



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**ENERGÍA - PROCESOS Y USO EFICIENTE DE ENERGÍA**

**ESTUDIO DE ONDAS EN FLUIDOS ELÉCTRICAMENTE CONDUCTORES EN PRESENCIA  
DE CAMPOS MAGNÉTICOS**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**GERARDO ALCALÁ PEREA**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. SERGIO CUEVAS GARCÍA, IER-UNAM**

**TEMIXCO, MORELOS FEBRERO 2016**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Mariano López de Haro

Secretario: Dr. Eduardo Ramos Mora

1er. Vocal: Dr. Sergio Cuevas García

2do. Vocal: Dr. Jorge Alberto Andaverde Arredondo

3er. Vocal: Dr. Raúl Alejandro Ávalos Zúñiga

Lugar donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE ENEGÍAS RENOVABLES

**TUTOR DE TESIS:**

DR. SERGIO CUEVAS GARCIA

---

FIRMA



# Resumen

La presente tesis está enfocada al estudio teórico y experimental de ondas superficiales en fluidos eléctricamente conductores en presencia de campos magnéticos externos. La interacción de un campo magnético externo con corrientes eléctricas inducidas por el movimiento del fluido o aplicadas de manera externa, genera fuerzas capaces de amortiguar o promover el movimiento del fluido y así de las ondas que se propagan en este.

Como objetivo principal se quiere profundizar en el conocimiento de este tipo de fenómenos y así generar nuevas alternativas que nos permitan la manipulación de las ondas que se propagan en medios mecánicos conductores. En específico, se analizan dos trabajos teóricos de amortiguamiento magnético de ondas superficiales e internas respectivamente, así como un estudio experimental de la generación de ondas de gravedad-capilares mediante fuerzas electromagnéticas localizadas y viajeras en una capa delgada de electrolito.

El interés de estos estudios radica no solo en el hecho de que las ondas que se propagan en los océanos o la atmósfera son capaces de interactuar con el campo magnético terrestre, sino también en que están presentes en una gran variedad de aplicaciones industriales relacionadas al procesamiento electromagnético de materiales, principalmente en la metalurgia. Además que, dada la naturaleza no intrusiva de las fuerzas electromagnéticas, estas proporcionan alternativas novedosas para a la manipulación de flujos que en muchas ocasiones no pueden ser obtenidas por medios mecánicos.

Como marco teórico se discuten las propiedades fundamentales de las ondas y las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica, que son las herramientas principales en este trabajo.

El primer caso de estudio que se presenta es un problema teórico de amortiguamiento magnético de ondas superficiales en un fluido conductor. La principal aportación que se realiza es considerar un campo magnético orientado con un ángulo arbitrario, pues hasta el momento solamente se habían considerado campos magnéticos verticales y horizontales. Otra aportación es considerar los efectos de la tensión superficial.

En el siguiente caso de estudio se analiza la extensión al problema teórico de ondas internas que se propagan en un fluido conductor estratificado, al incluir los efectos de la fuerza de Lorentz mediante campos magnéticos externos. En este caso no solamente es interesante calcular los tiempos de amortiguamiento de las perturbaciones, sino también, dada la anisotropía de estas, observar si la orientación del campo magnético puede tener un efecto sobre su dirección de propagación.

En el trabajo experimental que se presenta se emplean campos magnéticos para generar patrones de ondas de gravedad-capilares estacionarios con respecto a una fuerza de Lorentz localizada en movimiento rectilíneo uniforme. Hasta el momento no se había estudiado la manera en que una fuerza de Lorentz localizada modifica la superficie libre de un fluido, dando lugar a patrones de ondas bien definidos. Esto constituye una alternativa interesante al método común de generar estas ondas mediante obstáculos sólidos.

# Abstract

The present thesis is devoted on the theoretical and experimental study of surface waves in electrically conductive fluids in the presence of external magnetic fields. The interaction of an external magnetic field with electric currents induced by the fluid motion or applied externally, generates forces capable of damping or promoting the fluid motion and thus of waves propagating therein.

The main objective is to deepen the understanding of this phenomena in order to generate new alternatives that allow us the manipulation of the waves propagating in mechanical conductive mediums. Specifically, in this work we present two theoretical studies of magnetic damping for surface and internal waves respectively, as well as an experimental study of the generation of capillary-gravity waves by localized traveling electromagnetic forces in a thin layer of electrolyte.

The interest of these studies lies not only in the fact that the waves propagating in the oceans or the atmosphere are capable of interacting with the Earth's magnetic field, but also in the fact that are present in a variety of industrial applications related to the electromagnetic processing materials, mainly in metallurgy. In addition, given the non-intrusive nature of electromagnetic forces, they provide innovative solutions to the handling of flows that often can not be obtained by mechanical means.

As theoretical framework, the fundamental properties of waves and the MHD equations are discussed.

The first case study presented is a theoretical problem of magnetic damping of surface waves in a conductive fluid. The main contribution that is made is to consider a magnetic field oriented at an arbitrary angle, as only vertical and horizontal magnetic fields had been considered so far. Another contribution is to consider the effects of surface tension.

The following case of study is the extension to the theoretical problem of internal waves propagating in a stratified conductive fluid, by including the effects of the Lorentz force produced by an external magnetic field. For this case it is not only interesting to calculate damping times of disturbances, but also, finding out if the orientation of the magnetic field can have an effect on the direction of propagation of the waves, given the anisotropy of these.

For the experimental work that is performed, localized magnetic fields are used to generate patterns of gravity-capillary waves stationary with respect to a localized Lorentz force in uniform rectilinear motion. So far, there were no studies on how a localized Lorentz modify free surface of a fluid, resulting in well-defined patterns waves. This



is an interesting alternative to the common method to generate these waves by using solid obstacles.

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1 Propiedades fundamentales de las ondas</b>	<b>7</b>
1.1 Definición de onda . . . . .	7
1.1.1 Percepción de las ondas . . . . .	7
1.1.2 Ecuación de onda . . . . .	9
1.1.3 Ondas dispersivas y velocidad de fase . . . . .	10
1.2 Propagación de trenes de ondas dispersivas . . . . .	11
1.2.1 Dirección de propagación de las ondas . . . . .	12
1.2.2 Propagación de un paquete de ondas . . . . .	13
1.2.3 Propagación de la energía de las ondas . . . . .	17
<b>2 Ondas superficiales amortiguadas por campos electromagnéticos</b>	<b>21</b>
2.1 Ecuaciones de la MHD . . . . .	21
2.1.1 Ecuaciones de la dinámica de fluidos . . . . .	22
2.1.2 Ecuaciones del campo electromagnético . . . . .	23
2.2 Aproximación MHD para números de Reynolds magnético pequeños . .	25
2.2.1 Amortiguamiento magnético . . . . .	26
2.3 Amortiguamiento de ondas superficiales en metales líquidos con campos magnéticos orientados arbitrariamente . . . . .	28
2.3.1 Planteamiento del problema . . . . .	28
2.3.2 Casos particulares . . . . .	32
2.4 Resultados . . . . .	34
2.4.1 Ondas de gravedad ( $\gamma = 0$ ) . . . . .	35
2.4.2 Ondas capilares ( $\gamma$ finita) . . . . .	40
2.5 Conclusiones . . . . .	41
<b>3 Ondas internas en presencia de un campo magnético.</b>	<b>43</b>
3.1 Ondas internas en un fluido estratificado bajo un campo magnético uniforme . . . . .	44
3.1.1 Caso 1: Fuerza de Lorentz paralela a la gravedad . . . . .	46
3.1.2 Caso 2: Fuerza de Lorentz Horizontal . . . . .	48
3.2 Resultados . . . . .	50
3.2.1 Ondas internas de gravedad . . . . .	50

3.2.2	Ondas internas con amortiguación magnética . . . . .	51
3.3	Conclusiones . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Ondas superficiales generadas por fuerzas electromagnéticas</b>	<b>65</b>
4.1	Ondas estacionarias . . . . .	65
4.1.1	Antecedentes . . . . .	66
4.1.2	Estela de Kelvin . . . . .	70
4.1.3	Ondas de gravedad-capilares . . . . .	73
4.2	Ondas generadas por fuerzas electromagnéticas . . . . .	76
4.2.1	Obstáculo magnético . . . . .	76
4.2.2	Metodología experimental . . . . .	76
4.3	Resultados Experimentales . . . . .	81
4.3.1	Barrido en Reynolds . . . . .	83
4.3.2	Diagrama bidimensional $Q - Re$ de la superficie libre . . . . .	87
4.4	Conclusiones . . . . .	90
	<b>Conclusiones</b>	<b>93</b>
	<b>Apéndice</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>La Cohesión y sus primeros estudios</b>	<b>99</b>
A.1	Conceptos . . . . .	99
A.1.1	Cohesión . . . . .	99
A.1.2	Tensión superficial . . . . .	100
A.2	Las bases del estudio de la fuerza de cohesión . . . . .	101
<b>B</b>	<b>Cálculos: Ondas superficiales amortiguadas</b>	<b>105</b>
B.1	Ángulo arbitrario . . . . .	105
<b>C</b>	<b>Cálculos : Ondas internas en presencia de un campo magnético</b>	<b>107</b>
C.1	Configuración con fuerza de Lorentz vertical . . . . .	107
C.2	Configuración con fuerza de Lorentz horizontal . . . . .	108
C.3	Velocidad de fase y velocidad de grupo . . . . .	110
	<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>

---

---

# Introducción

---

*I love the sounds and the power of pounding water, whether it is the waves or a waterfall.*

—Mike May—

Las ondas que se propagan en los fluidos juegan un papel importante en una gran cantidad de fenómenos naturales y aplicaciones industriales. Un ejemplo concreto es el transporte acuático, en donde las ondas son un elemento a considerar tanto a escala grande como pequeña. En el primer caso, las olas (ondas) se manifiestan como las estelas que acompañan a las embarcaciones durante su ruta de navegación. Esta perturbación sobre la superficie del agua, es una de las principales causas del arrastre total que sufren las embarcaciones [1], ocasionando un aumento en el consumo de combustibles fósiles y emisiones de contaminantes a la atmósfera; además de causar daños potenciales sobre los cascos de las embarcaciones [2], las paredes de los canales en que navegan e incluso sobre los asentamientos humanos costeros y algunos ecosistemas vulnerables como son los humedales. Si consideramos solamente que la industria marítima es responsable aproximadamente del 80 % del comercio mundial [3], es evidente el beneficio que genera disminuir el impacto del oleaje.

A pequeñas escalas las ondas también tienen un papel muy importante en el transporte. Aunque en este caso, a diferencia de las embarcaciones en donde las ondas generan cargas hidrodinámicas que oponen resistencia al movimiento, algunos insectos y arácnidos las ocupan como un mecanismo importante de propulsión. Y es que el rápido pateo de un insecto sobre las aguas genera intercambio de momento igual y en sentido opuesto mediante ondas superficiales, lo que le permite moverse de manera continua [4, 5].

Por otro lado, en las últimas décadas se han desarrollado diversas técnicas industriales que emplean campos electromagnéticos para manipular, controlar y monitorear fluidos conductores utilizando métodos no intrusivos [6, 7, 8]. Esto ha sido especialmente útil en la industria metalúrgica, la cual maneja flujos con condiciones muy extremas, como altas densidades, temperaturas y niveles de corrosión; la naturaleza no intrusiva de las fuerzas electromagnéticas ofrece alternativas en la manipulación y monitoreo de estos flujos para satisfacer la demanda de un mercado que exige productos con estándares de calidad muy altos.

Algunas de las aplicaciones industriales que involucran movimientos ondulatorios en fluidos conductores, es la fabricación de láminas finas en el proceso de la colada continua (ver Fig. 1), en donde se emplean campos magnéticos para eliminar las perturba-

ciones de la superficie libre del metal fundido durante su proceso de solidificación [9]. Dichos campos también son utilizados en los moldes de fundición, con el fin de amortiguar los movimientos internos creados por boquillas sumergidas que pueden desestabilizar la superficie libre y así introducir contaminantes al interior [10]. El estudio de las ondas también es importante en las celdas Hall-Héroult para la producción de aluminio, las cuales tienen una interfase (alúmina-electrolito) que es sometida a corrientes intensas, involucrando grandes consumos energéticos asociados con la dinámica de la interfase. De hecho se estima que en el 2003 el proceso de producción de aluminio en los Estados Unidos, requirió aproximadamente el 1.2 % de la energía total producida en el país [11]. Bajo esta perspectiva, cualquier avance o contribución que pueda hacerse en este tipo de procesos, tendrá un impacto tecnológico y ambiental muy grande.

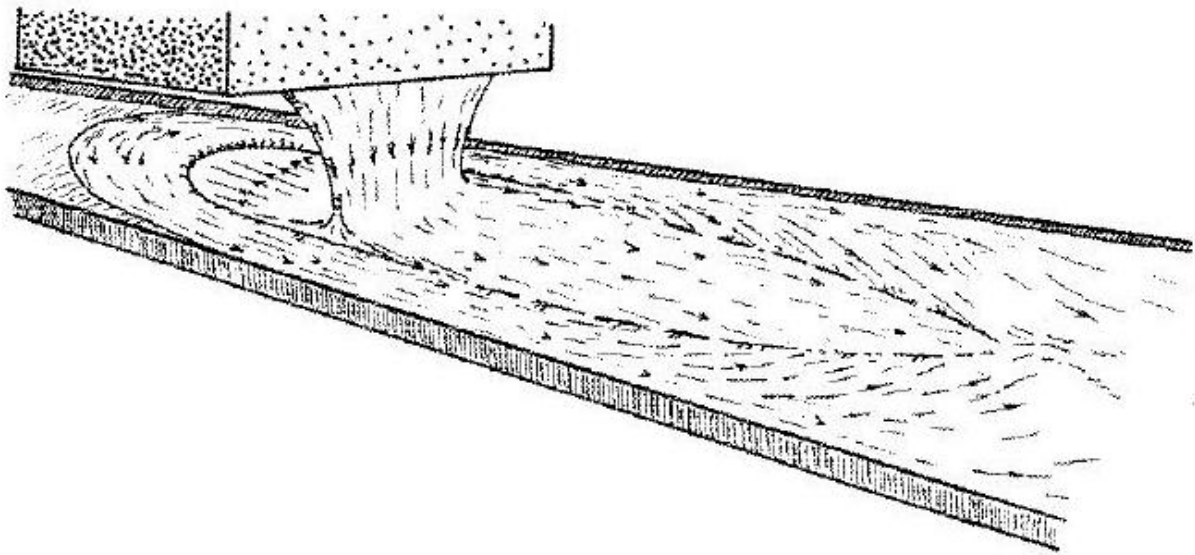


Fig. 1: Las fuerzas electromagnéticas juegan un papel importante en la fabricación de láminas delgadas de aluminio en el proceso de la colada continua [9].

Previamente, en el Capítulo 1 se discuten las propiedades básicas de las ondas y en la parte inicial del Capítulo 2 se presentan las ecuaciones de la mecánica de fluidos y del campo electromagnético, las cuales dan lugar a las ecuaciones fundamentales de la Magnetohidrodinámica (MHD). Con esta base, se discute la manera en que la fuerza de Lorentz puede actuar para amortiguar o desestabilizar los flujos de fluidos conductores, en particular aquellos que presentan una superficie libre.

Dada la importancia que tiene el conocimiento del comportamiento de las ondas en medios mecánicos, así como las ventajas que ofrece el uso de fuerzas electromagnéticas para controlarlas, en este trabajo se proponen tres casos de estudio en donde las ondas son manipuladas por medio de dichas fuerzas. En la parte complementaria del Capítulo 2 se analiza un problema teórico que consiste en estudiar el amortiguamiento

magnético de ondas superficiales en un fluido conductor, donde la principal aportación de este estudio es considerar un campo magnético orientado con un ángulo arbitrario. Este problema es la generalización al uso de campos magnéticos verticales en metales líquidos para amortiguar ondas superficiales. En nuestro caso, además de considerar la fuerza de gravedad, se incluyen los efectos de la tensión superficial, los cuales hasta ahora no habían sido tomados en cuenta y desempeñan un papel importante en el amortiguamiento de ondas cortas. Con base en la relación de dispersión asociada al sistema, se calculan los tiempos de amortiguamiento y la fase de oscilación para distintas orientaciones del campo magnético, y se resalta la dependencia de estos con la profundidad de la capa de fluido. En particular, se propone una configuración, que si bien no es la que amortigua más rápidamente, sí permite controlar los tiempos de amortiguamiento de manera independiente de la profundidad del fluido.

Posteriormente en el Capítulo 3 se hace una extensión del problema teórico de ondas internas que se propagan en un fluido conductor estratificado, al incluir los efectos de la fuerza de Lorentz mediante campos magnéticos externos. Este problema ha sido muy poco estudiado en la literatura. Se considera un fluido en el cual la densidad y la conductividad eléctrica decaen exponencialmente, y se obtiene la relación de dispersión para una configuración en donde la fuerza de Lorentz es paralela a la gravedad y otra en donde es perpendicular. Dado que las ondas de gravedad internas son anisotrópicas, se quiere saber si la orientación del campo magnético puede tener un efecto sobre la dirección de propagación de estas. Al obtener los tiempos de amortiguamiento de la amplitud de las oscilaciones se observa que aunque la velocidad de grupo es distinta para ambas configuraciones, en ambos casos la energía no se propaga a lo largo de una dirección específica. Sin embargo, en aguas poco profundas, el amortiguamiento magnético puede modificar la manera en que la energía se propaga, aunque no se puede controlar la dirección de esta.

En el Capítulo 4 se presenta un trabajo experimental que consiste en la generación de patrones de ondas de gravedad-capilares estacionarios con respecto a una fuerza de Lorentz localizada en movimiento rectilíneo uniforme. En estos trabajos previos se ha estudiado la manera en que una fuerza de Lorentz localizada es capaz de actuar como un obstáculo al flujo de un fluido conductor, generando patrones de flujo dependientes e independientes del tiempo. Sin embargo, hasta el momento no se había estudiado la manera en que una fuerza de Lorentz localizada modifica la superficie libre del fluido, dando lugar a patrones de ondas bien definidos. Esto constituye una alternativa interesante al método común de generar estas ondas mediante obstáculos sólidos. Las perturbaciones generadas se reconstruyen completamente mediante un método óptico para dos fuerzas distintas: una de las cuales tiene un equivalente mecánico (semejante al obstáculo sólido) y otra que no (actúa como una bomba). Con base en los resultados se realiza un diagrama en donde se identifican los distintos tipos de patrones y se resalta la cualidad de la configuración tipo bomba a poder confinar las perturbaciones. Finalmente se establecen las conclusiones de la tesis.



---

# PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS ONDAS

---

*Agitóse el ágora como las grandes olas que en el mar Icario levantan el Euro y el Noto cayendo impetuosos de las nubes amontonadas por el padre Zeus. Como el Céfito mueve con violento soplo un crecido trigal y se cierne sobre las espigas, de igual manera se movió toda el ágora.*

—La Ilíada—

El objetivo principal de este capítulo es realizar una descripción fenomenológica de las ondas, en particular de las que se propagan en la superficie de los líquidos. Con este fin, los fenómenos ondulatorios se ejemplificarán con eventos de la naturaleza que son familiares y se obtendrán algunos resultados analíticos sencillos que muestren algunas de las propiedades fundamentales de las ondas que serán de utilidad para comprender los fenómenos analizados en los capítulos posteriores.

## 1.1 Definición de onda

### 1.1.1 Percepción de las ondas

Las ondas están presentes en un sin fin de fenómenos naturales y aplicaciones tecnológicas. A grandes rasgos, podemos distinguir entre ondas electromagnéticas, que pueden propagarse en ausencia de un medio material, y ondas mecánicas, que requieren de un medio material para propagarse. Ejemplos de la primeras son la luz y las ondas utilizadas en las telecomunicaciones, mientras que las ondas mecánicas se manifiestan en fenómenos como el sonido, las vibraciones de cuerpos elásticos, las olas en el mar o en cuerpos de agua y los movimientos terrestres ocasionados por temblores o terremotos. De los casos anteriores, probablemente con el que estamos más familiarizados es el movimiento ondulatorio que se propaga sobre la superficie de las aguas, el cual se puede manifestar en una gran variedad de formas distintas. Por ejemplo, la gente que se encuentra en alta mar podrá identificar la presencia de las ondas mediante el vaivén que mece la embarcación hacia arriba y abajo; las personas que se encuentren en un malecón las apreciarán en forma de olas con crestas espumosas que chocan contra la costa (ver Fig. 1.1a); en los volúmenes de líquidos confinados como en las albercas (ver Fig. 1.1b), las ondas estarán conectadas de tal forma que llenarán todo el espacio con patrones en forma de *mosaicos*. También las podemos apreciar en



nuestra taza de café (ver Fig. 1.1c), o propagándose en la superficie de charcos como pequeños rizos generados ya sea mediante la acción de las hojas que caen de los árboles, el movimiento de insectos sobre su superficie, o en general mediante la acción de cualquier objeto o fuerza que la perturbe (ver Fig. 1.1d), entre muchos otros ejemplos.

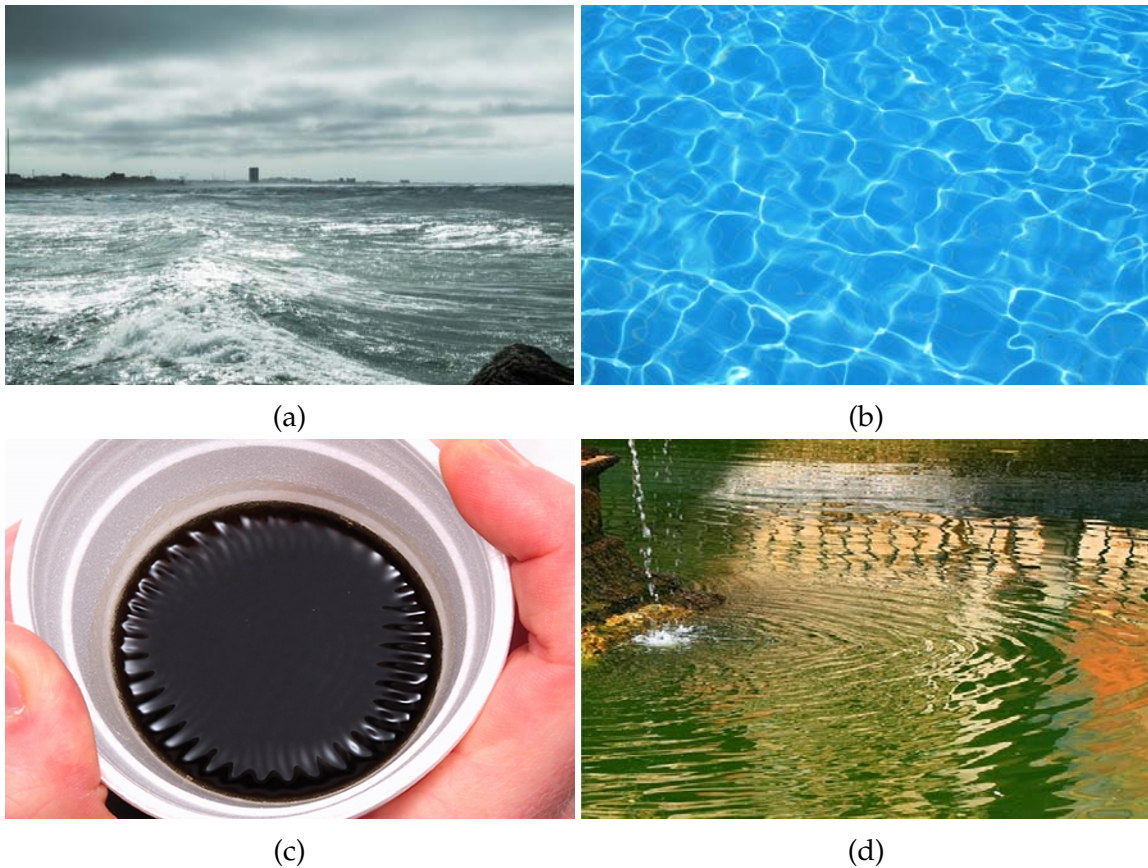


Fig. 1.1: (a) Olas del mar chocando contra la costa en Coatzacoalcos Veracruz. (b) Patrón ondulatorio generado en una alberca. (c) Perturbaciones en una taza de café. (d) Ondas en un estanque.

Frecuentemente las deformaciones superficiales se manifiestan como movimientos ondulatorios muy complejos, en particular, instantes después de que la superficie ha sido perturbada. Russell, en uno de los primeros reportes de ondas realizados a gran detalle [12], resalta la superficie desordenada que tienen las aguas oceánicas cuando se encuentran en presencia de vientos muy fuertes, resultando en patrones de ondas irreconocibles, aparentemente nada que se relacione con los ejemplos recién mencionados. Sin embargo, todo este desorden está compuesto por una combinación de distintas ondas entre las cuales se encontrarán algunas estructuras y movimientos particulares que pueden ser olas afiladas de gran altura que se rompen, tumultos de agua alargados y suaves con tiempos de oscilación lentos y ondulaciones mucho más pe-

queñas que se mueven rápidamente a través de estos, etc. Se tiene entonces ondas en una amplia gama de escalas de tiempo, tamaño, velocidades, amplitudes, longitudes y comportamientos.

Es claro que, a pesar de esta complejidad fenomenológica, es posible adquirir un concepto de onda mecánica en un líquido. Basta perturbar cualquier superficie de agua en reposo para apreciar y distinguir sin ninguna duda, formas características a las que llamamos ondas. Es decir, en cierta manera el concepto de onda es intuitivo. No obstante, aunque el comportamiento y rasgos de estas ondas puedan ser bien identificados, *no existe una definición exacta de las ondas*. Como veremos más adelante, una posible definición es la que enunció Russell: una onda es una perturbación que permite transportar energía mediante un transporte de masa despreciable [12]. Si bien las ondas parecen fácilmente entendibles, sus propiedades no siempre resultan ser tan claras, generando en muchos casos una gran confusión incluso para gente que está habituada a trabajar en estos temas [13]. Por tanto, es importante agruparlas y estudiar las características fundamentales.

Una de las maneras más recurridas para clasificar a las ondas es agruparlas en ondas dispersivas y ondas hiperbólicas. Las primeras se identifican por tener una velocidad de propagación que depende de su longitud, mientras que las segundas se distinguen por satisfacer la ecuación de onda hiperbólica, además de que pueden propagarse con una velocidad que es independiente de su longitud de onda. Finalmente, y antes de describir cada grupo, hay que enfatizar que las características de estos dos tipos de onda no son necesariamente excluyentes entre sí, aunque tienen comportamientos distintos.

### 1.1.2 Ecuación de onda

En muchas ocasiones, hacer referencia a las ondas o a la ecuación de onda resulta indistinto. De hecho, G. B. Whitham escribe que una forma elegante es definir las ondas como aquellos fenómenos que cumplen la ecuación hiperbólica cuyo arquetipo es la mencionada *ecuación de onda*, expresada de la siguiente manera [14]

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 \phi \quad (1.1)$$

Lo que la ecuación nos dice es que una propiedad física  $\phi$  se propaga a una velocidad constante  $c_0$ . Esta ecuación describe una gran variedad de fenómenos físicos, como la propagación del sonido, la propagación de ondas electromagnéticas [15], las vibraciones que se propagan en cuerdas o membranas y muchos otros casos [14].

No obstante que dicha definición es muy concreta, en la práctica puede llegar a generar confusión puesto que puede pensarse que para que un fenómeno pueda considerarse una onda debe satisfacer la Ec. (1.1). Aunque la ecuación de onda, y en general las ecuaciones hiperbólicas describen una gran variedad de fenómenos ondulatorios, existen fenómenos como las ondas en superficies líquidas que no son descritos por esta ecuación. Estas ondas forman parte del grupo de las *ondas dispersivas* cuya definición no es tan precisa como las ondas hiperbólicas.

### 1.1.3 Ondas dispersivas y velocidad de fase

Si bien las ondas hiperbólicas pueden definirse mediante la Ec. (1.1), las ondas dispersivas pueden caracterizarse mediante su forma. Para un caso unidimensional, una onda plana que se propaga en dirección  $x$  puede expresarse de la siguiente manera [16]

$$\phi = \eta \cos(kx - \omega t) \quad (1.2)$$

en donde  $\phi$  es la perturbación ondulatoria,  $\eta$  es la amplitud y el término  $\theta = kx - \omega t$  que varía con el tiempo y el espacio representa la fase que determina la posición en el ciclo entre cresta y cresta de la función cosenoidal,  $k$  representa el número de onda mientras que  $\omega$  es la frecuencia angular. Dado que estas perturbaciones ondulatorias no son necesariamente uniformes, se puede definir el número de onda local  $k(x, t)$  y la frecuencia local  $\omega(x, t)$  como

$$k(x, t) = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \omega(x, t) = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1.3)$$

donde el número de onda es una magnitud que representa el número de crestas por  $2\pi$  unidad de distancia en dirección  $x$ , y la frecuencia representa el número de crestas por cada  $2\pi$  unidades de tiempo. En un sistema dispersivo, la frecuencia angular es una función del número de onda  $\omega = \omega(k)$ ; dicha función caracteriza por completo la solución del problema particular y se le conoce como *relación de dispersión*. Pueden existir varias soluciones para el problema, las cuales tendrán distintas funciones de dispersión, donde a cada uno de estos se le conoce como *modo*. Por ejemplo, las ondas superficiales en agua bajo la aproximación lineal, pueden expresarse como soluciones elementales en forma de trenes de onda sinusoidales de amplitud máxima  $\eta_0$ , que utilizando notación compleja se pueden expresar como

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (1.4)$$

Cuando estas ondas se propagan en aguas profundas y están regidas por los efectos de la gravedad  $g$ , tienen una relación de dispersión con dos modos

$$\omega = \sqrt{gk}, \quad \omega = -\sqrt{gk} \quad (1.5)$$

mientras que las ondas regidas por la tensión superficial,  $\gamma$ , presentan los siguientes modos [17]

$$\omega = k^{3/2} \sqrt{\gamma/\rho} \quad \omega = -k^{3/2} \sqrt{\gamma/\rho} \quad (1.6)$$

donde  $\rho$  es la densidad del líquido. Cada modo, con una longitud de onda asociada, viaja a distintas velocidades en los frentes de ondas. Esto puede verse si consideramos una fase constante  $\theta = \theta_0$ , que representa planos paralelos en el frente de onda, y dado que la longitud de onda,  $\lambda$ , y el periodo,  $\tau$ , se expresan como  $\lambda = 2\pi/k$  y  $\tau = 2\pi/\omega$  respectivamente, la velocidad a la que estos planos se desplazan en dirección  $x$ , está dada por

$$\frac{\omega(k)}{k} = c_f(k) \quad (1.7)$$

que es lo que se conoce como *velocidad de fase*  $c_f$ , que es una función de  $k$ . De esta manera resulta más claro que la denominación de ondas dispersivas viene del hecho de que el frente de onda completo consistirá de la superposición de varios modos con distintas longitudes de onda y por tanto distintos números de onda, viajando a velocidades diferentes de acuerdo a la relación de dispersión correspondiente; por su parte las ondas no dispersivas tendrán todas a la misma velocidad  $c_0$  que es independiente de la longitud de onda

$$\frac{\omega}{k} = c_0 \quad (1.8)$$

A partir de la Ec. (1.7), puede definirse la velocidad de grupo en la forma

$$\frac{d\omega}{dk} = c_g(k) \quad (1.9)$$

donde  $c_g$  puede interpretarse como una velocidad local propia del tren de ondas y que varía en el frente no uniforme. Como se discute más adelante, la velocidad de grupo puede entenderse como la velocidad a la que un paquete de ondas aislado viaja como un todo. También se relaciona con la velocidad a la que la energía se transporta mediante ondas de longitud  $2\pi/k$ .

## 1.2 Propagación de trenes de ondas dispersivas

A continuación nos enfocaremos en las ondas superficiales en líquidos, que son las de mayor interés en este trabajo. Iniciaremos describiendo qué pasa con la materia a través de la cual se propaga la onda.

Al observar un cuerpo flotando sobre las olas en alta mar, notamos que el cuerpo sube y baja prácticamente sin cambiar de posición mientras que una onda viajera recorre la superficie del agua. En un trabajo clásico, J. Scott Russell [12] describe que al perturbar momentáneamente el agua en un canal angosto con la mano, algunos elementos de fluido que se encontraban en reposo serán empujados en la dirección de la perturbación y estos a su vez empujarán y pondrán en movimiento otras partículas que se encontraban quietas para tomar su lugar y así sucesivamente. Dado que no hay fuerzas externas, las únicas que actuarán sobre el sistema serán la gravedad y la tensión superficial, las cuales tratarán de evitar el amontonamiento de las partículas desalojadas debido al impulso inicial *empujando* en sentido contrario; este efecto combinado se manifestará como ondulaciones que viajan en la superficie, mientras que los elementos de volumen sufrirán desplazamientos mínimos. Con base en esto, Russell describe el movimiento ondulatorio como el movimiento que se transfiere sin que la materia lo haga [12]:

«Wave motion is therefore trascendental motion without the transference of the matter, of form without the substance, of force without agent. »



Fig. 1.2: En general, la existencia de las ondas no implica transferencia neta de masa. (a) Una boya en el mar tiene un desplazamiento mínimo aunque se encuentre expuesta al constante embate de las olas. (b) El viento soplando sobre un campo de trigo balancea las hojas alrededor de su tallo generando así la percepción de olas en el mar. <sup>1</sup>

De hecho, existen fenómenos como la *ola* en los estadios, los movimientos abruptos en los tumultos de personas [18], o incluso el soplo del aire sobre campos de trigo (ver Fig. 1.2b), que tienen comportamientos análogos a las ondas.

### 1.2.1 Dirección de propagación de las ondas

Para que una perturbación en un sistema material pueda transmitirse en forma de ondas, se requiere un balance entre la inercia y una fuerza *restitutiva* que intenta regresar al sistema a su estado de equilibrio [19, 16]. Dicha fuerza determina los atributos de la onda, por lo que dada la variedad de fuerzas, encontramos, entre otras, ondas de gravedad, ondas capilares y ondas de Rossby [20, 21], atribuibles a las fuerzas de gravedad, de tensión superficial y de Coriolis, respectivamente.

La naturaleza de estas fuerzas es clave en la propagación de las ondas, por ejemplo, el sonido se transmite independientemente de fuerzas externas, en este caso es la propia presión del fluido la que promueve el regreso a su estado de equilibrio y, dado que esta fuerza es isotrópica, las ondas de sonido se propagan en todas las direcciones por igual. En el caso de las ondas en agua, cuando la fuerza dominante es la gravedad, no necesariamente tienen un comportamiento isotrópico dada la dirección preferencial de esta fuerza. En efecto, las *ondas internas de gravedad*, que son las perturbaciones que

<sup>1</sup>Esta imagen fue editada en azul para que pueda compararse con la otra.

vian en un fluido que tiene una densidad que cambia con respecto a la posición, tendrán una propagación anisotrópica debido a la preferencia que da la gravedad en la dirección del gradiente de densidades [14]. Para el caso clásico de ondas de gravedad superficiales u *ondas externas de gravedad*, que se propagan en un plano casi horizontal (independientemente de la profundidad), la gravedad actuará de manera uniforme sobre toda el área, por lo que estas ondas serán isotrópicas; de hecho aunque existe un movimiento vertical, este resulta ser muy pequeño<sup>2</sup> [16].

De esta forma, las *ondas de gravedad-capilares* pueden entenderse como el resultado de una competencia entre la inercia del fluido y las fuerzas de gravedad y cohesión [19], que intentan regresar al medio a una superficie horizontal en equilibrio. Además, debido a que estas perturbaciones oscilan cercanas a la superficie, la gravedad no tendrá una acción preferencial sobre algún punto del fluido, teniendo por tanto una propagación de forma isotrópica.

### 1.2.2 Propagación de un paquete de ondas

Estudiar el movimiento de un paquete de ondas es muy complicado debido a que los diversos modos que contiene pueden interactuar entre sí, sin embargo en muchas ocasiones es posible considerar un paquete como la combinación de ondas sinusoidales de formas independientes lo que facilita el abordaje de estos problemas.

#### Ondas sinusoidales

Utilizar funciones sinusoidales es la manera más sencilla de aproximar la descripción de ondas superficiales. Estas funciones serán las que se emplearán en este trabajo. Las formas sinusoidales no resultan extrañas en la práctica, pues aparecen siempre que las perturbaciones en el medio son pequeñas o cuando después de un tiempo suficiente éstas disminuyen su amplitud. Para ejemplificar esto consideremos una tormenta en alta mar que agita de manera intensa las aguas, generando enormes perturbaciones en la superficie con formas indistinguibles. Se tendrá entonces una enorme variedad de modos superpuestos, con grandes amplitudes e interaccionando unos con otros de manera intensa al inicio de la tormenta, pero disminuyendo a medida que pasa el tiempo, debido a que las distintas componentes que forman la perturbación oscilatoria en el agua empezarán a alejarse, encontrándose por tanto en distintos lugares, de tal forma que en cierto momento será posible estudiarlos de manera aislada. En este sentido, se puede decir que los modos están dispersos, y dado que ya no interaccionan entre ellos, las ondas pueden ser aproximadas mediante una forma sinusoidal con un modo específico [16]. Más aún, a medida que el frente de onda se esparce, irá barriendo áreas mayores en su trayecto, por tanto la energía por unidad de área que transporta se irá reduciendo y con ello la amplitud de las olas [14]. Si se espera un tiempo suficiente, el tamaño de las perturbaciones será tal que puedan realizarse aproximaciones a primer orden, de tal forma que las ecuaciones que describan el sistema sean lineales y se pueda

---

<sup>2</sup>Con respecto a la longitud de onda.

utilizar el análisis de Fourier [22]. De esta forma, la perturbación se representa como una combinación lineal de distintas ondas sinusoidales (ver Ec. (1.4)), independientes entre sí, con condiciones de frontera arbitrarias, comportándose de una forma conocida de acuerdo a la relación de dispersión correspondiente. En estas condiciones es posible estudiar la forma en que viajan grupos de ondas de manera mucho más sencilla.

### Velocidad de grupo

El concepto de velocidad de grupo,  $c_g$ , se puede ilustrar utilizando el ejemplo de un tren de ondas viajero generado por una tormenta en el océano. Es de esperarse que, pasado un tiempo  $t$  después de la tormenta, las ondas de longitud  $\lambda = 2\pi/k$ , que viajan a una velocidad de fase  $c_f = \omega/k$ , se encuentren a una distancia  $c_f t$  de la posición de la perturbación. Curiosamente esto no ocurre cuando las ondas son dominadas por los efectos de la gravedad, puesto que dichas ondas se encontrarán aproximadamente a la mitad de la distancia mencionada. Este es un comportamiento típico de los sistemas dispersivos.

Para entender este fenómeno, es ilustrativo fijarse en los inicios del desarrollo del tren de ondas. Consideremos, un sistema dispersivo más familiar que puede involucrar tanto a la fuerza de tensión superficial como a la gravitacional, como sucede cuando se lanza una piedra sobre la superficie de un estanque. El impacto generará un fenómeno gregario que consiste en un grupo de ondas de distintas longitudes que se desplaza radialmente formando círculos concéntricos que se expanden<sup>3</sup>. Se tiene entonces un paquete de ondas con un intervalo continuo de números de onda.

En el tren de ondas se observan nuevas crestas que surgen espontáneamente y se mueven a través de éste. Las crestas de las ondas de gravedad, que son de longitudes considerables, aparecen desde el interior y rebasan al tren de ondas superficial hasta desaparecer en las fronteras de los anillos concéntricos sin que uno pueda percatarse del momento exacto en que esto ocurre, al tiempo que otras surgen para ocupar su lugar. A su vez, las ondas capilares, originadas por la tensión superficial y con longitudes más cortas, se mueven aparentemente en sentido contrario hasta el anillo interior del conjunto para de la misma manera desaparecer [17]. En ambos casos existe un número de crestas visibles mayor al tren de ondas original.

En este fenómeno se distinguen claramente dos velocidades en la perturbación, una está asociada al movimiento de las crestas individuales a través del tren de ondas, y otra al movimiento del propio tren que viaja como un todo.

Una manera sencilla de entender la naturaleza de cada velocidad, es considerar la superposición de dos ondas planas  $\eta_1 = \eta_0 \cos(k_1 x + \omega_1 t)$  y  $\eta_2 = \eta_0 \cos(k_2 x + \omega_2 t)$ , con una frecuencia y número de onda muy cercano, de tal manera que:  $k_1 = k - \Delta k$ ,  $k_2 = k + \Delta k$ ,  $\omega_1 = \omega - \Delta\omega$  y  $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$ . La suma de ambas perturbaciones se puede expresar en la forma

$$\eta = \eta_0 \cos((k - \Delta k)x - (\omega - \Delta\omega)t) + \eta_0 \cos((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t) \quad (1.10)$$

<sup>3</sup>Las ondas de gravedad de mayor longitud se encontrarán en el exterior del patrón, mientras que las ondas capilares más largas se encontrarán en el interior.

donde  $\eta_0$  es la amplitud de la onda; y dado que la suma de cosenos puede verse como un producto de éstos, la superposición de las ondas puede expresarse como [23]

$$\eta = 2\eta_0 \cos(kx - \omega t) \cos(\Delta kx - \Delta\omega t) \quad (1.11)$$

El primer factor del lado derecho de la ecuación (1.11) representa una onda de longitud  $2\pi/k$  que se encuentra empaquetada (modulada) por el segundo factor, que es una onda larga que varía lentamente (suponiendo  $\Delta k$  y  $\Delta\omega$  pequeños). Esto se puede representar como un paquete de ondas que viaja con una velocidad  $\Delta\omega/\Delta k$ , que contiene otras más pequeñas de un número de onda cercano a  $k$  que se desplazan a una velocidad distinta  $\omega/k$ , encontrándose cada paquete confinado como se ve en la Fig. 1.3 [24].

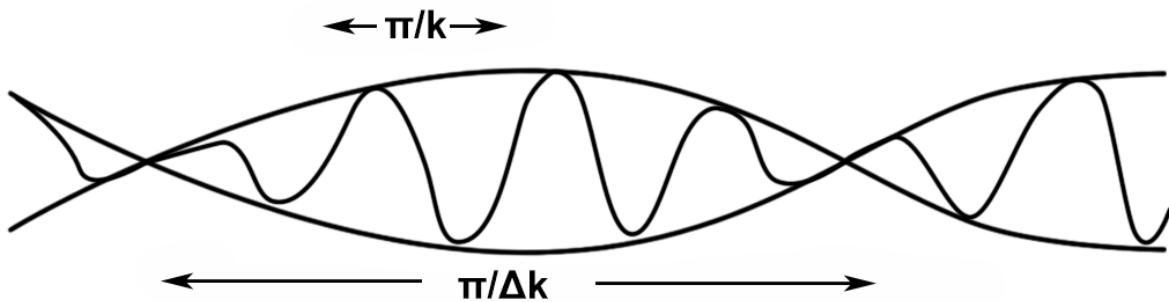


Fig. 1.3: Las ondas de longitud cercana a  $2\pi/k$  con velocidad de fase  $c$ , son moduladas por una onda de mayor longitud, que viaja con la velocidad de grupo  $c_g$ . Puede verse que en los nodos la amplitud de las ondas interiores es nula, lo que mantiene a cada grupo aislado de interactuar con los paquetes vecinos.

La velocidad a la que se mueve el conjunto de ondas, es la velocidad de grupo  $c_g$  y se define como

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.12)$$

De esta manera, el tren de ondas generado por el impacto de la piedra, puede entenderse como un intervalo de números de onda cercanos, que tendrán una velocidad relativa con respecto a la del paquete en que se encuentran, desplazándose a través de éste. Como efecto se tienen crestas que aparecen espontáneamente desde un extremo de aguas tranquilas, viajando para desaparecer en el lado opuesto [16].

En el límite de aguas profundas, para ondas planas de gravedad, la velocidad de grupo es la mitad que la velocidad de fase ( $c_g = \frac{1}{2}c$ ), mientras que para ondas capilares se tiene



que éstas se mueven más lento que el conjunto ( $c_g = \frac{3}{2}c$ ) [14]. La primera relación revela que las crestas individuales viajan más rápido que el grupo, teniendo como resultado ondulaciones que van rebasando a las del paquete, mientras que la segunda dice que las crestas asociadas a los efectos de tensión superficial viajan más lento que el grupo en conjunto, generando la percepción de que viajan en sentido contrario, explicando por tanto lo que se observa cotidianamente en los estanques.

En sistemas no dispersivos como las ondas electromagnéticas en el vacío [25], el sonido, las ondas de gravedad en aguas someras y algunos casos especiales de ondas capilares [26], la velocidad de fase  $\omega/k = c_0$  es la misma para todos los modos. En estos casos, la velocidad de grupo y la velocidad de fase coinciden ( $d\omega/dk = c_0$ ). Por otra parte, para sistemas dispersivos, donde la velocidad de fase varía con la longitud de onda de acuerdo a la ecuación (1.9) ocurre que [14]

$$c_g(k) = c_f(k) + kc_f'(k) \quad (1.13)$$

En general, la velocidad de fase y la velocidad de grupo serán distintas  $c_g \neq c_0$ , salvo para números de onda específicos. La manera en que cambia la longitud de onda a lo largo del paquete de ondas, puede entenderse mediante la fase de la onda ( $\theta = kx - \omega t$ ), con el número de onda y la frecuencia local dados por:  $k = \partial\theta/\partial x$  y  $\omega = -\partial\theta/\partial t$ , es evidente que

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (1.14)$$

que es una expresión de conservación de las ondas, en donde  $\omega$  y  $k$  pueden verse como el flujo y la densidad de ondas respectivamente [14]. Dado que la relación de dispersión es una función que depende del número de onda  $\omega = \omega(k)$ , podemos expresar la ecuación anterior en la forma

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

De la Ec. (1.15) se sigue que  $k$  se desplaza con la velocidad  $c_g$ , es decir, si uno observa un punto fijo del tren de ondas generado por la piedra, y se mueve (el observador) con la velocidad de grupo, siempre se encontrará la misma longitud de onda y frecuencia, pero se observará que las crestas de distintas velocidades rebasarán el paquete debido a la diferencia con la velocidad de fase. Ahora, si se sigue una cresta en particular, con la velocidad de fase local, se observará que el número de onda y la frecuencia local cambian, es decir las vecinas se alejan o se acercan dependiendo el caso.

Más allá del anillo exterior del frente de ondas que se expande con la velocidad de grupo no puede haber otras ondas que pertenezcan a este conjunto, de hecho, como ya se mencionó, las ondas que aparecen en algún punto terminan desapareciendo de nuestra vista. Como se explica a continuación, esto se debe a que la velocidad de grupo es a la que viaja la energía en las ondas.

### 1.2.3 Propagación de la energía de las ondas

Las ondas que se propagan en la superficie del agua, en ocasiones con movimientos ondulatorios muy pronunciados, tienen la capacidad de viajar grandes distancias y transportar con ellas su energía. En primera instancia parecería adecuado pensar que la energía que contienen se propaga con la velocidad de fase correspondiente, sin embargo, como se analizó en la sección previa, la velocidad de grupo juega un papel fundamental en el desarrollo de trenes de ondas generados por una perturbación. Y es que, si bien a partir de un patrón de ondas creado inicialmente por una fuerza externa se desprenden otras ondas que se mueven en su interior a velocidades distintas a la del propio conjunto, estas no viajan más lejos que el anillo de ondas exterior del frente, ni tampoco pueden ser rebasadas por el anillo interior correspondiente a las ondas más lentas; es decir, estas solamente existen dentro de la perturbación. Dicha observación, indica que la energía no viaja a una velocidad distinta que la del propio paquete. Fuera de éste, la superficie permanece en su estado de reposo hasta el momento en que arriban las ondas sinusoidales presentes en la perturbación a la velocidad de grupo  $c_g$  y de longitud  $2\pi/k$ .



Fig. 1.4: La perturbación creada por una piedra en un estanque genera un tren de ondas que se propaga. Dado que la energía de las ondas viaja con el patrón, el interior y exterior de este permanece en reposo.

Por otro lado, la cantidad de energía transferida por la perturbación que se propaga en el medio, se manifiesta en la amplitud de sus oscilaciones como energía potencial asociada a la fuerza restitutiva y en el movimiento de los elementos de fluido al paso de

esta, como energía cinética. La primera puede calcularse de manera sencilla para ondas de gravedad integrando su energía potencial gravitacional por unidad de volumen  $\rho g z$  sobre toda su elevación  $\eta$  [26]

$$\rho g \int_0^{\eta} z dz = \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \quad (1.16)$$

Dado que se trata de un fenómeno periódico, se toma el promedio de esta energía durante una oscilación completa en un tiempo ( $t = 2\pi/\omega$ ), obteniendo que la energía potencial por área es  $\frac{1}{4}\rho g \eta_0^2$  [24]. La contribución de la energía cinética puede obtenerse por un procedimiento similar integrando el cuadrado de la velocidad sobre todos los elementos de la columna del fluido [24], encontrándose exactamente la misma cantidad que la energía potencial<sup>4</sup>. Se tiene por tanto, que la energía total por unidad de superficie es  $W = \frac{1}{2}\rho g \eta_0^2$ , que es el trabajo que se requiere para levantar una capa de fluido de altura  $\eta_0/2$  a una altura de  $\eta_0$  [26]. Como se observa, la energía total depende de la amplitud al cuadrado de las oscilaciones  $\eta_0^2$ , y se transporta a la velocidad de grupo, como demuestra Whitham [14]. La amplitud principal se propagará entonces con la velocidad de grupo local correspondiente; ya que es justo la velocidad de grupo a la que viaja la energía. Con base en esto puede entenderse la manera en que las ondas desaparecen al aproximarse a las fronteras del frente de onda, donde las máximas amplitudes serán para números de onda cercanos a un valor  $k_0$ , que es el tamaño característico de la perturbación que inyectó la energía extra al sistema (en el caso presente la piedra), éstas disminuirán suavemente a medida que las ondas tengan una longitud local más alejada de  $k_0$ . Entonces, las ondas de gravedad que se desprenden del paquete de ondas, y que tienen una velocidad de fase mayor a la de grupo, rebasarán a las crestas de este tren. Asimismo, se propagarán más rápidamente que la energía asociada, y para poder existir deben evolucionar en ondas más largas (incrementando su velocidad de fase) hasta alcanzar la longitud máxima posible de las ondas más largas que hayan sido creadas por la perturbación. Debido a que dichas ondas son las más rápidas se encontrarán en la frontera del frente, y su velocidad será la máxima a la que se propaga la energía. Estas ondas disminuyen su amplitud a medida que se alejan del número de onda característico  $k_0$ , donde se concentra la mayor cantidad de energía, para luego desaparecer en las fronteras. Algo similar ocurre con las ondas capilares, que debido a que tienen una velocidad de fase menor a la del grupo, quedarán rezagadas, moviéndose hacia el interior del paquete descrito por las ondas más lentas del frente. Ya que la energía se propaga con una velocidad mayor, dichas ondas tendrán que adoptar longitudes mayores (disminuyendo su velocidad para ondas capilares) para seguir perteneciendo al paquete de ondas, hasta llegar al centro de la perturbación que es una zona no perturbada de un radio que crece con la velocidad de las ondas más lentas. Por tanto, la aparición y desaparición de las ondas no es una ilusión óptica, en donde las ondas aparecen de la nada y se pierden de vista en el tumulto debido a la superposición con otras crestas. Se trata más bien de un fenómeno en el que la diferencia en magnitud entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo

<sup>4</sup> Esto ocurrirá siempre independientemente de cual sea la fuerza restitutiva.

obliga a las ondas que se desprenden del interior del frente a evolucionar a través de distintos modos y amplitudes para que la energía se conserve.

### **Ondas en presencia de fuerzas electromagnéticas**

Como se ha visto en este capítulo, las ondas están muy ligadas a las fuerzas que interactúan con ellas, modificando sus propiedades como la velocidad, su flujo energético, dirección de propagación, etc. En este trabajo estudiaremos distintos casos de ondas en presencia de fuerzas electromagnéticas, las cuales son de gran interés debido al buen control que se puede tener sobre estas, así como a su naturaleza no intrusiva sobre el fluido. Por tanto, a continuación se hará un breve repaso sobre la interacción de fluidos eléctricamente conductores con campos electromagnéticos estas fuerzas electromagnéticas y con base en esto se resolverán analíticamente dos casos donde intervienen fuerzas electromagnéticas, uno para ondas superficiales y otro para ondas internas.



# ONDAS SUPERFICIALES AMORTIGUADAS POR CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

---

*A mood disorder is dangerous. You've got to get those dramatic waves of highs and lows stabilized. It's dangerous if you don't.*  
— Jane Pauley—

En este capítulo se estudia el movimiento de la superficie libre de fluidos eléctricamente conductores, por ejemplo un metal líquido, cuando se encuentran en presencia de campos electromagnéticos. Dichos campos son empleados, ya sea para amortiguar o perturbar la superficie libre de los fluidos, dependiendo de la aplicación deseada. Debido a que este tipo de fenómenos involucran el uso de las ecuaciones de la dinámica de fluidos y del electromagnetismo, se presenta un breve resumen de ambos temas, para con base en esto discutir la manera en que se pueden utilizar los campos electromagnéticos, ya sea para inhibir o generar flujos. Posteriormente, se presenta una posible aplicación tecnológica, en donde se estudia de manera teórica el amortiguamiento magnético para ondas de gravedad-capilares mediante un campo magnético externo orientado un ángulo arbitrario.

## 2.1 Ecuaciones de la MHD

En los fluidos eléctricamente conductores bajo de campos electromagnéticos existe un acoplamiento entre la dinámica del flujo y los campos presentes. Cuando un fluido conductor se mueve en presencia de un campo magnético, se inducen corrientes eléctricas en el medio, que al interactuar con el mismo campo, generan una fuerza que altera a su vez el flujo inicial. Por otra parte, las corrientes eléctricas inducen también campos magnéticos que pueden modificar al campo original. Se denomina como Magnetohidrodinámica (MHD), a la rama de la física que fusiona a la dinámica de fluidos (no magnetizables) y al electromagnetismo. A continuación se presenta una breve introducción a estos temas.

### 2.1.1 Ecuaciones de la dinámica de fluidos

Los fluidos pueden definirse como medios materiales que se deforman continuamente ante la presencia de un esfuerzo cortante, independientemente de su magnitud [27]. Los líquidos y gases son sustancias que comparten estas características. Una manera de estudiar a los fluidos es mediante el *enfoque del continuo*, en el cual se desprecia la naturaleza molecular de la materia visualizándola como un medio continuo, de tal manera que cada variable de campo que caracteriza el estado del fluido toma un valor único en cada punto del sistema a un tiempo dado. Las ecuaciones que describen la mecánica de los fluidos se deducen de principios fundamentales que establecen la conservación de la masa, el balance de la cantidad de movimiento y la conservación de energía del sistema. En este trabajo nos enfocaremos solamente en las ecuaciones surgidas de los dos primeros principios, ya que en este trabajo no se consideran problemas de transferencia de calor.

#### Conservación de masa

Es bien sabido que la materia no puede crearse ni destruirse, de modo que los elementos de fluido mantendrán constante su masa al desplazarse, aunque cambien su forma y tamaño. La conservación de la masa establece que cada punto del dominio satisface la ecuación conocida como ecuación de continuidad [28], que en forma diferencial se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1a)$$

donde  $\rho$  y  $\mathbf{u}$  representan los campos de densidad y velocidad, respectivamente. En el caso de fluidos incompresibles la ecuación se reduce de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.1b)$$

#### Balance de la cantidad de movimiento

El balance de la cantidad de movimiento en un fluido está descrito por la ecuación de Navier-Stokes [28] que proviene de la segunda ley de Newton, que establece que la razón de cambio en el *momentum* de un sistema se debe a las fuerzas netas que actúan sobre éste. Dicha ecuación tiene la forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.1c)$$

donde  $p$  representa la presión,  $\nu$  la viscosidad cinemática y  $\mathbf{f}$  las fuerzas de cuerpo específicas por unidad de volumen. Los términos de la izquierda representan las aceleraciones local y convectiva, mientras que los términos de la derecha representan respectivamente a la fuerza de presión, la fuerza viscosa y las fuerzas de cuerpo externas que actúan sobre cada elemento del fluido.

### 2.1.2 Ecuaciones del campo electromagnético

Las ecuaciones del campo electromagnético sintetizan el comportamiento experimental de los fenómenos electromagnéticos. Básicamente se componen de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones constitutivas y la ecuación de la fuerza electromagnética. Dichas ecuaciones pueden simplificarse siempre que los fenómenos físicos estudiados sean no-relativistas e involucren campos electromagnéticos que varíen a frecuencias bajas. Estas consideraciones se conocen como la *aproximación* MHD [29] y permiten que los fenómenos electromagnéticos puedan ser descritos mediante las llamadas ecuaciones pre-maxwellianas, que son cuatro ecuaciones diferenciales, complementadas por la ley de Ohm como ecuación constitutiva y la fuerza de Lorentz como fuerza de cuerpo. A continuación se describen brevemente [30, 29].

#### Ley de Gauss para el campo eléctrico

La conservación de la carga eléctrica queda establecida en la ley de Gauss, la cual señala que el flujo del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  a través de un volumen  $V$  equivale a la carga eléctrica (la fuente de este campo) contenida en él

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e / \epsilon \quad (2.2)$$

en donde  $\rho_e$  representa la densidad de carga eléctrica y  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica.

#### Ley de Gauss para el campo magnético

La ley de Gauss para el campo magnético establece la inexistencia de cargas magnéticas aisladas o monopolos magnéticos. Establece que el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es nulo, lo que en forma diferencial puede expresarse como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

#### Ley de Ampère

La ley de Ampère relaciona el campo de inducción magnética  $\mathbf{B}$  con la densidad de corriente eléctrica  $\mathbf{J}$  que los causa. Establece que la circulación del campo  $\mathbf{B}$  en un circuito cerrado es igual a la corriente que lo atraviesa, lo que en forma diferencial se puede expresar como

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.4a)$$

en donde  $\mu_0$  representa la permeabilidad magnética en el vacío. Si tomamos la divergencia de la ley de Ampère, obtenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.4b)$$



que puede considerarse como la condición de la conservación de la carga eléctrica en esta aproximación.

### Ley de Faraday

La ley de Faraday, sobre la cual se fundamenta el principio con el que operan las plantas de generación eléctrica, establece que la variación del flujo magnético a través de un circuito eléctrico, produce una fuerza electromotriz (f.e.m) que da lugar a un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  inducido en los extremos del circuito. En forma diferencial se escribe de la siguiente manera

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4c)$$

### Ley de Ohm

La ley de Ohm es una ecuación constitutiva que relaciona la densidad de corriente eléctrica con el campo electromagnético. Para un medio con conductividad eléctrica  $\sigma$  que se desplaza con velocidad  $\mathbf{u}$  respecto al sistema de laboratorio, la ley de Ohm toma la forma

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.4d)$$

### Fuerza de Lorentz

La fuerza de Lorentz es la fuerza de cuerpo que se ejerce sobre el medio continuo debido a la interacción de los campos electromagnéticos y se expresa en la forma

$$\rho \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2.4e)$$

Haciendo una síntesis, las ecuaciones fundamentales de la MHD están compuestas por las ecuaciones de la dinámica de fluidos

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

las ecuaciones del campo electromagnético

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_e / \epsilon, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

y la ley de Ohm y la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \rho \mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Puesto que en el contexto de la MHD, la densidad de carga eléctrica  $\rho_e$  no es relevante, podemos prescindir de la ley de Gauss para campo eléctrico (ver Ec. (2.2)), ya que los campos quedan determinados por las ecuaciones rotacionales y la ley de Gauss para campo magnético. Por otro lado, combinando la ley de Ohm con las leyes de Ampère, Faraday y Gauss para el campo magnético, se puede establecer la ecuación de transporte de campo magnético o ecuación de inducción

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}, \quad \lambda = (\mu_0 \sigma)^{-1} \quad (2.5)$$

en donde  $\lambda$  representa la difusividad magnética. El término de la izquierda de la Ec. (2.5) representa los cambios temporales del campo magnético, y los términos de la derecha representan el transporte de  $\mathbf{B}$  debido a la advección y difusión, respectivamente. De esta manera, el sistema de ecuaciones fundamentales de la MHD se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \lambda \nabla^2 \mathbf{B}$$

que es un sistema cerrado con 7 ecuaciones y 7 variables ( $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $p$ ), en donde el campo magnético debe cumplir que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

## 2.2 Aproximación MHD para números de Reynolds magnético pequeños

El número de Reynolds magnético, que se define como  $R_m = \mu_0 \sigma U L$  donde  $U$  y  $L$  son una velocidad y longitud características del sistema, es un parámetro adimensional que puede interpretarse como el cociente del campo magnético inducido por el movimiento del fluido entre el campo magnético aplicado. Para la mayoría de los procesos industriales o de laboratorio que involucran metales líquidos, sales fundidas o electrolitos, el número de Reynolds magnético toma valores pequeños ( $R_m \ll 1$ ), lo que indica que los campos magnéticos inducidos por el movimiento del fluido dentro del campo aplicado son despreciables. Esto permite obtener un sistema de ecuaciones de la MHD simplificado que será el que se utilizará en este trabajo.

Si se aplica un campo magnético  $\mathbf{B}_0$  que no presente variaciones temporales, la ley de Faraday (ver Ec. (2.4c)) se reduce a  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , que implica que el campo eléctrico se

puede escribir a través del potencial eléctrico  $\phi$ , como  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , de tal manera que la ley de Ohm (ver Ec. (2.4d)) toma la forma

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla\phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 \quad (2.7a)$$

a partir de la cual, tomando la divergencia y utilizando la conservación de la carga eléctrica, se puede obtener una ecuación para el potencial eléctrico

$$\nabla^2\phi = -\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (2.7b)$$

Por otro lado, el campo magnetostático debe satisfacer

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.7c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (2.7d)$$

lo que indica que el campo magnético puede considerarse como imperturbado por el flujo  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ . Finalmente, las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad se expresan en la forma

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \nabla^2\mathbf{u} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0}{\rho} \quad (2.7e)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7f)$$

donde se ha incluido a la fuerza de Lorentz como la fuerza de cuerpo relevante. Las Ecs. (2.7) forman un sistema completo de ecuaciones que describen la dinámica de los fluidos eléctricamente conductores sometidos a campos electromagnéticos, en la aproximación de número de Reynolds magnético pequeño.

### 2.2.1 Amortiguamiento magnético

Un gran número de aplicaciones tecnológicas de la MHD hacen uso de la fuerza de Lorentz, que dada su naturaleza no intrusiva permite realizar una gran variedad de tareas difíciles o imposibles de llevar a cabo mediante otros métodos. Específicamente en la industria de los metales, que involucra la manipulación y monitoreo de metales fundidos a alta temperatura y requiere grandes consumos energéticos con altos estándares de calidad, es muy común el empleo de corrientes eléctricas y campos magnéticos intensos. Al empleo de interacciones electromagnéticas para el control, manipulación, transporte y monitoreo de materiales eléctricamente conductores se conoce como Procesamiento Electromagnético de Materiales, EPM (por sus siglas en inglés) [31].

Las interacciones electromagnéticas, a través de la fuerza de Lorentz, son capaces tanto de promover el movimiento de los fluidos conductores, como de inhibirlo. En el primer caso, las aplicaciones más importantes son el bombeo y la agitación de metales líquidos, que pueden conseguirse de diversas formas, como por ejemplo, por medio de arreglos de imanes rotatorios [32]. Por otra parte, el amortiguamiento magnético ofrece

una gran cantidad de aplicaciones que han sido implementadas en la industria, por ejemplo para disminuir las imperfecciones superficiales en la fabricación de láminas finas durante el proceso de la colada continua [9, 33], o bien en el recubrimiento de piezas metálicas por otro metal, donde se requiere disminuir el mezclado entre los dos materiales [34]. También se utiliza para amortiguar movimientos no deseados en los moldes de fundición que pueden desestabilizar la superficie libre y acarrear contaminantes al interior del material procesado [10]. La teoría básica del amortiguamiento magnético es bien conocida [35, 36, 29], y se puede entender a partir de las principales interacciones físicas involucradas.

El principio físico detrás del amortiguamiento magnético es que cuando existe movimiento relativo entre un fluido conductor y un campo magnético, se inducen corrientes eléctricas en el medio, las cuales a su vez interactúan con el propio campo magnético para generar una fuerza de Lorentz que se opone al movimiento del fluido. Lo que ocurre es que parte de la energía cinética se convierte en energía térmica por el efecto Joule (o disipación óhmica) generado por las corrientes inducidas. Es decir, la energía cinética del fluido disminuye a expensas de un incremento de la energía térmica debido a la disipación óhmica de las corrientes inducidas. Si se utiliza la ecuación de movimiento para un fluido donde se desprecia la viscosidad se encuentra que [29]

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{u} dV = - \int_V \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} dV \quad (2.8)$$

En esta ecuación, el término de la izquierda representa la energía cinética del fluido en el volumen  $V$ , la cual decrece debido a la disipación global generada por las corrientes inducidas en el medio conductor.

La manera en que las corrientes eléctricas completan sus trayectorias dentro del fluido y las paredes circundantes (cuando son conductoras), determinan la acción de la fuerza amortiguadora. Este es un punto importante cuando se proponen modelos teóricos para la solución de problemas en MHD ya que, por ejemplo, la elección de modelos bidimensionales (2D) o tridimensionales (3D) pueden llevar a resultados diferentes [35]. De hecho, la principal diferencia entre estos modelos es que en 3D es posible considerar trayectorias cerradas para las corrientes inducidas. Davidson [35] demostró que en este caso la fuerza de Lorentz no destruye el momento lineal del flujo sino que solo lo redistribuye, de modo que la energía cinética del flujo se reduce. En realidad, en 3D el momento lineal se conserva, a diferencia de lo que sucede cuando se utilizan modelos en 2D. Este autor también mostró que la recirculación de corrientes dentro del fluido garantiza que al menos una componente del momento angular se conserva. Por lo tanto, Davidson concluye que la fuerza de Lorentz actúa redistribuyendo el momento angular mientras que la energía cinética se reduce, pero el flujo evoluciona de tal modo que la disipación Ohmica se minimiza [35].

Teniendo en cuenta estas implicaciones, a continuación se realizará un análisis teórico bidimensional de amortiguamiento de ondas de gravedad-capilares en la superficie de metales líquidos, mediante el uso de campos magnéticos.

## 2.3 Amortiguamiento de ondas superficiales en metales líquidos con campos magnéticos orientados arbitrariamente

La mayoría de los trabajos en donde se estudia el amortiguamiento magnético de ondas superficiales en metales líquidos se ha realizado suponiendo válida la aproximación de valores pequeños del número de Reynolds magnético ( $R_m \ll 1$ ) y utilizando campos magnéticos orientados verticalmente. Uno de los primeros estudios fue realizado por Fraenkel en 1959 [37], quien desarrolló una teoría en la aproximación de aguas poco profundas para ondas de gravedad largas y campos magnéticos moderados, encontrando soluciones para ondas superficiales que se amortiguan exponencialmente. Tiempo después, en 1991 Rivat et al. [10] realizaron un estudio más general, calculando tiempos de amortiguamiento para ondas de gravedad bajo la acción de campos magnéticos verticales y aplicando estos resultados en el diseño de un molde de fundición en el proceso de la colada continua. En estos trabajos se considera una capa de fluido infinita en el plano horizontal, o de manera equivalente, acotada por paredes perfectamente conductoras, de tal manera que las corrientes inducidas tienen una distribución espacial sencilla. Sreenivasan y Davidson en el 2005 [38] extendieron el análisis al considerar paredes no conductoras, mostrando que los tiempos característicos de amortiguamiento se incrementan en un factor de 30 debido a la presencia de las paredes.

La contribución del presente estudio es el análisis del amortiguamiento de ondas superficiales en una capa de fluido conductor infinita en presencia de un campo magnético con una orientación arbitraria, trabajo que ya ha sido publicado [39]. La influencia de la orientación de un campo magnético en la superficie libre de un metal líquido fue estudiada anteriormente en el contexto del modelado de contactos eléctricos de metal líquido para motores y generadores de inducción [40], pero no había sido tratada en aplicaciones de amortiguamiento magnético. Otra aportación que se realiza en este trabajo es la inclusión de los efectos de la tensión superficial, que no habían sido tomados en cuenta hasta ahora. Por último, hay que señalar que el interés primordial de este trabajo es la obtención de los tiempos de amortiguamiento característicos del proceso, mediante los cuales se puede identificar la configuración óptima para estabilizar la superficie libre.

### 2.3.1 Planteamiento del problema

Consideremos una capa de metal líquido acotada sólo inferiormente por una pared sólida a una profundidad  $h$  con respecto a la superficie libre no perturbada, la cual se encuentra en contacto en la parte superior con un aislante eléctrico de densidad despreciable (como puede ser el aire). El sistema de referencia se encuentra en la superficie libre, que está inicialmente en estado de equilibrio  $y = 0$ . Posteriormente, el fluido se perturba ligeramente, de tal manera que se generan ondas planas de amplitudes pe-

queñas que se propagan en la dirección  $x$ , teniendo así un flujo que se puede considerar bidimensional (en el plano  $x - y$ ). Se considera al fluido inviscido, incompresible, con tensión superficial  $\gamma$  y de conductividad eléctrica  $\sigma$  constante, en el límite de números de Reynolds magnético pequeños ( $R_m \ll 1$ ). Los desplazamientos verticales de la interfase, que se representan por  $\eta = \eta(x, t)$  son amortiguados por un campo magnético uniforme  $\mathbf{B}_0$  que yace en el plano de movimiento y se encuentra formando un ángulo arbitrario  $\theta$  con respecto a la horizontal (ver Fig. 2.1).

Las ecuaciones que describen el flujo bajo las condiciones previamente mencionadas se expresan en la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (2.9b)$$

$$\nabla^2 \phi = \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.9c)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (2.9d)$$

donde el campo de velocidades es  $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{e}}_x + v\hat{\mathbf{e}}_y$ . Dado que en la configuración presente,  $\mathbf{B}_0$  y  $\nabla \times \mathbf{u}$  son ortogonales, el lado derecho de la Ec. (2.9c) es cero, y por lo tanto  $\nabla^2 \phi = 0$ . Suponiendo que el fluido no se encuentra acotado, o bien que está limitado por paredes perfectamente conductoras, el potencial electrostático puede considerarse como cero [37, 38] y la densidad de corriente inducida se reduce a  $\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)$ , la cual apunta en la dirección  $z$ . De esta forma, la fuerza de Lorentz puede expresarse como

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 = -\sigma B_0^2 \mathbf{u} \quad (2.10)$$

en donde  $\mathbf{u}$  representa las componentes de  $\mathbf{u}$  en el plano cuya normal apunta en la dirección de  $\mathbf{B}_0$  [38]. Para linealizar el problema, la velocidad, presión y densidad del fluido se consideran como la suma de un estado de equilibrio más una perturbación, denotados por los subíndices 0 y 1, respectivamente

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1 \quad (2.11a)$$

$$p = p_0 + p_1 \quad (2.11b)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (2.11c)$$

En el estado de equilibrio la velocidad es cero ( $\mathbf{u}_0 = 0$ ), y la presión hidrostática  $p_0$  queda determinada por la ecuación

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g \quad (2.12)$$

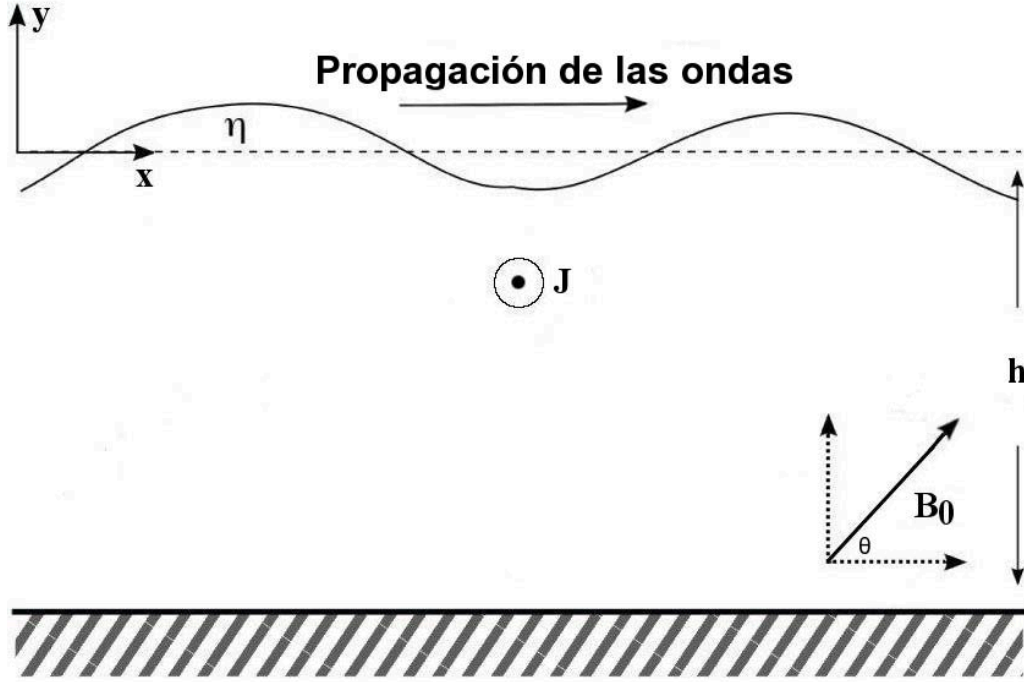


Fig. 2.1: Ondas superficiales en un fluido conductor no acotado y de profundidad  $h$  que viajan en presencia de un campo magnético aplicado que forma un ángulo arbitrario  $\theta$  respecto a la horizontal. El movimiento del fluido dentro del campo magnético induce corrientes que viajan en dirección perpendicular al plano de movimiento.

El movimiento del fluido dentro del campo magnético aplicado,  $\mathbf{B}_0 = B_0 (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ , induce una corriente eléctrica de la forma  $\mathbf{J} = \sigma B_0 (u_1 \sin \theta - v_1 \cos \theta) \hat{k}$ , que al interactuar con el mismo campo origina una fuerza de Lorentz que se expresa como

$$\mathbf{F} = \sigma B_0^2 (-u_x \sin^2 \theta + u_y \sin \theta \cos \theta) \hat{i} + \sigma B_0^2 (u_x \sin \theta \cos \theta - u_y \cos^2 \theta) \hat{j} \quad (2.13)$$

por lo que el sistema de ecuaciones linealizado (Ecs. (2.9a) y (2.9b)) toma la forma

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (2.14a)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{\tau} (-u_1 \sin^2 \theta + v_1 \sin \theta \cos \theta) \quad (2.14b)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{1}{\tau} (u_1 \sin \theta \cos \theta - v_1 \cos^2 \theta) \quad (2.14c)$$

donde el parámetro  $\tau = \rho\sigma/B_0^2$  representa el tiempo característico de amortiguamiento magnético. Las condiciones de frontera del sistema se escriben a primer orden como [17, 41, 42]

$$v(y = -h) = 0 \quad (2.15a)$$

$$v(y = 0) = \partial\eta/\partial t \quad (2.15b)$$

$$p(y = 0) = \rho g \eta - \gamma \partial^2 \eta / \partial x^2 \quad (2.15c)$$

en donde la Ec. (2.15a) es la condición de no penetración de la pared del fondo, mientras que las condiciones para la superficie libre (ver Ecs. (2.15b) y (2.15c)) son respectivamente la condición cinemática que garantiza que las partículas de fluido no se separen de la superficie libre, y la condición dinámica que establece el balance de la presión con la gravedad y la tensión superficial. Para resolver el sistema Ecs. (2.14) con las condiciones de frontera Ecs. (2.15), se proponen soluciones como ondas planas monocromáticas viajando en la dirección  $x$ , las cuales son independientes entre sí y están dadas por las siguientes ecuaciones

$$u_1 = M(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (2.16a)$$

$$v_1 = H(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (2.16b)$$

$$p_1 = \rho\Pi(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (2.16c)$$

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx+\omega t)} \quad (2.16d)$$

en donde  $k$  es el número de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular de oscilación y  $\eta_0$  es la amplitud de la perturbación de la superficie. Las funciones  $H(y)$ ,  $M(y)$ , y  $\Pi(y)$  dependen únicamente de la profundidad de la capa de fluido y deben ser determinadas. A partir del sistema de Ecs. (2.14) se puede obtener una ecuación diferencial de segundo grado para  $H(y)$  [39] (ver los detalles en Apen. B)

$$H - \frac{2k \sin \theta \cos \theta}{(-\omega\tau + i \sin^2 \theta)} H + \frac{(k^2 \omega \tau - ik^2 \cos^2 \theta)}{(-\omega\tau + i \sin^2 \theta)} H = 0 \quad (2.17)$$

y aplicando las condiciones de frontera, se obtiene la relación de dispersión que caracteriza al sistema:

$$e^{(r_1-r_2)h} = -C_\theta + 1 \quad (2.18)$$

donde

$$C_\theta = \frac{i\omega (r_2 - r_1) \cdot \left( \frac{-i\omega\tau - \sin^2 \theta}{k^2\tau} \right)}{g + k^2\gamma^* - (i\omega) \left( r_1 \left( \frac{-i\omega\tau - \sin^2 \theta}{k^2\tau} \right) - \frac{i}{k\tau} \sin \theta \cos \theta \right)} \quad (2.19a)$$



$$r_1 = \frac{-\alpha_\theta + \sqrt{\alpha_\theta^2 - \beta_\theta}}{2}, \quad r_2 = \frac{-\alpha_\theta - \sqrt{\alpha_\theta^2 - \beta_\theta}}{2} \quad (2.19b)$$

$$\alpha_\theta = -\frac{2k \sin \theta \cos \theta}{-\omega\tau + i \sin^2 \theta}, \quad \beta_\theta = \frac{4(k^2\omega\tau - ik^2 \cos^2 \theta)}{-\omega\tau + i \sin^2 \theta} \quad (2.19c)$$

con  $\gamma^* = \gamma/\rho$ . Hay que hacer notar que  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  es un número complejo, en donde la parte real  $\omega_r$  representa la fase de oscilación, mientras que la parte imaginaria,  $\omega_i$  está relacionada con el factor de amortiguamiento.

### 2.3.2 Casos particulares

Debido a que la relación de dispersión para un ángulo arbitrario es una ecuación trascendental compleja, resulta útil resolver el sistema para configuraciones particulares que arrojen soluciones sencillas. Los casos adicionales propuestos son un campo magnético vertical ( $\theta = \pi/2$ ), uno horizontal ( $\theta = 0$ ), y uno inclinado ( $\theta = \pi/4$ ), los cuales están descritos por las mismas ecuaciones y condiciones de frontera, donde la única diferencia viene dada por la fuerza de Lorentz que depende de la velocidad  $\mathbf{u}$  (ver Ec. (2.10)).

#### Campo magnético vertical $\theta = \pi/2$

Cuando el campo magnético se encuentra orientado de manera vertical ( $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_y$ ), la fuerza de Lorentz apunta en la dirección horizontal. Y, realizando el mismo procedimiento que para un ángulo arbitrario, la ecuación diferencial asociada al sistema se expresa como [38]

$$\Pi - \frac{ik^2\omega\tau}{1+i\omega\tau}\Pi = 0 \quad (2.20)$$

Aplicando las condiciones de frontera a esta última expresión, el problema queda definido mediante la relación de dispersión

$$\tanh(\alpha_V h) = \frac{\omega^2}{\alpha_V (g + \gamma^* k^2)} \quad (2.21)$$

en donde  $\alpha_V$  se expresa como

$$\alpha_V = k \left( \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau} \right)^{1/2} \quad (2.22)$$

Hay que notar que en ausencia de campo magnético, o dicho de otra manera, cuando los tiempos de amortiguamiento son muy grandes ( $\tau \rightarrow \infty$ ), ocurre que  $\alpha_V = k$ , obteniendo así la relación de dispersión clásica para ondas de gravedad-capilares

$$\omega^2 = k(g + k^2\gamma^*) \tanh(kh) \quad (2.23)$$

Despreciando la tensión superficial en la última ecuación, se obtiene para aguas someras la siguiente relación de dispersión [37, 38]

$$\omega^2 - i\omega/\tau - \omega_0^2 = 0 \quad (2.24)$$

También se puede recuperar de la expresión original (ver Ec. (2.23)), la relación de dispersión clásica para ondas de gravedad [17] denotada por  $\omega_0$

$$\omega_0^2 = kg \tanh kh \quad (2.25)$$

que en el límite de aguas someras ( $kh \ll 1$ ) es no dispersiva

$$\omega_0 = \sqrt{gh} \quad (2.26)$$

#### Campo magnético horizontal $\theta = 0$

Para la configuración del campo magnético horizontal ( $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_x$ ), la fuerza de Lorentz generada apunta en dirección vertical, y la ecuación diferencial que describe al sistema es

$$\Pi - k^2\Pi = -\frac{ik^2\Pi}{\tau\omega} \quad (2.27)$$

que conduce a la siguiente relación de dispersión

$$\tanh(\alpha_H h) = \frac{\omega^2\tau - i\omega}{\alpha_H\tau(g + \gamma^*k^2)} \quad (2.28)$$

con  $\alpha_H$  expresado como

$$\alpha_H^2 = k^2(\omega\tau - i)/\omega\tau \quad (2.29)$$

Se tiene que en el límite de aguas poco profundas,  $\alpha_H h \ll 1$ , y la relación de dispersión anterior se reduce a la relación de dispersión clásica de ondas de gravedad-capilares para aguas someras

$$\omega^2 = k^2h(g + \gamma^*k^2) \quad (2.30)$$

lo que demuestra que en este límite el campo magnético orientado en dirección horizontal no amortigua el flujo.

### Campo magnético inclinado ( $\pi/4$ )

El último de los casos es una configuración muy específica, que consiste en un campo magnético con una inclinación de  $\pi/4$  y una intensidad  $\sqrt{2}B_0$ , que puede construirse por la superposición de un campo magnético vertical con uno horizontal, ambos de la misma intensidad. En este caso, la ecuación que describe el movimiento del fluido se expresa como

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = - \left( \frac{p_1}{\rho} \right) - \frac{1}{\tau}(u_1 - v_1)\hat{\mathbf{e}}_x - \frac{1}{\tau}(-u_1 + v_1)\hat{\mathbf{e}}_y \quad (2.31)$$

la cual establece una competencia entre la velocidad vertical y horizontal, y tiene la siguiente relación de dispersión

$$\tanh(\alpha h_I) = \alpha_I \left( -\frac{gk + \gamma^* k^3}{\omega} + \frac{1}{\tau} \right) \left( \frac{i - \omega\tau}{k\tau} \right)^{-1} - \beta^{-1} \quad (2.32)$$

donde

$$\alpha_I^2 = k^2 \left( 1 + \frac{1}{(\omega\tau - i)^2} \right), \quad \beta_I = -k \frac{\omega\tau + i}{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (2.33)$$

Una vez más, se recupera la relación de dispersión para ondas de gravedad-capilares cuando el campo magnético tiende a cero (donde  $\alpha_I = k$  y  $\beta_I = 0$ ). Además, en el límite de aguas poco profundas  $\tanh(\alpha h) \approx \alpha h$ . La Ec. (2.32) se puede resolver explícitamente para  $\omega$ , esto es

$$\omega_r = \sqrt{kh(kg + \gamma^* k^3) - \left( \frac{1}{2\tau} \right)^2}, \quad \omega_i = \frac{1}{2\tau} \quad (2.34)$$

De hecho, despreciando la tensión superficial ( $\gamma = 0$ ), las Ecs. (2.34) coinciden con el resultado obtenido en el límite de aguas poco profundas para un campo magnético vertical (ver Ec. (2.24)). La Ec. (2.34) muestra que en un campo magnético vertical, las ondas son amortiguadas en un tiempo de amortiguamiento característico de orden  $\tau$ ; más aún, las ondas son amortiguadas críticamente ( $\omega_r = 0$ ) cuando  $\omega_0\tau = 1/2$ .

## 2.4 Resultados

Si bien el sistema dinámico se resolvió de manera completa, en este trabajo solamente nos enfocamos en la tasa de amortiguamiento denotada por  $\omega_i$ , así como en la frecuencia de oscilación de la superficie libre  $\omega_r$ . Ambos parámetros se normalizan por la relación de dispersión para ondas de gravedad  $\omega_0$  (ver Ec. (2.25)), de tal manera que podamos comparar los resultados obtenidos con el comportamiento de las ondas no amortiguadas. Además, para poder mostrar los efectos de la tensión superficial se manejan dos casos principales, uno para ondas de gravedad y otro para ondas capilares.

### 2.4.1 Ondas de gravedad ( $\gamma = 0$ )

El primer caso que se considera es el de ondas puramente de gravedad ( $\gamma = 0$ ), para un campo magnético orientado un ángulo arbitrario (ver Ec. (2.18)). En la Fig. 2.2a se grafica  $\omega_i/\omega_0$  para aguas poco profundas ( $kh \ll 1$ ) como una función del parámetro de interacción  $N_0$ , con  $N_0 = 1/\omega_0\tau = B_0/\rho\sigma\omega_0$ , en donde el ángulo  $\theta$  está dado para distintas orientaciones del campo magnético. Para fines comparativos se grafica la relación de dispersión obtenida para una configuración vertical en aguas poco profundas (ver Ec. (2.24)), denotada por  $B_L$ , la cual establece la tasa máxima de amortiguamiento que se puede obtener con un campo magnético de intensidad  $B_0$ . En estas gráficas (para  $\omega_i/\omega_0$ ), la pendiente de las curvas es una medida de la tasa de amortiguamiento, y para  $B_L$  crece linealmente con un valor de  $1/2$ , hasta que la oscilación es amortiguada críticamente en  $N_0 = 2$  como lo muestra la fase de oscilación normalizada  $\omega_r/\omega_0$  (ver Fig. 2.2b); mientras que para las otras configuraciones el amortiguamiento crítico se obtiene para  $N_0 > 2$ . Si se aumenta ligeramente la profundidad ( $kh = 0.5$ ), de tal manera de que el fluido permanezca en el límite de aguas someras, se puede apreciar un incremento en el valor de  $N_0$  para el amortiguamiento crítico de las ondas (ver Fig. 2.3b).

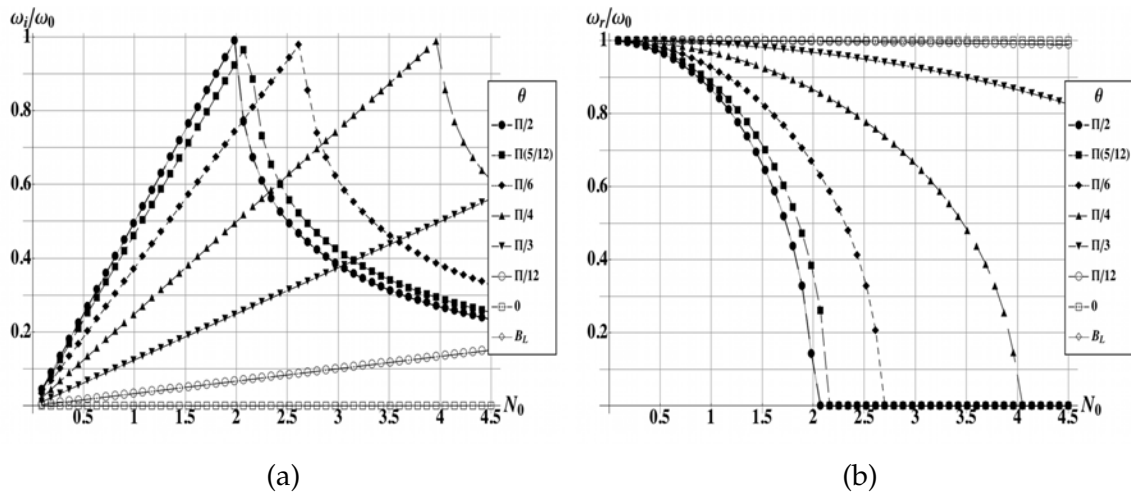


Fig. 2.2: Componentes imaginaria (a) y real (b) de la frecuencia normalizada por  $\omega_0$  en función del parámetro de interacción  $N_0$  para distintas orientaciones ( $\theta$ ) del campo magnético. Aguas someras:  $kh = 0.03$ .

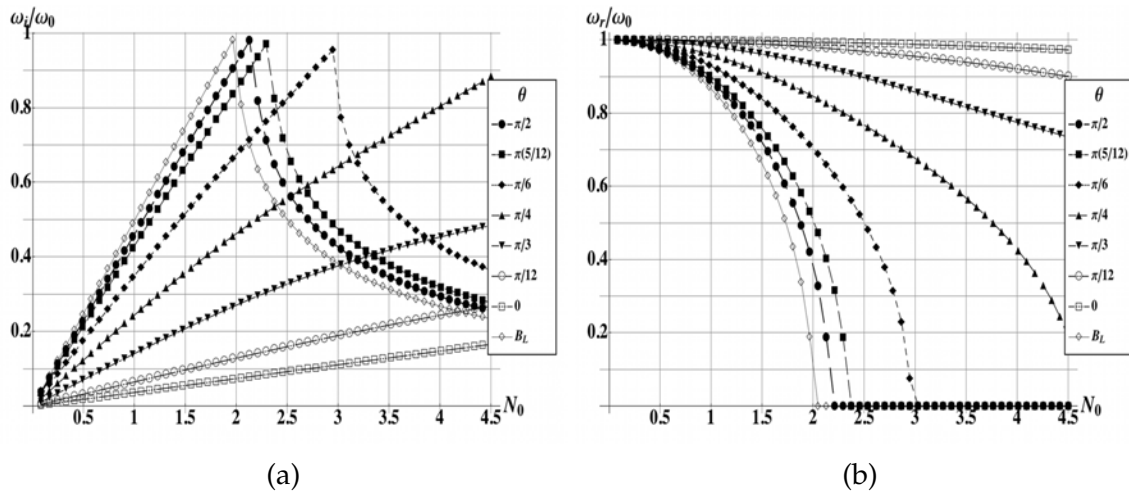


Fig. 2.3: Componentes imaginaria (a) y real (b) de la frecuencia normalizada por  $\omega_0$  en función del parámetro de interacción  $N_0$  para distintas orientaciones ( $\theta$ ) del campo magnético. Aguas someras:  $kh = 0.5$ .

Por otro lado, la dependencia del amortiguamiento con respecto a la inclinación  $\theta$  del campo magnético, se muestra en la Fig. 2.4, en donde  $\omega_i/\omega_0$  se grafica como función del ángulo  $\theta$  (que varía de 0 a  $\pi/2$ ), y se evalúa para distintos valores de  $N_0$  en el intervalo de 0.1 a 2. Es evidente que en el intervalo explorado de  $N_0$ , la tasa de amortiguamiento se incrementa a medida que el ángulo  $\theta$  y el parámetro de interacción  $N_0$  crecen. De hecho, para el límite de aguas someras (ver Fig. 2.4a), el amortiguamiento es despreciable para la configuración horizontal de acuerdo a lo establecido por la Ec. (2.30), y es máximo para el campo magnético orientado verticalmente. Además, cuando la profundidad del fluido se incrementa (ver Fig. 2.4b), el amortiguamiento magnético se vuelve más importante para ángulos pequeños ( $\theta < \pi/4$ ), mientras que para ángulos grandes ( $\theta > \pi/4$ ) la intensidad de amortiguamiento disminuye. Como consecuencia, en aguas profundas, tanto la tasa de amortiguamiento como la frecuencia de oscilación son independientes de la orientación del campo magnético, lo cual puede entenderse analizando las configuraciones horizontal y vertical.

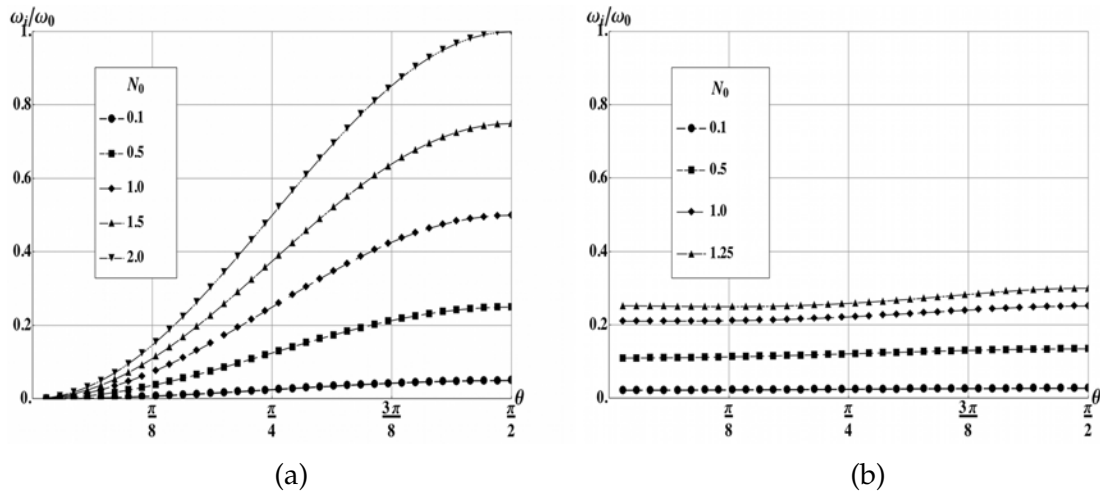


Fig. 2.4: Componente imaginaria de la frecuencia (factor de amortiguamiento) normalizada por  $\omega_0$  como función del ángulo  $\theta$  para distintos valores del parámetro de interacción  $N_0$ . Aguas someras: (a)  $kh = 0.031$ . Aguas con profundidades moderadas: (b)  $kh = 2.2$ .

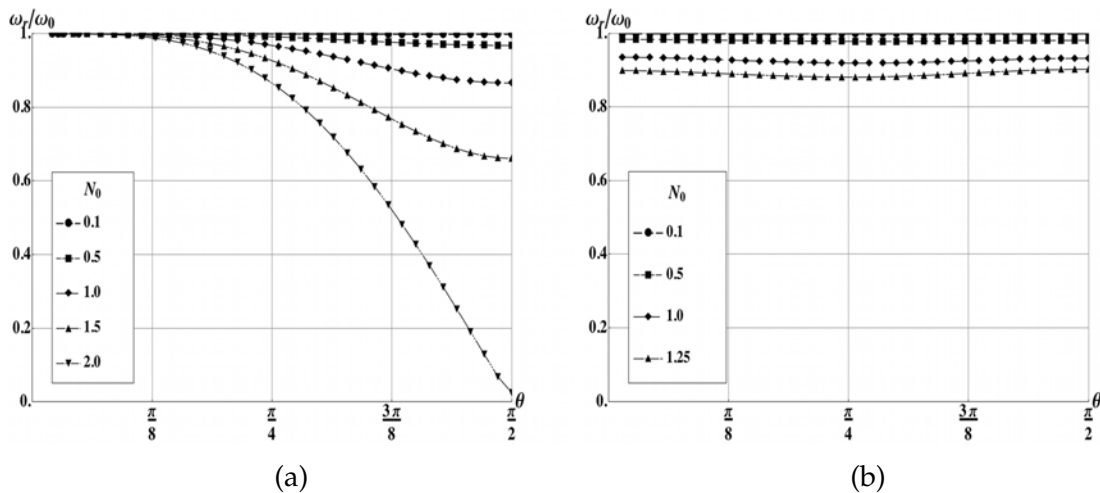


Fig. 2.5: Componente real de la frecuencia normalizada por  $\omega_0$  como función del ángulo  $\theta$  para distintos valores del parámetro de interacción  $N_0$ . Aguas someras: (a)  $kh = 0.031$ . Aguas con profundidades moderadas: (b)  $kh = 2.2$ .

Para esto, de la ecuación de continuidad se observa que la componente vertical y horizontal de la velocidad tienen órdenes de magnitud que se relacionan como  $v_1 \sim u_1 kh$ , en donde  $h$  y  $1/k$  son las longitudes características en la dirección vertical y horizontal de manera correspondiente. Por lo tanto, en el límite de aguas someras la componente relevante es la horizontal. Sin embargo, a medida que la profundidad se incrementa, las componentes horizontales y verticales se vuelven igual de importantes, por lo que ambas configuraciones se comportan de maneras similares (casi indistintas) en el límite de aguas profundas.

Campo magnético inclinado  $\pi/4$

Si bien para una profundidad fija la configuración vertical es la que ofrece los menores tiempos de amortiguamiento, se puede observar un comportamiento interesante si se considera la superposición de un campo magnético vertical con uno horizontal ( $\theta = \pi/4$ ). Esta configuración de intensidad  $\bar{2}B_0$ , y denotada por  $B_{XY}$  (ver Ec. (2.32)), se compara con la configuración vertical  $B_Y$  (ver Ec. (2.21)) y la horizontal  $B_X$  (ver Ec. (2.28)), así como con el caso de referencia  $B_L$ .

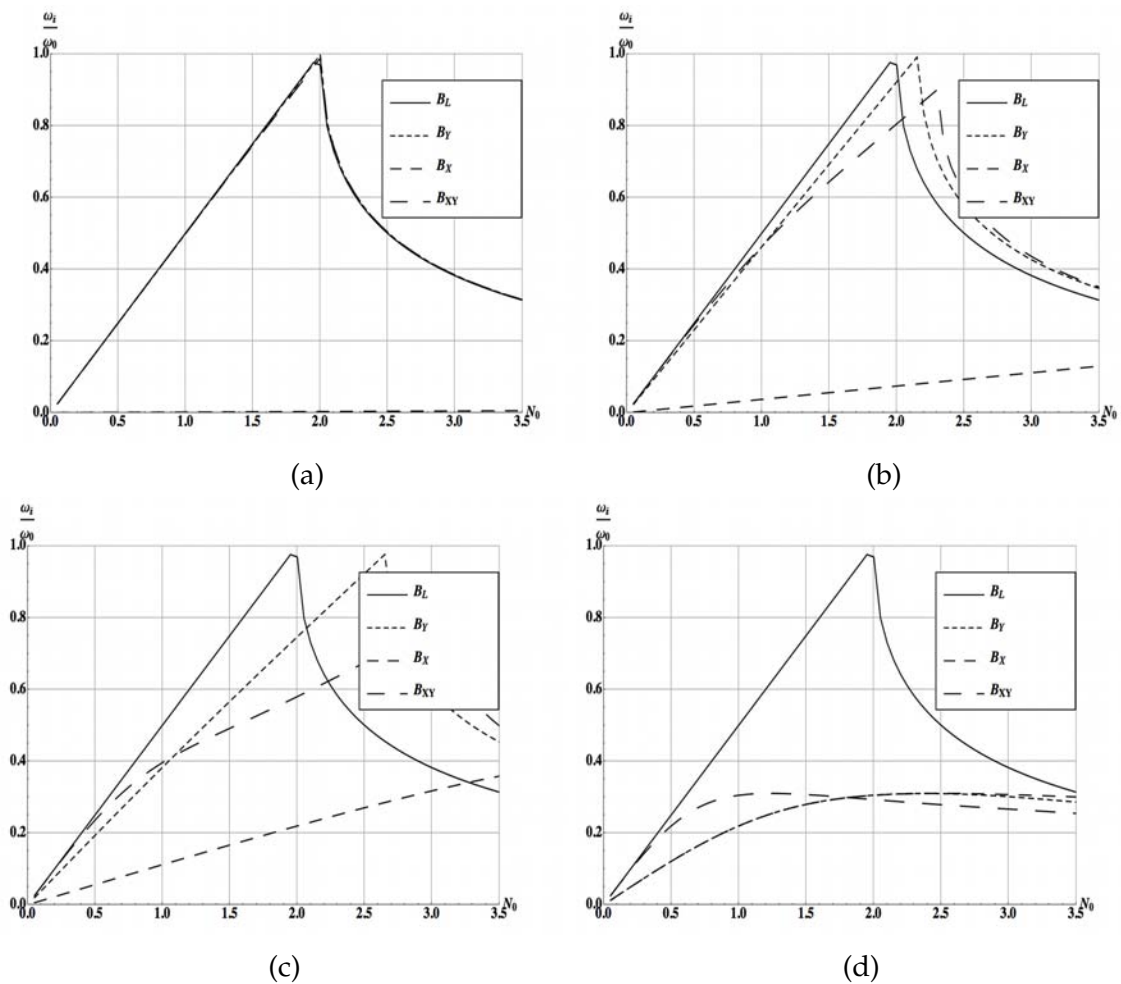


Fig. 2.6: Componente imaginaria de la frecuencia (factor de amortiguamiento) normalizada por  $\omega_0$  como función del parámetro de interacción  $N_0$  para una configuración vertical ( $B_Y$ ), horizontal ( $B_X$ ) y una inclinada a un ángulo  $\pi/4$  ( $B_{XY}$ ). Aguas someras: (a)  $kh = 0.1$  y (b)  $kh = 0.5$ , (c) Aguas con profundidad moderada:  $kh = 1.0$ . (d) Aguas profundas:  $kh = 7.5$ .

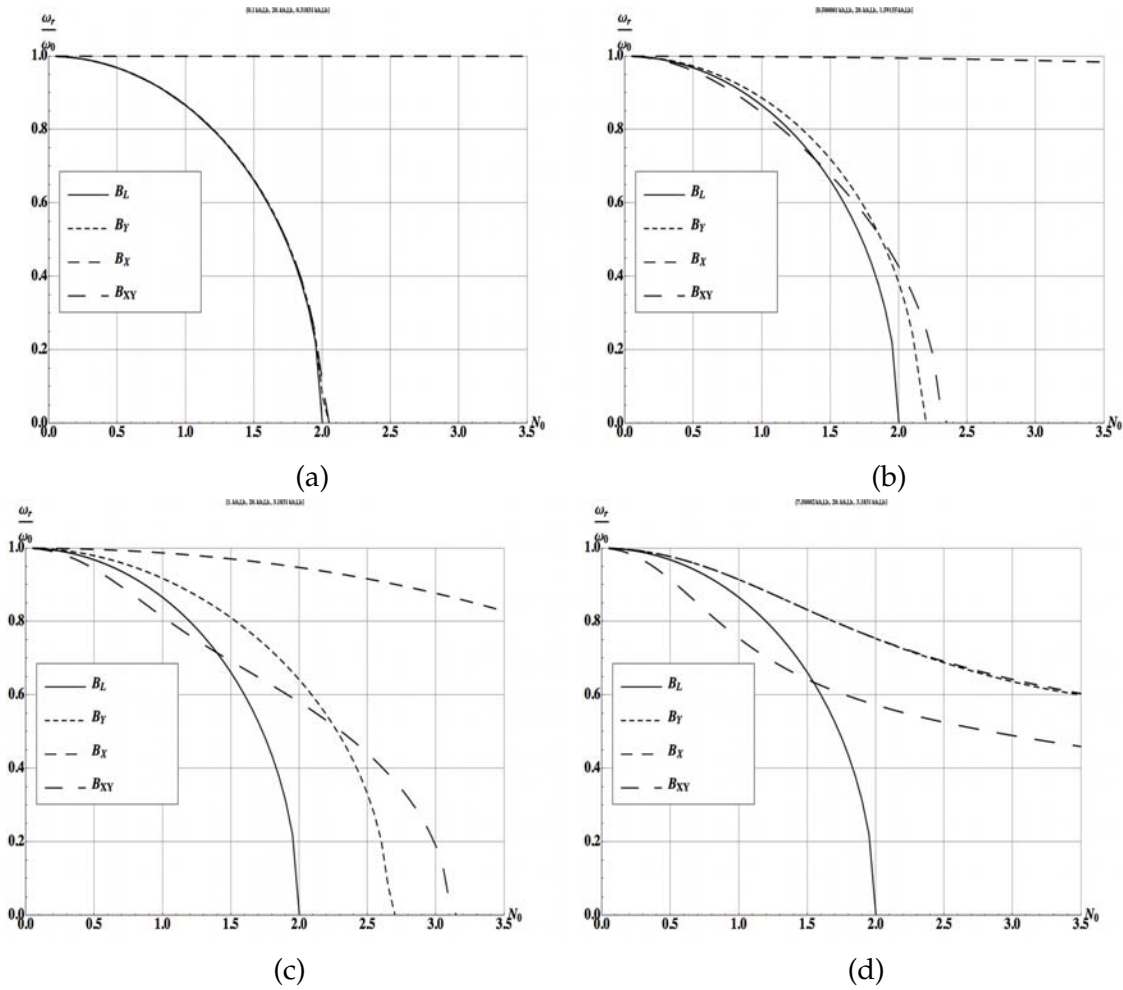


Fig. 2.7: Componente real de la frecuencia normalizada por  $\omega_0$  como función del parámetro de interacción  $N_0$  para una configuración vertical ( $B_Y$ ), horizontal ( $B_X$ ) y una inclinada a un ángulo  $\pi/4$  ( $B_{XY}$ ). Aguas someras: (a)  $kh = 0.1$  y (b)  $kh = 0.5$ , (c) Aguas con profundidad moderada:  $kh = 1.0$ . (d) Aguas profundas:  $kh = 7.5$ .

El comportamiento de  $\omega_i$  y  $\omega_r$  se puede observar en las Figs. 2.6 y 2.7 respectivamente. Para aguas someras (ver Figs. 2.6a y 2.7a con  $kh = 0.1$ ), las configuraciones  $B_Y$  y  $B_{XY}$  casi coinciden con  $B_L$ . Si  $kh$  crece hasta 0.5, la tasa de amortiguamiento decrece ligeramente para ambas configuraciones, aunque permanecen aproximadamente lineales; mientras que la contribución de  $B_X$  es prácticamente despreciable, comportándose meramente como ondas de gravedad (ver Figs. 2.6b y 2.7b). Por otro lado, en aguas moderadas (ver Fig. 2.6c,  $kh = 1.0$ ) y profundas (ver Fig. 2.6d,  $kh = 7.5$ ), la configuración  $B_{XY}$  coincide con  $B_L$  en el intervalo  $N_0 < 0.3$ , lo que implica que en esta región, la configuración con el campo magnético inclinado un ángulo  $\theta = \pi/4$  ejerce un mejor amortiguamiento (de hecho el máximo posible), puesto que las otras configuraciones sí son afectadas por los efectos de la profundidad. Esto significa que para valores pequeños de  $N_0$ , los tiempos de amortiguamiento se mantienen constantes independientemente de la profundidad del fluido. Para  $N_0 > 0.3$ , la pendiente de  $B_{XY}$  con la que



crece  $\omega_i/\omega_0$ , disminuye, y para aguas profundas se presenta un comportamiento no lineal. Lo que ocurre en estos valores es que la superposición de campos magnéticos (horizontal y vertical) actúa en detrimento del amortiguamiento, lo cual se refleja en la expresión de la fuerza de Lorentz para esta configuración (ver Ec. (2.31)). Por lo tanto, para  $N_0$  grandes, la configuración  $B_Y$  promueve un mejor amortiguamiento que  $B_{XY}$ ; lo mismo ocurre para  $B_X$  para en aguas profundas.

### 2.4.2 Ondas capilares ( $\gamma$ finita)

Ahora se explora el efecto de la tensión superficial, la cual actúa maximizando la tasa de amortiguamiento magnético. Para poder observar este efecto, se considera el límite de aguas profundas, de tal manera que la relación de dispersión no sea afectada por las variaciones en la profundidad del fluido. Las Figs. 2.8 y 2.9 muestran  $\omega_i/\omega_0$  y  $\omega_r/\omega_0$  respectivamente como función del parámetro de interacción  $N_0$  para distintos valores del parámetro  $\gamma^* = \gamma/\rho$  para un campo magnético inclinado a un ángulo  $\pi/4$ , y uno vertical (el cual se comporta de manera muy parecida a la configuración horizontal por lo que esta última no se muestra aquí). Para fines comparativos las ondas de gravedad se representan mediante el parámetro  $\gamma_0^*$ , mientras que  $\gamma_{Hg}^*$ ,  $\gamma_{Ga}^*$ ,  $\gamma_{Al}^*$  y  $\gamma_1^*$ , corresponden a los casos de ondas capilares en mercurio, galio y aluminio, con valores representativos para la interfase  $\gamma_{Hg}^* = 0.000037 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Ga}^* = 0.00012 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Al}^* = 0.00037 \text{ m}^3/\text{s}^2$  [43, 44]. También se eligió un valor alto de referencia  $\gamma_1^* = 0.005$  que no corresponde a ningún líquido en particular.

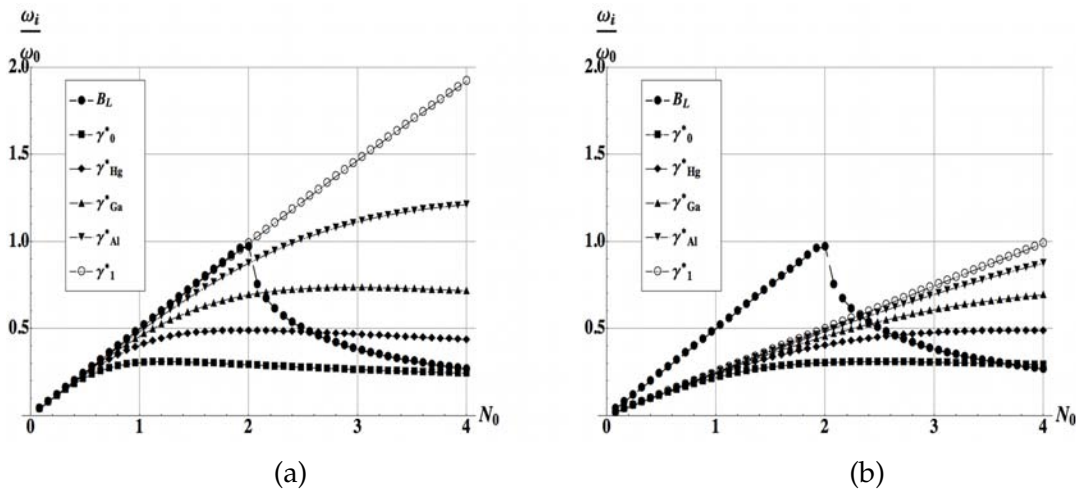


Fig. 2.8: Parte imaginaria de la frecuencia (factor de amortiguamiento) normalizada por  $\omega_0$  como función del parámetro de interacción  $N_0$ . Las curvas muestran valores distintos de  $\gamma^* = \gamma/\rho$ , donde  $\gamma_0^* = 0.0 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Hg}^* = 0.000037 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Ga}^* = 0.00012 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Al}^* = 0.00037 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_1^* = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}^2$ , para  $kh = 314$  y  $\lambda = 0.01\text{m}$ . (a) Campo magnético inclinado  $\theta = \pi/4$ . (b) Campo magnético vertical.

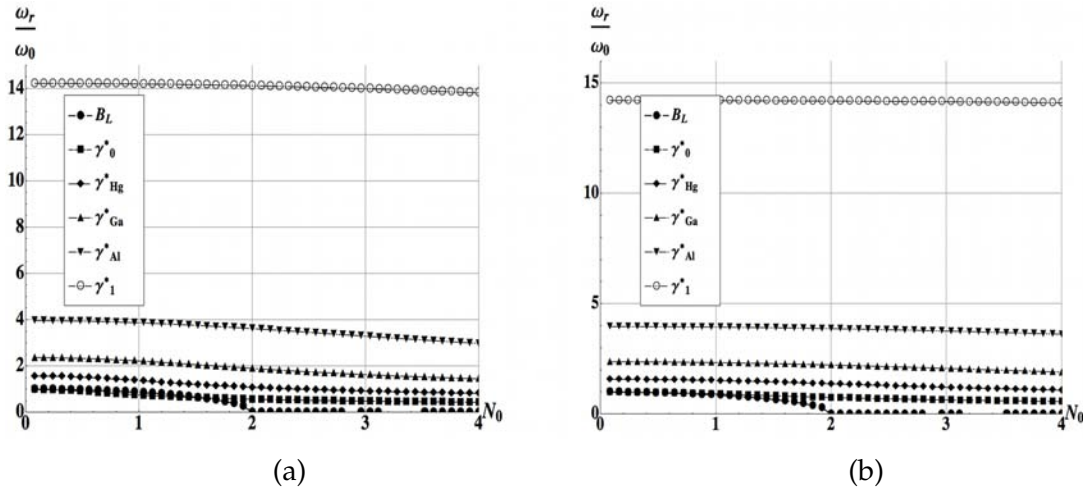


Fig. 2.9: Componente real de la frecuencia normalizada por  $\omega_0$  como función del parámetro de interacción  $N_0$ . Las curvas muestran valores distintos para  $\gamma^* = \gamma/\rho$ , donde  $\gamma_0^* = 0.0 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Hg}^* = 0.000037 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Ga}^* = 0.00012 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_{Al}^* = 0.00037 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $\gamma_1^* = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}^2$ , para  $kh = 314$  y  $\lambda = 0.01\text{m}$ . (a) Campo magnético inclinado  $\theta = \pi/4$ . (b) Campo magnético vertical.

La Fig. 2.8a, muestra que para el campo magnético inclinado a un ángulo  $\pi/4$ , el incremento de la tensión superficial también incrementa la tasa de amortiguamiento magnético hasta un valor máximo con una pendiente de  $1/2$ , coincidiendo con el caso límite  $B_L$ . Algo similar ocurre para el campo magnético vertical (ver Fig. 2.8b), en donde la tensión superficial también incrementa la tasa de amortiguamiento comparado con el caso de ondas de gravedad, aunque en este caso la pendiente máxima de la curva que se puede obtener es  $1/4$  (lo mismo ocurre para la configuración horizontal). Por lo tanto, es evidente que la tensión superficial fortalece los efectos de amortiguamiento magnético. Como consecuencia para estos casos, las ondas de longitudes más cortas son las primeras en desaparecer, teniendo como resultado ondas largas con superficie suave (sin rizos). Adicionalmente a esto, y como es de esperarse, las frecuencias de oscilación toman valores altos comparados con la frecuencia angular para ondas de gravedad  $\omega_0$  (ver Fig. 2.9), los cuales decaen ligeramente en función el parámetro de interacción  $N_0$ .

## 2.5 Conclusiones

En este capítulo se hizo un breve repaso de las ecuaciones de la MHD, las cuales acoplan la dinámica de fluidos y las ecuaciones del campo electromagnético. Con base en esto, se estudió una de las aplicaciones más comunes en el procesamiento electromagnético de materiales, que es el amortiguamiento de metales líquidos mediante campos magnéticos. En concreto se resolvió de manera teórica el amortiguamiento de ondas de gravedad-capilares para un campo magnético orientado con un ángulo arbitrario para un modelo bidimensional en el límite de números de Reynolds magnético

pequeños, lo cual hasta la fecha no había sido estudiado. Aunque se resolvió el sistema de manera completa, se prestó mayor interés en el tiempo de amortiguamiento de las oscilaciones. Para esto se obtuvo la relación de dispersión correspondiente al sistema, a partir de la cual se obtuvieron las expresiones clásicas para ondas de gravedad-capilares no amortiguadas. También se obtuvieron las relaciones de dispersión para casos específicos (campo vertical, campo horizontal y un campo inclinado un ángulo  $\pi/4$ ), siendo estas expresiones mucho más sencillas que la de un ángulo arbitrario.

Con base en la relación de dispersión generalizada se calcularon los tiempos de amortiguamiento en función del ángulo  $\theta$ , encontrando que los valores más bajos corresponden a los ángulos más grandes. Además, para ángulos grandes ( $\theta > \pi/4$ ) los tiempos de amortiguamiento son menores en aguas a con profundidad baja, y aumentan asintóticamente al aumentar ésta; mientras que para los ángulos pequeños ( $\theta < \pi/4$ ) sucede lo opuesto. Además, en aguas profundas la tasa de frenado es independiente de la inclinación del campo, y, el amortiguamiento mínimo corresponde a la configuración vertical para aguas someras de acuerdo a lo reportado por Binod et al. [38].

Se estudió una configuración particular para un campo magnético inclinado un ángulo  $\pi/4$ , con una intensidad incrementada por un factor de  $\sqrt{2}$ , para distintas profundidades. En este caso, para ondas puramente de gravedad, se encontró que para valores pequeños del parámetro de interacción ( $N_0 < 0.3$ ) el campo magnético inclinado propuesto ejerce la tasa de amortiguamiento más rápida, con una pendiente de  $1/2$ , de manera independiente de la profundidad. Teniendo por tanto una posible aplicación tecnológica que permitiría controlar los tiempos característicos de amortiguamiento en ondas superficiales sea cual sea la profundidad de la capa de metal líquido.

Se comprobó también a partir de la frecuencia de oscilación, que las ondas son amortiguadas críticamente cuando  $N_0 < 2$  para cualquier configuración, en el límite de aguas someras; mientras que para aguas profundas la frecuencia de oscilación (al igual que la tasa de amortiguamiento) no depende del ángulo al que se encuentra orientado el campo magnético.

Finalmente se encontró que los efectos de tensión superficial juegan un papel importante fortaleciendo el amortiguamiento magnético, ya que minimizan los tiempos de frenado para cualquier parámetro de interacción, teniendo por tanto que las ondas de longitudes más cortas son las primeras en desaparecer cuando se encuentra un metal líquido con superficie libre bajo un campo magnético.

---

# ONDAS INTERNAS EN PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO.

---

*To cross the seas, to traverse the roads, and to work machinery by galvanism, or rather electro-magnetism, will certainly, if executed, be the most noble achievement ever performed by man.*

—Alfred Smee—

En este capítulo se estudia el comportamiento de las ondas internas que se propagan a través de fluidos eléctricamente conductores en presencia de un campo magnético uniforme. Como se verá, dicho campo no solamente es capaz de amortiguar las oscilaciones de las ondas, sino también de modificar la dirección de propagación de la energía, la cual, para ondas internas, puede diferir con respecto a la velocidad de fase. Las ondas internas se propagan en el interior de los fluidos lejos de su superficie libre y pueden ser causadas por perturbaciones en presencia de fuerzas de cuerpo tales como la de Coriolis o la de flotación [20]. En el caso de fluidos estratificados, es decir aquellos donde los elementos de volumen tienen una densidad que depende de la profundidad, las fuerzas de flotación actúan con una dirección preferencial a lo largo del eje vertical, generando por tanto anisotropía cuando se presenta el fenómeno de dispersión [16]. El ejemplo más común ocurre en los océanos, en donde el agua se encuentra estratificada debido a las diferentes concentraciones de sal y los gradientes de temperatura. Uno de los problemas clásicos donde se presentan ondas internas, considera un fluido inviscido que se encuentra estratificado de tal manera que su densidad  $\rho$  decrece con la altura de forma exponencial, por lo que los elementos de volumen más densos se encuentran a profundidades mayores; siendo la flotación mediante la acción de la gravedad, la fuerza restitutiva que permite la existencia de las ondas de gravedad internas.

En este capítulo se generaliza el problema clásico de propagación de ondas internas en un fluido estratificado al incluir los efectos generados por un campo magnético uniforme, considerando que el fluido es también eléctricamente conductor. Este problema ha sido tratado en la literatura principalmente con relación a problemas geofísicos o de física solar. En el contexto oceanográfico las interacciones electromagnéticas son de gran interés práctico [45]. Por ejemplo, se ha observado que una fuente importante de variaciones electromagnéticas de baja frecuencia son debidas al movimiento del agua (eléctricamente conductora) a través del campo magnético de la Tierra [46]. Dicho movimiento da lugar a una fuerza electromotriz, con una corriente eléctrica y

un campo magnético inducidos asociados. De esta forma, las ondas superficiales, las mareas, las corrientes oceánicas y en particular las ondas internas producen campos eléctricos y magnéticos observables que contribuyen a los campos magnéticos detectados por los sensores magnéticos que registran el campo terrestre en el océano y por tanto, deben ser considerados. Por otro lado, las ondas internas de gravedad que se propagan en la ionósfera, son capaces de producir perturbaciones viajeras ionosféricas (TID s por sus siglas en inglés). Dichas perturbaciones modifican la densidad eléctrica de esta región y son anisotrópicas, dependiendo de los parámetros de las ondas, el campo magnético terrestre, y el gradiente de la densidad de ionización [47]. La interacción de campos magnéticos con ondas internas de gravedad también juega un papel relevante en la dinámica del interior del Sol [48]. En el presente trabajo trataremos un problema simplificado que permite comprender algunos de los mecanismos básicos de la manera en que las ondas internas se ven afectadas por un campo magnético externo.

### 3.1 Ondas internas en un fluido estratificado bajo un campo magnético uniforme

Consideremos una capa de fluido conductor de profundidad  $H$ , con paredes laterales muy separadas, que se encuentra inicialmente en reposo, y que es perturbada en presencia de un campo magnético externo y uniforme,  $\mathbf{B}_0$ . El sistema dinámico se describe por la ecuación de conservación de masa y la ecuación de balance de cantidad de movimiento, es decir,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (3.1a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = - \nabla p + \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{f} \quad (3.1b)$$

donde  $\mathbf{f}$  representa la fuerza de Lorentz, que en el límite de  $R_m \ll 1$  se expresa como

$$\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (3.2)$$

mientras que la densidad de corriente eléctrica está dada por la ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \sigma (- \nabla \phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \quad (3.3)$$

y dado que las paredes laterales se encuentran muy separadas, se puede considerar  $\phi = 0$ . Dado que la densidad del fluido varía con la profundidad, se hará la suposición de que la conductividad eléctrica también cambia con la profundidad de una manera similar a como lo hace la densidad. Considerando un flujo bidimensional en el plano  $x - y$ , la velocidad, presión, densidad y conductividad eléctrica se representan como la suma de un estado de equilibrio más uno perturbado, denotados por los subíndices 0 y 1, respectivamente

### 3.1. Ondas internas en un fluido estratificado bajo un campo magnético uniforme 45

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x, y, t) + \mathbf{u}_1(x, y, t) \quad (3.4a)$$

$$p = p_0(y) + p_1(x, y, t) \quad (3.4b)$$

$$\rho = \rho_0(y) + \rho_1(x, y, t) \quad (3.4c)$$

$$\sigma = \sigma_0(y) + \sigma_1(x, y, t) \quad (3.4d)$$

donde en el estado en equilibrio ( $\mathbf{u}_0 = 0$ ) el sistema tendrá una presión hidrostática:

$$0 = -\frac{dp_0}{dy} - \rho_0 g \quad (3.5)$$

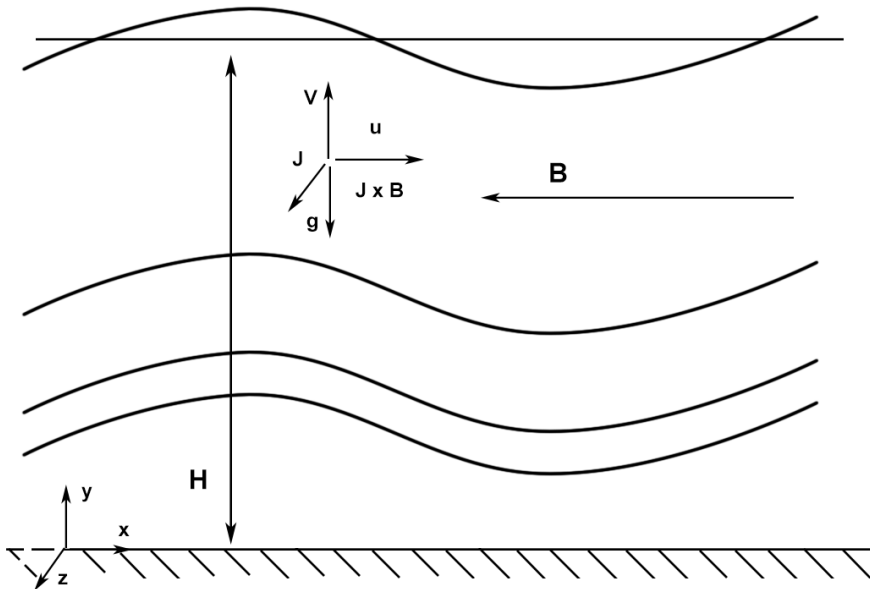


Fig. 3.1: Ondas generadas en un fluido conductor estratificado con una densidad que depende de la profundidad (H), en presencia de un campo magnético externo y uniforme que actúa en dirección horizontal. La perturbación viajará en el interior del fluido en forma de ondas debido a las fuerzas de flotación y a la fuerza de Lorentz inducida.

Se consideran dos casos de estudio, uno en donde la fuerza de Lorentz está orientada de manera paralela a la gravedad ( $\mathbf{F}_v$ ) (dirección vertical) y otro donde dicha fuerza actúa en dirección perpendicular a la gravedad ( $\mathbf{F}_h$ ). Se analiza la forma en que el amortiguamiento magnético modifica las propiedades de las ondas, en particular resulta de interés conocer si la dirección de propagación de la energía puede ser controlada mediante la interacción electromagnética.

### 3.1.1 Caso 1: Fuerza de Lorentz paralela a la gravedad

Si el campo magnético impuesto se orienta horizontalmente ( $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{e}}_x$ ), la fuerza de Lorentz inducida apuntará en la dirección vertical ( $\mathbf{F}_v = -\sigma v B_0^2 \hat{\mathbf{e}}_y$ ). Con base en esto, y considerando que las perturbaciones que aparecen en las Ecs. (3.4) son pequeñas, el sistema de ecuaciones (3.1) puede escribirse a primer orden como

$$\rho_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad (3.6a)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = - \frac{\partial p_1}{\partial y} - \rho_1 g - \sigma_0 B_0^2 v_1 \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (3.6c)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \frac{d\rho_0}{dy} = 0 \quad (3.6d)$$

donde recordamos que la densidad y la conductividad del flujo base,  $\rho_0$  y  $\sigma_0$  son funciones de la coordenada  $y$ . Se proponen soluciones como el producto de una función que depende de la profundidad  $y$  con una onda plana de número de onda  $k$  que se mueve en la dirección  $x$  (Ec. (1.4))

$$v_1 = \hat{v}_1(y) e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.7a)$$

$$u_1 = \hat{u}_1(y) e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.7b)$$

$$p_1 = \hat{p}_1(y) e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.7c)$$

De esta forma el sistema de Ecs. (3.6) puede escribirse como

$$\rho_0 \omega \hat{u}_1 = k \hat{p}_1 \quad (3.8a)$$

$$\rho_0 i \omega \hat{v}_1 = \hat{p}_1 + \hat{p}_1 g + \sigma_0 B_0^2 \hat{v}_1 \quad (3.8b)$$

$$\hat{u}_1(ik) + \hat{v}_1 = 0 \quad (3.8c)$$

$$-i\omega \hat{p}_1 + \hat{v}_1 \frac{d\rho_0}{dy} = 0 \quad (3.8d)$$

de donde es posible obtener una ecuación diferencial para la función  $\hat{v}_1$  (ver Apen. C.2) expresada de la siguiente manera

$$\hat{v}_1 + \hat{v}_1 \left( \frac{\rho_0}{\rho_0} \right) + \hat{v}_1 k^2 \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 - \frac{i}{\omega} \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho_0} = 0 \quad (3.9)$$

en donde el término  $N_f^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy}$  es un parámetro positivo que se denomina la frecuencia de flotación [17]. Para simplificar los términos  $\rho_0/\rho_0$  y  $\sigma_0 B_0^2/\rho_0$  se propone que

### 3.1. Ondas internas en un fluido estratificado bajo un campo magnético uniforme 47

la densidad del fluido decae exponencialmente con la profundidad, y considerando un intervalo donde la densidad y la conductividad eléctrica dependen linealmente de la concentración  $\mu$ , es posible suponer que

$$\rho_0 = \rho_c e^{-y/H} \quad (3.10a)$$

$$\sigma_0 = \sigma_c e^{-y/H} \quad (3.10b)$$

donde el subíndice  $c$  denota que se trata de un valor constante de referencia. Recordando la definición del tiempo de amortiguamiento magnético,  $\tau = \rho_0/\sigma_0 B_0^2$  y dado que

$$\frac{\rho_0}{\rho_0} = -\frac{1}{H} \quad (3.11)$$

la Ec. (3.9) se expresa como

$$\hat{v}_1 - \frac{1}{H}\hat{v}_1 + \hat{v}_1 k^2 - \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 - \frac{i}{\omega\tau} = 0 \quad (3.12)$$

Nótese que el término  $-ik^2/\omega\tau$  está asociado a la fuerza de Lorentz. En ausencia de campo magnético, es decir  $\tau \rightarrow \infty$ , se recupera la ecuación diferencial para ondas de gravedad internas [17] dada por

$$\hat{v}_1 - \frac{1}{H}\hat{v}_1 + \hat{v}_1 k^2 - \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 = 0 \quad (3.13)$$

La Ec. (3.12) tiene una solución de la forma

$$\hat{v}_1 = V_v e^{r_v y} \quad (3.14)$$

en donde  $V_v$  es una constante arbitraria y  $r_v$  un número complejo dado por

$$r_v = \frac{1}{2H} \pm \sqrt{\frac{1}{4H^2} + k^2 - \frac{N_f^2}{\omega^2} + 1 + \frac{i}{\omega\tau}} \quad (3.15)$$

el cual se puede descomponer como  $r_v = \frac{1}{2H} - q + il$ , de tal manera que la solución en forma de onda  $v_1(y)$  se escribe

$$v_1 = V_v e^{-y/2H} e^{-qy} e^{i(kx+ly-\omega t)} \quad (3.16)$$



En esta expresión,  $q$  representa el factor de amortiguamiento de la amplitud de las ondas internas dado por

$$q = \frac{-\frac{k^2}{\omega\tau} \bar{\alpha}_1}{\left(-\frac{1}{4H^2} - k^2 \left(-\frac{N_f^2}{\omega^2} + 1\right) + \alpha_1\right)^2 + \frac{k^4}{\omega^2\tau^2}} \quad (3.17a)$$

donde  $l$  es el número de onda en la dirección  $y$  dado por la relación de dispersión

$$l^2 = \frac{\left(-\frac{1}{4H^2} - k^2 \left(-\frac{N_f^2}{\omega^2} + 1\right) + \alpha_1\right)^2 \alpha_1}{-\frac{1}{4H^2} - k^2 \left(-\frac{N_f^2}{\omega^2} + 1\right) + \left(-\frac{1}{4H^2} - k^2 \left(-\frac{N_f^2}{\omega^2} + 1\right)\right)^2 + \frac{k^4}{\omega^2\tau^2} + \frac{k^4}{\omega^2\tau^2}} \quad (3.17b)$$

y además

$$\alpha_1 = \frac{-\frac{1}{4H^2} - k^2 \left(-\frac{N_f^2}{\omega^2} + 1\right) + \frac{k^4}{\omega^2\tau^2}}{\left(-\frac{1}{4H^2} - k^2 \left(-\frac{N_f^2}{\omega^2} + 1\right) + \frac{k^4}{\omega^2\tau^2}\right)^2} \quad (3.18)$$

En ausencia de campo magnético se recupera la relación de dispersión para ondas internas de gravedad denotada por  $\omega_*$  [17]

$$\omega_*^2 = \frac{k^2 N_f^2}{l^2 + k^2 + \frac{1}{4H^2}} \quad (3.19)$$

### 3.1.2 Caso 2: Fuerza de Lorentz Horizontal

Cuando las ondas internas se encuentran en presencia de un campo magnético paralelo a la gravedad  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_y$ , la fuerza de Lorentz generada apuntará en la dirección horizontal ( $\mathbf{F}_h = -\sigma u_1 B_0^2 \hat{\mathbf{e}}_x$ ), de tal manera que el sistema de ecuaciones lineales que describen al sistema está dado por (ver Apen. 3.1.1)

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - \sigma_0 u_1 B_0^2 \quad (3.20a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} - \rho_1 g \quad (3.20b)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial t} = 0 \quad (3.20c)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = 0 \quad (3.20d)$$

$$(3.20e)$$

### 3.1. Ondas internas en un fluido estratificado bajo un campo magnético uniforme 49

Si en estas ecuaciones se utilizan soluciones en forma de onda (Ecs. (3.7)), el sistema puede escribirse como

$$-\rho_0 i \omega \hat{u}_1 = -ik \hat{p}_1 - \sigma_0 \hat{u}_1 B_0^2 \quad (3.21a)$$

$$-\rho_0 i \omega \hat{v}_1 = -\hat{p}_1 - \hat{\rho}_1 g \quad (3.21b)$$

$$ik \hat{u}_1 - i \omega \hat{v}_1 = 0 \quad (3.21c)$$

$$-i \omega \hat{\rho}_1 + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{\rho}_0}{\partial y} = 0 \quad (3.21d)$$

$$(3.21e)$$

a partir del cual se puede obtener una ecuación diferencial lineal de segundo orden para la variable  $\hat{v}_1$  (ver Apen. C.2), que se expresa como

$$\frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( 1 + \frac{i \sigma_0 B_0^2}{\omega \rho_0} \right) + \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( \frac{\rho_0}{\rho_0} + \frac{i \sigma_0 B_0^2}{\omega \rho_0} \right) + \hat{v}_1 \left( \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 \right) = 0 \quad (3.22)$$

y de acuerdo a las formas funcionales para la densidad y la conductividad dadas por las Ecs. (3.10) se tiene que

$$\frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( 1 + \frac{i}{\omega \tau} \right) + -\frac{\hat{v}_1}{k^2} \frac{1}{H} \left( 1 + \frac{i}{\omega \tau} \right) + \hat{v}_1 \left( \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 \right) = 0$$

o bien

$$\hat{v}_1 - \frac{\hat{v}_1}{H} + \hat{v}_1 k^2 \left( \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{(\omega \tau)(\omega \tau - i)}{(\omega \tau)^2 + 1} = 0 \quad (3.23)$$

Se observa fácilmente que en ausencia de campo magnético se recupera la Ec. (3.13) para ondas internas de gravedad. La solución de la Ec. (3.23) se puede expresar en la forma  $\hat{v}_1 = V_h e^{r_h y}$ , en donde  $V_h$ , y  $r_h = -\frac{1}{2H} - q + il$ , de tal manera que la velocidad vertical  $v_1$  se expresa como

$$v_1 = V_h e^{-y/2H} e^{-qy} e^{i(kx+ly-\omega t)} \quad (3.24)$$

en donde  $q$  es el factor de amortiguamiento de la amplitud de las ondas dado por

$$q = - \frac{\left( \frac{1}{4H^2} - \frac{k^2 N_f^2 \tau^2}{1 + \tau^2 \omega^2} + \frac{k^2 \tau^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2} + \alpha_1 \right) \frac{\alpha_2}{2}}{\left( \frac{k^2 N_f^2 \tau}{\omega(1 + \tau^2 \omega^2)} - \frac{k^2 \omega \tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \right)^2 + \frac{1}{4H^2} - \frac{k^2 N_f^2 \tau^2}{1 + \tau^2 \omega^2} + \frac{k^2 \tau^2 \omega^2}{1 + \tau^2 \omega^2} + \alpha_2} \quad (3.25a)$$

y la velocidad de propagación de las ondas se calcula mediante la relación de dispersión

$$l^2 = \frac{\left( \frac{k^2 N_f^2 \tau}{\omega(1+\tau^2\omega^2)} - \frac{k^2 \omega \tau}{1+\tau^2\omega^2} \right)^2 \alpha_2}{\left( \frac{k^2 N_f^2 \tau}{\omega(1+\tau^2\omega^2)} - \frac{k^2 \omega \tau}{1+\tau^2\omega^2} \right)^2 + \frac{1}{4H^2} - \frac{k^2 N_f^2 \tau^2}{1+\tau^2\omega^2} + \frac{k^2 \tau^2 \omega^2}{1+\tau^2\omega^2} + \alpha_2} \quad (3.25b)$$

en donde

$$\alpha_2 = \frac{\frac{k^2 N_f^2 \tau}{\omega(1+\tau^2\omega^2)} - \frac{k^2 \omega \tau}{1+\tau^2\omega^2}}{\frac{k^2 N_f^2 \tau^2}{1+\tau^2\omega^2} + \frac{k^2 \tau^2 \omega^2}{1+\tau^2\omega^2}} + \frac{1}{4H^2} - \frac{k^2 N_f^2 \tau^2}{1+\tau^2\omega^2} + \frac{k^2 \tau^2 \omega^2}{1+\tau^2\omega^2}$$

Por último se hace notar que cuando la fuerza de Lorentz es despreciable, no hay amortiguamiento ( $q = 0$ ) y las perturbaciones se propagan de acuerdo a la relación de dispersión para ondas de gravedad internas (Ec. (3.19)) como es de esperarse.

## 3.2 Resultados

Dependiendo de la orientación particular del campo magnético externo, al interactuar con el fluido conductor en movimiento, induce una fuerza de Lorentz que afecta la propagación de las ondas internas de acuerdo a la relación de dispersión específica de cada caso, dadas por las Ecs. (3.17b) y (3.25b). De igual forma, la amplitud de la oscilación se ve afectada debido al factor de amortiguamiento expresado por las Ecs. (3.17a) y (3.25a). Dichos efectos dependen de parámetros tales como  $N_f$  y  $N_B = 1/\omega_*\tau$  que caracterizan a la fuerza de flotación y a la fuerza de amortiguamiento magnética, respectivamente. También dependen de la longitud de onda  $\lambda$  y del ángulo de fase  $\theta$  que determina la orientación de las ondas planas ( $\tan \theta = l/k$ ). Para tener uniformidad conforme a las gráficas del capítulo anterior, el factor de amortiguamiento  $q$  será denotado como  $\omega_i$  y la frecuencia angular como  $\omega_r$  cuando haya amortiguamiento magnético.

A continuación se comparan los resultados cuando la fuerza de Lorentz se encuentra orientada en dirección vertical y horizontal, representados como  $F_v$  y  $F_h$  respectivamente.

### 3.2.1 Ondas internas de gravedad

Para tener un criterio de referencia se considera primero el caso límite donde los efectos de la fuerza electromagnética son despreciables, teniendo por tanto ondas internas puramente de gravedad que no son amortiguadas en fluidos inviscidos (ver Ec. (3.19)). En las Figs. 3.2 se grafica la frecuencia de oscilación  $\omega_*$  como función de  $\theta^*$  que es el

ángulo de fase normalizado por  $\pi/2$  ( $\theta^* = 2\theta/\pi$ ). En la Fig. 3.2a se considera el caso de aguas profundas ( $kH \gg 1$ ) donde observamos un valor máximo igual a la frecuencia de flotación  $N_f$ , el cual decrece hasta cero conforme el ángulo de fase  $\theta^*$  aumenta de 0 a 1. A su vez, en la Fig. 3.2b se presenta el caso de aguas someras ( $kH \ll 1$ ), donde se observa que la frecuencia de oscilación es menor con respecto a aguas profundas.

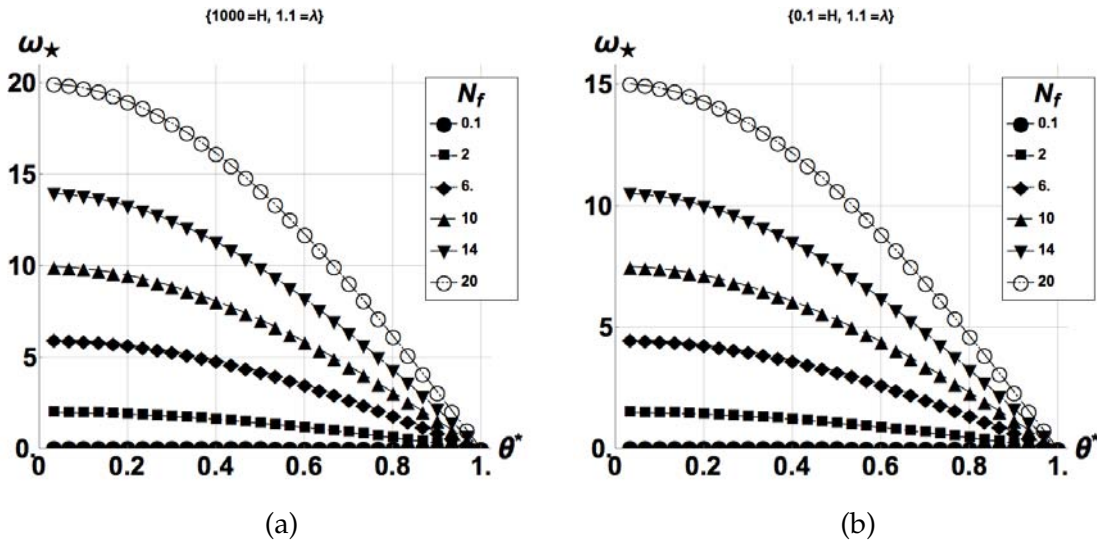


Fig. 3.2: Fuerza de Lorentz despreciable: Se grafica la frecuencia angular representada por  $\omega_*$  para ondas puramente de gravedad en función del ángulo de fase  $\theta^* = 2\theta/\pi$  para una longitud de onda  $\lambda = 1.1 \text{ m}$  a distintas frecuencias de flotación  $N_f$ . (a) Aguas profundas: ( $kH = 5712$ ). (b) Aguas someras: ( $kH = 0.57$ ).

### 3.2.2 Ondas internas con amortiguación magnética

Se explorará primero el efecto de la longitud de onda. En las Figs. 3.3a y 3.3c se muestra una configuración con fuerza de Lorentz vertical y horizontal respectivamente, en donde se grafica el factor de amortiguamiento  $\omega_i$  normalizado por  $\omega_*$ , como función de la longitud de onda  $\lambda$ , para distintos valores del parámetro de interacción  $N_B$ . En las Figs. 3.3b y 3.3d se muestran las mismas configuraciones de fuerzas de Lorentz pero se grafica la frecuencia angular  $\omega_r$  normalizada por  $\omega_*$ , como función de la longitud de onda  $\lambda$ , para distintos valores del parámetro de interacción.

Si los efectos de amortiguamiento debidos a la fuerza de Lorentz son significativos, se tiene que cuando actúa ya sea  $F_v$  o  $F_h$ , el frenado magnético modifica la frecuencia angular de igual manera para todas las longitudes de onda  $\lambda$  (ver Figs. 3.3b y 3.3d); sin embargo, la tasa de amortiguamiento actúa de manera más acentuada sobre las longitudes más cortas; por tal motivo estas ondas son siempre las primeras perturbaciones en disiparse como se observa en las Figs. 3.3a y 3.3c.

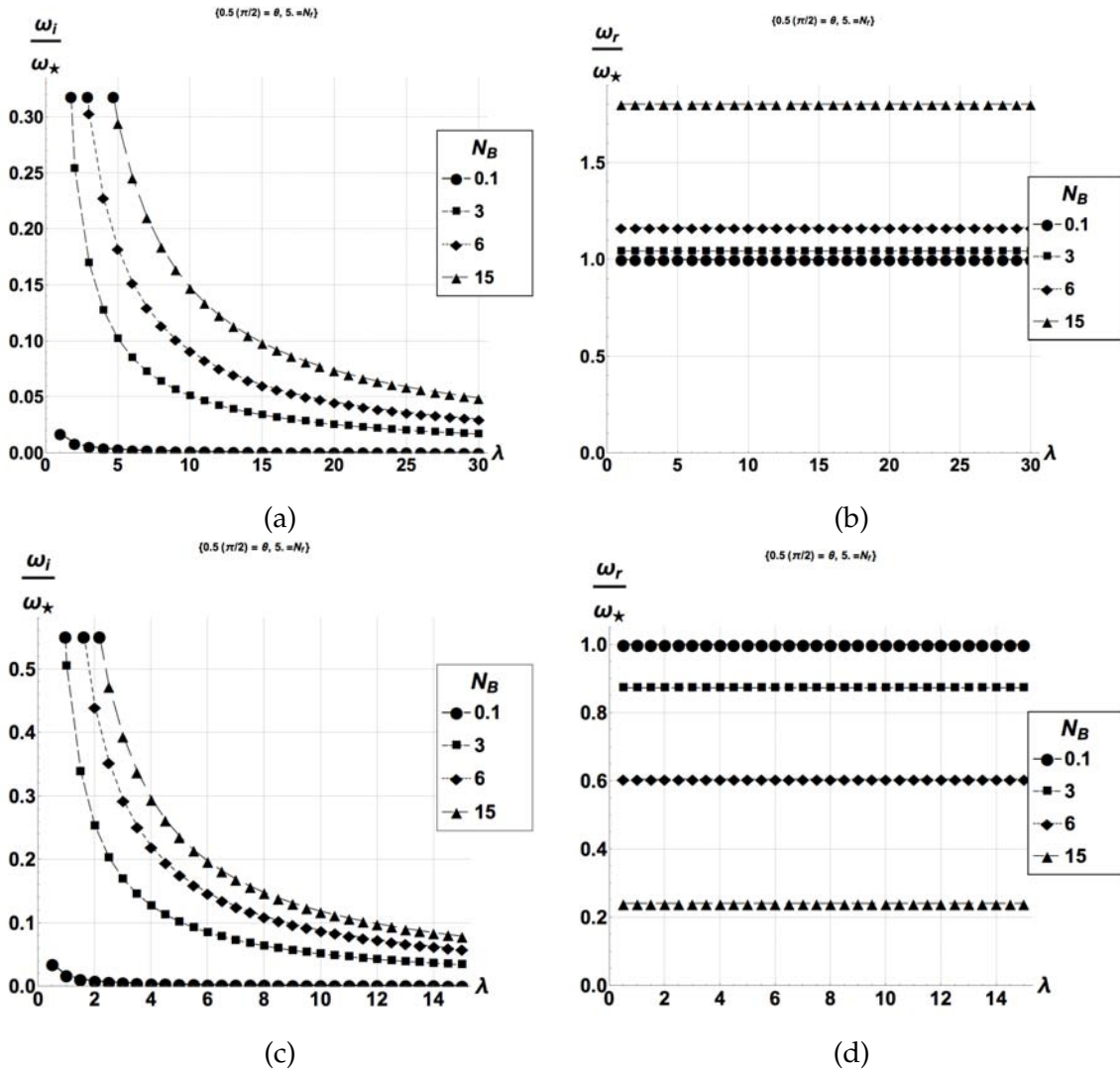


Fig. 3.3: Factor de amortiguamiento  $\omega_i/\omega_*$  (a y c) y frecuencia angular  $\omega_r/\omega_*$  (b y d) como función de la longitud de onda en aguas profundas ( $kH = 5712$ ) para un ángulo de fase  $\theta = 0.5(\pi/2)$  a una frecuencia de flotación  $N_f = 5$  para distintos parámetros de interacción  $N_B$ . (a) Fuerza vertical:  $\omega_i/\omega_*$ . (b) Fuerza vertical:  $\omega_r/\omega_*$ . (c) Fuerza horizontal:  $\omega_i/\omega_*$ . (d) Fuerza horizontal:  $\omega_r/\omega_*$ .

Ahora se analizará el efecto de incrementar la intensidad de la fuerza magnética. La configuración con fuerza de Lorentz vertical se presenta en las Figs. 3.4. En las Figs. 3.4a y 3.4b se grafica el factor de amortiguamiento  $\omega_i$  normalizado por el inverso de la longitud de onda  $1/\lambda$  como función de  $N_B$  para un ángulo de fase  $\theta = 0.25(\pi/2)$  y  $\theta = 0.75(\pi/2)$  respectivamente; mientras que en las Figs. 3.4c y 3.4d se grafica la frecuencia de oscilación  $\omega_r$  normalizada por  $\omega_*$  como función de  $N_B$  para los mismos parámetros.

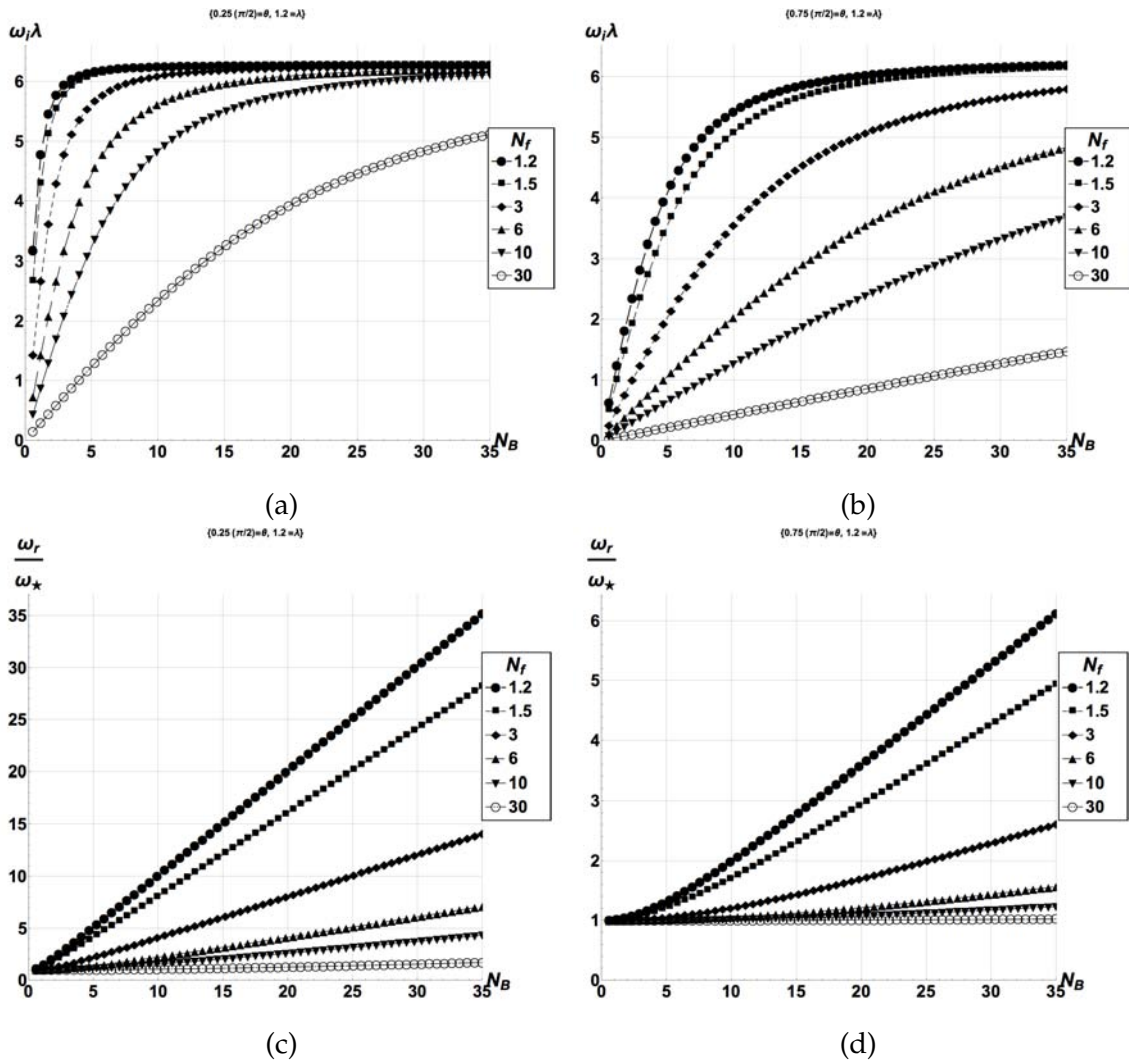


Fig. 3.4: Configuración con fuerza de Lorentz vertical. Factor de amortiguamiento  $\omega_i \lambda$  (a,b) y frecuencia angular  $\omega_r/\omega_*$  (c,d) como función del parámetro de interacción  $N_B$  en aguas profundas ( $kH = 5236$ ) a distintas frecuencias de flotación  $N_f$  de ondas con una longitud  $\lambda = 1.2 \text{ m}$  y propagándose con un ángulo dado  $\theta$ . (a)  $\omega_i \lambda$  con  $\theta = 0.25(\pi/2)$ . (b)  $\omega_i \lambda$  con  $\theta = 0.75(\pi/2)$ . (c)  $\omega_r/\omega_*$  con  $\theta = 0.25(\pi/2)$ . (d)  $\omega_r/\omega_*$  con  $\theta = 0.75(\pi/2)$ .

La configuración con fuerza de Lorentz horizontal se muestra en las Figs. 3.5. En donde las Figs. 3.5a y 3.5b muestran  $\omega_i \lambda$  como función de  $N_B$  para  $\theta = 0.25(\pi/2)$  y  $\theta = 0.75(\pi/2)$  respectivamente, y en las Figs. 3.5c y 3.5d se grafica  $\omega_r/\omega_*$  como función

de  $N_B$  también para  $\theta = 0.25(\pi/2)$  y  $\theta = 0.75(\pi/2)$ , respectivamente.

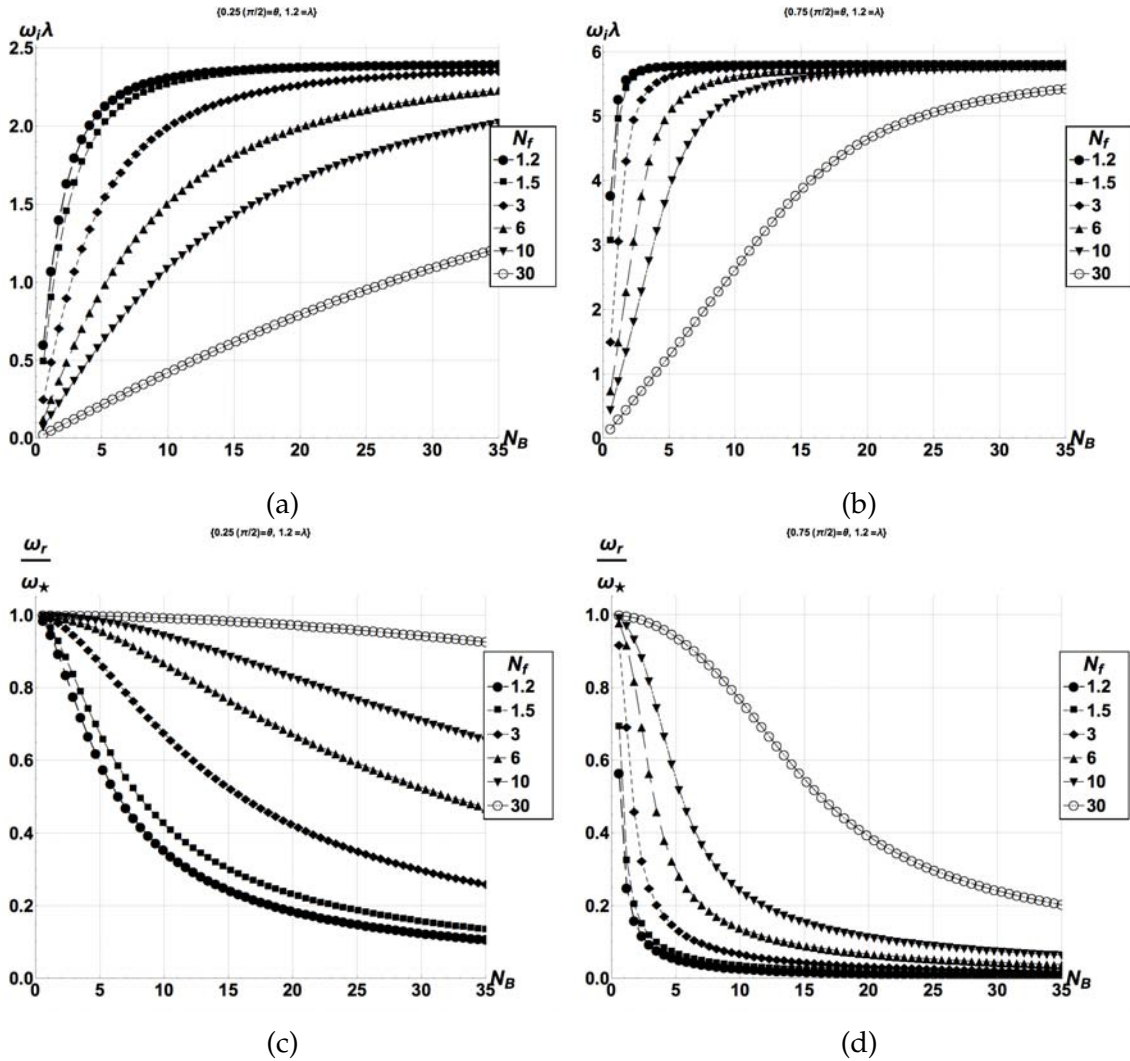


Fig. 3.5: Configuración con fuerza de Lorentz horizontal. Factor de amortiguamiento  $\omega_i \lambda$  (a y b) y frecuencia angular  $\omega_r/\omega_*$  (c,d) como función del parámetro de interacción  $N_B$  en aguas profundas ( $kH = 5236$ ) a distintas frecuencias de flotación  $N_f$  de ondas con una longitud  $\lambda = 1.2$  m y propagándose con un ángulo dado  $\theta$ . (a)  $\omega_i \lambda$  con  $\theta = 0.25(\pi/2)$ . (b)  $\omega_i \lambda$  con  $\theta = 0.75(\pi/2)$ . (c)  $\omega_r/\omega_*$  con  $\theta = 0.25(\pi/2)$ . (d)  $\omega_r/\omega_*$  con  $\theta = 0.75(\pi/2)$ .

Se encuentra que para ambas configuraciones ( $F_v$  y  $F_h$ ) hay un amortiguamiento máximo  $\omega_i \lambda$  que depende del ángulo de fase  $\theta$  cuando los efectos de la fuerza de Lorentz dominan sobre los asociados con la fuerza de flotación ( $N_f \ll N_B$ ) como puede verse en las Figs. 3.4a, 3.4b, 3.5a y 3.5b. También se observa que cuando la fuerza de Lorentz actúa en dirección vertical, la frecuencia angular aumenta continuamente de manera casi lineal al parámetro de interacción desde un valor de  $\omega_*$  (ver Figs. 3.4c y 3.4d), mientras que cuando la fuerza actúa en dirección horizontal,  $\omega_r$  se encuentra acotado

por un máximo igual a  $\omega_*$ , el cual decrece asintóticamente hasta cero conforme  $N_B$  aumenta (ver Figs. 3.5c y 3.5d).

El efecto que tiene el ángulo de fase se explora a continuación. La configuración con fuerza de Lorentz vertical se presenta en las Figs. 3.6. En las Figs. 3.6a y 3.6b se grafica el factor de amortiguamiento normalizado  $\omega_i\lambda$  como función del ángulo de fase normalizado  $\theta^*$  para una fuerza de flotación  $N_f = 2.5$  y  $N_f = 10$  respectivamente. A su vez, en las Figs. 3.6c y 3.6d se grafica la frecuencia angular normalizada  $\omega_r/\omega_*$  como función de  $\theta^*$ , también para  $N_f = 2.5$  y  $N_f = 10$ , respectivamente.

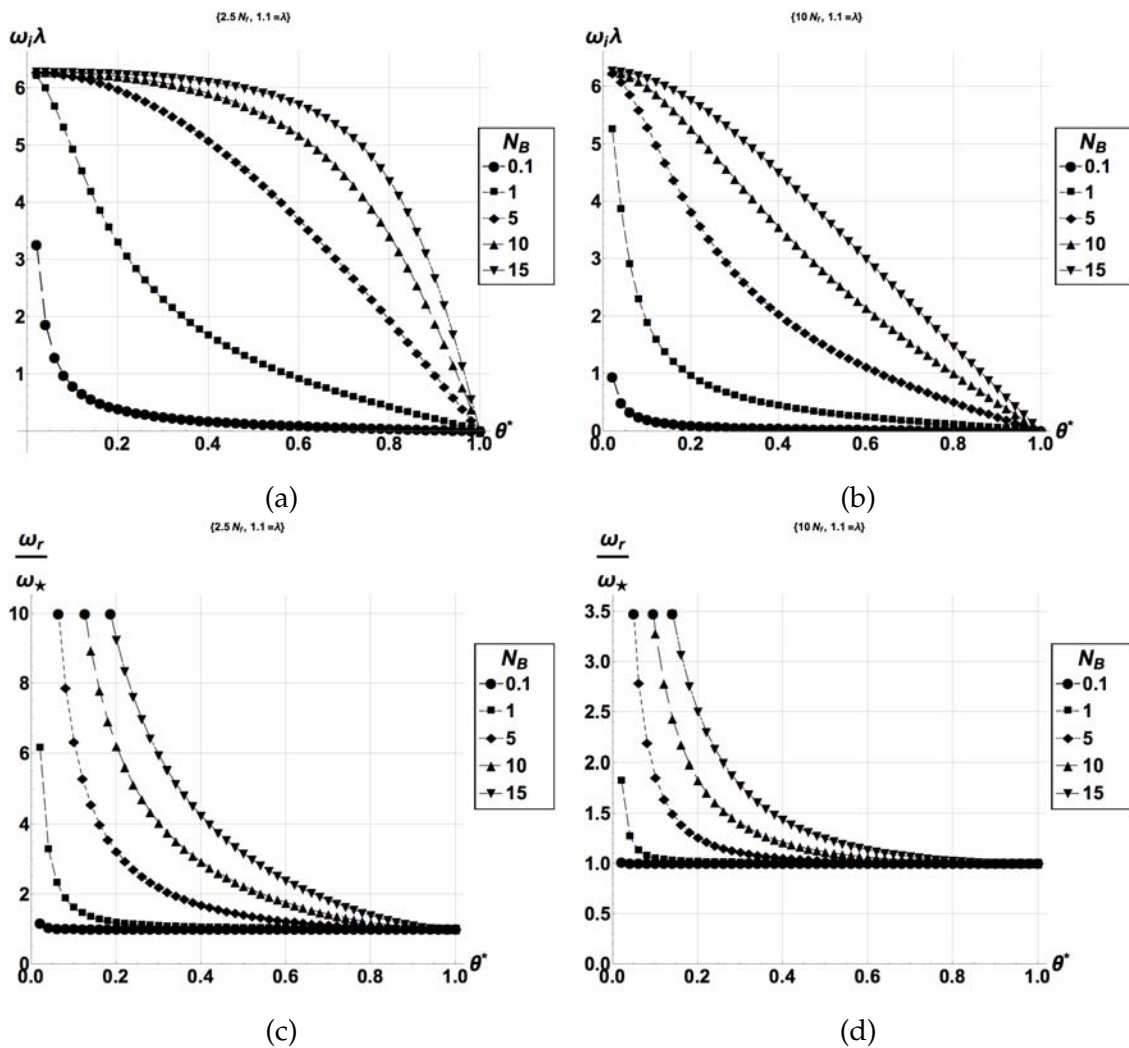


Fig. 3.6: Configuración con fuerza de Lorentz vertical. Factor de amortiguamiento  $\omega_i\lambda$  (a,b) y frecuencia angular  $\omega_r/\omega_*$  (c y d) como función del ángulo de propagación de las ondas normalizado  $\theta^*$  con una longitud de onda  $\lambda = 1.1$  m en aguas profundas ( $kH = 5712$ ) para distintos valores del parámetro de interacción  $N_B$ . (a)  $\omega_i\lambda$  con  $N_f = 2.5$ . (b)  $\omega_i\lambda$  con  $N_f = 10$ . (c)  $\omega_r/\omega_*$  con  $N_f = 2.5$ . (d)  $\omega_r/\omega_*$  con  $N_f = 10$ .



Por otro lado, la configuración con una fuerza horizontal se muestra en las Figs. 3.7. Las Figs. 3.7a y 3.7b muestran una familia de curvas para distintos valores del parámetro de interacción  $N_B$ , donde se grafica  $\omega_i\lambda$  como función de  $\theta^*$  para una fuerza de flotación  $N_f = 2.5$  y  $N_f = 10$  respectivamente; mientras que en las Figs. 3.7c y 3.7d se grafica  $\omega_r/\omega_*$  como función de  $\theta^*$ , también para  $N_f = 2.5$  y  $N_f = 10$  respectivamente.

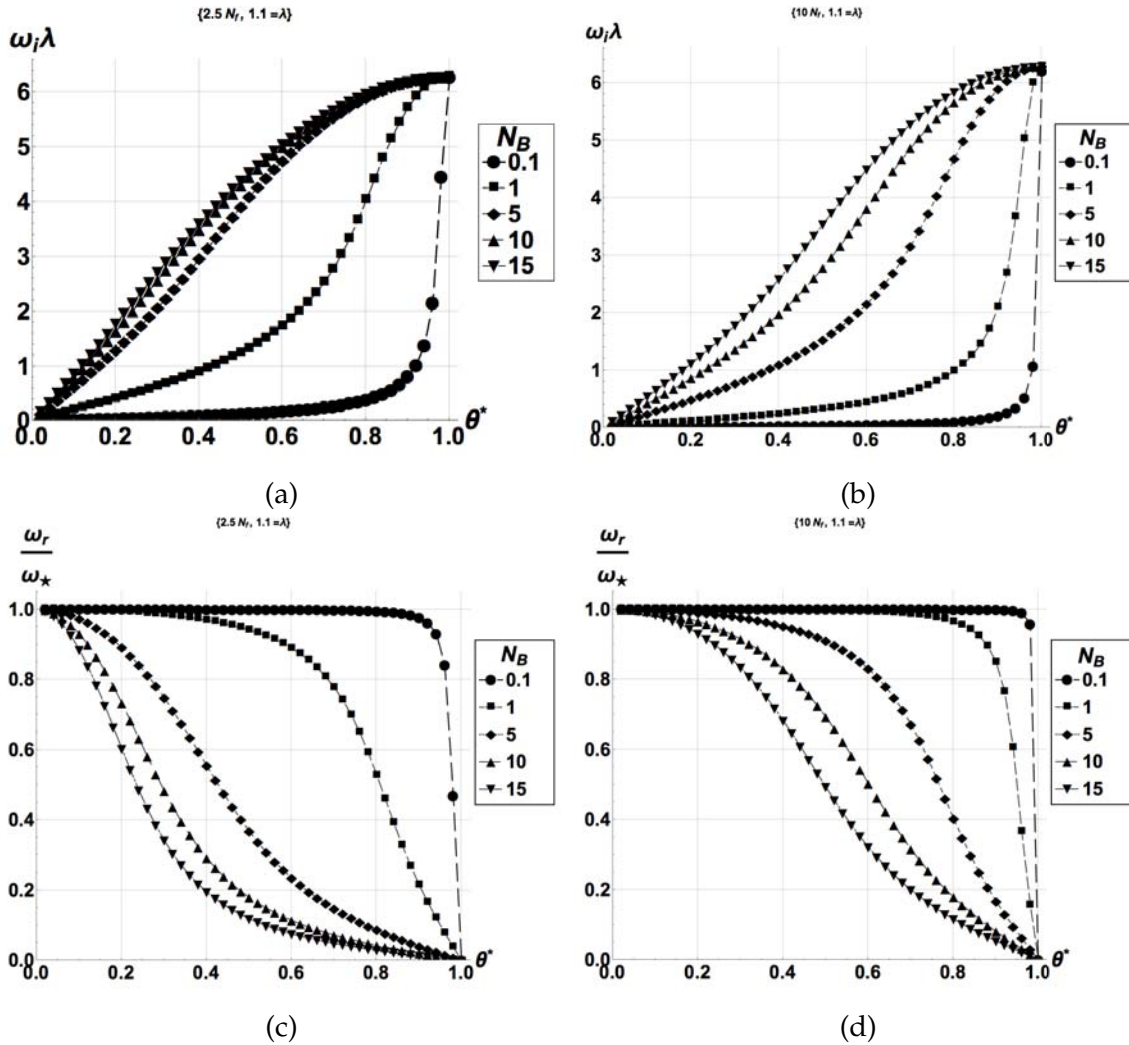


Fig. 3.7: Configuración con fuerza de Lorentz horizontal. Factor de amortiguamiento  $\omega_i\lambda$  (a y b) y frecuencia angular  $\omega_r/\omega_*$  (c y d) como función del ángulo de propagación de las ondas normalizado  $\theta^*$  con una longitud de onda  $\lambda = 1.1 \text{ m}$  en aguas profundas ( $kH = 5712$ ) para distintos valores del parámetro de interacción  $N_B$ . (a)  $\omega_i\lambda$  con  $N_f = 2.5$ . (b)  $\omega_i\lambda$  con  $N_f = 10$ . (c)  $\omega_r/\omega_*$  con  $N_f = 2.5$ . (d)  $\omega_r/\omega_*$  con  $N_f = 10$ .

La manera en que las ondas se encuentran orientadas de acuerdo al ángulo de fase tiene un gran impacto en la rapidez con que estas son frenadas por la fuerza electromagnética. Cuando la fuerza de Lorentz actúa en dirección vertical ocurre un amor-

tiguamiento máximo  $\omega_i \lambda = 2\pi$  cuando las ondas se encuentran orientadas en dirección horizontal ( $\theta^* = 0$ ). Dicho amortiguamiento se reduce a cero cuando las ondas están orientadas en dirección vertical (ver Figs. 3.6a y 3.6b). Sucede algo similar cuando la fuerza de Lorentz actúa en dirección horizontal, con la diferencia de que el frenado máximo se presenta en ondas con una fase orientada de manera completamente vertical (ver Figs. 3.7a y 3.7b). En ambos casos, si el ángulo de fase es exactamente  $\theta^* = 0$  o  $\theta^* = 1$  según corresponda, siempre es posible conseguir el amortiguamiento máximo independientemente de la intensidad de la fuerza de Lorentz.

Por otro lado, se observa que la frecuencia de oscilación tiene un comportamiento muy distinto en cada configuración, pues con la fuerza de Lorentz vertical toma valores muy altos a ángulos pequeños, que decrecen a un mínimo valor de  $\omega_*$  cuando la fase es completamente vertical (ver Figs. 3.6c y 3.6d). Además, en el caso de la fuerza de Lorentz horizontal el valor máximo para la oscilación es  $\omega_*$  para ángulos pequeños y cero cuando la dirección de propagación de las ondas es paralela a la gravedad (ver Figs. 3.7c y 3.7d).

### Propagación de la energía

Una propiedad muy interesante de las ondas internas de gravedad es la relación que existe entre la velocidad de fase y la velocidad de grupo. Como se mencionó en el Capítulo 1 Y es que esta última es justamente la velocidad a la que la energía se propaga. Por otro lado, la relación de dispersión depende de la naturaleza de la fuerza restitutiva, la cual para el caso presente tiene una dirección preferencial sobre el eje vertical debido al gradiente de densidades. Es de interés saber si la fuerza de Lorentz aplicada sobre el sistema, ya sea en dirección paralela o perpendicular al gradiente de densidades, puede afectar la velocidad de fase o la velocidad de grupo y por ende, la propagación de la de la energía.

La velocidad de fase  $\mathbf{c}_f = (\omega/k, \omega/l)$  y la velocidad de grupo  $\mathbf{c}_g = (\partial\omega/\partial k, \partial\omega/\partial l)$  con la que viajan las ondas internas en aguas profundas se grafica en el Apen. C.3 para cada una de sus componentes. Se observa que si bien las configuraciones con fuerza de Lorentz vertical y horizontal presentan diferencias sustanciales en el comportamiento y magnitud de dichas velocidades, el ángulo de propagación de la velocidad de fase  $\theta_f$  y de la velocidad de grupo  $\theta_g$  es similar en ambos casos.

Las Figs. 3.8 muestran la configuración con fuerza de Lorentz horizontal para aguas profundas. En las Figs. 3.8a y 3.8b se grafican respectivamente  $\theta_f^\triangleright$  que es el ángulo de la velocidad de fase normalizado por  $\pi$  ( $\theta_f^\triangleright = \theta_f/\pi$ ), y  $\theta_g^\triangleright$  que es el ángulo de la velocidad de grupo normalizado ( $\theta_g^\triangleright = \theta_g/\pi$ ) como funciones de  $\theta^\triangleright$  que es el ángulo de fase de las ondas normalizado ( $\theta^\triangleright = \theta/\pi$ ), para distintos valores del parámetro de interacción. En estas gráficas se observa que las curvas para los distintos valores de  $N_B$  se superponen, lo que significa que la dirección de propagación de la velocidad de fase y de la velocidad de grupo no son afectadas por la fuerza de Lorentz.

Este mismo comportamiento se observa para una configuración con fuerza de Lorentz vertical, como se muestra en las Figs. 3.9 también para aguas profundas. En las

Figs. 3.9a y 3.9b se grafica  $\theta_g^\triangleright$ ,  $\theta_f^\triangleright$  y  $\Delta\theta^\triangleright$ , siendo este último la suma de ambos ángulos ( $\Delta\theta^\triangleright = \theta_g^\triangleright + \theta_f^\triangleright$ ), como función de  $\theta^\triangleright$ , para un parámetro de interacción  $N_0 = 0.2$  y  $N_0 = 20$  respectivamente.

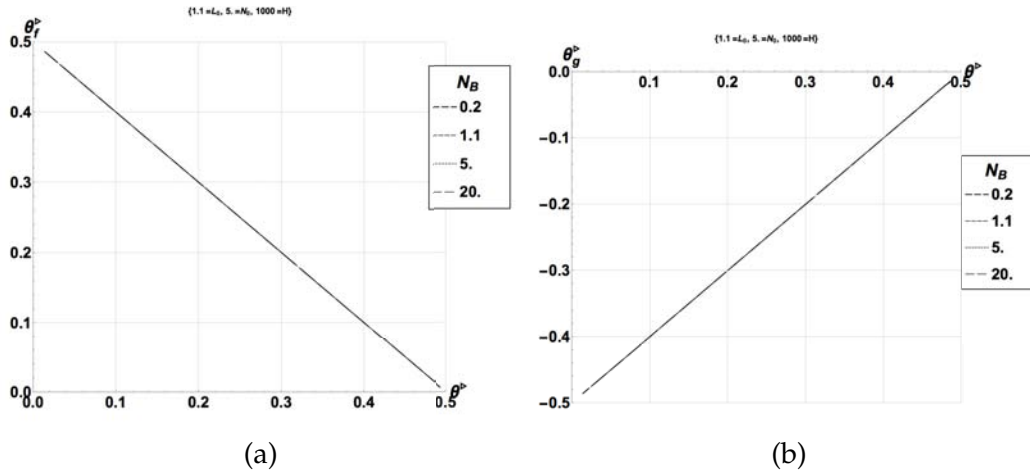


Fig. 3.8: Configuración con fuerza de Lorentz horizontal. Ángulo de propagación como función del ángulo de fase en aguas profundas ( $kH = 5712$ ) para una longitud de onda  $\lambda = 1.1$  m a una frecuencia de flotación  $N_f = 5$  y distintos parámetros de interacción  $N_B$ . (a) Dirección de la velocidad de fase  $\theta_f^\triangleright$ . (b) Dirección de la velocidad de grupo  $\theta_g^\triangleright$ .

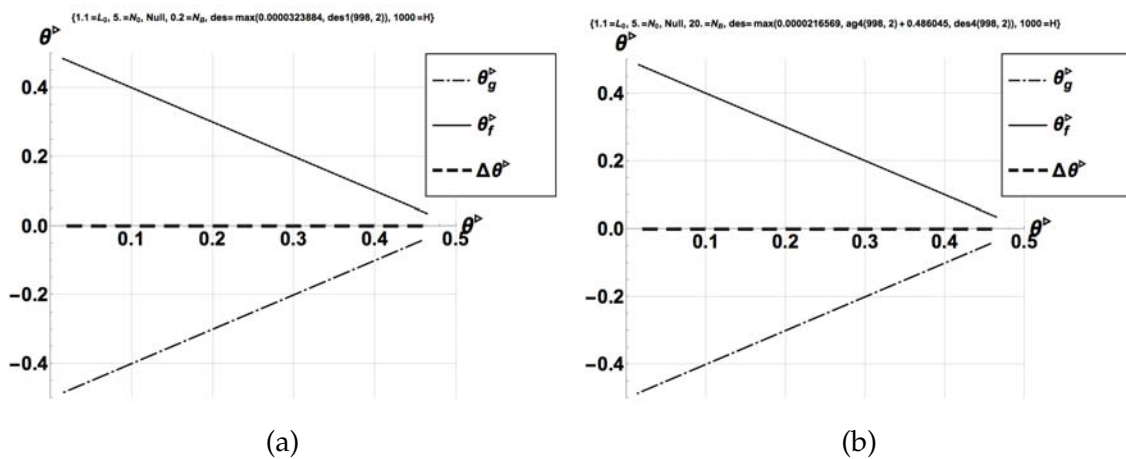


Fig. 3.9: Configuración con fuerza de Lorentz vertical. Ángulo de propagación como función del ángulo de fase en aguas profundas ( $kH = 5712$ ) para una longitud de onda  $\lambda = 1.1$  m y una frecuencia de flotación  $N_f = 5$ . Donde  $\theta_g^\triangleright$ ,  $\theta_f^\triangleright$  y  $\Delta\theta^\triangleright$  representan la velocidad de grupo, la velocidad de fase y la suma de ambas velocidades. (a) Parámetro de interacción  $N_B = 0.2$ . (b) Parámetro de interacción  $N_B = 20$ .

En estas últimas gráficas se observa claramente que  $\Delta\theta^> = 0$ , es decir que la velocidad de grupo se propaga siempre con un ángulo en sentido contrario al ángulo de la velocidad de fase ( $\theta_g = -\theta_f$ ). Ocurre por tanto que un paquete de ondas viaja en una dirección, mientras que su energía viaja en otra, como se ilustra en la Fig. 3.10.

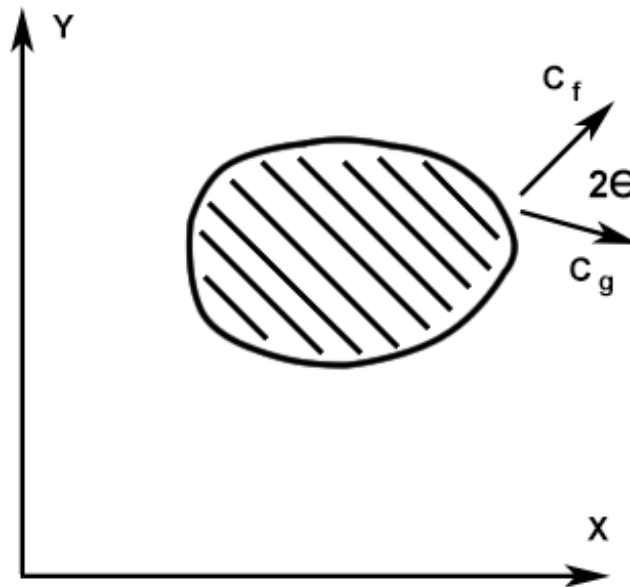


Fig. 3.10: El frente de ondas planas se propaga en dirección  $\theta_f$ , mientras que su energía se propaga en dirección  $\theta_g$ . En donde  $\theta_f = -\theta_g$  para aguas profundas.

### Aguas poco profundas

Las ondas internas de gravedad en aguas someras se propagan con un ángulo de fase  $\theta_f$  idéntico que en aguas profundas, aunque con un ángulo de la velocidad de grupo  $\theta_g$  menor en magnitud, por lo que en este límite ocurre que  $\theta_g = -\theta_f$ ; es decir, la dirección en que viaja la energía se ve modificada con respecto a aguas profundas. En este régimen, la fuerza de Lorentz también puede afectar la propagación de la energía. A continuación, se abordan los puntos anteriores.

La configuración con una fuerza de Lorentz vertical se muestra en las Figs. 3.11 y 3.12. En las Figs. 3.11a y 3.11b se grafican los ángulos normalizados  $\theta_f^>$  y  $\theta_g^>$  respectivamente, como función del ángulo de fase normalizado  $\theta^>$  para distintos valores del parámetro de interacción. A su vez, en las Figs. 3.12a y 3.12b se grafica  $\theta_f^>$ ,  $\theta_g^>$  y  $\Delta\theta^>$  como función de  $\theta^>$  para un parámetro de interacción  $N_B = 0.2$  y  $N_B = 20$  respectivamente.

En la Fig. 3.11b se observa que en aguas poco profundas, la magnitud de  $\theta_g^>$  depende de la intensidad de  $N_B$ , lo que no ocurría en aguas profundas; mientras que la dirección de la velocidad de fase no se modifica (ver Fig. 3.11a). De hecho, cuando los efectos de amortiguamiento son importantes, el sistema tiende a comportarse como en aguas profundas, pues la fuerza de Lorentz se opone a que  $\Delta\theta^>$  presente cambios ocasionados

por los efectos de la profundidad, lo que se puede observar comparando las Figs. 3.12a y 3.12b.

La configuración con una fuerza de Lorentz horizontal se muestra en las Figs. 3.13 y 3.14. En las Figs. 3.13a y 3.13b se grafica  $\theta_f^\triangleright$  y  $\theta_g^\triangleright$  respectivamente como función de  $\theta^\triangleright$  para distintos valores del parámetro de interacción. Por otra parte, en las Figs. 3.14a y 3.14b se grafica  $\theta_f^\triangleright$ ,  $\theta_g^\triangleright$  y  $\Delta\theta^\triangleright$  como función de  $\theta^\triangleright$  para un parámetro de interacción  $N_B = 0.2$  y  $N_B = 20$  respectivamente.

En este caso, al igual que para una configuración con una fuerza de Lorentz vertical, la dirección de propagación de la velocidad de fase no es modificada (ver Fig. 3.13a), pero sí lo es la velocidad de grupo (ver Fig. 3.13b), la cual se resiste a tener una dirección de propagación distinta que en aguas profundas.

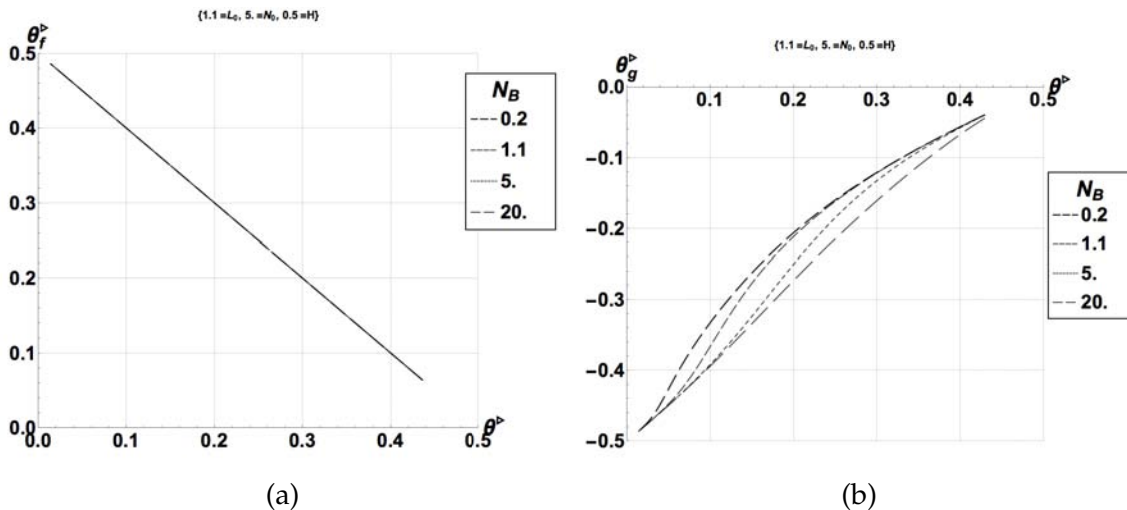


Fig. 3.11: Configuración con fuerza de Lorentz vertical. Ángulo de propagación como función del ángulo de fase en aguas someras ( $kH = 2.86$ ) para una longitud de onda  $\lambda = 1.1$  m a una frecuencia de flotación  $N_f = 5$  y distintos parámetros de interacción  $N_B$ . (a) Dirección de la velocidad de fase  $\theta_f$ . (b) Dirección de la velocidad de grupo  $\theta_g$ .

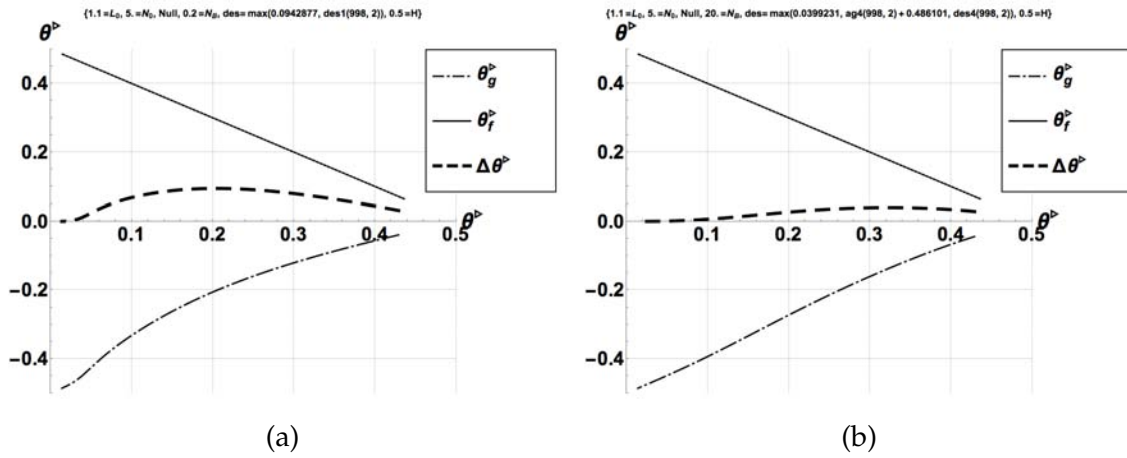


Fig. 3.12: Configuración con fuerza de Lorentz vertical. Ángulo de propagación como función del ángulo de fase en aguas someras ( $kH = 2.86$ ) para una longitud de onda  $\lambda = 1.1$  m y una frecuencia de flotación  $N_f = 5$ . Donde  $\theta_g$ ,  $\theta_f$  y  $\Delta\theta$  representan la velocidad de grupo, la velocidad de fase y la suma de ambas velocidades. (a) Para un parámetro de interacción  $N_B = 0.2$ . (b) Para un parámetro de interacción  $N_B = 20$ .

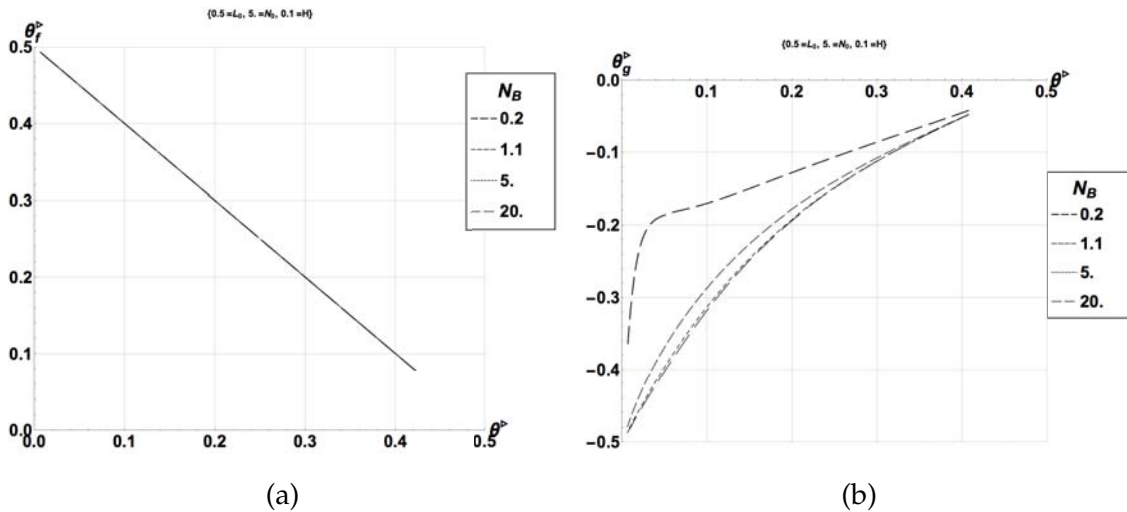


Fig. 3.13: Configuración con fuerza de Lorentz horizontal. Ángulo de propagación como función del ángulo de fase en aguas someras ( $kH = 0.57$ ) para una longitud de onda  $\lambda = 1.1$  m a una frecuencia de flotación  $N_f = 5$  y distintos parámetros de interacción  $N_B$ . (a) Dirección de la velocidad de fase  $\theta_f$ . (b) Dirección de la velocidad de grupo  $\theta_g$ .

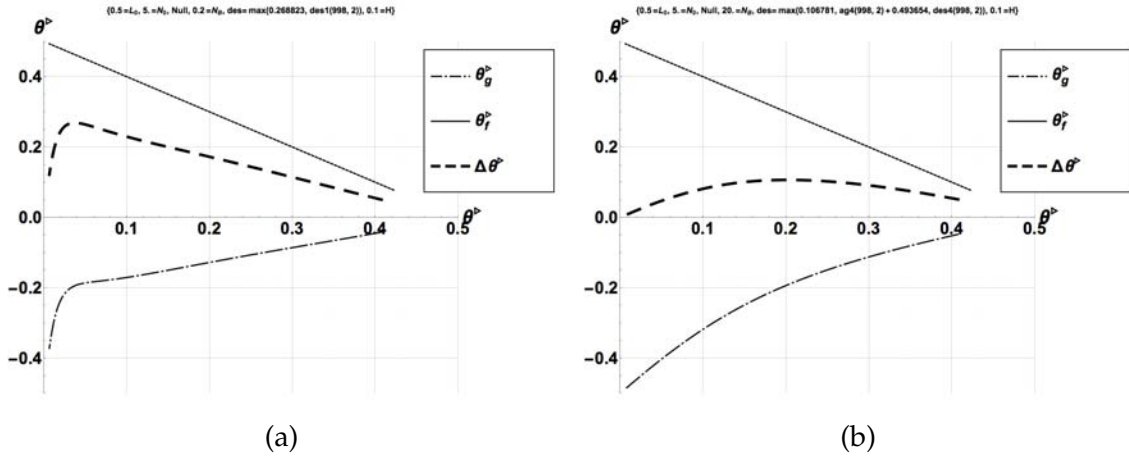


Fig. 3.14: Configuración con fuerza de Lorentz horizontal. Ángulo de propagación como función del ángulo de fase en aguas someras ( $kH = 0.57$ ) para una longitud de onda  $\lambda = 1.1 \text{ m}$  y una frecuencia de flotación  $N_f = 5$ . Donde  $\theta_g$ ,  $\theta_f$  y  $\Delta\theta$  representan la velocidad de grupo, la velocidad de fase y la suma de ambas velocidades. (a) Para un parámetro de interacción  $N_B = 0.2$ . (b) Para un parámetro de interacción  $N_B = 20$ .

### 3.3 Conclusiones

En este capítulo se resolvieron las ecuaciones de movimiento que describen ondas internas bajo un campo magnético uniforme en aproximación lineal en un plano bidimensional en el límite de  $R_m \ll 1$ . Se consideró un fluido conductor inviscido con una densidad y conductividad que decrecen de manera exponencial con la profundidad. Se analizaron dos configuraciones, en un caso la fuerza de Lorentz apunta en la dirección paralela a la gravedad, que es la misma dirección en la que apunta el gradiente de densidades, y en el otro la fuerza de Lorentz apunta en dirección horizontal.

Se demostró que los campos magnéticos en fluidos conductores estratificados, no solamente son capaces de amortiguar las ondas internas a través de la fuerza de Lorentz, sino que también pueden alterar la dirección propagación de la energía de éstas.

Se encontraron algunas similitudes y diferencias para ciertos parámetros. Por ejemplo, en ambas configuraciones hay un amortiguamiento máximo  $\omega_i \lambda = 2\pi$  cuando los efectos de la fuerza electromagnética, caracterizados por el parámetro  $N_B$ , dominan sobre los efectos de la fuerza de flotación, caracterizados por el parámetro  $N_f$ , siendo las ondas de longitudes más cortas las primeras en ser amortiguadas y las más largas las últimas. No obstante las frecuencias de oscilación  $\omega_r$  no varían con respecto a la longitud de onda.

Por otro lado, la manera en que la fuerza electromagnética afecta la frecuencia angular

varía para cada configuración, pues mientras que para una fuerza vertical  $\omega_r$  tiene un valor mínimo dado por  $\omega_*$  que crece conforme  $N_B$  también lo hace, para una configuración horizontal el valor máximo es  $\omega_*$ , y a medida que la intensidad de la fuerza de Lorentz aumenta,  $\omega_r$  tiende a cero. Además como es de esperarse, la configuración vertical favorece el amortiguamiento para ángulos de propagación pequeños  $\theta \sim 0$ , mientras que la configuración horizontal lo favorece para grandes  $\theta \sim \pi/2$ .

Finalmente, si bien es cierto que la velocidad de grupo  $c_g$  no viaja exactamente con la misma dirección para ambas configuraciones  $\mathbf{F}_v$  y  $\mathbf{F}_h$ , las diferencias son tales que no se observa que la energía se propague a lo largo de una dirección específica para cada caso. Ocurre que en aguas profundas la velocidad de grupo viaja con un ángulo en sentido contrario a la velocidad de fase  $\theta_g = -\theta_f$  de manera independiente de la intensidad  $N_B$  para ambas configuraciones, y cuando se disminuye considerablemente la profundidad (aguas someras)  $\theta_g$  también disminuye su magnitud y por tanto cambia la dirección de propagación de la energía de las ondas. No obstante, se demostró que es posible mediante el amortiguamiento magnético inhibir esta disminución de  $\theta_g$  de tal manera que se pueda tener un comportamiento parecido al de aguas profundas para ambas configuraciones de fuerza de Lorentz.

Se tiene por tanto que la fuerza de Lorentz no solamente amortigua la amplitud de las oscilaciones de las ondas internas sino que también afecta la dirección de la propagación de la energía. Sin embargo, no es posible mediante este fenómeno manipular el ángulo a un valor específico deseado.





---

# ONDAS SUPERFICIALES GENERADAS POR FUERZAS ELECTROMAGNÉTICAS

---

*Each time a person stands up for an ideal, or acts to improve the lot of others, they send forth a tiny ripple of hope... These ripples build a current which can seep down the mightiest walls of oppression and resistance.*  
— Robert F. Kennedy—

Los patrones de ondas generados en agua por un obstáculo inmerso, son fenómenos que se presentan a distintas escalas, como pueden ser las enormes estelas de ondas que dejan a su paso los buques en alta mar, o los rizos que se generan alrededor del hilo de las cañas de pescar. En el primer caso, es precisamente el oleaje una de las principales fuentes de arrastre de las embarcaciones que tiene como consecuencias grandes pérdidas energéticas y el aumento de contaminantes a la atmósfera. Esta situación cobra relevancia si consideramos que el 80 % del comercio mundial se realiza por medio de barcos [3]. Por otro lado, los patrones de ondas generados por obstáculos de dimensiones pequeñas (un tamaño característico de 1.7 cm), si bien pueden tener aplicaciones [49], en particular tienen una función muy importante en los mecanismos de locomoción empleados por los insectos o arácnidos que se transportan sobre la superficie del agua. En este capítulo se presenta un estudio experimental de la generación de ondas superficiales mediante fuerzas electromagnéticas localizadas. Estas fuerzas han sido utilizadas para generar vórtices y caudas en fluidos conductores pero al parecer este es el primer estudio donde se centra la atención en la generación de ondas superficiales por métodos electromagnéticos. De esta forma, se estudian patrones de ondas de gravedad-capilares estacionarios, generados por una fuerza electromagnética localizada, que se puede manipular con relativa facilidad y que es capaz de actuar de manera análoga a un obstáculo sólido para un flujo incidente. Se comenzará repasando algunas de las propiedades de las ondas generadas por obstáculos sólidos inmersos que es necesario tener en cuenta.

## 4.1 Ondas estacionarias

Cuando las ondas se propagan libremente, es decir, en ausencia de agentes perturbadores, estas se comportan como fenómenos no estacionarios, en donde el movimiento en cada punto del fluido varía con el tiempo. Sin embargo, cuando un fluido se encuen-

tra en presencia de una fuerza permanente, como puede ser un obstáculo, es posible apreciar patrones de ondas que se encuentran *congelados* con respecto a este. Es decir, aunque la elevación de la superficie puede mostrar variaciones locales, casi sinusoidales con respecto a la posición, las crestas y los valles permanecen siempre en los mismos lugares; de hecho, mientras el agua corre en contra de la fuerza ejercida por el obstáculo, la velocidad del líquido permanece constante en todos los puntos de las ondulaciones [16].

Este tipo de fenómenos puede observarse alrededor de las piedras que obstaculizan el flujo de los ríos. Las variaciones de presión que se producen en la interfase agua-aire se manifiestan como una serie de frentes de onda que se curvan hacia la dirección en que se mueve el agua con respecto al obstáculo. Un grupo de estas ondulaciones se encontrará aguas arriba y otro aguas abajo, lo cual puede ocurrir incluso si el obstáculo se encuentra sumergido totalmente.

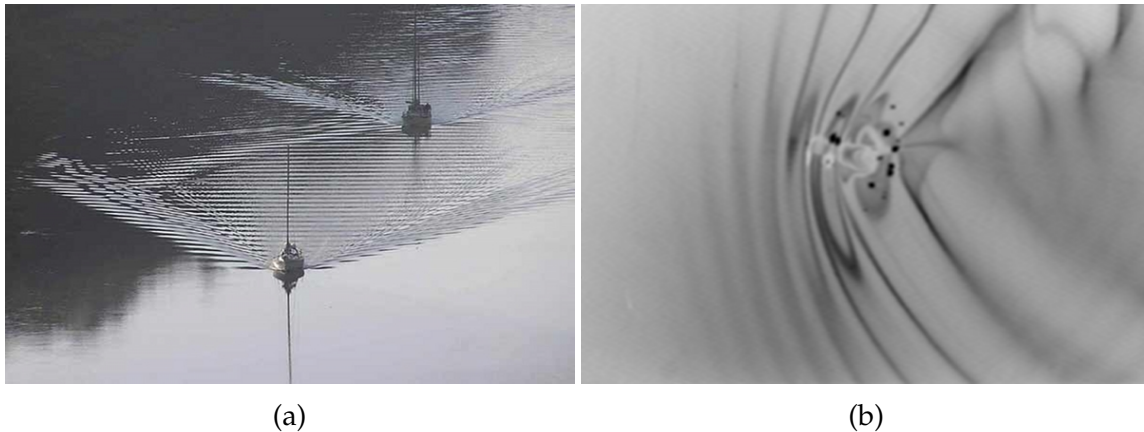


Fig. 4.1: Patrón de ondas estacionarias. (a) Producido por un barco. (b) Producido por una esfera de cristal de 3.14 mm de diámetro [50].

### 4.1.1 Antecedentes

Uno de los primeros reportes en donde se analiza el fenómeno de ondas estacionarias data de 1829, en el cual, Jean-Victor Poncelet y Joseph Aime Lesbros se percataron que cuando se sumergía parcialmente un tubo delgado (aproximadamente 2 mm de diámetro) en un río que fluye, aparecían unas ondas que describieron como una familia de curvas parabólicas [51]. Esto solamente ocurría cuando el agua fluía a velocidades mayores a los 25 cm/s.

Poco tiempo después (1837) John Scott Russell [52] reportó mediciones de la resistencia que sufren las embarcaciones al navegar en agua, dándose cuenta que este valor está relacionado con la velocidad de las ondas que se generan. Registró que la resistencia máxima que los buques experimentaban, ocurría exactamente cuando la velocidad de las embarcaciones era la misma que la de las ondas, lo que de acuerdo a sus experimentos tenía lugar alrededor de 21.5 cm/s. Posteriormente, realizó una clasificación

detallada de varios fenómenos ondulatorios, entre los cuales identificó un tipo de ondas dominadas por la fuerza de cohesión, las cuales consistían en ondulaciones de longitudes muy cortas y que llamó *ondas capilares* o de *tercer orden* [12]. Señaló que estas se manifiestan de manera gregaria, ya sea como frentes progresivos cuando se encuentran libres de la influencia de una fuerza perturbadora, o como patrones de ondas estacionarias cuando el fluido es forzado. Para este último caso, el forzamiento puede ser generado por un obstáculo, en donde las ondas que aparecen son una familia de curvas confocales que no varían con el tiempo, a pesar de que las partículas de fluido continúan su movimiento en las proximidades de este. En tales patrones identificó dos grandes regiones, en donde una de ellas es el semiplano del obstáculo que se opone al movimiento, es decir, la parte de aguas arriba, en donde las ondas están comprimidas y tienen longitudes menores a 10 cm, y otra que es la parte del obstáculo ubicada aguas abajo, y que presenta una región de ondas *libres*, las cuales tienen de longitudes mayores. Además, al medir la velocidad del viento se dio cuenta que este fenómeno solamente ocurría cuando la velocidad relativa entre el fluido y el obstáculo tenía un valor crítico superior a 21.5 cm/s.

Para poder entender porque las ondas aparecían a ciertas velocidades, en 1871 Lord Kelvin (Sir William Thomson) estudió analíticamente las ondas que se propagan entre dos interfases, considerando tanto la fuerza de cohesión como la gravitacional. Encontró que las ondas de gravedad-capilares obedecen una relación de dispersión (ver Ec. (2.23)), la cual, en el límite de aguas profundas es  $\omega^2 = gk + \gamma k^3 / \rho$  [17, 53] donde  $\gamma$  es la tensión superficial, por lo que la velocidad de fase  $c = \omega / k$  se puede expresar como:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{\gamma 2\pi}{\rho\lambda}} \quad (4.1)$$

siendo clara la propiedad dispersiva de las ondas, en donde la contribución de la gravedad es proporcional a la longitud de onda, mientras que la parte que depende de la tensión superficial es inversamente proporcional a esta. Lord Kelvin consideró la tensión superficial obtenida por Gay-Lussac (0.074 mN/m) para calcular con gran precisión el valor mínimo de la velocidad a la que se propagan las ondas para una interfase agua-aire, es decir,  $c_{min} = (4g\gamma/\rho)^{1/4}$ , que en esas condiciones es de 23 cm/s (ver Fig. 4.2). Esto estaba de acuerdo con los experimentos anteriores [51, 12] y posteriormente lo corroboró junto con Hermann von Helmholtz y su hermano James Thomson [54], usando el hilo de una caña de pescar (de 2 mm de espesor).

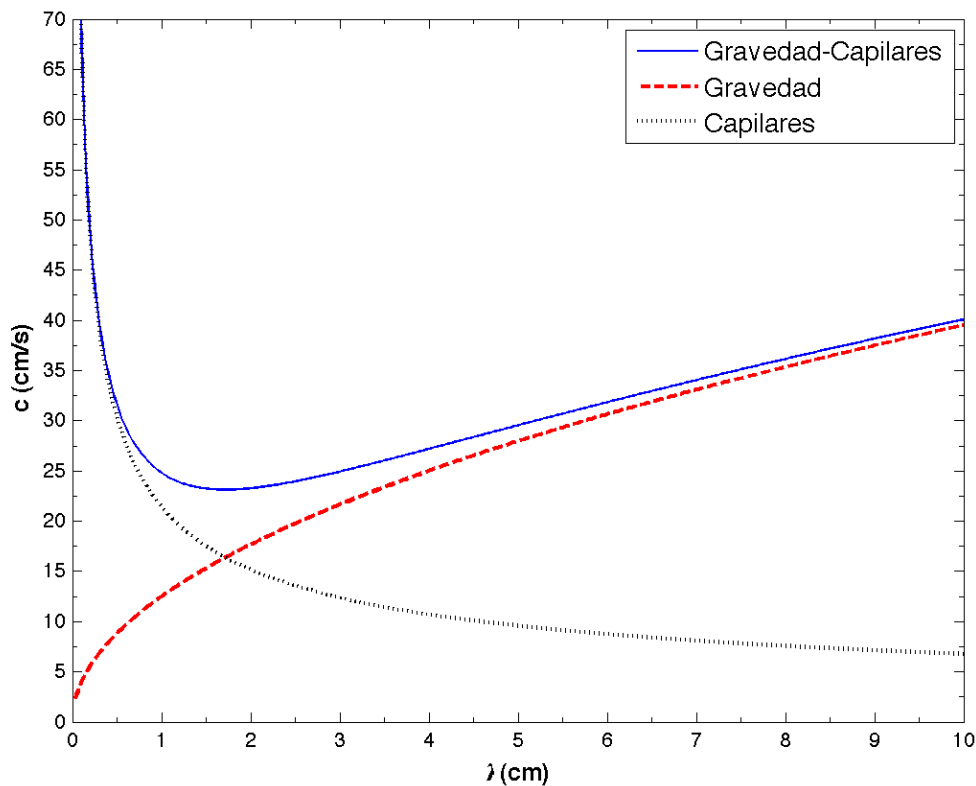


Fig. 4.2: Velocidad de fase  $c$  en función de la longitud de onda  $\lambda$  para las ondas de gravedad-capilares, de gravedad y capilares para aguas profundas. Se observa que cuando los efectos de tensión superficial y de gravedad son tomados en cuenta hay una velocidad mínima  $c_{min}$ , que para una interfase agua-aire a temperatura ambiente es  $c_{min} = 23 \text{ cm/s}$ .

Señaló también que la longitud asociada a este valor mínimo corresponde a 1.7 cm, estableciendo así un umbral entre los efectos gravitacionales y cohesivos. A las ondas con longitudes menores las denominó *rizos*, que son las mismas que Russell había denominado como ondas capilares (ver Fig. 4.3).

Hasta este momento se había prestado más atención a los patrones de ondas estacionarios generados por objetos pequeños que los producidos por objetos grandes; de hecho la primer descripción a gran detalle de las estelas creadas por estos últimos, fue hecha en 1877 por William Froude [55], las que describe como un conjunto formado por tres grupos de ondas, dos de las cuales son divergentes y se mueven junto con las embarcaciones en dirección oblicua, y el otro es un conjunto de ondas transversales que son perpendiculares a la línea de navegación. Uno de los primeros trabajos analíticos en donde se reproducen estos patrones fue obtenido por lord Rayleigh (John Strutt) en 1883 [56], quien utiliza una metodología en donde en lugar de usar un obstáculo sólido,

considera que la perturbación es causada por una distribución de presiones que actúa normal a la superficie en un punto, lo cual puede ser generado por atracción eléctrica, o por el impacto de un chorro de aire.

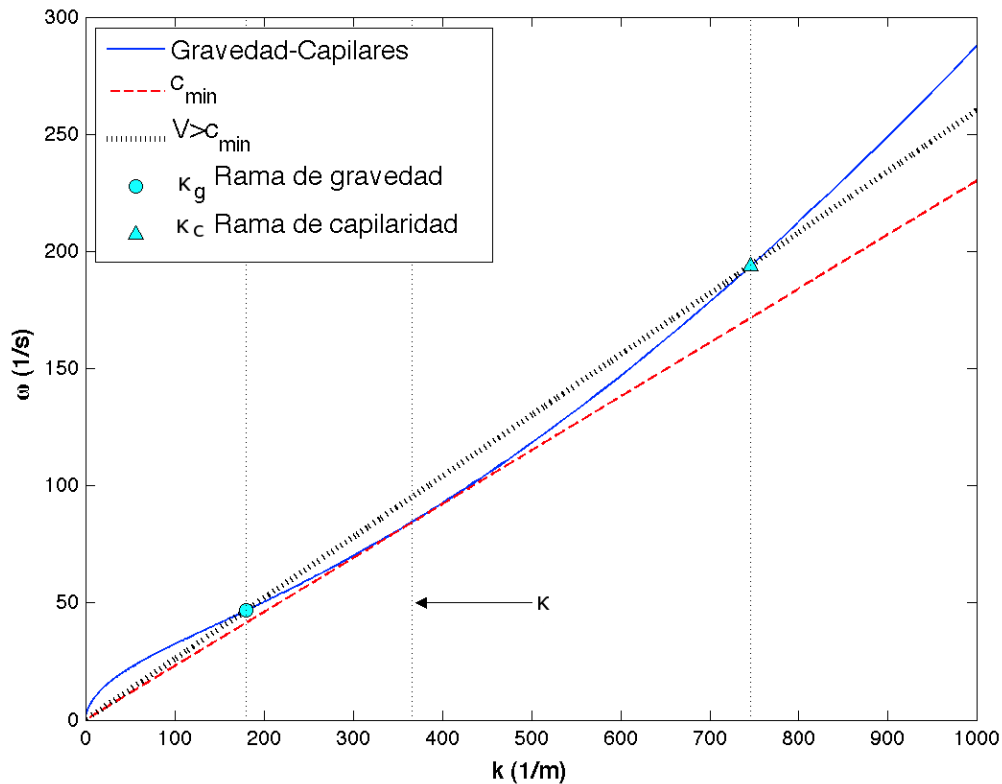


Fig. 4.3: Frecuencia angular  $\omega$  contra el número de onda  $k$  en el límite de aguas profundas. La curva representada por las ondas de gravedad-capilares interseca en un punto  $\kappa$  con  $c_{min}$  que representa la velocidad mínima, y en dos puntos con  $V_0$  que es una velocidad mayor que  $c_{min}$ . En donde  $\kappa$  es el número de onda capilar, y  $\kappa_g$  y  $\kappa_c$  son los umbrales para la región de ondas de gravedad y capilares respectivamente.

Con base en esto, la teoría correspondiente fue construida por lord Kelvin en 1887, en donde obtiene unas ecuaciones algebraicas para describir las curvas [57], incidentalmente, a este sistema de ondas se le conoce como *estela de Kelvin* u *ondas de Kelvin*. Sir Thomas Havelock terminó de sentar las bases teóricas en 1919, al calcular teóricamente la resistencia de onda correspondiente a un sistema de presiones bidimensionales que viaja sobre la superficie libre [58]. Consideró a la resistencia de onda en el estado estacionario como una cubierta rígida ajustada sobre la superficie libre en todo lugar y que se mueve con una velocidad  $V_0$  [26], teniendo así un sistema de presiones asignado

que se aplica al agua mediante esta cubierta, de tal manera que la resistencia de onda correspondiente es *toda la presión integrada en la dirección  $x$* .

### 4.1.2 Estela de Kelvin

Para entender el comportamiento de estos patrones de onda, consideremos un obstáculo que se mueve con una velocidad  $V_0$ . Para que una cresta con velocidad de fase  $c_f$  se mantenga estacionaria a la posición relativa del barco se necesita que [16]:

$$c_f(k) = V_0 \cos \theta \quad (4.2)$$

en donde  $\theta$  es la inclinación de la normal (dirección de  $\mathbf{k}$ ) respecto a la línea de navegación, de tal manera que la componente  $V_0 \cos \theta$  de la velocidad del objeto pueda cancelar el movimiento de la cresta. Por lo que si la fuente puntual de ondas viaja uniformemente en línea recta, generará a su paso una estela de ondas contenidas en una región en forma de cuña con un ángulo de apertura  $\phi$  sujeto a las propiedades del sistema.

El caso más simple es para los sistemas no dispersivos (como ocurre para ondas en aguas someras), ya que debido a que todas las ondas viajan a la misma velocidad, habrá un ángulo de emisión único. Si la fuente de ondas puntual se encuentra inicialmente en un punto  $A$ , emitirá una onda circular, que, pasado un tiempo  $t$  tendrá un radio  $c_f t$ , mientras que la fuente que ahora se encuentra en el punto  $B$  se habrá desplazado una distancia  $V_0 t$ . La línea que se origina en el punto  $B$  y que es tangente al círculo en un punto  $W_f$ , delimitará el frente de ondas, teniendo así una estela la cual es una envoltura para ondas circulares emitidas en lugares sucesivos de la fuente puntual y que tiene forma de  $V$ , en donde el ángulo  $\phi$  generado entre la línea de viaje y cada brazo es  $c_f = V_0 \sin \phi$  (ver Fig. 4.4a). Para el caso extremo en que la velocidad de la fuente es igual a la velocidad de fase, los brazos de la  $V$  abren en una onda recta pegada a la fuente, y cuando la velocidad de la fuente es menor que la velocidad de fase, no hay estela, sino un patrón de ondas circulares con centros de los círculos mas pequeños mas cerca de la última posición de la fuente.

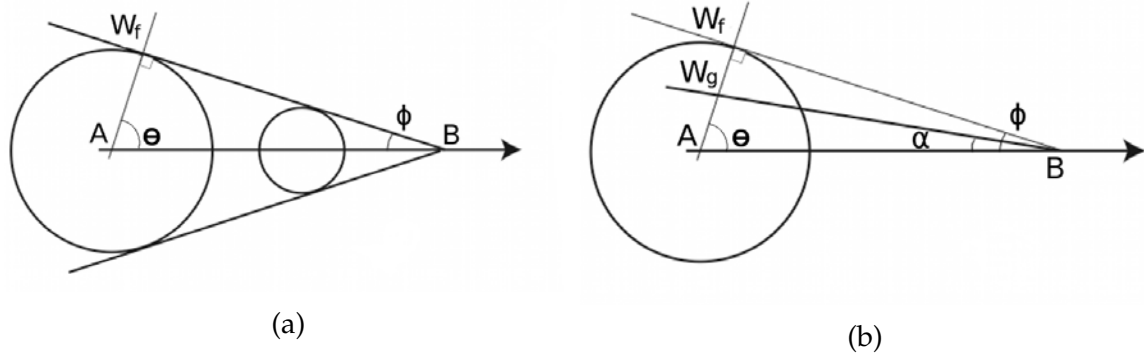


Fig. 4.4: La estela generada por las ondas se encuentra dentro de un sector delimitado por el ángulo  $\phi$ . (a) Ondas no dispersivas. (b) Ondas dispersivas.

Para sistema dispersivos, como en aguas profundas, en donde la velocidad de las ondas no puede ser menor a 23 cm/s, los obstáculos deben desplazarse más rápido que este valor si se quiere que se forme un patrón de ondas. Además, aunque el ángulo  $\theta$  al que las ondas son emitidas por el obstáculo depende de la longitud de onda, está sujeto al límite definido por  $V_0 \cos \theta = 23 \text{ cm/s}$ , teniendo así el frente de onda curvo, esta asíntota correspondiente. Más aún, para un determinado ángulo de emisión  $\theta$ , no pasa una sola onda, sino toda una banda angosta de distintas longitudes, en donde las más largas llegarán ligeramente antes que las cortas a un tiempo  $t$  en que el objeto se desplaza de A a B, aunque en este caso, las ondas emitidas no se encontrarán en el punto  $W_f$  dado a una longitud  $c_f t$ ; será a una distancia dada por la velocidad de grupo  $c_g$ , ubicada en el punto  $W_g$  en donde se localice el frente de onda.

De acuerdo a la teoría clásica [57], la cual consiste en determinar el problema estacionario de las crestas en el sistema de referencia, para ondas lineales en un mar inviscido y sin tensión superficial, el ángulo de apertura de la cuña (mitad de la estela), será de un valor constante de  $\alpha = 19.27^\circ$  en aguas profundas [59], mientras que cuando la longitud de onda es considerable respecto a la profundidad, entonces el ángulo de apertura dependerá de la profundidad, así como de la velocidad del obstáculo. Se tiene por tanto que esta región (conocida como sector de Kelvin) es la única zona en que pueden existir las ondas (oblicuas y transversales).

Hay muchas derivaciones para los patrones de ondas estacionarias, involucrando una gran variedad de sistemas físicos, incluyendo aguas de profundidad finita y tensión superficial. Una derivación sencilla para un fluido inviscido en aguas profundas tiene las siguientes curvas paramétricas [16]:

$$x = C_f \cos \theta \left( 1 - 0.5 \cos^2 \theta \right) \quad (4.3)$$

$$y = 0.5 C_f \cos \theta^2 \sin \theta \quad (4.4)$$

en donde  $C_f$  es una constante que se relaciona con la fase. En la Fig. 4.5 se aprecian las ondas oblicuas que delimitan los brazos de la estela y las ondas transversales que



viajan en el interior, todas cumpliendo la condición  $c_f = V_0 \cos \theta$ .

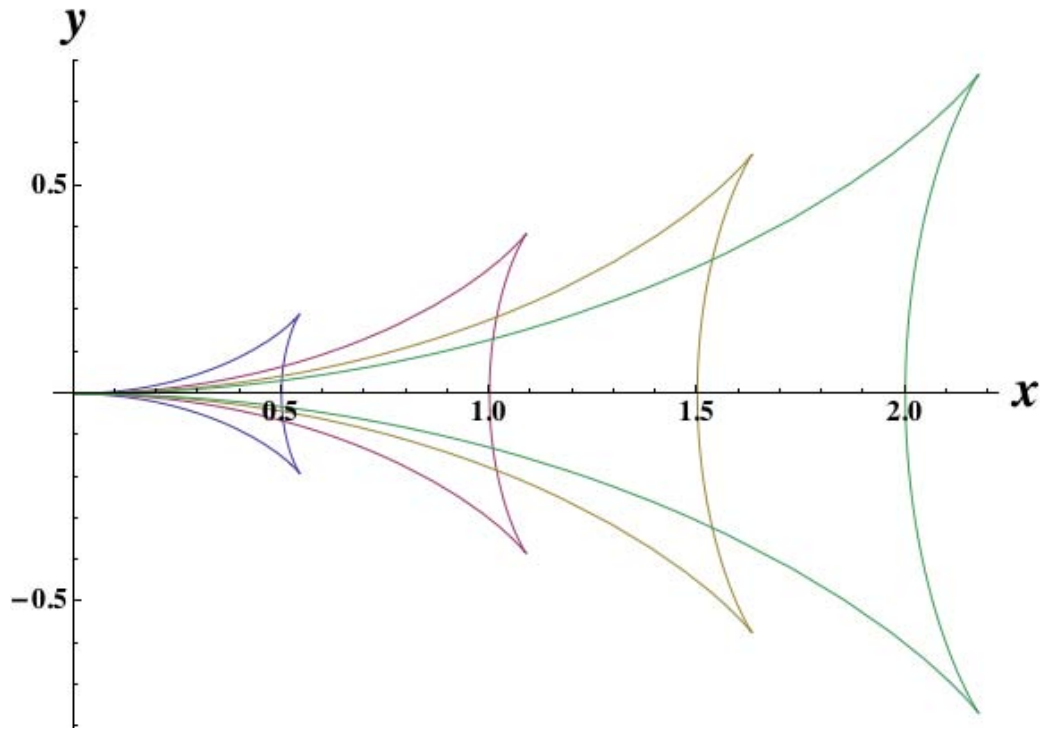


Fig. 4.5: Curvas paramétricas en el plano  $xy$  de una estela de Kelvin para distintos valores arbitrarios  $C_f$  en unidades adimensionales.

Es importante notar que aunque la estela no varía con el tiempo, las ondas se están formando continuamente al paso del obstáculo y se propagan hasta el *infinito*. Las pérdidas de momentum generadas por las ondas se traducen en un efecto resistivo sobre el objeto que se desplaza, el cual debe compensar la demanda requerida para mantener su movimiento. A la resistencia asociada a la generación de estas ondas se le conoce como resistencia de onda  $R_w$ , y es independiente de la resistencia generada por los efectos viscosos  $R_f$ , lo cual sucede a bajos números de Reynolds  $Re \ll 1$ , o por efectos inerciales  $R_e$ , cuando  $Re \gg 1$  [1], siendo en muchos casos las contribuciones de estos dos últimos, despreciables comparados con la resistencia generada de las ondas de gravedad-capilares para los electrolitos [60].

Por lo tanto, la propiedad dispersiva de las ondas juega un papel crítico, y de acuerdo a la Ec. (4.1) tiene soluciones para dos longitudes de onda diferentes, que son las ondas de gravedad y las capilares.

De la Fig. 4.6 es claro que las ondas con longitud  $\lambda$  mayor a la capilar ( $\lambda > \lambda_c$ ), la velocidad de fase excede a la de grupo ( $c_f > c_g$ ), de tal manera que la energía viaja a través del agua a una velocidad menor que la velocidad de la corriente, siendo por tanto arrastrada aguas abajo del obstáculo (la fuente de las ondas), encontrando así

ondas largas en esta zona. En otras palabras, después de que la energía es generada, las ondas largas dominadas por los efectos de la gravedad, sufren un retraso atrás del objeto [16]. Por el contrario, para las ondas con una longitud menor a la capilar ( $\lambda < \lambda_c$ ), la velocidad  $c_g$  a la que se propaga la energía es mayor que  $c_f = V_0$ , de tal forma que la energía viaja aguas arriba del obstáculo. De acuerdo a esto, las ondas más cortas gobernadas por las fuerzas de cohesión se encuentran aguas arriba del obstáculo en forma de un patrón de rizos.

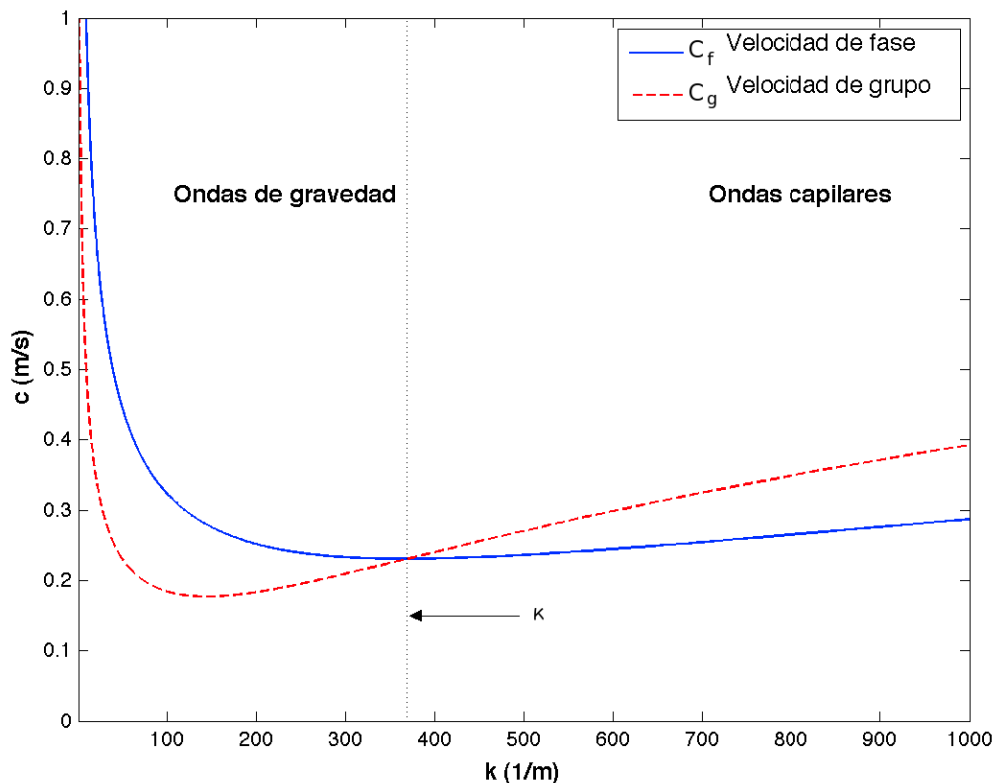


Fig. 4.6: La curva  $c_f$  representa la velocidad de fase y  $c_g$  es la velocidad de grupo. Ambas se intersectan en  $k = \kappa$ , el cual es el número de onda que divide las ondas capilares y las ondas de gravedad. La velocidad de fase es mayor que la de grupo para ondas largas y menor para ondas cortas.

### 4.1.3 Ondas de gravedad-capilares

El estudio de la resistencia de onda se siguió desarrollando activamente durante el siglo XX mediante métodos analíticos lineales y no lineales avanzados, así como métodos numéricos, con el objetivo principal de diseñar cascos para las embarcaciones que

tuvieran la resistencia de onda más baja posible, siendo esta, una de las principales fuentes de arrastre de los barcos [3]. Sin embargo, el estudio de la resistencia de onda asociada a la aparición de ondas de gravedad-capilares no era relevante [61], y cobró cierto interés tiempo después, en parte motivado por el área biológica, específicamente porque las ondas de gravedad-capilares están presentes en los mecanismos de locomoción, caza o cortejo para algunos insectos o arácnidos [62, 5, 63].



Fig. 4.7: Las ondas superficiales pueden funcionar como mecanismos de locomoción para insectos sobre la superficie de las aguas. a) mosquito zapatero b) escarabajo de agua.

Uno de los primeros trabajos que abordaron este tema, fue realizado por Elie Raphaël y Pierre-Gilles de Gennes [49], quienes tenían como interés principal el estudio de superficies suaves (geles y líquidos), las cuales eran deformadas por una sonda que generaba ondas de gravedad-capilares. Para tal efecto, desarrollaron un análisis teórico ocupando la misma metodología que Lord Rayleigh [56] para un fluido inviscido en el régimen lineal, obteniendo que abajo de la velocidad mínima de las ondas no había resistencia de onda por el simple hecho de que no pueden existir, y para este valor había una discontinuidad para la resistencia.

Estas investigaciones fueron complementadas al incluir los efectos viscosos, con lo que la discontinuidad en la velocidad crítica desaparecía y se tenía simplemente un brinco súbito en la resistencia de onda [64]. Posteriormente a estos trabajos teóricos, vinieron algunos experimentos, los cuales fueron llevados a cabo principalmente por Broaweys et al. [61] y Burghelea y Steinberg [50] quienes obtuvieron resultados opuestos. El primero pudo observar que la resistencia de onda sufre una bifurcación en la velocidad crítica, tal como se había predicho [49], mientras que el segundo observa como la resistencia de onda es una función continua alrededor del valor crítico. Más tarde, Burghelea [1] defendió sus experimentos con un modelo teórico, y desestimó los resultados de Browaeys.

Posibles explicaciones a esto fueron dadas en [65], en donde se comenta que en los experimentos realizados por Burghelea, las ondas eran generadas por un objeto inmerso a una profundidad fija, mientras que los trabajos teóricos de Raphaël fijaban la fuerza

[49]. Con un desarrollo teórico se pudo verificar que a una profundidad fija se tiene una resistencia de onda continua alrededor del punto de bifurcación, lo que empató con los experimentos de Burghelea de forma cualitativa.

Más adelante se prestó atención al efecto de la aceleración en la aparición de ondas de gravedad-capilares. Chepelianskii et al. [66] estudiaron un problema teórico donde se tiene una distribución de presiones que se mueve en forma circular, observaron que para velocidades angulares menores a la velocidad crítica hay resistencia de onda, lo que se debía a que el movimiento era acelerado.

Por su parte Closa et al. estudiaron analíticamente la generación de ondas superficiales para un movimiento rectilíneo acelerado (o desacelerado) [67]. Verificaron que en tales condiciones, una perturbación es capaz de generar patrones de ondas superficiales, incluso cuando la velocidad es menor que la crítica (ver Fig. 4.8).

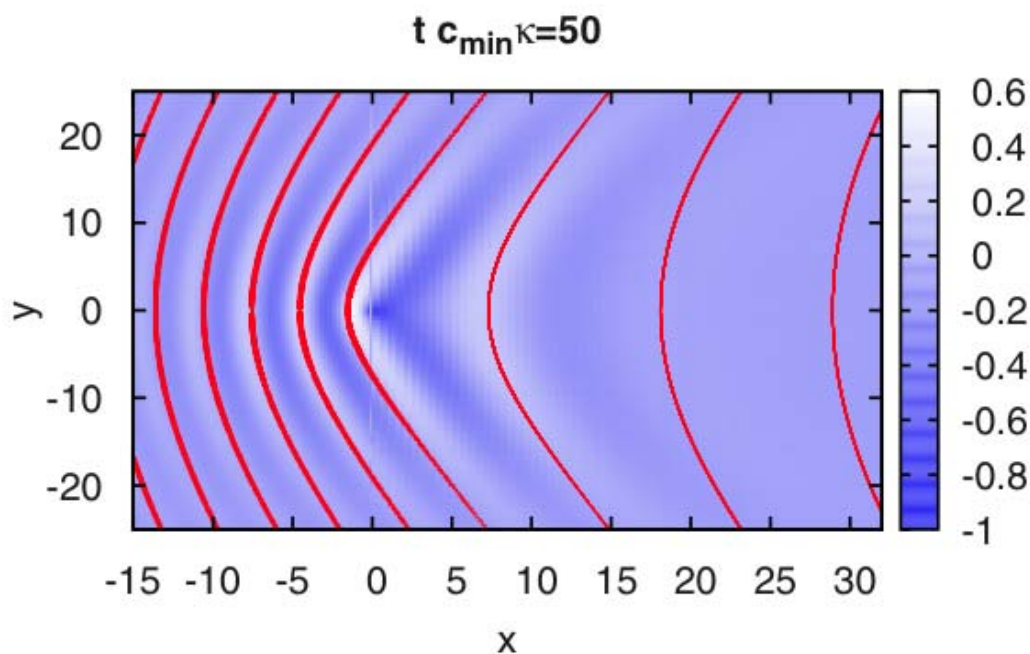


Fig. 4.8: Resultados analíticos de un patrón de ondas estacionarias generado por una distribución de presiones que se mueve de manera acelerada con una velocidad menor que la crítica [67].

Actualmente una gran variedad de trabajos que estudian la aparición de ondas de gravedad-capilares se siguen llevando a cabo, en donde para la mayoría de los casos, se emplean obstáculos sólidos. Hay algunas alternativas novedosas como el uso de gotas de nitrógeno que flotan sobre el agua, y son desaceleradas exclusivamente por la generación de ondas [68]. La contribución de este trabajo es utilizar fuerzas electromagnéticas localizadas, para un caso que tiene similitudes con el obstáculo sólido y otro que no tiene un equivalente mecánico.

## 4.2 Ondas generadas por fuerzas electromagnéticas

### 4.2.1 Obstáculo magnético

Los campos magnéticos localizados pueden ser utilizados como una alternativa a los obstáculos sólidos. De hecho el término *obstáculo magnético* fue acuñado para describir la oposición que los campos magnéticos localizados presentes en flujos de metales líquidos [69] ocasionan debido a que las corrientes inducidas en el medio conductor interactúan con el campo magnético y generan una fuerza de Lorentz que se opone al flujo  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$ , creando una estela aguas abajo de la región afectada por el campo magnético, similar a la generada por un obstáculo sólido [69, 70, 71].

Para los fluidos que son malos conductores, como es el caso de los electrolitos, las corrientes y los campos magnéticos inducidos son despreciables, por lo que para observar el efecto de un campo magnético localizado sobre el flujo, es necesario que se aplique una densidad de corriente eléctrica ( $\mathbf{j}_0$ ). De hecho, varios experimentos de flujos de electrolitos a través de campos magnéticos se han realizado al arrastrar campos magnéticos permanentes a velocidades constantes, cerca de películas delgadas que se encuentran en reposo mientras que se aplica una corriente constante en la capa del fluido de manera transversal al movimiento de los imanes [72, 73, 74]. En estos estudios previos, la atención se enfocó en los patrones de flujo creados en los planos paralelos a la pared del fondo, y no en la superficie libre. El trabajo presente, por el contrario, tiene como interés principal estudiar los regímenes de los flujos en los cuales una fuerza de Lorentz localizada es capaz de perturbar la superficie libre de un fluido y generar ondas superficiales. Algunos resultados parciales del estudio fueron publicados en [75].

### 4.2.2 Metodología experimental

El arreglo experimental que se empleó (ver Fig. 4.9) consiste en una cuba rectangular con dimensiones (100 cm  $\times$  46 cm  $\times$  10 cm) para las caras laterales, frontales y la profundidad respectivamente, siendo la base de cristal y las paredes de acrílico. En la cuba se vierte una solución electrolítica acuosa al 8.6% de  $\text{NaHCO}_3$  hasta formar una película de 3 mm de espesor. A lo largo de las paredes laterales se ubican unas *recámaras* angostas (ver Fig. 4.10a), creadas por unas pestañas de acrílico separadas 1 mm del fondo, de tal manera que el fluido en ellas se encuentra conectado con la recámara central (ver Fig. 4.10b). Un electrodo (prisma rectangular de grafito, con una sección transversal cuadrada de 1 cm  $\times$  1 cm y de 1 m de longitud) se coloca en cada recámara (ver Fig. 4.10b) con el fin de hacer circular una corriente de electrodo a electrodo. Para esto se utilizaron un par de fuentes de alimentación que se conectaron en forma paralela para conseguir una diferencia de potencial entre los electrodos en un intervalo de 0.1 V hasta 120 V y así alcanzar corrientes eléctricas en un intervalo de 0.1 A - 6 A. Además, las burbujas que se generan por la electrólisis cuando las corrientes son altas quedan atrapadas en estas cámaras, las cuales también evitan que la superficie libre de la zona principal se perturbe en caso de que las burbujas revienten.

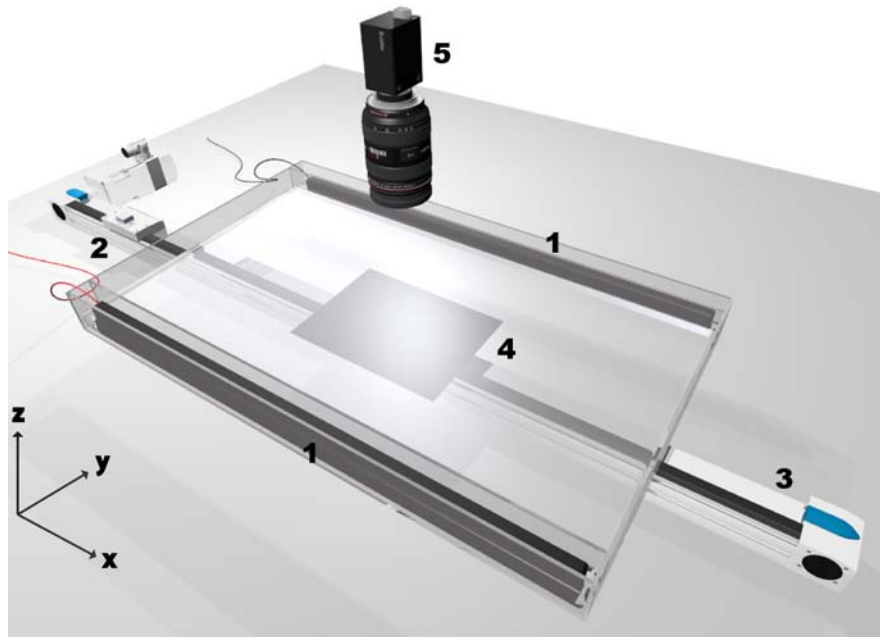


Fig. 4.9: Arreglo experimental. Una fuerza de Lorentz localizada es creada por la interacción de corriente directa aplicada a través de electrodos paralelos (1) y el campo magnético generado por un imán permanente (2) arrastrado axialmente por debajo de la pared del fondo con un actuador lineal (3). La superficie perturbada es reconstruida en la zona de observación (4) con la asistencia de una cámara (5), usando el método de Schlieren sintético de superficie libre [76].

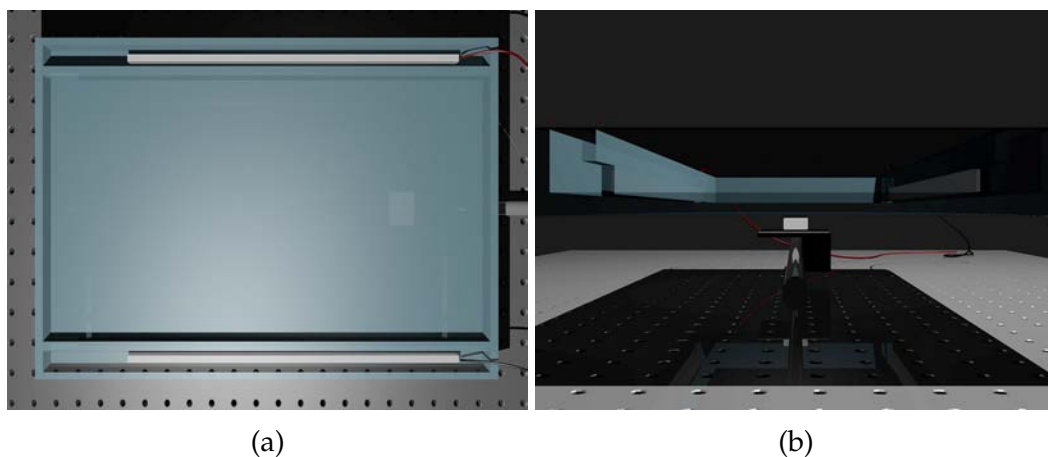


Fig. 4.10: En la cuba se vierte una película delgada de electrolito de 3 mm de espesor. En las paredes laterales se encuentran unas cámaras separadas ligeramente del fondo, de tal manera que dejan pasar la corriente pero no las burbujas generadas por la electrólisis. Un imán colocado debajo de la cuba se mueve para generar un campo magnético viajero. (a) Vista de planta. (b) Vista frontal.

Para generar el campo magnético viajero se utiliza un imán permanente de Neodimio en forma de paralelepípedo con dos caras cuadradas de  $L = 2.54$  cm de lado y magnetizado de manera normal a dichas caras. El imán se coloca debajo de la pared de fondo (ver Fig. 4.10b), mientras se mueve a lo largo del eje de simetría longitudinal de la cuba, a una velocidad constante  $V_0$  mediante el uso de un actuador lineal (FESTO EGC-70-500-TB-KF-0H-GK) impulsado por un servo motor (FESTO EMMS-AS-70-M-RS). La velocidad de desplazamiento  $V_0$  puede ser controlada de manera muy precisa. En el experimento, el imán inicia en reposo, y súbitamente se pone en movimiento alcanzando una velocidad constante antes de que entre a la zona experimental por debajo del tanque. La interacción de la corriente directa (transversal al eje de movimiento del imán) con el campo magnético localizado, produce una fuerza de Lorentz que perturba al fluido tanto en su interior como en la superficie libre, generando distintas estructuras de flujo como vórtices dipolares y caudas de diversos tipo o bien patrones de ondas de gravedad-capilares, dependiendo de los parámetros experimentales tales como la intensidad del campo magnético, la velocidad del imán y la magnitud de la corriente eléctrica aplicada.

Debido a que la componente principal del campo magnético es normal a la pared de fondo, y que la corriente aplicada es transversal al movimiento del imán, la fuerza de Lorentz generada puede apuntar ya sea en la dirección de movimiento de este, o en contra, dependiendo de la polaridad de los electrodos y de la polaridad del imán permanente. Para el caso en que la polaridad del imán es fija, la dirección de la fuerza de Lorentz depende solamente de la dirección de la corriente (ver Fig. 4.11).

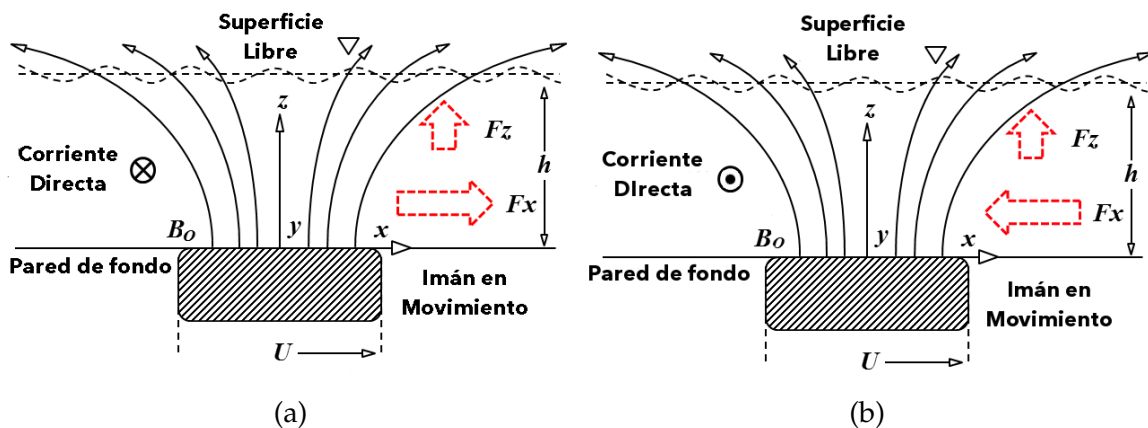


Fig. 4.11: Cuando el polo norte de un imán viajero (que se mueve hacia la derecha con una velocidad  $V_0$ ) atraviesa la superficie de la cuba, la fuerza de Lorentz que se produce puede apuntar a favor de la dirección de movimiento, o en contra de esta, dependiendo de si las corrientes transversales entran o salen del plano de la figura. Debido a la inhomogeneidad del campo en los bordes del imán, existe otra componente de la fuerza que apunta en la dirección vertical para los dos casos. (a) Cuando la corriente entra en el plano la fuerza apunta a favor de la dirección de movimiento. (b) Cuando la corriente sale del plano, la fuerza apunta en contra de la dirección del movimiento.

Por practicidad, llamaremos *fuerza positiva* o *fuerza orientada positivamente* cuando la componente horizontal de la fuerza de Lorentz apunte en la dirección de movimiento del imán, y *fuerza negativa* o *fuerza orientada negativamente* cuando apunte en contra de la dirección del movimiento. Para una fuerza positiva las líneas de corriente se abren (expanden) alrededor de la región afectada por el campo magnético localizado (ver Fig. 4.12a), mientras que para el otro caso las líneas de corriente se cierran (contraen) hacia el centro de esta región (ver Fig. 4.12b). Es importante notar que los efectos de una fuerza positiva son similares a los de un objeto sólido, mientras que los efectos para una fuerza negativa no tienen análogo mecánico. Además, cerca de los bordes, la componente del campo en la dirección axial genera una fuerza de Lorentz en la dirección vertical que es capaz de perturbar la superficie libre.

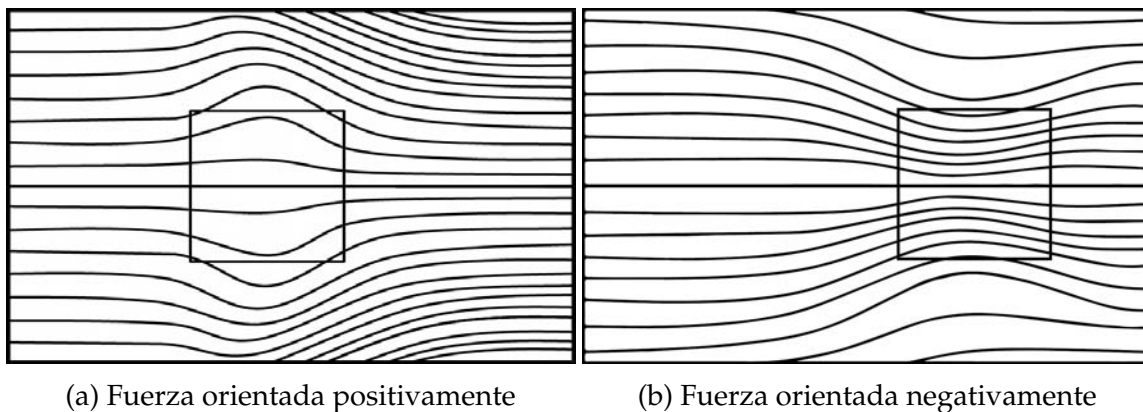


Fig. 4.12: Vista de planta de las líneas de corriente de un flujo a través de un campo magnético localizado (representado por el cuadrado). El imán se coloca de manera externa al flujo. (a) Para una fuerza orientada positivamente las líneas de corriente se expanden. (b) Para una fuerza orientada negativamente las líneas de corriente se contraen.

La superficie libre obtenida en cada experimento se caracteriza sobre un área experimental de  $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ , mediante un método óptico llamado Schlieren sintético de superficie libre [76]. Este método permite medir la topografía instantánea de la interfase entre dos fluidos transparentes (aire y electrolito, en este caso), para lo cual se coloca una cámara por encima del tanque con el fluido en reposo (ver Fig. 4.13), que graba un patrón de puntos aleatorios localizado debajo de la base de cristal transparente. Cuando la superficie libre se perturba, debido a la refracción, aparentemente los puntos se mueven de sus posiciones originales, y esto queda registrado en una secuencia de fotos. Los desplazamientos aparentes de los puntos  $\mathbf{r}(x, t)$  se relacionan con la altura de la superficie perturbada  $h(x, t)$  mediante la siguiente ecuación [76]:

$$h(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{r}}{h^*} \quad (4.5)$$

en donde  $h^*$  es la distancia efectiva, la cual es una constante que depende de la distancia  $H$  del patrón de puntos hasta la cámara, así como de los índices de refracción



$n$  y el grosor  $h$  de los distintos medios (aire ( $a$ ), vidrio ( $v$ ) y electrolito ( $e$ )) a través de los cuales la luz viaja de los puntos a la cámara y se expresa mediante las siguientes relaciones

$$\frac{1}{h^*} = \frac{1}{\alpha h_p} - \frac{1}{H} > 0, \quad h_p = h_e + \frac{n_e}{n_v} h_v + \frac{n_v}{n_a} h_a, \quad \alpha = 1 - \frac{n_a}{n_e} \quad (4.6)$$

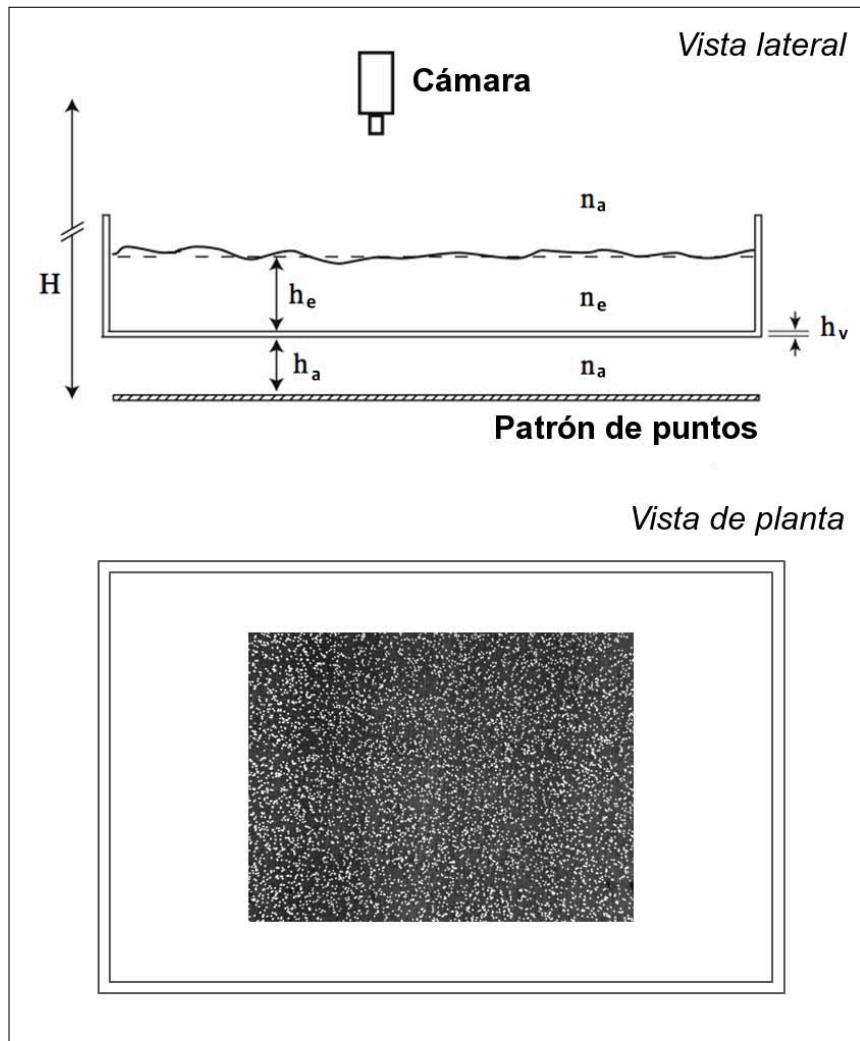


Fig. 4.13: Una cámara ubicada sobre la cuba registra el campo de desplazamientos aparentes debido a la refracción de la superficie libre al ser perturbada. La luz viaja de los puntos a la cámara a través de distintos medios (aire ( $a$ ), electrolito ( $e$ ) y vidrio ( $v$ )), con índice de refracción  $n$  y grosor  $h$ , siendo  $H$  la distancia total del patrón de puntos a la cámara. (a) Vista lateral. (b) Vista de planta.

Por lo tanto, usando un algoritmo de correlación digital de imágenes (DIC por sus siglas en inglés) se mide el campo de desplazamientos aparentes  $\mathbf{r}$  entre la imagen refractada y la de referencia que se obtiene cuando la superficie es plana.

Finalmente, hay que mencionar que se identifican dos números adimensionales relevantes para el sistema, con base en los cuales se caracteriza la superficie libre. El primero es el número de Reynolds  $Re = V_0 L / \nu$ , basado en la velocidad y longitud característica del imán, denotados por  $V_0$  y  $L$  respectivamente, además de la viscosidad cinemática del fluido  $\nu$ . Este parámetro puede ser controlado fácilmente variando la velocidad a la que el imán se mueve, mediante el uso del actuador. El segundo número adimensional caracteriza a la fuerza de Lorentz y se define como  $Q = j_0 B_{max} L^3 / \rho \nu^2$  en donde  $j_0$  es la magnitud de la densidad de corriente,  $B_{max}$  es la intensidad máxima del campo magnético en la superficie de la cuba y  $\rho$  es la densidad de masa. Este parámetro se controla ajustando la diferencia de potencial entre el par de electrodos de grafito.

### 4.3 Resultados Experimentales

En los experimentos realizados se obtuvieron secuencias de los patrones de puntos observados por la cámara, a partir de los cuales se calculó el campo de desplazamientos aparentes para la zona de observación. Un ejemplo de estos campos vectoriales se muestra en la Fig. 4.14 para un frente de onda generado por una fuerza de Lorentz orientada positivamente que se mueve de abajo hacia arriba.

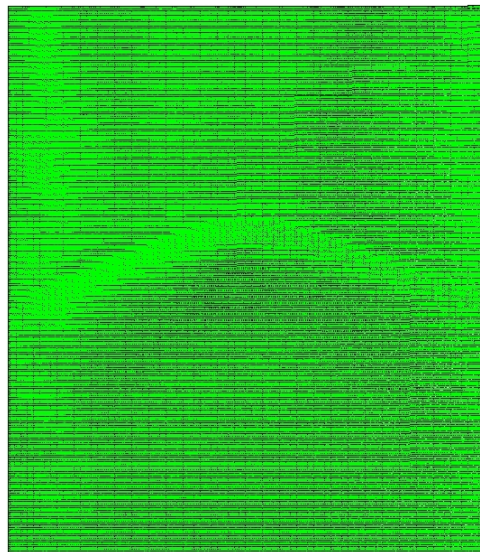


Fig. 4.14: Se observa un campo vectorial de desplazamientos aparentes producido por una onda superficial que se mueve de abajo hacia arriba, generada por una fuerza orientada positivamente ( $Q = 6.6 \times 10^6$ ,  $Re = 5200$ ).

A partir de estos campos de desplazamientos se reconstruyó completamente la topografía de la superficie libre. En las Figs. 4.15 y 4.16 se ve un ejemplo para una

fuerza orientada de manera positiva y negativa, respectivamente.

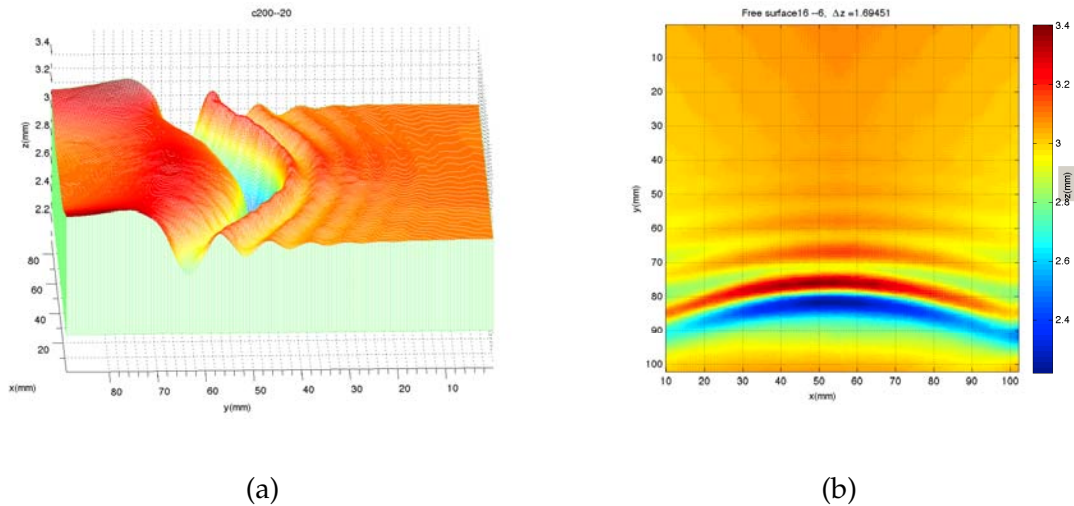


Fig. 4.15: Patrón de ondas reconstruido para una fuerza orientada positivamente. (a) Representación superficial de la topografía. (b) Representación escalar de la topografía proyectada en el plano x-y ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ,  $Re = 4318$ ).

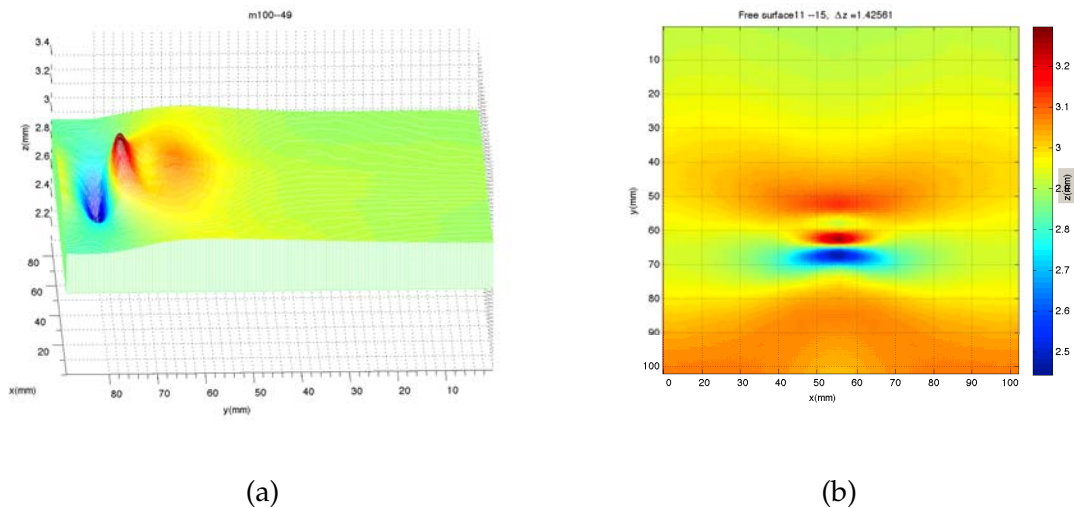


Fig. 4.16: Patrón de ondas reconstruido para una fuerza orientada negativamente. (a) Representación superficial de la topografía. (b) Representación escalar de la topografía proyectada en el plano x-y ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ,  $Re = 2540$ ).

Para ambos casos se expone la representación superficial, la cual muestra la topografía de la interfase desde una perspectiva dada, y también la representación escalar, la cual es una proyección de la topografía de la superficie libre sobre el plano horizontal, en

donde cada color indica las distintas alturas de la superficie. La superficie libre sin perturbar es paralela al plano  $x - y$ , mientras que el imán se mueve en la dirección  $y$ , de modo que la superficie libre perturbada adquiere profundidad en la dirección vertical  $z$ .

También se utiliza la representación del perfil de los frentes de onda en dos dimensiones, es decir, una vista lateral del plano vertical  $y-z$  que cruza el eje de simetría axial, mostrando así el perfil principal del frente de onda estacionario que es creado por la fuerza de Lorentz. En la Fig. 4.17 se aprecia una cresta principal seguida por una depresión pronunciada, y luego por un frente de ondas capilares con amplitudes decrecientes del orden de décimas de milímetro.

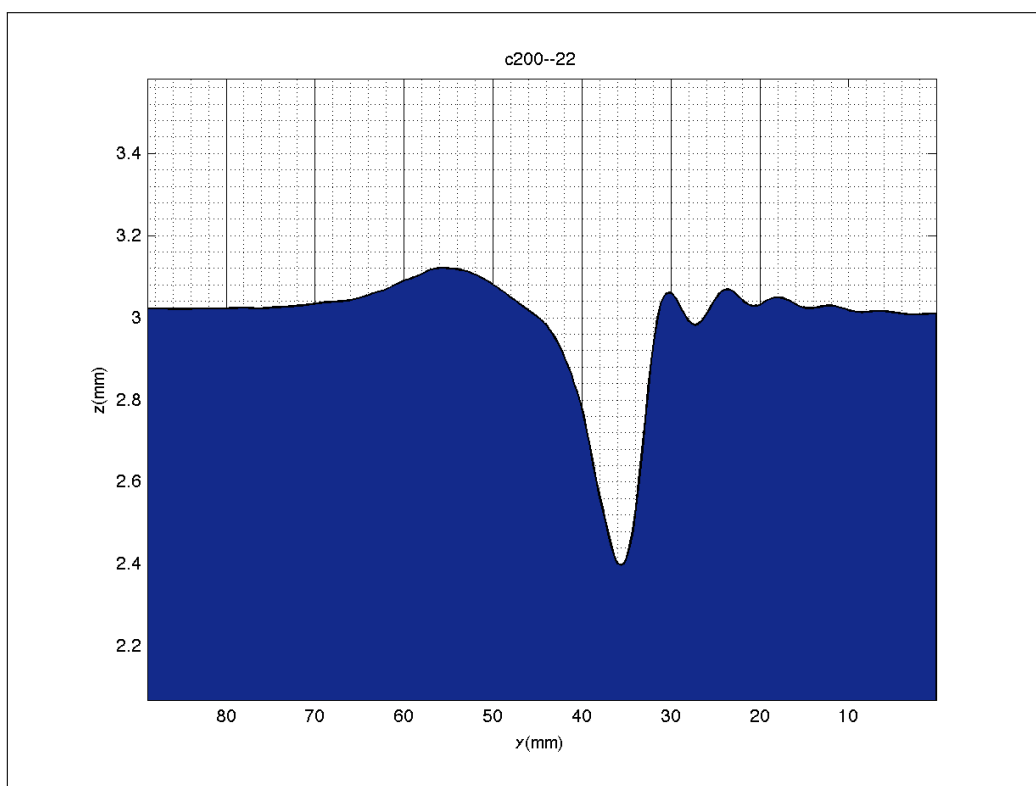


Fig. 4.17: Representación de perfil del frente de onda que se mueve de izquierda a derecha. Consiste en una vista lateral, la cual se genera realizando un corte del plano vertical central que cruza el eje de simetría axial ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ,  $Re = 4318$ ).

### 4.3.1 Barrido en Reynolds

A continuación se presenta una serie de experimentos que se realizaron para un valor constante del parámetro de la fuerza de Lorentz ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ), mientras el número de Reynolds  $Re$  se varió de 1,778 a 10,160. Los patrones característicos se ilustran esquemáticamente en las Figs. 4.18 y 4.19, en donde se observa la manera en que la

superficie libre evoluciona conforme  $Re$  crece, para los casos de fuerzas positivas y negativas, respectivamente. La representación de perfil se expone en los paneles superiores (ver Figs. 4.18a y 4.19a), en donde la perturbación de la superficie libre se desplaza de izquierda a derecha <sup>1</sup>. Por otro lado, en los paneles inferiores (ver Figs. 4.18b y 4.19b) se muestra la representación escalar, en donde el campo magnético viajero se mueve de abajo hacia arriba, y para estos casos, los valores máximos fueron 1.5 mm y 0.8 mm para fuerzas positivas y negativas, respectivamente.

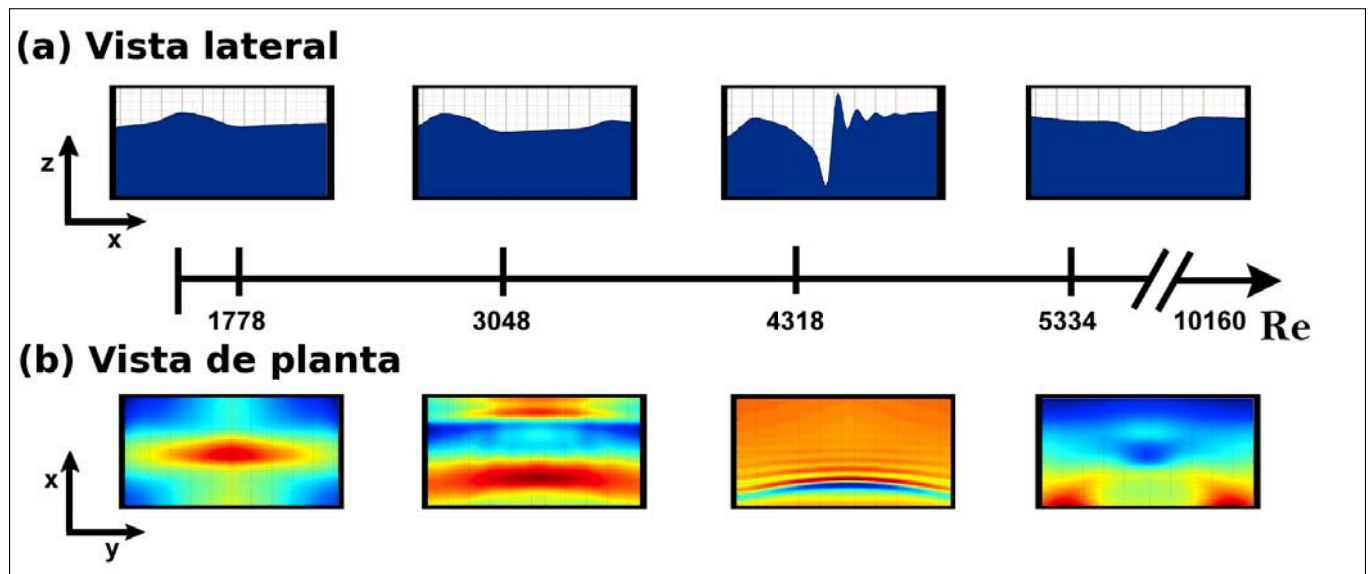


Fig. 4.18: Se muestran los patrones de ondas característicos conforme  $Re$  crece para una fuerza positiva. (a) Representación de perfil. (b) Representación escalar de la topografía proyectada en el plano  $x - y$  ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ).

Se puede observar que para una fuerza orientada positivamente, en el régimen de bajos valores de número de Reynolds ( $1,778 \leq Re \leq 2,794$ ), la superficie libre toma una forma parecida a una joroba (cresta principal). Si se aumenta  $Re$  lo suficiente, aparecen nuevas perturbaciones precediendo la cresta principal debido a los efectos dispersivos del electrolito, emitiendo así, ondas de gravedad-capilares de longitudes alrededor de 1 cm como se puede observar en la Fig. 4.17. El intervalo en el que se observan los rizos, es decir, las diversas ondulaciones cortas (del orden de la longitud capilar) marcadas de la superficie libre, es  $3,048 \leq Re \leq 5,080$ , en el cual, el número de crestas se incrementa conforme  $Re$  también lo hace, a partir de 2 crestas para  $Re \sim 3,048$ , hasta llegar a un número máximo de 7 para un valor de ( $Re \approx 4,318$ ). Esto se muestra en la Fig. 4.20a, donde el número de crestas es graficado en función el número de Reynolds para el caso de una fuerza positiva. Finalmente, en el régimen de valores altos  $Re$

<sup>1</sup>En el Apéndice se muestra a detalle la representación de perfil de la evolución de la superficie libre.

( $5,334 \leq Re \leq 10,160$ ) solamente se pueden identificar un par de crestas, las cuales delimitan una perturbación superficial correspondiente a una depresión principal. Más aún, la profundidad que tiene esta depresión disminuye a medida que  $Re$  aumenta, ya que los efectos electromagnéticos se manifiestan de manera breve sobre cada punto del fluido. Esto se grafica en la Fig. 4.21a, en donde la amplitud de la onda asociada con la depresión principal se muestra como función de  $Re$ , observándose un decremento significativo en su valor desde  $Re = 5,334$  hasta prácticamente desaparecer cuando  $Re = 10,160$ .

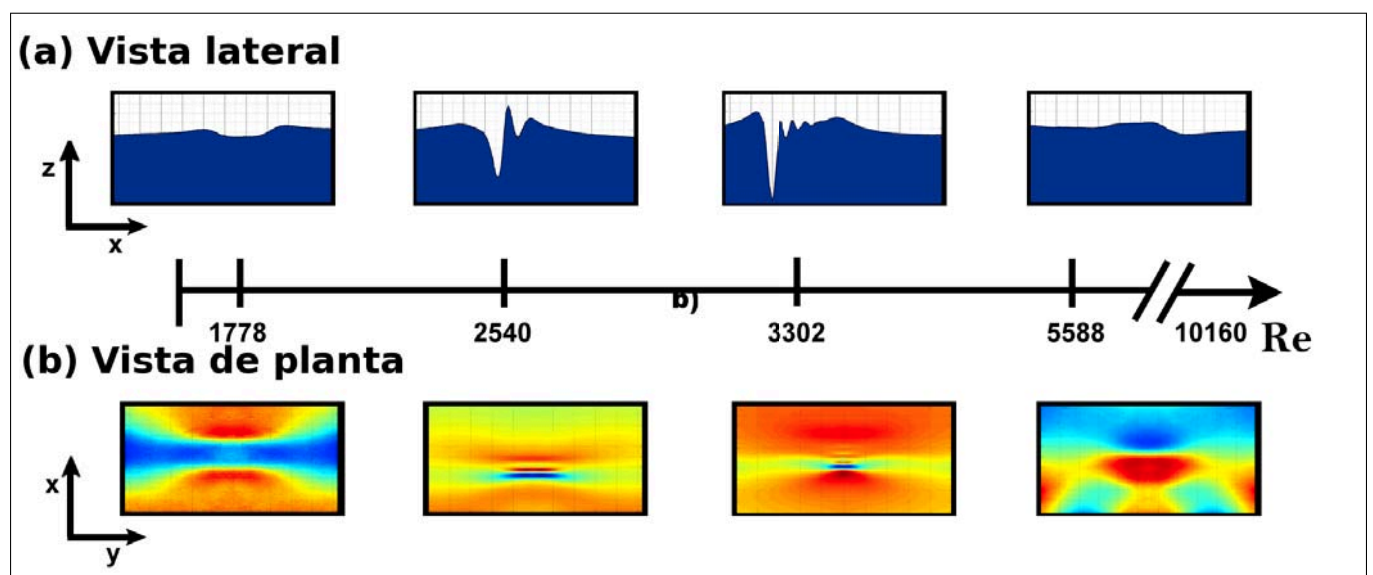


Fig. 4.19: Se muestran los patrones de ondas característicos conforme  $Re$  crece para una fuerza negativa. (a) Representación de perfil. (b) Representación escalar de la topografía proyectada en el plano  $x - y$  ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ).

Para el caso de una fuerza orientada negativamente, en la región de bajos  $Re$  ( $2,032 \leq Re \leq 2,286$ ) se aprecia solo un menisco (depresión principal), y a medida que el número de Reynolds se incrementa, es precedido por ondas capilares (ver Fig. 4.19) debido a las propiedades dispersivas del sistema. El intervalo en que se observó la emisión de ondas de gravedad-capilares fue  $2,540 \leq Re \leq 5,334$ , en donde se contabilizó un máximo de seis crestas para  $Re = 3,302$  (ver Fig. 4.20b), a partir donde se reduce su número, primero a tres ( $3,556 \leq Re \leq 4,318$ ), luego a dos ( $4,572 \leq Re \leq 5,334$ ), y finalmente a una ( $5,588 \leq Re \leq 10,160$ ), para la región de  $Re$  altos (ver Fig. 6b), donde se observa una cresta principal. La Fig. 4.21b muestra la amplitud máxima de la cresta principal como función de  $Re$ . De hecho, la amplitud máxima (0.13 mm para  $Re = 5,842$ ) es mucho más baja que el caso de la fuerza positiva y similarmente, decrece hasta prácticamente desaparecer para  $Re = 10,160$ .

Una de las diferencias significativas entre cada configuración puede verse en la representación escalar (ver Figs. 4.18b y 4.19b), puesto que para una fuerza positiva, los frentes de onda, son curvas amplias similares a las que se presentan alrededor de un obstáculo sólido, mientras que para la fuerza negativa se genera un patrón de ondas localizadas en el centro del obstáculo, que es la región de estrangulamiento de las líneas de corriente. En este sentido, esta configuración permite confinar las perturbaciones superficiales en una región menor.

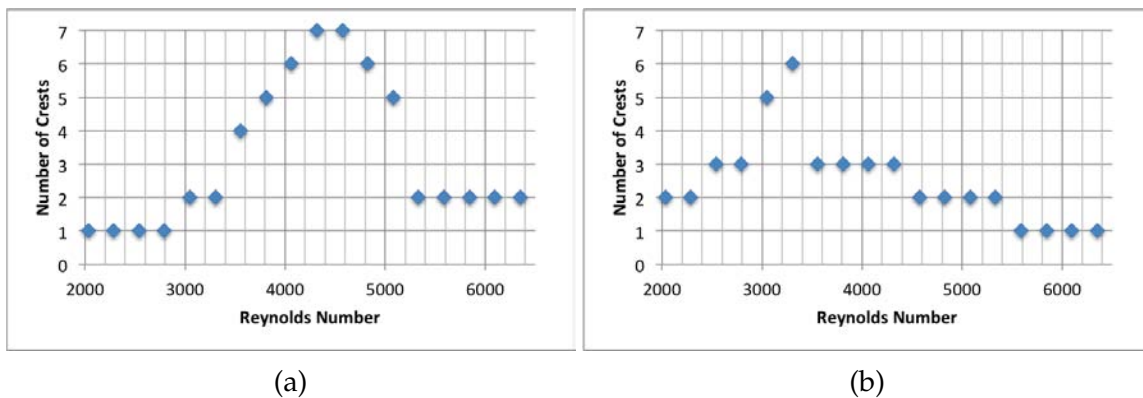


Fig. 4.20: Número de crestas en función de  $Re$  debido a la emisión de ondas de gravedad capilares. (a) Fuerza orientada positivamente. (b) Fuerza orientada negativamente ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ).

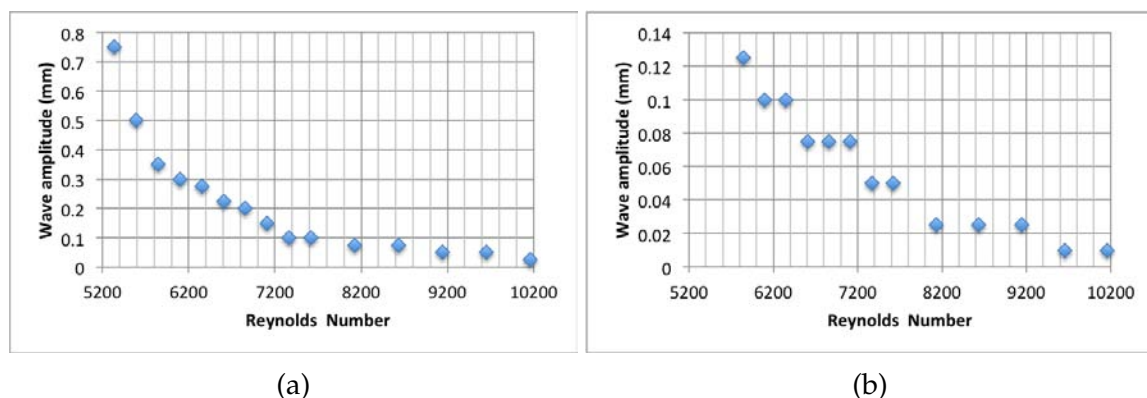


Fig. 4.21: Amplitud de la onda persistente en el intervalo de números de Reynolds grandes en función de  $Re$  (a) Fuerza orientada positivamente. (b) Fuerza orientada negativamente ( $Q = 5.2 \times 10^6$ ).

### 4.3.2 Diagrama bidimensional $Q - Re$ de la superficie libre

En los siguientes experimentos se hizo un barrido bidimensional  $Q$  vs  $Re$  identificando las tres zonas indicadas en la sección anterior. La zona en donde la superficie libre presenta una perturbación (menisco) en forma de cresta o depresión, es causada por el bulto o hueco que se forma cuando la fuerza electromagnética empuja el fluido. La siguiente región es donde aparecen o desprenden las ondas de gravedad-capilares, y se identifica claramente por una cresta principal y una región de rizos que la preceden; mientras que la última región está compuesta por una onda de gran longitud (mayor a la región de observación) dominada por los efectos de la gravedad. El intervalo de  $Re$  mostrado es de  $1,500 \leq Re \leq 7,000$  para 4 diferentes valores de  $Q$ :  $1.6 \times 10^6$ ,  $3.3 \times 10^6$ ,  $4.9 \times 10^6$  y  $6.6 \times 10^6$ .

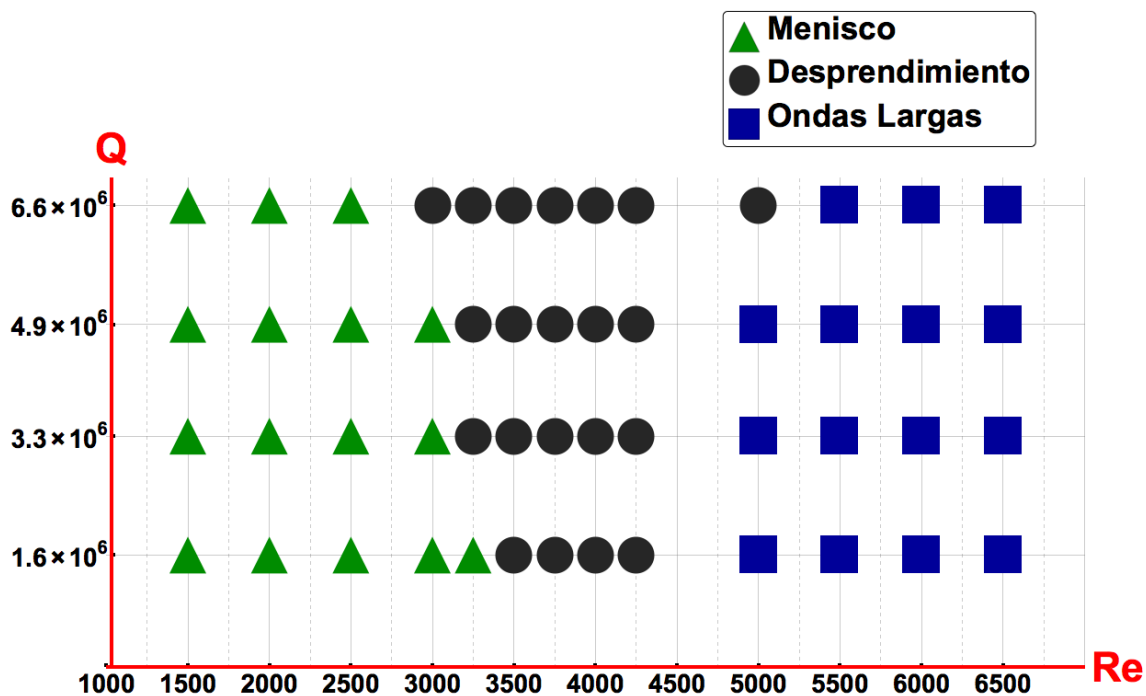


Fig. 4.22: Diagrama bidimensional  $Q - Re$  para una fuerza orientada positivamente.

Para una fuerza orientada positivamente (ver Fig. 4.22), el intervalo de número de Reynolds más grande en que el menisco se observa es  $1,500 \times 10^6 \leq Re \leq 3,250 \times 10^6$ , y ocurre para la  $Q$  más baja ( $Q = 1.6 \times 10^6$ ). A medida que el parámetro de la fuerza de Lorentz aumenta, el intervalo de número de Reynolds en que esta región se observa se acorta. Por otro lado, el intervalo más grande en que se aprecia la zona de desprendimiento de ondas de gravedad-capilares es  $3,000 \times 10^6 \leq Re \leq 5,000 \times 10^6$ , para la  $Q$  máxima ( $Q = 6.6 \times 10^6$ ), y cuando  $Q$  decrece el intervalo en que se observan los rizos también lo hace. Las ondas largas se pudieron observar desde  $Re = 5,500$  cuando  $Q$  es máximo y en  $Re = 5,000$  para los otros valores de  $Q$ .



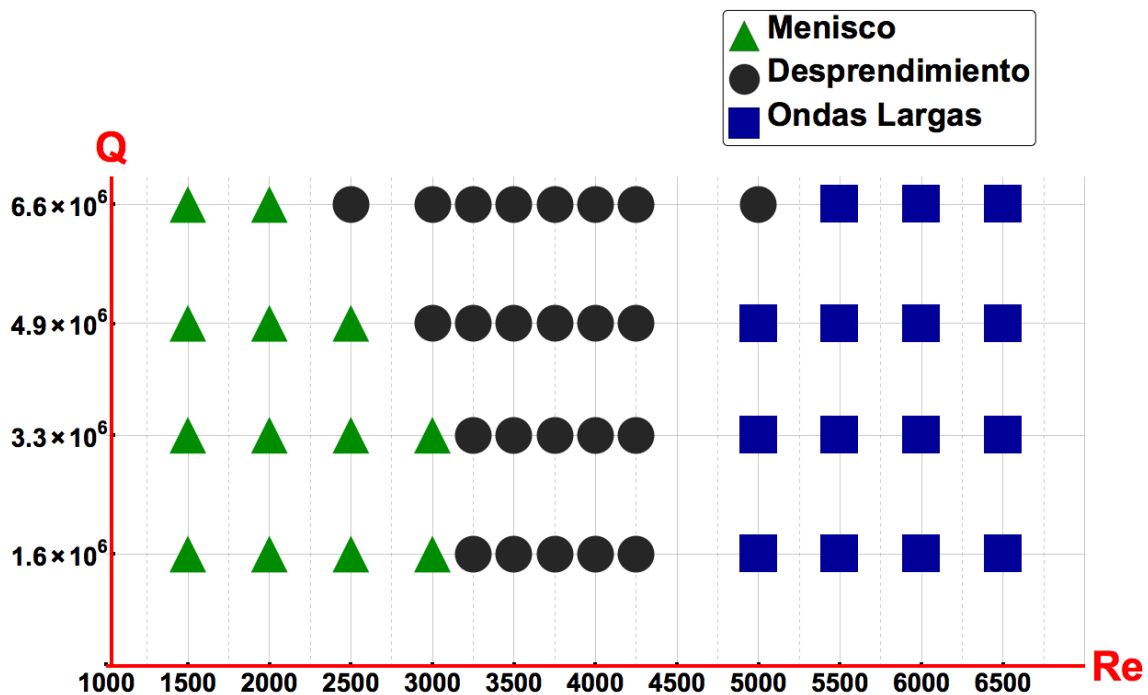


Fig. 4.23: Diagrama bidimensional  $Q - Re$  para una fuerza orientada negativamente.

Cuando la fuerza es negativa, el intervalo más grande de  $Re$  en que se observó el menisco fue  $1,500 \leq Re \leq 3,000$  para la  $Q$  más baja, y disminuye si  $Q$  aumenta, de hecho, se puede observar un menisco para un valor máximo  $Re = 2,000$  cuando  $Q = 6.6 \times 10^6$ . Al igual que en el caso de la fuerza positiva, aumentar  $Q$  no sólo permite el desprendimiento prematuro de las ondas de gravedad-capilares para número de Reynolds menores, sino que también incrementa el intervalo de  $Re$  en que estas se observan. El intervalo más grande en que se visualizan las ondas capilares ocurre cuando  $Q = 6.6 \times 10^6$ , y abarca  $2,500 \leq Re \leq 5,000$ , mientras que para el resto de los casos se visualizaron para un valor máximo de  $Re = 4,250$ . La región de ondas largas se observó a partir de  $Re = 5,500$  para  $Q = 6.6 \times 10^6$  y de  $Re = 5,000$  para el resto de los valores.

Se tiene por tanto, que las fuerzas positivas y negativas, no solamente generan patrones superficiales con topografías distintas, sino que las tres regiones que se distinguen en ambos casos, ocurren con valores de los parámetros  $Q$  y  $Re$  distintos. De hecho, para un valor de  $Q$  fijo, la emisión de ondas capilares se da para valores de  $Re$  más bajos para la fuerza orientada negativamente, debido a los efectos de aceleración más intensos que ocurren en la zona de estrangulamiento de las líneas de corriente, lo que promueve la emisión prematura de ondas [66, 67]. Sucede también para estos casos, que las ondas de gravedad-capilares, persisten durante un intervalo de números de Reynolds más grande con respecto a una fuerza positiva.

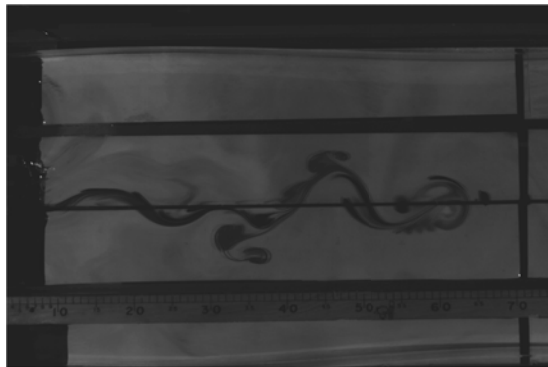
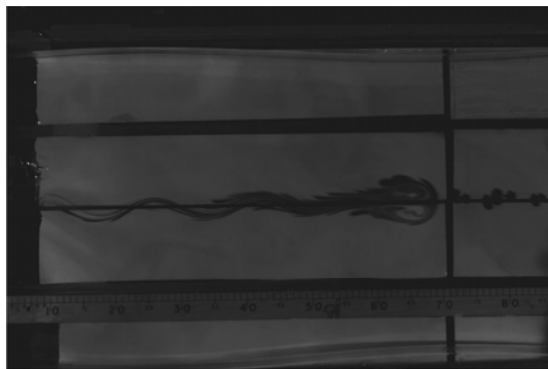
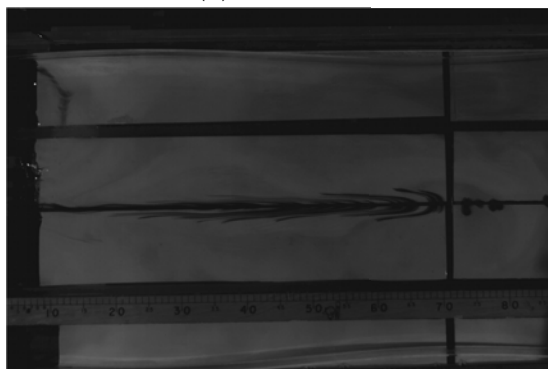
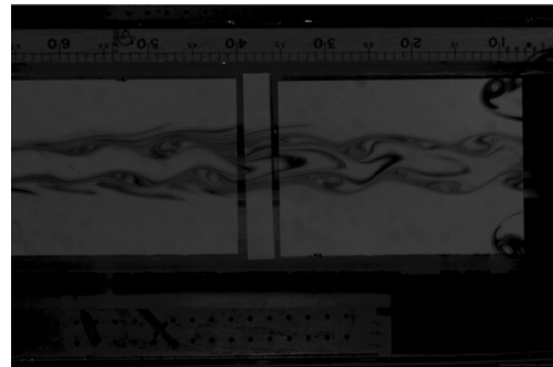
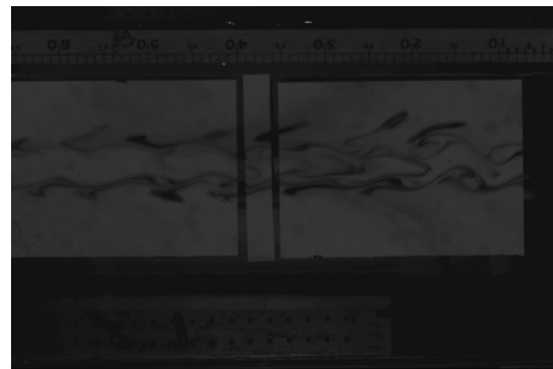
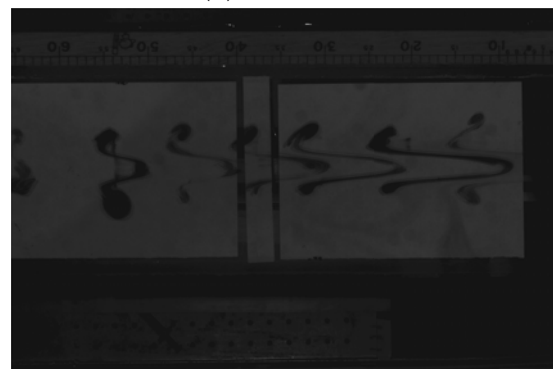
(a)  $Re = 1500$ (b)  $Re = 2000$ (c)  $Re = 3000$ (a)  $Re = 500$ (b)  $Re = 1000$ (c)  $Re = 1500$ 

Fig. 4.24: Visualización del flujo generado por un imán que se mueve de izquierda a derecha, mediante tinta vegetal para una fuerza orientada positivamente para  $Q = 6.6 \times 10^6$ . Los patrones (a) y (b) corresponden a la región de menisco. Las líneas de corriente abiertas (c) corresponden a la zona de ondas de gravedad-capilares y a la región de ondas largas.

Fig. 4.25: Visualización del flujo generado por un imán que se mueve de izquierda a derecha, mediante tinta vegetal para una fuerza orientada negativamente para  $Q = 6.6 \times 10^6$ . Los patrones (a) y (b) corresponden a la región de menisco. Las líneas de corriente abiertas (c) corresponden a la zona de ondas de gravedad-capilares y a la región de ondas largas.

También se visualizaron los patrones de flujo correspondientes a los tipos de perturbación superficial mediante tinta vegetal. Para una fuerza orientada positivamente, en la zona de menisco ( $Re$  bajos), se puede apreciar un dipolo o una calle de vórtices que se desprende aguas abajo de la fuerza localizada (ver Figs. 4.24a y 4.24b). Mientras que en la región de ondas de gravedad-capilares y de ondas largas, solamente se generan líneas de corriente abiertas, y que se observan como una mancha de tinta en forma de  $V$  (ver Fig. 4.24c).

Para la fuerza negativa, en la zona de menisco se observan vórtices contenidos en una banda centrada con respecto a la fuerza de Lorentz (ver Figs. 4.25a y 4.25b), y en la región en que hay desprendimiento de ondas, las líneas de flujo son abiertas, generando una  $V$  que apunta en sentido contrario al movimiento.

## 4.4 Conclusiones

En este capítulo se analizó experimentalmente el efecto de una fuerza de Lorentz viajera sobre la superficie libre de una película delgada de electrolito, particularmente la generación de un patrón de ondas de gravedad-capilares estacionarias. La fuerza electromagnética fue creada por la interacción de una corriente eléctrica directa con un imán permanente que se mueve transversalmente a esta y se encuentra en el exterior del contenedor. Los parámetros empleados para describir al fenómeno fueron el número de Reynolds  $Re$ , calculado utilizando como velocidad característica la velocidad de movimiento del imán permanente, y un parámetro  $Q$  que caracteriza a la fuerza electromagnética aplicada, y que puede ser controlado variando la corriente eléctrica. La superficie libre se reconstruye de manera completa e instantánea mediante el método de Schlieren sintético de superficie libre [76], para lo que solamente se necesita procesar las imágenes tomadas con una cámara.

Se realizó una serie de experimentos que consisten en un barrido lineal relativamente fino, en donde se estudió la evolución del patrón de ondas manteniendo una  $Q$  fija y variando el número de Reynolds de 1,778 a 10,160. Se analizaron dos casos distintos: uno en que la fuerza de Lorentz apuntaba en la dirección de movimiento del imán y otro en que apuntaba en contra. El primero es análogo al caso en que las perturbaciones son creadas por un obstáculo sólido mientras que el otro caso no tiene un equivalente mecánico. Los patrones de ondas observados tienen características particulares de acuerdo a la dirección de la fuerza de Lorentz. Para una fuerza positiva se observó una transición en la superficie libre que inicia en una cresta principal para el régimen de bajos valores del número de Reynolds, luego una región de emisión de ondas de gravedad-capilares y finalmente se encuentra una depresión principal para números de Reynolds altos, donde solamente se observan ondas dominadas por los efectos de la gravedad. Para una fuerza negativa la transición ocurre inversamente, inicia con una depresión y termina en con cresta principal, pasando por la región de emisión de ondas de gravedad-capilares. Además, para la fuerza negativa, la emisión de ondas empieza con valores del número de Reynolds más bajos que para la fuerza orientada positivamente. Por otro lado, se encontró que para ambas fuerzas, la amplitud de

la onda persistente en el régimen de Reynolds altos decrece hasta casi desaparecer a medida que  $Re$  alcanza el valor más alto explorado. Se observó también la manera en que una fuerza orientada de manera negativa focaliza la emisión de ondas sobre una banda angosta, mientras que para una positiva se tiene un frente amplio, el cual es similar al que se genera mediante obstáculos sólidos.

Estos estudios se ampliaron mediante un barrido paramétrico bidimensional a partir del cual se generó un diagrama  $Q - Re$ , en donde se observaron los distintos comportamientos de la superficie libre, es decir, una región con menisco (cresta o depresión) en donde no hay desprendimiento de ondas pero sí deformación de la interfase, una región en donde se observan las ondas de gravedad-capilares, y una región de ondas de longitudes largas dominadas por los efectos de la gravedad. Con base en esto se identifica que para ambas configuraciones, cuando  $Q$  se incrementa, los valores de  $Re$  en los cuales ocurre el desprendimiento de ondas de gravedad-capilares disminuyen, además de que el intervalo en que estas ondas se observan aumenta. Además, para una fuerza orientada negativamente, las ondas de gravedad-capilares aparecen para valores de  $Re$  menores con respecto a la fuerza positiva, debido a la aceleración que ocurre en las líneas de estrangulamiento, propiciando así un desprendimiento prematuro de ondas. Adicionalmente se observó que el intervalo de  $Re$  en que estas ondas existen, es mayor que para la fuerza positiva.

El estudio se complementó visualizando con tinta vegetal, los patrones de flujo que se forman en la superficie libre para todos los parámetros. En ambas configuraciones se observaron vórtices para la región de números de Reynolds que dan lugar a meniscos, mientras que para la región correspondiente a las ondas de gravedad-capilares y las ondas largas, siempre se aprecian líneas de corriente abiertas.

En síntesis, el presente estudio muestra la manera en que una fuerza de Lorentz localizada es capaz de deformar la superficie libre, ya sea mediante la generación de un menisco o mediante la emisión de ondas de gravedad-capilares, las cuales son estacionarias con respecto a la fuerza de Lorentz viajera. Se tiene que para el caso de la fuerza positiva que es del tipo que se presenta en un obstáculo magnético, el patrón de ondas de gravedad-capilares es similar al del obstáculo sólido, en donde las líneas de flujo y frente de onda se distribuyen en una región amplia, mientras que la configuración para una fuerza negativa, que no tiene equivalente mecánico, las ondas superficiales son confinadas en una banda angosta.



---

# Conclusiones

---

El presente trabajo se enfocó al estudio de ondas que se propagan en fluidos eléctricamente conductores, tanto metales líquidos como electrolitos, en donde se presentan fuerzas electromagnéticas ya sea para inhibirlas o para generarlas. El interés en el estudio de los fenómenos ondulatorios en fluidos conductores, en gran medida tiene su origen en aplicaciones industriales relacionadas al procesamiento de materiales. Específicamente en la industria de los metales, en donde el consumo energético es alto y los procesos involucrados son muy complicados de manipular, las perturbaciones ondulatorias que afectan a los materiales fluidos durante su procesamiento tienen un impacto importante en el estado final de los productos [6, 7, 8]. En este ámbito, el uso de fuerzas electromagnéticas ha probado ser una alternativa muy útil debido a su naturaleza no intrusiva. Con esta motivación, se estudiaron dos casos de amortiguamiento de ondas en fluidos conductores mediante campos magnéticos externos, en el límite de número de Reynolds magnético pequeño, asumiendo flujos bidimensionales e inviscidos. Adicionalmente, se realizó un estudio experimental de la generación de ondas superficiales, en particular de ondas de gravedad-capilares, mediante fuerzas electromagnéticas localizadas y viajeras en una capa delgada de electrolito. Esta manera de generar ondas superficiales no había sido estudiada con anterioridad y presenta una alternativa para el estudio de fenómenos ondulatorios en diferentes contextos. Las ondas superficiales juegan un papel muy importante en el transporte acuático. Un ejemplo que ocurre en grandes escalas son las estelas causadas por las embarcaciones en alta mar, las cuales son responsables de grandes pérdidas energéticas y de daños ambientales [3]. Por otra parte, a escalas pequeñas las ondas de gravedad-capilares pueden ser mecanismos muy importantes de locomoción para insectos o arácnidos [4, 5].

El presente estudio inició con una discusión de las propiedades fundamentales de las ondas que se propagan en líquidos. De igual forma se presentaron las ecuaciones básicas de la MHD y la manera en que la fuerza de Lorentz modifica los flujos. Posteriormente se analizó el amortiguamiento magnético de ondas superficiales, en una capa semi-infinita de fluido de conductividad eléctrica constante y profundidad finita, limitada en la parte inferior por una pared aislante y en la superior por una superficie libre en contacto con un medio no conductor. Las ondas superficiales fueron amortiguadas empleando un campo magnético orientado un ángulo arbitrario, generalizando así trabajos previos en los que solo se había considerado campos orientados vertical u horizontalmente. Además de los efectos gravitacionales se tomaron en cuenta los efectos de tensión superficial que hasta ahora no habían sido considerados en la literatura. Se resolvió el problema de manera completa, obteniendo una relación de dispersión

general compleja, a partir de la cual se recuperaron las relaciones clásicas de la literatura para ondas de gravedad-capilares no amortiguadas. También se obtuvieron las relaciones de dispersión para casos particulares (configuraciones vertical, horizontal y orientada un ángulo  $\pi/4$ ), las cuales son expresiones más sencillas. Se analizó el factor de amortiguamiento  $\omega_i$  como función del parámetro de interacción  $N_B$ , de la profundidad  $h$  y de la orientación  $\theta$  del campo magnético. Es destacable que el incremento de la profundidad del fluido disminuye la tasa de amortiguamiento para ángulos  $\theta > \pi/4$  y lo aumenta cuando  $\theta < \pi/4$ , sin embargo, para una profundidad  $h$  fija, el amortiguamiento siempre es más intenso mientras más se aproxime el campo aplicado a la orientación vertical. De hecho, la configuración vertical para aguas poco profundas es la que tiene el tiempo mínimo de amortiguamiento, y se amortigua críticamente cuando  $N_B = 2$ , como se ha reportado en la literatura [38]. No obstante, se analizó una configuración particular, en donde el campo magnético se inclina un ángulo  $\pi/4$ , y la intensidad se incrementa por un factor de  $\sqrt{2}$ . Esta configuración también es capaz de ofrecer un amortiguamiento mínimo, pero con la ventaja de hacerlo de manera independiente de la profundidad del fluido, siempre y cuando los valores del parámetro de interacción sean pequeños ( $N_0 < 0.3$ ). Esta característica permite controlar los tiempos de amortiguamiento y es una aplicación industrial. También se encontró que la tensión superficial minimiza los tiempos de frenado para cualquier parámetro de interacción, por lo que las ondas de longitudes más cortas son las primeras en desaparecer cuando un campo magnético actúa sobre un metal líquido con superficie libre.

El segundo estudio fue enfocado al amortiguamiento de ondas internas en un fluido conductor estratificado, donde se encontró que una fuerza electromagnética no solamente es capaz de disminuir la amplitud de las ondas, sino que también afecta la dirección de propagación de la energía de las ondas mediante el mecanismo de frenado. Para esto, se consideró a un fluido con una densidad y conductividad eléctrica que decrecen de manera exponencial de modo que al aplicar campos externos, se inducen dos fuerzas de Lorentz distintas, una apuntando en la dirección vertical (paralela a la gravedad)  $F_v$ , y otra en dirección horizontal  $F_h$ . Se obtuvo la relación de dispersión correspondiente a cada caso, analizando el efecto del factor de amortiguamiento  $\omega_i$ , la frecuencia de oscilación  $\omega_r$ , la velocidad de fase  $c_f$  y la velocidad de grupo  $c_g$  en función del ángulo de propagación de las ondas  $\theta$ , longitud de onda  $\lambda$ , profundidad  $h$ , fuerza electromagnética  $N_B$  y de la fuerza de flotación  $N_0$ . Se destaca que  $F_v$  favorece el amortiguamiento para ángulos pequeños  $\theta \sim 0$ , y  $F_h$  a ángulos grandes  $\theta \sim \pi/2$ . Cuando la fuerza de Lorentz domina sobre la de flotación, ambas configuraciones tienen un amortiguamiento máximo determinado por la longitud de onda, siendo siempre las ondas cortas las primeras en ser amortiguadas. También hay que resaltar que para aguas profundas, la velocidad de fase y la velocidad de grupo tienen el mismo comportamiento que para fluidos no conductores, en donde los ángulos de propagación se relacionan de la siguiente manera  $\theta_g = -\theta_f$ , independientemente de la intensidad del campo magnético  $N_B$ ; no obstante, para aguas someras, el valor de  $\theta_g$  es afectado por la profundidad de manera similar para ambas configuraciones. Para estos casos, el campo magnético es capaz de inhibir los cambios en la dirección de

propagación de la velocidad de grupo  $\theta_g$  debidos a los efectos de la profundidad, permitiéndonos así modificar la dirección en que la energía se propaga.

En relación a la generación de ondas superficiales en una película de electrolito, se desarrolló una metodología experimental para crear y analizar patrones estacionarios de ondas de gravedad-capilares mediante a una fuerza de Lorentz localizada, ofreciendo así una manera de *controlar* estas perturbaciones y la resistencia asociada a estas. La fuerza electromagnética se generó mediante la interacción de un imán permanente en movimiento, con una corriente directa aplicada transversalmente al movimiento del imán en la capa de electrolito, de tal manera que la fuerza puede apuntar a favor de la dirección de movimiento rectilíneo uniforme del imán (fuerza orientada positivamente), o en contra de esta (fuerza orientada negativamente). El primer caso tiene similitudes con un obstáculo sólido en donde las líneas de flujo rodean la región de mayor intensidad del campo magnético, mientras que el segundo caso, no tiene un equivalente mecánico y presenta una región en donde las líneas de corriente se contraen. La superficie libre se reconstruyó de manera completa mediante el método óptico de Schlieren Sintético de Superficie Libre, y se caracterizó con los números adimensionales  $Q$  y  $Re$ , que caracterizan la intensidad de la fuerza electromagnética y la velocidad de desplazamiento del imán. Se graficó también el número de crestas presentes en cada patrón, y las amplitudes de éstas. Se obtuvieron tres patrones de ondas característicos en el intervalo ( $1500 < Re < 6500$ ). En el primer patrón se observan meniscos para valores de  $Re$  bajos ( $1500 < Re < 2500$ ) bajos, los cuales pueden ser crestas o valles para una fuerza positiva o negativa respectivamente. El segundo patrón ( $3000 < Re < 4000$ ) se caracteriza por una zona de emisión de ondas de gravedad-capilares, en donde, para una fuerza positiva, se presentan frentes de onda amplios, como ocurre para obstáculos sólidos, mientras que para una fuerza negativa se generan ondas superficiales localizadas en una región pequeña sobre la región de estrangulamiento de las líneas de corriente. El tercer patrón ( $5000 < Re < 6500$ ), la última zona ( $Re$  grandes) se compone de ondas dominadas por los efectos de gravedad, en donde se observa un valle para la fuerza positiva, y una cresta para la negativa. Se obtuvo un diagrama bidimensional  $Q - Re$ , en donde se vio que a  $Q$  más altos, las ondas de gravedad-capilares aparecen para  $Re$  más bajos, aunque su intervalo se amplía. Además, una fuerza negativa promueve la pronta aparición de ondas de gravedad-capilares, aunque se observan en un intervalo de  $Re$  menor que la fuerza positiva. Por último, además de la caracterización de la topografía de la superficie libre, mediante el uso de tinta vegetal se analizaron los patrones de flujo asociados a cada caso.

Mediante el análisis de diversos problemas, el presente trabajo ha mostrado la manera que un campo magnético es capaz de amortiguar o generar movimientos ondulatorios de manera controlada en fluidos eléctricamente conductores. Los resultados obtenidos son de interés tanto para el procesamiento de materiales como para la comprensión de fenómenos ondulatorios en distintos contextos.





---

---

# Apéndice

---



---

# LA COHESIÓN Y SUS PRIMEROS ESTUDIOS

---

No obstante que el estudio de la resistencia de onda ha sido implementado de manera activa desde finales del siglo XIX hasta nuestros días [60], periodo en el cual se han desarrollado métodos analíticos y numéricos sofisticados en esta área [77, 78, 2], los esfuerzos se han enfocando principalmente en considerar la resistencia asociada a las ondas de gravedad, ignorando así los efectos de la tensión superficial.

Si bien es cierto que algunos autores como Scott Russell [12], o Lord Kelvin [54] señalan que a pequeñas escalas, estos fenómenos son fundamentales cuando se involucran superficies libres; estos fenómenos pasaron prácticamente desapercibidos hasta finales del siglo XX [61, 66], debido en gran medida a que el tema central de esta materia era el diseño naval, en donde se buscaba minimizar el arrastre sobre las embarcaciones debido a la resistencia generada por las ondas de gravedad, omitiendo así la parte respectiva de esta resistencia asociada a las ondas capilares, dado que tienen una contribución relativa ínfima.

Este lapsus memoriae resulta bastante curioso, no solamente porque es un fenómeno cotidiano, sino también porque la fuerza gobernante, *la cohesión*, de manera similar pasó desapercibida durante los siglos XVII y XVIII, época en la cual la física tuvo un gran desarrollo (mayormente en otras áreas).

Esto es pues, motivo por lo que vale la pena hablar brevemente de las ideas alrededor de la cohesión y hacer un repaso histórico sobre la manera en que este tema se abordó en sus inicios hasta que se tuvieron las bases para entender el fenómeno de las ondas capilares.

## A.1 Conceptos

### A.1.1 Cohesión

Las fuerzas de cohesión son fuerzas intermoleculares que atraen y mantienen unidas las moléculas. La cohesión es por tanto, la propiedad intrínseca de las moléculas a estar juntas, y es dependiente de la estructura particular de cada una. Una manifestación macroscópica de las fuerzas de cohesión es la tensión superficial, la cual permite tener sistemas condensados que a su vez es responsable de varios fenómenos como la capilaridad y la formación de gotas [79].

### A.1.2 Tensión superficial

La tensión superficial  $\gamma$  (fuerza por unidad de longitud [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ]), es la propiedad física que tienen los líquidos de generar una resistencia que se opone a aumentar su superficie, implicando por tanto un gasto de energía para realizar dicha labor. Esto se debe a la previamente mencionada fuerza de cohesión, la cual tiene un efecto neto distinto sobre las partículas que se encuentran en el interior del volumen de un líquido con respecto a las que se encuentran en la superficie como puede observarse en la Fig. A.1. Ocurre, que las primeras partículas estarán rodeadas por el máximo número de vecinas posibles, lo que les permite mantener un estado de energía más bajo que las que se encuentran en la interfase al colindar con una menor cantidad. Con base en esto y el afán del sistema a tener un estado mínimo de energía, el líquido tiende a contraerse a la menor área posible en ausencia de fuerzas externas [80]. Un ejemplo de esto puede verse en los volúmenes de líquidos suspendidos, los cuales toman formas esféricas (gotas), debido a que esta geometría es la que tiene la razón superficie-volumen más baja.

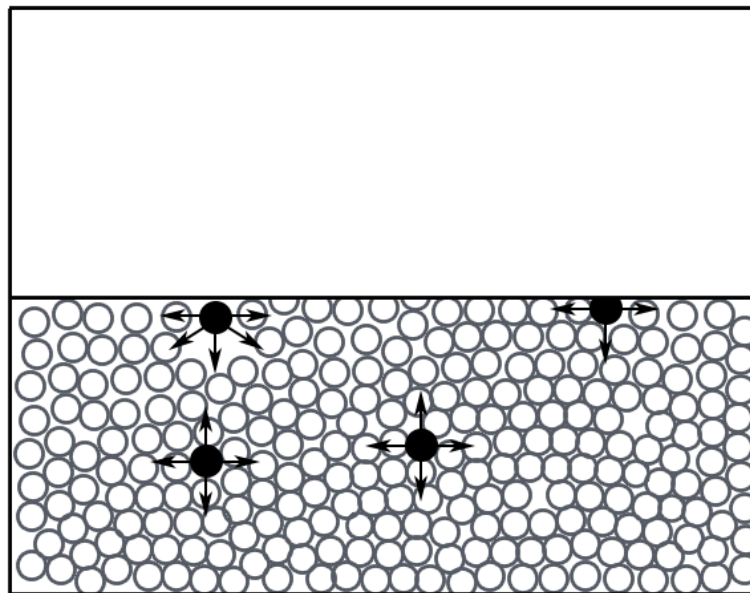


Fig. A.1: Las fuerzas Intermoleculares generan el efecto de tensión superficial en una interfase.

Si se quiere aumentar la superficie del líquido (por ejemplo, llevar moléculas del interior del fluido a la superficie), es necesario realizar un trabajo en contra de las fuerzas cohesivas. Por tanto, las moléculas que están en la superficie tendrán más energía que cuando se encuentran en el interior. Este excedente de energía en la interfase, usualmente se describe diciendo que hay una *tensión superficial* y actúa paralelamente a esta superficie, la cual se opone a cualquier intento de aumentar su área [81], permitiendo así diversos fenómenos, como la capilaridad, el efecto marangoni [82], la formación de

gotas, etc., brindando también a algunos organismos, como el mosquito zapatero (*Geris lacustris*), el escarabajo perinola (*Gyrinus substriatus*), o la larva del escarabajo de los lirios (*Pyrrhalta nymphaea*), los medios para sostenerse, escalar o desplazarse sobre la superficie del agua, entre otras cosas [83, 62, 84, 85].

## A.2 Las bases del estudio de la fuerza de cohesión

El estudio sobre la tensión superficial, a pesar de ser un concepto antiguo, ha pasado la mayor parte del tiempo de manera silenciosa [86], presentando un desarrollo más lento con respecto a otras áreas de la física. Unos de los primeros registros que se tiene fue de Leonardo da Vinci a finales del siglo XV, donde observaba el ascenso de líquidos en tubos capilares o en general a través de orificios angostos. Con base en esta idea, el término *capilar* tiene su origen en relación a que los tubos por donde debían ascender los líquidos debían ser *delgados como cabellos*, aunque actualmente el término de fenómenos capilares es usado más ampliamente, ya que no solo indica el ascenso capilar, sino también fenómenos determinados por la tendencia de las interfaces o superficies a adoptar un área mínima, tal como forma de gotas, burbujas, puentes líquidos, etc. [87].

A pesar de estas tempranas observaciones, el entendimiento de la fuerza de cohesión fue lento y oscuro en comparación con otras áreas de la física. En el siglo XVIII la rama que se llevaba casi toda la atención era la mecánica celeste, e iba tomando fuerza el electromagnetismo, quedando las respuestas respecto *qué era lo que mantenía a la materia unida* postergada. De hecho el mayor interés en estudiar las fuerzas de atracción moleculares venía relacionado con los efectos corpusculares de la luz, concretamente en la manera en que esta era atraída por la atmósfera terrestre o la materia en general; Laplace comenta la importancia de estos estudios, los cuales considera necesarios para complementar su tratado *Mécanique Céleste* [88]:

«The motion of light, in the mediums through which it passes, particularly in the atmosphere, is one of the most important objects of astronomy; whether we consider it in relation to the theory, or to its effect upon every astronomical observation. We view the heavenly bodies through a transparent medium, which, by inflecting their rays, changes their apparent positions, and makes them appear in different places from those which they really occupy.»

En efecto, relaciona estas manifestaciones de la luz a la atracción de las partículas, es decir a la fuerza de cohesión, cuya forma dice que es desconocida, pero que debe tener la condición de *ser insensible solamente a distancias sensibles*:

«the phenomena arising from the refractive power exerted by bodies upon light. This force is the result of the attraction of their particles; but the law of this attraction cannot be determined by the phenomena, because the only condition required is that it must be insensible at sensible distances.»

Y, en menor medida había un interés relacionado con los fenómenos químicos los cuales se pensaba que podían estar regidos por estas fuerzas.

Ciertamente, a principios del siglo XVIII habían algunas explicaciones de las fuerzas que mantenía junta a la materia, pero este parecía un concepto misterioso, que desconcertó a los científicos por muchos años [89, 90, 86], quienes en general, ignoraban, evadían o tocaban con cautela dicha cuestión. Newton fue uno de los primeros en abordar el problema más atinadamente, y a principios del siglo XVII sus ideas respecto a la cohesión habían ganado terreno sobre las preestablecidas, por ejemplo en *Cyclopaedia*, se plasman las 2 corrientes principales de la época. Se menciona como la postura más popular y a la vez no la más atinada, la postulada por J. Bernoulli, en donde atribuye esta fuerza a la presión atmosférica, siendo este, un enfoque incapaz de explicar la agrupación de moléculas. Por otro lado posicionan la teoría de Newton, que involucraba fuerzas atractivas fuertes a cortas distancias y débiles a medida que la separación crecía, como la más acertada [90].

Parte del pensamiento de Newton puede verse en *Principia mathematica*, en donde expone la necesidad de una fuerza distinta a las conocidas (gravitacional y electromagnética) que hace que las partículas se adhieran, aunque no explica nada al respecto, genera un avance en su época al plantear con más claridad el problema y sugerir que la fuerza de cohesión es una fuerza a distancia [89]:

«For I am induced by many reasons to suspect that they may all depend upon certain forces by which the particles of bodies, by some causes hitherto unknown, are either mutually impelled towards each other and cohere in regular figures, or are repelled and recede from each other; which forces being unknown, philosophers have hitherto attempted the search of Nature in vain.»

En donde comenta que hay una fuerza que hace que la materia se mantenga unida o que se repela a cortas distancias. Más adelante, refina su pensamiento y expone en *Opticks* de una manera bastante acertada, aunque no con la terminología adecuada respecto a la fuerza de Cohesión, sin decir aún nada respecto la naturaleza de esta, pero sí con la certeza de su existencia y gran parte de sus efectos. Sugiere que las fuerzas de cohesión, al igual que las eléctricas, magnéticas y gravitacionales son inherentes a las partículas y actúan a distancia, las cuales podían ser causantes de fenómenos asociados al comportamiento corpuscular de la luz, como refracción [91]:

«Have not the small particles of bodies certain powers, virtues, or forces, by which they act at a distance, not only upon the rays of light for reflecting, refracting, and inflecting them, but also upon one another for producing a great part of the phaenomena of Nature?.»

«For we must learn from the phaenomena of Nature what bodies attract one another, and what are the laws and properties of the attraction, before we enquire the cause by which the attraction is perform d.»

Como se ve, comenta que las leyes de atracción moleculares no eran bien conocidas y menos su naturaleza. Ya para la segunda mitad del siglo XVIII, tiempo después de su muerte, no habían habido grandes avances de sus primeros seguidores, aunque sus ideas eran más aceptadas (principalmente en la Gran Bretaña), como se puede ver en *Encyclopaedia Britannica*, en donde considera a la cohesión como una fuerza fundamental a distancia (junto con la gravitación, magnetismo y electricidad). Además le atañe acertadamente a esta fuerza fenómenos como la capilaridad, la adhesión entre superficies y formación de gotas, etc.[92].

La postura respecto a la atracción intermolecular a distancia aún no tenía certeza respecto a la naturaleza de estas fuerzas, pero había dos vertientes principales. Una de ellas consideraba que estas fuerzas eran de carácter gravitacional (ya sea con un comportamiento proporcional al inverso de los cuadrados (o mayor) a cortas distancias), mientras que la otra consideraba que se debía también fuerzas a distancia pero de otra naturaleza distinta a la gravedad (por ejemplo, eléctrica, elástica o alguna nueva), aunque en general ninguna de estas explicaciones era convincente [86]. Cabe recalcar que Newton compartía más el segundo punto de vista, pues curiosamente no consideraba a la gravedad como una propiedad de la materia [93]:

«You sometimes speak of gravity as essential and inherent to matter: pray do not ascribe that notion to me,»

No fue hasta que se tuvo más claro el concepto de tensión superficial que se tuvieron avances sustanciales. En 1802 John Leslie fortalece la idea de la acción a distancia, dado que Laplace había probado recientemente que la gravedad actúa de manera instantánea [94]. Pero fue en 1804 cuando Thomas Young logró conjuntar varias ideas para considerar el efecto de las fuerzas cohesivas en la superficie de los fluidos como una tensión superficial, produciendo así el primer tratado exitoso del ascenso capilar. Tomó de Johann Andreas Segner la idea de la tensión superficial, quien consideraba que existía solamente para superficies de curvatura variable. Extiende esto a superficies de cualquier curvatura apoyado de ideas de Monge que decía que la tensión superficial era constante en todas las direcciones [95]:

«It has already been asserted, by Mr. Monge and others, that the phenomena of capillary tubes are referable to the cohesive attraction of the superficial particles only of the fluids employed, and that the surfaces must consequently be formed into curves of the nature of linteariae, which are supposed to be the results of a uniform tension of a surface, resisting the pressure of a fluid, either uniform, or varying according to a given law»

De donde se puede apreciar que se asocian las fuerzas de cohesión con una tensión superficial la cual es encargada de resistir la presión en un fluido. Acopla esta idea con el hecho de que hay un ángulo de contacto fijo para cada par líquido-sólido:



«that for each combination of a solid and a fluid, there is an appropriate angle of contact between the surfaces of the fluid, exposed to the air, and of the solid»

Con base en esto, explicó el comportamiento de la interfase de manera cualitativa (sin utilizar expresiones algebraicas):

«It is well known, and it results immediately from the composition of forces, that where a line is equably distended, the force that it exerts, in a direction perpendicular to its own, is directly as its curvature; and the same is true of a surface of simple curvature; but where the curvature is double, each curvature has its appropriate effect, and the joint force must be as the sum of the curvatures in any two perpendicular directions. For this sum is equal, whatever pair of perpendicular directions may be employed, as is easily shown by calculating the versed sines of two equal arcs taken at right angles in the surface»

Mostrando que hay una fuerza normal a la superficie y dependiente de la curvatura de esta. Al siguiente año Laplace de manera independiente presentó esto mismo como la ecuación fundamental de su *teoría de la acción capilar* [88]:

«an equation which is evidently the differential of the fundamental equation of the theory of capillary attraction»

Expresión conocida actualmente como la *ecuación de Young-Laplace*, donde se establece una relación de la diferencia en la presión  $\Delta p$  a través de la superficie con una tensión  $\gamma$  y las curvaturas principales  $R_1$  y  $R_2$  es [86, 87]

$$\Delta p = \gamma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{A.1})$$

La aportación de Young referente al ángulo de contacto y la ecuación de Young-Laplace, brindan todos los elementos necesarios para resolver los problemas de capilaridad.

Se tiene entonces que si el efecto combinado de la gravedad con un ángulo fijo de contacto de la pared sólida con el líquido producen una superficie curvada, entonces la presión en el líquido abajo de esta superficie, debe ser mayor o menor que en el líquido en un punto remoto de la pared. Este líquido por lo tanto subirá o bajará hasta que la diferencia en la presión hidrostática compense esta diferencia en la tensión superficial inducida, siendo la altura proporcional a la curvatura.

Finalmente con la comprensión de la tensión superficial, se establecieron las bases, para que al poco tiempo se abordaran los fenómenos de las ondas capilares [12, 96].

# CÁLCULOS: ONDAS SUPERFICIALES AMORTIGUADAS

## B.1 Ángulo arbitrario

El sistema de Ecs. (2.14) se compone por las siguientes expresiones

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\tau} (-u_x \sin^2 \theta + u_y \sin \theta \cos \theta) \quad (\text{B.1b})$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\tau} (u_x \sin \theta \cos \theta - u_y \cos^2 \theta) \quad (\text{B.1c})$$

Para resolverlo se proponen soluciones en forma de ondas monocromáticas (Ecs. (2.16)), las cuales son las siguientes

$$u_1 = M(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (\text{B.2a})$$

$$v_1 = H(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (\text{B.2b})$$

$$p_1 = \rho \Pi(y)e^{i(kx+\omega t)} \quad (\text{B.2c})$$

Se busca una ecuación diferencial en términos de la variable independiente  $y$ , para lo cual se deriva la Ec. (B.1b) con respecto a  $x$ , esto es

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \left( -\frac{\partial u_1}{\partial x} \sin^2 \theta + \frac{\partial v_1}{\partial x} \sin \theta \cos \theta \right) \quad (\text{B.3})$$

que utilizando la Ec. (B.1a) se puede escribir como

$$-\frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} \sin^2 \theta + \frac{\partial v_1}{\partial x} \sin \theta \cos \theta \right) \quad (\text{B.4})$$

lo cual, si se sustituyen las ecuaciones en forma de onda, se expresa de la siguiente manera

$$\Pi = H \frac{(-i\omega\tau - \sin^2 \theta)}{k^2\tau} - \frac{iH}{k\tau} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{B.5a})$$

y, derivando esta última ecuación con respecto a  $y$  se obtiene una expresión en términos de  $\Pi(y)$  y  $H(y)$

$$\Pi = H \frac{(-i\omega\tau - \sin^2 \theta)}{k^2\tau} - \frac{iH}{k\tau} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{B.6})$$

Para obtener una ecuación que dependa solamente de  $H(y)$ , nos fijamos en la componente vertical de la velocidad (B.1c), la cual si se deriva con respecto a  $x$  toma la forma

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial v_1}{\partial x} \cos^2 \theta \right) \quad (\text{B.7})$$

se sustituye la la Ec. (B.1a) se obtiene que

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\tau} \left( -\frac{\partial v_1}{\partial y} \sin \theta \cos \theta - \frac{\partial v_1}{\partial x} \cos^2 \theta \right) \quad (\text{B.8})$$

lo cual se puede expresar de la siguiente manera si se sustituyen las soluciones en forma de onda

$$-k\omega H = -ik\Pi - H \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tau} - \frac{(ik)}{\tau} H \cos^2 \theta \quad (\text{B.9})$$

Finalmente, sustituyendo  $\Pi$  dado por la Ec. (B.6) se obtiene que

$$-k\omega H = -(ik) H \frac{(-i\omega\tau - \sin^2 \theta)}{k^2\tau} - \frac{iH}{k\tau} \sin \theta \cos \theta - H \frac{\sin \theta \cos \theta}{\tau} - \frac{(ik)}{\tau} H \cos^2 \theta \quad (\text{B.10})$$

lo cual se puede simplificar para tener una ecuación diferencial de segundo orden para  $H(y)$

$$H - \frac{2H k \sin \theta \cos \theta}{(-\omega\tau + i \sin^2 \theta)} + \frac{H(k^2\omega\tau - ik^2 \cos^2 \theta)}{(-\omega\tau + i \sin^2 \theta)} = 0 \quad (\text{B.11})$$

## CÁLCULOS : ONDAS INTERNAS EN PRESENCIA DE UN CAMPO MAGNÉTICO

### C.1 Configuración con fuerza de Lorentz vertical

Para obtener una ecuación diferencial en términos de  $\hat{v}_1(y)$  a partir del sistema de Ecs. (3.8), compuesto por las siguientes expresiones

$$\rho_0 \omega \hat{u}_1 = k \hat{p}_1 \quad (\text{C.1a})$$

$$\rho_0 i \omega \hat{v}_1 = \hat{p}_1 + \hat{\rho}_1 g + \sigma_0 B_0^2 \hat{v}_1 \quad (\text{C.1b})$$

$$\hat{u}_1(ik) + \hat{v}_1 = 0 \quad (\text{C.1c})$$

$$-i\omega \hat{p}_1 + \hat{v}_1 \frac{d\rho_0}{dy} = 0 \quad (\text{C.1d})$$

se despeja  $\hat{u}_1$  de la Ec. (C.1c)

$$\hat{u}_1 = \frac{i\hat{v}_1}{k} \quad (\text{C.2})$$

la cual se sustituye en la Ec. (C.1a) y se obtiene  $\hat{p}_1$

$$\hat{p}_1 = \left( \frac{i\omega\rho_0}{k^2} \right) \hat{v}_1 \quad (\text{C.3})$$

por lo que derivando esta última expresión se puede escribir  $\hat{p}_1$  como se muestra

$$\hat{p}_1 = \left( \frac{i\omega}{k^2} \right) \rho_0 + v_1 + \left( \frac{i\omega}{k^2} \right) \rho_0 v_1 \quad (\text{C.4})$$

Por otro lado, la perturbación de la densidad  $\hat{\rho}_1$  se despeja a partir de la Ec. (C.1d)

$$\hat{\rho}_1 = \hat{v}_1 \frac{-i}{\omega} \frac{d\rho_0}{dy} \quad (\text{C.5})$$

Con todo esto, sustituyendo las Ecs. (C.2-C.5) en la Ec. (C.1b) se llega a una expresión en función de  $\hat{v}_1$  como se detalla

$$-v_1 \frac{i\omega}{k^2} \rho_0 - \frac{i\omega}{k^2} \rho_0 v_1 + \hat{v}_1 \left( \rho i \omega - \sigma_0 B_0^2 \right) + \hat{v}_1 \left( \frac{ig}{\omega} \right) \frac{d\rho_0}{dy} = 0 \quad (\text{C.6})$$

de donde dividiendo por  $i\omega\rho_0/k^2$  se tiene que

$$\hat{v}_1 + \hat{v}_1 \left( \frac{\rho_0}{\rho_0} \right) + \hat{v}_1 k^2 \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 - \frac{i}{\omega} \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho_0} = 0 \quad (\text{C.7})$$

con  $N_f^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy}$ , siendo esta la ecuación diferencial ordinaria asociada al sistema.

## C.2 Configuración con fuerza de Lorentz horizontal

Para obtener una ecuación diferencial para  $\hat{v}_1$  a partir del sistema de Ecs. (3.21) compuesto por las siguientes expresiones

$$-\rho_0 i \omega \hat{u}_1 = -ik \hat{p}_1 - \sigma_0 \hat{u}_1 B_0^2 \quad (\text{C.8a})$$

$$-\rho_0 i \omega \hat{v}_1 = -\hat{p}_1 - \hat{p}_1 g \quad (\text{C.8b})$$

$$ik \hat{u}_1 - i \omega \hat{v}_1 = 0 \quad (\text{C.8c})$$

$$-i \omega \hat{p}_1 + \hat{v}_1 \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.8d})$$

$$(\text{C.8e})$$

se puede despejar  $\hat{p}_1$  de la Ec. (C.8a)

$$\hat{p}_1 = \hat{u}_1 \frac{\omega \rho_0}{k} + \frac{i \sigma_0 B_0^2}{k} \quad (\text{C.9})$$

y de la Ec. (C.8c) se puede obtener  $\hat{u}_1$

$$\hat{u}_1 = -\frac{\hat{v}_1}{k} \quad (\text{C.10})$$

con la finalidad de que sustituyendo la Ec. (C.10) en la Ec. (C.9) se pueda expresar  $\hat{p}_1$  en términos de  $\hat{v}_1$

$$\hat{p}_1 = \left( \frac{i \hat{v}_1}{k} \right) \frac{\omega \rho_0}{k} + \frac{i \sigma_0 B_0^2}{k} \quad (\text{C.11})$$

y derivando  $\hat{p}_1$  con respecto a  $y$  se obtiene

$$\hat{p}_1 = \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( i\omega\rho_0 - \sigma_0 B_0^2 \right) + \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( i\omega \frac{d\rho_0}{dy} - \frac{d\sigma_0}{dy} B_0^2 \right) \quad (\text{C.12})$$

Por otro lado de la Ec. (C.8d) se puede obtener una relación para  $\hat{p}_1$

$$\hat{p}_1 = - \frac{i\hat{v}_1}{\omega} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \quad (\text{C.13})$$

obteniendo así de la Ec. (C.8b) que

$$\rho_0(-i\omega)\hat{v}_1 = -\hat{p}_1 - \hat{\rho}_1 g \quad (\text{C.14})$$

y a partir de la Ec. (C.13) se sustituye  $\hat{p}_1$

$$\rho_0(i\omega)\hat{v}_1 = \hat{p}_1 - \left( i \frac{\hat{v}_1}{\omega} \frac{d\rho_0}{dy} \right) g \quad (\text{C.15})$$

Por último se sustituye  $\hat{p}_1$  de acuerdo a la Ec. (C.12) quedando todo en términos de  $\hat{v}_1$

$$\rho_0(i\omega)\hat{v}_1 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \frac{gi}{\omega} \right) \hat{v}_1 = \frac{\hat{v}_1}{k^2} (i\omega\rho_0 - \sigma_0 B_0^2) + \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( i\omega \frac{d\rho_0}{dy} - \frac{d\sigma_0}{dy} B_0^2 \right) \quad (\text{C.16})$$

esto es

$$\hat{v}_1 \left( i\omega - i \frac{N_f^2}{\omega^2} \right) = \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( i\omega - \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho_0} \right) + \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( \frac{i\omega}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} - \frac{d\sigma_0}{dy} \frac{B_0^2}{\rho_0} \right) \quad (\text{C.17})$$

con  $N_f^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy}$ , lo cual se simplifica y se obtiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( 1 + \frac{\sigma_0 B_0^2}{\rho_0} \frac{i}{\omega} \right) + \frac{\hat{v}_1}{k^2} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dy} + \frac{i}{\omega} \frac{d\sigma_0}{dy} \frac{B_0^2}{\rho_0} \right) + \hat{v}_1 \left( \frac{N_f^2}{\omega^2} - 1 \right) = 0 \quad (\text{C.18})$$

### C.3 Velocidad de fase y velocidad de grupo

En las siguientes gráficas se muestra la velocidad de fase y la velocidad de grupo en la dirección  $k$  y  $l$  como función de  $\theta^>$ , que es el ángulo de propagación  $\theta$  normalizado por  $\pi$ . En donde se observa que para la configuración con fuerza de Lorentz vertical, la componente  $l$  de la velocidad de fase ( $c_{f,l}$ ) decrece de valores grandes hasta ser cero cuando  $\theta = \pi/2$  (ver Fig. C.1b), mientras que para la dirección  $k$  ( $c_{f,k}$ ) llega asintóticamente a un valor dado que depende de los parámetros (ver Fig. C.1a). Las velocidades de grupo tienen comportamientos similares en ambas direcciones (ver Figs.C.1d y C.1c).

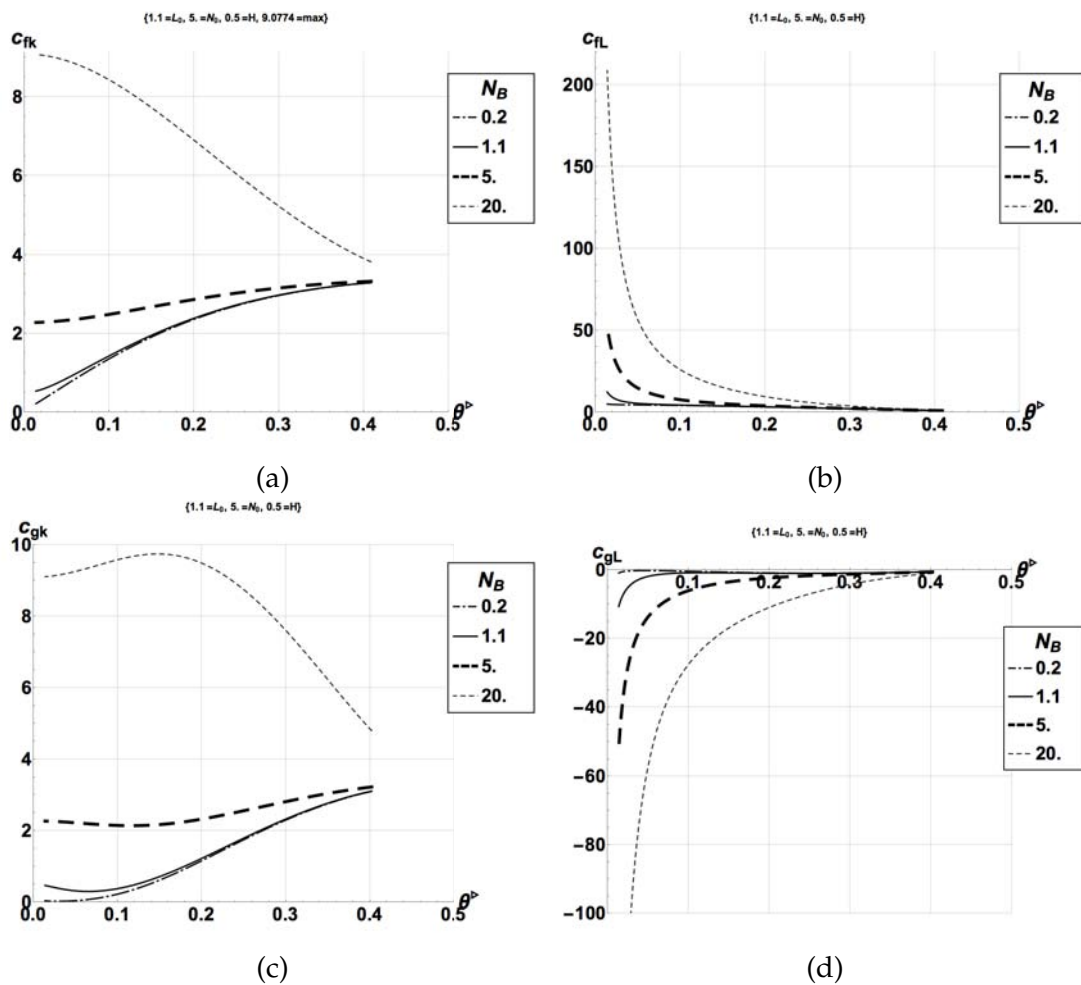


Fig. C.1: Configuración con fuerza de Lorentz vertical. Velocidad de fase  $c_f$  y velocidad de grupo  $c_g$  como función del ángulo de fase normalizado  $\theta^>$  para ondas una longitud de onda  $1.1\text{ m}$  y una frecuencia boyante  $N_f = 5$  para distintos parámetros de interacción  $N_B$  en aguas poco profundas  $kH = 0.57$ . (a)  $c_f$  para la componente  $k$ . (b)  $c_f$  para la componente  $l$ . (c)  $c_g$  para la componente  $k$ . (d)  $c_g$  para la componente  $l$ .

Por otro lado para la configuración con fuerza de Lorentz horizontal,  $c_{f,l}$  decrece de un valor alto para ángulos pequeños hasta cero cuando  $\theta = \pi/2$  (ver Fig. C.2b), mientras que para  $c_{f,k}$  se tiene un comportamiento que parte de cero y termina en cero con un único máximo (ver Fig. C.2a). Las velocidades de grupo también tienen un comportamiento similar (ver Figs. C.2d y C.2c).

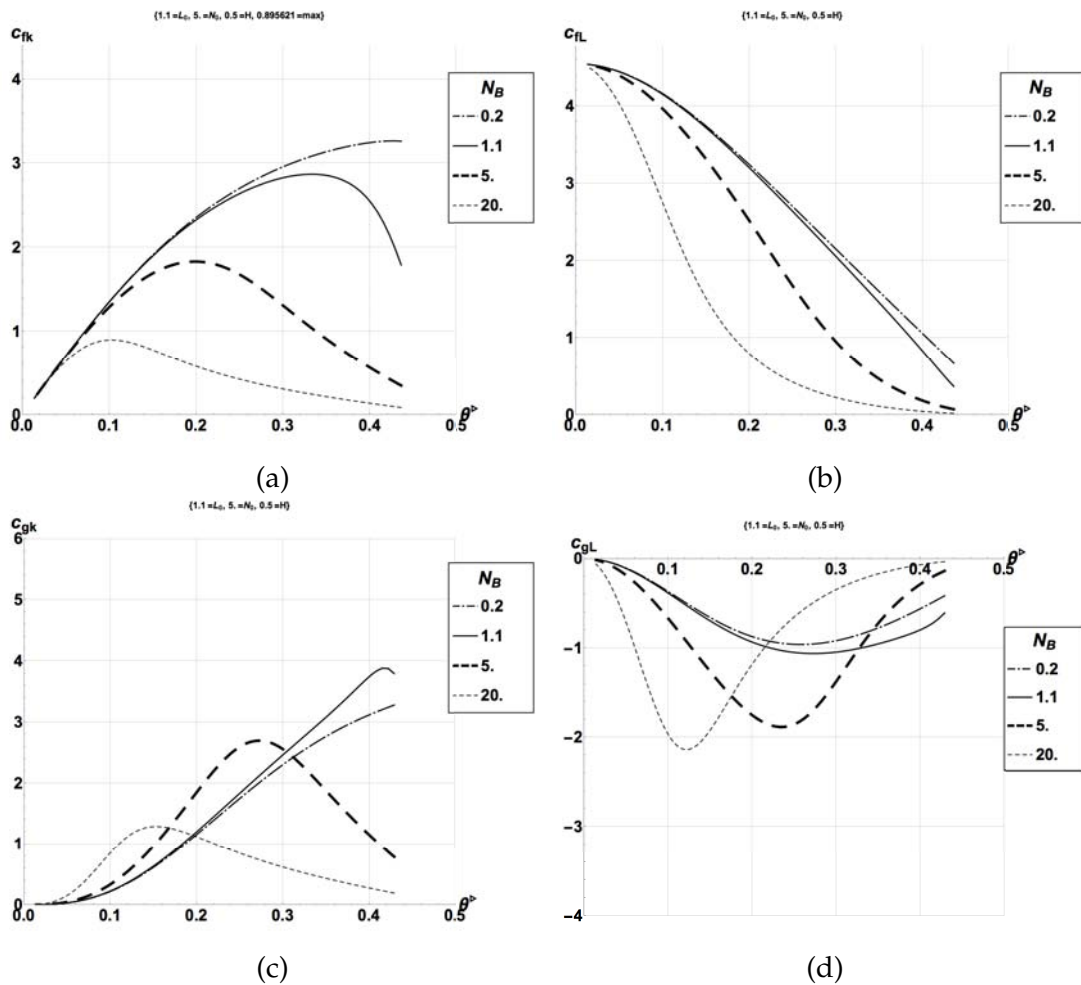


Fig. C.2: Configuración con fuerza de Lorentz horizontal. Velocidad de fase  $c_f$  y velocidad de grupo  $c_g$  como función del ángulo de fase normalizado  $\theta^p$  para ondas una longitud de onda  $1.1 \text{ m}$  y una frecuencia boyante  $N_f = 5$  para distintos parámetros de interacción  $N_B$  en aguas poco profundas  $kH = 0.57$ . (a)  $c_f$  para la componente  $k$ . (b)  $c_f$  para la componente  $l$ . (c)  $c_g$  para la componente  $k$ . (d)  $c_g$  para la componente  $l$ .





## Bibliografía

- [1] T. Burghlea and V. Steinberg, "Wave drag due to generation of capillary-gravity surface waves," *Physical Review E*, vol. 66, p. 051204, 2002.
- [2] C. Lee, B. W. Lee, Y. J. Kim, and K. O. Ko, "Ship wave crests in intermediate-depth water," in *Proceedings of the 6th International Conference on Asian and Pacific Coasts*, pp. 1818–1825, 2011.
- [3] T. Soomere, "Nonlinear Components of Ship Wake Waves," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 60, no. 3, pp. 120–138, 2007.
- [4] O. Bühler, "Impulsive fluid forcing and water strider locomotion," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 573, pp. 211–236, 2007.
- [5] D. L. Hu, B. Chan, and J. W. M. Bush, "The hydrodynamics of water strider locomotion," *Nature*, vol. 424, no. 6949, pp. 663–666, 2003.
- [6] S. Asai, "Birth and recent activities of electromagnetic processing of materials," *ISIJ international*, vol. 29, pp. 981–992, 1989.
- [7] S. Asai, "Recent development and prospect of electromagnetic processing of materials," *Science and Technology of Advanced Materials*, vol. 1, pp. 191–200, 2000.
- [8] S. Asai, "Overview of electromagnetic processing of materials," in *Magneto-hydrodynamics*, pp. 315–327, Springer, 2007.
- [9] H. B. Löfgren and H. O. Akerstedt, "Damping mechanisms of perturbations in electromagnetically braked horizontal film flows," *Fluid Dynamics Research*, vol. 26, pp. 53–68, 2000.
- [10] P. Rivat, J. Etay, and M. Garnier, "Stabilisation of a surface wave by a magnetic field," *European journal of mechanics B*, vol. 10, pp. 537–551, 1991.
- [11] W. T. Choate and J. A. Green, *US energy requirements for aluminum production: Historical perspective, theoretical limits and new opportunities*. US Department of Energy, Energy Efficiency and Renewable Energy, 2003.
- [12] J. S. Russell, "Report on waves," in *Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, pp. 311–391, 1844.
- [13] M. E. McIntyre, "On the wave momentum myth," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 106, pp. 331–347, 1981.
- [14] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*. Pure and applied mathematics, John Wiley & Sons, 1999.
- [15] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 2. Adison-Wesley, 1963.

- [16] J. Lighthill, *Waves in Fluids*. Cambridge University Press, 2001.
- [17] D. J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press, 1990.
- [18] V. G. Ivancevic and D. J. Reid, "Turbulence and shock-waves in crowd dynamics," *Nonlinear Dynamics*, vol. 68, no. 1-2, pp. 285–304, 2011.
- [19] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [20] J. Fenton, "Coastal and Ocean Engineering," *Viena: Institut d enginyeria hidràulica*, 2010.
- [21] J. Sommeria, S. D. Meyers, and H. L. Swinney, "Experiments on vortices and Rossby waves in eastward and westward jets," *Nonlinear Topics in Ocean Physics*, vol. 109, pp. 227–269, 1991.
- [22] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, 9 ed., 2009.
- [23] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*. Pearson Addison Wesley, 6 ed., 2006.
- [24] A. R. Paterson, *A First Course in Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Nov. 1983.
- [25] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. 1. Addison Wesley, 1963.
- [26] H. Lamb, *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 6 ed., 1932.
- [27] I. H. Shames, *Mechanics of Fluids*. McGraw-Hill Professional, 2003.
- [28] I. G. Currie, *Fundamental mechanics of fluids*. Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [29] P. A. Davidson, *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, Mar. 2001.
- [30] P. H. Roberts, *An introduction to magnetohydrodynamics*. Longmans, 1967.
- [31] S. Asai, *Electromagnetic Processing of Materials*. Springer, 2012.
- [32] A. Bojarevics, T. Beinerts, M. Sarma, and Y. Gelfgat, "Arrays of Rotating Permanent Magnet Dipoles for Stirring and Pumping of Liquid Metals," *Journal for Manufacturing Science and Production*, vol. 15, pp. 35–39, 2015.
- [33] H. B. Löfgren and H. O. Akerstedt, "Electromagnetic braking of the flow of a liquid metal with a free surface," *Fluid Dynamics Research*, vol. 23, pp. 1–25, 1998.
- [34] H. Harada, E. Takeuchi, M. Zeze, and H. Tanaka, "MHD analysis in hydromagnetic casting process of clad steel slabs," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 22, pp. 873–882, 1998.

- [35] P. Davidson, "Magnetic damping of jets and vortices," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 299, pp. 153–186, 1995.
- [36] P. Davidson, "Magnetohydrodynamics in materials processing," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 31, pp. 273–300, 1999.
- [37] L. E. Fraenkel, "A Shallow-Liquid Theory in Magnetohydrodynamics," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 7, no. 1, pp. 81–107, 1960.
- [38] B. Sreenivasan, P. A. Davidson, and J. Etay, "On the control of surface waves by a vertical magnetic field," *Physics of Fluids*, vol. 17, no. 11, p. 117101, 2005.
- [39] G. Alcala, M. Rivero, and S. Cuevas, "Effect of the magnetic field orientation on the damping of liquid metal free surface waves in the processing of materials," *Applied Thermal Engineering*, vol. 75, pp. 1296–1301, Jan. 2015.
- [40] J. S. Walker, D. M. Audet, G. Talmage, S. H. Brown, and N. A. Sondergaard, "Effects of magnetic field orientation on a liquid-metal free surface in a sliding electrical contact," *Journal of Applied Physics*, vol. 71, no. 8, pp. 3713–3720, 1992.
- [41] G. Alcala, "Ondas superficiales en líquidos conductores bajo campos magnéticos," Master's thesis, UNAM, 2010.
- [42] G. Alcala, S. Cuevas, and E. Ramos, "Effect of fluid depth and magnetic field orientation on the damping of surface waves," in *Proceedings of the 8th International PAMIR Conference on Fundamental and Applied MHD*, pp. 267–271, 2011.
- [43] J. E. Hatch and A. Association, *Aluminum: properties and physical metallurgy*. ASM International, 1984.
- [44] N. B. Morley, J. Burris, L. C. Cadwallader, and M. D. Nornberg, "GaInSn usage in the research laboratory," *Review of Scientific Instruments*, vol. 79, no. 5, p. 056107, 2008.
- [45] A. D. Chave, "On the Electromagnetic Fields Induced by Oceanic Internal Waves," *Journal of Geophysical Research*, vol. 89, pp. 10519–10528, 1984.
- [46] W. E. Avera, Gallacher, P.C., W. J. Teague, R. Liang, and J. B. Nelson, "Magnetic noise associated with ocean internal waves," in *OCEANS 2009, MTS/IEEE Biloxi - Marine Technology for Our Future: Global and Local Challenges*, pp. 1–4, IEEE, 2009.
- [47] W. H. Hooke, "The ionospheric response to internal gravity waves: 1. The F2 region response," *Journal of Geophysical Research*, vol. 75, pp. 5535–5544, 1970.
- [48] T. M. Rogers and K. B. MacGregor, "On the interaction of internal gravity waves with a magnetic field - II. Convective forcing," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 410, pp. 946–962, Oct. 2010.

- [49] E. Raphaël and P. deGennes, "Capillary gravity waves caused by a moving disturbance: Wave resistance," *Physical Review E*, vol. 53, no. 4, pp. 3448–3455, 1996.
- [50] T. Burghelea and V. Steinberg, "Onset of wave drag due to generation of capillary-gravity waves by a moving object as a critical phenomenon," *Physical review letters*, vol. 86, no. 12, p. 2557, 2001.
- [51] J. V. Poncelet and J. A. Lesbros, *Experiences Hydrauliques Sur Les Lois de L'écoulement de l'eau*. Memoire lu a l'academie des sciences, Nov. 1829.
- [52] J. S. Russell, "Experimental Researches into the Causes of Certain Hydrodynamical Phenomena that accompany the Motion of Floating Bodies, and have not previously been reduced into conformity with the known Causes of the Resistance of Fluids," *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, vol. XIV, pp. 47–109, 1840.
- [53] W. Thomson, "XLVI. Hydrokinetic solutions and observations," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 42, no. 281, pp. 362–377, 1871.
- [54] W. Thomson, "Ripples and waves," *Nature*, vol. 5, pp. 1–2, 1871.
- [55] C. L. Vaughan and M. J. O Malley, "Froude and the contribution of naval architecture to our understanding of bipedal locomotion," *Gait & Posture*, vol. 21, pp. 350–362, Apr. 2005.
- [56] L. Rayleigh, "The form of standing waves on the surface of running water," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 1, no. 1, pp. 69–78, 1883.
- [57] W. T. B. Kelvin, "On ship waves," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 38, no. 1, pp. 409–433, 1887.
- [58] T. Havelock, "Wave resistance: Some cases of three-dimensional fluid motion," *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 95, no. 670, pp. 354–365, 1919.
- [59] F. S. Crawford, "Elementary derivation of the wake pattern of a boat," *American Journal of Physics*, vol. 52, no. 9, pp. 782–785, 1984.
- [60] M. I. Shliomis and V. Steinberg, "Surface gravity waves due to a moving body: Onset of wave resistance as a critical phenomenon," *Physical review letters*, vol. 79, no. 21, pp. 4178–4181, 1997.
- [61] J. Browaeys, J. C. Bacri, R. Perzynski, and M. I. Shliomis, "Capillary-gravity wave resistance in ordinary and magnetic fluids," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 53, no. 2, pp. 209–215, 2001.
- [62] J. W. M. Bush and D. L. Hu, "Walking on water: biolocomotion at the interface," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 38, pp. 339–369, 2006.

- [63] H. Bleckmann and M. Bender, "Water surface waves generated by the male pisaurid spider *Dolomedes triton* (Walckenaer) during courtship behavior," *Journal of Arachnology*, pp. 363–369, 1987.
- [64] D. Richard and E. Raphaël, "Capillary-gravity waves: The effect of viscosity on the wave resistance," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 48, pp. 49–52, 1999.
- [65] F. Chevy and E. Raphaël, "Capillary-gravity waves: a "fixed-depth" analysis," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 61, pp. 796–802, 2003.
- [66] A. Chepelianskii, F. Chevy, and E. Raphaël, "Capillary-Gravity Waves Generated by a Slow Moving Object," *Physical review letters*, vol. 100, p. 074504, Feb. 2008.
- [67] F. Closa, A. D. Chepelianskii, and E. Raphaël, "Capillary-gravity waves generated by a sudden object motion," *Physics of Fluids*, vol. 22, no. 5, p. 052107, 2010.
- [68] M. Le Merrer, C. Clanet, D. Quere, E. Raphaël, and F. Chevy, "Wave drag on floating bodies," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 108, pp. 15064–15068, Sept. 2011.
- [69] S. Cuevas, S. Smolentsev, and M. Abdou, "On the flow past a magnetic obstacle," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 553, pp. 227–252, Apr. 2006.
- [70] E. V. Votyakov, Y. Kolesnikov, O. Andreev, E. Zienicke, and A. Thess, "Structure of the Wake of a Magnetic Obstacle," *Physical review letters*, vol. 98, p. 144504, Apr. 2007.
- [71] E. V. Votyakov and S. C. Kassinos, "On the analogy between streamlined magnetic and solid obstacles," *Physics of Fluids*, vol. 21, p. 097102, 2009.
- [72] H. Honji, "Wavy wake formation in the absence of submerged bodies in electrolyzed salt water," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 60, no. 4, pp. 1161–1164, 1991.
- [73] H. Honji and Y. Haraguchi, "Electrolytically induced quasi-two-dimensional vortex pairs," *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 64, pp. 2274–2277, 1995.
- [74] Y. D. Afanasyev and V. N. Korabel, "Wakes and vortex streets generated by translating force and force doublet: laboratory experiments," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 553, pp. 119–141, Apr. 2006.
- [75] G. Alcala and S. Cuevas, "Surface Waves Generated on Electrolytes by a Traveling Electromagnetic Force," in *Experimental and Computational Fluid Mechanics*, pp. 369–378, Springer, 2014.
- [76] F. Moisy, M. Rabaud, and K. Salsac, "A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface," *Experiments in Fluids*, vol. 46, pp. 1021–1036, Jan. 2009.

- [77] E. O. Tuck, "The wave resistance formula of J.H. Michell (1898) and Its significance to recent research in ship hydrodynamics," *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, vol. 30, p. 365, Feb. 1988.
- [78] J. H. Milgram, "Fluid mechanics for sailing vessel design," *Annual review of fluid mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 613–653, 1998.
- [79] P. M. S. Monk, *Physical Chemistry. Understanding our Chemical World*, John Wiley and Sons, Mar. 2008.
- [80] I. Levine, *Fisicoquímica*. McGraw-Hill, 4 ed., 1996.
- [81] W. J. Moore, *Physical Chemistry Moore*. Prentice Hall, 4 ed., June 1972.
- [82] R. Tadmor, "Marangoni flow revisited," *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 332, pp. 451–454, Apr. 2009.
- [83] D. Vella and L. Mahadevan, "The "cheerios effect"," *American Journal of Physics*, vol. 73, pp. 817–825, 2005.
- [84] J. Voise and J. Casas, "The management of fluid and wave resistances by whirligig beetles," *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 7, pp. 343–352, Dec. 2009.
- [85] D. L. Hu and J. W. M. Bush, "Meniscus-climbing insects," *Nature*, vol. 437, pp. 733–736, Sept. 2005.
- [86] J. S. Rowlinson, *Cohesion: A Scientific History of Intermolecular Forces*. Cambridge University Press, Sept. 2002.
- [87] J. Lyklema, *Fundamentals of Interface and Colloid Science: Liquid-liquid interfaces*. Academic Press, 2000.
- [88] P. S. Laplace, *Mecanique Celeste*, vol. 4. Charles C. Little and James Brown, 1839.
- [89] I. Newton, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Daniel Adee, 1729.
- [90] E. Chambers, *Cyclopaedia Or, An Universal Dictionary of Arts and Sciences*. 1728.
- [91] I. Newton, *Opticks: or, a treatise of the reflexions, refractions, in reflexions and colours of light*. 1730.
- [92] C. Macfarquhar and A. Bell, *Encyclopaedia Britannica; or, a dictionary of arts and sciences, compiled upon a new plan*, vol. 3. 1771.
- [93] I. Newton, *Four Letters from Sir Isaac Newton to Doctor Bentley Containing Some Arguments in Proof of a Deity*. Kessinger Publishing, LLC, Sept. 2010.
- [94] J. Leslie, "On capillary action," *The Philosophical Magazine: Comprehending the Various Branches of Science, The Liberal and Fine Arts, Agriculture, Manufactures, and Commerce*, vol. 14, no. 55, pp. 193–205, 1802.

- 
- [95] T. Young, "An Essay on the Cohesion of Fluids," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 95, pp. 65–87, Jan. 1805.
- [96] J. S. Russell and J. Robison, *Report Of The Committee On Waves: Appointed By The British Association At Bristol In 1836 [and Consisting Of Sir John Robison And John Scott Russell]*. R. and J. E. Taylor, 1838.