro pueden ser aplicados a PVIF con derivada fraccionaria de tipo Riemann–Liouville o de tipo Caputo.

Un método un tanto más general, basado en la teoría de Riemann-Hilbert, presentó E. Kaikina en [**39**] y [**40**] para el estudio de PVIF en donde el operador pseudodiferencial presente posee símbolo no analítico. Aplicando este método L. Esquivel en [**21**] establece la existencia global de soluciones para la ecuación de Schrödinger no lineal con derivada fraccionária dada por el potencial de Riesz con dato de frontera de tipo Dirichlet. Hasta donde se conoce el problema (0.1) no ha sido estudiando previamente. La meta principal de este trabajo es obtener una solución semiclásica para (0.1), pues las soluciones generalizadas no proporcionan características importantes del comportamiento de soluciones.

La dificultad de esto consiste no sólo en mostrar la existencia de soluciones globales, sino también se precisan un número adicional de estimativos a priori usualmente en los espacios $\mathbf{L}^{p,\mu}(\mathbb{R}^+)$ entre la solución obtenida y la solución aproximada. Lo interesante de estos problemas es analizar la influencia del dato de frontera sobre el comportamiento asintótico de la solución, lo cual genera grandes dificultades, como complicación adicional al problema de Neumann (0.1) es que el símbolo del operador $K(p) = \alpha_1 ip^2 + \alpha_2 |p|^{\frac{1}{2}}$ además de ser no analítico, lo cual impide la aplicación de la teoría de Laplace de forma directa, es una función no homogénea lo cual implica hacer distinción en su comportamiento para p grandes y pequeños. Para construir el operador de Green $\mathcal{G}(t)$ y el operador de frontera $\mathcal{H}(t)$ se ha utilizado el método de continuación analítica expuesto en [**39**], basado en la teoría de ecuaciones integro-diferenciales singulares con kernel de Hilbert y coeficientes discontinuos, se demuestra que se precisa un sólo dato de frontera para el buen planteamiento de (0.1).

Vía principio de Duhamel (ver Apéndice D) la solución a (0.1) satisface la siguiente ecuación integral

$$\mathcal{A}u = u,$$

siendo A el operador definido por

$$Au(x,t) := \mathcal{G}\,(t)\,u_0 + \mathcal{H}\,(t)\,h - \int_0^t \mathcal{G}\,(t-\tau)\,\mathcal{N}(u)(\tau)\; d\tau, \tag{0.4}$$

donde $\mathcal{N}(u) = |u|^2 u$. Con el fin de mostrar que este operador posee un punto fijo es indispensable analizar los efectos regularizantes de los operadores $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$, lo cual se obtiene via la factorización obtenida de $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$, en términos de la transformada coseno generalizada $\mathcal{B}_c$ y la transformada coseno generalizada inversa $\mathcal{B}_c^*$, (ver tabla de símbolos) como

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{B}_c^*\{e^{(iz^2-\sqrt{z})t}\mathcal{B}_c\phi\}, \quad \mathcal{H}(t)h = i\mathcal{B}_c^*\left\{e^{(iz^2-\sqrt{z})s} * h(s)\right\},$$

siedo $*$ el operador convolución. Esta factorización obtenida facilita las estimaciones para $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ en los espacios de Sobolev $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+)$ y $\mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)$. Este trabajo ha sido organizado de la siguiente forma:

: **Capítulo 1**: Se expone la teoría básica para el desarrollo de este trabajo. Se introducen los espacios de Lebesgue y de Sobolev, además de recordar desigualdades clásicas de la teoría de la medida y del análisis armónico como los son: la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Young y el Teorema de Plancherel. Se presentan conceptos y propiedades básicas de la teoría referente a la transformada de Laplace y a las integrales de Tipo Cauchy. Al final de este capítulo el lector encontrará una breve explicación sobre la derivada de tipo potencial de Riez, junto con la definición de lo que se denomina un problema de valores iniciales y de frontera bien planteado.

: **Capítulo 2**: Se presenta el método de continuación analítica, herramienta fundamental para el desarrollo de este trabajo.

: **Capítulo 3**: En este punto se deducen los operadores de Green $\mathcal{G}(t)$ y de Frontera $\mathcal{H}(t)$ para el problema (0.1), con $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, a partir del método presentado en el capítulo dos, para lo cual debido a la no analiticidad del símbolo $K(p) = ip^2+\sqrt{p}$ del operador pseudodiferencial presente en (0.1) se define la función conmutadora $Y(p,\xi)$, la cual se expresa en términos de una integral de tipo Cauchy, y hace que la función $p \to \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}$, sea analítica en el semiplano positivo. También se introducen los operadores $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}_c^*$ los cuales generalizan la clásica transformada de coseno F_c, y como punto central se expresan $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ en términos de estas transformadas.

: **Capítulo 4:** Este capítulo se centra en demostrar las afirmaciones hechas en el capítulo tres sobre la función conmutadora, así como en exhibir estimativos satisfechos por los operadores $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}_c^*$ en los espacios de Sobolev $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+)$ y $\mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)$, para lo cual se definen las trasformada seno generalizada $\mathcal{B}_s$ y seno generalizada inversa $\mathcal{B}_s^*$.

: **Capítulo 5:** Se demuestra el Teorema principal 0.1 mediante el uso de técnicas del análisis no lineal (estimaciones sobre la función de Green, teoremas del punto fijo, entre otras. [**33**]).

Aparte de la elaboración de esta tesis en el transcurso del doctorado he desarrollado los siguientes trabajos junto con mi asesora.
En [**21**], aplicando los resultados de la presente tesis demostramos la existencia de soluciones globales a (0.1) donde el dato de frontera se considera de tipo Dirichlet $u(x,0) = h(t)$, en este momento, utilizando que el operador de Green en este caso es factorizable en términos de las transformadas $\mathcal{B}_s$ y $\mathcal{B}_s^*$, estamos trabajando en la expansión asintótica de la solución obtenida en [**21**].
En este momento estamos analizando qué sucede cuando la condición de frontera es de tipo mixto $u(0,t) + \beta u_x(0,t) = h(t)$, hemos obtenido que el operador de Green en este caso se factoriza como

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{D}\mathcal{B}_c^* \left\{ e^{K(p)t} \frac{(p\mathcal{B}_s + \beta K(p)\mathcal{B}_c)\phi}{p^2 + \beta^2 K(p)} \right\},$$

con $K(p) = ip^2 - \sqrt{p}$, $\mathcal{D} = \partial_x + \beta\partial_t$.

Además de esto para la ecuación de olas capilares planteada sobre la semirrecta:

$$\begin{cases} iu_t + |u|^2 u + |\partial_x u|^{\frac{3}{2}} = 0. \; x > 0, t > 0. \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_x(0,t) = h(t), \end{cases}$$

la cual es de tipo dispersivo, se encuentra en revisión un resultado que hemos obtenido en relación a la existencia de soluciones globales y el análisis de su comportamiento asintótico.

Como observación final, creemos los métodos de solución que aquí se exponen son aplicables para el estudio de una amplia clase de ecuaciones disipativas y dispersivas no lineales con derivada fraccionaria planteada sobre la semirecta.

NOTACIÓN

Re z	Parte real del número complejo z.
Im z	Parte imaginaria del número complejo z.
i$\mathbb{R}$	Eje imaginário.
$\mathbf{C}^k[E, F]$	Espacio de funciones k veces diferenciables del espacio topológico E al espacio topológico F.
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier (ver página 17).
$\mathcal{F}^{-1}$	Transformada de Fourier inversa (ver página 17).
$\mathcal{F}_c$	Transformada coseno (ver página 84).
$\mathcal{F}_s$	Transformada seno (ver página 84).
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace, (ver página 21).
$\mathcal{L}_{x \to p}$	Transformada de Laplace con respecto a la variable x.
$\mathcal{L}_{t \to \xi}$	Transformada de Laplace con respecto a la variable t.
$\mathcal{B}_c$	Transformada coseno generalizada (ver Sección 2 capítulo 4.)
$\mathcal{B}_c^*$	Transformada coseno inversa generalizada (ver Sección 2 capítulo 4.)
$S(\mathbb{R}^+)$	Espacio de Schwartz, espacio de funciones rápidamente decrecientes, (ver página 18)

$S'(\mathbb{R}^+)$	Espacio de Distribuciones, esto es el dual topológico de $S(\mathbb{R})$. (ver página 18)
$\mathbf{L}^{p,\mu}(\mathbb{R}^+)$	Espacio de funciones medibles p integrables con respecto a la medida $(1+\lvert x\rvert^{\mu})dx$ (ver página 19).
$\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+)$	Espacio de Banach de elementos $u \in S'(\mathbb{R}^+)$ tal que $u, u' \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$ (ver página 19).
$\mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)$	Espacio de Banach de elementos $u \in S'(\mathbb{R})$ tal que $u \in \mathbf{L}^{2,1}(\mathbb{R}^+)$ (ver página 19).
$\mathbf{H}^{1,\beta}_{\infty}(\mathbb{R}^+)$	Espacio de Banach de elementos $u \in S'(\mathbb{R})$ tal que $u, u' \in \mathbf{L}^{\infty,\beta}(\mathbb{R}^+)$ (ver página 19).

Capítulo 1

PRELIMINARES

A lo largo de esta tesis para todo $x \in \mathbb{R}$ se denota por $\langle x \rangle = 1 + x$, $\{x\} = \frac{x}{\langle x \rangle}$. La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ está definida como

$$\mathcal{F}u(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ipx} u(x) dx,$$

y la transformada inversa de Fourier $\overline{\mathcal{F}}$ viene dada por

$$\overline{\mathcal{F}}v(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi ipx} v(x) dx.$$

Se dice que la función f es infinitesimal con respecto a la función g en un punto $x_0 \in [-\infty, \infty]$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

en este caso se escribe $f = o(g)$. Por otra parte se dice que las funciones f, g son asintóticamente iguales en una vecindad de x_0 y se denota por $f \sim g$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Finalmente, se escribe $f = O(g)$ cuando $x \to x_0$ si existe una constante $C > 0$ tal que la desigualdad $|f(x)| < C|g(x)|$ se satisface en una vecindad de x_0.

En particular, una función es $o(1)$ o $O(1)$ si esta tiende a cero o está acotada respectivamente.

1. Espacios Funcionales

"A Paul Dirac quien vio que debía ser verdad,
a Laurent Schwartz quien lo demostró,
y a George Templo que mostró lo fácil que podría hacerse"

Lighthill [**49**]

Diferentes espacios funcionales serán utilizados a lo largo del presente trabajo. Para definir estos espacios es necesario considerar el espacio de medida $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}, \mathfrak{m})$, donde $\mathcal{B}$ representa la σ-álgebra de Borel y $\mathfrak{m}$ es la medida de Lebesgue.
Los espacios de Sobolev y la diferenciabilidad en $\mathbf{L}^2$ son herramientas fundamentales en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales parciales. Se enlistarán algunos hechos básicos de esta teoría junto con algunas propiedades de los operadores pseudodiferenciales, que serán de gran utilidad en el análisis del comportamiento de las soluciones al problema no lineal (0.1).

1.1. Conceptos Básicos. Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ se dice que es rápidamente decreciente si para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ existe $C = C(f) > 0$ tal que

$$|x^n D^m f(x)| \leq C, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^+,$$

siendo D el operador diferencial. El espacio de todas las funciones rápidamente decrecientes denotado por $S(\mathbb{R}^+)$ se conoce como **espacio de Schwartz,** el cual es un espacio vectorial topológico con la topología inducida por la familia de seminormas $\|\cdot\|_{n,m}$, siendo

$$\|f\|_{n,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n D^m f(x)|\,.$$

Cualquier funcional lineal continuo definido sobre $S(\mathbb{R}^+)$ se llama una distribución temperada o distribución de crecimiento lento, el espacio de estos funcionales se denota por $S'(\mathbb{R}^+)$. (ver [**12**], [**19**], [**49**]).

DEFINICIÓN 1.1 (Espacios de Lebesgue $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$). *Para* $1 \leq p \leq \infty$ *el espacio de Lebesgue* $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$ *es*

$$\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^+) : \|f\|_{\mathbf{L}^p} < \infty \right\},$$

siendo

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < \infty$ *y*

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty} = \sup_{x \geq 0} |f(x)|,$$

para $p = \infty$.

DEFINICIÓN 1.2 (Espacios de Lebesgue con peso $\mathbf{L}^{p,a}(\mathbb{R}^+)$). *Para* $a \in \mathbb{R}$ *y* $1 \leq p \leq \infty$ *el espacios de Lebesgue con peso es*

$$\mathbf{L}^{p,a}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^+) : \|f\|_{p,a} < \infty \right\},$$

siendo su norma

$$\|f\|_{\mathbf{L}^{p,a}} = \|\langle x \rangle^a f\|_{\mathbf{L}^p}.$$

Para más detalles sobre estos espacios puede consultar: Brezis [**11**], [**12**], Cazenave [**15**] y Triebel [**66**].

DEFINICIÓN 1.3 (Espacio de Sobolev $\mathbf{H}^s$). *Dado* $s \in \mathbb{R}$*, el espacio de Sobolev de orden* s *denotado por* $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^+)$ *es*

$$\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^+) : \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \right\|_{\mathbf{L}^2} < \infty \right\},$$

siendo $\hat{f}$ *la transformada de Fourier de* f.

Es claro que $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^+)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido por

$$\langle u, v \rangle = \int_0^\infty u(x)v(x)dx,$$

se sigue para $k \in \mathbf{Z}$, $k > 0$ via teorema de Plancherel (teorema 1.3) que

$$\mathbf{H}^k(\mathbb{R}^+) = \{ f \in S'(\mathbb{R}^+) : D^m f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+) \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, m \leq k \}.$$

De forma general, se define

$$\mathbf{H}_p^s(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^+) : \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \right] \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+) \right\},$$

para $1 \leq p \leq \infty$ y $s \in \mathbb{R}$, por tanto $\mathbf{H}_p^s(\mathbb{R}^+)$ es un espacio de Banach con la norma definida por $\|f\|_{\mathbf{H}_p^s} = \|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}]\|_{\mathbf{L}^p}$.
Observaciones:

(1) $\mathbf{H}_2^s(\mathbb{R}^+) = \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^+)$ y $\mathbf{H}_p^0(\mathbb{R}^+) = \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$.
(2) Teorema de embebimiento de Sóbolev: $\mathbf{H}_p^{s_1}(\mathbb{R}^+) \subset \mathbf{H}^{s_2}(\mathbb{R}^+)$ si $s_1 \geq s_2$.

De forma análoga se define el espacio de Sobolev con peso

$$\mathbf{H}_p^{s,m}(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^+) : \mathcal{F}^{-1}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \right] \in \mathbf{L}^{p,m}(\mathbb{R}^+) \right\},$$

donde $\hat{f}$ representa la transformada de Fourier de f.

Para profundizar en el estudio de los espacios de Sobolev puede consultar Adams [**1**], Bergh and Löfström [**6**], Gilbarg and Trudinger [**27**]. Teoría acerca de espacios de Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$ puede ser encontrada en Brezis [**10**], Cazenave y Haux [**15**], J.-L Lions [**50**], Lions and Magenes [**51**].

1.2. Desigualdades Importantes. Las siguientes desigualdades serán de uso frecuente en los estimativos a priori realizados para el operador de Green y de frontera.

TEOREMA 1.1 (Desigualdad de Hölder). *Para $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$ y $g \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^+)$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados, esto es $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, se tiene que $fq \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)$ y la desigualdad de Hölder*

$$\|fg\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

se satisface.

Para funciones medibles f, g en $\mathbb{R}^+$ su convolución es una función $f * g$ definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(x-y) g(y) dy.$$

En el siguiente teorema se expone una propiedad de esta función convolución.

TEOREMA 1.2 (Desigualdad de Young). *Sean* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tales que* $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. *Si* $f \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$ *y* $g \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^+)$ *entonces* $f * g$ *existe en casi todo punto* $x \in \mathbb{R}^+$ *y se satisface*

$$\|f * g\|_{\mathbf{L}^r} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^p} \|g\|_{\mathbf{L}^q}.$$

El teorema de Plancherel, es un clásico resultado del análisis armónico, demostrado por Michel Plancherel en 1910. Establece que una función y su transformada de Fourier poseen igual norma en el espacio $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$.

TEOREMA 1.3 (Teorema de Plancherel). *La transformada de Fourier* $\mathcal{F} : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+) \to \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^+)$ *es una isometría.*

Su demostración puede ser consultada en [**45**] sec VI.

2. Transformada de Laplace

En la presente sección se presenta la teoría relacionada con la transformada de Laplace, herramienta bastante útil para el estudio de las ecuaciones diferenciales tanto ordinárias como parciales. Esta teoría es bastante ámplia, por tanto aquí se expondrán únicamente los resultados que se precisan en la presente tesis, algunos de los cuales no son demostrados, la prueba de estos puede ser encontrada en [**34**].

Se dice que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pertenece a la clase de funciones $\mathfrak{E}_a$, si $f(t) \equiv 0$ para $t < 0$ y la función $t \to e^{-p_0 t} f(t)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^+$, para $\text{Re}(p_0) = a$.

DEFINICIÓN 1.4 (**Transformada de Laplace**). *El operador transformada de Laplace aplicado en una función* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es una función que se denota por* $\mathcal{L}f$ *o* $\hat{f}$. *La cual está dada por medio de la integral impropia*

$$\hat{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt. \tag{1.1}$$

Como la anterior definición esta dada por una integral impropia es natural preguntarse por la convergencia de la integral en (1.1). La respuesta a esta pregunta se expone en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.4. *Para $f \in \mathfrak{E}_a$ la integral impropia* (1.1) *converge para* ***Re***$(p) > a$. *Además para cada $a_0 > a$ la función $\hat{f}$ definida en* (1.1) *converge uniformemente con respecto a* ***Re***$(p) \geq a_0 > a$.

DEMOSTRACIÓN. Considere

$$\phi(t) = e^{-p_0 t} f(t) \quad \text{y} \quad F(t) = -\int_t^{+\infty} \phi(\tau) d\tau,$$

de lo cual $F'(t) = \phi(t)$. Por hipótesis,

$$\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt < +\infty,$$

luego para todo $\epsilon > 0$ existe T_0, tal que $|F(t)| < \epsilon$, para $t \geq T_0$. Por otra parte para $T_2 > T_1$, se tiene que

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t) dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} \phi(t) dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t) dt.$$

Via integración por partes en la última integral se observa

$$\begin{aligned}\int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F'(t) dt &= e^{-(p-p_0)T_2} F(T_2) - e^{-(p-p_0)T_1} F(T_1) \\ &\quad + (p - p_0) \int_{T_1}^{T_2} e^{-(p-p_0)t} F(t) dt.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $T_1, T_2 > T_0$ y $\text{Re}(p - p_0) > 0$,

$$\begin{aligned}\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-pt} f(t) dt \right| &\leq \left(e^{-\text{Re}(p-p_0)T_2} + e^{-\text{Re}(p-p_0)T_1} \right) \epsilon + \epsilon |p - p_0| \int_{T_1}^{T_2} e^{-\text{Re}(p-p_0)t} dt \\ &\leq 2e^{-\text{Re}(p-p_0)T_0} \epsilon + \epsilon \frac{|p - p_0|}{\text{Re}(p - p_0)} \left(-e^{-\text{Re}(p-p_0)T_2} + e^{-\text{Re}(p-p_0)T_1} \right) \\ &\leq \left(2 + \frac{|p - p_0|}{\text{Re}(p - p_0)} \right) e^{-\text{Re}(p-p_0)T_0} \epsilon.\end{aligned}$$

Así, por el criterio de Cauchy sobre la convergencia de integrales impropias (ver Apéndice A), la integral $\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ es convergente para $\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(p_0) = a$. En la misma forma, es posible demostrar que $\int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt$ es uniformemente convergente para $\mathrm{Re}(p) \geq \mathrm{Re}(p_1) > \mathrm{Re}(p_0)$. ■

Observaciones:

(1) Se puede observar que en el caso en que $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)$ la función $\hat{f}(p)$ existe para p en el semiplano derecho.

(2) La transformada de Laplace es operador lineal continuo entre los espacios funcionales $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)$ y $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+)$.

(3) Cuando $|p| \to \infty$ se tiene que $|\hat{f}(p)| \to 0$.

TEOREMA 1.5. *El operador transformada de Laplace posee las siguientes propiedades:*

i) *Si la función $f \in \mathfrak{E}_a$, entonces su transformada de Laplace $\hat{f}$ es una función analítica en el domínio Re$(p) > a$.*

ii) *Suponga $f \in \mathbf{C}^n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ con $n \geq 1$, es tal que $f, D^k f \in \mathfrak{E}_a$ para todo $k \leq n$, entonces*

$$\widehat{D^n f} = p^n \left(\hat{p} - \sum_{k=1}^{n} [D^{k-1} f](0) p^{-k} \right).$$

DEMOSTRACIÓN. El teorema 1.4 implica que la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

converge para Re $(p) > a$. Note que la integral anterior puede ser reescrita en la forma

$$\widehat{f}(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(p),$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_i < t_{i+1} < \cdots < +\infty$. Tomando en cuenta que

$$\sum_{n=N}^{\infty} f_n(p) = \int_{t_N}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

se concluye que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(p)$ converge uniformemente en el dominio Re$(p) \geq x_0 > a$. Finalmente, como todas las funciones

$$f_n(p) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-pt} f(t) dt,$$

son analíticas, el teorema de Weierstrass (ver Apéndice B) implica que la función $\widehat{f}(p)$ es analítica en el dominio Re$(p) > a$.
El segundo estimativo se sigue vía un cálculo directo. ■

Suponga que $f, g \in \mathfrak{E}_a$ son funciones tales que $\hat{f}(p) = \hat{g}(p)$ para todo Re$(p) > a$, entonces estas funciones son iguales en casi todo punto, esto es, son iguales excepto en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Esta observación motiva a pensar bajo que condiciones se puede recuperar la función f a través de $\hat{f}$.

TEOREMA 1.6. *Si $f \in \mathfrak{E}_a$, entonces para $\sigma > a$ se tiene que*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{px} \hat{f}(p) dp, \quad \textit{en casi todo punto.} \tag{1.2}$$

La integral (1.2) es llamada la transformada inversa de Laplace o la integral de Mellin.

Ahora, se expondrán las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la transformada de Laplace inversa para la función $F(p)$.

DEMOSTRACIÓN. Considere $\phi(t) = e^{-\sigma t} f(t)$, $\sigma > a$. Esta función puede ser representada como una transformada de Fourier,

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(t-\theta)} \phi(\theta) d\theta.$$

Como $f(\theta) = 0$, para $\theta < 0$, se obtiene

$$e^{-\sigma t} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi t} d\xi \int_{0}^{+\infty} e^{-(\sigma + i\xi)\theta} f(\theta) d\theta.$$

Finalmente, tomando $p = \sigma + i\xi$ se sigue

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \widehat{f}(p) dp.$$

Así, el teorema 1.6 ha sido demostrado. ■

TEOREMA 1.7. *Para $f(x) \in \mathfrak{E}_a$, se tiene que la función $\mathcal{L}f = F$ cumple las siguientes condiciones:*

i) *F es una función holomorfa en el semiplano Re$(p) > a$.*

ii) *Para cada $\epsilon > 0$ y $\sigma_0 > a$ existen constantes no negativas $C = C_\epsilon(\sigma_0),\ m = m(\sigma_0)$ tales que*

$$|F(p)| \leq C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}(1 + |p|)^{-m}, \text{ para todo } \sigma_0 > \sigma.$$

iii) *Para cada $\sigma_0 > a$ se tiene $\|F(\sigma + i\cdot)\|_{\mathbf{L}^1} < \infty$.*

Además de esto, la función original $f(x)$ puede ser recuperada via $F(p)$ mediante la integral de Mellin:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{px}F(p)dp. \tag{1.3}$$

Por otra parte si F es una función que cumple las condiciones i) - iii) *la función f definida por* (1.3) *esta en $\mathfrak{E}_a$ y satisface que $\mathcal{L}f = F$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $f(t) \in \mathfrak{E}_a$, por el teorema 1.5 $F(p)$ es analítica para Re$(p) > a$ además de esto sobre este semiplano se satisface

$$F(p) = C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}\int_0^\infty e^{-(p-p_0)t}e^{-p_0t}f(t)dt,$$

de lo cual se concluye ii) y iii).
Para demostrar la segunda parte, primero supóngase que

$$|F(p)| \leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}}{|p-a|^\alpha}, \quad \alpha > 1. \tag{1.4}$$

Entonces, la integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)dp, \quad \sigma > a, \tag{1.5}$$

converge uniformemente con respecto a t y $f(t)$ es continua con respecto a $t \in (-\infty, \infty)$. Es preciso mostrar que $f(t)$ no depende de $\sigma > a$, para lo cual considere $\sigma_2 > \sigma_1 > a$. El teorema de Cauchy implica que

$$\int_{\Gamma(d)} e^{pt}F(p)dp = 0, \tag{1.6}$$

donde

$$\begin{aligned}\Gamma(d) &= \{p \in \mathbb{C} : p \in [\sigma_1 - id, \sigma_2 - id) \cup [\sigma_2 - id, \sigma_2 + id) \\ &\quad \cup [\sigma_2 + id, \sigma_1 + id) \cup [\sigma_1 + id, \sigma_1 - id)\}.\end{aligned}$$

De la desigualdad (1.4) se obtiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{\sigma_1+id}^{\sigma_2+id} e^{pt}F(p)dp\right| &\leq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{\sigma t}|F(\sigma + id)|d\sigma \\ &\leq C_\epsilon(\sigma_1)\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{e^{\sigma(\epsilon+t)}}{[(\sigma-a)^2 + d^2]^{\frac{\alpha}{2}}}d\sigma \to 0,\end{aligned}$$

cuando $d \to +\infty$. Entonces, tomando el límite $d \to +\infty$ en (1.6) se sigue

$$\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} e^{pt}F(p)dp = \int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty} e^{pt}F(p)dp.$$

Ahora, se reescribe (1.5) en la forma

$$f(t) = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iwt}F(\sigma + iw)dw, \quad \sigma > a. \tag{1.7}$$

Usando (1.4) y tomando $\sigma > \sigma_0 > a$, se obtiene

$$\begin{aligned}|f(t)| &\leq \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\sigma + iw)|dw \\ &\leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\sigma(t+\epsilon)}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{[(\sigma-a)^2 + w^2]^{\frac{\alpha}{2}}} \\ &\leq C_\epsilon(\sigma_0)e^{\sigma(t+\epsilon)}.\end{aligned}$$

Considere $t < -\epsilon$, $\epsilon > 0$. Tendiendo $\sigma \to +\infty$ se tiene $f(t) = 0$, y como $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que $f(t) = 0$ para todo $t < 0$. La ecuación (1.7) implica que

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t)dt.$$

Por lo tanto, $f(t) \in \mathfrak{E}_a$ y $\widehat{f}(p) = F(p)$, $\sigma > a$. Ahora, se demostrará para el caso general. Defínase

$$F_1(p) := \frac{F(p)}{|p-b|^k}$$

donde $b \leq a$, $\sigma_0 > a$ y el entero $k > m(\sigma_0) + 1$. Notemos que $F_1(p)$ es analítica para $\mathrm{Re}p = \sigma > a$ y

$$\begin{aligned} |F_1(p)| &\leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}(1+|p|^m)}{|p-a|^k} \\ &\leq \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}(1+|p|^m)}{|p-a|^{k-m}|p-a|^m} < \frac{C_\epsilon(\sigma_0)e^{\epsilon\sigma}}{|p-a|^{k-m}}, \end{aligned}$$

para todo $\sigma > \sigma_0$, siempre que $k-m > 1$. Por tanto existe una función $f_1(t) \in \mathfrak{E}_a$, tal que

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F_1(p)dp, \quad \sigma > \sigma_0. \tag{1.8}$$

Utilizando que $\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}|F(\sigma+iw)|dw < +\infty$, para $\sigma > a$, se infiere

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}-b\right)^k f_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{d}{dt}-b\right)^k \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F_1(p)dp \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\frac{d}{dt}-b\right)^k e^{pt}F_1(p)dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(p-b)^k e^{pt}F_1(p)dp \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)dp. \end{aligned}$$

De esto se concluye $f(t) \in \mathfrak{E}_a$ y $\widehat{f}(p) = F(p)$, cuando $\sigma > a$. Como

$$f(t) = \left(\frac{d}{dt}-b\right)^k f_1(t),$$

via (1.8) se tiene la representación (1.3). El teorema 1.7 ha sido demostrado.

■

3. Integrales de tipo Cauchy

En adelante considere Γ curva suave en $\mathbb{C}$, esto es es una curva cerrada simple de clase C^1 y sin puntos recurrentes (cúspides). El dominio dentro de la curva Γ se conoce como dominio interior y se denota mediante D^+, mientras que el dominio complementario a $D^+ \cup \Gamma$ se llama dominio exterior y se representa por D^- . La dirección positiva de la curva Γ es usualmente aquella para la cual D^+ está a la izquierda.

3.1. Integrales de tipo Cauchy. Dada f función continua sobre Γ se define su **integral de Cauchy** como la integral compleja sobre Γ con kernel de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{w-z},$$

esto es

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad z \notin \Gamma.$$

La función f es llamada la densidad de la integral de tipo Cauchy.

Se puede demostrar que F definida como antes, constituye una función analítica sobre $D^+ \cup D^-$. La demostración de esta analiticidad se basa en argumentar la posibilidad de derivar bajo el signo de la integral con respecto a la variable z.

Definiendo $F^\pm : D^\pm \cup \Gamma \to C$ por

$$F^\pm = F|_{D^\pm} \text{ y } F^\pm(p) = \lim_{\substack{z \to p \\ z \in D^\pm}} F(z), \tag{1.9}$$

se observa que estas funciones son analíticas en el interior de su domínio de definición y general una no es continuación analítica de la otra.

En general una función analítica g definida de forma independiente en dos domínios complementarios D_1, D_2 del plano complejo se denomina **seccionalmente analítica**. Así la integral de tipo Cauchy define una función seccionalmente analítica. Lo anterior se observa de forma más clara en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.1. Considerese $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, luego $D^+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, y $D^- = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Así para $f(w) = \frac{1}{w(w-3)}$, se observa

$$F(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{(w-3)(w-z)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{w(w-z)}dz\right],$$

aplicando el teorema de Cauchy se obtiene que

$$F^+(z) = \frac{1}{z-3} \quad \text{y} \quad F^-(z) = \frac{1}{z}.$$

3.2. Funciones Hölder continuas.

DEFINICIÓN 1.5 (Funciones Hölder continuas). *Se dice que una función f es Hölder continua o satisface la condición de Hölder sobre una curva suave Γ si para todo $p, q \in \Gamma$ se cumple que*

$$|f(p) - f(q)| \leq C|p-q|^\alpha,$$

con $C > 0$ y $\alpha \in (0,1)$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de este tipo de funciones.

EJEMPLO 1.2. Para $0 \leq \beta \leq 1$ la función $f(x) = x^\beta$ definida sobre el compacto $[0,1]$ es una función de tipo Hölder con exponente $\alpha \in (0,\beta]$ pero no lo es para $\alpha > \beta$. En caso de que el dominio de f sea la semirrecta $[0,\infty)$ esta función es Hölder continua de exponente $\alpha = \beta$.

EJEMPLO 1.3. La función de Cantor satisface la condición de Hölder para cualquier exponente $\alpha \leq \frac{\ln(2)}{\ln 3}$. (Ver [**61**] sec. 5.3).

EJEMPLO 1.4. Considere la función $f(x) = (\ln x)^{-1}$ para $0 < x \leq \frac{1}{2}$ y $f(0) = 0$. Se puede observar que f así definida es continua en su segmento de definición, aún más para cualquier $\alpha > 0$ se cumple

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0,$$

por lo tanto para cualquier $C > 0$ siempre es posible encontrar $x_0 = x_0(\alpha, C) \in (0, \frac{1}{2})$ tal que

$$|f(x_0) - f(0)| = |(\ln x_0)|^{-1} \geq C x_0^{\alpha},$$

de esto se concluye que f no es Hölder continua.

3.3. Fórmulas de Sokhotski-Plemelj. Considere Γ una curva suave en $\mathbb{C}$. Suponga que ϕ es una función integrable sobre Γ. Para $\epsilon > 0$ se denota $\Gamma_\epsilon = \{z \in \Gamma : |z - c| > \epsilon\}$, con $c \in \Gamma$. Si existe

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\phi(p)}{p - c} dp,$$

este valor se conoce como **valor principal de Cauchy** de la integral singular y se denota por

$$⨍_{\Gamma} \frac{\phi(p)}{p - c} dp.$$

Por ejemplo el valor principal de la integral

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c}, \quad a < c < b,$$

mediante la definición anterior esta dado por

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x - c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x - c} \right] = \ln \frac{b - c}{c - a}.$$

El siguiente teorema es debido a los matemáticos Julian Sokhotski y Josip Plemelj; Sokhotski lo demostró en 1868 y posteriormente Plemelj en 1908 lo utilizó como un ingrediente principal en su solución del problema de valores en la frontera de Riemann que será enunciado más adelante. La versión real de este teorema es frecuentemente utilizada en física.

TEOREMA 1.8 (Sokhotski-Plemelj). *Sea Γ una curva cerrada suave y f una función que satisface la condición de Hölder sobre Γ. Entonces, los valores* *límite de la integral de tipo Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

definidos en (1.9) *satisfacen*

$$F^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-t} dw, \quad t \in \Gamma.$$

siempre que t no coincida con los punto final o inicial de Γ, donde la integral singular

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-t} dw,$$

es entendida en sentido de valor principal.

Se observa que al restar y sumar las igualdades obtenidas para para $F^{\pm}$ en el teorema anterior, se llegan a las conocidas fórmulas de Plemelj-Sokhotski

$$\begin{aligned} F^{+}(t) - F^{-}(t) &= f(t), \\ F^{+}(t) + F^{-}(t) &= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-t} dw. \end{aligned} \tag{1.10}$$

La demostración a este teorema puede ser consultada en [**26**] capítulo I, sección 4.

3.4. Operador de proyección. Para una función ϕ Hölder continua sobre $i\mathbb{R}$ se define el operador de proyección $\mathbb{P}$ mediante la integral de Cauchy

$$\mathbb{P}\phi(z) = -\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{1}{p-z} \phi(p) dp, \quad \text{Re } z \neq 0. \tag{1.11}$$

Observese que al $\mathbb{P}$ estar definido por una integral de Cauchy la función $\mathbb{P}\phi(z)$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Los valores límite de esta función sobre el eje imaginario se definen por

$$\mathbb{P}^{+}\phi(p) = \lim_{\substack{z \to p \\ \text{Re}(z) < 0}} \mathbb{P}\phi(z), \quad \mathbb{P}^{-}\phi(p) = \lim_{\substack{z \to p \\ \text{Re}(z) > 0}} \mathbb{P}\phi(z).$$

Observaciones:

- Para la función $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, se denota por $\mathbb{P}_{p\to q}\{f(p,w)\}$ al operador de proyección actuando en la primera coordenada, esto es

$$\mathbb{P}_{p\to q}\{f(p,w)\} = -\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{1}{p-q} f(p,w)dp, \quad \text{Re } (q) \neq 0.$$

- En adelante, cuando una función F este definida mediante una integral de tipo Cauchy sobre el eje imaginário, así como (1.11), se denotan sus valores límite por F^+ y F^-, siendo

$$F^+(p) = \lim_{\substack{z\to p \\ \text{Re}(z)<0}} F(z), \quad F^-(p) = \lim_{\substack{z\to p \\ \text{Re}(z)>0}} F(z). \tag{1.12}$$

El siguiente Lema expone algunas propiedades de este operador.

LEMA 1.1. *Para ϕ como en la definición de $\mathbb{P}$, se cumple:*

(1) $\mathbb{P}^-\phi = \phi$ siempre que ϕ sea analítica en Re$(z) > 0$.
(2) Si ϕ es analítica en Re$(z) < 0$, entonces $\mathbb{P}^-\phi = 0$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de estos resultados se obtiene de forma directa vía teorema de Cauchy. ∎

Como ya se vio en la sección 2, la transformada de Laplace de una función $f \in \mathfrak{E}_0$, es analítica en el semiplano positivo, por tanto

$$\mathbb{P}\{\mathcal{L}f\} = \mathcal{L}f.$$

El problema que se esta estudiando, incluye el operador derivada fraccionaria $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$, siendo

$$|\partial_x|^{\frac{1}{2}} u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{sign\,(x-y)}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} u_y(y)dy, \tag{1.13}$$

es por esto que es natural preguntarse por el comportamiento de la transformada de Laplace de esta derivada fraccionaria. La relación entre estos dos operadores incluye al operador $\mathbb{P}$, esta relación se presenta en el siguiente Lema.

LEMA 1.2. *Considere* $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$ *el operador derivada fraccionaria de Riesz definido en* (1.13)*, entonces para cualquier* ϕ *en el dominio de* $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$*, se cumple*

$$\mathcal{L}\{|\partial_x|^{\frac{1}{2}}\phi\}(p) = \mathbb{P}\left\{\sqrt{|q|}\left(\hat{\phi}(q) - \frac{\phi(0)}{q}\right)\right\}(p), \;\; \textit{para } \textbf{\textit{Re}}(p) > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\partial_x\phi = \mathcal{L}_x^{-1}(q\widehat{\phi}(q) - \phi(0))$, de la definición de la derivada fraccionaria junto con el teorema de Fubini se obtiene

$$\begin{aligned}
|\partial_x|^{\frac{1}{2}}u &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\textbf{sign}(x-y)}{|x-y|}\int_{i\mathbb{R}} e^{qy}[q\widehat{\phi}(q) - \phi(0)]dq\;dy \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathbb{R}}[q\widehat{\phi}(q) - \phi(0)]\int_0^\infty e^{qy}\frac{\textbf{sign}(x-y)}{|x-y|}dy\;dq \\
&= \int_{i\mathbb{R}} e^{qx}|q|^{\frac{1}{2}}[\widehat{\phi}(q) - q^{-1}\phi(0)]dq,
\end{aligned}$$

puesto que (ver [**60**] sec 25.1):

$$\int_0^\infty e^{qy}\frac{\textbf{sign}(x-y)}{|x-y|}dy = \frac{e^{qx}}{\sqrt{|q|}}.$$

Así de la definición de transformada de Laplace y nuevamente aplicando teorema de Fubini se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x\left\{|\partial_x|^{\frac{1}{2}}\phi(p)\right\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{-px}\int_{i\mathbb{R}} e^{qx}|q|^{\frac{1}{2}}[\widehat{\phi}(q) - q^{-1}\phi(0)]dq\;dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}|q|^{\frac{1}{2}}[\widehat{\phi}(q) - q^{-1}\phi(0)]\int_0^{+\infty} e^{(q-p)x}dx\;dp \qquad (1.14) \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{p-q}|q|^{\frac{1}{2}}[\widehat{\phi}(q) - q^{-1}\phi(0)]dq.
\end{aligned}$$

Lo cual se deseaba demostrar. ■

De forma similar a como se demostró la igualdad anterior para $\alpha > 0$ se prueba que

$$\mathcal{L}_{x\to q}\{|\partial_x|^\alpha\} = \mathbb{P}_{p\to q}\left\{|p|^\alpha\left(\mathcal{L}_{x\to q}\{u\} - \sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}u(0,t)}{p^j}\right)\right\},$$

3.5. Índice de una función. Suponga que $G \in C(i\mathbb{R};\mathbb{C})$ tal que $G(z) \neq 0$ para todo $z \in i\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{|z|\to\infty} G(z) \in \mathbb{C}$. Entonces el índice κ en G con respecto a $i\mathbb{R}$ es la variación media de arg $G(z)$ mientras que z varía sobre $i\mathbb{R}$ en dirección positiva, el índice se puede expresar como:

$$\kappa := \textbf{ind}\ G = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\arg G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\ln G(z).$$

De la anterior definición se infieren las siguientes conclusiones:

: Al ser $G(z)$ continua, se deduce que el incremento de su argumento es un múltiplo de 2π, por tanto el índice κ es un número entero.

: El índice de un producto de funciones es la suma de los índices, además el índice de un cociente es la resta de los cocientes, esto es

$$\text{Ind }(G_1G_2) = \text{Ind }(G_1) + \text{Ind }(G_2), \quad \text{Ind }\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = \text{Ind }(G_1) - \text{Ind }(G_2).$$

: Si la función G es complejo diferenciable en $i\mathbb{R}$, entonces

$$\textbf{ind}\ G = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} d\ln G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{G'(t)}{G(t)}dt.$$

: En caso de que la función G sea analítica en alguno de los dos semiplanos se concluye por el principio del argumento que

$$\text{Ind } G = C_{\pm}(n(0) - n(\infty)),$$

donde $n(0)$ es el número de zeros y $n(\infty)$ el número de polos de G, los cuales han sido contados con sus respectivas multiplicidades, y la constante $C_{\pm}$ será 1 en caso de que sea analítica en el semiplano izquierdo y en caso contrario -1.

3.6. Problema de valores en la frontera de Riemann. Para G, g funciones Hölder continuas sobre $i\mathbb{R}$ con $G(w) \neq 0$, este problema consiste en encontrar funciones analíticas ψ^+ en el semiplano izquierdo y ψ^- en el semiplano derecho tal que

$$\psi^+(w) = G(w)\psi^-(w) + g(w), \quad w \in i\mathbb{R}. \tag{1.15}$$

La función G es llamada el coeficiente del problema de Riemann y la función g el término libre.

Considérese el problema homogeneo

$$\psi^+(w) = G(w)\psi^-(w), \quad w \in \Gamma. \tag{1.16}$$

En dado caso de que existan funciones ψ^+, ψ^- que solucionen el problema (1.16), aplicando propiedades de índice de una función, se tendría

$$\text{Ind }(\psi^+) = \text{Ind } G + \text{Ind }(\psi^-),$$

si n^+, n^- son los ceros de las funciones $\psi^+,\ \psi^-$ en los semiplanos izquierdo y derecho respectivamente, de las propiedades enunciadas anteriormente sobre el índice se infiere

$$n^+ + n^- = \text{Ind } G, \tag{1.17}$$

De lo cual se sigue que el problema (1.16) no tiene solución para Ind $G < 0$. Cuando Ind $G = 0$, lo referente a la solución del problema (1.16) se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.9 (Índice Cero). *Considere G una función Hölder continua sobre el eje imaginario, tal que Ind $G = 0$. Entonces, existe una única función seccionalmente analítica X salvo constantes sobre **Re**$(z) \neq 0$ tales que*

$$G(w) = \frac{X^+(w)}{X^-(w)}, \ \textit{ para todo } w \in i\mathbb{R}. \tag{1.18}$$

Además de esto la función X está definida por

$$X(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{i\mathbb{R}} \frac{\ln G(q)}{q-z}dq\right], \ \ \boldsymbol{Re}(z) \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. El hecho de que Ind $G = 0$ implica que la "función" $\ln G(z)$ es univaluada, de esta forma resolver (1.18) es equivalente a encontrar una función γ tal que

$$\gamma^+(w) = \ln G(w) + \gamma^-(w), \ \text{ para todo } w \in \mathbb{R}. \tag{1.19}$$

Via las fórmulas de Sokhotski-Plemelj (1.10) se sabe que γ definida como

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{\ln G(q)}{q-z} dq,$$

satisface (1.19), de lo cual se concluye que la función seccionalmente analítica $X(z) = e^{\gamma(z)}$ soluciona (1.18). ■

La existencia de la solución a este problema en el caso general se expresa en el siguiente resultado

TEOREMA 1.10. *Considere Γ curva cerrada en $\mathbb{C}$, tal que $0 \in$ int Γ. Para $0 < \kappa$ el indicie de G con respecto a Γ, el problema de valores en la frontera de Riemann homogeneo* (1.16)*, tiene $\kappa + 1$ soluciones linealmente independientes dadas por*

$$\begin{aligned}
\psi_k^+(z) &= z^k e^{\gamma(z)}, \quad z \in D^+, \\
\psi_k^-(z) &= z^{k-\kappa} e^{\gamma(z)}, \quad z \in D^+, \\
\gamma &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\ln[w^{-\kappa} G(w)]}{w-z} dw,
\end{aligned}$$

para cada $0 \leq k \leq \kappa$. La solución general esta dada por combinaciones lineales de $\psi_k^\pm$.

DEMOSTRACIÓN. A lo largo de esta demostración se denota por $\hat{\mathbb{C}}$ a la completación por un punto de $\mathbb{C}$. Como $0 \in \text{int}\, \Gamma$, la función $w \to w^{-\kappa}$ tiene índice $-\kappa$, además esta función es continua en Γ y analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\Gamma \cup \text{int}\, \Gamma)$, en base a esta función se reescribe el problema (1.16) como

$$\phi^+(w) = w^\kappa [w^{-\kappa} G(w)] \phi^-(w). \tag{1.20}$$

Por otra parte

$$\text{Ind}\, (w^{-\kappa} G(w)) = \text{Ind}\, (w^{-\kappa}) + \text{Ind}\, G(w) = 0,$$

luego, por el teorema del índice cero la función

$$\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\ln \omega^{-\kappa} G(w)}{w-z} dw,$$

satisface

$$e^{\gamma^+(z)} = z^{-\kappa} G(z) e^{\gamma^-(z)}.$$

Denotando por $X^+(z) := e^{\gamma^+(z)}, X^-(z) := z^{-\kappa} e^{\gamma^-(z)}$, se observa que estas no se anulan en $\operatorname{int}\Gamma$, $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\Gamma \cup \operatorname{int}\Gamma)$ respectivamente, así (1.20) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\phi^+(z)}{X^+(z)} &= \frac{z^\kappa [z^{-\kappa} G(z)] \phi^-(z)}{X^+(z)} = \frac{z^\kappa [z^{-\kappa} G(z)] \phi^-(z)}{z^{-\kappa} G(z) e^{\gamma^-(z)}} \\
&= \frac{z^\kappa \phi^-(z)}{e^{\gamma^-(z)}} = \frac{\phi^-(z)}{X^-(z)} \qquad \text{sobre } \Gamma.
\end{aligned}$$

Esta igualdad implica que las funciones $\frac{\phi^+(z)}{X^+(z)}$, $\frac{\phi^-(z)}{X^-(z)}$ son continuación analítica la una de la otra, esto es la función h definida como

$$h(z) := \begin{cases} \frac{\phi^+(z)}{X^+(z)} & \text{si } z \in D^+ \cup \Gamma, \\ \frac{\phi^-(z)}{X^-(z)} & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es entera y posee un polo de órden a lo más κ en el infinito, luego el teorema de Liouville h es un polinomio de grado menor o igual que κ, esto es $h(z) = \sum_{k=0}^{\kappa} a_k z^k$ con $a_k \in \mathbb{C}$ para todo k, de esta forma

$$\begin{aligned}
\phi^+(z) &= h(z) X^+(z) = \sum_{k=0}^{\kappa} a_k z^k e^{\gamma^+(z)}, \\
\phi^-(z) &= h(z) X^-(z) = \sum_{k=0}^{\kappa} a_k z^{k-\kappa} e^{\gamma^+(z)}.
\end{aligned}$$

Se sabe que el infinito es un cero de X^- y un polo de h, siendo en ambos casos de orden κ, por tanto ϕ^- no se indetermina en el infinito, de lo cual se concluye que ϕ^- es analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus (\Gamma \cup \operatorname{int}\Gamma)$, y como ϕ^+ es holomorfa en $\operatorname{int}\Gamma$, se concluye que las funciones ϕ^-, ϕ^+ son soluciones del problema de Riemann. ■

La función seccionalmente analítica X que se introdujo en el teorema anterior se conoce como la función **canónica**, la cual será muy importante para resolver el problema no homogeneo (1.15):

$$\psi^+(w) \;\; = \;\; G(w)\psi^-(w) + g(w), \quad w \in \Gamma.$$

Dividiendo la anterior igualdad por X^+ y recordando la igualdad (1.18), se obtiene

$$\frac{\psi^+}{X^+} \;\; = \;\; \frac{\psi^-}{X^-} + \frac{g}{X^+}, \tag{1.21}$$

como X^+ y g cumplen la condición de continuidad de Hölder sobre Γ con exponente α se tiene que $\frac{g}{X^+}$ también la cumple, por tanto (1.21) es equivalente a considerar

$$\mu^+(z) = \mu^-(z) + \frac{g}{X^+}(z), \text{ sobre } \Gamma, \tag{1.22}$$

el cual, via las fórmulas de Sokhotski-Plemelj, tiene una solución dada por

$$\mu(z) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(w)}{X^+(w)(w-z)} dw, \quad z \notin \Gamma,$$

restando (1.21) y (1.22) se obtiene

$$\frac{\psi^+}{X^+} - \mu^+ = \frac{\psi^-}{X^-} - \mu^- \text{ en } \Gamma.$$

Observese que la función $\frac{\psi}{X} - \mu$ es analítica en $\mathbb{C}$, por tanto $\psi := X\mu \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, es una función entera, de su comportamiento en ∞ se deduce

: Si $\kappa \geq 0$, la función X tiene un cero en ∞ y por definición de solución μ es analítica en $\hat{\mathbb{C}}$, por tanto los valores límites de la función ψ dan una solución para (1.15).

: Por otra parte si $\kappa < 0$, la función X tiene un polo de este orden en infinito, así que para la regularidad de la función ψ, es necesario y suficiente que en este punto la función μ^- tenga un cero de orden κ. Por expansión en serie de Laurent cerca de ∞, podemos expresar la función μ así

$$\begin{aligned}\mu(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)(w-z)}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)}\frac{dw}{z(1-\frac{w}{z})}\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)}\sum_{m=0}^{\infty}w^m z^{-m-1}dw = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)}\sum_{k=1}^{\infty}w^{k-1}z^{-k}dw\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)}w^{k-1}z^{-k}dw = \sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{-k},\end{aligned}$$

con $c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)}w^{k-1}dw,$ para $1 \leq k$. Como se desea que el cero de μ en ∞ sea de orden exactamente κ se precisa que

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{g(w)}{X^+(w)}w^{k-1}dw = 0, \quad 1 \leq k \leq -\kappa - 1,$$

éstas se conocen como las condiciones de solubilidad sobre la función g.

Las anteriores observaciones se compactan en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.11. *Considere el problema de valores en la frontera de Riemann no homogeneo* (1.15) *y denote por* $\kappa := Ind(G)$.

- *Si* $\kappa \geq 0$*, la solución al problema* (1.15) *esta dada por*

$$\psi(z) := X(z)[\mu(z) + P_\kappa(z)],$$

  donde P_κ *es un polinomio de orden menor o igual que* κ.
- *Para* $\kappa \leq 0$ *el problema de valores en la frontera de Riemann tiene solución si y sólo si se satisfacen las condiciones de solubilidad, y en este caso la solución es*

$$\psi(z) := X(z)\mu(z).$$

3.7. Teorema de Rouche. Este teorema es usualmente utilizado para simplificar el problema de localizar los ceros de una función, pues garantiza que la cantidad de ceros de una función analítica sobre un domínio acotado no cambia bajo pequeños cambios en la función, en otras palabras, el número de ceros de una función analítica es constante bajo pequeñas perturbaciones.

TEOREMA 1.12. *Considere un domínio D con frontera suave, f y h funciones analíticas en $D \cup \partial D$. Si $|f(z) + h(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \partial D$ entonces f y h tienen igual número de ceros en D contando multiplicidades.*

DEMOSTRACIÓN. Como $|f(z) + h(z)| < |f(z)|$ en ∂D, entonces f no se anula en la frontera de D. Definiendo $g = h/f$, se observa que esta función meromorfa cumple

$$|1 + g(z)| < 1 \ \ z \in \partial D,$$

de lo cual se infiere $g(z) \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^+ \cup \{0\})$ y por tanto la variación de la función $z \to \arg g(z)$ a lo largo de ∂D es cero, esto es

$$\int_{\partial D} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0. \tag{1.23}$$

De la definición de g se sabe

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)},$$

combindando esto con el principio del argumento y la igualdad (1.23) se concluye el resultado.

■

4. Problema de valores en la frontera sobre una semirrecta.

Considere el siguiente problema de valores iniciales sobre el eje real positivo para una ecuación nolineal

$$\begin{cases} u_t + \mathbb{N}(u) + \mathbb{K}(u) = f, \ x > 0, \ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x > 0, \\ \partial_x^{j-1} u(0, t) = h_j(t), \ j = 1, 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{1.24}$$

donde el término nolineal $\mathbb{N}(u)$ depende de la función desconocida $u(x,t)$ y sus derivadas, $\mathbb{K}$ es un operador pseudodiferencial sobre la semirrecta de los reales positivos. La cantidad N de datos de frontera que se necesitan incluir en el problema (1.24), para su buen planteamiento, depende escencialmente de las propiedades del operador $\mathbb{K}$. Para un espacio de Banach B se denota

$$\mathbf{C}^k([0,T],\mathbf{B}) = \left\{ f(t) \in \mathbf{B} : \lim_{t_1 \to t, t_1 \in [0,T]} \left\| \partial_t^k f(t_1) - \partial_t^k f(t) \right\|_{\mathbf{B}} = 0, \forall t \in [0,T] \right\}.$$

Sobre este tipo de espacios funcionales se define el buen planteamiento del problema (1.24) como sigue.

DEFINICIÓN 1.6. *El problema* (1.24) *se dice que esta **localmente bien planteado** en un sentido semiclásico si las siguientes dos propiedades son satisfechas.*

(1) Para ciertos espacios funcionales $\mathbf{M}_1$*,* $\mathbf{M}_2$*, los cuales son de Banach, existe una única solución* $[u(t)](x) = u(x,t)$ *en el espacio métrico*

$$\mathbf{C}^0([0,T],\mathbf{M}_1) \cap \mathbf{C}^1((0,T],\mathbf{M}_2),$$

la cual satisface la ecuación $u_t + \mathbb{N}(u) + \mathcal{K}(u) = f$ *en un sentido generalizado (ver Apéndice C), y las condiciones iniciales y de frontera son satisfechas en un sentido clásico*

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = u_0(x) \ \textit{ en } \mathbf{M}_1,$$

$$\lim_{x \to 0} \partial_x^{j-1} u(x,t) = h_j(t) \ \textit{ en } \mathbf{C}^0([0,T]) \ \textit{para todo } j = 1,2,\ldots,N.$$

(2) Si la solución u *depende continuamente del dato inicial* $u_0(x)$*, del dato de frontera* $h_j(t)$ *y de la fuente* $f(x,t)$*.*

La función $u(x,t)$ *será llamada solución semiclásica. En caso de que* $T = +\infty$ *se dice que* $u(x,t)$ *es una solución semiclásica global.*

5. Derivadas fraccionarias de tipo potencial de Riesz

Esta sección ha sido tomada del Libro de Samko, Kibas, Marichev.[1] **[60]**

Para $\varphi(x) \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)$ y $\alpha > 0$, los operadores I^α_{0+} y I^α_- definidos mediante

$$
\begin{aligned}
I^\alpha_{0+}\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy, \\
I^\alpha_{-}\varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \frac{\varphi(y)}{(y-x)^{1-\alpha}} dy.
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

se conocen como integral fraccionaria izquierda de tipo Riemann-Liouville e integral fraccionaria derecha de tipo Liouville respectivamente.

La primera inquietud que surge es acerca de la buena definición de estos operadores, pues están definidos mediante integrales impropias. El siguiente teorema da una respuesta a esta pregunta, y aún mas, muestra como actua sobre los espacios de Lebesgue $\mathbf{L}^p$, para $1 \leq p \leq \infty$.

TEOREMA 1.13. *Para $1 \leq p, \ q \leq \infty$ y $\alpha > 0$, los operadores I^α_{0+}, I^α_- son acotados de $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$ a $\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^+)$ si y sólo si $0 < \alpha < 1$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ y $q = \frac{p}{(1-\alpha p)}$.*

El teorema 1.13 fue demostrado originalmente por Hardy y Littlewood [**32**]. Una demostración aún mas conocida y un poco mas sencilla, en el sentido de que se basa en las desigualdades de Hölder y de Minkowsky, fue presentada por Solonnikov en [**63**].

5.1. Potencial de Riesz sobre el eje real. Considere la integral

$$
I^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(y)}{|y-x|^{1-\alpha}} dy, \ \mathbf{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \dots \tag{1.26}
$$

[1]Esta sección, sólo se ha considerado una pequeña parte de la teoría de derivada fraccionaria para funciones definidas sobre el eje real positivo, la cual es necesaria para el desarrollo de la presente tesis. El cálculo fraccionario es una rama del análisis ampliamente estudiada, en donde se interconectan diferentes tópicos, tales como teoría de funciones, análisis armónico, ecuaciones integrales y diferenciales, entre otras. Si el lector desea una exposición con mas detalle de esta teoría se recomienda consultar [**60**].

La integral I^α es llamada *Potencial de Riesz*. Se realiza la siguiente modificación

$$H^\alpha\varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\mathbf{sen}(\alpha\pi/2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{sign}(x-y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\varphi(y)dy,\ \mathbf{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \dots \tag{1.27}$$

Denotese por

Directamente de la definición se tiene que

$$\begin{aligned} I^\alpha &= [2\cos(\alpha\pi/2)]^{-1}(I_+^\alpha + I_-^\alpha),\\ H^\alpha &= [2\mathbf{sen}(\alpha\pi/2)]^{-1}(I_+^\alpha - I_-^\alpha). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Para $0 < \mathbf{Re}(\alpha) < 1$, estos operadores estan definidos sobre $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$ con $1 \leq p < \frac{1}{\mathbf{Re}(\alpha)}$, además son operadores acotados de $\mathbf{L}^p$ a $\mathbf{L}^q$ con $q = p(1 - p\mathbf{Re}(\alpha))^{-1}$. Defínase

$$S\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt.$$

TEOREMA 1.14. *Los operadores I^α y H^α estan conectados por las relaciones*

$$I^\alpha\varphi = SH^\alpha\varphi, \tag{1.29}$$

$$H^\alpha\varphi = -SI^\alpha\varphi, \tag{1.30}$$

donde $0 < Re(\alpha) < 1, \varphi \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \frac{1}{Re(\alpha)}$.

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente demostrar que (1.30) se cumple, pues las ecuaciones (1.29) y (1.30) son equivalentes via la propiedad del operador S:

$$S^2\varphi = -\varphi.$$

Los operadores I_+^α y I_-^α satisfacen las siguientes igualdades

$$I_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi I_+^\alpha\varphi + \mathbf{sen}\alpha\pi SI_+^\alpha\varphi,\ 1 \leq p < \frac{1}{\alpha},$$

$$I_-^\alpha\varphi = \cos\alpha\pi I_+^\alpha\varphi - \mathbf{sen}\alpha\pi SI_+^\alpha\varphi,\ 1 \leq p < \frac{1}{\alpha},$$

Restando estas dos ecuaciones se infiere (1.30). ■

En el siguiente corolario se enuncian las propiedades de semigrupo que satisfacen los operadores I y H.

COROLARIO 1.1. *Para* $0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1$, *con* $\alpha + \beta < 1$ *se cumplen:*

$$\begin{aligned} I^{\alpha} I^{\beta} &= I^{\alpha+\beta}, \\ H^{\alpha} H^{\beta} &= -I^{\alpha+\beta}, \\ I^{\alpha} H^{\beta} &= H^{\alpha+\beta}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

DEMOSTRACIÓN. Estas igualdades se infieren de forma directa de las propiedades de semigrupo que satisfacen los operadores $I^{\alpha}_{+},\ I^{\alpha}_{-}$, junto con las relaciones entre estos operadores expresadas en (1.28) ■

Estos operadores satisfacen también algunas propiedades en relación con el operador transformada de Fourier.

LEMA 1.3. *Considere* $0 < \alpha < 1$ *y* $\varphi \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$\begin{aligned} (\mathcal{F} I^{\alpha} \varphi)(x) &= |x|^{-\alpha} \hat{\varphi}(x), \\ (\mathcal{F} H^{\alpha} \varphi)(x) &= i\textbf{\textit{sign}}\ x |x|^{-\alpha} \hat{\varphi}(x). \end{aligned} \tag{1.32}$$

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración se sigue directamente de la relación entre la transformada de Fourier y los operadores integral fraccionaria, la cual viene dada por

$$(\mathcal{F} I^{\alpha}_{\pm} \varphi)(x) = \frac{\hat{\varphi}(x)}{(\mp ix)^{\alpha}},$$

en este caso se entiende $(\mp ix)^{\alpha} = |x|^{\alpha} e^{\mp \frac{\alpha \pi i}{2} \operatorname{sign} x}$. ■

5.2. Potencial de Riesz sobre la semirecta. Potenciales (1.26) y (1.27) pueden ser considerados sobre el eje real como

$$I^{\alpha}\varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(y)}{|y-x|^{1-\alpha}} dy,\ \mathbf{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \ldots \tag{1.33}$$

$$H^{\alpha}\varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\mathbf{sen}(\alpha\pi/2)} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{sign}(x-y)}{|x-y|^{1-\alpha}} \varphi(y) dy,\ \mathbf{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \ldots \tag{1.34}$$

En este caso estos operadores satisfacen las siguientes relaciones:

$$I^\alpha \varphi = H^\alpha S_{(1+\alpha)/2} \varphi = S_{-(1+\alpha)/2} H^\alpha \varphi,$$

y

$$H^\alpha \varphi = -I^\alpha S_{\alpha/2} \varphi = -S_{-\alpha/2} I^\alpha \varphi,$$

donde

$$S_\gamma \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^\gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-x}, \quad x > 0.$$

Los operadores anteriormente definidos pueden ser descompuestos en términos de los operadores fraccionários, la cual se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.15. *Considere* $0 < \alpha < 1$ *y* $\varphi(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$ *con* $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} I^\alpha \varphi &= I_-^{\frac{\alpha}{2}} I_+^{\frac{\alpha}{2}} \varphi, \\ H^\alpha \varphi &= I_-^{\frac{\alpha-1}{2}} I_+^{\frac{\alpha+1}{2}} \varphi, \end{aligned} \tag{1.35}$$

y de forma general

$$\begin{aligned} I_-^\alpha I_+^\beta \varphi &= \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \pi I^{\alpha+\beta} \varphi + \textit{sen} \frac{\beta-\alpha}{2} \pi H^{\alpha+\beta} \varphi \\ &= \frac{\textit{sen}\alpha\pi}{\textit{sen}(\alpha+\beta)\pi} I^{\alpha+\beta} \varphi + \frac{\textit{sen}\beta\pi}{\textit{sen}(\alpha+\beta)\pi} I^{\alpha+\beta} \varphi, \end{aligned}$$

es válida para $\varphi \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha+\beta}$, $\alpha + \beta < 1$.

DEMOSTRACIÓN. Esta demostración puede ser encontrada en [**60**] ■

5.3. Derivada de Riesz fraccionaria. Para $\alpha > 0$, la derivada de Riesz fraccionaria D^α esta dada en forma de una integral hipersingular definida por

$$(\mathbf{D}^\alpha f)(x) := \frac{1}{d(l,\alpha)} \int_{\mathbf{R}} \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}} dt, \quad l > \alpha. \tag{1.36}$$

Siendo $(\Delta_t^l f)(x)$:

$$(\Delta_t^l f)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} f(x - kt),$$

donde $x, t \in \mathbf{R}$, mientras que $d(l, \alpha)$ es una constante definida por

$$d(l,\alpha) = \frac{2^{-\alpha}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \frac{A_l(\alpha)}{\text{sen}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)},$$

con

$$A_l(\alpha) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} \begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix} k^{\alpha}.$$

Note que la integral hipersingular $(\mathbf{D}^{\alpha} f)(x)$ no depende de la selección de l, ($l > \alpha$). Tal construcción es llamada *la derivada fraccionaria de Riesz* de orden $\alpha > 0$ en el sentido de que

$$(\mathcal{F}\mathbf{D}^{\alpha} y)(x) = |x|^{\alpha}(\mathcal{F}y)(x), \quad y > 0, \tag{1.37}$$

para cierta clase de funciones $f(x)$. En particular, ésta relación es válida para funciones f en el espacio de Lizorkin

$$\Phi = \left\{ \phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) : \int_{\mathbf{R}} t\varphi(t)dt = 0, \quad k \in \mathbf{N} \right\},$$

siendo S el espacio de funciones rápidamente decrecientes. La equación (1.37) también se cumple para funciones diferenciables $f(x)$. La siguiente propiedad se cumple (véase Samko et al. [**60**], Lema 25.3)

PROPOSICIÓN 1.1. *Si $f(x)$ pertenece al espacio $C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, entonces la transformada de Fourier de $(\mathbf{D}^{\alpha} f)(x)$ esta dada por*

$$(\mathcal{F}\mathbf{D}^{\alpha} f)(x) = |x|^{\alpha}(\mathcal{F}f)(x), \quad y > 0, \tag{1.38}$$

Las condiciones para la existencia de $(\mathbf{D}^{\alpha} f)(x)$ están dadas por el siguiente lema (véase Samko et al. [**60**], sección 26.2)

LEMA 1.4. *Considere $\alpha > 0$, denote por $[\alpha]$ la parte entera de α. Para una función $f(x)$, la cual es acotada junto con todas sus derivadas $(\mathbf{D}^{k} y)(x)$, $|k| = [\alpha] + 1$, se cumple que la integral hipersingular $(\mathbf{D}^{\alpha} f)(x)$ en (1.36) es absolutamente convergente. Si $l > 2[\alpha/2]$, entonces ésta integral es sólo condicionalmente convergente.*

La derivada fraccionaria de Riesz (1.36) es un operador inverso al potencial de Riesz (1.26).

PROPOSICIÓN 1.2. *La fórmula*

$$\mathbf{D}^{\alpha} I^{\alpha} f = f, \quad \alpha > 0, \tag{1.39}$$

se cumple para funciones f suficientemente buenas*; en particular, para* $f \in \Phi$.

Además, la inversión (1.39) también se cumple para el potencial de Riesz (1.26) en el contexto de espacios $\mathbf{L}^p$: $f(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$ para $1 \leq p < n/\alpha$. Aquí, la derivada fraccionaria de Riesz $\mathbf{D}^{\alpha}$ se entiende de forma condicionalmente convergente en el siguiente sentido

$$\mathbf{D}^{\alpha} f = \lim_{\epsilon \to 0+} \mathbf{D}^{\alpha}_{\epsilon} f, \tag{1.40}$$

donde $(\mathbf{D}^{\alpha}_{\epsilon} f)$ es la *integral hipersingular truncada* definida por

$$(\mathbf{D}^{\alpha}_{\epsilon} f)(x) := \frac{1}{d_n(l,\alpha)} \int_{|t|>\epsilon} \frac{(\Delta^l_t y)(x)}{|t|^{n+\alpha}} dt, \quad l > \alpha;\ \alpha, \epsilon > 0, \tag{1.41}$$

y el límite se toma en la norma del espacio $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$.

El siguiente resultado se cumple (ver Samko et al. [**60**], teorema 26.3).

TEOREMA 1.16. *Para* $0 < \alpha < n$ *y* $g = I^{\alpha} f$ *con* $f(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$*,* $1 \leq p < n/\alpha$*, se cumple*

$$f(x) = (\mathbf{D}^{\alpha} g)(x), \tag{1.42}$$

donde $(\mathbf{D}^{\alpha} g)(x)$ *se entiende en el sentido* (1.40)*, con el límite tomado en la norma del espacio* $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$.

COROLARIO 1.2. *Si* $0 < \alpha < n$ *y* $f(x) \in \mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$*,* $1 \leq p < n/\alpha$*, entonces*

$$f(x) = (\mathbf{D}^{\alpha} I^{\alpha} f)(x),$$

donde $(\mathbf{D}^{\alpha} I^{\alpha} f)(x)$ *se entiende en el sentido de* (1.40)*, y*

$$(\mathbf{D}^{\alpha} I^{\alpha} f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0+} (\mathbf{D}^{\alpha}_{\epsilon} I^{\alpha} f)(x),$$

con el límite tomado en la norma del espacio $\mathbf{L}^p(\mathbf{R}^n)$.

Capítulo 2

MÉTODO DE CONTINUACIÓN ANALÍTICA

Este capítulo ha sido tomado del artículo [**39**].

Considere el problema de valores iniciales y de frontera planteado sobre la semirrecta para una ecuación de evolución con derivada fraccionaria de tipo Riesz:

$$
\left\{
\begin{array}{c}
(\partial_t + |\partial_x|^\alpha)u = f(x,t),\ t>0,\ x>0\\
u(x,0) = u_0(x),\ x>0,\\
\partial_x^j u(0,t) = h_j(t),\ t>0,\ j=0,\ldots,[\alpha]+1-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]
\end{array}
\right. \tag{2.1}
$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Z}$ y la derivada fraccionaria $|\partial_x|^\alpha$ planteada sobre la semirrecta esta definida por medio de potenciál de Riesz como

$$|\partial_x|^\alpha u = \mathcal{R}^{1-\alpha+[\alpha]}\partial_x^{[\alpha]+1}u,$$

siendo $[\alpha]$ la parte entera de α y

$$\mathcal{R}^\alpha u = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\mathbf{sen}(\frac{\pi}{2})\alpha}\int\limits_0^\infty \frac{\mathbf{sign}(x-y)}{|x-y|^{1-\alpha}}u(y)dy.$$

Existen diferentes definiciones de una derivada fraccionaria de orden $a>0$ (para más detalles consultar [**44**], [**46**], [**60**]). Las derivadas fraccionarias comunmente utilizadas son las de tipo Riemann-Liouville $D^\alpha f$ y las de tipo Caputo $D_*^\alpha f$. Cada definición utiliza integración fraccionaria de Riemann-Liouville y derivada de orden entero. Para $\alpha \in (0,1)$, las definiciones de estas derivadas en términos de la transformada de Laplace están dadas por

$$D^\alpha f := \mathcal{L}^{-1}\left(p^\alpha \hat{f}(p)\right),$$

$$D_*^\alpha f := \mathcal{L}^{-1}\left(p^\alpha\left(\hat{f}(p) - \frac{f(0)}{p}\right)\right).$$

De aquí en adelante p^α esta definida sobre la ráma principal, esto es haciendo un corte en el eje real negativo. En base a esta observación se infiere que las derivadas fraccionarias de Riemann-Liouville y de Caputo tienen igual símbolo p^α el cual es analítico en el semiplano derecho. Por el contrario la derivada $|\partial_x|^\alpha$ satisface

$$D_*^\alpha f = \theta(x)\mathcal{L}^{-1}\left(|p|^\alpha\left(\hat{f}(p) - \frac{f(0)}{p}\right)\right),$$

siendo θ la función escalón de Heaviside. En este caso el símbolo de este operador pseudodiferencial $|p|^\alpha$ es no analítico. Recientemente, este tipo de símbolos no analíticos han aparecido para describir diferentes modelos físicos, por ejemplo la nolocalidad de la dinámica de las ondas acústicas de iones en plasma con amortiguamiento de Landau.

Para construir el operador de Green asociado al problema (2.1), se propone un nuevo método basado en la representación integral de funciones seccionalmente analíticas y la teoría de ecuaciones integro-diferenciales singulares con un núcleo de tipo Hilbert y coeficientes discontinuos. El método aquí expuesto puede ser aplicado al estudio de diferentes problemas de valores iniciales y de frontera. El siguiente teorema expone el resultado principal concerniente a la existencia de soluciones al problema lineal (2.1).

TEOREMA 2.1. *Considere*

$$u_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+), f \in \mathbf{L}^q([0,T];\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)), h_j \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^+), \quad j = 1,\ldots,N,$$

con $q > 2$. *Entonces el problema* (2.1) *esta bien planteado en*

$$\mathbf{C}^0([0,T], \mathbf{H}_2^N \cap C^N) \cap C^0((0,T], \mathbf{H}_2^{[\alpha]} \cap C^{[\alpha]}).$$

Además la solución a (2.1) *tiene la siguiente fórmula integral*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^\infty G(x,y,t)u_0(y)dy + \int_0^t \int_0^\infty G(x,y,t-\tau)f(y,\tau)dy\, d\tau \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \int_0^t h_j(\tau) \lim_{p\to 0} \partial_p^{j-1} |\partial_x^\alpha| \widehat{G}(x,p,t-\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

1. Método de Solución: Teorema de Unicidad

En esta sección se expondrá de forma detallada el método de continuación analítica para demostrar la existencia de soluciones y además de esto se probará la unicidad de la solución.

A lo largo de esta sección se denotará $M := \left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$, $N := [\alpha] + 1 - \left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$

$$K(q) = |q|^\alpha, \quad K_1(q) = e^{Mi\pi} q^\alpha.$$

Por $k_j(\xi) = K_1^{-1}(-\xi)$ se representan las M funciones inversas de $K_1(p)$ ubicadas en el semiplano derecho, esto es $k_j(\xi) = \left(-\xi e^{-i\pi M} e^{i\pi(2j-1)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\mathrm{Re}(k_j(\xi)) > 0$ con $j = 1, \cdots, M$. En base a estas funciones se define la función seccionalmente analítica

$$Y(z,\xi) = e^{\Gamma(z,\xi)}, \ \Gamma(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z} \ln \left(\frac{K(q)+\xi}{K_1(q)+\xi} \prod_{j=1}^M \frac{(p-k_j)}{(p+k_j)} \frac{w^-}{w^+} \right) dq,$$

con $w^{\mp}(z) = z^\mu \prod_{j=1}^M \frac{1}{(p \pm k_j)^\mu}$, siendo $\mu = \frac{\alpha}{2M} - \left[\frac{\alpha}{2M}\right]$. Defínase

$$\mathcal{G}(t)\phi := \int_0^\infty G(x,y,t)\phi(y)dy,$$

donde la función $G(x,y,t)$, definida sobre $x>0,\ y>0,\ t>0$, esta dada por la fórmula

(2.3)

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y)}\frac{1}{K(p)+\xi}dp \\ &-\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}\xi^{\frac{N+j}{\alpha}-1}\theta_j(\xi,y)\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{1}{K(p)+\xi}\frac{K(p)}{p^{N+j}}dp\,d\xi \\ &+\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}I^{+}(p,\xi,y)dp\,d\xi, \end{aligned}$$

siendo $I^{+}(p,\xi,y)$ el valor límite desde el semiplano izquierdo, de la función

(2.4)

$$I(z,\xi,y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\frac{1}{Y^{+}(q,\xi)}\frac{K_1(q)-K(q)}{K_1(q)+\xi}\left(e^{-qy}-\sum_{j=1}^{M}\xi^{\frac{N+j}{\alpha}}\frac{\theta_j(\xi,y)}{p^{N+j}}\right)dq.$$

$$\theta_j(\xi,y)=\left(\mathbb{B}^{-1}\begin{pmatrix} e^{-k_1(\xi)y}\\ \vdots \\ e^{-k_M(\xi)y}\end{pmatrix}\right)_j,$$

donde la matriz $\mathbb{B}=\left(\|c_{kj}\|_M^M\right)$ con $c_{kj}=\left(-e^{Mi\pi}\right)^{\frac{N+j}{\alpha}}e^{-i\frac{2\pi}{\alpha}k(N+j)}$. Todas las integrales son entendidas en sentido de valor principal. Se demostrará que el número de datos de frontera que se necesitan dar para el buen planteamiento del problema (2.1) es $N=[\alpha]+1-\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$.

DEFINICIÓN 2.1. *Se denota por* $\mathcal{J}(p,t)$ *la función " entrada" del problema* (2.1)*, la cual esta dada por*

$$\mathcal{J}(p,t)=\widehat{u}_0(p)+\int_0^t e^{K_1(p)\tau}\left(\widehat{f}(p,\tau)+K_1(p)\sum_{r=1}^{N}h_r(\tau)p^{-r}\right)d\tau.$$

La matriz $A(\xi) = (a_{rj}(\xi))_{1\leq r,j\leq M}$ con elementos $a_{rj}(\xi) = -\xi k_r^{-N-j}(\xi)$, define el operador

$$\mathbb{A}\vec{\mathcal{J}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t} A^{-1}\vec{\mathcal{J}} d\xi,$$

donde A^{-1} representa la matriz inversa de A, cuya existencia se garantiza en la demostración del siguiente teorema, y el vector " entrada" esta dado por $\vec{\mathcal{J}} = -(\mathcal{J}(k_1,\infty), \mathcal{J}(k_2,\infty), \ldots, \mathcal{J}(k_M,\infty))^T$. La norma a utilizar es

$$\|\mathbb{A}\vec{\mathcal{J}}\| = \sum_{j=1}^{m}\left|(\mathbb{A}\vec{\mathcal{J}})_j\right|.$$

TEOREMA 2.2 (Teorema de Unicidad). *Considere*

$$u_0 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+), f \in \mathbf{L}^q([0,T];\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)), h_j \in \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^+)\cap\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^+), \quad j = 1,\ldots,N,$$

con $q > 2$*. Si existe una solución* $u(x,t)$ *al problema* (2.1) *en*

$$\mathbf{C}^0([0,T],\mathbf{H}_2^N \cap C^N) \cap C^0((0,T],\mathbf{H}_2^{[\alpha]} \cap C^{[\alpha]}),$$

ésta es única.

DEMOSTRACIÓN. Para derivar una representación integral de las soluciones al problema (2.1), se supondrá que existe una solución $u(x,t)$ a (2.1) la cual se anula fuera de $x > 0$, esto es:

$$u(x,t) = 0 \text{ para todo } x < 0.$$

Para evitar confusiones, el operador $\mathcal{L}_{x\to q}$ denota la transformada de Laplace con respecto a la variable espacial, mientras $\mathcal{L}_{t\to\xi}$ es la transformada de Laplace con respecto a t.
Como (ver Lema 1.2)

$$\mathcal{L}_{x\to q}\{|\partial_x|^\alpha\} = \mathbb{P}_{p\to q}\left\{|p|^\alpha\left(\mathcal{L}_{x\to q}\{u\} - \sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}u(0,t)}{p^j}\right)\right\},$$

donde $\mathbb{P}$ es el operador de proyección definido en (1.11), recordando $\mathcal{L}_{x\to q}u$ es una función analítica en el semiplano derecho, se tiene

$$\hat{u}(q,t) = \mathcal{L}_{x\to q}\{u\} = \mathbb{P}_{p\to q}\{\hat{u}(p,t)\}.$$

Aplicando transformada de Laplace con respecto a la variable espacial al problema (2.1), y utilizando las igualdades anteriores se obtiene para $t > 0$

$$\begin{cases} \mathbb{P}^{-}_{p\to q}\left\{\hat{u}_t + K(p)\hat{u} - K(p)\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}u(0,t)}{p^j} - \hat{f}(p,t)\right\} = 0 \\ \hat{u}(p,0) = \hat{u}_0(p), \end{cases} \tag{2.5}$$

donde $K(p) = |p|^{\alpha}$. El problema (2.5) es equivalente a considerar

$$\begin{cases} \hat{u}_t + K(p)\hat{u} - K(p)\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}u(0,t)}{p^j} - \hat{f}(p,t) = \Phi(p,t) \\ \hat{u}(p,0) = \hat{u}_0(p), \end{cases} \tag{2.6}$$

para alguna función $\Phi(p,t)$ analítica en el semiplano izquierdo, esto es $\mathbb{P}^{-}_{p\to q}\{\Phi(p,t)\} = 0$, tal que para $|p| > 1$ se cumple

$$|\Phi(p,t)| \leq C\frac{1}{|p|^{\alpha-[\alpha]}}.$$

Aplicando transformada de Laplace con respecto al tiempo al problema (2.6), se obtiene

$$\widehat{\hat{u}}(p,\xi) = \frac{1}{K(p)+\xi}\left(\widehat{u}_0(p) + \widehat{\hat{f}}(p,\xi) + K(p)\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}\hat{u}(0,t)}{p^j} + \widehat{\Phi}(p,\xi)\right), \tag{2.7}$$

donde $\widehat{\hat{u}}(p,\xi) = \mathcal{L}_{t\to\xi}\{\hat{u}(p,t)\}$ y las funciones $\widehat{\Phi}(p,\xi),\ \partial_x^{j-1}\widehat{u}(0,\xi),\ j = 1,...,[\alpha]+1$ son las transformadas de Laplace de $\Phi(p,t),\ \partial_x^{j-1}u(0,\xi)$ con respecto al tiempo, respectivamente. Utilizando las propiedades analíticas de la función $\hat{\hat{u}}$ en el semiplano positivo se encontrará la función $\Phi(p,\xi)$. Observese que para $\text{Re}(p) = 0$ se tiene

$$\widehat{\hat{u}}(p,\xi) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-p}\hat{\hat{u}}(q,\xi)dq.$$

Combinando esto con las fórmulas de Sokhotzki-Plemelj se demuestra que

$$\Theta^{+}(p,\xi) = -\Lambda^{+}(p,\xi), \tag{2.8}$$

donde las funciones seccionalmente analíticas $\Theta(z,\xi)$ y $\Lambda(z,\xi)$ están dadas por las integrales de tipo Cauchy

$$\Theta(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{1}{K(q)+\xi}\Phi(q,\xi)dq, \tag{2.9}$$

y

$$\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{1}{K(q)+\xi}\left(u_0(p) + f(p,\xi) + K(p)\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}.\frac{\partial_x^{j-1}\hat{u}(0,t)}{p^j}\right). \tag{2.10}$$

Para transformar la condición (2.8) en un problema nohomogéneo de Riemann, se introduce la función seccionalmente analítica

$$\Omega(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{K(q)}{K(q)+\xi}\Phi(q,\xi)dq \tag{2.11}$$

Como $\mathbb{P}^{-}\Phi = 0$, se tiene via las fórmulas de Sokhotzki- Plemelj que los valores límte de $\Omega(z,\xi)$ y $\Theta(z,\xi)$ satisfacen

$$\Omega^{-}(p,\xi) = -\xi\Theta^{-}(p,\xi). \tag{2.12}$$

Observese de (2.9) y (2.10), junto con las fórmulas de Sokhotzki-Plemelj que

$$K(p)\left(\Theta^{+}(p,\xi) - \Theta^{-}(p,\xi)\right) = \frac{K(q)}{K(q)+\xi}\Phi(q,\xi) = \Omega^{+}(p,\xi) - \Omega^{-}(p,\xi). \tag{2.13}$$

Subtituyendo (2.8) y (2.12) en la ecuación anterior, se obtiene el problema de Riemann no homogéneo

$$\Omega^{+}(p,\xi) = \frac{K(p)+\xi}{\xi}\Omega^{-}(p,\xi) - K(p)\Lambda^{+}(p,\xi). \tag{2.14}$$

De esta forma, se precisa encontrar para ξ fijo, con Re $\xi > 0$, dos funciones: $\Omega^{+}(z,\xi)$ analítica en Re $z < 0$ y $\Omega^{-}(z,\xi)$ analítica en Re $z > 0$, las cuales satisfacen (2.14) sobre Re$(p) = 0$. Teniendo en cuenta la definición de Ω al resolver el problema (2.14) se encuentra la función desconocida $\Phi(p,\xi)$ por la relación

$$\Phi(p,\xi) = \frac{K(p)+\xi}{\xi}\left(\Omega^{+}(p,\xi) - \Omega^{-}(p,\xi)\right). \tag{2.15}$$

Las funciones

$$W(p,\xi) = \frac{K(p)+\xi}{\xi} \text{ y } g(p,\xi) = -K(p)\Lambda^{+}(p,\xi)$$

son llamadas los coeficientes y el término libre del problema de Riemann, respectivamente.

El método de solución al problema (2.14) esta basado en los teoremas 1.8 y 1.9. Mas para aplicar estos teoremas se precisa que W y g satisfagan la condición de Hölder sobre $i\mathbb{R}$, pero esto no se cumple, pues estas dos funciones no convergen cuando $p \to \pm i\infty$. Así, el paso siguiente es transformar (2.14) en una expresión equivalente en la cual se satisfagan las condiciones de los teoremas 1.8 y 1.9. Para esto, se consideran ciertas funciones auxiliares. Denotese

$$K_1(z) := C_\alpha z^\alpha, \quad C_\alpha := e^{i\pi\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]},$$

la constante C_α se considera de tal forma que Re$(K_1(q)) > 0$ para Re$(q) = 0$. La ecuación $K_1(p) = -\xi$ tiene $M = \left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$ raíces $k_1(\xi), \ldots, k_M(\xi)$, las cuales son analíticas para Re$(\xi) > 0$ y

$$p = k_j(\xi) = \left(\frac{\xi}{C_\alpha} exp(2i\pi j)\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

transforma el semiplano positivo Re$(\xi) > 0$ en si mismo. Considere la función

$$\tilde{W}(p,\xi) = \left(\frac{K(p)+\xi}{K_1(p)+\xi}\right)\frac{w^-}{w^+}\prod_{j=1}^{M}\frac{p-k_j}{p+k_j} \neq 0,$$

donde

$$w^{-}(z) = z^{\mu}\left(\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{z+k_j(\xi)}\right)^{\mu}, \quad w^{+}(z) = z^{\mu}\left(\prod_{j=1}^{M}\frac{1}{z-k_j(\xi)}\right)^{\mu},$$

con $\mu = \frac{\alpha}{2M} - \left[\frac{\alpha}{2M}\right]$. De esta forma $w^-(z)$ es analítica para $\mathrm{Re}(z) > 0$ and $w^-(z)$ lo es para $\mathrm{Re}(z) < 0$. Observese que la función $\tilde{W}(p,\xi)$ es Hölder continua sobre $i\mathbb{R}$ y no se anula sobre el eje imaginario, por tanto

$$\textbf{Ind}\, \tilde{W}(p,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} d\ln \tilde{W}(p,\xi) = 0,$$

luego por el teorema del índice cero (teorema 1.9) la función $\tilde{W}(p,\xi)$ puede ser representada como

$$\tilde{W}(p,\xi) = \frac{X^+(p,\xi)}{X^-(p,\xi)}, \tag{2.16}$$

donde

$$X^{\pm}(p,\xi) = e^{\Gamma^{\pm}(p,\xi)}, \quad \Gamma(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\ln \tilde{W}(q,\xi)\, dq.$$

Haciendo uso de la fórmula (2.16) se tiene

$$\frac{K(p)+\xi}{K_1(p)+\xi} = \frac{Y^+(p,\xi)}{Y^-(p,\xi)}\prod_{j=1}^{M}\frac{p+k_j}{p-k_j}, \tag{2.17}$$

con

$$Y^{\pm}(p,\xi) = X^{\pm}(p,\xi)w^{\pm}(p). \tag{2.18}$$

Utilizando (2.17) el problema de Riemann no homogéneo (2.14) se transforma en

$$\frac{\Omega^+(p,\xi)}{Y^+(p,\xi)} = \frac{K_1(p)+\xi}{\xi}\prod_{j=1}^{M}\frac{p+k_j}{p-k_j}\frac{\Omega^-(p,\xi)}{Y^-(p,\xi)} - \frac{1}{Y^+(p,\xi)}K(p)\Lambda^+(p,\xi). \tag{2.19}$$

Por otra parte, $\Lambda(z,\xi)$ dada por (2.10) puede ser reescrita como

$$\Lambda(z,\xi) = \Lambda_1(z,\xi) + \Lambda_2(z,\xi), \tag{2.20}$$

siendo

$$\Lambda_1(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{1}{K_1(q)+\xi} \times \left(\widehat{u}_0(q) + \widehat{\widehat{f}}(q,\xi) + K_1(q)\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}\hat{u}(0,\xi)}{p_j}\right) dq, \tag{2.21}$$

$$\Lambda_2(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{1}{q-z}\frac{K_1(q)-K(q)}{(K(q)+\xi)(K_1(q)+\xi)} \times \left(\widehat{u}_0(q) + \widehat{\widehat{f}}(q,\xi) - \xi\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}\hat{u}(0,\xi)}{p_j}\right) dq, \tag{2.22}$$

Como existen M raíces $k_j(\xi)$ de la ecuación $K_1(z) = -\xi$ tal que Re $(k_j(\xi)) > 0$ para todo Re $(\xi) > 0$, al tomar límite $z \to p$ con Re$(z <)0$ y utilizar el teorema de Cauchy se llega a

$$\Lambda_1^+(p,\xi) = \sum_{j=1}^{M} -\frac{k_j'(\xi)}{p-k_j(\xi)}\left(\hat{u}_0(k_j(\xi)) + \hat{\hat{f}}(k_j(\xi),\xi) - \xi\sum_{r=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{r-1}\hat{u}(0,\xi)}{k_j(\xi)^r}\right),$$

la última relación implica que la función

$$\Lambda_3(z,\xi) = (K_1(p)+\xi)\Lambda_1^+(p,\xi) \tag{2.23}$$

es analítica en el semiplano positivo. Por las fórmulas de Sokhotzki-Plemelj el valor límite izquierdo $\Lambda_2^+(p,\xi)$ satisface

$$\Lambda_2^+(p,\xi) = \Lambda_2^-(p,\xi) + \tilde{g}_1(p,\xi), \tag{2.24}$$

siendo

$$\tilde{g}_1(p,\xi) = \frac{K_1(p)-K(p)}{(K(p)+\xi)(K_1(p)+\xi)}\left(\widehat{u}_0(p) + \widehat{\widehat{f}}(p,\xi) - \xi\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial_x^{j-1}\hat{u}(0,\xi)}{p_j}\right).$$

Teniendo en cuenta la representación (2.20) junto con las igualdades (2.23) y (2.24), se obtiene vía cálculo directo

$$K(p)\Lambda^+ = (K(p)+\xi)\left[\frac{\Lambda_3^-}{K_1(p)+\xi}+\Lambda_2^-\right]-\xi\Lambda^+ + g_1(p,\xi), \tag{2.25}$$

donde

$$g_1(p,\xi) = (K(p)+\xi)\tilde{g}_1(p,\xi).$$

Reemplazando (2.25) en (2.19), se reduce el problema de Riemann no homogéneo en la forma

$$\frac{\Omega^+(p,\xi)-\xi\Lambda^+(p,\xi)}{Y^+(p,\xi)} = \frac{K_1(p)+\xi}{\xi}\frac{P_+(p,\xi)}{P_-(p,\xi)}\frac{\Omega_1^-(p,\xi)}{Y^-(p,\xi)} - \frac{1}{Y^+(p,\xi)}g_1(p,\xi), \tag{2.26}$$

con

$$\Omega_1^-(p,\xi) = \Omega(p,\xi) - \xi\Lambda_2^-(p,\xi) - \frac{\xi\Lambda_3^-(p,\xi)}{K_1(p)+\xi}. \tag{2.27}$$

Como la función $p\to\frac{g_1(p,\xi)}{Y^+(p,\xi)}$ satisface la condición de Hölder sobre $\mathrm{Re}(p)=0$, en vista del teorema 1.9, esta función puede ser únicamente representada como la diferencia de los valores límite de la función seccionalmente analítica $U(z,\xi)$, la cual esta dada definida como

$$\begin{aligned} U(z,\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{1}{q-z}\frac{1}{Y^+(q,\xi)}\frac{K_1(p)-K(p)}{K_1(p)+\xi} \\ &\quad\times\left(u_0(q)+f(q,\xi)-\xi\sum_{j=1}^{[\alpha]+1}\frac{\partial x^{j-1}u(0,\xi)}{p^j}\right)dq. \end{aligned} \tag{2.28}$$

En consequencia el problema (2.19) toma la forma

$$\frac{\Omega^+(p,\xi)-\xi\Lambda^+(p,\xi)}{Y^+(p,\xi)} + U^+(p,\xi) = \frac{\Omega_1^-(p,\xi)}{Y^-(p,\xi)} + U^-(p,\xi). \tag{2.29}$$

La última relación indica que la función $z\to\frac{\Omega^+(z,\xi)-\xi\Lambda^+(z,\xi)}{Y(z,\xi)}+U(z,\xi)$ analítica en $\mathrm{Re}(z)<0$, y la función $z\to\frac{\Omega_1(z,\xi)}{Y(z,\xi)}+U(z,\xi)$, analítica en $\mathrm{Re}(z)>0$, constituyen la continuación analítica la una de la otra sobre el contorno $\mathrm{Re}(z)=0$. Por tanto, ellas son ramas de una única función entera, y de acuerdo al teorema de Liouville, esta función es cero. Así despejando en (2.29) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\Omega^+(p,\xi) &= -Y^+U^+ + \xi\Lambda^+, \\
\Omega^-(p,\xi) &= -\frac{\xi}{K_1(p)+\xi}Y^-\prod_{j=1}^{M}\frac{(p-k_j)}{(p+k_j)}U^- + \xi\left(\Lambda_1^+ + \Lambda_2\right).
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Como existen M raíces $k_j(\xi)$ de la ecuación $K_1(z) = -\xi$ tal que Re $k_j(\xi) > 0$ para todo Re $\xi > 0$. Por lo tanto la función $p \to \xi\Lambda^+(p,\xi)$ tiene M polos en los puntos $z = k_j(\xi)$, $j = 1,\ldots,M$. Así en el caso general, el problema (2.15) es insoluble, para su solubilidad es preciso colocar las siguientes condiciones adicionales:

$$
\hat{u}_0(k_r) + \widehat{\hat{f}}(k_r,\xi) - \xi\sum_{j=1}^{[\alpha]+1} k_r^{-j}\int_0^\infty e^{-\xi\tau}\hat{u}_x^{(j-1)}(0,\tau)d\tau = 0,
$$

para $k = 1,2,\ldots,M$, donde

$$
\begin{aligned}
u_0(k_r) &= \int_0^\infty e^{-k_r y}u_0(y)dy, \\
f(k_r,\xi) &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(k_r y+\xi t)}f(y,t)\,dy\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Obsérvese que se tienen M ecuaciones con $[\alpha]+1$ funciones desconocidas $\hat{u}_x^{j-1}(0,t)$, de esta forma se deben incluir $N = [\alpha]+1-M$ datos de frontera. Por ejemplo, si se utilizan datos de frontera de tipo Dirichlet $u_x^{(j-1)}(0,t) = h_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,N$, entonces el resto de transformadas de Laplace de los otros datos de frontera pueden ser encontrados

$$
\hat{v}_j(\xi) \equiv \int_0^\infty e^{-\xi t}\partial_x^{(j+N-1)}u(0,t)dt,\ j = 1,\ldots,M,
$$

del sistema de M ecuaciones

$$
A\vec{\hat{V}} = \vec{\mathcal{J}},
\tag{2.32}
$$

donde la matríz cuadrada A esta dada por $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq M}$ siendo $a_{ij} = -\xi k_i^{-N-j}$, $\vec{\hat{V}} = (\hat{v}_1(\xi), \ldots, \hat{v}_M(\xi))$ and $\vec{\mathcal{J}}$ es el vector "entrada" para el problema (2.1) con componentes

$$\mathcal{J}(k_r, \infty) = -(u_0(k_r) + f(k_r, \xi)) + \xi \sum_{j=1}^{N} \hat{h}_j(\xi) k_r^{-j}.$$

Aquí

$$\hat{h}_j(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi t} h_j(t) dt. \tag{2.33}$$

Como el determinante de la matríz A es diferente de cero, el sistema (2.32) se puede solucionar, pues todas las funciones $k_r(\xi)$ para $r = 1, \ldots, M$ son diferentes para Re $\xi > 0$. De esta forma, solucionando (2.32) y tomando transformada de Laplace inversa a (2.32) se llega a

$$V(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x^N u(0,t) \\ \vdots \\ \partial_x^{[\alpha]} u(0,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t} A^{-1} \vec{\mathcal{J}} d\xi. \tag{2.34}$$

Así bajo la condición anterior se tiene

$$\begin{aligned} \Omega^+(p,\xi) &= -Y^+U^+ + \xi \Lambda_2^+(p,\xi) \\ \Omega^-(p,\xi) &= -\tfrac{\xi}{K_1(p)+\xi} Y^- \prod_{j=1}^M \tfrac{(p-k_j)}{(p+k_j)} U^- + \xi \Lambda_2^-(p,\xi), \end{aligned} \tag{2.35}$$

donde $Y^{\pm}(p,\xi), U^{\pm}(p,\xi), \Lambda_2^{\pm}(p,\xi)$ son los valores límite en el eje real de las funciones dadas por (2.18), (2.7) y (2.28) respectivamente, denotandose por $+$ cuando el límite se toma desde el semiplano izquierdo y por $-$ cuando este límite se toma desde el semiplano derecho.

Nuevamente haciendo uso de las fórmulas de Sokhotzki-Plemelj y en vista de las igualdades expresadas en (2.35) se obtiene

$$\Omega^+(p,\xi) - \Omega^-(p,\xi) = -Y^+ \frac{K(p)}{K(p)+\xi} U^- - K(p) \frac{1}{K(p)+\xi} g_1,$$

recordando la relación (2.15) se llega a

$$\widehat{\Phi}(p,\xi) = \frac{K(p)+\xi}{K(p)}\left(\Omega^+(p,\xi) - \Omega^-(p,\xi)\right) = -Y^+(p,\xi)U^+.$$

De esto se observa que la función $\Phi(p,\xi)$ es analítica com respecto a la variable p en el semiplano izquierdo lo cual implica que $\mathbb{P}\Phi = 0$. Combinando esto con la fórmula (2.7) se infiere

$$\widehat{\widehat{u}}(p,\xi) = \frac{1}{K(p)+\xi}\left(\hat{u}_0(p) + \widehat{\widehat{f}}(p,\xi) + K(p)\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial_x^{N+j-1}\hat{u}(0,\xi)}{p^{N+j}} - Y^+(p,\xi)U^+\right)$$

donde $\partial_x^{N+j-1}u(0,\xi),\ \ j = 1,\ldots,M$ esta definido por (2.34). En la igualdad anterior no se observa que la función $\widehat{\widehat{u}}$ es analítica en el semiplano derecho, es preciso hacer unos cálculos mas. De la representación integral de la función $U(z,\xi)$ junto con las fórmulas de Sokhotzki-Plemelj se llega a la relación

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{u}}(p,\xi) &= \frac{1}{K_1(p)+\xi}\left(\hat{u}_0(p) + \widehat{\widehat{f}}(p,\xi)\right)\\ &+\frac{K_1(p)}{K_1(p)+\xi}\left(K(p)\sum_{j=1}^{N}\frac{\hat{h}(\xi)}{p^{N+j}} + K(p)\sum_{j=1}^{M}\frac{\partial_x^{N+j-1}\hat{u}(0,\xi)}{p^{N+j}}\right)\\ &-\frac{1}{K_1(p)+\xi}\prod_{j=1}^{M}\frac{p-k_j}{p+k_j}Y^-U^-\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde $\partial_x^{N+j-1}u(0,\xi),\ \ j = 1,\ldots,M$ esta definido por (2.34). Tomando transformada de Laplace inversa de (2.36) con respecto a las variables ξ y p, se obtiene que la solución a (2.1) esta dada por

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}e^{-K(p)t}\mathcal{J}(p,t)dp\\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}K_1(p)\sum_{j=1}^{M}p^{-(N+j)}\int_0^t e^{-K(p)(t-\tau)}v_j(\tau)d\tau\ dp\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\hat{u}_1(p,t)dp\end{aligned} \tag{2.37}$$

donde

$$v_j(t) = \partial_x^{N+j-1}\hat{u}(0,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+b}^{i\infty+b} e^{\xi t}\left(A^{-1}\vec{\mathcal{J}}\right)d\xi = \left(\mathbb{A}\vec{\mathcal{J}}\right)_j,$$

$$\hat{u}_1(p,t)) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}\frac{1}{K_1(p)+\xi}\prod_{j=1}^{M}\frac{p-k_j}{p+k_j}Y^-(p,\xi)U^-(p,\xi)d\xi.$$

Ahora, se demuestra la unicidad de la solución. Suponga que existen dos funciones u_1, u_2 soluciones de (2.1), entonces $u_1 - u_2$ satisface la ecuación (2.1) con datos homogéneos $f = 0,\ u_0 = 0$, y $h_j = 0$. De esta forma el teorema ha sido demostrado. ■

2. Operador de Green

Se define el operador de Green $\mathcal{G}(t)$ como

$$\mathcal{G}(t)\phi(x) := \int\limits_0^{\infty} G(x,y,t)\phi(y)dy,$$

y el operador de frontera $\mathcal{H}(t)$ por

$$\mathcal{H}(t)\vec{h} = \sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\int\limits_0^t h_j(\tau)\lim_{p\to 0}\partial_p^{j-1}|\partial_x^{\alpha}|\widehat{G}(x,p,t-\tau)d\tau,$$

donde la función $G(x,y,t)$ esta definida por

(2.38)

$$\begin{aligned} G(x,y,t) \quad &:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{p(x-y)}\frac{1}{K(p)+\xi}dp \\ &- \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\sum_{j=1}^{M}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}\xi^{\frac{N+j}{\alpha}-1}\theta_j(\xi,y)\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{1}{K(p)+\xi}\frac{K(p)}{p^{N+j}}dp\,d\xi \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{\xi t}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty} e^{px}\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}I^+(p,\xi,y)dp\,d\xi. \end{aligned}$$

El siguiente Lema presenta algunos estimativos que satisfacen estos operadores.

LEMA 2.1. *Los siguientes estimativos se satisfacen, demostrando que el lado derecho es finito:*

(1) $\|\partial_x^n \mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{L}^{s,\mu}} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}+n)}\|\phi\|_{\mathbf{L}^r}$.

(2) $\|\partial_x^n \mathcal{H}(t)\vec{h}\|_{\mathbf{L}^s} \leq Ct^{-\frac{N-n}{\alpha}}\left(\|\vec{h}'\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|\vec{h}\|_{\mathbf{L}^\infty}\right)$

para $\mu > 0$ *pequeño,* $1 \leq r \leq s \leq \infty$*,* $n = 0, 1, \cdots, [\alpha]$.

LEMA 2.2. *La función* $G(x, y, t)$ *definida por* (2.38) *es la función de Green del problema* (2.1)*, esto es para todo* $y > 0$

$$\begin{cases} (\partial_t + |\partial_x|^\alpha)G(x, y, t) = 0, \\ G(x, y, 0) = \delta(x - y), \\ \partial_x^{j-1}G(x, y, t) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, [\alpha] - M + 1, \end{cases}$$

siendo δ *el delta de Dirac. (Ver apéndice C)*

La demostración a estos Lemas puede ser consultada en [**39**]

2.1. Demostración teorema 2.1. Vía el principio de Duhamel, se tiene que la función

$$v(x, t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \int_0^t \mathcal{G}(t - t)f(\tau)d\tau,$$

es solución

$$\begin{cases} (\partial_t + |\partial_x|^\alpha)v(x, t) = 0, \\ v(x, 0) = u_0(x), \\ \partial_x^{j-1}v(0, t) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, [\alpha] - M + 1. \end{cases} \tag{2.39}$$

Luego si u es solución al problema (2.1) la función

$$v(x, t) = u(x, t) - \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(t)}{(j - 1)!},$$

soluciona (2.39) con condición inicial

$$v(x, 0) = u_0(x) - \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(0)}{(j - 1)!},$$

luego

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{G}(t)\left(u_0(x) - \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(0)}{(j-1)!}\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(t)}{(j-1)!} \\ &\quad + \int_0^t \mathcal{G}(t-t)\left(f(\tau) - (\partial_\tau + |\partial_x|^\alpha)\sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(\tau)}{(j-1)!}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Integrando por partes la última relación y utilizando $|\partial_x|^\alpha \sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(\tau)}{(j-1)!} = 0$, se tiene

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathcal{G}(t-t)f(\tau)d\tau - \int_0^t \mathcal{G}_\tau(t-\tau)\sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(\tau)}{(j-1)!}d\tau.$$

Como $(\partial_\tau + |\partial_x|^\alpha)G = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathcal{G}_\tau(t-\tau)\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{x^{j-1}h_j(\tau)}{(j-1)!}\right) d\tau \\ &\qquad = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(j-1)!}\int_0^t h_j(\tau)\int_0^\infty |\partial_x|^\alpha G(x,y,t-\tau)y^{j-1}dy\, d\tau \\ &\qquad = -\sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^t h_j(\tau)\lim_{p\to 0}\partial_p^{j-1}\int_0^\infty |\partial_x|^\alpha G(x,y,t-\tau)dy\, d\tau \\ &\qquad = -\sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^t h_j(\tau)\lim_{p\to 0}\partial_p^{j-1}|\partial_x|^\alpha \hat{G}(x,p,t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{G}(t)u_0(x) + \int_0^t \mathcal{G}(t-t)f(\tau)d\tau \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!}\int_0^t h_j(\tau)\lim_{p\to 0}\partial_p^{j-1}|\partial_x|^\alpha \hat{G}(x,p,t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Y recordando los estimativos presentados en el Lema 2.1 se concluye $u \in \mathbf{C}^0([0,T], \mathbf{H}_2^N \cap C^N) \cap C^0((0,T], \mathbf{H}_2^{[\alpha]} \cap C^{[\alpha]})$. De esta forma el teorema 2.1 queda demostrado.

Capítulo 3

SEMIGRUPO ASOCIADO

Este capítulo se centra en estudiar el problema de valores iniciales y de frontera para la ecuación de Schrödinger no lineal (NLS) con derivada fraccionaria de tipo Riesz y dato de frontera de tipo Neumann planteada sobre la semirrecta:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + i\alpha_1 u_{xx} + \alpha_2 |\partial_x|^{\frac{1}{2}} u + \alpha_3 |u|^2 u = 0, t > 0, x > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_x(0,t) = h(t), \end{array} \right. \tag{3.1}$$

donde α_1, α_2 y α_3 son números reales y $|\partial_x|^{\frac{1}{2}}$ esta definida por medio del potencial de Riesz como

$$|\partial_x|^{\frac{1}{2}} u = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \frac{sign\,(x-y)}{|x-y|^{\frac{1}{2}}} u_y(y) dy.$$

El modelo en el cual se centra este trabajo se obtiene al considerar $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, en este caso se tiene un operador pseudodifferencial de tipo disipativo. En este capítulo se va a obtener una representación integral para soluciones del problema de valores iniciales y de frontera para la ecuación de Schrödinger con Landau damping planteado sobre la semirrecta

$$(3.2) \qquad \begin{cases} u_t + \mathbb{K}u = 0, \ t > 0, \ x > 0; \\ u(x,0) = u_0(x), \ x > 0, \end{cases}$$

donde el operador pseudodifferencial $\mathbb{K}$ esta definido como

$$\mathbb{K}u = iu_{xx} + |\partial_x|^{\frac{1}{2}}u$$

En la sección 1 utilizando el método de continuación analítica el cuál se expuso en el capítulo anterior se encuentra una expresión en términos de la condición inicial y del dato de frontera para las soluciones de (3.2), esto es $u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \mathcal{H}(t)h$, para ciertos operadores $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$. La sección 2 se centra en reescribir el operador de Green $\mathcal{G}(t)$ y de frontera $\mathcal{H}(t)$ en términos de la transformada coseno generalizada $\mathcal{B}_c$ y la transformada coseno inversa generalizada $\mathcal{B}_c^*$, las cuales se definen en esta sección.

1. Solución al problema lineal

La no analiticidad del símbolo $K(p) = ip^2 + \sqrt{|p|}$ del operador $\mathbb{K}$, genera grandes dificultades en el estudio del problema (3.2), por tal motivo a lo largo de esta sección se considera la siguiente extensión analítica para esta función

$$(3.3) \qquad K(p) = \begin{cases} K^+(p) = ip^2 + \sqrt{(-ip)}, & \text{para } \operatorname{Im} p > 0, \\ K^-(p) = ip^2 + \sqrt{(ip)}, & \text{para } \operatorname{Im} p < 0. \end{cases}$$

Como se observó en el capítulo anterior, conocer la cantidad de ceros de la ecuación $K(p) + \xi = 0$ en el semiplano derecho para $\operatorname{Re}(\xi) > 0$ es un paso clave en el método que se desea aplicar, la respuesta a esta pregunta se expone en el siguiente Lema.

LEMA 3.1. *La ecuación $K(p) + \xi = 0$ con Re$(\xi) > 1$ tiene una única raíz en el semiplano derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Como $|\xi| > 1$ las raices a la ecuación $K(p) + \xi = 0$ estan dentro de la bola centrada en cero y de radio $|\xi|$. Denotando por

$f^+(p) = K^+(p) + \xi$, $g(p) = ip^2 + \xi$ y $A = \{p \in B(0, |\xi|) : \mathrm{Re}(p) \geq 0\}$ se observa

$$|f^+(p) - g(p)| < |g(p)|, \quad \text{para } p \in \partial A.$$

Luego por el Teorema de Rouche se tiene que estas dos funciones holomorfas en A, poseen el mismo número de ceros en esta región, de lo cual se concluye que f^+ posee una única raíz p_1 en A. De forma análoga se prueba que $f^-(p) = K^-(p) + \xi$ tiene una raíz p_2 en A.

Considere las regiones acotadas $A^+ = \{p \in A : \mathrm{Im}(p) > 0\}$, $A^- = \{p \in A : \mathrm{Im}(p) < 0\}$, los cuales satisfacen

$$|f^+(p) - f^-(p)| < |f^+(p)| + |f^-(p)|, \quad \text{para } p \in \partial A^\pm,$$

y por tanto, aplicando nuevamente el teorema de Rouche se infiere que p_1 y p_2 están en el mismo cuadrante. Esto implica que la ecuación $K(p) + \xi = 0$ es satisfecha por alguno de estos puntos, mas no por los dos. ■

Esta única raíz ubicada en el semiplano positivo se denota por $\varphi(\xi)$. Apesar de la extensión que se ha realizado, la función $p \to K(p) + \xi$ tiene una ramificación en el eje real positivo, para solucionar este problema se introduce la función conmutadora $Y(z, \xi) = e^{\Gamma(z,\xi)}$, siendo

$$\Gamma(z, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \ln(q - z) \left[\frac{{K^+}'(q)}{K^+(q) + \xi} - \frac{{K^-}'(q)}{K^-(q) + \xi} \right] dq,$$

donde $\ln z$ esta definida en su rama principal. La cual hace que $p \to \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}$ sea analítica en el semiplano derecho excepto en el punto $\varphi(\xi)$ donde posee un polo simple, esto se demostrará en el capítulo siguiente junto con otras propiedades de la función seccionalmente analítica $Y(z, \xi)$.

Considérense los operadores

$$\mathcal{G}(t)\phi = \int_0^\infty G_0(x, y, t)\phi(y)dy, \quad \mathcal{H}(t)h = \int_0^t H_0(x, t - \tau)h(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

siendo

(3.5)

$$\begin{aligned} G_0(x,y,t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{\xi t} \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\frac{\varphi(\xi)}{p}\left[\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}-\frac{Y(0,\xi)}{\xi}\right]\mathbb{J}^{-}_{\varphi(\xi)}(y,\xi)dp\,d\xi \\ &\quad -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{\xi t} \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}\mathbb{J}^{-}_{p}(y,\xi)dp\,d\xi, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} H_0(x,y,t) &= i\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{\xi t} \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\frac{\varphi(\xi)}{p}\left[\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}-\frac{Y(0,\xi)}{\xi}\right]dp\,d\xi \\ &\quad -i\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{\xi t} \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}dp\,d\xi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Donde $\varphi(\xi)$ es la única raíz de la ecuación $K(p)+\xi=0$ en el semiplano derecho y la función $\mathbb{J}$ esta dada por

$$\mathbb{J}_z(y,\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}}\frac{e^{-qy}}{q-z}\frac{1}{Y(q,\xi)}dq, \quad \mathbf{Re}(z)\neq 0. \tag{3.7}$$

En este punto ya se puede enunciar el teorema referente a la existencia y unicidad de soluciones a (3.2).

PROPOSICIÓN 3.1. *Para toda* $u_0\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)$ *y toda* $h\in\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^+)$*, el problema de valores en la frontera tiene una única solución* $u(x,t)$*, la cual puede ser representada como*

$$u(x,t)=\mathcal{G}(t)u_0+\mathcal{H}(t)h, \tag{3.8}$$

donde los operadores $\mathcal{G}(t),\ \mathcal{H}(t)$*, estan dados por* (3.4).

Demostración. Aplicando transformada de Laplace con respecto a la variable espacial al problema (3.2) y recordando que la función $\widehat{u}_t$ al ser analítica en el semiplano derecho es punto fijo del operador $\mathbb{P}^-$, esto es $\widehat{u}_t=\mathbb{P}^-\{\widehat{u}_t\}$, combinando esto con la igualdad obtenida en el Lema 1.2 se llega a

$$\text{(3.9)} \qquad \mathbb{P}^{-}\left\{\widehat{u}_t + K(p)\widehat{u} - ip^2\left(p^{-1}u(0,t) - p^{-2}u_x(0,t)\right) - |p|^{\frac{1}{2}}\,\frac{u(0,t)}{p}\right\} = 0,$$
$$\widehat{u}(p,0) = \widehat{u}_0(p),$$

con $K(p) = ip^2 + \sqrt{|p|}$. Lo anterior es equivalente a considerar

(3.10)

$$\widehat{u}_t + K(p)\widehat{u} - ip^2\left(p^{-1}u(0,t) - p^{-2}u_x(0,t)\right) - |p|^{\frac{1}{2}}\,\frac{u(0,t)}{p} = \Psi(p,t), \quad \textbf{Im}\ p = 0$$
$$\widehat{u}(p,0) = \widehat{u}_0(p),$$

donde $\Psi(\cdot,t)$ es una función analítica en el semiplano izquierdo que satisface la condición de Hölder sobre el eje imaginário y cuya transformada de Laplace tiene el siguiente decaimiento $|\widehat{\Phi}(p,\xi)| \leq C\langle p\rangle^{-\delta}$.

Aplicando tranformada de Laplace con respecto a la variable temporal al problema (3.9) se obtiene

$$\text{(3.11)} \qquad \widehat{\widehat{u}}\,(p,\xi) \;=\; \frac{1}{K\,(p)+\xi}\left[\widehat{u}_0\,(p) + \frac{K\,(p)}{p}\widehat{u}\,(0,\xi) + i\widehat{u}_x\,(0,\xi) + \widehat{\Psi}\,(p,\xi)\right],$$

donde $K(p) = ip^2 + \sqrt{|p|}$, $\widehat{\widehat{u}}(p,\xi)$, $\widehat{u}_0(p)$, $\widehat{u}\,(0,\xi)$, $\widehat{u}_x\,(0,\xi)$ y $\widehat{\Psi}\,(p,\xi)$ son las tranformadas de Laplace de las funciones $u(x,t)$, $u_0(x)$, $u(0,t)$, $u_x(0,t)$ y $\Psi(p,\xi)$ respectivamente.

Se puede observar que en la ecuación (3.11) aparecen tres funciones desconocidas: las condiciones de frontera $\widehat{u}\,(0,\xi)\,, \widehat{u}_x\,(0,\xi)$ y la función $\widehat{\Psi}\,(z,\xi)$. Para encontrar estas funciones desconocidas se usará la condición de analiticidad de $\widehat{\widehat{u}}$ en el semiplano derecho. Se define la función conmutadora $Y(w,\xi)$ por

$$\text{(3.12)} \qquad Y(w,\xi) = e^{\Gamma(w,\xi)}, \ \textbf{Re}(\xi) > 0,$$

donde

$$\text{(3.13)} \qquad \Gamma(w,\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} \ln(q-w)\left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)+\xi} - \frac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)+\xi}\right)dq,$$
$$\text{(3.14)} \qquad K^{\pm}(q) \;=\; iq^2 + \sqrt{\mp iq},$$

en este caso la función $p \to \ln p$ se considera definida sobre su rama principal. Por tanto Γ posee un corte para $w > 0$, mas sobre el eje real se consideran los valores límite, esto es

$$\begin{aligned}\Gamma^+(s,\xi) &= \lim_{w\to s, \mathrm{Im}\, w>0} \Gamma(w,\xi),\ s>0,\\ \Gamma^-(s,\xi) &= \lim_{w\to s, \mathrm{Im}\, w<0} \Gamma(w,\xi),\ s>0.\end{aligned}$$

En el Lema 4.2 se mostrará que para $p>0$

$$\frac{Y^+(p,\xi)}{K^+(p)+\xi} = \frac{Y^-(p,\xi)}{K^-(p)+\xi}, \tag{3.15}$$

de lo cual, por el lema del pegado, la función $p \to \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}$ es meromorfa en el semiplano positivo y su único punto de singularidad en este domínio es el punto $p=\varphi(\xi)$, el cual es raíz de la ecuación $K(p)+\xi$.
En base a lo anterior se reescribe (3.11) como
(3.16)

$$\widehat{\widehat{u}}\,(p,\xi) = \frac{\hat{u}(0,\xi)}{p} + \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left[\frac{\widehat{u_0}\,(p)}{Y(p,\xi)} - \frac{\xi}{p}\frac{\widehat{u}\,(0,\xi)}{Y(p,\xi)} + i\frac{\widehat{u_x}\,(0,\xi)}{Y(p,\xi)} + \frac{\widehat{\Psi}\,(p,\xi)}{Y(p,\xi)}\right],$$

Como la función $\frac{\hat{u}_0}{Y(\cdot,\xi)}$ satisface la condición de Hölder sobre el eje imaginario, las fórmulas de Sokhotski-Plemelj implican que

$$\frac{\hat{u}_0(p)}{Y(p,\xi)} = U^+(p,\xi) - U^-(p,\xi),\quad U(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{\hat{u}_0(q)}{q-z}\frac{1}{Y(q,\xi)}dq. \tag{3.17}$$

En base a (3.16) y (3.17) se concluye

$$\begin{aligned}\hat{\hat{u}}(p,\xi) &= \frac{\hat{u}(0,\xi)}{p} + \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left[U^+(p,\xi) - U^-(p,\xi)\right]\\ &\quad + \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left[-\frac{\xi}{p}\frac{\hat{u}(0,\xi)}{Y(0,\xi)} - \frac{\xi}{p}\hat{u}(0,\xi)\left(\frac{1}{Y(p,\xi)} - \frac{1}{Y(0,\xi)}\right)\right.\\ &\quad \left. + i\hat{u}_x(0,\xi) + i\left(\frac{1}{Y(p,\xi)} - 1\right)\widehat{u_x}\,(0,\xi) + \frac{1}{Y(p,\xi)}\widehat{\Psi}\,(p,\xi)\right].\end{aligned} \tag{3.18}$$

Observese que al considerar

$$\frac{\widehat{\Psi}\,(p,\xi)}{Y(p,\xi)} + U^+(p,\xi) - \frac{\xi\hat{u}(0,\xi)}{p}\left(\frac{1}{Y(p,\xi)} - \frac{1}{Y(0,\xi)}\right) + i\left(\frac{1}{Y(p,\xi)} - 1\right)\widehat{u_x}\,(0,\xi) = 0,$$

se obtiene una expresión para Ψ que satisface las condiciones impuestas a esta función. Así bajo esta consideración la expresión (3.18) se reduce a

$$\hat{u}(p,\xi) = \frac{\hat{u}(0,\xi)}{p} + \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left[-U^{-}(p,\xi) - \frac{\xi}{p}\frac{\hat{u}(0,\xi)}{Y(0,\xi)} + i\hat{u}_x(0,\xi)\right]. \tag{3.19}$$

Para evitar que $\hat{\hat{u}}(p,\xi)$ tenga un punto de singularidad en $p = \varphi(\xi)$ y sea analítica en el semiplano derecho es preciso que

$$\frac{\xi}{\varphi(\xi)}\frac{\hat{u}(0,\xi)}{Y(0,\xi)} - i\hat{u}_x(0,\xi) + U^{-}(\varphi(\xi),\xi) = 0. \tag{3.20}$$

Así es necesesario colocar un único dato de frontera en el problema (3.2) ya que el otro dato de frontera será completamente determinado por (3.20). En este caso se considera dato de frontera de tipo Neumann $u_x(0,t) = h(t)$ y utilizando (3.20) se sabe que $u(0,t)$ cumple

$$\hat{u}(0,t) = \frac{Y(0,\xi)\varphi(\xi)}{\xi}\left[i\hat{h}(\xi) - U^{-}(\varphi(\xi),\xi)\right].$$

De esta forma se tiene que la solución a (3.2) satisface

$$\begin{aligned}
\widehat{\hat{u}}(p,\xi) &= \frac{Y(0,\xi)}{\xi}\frac{\varphi(\xi)}{p}\left[i\hat{h}(\xi) - U^{-}(\varphi(\xi),\xi)\right] \\
&\quad + \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}\left[-\frac{\varphi(\xi)}{p}[i\hat{h}(\xi) - U^{-}(\varphi(\xi),\xi)] + i\hat{h}(\xi) - U^{-}(p,\xi)\right] \\
&= \frac{\varphi(\xi)}{p}\left[\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi} - \frac{Y(0,\xi)}{\xi}\right]U^{-}(\varphi(\xi),\xi) - \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}U^{-}(p,\xi) \\
&\quad - \frac{\varphi(\xi)}{p}\left[\frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi} - \frac{Y(0,\xi)}{\xi}\right]i\hat{h}(\xi) + \frac{Y(p,\xi)}{K(p)+\xi}i\hat{h}(\xi)
\end{aligned}$$

Luego, tomando transformada de Laplace inversa se obtiene

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \mathcal{H}(t)h,$$

donde $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ han sido definido en (3.4). La unicidad de la solución se demuestra bajo un argumento similar al realizado en el Teorema 2.2. De esta forma la proposicion (3.1) queda demostrada. ■

2. Operador de Green

Esta sección se concentra en reescribir $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ en una forma más sncilla, lo cual facilitará los estimativos posteriores. Considere $K(p) = ip^2 + \sqrt{|p|}$ y Y definida como antes. Se definen

(3.21)

$$\begin{aligned} G(x,y,t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathcal{C}} e^{-K(z)t} K'(z) \\ &\qquad\qquad \times \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px} \frac{z}{p} \left[\frac{Y(p,-K(z))}{K(p)-K(z)} + \frac{Y(0,-K(z))}{K(z)} \right] \mathcal{E}_z^-(y)\, dp\, dz \\ &\quad - \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathcal{C}} e^{-K(z)t} K'(z) \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px} \frac{Y(p,-K(z))}{K(p)-K(z)} \mathcal{E}_p^+(y)\, dp\, dz \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathcal{C}} e^{-K(z)t} K'(z) \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{p(x-y)} \frac{1}{K(p)-K(z)} dp\, dz, \\ H(x,t) &= 2iG(x,y,t)|_{y=0}, \end{aligned}$$

siendo $\mathcal{C} = \{ w e^{i(\pm\frac{\pi}{2} \mp \epsilon)} : w \leq 0\}$ y donde la función seccionalmente analítica $\mathcal{E}$ esta definida como

$$\mathcal{E}_w(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{e^{-qx} e^{-\Gamma(q,-K(z))}}{q-w} dq, \quad \text{para } \operatorname{Re}(w) \neq 0. \tag{3.22}$$

LEMA 3.2. *La función $G(x,y,t)$ es la función de Green del problema (3.2), esto es para todo $y > 0$, $(\partial_t + \mathbb{K})G(x,y,t) = 0$ y además*

$$\lim_{t\to 0} G(x,y,t) = \delta(x-y), \quad \lim_{x\to 0} \partial_x G(x,y,t) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Denotando

$$\psi_1(p,z) = \frac{z}{p} \left[\frac{Y(p,-K(z))}{K(p)-K(z)} + \frac{Y(0,-K(z))}{K(z)} \right], \quad \psi_2(p,z) = \frac{Y(p,-K(z))}{K(p)-K(z)}. \tag{3.23}$$

se observa

$$G(x,y,t) = G_1(x,y,t) + G_2(x,y,t), \tag{3.24}$$

siendo

$$
\begin{aligned}
G_1(x,y,t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-i\infty e^{-i(\frac{\pi}{2})+\epsilon}}^{-i\infty e^{i(\frac{\pi}{2})-\epsilon}} e^{-K(z)t}K'(z)\int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\psi_1(p,z)\mathcal{E}_z^-(y)dp\,dz,\\
G_2(x,y,t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\mathcal{C}} e^{-K(z)t}K'(z)\\
&\qquad\qquad \times \int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\left[\frac{e^{-py}}{K(p)-K(z)} - \psi_2(p,z)\mathcal{E}_p^-(y)\right]dp\,dz.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

De la definición del operador $\mathbb{K}$ y derivando bajo el signo de la integral se obtiene

(3.26)

$$
\begin{aligned}
(\partial_t+\mathbb{K})G_2(x,y,t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-i\infty e^{-i(\frac{\pi}{2})+\epsilon}}^{-i\infty e^{i(\frac{\pi}{2})-\epsilon}} e^{-K(z)t}K'(z)\int\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}(K(p)-K(z))\\
&\qquad\qquad \times \left[\frac{e^{-py}}{K(p)-K(z)} - \psi_2(p,z)\mathcal{E}_p^+(y)\right]dp\,dz.
\end{aligned}
$$

Observese que $(K(p)-K(z))\psi_2(p,z) = Y(p,-K(z))$, la cual es analítica en el semiplano izquierdo y por tanto via Teorema de Cauchy

$$
(\partial_t+\mathbb{K})G_2(x,y,t) = 0. \tag{3.27}
$$

Por otra parte, se reescribe G_1 como

(3.28)

$$
\begin{aligned}
G_1(x,y,t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-i\infty e^{-i(\frac{\pi}{2})+\epsilon}}^{-i\infty e^{i(\frac{\pi}{2})-\epsilon}} e^{-K(z)t}K'(z) \fint\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\frac{z}{p}\frac{Y(p,-K(z))}{K(p)-K(z)}\mathcal{E}_z^-(y)\,dp\,dz\\
&\quad + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-i\infty e^{-i(\frac{\pi}{2})+\epsilon}}^{-i\infty e^{i(\frac{\pi}{2})-\epsilon}} e^{-K(z)t}K'(z)\frac{Y(0,-K(z))}{K(z)} \fint\limits_{i\mathbb{R}} e^{px}\frac{1}{p}\,dp\,dz.
\end{aligned}
$$

Derivando bajo el signo de la integral y utilizando Teorema de Cauchy se obtiene

$$
(\partial_t+\mathbb{K})G_1(x,y,t) = 0. \tag{3.29}
$$

Combinando (3.27) y (3.29) se llega a que G es un cero del operador $(\partial_t+\mathbb{K})$.

■

Defínase los operadores transformada coseno de Fourier **"generalizada"** $\mathcal{B}_c$ y la transformada coseno inversa de Fourier **"generalizada"** $\mathcal{B}_c^*$ como sigue

(3.30)
$$\widehat{\phi}\,(p) = \mathcal{B}_c\phi = \int_0^\infty \psi_c\,(x,p)\,\phi\,(x)\,dx, \quad \phi\,(x) = \mathcal{B}_c^*\widehat{\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \psi_c^*\,(x,p)\,\widehat{\phi}\,(p)\,dp,$$

donde

$$\psi_c(z,x) = \mathcal{E}_{iz}^-(x) + \mathcal{E}_{-iz}^-(x), \tag{3.31}$$

y

$$\psi_c^*(x,z) = e^{izx}e^{\Gamma(iz,K(z))} + e^{-izx}e^{\Gamma(-iz,K(z))} + -zK'(z)\Theta(z,x),$$

siendo

$$\mathcal{E}_w(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{e^{-qx}e^{-\Gamma(q,K(z))}}{q-w}dq, \quad \text{para } \mathrm{Re}(w) \neq 0. \tag{3.32}$$

$$\Theta(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-px}\psi(p,z)dp, \tag{3.33}$$

$$\psi(p,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{\Gamma(-p,z)}}{\sqrt{p}(K^+(p)-K(z))(K^-(p)-K(z))}. \tag{3.34}$$

Con

$$K(z) = iz^2 - \sqrt{z}, z \geq 0,\ K^\pm(q) = iq^2 + \sqrt{\mp iq},$$
$$\Gamma(w,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \ln(q-w)\left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^+(q)+\xi} - \frac{K^{-\prime}(q)}{K^-(q)+\xi}\right)dq.$$

Para un estudio detallado de estos operadores $\mathcal{B}_c\phi$ y $\mathcal{B}_c^*\widehat{\phi}$ puede consultar los Lemas 4.4 y 4.5 en el capítulo siguiente. Se define también el operador de Green sobre la semirrecta como

$$\mathcal{G}\,(t) = \mathcal{B}_c^*e^{tK(p)}\mathcal{B}_c, K(p) = ip^2 - \sqrt{p}. \tag{3.35}$$

y el operador de frontera sobre la semirrecta mediante

$$\mathcal{H}(t)h = i\mathcal{B}_c^*\left\{\int\limits_0^t e^{K(p)(t-\tau)}h(\tau)d\tau\right\}. \tag{3.36}$$

La meta ahora, consiste en mostrar que

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \mathcal{H}(t)h, \tag{3.37}$$

soluciona (3.2), siendo $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ están definidos como antes.

Para mostrar esto, se observa de la unicidad de la solución garantizada por la proposición 3.1 y junto con el hecho de que $G(x,y,t)$ y $H(x,t)$ son las funciones de Green y de frontera del problema (3.2) (ver Lema 3.2), la única solución a este problema lineal esta dada por

$$u(x,t) = \int_0^\infty G(x,y,t)u_0(y)dy + \int_0^t H(x,t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

Se empieza por reescribir la función $G(x,y,t)$ definida en (3.21). Observese que la función a integral en (3.21) con respecto a la variable p es analítica en el semiplano izquierdo excepto por un polo simple en el punto $p=-z$ y una ramificación en el eje real negativo, de esto via el Teorema de Cauchy se obtiene

(3.38)

$$\begin{aligned} G(x,y,t) \;&= -\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{i\mathbb{R}} e^{-K(z)t-zx} Y^+(-z,-K(z)) \left(\mathcal{E}_z^-(y) + \mathcal{E}_{-z}^-(y)\right) dz \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{i\mathbb{R}} e^{-K(z)t} zK'(z)\mathcal{E}_z^-(y) \int_0^\infty e^{-px}Y^+(-p,-K(z))\lambda(p,z)dp\, dz \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{i\mathbb{R}} e^{-K(z)t} K'(z) \int_0^\infty e^{-px}Y^+(-p,-K(z))\mathcal{E}_p^+(y)\,\lambda(p,z)dp\, dz, \end{aligned}$$

donde

$$\lambda(p,z) = \frac{1}{p}\frac{(ip)^{\frac{1}{2}} - (-ip)^{\frac{1}{2}}}{(ip^2 + (ip)^{\frac{1}{2}} - K(z))(ip^2 + (-ip)^{\frac{1}{2}} - K(z))}.$$

Note que el integrando en la última expresión integral de (3.38) es una función par con respecto a la variable z y por tanto

$$\int_{i\mathbb{R}} e^{-K(z)t} K'(z) \int_0^\infty e^{-px}Y^+(-p,-K(z))\mathcal{E}_p^+(y)\,\lambda(p,z)dp\, dz = 0.$$

Además mediante el cambio de variable $z \mapsto iz$ la expresión (3.38) se transforma en

$$G(x,y,t) \;=\; \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int\limits_0^\infty e^{-K(iz)t}\psi_c(z,y)\psi^*_{\cos}(x,z)dz, \tag{3.39}$$

donde las funciones ψ^*_c y ψ_c estan definidas por (4.9). Lo cual implica

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{B}^*_c\{e^{K(p)t}\mathcal{B}_c\phi\}, K(z) = ip^2 - \sqrt{p}.$$

Por otra parte el Teorema de Cauchy garantiza que para Re $w > 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{e^{-\Gamma(q,-K(z))}}{q-w}dq = \frac{1}{2},$$

de lo cual $\psi_c(z,0) = 1$ y recordando que $H(x,t) = 2iG(x,y,t)|_{y=0}$, se concluye.

$$\mathcal{H}(t)h = i\mathcal{B}^*_c\left\{\int\limits_0^t e^{K(p)(t-\tau)}h(\tau)d\tau\right\}. \tag{3.40}$$

El anterior razonamiento se resume en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.2. *Las soluciones al problema* (3.2) *están dadas por la fórmula*

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \mathcal{H}(t)h,$$

donde los operadores $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ definidos por (3.35) *y* (3.36) *respectivamente.*

Capítulo 4

RESULTADOS AUXILIARES

En la primera parte de este capítulo se presenta el estudio de la función conmutadora $Y(z,\xi)$ la cual se definió en el capítulo anterior, en la sección dos se introducen las transformadas seno de Fourier generalizada y las transformadas seno inversa de Fourier generalizada, las cuales son fundamentales para demostrar ciertos estimativos que los operadores $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}_c^*$ satisfacen.

1. Función conmutadora

Para el operador pseudodiferencial $\mathbb{K}u = iu_{xx} + |\partial_x|^{\frac{1}{2}}u$ se conoce (como ya se observó en el capítulo anterior) que su símbolo $K_1(p) = ip^2 + \sqrt{|p|}$ es no analítico, para lo cual se considera la extensión analítica definida en (3.3). En el capítulo anterior se vió la necesidad de introducir la función conmutadora $Y^{\pm}$, la cual está definida, al igual que en el capítulo anterior, como

(4.1)
$$Y^{\pm}(p,\xi) = e^{\Gamma^{\pm}(p,\xi)}, \quad \Gamma(w,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} \ln(q-w)\left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)+\xi} - \frac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)+\xi}\right)dq.$$

Para la buena definición de $\ln w$ se considera un corte en el eje real negativo $w < 0$, por tanto la función $\Gamma(\cdot, K(z))$ es analítica en $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^{+}$. Sobre el eje real se definen los valores límite de la función Γ mediante

$$\Gamma^{+}(s,\xi) = \lim_{w\to s, \mathrm{Im}\, w>0} \Gamma(w,\xi), \ s>0,$$
$$\Gamma^{-}(s,\xi) = \lim_{w\to s, \mathrm{Im}\, w<0} \Gamma(w,\xi), \ s>0.$$

En el siguiente lema se presentan algunas propiedades de esta función seccionalmente analítica, las cuales serán de gran importancia en capítulos posteriores para el cálculo de los estimativos a priori del operador de Green y de Frontera. De aquí en adelante $K(z) = iz^2 - \sqrt{z}$, con $z > 0$.

El siguiente resultado fue una herramienta fundamental en la demostración tanto de la existencia como de la unicidad de la solución al problema lineal (3.2).

LEMA 4.1. *Para* $p > 0$ *y arg* $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$*, se cumple*

$$\frac{e^{\Gamma^{+}(p,\xi)}}{e^{\Gamma^{-}(p,\xi)}} = \frac{K^{+}(p)+\xi}{K^{-}(p)+\xi}.$$

DEMOSTRACIÓN. Para $p, q > 0$ se denota por

$$\ln^{\pm}(q-p) = \lim_{w\to p, \pm\mathrm{Im}\, w>0} \ln(q-w).$$

Se observa que para $q > p$ se satisface $\ln^{+}(q-p) = \ln^{-}(q-p)$ y en el caso $q < p$ se tiene $\ln^{+}(q-p) = \ln^{-}(q-p) + 2\pi i$, de lo cual se concluye

$$\begin{aligned}\Gamma^{+}(p,\xi) - \Gamma^{-}(p,\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} \left(\ln^{+}(q-p) - \ln^{-}(q-p)\right)\left(\tfrac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)+\xi} - \tfrac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)+\xi}\right) dq \\ &= \int_0^{p} \left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)+\xi} - \frac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)+\xi}\right) dq = \ln\frac{K^{+}(p)+\xi}{K^{-}(p)+\xi}.\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\frac{e^{\Gamma^{+}(p,\xi)}}{e^{\Gamma^{-}(p,\xi)}} = \frac{K^{+}(p)+\xi}{K^{-}(p)+\xi},$$

lo cual se deseaba demostrar. ■

El siguiente Lema se centra en mostar ciertas propiedades asintóticas de la función conmutadora.

LEMA 4.2. *Para* $z \in \mathbb{R}^+$ *y* $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ *se cumple*

(1) $|Y(w, K(z))| \leq C$, $\left|e^{-\Gamma^+(iz,K(z))}\right| \leq C$.
(2) $\Gamma(w, K(z)) = O(\{w\}^\gamma + \{z\}^\gamma)$.
(3) $\Gamma(w, K(z)) - \Gamma(w, 0) = K(z)O(w^{-\gamma})$ para $|w| > 1$.
(4) $\partial_z \Gamma(iz, K(z)) = O(\{z\}^{-1}\langle z\rangle^{-2})$.
(5) $(wz\Gamma_z + z\Gamma_{zw})(w, K(z)) = O(\langle z\rangle^{-2})$.

DEMOSTRACIÓN. Por otra parte, utilizando que la función $q \to \frac{K_1^+(q)+K(z)}{K_1^-(q)+K(z)}$ no cambia de argumento para $q > 0$, se infiere
(4.2)

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^+(q) + K(z)} - \frac{K^{-\prime}(q)}{K^-(q) + K(z)} \right) dq = \int_0^{+\infty} d \ln \frac{K_1^+(q) + K(z)}{K_1^-(q) + K(z)} = 0,$$

donde $K(z) = iz^2 - \sqrt{z}$, $z > 0$. Como $\ln(q-w) = \ln(-w) + \ln(1-\frac{q}{w})$, de la igualdad anterior y via el teorema de Taylor para $|w| > 1$, $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ se obtiene

$$\begin{aligned} \Gamma(w, -K(z)) &= \frac{1}{2\pi i} \ln(-w) \int_0^{+\infty} \left(\frac{K_1^{+\prime}(q)}{K_1^+(q) + K(z)} \frac{K_1^{-\prime}(q)}{K_1^-(q) + K(z)} \right) dq \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \ln(1 - \frac{q}{w}) \left(\frac{K_1^{+\prime}(q)}{K_1^+(q) + K(z)} - \frac{K_1^{-\prime}(q)}{K_1^-(q) + K(z)} \right) dq \\ &= O(\langle w\rangle^{-\gamma}). \end{aligned}$$

De esto se concluye $|Y(w, K(z))| \leq C$, $\left|e^{-\Gamma(\pm iz,K(z))}\right| \leq C$ con $z > 0$.

Para demostrar el segundo estimativo de este lema, primero se observa que

$$\Gamma^+(w, K(z)) - \Gamma^+(0, 0) = \left(\Gamma^+(w, K(z)) - \Gamma^+(0, K(z))\right) + \left(\Gamma^+(0, K(z)) - \Gamma^+(0, 0)\right).$$

Por cálculo directo se llega a

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{+}(w,K(z))-\Gamma^{+}(0,K(z)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{|w|}(\ln(q-w)-\ln q)\\
&\qquad\times\left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)+K(z)}-\frac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)+K(z)}\right)dq\\
&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|}^{\infty}\ln(1-\frac{w}{q})\\
&\qquad\times\left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)+K(z)}-\frac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)+K(z)}\right)dq\\
&= I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

Al $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^{+}$ se tiene que $q-w\neq 0$ y por tanto para w y z pequeños

$$
|I_1|\le C\int_0^{|w|}\frac{1}{q^{\gamma}}\frac{q^{\frac{3}{2}}+|K(z)|\,q^{-\frac{1}{2}}}{|K^{+}(q)+K(z)|\,|K^{-}(q)+K(z)|}dq=O(w^{\gamma}+z^{\gamma}). \tag{4.3}
$$

Como $\left|\ln(1-\frac{w}{q})\right| \le C(wq^{-1})^{\gamma}$ y via una deducción similar a la anterior se obtiene el resultado para I_2. De forma directa se obtiene

(4.4)

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{+}(0,K(z))-\Gamma^{+}(0,0) &= \frac{K(z)}{4\pi i}\int_0^{\infty}\ln q\\
&\qquad\times\left(\tfrac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)(K^{+}(q)+K(z))}-\tfrac{K^{-\prime}(q)}{K^{+}(q)(K^{-}(q)+K(z))}\right)dq\\
&= O(z^{\gamma}).
\end{aligned}
$$

Como $\Gamma^{+}(0,0)=0$ de (4.3) y (4.4) se concluye el segundo estimativo de este Lema.

De la igualdad (4.2) y via un cálculo directo se tiene para $|w|>1$

$$
\Gamma(w,K(z))-\Gamma(w,0)=K(z)\int_0^{\infty}\ln\left(1-\frac{q}{w}\right)\left[\tfrac{K^{+\prime}(q)}{K^{+}(q)(K^{+}(q)+K(z))}-\tfrac{K^{-\prime}(q)}{K^{-}(q)(K^{-}(q)+K(z))}\right]dq.
$$

Utilizando

$$
\begin{aligned}
K^{\pm\prime}(q) &= \frac{3}{2}q+\frac{K(q)+K(z)}{q}-\frac{K(z)}{q}\\
K'(z) &= \frac{3}{2}z+\frac{K(z)}{z},
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

se llega a

$$
\begin{aligned}
\Gamma(w, K(z)) - \Gamma(w, 0) \,=\, & K(z) \int_0^\infty \ln\left(1 - \frac{q}{w}\right) \\
& \times \left[\frac{q}{K^+(q)(K^+(q) + K(z))} - \frac{q}{K^-(q)(K^-(q) + K(z))} \right] dq \\
& + K(z) \int_0^\infty \frac{1}{q} \ln\left(1 - \frac{q}{w}\right) \\
& \times \frac{\sqrt{q}}{(K^+(q) + K(z))(K^-(q) + K(z))} dq \\
= \, & K(z) O(w^{-\gamma}) \int_0^\infty O(q^{1+\gamma} \langle q \rangle^{-3} + q^{\gamma - \frac{1}{2}} \langle q \rangle^{-4}) dq,
\end{aligned}
$$

por tanto para $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, y $|w| > 1$ se tiene $\Gamma(w, K(z)) - \Gamma(w, 0) = K(z) O(w^{-\gamma})$. De esta forma el tercer estimativo ha sido demostrado.

Diferenciando bajo el signo de la integral se tiene

$$
\begin{aligned}
\partial_z \Gamma(iz, K(z)) \,=\, & - \int_0^\infty \frac{-i}{q - iz} \left(\frac{K^{+\prime}(q)}{K^+(q) + K(z)} - \frac{K^{-\prime}(q)}{K^-(q) + K(z)} \right) dq \\
& + K'(z) \int_0^\infty \ln(q - iz) \partial_q \left(\frac{1}{K^+(q) + K(z)} - \frac{1}{K^-(q) + K(z)} \right),
\end{aligned}
$$

e integrando por partes el segundo término de la expresión anterior se obtiene

$$
\partial_z \Gamma(iz, K(z)) \,=\, - \int_0^\infty \frac{1}{q - iz} \left(\frac{iK^{+\prime}(q) + K'(z)}{K^+(q) + K(z)} - \frac{iK^{-\prime}(q) + K'(z)}{K^-(q) + K(z)} \right) dq.
$$

De (4.5) se concluye

$$\partial_z\Gamma(iz,K(z)) = -\int_0^\infty \frac{1}{q-iz}\left[\frac{3}{2}(iq+z)+K(z)\frac{q-iz}{qz}\right] \times\left(\frac{1}{K^+(q)+K(z)}-\frac{1}{K^-(q)+K(z)}\right)dq$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty\left[\frac{3}{2}i+\frac{K(z)}{qz}\right]\frac{\sqrt{q}}{(K^+(q)+K(z))(K^-(q)+K(z))}dq,$$

esto infiere

$$\partial_z\Gamma(iz,K(z)) = \int_0^\infty O\left(\frac{1}{K(z)}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{(iq^2+\sqrt{iq})(iq^2+\sqrt{-iq})}}+\frac{\{z\}^{-\frac{1}{2}}\langle z\rangle}{\sqrt{q}}\frac{1}{\{(\sqrt{q}+\sqrt{z})^2\}\langle q^2+z^2\rangle}\right)dq$$
$$= O(\{z\}^{-1}\langle z\rangle^{-2}).$$

El último estimativo de este lema se demuestra de forma similar a lo previamente hecho.

Así el Lema 4.2 ha sido demostrado. ■

2. Transformada seno y transformada coseno generalizada

La transformada seno de Fourier $\mathcal{F}_s$ (o transformada seno) y **la transformada coseno de Fourier** $\mathcal{F}_c$ (o transformada coseno) de una función $f(x)$ son las transformadas integrales definidas, respectivamente, por la parte imaginaria y por la parte real de la transformada de Fourier de $f(x)$, esto es

$$\mathcal{F}_s\phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \phi(x)\sin px\, dx,\quad \mathcal{F}_c\phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \phi(x)\cos px\, dx. \tag{4.6}$$

En este trabajo se ha presentado la necesidad de incluir diferentes transformadas integrales que tienen propiedades similares a las satisfechas por $\mathcal{F}_s$ y $\mathcal{F}_c$, algunas de estas propiedades serán estudiadas en este capítulo.

Para facilitar la lectura de este capítulo, se recuerda a continuación la definición de las transformadas $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}_c^*$, que ya han sido introducidas en el capítulo anterior ver (3.30).

$$\mathcal{B}_c\phi = \int_0^\infty \psi_c\left(x,z\right)\phi\left(x\right)dx, \quad \mathcal{B}_c^*\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \psi_c^*\left(x,z\right)\phi\left(z\right)dz, \tag{4.7}$$

siendo

$$\psi_c(x,z) = \mathcal{E}_{iz}^-(x) + \mathcal{E}_{-iz}^-(x), \tag{4.8}$$

$$\psi_c^*(x,z) = e^{izx}e^{\Gamma^+(iz,-K(z))} + e^{-izx}e^{\Gamma^+(-iz,-K(z))} - zK'(z)\Theta(z,x), \tag{4.9}$$

donde la función Γ es como en (4.1) y

$$\mathcal{E}_w(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{i\mathbb{R}} \frac{e^{-qy-\Gamma(q,K(z))}}{q-w}\,dq.$$

$$\Theta(z,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-px}\psi(p,z)dp. \tag{4.10}$$

$$\psi(p,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{\Gamma^+(-p,z)}}{\sqrt{p}(K^+(p)-K(z))(K^-(p)-K(z))}.$$

Se definen de forma análoga la transformada **seno generalizada** $\mathcal{B}_s$ y la transformada inversa **seno generalizada** $\mathcal{B}_s^*$ como

$$\mathcal{B}_s\phi = \int_0^\infty \psi_s\left(x,p\right)\phi\left(x\right)dx, \quad \mathcal{B}_s^*\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \psi_s^*\left(x,p\right)\phi\left(p\right)dp, \tag{4.11}$$

donde

$$\psi_s\left(x,p\right) = \mathcal{E}_{iz}^-(x) - \mathcal{E}_{-iz}^-(x), \tag{4.12}$$

$$\psi_s^*\left(x,p\right) = z^{-1}\partial_x\psi_c^*(x,z). \tag{4.13}$$

Como los operadores de Green $\mathcal{G}(t)$ y de frontera $\mathcal{H}(t)$ estan definidos en base a $\mathcal{B}_c^*$ y $\mathcal{B}_c$, se precisa estudiar el comportamiento de estos operadores en diferentes espacios funcionales.

Las siguientes desigualdades serán altamente utilizadas a lo largo del desarrollo de este trabajo:

- Para $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$ y $\gamma \in [0,1]$ se cumple

$$\frac{1}{|a-b|} \leq \frac{1}{|a|^{1-\gamma}} \frac{1}{|b|^{\gamma}}. \tag{4.14}$$

- Para $\text{Re}(z) > 0$ y $\eta \in (0,1)$ se tiene

$$\left|e^{-z}\right| \leq C\ |z|^{-\eta}. \tag{4.15}$$

- Considere $z \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(z) > 0$. Para $\gamma \in (0,1)$, se cumple

$$\left|e^{-z} - 1\right| \leq |z|^{\gamma}. \tag{4.16}$$

- Tome $z \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}$ y $\gamma \in (0,1)$. Entonces

$$\int_{i\mathbb{R}} \frac{1}{|q|^{\gamma}|q-z|} dq \leq \frac{1}{|z|^{\gamma}}. \tag{4.17}$$

En el siguiente lema se reescriben las funciones ψ_c y ψ_s para facilitar los estimativos posteriores.

LEMA 4.3. *Considere $\mathcal{E}_w(y)$ como en* (4.10). *Entonces las funciones ψ_c, ψ_s definidas por* (4.8) *y* (4.12) *satisfacen las siguientes igualdades*

(1) $\psi_c(z,x) = -\left(e^{izx}e^{-\Gamma(-iz,K(z))} + e^{-izx}e^{-\Gamma(iz,K(z))}\right) + W_x(z,x)$

(2) $\psi_s(z,x) = e^{-izx}e^{-\Gamma(-iz,K(z))} - e^{izx}e^{-\Gamma(iz,K(z))} + zW(z,x)$,

donde

$$\begin{aligned} W(z,x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-px}\frac{1}{p^2+z^2}\left(e^{-\Gamma^{+}(p,K(z))} - e^{-\Gamma^{-}(p,K(z))}\right)dp, \\ K(z) &= -\sqrt{z} + iz^2. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando las fórmulas de Sokhotski-Plemelj (1.10) para $\text{Re}(z) = 0$ se tiene que

$$\mathcal{E}_{iz}^{-}(s) = -e^{izs}e^{-\Gamma(-iz,K(z))} + \lim_{w\to iz, \text{Re}(w)>0} \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-qs}e^{-\Gamma(q,K(z))}\frac{1}{q+w}dq. \tag{4.18}$$

En consecuencia

$$\psi_c = \mathcal{E}_{iz}^{-}(x) + \mathcal{E}_{-iz}^{-}(x) = -e^{izx}e^{-\Gamma(-iz,K(z))} + F^{-}(x,z), \tag{4.19}$$

donde

$$F^{-}(x,z) = \lim_{w \to iz, \mathrm{Re}(w)>0} F(x,w), \; F(x,w) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-qx} e^{-\Gamma(q,K(z))} \frac{q}{q^2 - w^2} dq.$$

Recordando que la función $\Gamma(\cdot, K(z))$ tiene un corte en el eje real positivo y tomando residuo en el punto $p = w$ se reescribe la función F como

(4.20)

$$F(x,w) = -e^{-izx} e^{-\Gamma(iz,K(z))} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-qx} \frac{q}{q^2 - w^2} \left(e^{-\Gamma^{+}(q,K(z))} - e^{-\Gamma^{-}(q,K(z))} \right) dq.$$

Combinando (4.19) con (4.20) se obtiene el resultado deseado. De forma similar se demuestra el resultado para ψ_s. Así el Lema 4.3 ha sido demostrado. ■

En el siguiente lema se exponen diferentes estimativos que satisfacen los operadores anteriormente definidos.

LEMA 4.4. *Los siguientes estimativos se satisfacen:*

- $\|\mathcal{B}_c^* \hat{\phi}\| + \|\mathcal{B}_s^* \hat{\phi}\| \leq C \|\hat{\phi}\|, \|\mathcal{B}_c^* \hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}}$
- $\|\mathcal{B}_c \phi\| + \|\mathcal{B}_s \phi\| \leq C \|\phi\|, \|\mathcal{B}_c \phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C \|\phi\|_{\mathbf{H}^1}$.
- $\|\partial_z B_c \phi\| \leq C \left(\|\phi\| + \|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}} \right)$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición del operador $\mathcal{B}_c^*$ dada por (4.7) y via Teorema de Plancherel se tiene

$$\|\mathcal{B}_c^* \hat{\phi}\| \leq C \|\hat{\phi}(z)\| + C \left\| \int_0^{\infty} \hat{\phi}(z) z K'(z) \Theta(\cdot, z) dz \right\|. \tag{4.21}$$

donde

$$\Theta(x,z) = \int_0^{\infty} e^{\Gamma(-p,K(z))} e^{-px} \psi(p,z) dp, \tag{4.22}$$

$$\psi(p,z) = \frac{1}{p} \frac{((ip)^{\frac{1}{2}} - (-ip)^{\frac{1}{2}})}{(ip^2 + (ip)^{\frac{1}{2}} - K(z))(ip^2 + (-ip)^{\frac{1}{2}} - K(z))}, \; K(z) = iz^2 - \sqrt{z}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder se infiere

$$\left\| \int_0^\infty zK'(z)\hat{\phi}(z)\Theta(\cdot,z)dz \right\| \leq C \int_0^\infty (1+z^2)\left|\hat{\phi}(z)\right| \|\Theta(\cdot,z)\|dz. \tag{4.23}$$

Como $K^{\pm}(p) \neq K(z)$ la desigualdad (4.14) garantiza que ψ satisface

$$\begin{aligned} |\psi(p,z)| &\leq Cp^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{|K(z)|^{2-\gamma}} \frac{1}{\left|ip^2+(ip)^{\frac{1}{2}}\right|^{\gamma}} \frac{1}{\left|ip^2+(-ip)^{\frac{1}{2}}\right|^{\gamma}} \\ &\leq Cp^{-\frac{1}{2}} \{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4+4\gamma} \{p\}^{-\gamma} \langle p\rangle^{-4\gamma}, \gamma \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Via el Lema 4.2 $\left|e^{\Gamma(-p,K(z))}\right| \leq C$, de lo cual se concluye

$$\begin{aligned} |\Theta(x,z)| &\leq C\{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{|p|}} \{p\}^{-\frac{1}{8}-\gamma} \langle p\rangle^{-\frac{1}{2}-\gamma} dp \\ &\leq C\{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Para el caso $x > 1$ se reescribe la función Θ como

$$\Theta(x,z) = \frac{e^{-ix}}{2\pi i} \int_0^\infty e^{(-p+i)x} e^{\Gamma(-p,K(z))} \psi(p,z)dp.$$

Observando que $\mathrm{Re}\{(-p+i)x\} < 0$ en vista de las desigualdades (4.15) , (4.24), con $\delta > \frac{1}{2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} |\Theta(x,z)| &\leq \frac{C}{|x|^{\delta}} \{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4-\frac{1}{2}+\gamma} \int_0^\infty \frac{1}{|p|^{\frac{1}{2}}|p+i|^{\delta}} \{p\}^{-\frac{1}{8}-\gamma} \langle p\rangle^{-\frac{1}{2}-\gamma} dp \\ &\leq C\{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4-\frac{1}{2}+\gamma} x^{-\delta}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Combinando (4.25) y (4.26) se llega a

$$|\Theta(x,z)| \leq \frac{C}{1+|x|^{\delta}} \{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4-\frac{1}{2}+\gamma}, \text{ with } \gamma \in (0,1),$$

y como consecuencia

$$\|\Theta(\cdot,z)\| \leq C\{z\}^{-1+\gamma} \langle z\rangle^{-4-\frac{1}{2}+\gamma}. \tag{4.27}$$

De los estimativos (4.21), (4.23) y (4.27) se tiene

$$\left\|\mathcal{B}_c^*\hat{\phi}\right\| \leq C\|\hat{\phi}\|. \tag{4.28}$$

De forma análoga se demuestra $\|\mathcal{B}_s^*\hat{\phi}\| \leq C\|\hat{\phi}\|$. Por definición

$$\partial_x\psi_c^*(z,x) = z\psi_{\sin}^*(z,x),$$

por lo tanto $\partial_x\mathcal{B}_c^*\hat{\phi} = \mathcal{B}_s^* z\hat{\phi}$. En consecuencia,

$$\|\mathcal{B}_c^*\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}}. \tag{4.29}$$

Ahora, se estima la norma $\mathbf{L}^2$ del operador $\mathcal{B}_c$. Via el Lema 4.3

$$\psi_c(z,y) = e^{izx}e^{-\Gamma(-iz,K(z))} + e^{-izx}e^{-\Gamma(iz,K(z))} + W(z,y),$$

donde

$$W(z,y) \;\; = \;\; -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-p(y+i)}e^{ip}\frac{p}{p^2+z^2}\left(e^{-\Gamma^+(p,K(z))} - e^{-\Gamma^-(p,K(z))}\right)dp.$$

Del Lema 4.2 se sabe que $e^{-\Gamma^+(p,K(z))} - e^{-\Gamma^-(p,K(z))} = O(\{p\}^\gamma\langle p\rangle^{-\frac{3}{2}})$, esto lleva a concluir $W(z,y) = O\left(\langle z\rangle^{-2}(y+i)^\gamma\right)$, con $\gamma \in (\frac{1}{2},1)$, además como $e^{-\Gamma(\pm iz,K(z))} = O(1)$ utilizando el Teorema de Plancherel y la desigualdad de Hölder se obtiene

$$\|\mathcal{B}_c\phi\| \leq C\|\phi\|. \tag{4.30}$$

De forma similar se demuestra $\|\mathcal{B}_s\phi\| \leq C\|\phi\|$. Via cálculo directo

$$z\psi_c(x,z) = \partial_x\psi_s(x,z).$$

Por tanto integrando por partes

$$z\mathcal{B}_c\phi(z) = \mathcal{B}_s\phi'(z) + \psi_s(0,z)\phi(0),$$

como $\psi_s(0,z) = 0$ se concluye $\|\mathcal{B}_c\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}$.

Ahora se demostrará

$$\|\partial_z B_c\phi\| \leq C\left(\|\phi\| + \|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}}\right).$$

Derivando bajo el signo de la integral en la definición del operador $\mathcal{B}_c$ se tiene

$$\partial_z \mathcal{B}_c \phi(y) = \int_0^\infty \partial_z \psi_c(y,z)\phi(y)dy,$$

donde por el Teorema de Cauchy la función $\psi_c(z,y)$ ha sido reescrita como

$$\psi_c(y,z) = e^{-\Gamma(-iz,K(z))}\left(e^{izy}-1\right) + e^{-\Gamma(iz,K(z))}\left(e^{-izy}-1\right) + W(y,z),$$

con

$$W(y,z) = \frac{1}{\pi i}\int_0^\infty (e^{-py}-1)\frac{p}{p^2+z^2}\left[e^{-\Gamma^+(p,K(z))} - e^{-\Gamma^-(p,K(z))}\right]dp.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\partial_z \psi_c(y,z) = & -e^{-\Gamma(-iz,K(z))}\Gamma_z(-iz,K(z))\left(e^{izy}-1\right) \\ & + e^{-\Gamma(iz,K(z))}\Gamma_z(iz,K(z))\left(e^{-izy}-1\right) \\ & + iy\left[e^{-\Gamma(-iz,K(z))}e^{izy} - e^{-\Gamma(iz,K(z))}e^{-izy}\right] + W_z(y,z),\end{aligned}$$

En el Lema 4.2 se demostró $\Gamma_z(\pm iz,K(z)) = O(z^{-1})$ y por tanto se concluye

(4.31)

$$\partial_z \psi_c(z,y) = y\left[e^{-\Gamma(-iz,K(z))}e^{izy} - e^{-\Gamma(iz,K(z))}e^{-izy}\right] + y^\gamma O(\{z\}^{-(1-\gamma)}\langle z\rangle^{-1}) + W_z.$$

Por cálculo directo se tiene

(4.32)

$$\begin{aligned}\partial_z W(z,y) = & \int_0^\infty (e^{-py}-1)p\partial_z\left(\frac{1}{p^2+z^2}\left[e^{-\Gamma^+(p,K(z))} - e^{-\Gamma^-(p,K(z))}\right]\right)dp \\ = & \, z\int_0^\infty (e^{-py}-1)\left[e^{-\Gamma^+(p,K(z))} - e^{-\Gamma^-(p,K(z))}\right]\partial_p\left(\frac{1}{p^2+z^2}\right)dp \\ & -\int_0^\infty (e^{-py}-1)\frac{p}{p^2+z^2} \\ & \times\left[e^{-\Gamma^+(p,K(z))}\Gamma_z^+(p,K(z)) - e^{-\Gamma^-(p,K(z))}\Gamma_z^-(p,K(z))\right]dp,\end{aligned} \tag{4.33}$$

y via integración por partes

(4.34)

$$\begin{aligned}\partial_z W(z,y) &= -zy\int_0^\infty e^{-py}\frac{1}{p^2+z^2}\left[e^{-\Gamma^+(p,K(z))}-e^{-\Gamma^-(p,K(z))}\right]dp\\ &\quad -\int_0^\infty (e^{-py}-1)\frac{1}{p^2+z^2}\\ &\qquad\times\left[e^{-\Gamma^+(p,K(z))}(p\Gamma_z^+ + z\Gamma_p^+)-e^{-\Gamma^-(p,K(z))}(p\Gamma_z^- + z\Gamma_p^-)\right]dp\\ &= \mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2.\end{aligned}$$

Recordando que

$$\frac{e^{\Gamma^+(p,K(z))}}{K^+(p)+K(z)}=\frac{e^{\Gamma^-(p,K(z))}}{K^-(p)+K(z)},$$

se tiene

$$\mathcal{J}_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}zy\int_0^\infty e^{-py}\frac{e^{\Gamma^+(p,K(z))}}{p^2+z^2}\frac{\sqrt{p}}{K^+(p)+K(z)}dp=zy\int_0^\infty e^{-py}\frac{e^{\Gamma^+(p,K(z))}}{p^2+z^2}O(\langle p\rangle^{-2})dp$$

Mediante la sustitución $p\to pz$ se observa

$$|\mathcal{J}_1|\le y\langle z\rangle^{-2}. \tag{4.35}$$

Para la función $\mathcal{J}_2$ se observa

$$|\mathcal{J}_2|\le Cy^\gamma\int_0^\infty\frac{p^\gamma}{p^2+z^2}\left(|p\Gamma_z^+ + z\Gamma_p^+|+|p\Gamma_z^- + z\Gamma_p^-|\right)dp\le Cy^\gamma\{z\}^{1-\gamma}\langle z\rangle^{-2}. \tag{4.36}$$

En consecuencia las desigualdades (4.31), (4.32), (4.35) y (4.36) junto con el Teorema de Plancherel garantizan

$$\|\partial_z\mathcal{B}_c\phi\|\le C\left(\|\phi\|+\|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}}\right).$$

Así el Lema 4.4 esta demostrado. ■

También se precisa conocer el comportamiento de los operadores de Green y de Frontera en el espacio $\mathrm{H}^{0,1}$. El siguiente Lema será primordial para conocer tal comportamiento.

LEMA 4.5. *El siguiente estimativo se satisface para todo* $t>0$

- $\|B_c^* e^{K(\cdot)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \langle t\rangle \|B_c^* e^{K(\cdot)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\left(\left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^1} + \left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^{0,1}}\right).$
- $\|B_s^* e^{K(\cdot)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \langle t\rangle \|B_s^* e^{K(\cdot)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\left(\left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^1} + \left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^{0,1}}\right).$

DEMOSTRACIÓN. Se observa

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_c^* e^{K(z)t}\hat{\phi} &= \int_0^\infty e^{K(z)t}\left[e^{izx}e^{\Gamma(iz,K(z))} + e^{-izx}e^{\Gamma(-iz,K(z))}\right]\left[\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right] dz \\
&\quad + \hat{\phi}(0)\int_0^\infty e^{K(z)t}\left[e^{izx}e^{\Gamma(iz,K(z))} + e^{-izx}e^{\Gamma(-iz,K(z))}\right] dz \\
&\quad + \int_0^\infty e^{K(z)t} zK'(z)\Theta(x,z)\hat{\phi}(z)dz \\
&= \mathcal{J}_1\hat{\phi} + \mathcal{J}_2\hat{\phi} + \mathcal{J}_3\hat{\phi},
\end{aligned}$$

donde

$$\Theta(x,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-px}e^{\Gamma(-p,K(z))}}{\sqrt{p}(ip^2 + (ip)^{\frac{1}{2}} - K(z))(ip^2 + (-ip)^{\frac{1}{2}} - K(z))} dp.$$

Integrando por partes se tiene

(4.37)

$$\begin{aligned}
x\mathcal{J}_1\hat{\phi} &= \int_0^\infty e^{K(z)t}\left[\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right]\left(e^{\Gamma(iz,K(z))}\partial_z(e^{izx}) - e^{\Gamma(-iz,K(z))}\partial_z(e^{-izx})\right) dz \\
&= -\int_0^\infty e^{K(z)t}\left[\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right] \\
&\qquad \times \left(e^{izx+\Gamma(iz,K(z))}\partial_z\Gamma(iz,K(z)) - e^{-izx+\Gamma(-iz,K(z))}\partial_z\Gamma(iz,K(z))\right) dz
\end{aligned}$$

(4.38)
$$\begin{aligned}
&-\int_0^\infty e^{K(z)t}\left[\hat{\phi}_z(z) + K'(z)t\left[\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right]\right] \\
&\qquad \times \left(e^{izx}e^{\Gamma(iz,K(z))} + e^{-izx}e^{\Gamma(-iz,K(z))}\right) dz.
\end{aligned}$$

Combinando el Teorema de Plancherel junto con la desigualdad

$$|\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)| \leq Cz^{\frac{1}{2}}\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1},$$

se infiere

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\infty \left(e^{izx}e^{\Gamma(iz,K(z))} + e^{-izx}e^{\Gamma(-iz,K(z))}\right) e^{K(z)t}K'(z)t\left[\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right] dz \right\| \\
\leq\ & C\left\| e^{\Gamma(iz,K(z))}e^{K(z)t}K'(z)t\left[\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right] dz \right\| \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1} t\left(\int_0^\infty e^{-2\sqrt{z}t}dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1}.
\end{aligned}$$

De forma similar pueden ser estimados los otros términos de (4.37). De esta forma

$$\|\mathcal{J}_1\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1}. \tag{4.39}$$

Recordando que $|\Gamma(\pm iz, K(z))| \leq \{z\}^\gamma \langle z\rangle^{-\frac{1}{2}}$ con $\gamma > 0$ y considerando $\epsilon > 0$ via Teorema de Cauchy se infiere

$$\int_0^\infty e^{\pm izx}e^{\Gamma(iz,K(z))+K(z)t}dz = e^{-ix}\int_0^{\infty e^{\pm i\epsilon}} e^{i(\pm z+1)x}e^{\Gamma(\pm iz,K(z))+K(z)t}dz$$

y como consecuencia

$$\left\| \int_0^\infty e^{\pm izx}e^{\Gamma(iz,K(z))+K(z)t}dz \right\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq \int_0^\infty e^{-\sqrt{z}t}\frac{1}{|z+1|^{\frac{3}{2}}}dz \leq C\langle t\rangle^{-1+\gamma}. \tag{4.40}$$

Por lo tanto

$$\|\mathcal{J}_2\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1}. \tag{4.41}$$

Para calcular la norma $\mathrm{H}^{0,1}$ de el operador $\mathcal{J}_3$ se observa via la desigualdad de Hölder

$$\|\mathcal{J}_3\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|\hat{\phi}\| \left[\int_0^\infty e^{-2\sqrt{z}t}|zK'^2\|\Theta(\cdot,z)\|^2_{\mathbf{H}^{0,1}}dz\right]^{\frac{1}{2}}.$$

De forma similar a como se demostró en el Lema 4.4 se demuestra

$$\|\Theta(\cdot,z)\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\{z\}^{-1+\gamma}\langle z\rangle^{-4+\gamma},$$

lo cual implica

$$\|\mathcal{J}_3\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq Ct^{-1+\gamma}\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1}. \tag{4.42}$$

De (4.39), (4.41) y (4.42) se concluye $\|\mathcal{B}_c^* e^{K(z)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}}$. Como $\|\mathcal{B}_c^*\hat{\phi}\| \leq C\|\hat{\phi}\|$ se tiene

$$\|B_c^* e^{K(z)t}\hat{\phi}\| \leq C\|e^{K(z)t}\hat{\phi}\| \leq C\left\langle t\right\rangle^{-1}\left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^1}$$

y

$$\begin{aligned}
\|\partial_x B_c^* e^{K(z)t}\hat{\phi}\| &\leq C\|e^{K(z)t}z\hat{\phi}\| \leq C\left(\int_0^\infty e^{-2\sqrt{z}t}z^2\left|\hat{\phi}(z)\right|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left\|\hat{\phi}(z)\right\|_\infty^{\frac{1}{2}}\left\|\hat{\phi}(z)\right\|^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty e^{-2\sqrt{z}t}z dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left\langle t\right\rangle^{-1}\left(\left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^1} + \left\|\hat{\phi}\right\|_{\mathbf{H}^{0,1}}\right).
\end{aligned}$$

El segundo resultado se obtiene de forma similar. Así el Lema 4.5 ha sido demostrado. ■

Capítulo 5

DEMOSTRACIÓN DEL RESULTADO PRINCIPAL

Este capítulo se centra en estudiar el siguiente problema de valores iniciales y de frontera, en este caso el dato de frontera que se ha considerado es de tipo Neumann:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \left(iu_{xx} + |\partial_x|^{\frac{1}{2}} u \right) + i|u|^2 u = 0, t > 0, x > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), u_x(0,t) = h(t), \end{array} \right. \tag{5.1}$$

El resultado principal concerniente a la ecuación (5.1) se expone en el siguiente teorema

TEOREMA 5.1. *Considere* $u_0 \in \mathbf{Z} = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}_1^{0,1}(\mathbb{R}^+)$ *y* $h \in \mathbf{Y} = \mathbf{H}_{\infty}^{1,\beta}$*,* $\beta > \frac{1}{2}$ *con* $\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|h\|_{\mathbf{Y}} \leq \epsilon$*, donde* $\epsilon > 0$ *es suficientemente pequeño. Entonces existe una única solución global al problema* (5.1)

$$u \in \mathbf{C}\left([0,\infty); \mathbf{X} = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)\right).$$

Además la siguiente fórmula asintótica se satisfaceAdemás la siguiente fórmula asintótica se satisface

$$u(x,t) = h(t)\mathcal{B}_c^* \left\{ \frac{1}{K} \right\}(x) + At^{-2}\Lambda(xt^{-2}) + O(t^{-2-\gamma})\left(\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|u\|_{\mathbf{X}}^3\right) + O(t^{-\beta-\gamma})\|h\|_{\mathbf{Y}}, \tag{5.2}$$

con $\gamma > 0$*, uniformemente con respecto* $t \to \infty$, *donde* $K(z) = iz^2 + \sqrt{z}, z > 0$*,* $\Lambda \in \mathbf{L}^\infty$

$$\begin{aligned}\Lambda(s) &:= \mathcal{F}_c\{e^{-\sqrt{z}}\} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{z}}\int\limits_0^\infty e^{-pzs}\frac{p^{-\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-1)((-ip)^{\frac{1}{2}}-1)}dp\,dz,\\ A &:= \mathcal{B}_c\left(\int_0^\infty |u|^2u(\tau)dt + u_0\right)\Big|_{p=0} + \theta(\beta)\left(\mathcal{L}h\right)(0) < \infty,\end{aligned}$$

siendo θ *la función característica del intervalo* $[1,\infty)$*,* $\mathcal{L}$ *el operador transformada de Laplace y* $\mathcal{F}_c$ *,* $\mathcal{B}_c^*$ *los operadores respectivamente definidos en* (4.6) *y* (4.7)*.*

Este capítulo ha sido organizado de la siguiente forma. En la seccción 1 se obtienen estimaciones para los operadores de Green y de Frontera en los espacios $\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)$, $\mathbf{H}^1(\mathbf{R}^+)$ y en base a estos estimativos se demuestra el Teorema 5.1 en la sección 2.

1. Estimativos a priori

En esta sección se presentan ciertas propiedades que satisfacen los operadores $\mathcal{G}(t)$, $\mathcal{H}(t)$ en diferentes espacios funcionales, junto con las propiedades asintóticas de los mismos, lo cual permitirá demostrar tanto la existencia y la unicidad de la solución como analizar su comportamiento asintótico. Como ya se demostró en el capítulo tres la solución al problema lineal asociado a (5.1) esta dada por

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)u_0 + \mathcal{H}(t)h,$$

donde el operador de Green y el operador de frontera están dados por

$$\mathcal{G}(t)\phi = \mathcal{B}_c^*\{e^{K(p)t}\mathcal{B}_c\phi\}, K(z) = ip^2 - \sqrt{p}. \tag{5.3}$$

$$\mathcal{H}(t)h = i\mathcal{B}_c^*\left\{\int\limits_0^t e^{K(p)(t-\tau)}h(\tau)d\tau\right\}, \tag{5.4}$$

con $\mathcal{B}_c,\ \mathcal{B}_c^*$ como en (4.7). En el siguiente lema se estima la norma del operador de Green en $\mathbf{H}^{0,1}(\mathbf{R}^+)$, $\mathbf{H}^1(\mathbf{R}^+)$, así como el comportamiento asintótico del mismo.

LEMA 5.1. *El siguiente estimativo se cumple*

$$\langle t\rangle^2 \|\mathcal{G}(t)\phi\|_\infty + \langle t\rangle \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\left(\|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^1}\right).$$

Además

$$\mathcal{G}(t)\phi = t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\widehat{\phi}(0) + O(t^{-2-\gamma})\left(\|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^1}\right), \tag{5.5}$$

donde $\widehat{\phi} = \mathcal{B}_c\phi$*,* $\Lambda \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)$*,*

$$\Lambda(s) = \mathcal{F}_c\{e^{-\sqrt{z}}\} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{z}}\int\limits_0^\infty e^{-pzs}\frac{p^{-\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-1)((-ip)^{\frac{1}{2}}-1)}dp\, dz. \tag{5.6}$$

DEMOSTRACIÓN. En adelante se denota $\widehat{\phi} = \mathcal{B}_c\phi$, como $\widehat{\phi}(0) \neq 0$, para demostrar la fórmula asintótica de $\mathcal{G}(t)\phi$, se reescribe este operador como

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t)\phi &= \widehat{\phi}(0)\mathcal{B}_c^*\{e^{K(z)t}\} + \mathcal{B}_c^*\{e^{K(z)t}[\widehat{\phi}(z) - \widehat{\phi}(0)]\} \\ &= \mathcal{J}_1(t)\phi + \mathcal{J}_2(t)\phi. \end{aligned} \tag{5.7}$$

De (4.9) se infiere que $\psi_c^*(x,z)$ satisface

$$\psi_c^*(x,z) = \left(2\cos zx + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-px}\psi_1(p,z)dp\right) + R_1(x,z) + R_2(x,z),$$

donde

$$\psi_1(p,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{z}{p}}\frac{1}{((ip)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{z})((-ip)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{z})},$$

$$R_1(x,z) = e^{izx}\left(e^{\Gamma(iz,K(z))} - 1\right) + e^{-izx}\left(e^{\Gamma(-iz,K(z))} - 1\right),$$

y

$$R_2(x,z) = C\int\limits_0^\infty e^{-px}\left[\psi(p,z) - \psi_1(p,z)\right]dp.$$

Por el Lema 4.2 se sabe que $e^{\Gamma(\pm iz,K(z))} - 1 = O(z^\gamma)$ y como consecuencia $R_1(x,z) = O(z^\gamma)$. Ahora se estima R_2, para esto denótese $\psi(p,z) = e^{\Gamma(-p,z)}\lambda(p,z)$ con

$$\lambda(p,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{p}(K^+(p)-K(z))(K^-(p)-K(z))},$$

y así se observa

$$\begin{aligned}\psi(p,z) \; - \; &\psi_1(p,z) \\ &= e^{\Gamma(-p,K(z))}\left(\lambda(p,z)-\psi_1(p,z)\right) + \left(e^{\Gamma(-p,K(z))}-1\right)\psi_1(p,z),\end{aligned}$$

como

$$|\lambda(p,z)-\psi_1(p,z)| \leq C\,|\psi_1(p,z)|\left|z^{\frac{3}{2}} + p^{4\gamma}z^{-\gamma} + \frac{z^4+z^{\frac{3}{2}}+z^2p^{\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{z})((-ip)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{z})}\right|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}R_2(x,z) = & \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-px}Y(-p,K(z)) \\ & \qquad \times\left(\lambda(p,z)-\psi_1(p,z)\right) + \left(Y(-p,K(z))-Y(-p,0)\right)\psi_1(p,z)dp \\ = & \int_0^\infty e^{-px}\psi_1(p,z)O(z^{\frac{3}{2}} + p^{4\gamma}z^{-\gamma} + \frac{z^4+z^{\frac{3}{2}}+z^2p^{\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{z})((-ip)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{z})} + z^\gamma)dp.\end{aligned}$$

Mediante el cambio de variables $p \to pz$ y la igualdad

$$\psi_1(pz,z) = \sqrt{2}z^{-1}\frac{(p)^{-\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-1)((-ip)^{\frac{1}{2}}-1)},$$

se obtiene

$$\begin{aligned}R_2(x,z) &= \int_0^\infty e^{-px}\psi_1(zp,z)O(z^{\frac{3}{2}} + p^{4\gamma}z^{4\gamma-\gamma} + \frac{z^4+z^{\frac{3}{2}}+z^2p^{\frac{1}{2}}}{z((ip)^{\frac{1}{2}}-1)((-ip)^{\frac{1}{2}}-1)} + z^\gamma)zdp \\ &= O(z^\gamma).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi_c^*(x,z) = 2\cos zx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-pzx}\frac{p^{-\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-1)((-ip)^{\frac{1}{2}}-1)}dp + O(z^\gamma), \tag{5.8}$$

de lo cual se infiere

$$\mathcal{J}_1(t)\phi = t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\widehat{\phi}(0) + O(t^{-2-\gamma})\|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{L}^\infty}, \tag{5.9}$$

siendo

$$\Lambda(s) = \mathcal{F}_c\{e^{-\sqrt{z}}\} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{z}}\int_0^\infty e^{-pzs}\frac{p^{-\frac{1}{2}}}{((ip)^{\frac{1}{2}}-1)((-ip)^{\frac{1}{2}}-1)}dp\,dz.$$

Como

$$\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0) = \int_0^z \hat{\phi}_z(z)dz,$$

via desigualdad de Hölder se tiene

$$\left|\hat{\phi}(z) - \hat{\phi}(0)\right| \leq C\sqrt{z}\|\hat{\phi}_z\|,$$

de lo cual

$$|\mathcal{J}_2(t)\phi| \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}_1}\int_0^\infty e^{-\sqrt{z}t}\sqrt{z}|\psi_c^*(z,x)|dz,$$

y utilizando que $\psi_c^*(z,x) = O(1)$ se obtiene

$$|\mathcal{J}_2(t)\phi| \leq Ct^{-3}\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}_1}. \tag{5.10}$$

En vista de que $\left|\hat{\phi}(0)\right| \leq C\|\widehat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1}$, via el Lema 4.5, y los estimativos (5.7), (5.9) y (5.10) se obtiene (5.5). Además de esto

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_\infty \leq Ct^{-2}\left(\|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^1}\right), \quad \text{para } t > 1. \tag{5.11}$$

Por el Lema 4.5 se sabe que $\|\mathcal{B}_c^* e^{K(z)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \langle t\rangle\,\|\mathcal{B}_c^* e^{K(z)t}\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^1}$. Lo cual implica

$$\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \langle t\rangle\,\|\mathcal{G}(t)\phi\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\left(\|\mathcal{B}_c\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathcal{B}_c\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}}\right).$$

Asimismo el Lema 4.4 garantiza

$$\|\mathcal{B}_c\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{H}^1}, \|\mathcal{B}_c\phi\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\left(\|\phi\| + \|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}}\right).$$

De esta forma el Lema 5.1 ha sido demostrado. ■

El siguiente Lema se centra en el estudio del operador de frontera

$$\mathcal{H}(t)h = i\mathcal{B}_c^* \left\{ \int_0^t e^{K(p)(t-\tau)} h(\tau) d\tau \right\},$$

se analiza su comportamiento en diferentes espacios funcionales así como su expresión asintótica.

LEMA 5.2. *Para* $h \in \mathbf{Y} = \mathbf{H}_\infty^{1,\beta}(\mathbb{R}^+)$*,* $\beta > \frac{1}{2}$ *se satisface:*

$$\langle t \rangle^\beta \|\mathcal{H}(t)h\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathcal{H}(t)h\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|h\|_{\mathbf{Y}}.$$

Además de esto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t)h &= h(t)\mathcal{B}_c^* \frac{1}{K(z)} + t^{-1-\beta} \|h\|_{\mathbf{Y}}, \beta \leq 1, \\ \mathcal{H}(t)h &= h(t)\mathcal{B}_c^* \frac{1}{K(z)} + t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\widehat{h}(0) + t^{-\beta-\gamma} \|h\|_{\mathbf{Y}}, \beta > 1, \end{aligned} \tag{5.12}$$

donde $\Lambda(s) \in \mathbf{L}^\infty$ *given by* (5.6).

DEMOSTRACIÓN. Via el Lema 4.4 $\|\mathcal{B}_c^*\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}_1} \leq C\|\hat{\phi}\|_{\mathbf{H}^{0,1}}$. Por cálculo directo se tiene

$$\|\mathcal{H}(t)h\|_{\mathbf{H}_1} \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \, |h(\tau)| \left(\int_0^\infty e^{-2\sqrt{z}(t-\tau)}(1+z^2)dz \right)^{\frac{1}{2}} + \|\langle z \rangle \, h_2(z,t)\|, \tag{5.13}$$

donde $h_2(z,\tau)$

$$h_2(z,t) = \int_{\frac{t}{2}}^t e^{K(z)(t-\tau)} h(\tau) d\tau.$$

Al $h \in \mathbf{H}_\infty^{1,\beta}$ se sabe que $|h(t)| \leq C \langle t \rangle^{-\beta} \|h\|_{\mathbf{H}_\infty^{1,\beta}}$ y por tanto para $|z| < 1$ se cumple

$$\begin{aligned} |h_2(z,t)| &\leq \|h\|_{\mathbf{H}_\infty^{1,\beta}} \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\sqrt{z}(t-\tau)} \langle \tau \rangle^{-\beta} d\tau \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\beta} \|h\|_{\mathbf{H}_\infty^{1,\beta}} \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-\sqrt{z}(t-\tau)} d\tau \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\beta} \|h\|_{\mathbf{H}_\infty^{1,\beta}} \{z\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Integrando por partes se tiene para $|z| \geq 1$

$$h_2(z,t) = \frac{1}{K(z)} \left(h(t) - e^{K(z)\frac{t}{2}} h(\frac{t}{2}) - \int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{K(z)(t-\tau)} h_\tau(\tau) d\tau \right)$$

de lo cual se concluye

$$\begin{aligned} |h_2(z,t)| &\leq |z|^{-2} \|h\|_{\mathbf{H}^{1,\beta}_\infty} \langle t \rangle^{-\beta} \left(1 + \int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{-\sqrt{z}(t-\tau)} d\tau \right) \\ &\leq C\,|z|^{-2} \langle t \rangle^{-\beta} \|h\|_{\mathbf{H}^{1,\beta}_\infty}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Las estimaciones (5.14) y (5.15) infieren

$$\|h_2(z,t)\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq \langle t \rangle^{-\beta} \|h\|_{\mathbf{H}^{1,\beta}_\infty}. \tag{5.16}$$

Por otra parte

(5.17)

$$\left| \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau\, |h(\tau)| \left(\int_0^\infty e^{-2\sqrt{z}(t-\tau)} (1+z^2) dz \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq C \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \frac{|h(\tau)|}{(t-\tau)} \leq \langle t \rangle^{-\beta} \|h\|_{\mathbf{H}^{1,\beta}_\infty}.$$

Aplicando (5.16), (5.17) en (5.13) se concluye

$$\langle t \rangle^{\beta} \|\mathcal{H}(t)h\|_{\mathbf{H}^1} \leq C \|h\|_{\mathbf{Y}} \tag{5.18}$$

Para estimar la norma del operador $\mathcal{H}$ en el espacio $\mathbf{H}^{0,1}$ primero se observa

$$\|\mathcal{H}(t)h\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C \int_0^t \|H(t-\tau,\cdot)\|_{\mathbf{H}^{0,1}} |h(\tau)| d\tau,$$

donde

$$H(s,x) \;= \mathcal{B}_c^*\{e^{K(z)s}\}$$

De forma similar a como se estimaron los operadores $\mathcal{J}_2$ y $\mathcal{J}_3$ en el Lema 4.5 se demuestra

$$\|H(s,\cdot)\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C s^{-1+\gamma}.$$

De esto se concluye

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(t)h\|_{\mathbf{H}^{0,1}} &\leq C\int_0^t (t-\tau)^{-1+\gamma}|h(\tau)|d\tau \\ &\leq C\,\|h\|_{\mathbf{H}^{0,\beta}_\infty}\int_0^t (t-\tau)^{-1+\gamma}\,(1+\tau)^{-\beta}\,d\tau \leq C\,\|h\|_{\mathbf{H}^{0,\beta}_\infty}. \end{aligned}$$

Así el primer estimativo ha sido demostrado

Ahora, se estudiará el comportamiento asintótico del operador $\mathcal{H}(t)$. Para esto se reescribe

$$h_1(z,t) = e^{K(z)t}\int_0^t e^{-K(z)\tau}h(\tau)d\tau = h_{11}(z,t) + h_{12}(z,t), \tag{5.19}$$

donde

$$h_{11}(z,t) = e^{K(z)t}\int_0^{\frac{t}{2}} h(\tau)d\tau + \int_0^{\frac{t}{2}} e^{K(z)(t-\tau)}\left(1 - e^{K(z)\tau}\right)h(\tau)d\tau$$

y

$$\begin{aligned} h_{12}(z,t) &= \int_{\frac{t}{2}}^t e^{K(z)(t-\tau)}h(\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{K(z)}h(t) - \frac{1}{K(z)}e^{K(z)\frac{t}{2}}h(\frac{t}{2}) - \frac{1}{K(z)}\int_{\frac{t}{2}}^t e^{K(z)(t-\tau)}h'(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Como $\left|1 - e^{K(z)\tau}\right| \leq Cz^{\frac{\gamma}{2}}\tau^\gamma$. Via (5.8) del Lema 5.1 se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_c^* h_{11}(z,t) &= t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\int_0^{\frac{t}{2}} h(\tau)d\tau + \int_0^{\frac{t}{2}} O((t-\tau)^{-2-\gamma})\tau^\gamma h(\tau)d\tau \\ &= t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\int_0^{\frac{t}{2}} h(\tau)d\tau + \max(t^{-2-\gamma}, t^{-1-\beta-\gamma})\,\|h\|_{\mathbf{H}^{0,\beta}_\infty}. \end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $z \to zt^{-2}$ se obtiene

$$h(\frac{t}{2})\mathcal{B}_c^*\frac{1}{K(z)}e^{K(z)\frac{t}{2}} = |h(t)|\,O(t^{-1}), \tag{5.20}$$

y

$$\frac{1}{K(z)}\int_{\frac{t}{2}}^t e^{K(z)(t-\tau)}h'(\tau)d\tau = O(h'(t))\frac{1}{K(z)},$$

de lo cual se infiere

$$\mathcal{B}_c^* \frac{1}{K(z)} \int_{\frac{t}{2}}^{t} e^{K(z)(t-\tau)} h'(\tau) d\tau = O(h'(t)). \tag{5.21}$$

Así las desigualdades (5.19) -(5.21) implican

$$\mathcal{H}(t)h = h(t)\mathcal{B}_c^* \frac{1}{K(z)} + t^{-2}\Lambda(xt^{-2}) \int_0^{\frac{t}{2}} h(\tau)d\tau + \max(t^{-2-\gamma}, t^{-1-\beta}) \|h\|_{\mathbf{Y}}.$$

Por tanto si $\beta \leq 1$ se tiene

$$\mathcal{H}(t)h = h(t)\mathcal{B}_c^* \frac{1}{K(z)} + t^{-\beta-\gamma} \|h\|_{\mathbf{Y}}.$$

En caso contrario si $\beta > 1$ se observa

$$\mathcal{H}(t)h = h(t)\mathcal{B}_c^* \frac{1}{K(z)} + t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\widehat{h}(0) + t^{-2-\gamma} \|h\|_{\mathbf{Y}}.$$

De esta forma el Lema 5.2 esta demostrado. ■

2. Demostración del Teorema 5.1

Plan de prueba: Esta demostración se realizará en dos pasos.

: *Paso 1*: Se define un operador $\mathcal{A}$ que actua sobre cierto espacio funcional, vía el principio de Duhamel los puntos fijos a este operador $\mathcal{A}$ solucionan (5.1) en un sentido semiclásico (ver definición 1.6). La meta en este paso es mostar que existe un único punto fijo de este operador.

: *Paso 2*: Utilizando el comportamiento para tiempos grandes de los operadores $\mathcal{G}(t)$ y $\mathcal{H}(t)$ mostrado en los lemas 5.1 y 5.2 se demuestra la fórmula asintótica para la solución.

Via principio de Duhamel la solución a (5.1) satisface la siguiente ecuación integral

$$u(x,t) = \mathcal{G}(t)\, u_0 + \mathcal{H}(t)\, h - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau)\, d\tau, \tag{5.22}$$

donde $\mathcal{N}(u) = |u|^2 u$. Se denota por $\mathbf{Z} := \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}_1^{0,1}(\mathbb{R}^+)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{H}_\infty^{1,\beta}, \beta > \frac{1}{2}$ con

$$\|\phi\|_{\mathbf{Z}} := \|\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}}.$$

Considere el espacio funcional

$$\mathbf{X} := \left\{ \phi \in \mathbf{C}\left([0,\infty); \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^+) \cap \mathbf{H}^{0,1}(\mathbb{R}^+)\right) : \|\phi\|_{\mathbf{X}} < \infty \right\},$$

donde

$$\|\phi\|_{\mathbf{X}} := \sup_{t\geq 0} \left(\langle t\rangle^{\frac{1}{2}} \|\phi(t)\|_{\mathbf{H}^1} + \|\phi(t)\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \langle t\rangle^{\rho} \|\phi(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \right),$$

con $\rho = \min\{2,\beta\} > \frac{1}{2}$. Para mostar que el operador

$$\mathcal{A}u := \mathcal{G}(t)\, u_0 - \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\, \mathcal{N}(u)(\tau)\; d\tau + \mathcal{H}(t)\, h, \tag{5.23}$$

es un mapeo de contracción sobre $\mathbf{X}_r = \{v\in \mathbf{X}_r : \|v\|_{\mathbf{X}} \leq r\}$, donde $r = 2C\left(\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + \|h\|_{\mathbf{Y}}\right)$ es suficientemente pequeño, primero se demuestra

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\, (|v|^2 v) d\tau \right\|_{\mathbf{X}_r} \leq C\, \|v\|^3_{\mathbf{X}_r}. \tag{5.24}$$

Para esto observe que si $v \in \mathbf{X}_r$ se tiene

$$\begin{aligned} \left\| |v|^2 v(\tau) \right\|_{\mathbf{H}^1} &\leq C\|v\|^2_{\mathbf{L}^\infty} \|v\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\langle\tau\rangle^{-2\rho} \|v\|^3_{\mathbf{X}_r}. \\ \left\| |v|^2 v(\tau) \right\|_{\mathbf{H}^{0,1}_1} &\leq C\|v\|_{\mathbf{L}^\infty} \|v\| \|v\|_{\mathbf{H}^{0,1}_1} \leq \langle\tau\rangle^{-\rho-\frac{1}{2}} \|v\|^3_{\mathbf{X}_r} \end{aligned} \tag{5.25}$$

Del Lema 5.1 se cumple

$$\langle t\rangle\, \|\mathcal{G}(t)\,\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \|\mathcal{G}(t)\,\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\left(\|\phi\|_{\mathbf{H}^1} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}_1} \right).$$

Por lo tanto via (5.25)

$$\sqrt{t} \left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\, (|v|^2 v) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^1} \leq C\|v\|^3_{\mathbf{X}_r} \sqrt{t} \int_0^\infty \frac{1}{1+\langle t-\tau\rangle} \langle\tau\rangle^{-1-\gamma}\, d\tau \leq C\, \|v\|^3_{\mathbf{X}_r},$$

y

$$\left\| \int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\, (|v|^2 v) d\tau \right\|_{\mathbf{H}^{0,1}} \leq C\|v\|^3_{\mathbf{X}_r} \int_0^\infty \langle\tau\rangle^{-1-\gamma}\, d\tau \leq C\, \|v\|^3_{\mathbf{X}_r}.$$

De forma similar, via el Lema 5.1 se tiene

$$\begin{aligned}\langle t\rangle^{\rho}\left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)(|v|^2 v)d\tau\right\|_{\infty} &\leq C\langle t\rangle^{\rho}\|v\|_{\mathbf{X}}^3 \\ &\times\left(\left|\int_0^{\frac{t}{2}}\frac{1}{(t-\tau)^2}\langle t\rangle^{-3\rho}d\tau\right|+C\left|\int_{\frac{t}{2}}^t\frac{1}{(t-\tau)^{\gamma}}\langle t\rangle^{-3\rho}d\tau\right|\right) \\ &\leq C\|v\|_{\mathbf{X}}^3.\end{aligned}$$

Así (5.24) esta demostrado. Nuevamente via el Lema 5.1 se tiene $\|\mathcal{G}(t)\,u_0\|_{\mathbf{X}} \leq C\|u_0\|_{\mathbf{Z}}$, y del Lema 5.2 se infiere $\|\mathcal{H}(t)\,h\|_{\mathbf{X}} \leq C\|h\|_{\mathbf{Y}}$. Como consecuencia para $v\in \mathbf{X}_r$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(v)\|_{\mathbf{X}_r} &\leq \|\mathcal{G}(t)\,u_0\|_{\mathbf{X}}+\left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\,\mathcal{N}(v)(\tau)d\tau\right\|_{\mathbf{X}}+\|\mathcal{H}(t)\,h\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C\left(\|u_0\|_{\mathbf{Z}}+\|v\|_{\mathbf{X}_r}^3+\|h\|_{\mathbf{Y}}\right)\leq \frac{r}{2}+r^3 \\ &\leq r.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el operador $\mathcal{A}$ transforma la bola $\mathbf{X}_r$ en si mismo. De igual forma se estima que el operador $\mathcal{A}$ actuando en la diferencia entre dos funciones v, $w\in\mathbf{X}_r$ satisface

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}(v)-\mathcal{A}(w)\|_{\mathbf{X}_r} &\leq \left\|\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\left(\mathcal{N}(v)(\tau)-\mathcal{N}(w)(\tau)\right)d\tau\right\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C\|v-w\|_{\mathbf{X}}\left(\|v\|_{\mathbf{X}}+\|wr\|_{\mathbf{X}}\right)^2 \\ &\leq Cr^2\|v-w\|_{\mathbf{X}_r}\leq\frac{1}{2}\|v-w\|_{\mathbf{X}_r},\end{aligned}$$

pues $r>0$ es considerado suficientemente pequeño. En consecuencia $\mathcal{A}$ es un operador de contracción sobre $\mathbf{X}_r$ y así por el Teorema del Punto Fijo existe una única solución $u\in\mathbf{X}$ al problema de valores iniciales y de frontera (5.1). Ahora se demostrará la fórmula asintótica 5.2. De los Lemas 5.1 y 5.2 se tiene

(5.26) $$\mathcal{G}(t)u_0 + \mathcal{H}(t)h = h(t)\mathcal{B}_c^*\frac{1}{K(z)} + t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\left(\widehat{u}_0(0) + \theta(\beta)\widehat{h}(0)\right) + R,$$

donde $\theta(\beta) = 1$ para $\beta > 1$ y $\theta(\beta) = 0$ cuando $\beta \le 1$, $\widehat{\phi}(p) = \mathcal{B}_c\phi$, $\widehat{h}(p) = \mathcal{L}h$, $\Lambda \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{R}^+)$ esta definido por (5.6) y

$$R = t^{-2-\gamma}\|u_0\|_{\mathbf{Z}} + t^{-\beta-\gamma}\|h\|_{\mathbf{Y}}.$$

Así para $t > 1$ se observa

(5.27)
$$\begin{aligned}\int_0^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau &= \int_0^{\frac{t}{2}} \mathcal{G}(t)\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \mathcal{G}(t-\tau)\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau \\ &+ \int_0^{\frac{t}{2}} \left[\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}(t)\right]\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Via 5.26 se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{t}{2}} \mathcal{G}(t)\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau &= t^{-2}\Lambda(xt^{-2})\left(\int_0^\infty \mathcal{B}_c\mathcal{N}(u)(\tau)(0)d\tau - \int_{\frac{t}{2}}^\infty \mathcal{B}_c\mathcal{N}(u)(\tau)(0)d\tau\right) \\ &+O(t^{-(2+\delta)})\int_0^{\frac{t}{2}} \left(\|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}} + \|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\mathbf{H}^1}\right)d\tau.\end{aligned}$$

Utilizando

$$|\mathcal{B}_c\mathcal{N}(u)(\tau)(0)| \le C\|\mathcal{N}(u)(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} \le C\|u(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty}^2\|u\|_{\mathbf{H}_1^{0,1}} \le C\langle\tau\rangle^{-(1+\gamma)}\|u\|_{\mathbf{X}}^3,\ \gamma > 0,$$

se conluye que existe una constante A

$$A = \int_0^\infty \mathcal{B}_c\mathcal{N}(u)(\tau)(0)d\tau \le \infty,$$

tal que

(5.28) $$\int_0^t \mathcal{G}(t)\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau = t^{-2}A\Lambda(xt^{-2}) + t^{-(2+\gamma)})\|u\|_{\mathbf{X}}^3.$$

Como $\|\partial_t\mathcal{G}(t)\phi\|_\infty \le Ct^{-3}(\|\phi\|_{\mathbf{H}^{0,1}} + \|\phi\|_{\mathbf{H}^1})$ se concluye

(5.29) $$\int_0^{\frac{t}{2}} \left[\mathcal{G}(t-\tau) - \mathcal{G}(t)\right]\mathcal{N}(u)(\tau)\,d\tau = O(t^{-3})\|u\|_{\mathbf{X}}^3.$$

Del Lema 5.1 se tiene

(5.30)
$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} \mathcal{G}\,(t-\tau)\,\mathcal{N}(u)(\tau)\; d\tau = \|u\|_{\mathbf{X}}^{3} \int_{\frac{t}{2}}^{t} O(\langle t-\tau\rangle^{-2}\langle\tau\rangle^{-(1+\gamma)})d\tau = O(t^{-(2+\delta)})\|u\|_{\mathbf{X}}^{3}.$$

De (5.27)-(5.30) se obtiene

$$\int_{0}^{t} \mathcal{G}\,(t-\tau)\,\mathcal{N}(u)(\tau)\; d\tau = t^{-2}A\Lambda(xt^{-2}) + O(t^{-(2+\delta)})\|u\|_{\mathbf{X}}^{3}. \tag{5.31}$$

Combinando (5.26) y (5.31) con (5.22) se infiere (5.2). El teorema 5.1 esta demostrado.

APÉNDICES

Apéndice A. Criterio de Cauchy para integrales impropias

Sea Y un conjunto y supongamos que, para cada $y \in Y$ fijo, la función $f(x, y)$ esta definida sobre el intervalo $[a, b)$, con $-\infty < a < b \leq +\infty$, y toma valores numéricos. Supóngase que para cualquier $c \in (a, b)$ la función f es integrable sobre $[a, c]$. Entonces, la integral impropia

$$\int_a^b f(x, y)dx, \quad y \in Y,$$

es convergente si, y sólo si, para $\epsilon > 0$ y $y \in Y$, existe $\eta \in (a, b)$ tal que, para todo η_1 y η_2 que satisfacen la condición $\eta < \eta_1, \eta_2 < b$, se cumple

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x, y)dx \right| < \epsilon, \quad y \in Y.$$

Ver [**58**].

Apéndice B. Teorema de Weierstrass.

Sea $D \subset \mathbb{C}$ un demínio y f_n una sucesión de funciones holomorfas en D tal que la serie $\sum f_\nu$ converge uniformemente sobre compactos en D a f. Entonces f es una función holomorfa en en D y para cada $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum f_\nu^{(k)}$ converge sobre compactos en D a $f^{(k)}$:

$$f^{(k)}(z) = \sum f_\nu^{(k)}(z), \quad z \in D.$$

Apéndice C. Soluciones Generalizadas.

Pocas ecuaciones diferenciales parciales pueden ser resueltas en el sentido clásico (ej. ecuación de Laplace), pero para muchas otras no se puede encontrar este tipo de soluciones. Considere por ejemplo la siguiente ecuación

$$u_t + F(u)_x = 0, \tag{C.1}$$

la cual describe diferentes fenómenos que envuelven la dinámica de fluidos, y en particular modela la formación y propagación de ondas de choque. Por otra parte, algunas ondas de choque están descritas por funciones no continuas, así si se desea estudiar las leyes de conservación envueltas en (C.1) y compararlas con la física subyacente en este fenómeno, por tal motivo se precisa permitir la existencia de soluciones u, las cuales no son continuamente diferenciables o incluso continuas. En general, es muy conocido, que las ecuaciones que describen algunas leyes de conservación no tienen soluciones clásicas, pero éstas pueden ser resueltas en un sentido generalizado o dicho de otra forma tienen solución débil.

Definición C.1 *Para un operador pseudodifferencial $\mathcal{K}$, la función $u \in C([0,T), \mathbf{H}^s(\mathbf{R}))$ se dice que es una solución generalizada (o solución débil) de la ecuación $u_t + \mathcal{K}u = 0$, si para cada función $v \in S(\mathbb{R})$ se cumple*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} u[v_t + \mathcal{K}v]dxdt = 0.$$

De la definición anterior se observa que las soluciones débiles son buscadas en el espacio dual topológico, esto en en $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ el cual es comunmente conocido como espacio de funciones generalizadas o espacio de distribuciones. Una distribución bastante conocida es la delta de Dirac δ, la cual viene definida por la siguiente fórmula integral:

$$\int\limits_{R} \delta(x-a)f(x)dx = f(a).$$

Es frecuente que en física la delta de Dirac se use como una distribución de probabilidad idealizada; técnicamente, de hecho, es una distribución (en el sentido de Schwartz). Para mas información sobre estos tópicos puede consultar [**23**], [**18**] Cap. 3, [**19**] Cap. 12, [**57**] Cap. 1, [**49**] Cap. 1.

Apéndice D. Principio de Duhamel

Considere el problema de valores iniciales y de frontera

$$\text{(D.1)} \qquad \begin{cases} v_t + Lv = 0, \ x > 0, t > 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \\ v_x(0,t) = 0. \end{cases}$$

Denótese por $\mathbb{G}(t)v_0$ la solución a (D.1). Entonces la función

$$w(x,t) = \mathbb{G}(t)v_0 + \int\limits_0^t \mathbb{G}(t-\tau)f(\tau)d\tau,$$

satisface la ecuación diferencial

$$\text{(5.32)} \qquad w_t + Lw = f$$

con condición inicial $w(x,0) = v_0(x)$ y dato de frontera de tipo homogéneo, esto es $w(0,t) = 0$. (Ver [**38**]).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adams, Robert A. *Sobolev spaces. Pure and Applied Mathematics*, Vol. 65. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. xviii+268 pp.

[2] Árciga A, Martín P.. *Asymptotics for nonlinear evolution equation with module-fractional derivative on a half-line*, Bound. Value Probl. 2011, 29 p.

[3] Árciga Alejandre, Martín P.; Kaikina, Elena I. *Intermediate long-wave equation on a half-line,* JJ. Evol. Equ. 11, No. 4, 743-770 (2011).

[4] Baleanu, Dumitru; Diethelm, Kai; Scalas, Enrico; Trujillo, Juan J. *Fractional calculus. Models and numerical methods. Series on Complexity*, Nonlinearity and Chaos, 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2012. xxiv+400 pp.

[5] Begehr, Heinrich G. W. *Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994. x+273 pp.

[6] Bergh, Jöran; Löfström, Jörgen., *Interpolation spaces. An introduction*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. x+207 pp.

[7] Benitez, Felipe; Kaikina, Elena I. *A Neumann problem for the KdV equation with Landau damping on a half-line.* Nonlinear Anal. 74 (2011), no. 14, 4682–4697.

[8] Biondini, G.; Bui, A., *On the nonlinear Schrödinger equation on the half line with homogeneous Robin boundary conditions.* Stud. Appl. Math. 129 (2012), no. 3, 249–271.

[9] Bourgain J. *Global Solutions of Nonlinear Schrodinger Equations*. American Mathematical Society colloquium Publications v 46. 1999.

[10] Brezis, H., *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Mathematics Studies, 5. Notas de Matemática, 50. North-Holland, Amsterdam-London, 1972. American Elsevier, New York, 1973.

[11] Brezis, H., *Analyse fonctionnelle*. Théorie et applications. Collection Mathématiques. Appliquées pour la Maitrise. Masson, Paris, (1983).

[12] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, (2011). xiv+599 pp.

[13] Boutet de Monvel, Anne; Kotlyarov, Vladimir; Shepelsky, Dmitry, *Decaying long-time asymptotics for the focusing NLS equation with periodic boundary condition.* Int. Math. Res. Not. 2009, No. 3, 547-577 (2009).

[14] Bu, Qiyue, *On well-posedness of the forced nonlinear Schrödinger equation*. Appl. Anal. 46 (1992), no. 3-4, 219–239.

[15] Cazenave, Thierry, Haraux A., *An introduction to semilinear evolution equations.* Transl. by Yvan Martel Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. 13. Oxford: Clarendon Press. xiv, 186 p. (1998).

[16] Cazenave, Thierry, *Semilinear Schrödinger Equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics 10. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); New York, NY: Courant Institute of Mathematical Sciences, xiii, 323 p. (2003)

[17] Degasperis, A.; Manakov, S.V.; Santini, P.M., *On the initial-boundary value problems for soliton equations.* Shabat, A.B.(ed.) et al., New trends in integrability and partial solvability. Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop, Cadiz, Spain, June 12–16, (2002).

[18] Dirac, P., The Principles of Quantum Mechanics, Oxford at the Clarendon Press, (1958). (4th ed.)

[19] Duistermaat, J. J.; Kolk, J. A. C., *Distributions. Theory and applications*. Translated from the Dutch by J. P. van Braam Houckgeest. Cornerstones. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2010). xvi+445 pp.

[20] Dong, Jianping; Xu, Mingyu, *Space-time fractional Schrödinger equation with time-independent potentials.* J. Math. Anal. Appl. 344 (2008), no. 2, 1005–1017.

[21] Esquivel, Liliana, *Nonlinear Schrödinger equation with Landau damping on a half-line.* Differ. Equ. Appl. 7 (2015), no. 2, 221–244.

[22] Esquivel, Liliana, Kaikina, Elena I., *Neumann problem for Nonlinear Schrödinger equation with the Riezs fractional Derivative operator*. Journal of Differential equation.

[23] Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749 pp

[24] Fokas, A. S. *Integrable nonlinear evolution equations on the half-line.* Comm. Math. Phys. 230 (2002), no. 1, 1–39.

[25] Fokas, A. S.; Its, A. R.; Sung, L.-Y. *The nonlinear Schrödinger equation on the half-line.* Nonlinearity 18 (2005), no. 4, 1771–1822.

[26] F.D. Gakhov, *Boundary Value Problems*. Translation edited by I. N. Sneddon Pergamon Press, Oxford-New York-Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London (1966), xix+561 pp.

[27] Gilbarg, D., and Trudinger , N. S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 224. Springer-Verlag, Berlin, (1983), xiii+513 pp.

[28] Gorenflo, Rudolf; Mainardi, Francesco; Scalas, Enrico; Raberto, Marco, *Fractional calculus and continuous-time finance. III: The diffusion limit.* Mathematical finance. Workshop of the mathematical finance research project, Konstanz, Germany, October 5–7, 2000. Basel: Birkhäuser. 171-180 (2001).

[29] Guo, Xiaoyi; Xu, Mingyu, *Some physical applications of fractional Schrödinger equation.* J. Math. Phys. 47 (2006), no. 8, 082104, 9 pp.

[30] Guo, Boling; Huo, Zhaohui, *Global well-posedness for the fractional nonlinear Schrödinger equation.* Comm. Partial Differential Equations 36 (2011), no. 2, 247–255.

[31] Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena I. *Benjamin-Ono equation on a half-line.* Int. J. Math. Math. Sci. (2010), Art. ID 714534, 38 pp.

[32] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. *Some properties of fractional integrals*. I. Math. Z. 27 (1928), no. 1, 565–606.

[33] Hayashi, N.; Kaikina, E. I.; Naumkin, P. I.; Shishmarev, I. A., *Asymptotics of small solutions to nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearities* Lecture Notes in Mathematics, 1884. Springer-Verlag, Berlin, (2006). xii+557 pp.

[34] Hayashi, Nakao; Kaikina, Elena, *Nonlinear theory of pseudodifferential equations on a half-line.* North-Holland Mathematics Studies, 194. Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2004). xx+319 pp.

[35] Hilfer, R., *Applications of fractional calculus in physics.* Singapore: World Scientific. vii, 463 p. (2000).

[36] Holmer, Justin, *The initial boundary value problem for the 1D nonlinear Schrödinger equation on the half-line.* Differ. Integral Equ. 18, No. 6, 647-668 (2005).

[37] Ionescu, Alexandru D.; Pusateri, Fabio, *Nonlinear fractional Schrödinger equations in one dimension.* J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 1, 139–176.

[38] John, Fritz, *Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1. New York - Heidelberg -Berlin: Springer-Verlag. X, 249 p

[39] Kaikina, Elena I.,*Fractional derivative of Abel type on a half-line.* Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), no. 10, 5149–5172.

[40] Kaikina, Elena I., *A new unified approach to study fractional PDE equations on a half-line.* Complex Var. Elliptic Equ. 58 (2013), no. 1, 55–77.

[41] Kaikina, Elena I. *Asymptotics for inhomogeneous Dirichlet initial-boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation.* J. Math. Phys. 54, No. 11, 111504, 15 p. (2013).

[42] Kaikina, Elena I., *Inhomogeneous Neumann initial boundary value problem for the nonlinear Schrödinger equation* J. Differential Equations 255 (2013), no. 10, 3338–3356.

[43] Kaikina, Elena I. *Forced cubic Schrödinger equation with Robin boundary data: large-time asymptotics* Proc R Soc A 469. (2015)

[44] Kilbas, Anatoly A.; Srivastava, Hari M.; Trujillo, Juan J., *Theory and applications of fractional differential equations*. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2006). xvi+523 pp.

[45] Katznelson, Yitzhak, *An introduction to Harmonic Analysis*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge: Cambridge University Press, xv, 314 p. (2004).

[46] Lakshmikantham, V.; Leela, S.; Vasundhara Devi, J., *Theory of Fractional Dynamic Systems,* Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, (2009), vi, 170 p.

[47] Laskin, Nick, *Fractional Schrödinger equation*. Phys. Rev. E (3) 66 (2002), no. 5, 056108, 7 pp.

[48] Lenzi, E. K.; Ribeiro, H. V.; dos Santos, M. A. F.; Rossato, R.; Mendes, R. S., *Time dependent solutions for a fractional Schrödinger equation with delta potentials.* J. Math. Phys. 54 (2013), no. 8, 082107, 8 pp.

[49] Lighthill. M.J., *An introduction to Fourier analysis and generalised functions*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics. London. 1964.

[50] Lions, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* (French) Dunod; Gauthier-Villars, Paris (1969), xx+554 pp.

[51] Lions, J.L.; Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications* (French) Paris: Dunod 1: XIX, 372 p.; 2: XV, 251 p. (1968).

[52] Magin, Richard L., *Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues.* Comput. Math. Appl. 59, No. 5, 1586-1593 (2010).

[53] Metzler, Ralf; Klafter, Joseph, *The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach.* Phys. Rep. 339, No.1, 1-77 (2000).

[54] Metzler, Ralf; Klafter, Joseph, *The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics.* J. Phys. A, Math. Gen. 37, No. 31, R161-R208 (2004).

[55] Ozawa, Tohru, *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension.* Comm. Math. Phys. 139 (1991), no. 3, 479–493.

[56] Podlubny, Igor, *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.* Mathematics in Science and Engineering, 198. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999. xxiv+340 pp.

[57] Ram P. Kanwal *Generalized Functions: Theory and Applications*. Third edition. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2004). xviii+476 pp

[58] Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis,* Third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976. x+342 pp.

[59] Sabatier, J.; Agrawal, O. P.; Tenreiro Machado, J. A., *Advances in fractional calculus. Theoretical developments and applications in physics and engineering.* Dordrecht: Springer. xiii, 552 p. Netherlands, (2007).

[60] Samko, Stefan G.; Kilbas, Anatoly A.; Marichev, Oleg I., *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Translated from the 1987 Russian original. Yverdon, (1993). xxxvi+976 pp.

[61] Sagan, Hans, *Space-Filling Curves*, Universitext. New York: Springer-Verlag. xv, 193 p. DM 54.00; öS 421.20; sFr. 54.00 (1994).

[62] Schneider, W.R.; Wyss, W., *Fractional diffusion and wave equations,* J. Math. Phys. 30, No.1, 134-144 (1989).

[63] Solonnikov, V. A. A simple proof of an inequality of Hardy and Littlewood for fractional integrals. (Russian) Vestnik Leningrad. Univ. 17 1962 no. 13, 150–153.

[64] Spasic AM1, Lazarevic MP., *Electroviscoelasticity of liquid/liquid interfaces: fractional-ordermodel,* J. Colloid Interface Sci. 282 (2005) 223–230.

[65] Strauss, Walter; Bu, Charles, *An inhomogeneous boundary value problem for nonlinear Schrödinger equations.* J. Differential Equations 173 (2001), no. 1, 79–91.

[66] Triebel, Hans, *Theory of function spaces*. Monographs in Mathematics, 78. Birkhäuser Verlag, Basel, 1983. 284 pp.

[67] Wang, Shaowei; Xu, Mingyu, *Generalized fractional Schrödinger equation with space-time fractional derivatives.* J. Math. Phys. 48 (2007), no. 4, 043502, 10 pp.

[68] Weder, Ricardo, *The forced non-linear Schrödinger equation with a potential on the half-line.* Math. Methods Appl. Sci. 28 (2005), no. 10, 1237–1255

[69] Wyss, Walter, *The fractional diffusion equation,* J. Math. Phys. 27 (1986), no. 11, 2782–2785.

[70] Wu, Dan, *Existence and stability of standing waves for nonlinear fractional Schrödinger equations with Hartree type nonlinearity.* J. Math. Anal. Appl. 411 (2014), no. 2, 530–542.