



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

***EL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO BAJO LOS ENFOQUES  
SUBJETIVO, FRECUENCIAL Y CLÁSICO DE LA PROBABILIDAD: UNA PROPUESTA  
DIDÁCTICA***

**TESIS**

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**PRESENTA**

**HUGO MAEL HERNÁNDEZ TREVETHAN**

**TUTOR: MTRO. ALEJANDRO RAÚL REYES ESPARZA**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN**

**MÉXICO, D. F., FEBRERO 2016**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*Al azar... que tanto me ha dado.*

## ÍNDICE

Resumen	6
Abstract	7
Introducción	8
I.1 Contexto - Problemática	9
I.2 Justificación	10
I.3 Objetivos	11
I.3.1 Objetivos generales	12
I.3.2 Objetivos específicos	12
I.4 Preguntas de investigación	12
I.5 Estructura	13
Capítulo 1: Marco Referencial	15
1.1 El Plan de Estudios Reestructurado	16
1.2 Concepción de la Matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades	20
1.3 Características de la población estudiantil	26
Capítulo 2: Marco Conceptual	31
2.1 El currículo como herramienta de trabajo	32
2.2 Los materiales curriculares	33
2.3 El trabajo en el aula con materiales	37
2.4 La investigación educativa en las aulas	39
2.4.1 El aprendizaje por descubrimiento	41
2.5 Los materiales y la enseñanza	43
2.5.1 Formas de comunicar	44
2.5.2 Modos de controlar lo que se aprende y lo que se enseña	46

2.5.3 Depósito del método y de la profesionalidad	46
2.5.4 El material didáctico como producto	48
2.6 La evaluación de los materiales	50
2.6.1 Política de elaboración y difusión	51
2.6.2 La naturaleza de los materiales	52
2.6.3 El uso de los materiales	53
2.6.4 ¿Cómo realizar la evaluación?	54
2.7 La formación de los profesores	55
2.7.1 Materiales orientados hacia el proyecto curricular	59
2.7.2 Materiales orientados a la práctica en el aula	60
2.7.3 Los materiales en el marco del proyecto curricular	60
2.8 El currículo como guía de las actividades educativas	62
Capítulo 3: La propuesta didáctica	65
3.1 Ubicación de los enfoques de la Probabilidad y del Cálculo de Probabilidades	66
3.2 Propósitos, aprendizajes y contenidos que debe cumplir la propuesta	71
3.3 La propuesta didáctica	73
3.4 La propuesta de aprendizaje	75
Capítulo 4: Análisis de la propuesta didáctica	77
4.1 Implementación o aplicación de la propuesta	78
4.1.1 Introducción	78
4.1.2 Filosofía de la Probabilidad	81
4.1.3 Resolución de Problemas	86
4.1.4 Material concreto	90
4.1.5 Simulación computacional	92

4.1.6 Secuencia didáctica	94
4.1.7 Discusión con el grupo	101
4.2 Los resultados de la aplicación de la propuesta	104
4.3 Observaciones	106
Conclusiones	107
Referencias	111
Anexos	115
A.1 Propuesta didáctica	116
A. 2 Propuesta resuelta	134

### ***Índice de figuras***

<i>Figura 1</i>	91
-----------------	----

## **RESUMEN**

*El razonamiento probabilístico es una capacidad difícil de alcanzar. En el presente trabajo se propone una secuencia didáctica, en la que se trabaja con simulación física y virtual y desde los tres enfoques de la probabilidad, que busca apoyar el desarrollo de este tipo de razonamiento en estudiantes de último año de bachillerato. Se presenta la aplicación realizada a un grupo de alumnos de quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, describiendo el proceso y algunos de los resultados observados. Se espera que la secuencia y las evidencias de desarrollo de razonamiento probabilístico logrado con su aplicación sean de utilidad para los docentes en Probabilidad a nivel medio superior.*

*Palabras clave: Razonamiento probabilístico, enfoques de probabilidad, resolución de problemas.*

## **ABSTRACT**

*The probabilistic reasoning is a capacity hard to achieve. In this document, a didactic sequence aiming to support the development of the probabilistic reasoning on senior high school students, and in which they work with physical and virtual simulation and from the three different definitions of probability, is proposed. The application made to a group of senior high school students of the Colegio de Ciencias y Humanidades of the National Autonomous University of Mexico is presented, describing the process and some of the observed results. It's expected that the sequence and the evidences of development on the probabilistic reasoning aimed with it may be useful for the teachers of Probability at the high school.*

*Key words: Probabilistic reasoning, definitions of probability, problem solving.*



## **INTRODUCCIÓN**

## **I.1 Contexto - Problemática**

Si bien la enseñanza de la Probabilidad por muchos años se dirigió meramente a los procesos para el cálculo de probabilidades de eventos, esta visión se ha modificado, privilegiándose ahora el desarrollar el razonamiento probabilístico, enfocarse en la toma de decisiones bajo condiciones de azar o incluso en potenciar la capacidad de realizar inferencias, informales o formales, o hasta predicciones fundamentadas en la información que el propio cálculo de valores de probabilidad pueda dar.

Adicionalmente, los investigadores en Educación Estadística han señalado en diversas ocasiones que el nivel de aprendizaje que los alumnos de diferentes niveles educativos tienen en Probabilidad es bajo, y que esto mismo puede observarse entre el grueso de la población prácticamente en todo el mundo; pruebas de esto pueden encontrarse en las memorias de diferentes eventos enfocados al tema, como los son ICOTS (International Conference on Teaching Statistics) o los congresos del ISI (International Statistics Institute). Y hay que hacer notar que en la UNAM, y específicamente en el Colegio de Ciencias y Humanidades, este fenómeno se presenta de igual manera; basta revisar los datos sobre el egreso en este subsistema del bachillerato universitario para tomar cuenta de que las asignaturas de Estadística y Probabilidad se encuentran entre las de mayor índice de reprobación.

## **I.2 Justificación**

A partir de las ideas arriba expuestas, pasa a ser relevante en la educación estadística el tener herramientas didácticas que permitan a los estudiantes desarrollar su capacidad de razonamiento probabilístico, entendida esta como la capacidad para la estimación de la probabilidad de ocurrencia de un evento en función del conocimiento y la información que tengamos a nuestra disposición y que permita una interpretación inteligente y razonada de los resultados, además del cálculo de probabilidades, así como para la realización de juicios bajo condiciones de incertidumbre (Abreu, 2015).

En ese sentido, se presentan aquí una secuencia didáctica que pretende promover el razonamiento probabilístico entre estudiantes del último año de bachillerato, así como algunos resultados de su aplicación. Esta secuencia fue diseñada para el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, y aplicada a estudiantes del plantel Naucalpan, y presenta una serie de toma de decisiones dentro del contexto de juegos de dados.

Igualmente, y en el espíritu de promover el aprendizaje de la probabilidad desde el enfoque frecuentista, al tiempo que se atienden las recomendaciones respecto al uso de la tecnología en el aula para apoyar el alcance de este tipo de conocimiento por parte de los alumnos, la propuesta incluye el uso del paquete Fathom, diseñado para la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad.

La secuencia propone problemas a los estudiantes, que deben ser abordados desde los enfoques subjetivo, frecuencial y clásico de la probabilidad, al tiempo que les permite utilizar herramientas computacionales para simular los juegos de dados presentados, lo que puede fomentar la modelación de los fenómenos aleatorios. Como parte final, se pide a los estudiantes diseñar un problema semejante a los abordados, con el fin de evaluar su nivel de comprensión de los conceptos involucrados en la secuencia.

Debe puntualizarse que, si bien en algún punto de la secuencia los estudiantes estarán en la situación de tener que realizar cálculos aritméticos para el cálculo de probabilidades, esto no es el objetivo que se busca alcanzar. La secuencia justamente pretende rebasar este abordaje de la probabilidad, meramente mecanicista, a favor del razonamiento probabilístico.

### **I.3 Objetivos**

La intención en el presente trabajo no solamente es la descripción del proceso de elaboración y de aplicación de una estrategia didáctica encaminada a desarrollar el razonamiento probabilístico en estudiantes de quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, sino también el proponer una vía que apoye a los estudiantes de la materia de Estadística y Probabilidad en el CCH con el desarrollo de su razonamiento probabilístico.

### **I.3.1 Objetivo general**

Proponer una secuencia didáctica para el curso de Estadística y Probabilidad I en el Colegio de Ciencias y Humanidades, que apoye al desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes.

### **I.3.2 Objetivo específico**

Promover el desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades que cursen la asignatura de Estadística y Probabilidad I, a partir de la aplicación de una secuencia didáctica que aborda los tres enfoques de la probabilidad, subjetivo, clásico y frecuencial, trabajando los contenidos disciplinarios a través de la simulación física y computacional, fomentando adicionalmente el uso de la computadora en el aprendizaje de la Probabilidad.

### **I.4 Preguntas de investigación**

La propuesta de secuencia didáctica está basada sobre la metodología de Resolución de Problemas de Polya, y utiliza dados con diferentes números de lados para presentar o recordar algunos conceptos de las probabilidades Clásica, Subjetiva y Experimental, así como ayudar a los alumnos en la toma de decisiones acudiendo justamente al razonamiento probabilístico.

Dentro del análisis final, y sobre la base de los resultados observados al aplicar la secuencia didáctica, se buscará dar respuesta a esta pregunta: ¿Existe alguna

evidencia de que, tras la aplicación de la secuencia didáctica, los alumnos muestren algún nivel de razonamiento probabilístico?

## **I.5 Estructura**

En cuanto a su estructura, el presente trabajo está integrado por cuatro capítulos, las conclusiones que se derivan de los mismos y por un anexo, partes que a continuación se describen.

En el primer capítulo se realiza una descripción del Plan de Estudios Ajustado y de los programas de las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II del Colegio de Ciencias y Humanidades, CCH; se expresa la concepción de la Matemática que se tiene en el CCH; y se dan algunos datos característicos de la población estudiantil a la que se dirigen tanto los programas como el Plan de Estudios.

En el segundo capítulo se parte de considerar el currículo como una herramienta de trabajo de los profesores y la importancia de los materiales como una manera en la que el currículo escolar es desarrollado: después se procede a describir cómo se realiza el trabajo en el aula con los materiales, lo cual genera la posibilidad de probarlos en el salón de clases; posteriormente, se habla de la relación que existe entre los materiales y la enseñanza para arribar a la necesidad de una evolución de los mismos; finalmente, se discute la formación de profesores a través de la elaboración de los materiales, en tanto ello los vuelve partícipes del desarrollo de un programa.

El tercer capítulo corresponde a la descripción de la estrategia didáctica elaborada, ubicando en el Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades y en los Programas de Estudios de las asignaturas a los enfoques de la Probabilidad y al Cálculo de probabilidades. Se describe el propósito, aprendizajes y contenidos que debe cumplir la propuesta y finalmente se realiza una descripción de la estrategia.

En el cuarto capítulo se muestra el proceso de implementación o aplicación de la estrategia, se describen los resultados obtenidos y se realiza un breve comentario al respecto.

En las conclusiones se mencionan algunos juicios que se pueden derivar para explicar que la propuesta de enseñanza de los enfoques de la Probabilidad es susceptible de ser aplicada en el Colegio de Ciencias y Humanidades, además de que se expresan algunas ideas a través de las cuales se podría continuar con el proceso de enseñanza en el área de la Estocástica.

En los Anexos se incluyen la estrategia didáctica que se elaboró y un ejemplo de los resultados de su aplicación.

## **CAPITULO 1**

### **MARCO REFERENCIAL**



## **1.1 El Plan de Estudios Reestructurado**

En el año de 1997 se realizó una revisión del Plan de Estudios que el Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México venía utilizando desde su establecimiento en 1971.

Esta revisión generó un nuevo Plan de Estudios, al que se denominó Plan de Estudios Actualizado, y que fue representado con las siglas de PEA; este nuevo Plan de Estudios modificó de manera determinante la orientación y el contenido de las asignaturas que se imparten en el área de matemáticas, pero conservó la idea de que la enseñanza debía estar regida por el principio de Aprender a Aprender como el mecanismo más eficaz para contribuir a la formación profesional futura de los alumnos del ciclo bachillerato.

La aplicación del Plan de Estudios Actualizado trajo como consecuencia que en la práctica los profesores que impartían las asignaturas de Matemáticas en los diferentes planteles no culminaran los programas respectivos debido a dos razones centrales: la primera corresponde a la insuficiencia en los tiempos, dada la extensión de los contenidos en cada una de las siete unidades que conformaban los programas del tronco común; en el caso de las asignaturas para quinto y sexto semestre la extensión de los programas en unidades era menor, pero aún así los tiempos eran insuficientes. La segunda corresponde a la falta de experiencia de algunos profesores en el diseño y planeación de las actividades en el aula para desarrollar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Posteriormente, en el año de 2001 se realizó una revisión del Plan de Estudios Actualizado a partir de la experiencia generada por los 4 años de aplicación. Esto dio lugar al Plan de Estudios Ajustado, o igualmente PEA, que se encuentra vigente.

En el Plan de Estudios Ajustado se conservó la orientación y el enfoque del Plan de Estudios Actualizado pero se disminuyeron los contenidos que se debían tratar en cada asignatura del tronco común, al reducir de siete a cinco el número de unidades temáticas a desarrollarse durante cada semestre escolar. Dentro de los temas que se retiraron de los programas de Matemáticas de los primeros cuatro semestres, se encontraban aquellos que eran propios de la estadística y la probabilidad. Igualmente se revisó la cantidad de temas y la profundidad de su tratamiento en las asignaturas de quinto y sexto semestres.

El cambio fundamental que se da en el nuevo Plan de Estudios es modificar la orientación establecida en el Plan Original de basar los programas sobre los contenidos temáticos, para basarlos sobre aprendizajes. Estos aprendizajes se clasificaron dentro de ejes temáticos:

“En los cuatro primeros semestres del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, se incluyen los cursos obligatorios del área de Matemáticas que los estudiantes deberán acreditar y que abarcan los conocimientos básicos de cinco importantes ejes de desarrollo temático: **Álgebra, Geometría Euclidiana, Trigonometría, Geometría Analítica y Funciones**. A través de estos cuatro

cursos, se brinda al alumno un panorama de los principales aspectos del conocimiento y del quehacer matemático que le permitirán acceder posteriormente a conocimientos más especializados, tanto en el ámbito de estos mismos ejes temáticos como en el de otros, entre los que están incluidos el Cálculo Diferencial e Integral y la Probabilidad y Estadística” (Preisser et. al., 2002, p.6).

Ello permite que los primeros cuatro cursos se puedan contemplar como un todo, tal y como se indica en el documento señalado anteriormente: “Estos cuatro cursos constituyen un todo en su conjunto, de modo que de un semestre a otro se recuperan conocimientos adquiridos previamente, ya sea trabajándolos desde otro nivel de profundidad y extensión, o remitiéndose a su aplicación en otro contexto o temática, o incluso abordándolos desde una nueva perspectiva (por ejemplo, el estudio analítico de los objetos geométricos)” (Preisser y otros, 2002, p. 3).

Así mismo, se propone que en el transcurso de estos cuatro cursos obligatorios, así como en los siguientes dos cursos, se ponga mayor énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos y en el desarrollo de habilidades matemáticas, tal y como se expresa en el documento citado:

“Además, en concordancia con los principios educativos del Colegio, más que privilegiar la memorización de un cúmulo de contenidos matemáticos (subdivididos en muchas ocasiones en múltiples casos y fórmulas especiales) y la repetición de definiciones o la práctica irreflexiva de algoritmos, interesa poner énfasis en el

significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos, en el tránsito de un registro a otro y en el desarrollo de habilidades matemáticas; entre estas últimas están: Generalización (percibir relaciones, formas y estructuras; distinguir lo relevante de lo irrelevante y lo común de lo diferente); Formalizar “Material Matemático” (operar con estructuras más que con el contexto de una situación, operar con numerales y símbolos, combinando reglas y estrategias); Reversibilidad de Pensamiento (invertir una secuencia de operaciones o un proceso de pensamiento); Flexibilidad de Pensamiento (disponibilidad para abandonar estereotipos o procedimientos en los que se ha tenido éxito para utilizar otros nuevos); Visualización Espacial (percibir esquemas geométricos contenidos en otros más complejos, o bien adelantar mentalmente el tipo de figura resultante al aplicar algún movimiento o transformación a una figura dada)” (Preisser y otros, 2002, p. 4).

Esta serie de consideraciones fueron retomadas en el proceso de Revisión y Ajuste para las asignaturas de quinto y sexto semestre. Específicamente, para las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II, se presentan una serie de aportaciones que el estudio de esta materia dará a los estudiantes que la cursen: “El proceso educativo en la materia Estadística y Probabilidad contribuye a la formación de la personalidad del alumno, el desarrollo de sus habilidades intelectuales y la evolución de sus formas de pensamiento mediante la adquisición de conocimientos, valores y actitudes, entre otros:

- El conocimiento y aplicación de los criterios de validez en el campo científico.

- El empleo de diversas formas de pensamiento reflexivo, particularmente de tipo analógico, inductivo y deductivo.
- La incorporación de la visión no determinista de los fenómenos aleatorios, que coadyuve a una mejor comprensión de su entorno.
- La valoración del conocimiento científico en diferentes campos del saber.
- La lectura y comprensión de textos diversos, particularmente científicos, escolares o de divulgación.
- La reflexión sobre planteamientos de tipo estadístico de los medios masivos de comunicación.
- La capacidad de aprender de manera autónoma.
- La incorporación de nuevas formas de expresión matemática a su lenguaje y modos de argumentación habituales.
- La comprensión del significado de los conceptos, símbolos y procedimientos estocásticos correspondientes al nivel de bachillerato
- El fortalecimiento de la seguridad en sí mismo y de su autoestima, a partir de la correcta aplicación de los conocimientos adquiridos” (Ávila et. al., 2004, p. 7).

## **1.2 Concepción de la Matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades**

En particular, en el Colegio de Ciencias y Humanidades “la concepción de la Matemática conlleva una intención del para qué queremos enseñarla y cómo contribuye a la formación de un sujeto capaz de buscar y adquirir por si mismo

nuevos conocimientos, además de analizar e interpretar el mundo que lo rodea de manera reflexiva, analítica, sistemática y constructiva” (Preisser et. al., 2002, p. 5).

Por ello se considera que la Matemática como disciplina:

- **“Posee un carácter dual:** Es una ciencia y una herramienta. Como ciencia tiene un desarrollo que admite titubeos, conjeturas y aproximaciones, al igual que rigor, exactitud y formalidad, por ser el producto de una actividad humana que evoluciona, construye, organiza y sistematiza conocimientos, a partir de la necesidad de resolver problemas teóricos o prácticos. Como herramienta, constituye un poderoso instrumento que contribuye con técnicas, procedimientos, métodos y teorías a la obtención de conocimientos y sus aplicaciones en diversos campos del saber, tanto humanístico como científico y tecnológico.
- **Manifiesta una gran unidad.** No obstante la diversidad de ramas y especialidades en las que actualmente se divide, éstas presentan métodos, principios y estrategias comunes. Muchos de los conceptos y procedimientos de cualesquiera de sus ramas, se vinculan, complementan o trabajan desde otro punto de vista a través de las otras partes que la integran.
- **Contiene un conjunto de simbologías propias** bien estructuradas, sujetas a reglas específicas (simbología numérica, geométrica, algebraica, por ejemplo) que permiten establecer representaciones de distinto nivel de generalidad sobre características, propiedades, relaciones, comportamientos, leyes, etc. Aspecto

que contribuye a avanzar en su construcción como ciencia y a extender el potencial de sus aplicaciones” (Preisser et. al., 2002, p. 6).

En el caso de la materia de Estadística y Probabilidad también se considera:

- “Guiar al estudiante para que conciba a la Probabilidad y a la Estadística como disciplinas que comprenden conceptos, técnicas y métodos que permiten interpretar diversos tipos de información para la toma de decisiones.
- La Estadística y la Probabilidad deberán mostrarse como ramas de la Matemática que se aplican a diversos campos del conocimiento, aproximándose al estudio de los fenómenos aleatorios con la finalidad de caracterizarlos y de realizar predicciones sustentadas en modelos matemáticos” (Ávila et. al., 2004, p. 6).

Aunado al mencionado carácter dual de la Matemática, en el Colegio de Ciencias y Humanidades también se pretende generar el desarrollo de habilidades del pensamiento que posibiliten al alumno avanzar por su cuenta en la adquisición de otros conocimientos. Por lo que se propone que en la práctica educativa se consideren los siguientes elementos:

- “Introducir el estudio de los contenidos mediante el planteamiento de situaciones o problemas que no contemplan de inicio fuertes dificultades operatorias, de modo que la atención pueda centrarse en el concepto, el procedimiento o las características y propiedades que se van a estudiar.

- Analizar los enunciados de los diferentes problemas planteados, de manera conjunta estudiante-profesor, con la finalidad de que el alumno adquiera paulatinamente esta habilidad y con el tiempo sea capaz de realizarla de manera independiente.
- Proporcionar diversos ejemplos, con la intención de presentar numerosas oportunidades para que el alumno atienda el desarrollo conceptual, practique los procedimientos básicos y atienda la mecánica de los mismos a partir de ideas o estrategias unificadoras.
- Promover la formación de significados de los conceptos y procedimientos, cuidando que éstos surjan como necesidades del análisis de situaciones o de la resolución de problemas, y se sistematicen y complementen finalmente con una actividad práctica de aplicación en diversos contextos. Las precisiones teóricas se establecerán cuando los alumnos dispongan de la experiencia y los ejemplos suficientes para garantizar su comprensión.
- Propiciar sistemáticamente el tránsito tanto entre distintas formas de representación matemática, como entre éstas y la expresión verbal.
- Enfatizar las conexiones entre diversos conceptos, procedimientos, métodos y ramas de la Matemática.
- Fomentar el trabajo en equipos para la exploración de características, relaciones y propiedades tanto de conceptos como de procedimientos; la discusión razonada, y la comunicación oral y escrita de las observaciones o resultados encontrados” (Preisser et. al., 2002, pp. 6-7).



Además de estos enfoques didácticos generales para el área de Matemáticas, en la materia de Estadística y probabilidad se establece que:

- “El profesor deberá propiciar la socialización del trabajo entre los estudiantes y la discusión tanto en equipo como grupal de las diversas ideas estocásticas. Deberá fomentar las formas de expresión oral y escrita para lograr un mayor dominio de la lengua castellana, lo que redundará en una mejor comprensión y organización de ideas y argumentos.
- El profesor deberá diseñar actividades para proporcionar al alumno experiencias de aprendizaje, de preferencia contextualizadas, que le permitan acceder a las fuentes del fenómeno aleatorio, le proporcionen información para ser tratada estadísticamente y lo confronten con las dificultades metodológicas en las etapas de captura, procesamiento, interpretación y predicción. La construcción de muestras y el empleo de instrumentos como cuestionarios y encuestas breves pueden ser de gran utilidad.
- Los aprendizajes deberán alcanzarse fundamentalmente a través de la resolución de problemas, proporcionando oportunidades para que el estudiante aplique los procedimientos básicos, equilibrando este aspecto con los desarrollos conceptuales. De ser necesario, las precisiones teóricas deberán establecerse cuando los alumnos adquieran la experiencia suficiente para garantizar su comprensión.
- Es pertinente que el profesor continuamente consulte el programa, en particular el rubro de aprendizajes relevantes, los que deberán ser compartidos cotidianamente con los estudiantes para su reflexión y aplicación.

- El profesor deberá diseñar actividades de aprendizaje que utilicen las nuevas tecnologías, tales como la calculadora y la computadora, como un apoyo para el aprendizaje significativo de los alumnos” (Ávila et. al., 2004, pp. 6-7).

Con los enfoques disciplinarios y didácticos, descritos anteriormente, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, se pretende que los egresados completen su formación matemática en los dos últimos semestres del bachillerato a través de la oferta que se hace de materias semioptativas del Área de Matemáticas; estas materias son Cálculo Diferencial e Integral, Cibernética y Computación, y Estadística y Probabilidad. En el caso de los alumnos que decidan cursar esta última, se espera que al final del ciclo escolar estén capacitados para:

- “Analizar, representar e interpretar el comportamiento de un conjunto de datos extraídos de una población.
- Definir en un estudio estadístico a la población, elegir la muestra y establecer la variable de estudio.
- Construir modelos de correlación que determinen la relación entre dos variables de una misma población.
- Construir el modelo de una situación o fenómeno que involucra aleatoriedad, y utilizar los conocimientos adquiridos sobre funciones de distribución de probabilidad para analizar e incluso predecir el comportamiento de dicha situación o fenómeno.

- Valorar el concepto de función de distribución de probabilidad para la representación, estudio y análisis de situaciones y fenómenos físicos, biológicos y sociales que involucran aleatoriedad.
- Calcular e interpretar estadísticos de una muestra extraída de la población, para construir intervalos de confianza para la media y la proporción e inferir el valor del parámetro.
- Construir una prueba de hipótesis para la media y la proporción de la población” (Preisser et. al., 2005, p. 17).

Una vez que se ha descrito de manera general en qué consisten los programas de las cuatro primeras asignaturas del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades y las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II, en lo que respecta a las Matemáticas, a la caracterización de que se analizarán éstos a través de ejes temáticos, de los enfoques didácticos y disciplinarios, y lo que se espera que los egresados puedan lograr, en el eje temático de Probabilidad, es necesario dar una descripción breve de la población estudiantil con la que se llevarán a la práctica tanto los programas de las asignaturas como el Plan de Estudios en su conjunto.

### **1.3 Características de la población estudiantil**

La población estudiantil con la que se va a desarrollar e instrumentar el Plan de Estudios en su conjunto y los programas de las asignaturas en lo particular, está conformada por jóvenes de ambos sexos cuyas edades de ingreso

al Colegio de Ciencias y Humanidades no superan los 15 años en más del 75% de los casos, independientemente de que puedan existir alumnos con una edad de ingreso mayor a los 20 años (Muñoz et. al., 2005, p. 17). Consecuentemente, para los estudiantes inscritos en la materia de Estadística y Probabilidad, dado que se cursa en los últimos dos semestres de bachillerato, la edad es, mayoritariamente, de alrededor 17 años.

En general los alumnos del CCH viven en la zona metropolitana de la Ciudad de México, y dependiendo el Plantel al que asistan, en las zonas habitacionales más cercanas a éste. Por ejemplo, en el Plantel Naucalpan, donde se aplicó la propuesta de estrategia didáctica a analizar, aproximadamente un 80% de los estudiantes provienen de municipios conurbados al Distrito Federal, como son los municipios de Naucalpan de Juárez, Tlalnepantla de Baz, Atizapán de Zaragoza, Cuautitlán Izcalli, Cuautitlán, Tultitlán, Ecatepec y Coacalco, en el Estado de México.

Se ha podido determinar que las familias de los alumnos están integradas por los padres y 2 o 3 hijos; que el nivel de escolaridad de los padres es mayoritariamente de primaria y secundaria; y que el ingreso económico familiar es de uno a seis salarios mínimos (Muñoz et. al., pp. 20, 23, 24, 33). Sin embargo, es necesario señalar que también se presentan casos distintos en los que las familias están desintegradas, cuyos padres no tienen estudios menores a la primaria o que su ingreso es distinto al señalado arriba.

En un nivel informal, los alumnos reconocen que dedican una o dos horas al estudio de los contenidos temáticos analizados en los procesos de enseñanza-aprendizaje que se desarrollaron en las aulas y que dedican más tiempo a ver la televisión o a “navegar” en Internet.

Por otra parte, debemos tomar también en cuenta que el periodo de la adolescencia, por el que atraviesan los estudiantes, es un periodo emocional, mental, social y físicamente complicado. En dicha etapa los jóvenes necesitan encontrar vías de acceso a su integración al mundo de los adultos. Este proceso implica para el individuo una crisis que compromete las diversas áreas de su vida; existe una lucha por la progresiva independencia de los padres, los conflictos propios de la inserción en grupos sociales nuevos y cada vez más amplios, etcétera.

Todo lo anterior supone un cierto grado de desorganización de las estructuras previas de la personalidad, y que hace vivir a los estudiantes periodos de confusión, inestabilidad emocional y conductas contradictorias; el sentimiento de identidad es altamente fluctuante y sólo se consolidará a través de una reelaboración de tales conflictos previos. Estos difíciles procesos de cambio pueden dar lugar a manifestaciones patológicas específicamente relacionadas con ellos, y las dificultades pueden afectar a las tres áreas fundamentales en las que se desarrolla la vida del individuo psico-biológico: el área mental, el área del cuerpo y el área de la relación con el mundo externo. Así, dichas dificultades podrán expresarse a través de una problemática vinculada con el estudio

(dificultades de concentración, dispersión, apatía), de trastornos relacionados con el esquema del cuerpo y sus funciones (anorexia, indefinición sexual), o perturbaciones en relación con el medio (conductas antisociales, delincuencia, toxicomanías). Se entiende que, aunque las dificultades se manifiesten predominantemente en una de las tres áreas, siempre están todas implicadas. Como consecuencia de esto último, debemos ser conscientes de que, si bien como institución educativa nos interesa primordialmente todo aquello relacionado con el estudio, no debe de perderse la visión global de los conflictos propios de la adolescencia, ya que estos incidirán directamente en el desempeño académico de los alumnos.

Una vez que se conoció el Plan de Estudios y los programas de las asignaturas de Estadística y Probabilidad II, así como las características de la población estudiantil en las que se van a desarrollar, se analizó la forma en que se debería instrumentar con los estudiantes de manera tal que permitiera que éstos obtuvieran e hicieran suyos los contenidos temáticos que deben desarrollarse en estos semestres.

Una de las dificultades iniciales que se obtuvo al revisar los programas de las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II corresponde a los materiales didácticos. Si se considera que es a través de ellos como se expresa el enfoque y el contenido temático, pocos permiten realmente instrumentar y desarrollar el currículo, en virtud de que no son del todo apegados al Modelo Educativo del CCH; de hecho, en los programas de estudio hay prácticamente una nula

referencia a los materiales producidos en el Colegio, debido en parte a la poca socialización de los mismos, aún a pesar de los diferentes espacios que la Institución ofrece para ello. Además, en la propuesta de ajuste se puso mucho énfasis en desarrollar las capacidades de razonamiento estadístico, razonamiento probabilístico y la correcta interpretación de resultados aleatorios, por encima de la capacidad operativa.

Por ello, en el siguiente capítulo se presentan el conjunto de elementos que se consideraron importantes para la elaboración de una propuesta didáctica. Y en el capítulo tres detallaremos más específicamente las orientaciones seguidas en aras de desarrollar, por medio de la propuesta, el razonamiento probabilístico en los estudiantes de la materia de Estadística y Probabilidad.

## **CAPITULO 2**

### **MARCO CONCEPTUAL**



## 2.1 El currículo como herramienta de trabajo

Al revisar el currículo del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México con el objeto de desarrollar materiales y propuestas didácticas que mejor se adapten al modelo educativo del CCH, es indispensable partir, como señala José Contreras Domingo (1986, p. 45), de que “un currículum supone siempre, de forma explícita o tácita, una respuesta a las preguntas **qué enseñar, cómo y por qué**. Cuando un profesor asume una propuesta curricular, ya sea de buen grado o no, ya sea de creación propia o ajena, está asumiendo una forma de responder a las exigencias de su trabajo, esto es, una forma de resolver lo que debe hacer en clase con los alumnos”.

Por ello es factible ubicar al currículo como la guía del quehacer educativo de los profesores que forman parte de la institución y lo que determina su labor docente, como lo señala Contreras (1986, p. 45): “Es en este sentido en el que digo que el currículum es la herramienta de trabajo de un oficio que no se realiza sólo por la capacidad de disponer de instrumental con el que operar, sino también con la capacidad de tener respuestas a preguntas.

Por eso mismo, podemos hablar también del currículum como del problema profesional con el que se encuentran todos los profesores. En definitiva, lo que uno anda buscando siempre, como si fuera la piedra filosofal, es aquella manera de plantearse la acción de enseñanza que contenga todas aquellas virtudes educativas que le pedimos a la práctica de nuestro trabajo”.

Estas ideas se enlazan necesariamente con la intencionalidad de lograr que los egresados del ciclo bachillerato obtengan un conocimiento en el área de las matemáticas que les sea útil en su futuro profesional. Es decir, se debe valorar, la forma de instrumentar el Plan de Estudios en general y los programas de las asignaturas en particular, considerando, lo que señala Contreras:

“Cómo conseguir que lo que se aprende en la escuela tenga un valor para los alumnos más allá de las paredes del aula. Qué contextos de relación en el aula hacen posible que aprender sea una actividad con un orden manejable, pero no aburrido. Qué actividades pueden tener la capacidad de intrigar al alumno y de enseñarle a la vez algo valioso. Todos éstos son problemas educativos con los que siempre se enfrenta un profesor, y suelen ser también algo a lo que trata de responder, con mayor o menor fortuna, todo proyecto curricular” (1986, p. 45).

## **2.2 Los materiales curriculares**

Una manera decisiva de incidir en la calidad de la enseñanza es ofrecerle al profesor un modo alternativo de desarrollar sus clases, presentándole una propuesta de actividades a desarrollar con una cierta selección de conocimiento y determinados materiales. Se espera que los profesores, al seguir las sugerencias que hacen estos proyectos, mejorarán la calidad del aprendizaje de sus alumnos así como la calidad de su enseñanza. Esta mínima descripción genérica ha dado lugar, sin embargo, a muy diferentes tipos de materiales curriculares.

Por ejemplo, si antes hemos hablado de una doble característica del currículum, como herramienta y como problema, un tipo muy usual de materiales son aquéllos que presentan lo que tienen de herramienta, pero dicen poco acerca de los problemas que intentan resolver. Es un currículum que intenta funcionar como un instrumento; se supone que sabiendo cómo funciona obtenemos de él lo que es capaz de darnos. En este caso, el currículum se expresa en el repertorio de actividades y materiales y en lo que podríamos llamar las instrucciones de uso: especificación de actuaciones, pasos y procedimientos ya decididos que se pretende que el profesor aplique. Lo más habitual es que este tipo de materiales se justifique ante sus posibles usuarios por su capacidad de conseguir resultados de aprendizaje.

Es decir, se supone que su valor estriba en que si los profesores lo usan, sus alumnos aprenderán más y mejor aquello que se pretende enseñar mediante tales materiales.

Es de este modo también como los profesores suelen difundir proyectos y materiales curriculares entre sí: una narración del «cómo se hace». Indudablemente, es necesario disponer del conocimiento de los pasos a seguir o de la traducción en actividades y tareas de cualquier proyecto. Sin embargo, si un currículum es una respuesta a un problema educativo, al no expresar la naturaleza del problema que se trata de abordar —es decir, cuáles son los valores educativos que tales sugerencias de actuación permitirían desarrollar— sino sólo qué hay que

hacer y cómo, se dificulta en extremo la posibilidad por parte del profesor de entender el significado de lo que hace y reconducir su práctica.

Algunas preocupaciones a las que los mismos materiales tratan de dar muchas veces respuesta no están sólo en los aprendizajes sino en la forma en que se aprende, en los valores que en sí tienen las experiencias de relación y de actividad, tanto para el profesor como para los alumnos. Es decir, los materiales deben considerar en su elaboración el enfoque disciplinario y didáctico que contiene el programa de estudios de una asignatura y de un Plan de Estudios.

Que una actividad deje de ser aburrida dependerá de si nuestros alumnos concretos se aburren o no; no es algo que está en la esencia de la actividad, sino en la reacción de los alumnos como consecuencia de su relación con la actividad.

La actividad tiene que estar en relación con lo que entiende el profesor y con cómo lo interpreta en el transcurso de las clases. Un material puede ayudar a pensar sobre estas cuestiones y convertirlas en problemas educativos a analizar, pero no las puede resolver por sí mismo.

Cuando en una propuesta curricular no se revisa de manera continua la relación existente entre la selección de conocimiento que establece, las actividades que sugiere y los materiales que usa, con el tipo de conocimiento que quiere favorecer, el contexto de relaciones que busca promover, las actitudes que quiere impulsar, las contradicciones que pueden aparecer en su desarrollo, las

dificultades que hay que afrontar y las situaciones en las que hay que buscar nuevas posibilidades, genera la posibilidad de que los profesores puedan expresar únicamente un tipo de valoración:

Esta valoración consiste en expresar juicios positivos o negativos acerca del funcionamiento de la propuesta curricular; estos juicios dependerán, generalmente, de un criterio en el que se excluye su papel en el proceso de enseñanza aprendizaje ya que la variable sólo evalúa a partir de los resultados obtenidos, pero sin realizar un análisis de cuáles son los factores que los determinaron.

Podemos saber, por tanto, que un procedimiento no funciona o no consigue los resultados esperados, pero no sabemos por qué, cómo reconducir nuestra práctica. Cuando no funciona un método, demandamos otro y ya está. No podemos, por consiguiente, aprender de nuestra experiencia, porque nuestra herramienta de trabajo nos lo impide.

Los elementos anteriores parecen conducir a la conclusión de que lo determinante para la instrumentación adecuada de un currículo es que éste actúe por sí sólo como una solución mágica a los problemas educativos y que el profesor deba únicamente completarlo en el salón de clases. Esto, sin embargo, desgraciadamente todavía no se ha elaborado y cuando ello ocurra, si llega a ocurrir, se eliminarán los problemas de enseñanza aprendizaje en la Matemática en cualquier nivel escolar.

Puesto que no hay soluciones mágicas en la enseñanza, los elementos anteriores deben conducir a realizar una propuesta de enseñanza en la que se expresen los conocimientos y los modos de actividad de forma que le dé una coherencia a los valores educativos, y de manera tal que los elementos que la integran puedan plantearse como problemas para que el profesor pueda analizar y valorar la capacidad real que manifiestan los estudiantes en la práctica para mejorar lo que pretenden obtener.

### **2.3 El trabajo en el aula con materiales**

También es importante considerar cuáles son los recursos con los que cuenta un profesor para el desarrollo de su actividad en las aulas y lo que emerge es que, aparentemente, cuenta únicamente con una bibliografía recomendada en el programa de estudios, y de la cual varios de los textos recomendados hacen alusión a los contenidos temáticos sin contemplar las ideas implícitas en el enfoque disciplinario y didáctico con el que se diseñó el programa.

Esto es, existe una carencia de materiales que impide a los profesores desarrollar adecuadamente los cursos que se les han asignado, ya que, como señala Jaime Martínez B. (1986, p. 12), los “profesores y alumnos dependen en gran medida, para el desarrollo de su actividad en las aulas, de un conjunto organizado de materiales que en la mayoría de los casos se diferencian por «áreas» curriculares y que incluyen normalmente una relación de objetivos que se quieren conseguir, el contenido temático de la disciplina o área de conocimiento,

las actividades apropiadas del profesor y de los alumnos, así como las respuestas correctas que éstos deben producir, e incluso algunas pruebas de evaluación sobre los productos del aprendizaje. Tales materiales constituyen pre elaboraciones de la práctica de la enseñanza, que facilitan y simplifican la tarea docente”.

Aunado a lo anterior es necesario contemplar que el profesor debe cumplir con el desarrollo del currículo a lo largo del ciclo escolar y esto, como señala Jaime Martínez B. (1986, p. 12), “tiene de traducción en un determinado modelo de exigencias profesionales a los profesores, (que) no se corresponde a menudo con la formación de que se les dota y las condiciones del contexto de realización del trabajo”.

Ante esta situación existen dos alternativas para contar con los materiales educativos: los elaboran las compañías editoriales o los profesores. En el caso de la primera opción conduce de manera intrínseca a lo siguiente:

Una editorial o empresa externa se encarga de la elaboración de materiales curriculares como forma de acercamiento del nivel prescriptivo a un mayor y diferente nivel de concreción práctica. Esto conlleva a que los objetivos, procesos y criterios de evaluación que contempla un determinado conjunto de materiales han sido definidos por personas ajenas a la situación. Sería incompleto el análisis si no hiciéramos referencia al hecho de que las escuelas son un importante mercado lucrativo. Los materiales curriculares constituyen un fuerte volumen de

capital que genera importantes beneficios. Consecuentemente, ello va a producir comportamientos empresariales regidos por esa lógica del beneficio: publicidad, creación de necesidades donde no las hay, encarecimiento, caducidad, burocratización y centralización de recambios y adaptaciones, agresividad comercial, etcétera. Y, obviamente, la homologación de los elementos y la forma de un producto según la lógica del beneficio.

En el caso de la segunda opción es necesario resaltar la idea de la alienación del conocimiento profesional de los profesores mediante una determinada forma de estructuración del currículum en materiales para uso en las aulas. Con ello se está indicando igualmente la fuerte vinculación entre el desarrollo práctico del currículum y la construcción del pensamiento práctico de los profesores.

#### **2.4 La investigación educativa en las aulas**

En efecto, un importante ámbito de la investigación educativa viene mostrando la presencia en los contextos prácticos de experiencias de innovación curricular centradas en la investigación de los profesores sobre formas alternativas de presentación y uso del material curricular.

Si se parte de la definición de currículum generada por Stenhouse, señalada por Martínez (1986, p. 12): “una tentativa para comunicar los principios y rasgos esenciales de un propósito educativo, de forma tal que permanezca abierto a discusión crítica y pueda ser trasladado efectivamente a la práctica”.



De la definición de Stenhouse se desprende que el currículum es un proyecto o una hipótesis de trabajo sobre el conjunto de experiencias educativas que ofrece la escuela, que ello tiene implicaciones morales y que deberá someterse al juicio reflexivo de los prácticos durante el proceso de desarrollo práctico. Además se puede derivar que los profesores deben investigar su acción pedagógica para construir sobre ella un conocimiento profesional autónomo o, dicho de otra manera, para hacer teoría ligada a la práctica y hacer una práctica teórica.

Una manera de generar algunas experiencias educativas es considerar que los profesores, como colectivo profesional, deben participar en la discusión sobre los criterios de elaboración del material, para que el producto se pueda someter a un proceso de investigación-evaluación en la práctica cotidiana.

Esto posibilitará crear materiales que permitan un tratamiento diferenciado en función de las características del contexto de aplicación, así como la posibilidad de ser modificados, ampliados, corregidos, etc. por los profesores y los alumnos durante el proceso de aplicación. Materiales de este tipo pueden ser elaborados por el propio profesor o por algún grupo de profesores, en la medida de sus posibilidades podrán abarcar una unidad temática, un curso o un área de conocimiento completa, con lo que se crea una propuesta alternativa en la Institución.

Habría que insistir en *cualquier material que se elabore, independientemente de lo innovador que sea se debe someter a programas sistemáticos de investigación de los profesores en las escuelas*, lo que viene a replantear la idea del trabajo de los docentes de manera que se pueda concebir la idea del centro escolar como unidad de renovación pedagógica.

A su vez no puede existir una renovación pedagógica por medio de los materiales sin un programa paralelo de investigación-formación que comprometa al profesorado en el modelo de desarrollo curricular que concretan los materiales.

Por lo que, se debe entender que los materiales son, entonces, instrumentos de formación profesional, en la medida que sitúen al profesor de un modo activo ante dilemas prácticos y le obliguen a tomar decisiones reflexionadas que deberá contrastar con las de otros colegas.

#### **2.4.1 El aprendizaje por descubrimiento**

Es clara la importancia de los materiales en el aula, así como lo es la investigación que sobre ellos se realice. La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo implica elementos de aprendizaje por descubrimiento. Este tipo de aprendizaje se define como aquel “en el que el contenido principal de lo que será aprendido no se proporciona (o presenta), sino que debe ser descubierto por el aprendiz antes de que pueda asimilarlo en su estructura cognoscitiva” (Ausubel, pp. 215, 1976).

Este tipo de aprendizaje se asume como más apropiado en la etapa preescolar. Pero también es recomendado para alumnos de más edad que comienzan a adentrarse en una nueva disciplina. En este sentido, dados los conocimientos incipientes en Probabilidad y el casi nulo desarrollo del razonamiento probabilístico que presentan los estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades al cursar la materia de Estadística y Probabilidad, el aprendizaje por descubrimiento parece adecuado precisamente al tratar de desarrollar en los estudiantes dicho tipo de razonamiento.

El aprendizaje por descubrimiento, como señala el propio Ausubel, es en sí limitado aunque muy útil para ciertos propósitos y en algunas circunstancias educativas. Entre ellas vale mencionar que permite desarrollar destrezas efectivas para resolver problemas; igualmente, este tipo de aprendizaje puede ser efectivo para tareas de cierta dificultad y poco familiares.

También es de destacarse que, si bien este tipo de aprendizaje, como ya se señaló, es más viable en los niños pequeños, al aplicarlo en adolescentes se tendrá la ventaja de que estos cuentan con mayor experiencia cognoscitiva y más facilidad lingüística, independientemente de que la disciplina a la que se les enfrente, en este caso la Probabilidad, les resulte relativamente nueva y desconocida. De esta manera, es de esperarse que el adolescente supere rápidamente la fase intuitiva en el aprendizaje por descubrimiento.

Una forma muy extendida de aprendizaje por descubrimiento es la resolución de problemas. La propuesta didáctica que se presenta en este trabajo se basa sobre esta metodología precisamente. En ese sentido, la investigación educativa que se realice sobre dicha propuesta, deberá partir justamente de la óptica del aprendizaje por descubrimiento vía resolución de problemas.

## **2.5 Los materiales y la enseñanza**

Entenderemos aquí por materiales didácticos como cualquier instrumento u objeto que pueda servir como recurso para que, mediante su manipulación, observación o lectura, se ofrezcan oportunidades de aprender algo, o bien con su uso se intervenga en el desarrollo de alguna función de la enseñanza.

Es decir, los materiales comunican contenidos para su aprendizaje y pueden servir para estimular y dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje, total o parcialmente. Así, por ejemplo, el material sirve no sólo para transmitir conceptos, ideas, etcétera, sino también para motivar el interés del alumno, guiarle en un determinado proceso de pasos a seguir, facilitarle la sensación de que progresa, señalarle lo fundamental de lo accesorio, ejercitarle en unas destrezas, etcétera.

También, los materiales comunican potencialmente cultura y formas de conectar con ella; inciden en el contenido y en el proceso pedagógico mediante lo que se comunica. A su vez, seleccionan, de entre lo que es comunicable, aquello que realmente comunican.

Para expresar en conjunto esta idea se recurrirá al señalamiento que al respecto hace Gimeno Sacristán (1986, p. 70): “[...] consideramos que en la selección, uso y papel dominantes desempeñados por los materiales están implicadas las formas de entender la comunicación cultural, hábitos profesionales individuales y colectivos de los profesores, hábitos de consumo, intenciones explícitas y ocultas de controlar el contenido de la escolaridad y mecanismos económicos”.

### **2.5.1 Formas de comunicar**

El hecho de que la educación escolarizada sea un proceso de socialización cultural desgajado y, generalmente, alejado de las actividades de producción material y cultural o de las relaciones sociales reales, obliga a que los sujetos conecten con los procesos y productos culturales a través de ciertos *mediadores*. La asimilación de la cultura se produce por medio de un proceso de intermediación.

Gimeno Sacristán (1986, p. 70) en su trabajo recurre al siguiente señalamiento con respecto a esta idea: “[...] cuando los procesos de reproducción se separan de la producción, aquélla se realiza por medio de la *representación* de ésta en un «texto» que debe ser portado por un mediador, porque pasa a ser una reproducción simbólica. Este es el valor de los materiales y ésta es la condición pedagógica fundamental a la que sirven: están llamados a ser soportes de la representación de la reproducción. A su vez, en la escolaridad actual ese texto de la reproducción se formula fuera del proceso reproducción educativa, y lo mismo

que ocurre con todo el currículum, los portadores del «texto» serán configurados fuera del proceso pedagógico. Es decir, el que elabora el soporte mediador fuera del ámbito pedagógico es un agente fundamental a tener en cuenta para entender el contenido de la práctica pedagógica y la práctica misma”.

Los materiales son los medios depositarios de la cultura, son útiles en el proceso educativo, bien los consuma directamente el alumno o lo haga mediante su apropiación previa por parte de los docentes. Ante esta opción, el alumno en contacto directo con el material mediador o el profesor como intermediario de esa mediación, hay una alternativa pedagógica decisiva. Se puede discutir las formas de uso y el tipo de soportes culturales, su variedad, etcétera, sin embargo su presencia es indiscutible.

Desde una perspectiva cultural no debe verse a los materiales como subsidiarios de los profesores y como amenazas que le restan protagonismo y profesionalidad, sino como recursos necesarios, antes que los mismos profesores, para la función de transmisión de la cultura en la enseñanza. El problema pedagógico es el de abrir el espectro de mediadores culturales y el de favorecer los usos pedagógicos más favorables para el desarrollo de los individuos, tanto el de los alumnos como el de los profesores.

La cultura se ha plasmado y se puede expresar bajo distintas codificaciones que, en la vida y en la escuela, sirven para acercarse a ella, si bien es un hábito cultural muy asentado el que las formas escritas de comunicación sean ahora las

dominantes en los usos escolares, como en otro momento lo fueron las de transmisión oral.

En todo caso, lo que sí es importante mantener es que las funciones manifiestas y latentes que cumplen y pueden desempeñar los materiales lo hacen tanto por su contenido y materialidad como por las formas de uso y las prácticas que los engloban.

### **2.5.2 Modos de controlar lo que se aprende y lo que se enseña**

Una de esas funciones, que tienen los materiales, es la de control del contenido a enseñar, misión que unos pueden desempeñar mejor que otros. Esta virtualidad no es ajena a que en el sistema escolar se realice una selección «natural» de medios didácticos en favor de aquellos que mejor pueden cumplir esta función.

La necesidad de la homologación estricta por vía muy directa sólo se puede hacer efectiva o bien por medio de los exámenes externos iguales para todos, lo que no es todavía nuestro caso, o bien mediante el control de los «materiales curriculares», aquellos que de verdad desarrollan el currículum: los libros de texto.

### **2.5.3 Depósito del método y de la profesionalidad**

Las demandas sociales que debe atender la escuela, la extensión de la cultura obligatoria, junto con el debilitamiento de los mecanismos selectivos internos, hace que los grupos de estudiantes sean cada vez más heterogéneos en

los centros escolares y reclama una dosificación del currículum a lo largo de la escolaridad; el trabajo de los profesores no se simplifica, sino que cualquier propuesta de renovación le reclama más esfuerzos profesionales, nuevas tareas.

Ante tal panorama los materiales estructurados de la cultura y de la *práctica* escolar son una ayuda imprescindible para los profesores. El material dosificador del contenido, facilitador del contacto de los alumnos con unos contenidos culturales seleccionados y estructurados, facilitador de la propia práctica docente: diciendo que enseñar, qué leer, qué énfasis darle, cómo resumirlo, qué observar, qué gráfica comentar, qué ejercicios poner, cómo evaluar, etcétera, es una consecuencia del efecto conjunto del control sobre el currículum, ya comentado, y de las condiciones profesionales y laborales del docente.

Todas esas condiciones han hecho y hacen que el material dominante en la enseñanza sea el que mejor se acopla a ellas, el que estructura y cierra el currículum para profesores y alumnos. Es decir, un material educativo o un libro de texto no se diseñan en función de los verdaderos lectores, como ocurre con cualquier libro, sino en buena parte en función de las necesidades del profesor.

Las pautas de uso dominantes de los materiales básicos que desarrollan el currículum no expresan estilos caprichosos de comportamiento docente, sino la acomodación de la profesionalidad posible en ese contexto. No es una casualidad que el libro de texto sea la herramienta didáctica dominante, por lo que la alternativa a ese instrumento curricular es su modificación y complementariedad



con otros medios. No obstante, esa acomodación profesional permite variaciones importantes.

El tiempo escolar de los esquemáticos horarios sirve para poner tareas y revisar ejercicios tanto o más que para provocar allí mismo el proceso de aprendizaje. Las tareas fuera del aula, que podría ser la gran ocasión para aprovechar otros materiales escritos y cualquier otro mediador, son la consecuencia de la acomodación al uso de los materiales dominantes. El poco tiempo del profesor ante contenidos, casi siempre inflados por los propios editores, encuentra su prolongador natural en los materiales estructuradores de la actividad por antonomasia que son los libros de texto.

#### **2.5.4 El material didáctico como producto**

Los materiales didácticos son objetos que se producen con el fin de darles una utilidad pedagógica, obviamente, pero que, antes que nada, son productos elaborados, vendidos y comprados; es decir: forman parte de una actividad económica. Como cualquier otro objeto, los productos culturales que son los materiales didácticos se generan y expanden dentro de un proceso social más amplio. Esta característica marca alguna de sus peculiaridades y condiciones de uso.

La transformación de la práctica pedagógica del uso de materiales existentes es un problema pedagógico de formación de profesorado y de acondicionamiento de la realidad escolar. Materiales innovadores requieren

profesores que los usen adecuadamente y profesores innovadores exigen materiales distintos a los dominantes. Pero plantear la renovación del currículum contando con el *cambio de materiales*, introducción de nuevas posibilidades en éstos, etcétera, supone antes que nada hablar de su viabilidad como objetos producidos y distribuidos.

Lo que ocurre es que en el cuadro de interacciones *profesor-centro-política de control-producción de medios* se dan relaciones asimétricas a la hora de potenciar el cambio conjuntado. Más en concreto: entre consumidores (profesores, alumnos, padres, centros) y productores existe una relación muy desigual. Los primeros no están organizados ni tienen muchos recursos para incidir como demandantes en ese mercado. Teóricamente sí pueden hacerlo: bastaría, por ejemplo, un profesorado que exigiese materiales distintos a los existentes para que el productor intentara darles satisfacción, dado que las empresas especializadas hoy se rigen en general más por la lógica del mercado que por motivaciones ideológicas, si bien éstas pueden no desaparecer del todo, como ocurre con la edición de libros en general, medios de comunicación, etcétera.

Así, una alternativa para distribuir el producto con los alumnos es instalar con los administradores de la Institución, en este caso, con los administradores del Colegio de Ciencias y Humanidades, en particular en el Plantel Naucalpan, vías para optimizar los procesos mediante los cuales el material se reproduce, edita y distribuye. O bien, considerando los avances tecnológicos, crear un archivo de cómputo que pueda ser instalado en un disco y ser distribuido mediante copias

legales a los alumnos, ya sea en forma gratuita o mediante una retribución económica.

En el desarrollo de la investigación educativa que se reporta en esta tesis, la institución apoyó facilitando el uso de un aula con computadoras, pero en sí el material con el que se trabajó fue producido y reproducido enteramente por el profesor.

## **2.6 La evaluación de los materiales**

Se ha sido reiterativo en denominar como materiales didácticos a las diferentes herramientas o utensilios que utilizan los profesores y los alumnos en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, algunos investigadores han realizado una clasificación de los mismos, como la que realiza Santos Guerra (1986, p. 56):

“Unos tienen un carácter globalizado, articulante y orientativo de todo el proceso (materiales curriculares, libros de texto, por ejemplo) y otros son elementos vicarios, de carácter auxiliar (ordenadores, material de laboratorio, retroproyectores, diapositivas, etc.) Los materiales no son un fin en sí mismos, por lo que ya desde aquí estamos refiriéndonos a un criterio de valoración que no se encuentra exclusivamente en su calidad sino en el modelo de enseñanza que se persigue, en la finalidad a la que se la destina, en el modo de utilizarlos y en las repercusiones que su uso conlleva. En definitiva, solamente su uso, puesto al servicio de un proceso de enseñanza-aprendizaje y analizado desde una

concepción determinada de éste, permitirá entender si resultan útiles, estériles o incluso, perjudiciales”.

### **2.6.1 Política de elaboración y difusión**

La política de materiales que impone prescriptiva y minuciosamente a los profesores lo que tienen que enseñar, cómo lo tienen que hacer y qué objetivos deben conseguir, les deja sin capacidad de maniobra, de reflexión y de adaptación.

El profesor se convierte así en el ejecutor de lo que los materiales curriculares dictaminan. Materiales que serán *peores* en la medida que sean *mejores*. Esta paradoja es claramente comprensible si se tiene en cuenta que el profesor es sustituido por los materiales que le dicen qué, cómo, cuándo y hasta por qué tiene que hacer las cosas.

Esta política engendra seguridad en los padres, en los alumnos y, a veces, en los mismos profesores. Así mismo, también permite homogeneizar el currículum, de modo que se conseguirá que todos los profesores consigan alcanzar los niveles mínimos por el camino que los expertos han considerado el mejor.

## 2.6.2 La naturaleza de los materiales

Las características ideales que deben tener los materiales, de acuerdo con Santos Guerra (1986, p. 56), son:

“— Que permitan al alumno tomar decisiones razonables respecto a cómo utilizarlos y ver las consecuencias de su elección.

— Que permitan desempeñar un papel activo al alumno: investigar, exponer, observar, entrevistar, participar en simulaciones, etc.

— Que permitan al alumno o le estimulen a comprometerse en la investigación de las ideas, en las aplicaciones de procesos intelectuales o en problemas personales y sociales.

— Que implique al alumno con la realidad: tocando, manipulando, aplicando, examinando, recogiendo objetos y materiales.

— Que puedan ser utilizados por los alumnos de diversos niveles de capacidad y con intereses distintos, propiciando tareas como imaginar, comparar, clasificar o resumir.

— Que estimulen a los estudiantes a examinar ideas o la aplicación de procesos intelectuales en nuevas situaciones, contextos o materias.

— Que exijan que los estudiantes examinen temas o aspectos en los que no se detiene un ciudadano normalmente y que son ignorados por los medios de comunicación: sexo, religión, guerra, paz; etc.

— Que obliguen a aceptar cierto riesgo, fracaso y crítica; que pueda suponer salirse de caminos trillados y aprobados socialmente.

— Que exija que los estudiantes escriban de nuevo, revisen y perfeccionen sus esfuerzos iniciales.

- Que comprometan a los estudiantes en la aplicación y dominio de reglas significativas, normas o disciplinas, controlando lo hecho y sometiéndolo a análisis de estilo y sintaxis.
- Que den la oportunidad a los estudiantes de planificar con otros y participar en su desarrollo y resultados.
- Que permitan la acogida de los intereses de los alumnos para que se comprometan de forma personal”.

### **2.6.3 El uso de los materiales**

Lo que realmente importa es la evaluación del uso que se hace de los materiales, ya que ésta permite ver su potencialidad educativa, sobre todo cuando se realiza una evaluación contrastada en diversos contextos. Puede ser que los materiales no sean auxiliares eficaces en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sea porque el profesor haga una utilización mecánica de ellos, sea porque no los adapte a las capacidades de los alumnos, sea porque los textos resulten ininteligibles para los alumnos. Más aún, puede ser que un uso excesivamente servil del texto impida una dinámica viva y reflexiva por parte del profesor como animador del proceso de aprendizaje. La práctica nos permitiría descubrir, en ese caso, que la guía del aprendizaje ha asfixiado al profesor como investigador de su experiencia.

Por eso, se propone la producción de materiales curriculares a raíz de la actividad escolar. Materiales que pueden ser sometidos a la discusión de otros profesionales y que pueden multiplicar las ejemplificaciones surgidas de la

experiencia. En ese sentido, los materiales producidos tienen unas características inversas a las de los materiales impuestos. Su misma elaboración requiere un esfuerzo de reflexión sistemática, su discusión compartida, un enriquecimiento para los mismos profesores que los elaboran.

#### **2.6.4 ¿Cómo realizar la evaluación?**

En este apartado se propone la necesidad de hacer una evaluación asentada en una pluralidad de recolección de evidencias y firmemente arraigada en cuestiones de valor. En definitiva, sobre aquello que nos pueda permitir decir que los mejores materiales pueden convertirse en los peores y que no hay materiales en sí mismos didácticos. Todo depende de la concepción que los sustente, de la intención con que se utilicen y de las condiciones de dicho uso.

En este sentido es necesario precisar que se comparte el punto de vista manifestado por Santos Guerra (1986, p. 56), en el documento citado, con respecto a que la evaluación de un material se realice mediante los siguientes criterios:

“— *Observar* cómo esos materiales orientan la práctica, cómo ayudan al profesor a ponerla en cuestión, cómo potencian una serie de actividades y de estrategias de pensamiento y de acción, cómo favorecen la discusión..., será un camino que permita recoger datos significativos y relevantes para la cuestión.

— *Preguntar* a los protagonistas (profesores y alumnos sobre todo, y también padres) qué valor atribuyen a los materiales, qué facilidades o dificultades

encuentran en su uso, qué aspectos potencian y cuáles atrofian..., será otro sendero que nos lleve a buen fin.

— *Contrastar* la utilización de unos materiales con la de otros, sean éstos de carácter descendente o ascendente (llamo ascendentes a los que han sido elaborados por los profesores y por los alumnos, frente a los que tienen el marchamo de la aprobación legal), ayudará a conocer las particularidades de ambos, si se someten a discusión y a un análisis compartido sus virtualidades didácticas”.

## **2.7 La formación de los profesores**

La mayor parte de los esfuerzos de las Administraciones y del conjunto de la comunidad educativa, cada uno en sus ámbitos respectivos, deberían orientarse a conseguir que el sistema educativo favorezca el máximo desarrollo personal de los alumnos, se adapte a sus necesidades específicas, responda a las exigencias de la sociedad y colabore con la compensación de las desigualdades. Y una manera de lograrlo es dotando de mayores recursos humanos y materiales a los centros educativos, del apoyo a la formación y promoción profesional de los docentes, y del desarrollo de un nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo, la posibilidad de que los profesores elaboren los materiales didácticos lleva a una nueva forma de entender el proceso de enseñanza, junto con las medidas destinadas a favorecer la práctica profesional y la motivación de los profesores, puede contribuir en mayor medida a que aumente el número de alumnos que aprendan con éxito.



Esto último otorga mayores posibilidades a los profesores para que organicen el conjunto de las enseñanzas en una etapa educativa de acuerdo con el entorno social y cultural del centro, las características de los alumnos y los criterios pedagógicos del profesorado, y reconoce la importancia de atender los ritmos de aprendizaje propios de los alumnos, en resumen, confiere un papel más relevante al profesor y a los equipos de profesores para adoptar decisiones curriculares.

Esta opción, ampliamente meditada, supone dos consecuencias importantes. En primer lugar, los profesores de una etapa han de adoptar las decisiones oportunas sobre qué contenidos van a concretarse en cada ciclo o curso con el fin de garantizar la coherencia de los aprendizajes de los alumnos; en segundo lugar, las Administraciones educativas deberán proporcionar a los profesores suficientes modelos y orientaciones para que esta tarea pueda realizarse con eficacia.

Las Administraciones educativas deberán incorporar en toda su oferta de formación la preparación de los profesores para que sean capaces de organizar los contenidos y de adecuarlos a las características de su entorno y a sus alumnos. Igualmente deberán indicar quienes son los responsables de coordinar estas tareas en los centros educativos y los tiempos que deberán dedicarse a este objetivo todos los profesores dentro de su horario de trabajo.

Es indudable enlazar que el proceso de elaboración de un material educativo conlleva necesariamente a la formación de los profesores. Es importante subrayar la interdependencia de ambos procesos. Una buena política de formación de los profesores debe conducir a que estas actividades se orienten hacia equipos de profesores para modificar su práctica docente y para mejorar su competencia dentro de este modelo de enseñanza-aprendizaje.

Algunos profesores han tratado de establecer la relación existente entre la elaboración de los materiales y la formación de los profesores; entre ellos, habría que destacar el trabajo de Álvaro Marchesi (1986, p. 36), que señala al respecto:

“— Los materiales curriculares deberían ofrecer a los profesores vías de análisis y reflexión para que puedan adaptarlos con más facilidad a las condiciones sociales y culturales en las que van a desarrollar su trabajo. Los materiales no pueden ser propuestas cerradas, inflexibles y lineales, sino que deben ofrecer perspectivas amplias dentro de las cuales haya posibilidades distintas de concreción. Para ello es conveniente que los materiales hagan explícitos los principios didácticos que fundamentan la propuesta, de manera que cuando el profesor la maneje tenga las claves de interpretación necesarias para moverse autónomamente dentro de ella y no ser un mero ejecutor de las decisiones que allí aparecen.

— Los materiales curriculares han de recoger las propuestas didácticas en relación siempre con los objetivos que se intentan conseguir, es decir, en relación con las capacidades que se pretende que los alumnos desarrollen. Por ello, los

contenidos que se incluyan han de ponerse en relación con estos objetivos, y se ha de incorporar esta reflexión en cada unidad didáctica.

— Los materiales deben incluir los tres tipos de contenidos que se establecen en el currículum: conceptos, procedimientos y actitudes. Tres tipos de contenidos que colaboran conjuntamente a la formación de los alumnos y que, por tanto, deben trabajarse interrelacionadamente. Ello no debe hacer olvidar sin embargo, que las actividades más adecuadas *para enseñarlos y evaluarlos* no son siempre iguales, lo que debe reflejarse en las propuestas curriculares que se realicen.

— Los materiales curriculares deben, asimismo, respetar la atención a los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos.

— Los materiales curriculares deben ayudar a consolidar la organización curricular de ciclos elegida. De esta forma se favorecerá que se programe y evalúe con una dimensión temporal más amplia que la referida a un solo curso escolar, lo que permitirá tiempo de adquisición y de consolidación de los aprendizajes más amplios y más adecuados, por ello, a distintos ritmos de aprendizaje. Estos materiales de ciclo sólo alcanzarán su sentido más completo en tanto estén enmarcados en un proyecto de etapa más general que le dé coherencia.

— Especial atención deben recibir en los materiales lo que en el currículum se han denominado «temas transversales». Son aquellos contenidos que están presentes en varias áreas y que por su especial significado formativo han de incorporarse de forma clara e integrada.

— La evaluación ha de ocupar un lugar destacado en los materiales curriculares. La información relativa a qué evaluar y procedimientos concretos para hacerlo deberían estar incluidos en ellos. No sólo deben señalarse los criterios de

evaluación de los aprendizajes de los alumnos pertinentes en cada caso, sino también indicadores de evaluación del proceso de enseñanza (material utilizado, tiempo previsto de organización de la clase, papel del profesor en las distintas fases del proyecto, diversidad de las actividades, etc.)”.

De acuerdo con esta concepción, los materiales curriculares deben proporcionar los medios y la información suficiente a los profesores para que realicen todas sus tareas docentes. De ahí que las funciones de los materiales sean muy amplias, lo que exige la existencia de una variedad de ofertas diferenciadas.

Es necesario insistir que se debe generar una política de creación de materiales educativos que gravite sobre dos grandes rubros: el primero es hacia la generación de materiales orientado hacia el proyecto curricular y el segundo hacia la generación de materiales orientado a la práctica en el aula.

### **2.7.1 Materiales orientados hacia el proyecto curricular**

Álvaro Marchesi (1986, p. 36) propone, al respecto, lo siguiente:

“— Proyectos Curriculares completos, en el sentido anglosajón del término, es decir, propuestas que abarcan una o varias áreas o materias de un tramo educativo entero. Son materiales elaborados a partir de una cierta reflexión e investigación didáctica y que incluyen toda la información que el profesorado puede necesitar para trabajar esos temas.

— Materiales relativos a alguno de los grandes ámbitos de decisión de un proyecto curricular. En este apartado se incluyen materiales relativos a un aspecto concreto del proceso de diseño curricular, como pueden ser materiales sobre modelos de secuenciación, organización, evaluación, principios metodológicos, o sobre el tratamiento de la diversidad o a orientación a los alumnos. Este tipo de materiales puede resultar muy útil al equipo docente cuando está en el momento de establecer acuerdos en su proyecto curricular de centro”.

### **2.7.2 Materiales orientados a la práctica en el aula**

Así mismo, con respecto a este segundo tipo de materiales, Álvaro Marchesi (1986, p. 36) propone lo siguiente:

“En este segundo grupo se encontrarían todos los materiales que se centran en el proceso de enseñanza y aprendizaje para un grupo concreto de alumnos de un ciclo o curso específico de una etapa educativa. Son materiales que tienen, por lo tanto, como interlocutor no a un equipo docente sino a un profesor individual, y que no se refieren a temas generales que trascienden las áreas específicas sino que, por el contrario, están focalizados en alguna o algunas de ellas”.

### **2.7.3 Los materiales en el marco del proyecto curricular**

Parece de sentido común el que cuando se diseña un proyecto curricular, como mínimo, se interrogue sobre *dónde* se va a desarrollar, *qué* condicionantes van a emanar de él, *con qué* materiales se va a trabajar y *cómo* deben estar dispuestos.

El proyecto curricular es, además, una propuesta de organización de conocimientos a desarrollar en la institución escolar, por lo cual necesita del apoyo de un determinado abanico de materiales que han de ser coherentes con el planteamiento epistemológico de la organización adoptada.

Los materiales, de acuerdo con Ángel San Martín (1986, p. 12), se pueden entender como:

“Los materiales como aquellos artefactos que, en unos casos utilizando las diferentes formas de representación simbólica y en otros como referentes directos (objeto), incorporados en estrategias de enseñanza, coadyuvan a la reconstrucción del conocimiento aportando significaciones parciales de los conceptos curriculares. Los materiales representan uno de los componentes fundamentales del currículum y sólo tienen sentido cuando están plenamente integrados en el proyecto, tanto en la fase de diseño, como en la interactiva y, por supuesto, en la de evaluación. Así, los materiales no son autónomos, sino que están supeditados, por un lado a los requerimientos concretos del proyecto curricular y, por otro, a las reglas institucionales y del grupo de clase que determinan las prácticas pedagógicas en los centros”.

Se parte de la idea de que cualquier proyecto que se proponga actuar sobre una parcela de la realidad necesita del apoyo de unos medios materiales que permitan incidir en el sentido deseado.

Nadie puede cuestionar, no obstante, el enorme impacto que los materiales ejercen sobre la conformación de la práctica de los profesores, pero no es menos evidente que con ello se está simplificando en demasía el funcionamiento de la escuela.

## **2.8 El currículo como guía de las actividades educativas**

De acuerdo con Daniel Gil (1986, 32), el currículo es la expresión de un conjunto de actividades desde el punto de vista constructivista a través de las cuales los conocimientos y las habilidades pueden ser construidos, como lo menciona a continuación:

“La más importante implicación del modelo constructivista en el diseño curricular sea «concebir el currículum, no como un conjunto de conocimientos y habilidades, sino como el *programa de actividades* a través de las cuales dichos conocimientos y habilidades pueden ser construidos y adquiridos».

- La propuesta de organizar el aprendizaje como una construcción de conocimientos intenta aproximarse a una situación de réplica de investigaciones, como las que realizan investigadores “aprendices” al incorporarse a un equipo de investigadores “expertos”.
- El desarrollo de un programa-guía de actividades, es decir, de un programa de investigación dirigida, ha de constituir un trabajo colectivo para los alumnos, en el doble sentido de formación de equipos (organización de la clase en pequeños grupos) y de frecuentes intercambios entre grupos, con la participación del

profesor como «portavoz de otros muchos investigadores». De esta forma, no sólo se incrementa el nivel de participación y la creatividad necesarios para abordar una investigación sino que permite a los alumnos vivenciar una característica fundamental del trabajo científico: la insuficiencia de las ideas y resultados obtenidos por un solo equipo y la necesidad de cotejarlos con los producidos por otros colectivos, hasta que se produzca suficiente evidencia convergente para que la comunidad científica los acepte.

— Los programas-guía han de estar diseñados para que los alumnos se impliquen en los problemas estudiados un tiempo superior al que permiten las estrategias de transmisión/recepción de conocimientos. Ese mayor tiempo, no sólo no representa un inconveniente, sino que constituye un factor esencial para que se produzca un auténtico aprendizaje

Esa comprensión, muy a menudo, es tan sólo aparente y debe ser cuestionada introduciendo nuevas actividades que conduzcan al tratamiento de los problemas desde distintos ángulos con objeto de alcanzar una coherencia global. Dicho de otro modo, es preciso dar a la enseñanza —en contra de lo que suele hacerse— una aspiración científica que cuestione las apariencias de aprendizajes superficiales. Sólo así son concebibles los profundos cambios conceptuales y epistemológicos que el aprendizaje de las ciencias exige.

— El diseño de programas-guía de actividades que hagan posible la construcción de conocimientos por los alumnos y genere actitudes positivas hacia el aprendizaje, constituye un trabajo de investigación aplicada en el que necesariamente han de implicarse los profesores y profesoras”.



Uno de los criterios que es necesario establecer es el relativo a la importancia de considerar durante la elaboración de los materiales que el conjunto de contenidos temáticos que se van a incorporar estén ordenados de manera secuencial, como se señala en el documento generado por el Proyecto ACES de Ciencia y Tecnología (1986):

“La secuenciación de contenidos constituye uno de los retos más importantes para los profesores. Son muchos los problemas que se suscitan y existen variedad de puntos de vista desde los que se pueden abordar. Es pues una cuestión de opciones que, además, no debe tener una respuesta definitiva. Será la experiencia, adecuadamente evaluada, la que permite ir modificando o ajustando la propuesta a los distintos contextos, a la variedad de problemas educativos”.

En el siguiente capítulo se describen las características y criterios con los cuales se elaboró la propuesta de enseñanza de los enfoques de la Probabilidad y el Cálculo de probabilidades para el ciclo bachillerato.

## **CAPÍTULO 3**

### **LA PROPUESTA DIDÁCTICA**

### **3.1 Ubicación de los enfoques de la Probabilidad y del Cálculo de Probabilidades**

En el programa de estudios de la materia de Estadística y Probabilidad se establece que “[esta] asignatura pertenece al quinto semestre, y se concibe para proporcionar a los educandos los elementos básicos de Estadística y Probabilidad que le permitan comprender y aplicar los procesos descriptivos para organizar, analizar e interpretar el comportamiento de datos pertenecientes a diversos campos de estudio. Se pretende que los contenidos de Probabilidad continúen con la formación del pensamiento matemático del alumno, particularmente de su visión no determinista” (Ávila et. al., 2004, p. 9).

También establece que “[la] Estadística y la Probabilidad se han vuelto requisito indispensable en la vida cotidiana para interpretar una gran variedad de información en diversos campos de estudio. En su entorno una persona encuentra reportes financieros, económicos, médicos y otros que se pueden entender y evaluar con una comprensión básica de estas disciplinas. Dada la importancia de que un alumno egresado de nuestro Bachillerato tenga dicha formación, en el quinto y sexto semestres del Plan de estudios del CCH se incluyen las asignaturas de Estadística y Probabilidad I y II, con carácter optativo, correspondientes al Área de Matemáticas.

El estudio de ambas asignaturas representa una secuencia de conocimientos que se enriquecen conforme se avanza en su estudio. Su objetivo es el de brindar a

los alumnos conceptos y procedimientos básicos que le permitan continuar su formación matemática, además de adquirir conocimientos de carácter introductorio y propedéutico del estudio de los métodos probabilísticos y estadísticos, así como de sus aplicaciones en diversos campos del conocimiento. Con ello se pretende reforzar el empleo de estrategias, su capacidad de solución de problemas, desarrollo de habilidades y de diversas formas de razonamiento” (Ávila et. al., 2004, p. 4).

Es importante señalar que “[los] contenidos se presentan en relación con el logro de aprendizajes relevantes que se esperan de los alumnos. Su organización está conformada para crear situaciones de aprendizaje que les permitan establecer reflexiones, relaciones y conjeturas que coadyuven en la resolución de problemas. Con este programa se pretende que los alumnos estudien los contenidos de Estadística Descriptiva y Probabilidad con el propósito de continuar el desarrollo de su pensamiento matemático, particularmente en la formación de su visión no determinista de los fenómenos aleatorios y como un medio para la comprensión y aplicación de la Inferencia Estadística. Con el propósito de especificar el sentido de los aprendizajes, es recomendable considerar que:

- Los que tienen alguna referencia en el núcleo básico deberán ser revisados en el contexto en que se presenten, creando las condiciones para la construcción de nuevos conocimientos.
- Aquéllos que apunten a desarrollos superiores de la matemática deberán abordarse a un nivel elemental, considerando que su estudio constituye un primer acercamiento a dichos temas.

- Los tratamientos teóricos superfluos o demasiado extensos deberán evitarse, lo mismo que los desarrollos estrictamente axiomáticos.
- Los problemas que el estudiante resuelva deberán estar comprendidos entre la ejecución algorítmica, la modelación de situaciones y la interpretación de resultados.
- La resolución de problemas contemple que el estudiante sea capaz de comunicar los procedimientos y resultados, a partir de la reflexión, la argumentación y la discusión grupal, para que comprenda las relaciones entre los conceptos y métodos de la Estadística y la Probabilidad.
- Durante el proceso de enseñanza–aprendizaje deben de tenerse presentes los principios educativos del Colegio.
- Debe ponerse énfasis en el significado de conceptos y procedimientos, en el manejo de estrategias, en la integración de conocimientos y en el desarrollo de habilidades matemáticas, como son la generalización, tránsito de un registro a otro, flexibilidad y reversibilidad de pensamiento, y no en la memorización o la práctica irreflexiva de algoritmos.

El logro de un adecuado desarrollo de habilidades compromete al profesor a promover en el alumno acciones para que organice, sistematice, compare, clasifique, explore, argumente y aplique los conocimientos que va adquiriendo, ya que estas acciones favorecen una mejor comprensión y el crecimiento de sus capacidades intelectuales” (Ávila et. al., 2004, p. 5).

Finalmente deben considerarse los propósitos generales de la materia: “A través del estudio de ambas asignaturas, el alumno:

- Comprenderá la naturaleza de los fenómenos aleatorios que se presentan en su entorno, a partir del análisis probabilístico, para continuar el desarrollo de su pensamiento matemático.
- Comprenderá que la Probabilidad y la Estadística constituyen disciplinas que incluyen conceptos, técnicas y métodos que permiten aproximarse al estudio de los fenómenos aleatorios a partir del tratamiento de la información.
- Realizará predicciones e inferencias sustentadas en modelos matemáticos, cuyo alcance trascienda hacia otras áreas del conocimiento” (Ávila et. al., 2004, p. 8).

En los puntos correspondientes a la Probabilidad, en el programa de estudio, el interés se centra a que el estudiante conozca y comprenda lo que es un fenómeno aleatorio. Pero además deberá ser capaz de razonar en función de las características del fenómeno aleatorio. Precisamente este último punto ayudará a que el estudiante continúe el desarrollo de su pensamiento matemático. Diferentes investigaciones han mostrado que las capacidades de tomar decisiones bajo condiciones de azar o entender lo que es una medida de azar, son poco desarrolladas, no solo entre los alumnos de Estadística y Probabilidad, sino en el grueso de la población, lo que vuelve de capital importancia hacer lo posible por revertir esta situación.

Una propuesta didáctica que exija de los estudiantes medir el azar por medio del cálculo de probabilidades, tomar decisiones sobre dicha medida, y explicar sus conclusiones, tomando en cuenta siempre dichas condiciones de azar y mostrándose capaz de reproducirlas de alguna manera, sería de gran ayuda para potenciar la capacidad de razonamiento probabilístico. Igualmente, esta propuesta deberá contemplar los tres enfoques de la Probabilidad: el Subjetivo, el Frecuentista o Experimental y el Clásico o Simétrico. Estos temas pueden localizarse dentro del plan de estudios de la asignatura de Estadística y Probabilidad I, tercera unidad.

Una vez decidido que se va a elaborar una propuesta didáctica enfocada al trabajo con los tres enfoques de la Probabilidad y con el Cálculo de probabilidades, y que se encuentran, como temas, dentro de la Unidad III del programa de estudio de la asignatura de Estadística y Probabilidad I del Plan de Estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México, deben tenerse claras también las características que debe cumplir tal propuesta, justamente en función de lo establecido por el programa de estudios.

### **3.2 Propósitos, aprendizajes y contenidos que debe cumplir la propuesta**

En primer lugar, la propuesta didáctica debe posibilitar cumplir los propósitos establecidos para esta unidad, siempre en función de los Aprendizajes, que son finalmente la parte medular del programa.

Es decir, el material elaborado tendrá como base el propósito de la unidad: “El alumno estudiará los fenómenos aleatorios, resolviendo problemas utilizando los tres enfoques, subjetivo, frecuencial y clásico, para comprender conceptos fundamentales que le permitan asociar a la Probabilidad y a sus reglas directamente con la Inferencia Estadística” (Ávila et. al., 2004, p. 16).

En segundo lugar, y realmente es este el punto más importante en el desarrollo didáctico, debe generarse una propuesta que permita que el alumno alcance el conjunto de aprendizajes establecidos en el programa de estudios:

“El alumno:

- Diferencia entre fenómeno aleatorio y fenómeno determinista.
- Identifica la regularidad estadística como propiedad de los fenómenos aleatorios.
- Conoce los enfoques clásico, frecuencial y subjetivo, para determinar la probabilidad de un evento.
- Relaciona el concepto de frecuencia relativa con la idea intuitiva de probabilidad.
- Comprende por qué la probabilidad tiene valores entre cero y uno.



- Construye y describe el espacio muestra.
- Representa eventos a partir de enunciados.
- Calcula probabilidades utilizando el enfoque frecuencial.
- Calcula probabilidades utilizando el enfoque clásico” (Ávila et. al., 2004, pp. 16-17).

En tercer lugar, la propuesta didáctica tiene que integrar los contenidos temáticos que se establecen en el programa de estudios:

“1. Enfoques de la probabilidad.

- Subjetivo.
- Frecuencial.
- Clásico.

2. Probabilidad de eventos simples.

- Espacio muestra.
- Eventos.
- Cálculo de probabilidades” (Ávila et. al., 2004, p. 16).

En cuarto lugar en el diseño de la estrategia ha de considerarse el tiempo en el que, de acuerdo con el programa de estudios de la asignatura, se debe desarrollar la unidad en el aula. La estrategia no cubre la totalidad de los aprendizajes, y por ende de los temas; igualmente es preferible su aplicación hacia el final de la unidad. El tiempo dedicado a la totalidad de la unidad, como lo indica el programa de estudios, es de 26 horas (Ávila et. al., 2004, p.16).

En quinto lugar, la propuesta didáctica requiere claridad para los estudiantes, de manera tal, que sin renunciar a la notación propiamente matemática, los contenidos temáticos sean accesibles para los alumnos. En ese sentido, es importante mantener el diálogo con los estudiantes durante la implementación de la propuesta didáctica.

Considerando los cinco criterios establecidos en las líneas anteriores se procedió a la elaboración de la propuesta de enseñanza, misma que se presenta en el Anexo de la presente tesis, junto con un ejemplo de su aplicación.

### **3.3 La propuesta didáctica**

El material que conforma la propuesta didáctica se encuentra estructurado en 4 partes:

- La primera corresponde al establecimiento de conjeturas por parte de los alumnos, frente a un problema de probabilidad, y basándose sobre todo en el enfoque subjetivo, el cual permeará toda la secuencia.
- La segunda parte corresponde a una serie de preguntas en las que se induce al razonamiento probabilístico bajo el enfoque frecuencial.
- La parte tres corresponde a una serie de instrucciones para simular el fenómeno presentado por medio de la computadora.

- La parte cuatro corresponde a contrastar las conjeturas realizadas al principio de la actividad con los resultados observados, induciendo al mismo tiempo el razonamiento probabilístico a través del enfoque clásico.

Igualmente se incluye el análisis realizado sobre la aplicación de la propuesta didáctica. Este análisis consta de siete partes:

- La primera parte corresponde a una **Introducción** en la que se presenta una pequeña justificación a la propuesta didáctica realizada y a la misma aplicación.
- En la segunda sección denominada **Filosofía de la Probabilidad** se presenta tanto una nota histórica referente a la Probabilidad, como a la importancia en el razonamiento probabilístico bajo los tres enfoques que ya se han mencionado.
- En la tercera sección se habla acerca de la metodología de **Resolución de Problemas**, ya que es a la que ajustamos la propuesta didáctica, entre otras cosas por ser esa la recomendación en los programas del CCH para las materias del Área de Matemáticas. También se establecerá lo que se entiende como propuesta didáctica (denominada “estrategia didáctica”) al interior del CCH.

- La cuarta sección se denomina **Materiales Concretos**, y aborda algunas consideraciones al respecto, ya que la aplicación de la propuesta requiere trabajar con datos.
- En la quinta sección, denominada **Simulación Computacional**, en la que se presentan algunas ideas sobre esta forma de trabajar, ya que la actividad, como se mencionó antes, tiene justamente una parte de simulación computacional.
- En la sexta sección, **Secuencia Didáctica**, describe paso a paso el desarrollo de la actividad, tal y como se dio en el aula.
- Y la última sección, **Discusión con el Grupo**, describe la manera en la que se contrastaron las conjeturas iniciales, en las que se llegó a conclusiones con los alumnos y en las que se evaluó su capacidad de razonamiento probabilístico. En esta sección se indica también qué reactivos en la actividad son indicadores precisamente de la capacidad de razonamiento probabilístico en los alumnos, y bajo qué enfoque.

### **3.4 La propuesta de aprendizaje**

La propuesta didáctica busca alcanzar un cierto desarrollo en la capacidad de razonamiento probabilístico de los estudiantes, a partir de ciertas nociones

básicas del cálculo de probabilidades y del aprendizaje por descubrimiento vía resolución de problemas.

Dentro de la descripción del desarrollo de la actividad en el aula, en la mencionada sexta parte del análisis, se hacen algunas observaciones respecto a los avances que los estudiantes mostraron en cuanto a capacidad de razonamiento probabilístico al trabajar la propuesta didáctica. Estas observaciones se enfocan tanto a los errores cometidos como a las soluciones obtenidas, las justificaciones y el replanteamiento de conjeturas.

Igualmente en la parte siete del análisis se presentan más detalladamente las formas en las que se evaluó si los alumnos efectivamente consiguieron un mayor nivel de razonamiento probabilístico. También se detallan los indicadores que permiten medir si efectivamente los alumnos desarrollaron dicha capacidad de razonamiento probabilístico.

En el siguiente capítulo se describe el análisis en su totalidad.

## **CAPÍTULO 4**

### **ANÁLISIS DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA**

Una vez elaborada la propuesta didáctica para apoyar la formación en el razonamiento probabilístico, se vuelve necesario aplicar este material durante el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula, con el fin de determinar la utilidad del mismo en términos de apoyar al desarrollo de dicho razonamiento.

#### **4.1 Implementación o aplicación de la propuesta**

Esta propuesta didáctica surge a partir de la búsqueda de materiales que procuren apoyar la adquisición de aprendizajes en Probabilidad y que a su vez sean atractivos a los estudiantes. Se ha mencionado en diversos foros, como la International Conference on Teaching Statistics o los congresos del International Statistics Institute, la importancia del razonamiento probabilístico, por lo que la implementación y evaluación de nuevos materiales que permitan trabajar con contenidos de razonamiento probabilístico se vuelve parte esencial de la educación estadística...

La aplicación de la propuesta didáctica, realizada en el CCH, se detalla a continuación.

##### **4.1.1 Introducción**

En una sociedad cada vez más informatizada, muchos educadores están buscando desarrollar actividades con el apoyo de la computadora teniendo como idea que, en la mayoría de los casos, una de las principales ventajas es la rápida

reproducción de resultados de ensayos experimentales. Con todo, no puede perderse de vista que muchas veces el alumno no sabe con certeza lo que ocurre en un proceso de simulación, ya que las operaciones ocurren dentro de la computadora. De acuerdo con esta limitante, puede plantearse como hipótesis que sería mejor cognitivamente trabajar conjuntamente la experimentación física y la simulación computacional; es decir, una experiencia didáctica en la que los alumnos manipulen primero los materiales concretos, en este caso los dados, para después pensar en el comportamiento de esta misma actividad computacionalmente.

Al trabajar con la combinación de experimentación física y simulación computacional, se busca el dar a los alumnos mayores vías para ayudarles a formar su razonamiento probabilístico. Y es natural hacerlo así si se parte de la idea de que la construcción del concepto de probabilidad puede realizarse a partir de la comprensión de sus tres nociones básicas: percepción del azar; idea de la experiencia aleatoria; y noción de probabilidad. De acuerdo con Dias (2004, pp. 3): “La *experimentación con fenómenos aleatorios* proporciona al alumno una experiencia difícil de adquirir en su relación con lo cotidiano. La falta de experiencia parece ser la causa de algunas intuiciones incorrectas en la enseñanza de la probabilidad. Construir experimentos en el salón de clases puede confrontar estas intuiciones incorrectas y dar la base para la construcción de nuevos conocimientos, que sean congruentes con la teoría de Probabilidad”.



Como destaca Truran (1994, pp. 28-29) en el título de su artículo – “*What is the probability of...?*” – existe la necesidad de que los docentes retomen esta interrogante por medio de cuestiones más sofisticadas, además de involucrar a los estudiantes en la comparación y evaluación de las diferentes formas de la probabilidad. Este autor muestra, por medio de un experimento involucrando el lanzamiento de un dado, que hay por lo menos tres diferentes maneras de estimar la probabilidad de obtener la cara seis y que estos valores pueden ser completamente diferentes. Esas formas se denominan probabilidad Simétrica, probabilidad Experimental y probabilidad Subjetiva.

En la propuesta didáctica se dio énfasis a la probabilidad Simétrica, llamada también Clásica, definida por Laplace, siendo esta la herramienta que el alumno utilizó racionalmente para resolver los problemas propuestos. Pero también fue posible proponer ideas basadas sobre un razonamiento probabilístico totalmente subjetivo y probar algunas hipótesis por medio de la experimentación.

De acuerdo con las ideas discutidas anteriormente, Batanero y Godino (2002, pp. 5) trazan algunas orientaciones sobre cómo ayudar a los niños en el desarrollo del razonamiento probabilístico:

- “proporcionar amplia variedad de experiencias que permitan observar los fenómenos aleatorios y diferenciarlos de los deterministas;
- estimular la expresión de predicciones sobre el comportamiento de esos fenómenos y los resultados, así como su probabilidad;

- organizar el levantamiento de datos de experimentación de modo que los alumnos tengan la posibilidad de contrastar sus predicciones con los resultados producidos y revisar sus creencias;
- resaltar el carácter imprevisible de cada resultado aislado, así como la variabilidad de las pequeñas muestras, mediante la comparación de resultados de cada niño o por partes; ayudar a apreciar el fenómeno de convergencia, mediante acumulación de resultados de toda la clase, y comparar la confiabilidad de pequeñas y grandes muestras”.

Frente a lo expuesto, el trabajo tuvo como objetivo desarrollar una propuesta didáctica, basada sobre la metodología de Resolución de Problemas de Polya, utilizando dados con diferentes números de lados para presentar o recordar algunos conceptos de las probabilidades Clásica, Subjetiva y Experimental, así como ayudar a los alumnos en la toma de decisiones basadas sobre el razonamiento probabilístico. Este estudio fue realizado con alumnos en etapa pre universitaria del Plantel Naucalpan.

#### **4.1.2 Filosofía de la Probabilidad**

El uso del concepto de aleatorio, siendo que aún no es formalmente definido, puede ser identificado en registros muy antiguos, tales como las referencias bíblicas a los objetos sacerdotales israelitas *Urim* y *Tumim* (aproximadamente 1.500 a.C.) y la literatura de los rabinos, pasando por referencias arqueológicas tales como los huesos (*astragali*) utilizados por los antiguos romanos como objetos para resultados aleatorios, hasta llegar a las

consideraciones de Galileo Galilei al respecto de principios que definirían el evento aleatorio (Hald, 2003, pp. 12).

También puede considerarse que dichos axiomas de Galileo serían los esfuerzos más antiguos para formalizar el cálculo de probabilidades, pero fue en el siglo XVI que el matemático y jugador italiano Jerónimo Cardano (1501-1576), decidió estudiar las probabilidades de ganar en diversos juegos de azar. Analizó las probabilidades de seleccionar ases de un mazo de cartas, de obtener “sietes” con dos dados, y publicó los resultados de estas investigaciones en un manual para jugadores llamado “Liber de Ludo Aleae” (El libro de los juegos de azar – 1526).

De acuerdo con Lopes y Meirelles (2005, pp. 2), Cardano es considerado el iniciador de la Teoría de Probabilidades, ya que fue el primero en hacer observaciones del concepto probabilístico de un dado “honesto” y en escribir un argumento teórico para calcular probabilidades. Él afirmó que, al jugar a los dados, la probabilidad de obtener uno, tres o cinco era la misma que la de obtener dos, cuatro o seis.

Sin embargo, el consenso es que las cartas intercambiadas entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal al respecto del problema del cálculo de probabilidades en juegos de azar son la inauguración de la teoría matemática de este cálculo. Después de Fermat y Pascal, se tienen las contribuciones de Pierre Simón de Laplace y Karl Friedrich Gauss, entre otros, en el siglo XIX (Stigler, pp. 27, 1986).

Y la profusión de estudios en el siglo XX que culminaron con la teoría axiomática de A. N. Kolmogorov.

El cálculo de probabilidades tiene en su literatura más antigua un gran esfuerzo para la definición formal (matemática) del concepto de probabilidad. Una conclusión parsimoniosa trataría tal concepto en posesión de dos interpretaciones, una llamada *frecuentista* y la otra *grado de creencia o fe* (Folks, pp. 12, 1981). La primera identifica la probabilidad de un evento con la frecuencia relativa de ese evento en una larga secuencia (*long run*) de repeticiones del fenómeno que contiene a este evento, y la segunda con una medida subjetiva de la posibilidad de que tal evento ocurra. Restaría entonces el problema de cómo *calcular* (o estimar) una probabilidad. Inicialmente se presentarán algunas de las concepciones (o abordajes de estimación) referentes a probabilidades clásica (o Laplaciana), frecuentista (o experimental) y subjetivista, ya que es necesario tener claridad en los conceptos de cada una de ellas y de sus conexiones para verificar la adecuación del razonamiento probabilístico de los alumnos en cada una de las situaciones que fueron presentadas. El abordaje clásico calcula la probabilidad como una razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, la frecuentista calcula (estima) como una frecuencia relativa en repeticiones, y la subjetiva estima una probabilidad por determinación arbitraria (aunque calibrada) del analista. Se desarrollarán más detalladamente estos abordajes a continuación.

Se puede decir que el primer intento más sustentado para la definición de la probabilidad con rigor matemático se debe a Laplace a través de la publicación de la obra "*Teorie analytique des probabilités*", en 1812. Conocida como Concepción Clásica, la probabilidad es definida por este autor, como ya se dijo, como la razón entre el número de casos favorables en relación con el número total de casos posibles, siempre que todos los resultados sean admitidos como igualmente probables de suceder. De acuerdo con Godino et. al. (1996, pp. 6): "Los juegos de azar basados sobre dados, monedas, extracción de canicas en urnas, se enmarcan en esta perspectiva teórica por tratarse de fenómenos cuya variable es discreta y porque se supone que siempre es posible seleccionar, como espacio muestral, un conjunto de eventos elementales que garantizan equiprobabilidad".

Otro modo de abordar la probabilidad es en una perspectiva frecuentista, es decir, a partir del cálculo de las frecuencias relativas de ocurrencias de eventos provenientes de experimentos repetidos. La teoría frecuencial, según Godino et. al. (1996, pp. 7) fue defendida en 1919 por Richard von Mises a partir de la obra "*Probability, Statistics and Truth*"; a pesar de que, ya en 1888, John Venn defendía explícitamente el cálculo de probabilidad a través de las frecuencias relativas de los eventos ocurridos. La principal característica de este enfoque es que el valor matemático de la probabilidad emerge del proceso de experimentación.

A pesar de que en este abordaje no se aplica la obligatoriedad de simetría y equiprobabilidad a los experimentos aleatorios, sin embargo, es necesario que

haya un número significativo de repeticiones de un experimento y que sus resultados muestren señales de estabilización (Gonçalves, 2004, p. 150).

Puede, también, interpretarse la probabilidad de forma subjetiva, como expresión de la creencia o percepción personal, y no fundamentada en la frecuencia de ocurrencia. Al respecto Canavos (1984, p. 31) indica: “La probabilidad se interpreta como el grado de creencia o de convicción con respecto a la ocurrencia de una afirmación. En este contexto, la probabilidad representa un juicio personal acerca de un fenómeno impredecible. Esta interpretación de la probabilidad se conoce como *subjetiva* o *personal*”. Así, bajo este enfoque, diferentes personas pueden atribuir diferentes probabilidades a la ocurrencia de un mismo evento.

Truran (1994, p. 29) afirma que “en un dado ‘honesto’ surge *solamente una probabilidad* simétrica, pero hay un número infinito de probabilidades Subjetivas y Experimentales”. En el salón de clases no es suficiente solo hablar de los diferentes tipos de probabilidad; necesitamos elaborar cuestiones como ‘al lanzar un dado 100 veces encontramos una probabilidad Experimental de obtener la cara seis y, ¿cuál es la probabilidad Subjetiva que atribuirías a la obtención de la cara seis y cuál es la razón para esta elección?’ El nivel de la pregunta propuesta genera una variedad de respuestas y, de acuerdo con este autor, tales variaciones fortalecerán las oportunidades educativas valiosas en la comprensión de la

interrelación entre las tres formas de la probabilidad, así como de la naturaleza del modelo matemático.

Dadas las formas en las que están estructuradas, de las tres definiciones de probabilidad, la Clásica exige al alumno una capacidad de pensamiento probabilístico más desarrollada que las otras dos. Pero la probabilidad experimental permite observar el fenómeno aleatorio y hacer predicciones sobre el comportamiento del fenómeno y, como se refirió anteriormente, Batanero y Godino (2002, pp. 9) establecen esos puntos como orientaciones en el desarrollo del razonamiento probabilístico. Por ello, en la propuesta didáctica se trabaja con los tres abordajes, adecuando cada uno de ellos a las necesidades de las actividades y bajo la idea de la Resolución de Problemas.

#### **4.1.3 Resolución de Problemas**

Diversos investigadores han recomendado la metodología de Resolución de Problemas para la enseñanza de las Matemáticas. Pero al mismo tiempo esta metodología ha enfrentado cierto rechazo, cuando el estudiante encuentra que el problema a resolver conlleva un planteamiento innegablemente matemático.

Este rechazo del estudiante puede tener su origen a malas experiencias previas del alumno con la Matemática, a deformaciones culturales, etcétera. Pero se ha encontrado que una posible vía para evitarlo es plantear el problema dentro del contexto del juego. Esto lleva al estudiante a explorar sobre el juego para

conocerlo, a establecer y probar sus estrategias y dedicar esfuerzo a encontrar la “solución” que le permita ganar en el juego.

Según Borin (1996, p.10), “La resolución de problemas debe ser la metodología elegida para el trabajo con juegos, por ser más adecuada para desarrollar una postura crítica ante cualquier situación que exija una respuesta. Así, cada hipótesis/estrategia formulada o cada jugada desencadena una serie de cuestionamientos como: ¿Es esa la única jugada posible? Si hubiera alternativas, ¿cuál escoger y por qué escoger esta o aquella? Terminado el problema o la jugada, ¿cuáles fueron los errores y por qué se cometieron? ¿Aún es posible resolver el problema o ganar en el juego, si se cambiaran los datos o las reglas?”.

En este sentido, parece recomendable diseñar propuestas didácticas que contemplen juegos, en el entendido de que, para que la metodología de Resolución de Problemas funcione, el juego en sí mismo o la sola intención de enfrentar a los estudiantes con una situación problemática no son suficientes. Debe tenerse una estrategia de enseñanza que permita aprovechar las características tanto de la metodología como del juego para lograr que los alumnos puedan construir sus propios aprendizajes a partir del razonamiento.

Esto puede ser más claro a la luz de lo expuesto por Abrantes (1989, pp. 7-10) en su artículo “*Um (bom) problema (nao) é só...*”, en referencia a lo que es un problema. Este mismo autor establece lo que es una situación problemática y lo que en un principio no lo es. Con respecto a las primeras habla de que son



situaciones en las que el contexto es problemático y al alumno se le estimula a “generar preguntas, hacer conjeturas y, eventualmente, probarlas”.

En referencia a las segundas, establece que no son realmente situaciones en las que se esté formulando un problema, pero en las que se pretende la exploración del contexto por parte del alumno. Según Abrantes (1989, pp.7-10): “Explorar tiene aquí el sentido normal de la palabra: entrar en terreno desconocido, tomar datos, detectar diferencias, ser sensibles a las repeticiones y a las analogías, reconocer regularidades y patrones –o por ventura en un sentido aún más fuerte – investigar, tratar de encontrar, tratar de descubrir”.

Bajo estas ideas, la estrategia que se propone implica precisamente que los estudiantes razonen, probabilísticamente, para tomar decisiones respecto a un juego, bajo un esquema de razonamiento inductivo.

Igualmente, el diseño didáctico se orientó dentro de la concepción pedagógica que se ha propuesto para “estrategia didáctica” en el Colegio de Ciencias y Humanidades:

“Una estrategia didáctica es una secuencia de acciones sistemáticas integradas a procedimientos y actividades dirigidas a facilitar los aprendizajes de los alumnos, especificados en el programa de una asignatura; para que el estudiante, de manera consciente y autónoma, tome decisiones que le permitan familiarizarse con la situación o problemática que se le presenta y recupere de su experiencia lo que conoce al respecto.

En la estrategia, el profesor especifica cuáles son los propósitos, los aprendizajes y las actividades a desarrollar, delimita los tiempos en que se pretende realizar cada una de estas tareas y los recursos necesarios para llevarlas a cabo, la forma en que evaluará el trabajo realizado tanto por él como por el alumno.

En su estructura la estrategia establece tres etapas: **planeación, ejecución** y **evaluación**; sin olvidar que todo este proceso no es algo predeterminado, sino flexible y dinámico.

Finalmente, toda estrategia asume características específicas dependiendo del contexto educativo en que se sitúa y de la propuesta disciplinaria a la que se aplique, así como al estilo propio de cada profesor” (Cazadero et. al., 2006).

En el presente trabajo, con el planteamiento de esta metodología, fueron utilizadas tanto la manipulación con material concreto (experimentación física) como la simulación computacional.

Polya hace hincapié en la importancia del interrogatorio que el profesor hace a los alumnos durante el proceso de resolución de un problema. En ese sentido, la propuesta didáctica se ha desarrollado precisamente como un interrogatorio. Este se da tanto en las hojas impresas que se le presentan al alumno, como en la discusión verbal que el profesor dirige con el grupo; ambos elementos serán ampliamente descritos más adelante en este capítulo.

Igualmente el mismo interrogatorio conlleva veladas sugerencias a los alumnos de cómo resolver la serie de cuestionamientos que se les plantean. Estas sugerencias se apegan a lo sugerido por Polya (1994, pp. 8): “Deben ser generales, es decir, que deben de poder aplicarse no solamente al problema considerado, sino a problemas de todo tipo, de manera a contribuir al desarrollo de las *aptitudes* del alumno y no solamente a una técnica particular”.

Asimismo, dado que parte del interrogatorio en clase será definido por las respuestas de los alumnos, se asume que el mismo no puede ser estricto e inamovible. “Este método de interrogación no tiene nada de rígido y es lo que determina su interés ya que, en este dominio, todo sistema mecánico, pedante, necesariamente es malo. Nuestro método comporta una cierta elasticidad, cierta variedad; admite diversos modos de abordar el problema; puede y debe ser aplicado de tal modo que las preguntas planteadas por el profesor se le *hubiesen podido ocurrir espontáneamente al propio alumno*” (Polya, pp. 10, 1994).

#### **4.1.4 Material Concreto**

Es importante resaltar que el uso de materiales concretos no puede ser indiscriminado y debe realizarse con plena conciencia de la estrategia y de la manera en la que los materiales pueden apoyar al logro del propósito educativo. Ningún material es válido por sí solo. Monteiro (2005. Pp. 40-43), citado por Ribeiro afirma: “Algunos profesores creen que el simple hecho de utilizar el material concreto vuelve sus clases ‘constructivistas’ y que eso garantiza el

aprendizaje. Muchas veces el estudiante, además de no entender el contenido trabajado, no comprende por qué el material está siendo utilizado”.

Además de eso, se debe tener cuidado para que la actividad presente situaciones cercanas a la realidad de los alumnos, ya que si esto no fuera así, el mismo material puede convertirse en impedimento para el aprendizaje, un objeto tanto o más abstracto que el concepto que se pretende trabajar. En el caso de los dados, el objeto “dado”, la noción de “dado”, son muy cercanos a la realidad del alumno. Pero en este trabajo se introdujo una variante atractiva para los estudiantes: no sólo se les presentó el tradicional dado de seis caras, sino también dados de 2, 4, 8, 10, 12, 20, 30 y 100 caras (Figura 1).



Figura 1 – Dados involucrados en la actividad, además del dado tradicional de seis caras.

En la manipulación de los dados el alumno utiliza en un principio únicamente los conceptos de probabilidad Clásica, pero repitiendo el mismo proceso una cierta cantidad de veces, puede transitar de la teoría hacia las nociones de la probabilidad Experimental. Por ello, el uso del juego para la

simulación del fenómeno aleatorio, enfocado al aprendizaje, puede fomentar los siguientes cuestionamientos: ¿Estaremos siendo tendenciosos de alguna manera? ¿Los experimentos fueron realizados bajo condiciones idénticas? ¿Pueden ser considerados como independientes?

Sobre esos cuestionamientos Carvalho y Oliveira (2002, pp. 3) agregan que no es posible evaluar con precisión la probabilidad, porque el número de ensayos siempre es limitado, a pesar de que podemos contar con la Ley de los Grandes Números. Fischbein (1987, pp. 6), reforzando esa idea, afirma que “la experiencia humana es necesariamente limitada en tiempo, espacio y en el conjunto de posibilidades”. El conocimiento científico que se adquiere a partir de las experiencias empíricas siempre es limitado, ya que las conclusiones necesitan ser más amplias que aquellas que obtenemos por observación. En este escenario se refuerza la idea de la necesidad de promover una interacción entre la experimentación real y la computacional.

#### **4.1.5 Simulación Computacional**

Los beneficios de utilizar la simulación computacional en contextos educativos se han comentado en diferentes momentos y espacios, y se esperaría ampliarlos si el alumno puede construir la propia simulación. A través del proceso de construcción el alumno puede valorar no solamente la viabilidad del modelo con el que realizará la simulación, sino también su propio conocimiento sobre el fenómeno en sí y observar de esa forma el fenómeno de convergencia involucrado

en esta propuesta en particular con mejores bases. Esto es, los alumnos aprenden construyendo su propio conocimiento y dándole sentido.

“La modelación es un proceso que es desencadenado por el alumno cuando le es solicitado el reconocimiento del modelo probabilista que mejor representa e interpreta la situación de la realidad que él quiere estudiar” (Coutinho, 2001, p. 338).

Una ventaja estimulante en el uso de la computadora para el alumno, que ha sido sugerido en la literatura, es su capacidad de realzar la comprensión de conceptos abstractos o difíciles por medio de experiencias inductivas (Kersten, 1983, pp. 416-421; Dambolena, 1986, pp. 339-344; Gordon y Gordon, 1989, pp. 185-189; Shibli, 1990, pp. 55-60, entre otros).

Actualmente se cuenta con diversos programas, desde hojas de cálculo hasta software más especializado en Probabilidad y Estadística que ejecutan procesos de simulación computacional. Pero la mayoría de ellos presentan un problema: fueron diseñados para “*hacer*” Estadística y no para “*enseñar*” Estadística. En particular, para este trabajo se utilizó el software Fathom (Finzer, 2001), tanto por presentar ambas características, como por ser un programa ya adoptado por el CCH.

El programa tiene una estructura dinámica, muy simple y que facilita la interpretación de resultados, permitiendo que incluso alumnos que no hayan trabajado anteriormente con él, lo hagan de manera satisfactoria y eficiente.

Un posible factor de una discusión mayor es que muchas escuelas no cuentan con ningún tipo de soporte computacional en el salón de clases para la realización de un procedimiento similar, pero no abordaremos ese problema aquí al no ser el objetivo de nuestro trabajo.

#### **4.1.6 Secuencia Didáctica**

Se percibió, de manera informal, que los alumnos del CCH con los que trabajamos llegaron a esta etapa (pre universitaria) de estudios con conocimientos de Probabilidad casi inexistentes o incipientes, aunque con algunas ideas previas que pudieron rescatarse para ayudar al desarrollo del razonamiento probabilístico más “formal”. Es decir, ellos ya tenían por lo menos conocimiento de lo que podría ser una probabilidad grande o pequeña, y de lo que ello podría significar en una toma de decisiones.

Frente a este hecho, si la propuesta didáctica, tomada del juego de rol Dungeons and Dragons (Steward et. al., 1994, pp. 8-9), fuera aplicada inmediatamente al inicio de la unidad de Probabilidad, probablemente se correría el riesgo de que los estudiantes no la completaran o no la comprendieran, justamente porque sus conocimientos previos respecto al tema no son sólidos. Así, la propuesta didáctica se aplicó después de que los alumnos cursaron la

unidad programática de Probabilidad, la unidad III del curso de Estadística y Probabilidad I del CCH, cuya duración es de 26 horas (Ávila et. al., 2005, pp. 8, 16) .

Solamente después de esa fase es que se presentó la situación problema a los alumnos, que de acuerdo con el objetivo general, tuvo los siguientes objetivos específicos:

- Presentar la definiciones de las probabilidades: Clásica, Frecuencial y Subjetiva, así como sus mecanismos de cálculos;
- Describir espacios muestrales;
- Identificar la regularidad estadística como propiedad de los fenómenos aleatorios;
- Auxiliar a la toma de decisiones basada en el razonamiento probabilístico.

Esta propuesta didáctica se divide en actividades, nombradas como propuestas, y que se describirán y discutirán simultáneamente a continuación, precedido lo anterior por una descripción general.

#### Descripción general de la presentación de la propuesta didáctica a los alumnos

Como ya se dijo anteriormente, se realizó la actividad que aquí analizamos, después de haber finalizado la unidad III, Probabilidad, de la asignatura. Entonces, de un modo muy informal, se hizo el siguiente planteamiento general a los alumnos: *¿Querrían irse ya y dar por terminado el curso ahora? Para eso podemos asignar las calificaciones del curso por medio de un juego de dados.*



La idea era que si el alumno ganaba, se le daría la nota más alta y podría dejar el curso, pero si el profesor ganaba, el alumno estaría reprobado, y entonces de un modo o de otro, podría dar por terminado el curso. Se presentó entonces una secuencia de cuatro juegos, siendo que en cada una la tirada ganadora valdría cinco puntos y ganaría la partida quien completara primero 100 puntos. Esto es, se buscó presentar indirectamente a los alumnos que habría la necesidad de utilizar nociones de probabilidad experimental, ya que tendrían que repetir el proceso un mínimo de 20 veces para que alguna de las partes ganara y acabar así la partida.

Vale destacar que ese reto, obviamente, fue dado a los alumnos como una situación hipotética, ya que no sería pedagógicamente correcto que el profesor negociara las calificaciones con los alumnos de esa manera. Entonces encararon el desafío apenas como un juego y como una manera de involucrarse en el asunto, sea por la forma en la que se colocó la situación, o por la posibilidad del juego y la apuesta en el salón de clases, o porque encontraron interesante aún siendo irreal el tener una posibilidad de finalizar el curso con un juego, sin tener que pasar por otra forma de evaluación.

A cada pareja de alumnos se le entregó un juego de copias con una serie de preguntas impresas referentes a los desafíos, así como las instrucciones para que, al final de la discusión con respecto a los juegos llevados a cabo con los

dados, realizaran la simulación por medio de la computadora también por parejas. Una de estas copias se muestra en el Anexo 1.

En total se presentaron a los alumnos cuatro desafíos, los cuales se discutieron a medida que iban apareciendo.

### *Primera propuesta de juego*

#### Descripción

Para el primer juego se mostró al grupo un dado de cuatro, y otro de seis caras, y se presentó la siguiente propuesta:

*Ustedes van a lanzar el dado de cuatro caras, y yo lanzaré el dado de seis, los dos una sola vez; quien saque el número mayor gana la tirada.*

#### Comentario

Los estudiantes encontraron algo extraño en la propuesta, entonces comenzaron a analizar el juego. Algunos pensaron inicialmente que el juego era honesto y se mostraron dispuestos a participar. Pero la mayoría pidió un poco de tiempo para pensar, pues aún no estaban convencidos de lo idóneo de las reglas. Finalmente un alumno indicó que el profesor tenía ventaja, pues ellos sólo podrían llegar como máximo a un resultado de cuatro, mientras que él podría llegar hasta seis.

Una vez que se alcanzó esta conclusión, se pidió a los alumnos que la redactaran en sus propias palabras y que la anotaran en las hojas que se les había entregado.

Se cerró entonces esta fase acordando que de hecho el juego no era equitativo y se lanzó la segunda propuesta.

### *Segunda propuesta de juego*

#### Descripción

Para el segundo juego, se mantuvo el dado de cuatro caras, se tomó uno de ocho, y se propuso:

*Ahora voy a lanzar el dado de ocho caras una sola vez y ustedes continúan con el de cuatro caras, pero lo van a lanzar dos veces y sumar los resultados. Solo que ahora gana quien obtenga el número menor.*

#### Comentario

Nuevamente, en un primer momento, una parte del grupo aceptó el juego como equitativo, pero la experiencia de la primera propuesta los dejó más cautelosos y pensaron que podría ser una “trampa numérica” más; entonces la mayoría no accedió tan rápido a jugar. A este respecto, otra parte del grupo comenzó a investigar de qué forma podrían estar siendo “engañados”, y para ello comenzaron a lanzar el dado de cuatro caras con la intención de verificar el comportamiento del juego para la obtención del valor menor. Y de nuevo, un alumno estableció que el profesor podría obtener un “uno” como valor menor, pero

que ellos sólo podrían sacar “dos” como resultado menor. Se aceptó la explicación, así que se pidió a los estudiantes que también anotaran estas observaciones en las copias, con sus propias palabras, y se pasó la tercera propuesta.

### *Tercera propuesta de juego*

#### Descripción

En el tercer juego se tomaron ahora los dados de seis y doce caras, y se dio una propuesta más:

*Los otros dos juegos no fueron equitativos. Ahora vamos a hacerlo así, ustedes lanzan el dado de seis caras dos veces y suman los dos resultados; yo lanzo una vez el dado de doce. Y quien saque primero un doce gana.*

#### Comentario

En este punto los alumnos no tenían ya la menor confianza en lo que se decía, aunque con todo un mayor número de ellos, respecto de los que se observaron en las otras dos propuestas, consideraron el juego como equitativo y se mostraron dispuestos a apostar. Pero aún se tenía el grupo de los altamente desconfiados, entonces se comenzó a instigar el razonamiento de los alumnos haciendo algunas preguntas:

*¿Están ustedes totalmente convencidos de que el juego es equitativo?  
¿Cómo podrían saber si lo es? ¿Cuál sería la probabilidad de obtener suma de doce? ¿Y cuál sería la mía?*

La mayoría inmediatamente respondió que tendríamos igual probabilidad y que sería de  $1/12$ . Pero como en sus apuntes de la parte introductoria de probabilidad tenían el experimento de la suma de dos dados de seis caras, se dieron cuenta del error y reconsideraron que en realidad tendrían apenas una probabilidad de  $1/36$ . De nueva cuenta se les solicitó escribir estas observaciones, y se llegó así a la última propuesta.

#### *Cuarta propuesta de juego*

##### Descripción

Se inició comentando que siempre se tomó el dado con mayor número de caras y que dejamos para los alumnos el de menos número de caras, y con eso ellos podrían estar teniendo la idea de que era ese el hecho que los dejaba siempre en desventaja en las partidas. Entonces se entregó al grupo uno de 20 caras, y se mantuvo un dado de diez caras, y con la última propuesta:

*Ustedes han jugado siempre con el dado de menos caras y yo con el dado de más caras. Ahora ustedes van a lanzar el dado de 20 caras una vez, y yo lanzaré el dado de diez caras dos veces y sumaré los resultados. Ganará quien saque un diez.*

##### Comentario

El cambio de tener ahora el dado con “más lados” causó dudas en algunos acerca de si esta vez tenían la ventaja en la partida, pero tampoco creían más en

la disposición de presentarles un juego equitativo. Además, después de la experiencia con la propuesta anterior, la mayoría ya consideraba importante calcular las probabilidades que tendrían cada uno de los jugadores. Después de algunos minutos, muchos percibieron que el profesor tenía la ventaja para obtener diez como resultado e inclusive describieron todas las posibles parejas, un total de nueve, para sacar la suma de diez.

Pero al momento de comparar los resultados, tuvieron dificultad para argumentar que  $9/100$  es mayor que  $1/20$ , mostrando una deficiencia con el concepto de fracción. Entonces acabaron por apelar a un “falso intuitivo”, al decir que la probabilidad para el profesor era mayor no tanto por la comparación de las fracciones, sino por la experiencia de las propuestas anteriores. Finalmente, con una pequeña intervención de parte del profesor, consiguieron establecer la comparación correcta y argumentar por que el juego no era equitativo. Una vez más, estas observaciones debieron ser redactadas por los estudiantes en sus copias. En seguida, se abrió una discusión con el grupo sobre los juegos presentados.

#### **4.1.7 Discusión con el grupo**

Se inició la discusión con la siguiente pregunta:

*¿Ustedes consideran que no fui “honesto” con las propuestas?*

La mayoría consideró que sí, por lo que hubo que reforzar dos características de los juegos: que los dados eran honestos y que no se hizo ningún tipo de trampa. Lo que ocurrió es que se calcularon previamente todas las probabilidades y se optó siempre por la jugada que traería ventaja.

Hecho esto, se les pidió que respondieran a las preguntas de la cinco a la ocho en las copias, cuestionándoles en ellas acerca de la equidad del juego y de las probabilidades que ellos consideran que se tienen de ganar en una tirada de cada partida.

De esta forma se concluyó que calcular las probabilidades de algún fenómeno aleatorio puede ser de mucha utilidad en la toma de decisiones, no sólo para un tema tan banal como un juego de dados, sino para otros mucho más importantes como el control de calidad en la industria o pruebas en las áreas de la salud, entre otros. Se hizo notar también que aunque inconscientemente, indirectamente ellos tomaron una decisión durante las partidas, que fue la de no jugar. Se realizó entonces otra pregunta, misma que aparece en la actividad impresa como la número nueve:

*Si hubieran jugado, ¿podrían haber ganado alguna partida?*

Respondieron que sí, pero que consideraban las posibilidades muy remotas. Este razonamiento podría hallar su origen en las observaciones que los estudiantes realizaron durante la experimentación, al tiempo que muestra una

comprensión más depurada en lo que respecta a diferenciar entre lo improbable y lo imposible, siendo que lo improbable cae en el campo del azar y lo imposible en el del determinismo.

Después, se discutió con los alumnos el por qué el desafío se hizo a varias tiradas y no a una sola, y que anotaran sus consideraciones en la pregunta diez. La intención era la de inducir un razonamiento probabilístico más alto, bajo el enfoque experimental.

Antes de pasar a la simulación con la computadora, se les pidió que indicaran que probabilidades consideraban que tendrían de ganar cada una de las cuatro partidas. Después, se discutió sobre la alternativa de revisar estas cantidades a partir de la repetición de muchos lanzamientos de acuerdo a las reglas establecidas, y la pertinencia de simular estas repeticiones por medio de la computadora (preguntas once a catorce).

Los puntos quince a 37 de la actividad corresponden a las instrucciones de simulación requeridas por el paquete Fathom, que fue el elegido para que los estudiantes trabajaran esta parte, así como algunos cuestionamientos respecto a comparar las observaciones realizadas en la simulación con las respuestas que dieran en las preguntas iniciales (propuestas de probabilidades, honestidad del juego, pertinencia de arriesgarse a jugar). En los puntos referentes a las instrucciones para la simulación, se colocaron imágenes que permitieran al



estudiante manejar el paquete aún siendo que era la primera vez que trabajaban con él.

Finalmente se entregaron al grupo los dados involucrados en los juegos anteriores, así como los de 2, 30 y 100 lados, y se les pidió que diseñaran un juego con características similares a los presentados, esto es, que aparentaran ser equitativos, sin serlo en realidad. Además, los alumnos deberían decir cuál sería la tirada para ganar y de qué manera jugarían para tener la ventaja. También les pedimos diseñar otro juego que no sólo aparentara equidad, sino que además efectivamente la tuviera. Al final, se discutió de nuevo sobre el uso del cálculo de probabilidades como herramienta en la toma de decisiones; las observaciones al respecto fueron vaciadas por los alumnos en la última pregunta de la actividad. La intención de la parte final del trabajo al pedir a los alumnos que diseñaran sus propias propuestas de juegos, fue la de verificar si sus niveles de comprensión y de razonamiento probabilístico les permitían ya la habilidad de diseñar sus propios problemas.

#### **4.2 Los resultados de la aplicación de la propuesta**

Con respecto a la sección final, en donde se solicitó una propuesta de juego a los alumnos, se tiene lo siguiente.

Se observó que efectivamente hubo alumnos que consiguieron describir alguna propuesta de juego acorde con las características solicitadas, aunque hayan sido apenas reproducciones de la segunda y la cuarta propuestas con

modificaciones apenas en las parejas de dados involucrados. Por ejemplo, ellos lanzarían una vez un dado de 30 caras y su oponente tres veces uno de diez caras, usando la suma de los resultados, y ganando quien obtuviera treinta.

También se observó que algunos de los alumnos más participativos en la clase de aplicación, elaboraron juegos más complejos, del estilo de la tercera propuesta.

Pero en contraparte hubo alumnos que no consiguieron dar una propuesta de acuerdo a las especificaciones. Así, las deficiencias observadas en el razonamiento probabilístico de estos alumnos se presentaron de la siguiente manera:

1. El alumno no dio una respuesta.
2. Presentó alguna propuesta, pero el juego no aparentaba equidad.
3. La propuesta era aceptable, pero no consiguió tener la ventaja.

En lo que respecta al trabajo con el paquete Fathom, solo algunos tuvieron pequeñas dificultades en el manejo, mismas que pudieron solucionarse de manera inmediata.

En el Anexo 2 se muestra un ejemplo de una de las propuestas didácticas respondida.

### **4.3 Observaciones**

Una vez que se ha aplicado la propuesta y realizado el análisis de los resultados obtenidos es necesario expresar algunas observaciones que se derivan de ellos.

En primer lugar es importante considerar que, al aplicar la propuesta didáctica, se esperaba poder obtener mejoría en el nivel de razonamiento probabilístico entre los alumnos que integran el grupo de aplicación. Sin embargo, los resultados observados nos muestran que si bien ello se logró con algunos de los estudiantes, no todos mostraron avances en el desarrollo del razonamiento probabilístico.

En segundo lugar los resultados obtenidos muestran que el nivel de asimilación de los conocimientos es distinto para cada alumno.

En tercer lugar, aparentemente el alumno puede alcanzar un mayor desarrollo en su razonamiento probabilístico, a partir de la resolución de un problema que involucre condiciones azar, y que sea congruente con el contexto y nivel cognoscitivo del estudiante.

En cuarto y último lugar, a partir de los resultados obtenidos, es posible establecer que la propuesta presentada en este trabajo puede ser un apoyo para los estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades para el desarrollo de su razonamiento probabilístico.

## **CONCLUSIONES**

El análisis sobre la aplicación de la estrategia didáctica para elevar el razonamiento probabilístico en los alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades de la Universidad Nacional Autónoma de México permite elaborar algunas conclusiones, señalando que el Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM es una institución en la que es posible realizar procesos de investigación educativa que permitan conocer más acerca de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las diferentes asignaturas, incluidas las del área de Matemáticas..

Como ya se ha señalado, el aprendizaje de la Probabilidad, y en particular el desarrollo del razonamiento probabilístico, es algo difícil de alcanzar para los estudiantes, e incluso para el ciudadano común.

Con respecto a la estrategia y su aplicación, el análisis muestra una evolución de mejoría en el razonamiento probabilístico en algunos de los alumnos a cada propuesta de juego presentada, siendo que los mismos consiguieron verificar que era posible utilizar el concepto de probabilidad experimental, en el hecho de que simulaban algunas jugadas para comprender el comportamiento teórico del juego. Además, incorporaron la probabilidad subjetiva en el análisis, una vez que desconfiaran del juego intentaban descubrir en dónde estaba sucediendo la “deshonestidad”. Es decir, estas dos concepciones de probabilidad se mostraron como el punto de partida para entender la teoría.

Por otro lado, los alumnos percibieron que la observación y la intuición no eran suficientes en la resolución de las propuestas, siendo necesario de hecho

utilizar el enfoque Clásico de la probabilidad en el momento de sustentar una toma de decisiones.

En la evolución de este proceso de aprendizaje, la simulación computacional mostró ser una herramienta útil para promover la comprensión de la relación entre el punto de vista Frecuentista y el punto de vista Clásico de la probabilidad.

Debe puntualizarse que las secuencias resueltas entregadas por los alumnos muestran diferentes resultados, desde aquellos que no consiguieron evidenciar algún grado de razonamiento probabilístico hasta aquellos que sí, medido esto con el diseño propio de un juego con las características solicitadas. Cabe decir aquí que no se está utilizando alguna taxonomía para clasificar los resultados, más allá de las observaciones que se han señalado con respecto a las propuestas de juegos, en donde el alumno:

1. No dio una propuesta de juego.
2. Presentó alguna propuesta, pero el juego no aparentaba equidad.
3. La propuesta era aceptable, pero no consiguió tener la ventaja.
4. Generó una buena propuesta, con las características solicitadas.

Así las cosas, es viable suponer que la propuesta efectivamente puede servir de apoyo al desarrollo del razonamiento probabilístico, partiendo de los resultados observados en algunos de los estudiantes, aunque del mismo modo nos muestra

que alcanzar dicho razonamiento no es tarea sencilla, en términos de los resultados más pobres que igualmente arrojó la aplicación de la secuencia.

Con respecto a la pregunta planteada al inicio del presente trabajo, ¿Existe alguna evidencia de que, tras la aplicación de la secuencia didáctica, los alumnos muestren algún nivel de razonamiento probabilístico?, puede hablarse de alguna evidencia de avance en el pensamiento probabilístico en algunos de los estudiantes, pero desafortunadamente no en todos ellos.

En ese sentido, si se busca el desarrollo de dicho razonamiento en el estudiante de Estadística y Probabilidad del bachillerato, es de considerarse que la aplicación de secuencias didácticas diseñadas bajo el enfoque de resolución de problemas, que impliquen material tanto manipulable como virtual, y que incluyan los tres enfoques de la probabilidad, puede ser de utilidad.

Igualmente ha de considerarse que muchas más acciones deben llevarse a cabo, ya que también hay elementos para suponer que la mera aplicación de secuencias didácticas con determinadas características no es suficiente para guiar al alumnado a un nivel más alto en lo tocante al pensamiento bajo condiciones de azar.

## **REFERENCIAS**



Abrantes, P. (1989). *Um (bom) problema (não) é (só)...* São Paulo, Brasil. Educação e Matemática, v. 8.

Abreu León, José Luis; Benítez Pérez, Héctor y Bracho Carpizo, Felipe; et. al (2014) Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM. México: Secretaría de Desarrollo Institucional, UNAM

Ausubel, D. (1993). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México. Editorial Trillas.

Ávila, R. et. al. (2005). *Programas de Estudio de Estadística y Probabilidad I y II*. México, D. F., México. Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México.

Borin, J. (1996). *Jogos e Resolução de Problemas: Uma estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo, Brasil. IME-USP, 2ª ed.

Batanero, C., Diaz Godino, J. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat-Maestros*. Granada, España. Universidad de Granada.

Canavos, G. (1984). *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México. McGraw-Hill.

Carvalho, D., Oliveira, P. (2002). *Quatro concepções de probabilidade manifestadas por alunos ingressantes na Licenciatura em Matemática: clássica, frequentista, subjetiva e formal*. En 25ª Reunião Anual da Anped, 2002, Caxambú. Anais eletrônicos... Rio de Janeiro, Brasil. ANPED, 2002 Disponible en <http://www.anped.org.br/reunioes/25/excedentes25/dionelucchesicarvalhot19.rtf> Accesado en enero 20, 2007.

Cazadero et. al. (2006). *Propuesta de noción de estrategia didáctica*. Manuscrito no publicado. Universidad Nacional Autónoma de México, Colegio de Ciencias y Humanidades. México D. F., México.

Contreras Domingo, J. (1986). *El currículum como formación*. España. Cuadernos de Pedagogía No. 47.

Coutinho, C. (2001). *Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Thèse (Doctorat), Université Joseph Fourier. Grenoble, France.

Dambolena, I. G. (1986). *Using Simulation in Statistics Courses*. Terre Haute (IN), USA. Collegiate Microcomputer, v. 4.

Dias, A. (2004). *Projeto GESTAR: ensino de probabilidade*. Brasília, Brasil. MEC.

- Diaz Godino, J., Batanero, C. & Cañizares, M. (1996). *Azar y Probabilidad*. España. Editorial Síntesis.
- Finzer, W. (2001) *Fathom*, [software de computadora en disco]. USA. KCP Technologies.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht, Netherlands. D. Reidel Publishing Company.
- Folks, J. (1981). *Ideas of Statistics*. New York, USA. John Wiley and Sons.
- Gil, D. (1986). *Programas-guía de actividades*. Proyecto ACES de ciencia y tecnología. Cuadernos de Pedagogía No. 49.
- Gimeno Sacristán, J. (1986). *Los materiales y la enseñanza*. Cuadernos de Pedagogía No. 52.
- Gonçalves, M. (2004). *Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, Brasil.
- Gordon, F., Gordon, S. (1989). *Computer Graphics Simulations of Sampling Distributions*. Terre Haute (IN), USA. Collegiate Microcomputer, v. 7.
- Hald, A. (2003). *History of Probability and Statistics and their applications before 1750*. New York, USA. John Wiley and Sons.
- Kersten, T. (1983). *Computer Simulations to Clarify Key Ideas of Statistics*. The Two-Year College Mathematics Journal, Washington, USA. v.14, n. 5.
- Lopes, C., Meirelles, E. (2005). *Estocástica nas séries iniciais*. En: XVIII ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 2005, Campinas. Anais. Campinas, Brasil. UNICAMP.
- Marchesi, A. (1986). *Lo que dice El MEC sobre materiales*. Cuadernos de Pedagogía No. 63.
- Martínez Bonafé, J. (1986). *El cambio profesional mediante los materiales*. Cuadernos de Pedagogía No. 64.
- Muñoz, L., Ávila, R., López, V., López y López, D. y Santillán, D. (2005). *Ingreso estudiantil al CCH 2002-2005*. México, D. F., México: Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Polya, G. (1994). *Cómo plantear y resolver problemas*. México. Editorial Trillas.
- Preisser, R. et. al. (2002). *Programa de estudios de Matemáticas I a IV*. México D. F., México. Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México.

Preisser, R. et. al. (2005). *Revisión del Plan de Estudios Tercera Etapa. Orientación y sentido de las áreas*. México, D. F., México. Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México.

Red ACES (2004). *Proyecto ACES de Ciencia y Tecnología* [en línea]. España. Recuperado el 6 de mayo de 2012, de [http://insma.udg.es/ambientalitzacio/web\\_alfastinas/publicacio/aces4/aces4.pdf](http://insma.udg.es/ambientalitzacio/web_alfastinas/publicacio/aces4/aces4.pdf).

Ribeiro, R. (2005). *Material concreto: Um bom aliado nas aulas de Matemática*. São Paulo, Brasil. Revista Nova Escola ed.

San Martín Alonso, A. (1986). *La organización escolar*. Cuadernos de Pedagogía No. 47.

Santos Guerra, M. (1986). *¿Cómo evaluar los materiales?* Cuadernos de Pedagogía No. 48.

Steward, D. et. Al. *The Classic Dungeons & Dragons Game, rules and adventures book*. USA. TSR Ltd.

Stigler, S. (1986). *The history of Statistics*. Cambridge, USA. The Belknap Press of Harvard University Press.

Shibli, M. (1990). *A Two-Stage Exercise on the Binomial Distribution Using MINITAB*. Terre Haute (IN), USA. Collegiate Microcomputer, v. 8, n.1.

Truran, J. (1994). *What is the probability of...?* The Australian Mathematics Teacher, v.50, n.3.

## **ANEXOS**

## **A. 1 Propuesta didáctica**

Anota tus observaciones respecto a los juegos de dados.

1. ¿Vale la pena arriesgar en el primer juego? Explica por qué sí o por qué no.

---

---

---

---

---

2. ¿Vale la pena arriesgar en el segundo juego? Explica por qué sí o por qué no.

---

---

---

---

---

3. ¿Vale la pena arriesgar en el tercer juego? Explica por qué sí o por qué no.

---

---

---

---

---

4. ¿Vale la pena arriesgar en el cuarto juego? Explica por qué sí o por qué no.

---

---

---

---

---

Anota tus observaciones con respecto a los juegos que te propusieron, según se indica:

5. En el primer juego se te propuso lanzar un dado de cuatro caras contra un dado de seis, y la tirada ganadora sería el número mayor.

a) ¿Consideraste que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

P(Ganar con el dado de cuatro caras) = \_\_\_\_\_

P(Ganar con el dado de seis caras) = \_\_\_\_\_

Justifica tus respuestas.

---

---

---

---

---

6. En el segundo juego se te propuso lanzar dos veces el dado de cuatro caras y sumar los resultados, contra un lanzamiento de un dado de ocho caras. La tirada ganadora era el número mayor.

a) ¿Consideraste que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

P(Ganar con dos veces el dado de cuatro caras) = \_\_\_\_\_

P(Ganar con el dado de ocho caras) = \_\_\_\_\_

Justifica tus respuestas.

---

---

---

---

---

7. En el tercer juego se te propuso lanzar dos veces el dado de seis caras y sumar los resultados, contra una vez el dado de doce caras. La tirada ganadora era doce.

a) ¿Consideraste que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

P(Ganar con dos veces el dado de seis caras) = \_\_\_\_\_

P(Ganar con el dado de doce caras) = \_\_\_\_\_

Justifica tus respuestas.

---

---

---

---

---

8. En el cuarto juego se te propuso lanzar una vez el dado de veinte caras contra la suma de los resultados de dos lanzamientos del dado de diez caras. La tirada ganadora era diez.

a) ¿Consideras que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

P(Ganar con el dado de veinte caras) = \_\_\_\_\_

P(Ganar con dos veces el dado de diez caras) = \_\_\_\_\_

Justifica tus respuestas.

---

---

---

---

---



9. ¿Consideras que puedes ganar en una tirada en cualquiera de los juegos?  
Justifica tu respuesta.

---

---

---

---

---

10. Una de las reglas del juego exige anotar cinco puntos al ganador de cada tirada y declarar ganador de la partida al primero que llegue a cien puntos.  
¿Por qué piensas que se tiene esta regla en vez de que la partida sea a una tirada?

---

---

---

---

---

11. ¿Qué probabilidad hay de que ganes la partida para cada uno de los juegos?

P(Ganar partida uno) = \_\_\_\_\_  
P(Ganar partida dos) = \_\_\_\_\_  
P(Ganar partida tres) = \_\_\_\_\_  
P(Ganar partida cuatro) = \_\_\_\_\_

Justifica tus respuestas.

---

---

---

---

---

12. ¿De qué forma podríamos verificar las probabilidades que acabas de presentar? Propón algunas ideas.

---

---

---

---

---

13. Si jugamos cada partida hasta encontrar un ganador, y hacemos eso muchas veces, contando al final cuántas partidas se jugaron, cuántas se perdieron y cuántas se ganaron, ¿ello nos daría alguna información respecto a las probabilidades de ganar cada partida? Explica por qué sí o por qué no.

---

---

---

---

---

14. ¿Qué inconveniente puede tener el tratar de jugar muchas veces?

---

---

15. Juguemos cada partida en la computadora. Para ello, abre el paquete



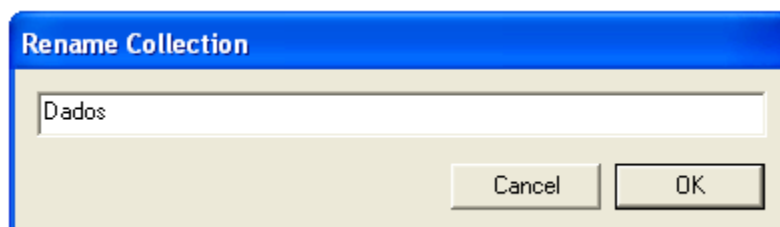
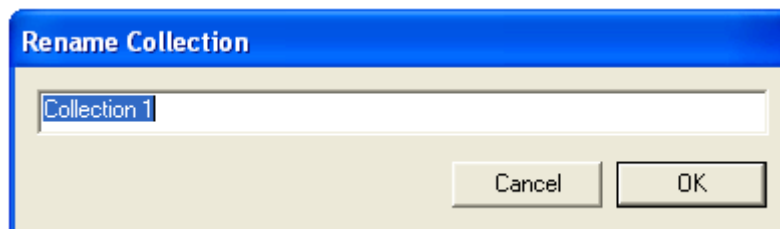
*Fathom* desde el icono


16. Debajo de la barra de herramientas, en donde están los menús del paquete, encontrarás otra barra con una serie de pequeñas imágenes, y debajo, un área en blanco que es el área de trabajo. De las imágenes bajo los menús,

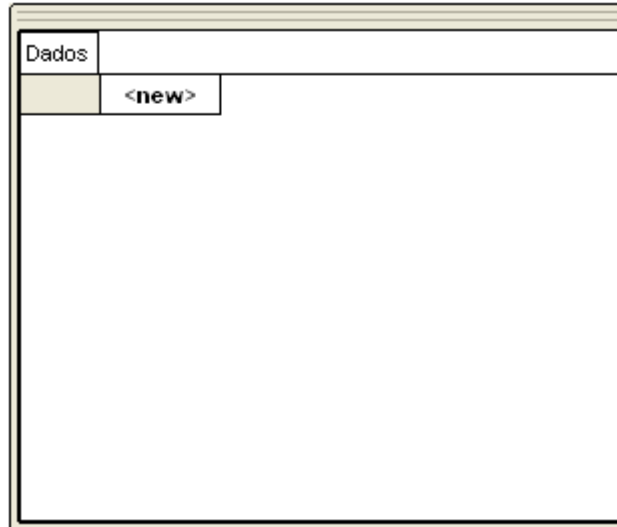
arrastra la caja  al área de trabajo.



17. En el área de trabajo puedes observar el icono . Da doble clic en el nombre Collection 1; en la ventana que aparecerá modifica el nombre a Datos y acepta este nuevo nombre con el botón *OK*.

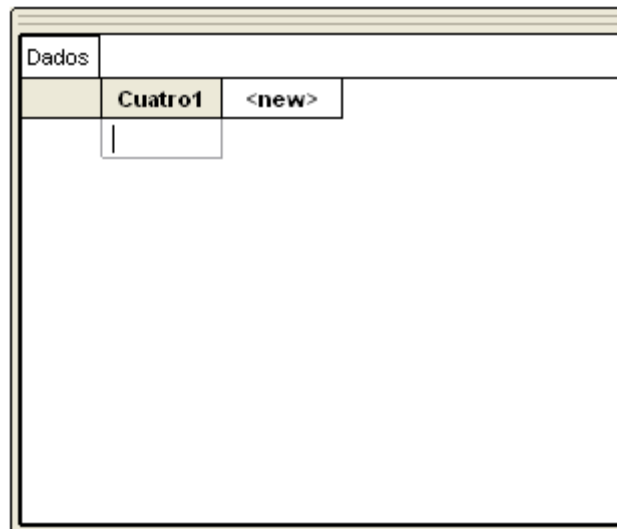


18. Arrastra ahora la imagen  al área de trabajo. Debe aparecer una tabla como la siguiente:



Dados
<new>

19. Al dar doble clic en **<new>** podrás asignar un nombre de variable. Aquí definiremos una serie de variables que representarán los resultados de sucesivos lanzamientos de cada dado en cada uno de los cuatro juegos, así como los resultados correspondientes. *Fathom* llama a las variables como atributos, y el primero que definiremos lo llamaremos como **Cuatro1**:

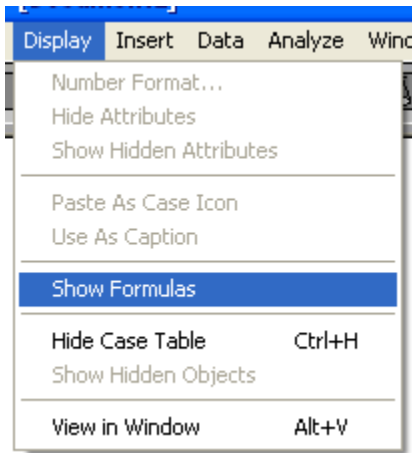


Dados	
Cuatro1	<new>

De la misma forma, define los nombres de atributo **Seis1, Juego1, Cuatro2, Ocho1, Juego2, SumaCuatros, Juego2, Seis2, Doce1, SumaSeises, Juego3, Diez1, Diez2, SumaDieces, Veinte1** y **Juego4**. La tabla se verá semejante a esta:

Dados					
	<b>Cuatro1</b>	<b>Seis1</b>	<b>Juego1</b>	<b>Cuatro2</b>	<b>Ocho1</b>

20. Trabajemos ahora con el primer juego. Usaremos el atributo **Cuatro1** para pedir a Fathom simular el lanzamiento de un dado de cuatro caras, el atributo **Seis1** para simular el lanzamiento de un dado de seis caras y el atributo **Juego1** para saber si en el lanzamiento se gana o se pierde. Verifica que la tabla con los atributos esté resaltada, lo cual sucede si está enmarcada; en el menú *Display* encontrarás la opción *Show Formulas*. Actívala.



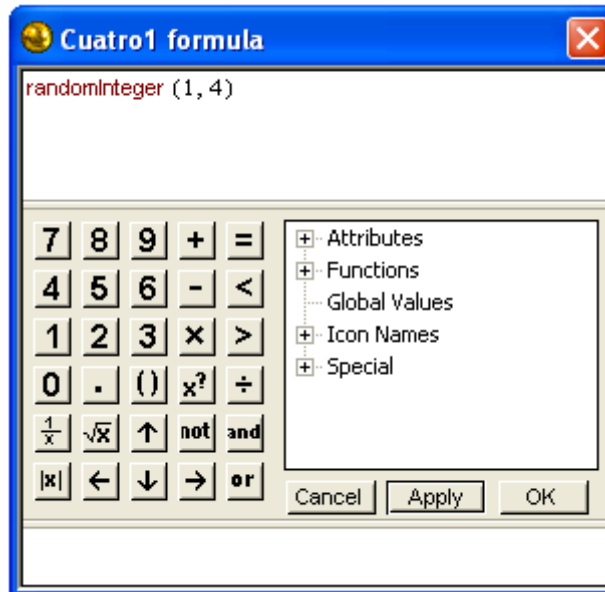
Al hacer esto, aparecerá una celda en gris debajo de cada nombre de atributo en tu tabla.

Dados					
	<b>Cuatro1</b>	<b>Seis1</b>	<b>Juego1</b>		
	=				

21. Da doble clic en la celda que está debajo del nombre de atributo **Cuatro1**. Esto activará la interfase de funciones, que se muestra aquí:



En el espacio en blanco de la parte superior escribe *RandomInteger(1,4)*, tal como se muestra:



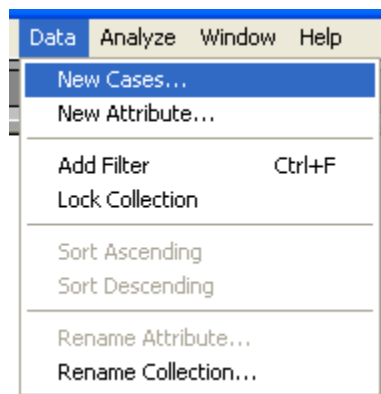
Una vez que lo hayas hecho, da clic en el botón **OK**.

22. repite el paso anterior para los atributos **Seis1** y **Juego1**, introduciendo las fórmulas que aquí se muestran. Al final, la tabla se verá semejante a esta:

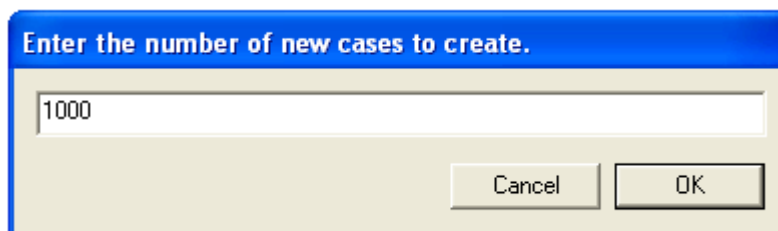
Dados	Cuatro1	Seis1	Juego1
=	randomInteger (1, 4)	randomInteger (1, 6)	if ( cuatro1 > seis1 ) { "Gana" "Pierde"

En los primeros dos atributos se pide a *Fathom* calcular valores enteros entre uno y cuatro y entre uno y seis, respectivamente, de manera aleatoria. En el tercer atributo le pedimos al paquete que compare si el dado de cuatro tuvo un valor mayor que el de seis, en cada tirada; de ser así, anotará que se gana, y de lo contrario, que se pierde. Es importante que en la fórmula coloques todo lo que no sean valores numéricos entre comillas.

23. Ahora pediremos a *Fathom* que simule el juego muchas veces, para que podamos medir cuántos se ganaron y cuántos se perdieron. Para ello, abre en menú *Data* y activa la opción *New Cases...*




En la caja de texto que aparece, ingresa 1000 como número de veces que se jugará.



Tu tabla de datos se verá parecida a esta:

Dados	Cuatro1	Seis1	Juego1	Cuatr
=	randomInteger (1, 4)	randomInteger (1, 6)	if ( Cuatro1 > Seis1 ) { "Gana" "Pierde"	
994	2	2	Pierde	
995	1	1	Pierde	
996	4	1	Gana	
997	3	4	Pierde	
998	4	5	Pierde	
999	3	1	Gana	
1000	2	3	Pierde	

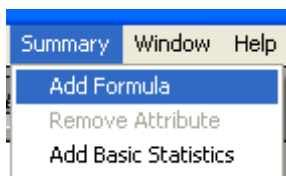
24. Arrastra el icono  al área de trabajo. Aparecerá un cuadro como este:

no data	Summary Table	
↓	→	

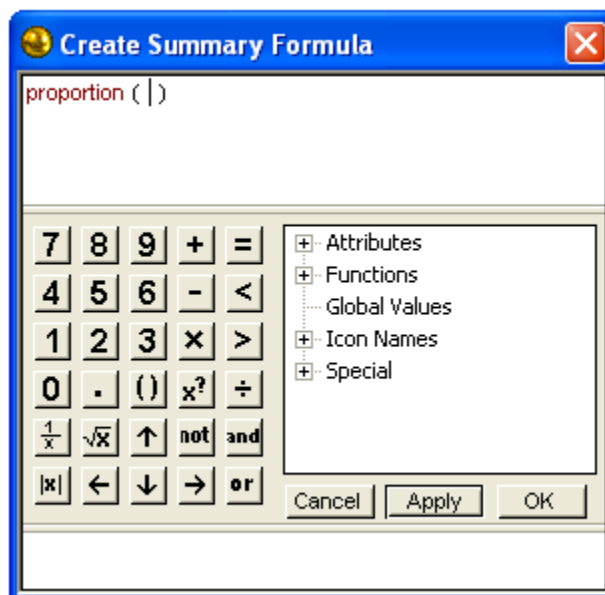
Arrastra desde la tabla de datos el nombre da atributo Juego1 hasta la flecha vertical de este cuadro. Deberás conseguir algo parecido a esto:

Dados	Summary Table	
↓	→	
<b>Juego1</b>	<b>Gana</b>	241
	<b>Pierde</b>	759
Column Summary		1000
S1 = count ( )		

25. Abre el menú Summary y selecciona Add Formula.



Esto activará la interfase de fórmulas de nuevo, y ahí deberás escribir `proportion ( )` y luego dar clic en el botón **OK**.

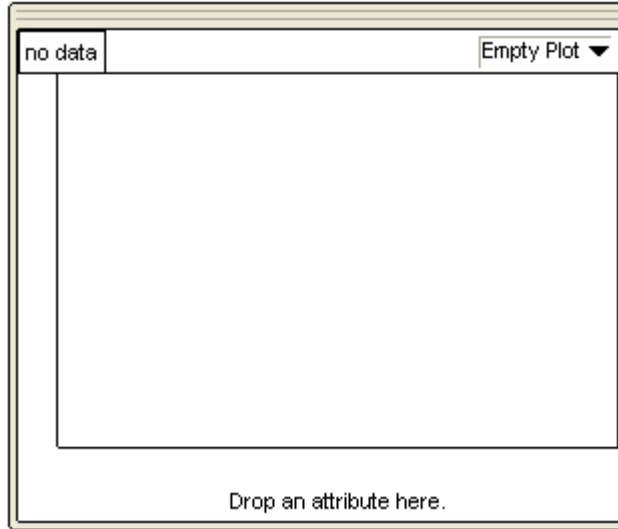


El cuadro ahora se verá parecido a este:

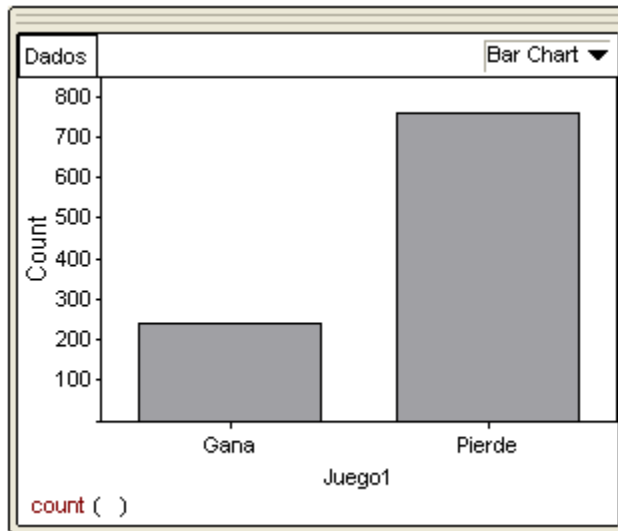
Datos		Summary Table	
↓		⇒	
<b>Juego1</b>	<b>Gana</b>	241	0.241
	<b>Pierde</b>	759	0.759
	Column Summary	1000	1
		$S1 = \text{count} ( )$ $S2 = \text{proportion} ( )$	

26. Ahora arrastra el icono  al área de trabajo:





Después arrastra de nuevo el nombre de atributo Juego1 a la horizontal del gráfico, a donde se lee *Drop an attribute here*.



27. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se te propuso? Justifícalas ampliamente.

---



---



---



---



---



---



---

28. Analicemos ahora el segundo juego. Tal y como lo hiciste en el punto 22 de esta práctica, ingresa las siguientes fórmulas para los atributos **Cuatro2**, **Ocho2**, **SumaCuatros** y **Juego2**:

Datos					
		Cuatro2	Ocho1	SumaCuatros	Juego2
=		randomInteger (1, 4)	randomInteger (1, 8)	Cuatro1 + Cuatro2	if (sumacuatro < ocho1) { "Gana" "Pierde"

29. Repite los pasos 24, 25 y 26 de esta actividad para el atributo **Juego2**.
30. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se te propuso? Justifícalas ampliamente.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

31. Vamos ahora al tercer juego. Los atributos que usaremos son **Seis2**, **Doce1**, **SumaSeises** y **Juego3**, y los definiremos con las fórmulas que se muestran:

Datos				
		Seis2	Doce1	SumaSeises
=		randomInteger (1, 6)	randomInteger (1, 12)	Seis1 + Seis2

Juego3									
if ((SumaSeises = 12) and (Doce1 = 12))	<table border="0"> <tr> <td>"Empate"</td> <td rowspan="2"> <table border="0"> <tr> <td>if ((sumaseises = 12) and (Doce1 &lt; 12))</td> <td>"Gana"</td> </tr> <tr> <td>if ((sumaseises &lt; 12) and (doce1 = 12))</td> <td>"Pierde"</td> </tr> <tr> <td></td> <td>"Empate"</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	"Empate"	<table border="0"> <tr> <td>if ((sumaseises = 12) and (Doce1 &lt; 12))</td> <td>"Gana"</td> </tr> <tr> <td>if ((sumaseises &lt; 12) and (doce1 = 12))</td> <td>"Pierde"</td> </tr> <tr> <td></td> <td>"Empate"</td> </tr> </table>	if ((sumaseises = 12) and (Doce1 < 12))	"Gana"	if ((sumaseises < 12) and (doce1 = 12))	"Pierde"		"Empate"
"Empate"	<table border="0"> <tr> <td>if ((sumaseises = 12) and (Doce1 &lt; 12))</td> <td>"Gana"</td> </tr> <tr> <td>if ((sumaseises &lt; 12) and (doce1 = 12))</td> <td>"Pierde"</td> </tr> <tr> <td></td> <td>"Empate"</td> </tr> </table>	if ((sumaseises = 12) and (Doce1 < 12))		"Gana"	if ((sumaseises < 12) and (doce1 = 12))	"Pierde"		"Empate"	
if ((sumaseises = 12) and (Doce1 < 12))		"Gana"							
if ((sumaseises < 12) and (doce1 = 12))	"Pierde"								
	"Empate"								

32. Repite los pasos 24, 25 y 26 de esta actividad para el atributo **Juego3**.
33. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se te propuso? Justifícalas ampliamente.

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

34. Analicemos por último el cuarto juego. Nuestros atributos de trabajo serán **Diez1**, **Diez2**, **SumaDieces**, **Veinte1** y **Juego4**, y los definiremos con las siguientes fórmulas:

Datos				
	Diez1	Diez2	SumaDieces	Veinte1
=	randomInteger (1, 10)	randomInteger (1, 10)	Diez1 + Diez2	randomInteger (1, 20)

Juego4									
if ((SumaDieces = 10) and (veinte1 = 10))	<table border="0"> <tr> <td>"Empate"</td> <td rowspan="2"> <table border="0"> <tr> <td>if ((sumadieces = 10) and ((veinte1 &lt; 10) or (veinte1 &gt; 10)))</td> <td>"Pierde"</td> </tr> <tr> <td>if ((veinte1 = 10) and ((sumadieces &lt; 10) or (sumadieces &gt; 10)))</td> <td>"Gana"</td> </tr> <tr> <td></td> <td>"Empate"</td> </tr> </table> </td> </tr> </table>	"Empate"	<table border="0"> <tr> <td>if ((sumadieces = 10) and ((veinte1 &lt; 10) or (veinte1 &gt; 10)))</td> <td>"Pierde"</td> </tr> <tr> <td>if ((veinte1 = 10) and ((sumadieces &lt; 10) or (sumadieces &gt; 10)))</td> <td>"Gana"</td> </tr> <tr> <td></td> <td>"Empate"</td> </tr> </table>	if ((sumadieces = 10) and ((veinte1 < 10) or (veinte1 > 10)))	"Pierde"	if ((veinte1 = 10) and ((sumadieces < 10) or (sumadieces > 10)))	"Gana"		"Empate"
"Empate"	<table border="0"> <tr> <td>if ((sumadieces = 10) and ((veinte1 &lt; 10) or (veinte1 &gt; 10)))</td> <td>"Pierde"</td> </tr> <tr> <td>if ((veinte1 = 10) and ((sumadieces &lt; 10) or (sumadieces &gt; 10)))</td> <td>"Gana"</td> </tr> <tr> <td></td> <td>"Empate"</td> </tr> </table>	if ((sumadieces = 10) and ((veinte1 < 10) or (veinte1 > 10)))		"Pierde"	if ((veinte1 = 10) and ((sumadieces < 10) or (sumadieces > 10)))	"Gana"		"Empate"	
if ((sumadieces = 10) and ((veinte1 < 10) or (veinte1 > 10)))		"Pierde"							
if ((veinte1 = 10) and ((sumadieces < 10) or (sumadieces > 10)))	"Gana"								
	"Empate"								



40. En los juegos que se te propusieron pueden notarse dos características. La primera es que aparentemente eran juegos equitativos; la segunda es que no lo eran y había ventaja para quien proponía el juego. Ahora te toca a ti proponer un juego que tenga las mismas características; además deberás indicar cuál es la jugada a la que apostarías para llevarle ventaja a tu adversario. Por último deberás justificar que ese resultado es el que te conviene usando lo que sabes de probabilidad y apoyándote en la simulación con *Fathom*.

Juego propuesto:

---

---

---

Tirada ganadora:

---

Justificación probabilística:

---

---

---

---

---

41. Ahora diseña un juego parecido, pero no solo debe aparentar ser equitativo, sino que también debe de serlo. Justifica también por qué sería equitativo usando lo que sabes de probabilidad y apoyándote en la simulación con *Fathom* si lo deseas.

Juego propuesto:

---

---

---

Tirada ganadora:

---

Justificación probabilística:

---

---

---

---

---

42. ¿Consideras que puedes utilizar el cálculo de probabilidades para tomar decisiones? Explica por qué sí o por qué no.

---

---

---

---

---

## **A. 2 Propuesta resuelta**

2014  
Luisa María López  
Marta Jimeno EORAK

Anota las observaciones respecto a los juegos de dados.

1. ¿Vale la pena arriesgar en el primer juego? Explica por qué sí o por qué no.  
No, por que no es justo por que va a ser equitativo el que gana
2. ¿Vale la pena arriesgar en el segundo juego? Explica por qué sí o por qué no.  
El juego no es justo, no vale a ser arriesgado por la cantidad de veces que se puede ganar o perder.
3. ¿Vale la pena arriesgar en el tercer juego? Explica por qué sí o por qué no.  
No vale la pena arriesgar por que va a ser equitativo el que gana o pierde.
4. ¿Vale la pena arriesgar en el cuarto juego? Explica por qué sí o por qué no.  
El juego no es justo por que va a ser equitativo.



Anota tus observaciones con respecto a los juegos que te propusieron, según se indica.

5. En el primer juego se te propuso lanzar un dado de cuatro caras contra un dado de seis, y la tirada ganadora sería el número mayor.

a) ¿Consideraste que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

No porque no se equidistribuye la probabilidad de que salga el número mayor, vesia el dado de 6 caras  $\frac{1}{6}$  y el de cuatro  $\frac{1}{4}$

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

P(Ganar con el dado de cuatro caras) =  $\frac{1}{4}$

P(Ganar con el dado de seis caras) =  $\frac{1}{6}$

Justifica tus respuestas.

6. En el segundo juego se te propuso lanzar dos veces el dado de cuatro caras y sumar los resultados, contra un lanzamiento de un dado de ocho caras. La tirada ganadora era el número mayor.

a) ¿Consideraste que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

No porque al lanzar el dado de cuatro caras tienes más probabilidad de ganar que al lanzar dos veces el dado de cuatro caras.

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

P(Ganar con dos veces el dado de cuatro caras) =  $\frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$

P(Ganar con el dado de ocho caras) =  $\frac{1}{8}$

Justifica tus respuestas.

7. En el tercer juego se te propuso lanzar dos veces el dado de seis caras y sumar los resultados, contra una vez el dado de doce caras. La tirada ganadora era clara.

a) ¿Consideras que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

No, porque la probabilidad de ganar es con el dado de 12 caras, porque es diferente ganaría  $\frac{1}{2}$

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

$$P(\text{Ganar con dos veces el dado de seis caras}) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Ganar con el dado de doce caras}) = \frac{1}{2}$$

Justifica tus respuestas.

8. En el cuarto juego se te propuso lanzar una vez el dado de veinte caras contra la suma de los resultados de dos lanzamientos del dado de diez caras. La tirada ganadora era clara.

a) ¿Consideras que el juego era equitativo? Justifica tu respuesta.

No, porque el dado de 20 caras con da la probabilidad de ganar  $\frac{1}{20}$

b) ¿Qué probabilidad crees que hay de ganar una tirada con cada dado?

$$P(\text{Ganar con el dado de veinte caras}) = \frac{1}{20}$$

$$P(\text{Ganar con dos veces el dado de diez caras}) = \frac{1}{10}$$

Justifica tus respuestas.

9. ¿Consideras que puedes ganar en una tirada en cualquiera de los juegos?  
Justifica tu respuesta.

Siempre perder

10. Una de las reglas del juego exige anotar cinco puntos al ganador de cada tirada y declarar ganador de la partida al primero que llegue a diez puntos.  
¿Por qué piensas que se tiene esta regla en vez de que la partida sea a una tirada?

Para que haya más posibilidades de que el juego sea equitativo

11. ¿Qué probabilidad hay de que ganes la partida para cada uno de los juegos?

$$P(\text{Ganar partida uno}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Ganar partida dos}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Ganar partida tres}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{Ganar partida cuatro}) = \frac{1}{2}$$

Justifica tus respuestas.

con las posibilidades de ganar las partidas de los juegos y si hay mayor probabilidad de ganar

12. ¿De qué forma podríamos verificar las probabilidades que acabas de presentar? Propón algunas ideas.

Calcular las probabilidades  
seguir las partidas

13. Si jugamos cada partida hasta encontrar un ganador, y hacemos eso muchas veces, contando al final cuántas partidas se jugaron, cuántas se perdieron y cuántas se ganaron, ¿ello nos daría alguna información respecto a las probabilidades de ganar cada partida? Explica por qué sí o por qué no.


Si realizamos las partidas a el juego con diferentes  
 más y para el comportamiento de los resultados

14. ¿Qué inconveniente puede tener el tratar de jugar muchas veces?  
 No tendríamos más tiempo y no tendríamos


15. Jugamos cada partida en la computadora. Para ello, abre el paquete

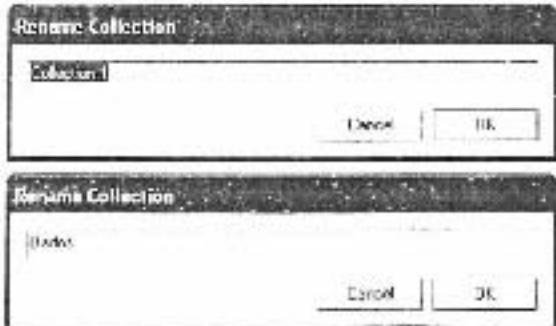



Habrá desde el icono

16. Debajo de la barra de herramientas, en donde están los menús del paquete, encontrarás otra barra con una serie de pequeñas imágenes, y debajo, un área en blanco que es el área de trabajo. De las imágenes bajas los menús, arrastra la caja  al área de trabajo.



17. En el área de trabajo puedes observar el icono . Da doble clic en el nombre Collection 1 en la ventana que aparecerá modifica el nombre a Dado y acepta este nuevo nombre con el botón OK.



18. Arrastra ahora la imagen  al área de trabajo. Debe aparecer una tabla como la siguiente:

Datos	
	Seis1

19. Al dar doble clic en **Seis1** podrás asignar un nombre de variable. Aquí definiremos una serie de variables que representaran los resultados de sucesivos lanzamientos de cada dado en cada uno de los cuatro juegos, así como los resultados correspondientes. **Seis1** llama a las variables como atributos, y el primero que definiremos lo llamaremos como **Cuatro1**:

Datos	
<b>Cuatro1</b>	Seis1

De la misma forma, define los nombres de atributo **Seis1**, **Juego1**, **Cuatro2**, **Ocho1**, **Juego2**, **SumaCuatros**, **Juego3**, **Seis2**, **Doce1**, **SumaSeises**, **Juego3**, **Diez1**, **Diez2**, **SumaDieces**, **Veinte1** y **Juego4**. La tabla se verá semejante a esta:

Dados					
	Cuatro1	Seis1	Juego1	Cuatro2	Ocho1

20. Trabajemos ahora con el primer juego. Usaremos el atributo **Cuatro1** para poder a Fathom simular el lanzamiento de un dado de cuatro caras, el atributo **Seis1** para simular el lanzamiento de un dado de seis caras y el atributo **Juego1** para saber si en el lanzamiento se gana o se pierde. Verifica que la tabla con los atributos esté resaltada, lo cual sucede si está enmarcada; en el menú **Display** encontrarás la opción **Show Formulas**. Actívala.



Al hacer esto, aparecerá una celda en gris debajo de cada nombre de atributo en tu tabla.

Dados			
	Cuatro1	Seis1	Juego1

21. Da doble clic en la celda que está debajo del nombre de atributo **Cuatro1**. Esto activará la interfase de funciones, que se muestra aquí:



En el espacio en blanco de la parte superior escribe `RandomeInteger(1,4)`, tal como se muestra:



Una vez que lo hayas hecho, da clic en el botón **OK**.

22. repite el paso anterior para los atributos *Beis1* y *Juego1*, introduciendo las fórmulas que aquí se muestran. A final, la tabla se verá semejante a esta:

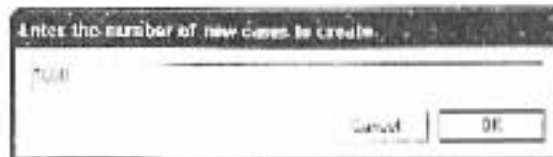
Fecha			
	Cuatro1	Seis1	Juego1
	=int(rand()*6+1)	=int(rand()*6+1)	=if(Cuatro1>Seis1) "Gana" "Pierde"

En los primeros dos atributos se pide a *Fathom* calcular valores enteros entre uno y cuatro y entre uno y seis, respectivamente, de manera aleatoria. En el tercer atributo le pedimos al paquete que compare si el dado de cuatro tuvo un valor mayor que el de seis, en cada tirada; de ser así, anunciará que se gana, y de lo contrario, que se pierde. Es importante que en la fórmula coloques todo lo que no sean valores numéricos entre comillas.

23. Ahora pediremos a *Fathom* que simule el juego muchas veces, para que podamos medir cuántos se ganaron y cuántos se perdieron. Para ello, abre en menú *Data* y activa la opción *New Cases...*




En la caja de texto que aparece, ingresa 1000 como número de veces que se jugará.

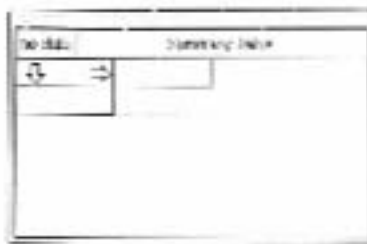




Tu tabla de datos se verá parecida a esta:

Quitar	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
994	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
995	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
999	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
997	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
990	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
999	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar
1000	Quitar	Quitar	Quitar	Quitar

24. Arrastra el icono  al área de trabajo. Aparecerá un cuadro como este:



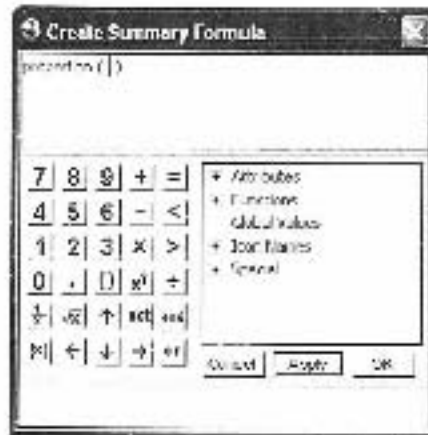
Arrastra desde la tabla de datos el nombre de alibio 'Juego?' hasta la flecha vertical de este cuadro. Deberás conseguir algo parecido a esto:



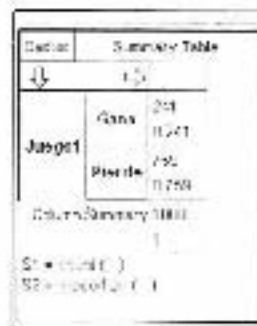
25. Abre el menú **Summary** y selecciona **Add Formula**.




Esto activará la interfaz de fórmulas de nuevo, y ahí deberás escribir `proportion()` y luego dar clic en el botón **OK**.



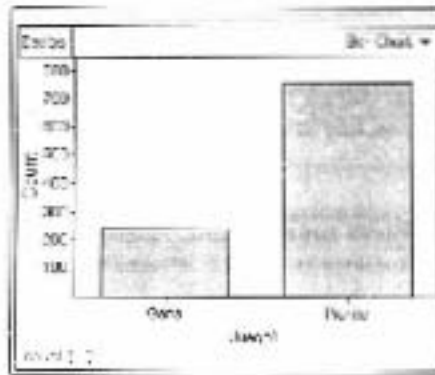
El cuadro ahora se verá parecido a este:



26. Ahora arrastra el icono  al área de trabajo:



Después arrastra de nuevo el recuadro de atributo Juego1 a la horizontal del gráfico, a donde se lee Drop an attribute here.



27. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se le propuso? Justificalas ampliamente.

Como conclusión decimos que hay más probabilidades de perder en el juego 1.

28. Analicemos ahora el segundo juego. Tal y como lo hiciste en el punto 22 de esta práctica, ingresa las siguientes fórmulas para los atributos Cuatro2, Ocho2, SumaCuatros y Juego2.

Datos		Cuatro2	Ocho2	SumaCuatros	Juego2
		=(sumas2+4)	=(sumas2+8)	Cuatro2+Ocho2	=(sumas2+40)

29. Rellena los pasos 24, 25 y 26 de esta actividad para el atributo Juego2.  
 30. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se le propuso? Justificalas ampliamente.

Como conclusión decimos que en este juego la probabilidad es de que se pierda.

31. Vamos ahora al tercer juego. Los atributos que usaremos son Seis2, Doce1, SumaSeises y Juego3, y los definiremos con las fórmulas que se muestran:

Dados			
	Seis2	Doce1	SumaSeises
	randomInteger(1,6)	randomInteger(1,12)	Seis1 + Seis2

Juego3			
(10 rondas = 10) and (Doce1 < 10)	randomInteger(1,10)	(10 rondas = 10) and (Doce1 < 10)	randomInteger(1,10)
(10 rondas = 10) and (Doce1 < 10)	randomInteger(1,10)	(10 rondas = 10) and (Doce1 < 10)	randomInteger(1,10)

32. Rellene los pasos 24, 25 y 26 de esta actividad para el atributo Juego3.  
 33. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se te propuso? Justifícalas ampliamente.

Pues que la probabilidad de ganar es de 50% después se dice que la probabilidad de ganar es mayor.

34. Analicemos por último el cuarto juego. Nuestros atributos de trabajo serán Diez1, Diez2, SumaDieces, Veinte1 y Juego4, y los definiremos con las siguientes fórmulas.

Datos				
	Diez1	Diez2	SumaDieces	Veinte1
	randinteger(1, 10)	randinteger(1, 10)	Diez1 + Diez2	randinteger(1, 20)

Fórmulas					
Diez1	randinteger(1, 10)	Diez2	randinteger(1, 10)	SumaDieces	Diez1 + Diez2
Veinte1	randinteger(1, 20)	Juego4	Diez1 > Diez2	Diez1 = Diez2	Diez1 < Diez2

35. Realiza los pasos 24, 25 y 26 de esta actividad para el atributo Juego3.  
 36. De acuerdo a lo que obtuviste en el cuadro de resultados y en la gráfica, ¿qué conclusiones puedes sacar respecto a las probabilidades de ganar en el primer juego que se te propuso? Justificalas ampliamente.

Como conclusión respecto a esta probabilidad y los resultados que nos muestra la gráfica, es de que es mayor la probabilidad de tener un empate.

37. Compara las probabilidades que propusiste en el punto 11 con lo que observaste en los puntos 27, 30, 33 y 36 de esta actividad. ¿Qué puedes concluir?

Como conclusión se puede decir que en los juegos 1 y 2 se pierde y en los juegos 3 y 4 se empata y comparado con los demás resultados no llegamos a la misma respuesta que nos muestra el programa.

38. ¿Vale la pena arriesgar en algunos de los juegos? Explica por qué sí o por qué no.

No, porque en ninguno de los juegos se gana  
nada se pierde o se escapa y no tendría  
como arriesgarme.

39. ¿Dirías que en los juegos propuestos se estaba haciendo trampa? Explica por qué sí o por qué no.

Sí, dependiendo de el jugador que proponga la  
jugada o partida.

40. En los juegos que se te propusieron pueden notarse dos características. La primera es que aparentemente eran juegos equitativos; la segunda es que no lo eran y había ventaja para quien proponía el juego. Ahora te toca a ti proponer un juego que tenga las mismas características; además deberás indicar cuál es la jugada a la que apostarías para llevarle ventaja a tu adversario. Por último deberás justificar que ese resultado es el que te conviene usando lo que sabes de probabilidad y apoyándote en la simulación con Fathom.

Juego propuesto:

un dado de 12 y uno de 4 caras llevarlo 3  
veces.

Tirada ganadora:

El número mayor 12

Justificación probabilística:

Es más probable que gane el 12 ya  
que al tirar 3 veces lo de 12 se puede que  
salgan muchos números.

41. Ahora diseña un juego parecido, pero no solo debe aparentar ser equitativo, sino que también debe de serlo. Justifica también por qué sería equitativo usando lo que sabes de probabilidades y apoyándote en la simulación con Fathom si lo deseas.

Juego propuesto:

que un dado de 16 caras se tira y otro de ocho se tira dos veces y se suman y gana el ganador sea el número más grande

Tirada ganadora:

que el número sea más grande (16)

Justificación probabilística:

habría un empate, y el juego sería equitativo

42. ¿Consideras que puedes utilizar el cálculo de probabilidades para tomar decisiones? Explica por qué sí o por qué no.

Si, siempre y cuando pensemos y utilicemos adecuadamente este cálculo