



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

## FACULTAD DE CIENCIAS

El efecto Unruh y la correspondencia holográfica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Fernando Avitúa Varela

TUTOR

Dr. Mariano Chernicoff Minsberg

Cd. Universitaria, D. F. 2016





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Avitúa

Varela

Fernando

56600295

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

307010292

2. Datos del tutor

Dr

Mariano

Chernicoff

Minsberg

3. Datos del sinodal 1

Dra

Myriam

Mondragón

Ceballos

4. Datos del sinodal 2

Dr

Alberto

Güijosa

Hidalgo

5. Datos del sinodal 3

Dr

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

6. Datos del sinodal 4

Dr

Saúl Noé

Ramos

Sánchez

7. Datos del trabajo escrito

El efecto Unruh y la correspondencia

holográfica

98 pp.

2016

# Índice general

<b>1. Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>10</b>
1.1. Campo escalar libre. . . . .	11
1.2. Campo de Dirac Libre . . . . .	14
1.3. QFT con interacciones. . . . .	16
1.3.1. Teorías de campo conforme. . . . .	19
1.4. Teorías de Super Yang-Mills . . . . .	20
<b>2. Efecto Unruh con Teoría Cuántica de Campos</b>	<b>25</b>
2.1. QFT en espacio-tiempo curvo . . . . .	27
2.1.1. Transformaciones de Bogoliubov . . . . .	28
2.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. . . . .	31
2.2.1. El Efecto Unruh. . . . .	33
2.2.2. Condición KMS y temperatura de Hawking . . . . .	35
2.3. Movimiento circular . . . . .	39
<b>3. La Correspondencia Holográfica</b>	<b>43</b>
3.1. Teoría de Cuerdas . . . . .	44
3.2. Dp-branas . . . . .	50
3.3. La correspondencia holográfica . . . . .	55
3.4. Materia fundamental . . . . .	60
3.5. AdS Global y temperatura en la correspondencia . . . . .	64
<b>4. Efecto Unruh en SYM N=4</b>	<b>66</b>
4.1. Movimiento rectilíneo . . . . .	68
4.2. Solución de Mikhailov . . . . .	73
4.3. Movimiento Circular en $\mathbb{R}^{1,3}$ . . . . .	76
4.4. Movimiento circular en $\mathbb{R} \times S^3$ . . . . .	80
4.4.1. Aceleración uniforme . . . . .	89
<b>5. Conclusiones</b>	<b>91</b>

Bibliografía

# Introducción

En física, el estudio de un problema puede ser tan complicado como la teoría que tenemos para describirlo. Nuevos avances del conocimiento nos permiten entender problemas cada vez más alejados de nuestra experiencia cotidiana mientras expandimos el alcance que tiene nuestro entendimiento con el fin de describir un fenómeno en su totalidad.

El problema a estudiar en este trabajo trata de explorar uno de estos límites. En particular, buscamos entender el describir la dinámica de un quark en un régimen donde las teorías actuales no nos permiten hacerlo.

Los orígenes del tratamiento de este problema datan del principio del siglo XX donde Abraham y Lorentz en [1] [2] estudiaron el movimiento de una carga eléctrica acelerándose. Este estudio no es sencillo ya que la radiación que emite la partícula afecta la dinámica de la misma y por lo tanto su ecuación de movimiento. De este análisis surge la llamada ecuación de Abraham-Lorentz que se puede derivar del electromagnetismo clásico y las ecuaciones de Newton. Sin embargo, surgen problemas al proponer una solución ya que la ecuación de movimiento contiene derivadas de tercer orden en la posición. Una consecuencia de esto es que la solución nos lleva a considerar que valores de la fuerza en el futuro afectan el movimiento de la partícula en el presente.

Conforme la física fue avanzando, la relatividad especial surgió como uno de los pilares de la física moderna y Dirac volvió a abordar el problema en este contexto. Él realizó la generalización relativista a la ecuación de Abraham-Lorentz y encontró una ecuación que resuelve algunos problemas de la ecuación de Abraham-Lorentz. Sin embargo, el problema admite soluciones pre-aceleradas y también casos donde la energía de la partícula crece sin límite aunque no exista una fuerza externa.

Por otro lado, sabemos que para tener una descripción completa de este fenómeno debemos de considerar la naturaleza cuántica de la partícula. Este tratamiento nos lleva a considerar la teoría cuántica de campos (QFT por sus siglas en inglés). Esta teoría, que tiene sus orígenes alrededor de 1920 usa dos de las ideas más importantes de la física moderna para definir estados de partícula, la relatividad especial y la mecánica cuántica.

En QFT las partículas de la naturaleza se entienden como pequeñas excitaciones

de diferentes campos que permean el espacio-tiempo. Al estar basada en relatividad especial estos estados de partícula se ven igual para diferentes observadores inerciales. La teoría cuántica de campos es la idea que está detrás de la descripción moderna de las fuerzas fundamentales y dio pie a lo que conocemos hoy como el modelo estándar de partículas.

Con esta herramienta teórica el problema de estudiar una partícula acelerándose se convierte en preguntarse si se puede definir una teoría cuántica de campos desde el punto de vista de un observador acelerado. No es obvio que es posible hacer esto ya que los conceptos básicos de teoría cuántica de campos provienen de considerar invarianza sólo ante cambios de observadores inerciales. Esto resulta ser cierto para algunos tipos de movimiento (problema tratado por Stephen Fulling en [8]). En el año de 1976 W.G. Unruh estudió el caso más sencillo de este problema, el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado[3].

En este estudio, Unruh encontró que el estado vacío que define el observador inercial es visto por el observador acelerado ya no como un estado sin partículas sino como un estado en el que el espacio-tiempo está rodeado de partículas que generan un medio térmico. A este hecho sorprendente de la teoría cuántica de campos se le conoce como el efecto Unruh.

El efecto Unruh se deduce considerando una trayectoria recta. Una pregunta natural que surge es si este fenómeno térmico tiene que ver con la forma del movimiento o es algo más fundamental que depende sólo de que el observador se encuentre en movimiento acelerado. Así, parece razonable considerar el movimiento circular uniforme para comprobar si un observador en este movimiento también siente un medio térmico.

Este estudio fue realizado por John Letaw y Jonathan Pfaush en 1989 [11] donde se dieron cuenta que las técnicas usadas para detectar el cambio en el estado vacío para el movimiento rectilíneo no funcionan para este movimiento. Esto se debe a que la transformación de coordenadas que deja fijo al observador acelerado permite que algunos puntos del espacio-tiempo se muevan más rápido que la luz. La existencia de estos puntos se debe a que la relación  $v = \omega R$  para una frecuencia angular dada supera la velocidad de la luz para radios suficientemente grandes.

Para estudiar este problema sin recurrir a los métodos usados en el movimiento rectilíneo se propuso un detector teórico, ideado por Bryce DeWitt en [12], que midiera si el vacío del observador inercial está interactuando con el del observador acelerado. Los resultados demuestran que efectivamente el detector mide un vacío diferente al inercial. La única diferencia es que este no detecta un medio térmico.

El hecho de que la transformación de coordenadas dé lugar a velocidades mayores que la de la luz nos lleva a preguntarnos qué pasaría si consideramos un espacio-tiempo acotado. Este análisis lo realizó, entre otros, Davies en [17]. Davies mostró que si la velocidad angular del observador es tal que al hacer el cambio de coordenadas ningún

punto se mueve más rápido que la luz, entonces el vacío de Minkowski es el mismo que el del observador acelerado. Si este no es el caso, entonces un detector en movimiento circular tiene una interacción no trivial con el vacío cuántico de la misma forma que para el movimiento circular cuando el movimiento ocurre en el espacio-tiempo plano no acotado.

Otro fenómeno interesante que surge cuando se considera una teoría de campos en un espacio-tiempo curvo fue mostrado por Stephen Hawking en [13]. Él estudió como se ve una teoría cuántica de campos cuando se estudia en la geometría generada por un agujero negro. Un agujero negro es un objeto que es tan masivo que define una región del espacio-tiempo, llamada horizonte de eventos, tal que todo aquello que la atraviesa es absorbido por el agujero negro.

Hawking descubrió que, a diferencia de lo que se pensaba anteriormente, los agujeros negros emiten radiación, y el espectro de esta tiene la forma de radiación de un cuerpo negro. A dicha radiación se le puede asociar una temperatura que se conoce como la temperatura de Hawking.

Regresando al movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, es fácil probar que el espacio-tiempo detectado por dicho observador presenta un horizonte de eventos.

En este contexto, surge otra coincidencia importante en el hecho de que la temperatura de Hawking coincide exactamente con la temperatura que predice el efecto Unruh (si consideramos al horizonte de eventos de la métrica del observador acelerado como el de un agujero negro).

Las tres formas diferentes de entender la interacción no trivial de un observador acelerado con el vacío cuántico que conocemos son: transformaciones de Bogoliubov no-triviales, detectores de Unruh-DeWitt y la existencia de un horizonte de aceleración. Estas tres formas coinciden para el caso del movimiento rectilíneo pero en general difieren para trayectorias más complicadas.

El efecto Unruh del que hablamos anteriormente ha sido estudiado en una región de teoría cuántica de campos que se conoce como acoplamiento débil. En esta región, las interacciones del campo se pueden expandir en una serie perturbativa porque la constante de acoplamiento, que mide la intensidad de las interacciones, es muy pequeña. Esto se traduce en tomar en cuenta procesos de creación y aniquilación de partículas que tienen una probabilidad de ocurrir que disminuye en potencias de la constante de acoplamiento.

Sin embargo, cuando consideramos el caso en el que la constante de acoplamiento no es pequeña el tratamiento perturbativo no tiene sentido y no podemos usar las herramientas usuales de teoría cuántica de campos. Este límite, conocido como acoplamiento fuerte, es muy difícil de estudiar y se conoce poco acerca de la física en este régimen. Por esto mismo, las herramientas que se tienen disponibles son escasas.

Por un lado, existen métodos computacionales que aproximan una teoría fuertemen-

te acoplada discretizando el espacio-tiempo. Por otro lado, está la herramienta que usaremos en este trabajo: la correspondencia holográfica. También conocida como correspondencia AdS/CFT o dualidad de Maldacena.

Esta correspondencia es uno de los desarrollos más importantes de la física teoría en los últimos veinticinco años. El ejemplo mejor entendido de esta propone que una teoría de campos de Super Yang-Mills  $SU(N_c)$  con  $\mathcal{N} = 4$  en un espacio-tiempo plano 4-dimensional es equivalente a una teoría de supercuerdas tipo IIB en un espacio-tiempo de Anti-de Sitter más una esfera 5-dimensional,  $AdS_5 \times S^5$ .

Mediante esta herramienta podemos realizar el cálculo del efecto Unruh para una teoría fuertemente acoplada cambiando el problema en la teoría de campos por un problema en la teoría de cuerdas.

En este trabajo estudiaremos diferentes movimientos acelerados que describe un quark infinitamente masivo en la teoría fuertemente acoplada de Super Yang-Mills  $SU(N_c)$  con  $\mathcal{N} = 4$  en un espacio-tiempo plano 4-dimensional. Para hacerlo, usaremos la correspondencia holográfica que nos permite estudiar este problema considerando al quark como el extremo de una cuerda que se mueve sobre la frontera de AdS.

Este quark sirve como un detector que distingue si existe una interacción no trivial con el vacío en la teoría de SYM. La forma en la que se manifiesta dicha interacción es si la hoja de mundo de la cuerda dual al quark presenta un horizonte de eventos. Este horizonte de eventos tiene asociada una temperatura de Hawking que excita los modos de la cuerda y hace que esta describa movimientos aleatorios [23].

Antes de abordar el problema en acoplamiento fuerte revisaremos los resultados de teoría cuántica de campos que permiten estudiar el efecto Unruh en una teoría débilmente acoplada. Tomando esto en cuenta, el trabajo se divide en dos.

En la primera parte desarrollamos el efecto Unruh cuando las herramientas de QFT son válidas. En la segunda parte el trabajo nos enfocamos en este mismo problema, estudiado a través de la correspondencia holográfica, en un régimen fuertemente acoplado.

En el capítulo 1 estudiaremos los conceptos necesarios para entender el problema en una teoría débilmente acoplada. Daremos una introducción a teoría cuántica de campos buscando dar el enfoque hacia la teoría que estudiaremos en la correspondencia remarcando la importancia de esta como una herramienta que permite estudiar el acoplamiento fuerte.

En el capítulo 2, seguiremos con esta primera parte y revisaremos el efecto Unruh para un campo escalar libre. Mencionaremos brevemente los casos de movimiento circular en espacio-tiempo plano así como en espacio acotado con el fin de obtener resultados que se compararán en la sección de la correspondencia holográfica.

La segunda parte comienza con el capítulo 3 y consiste en una introducción a la teoría de supercuerdas y una deducción de la correspondencia holográfica. En esta sección

revisaremos las entradas del diccionario de la holografía que permiten estudiar el problema del quark acelerándose.

Finalmente, en el capítulo 4 revisaremos el movimiento acelerado del quark para tres tipos diferentes de movimiento. Primero analizaremos el movimiento rectilíneo uniforme, que es el caso más sencillo, y lo compararemos con el efecto Unruh que obtuvimos en el capítulo 3. Después, estudiaremos el movimiento circular en espacio-tiempo de Minkowski. En este tratamiento presentamos una solución dada por Mikhailov en [21] para el encaje de una cuerda cuyo extremo se mueve en la frontera de AdS. Esta solución simplifica el problema de encontrar un horizonte de eventos en la hoja de mundo, por lo que nos permite determinar si existe una interacción no trivial con el vacío.

Por último, revisamos el movimiento circular uniforme en un espacio-tiempo acotado  $\mathbb{R} \times S^5$  que encuentra su dual en una teoría de supercuerdas en AdS global. Se comprobará que estos resultados coinciden con los que vimos en el capítulo 2. También, notaremos que los resultados se reducen al movimiento circular en Minkowski cuando tomamos el límite en el que el radio de la esfera es mucho más grande que el radio del círculo que describe el quark.

Todos los resultados de este último capítulo se reprodujeron, entre otros, de los artículos: [18],[28], [27].

# Capítulo 1

## Teoría Cuántica de Campos

Como mencionamos en la introducción, el problema a tratar en este trabajo se divide en dos. En la primera parte estudiaremos qué mide un observador cuando se mueve con aceleración propia constante en el régimen particular de una teoría cuántica de campos donde la constante que mide las interacciones entre partículas es pequeña. Es precisamente en este régimen donde se han desarrollado la mayoría de las herramientas teóricas que constituyen la teoría cuántica de campos. Encontraremos una solución al problema del observador acelerado usando estas herramientas.

Por otro lado, en el límite donde las interacciones son fuertes dichas herramientas dejan de funcionar. Debido a esto, se conoce muy poco acerca de lo que significa estudiar una teoría de campos fuertemente acoplada.

Este problema será el enfoque de la segunda parte de este trabajo y para estudiarlo usaremos la correspondencia holográfica. La correspondencia plantea, en su versión mejor conocida, una equivalencia entre una teoría de cuerdas tipo en un espacio-tiempo curvo 10-dimensional con una teoría de campos en espacio-tiempo plano 4-dimensional.

En este contexto, este primer capítulo trata de revisar los conceptos básicos de teoría cuántica de campos con los que es posible entender el tratamiento del efecto Unruh en una teoría débilmente acoplada. Dichos conceptos nos servirán también para describir la teoría de norma que utilizaremos en la correspondencia holográfica.

En la primera sección del capítulo estudiaremos el campo escalar libre como forma de introducir el concepto de partícula como una excitación de un campo. El caso particular del campo escalar libre también servirá para ejemplificar el efecto Unruh en el segundo capítulo.

En la sección 1.2 mencionaremos cómo se ve una teoría de campos cuando se toman en cuenta grados de libertad fermiónicos. Esto lo hacemos con el fin de describir el contenido de campos de la teoría de norma que aparece en la correspondencia.

En la sección 1.3 revisaremos la teoría de  $\phi^4$  y cómo cambia el tratamiento del campo escalar libre cuando se permiten términos de interacción en el potencial. Esta sección nos servirá para introducir los conceptos de constante de acoplamiento y partículas virtuales con el objetivo de explicar, a grandes rasgos, que es la función beta de una teoría de campos y cómo se dividen los diferentes regímenes de una QFT.

En la sección 1.4 trataremos las simetrías de las teorías de norma. En particular, el subconjunto conocido como teorías Yang-Mills. En esta sección también revisaremos el concepto de supersimetría, ya que es un concepto fundamental en la teoría de supercuerdas que estudiaremos más adelante.

Al final de esta sección revisaremos qué significa cada término de la teoría de Super Yang-Mills  $SU(N)$  con  $N = 4$  en cuatro dimensiones. Hablaremos del límite de muchos colores considerado por 't Hooft y como este límite sugiere una relación entre una teoría de campos y una teoría de cuerdas.

## 1.1. Campo escalar libre.

En el sentido clásico un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio-tiempo. El estudio de la dinámica de dicho campo se trata de la misma forma que en mecánica clásica, partiendo de un principio variacional. Es decir, se define una acción y se busca una configuración del campo  $\phi$  que extreme dicha acción.

Cuando cuantizamos la teoría de campos lo que hacemos es cambiar sus variables dinámicas, el campo mismo y su momento conjugado, por operadores que actúan sobre un espacio de Hilbert. Este procedimiento es análogo al que se sigue en mecánica cuántica en donde las variables dinámicas que cuantizamos son la posición y el momento de una partícula.

Como primer ejemplo que ilustra los conceptos fundamentales de teoría cuántica de campos tomaremos uno de los campos más sencillos, el campo escalar libre. Así, si tomamos una función (campo)  $\phi(t, \vec{x})$  que asigna un número real a cada posición en el espacio tiempo tendremos que su acción a nivel clásico está dada por<sup>1</sup>

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right).$$

Donde  $V(\phi)$  es el potencial al que está sujeto el campo.

Al igual que en mecánica clásica, podemos definir la densidad de momento conjugado a  $\phi$  como  $\pi(t, \vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)}$ .

---

<sup>1</sup>Usaremos unidades naturales a lo largo de este trabajo  $\hbar = c = 1$ .

El potencial  $V(\phi)$  puede tomar cualquier forma. Sin embargo, si queremos que el valor del campo oscile alrededor de un mínimo de potencial debe pasar que  $V(0) = 0$  y  $V''(0) > 0$ . Con esto, la expansión de  $V(\phi)$  en una serie de Taylor alrededor de cero toma la forma

$$V = \frac{V''(0)}{2}\phi^2 + \frac{V^{(3)}(0)}{3!}\phi^3 + \frac{V^{(4)}(0)}{4!}\phi^4 + \dots$$

Uno de los potenciales más sencillos que respeta esta expansión es  $V(\phi) = \frac{1}{2}V''(0)\phi^2$ .

Al campo escalar que se coloca sobre este potencial se le conoce como campo escalar libre. Se le da ese nombre porque, como veremos a continuación, queda expresado en términos de un número infinito de osciladores armónicos desacoplados.

La ecuación de movimiento para el campo está dada por la ecuación de Euler-Lagrange que, si sustituimos  $V''(0) = m^2$ , toma la forma

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2)\phi(\vec{x}, t) = 0, \quad (t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1,3}. \quad (1.1)$$

Sabemos que para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales con dominios infinitos se recurre a la transformada de Fourier sobre las componentes espaciales. El usar la transformada de Fourier es precisamente lo que conocemos en mecánica cuántica como pasar al espacio de momentos. Dada esta transformación, la ecuación diferencial se vuelve

$$[\partial_t^2 + (\vec{p}^2 + m^2)]\phi(t, \vec{p}) = 0. \quad (1.2)$$

Esta ecuación es la de un oscilador armónico cuya frecuencia angular,  $\omega_{\vec{p}} = E_{\vec{p}} = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ , es exactamente la energía de una partícula libre relativista de masa  $m$  que se mueve con momento espacial  $\vec{p}$ .

Sustituyendo la solución de (1.2), el campo en el espacio de posiciones queda expresado en términos de modos de Fourier a través de

$$\phi(t, x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{ip \cdot x}). \quad (1.3)$$

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) surge la interpretación del campo escalar libre como una superposición de infinitos osciladores armónicos. Se le llama libre porque estos osciladores están desacoplados, es decir, no se mezclan en la solución (1.3). Esto a su vez es consecuencia de que el potencial cuadrático en  $\phi$  implica que la ecuación de movimiento es lineal, por lo que las soluciones se pueden superponer.

Teniendo el tratamiento clásico del campo, lo que necesitamos para cuantizar la teoría es cambiar las variables dinámicas  $\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x})$  por operadores. Una manera de hacer esto es imponiendo las reglas de conmutación canónicas. Ya que la ecuación para el campo en el espacio de momentos es la del oscilador armónico, este proceso de cuantización sigue el mismo camino que el del oscilador armónico en mecánica cuántica. Esto es, se proponen operadores de creación  $\hat{a}_{\vec{p}}$  y de aniquilación  $\hat{a}_{\vec{p}}$  que

construyen una base de estados propios de energía en el espacio de Hilbert sobre el que actúa el operador de campo  $\hat{\phi}$ .

Siguiendo los mismos pasos que para el oscilador armónico cuántico, las relaciones de conmutación se vuelven

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] &= 0 = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] & [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] &= 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}], \\ [\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') & [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \end{aligned}$$

Igual que en mecánica cuántica este análisis define un estado de más baja energía  $0$  tal que si hacemos actuar cualquier operador de aniquilación sobre él obtenemos  $\hat{a}_{\vec{p}} 0 = 0$ . A este estado se le llama el vacío. Cabe destacar que de acuerdo con la definición de la acción como un invariante de Lorentz todos los observadores inerciales ven el mismo vacío.

Los estados excitados de este espacio los obtenemos actuando con operadores de creación  $\hat{a}_{\vec{p}}$  sobre el vacío. Esto nos lleva a entender por qué este espacio de estados está asociado con uno de partículas.

Al actuar con el operador de energía  $\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}$  y momento espacial  $\hat{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}$  sobre los estados excitados de la forma  $|p\rangle = \sqrt{2E_p} \hat{a}_{\vec{p}} 0$  obtenemos precisamente la energía y el momento de una partícula libre relativista.

Siguiendo con este procedimiento, el estado excitado de  $n$  partículas con momento  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n$  se escribe como

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = \left( \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{p_2}} \dots \sqrt{2E_{p_n}} \right) \hat{a}_{\vec{p}_1} \hat{a}_{\vec{p}_2} \dots \hat{a}_{\vec{p}_n} 0 .$$

A la unión de espacios de Hilbert que contienen un número fijo de partículas, incluyendo el vacío, se le conoce como espacio de Fock. Dicho espacio se puede escribir como la suma directa de los diferentes subespacios con un número fijo de partículas  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \dots$ .

Los estados de partículas que viven en este espacio de Fock generado a partir del campo escalar libre son todos del mismo tipo. Como es de esperarse, el campo escalar libre no describe todos los tipos de partículas que aparecen en la naturaleza así que es necesario tomar en cuenta otros tipos de campos. Un resultado que será útil más adelante es que al actuar con el operador de campo  $\hat{\phi}(\vec{x})$  a un tiempo fijo sobre el vacío obtenemos una partícula con posición definida en  $\vec{x}$ .

Una cantidad que se puede calcular en esta teoría y que resultará muy útil más adelante es la amplitud de probabilidad de que una partícula con posición  $\vec{x}$  a un tiempo  $t$  se encuentre en la posición  $\vec{x}'$  a un tiempo  $t'$ . Esta amplitud de probabilidad, junto con la amplitud de propagación de su antipartícula, se le llama el propagador

de Feynman o función de dos puntos y está dada por

$$\begin{aligned} G(x, x) &= \int \int \theta(x^0 - x^0) + \int \int \theta(x^0 - x^0) = \int T \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) \\ &= \int \left( \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) \theta(x^0 - x^0) + \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(x) \theta(x^0 - x^0) \right) \int \end{aligned}$$

donde  $\theta$  es la función de Heaviside  $\theta(x) = 1$  para  $x \geq 0$  y  $\theta(x) = 0$  si  $x < 0$ .

El cálculo de la amplitud de propagación entre un estado inicial y uno final no está limitado a dos partículas. En general, podemos calcular la amplitud de probabilidad de que muchas partículas con ciertas posiciones y tiempos iniciales se encuentren en otros tiempos y posiciones finales. A estas amplitudes de probabilidad se les llama correladores y resultan ser las cantidades más importantes en una teoría cuántica de campos tanto en cálculos experimentales como teóricos.

Para calcular los correladores usamos el teorema de Wick [4]. Este teorema dice que es posible expresar el correlador de muchas partículas como la suma sobre todas las combinaciones de productos de propagadores de Feynman. Es decir

$$\begin{aligned} G_N(x_1, \dots, x_N) &= G(x_1, x_2)G(x_3, x_4) \cdots G(x_{N-1}, x_N) + \\ &+ G(x_1, x_3)G(x_2, x_4) \cdots G(x_{N-1}, x_N) + \cdots \end{aligned} \quad (1.4)$$

## 1.2. Campo de Dirac Libre

En la sección anterior se mencionó que el tipo de partícula que surge de considerar el campo escalar libre no alcanza para describir todas las partículas de la naturaleza. Lo que hace falta para construir estas partículas es considerar otros tipos de campos. Estos deben ser tales que su transformación bajo rotaciones o empujones obedezca las reglas de transformación que son pertinentes para el tipo de objeto que estamos considerando. En lenguaje matemático esto significa que estos nuevos campos van a transformar en una representación<sup>2</sup> del grupo de Poincaré que actúa sobre su espacio de Hilbert.

Así, cuando el campo que consideramos es escalar, lo único que cambia son las coordenadas del punto donde lo estamos evaluando. Es decir  $\phi(x) \rightarrow \phi(\Lambda^{-1}x)$ . Es de esperarse que esta transformación que cambia el observador inercial que mide el campo deje al Lagrangiano invariante.

De esta misma forma podemos considerar campos vectoriales  $A^\mu$  que se transforman en la representación vectorial del grupo de Poincaré  $A^\mu(x) \rightarrow \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x)$ .

---

<sup>2</sup>Una representación de un grupo  $G$  sobre un espacio vectorial  $V$  se define como la función  $T$  que manda elementos de  $G$  al grupo de funciones lineales sobre  $V$  y preserva el producto del grupo. Esto significa que si  $g_1, g_2 \in G$  entonces la representación de  $G$  sobre  $V$  cumple  $T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2)$ .

En general, podemos seguir agregando índices espacio-temporales para obtener campos tensoriales cuya transformación está dada por la regla usual para transformación de tensores.

Sin embargo, resulta que esta descripción no es suficiente para describir todos los tipos de partícula que existen en la naturaleza. En particular, encontraremos que para describir la teoría de super Yang-Mills y la teoría de supercuerdas es necesario considerar campos que den lugar a partículas fermiónicas.

Para esto, debemos usar campos que transforman bajo otro tipo de representación llamada la representación espinorial del grupo de Lorentz. Dicha representación encuentra su comportamiento infinitesimal descrito en términos de generadores  $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ , donde  $\gamma^\mu$  son matrices complejas que satisfacen el álgebra de Clifford dada por  $\gamma^\mu, \gamma^\nu = 2\eta^{\mu,\nu}\mathbb{I}$ . Los objetos matemáticos que transforman en la representación espinorial del grupo de Lorentz reciben el nombre de espinores y los campos que asignan un espinor a cada punto del espacio-tiempo los llamamos campos espinoriales.

La dimensión del espacio vectorial de los espinores depende de las dimensiones del espacio-tiempo. Si tomamos un espacio-tiempo  $2n$  dimensional, con grupo de Lorentz  $SO(2n - 1, 1)$ , entonces la dimensión del espacio vectorial es  $2^n$ . El campo que actúa sobre el espacio de espinores también depende de la dimensión. En general, tenemos que el campo es  $\mathbb{C}$  si  $n$  es par y  $\mathbb{R}$  si  $n$  es impar.

Con esto, llamamos campo espinorial de Dirac,  $\psi$ , en cuatro dimensiones (grupo de Lorentz  $SO(3, 1)$ ) a un conjunto de cuatro números complejos  $\psi(t, \vec{x})$  que toman un valor distinto para cada punto del espacio-tiempo. Dada una transformación de Lorentz, un campo espinorial de Dirac cambia mediante  $\psi \rightarrow \psi = \exp(\frac{i}{2}\omega_{\lambda\rho}S^{\lambda\rho})\psi$ .

Esta descripción se puede hacer un poco más sencilla al darnos cuenta que la representación del grupo de Lorentz (para algunas dimensiones) que actúa sobre los espinores es reducible. Esto significa que podemos dividir los espinores en dos subespacios invariantes bajo transformaciones del grupo y por lo tanto es posible separar un espinor de Dirac en dos espinores de Weyl  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix}$ .

Como cada uno de los espinores de Weyl forma parte de una representación irreducible distinta, el Lema de Schur afirma que los operadores Casimir son múltiplos diferentes de la identidad. El espinor de Dirac se separa entonces en dos componentes distintas que llamamos espinor izquierdo y derecho. El término izquierdo y derecho se refieren a que quiralidad tiene cada uno y nos dicen, para partículas no masivas, si la proyección del espín sobre el momento lineal es positiva (derecho) o negativa (izquierdo).

Buscando escribir un Lagrangiano de primer orden en derivadas de  $\psi$ , se puede probar que una combinación que resulta sencilla es  $\mathcal{L}_{Dir} = \bar{\psi}(\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$ . Donde  $\bar{\psi}$  es el espinor conjugado a  $\psi$ . Con esto, la ecuación de movimiento para el campo espinorial

se vuelve la llamada ecuación de Dirac para un campo espinorial libre

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = (i\cancel{\partial}_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

No es difícil ver que esta ecuación implica la de Klein-Gordon para cada componente espinorial pero con la restricción de que también se cumple  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ . Estas restricciones se traducen en el proceso de cuantización en que los operadores de creación y aniquilación satisfacen ahora relaciones de anticonmutación en lugar de relaciones de conmutación. Es decir, cambiamos el conmutador  $[\cdot, \cdot]$  por el anticonmutador  $\{\cdot, \cdot\}$ .

La expansión del campo libre de Dirac en modos normales se vuelve

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 \left( \hat{a}_{\vec{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + \hat{b}_{\vec{p}}^s v^s(p) e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p}. \quad (1.5)$$

Donde  $s$  etiqueta los diferentes estados de espín,  $u(p)^s, v(p)^s$  son las soluciones espinoriales de la ecuación de Dirac y  $\hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}}^s$  son los operadores de creación de partícula y antipartícula respectivamente.

Para obtener las relaciones de anticonmutación de los operadores, imponemos primero las relaciones sobre el operador de campo  $\psi_a(\vec{x}), \psi_b(\vec{y}) = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{ab}$ . Con esto, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \delta^{ss'} = \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} , \\ \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{a}_{\vec{p}'}^{s'} &= \hat{a}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} = 0 = \hat{b}_{\vec{p}}^s, \hat{b}_{\vec{p}'}^{s'} . \end{aligned}$$

Estas relaciones coinciden con el hecho que aparece en mecánica cuántica de que las partículas con espín 1/2 (y en general espín semientero) son fermiones y satisfacen el principio de exclusión de Pauli.

### 1.3. QFT con interacciones.

Una parte crucial de este trabajo es entender hasta que momento es posible seguir usando las herramientas de teoría cuántica de campos. Como veremos más adelante, esto se traduce en poder distinguir cuando una teoría de campos esta fuertemente acoplada y cuando no. Para entender que significa esto es necesario revisar los campos que describen partículas interactuantes.

Una manera sencilla de abordar este problema es agregando términos de interacción al Lagrangiano del campo libre. En el ejemplo que tomaremos esto significa, a nivel de la acción, que los modos de Fourier ya no van a estar desacoplados. O lo que es lo mismo, que las ecuaciones de movimiento dejan de ser lineales en  $\phi$ .

Uno de los problemas que surge al agregar términos de interacción es que la definición de partícula no es clara porque el campo  $\phi$  ya no se puede desarrollar en términos de operadores de creación y aniquilación desacoplados.

Para revisar campos interactuantes consideremos un potencial de la forma  $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$ . A la constante adimensional  $\lambda = V^{(4)}(0)$  se le conoce como constante de acoplamiento y jugará un papel muy importante en lo que sigue ya que esta constante mide la intensidad de las interacciones.

Encontraremos que al desarrollar los correladores de muchas partículas, como en la ecuación (1.4), obtenemos una exponencial que sólo podremos expandir en una serie de potencias si  $\lambda \ll 1$ . Cuando esto ocurre decimos que estamos en el régimen débilmente acoplado.

Siguiendo con la descripción de las interacciones, cuando la teoría está débilmente acoplada, es posible aproximar la dinámica del campo en una expansión perturbativa alrededor del caso del campo libre. Esto se hace separando el Hamiltoniano en

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right] + \int d^3x \frac{\lambda}{4!}\phi^4 = H_0 + H_{int}. \quad (1.6)$$

Esta distinción permite definir un nuevo cuadro (como el de Heisenberg o Schrodinger) que se conoce como el cuadro de interacción en el que los operadores evolucionan en el tiempo a través de  $\hat{\Theta}_{int} = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t} \hat{\Theta}_H e^{i\hat{H} t} e^{-i\hat{H}_0 t}$ .

Como mencionamos cuando hablamos de correladores, toda la información física de una teoría de campos se puede extraer de calcularlos. Al calcular el correlador en esta teoría interactuante obtenemos una expresión en términos de operadores de campo de la parte no interactuante  $\hat{\phi}_H$

$$\begin{aligned} G_N(x_1, \dots, x_N) &= \frac{\Omega T \hat{\phi}_H(x_1) \cdots \hat{\phi}_H(x_N)}{\Omega} = \\ &= \lim_T \frac{0 T \hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_N) \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)]}{(1-i\epsilon) \quad 0 T \exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)] \quad 0}. \end{aligned}$$

La única diferencia con los correladores del campo escalar es el término  $\exp[-i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t)]$  que aparece multiplicando a los operadores de campo. Si tomamos  $\lambda \ll 1$ , entonces es posible expandir esta exponencial en una serie de potencias tales que cada potencia de  $\lambda$  tenga una contribución cada vez menor a la serie

$$\exp \left[ -i \int_{-T}^T dt \hat{H}_{int}^I(t) \right] = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4y \hat{\phi}^4(y) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4y_1 \hat{\phi}_I^4(y_1) \int d^4y_2 \hat{\phi}_I^4(y_2) + \cdots.$$

Cuando se hacen los productos de estos términos de la serie de Taylor con los otros operadores de campo  $\hat{\phi}_H(x_i)$  se obtienen términos de la forma

$$0 T \left\{ \hat{\phi}_I(x_1) \cdots \hat{\phi}_I(x_N) \left( \frac{\lambda}{4!} \right) \int d^4y_1 \hat{\phi}_I^4(y_1) \right\} 0. \quad (1.7)$$

Este término queda escrito nuevamente en función de productos de operadores de campo con la única diferencia de que el campo interactuante no está evaluado sobre un punto fijo sino está integrado sobre todo el espacio tiempo. Usando el teorema de Wick para desarrollar (1.7) en sumas de correladores de dos partículas vemos que el término  $\phi^4(y_1)$  da lugar a cuatro propagadores extra.

Así, el efecto de agregar estas interacciones al hamiltoniano es el de permitir procesos donde el número de partículas cambia entre procesos de interacción. En este caso esto sucede en grupos de cuatro partículas.

A las partículas que aparecen y desaparecen durante procesos de interacción se les conoce como partículas virtuales. Los propagadores que se desarrollan en potencias de la constante de acoplamiento se pueden agrupar como una suma sobre todas los términos de la forma (1.7) y términos de orden mayor en  $\lambda$ . Una forma de visualizar estos procesos de interacción está dada por los llamados *diagramas de Feynman* que son representaciones pictóricas de cada proceso de interacción [4].

Esta idea de que el número de partículas no sea constante nos lleva a replantearnos que significa la intensidad de interacción entre partículas. Es decir, si queremos medir experimentalmente cual es la intensidad de la interacción entre dos partículas debemos de tomar en cuenta que dicha interacción no sólo va a ocurrir entre estas partículas sino que debemos sumar sobre todas las contribuciones de las partículas virtuales. Así, una partícula como el electrón no se puede entender más como en el caso clásico con una carga definida localizada en un punto. Bajo esta nueva descripción entendemos al electrón como una carga rodeada de una nube de partículas virtuales.

Esta forma de entender las interacciones implica que su intensidad necesariamente va a depender de a que escala las estemos estudiando y de la constante de acoplamiento,  $\lambda$ , que aparece en el Lagrangiano.

Para obtener un resultado teórico que cuantifique este resultado se usa una herramienta matemática llamada renormalización que consiste en eliminar términos divergentes que surgen en los cálculos de ciertos propagadores. Si la teoría es renormalizable, entonces estos términos divergentes se pueden eliminar ajustando un número finito de datos obtenidos experimentalmente.

El estudio de la física a diferentes escalas energéticas es de mucha utilidad porque en general los grados de libertad de un sistema a una cierta escala energética no afectarán aquellos que ocurren a otra escala. Es decir, podemos estudiar teorías efectivas que tomen en cuenta sólo los procesos que tienen una contribución relevante a esa escala energética en particular. De esta forma, obtenemos una relación entre la constante de acoplamiento física y la escala energética del proceso que estemos considerando. Dicha relación está dada por la llamada función beta

$$\beta = \frac{\partial \lambda}{\partial (\log \mu)}, \quad (1.8)$$

donde  $\mu$  es una escala energética.

El comportamiento de esta función beta definirá las características de la teoría cuántica de campos que estemos estudiando. En particular, la teoría que aparece en la correspondencia holográfica forma parte de una familia de teorías de campo conocida como las teorías conformes. Como mencionaremos en la sección 1.3.1 estas teorías tienen la propiedad de que su función beta se cancela por lo que son invariantes bajo reescalamientos de energía.

### 1.3.1. Teorías de campo conforme.

Debido a que el ejemplo con el que trabajaremos es una teoría conforme vale la pena mencionar qué significa esto.

Al igual que las otras formas de etiquetar un campo, las teorías conformes están definidas como aquellas que son invariantes bajo un cierto grupo de transformaciones conocido como el grupo conforme. Este grupo está formado por todas aquellas transformaciones de las coordenadas espacio-temporales que resultan en un cambio de la métrica de la forma

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (1.9)$$

Esto quiere decir que aunque el producto punto entre dos vectores puede cambiar, el ángulo entre ellos no lo hará. Esto ocurre también con las funciones conformes de variable compleja que tienen la propiedad de preservar ángulos localmente.

Para distinguir cual es el efecto que tienen estas transformaciones conformes sobre el espacio-tiempo, es útil dividir las en dos<sup>3</sup>. Por una parte están formadas por cambios de escala de las coordenadas espacio-temporales. Es decir,  $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$ . Esta es la característica que hace que la función beta se anule y nos dice que la teoría se ve igual para cualquier escala energética ya que las escalas en momentos son inversamente proporcionales a los cambios en las escalas de distancia según la relación de De Broglie.

La segunda parte de este grupo conforme está formada por las transformaciones conformes especiales que cambian a las coordenadas espacio-temporales a través de

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu - a^\mu x^2}{1 - 2a \cdot x + a^2 x^2}, \quad (1.10)$$

donde  $a^\mu$  es el parámetro que describe a la transformación.

Además de aparecer en la correspondencia holográfica, las teorías de campos conformes han sido muy utilizadas en diversas áreas de la física. En particular, la teoría de supercuerdas que veremos más adelante es una teoría de campos conforme 2-dimensional. Es decir, es invariante bajo (1.9).

Otro ejemplo de aplicaciones de las teorías de campo conforme se encuentra en física estadística donde estas teorías son utilizadas para estudiar transiciones de fase de

---

<sup>3</sup>Las transformaciones del grupo de Poincaré también son conformes. En esta sección estudiaremos las transformaciones conformes que no forman parte del grupo de Poincaré.

segundo orden. Un estudio de las aplicaciones de estas teorías a la física estadística se puede encontrar en [6].

## 1.4. Teorías de Super Yang-Mills

Hemos hablado de las transformaciones que diferentes campos sufren bajo el grupo de Lorentz. Dichas transformaciones son tales que su Lagrangiano permanece invariante. Sin embargo, existen otros tipos de simetría que puede tener una teoría y aún no hemos considerado.

Estas simetrías aparecen cuando la descripción de la teoría tiene más grados de libertad de los que necesitamos para describir el sistema. Es decir, no todos los grados de libertad son físicos.

Un ejemplo de estas redundancias en la descripción de una teoría existe incluso a nivel clásico cuando se describe al campo electromagnético en términos de un potencial. Ahí, se encuentra que existe cierta libertad para escoger el potencial. Ya que si escribimos  $A^\mu = A^\mu + \partial^\mu \epsilon$  en lugar de  $A^\mu$ , las ecuaciones de Maxwell no cambian y por lo tanto la física tampoco.

Estas simetrías, que hablan de los grados de libertad redundantes en una teoría, se llaman simetrías de norma. Los grupos que definen estas simetrías son los que caracterizan las llamadas *teorías de norma*.

Como vimos anteriormente, un estado de partícula en mecánica cuántica se puede definir como aquel estado que nos arroja amplitudes de probabilidad que no dependen del observador inercial. En términos matemáticos esto quiere decir que la representación del grupo de Poincaré sobre el espacio de partículas es unitaria<sup>4</sup>. De esta misma forma, las transformaciones asociadas a las simetrías de norma actúan sobre un campo mediante una representación del grupo asociado a estas transformaciones.

Al igual que muchos grupos de simetría en física, los grupos de norma forman parte de un subconjunto conocido como *grupos de Lie*. Los grupos de Lie son variedades diferenciables suaves de dimensión finita que quedan determinados por su comportamiento infinitesimal. En términos matemáticos esto significa que a cada grupo de Lie se le puede asociar un álgebra cuyo espacio vectorial es el espacio tangente al elemento identidad en el grupo de Lie. Explícitamente esto quiere decir que si tomamos un elemento del grupo de Lie,  $g \in G$ , entonces este se puede expresar mediante  $g = \exp(a_i T^i)$ . Donde  $T_i$  son los generadores del espacio tangente y  $a_i$  son coeficientes escalares.

---

<sup>4</sup>Un operador lineal  $U : H \rightarrow H$  en un espacio de Hilbert  $H$  es llamado unitario si satisface la condición  $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}$ . Esta condición implica que el producto punto en  $H$  permanece invariante ante operadores unitarios  $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \hat{U}\phi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \phi | \hat{U}^\dagger \hat{U}\psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$

De esta forma, una teoría de norma es una teoría cuántica de campos tal que su Lagrangiano es invariante bajo un grupo de Lie que define simetrías de norma. Mismas que como mencionamos, provienen de considerar los grados de libertad redundantes en el Lagrangiano.

Un resultado importante es que para cada generador de esta álgebra de Lie existe un campo de norma que se incluye en el lagrangiano para que este sea invariante bajo estas transformaciones. Como veremos más adelante, al cuantizar la teoría las partículas que corresponden a estos campos dan lugar a bosones que originan las interacciones del campo.

El caso particular de estas teorías de norma que será relevante en este trabajo es aquel en el que el grupo de norma es el de las matrices complejas unitarias con determinante uno  $SU(N)$ .

A este tipo de teorías que están basadas en grupos no abelianos (el producto del grupo no es conmutativo) se les llama teorías de Yang-Mills en honor a Chen Ning Yang y Robert Mills quienes, en 1954, extendieron el concepto de teoría de norma a grupos no abelianos en un intento para explicar la interacción fuerte.

La densidad Lagrangiana de una teoría de Yang-Mills está dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}.$$

Donde los campos  $F_{\mu\nu}^a$  corresponden a los campos bosónicos que dan la interacción de las partículas fundamentales, definimos la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu - i\lambda A_\mu$  y  $\lambda$  es la constante de acoplamiento de los bosones de norma en la teoría.

Un punto importante es que los grupos de simetría no actúan directamente sobre estos campos sino que lo hacen sus representaciones. En particular, la representación del grupo de norma que actúa sobre el campo y consiste en la representación más pequeña no trivial del grupo es llamada la *representación fundamental*. En el caso de  $SU(N)$  la representación fundamental toma la forma de las matrices unitarias de  $n \times n$ .

Por otro lado, el campo vectorial  $A_\mu$  asociado a los bosones de norma se transforma en la *representación adjunta* de  $SU(N)$  que actúa sobre elementos del espacio vectorial generado por el álgebra de Lie.

Un ejemplo de una teoría de Yang-Mills es la cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés) que describe a la fuerza fuerte responsable de mantener a los nucleones dentro del núcleo del átomo. Esta teoría es invariante bajo el grupo de simetría  $SU(3)$ . Su Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi} (i\not{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}.$$

El campo  $\psi(x)$  es un espinor y transforma en la representación fundamental del grupo de norma. Este campo está asociado a los quarks que son las partículas fundamentales

que interactúan a través de la fuerza fuerte. Cada quark se representa como un estado que puede tener tres “cargas” diferentes. A dichas cargas, que describen la forma en la que interactúan los quarks, se les llama colores.

El campo  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de intensidad de campo y en términos de los campos asociados a los bosones de norma  $A_\mu$  está dado por

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Donde los campos  $A_\mu$  transforman en la representación adjunta de  $SU(3)$  y caracterizan la interacción fuerte entre quarks. A las partículas asociadas a estos campos de norma se le conoce como gluones y son los bosones a través de las cuales los quarks interactúan. La constante  $g$  que aparece en (1.11) es la constante de acoplamiento de QCD que como vimos antes puede cambiar con la escala energética.

La función beta de QCD tiene la propiedad de crecer cuando las distancias entre los quarks son grandes (energías pequeñas) comparadas con el tamaño del núcleo. Mientras que para distancias pequeñas la teoría se encuentra débilmente acoplada. A este tipo de comportamiento que presenta la función beta de QCD se le conoce como libertad asintótica y tiene como consecuencia que no podemos encontrar quarks libres en la naturaleza sino que estos siempre forman estructuras con tres o dos quarks.

Hemos visto que las simetrías del espacio-tiempo y las simetrías de norma juegan un papel importante para especificar qué tipo de teoría de campos estamos considerando. Sin embargo, falta aún una simetría más para poder describir la teoría de campos sobre la que hablaremos en este trabajo. Esta nueva simetría relaciona los grados de libertad fermiónicos y bosónicos y se le conoce como supersimetría.

Al igual que las simetrías de norma, la supersimetría surge de considerar generadores de un álgebra de Lie, asociada a un grupo de Lie, sólo que en lugar de ser cantidades tensoriales los generadores de la supersimetría  $Q_\alpha$  son espinoriales. Estos generadores conocidos como supercargas cumplen ciertas relaciones de conmutación con los generadores del grupo de Poincaré y otras relaciones de *anticomutación* entre ellos mismos

$$[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \quad , \quad Q_\alpha, \bar{Q}_\beta = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \cdot P_\mu, \quad (1.11)$$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = 0 = Q_\alpha, Q_\beta \quad . \quad (1.12)$$

La acción de estos generadores sobre un estado de partícula es el de cambiar bosones por fermiones y viceversa. Entonces, en una teoría supersimétrica tenemos que por cada partícula bosónica o fermiónica existe un supercompañero que representa una partícula que difiere de la partícula original solamente en que su espín cambia de modo que si teníamos un fermión ahora tenemos un bosón y viceversa.

La supersimetría podría ser una simetría presente en la naturaleza aunque todavía no se ha encontrado evidencia experimental de que existe. A pesar de esto, considerar

supersimetría es útil en muchas aplicaciones teóricas como la teoría conforme de campos que trataremos en este trabajo.

Otro ámbito donde es importante la supersimetría es en teoría de cuerdas donde permite resolver algunos problemas relacionados con estados de masa cuadrada negativa (taquiones) que aparecen de forma natural en la teoría de cuerdas.

Ya explicados estos conceptos tenemos las herramientas necesarias para describir la teoría de campos que trataremos cuando hablemos de la correspondencia holográfica. Esta es la teoría de campos conforme de Super Yang-Mills (SYM)  $\mathcal{N}=4$  con grupo de norma  $SU(N_c)$  en espacio-tiempo plano 4-dimensional.

El término Super Yang-Mills se refiere a que es una teoría de Yang-Mills con supersimetría.  $\mathcal{N} = 4$  se refiere al número de supersimetrías presentes, el número cuatro se refiere a que la teoría tiene cuatro veces el número mínimo de supersimetrías que le corresponden a su dimensión. Es decir, el número de conjuntos de generadores  $\hat{Q}^a$ . Mientras que  $SU(N_c)$  es el grupo de norma de la teoría.

El lagrangiano de esta teoría de Super Yang-Mills está dado por

$$\mathcal{L} = Tr \left\{ \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2D_\mu \phi^{AB} D^\mu \bar{\phi}_{AB} - 2i\lambda^{\alpha A} \not{D}_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{\dot{\alpha} A} - 2g\lambda^{\alpha A} [\lambda_\alpha^B, \bar{\phi}_{AB}], \right. \\ \left. - 2g\hat{\lambda}_{\dot{\alpha} A} [\bar{\lambda}_{\dot{\alpha} B}, \phi^{AB}] - 2g^2 [\phi^{AB}, \phi^{CD}] [\bar{\phi}^{AB}, \bar{\phi}^{CD}] \right\}. \quad (1.13)$$

Donde  $g$  es la constante de acoplamiento de la teoría y su contenido de campos está dado por un campo de norma  $A_\mu$ , cuatro fermiones de Weyl  $\lambda_\alpha^A$  con  $A = 1, \dots, 4$  y seis campos escalares reales  $\phi^i$  con  $i = 1, \dots, 6$ . Los  $\phi_{AB}$  que aparecen en el lagrangiano forman parte de la representación fundamental  $\mathbf{4}$  del grupo de supersimetría  $SU(4)_R$  mientras que  $\phi$  transforma en la  $\mathbf{6}$  y están relacionados mediante  $\phi^i = \frac{1}{2} \Sigma_{AB}^i \phi^{AB}$  donde  $\Sigma_{AB}^i$  son los coeficientes de Clebsh-Gordan que proyectan el producto de dos  $\mathbf{4}$  en la representación  $\mathbf{6}$ .

Esta teoría se encontró por primera vez en el estudio de una teoría de Super Yang-Mills con  $\mathcal{N} = 1$  en diez dimensiones. Al compactificar seis de estas dimensiones, conservando supersimetría, obtenemos la teoría descrita por el lagrangiano (1.13). El resultado de esta compactificación se manifiesta en el hecho de que las supersimetrías de la teoría en diez dimensiones se mantienen para la teoría en cuatro dimensiones.

Concluimos este capítulo mencionando un desarrollo debido al físico holandés Gerard 't Hooft que será de gran utilidad cuando hablemos de la correspondencia holográfica.

Como vimos en la sección 1.3, los procesos de dispersión de la teoría de campos interactuante se pueden desarrollar en una serie de potencias en la constante de acoplamiento  $g$ . La idea de 't Hooft [7] fue tomar una teoría de norma no abeliana y permitir que el número de colores  $N_c$  fuera un parámetro de la teoría.

El resultado importante es que si el número de colores se toma grande  $N_c$ , entonces es posible expandir cantidades físicas en potencias de  $1/N_c$ . Más aún, si definimos el acoplamiento de 't Hooft  $\lambda = g^2 N_c$  y mantenemos  $\lambda$  constante vemos que los procesos de dispersión de la teoría equivalen a sumar diagramas de Feynman que están organizados por sus topologías. Es decir, cada diagrama de Feynman en la expansión para  $N_c$  grande es proporcional a  $N_c^{-h}$ . Donde  $h$  es el género de una superficie topológica que nos dice cuantos agujeros tiene dicha superficie.

Este análisis es muy parecido al que se hace cuando se consideran interacciones entre cuerdas cerradas como veremos en el capítulo 3 y fue una de las primeras indicaciones de que podría existir una conexión fundamental entre una teoría de norma no abeliana y una teoría de cuerdas.

En el límite de 't Hooft, la expansión de cualquier amplitud en una teoría de norma en términos de diagramas de Feynman se calcula en potencias de  $\lambda$  mediante la siguiente expansión

$$\mathcal{A} = \sum_{h=0} N_c^{2-2h} \sum_{n=0} c_{h,n} \lambda^n, \quad (1.14)$$

donde a  $\lambda = g^2 N_c$  se le llama la constante de acoplamiento de 't Hooft,  $g$  es la constante de acoplamiento de la teoría de Super Yang-Mills y  $c_{h,n}$  son constantes.

## Capítulo 2

# Efecto Unruh con Teoría Cuántica de Campos

En el capítulo anterior desarrollamos algunos de los conceptos básicos de teoría cuántica de campos. Un ingrediente fundamental de esta construcción fue el hecho de que la acción que determina la dinámica del campo a nivel clásico es invariante bajo transformaciones del grupo de Poincaré. Este requerimiento es natural ya que estas transformaciones relacionan diferentes observadores inerciales y la relatividad nos enseña que la física debe ser la misma para todos ellos. Dado que la teoría de campos está asociada a un espacio de estados de partícula, la invariancia de Poincaré se traduce en que todos los observadores inerciales detectan el mismo contenido de partículas.

Con esto en mente, una pregunta que parece natural sabiendo esto es: ¿seguirán detectando el mismo contenido de partículas un observador inercial y uno acelerado?

Esta pregunta llevó a G.W. Unruh a estudiar cómo se ve una teoría cuántica de campos desde la perspectiva de un observador que describe un movimiento rectilíneo con aceleración propia constante. Él encontró en 1976 [3] que un observador acelerado percibe al estado vacío de un observador inercial como un estado idéntico al que percibe un observador que está inmerso en un medio térmico.

Las partículas que forman este medio permean el espacio-tiempo vistas por el observador acelerado. Más aún, su temperatura está relacionada directamente con la aceleración propia del observador a través de la expresión

$$T_{\text{Unruh}} = \frac{A}{2\pi}, \quad (2.1)$$

donde  $A$  es la aceleración propia del observador.

En este capítulo desarrollaremos los cálculos que muestran explícitamente el efecto Unruh para un campo escalar libre no-masivo.

Como vimos en la sección anterior, el vacío de una teoría cuántica de campos es el mismo para todos los observadores inerciales porque la acción es invariante de Lorentz. Dado esto, necesitamos entender el cambio de coordenadas que se hace cuando pasamos al sistema acelerado de la partícula. Más aún, debemos establecer si es posible definir una teoría de campos de modo que las dos descripciones, inercial y acelerada, puedan compararse.

El resultado que encontraremos mostrará que es posible definir una teoría de campos siempre y cuando tengamos un vector de Killing global tipo tiempo a través del cual se da la evolución “temporal”. Discutiremos el cambio explícito de sistemas de coordenadas en la sección 2.2 donde notaremos que el vector de Killing que nos sirve en esta región del espacio es el generador de empujones.

Cabe destacar que en este capítulo no estamos considerando un quark acelerado, como lo haremos en el capítulo 4, ya que estamos tratando el campo escalar libre como el caso particular más sencillo donde ocurre el efecto Unruh. Sin embargo, los resultados que encontraremos se aplican también a otros campos con interacciones, como mostraron J. J. Bisognano y E. H. Wichmann en 1974 [15].

Como forma de establecer explícitamente las diferencias que pueden surgir entre el observador acelerado y el inercial, en la sección 2.1.1 planteamos el problema de cómo comparar dos teorías de campos que en principio son distintas. Esto lo realizamos usando que los modos de frecuencia positiva, que son solución a la ecuación de Klein-Gordon (análogo a las funciones  $e^{-ip \cdot x}$  en (1.3)), forman una base para el espacio de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon.

Como tenemos dos teorías de campo definidas en el mismo espacio-tiempo tendremos entonces dos bases distintas. Definiendo un producto interno entre las soluciones a esta ecuación, es posible obtener los coeficientes que relacionan los operadores de creación y aniquilación (coeficientes de Bogoliubov) simplemente tomando las proyecciones del campo sobre cada base.

Las transformaciones que relacionan ambos conjuntos de operadores arrojan la relación que tiene el operador de número en una QFT como función de los coeficientes de Bogoliubov. El valor esperado de este operador de número es el número promedio de ocupación. Como veremos en la sección 2.2.1, dicho valor esperado muestra que el observador acelerado detecta un baño térmico de partículas cuya temperatura es precisamente la que llamamos temperatura de Unruh.

En la sección 2.2.2 hacemos un comentario de la deducción de la temperatura de Hawking y la condición KMS que define estados térmicos en una teoría de campos. En esta sección, revisamos que la temperatura de Unruh coincide exactamente con aquella debida a la radiación de Hawking que proviene del horizonte de Killing presente en el espacio-tiempo del observador acelerado. Esta coincidencia nos otorga una forma adicional de entender la interacción del observador acelerado con el vacío del inercial y será particularmente útil cuando se analice el problema en una teoría fuertemente

acoplada.

Por último, en la sección 4.3 mostramos que la generalización del efecto Unruh a movimiento circular tiene complicaciones. Estos problemas surgen porque la transformación de coordenadas que deja estático el observador acelerado no permite definir un vector de Killing que genere evolución temporal.

Para ver si la interacción con el vacío es no trivial se introduce el concepto de detector de Unruh-DeWitt. Cuando acoplamos uno de estos detectores a un observador en movimiento circular nos damos cuenta que el vacío de Minkowski es nuevamente diferente visto desde el sistema acelerado, pero las partículas no definen un baño térmico.

Por último, mencionamos los resultados de Davies [17] sobre movimiento circular en espacios acotados como antecedente al resultado que obtendremos en el capítulo 4.

## 2.1. QFT en espacio-tiempo curvo

Como en este capítulo consideraremos el espacio-tiempo que percibe un observador acelerado, vale la pena hacer la distinción entre teoría cuántica de campos en un espacio-tiempo plano y en uno curvo.

Supongamos entonces que tenemos un espacio-tiempo  $D$ -dimensional con tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . Una densidad Lagrangiana para el campo escalar masivo que es invariante bajo difeomorfismos<sup>1</sup> en el espacio-tiempo es

$$\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (2.2)$$

En el capítulo 1 se trató al campo escalar libre en el espacio-tiempo de Minkowski. Esta teoría es claramente invariante bajo transformaciones de Lorentz. Por esto, ningún observador inercial difiere con otro en el número de partículas de un estado.

Por otro lado, en un espacio-tiempo curvo no es claro que podamos definir estados de partículas. Por extensión, la definición del vacío no está clara porque no podemos estar seguros de poder definir un conjunto de operadores de creación y aniquilación que tengan las mismas propiedades que revisamos en el capítulo anterior.

La idea que seguiremos para definir una QFT como la que teníamos en el caso plano es tomar un campo vectorial global de Killing<sup>2</sup> tipo tiempo y dejar que este genere

---

<sup>1</sup>Un difeomorfismo es una función invertible de una variedad diferenciable a otra tal que la función y su inversa son suaves.

En este caso el difeomorfismo se refiere a cambios de coordenadas en el espacio-tiempo curvo.

<sup>2</sup>Un vector de Killing  $K^\mu$  es un vector que satisface la ecuación diferencial  $\partial_\mu K_\nu + \partial_\nu K_\mu = 0$ . Estos vectores son los generadores infinitesimales de isometrías en la variedad Lorentziana del espacio-tiempo.

la evolución temporal (de la misma forma que el Hamiltoniano lo hacía en espacio-tiempo plano).

Si sobre este vector de Killing podemos definir modos de Fourier desacoplados, entonces obtendremos una base para las funciones en este espacio-tiempo. Así, podremos comparar la teoría de campos de un observador inercial y el observador acelerado.

Este método sólo funciona si la métrica del espacio-tiempo curvo es estática. Más adelante encontraremos que el espacio-tiempo del observador acelerado (espacio-tiempo de Rindler) si tiene una métrica estática.

### 2.1.1. Transformaciones de Bogoliubov

Sabiendo los pasos a seguir para definir la teoría de campos del observador acelerado, revisaremos qué significa calcular qué detecta el observador acelerado en el vacío del observador inercial.

En esta sección daremos expresiones explícitas para la transformación entre los operadores de creación y aniquilación de dos teorías de campo que se definen en el mismo espacio-tiempo. Al igual que en la sección anterior, en esta sección usaremos el campo escalar libre como un ejemplo sencillo que permite ilustrar estos conceptos.

Comenzamos suponiendo que la métrica del espacio-tiempo curvo es una métrica estática de la forma

$$ds^2 = N(\vec{x})^2 dt^2 - G_{ab}(\vec{x}) dx^a dx^b. \quad (2.3)$$

Esta métrica nos permite definir un producto punto entre dos diferentes soluciones  $f_A, f_B$  de la ecuación de Klein-Gordon definida por (2.2)  $(\square - m^2)\phi = 0$

$$(f_A, f_B) = i \int d^D x \sqrt{G_{ab} N^{-1}} (f_A^* \partial_t f_B - f_B \partial_t f_A^*). \quad (2.4)$$

Ahora, suponemos que tenemos un conjunto completo de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon  $f_i$ . Supondremos que este espacio es discreto por simplicidad de notación<sup>3</sup>.

Así, podemos expresar al campo escalar como combinación lineal de un conjunto de las  $f_i$ :

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i \left( \hat{a}_i f_i(x) + \hat{a}_i^* f_i^*(x) \right). \quad (2.5)$$

Como las funciones  $f_i$  son ortonormales, basta proyectar  $\phi$  con alguna de ellas para obtener el operador  $\hat{a}_i$ :

$$\hat{a}_i = (f_i, \phi)_{KG}. \quad (2.6)$$

---

<sup>3</sup>Para hacerlo continuo basta cambiar las sumas por integrales sobre todo el espacio de frecuencias, asignar un índice continuo a cada operador y hacer a los coeficientes funciones de la posición.

Como los operadores de aniquilación definen al vacío cuántico, una idea natural para pasar de una teoría a otra es encontrar los coeficientes que relacionan a estos operadores.

Como vimos en el capítulo 1, el operador de aniquilación es aquel que aparece como factor de las soluciones de frecuencia positiva. De esta forma, si proponemos dos conjuntos completos de soluciones podemos comparar sus modos de frecuencia positiva y encontrar como se relacionan los operadores de aniquilación.

Supongamos entonces que existen dos conjuntos completos de modos de frecuencia positiva  $f_i^{(1)}$  y  $f_I^{(2)}$  de modo que ambos son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon (por lo que cumplen las reglas del producto punto). Ahora, expresamos un conjunto de funciones en términos de la otra (esto se puede hacer porque ambos conjuntos son completos):

$$f_I^{(2)} = \sum_i \left[ \alpha_{Ii} f_i^{(1)} + \beta_{Ii} f_i^{(1)*} \right], \quad (2.7)$$

$$f_I^{(2)*} = \sum_i \left[ \alpha_{Ii}^* f_i^{(1)*} + \beta_{Ii}^* f_i^{(1)} \right]. \quad (2.8)$$

De esta expresión, se pueden obtener los coeficientes  $\alpha_{Ii}$  y  $\beta_{Ii}$  en términos de los modos de frecuencia positiva. Para hacerlo, multiplicamos por una de las funciones  $f_i^{(1)}$  y usamos su ortonormalidad para seleccionar cada coeficiente. A estos coeficientes, que permiten expresar los operadores de una teoría en función de los operadores de la otra, se les llama *Coefficientes de Bogoliubov* (nombrados así por el físico Nikolay Bogoliubov).

De la misma forma, las funciones  $f_i^{(1)}$  expresadas en términos de  $f_I^{(2)}$  están dadas por:

$$\begin{aligned} f_i^{(1)} &= \sum_I \left[ \alpha_{Ii}^* f_I^{(2)} - \beta_{Ii} f_I^{(2)*} \right], \\ f_i^{(1)*} &= \sum_I \left[ \alpha_{Ii} f_I^{(2)*} - \beta_{Ii}^* f_I^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ahora, para comparar los operadores de creación y aniquilación de ambas teorías expresamos el campo escalar  $\hat{\phi}(x)$  como una combinación lineal de cada conjunto completo de funciones:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_i \left[ \hat{a}_i^{(1)} f_i^{(1)} + \hat{a}_i^{(1)*} f_i^{(1)*} \right] = \sum_I \left[ \hat{a}_I^{(2)} f_I^{(2)} + \hat{a}_I^{(2)*} f_I^{(2)*} \right]. \quad (2.10)$$

Sustituimos las ecuaciones (2.9) en (2.10) y despejamos el coeficiente de  $f_I^{(2)}$ , el modo de frecuencia positiva. Como el conjunto es completo, igualamos el operador de aniquilación  $\hat{a}_I^{(2)}$  de un lado con el coeficiente de  $f_I^{(2)}$  en términos de los  $\hat{a}_i^{(1)}$  en el otro.

Así, obtenemos:

$$\hat{a}_i^{(1)} = \sum_I \left[ \alpha_{Ii} \hat{a}_I^{(2)} - \beta_{Ii}^* \hat{a}_I^{(2)} \right]. \quad (2.11)$$

Podemos repetir este procedimiento ahora despejando  $\hat{a}_I^{(2)}$  en términos de los coeficientes de Bogoliubov y el operador  $\hat{a}_i^{(1)}$ :

$$\hat{a}_I^{(2)} = \sum_I \left[ \alpha_{Ii}^* \hat{a}_i^{(1)} - \beta_{Ii}^* \hat{a}_i^{(1)} \right]. \quad (2.12)$$

Si llamamos  $0^{(1)}$  al vacío que es aniquilado por  $\hat{a}_i^{(1)}$  y  $0^{(2)}$  al aniquilado por  $\hat{a}_i^{(2)}$ , vemos de la ecuación (2.12) que el estado que obtenemos al aplicar el operador  $\hat{a}_I^{(2)}$  sobre el vacío  $0^{(1)}$  está dado por:

$$\hat{a}_I^{(2)} 0^{(1)} = \sum_I \alpha_{Ii}^* \hat{a}_i^{(1)} 0^{(1)} - \sum_I \beta_{Ii}^* \hat{a}_I^{(1)} 0^{(1)} = - \sum_I \beta_{Ii}^* \hat{a}_I^{(1)} 0^{(1)}.$$

De esta ecuación, vemos que los operadores  $\hat{a}_I^{(2)}$  aniquilan al vacío de la teoría generada por los  $f_I^{(1)}$  sólo si los coeficientes  $\beta_{Ii}$  son diferentes de cero. Este resultado es muy importante ya que significa que sí es posible tener diferencias en la definición del estado vacío entre dos teorías de campo definidas sobre el mismo espacio-tiempo.

Así, estos coeficientes serán los que buscaremos cuando definamos la teoría de campos desde el punto de vista del observador acelerado. Ya que de esta forma podremos distinguir de que manera detecta el estado vacío de un observador inercial.

Un valor esperado que será de utilidad cuando se analice el movimiento rectilíneo acelerado es el operador de número. Tomando el operador de número del segundo conjunto de modos,  $\hat{N}_I^{(2)} = \hat{a}_I \hat{a}_I$ , y actuando en el vacío del primer conjunto, obtenemos:

$$0^{(1)} \hat{N}_I^{(2)} 0^{(1)} = \sum_i \beta_{iI}^2. \quad (2.13)$$

Este valor esperado nos da el número promedio de partículas que observa la teoría generada por  $f_I^{(2)}$  en el vacío definido por el conjunto  $f_i^{(1)}$ . Si esta cantidad no es cero, entonces el estado vacío de una teoría no tiene cero partículas cuando lo vemos desde la otra teoría.

En el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado veremos que este valor esperado arroja un espectro térmico de Planck. De la ecuación (2.13), vemos que nuevamente los coeficientes  $\beta_{Ii}$  dictan si existe una diferencia entre una teoría y otra.

## 2.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Teniendo una expresión general para los coeficientes de Bogoliubov, necesitamos calcular la métrica curva del espacio-tiempo que percibe el observador acelerado. Haciendo esto podremos relacionar esta teoría cuántica de campos con la de un observador inercial.

Para esto, consideremos una partícula moviéndose en línea recta con aceleración propia constante  $A^\mu A_\mu = a^2$  en el espacio-tiempo de Minkowski. Colocamos un sistema inercial de modo que la trayectoria de la partícula se dé sobre el eje  $x$ . Así, la forma de la trayectoria es  $X(\tau) = (t(\tau), x(\tau), 0, 0)$ . Donde  $\tau$  es el tiempo propio de la partícula acelerada. Las coordenadas  $y$  y  $z$  no son necesarias así que se omitirán.

Para encontrar la línea de mundo de la partícula despejamos  $x(t)$  y  $t$  en función de  $a$  calculando la velocidad y aceleración propia:

$$\begin{aligned} V &= \frac{dX}{d\tau} = \gamma \left( 1, \frac{dx(t)}{dt} \right), \\ A &= \frac{dV}{d\tau} = \left( \gamma\dot{\gamma}, \gamma \frac{d}{dt}(\gamma v) \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

En el sistema de referencia que se mueve con la partícula tenemos  $v = dx/dt = 0$  y  $\gamma = 1$ . Por lo tanto,  $A_{\text{comóvil}} = (0, dv/dt) = (0, a)$ .

Regresando al sistema inercial original mediante una transformación de Lorentz, obtenemos la 4-aceleración en el sistema original:

$$A = a(\beta\gamma, \gamma). \quad (2.15)$$

Igualando la componente  $A^1$  de (2.14) con la componente  $A^1$  de (2.15) encontramos la ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula:

$$\frac{d}{dt} \left( \gamma \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx/dt}{1-v^2} \right) = a. \quad (2.16)$$

Resolvemos esta ecuación de segundo orden para obtener la trayectoria de la partícula:

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2}. \quad (2.17)$$

La solución de esta ecuación es la línea de mundo que traza la partícula en el espacio-tiempo. En este caso, corresponde a una hipérbola cuya intersección con el eje  $x$  es  $a^{-2}$  como podemos ver en la Figura 2.1.

Para poder comparar la teoría cuántica de campos del observador acelerado y el inercial, debemos primero describir cómo se deforma el espacio-tiempo desde el punto

de vista del observador acelerado. Para esto, basta escoger un sistema de coordenadas tales que dejen al observador acelerado estático. A las nuevas coordenadas que cumplen esta condición se les conoce como *coordenadas de Rindler* y están dadas por:

$$\begin{aligned} t &= a^{-1}e^{a\xi} \sinh a\tau, & t &= a^{-1}e^{a\hat{\xi}} \sinh a\hat{\tau}, \\ x &= a^{-1}e^{a\xi} \cosh a\tau, & x &= -a^{-1}e^{a\hat{\xi}} \cosh a\hat{\tau}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Como el coseno hiperbólico es siempre mayor que cero, las coordenadas  $(\xi, \tau)$  cubren sólo la parte del espacio-tiempo definida por  $t < x$  para  $a$  positiva.

Para trazar el movimiento hiperbólico de una partícula acelerada (con aceleración  $a$ ) (2.17) fijamos  $\xi = 0$ .

Esta región sugiere una forma de dividir el espacio-tiempo en cuatro partes. Al pedazo con  $t < x$  se le conoce como la *cuña derecha de Rindler*. La región  $t < -x$  está cubierta por las coordenadas  $(\hat{\xi}, \hat{\tau})$  de la ecuación (2.18) y se le llama la *cuña izquierda de Rindler*. A las regiones  $x < t$  y  $x > -t$  se les conoce como *Universo en expansión degenerado de Krasner* y *Universo en contracción degenerado de Krasner* respectivamente.

A este espacio-tiempo, formado por la unión de estas secciones, se le conoce como *espacio-tiempo de Rindler* y se muestra en la Figura 2.1.

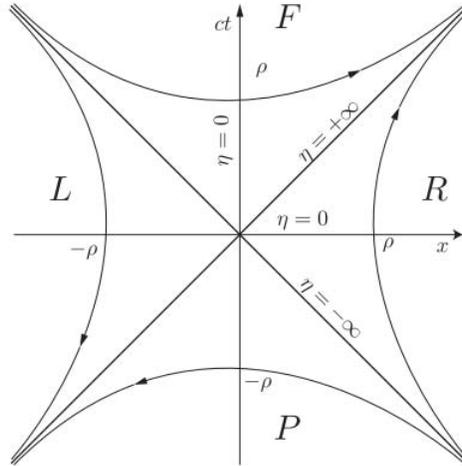


Figura 2.1: En esta figura vemos las cuñas de Rindler etiquetadas como R para la derecha, L la izquierda, mientras F y P son el Universo en expansión degenerado de Krasner y Universo en contracción degenerado de Krasner respectivamente. Imagen tomada de [16].

El elemento de línea para la cuña derecha de Rindler toma la forma:

$$ds^2 = e^{2a\xi}(d\tau^2 - d\xi^2) - dy^2 - dz^2. \quad (2.19)$$

Cabe destacar que el vector  $\partial_\tau = x\partial_t + t\partial_x$  es un vector de Killing ya que los coeficientes de la métrica (2.19) no dependen explícitamente de  $\tau$ . Este vector es tipo tiempo en las cuñas de Rindler y tipo espacio en el resto. Dicho cambio define una hipersuperficie en la región descrita por las trayectorias nulas  $t = \pm x$ . Esto quiere decir que las cuñas de Rindler están desconectadas causalmente del resto del espacio-tiempo. De este modo, la región que las divide define un *horizonte de Killing*.

El vector de Killing en la dirección  $\tau$  es tipo tiempo en la región de interés y será el que usaremos como generador de traslaciones temporales cuando se construya la teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo de Rindler.

### 2.2.1. El Efecto Unruh.

Teniendo ya la métrica en la cuña derecha de Rindler (2.19), basta obtener el conjunto completo de soluciones que surge de la ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Rindler. Con este conjunto obtendremos los coeficientes de Bogoliubov que relacionan los estados vacíos del observador acelerado y del inercial. Para esto, notamos que haciendo el cambio de variable dado por (2.18) para la cuña derecha e izquierda se obtiene la misma ecuación de Klein-Gordon para cada sector sobre sus respectivas variables:

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2)\hat{\Phi} = 0, \quad (\partial_{\hat{\tau}}^2 - \partial_{\hat{\xi}}^2)\hat{\Phi} = 0. \quad (2.20)$$

Al igual que cuando se resuelve una ecuación de onda es útil definir variables que representen los modos izquierdos y derechos. Definimos  $U = t - x$  para los modos derechos y  $V = t + x$  para los izquierdos.

Así, el campo se separa en parte derecha  $\phi_+$  y parte izquierda  $\phi_-$ . Sin embargo, podemos tomar en cuenta sólo la parte izquierda porque los modos izquierdos y derechos no interactúan entre sí así que los cálculos dan el mismo resultado.

Expresado en términos de la base de frecuencias positivas  $g_\omega$  el campo izquierdo está dado por:

$$\hat{\Phi}_+(V) = \int_0^\infty \left[ \hat{a}_{+\omega}^R g_\omega(v) + \hat{a}_{+\omega}^R g_\omega^*(v) \right]. \quad (2.21)$$

Donde definimos  $v = \tau + \xi$ ,  $g_\omega(v) = e^{-i\omega v} / \sqrt{4\pi\omega}$  y  $\hat{a}_{+\omega}^R, \hat{a}_{+\omega}^R$  como los operadores de creación y aniquilación que cumplen las relaciones de conmutación canónicas.

Este campo se expresa en la cuña izquierda pidiendo  $V < 0 < U$  y cambiando las coordenadas de  $(\tau, \xi)$  por  $(\hat{\tau}, \hat{\xi})$ . Definiendo  $\hat{v} = \hat{\tau} - \hat{\xi}$  en lugar de  $v$  e introduciendo nuevos operadores de creación y aniquilación  $\hat{a}_{+\omega}^L$  y  $\hat{a}_{+\omega}^L$  que satisfacen sus propias relaciones de conmutación.

Ya que tenemos los modos que describen al campo  $\hat{\Phi}$  en las cuñas de Rindler, ahora sólo nos falta expresar estos modos en términos de los modos de frecuencia positiva

que se usan para describir al campo escalar en Minkowski  $e^{-ikv}/\sqrt{4\pi k}$ . Estos modos nos permitirán encontrar los coeficientes de Bogoliubov.

Hay que expresar cada modo en la región que le corresponde y para esto usamos la función de Heaviside  $\theta(V) = 0$  si  $V < 0$  y  $\theta(V) = 1$  si  $V \geq 0$ . Así, obtenemos:

$$\theta(V)g_\omega(v) = \int_0^\infty \frac{dk}{4\pi k} (\alpha_{\omega k}^R e^{-ikV} + \beta_{\omega k}^R e^{ikV}), \quad (2.22)$$

$$\theta(-V)g_\omega(\hat{v}) = \int_0^\infty \frac{dk}{4\pi k} (\alpha_{\omega k}^L e^{-ikV} + \beta_{\omega k}^L e^{ikV}). \quad (2.23)$$

Donde la primera ecuación está en la cuña derecha y la segunda en la izquierda.

Multiplicando (2.22) por  $e^{ikV/2\pi}$  e integrando sobre  $V$ , el segundo término se cancela y en el primero se obtiene una delta de Dirac sobre  $k$ .

$$\alpha_{\omega k}^R = \frac{1}{4\pi k} \int_0^\infty \frac{dV}{2\pi} g_\omega(V) e^{ikV}. \quad (2.24)$$

Los demás coeficientes de Bogoliubov se obtienen realizando cálculos análogos y todos quedan expresados en términos de una integral de la misma forma que en (2.24).

Teniendo los coeficientes de Bogoliubov, basta igualar las expresiones de los campos e igualar coeficientes como hicimos en la sección anterior. Así, obtenemos el operador de aniquilación del espacio de Minkowski en términos de operadores de Rindler:

$$\left( \hat{a}_{+\omega}^R - e^{-\pi\omega/a} \hat{a}_{+\omega}^L \right) 0_M = 0, \quad (2.25)$$

$$\left( \hat{a}_{+\omega}^L - e^{-\pi\omega/a} \hat{a}_{+\omega}^R \right) 0_M = 0. \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

El valor esperado del operador de número de Rindler sobre el vacío de Minkowski está dado por:

$$0_M \hat{N}_R 0_M = 0_M \hat{a}_{+\omega}^R \hat{a}_{+\omega}^R 0_M .$$

Usando relaciones de conmutación es fácil obtener:

$$0_M \hat{N}_R 0_M = \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \delta(0). \quad (2.28)$$

Reconocemos el factor de  $\delta(0)$  con un espectro de Planck con temperatura  $T = a/2\pi$ . Este término nos dice que el observador acelerado está rodeado de partículas que constituyen un medio térmico, mientras que el observador inercial no detecta partículas. A este hecho de teoría cuántica de campos se le conoce como el *efecto Unruh* y la llamada temperatura de Unruh está dada por:

$$T_{Unruh} = \frac{a}{2\pi}. \quad (2.29)$$

Este resultado se puede generalizar al movimiento acelerado ya no en espacio-tiempo de Minkowski sino ahora en un espacio-tiempo curvo.

En este contexto, S. Deser y Orit Levin estudiaron en [19] qué sucede con un observador que se mueve con aceleración propia constante en línea recta dentro de los espacios máximamente simétricos con curvatura constante de de-Sitter y anti de-Sitter en cuatro dimensiones.

Como veremos en el siguiente capítulo, estos espacios se pueden encajar en un espacio-tiempo plano de una dimensión más grande. Así, Deser y Levin encontraron que se puede recuperar la fórmula para la temperatura de Unruh (2.29) si se sustituye la aceleración  $a$  del espacio-tiempo curvo por la 5-aceleración del espacio-tiempo plano 5-dimensional que cubre a estos espacios.

Un compendio de resultados acerca del efecto Unruh se puede encontrar en [9].

### 2.2.2. Condición KMS y temperatura de Hawking

En la sección anterior calculamos el operador de número como forma de comprobar que el observador acelerado siente un medio térmico. Este análisis se realizó partiendo de la suposición de que el observador se movía sobre un espacio-tiempo a temperatura cero. Sin embargo, sabemos que este no es el caso en general.

En esta sección revisamos qué significa que un estado en una teoría cuántica de campos se encuentre a una temperatura diferente de cero. Comprobaremos que este es el caso para el observador acelerado en movimiento rectilíneo. También revisaremos la teoría cuántica de campos sobre un espacio-tiempo de Schwarzschild donde encontraremos que la teoría no está a temperatura cero. Más aún, esta temperatura se debe a radiación que proviene del agujero negro.

Supongamos que tenemos un sistema con un número de grados de libertad finito. La definición clásica del ensamble canónico que describe un equilibrio térmico a temperatura  $T = \beta^{-1}$  es tal que para todos los operadores  $A$  el valor de expectación de dicho operador está dado por:

$$A = \frac{\text{Tr}(e^{-\beta H} A)}{Z}. \quad (2.30)$$

Donde  $H$  es el hamiltoniano que describe al sistema y  $Z$  es la función de partición canónica.

Generalizar esta idea a una teoría cuántica de campos no es inmediato ya que un campo tiene un número infinito de grados de libertad y su función de partición diverge. Este problema se puede resolver si lo abordamos de forma que sólo haga referencia a operadores.

Primero consideramos el valor de expectación del producto de dos operadores  $A, B$  de la forma:

$$A_t B = e^{itH} A e^{-itH} B .$$

Donde el operador  $A_t$  corresponde simplemente al operador  $A$  en el cuadro de Heisenberg evaluado a un tiempo  $t$ .

Si extendemos la definición de  $t$  de modo que pueda tomar valores imaginarios obtenemos que para dos operadores  $A, B$  tenemos

$$A_{-i\beta} B_\beta = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} (e^{\beta H} A e^{-\beta H}) B] = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} B A] = B A_\beta ,$$

donde en la tercera igualdad usamos que la traza es invariante bajo permutaciones cíclicas de los elementos sobre los que opera.

Así, obtenemos una condición para el equilibrio térmico que hace referencia sólo a cantidades finitas. A esta condición se le conoce como la condición KMS, nombrada así por los físicos Kubo, Martin y Schwinger quienes la usaron para definir estados de equilibrio:

$$A_{-i\beta} B_\beta = B A_\beta . \quad (2.31)$$

Para trasladar esta condición a una teoría cuántica de campos, tomamos un campo escalar definido en un espacio-tiempo curvo. Como mencionamos anteriormente, es necesario poder definir un vector de Killing tipo tiempo global para poder definir la teoría de campos. Llamemos a este vector  $\partial_t$ .

Los operadores que mostrarán la condición para la temperatura en la teoría de campos son los propagadores  $\phi(x)\phi(y)$ . Debido a la isometría generada por el vector de Killing,  $\partial_t$ , los propagadores sólo están en función de la diferencia  $t_x - t_y$  (a diferencia de ser función de  $t_x, t_y$ )

$$\begin{aligned} G_+(t_x - t_y, \vec{x}, \vec{y}) &= \phi(x)\phi(y) , \\ G_-(t_x - t_y, \vec{x}, \vec{y}) &= \phi(y)\phi(x) = G_+(t_x - t_y, \vec{x}, \vec{y}) + [\phi(x), \phi(y)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si tomamos los valores de expectación de la ecuación (2.32) en un estado térmico a temperatura  $T = \beta^{-1}$ , entonces la condición KMS relaciona los dos propagadores mediante:

$$G_+^\beta(z - i\beta, \vec{x}, \vec{y}) = G_-^\beta(z, \vec{x}, \vec{y}), \quad (2.33)$$

donde el superíndice  $\beta$  se refiere a que los valores esperados se calcularon en un estado térmico.

Además de esta condición, existe otra que viene de considerar que el conmutador  $[\phi(x), \phi(y)]$  tiende a cero para separaciones tipo espacio. Así, cuando  $t = t_x - t_y$  es muy pequeño tenemos  $G_+(t, \vec{x}, \vec{y}) = G_-(t, \vec{x}, \vec{y})$  para separaciones de  $x$  y  $y$  tipo espacio.

Usando estas dos relaciones, podemos extender la definición de  $G_{\pm}^{\beta}(t, \vec{x}, \vec{y})$  a una sola función en el plano complejo  $\mathcal{G}^{\beta}(z, \vec{x}, \vec{y})$  que es periódica en la dirección imaginaria:

$$\mathcal{G}^{\beta}(z, \vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{G}^{\beta}(z + in\beta, \vec{x}, \vec{y}), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.34)$$

Dado esto, concluimos que un estado térmico para un campo escalar libre en un espacio-tiempo estacionario (de la forma  $\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \Sigma$ ) está definido por la función de dos puntos  $\mathcal{G}^{\beta}(z, \vec{x}, \vec{y})$  que satisface las condiciones de periodicidad (2.34).

Si tomamos el caso particular de un espacio-tiempo estático, entonces al hacer la continuación analítica de la coordenada temporal  $t \rightarrow i\theta$  definimos un espacio-tiempo Euclideo (porque la signatura de la métrica se vuelve la de  $\mathbb{R}^d$ ). De este modo, las funciones  $G^{\beta}(\theta, \vec{x}, \vec{y})$  en el espacio Euclideo que son periódicas ante el intercambio  $\theta \rightarrow \theta + \beta$  están relacionadas por continuación analítica con los estados térmicos del espacio-tiempo Lorentziano original.

Para mostrar este resultado de forma explícita tomemos el elemento de línea de una métrica con un horizonte de eventos,

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - \dots, \quad (2.35)$$

donde omitimos las coordenadas que no son relevantes para este cálculo y suponemos que la función  $f$  se vuelve cero cuando la coordenada  $r$  toma el valor  $r_0$ . Es decir, el horizonte de eventos se encuentra en la posición  $r = r_0$ .

Siguiendo las ideas que hemos desarrollado, permitimos que el tiempo tome valores imaginarios definiendo el tiempo Euclideo  $t_E = it$ . Con este cambio, el elemento de línea Euclideo  $ds_E^2$  toma la forma

$$ds_E^2 = - \left( f(r)dt_E^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \dots \right). \quad (2.36)$$

Si nos enfocamos en el comportamiento de la función cerca del horizonte, podemos usar el hecho de que la función  $f$  se vuelve cero en  $r = r_0$  para aproximarla  $f(r) \approx f(r_0)(r - r_0)^4$ . Así, el elemento de línea se vuelve

$$ds_E^2 \approx - \left( \frac{ds^2}{f(r_0)(r - r_0)} + f(r_0)(r - r_0)dt_E^2 + \dots \right), \quad (2.37)$$

para ver porque este resultado da lugar a un estado térmico definimos otro conjunto de variables:

$$\rho = 2\sqrt{\frac{(r - r_0)}{f(r_0)}}, \quad (2.38)$$

$$\theta = \frac{f(r_0)t_E}{2}. \quad (2.39)$$

---

<sup>4</sup>Notamos que  $f'(r_0)$  puede ser igual a cero. Este caso no se contemplará en este trabajo

Donde asumimos que  $f(r_0) > 0$ , si es menor que cero entonces tomamos  $-f(r_0)$  y hacemos el mismo desarrollo. Transformando el tensor métrico obtenemos el nuevo elemento de línea

$$ds_e^2 \approx - (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \dots), \quad (2.40)$$

vemos que tiene la forma del elemento de línea de coordenadas polares donde la coordenada radial es  $\rho$  y la angular es  $\theta$ . Esta métrica tiene una singularidad cónica en  $\rho = 0$  a menos que la coordenada  $\theta$  tenga periodo  $2\pi$ . Así, la coordenada  $t_E$  tiene un periodo  $4\pi/f(r_0)$  que podemos relacionar con la temperatura que aparece en la condición KMS (2.31).

$$T = \frac{1}{\beta} = \frac{f(r_0)}{4\pi}. \quad (2.41)$$

Si aplicamos este resultado a la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_2, \quad (2.42)$$

obtenemos que la temperatura que arroja la ecuación (2.41) está dada por

$$T = \frac{1}{8\pi M}. \quad (2.43)$$

Así, hemos obtenido que cualquier métrica de la forma (2.35) da lugar a una temperatura finita en la teoría de campos. A la temperatura que asociamos a un horizonte de eventos le llamamos temperatura de Hawking en honor a Stephen Hawking, quien mostró en [13] mediante el estudio de teorías de campo en espacio-tiempo curvo que los agujeros negros emiten radiación.

Este cálculo lo podemos realizar también para el espacio-tiempo de Rindler, (2.19) sólo que en este caso no tenemos un horizonte de eventos explícito. Sin embargo, haciendo el cambio de variables  $\rho = a^{-1}e^{a\xi}$ , obtenemos el elemento de línea

$$ds^2 = a^2 \rho^2 dt^2 - d\rho^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.44)$$

Nuevamente hacemos la continuación analítica al tiempo Euclideo  $t = it_E$  y obtenemos

$$ds^2 = -(a^2 \rho^2 dt_E^2 + d\rho^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.45)$$

este elemento de línea nuevamente tiene una singularidad cónica en el origen ( $\rho = 0$ ) a menos que el tiempo Euclideo tenga periodo  $2\pi/a$ . Así, obtenemos que la temperatura de Hawking para el observador acelerado es

$$T_{Hawk} = \frac{a}{2\pi}, \quad (2.46)$$

que coincide exactamente con el resultado que obtuvimos para el efecto Unruh (2.29) en la sección anterior.

## 2.3. Movimiento circular

Después de haber estudiado el efecto Unruh para un movimiento rectilíneo parece natural preguntarse si la relación entre un movimiento acelerado y una temperatura de Unruh se mantiene si se considera un movimiento acelerado más general.

El movimiento más sencillo a considerar, después del rectilíneo, con aceleración propia constante es el movimiento circular. En esta sección estudiaremos si un observador acelerado en un movimiento circular uniforme percibe el mismo vacío que un observador inercial.

En la sección 2.2.1 se estudió el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y se comprobó que el vacío cuántico del observador acelerado es distinto al del inercial. La forma en la que se comprobó que los vacíos cuánticos eran distintos fue tomando las transformaciones de Bogoliubov que relacionan los modos de frecuencia positiva del sistema acelerado con aquellos del inercial. El hecho de que los coeficientes de Bogoliubov para modos de frecuencia negativa sean diferentes de cero da una condición suficiente para que el vacío de las teorías sean distintos. Sin embargo, existen otras formas de comprobar esta diferencia.

En particular, una de las formas de distinguir si el observador acelerado detecta otro vacío es colocar un detector acoplado linealmente con el campo escalar.

La idea detrás de estos detectores teóricos es acoplar un monopolo con dos niveles energéticos a un campo y ver si este detector cambia su estado energético cuando se pone en movimiento en la trayectoria de interés. Si el comportamiento del detector es tal que su razón de excitación es diferente de cero, entonces el vacío de una teoría no tiene una interacción trivial con el observador acelerado. Este modelo de detectores con dos niveles de energía fue propuesto por Bryce DeWitt en [12]. A los detectores teóricos de este tipo se les conoce como detectores de *Unruh-DeWitt*.

Como mencionamos en la sección 2.2.2, una tercera forma de comprobar una interacción no trivial con el vacío cuántico es cambiar las coordenadas del espacio-tiempo a aquellas en las que el observador acelerado esté estático. Si existe un horizonte de aceleración en la nueva métrica entonces le podemos asociar una temperatura de Hawking aunque la singularidad no sea geométrica.

Estos tres argumentos son equivalentes para el movimiento rectilíneo. Sin embargo, no lo son para movimientos más generales como se explicará en esta sección.

Para estudiar el movimiento circular uniforme comenzamos, igual que en la sección anterior, con un cambio de coordenadas que permita que el observador acelerado se encuentre estático. Suponiendo que tenemos un sistema inercial en coordenadas cilíndricas  $(t, r, \theta, z)$  con métrica dada por:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2.$$

Tomamos el cambio de coordenadas más sencillo a un sistema que esté girando con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor del eje  $z$ :

$$\begin{aligned} t &= t, \\ r &= r, \\ \theta &= \theta - \Omega t, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Así, obtenemos el elemento de línea en el sistema acelerado transformando el tensor métrico:

$$ds^2 = (1 - \Omega^2 r^2)dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2 + 2\Omega r^2 d\theta dt.$$

Este elemento de línea no es estático por el último término cruzado  $d\theta dt$ . Sin embargo, es estacionario porque ningún coeficiente depende explícitamente del tiempo.

Lo que sigue, igual que en el caso anterior, es cuantizar el campo escalar no masivo en estas nuevas coordenadas. Para hacerlo, transformamos las derivadas parciales de la ecuación de Klein-Gordon y obtenemos:

$$\left[ (\partial_t - \Omega \partial_\theta)^2 - \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 - \partial_z^2 \right] \phi(t, r, \theta, z) = 0. \tag{2.48}$$

Los modos normales que forman el conjunto completo del espacio de Hilbert son:

$$u_{qmk} = \left( \frac{1}{2\pi \sqrt{2(\hat{\omega} + m\Omega)}} \right) e^{-i\hat{\omega}t} e^{-m\theta} e^{ikz} J_m(qr). \tag{2.49}$$

Donde  $m \in \mathbb{Z}$ ;  $(\hat{\omega} + m\Omega)^2 = k^2 + q^2$ ;  $J_m(qr)$  es la función de Bessel de primer tipo de orden  $m$ .

Al ser un conjunto completo, el campo escalar puede ser expandido en términos de estas funciones. Pero podemos ver que los modos normales (2.49) son los mismos que los modos normales de ondas cilíndricas si hacemos la sustitución  $\hat{\omega} = \omega - m\Omega$ .

La ecuación de Klein-Gordon en Minkowski (para un campo no masivo) es precisamente la ecuación de onda. Entonces, si pasamos a un sistema de coordenadas cilíndrico los modos normales del campo en el sistema inercial toman la misma forma que en la ecuación (2.49). De esto, podemos concluir que los coeficientes de Bogoliubov importantes para diferenciar estados vacíos  $\beta_{kv} = -(u_{qmk}, \psi_k)$  son cero y por lo tanto los vacíos son aparentemente iguales.

La diferencia entre este resultado y el de la sección 2.2.1 es que el espacio de Rindler tiene una teoría de campo bien definida porque existe un vector de Killing global tipo tiempo asociado al movimiento del observador. Para el cambio de coordenadas (2.47) no existe un vector de Killing asociado al observador acelerado que sea tipo tiempo en todo el espacio.

La razón por la cual no existe este vector es porque existen puntos en el espacio-tiempo cuya velocidad lineal supera a la de la luz. Esto se debe a que la 4-velocidad tangencial aumenta linealmente con el radio para una velocidad angular constante.

Si observamos la 4-velocidad del observador que gira a un radio fijo  $r = r_0$  tenemos:

$$V = \partial_t = \gamma K = \gamma(\partial_t + \Omega \partial_\theta).$$

El vector  $K$  se vuelve tipo espacio para  $r\Omega > 1$  y por lo tanto no puede ser un vector tipo tiempo global que sirva para generar evolución temporal en la teoría cuántica de campos.

El hecho de que este método no arroje un resultado concreto nos lleva a considerar un detector de Unruh-De Witt en movimiento circular. Dicho detector se representa como un operador hermitiano  $\hat{m}$  actuando sobre un espacio de Hilbert dos dimensional.

La evolución temporal de este operador está dada por el tiempo propio del detector  $\hat{m}(\tau) = e^{i\hat{H}\tau} \hat{m} e^{-i\hat{H}\tau}$ . Para obtener un resultado a partir de esto basta con acoplar un detector de Unruh-De Witt al campo escalar libre  $\hat{\phi}(x)$ . Esto se hace a través de la acción:

$$\hat{S}_I = \int_{-} d\tau \left( \hat{m}(\tau) \hat{\phi}[x(\tau)] \right), \quad (2.50)$$

donde  $x(\tau)$  es la línea de mundo del detector.

Se puede probar que usando un detector de Unruh-DeWitt el vacío del observador acelerado en movimiento circular sí es distinto al del inercial y más aún el espectro de partículas resulta no ser térmico.

El problema que encontramos al intentar cuantizar la teoría de campos en el espacio-tiempo de Minkowski es que no existe un vector de Killing global tipo tiempo. Dado esto, es natural preguntarse si existe una forma de hacer que este vector sea tipo tiempo en todo el espacio para el movimiento circular.

Una de las formas de lograr esto es pedir que no exista en el espacio ningún radio tal que  $r\Omega > 1$ .

Estas restricciones sugieren empezar en un espacio-tiempo acotado, como un cilindro o una esfera. Así, si la velocidad angular del movimiento permite que todos los puntos se muevan con velocidad menor a la de la luz tendremos un vector de Killing tipo tiempo para cuantizar la teoría definido en todo el espacio.

Este problema lo analizó Davies *et al* en [17] y encontró que si el detector se mueve en el universo estático de Einstein  $\mathbb{R} \times S^3$  con radio  $a$ , entonces podemos dividir el movimiento en dos casos. Si  $\Omega a \geq 1$  entonces el detector sí tiene una interacción no trivial con el vacío y si  $\Omega a < 1$  el vacío del observador rotando es el mismo que el de Minkowski.

Todos los resultados de este capítulo los hicimos usando las herramientas de teoría cuántica de campos. Aunque se usó el campo escalar no masivo para ilustrar el efecto

Unruh, estos resultados se mantienen aún para campos con interacciones siempre y cuando el acoplamiento sea débil.

Sin embargo, una descripción satisfactoria de lo que ocurre con un observador acelerado a nivel cuántico sólo se puede obtener si se entienden todos los aspectos del problema. En particular, la pregunta de qué sucede cuando la teoría está fuertemente acoplada sigue sin tener respuesta y como vimos anteriormente no puede ser contestada usando las mismas herramientas que empleamos en este capítulo.

Como ya hemos visto, este régimen es muy difícil de estudiar así que durante mucho tiempo esta pregunta no tuvo manera de responderse. Fue hasta 1997 cuando Juan Maldacena [14] dio una forma de estudiar el régimen fuertemente acoplado de ciertas teorías de campo mediante la correspondencia AdS/CFT. Esta correspondencia plantea la equivalencia entre una teoría de campos y una teoría de cuerdas y será el objeto de estudio en el siguiente capítulo.

Aunque la correspondencia holográfica no cubre todas las teorías de campo, el hecho de que nos permita estudiar un límite que antes era inaccesible es muy valioso para empezar a entender qué significa que una teoría cuántica de campos esté fuertemente acoplada.

El problema de un detector en movimiento acelerado cuando la teoría está fuertemente acoplada lo trataremos en el capítulo 4 estudiando un quark mediante la correspondencia holográfica. Ahí, encontraremos que los resultados de este capítulo son muy parecidos a los del acoplamiento fuerte.

# Capítulo 3

## La Correspondencia Holográfica

Para comenzar a entender cómo tratar el problema de un quark que se acelera en una teoría de campos fuertemente acoplada es necesario revisar los conceptos de la herramienta teórica que nos permite estudiarlo.

En este capítulo revisaremos las ideas generales detrás de la correspondencia holográfica. Como mencionamos en la introducción, la dualidad de Maldacena es una equivalencia entre una teoría de campos y una teoría de cuerdas. Así, comenzaremos estudiando los conceptos fundamentales de teoría de cuerdas desde su formulación hasta el espectro de partículas que predice.

En la sección estudiaremos el concepto de las 3.2 Dp-branas. Estos objetos dinámicos de  $p + 1$  dimensiones que se encuentran en la teoría de cuerdas son cruciales para poder obtener la correspondencia holográfica. Aparecen de forma natural en teoría de cuerdas abiertas como los objetos que definen el lugar geométrico donde están restringidos los extremos de la cuerda. Al ser objetos dinámicos estas D-branas están descritas por una acción y como veremos más adelante existen diferentes formas de tratarlas.

En particular, estudiaremos qué sucede cuando juntamos una pila de  $N$  D3-branas. Este estudio nos llevará a deducir el ejemplo mejor entendido de la correspondencia.

Por un lado, las D3-branas son objetos dinámicos cuyo contenido de campos en una teoría de supercuerdas IIB es la teoría de campos de Super Yang-Mills  $SU(N_c)$  con  $\mathcal{N} = 4$  en cuatro dimensiones espacio temporales, junto con otros campos que provienen de los modos masivos de las cuerdas.

Por otro lado, las D3-branas son objetos con masa que deforman la geometría del espacio-tiempo. Desde este punto de vista la pila de D3-branas genera una geometría curva donde las cuerdas cerradas se propagan.

En la sección 3.3 tomando el límite de bajas energías ( $E \ll l_s^{-1}$ ) de estas dos descripciones e identificándolas llegaremos al enunciado de la correspondencia holográfica

escrito por primera vez por Juan Maldacena [14] en 1997.

En particular, tomando el límite cuando el número de colores  $N_c$  de la teoría de SYM es muy grande podremos hacer la descripción de 't Hooft que revisamos en la sección 1.4. Con esta descripción podremos concluir que la teoría de campo conforme en su régimen fuertemente acoplado equivale a supergravedad clásica en diez dimensiones.

El resto de esa sección establece entradas del diccionario entre la teoría de campos y la teoría de cuerdas que vive en  $AdS_5 \times S_5$ .

Finalmente, estudiaremos las entradas del diccionario que permiten estudiar el problema del quark acelerándose en la teoría de campos descrita por la correspondencia. Entre estas entradas revisaremos en la sección 3.4 la forma en la que se agrega materia en la representación fundamental a la teoría de campos y en qué se traduce tener una noción de temperatura en la teoría de campos.

### 3.1. Teoría de Cuerdas

Comenzaremos estudiando el movimiento de la cuerda relativista en un espacio-tiempo  $d$ -dimensional con métrica  $G_{\mu\nu}$ .

Al igual que el movimiento de una partícula relativista traza una curva unidimensional en el espacio-tiempo, el movimiento de una cuerda genera una superficie bidimensional que recibe el nombre de *hoja de mundo*. La posición de esta superficie en el espacio-tiempo la llamaremos el encaje de la cuerda. Denotaremos el encaje de la cuerda con  $X^\mu(\tau, \sigma)$ , donde  $\mu$  corre en las direcciones del espacio-tiempo, es decir,  $\mu = 0, \dots, d-1$ . El encaje está dado en términos de dos parámetros que llamaremos  $\sigma$  y  $\tau$ .

Buscamos que la descripción del movimiento de la cuerda sea la misma para diferentes observadores inerciales cuando el espacio-tiempo es plano (cuando  $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ). Esto es lo mismo que pedir que la acción que describe la dinámica de la cuerda sea invariante bajo transformaciones del grupo de Poincaré.

Una acción que cumple esta característica es el funcional que nos da el área total de la hoja de mundo. A dicha acción se le conoce como la acción de Nambu-Goto y está dada por:

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}, \quad (3.1)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica inducida en la hoja de mundo dada por  $g_{ab} = G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu(\tau, \sigma) \partial_b X^\nu(\tau, \sigma)$ , y  $G_{\mu\nu}$  es la métrica del espacio-tiempo de fondo. El factor  $\frac{1}{2\pi\alpha'} = T_0$  es la tensión de la cuerda que se relaciona con la longitud de la cuerda,  $l_s$ , a través de  $l_s = \sqrt{\alpha'}$ .

Cuando hablamos de campos en el capítulo 1 notamos que las simetrías de la teoría estaban contenidas en la acción y venían de la invariancia de dicha acción ante trans-

formaciones tanto de las coordenadas espacio-temporales como de los campos que estuviéramos describiendo. Con esto en mente, nos interesa describir qué simetrías tiene la acción de Nambu-Goto.

Desde el punto de vista de la hoja de mundo, el encaje de la cuerda se puede ver como una colección de  $d$  campos escalares no masivos  $X^\mu(\tau, \sigma)$  que asignan un número real para cada punto el espacio de parámetros 2-dimensional  $\tau, \sigma$ . A diferencia de los campos que describimos en el primer capítulo, cada coordenada del encaje de la cuerda vive en la hoja de mundo 2-dimensional que a su vez está contenida dentro del espacio-tiempo de fondo  $d$ -dimensional. Esto nos obliga a distinguir entre las simetrías de la acción (3.1) que pertenecen al espacio de parámetros  $(\tau, \sigma)$  y las que son del espacio-tiempo.

Tomando el espacio-tiempo plano las simetrías de esta acción son :

- Invariancia ante transformaciones del grupo de Poincaré  $d$ -dimensional:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu, \quad (3.2)$$

donde  $\Lambda^\mu_\nu$  es una transformación de Lorentz y  $a^\mu$  un vector constante.

- Invariancia ante reparametrizaciones de la hoja de mundo y del espacio-tiempo. Es decir, la acción es invariante cuando cambiamos los parámetros  $(\tau, \sigma)$   $(\tau(\tau, \sigma), \sigma(\tau, \sigma))$  y ante transformaciones de coordenadas que describan el mismo espacio-tiempo:

$$S_{NG}[X(\tau, \sigma)] = S_{NG}[X(\tau, \sigma)].$$

Esta invariancia sigue siendo válida aún cuando se tiene una métrica de fondo general.

Para describir el movimiento de la cuerda basta igualar a cero las variaciones de la acción de Nambu-Goto y con esto obtener sus ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} \delta S_{NG} &= -T_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta \mathcal{L}(\partial_\tau X^\mu, \partial_\sigma X^\mu) = -T_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{X}^\mu)} \delta(\dot{X}^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(X^\mu)} \delta(X^\mu) \right], \\ &= -T_0 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [\delta X^\mu \Pi_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu [\partial_\tau \Pi_\mu^\tau + \partial_\sigma \Pi_\mu^\sigma] = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde,

$$\Pi_\mu^a(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a X^\mu)}, \quad (3.4)$$

son los momentos conjugados de la cuerda.

Debido a la libertad bajo reparametrización de la hoja de mundo, podemos escoger el parámetro  $\tau$  como el parámetro temporal del espacio-tiempo y  $\sigma$  como una de las direcciones espaciales.

Con esta elección, los momentos canónicos asociados con el parámetro temporal  $\pi_\mu^\tau$  representan la densidad de momento espacial en la dirección  $\mu$  si los índices son espaciales, y  $\Pi_0^\tau$  representa la densidad de energía  $dE/d\sigma$ .

De la misma forma, los momentos canónicos asociados a la variable espacial  $\Pi_\mu^\sigma$  representan el flujo de momento en la dirección  $\mu$  a través de la cuerda si  $\mu$  es un índice espacial y  $\Pi_0^\sigma$  corresponde al flujo de energía  $dE/d\tau$ .

Regresando a la variación de la acción, notamos que cuando igualamos el primer término de la ecuación (3.3) a cero obtenemos las diferentes condiciones de frontera que podemos exigirle a los extremos de la cuerda, si esta es abierta

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma^*) = 0, \quad (3.5)$$

$$\Pi_\mu^\sigma(\tau, \sigma^*) = 0, \quad (3.6)$$

donde  $\sigma^* = 0, \sigma_1$ .

A la condición (3.6) se le conoce como condición de extremo libre porque no restringe la variación de la acción a funciones que dejen fijos los extremos de la cuerda ( $\delta X^\mu = 0$ ). Mientras que la ecuación (3.5), impone una condición de frontera de Dirichlet a los extremos de la cuerda. Es decir, se fija el valor de la coordenada de la hoja de mundo en su extremo. Esto equivale a pedir:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma^*) = 0. \quad (3.7)$$

Del segundo término de (3.3), obtenemos las ecuaciones de movimiento que se cumplen tanto para cuerdas cerradas como para cuerdas abiertas [10]:

$$\frac{\partial \Pi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \Pi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.8)$$

La libertad bajo reparametrizaciones de la acción de Nambu-Goto permite escoger los parámetros  $(\tau, \sigma)$  y las coordenadas del espacio-tiempo de modo que las ecuaciones de movimiento se simplifican a ecuaciones de onda sobre cada componente del encaje.

De esta forma, es posible expresar la solución en términos de modos de Fourier como hicimos en el capítulo 1. La única diferencia es que al ser la cuerda un objeto de dimensión finita esta expansión se hace en series, a diferencia de la expansión integral que se realiza cuando el campo ocupa una región infinita.

Hasta ahora hemos visto sólo grados de libertad bosónicos, descritos por campos escalares no masivos. Como vimos en el capítulo 1, para describir estados de partículas fermiónicas en una teoría de campos debemos incluir campos espinoriales  $\psi_a^\mu(\tau, \sigma)$  en la descripción.

Ya que la teoría de campos a considerar es sobre la hoja de mundo, una de las formas de agregar los grados de libertad fermiónicos es pedir que estos campos se transformen

como vectores en el espacio-tiempo pero como espinores en la hoja de mundo. Esta introducción de campos espinoriales equivale a agregar un término a la acción de Nambu-Goto que corresponde a  $d$  campos libres de Dirac  $S_{Dir} = \frac{-T_0}{2} \int d\tau d\sigma \bar{\psi}^\mu \gamma^a \partial_a \psi_\mu$ .

Todavía a nivel clásico, las condiciones de frontera más generales que se le pueden pedir a las componentes de diferente quiralidad de los campos espinoriales son:

$$\Psi_+^\mu(\tau, \sigma) = \pm \Psi_+^\mu(\tau, \sigma + \pi), \quad (3.9)$$

$$\Psi_-^\mu(\tau, \sigma) = \pm \Psi_-^\mu(\tau, \sigma + \pi). \quad (3.10)$$

A las condiciones de frontera periódicas, signo positivo, se les llama condiciones de frontera de Ramond y a las antiperiódicas, signo negativo, se les llama condiciones de frontera de Neveu-Schwarz. Podemos resumir estas ecuaciones expresándolas en términos de espinores de Dirac:

$$\psi^I(\sigma + \pi) = e^{2\pi i \phi} \psi^I(\sigma) \quad (3.11)$$

Donde  $\phi = 0$  para el sector R,  $\phi = 1/2$  para el sector NS.

Así, la teoría de supercuerdas se separa en dos subespacios o sectores: El sector Ramond (R) que se obtiene de considerar los estados de partícula que surgen al cuantizar con esta elección de condición de frontera, y el sector de Neveu-Schwarz (NS) que contiene a los estados en los cuales se consideran condiciones de anti-periodicidad sobre los campos espinoriales.

El proceso de cuantización de esta teoría es diferente cuando consideramos cuerdas abiertas o cerradas. En general, al tomar la teoría de cuerdas cerradas podemos separar a los campos fermiónicos (y bosónicos), de la misma forma que separamos ondas, en soluciones derechas,  $\psi(\tau - \sigma)$ , e izquierdas,  $\psi(\tau + \sigma)$ . Mientras que cuando consideramos cuerdas abiertas, las condiciones de frontera en los extremos no permiten hacer esta separación.

De esta forma, cuando consideramos cuerdas cerradas tendremos una condición de frontera (3.11) distinta para las soluciones izquierdas y para las soluciones derechas. Esta división separa a la teoría de cuerdas cerrada en cuatro subespacios o sectores ya que tenemos dos formas distintas de escoger la condición de frontera para cada conjunto de soluciones (derecha o izquierda).

Los cuatro sectores diferentes de acuerdo a las condiciones de frontera son: (R,R), (NS,NS), (NS,R), (R,NS).

La introducción de campos espinoriales nos da, después de cuantizar, estados fermiónicos y bosónicos y resulta que además de las simetrías de los campos que hemos considerado la teoría tiene supersimetría.

Como vimos en el capítulo 1, una teoría supersimétrica relaciona los grados de libertad bosónicos y fermiónicos de modo que al cuantizar la teoría cada partícula

fermiónica tiene un supercompañero bosónico y viceversa. A la teoría de cuerdas que tiene supersimetría se le conoce como teoría de supercuerdas.

Al igual que en teoría cuántica de campos, los estados generados por los operadores de creación se identifican con partículas en el espacio-tiempo  $d$ -dimensional. Estos operadores de creación están relacionados con los modos de vibración normales de la cuerda. Como existen un número infinito de modos de vibración, entonces la teoría de supercuerdas predice un número infinito de partículas.

Dentro de este conjunto infinito existe un número finito de modos no masivos y un número infinito de modos masivos. Las masas de estos modos crecen en potencias de  $l_s^{-1} = m_s$ , con  $m_s$  la masa de la cuerda que nos dice la energía en reposo de la partícula asociada con cada modo.

La condición de supersimetría exige que exista el mismo número de estados de fermión y de bosón. Para lograr esto debemos acotar el espacio de estados de los sectores de Neveu-Schwarz y Ramond.

Existen varias formas de hacer esta selección de estados preservando la supersimetría y una elección particular de estos cortes nos lleva a la teoría de supercuerdas tipo IIB, en la que sólo viven cuerdas cerradas. En particular, al cuantizar la supercuerda encontramos que sus modos no masivos incluyen una partícula de espín dos que corresponde a un gravitón. Esta es la razón por la que la teoría de supercuerdas es llamada una teoría de gravedad cuántica, ya que predice la partícula que genera las interacciones gravitacionales.

Otra de las sorpresas que encontramos cuando cuantizamos la supercuerda es que al pedir que la teoría no tenga estados de norma negativa, la dimensión del espacio-tiempo se fija a  $d = 10$ . Dentro de los modos no masivos de la cuerda cerrada encontramos también un tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  llamado campo de Kalb-Ramond y un campo escalar  $\phi$  llamado dilatón. Este último se relaciona con la constante de acoplamiento de la supercuerda  $g_s$  mediante:

$$g_s = e^\phi. \tag{3.12}$$

Al igual que en teoría cuántica de campos, la presencia de la constante de acoplamiento nos habla de interacciones entre las cuerdas. Estas interacciones se pueden ver como la unión de hojas de mundo de diferentes cuerdas donde cada interacción se traduce en considerar diagramas en los que una cuerda se divide en dos y se vuelve a unir. Este proceso es análogo a sumar sobre las diferentes topologías de superficies 2-dimensionales donde el número de agujeros de la superficie cuenta el número de interacciones como se ve en la Figura 3.1.

Al igual que en teoría cuántica de campos estas interacciones van siendo cada vez menos probables. Así, la amplitud de una interacción en teoría de cuerdas cerradas

se puede escribir como la expansión:

$$A = \sum_{h=0} g_s^{2h-2}, F_h(\alpha). \quad (3.13)$$

donde  $h$  es el género de una superficie topológica y simplemente cuenta el número de agujeros que tiene dicha superficie.

Esta expansión coincide exactamente con la de una teoría de norma con grupo de norma  $U(N_c)$  cuando tomamos el límite de 't Hooft con  $N_c$  muy grande (1.14) y es una de las primeras indicaciones de que se puede hacer una correspondencia entre una teoría de norma y una de supercuerdas.

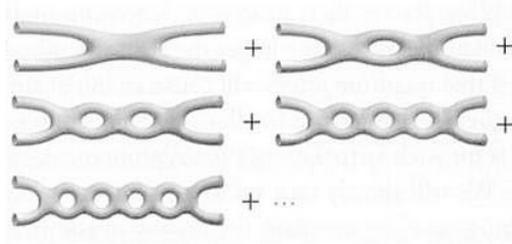


Figura 3.1: Representación gráfica de las interacciones de cuerdas cerradas. En el primer diagrama dos cuerdas cerradas se unen y se forma una sola para después separarse. En el diagrama de un agujero las cuerdas se juntan para formar una sola, luego esta se separa en dos cuerdas que se vuelven a unir en una sola para finalmente separarse en dos como al inicio.

Una diferencia importante entre la constante de acoplamiento de supercuerdas y aquella de teoría de campos es que como la teoría de supercuerdas tiene estados de gravitón, entonces es posible expresar la constante de Newton de supergravedad  $G_{10}$  en términos de la constante de acoplamiento de la cuerda:

$$16\pi G = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8. \quad (3.14)$$

Con el objetivo de obtener una acción que trate sólo a los modos no masivos, tomamos el límite en el que la energía es mucho menor a la escala que define los modos masivos de la cuerda, i.e.  $E \ll l_s^{-1}$ . En este límite podemos construir una acción en la que no se tomen en cuenta los campos masivos ya que su contribución es muy pequeña. A esta acción *efectiva* que sólo deja los modos no masivos de la supercuerda se le llama supergravedad IIB y está dada por:

$$S_{eff} = \frac{1}{16\pi G} \int d^{10}x \left[ -g \left[ \mathcal{R} - \frac{1}{2} (\phi)^2 - \frac{1}{2} e^{-\phi} H_3 - \frac{1}{2} e^{2\phi} F_1^2 - \frac{1}{2} e^{\phi} F_3^2 - \frac{1}{4} F_5^2 \right] - \frac{1}{(2\pi)^7 g_s^2 l_s^8} \int C_4 \wedge H_3 \wedge F_3, \right] \quad (3.15)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el escalar de Ricci en diez dimensiones,  $H_3$  y  $F_3$  son las intensidades de campo asociadas a campos de norma antisimétricos  $B_{\mu\nu}$  y  $B_{\mu\nu}$ ,  $F_1$  es la “intensidad de campo” asociada al campo de norma  $\chi$  y  $F_5$  es la intensidad de campo asociada a la cuatro forma  $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ .

De la ecuación (3.15) podemos ver que el primer término tiene la misma forma que la acción de Einstein-Hilbert, sólo que en este caso está acoplada con otros campos no masivos.

## 3.2. Dp-branas

En la sección anterior estudiamos cuerdas cerradas, como estas cuerdas no tienen extremos las condiciones de frontera de extremo libre no tuvieron efecto.

En esta sección estudiaremos cuerdas cuyos extremos tienen condición de frontera de Dirichlet. Estas condiciones cambian la forma de la solución de la ecuación de onda y por lo tanto al cuantizar la teoría obtenemos diferente contenido de partículas.

Si tratamos a la teoría de cuerdas de manera perturbativa el único objeto que encontramos son las cuerdas unidimensionales. Sin embargo, al tratar la teoría no perturbativamente aparecen objetos de dimensiones mayores a uno. Estos objetos también son dinámicos lo que nos lleva a concluir que la teoría de cuerdas no es simplemente el estudio de objetos unidimensionales sino más bien el estudio de objetos extendidos.

Una clase de estos objetos extendidos son las llamadas Dp-branas que aparecen en el contexto de teoría de cuerdas abiertas como el lugar geométrico en el que los extremos de una cuerda se mueven libremente, donde  $p = 1, \dots, 9$  es la dimensión espacial de este lugar geométrico. Es decir, cuando una cuerda abierta comienza y termina en una Dp-brana podemos dividir las coordenadas del espacio-tiempo en las  $9-p$  coordenadas en las que los extremos están fijos, y las  $p$  coordenadas espaciales con extremos libres. Las coordenadas fijas son las coordenadas normales a la Dp-brana y corresponden a pedir condiciones de frontera de Dirichlet mientras que las otras coordenadas viven en el volumen de mundo  $p+1$ -dimensional de la Dp-brana y satisfacen condiciones de extremo libre.

Aunque las condiciones de frontera cambiaron, el proceso de cuantización es el mismo. Encontramos que al cuantizar el encaje de la cuerda abierta que empieza y termina en una Dp-brana los modos de vibración no masivos dan lugar a un campo de norma  $A_\mu$  con grupo de norma  $U(1)$ ,  $9-p$  campos escalares  $\phi_i$  y sus supercompañeros. Además de estos modos existe un número infinito de modos de vibración masivos cuya masa es múltiplo de  $l_s^{-1}$ .

A diferencia del campo de norma que se encuentra para cuerda abierta con extremos libres, el campo  $A^\mu$  tiene  $p+1$  direcciones en las que se puede transformar bajo transformaciones de Lorentz y  $9-p$  direcciones que no transforman bajo Lorentz. Esto

quiere decir que el campo de norma vive en el volumen de mundo de la Dp-brana y los 9-p campos escalares no masivos corresponden a cada dirección perpendicular a la Dp-brana. Este resultado es importante porque nos permite entender a las cuerdas abiertas como pequeñas excitaciones de la Dp-brana y no sólo como un lugar geométrico.

Siguiendo con este razonamiento, podemos describir la dinámica de una Dp-Brana a través de la acción de Dirac-Born-Infeld:

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi l_s^2 F_{\mu\nu})}, \quad (3.16)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es la métrica inducida en el volumen de mundo de la Dp-brana, análoga a la métrica inducida para cuerdas. Para espacio plano-tiempo está dada por  $g_{ab} = \eta_{\mu\nu} + (2\pi l_s^2)^2 \partial_a \phi^i \partial_b \phi^i$  (con suma implícita sobre los campos escalares transversales  $\phi^i$ ).

$F_{\mu\nu}$  es el tensor electromagnético asociado a  $A^\mu$  y la acción está integrada sobre el volumen de mundo  $p+1$  dimensional de la Dp-Brana. El factor  $T_p$  es la tensión de la Dp-brana dado por:

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_s l_s^{p+1}}. \quad (3.17)$$

Nuevamente si tomamos el límite de bajas energías ( $E \ll l_s^{-1}$ ) los modos masivos se desacoplan de los no masivos y nos quedamos sólo con este contenido de campos. Es decir, en el límite bajas energías el contenido de campos de una cuerda que empieza y termina en una Dp-brana está dado por un campo de norma  $A_\mu$  con grupo de norma  $U(1)$ , 9-p campos escalares  $\phi_i$  así como sus supercompañeros.

Este contenido de campos se puede obtener también de la acción (3.16) si la expandimos en series de potencias en  $g_{\mu\nu}$ ,  $F_{\mu\nu}$  y nos quedamos sólo con términos cuadráticos. Este análisis arroja una constante de acoplamiento para la teoría de norma  $g_{YM}^2 = 2(2\pi)^{p-2} l_s^{p-3} g_s$ .

Además de tener cuerdas que comiencen y terminen en una misma Dp-brana podemos tener un extremo de la cuerda en una Dp-brana y el otro en una Dq-brana. Consideremos el problema de dos Dp-branas paralelas separadas una distancia  $L$ .

Al igual que en el caso de una sola Dp-brana podemos separar las coordenadas en 9-p coordenadas normales a ambas Dp-branas y p coordenadas espaciales tangentes a ellas. Dada esta configuración hay 4 clases de cuerdas a considerar.

Dos de ellas son las que comienzan y terminan en la misma brana, estas describen el mismo espectro que ya revisamos. Las otras dos clases de cuerdas son las que van de una brana a la otra y el espectro que generan tiene como su modo menos masivo un estado con masa dada por  $M = T_0 L$ . Esta es la mínima energía para una cuerda que se extiende entre las Dp-branas ya que corresponde a la energía de una cuerda estática que toma la menor longitud entre una brana y otra.

Con el objetivo de tener estados no masivos podemos hacer que la separación entre las branas se vaya a cero y aún así entender a las dos Dp-branas como objetos distintos. En este caso, tenemos dos Dp-branas superpuestas y el campo de norma correspondiente al modo más ligero que surge de considerar las cuerdas extendidas entre las Dp-branas pierde su masa porque  $L = 0$ .

El contenido de campos de esta configuración queda formado por cuatro campos de norma no masivos. Dos que corresponden a cuerdas que comienzan y terminan en la misma Dp-brana y dos que corresponden a los modos no masivos de las cuerdas que comienzan en una Dp-brana y terminan en otra. Nuevamente está la torre infinita de modos con masa proporcional a  $l_s^{-1}$ .

Nuevamente consideramos el límite de bajas energías. Es decir, despreciamos los modos masivos de los espectros. Los campos de norma restantes interactúan entre si y dan lugar a una teoría  $U(2)$  de Super Yang-Mills en el volumen de mundo de las Dp-branas.

Si seguimos apilando un número arbitrario  $N_c$  de Dp-branas, siguiendo el procedimiento que hicimos para dos branas, obtenemos  $N_c^2$  clases de cuerdas ya que una cuerda puede comenzar en cualquiera de las  $N_c$  branas y terminar en cualquier otra o ella misma.

En el límite de bajas energías despreciamos los modos masivos y cada Dp-brana agrega  $N_c$  campos de norma. Como veremos más adelante, esta teoría de campos es la que vamos a estudiar a través de la correspondencia y nos interesa el caso particular cuando el volumen de mundo de la brana es 4-dimensional. Es decir, tomamos una pila de  $N_c$  D3-branas en teoría de cuerdas IIB y obtenemos que en el límite de bajas energías ( $E \ll l_s^{-1}$ ). El sector interactuante se reduce a una teoría de Super Yang-Mills con grupo de norma  $U(N_c)$  con  $\mathcal{N} = 4$ . Donde  $\mathcal{N} = 4$  se refiere a que la teoría que vive en el volumen de mundo de las  $N_c$  D3-branas tiene cuatro veces el número de supersimetrías mínimas que le corresponden a su dimensión.

Cabe notar que podemos separar el grupo  $U(N_c)$  en dos:

$$U(N_c) = SU(N_c) \times U(1). \quad (3.18)$$

El grupo  $U(1)$  contiene los grados de libertad asociados al centro de masa de las  $N_c$  D3-branas y  $SU(N_c)$  describe las excitaciones del campo de norma que vive en su volumen de mundo.

La parte bosónica del Lagrangiano de esta teoría de campos es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{g_{YM}^2} \text{Tr} \left( \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D_\mu \phi^i D^\mu \phi_i + [\phi^i, \phi^j]^2 \right), \quad (3.19)$$

donde  $g_{YM}$  es la constante de acoplamiento de esta teoría, que está relacionada con la constante de acoplamiento de cuerdas,  $g_s$ , mediante:

$$g_{YM}^2 = 4\pi g_s. \quad (3.20)$$

Como notamos en el capítulo 1 esta teoría de SYM tiene muchas propiedades. Una de ellas es que debido al número grande de supersimetrías que posee, su función beta se hace cero por lo que la teoría es conforme.

No podemos olvidar que estamos tomando este conjunto de D3-branas en la teoría de cuerdas tipo IIB donde existen cuerdas cerradas que se propagan fuera de las D3-branas en el espacio 10-dimensional. Esto quiere decir que al Lagrangiano (3.19) le hacen falta correcciones que vienen de estas cuerdas cerradas. Sin embargo, la constante de acoplamiento para estas cuerdas libres si cambia con la energía. En el límite que estamos considerando podemos despreciar su interacción con las cuerdas abiertas de las Dp-branas.

Cabe notar que el término del Lagrangiano correspondiente al grupo  $U(1)$  se desacopla porque describe el movimiento relativo de las branas entre sí. Nos quedamos entonces sólo con la parte  $SU(N_c)$  que forma a  $U(N_c)$ .

Cuando obtuvimos la teoría de campos en las D3-branas no consideramos el efecto gravitacional que pueden tener las D3-branas. Sin embargo, es de esperarse que estas D3-branas deformen la métrica del espacio-tiempo alrededor de ellas ya que de la ecuación (3.17), entendiendo la tensión como la masa por unidad de volumen, vemos que en el límite perturbativo de teoría de cuerdas  $g_s \rightarrow 0$  la Dp-brana se vuelve infinitamente masiva.

Ahora estudiamos el mismo problema de tomar un conjunto de  $N_c$  D3-branas paralelas superpuestas en teoría de cuerdas IIB pero esta vez si tomamos en cuenta la deformación gravitacional que generan.

La métrica alrededor de estas D3-branas se puede obtener resolviendo las ecuaciones de movimiento de supergravedad y la forma explícita de la métrica ya deformada por las D3-branas está dada por:

$$ds^2 = H^{-1/2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (3.21)$$

donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $H$  está dado por:

$$H = 1 + \frac{R^4}{r^4}, \quad R^4 = 4\pi g_s N_c l_s^4. \quad (3.22)$$

El efecto gravitatorio de las D3-branas es similar al que tendría una partícula puntual masiva en las seis direcciones transversales. En la teoría de supercuerdas IIB la constante de Newton se puede expresar en términos de la longitud de la cuerda y su acoplamiento:

$$16\pi G = 16\pi l_p^8 = (2\pi)^7 g_s^2 l_s^8 = (2\pi)^7 \frac{R^8}{(4\pi N_c)^2}, \quad (3.23)$$

donde  $l_p = \sqrt[8]{G}$  es la longitud de Planck.

Cuando  $r \gg R$  se tiene  $H \approx 1$ . En este límite la métrica (3.21) se vuelve la métrica del espacio plano con una corrección del orden de  $R^4/r^4 \sim GM/r^4$ . Esto se puede

interpretar como el potencial gravitacional que ejerce una partícula en un espacio seis dimensional porque en  $d$ -dimensiones el potencial gravitacional de una partícula de masa  $M$  va como  $GM/r^{d-2}$ .

De este análisis vemos que la constante  $R$  caracteriza el alcance del efecto gravitacional de las D3-branas.

Ahora consideramos el límite opuesto,  $r \ll R$ . En este límite  $H \approx R^4/r^4$  y la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2}(-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2}dr^2 + R^2d\Omega_5^2. \quad (3.24)$$

Si hacemos el cambio de variable  $z = R^2/r$ , obtenemos:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dz^2) + R^2d\Omega_5 = ds_{AdS_5}^2 + R^2d\Omega_5^2. \quad (3.25)$$

La primera parte de la métrica,  $ds_{AdS_5}^2$ , es el elemento de línea de un espacio-tiempo máximamente simétrico con radio de curvatura  $R$  y curvatura constante negativa proporcional a  $1/R^2$ . A este espacio-tiempo se le conoce como Anti-de Sitter.

El segundo término,  $R^2d\Omega_5^2$ , corresponde al elemento de línea de una esfera 5-dimensional con radio constante  $R$ .

Concluimos entonces que cuando  $r \ll R$ , es decir cuando los efectos gravitacionales son mayores, la métrica se puede escribir como el producto cartesiano de dos espacios  $AdS_5 \times S^5$ . Vemos que en la Figura 3.2 esta región corresponde a la parte más cercana a las D3-branas donde el espacio-tiempo se deforma más.

Por otro lado, cuando  $r \gg R$  los efectos gravitacionales de las D3-branas son pequeños y el espacio-tiempo es plano. La métrica en esta región corresponde a Minkowski en diez dimensiones.

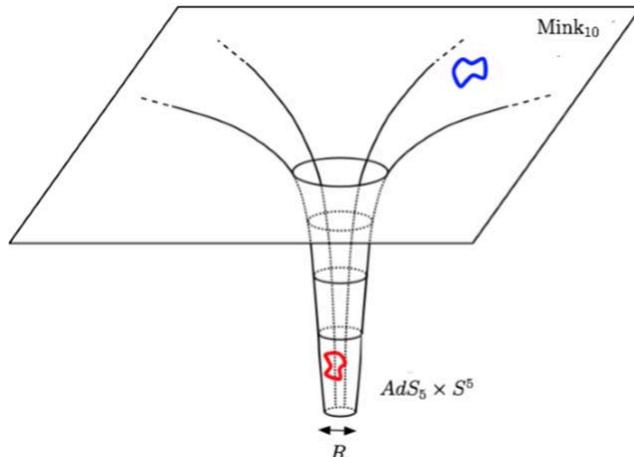


Figura 3.2: En la figura vemos un esquema de la deformación del espacio-tiempo debida al efecto gravitacional de las D3-branas.

### 3.3. La correspondencia holográfica

Hemos visto dos formas distintas de tratar una pila de  $N_c$  D3-Branas paralelas en teoría de supercuerdas IIB. En una de ellas consideramos los efectos gravitacionales de las D3-Branas. En esta descripción sólo existen cuerdas cerradas que se propagan en el espacio-tiempo curvo generado por las D3-branas con métrica (3.21).

Por otro lado, tomamos en cuenta el contenido de campos que generan las cuerdas abiertas que comienzan y terminan en las D3-branas. Los modos de estas cuerdas abiertas generan una torre infinita de estados con masa finita. Si nos enfocamos en el espectro no masivo vemos que este corresponde a una teoría de Super Yang-Mills con  $\mathcal{N} = 4$  y grupo de norma  $SU(N_c)$ . Esta teoría de SYM vive en el volumen de mundo 4-dimensional de las D3-Branas.

Además de las cuerdas abiertas, en esta descripción existen también cuerdas cerradas propagándose afuera de las D3-branas. En esta sección se analizará el límite de bajas energías ( $E \ll l_s^{-1}$ ) para ambas formas de ver a las D3-branas.

En el lado de la teoría de campos la acción del sistema está formada por las cuerdas cerradas propagándose en espacio-plano  $S_b$ , la generalización de la acción de Dirac-Born Infeld para la pila de  $N_c$  3-branas  $S_{brana}$  y la acción que describe la interacción entre las cuerdas abiertas en las D3-branas y las cuerdas cerradas que se propagan libremente en espacio-tiempo plano,  $S_{int}$ :

$$S = S_b + S_{brana} + S_{int}. \quad (3.26)$$

Como vimos en la sección anterior, las cuerdas cerradas se desacoplan de las abiertas

en el límite de bajas energías  $S_b \rightarrow S_{SUG}$ . Es decir, la acción efectiva a bajas energías se vuelve:

$$S_{eff} = S_{SUG} + S_{brana}. \quad (3.27)$$

Por otro lado, considerando los efectos gravitacionales de la pila de D3-branas vemos que la componente  $g_{tt}$  de la métrica (3.25) no es constante. Esto tiene como consecuencia que observadores a diferente posición radial  $r$  miden diferentes energías. Así, la energía propia de un objeto  $E$  se relaciona con la energía que mide un observador en infinito mediante:

$$E = \left(1 + \frac{R^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_r. \quad (3.28)$$

Esto quiere decir que aunque en la región cercana a  $r = 0$  existan modos que den lugar a estados muy energéticos, para un observador suficientemente lejos, es decir para  $r \gg R$ , la energía de estos modos se puede hacer arbitrariamente pequeña. Entonces para un observador en la región asintótica (en Minkowski) los modos energéticos de las cuerdas cerradas que están cerca de la garganta en la figura 3.2 se ven con energía arbitrariamente pequeña ya que tienen que escalar el potencial gravitacional generado por las D3-branas. Así, en el límite de bajas energías los modos que sobreviven son aquellos que se propagan en la región cercana a  $r = 0$ . Es decir, en la región descrita por  $AdS_5 \times S^5$ .

En esta misma descripción gravitacional nos hace falta tomar en cuenta las cuerdas cerradas que se propagan en la región asintótica plana. Estas cuerdas interactúan gravitacionalmente entre sí. Sin embargo, de la misma forma que en la teoría de campos, el límite de bajas energías de estos modos corresponde a supergravedad en la teoría IIB.

Tomando todas estas contribuciones en cuenta la acción efectiva a bajas energías en la descripción deformada por las D3-branas está dada por:

$$S = S_{AdS_5} + S_{SUG}. \quad (3.29)$$

Las dos maneras diferentes de tratar el mismo problema de una pila de  $N_c$  D3-branas sugieren identificarlas. En particular, en su límite de baja energía podemos igualar las acciones efectivas (3.27) y (3.29).

De esta forma, la correspondencia holográfica propone Una teoría de supercuerdas IIB en  $AdS_5 \times S^5$  es equivalente a una teoría  $\mathcal{N} = 4$  de Super-Yang-Mills con grupo de norma  $SU(N_c)$  en espacio-tiempo plano 4-dimensional.

Esta equivalencia no es nada trivial y, aunque no está formalmente demostrada, los resultados teóricos que han sido desarrollados explotando la conjetura de Maldacena indican que es correcta. La dualidad AdS/CFT es uno de los pocos casos que se conoce que relaciona teorías de gravedad y teorías de norma. Ambas descripciones son en principio muy diferentes así que es sorprendente que podamos tener una equivalencia entre ellas, aunque dicha equivalencia sea entre espacios de diferente dimensión.

Una primera manera de revisar si estas teorías son compatibles es intentar identificar características de ambas.

La correspondencia entre la teoría  $\mathcal{N} = 4$  de Super-Yang-Mills (SYM) y la teoría de supercuerdas IIB sobre  $AdS_5 \times S_5$  se hace más clara cuando revisamos las simetrías que tienen ambas teorías ante transformaciones globales. La teoría de SYM es invariante ante transformaciones del grupo  $SO(4, 2) \times SO(6)$ .

$SO(4, 2)$  es el grupo conforme de un espacio de Minkowski 4-dimensional y contiene el grupo de Poincaré, una simetría de dilatación y cuatro transformaciones conformes especiales. El segundo factor,  $SO(6)$ , es la simetría R de la teoría bajo la cual los campos escalares normales a las D3-branas se transforman como vectores.

Del lado de la teoría de cuerdas IIB la teoría es invariante bajo transformaciones que no cambian la métrica (3.24). Este grupo de transformaciones es  $SO(4, 2) \times SO(6)$ .  $SO(4, 2)$  es isomorfo a  $Conf(3, 1)$  y corresponde al grupo de simetría de  $AdS_5$ . Por otro lado, así como  $SO(3)$  es el grupo de simetría de la esfera 2-dimensional  $S^2$ , el término  $SO(6)$  corresponde al grupo de simetría de una 5-esfera.

Debemos de tener en cuenta que todavía no hemos hablado de la forma en la que la correspondencia permite estudiar la teoría de campos de SYM en acoplamiento fuerte. Para esto, tomamos las ecuaciones (3.22),(3.23) y escribimos la constante de acoplamiento de 't Hooft para la teoría de norma de la misma forma que la describimos en el primer capítulo  $\lambda = g^2 N_c$ .

Considerando el límite  $N_c \gg 1$  y  $\lambda \gg 1$  obtenemos:

$$\frac{l_s^2}{R^2} = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \frac{l_p^8}{R^8} = \frac{1}{N_c^2}, \quad (3.30)$$

donde  $l_p = G^{1/8}$  es la longitud de Planck y describe la escala característica de interacciones gravitacionales.

Tomando recíprocos del límite  $l_s^2 \ll R^2$ , obtenemos  $l_s^{-2} = m_s^2 \gg \mathcal{R}$ . Con  $\mathcal{R} = 1/R^2$  la escala de curvatura donde las cuerdas se propagan.

Tomar este límite implica que los modos masivos de las cuerdas microscópicas, cuya masa es proporcional a  $m_s$ , se desacoplan de los modos no masivos cuando consideramos el límite de bajas energías. Dicho de otra forma, sólo los modos no masivos de las cuerdas se mantienen en este límite y como vimos anteriormente (3.15) corresponden a supergravedad. Estas restricciones son equivalentes a ignorar la naturaleza extendida de las cuerdas ya que su tamaño  $l_s$  es mucho menor al tamaño del espacio donde se propagan  $R$ .

Sin embargo, existe una forma de considerar cuerdas macroscópicas en la teoría. Es decir, cuerdas tales que su tamaño es mucho mayor que  $R$ . Para ver esto notamos que la condición  $m_s^2 \gg \mathcal{R}$  también implica  $T_{str} \gg \mathcal{R}$ . Esto quiere decir que la tensión de la cuerda es mucho mayor a la escala de curvatura del espacio donde vive. Por lo tanto,

las fluctuaciones de la cuerda alrededor de su forma clásica se pueden despreciar. En este caso la dinámica de la cuerda macroscópica está descrita por la acción de Nambu-Goto.

La segunda condición de (3.30) controla la fuerza de las fluctuaciones cuánticas gravitacionales. En este régimen dichas fluctuaciones se pueden ignorar y el espacio  $AdS_5 \times S^5$  permanece estático. Así que  $\lambda \gg 1$  quita los modos masivos de la teoría de cuerdas IIB y  $N_c \gg 1$  quita la naturaleza cuántica a la gravedad. Cuando tomamos estos dos límites simultáneamente tenemos que la teoría de supercuerdas se reduce a supergravedad clásica.

En el lado de teoría de campos tomar el número de colores  $N_c \gg 1$  y  $\lambda$  corresponde al régimen fuertemente acoplado. Esto sucede porque, como vimos en el primer capítulo (sección 1.4), si tomamos la expansión de 't Hooft para una teoría de campos con muchos colores, entonces los procesos de dispersión pueden expandirse en diagramas planares controlados por esta constante de acoplamiento  $\lambda$  cuando el acoplamiento es pequeño.

Este es el resultado principal que necesitamos para justificar estudiar los procesos en acoplamiento fuerte a través de la correspondencia holográfica. Como mencionamos en los capítulos anteriores, esta ventana que nos da la correspondencia para estudiar teorías fuertemente acopladas es sumamente valiosa debido a que se sabe muy poco acerca de lo que significa una teoría cuántica de campos en este régimen.

Dado este resultado, el trabajo que sigue es averiguar de qué forma se va a distinguir que detecta un observador inercial en acoplamiento fuerte. Para esto, concluimos esta sección mostrando como se relacionan algunos aspectos de la teoría de norma con su teoría dual.

La constante de acoplamiento de SYM,  $g^2$ , está relacionada con  $g_s$  por (3.20). Como vimos en la sección de cuerdas, los modos no masivos de la cuerda cerrada incluyen un campo escalar llamado dilatón que está relacionado con la magnitud de la constante de acoplamiento de cuerdas  $g_s$  mediante  $g_s = e^{\phi_\infty}$ . Donde  $\phi$  es el campo de dilatón en la frontera de AdS, es decir, en  $z = 0$  (utilizando las coordenadas de la métrica (3.25)).

Esta relación parece indicar que el valor de un campo en la frontera de AdS en la teoría de cuerdas está asociado con una constante de acoplamiento en la teoría SYM. Generalizando esta idea encontramos que si cambiamos el valor de una constante de acoplamiento en la teoría SYM, entonces podemos esperar un cambio en un campo en la teoría de cuerdas. Si cambiamos la acción de la teoría SYM como:

$$S \rightarrow S + \int dx^4 \phi(x) O(x), \quad (3.31)$$

donde  $O(x)$  es un operador invariante de norma. Vemos que si  $\phi(x)$  es constante, entonces la ecuación (3.31) representa un cambio en la constante de acoplamiento del

operador  $O(x)$ . El ejemplo del dilatón sugiere que para cada fuente  $\phi(x)$  existe un campo en la teoría de cuerdas  $\Phi(x, z)$  de forma que  $\lim_{z \rightarrow 0} \Phi(x, z) = \phi(x)$ .

A este mapeo uno a uno entre campos en la teoría de cuerdas y operadores invariantes de norma en la teoría SYM se le conoce como la correspondencia campo/operador. Un caso particular es el tensor de energía-momento (operador invariante de norma) en la teoría SYM, a través de esta correspondencia campo/operador este tensor corresponde a la métrica (campo) en la frontera de AdS.

Otro resultado de la correspondencia es la llamada conexión  $UV - IR$ . Debido al factor de  $R^2/z^2$  en la métrica (3.24), la energía y longitud en la teoría de cuerdas están asociados con los de la teoría SYM por un cambio de escala en  $z$ . Es decir, si identificamos cada espacio de  $z$  fijo en la teoría de cuerdas con las coordenadas en la teoría SYM vemos que si un objeto tiene energía propia  $E$  y longitud propia  $d$  en la teoría de cuerdas, entonces en la teoría SYM su longitud y energía están dados por:

$$d_{SYM} = \frac{z}{R}d, \quad E_{SYM} = \frac{R}{z}E. \quad (3.32)$$

De la ecuación de la energía vemos que para procesos cercanos a la frontera de AdS la energía en la teoría de SYM es muy grande ( $UV$ ) y para procesos con  $z$  grande la energía en SYM es pequeña ( $IR$ ). Todos estos resultados nos permiten crear un diccionario con el cual podemos estudiar un fenómeno una teoría viendo si existe su fenómeno dual en la otra teoría.

Hasta ahora no hemos mencionado si la teoría de norma de Super Yang-Mills tiene algún parecido con las teorías de norma de la naturaleza. Revisando las propiedades de la teoría de SYM notamos que para empezar es una teoría conforme. Esto tiene conflicto con QCD porque como vimos en el primer capítulo esta teoría es asintóticamente libre y por lo tanto no es invariante bajo reescalamientos de energía. Otra diferencia importante es que QCD no tiene ninguna supersimetría mientras que la teoría de SYM tiene cuatro.

A primera vista estas teorías no se parecen mucho pero resulta que si permitimos que la temperatura exceda cierto valor, entonces la teoría de norma pierde la invariancia conforme y la supersimetría se rompe. Además, como mencionamos en el capítulo 1 la libertad asintótica de QCD implica la propiedad de confinamiento. Sin embargo, cuando la temperatura supera cierto valor los quarks dejan de formarse en estructuras como los hadrones y tenemos un plasma de quark y gluones. Es en este límite de altas temperaturas donde se ha usado la teoría de SYM como una aproximación de QCD. Más aún, algunas predicciones teóricas sobre la teoría de SYM en acoplamiento fuerte a altas temperaturas se acercan mucho a datos experimentales en QCD.

### 3.4. Materia fundamental

Los grados de libertad de la teoría de campo  $\mathcal{N} = 4$  de Super Yang-Mills con grupo de norma  $SU(N_c)$  a la que llegamos en la sección anterior consisten sólo en los campos asociados a los bosones de norma. Por lo tanto, transforman en la representación adjunta del grupo de simetría  $SU(N_c)$ . Como se explicó en la sección anterior esta teoría sirve como un modelo de juguete de QCD. Sin embargo, en QCD los grados de libertad asociados a los quarks transforman en la representación fundamental del grupo de simetría  $SU(3)$ .

Como veremos en el siguiente capítulo, el detector que usaremos para medir interacciones no triviales con el vacío es precisamente un quark que describe un movimiento acelerado en la teoría de SYM. Con esto en mente, en esta sección veremos cómo agregar materia fundamental a la teoría de Super Yang-Mills. Para hacer esto, debemos agregar otra pila de  $N_f$  Dp-branas a la descripción de D3-branas con la que se dedujo la correspondencia. Un estudio extenso de este tema se puede encontrar en [5].

En principio las nuevas Dp-branas que agreguemos se podrían extender en cualquier coordenada espacial. Sin embargo, se puede mostrar que las direcciones que comparten las D3-branas y las Dp-branas corresponden a las direcciones en las que agregamos los grados de libertad en la representación fundamental a la teoría de campo. Esto obliga que las Dp-branas contengan las direcciones de las D3-branas.

Como veremos más adelante, para pedir que las cuerdas p-p se desacoplen del resto es necesario que  $p > 3$ . Se puede mostrar que la única opción estable se da cuando  $p = 7$ . Así, las direcciones en las que se extienden las  $N_f$  D7-branas en el espacio-tiempo 10-dimensional están dadas por

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 \text{D3:} & \times & \times & \times & \times & & & & & & \\
 \text{D7:} & \times & & 
 \end{array} \tag{3.33}$$

donde las primeras cuatro direcciones corresponden a las direcciones de la teoría de campo, la cuarta es la dirección radial de AdS y las demás fijan tres direcciones en la 5-esfera.

Esta vez, los modos de vibración de las cuerdas que se extienden entre las D3 y D7-branas agregarán grados de libertad cuya energía base (masa de los quarks) corresponde a la separación entre los dos conjuntos distintos de D-branas.

Las cuerdas que comienzan y terminan en las D7-branas agregan el grupo de simetría  $SU(N_f)$  que corresponde a  $N_f$  distintos sabores de quark.

Para ver por qué agregar  $N_f$  sabores a la teoría de norma equivale a agregar una pila de  $N_f$  D7-branas a la geometría que genera AdS vemos que le sucede a cada uno de los límites donde se dedujo la correspondencia. Para trabajar en la misma teoría

de campo en espacio-tiempo plano no podemos permitir que esta nueva pila de  $N_f$  branas deforme la geometría. Esto equivale pedir que  $N_f \ll N_c$ , de esta forma el efecto gravitacional de las D7-branas es muy pequeño en comparación con el de las D3-branas y tenemos la misma deformación del espacio-tiempo que teníamos antes.

En el lado del espacio plano, es decir  $g_s N_c \ll 1$ , la descripción que tenemos es un espacio-tiempo diez dimensional con una pila de  $N_c$  D3-branas y otra pila de  $N_f$  D7-branas. Al tener dos conjuntos de D-branas debemos considerar tres tipos distintos de cuerda abierta. El primer tipo son aquellas que empiezan y terminan en la pila de D3-branas. El segundo las que comienzan y terminan en las Dp-branas y el tercero aquellas que comienzan en las D3, terminan en las D7, ó comienzan en las D7 y acaban en la D3.

El contenido de campos que genera el primer tipo de cuerdas fue el que se obtuvo en la sección anterior y corresponde, en el límite de bajas energías ( $E \ll l_s^{-1}$ ), a una teoría de norma  $\mathcal{N} = 4$  de Super Yang-Mills con grupo de norma  $SU(N_c)$ .

Para el segundo tipo de cuerdas el contenido de campos es el mismo que el anterior pero al tener  $N_f^2$  posibles posiciones para cada extremo de la cuerda tenemos que el grupo de simetría de los campos no masivos es  $SU(N_f)$ .

El contenido de campos del tercer tipo de cuerdas se mencionó en la sección 3.1. En este caso tenemos una torre infinita de modo de vibración masivos mientras que no existe un estado no masivo. El modo menos energético tiene una masa dada por  $M = L/2\pi\alpha$ , donde  $L$  es la distancia entre las D3-branas y las D7-branas.

Como vimos en la sección anterior, la constante de acoplamiento de las cuerdas 3-3 no depende de la energía. Para cuerdas 7-7, la constante de acoplamiento va como  $g_s^{D7} \sim E^4$ .

Tomando el límite de bajas energías vemos que  $g_s^{D7} \rightarrow 0$ , por lo que las cuerdas 7-7 se desacoplan de las 3-3. Al desacoplarse las cuerdas 7-7 su grupo de simetría local  $SU(N_f)$  se vuelve global y la teoría de norma hereda la simetría de sabor que corresponde a  $N_f$  especies de quark con la misma masa.

Por último, los grados de libertad generados por las cuerdas 3-7 se transforman en la representación fundamental del grupo de norma de las D3-branas y también en el de las D7-branas, esto es, se transforman en el grupo bifundamental  $SU(N_c) \times SU(N_f)$ . Estas cuerdas se desacoplan de las 7-7 porque la fuerza de su interacción está regulada por la constante de acoplamiento  $g_s^{D7}$ . Pero siguen interactuando con las 3-3 ya que su constante de acoplamiento es independiente de la energía.

Recapitulando, en la descripción que llamamos de cuerda abierta podemos separar, en el límite de bajas energías, los diferentes tipos de cuerdas que hay en un sector interactuante y no interactuante.

En el sector interactuante tenemos las cuerdas que comienzan y terminan en las D3-branas. Estas dan lugar a la teoría SYM  $\mathcal{N} = 4$  con grupo de simetría  $SU(N_c)$ .

También tenemos en este sector a las cuerdas 3-7 (y 7-3), cuyos grados de libertad ligeros se acoplan a aquellos de las cuerdas 3-3 dando lugar a grados de libertad que transforman en la representación fundamental de  $SU(N_c)$  y en la representación fundamental del grupo de simetría global  $SU(N_f)$ .

En el sector no interactuante tenemos a las cuerdas cerradas que viven en el espacio-tiempo de Minkowski. Estas cuerdas se desacoplan a bajas energías igual que en la deducción de la correspondencia. Por último, los modos masivos de las cuerdas abiertas 3-3 y todos los modos de las cuerdas 7-7 también se desacoplan a bajas energías.

Por otro lado, en el límite donde las D3-branas deforman la geometría, es decir cuando  $g_s N_c \gg 1$ , podemos separar a las cuerdas que se propagan en dos regiones la región asintóticamente plana y la región de  $AdS_5 \times S^5$ .

Las cuerdas cerradas en la región plana se desacoplan de las que están en la garganta y los modos de vibración masivos sobreviven aún en el límite de bajas energías ya que tienen que escalar un potencial gravitacional para llegar a la región plana. En esta descripción, las Dp-branas viven en la geometría generada por las D3-branas sin deformarla y las cuerdas 7-7 interactúan con las cuerdas cerradas que están en  $AdS_5 \times S^5$ .

En el espacio-tiempo plano 10-dimensional sabemos que forma tomaría una D7-brana, simplemente se extiende sobre las primeras siete direcciones espaciales. Esto cambia en un espacio-tiempo curvo y más aún si alguna de las direcciones está compactificada como es el caso de la 5-esfera. Para entender de qué forma agregan la materia fundamental las D7-branas debemos de estudiar como se ven en el espacio-tiempo curvo  $Ad_5S \times S^5$ . En principio no es obvio que las branas permanecen planas y es de esperarse que tomen la forma de la geometría del espacio de fondo.

Al igual que un plano y una línea, la dirección en la que están separadas las D3-branas y las D7-branas tiene que ser una dirección perpendicular a ambas. Para entender el efecto de esta separación estudiamos el espacio que no contiene a las D3-branas. Es decir, tomamos las direcciones 456789  $Ad_5S \times S^5$ . La métrica de este espacio está dada por:

$$dx_4^2 + \dots + dx_9^2 = du^2 + u^2 d\Omega_3^2 + dU^2 + U^2 d\alpha^2, \quad (3.34)$$

donde  $u, \Omega^3$  cubren las direcciones 4567,  $U, \alpha$  es una coordenada radial y angular respectivamente que cubren las direcciones 89.

Vemos que las D7-branas sólo cubren una 3-esfera (parametrizada por  $\Omega^3$ ) dentro de la 5-esfera. Como las D7-branas sólo ocupan 4 de estas direcciones, basta especificar las direcciones 8 y 9 para fijar las D7 branas en el espacio-tiempo 10-dimensional.

La métrica inducida en el volúmen de mundo de las D7-branas la obtenemos restringiendo la métrica de fondo a las direcciones de las branas. Suponiendo que las D7-branas están en la posición  $U = L$  (distancia entre D3-branas y D7-branas) y

$\alpha = \alpha_0$ , tenemos que la métrica está dada por:

$$ds^2 = \frac{u^2 + L^2}{R^2} \left( \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - \frac{R^2}{u^2 + L^2} du^2 - \frac{R^2 u^2}{u^2 + L^2} d\Omega_3^2 \right), \quad (3.35)$$

donde  $R$  es el radio de  $AdS_5$ .

Podemos ver de (3.35) que si  $L = 0$  esta métrica devuelve  $AdS_5 \times S^3$ . Para una separación entre las D-branas distinta de cero la métrica es asintóticamente  $AdS_5 \times S^3$ . Más aún, el radio de la tres esfera ( $Ru$ ), que enrolla la dos esfera, se anula justamente cuando  $u = 0$  que corresponde a  $r = L$  (coordenada radial de AdS). Esto nos dice que para un observador en AdS la proyección de la D7-brana desaparece en  $z = R^2/L$  por lo que la D-brana sólo se extiende radialmente desde la frontera de AdS,  $z = 0$ , hasta  $z_m = R^2/L$ .

La forma de estas D7-branas es distinta en este espacio-tiempo curvo ya que no se extienden indefinidamente en todas las direcciones que cubren, como podemos ver en la figura 3.3.

Recordamos que la distancia de separación entre las branas está relacionada con el modo menos energético de las cuerdas 3-7 mediante  $M = L/2\pi\alpha$ . Esta energía corresponde a la masa de los quarks y entonces la posición radial donde terminan las D7-branas está dada por:

$$z_m = \frac{R^2}{M2\pi\alpha} = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi M}. \quad (3.36)$$

Dada esta configuración, una quark de masa  $m$  en la teoría de norma es dual a una cuerda macroscópica que se extiende desde el horizonte de AdS  $z = \infty$  ( $r = 0$ ) hasta  $z = z_m$ . Un estudio detallado de la correspondencia holográfica y estas entradas del diccionario se encuentra en [20].

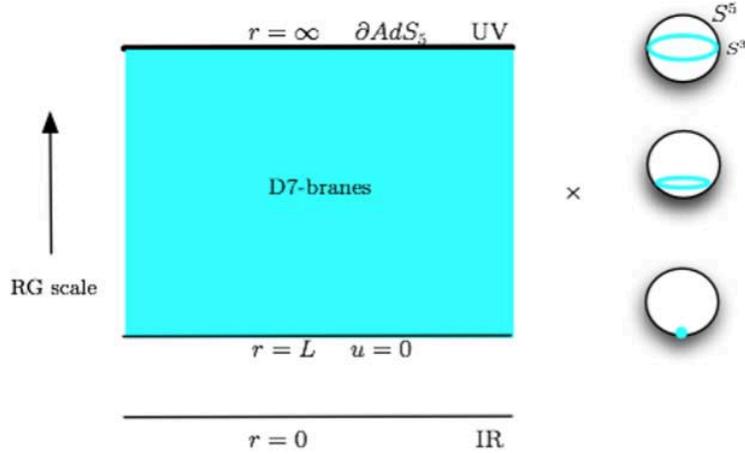


Figura 3.3: En esta Figura vemos un esquema de como se reduce el radio de la tres esfera que enrolla a la dos esfera que deja fija la D7-brana en el espacio  $S^5$ . Imagen tomada de [20].

### 3.5. AdS Global y temperatura en la correspondencia

El espacio-tiempo de anti-de Sitter no es geodésicamente completo, esto significa que las geodésicas no se pueden extender indefinidamente. Sin embargo, podemos extender AdS a un espacio-tiempo que sí es geodésicamente completo. Este espacio-tiempo se conoce como AdS global y lo podemos describir como un hiperboloide encajado en  $\mathbb{R}^{2,4}$  dado por:

$$(X^{-1})^2 + (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = 1. \quad (3.37)$$

Su métrica tiene simetría esférica y en términos de coordenadas estáticas es:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega_3^2 \quad ; \quad f(r) = \frac{r^2}{R^2} + 1. \quad (3.38)$$

El espacio-tiempo con el que trabajamos la sección anterior, y llamamos  $AdS_5$ , es sólo un pedazo de este hiperboloide. A este pedazo se le conoce como el *parche de Poincaré* de AdS, que llamaremos simplemente AdS.

De la misma forma que para AdS existe un dual en teoría de campos a una teoría de cuerdas definida en  $AdS_5 \times S^5$  global. La teoría de campos dual a la teoría de cuerdas en AdS Global vive en el universo estático de Einstein  $\mathbb{R} \times S^3$ . Cabe destacar que así como Minkowski podía verse como viviendo en la frontera de AdS, podemos ver a  $\mathbb{R} \times S^3$  como viviendo en la frontera de AdS Global, en  $r = \dots$ .

Si multiplicamos la métrica (3.38) por  $R^2/r^2$  y dejamos que  $r \rightarrow \infty$  con  $dr = 0$  obtenemos la métrica del universo estático de Einstein  $\mathbb{R} \times S^3$  en la frontera de AdS global:

$$ds_{CFT}^2 = -dt^2 + R^2 d\Omega_3^2.$$

Como se mencionó antes, esto no significa que la teoría de campos viva en la frontera de AdS. Lo que realmente sucede es que la correspondencia es entre la teoría de campos en  $\mathbb{R} \times S^3$  y la teoría de gravedad en todo el hiperboloide (3.37).

Hasta ahora la teoría de campos de la que se ha hablado está a temperatura cero. Como lo que queremos es distinguir si el quark acelerado detecta o no un medio térmico vale la pena ver que significa que la teoría de campos de SYM tenga una temperatura finita.

Para esto, usamos la idea de la temperatura de Hawking e insertamos un agujero negro en AdS. Así, la métrica se vuelve:

$$ds^2 = \frac{R^2}{z^2} \left( f(z) dt^2 - d\vec{x}^2 - \frac{dz^2}{f(z)} \right) \quad ; \quad f(z) = 1 - \frac{z^4}{z_0^4}, \quad (3.39)$$

donde  $R$  es el radio de AdS y la métrica representa una *brana negra* en AdS con un horizonte de eventos localizado en  $z = z_0$ . Esta métrica resulta ser la única que cumple las siguientes condiciones:

- Es asintóticamente  $AdS_5$ , es decir, cuando  $z \rightarrow 0$  obtenemos  $AdS_5$  de vuelta.
- Preserva la invariancia bajo traslaciones en todas las direcciones de la teoría de norma y preserva rotaciones en las espaciales.
- Tiene una temperatura dada por la temperatura de Hawking de la brana negra que satisface todas las leyes de la termodinámica en la teoría de campos. Aplicando la ecuación (2.41) a la métrica (3.39) vemos que la temperatura de la teoría de norma es  $T = \frac{1}{\pi z_0}$ .

Concluimos entonces que el efecto de agregar un agujero negro al espacio-tiempo de AdS se traduce en estudiar una teoría de campos a una temperatura finita.

Como veremos en el siguiente capítulo, si tenemos una cuerda que se extiende en AdS entonces podremos asociar el extremo de la misma con un quark que se mueve en la teoría de campos. Si la hoja de mundo de esta cuerda presenta un horizonte de eventos, entonces la radiación de Hawking asociada a este horizonte ocasionará fluctuaciones de la cuerda que se propagarán hasta su extremo. Así, parece razonable identificar este horizonte en la hoja de mundo con una interacción no trivial entre el vacío de un observador inercial y uno acelerado en la teoría fuertemente acoplada. Este análisis se realizará en el siguiente capítulo para movimiento rectilíneo y circular en AdS y AdS global.

# Capítulo 4

## Efecto Unruh en SYM $\mathcal{N}=4$

Como mencionamos anteriormente, en este capítulo estudiaremos el efecto Unruh para el caso particular de un quark que se mueve con aceleración propia constante en la teoría de SYM  $\mathcal{N} = 4$  fuertemente acoplada.

Estudiaremos aquellos casos que podemos comparar con los resultados que obtuvimos en el capítulo 2. En el capítulo 2, mencionamos que una de las formas de distinguir si un observador tiene una interacción no trivial con el vacío cuántico es acoplar un detector teórico al campo estudiado y mover dicho detector en la trayectoria de interés. Si el detector cambia su estado energético, entonces podemos asegurar que existe una interacción no trivial con el vacío. De esta forma, en este capítulo estudiaremos el movimiento acelerado de un quark que servirá como un indicador de interacción no trivial en la teoría de Super Yang-Mills en el régimen fuertemente acoplado.

Como mencionamos en la sección 3.4, la configuración dual a un quark que se mueve en la teoría de norma de SYM corresponde en el lado de gravedad a una cuerda macroscópica que se extiende desde el horizonte de AdS ( $z \rightarrow \infty$  en las coordenadas (3.25) hasta la posición de las D7-branas que determinan la masa del quark  $z_m = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi m}$ . El extremo de esta cuerda sobre las D7-branas lo identificaremos con el quark en la teoría de norma mientras que el cuerpo de la cuerda se asocia con el perfil del campo gluónico emitido por el quark.

Otro de los casos que estudiaremos es el de una cuerda macroscópica con ambos extremos en las D7-branas de sabor. Esta configuración es dual a un par quark-antiquark donde cada uno de los extremos de la cuerda se identifica con una de estas partículas.

Quisiéramos hacernos la siguiente pregunta: ¿cómo distinguir si el quark tiene una interacción no trivial con el vacío cuántico?

Ya que el efecto Unruh nos dice que el observador en movimiento rectilíneo detecta un medio térmico, parece razonable buscar la respuesta a esta pregunta en la forma

de introducir una temperatura finita a través de la correspondencia. Como vimos en la sección 3.5, tomar en cuenta una temperatura finita equivale a considerar la métrica de brana negra que introduce un agujero negro en AdS. Este agujero negro emite radiación de Hawking y esta se manifiesta en la teoría de norma como una temperatura distinta de cero.

Dado que la temperatura del observador acelerado no se puede originar de un efecto global como agregar un agujero negro a AdS, en [24] se propuso que la interacción con el vacío cuántico está determinada por la existencia de un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda que es dual al quark en movimiento. Dicho horizonte en la hoja de mundo está asociado a una temperatura de Unruh que sólo afecta a la cuerda misma.

Las primeras indicaciones de que esta identificación es correcta se encontraron en [22] donde se estudió el efecto que tiene un fondo de Schwarzschild en una cuerda macroscópica que se extiende radialmente desde el interior del agujero negro. Como es de esperarse, una cuerda que se encuentra estática sobre este espacio-tiempo de fondo hereda el horizonte de eventos del agujero negro. De esta forma, la radiación de Hawking debida a este horizonte ocasiona que los campos que describen la posición de la cuerda se exciten. Esta excitación tiene como resultado que la cuerda se mueva de manera estocástica en las direcciones angulares.

Estos resultados nos llevan a pensar que existe una relación entre el horizonte en la hoja de mundo de la cuerda dual al quark e interacciones no triviales con el vacío. Sin embargo, cuando el extremo de la cuerda se acelera, el resto de la cuerda se deforma y no es obvio que existe un horizonte de eventos en la hoja de mundo.

Se puede demostrar que el horizonte de eventos si existe y más aún se probó en [24] que esto sólo ocurre cuando el movimiento del extremo de la cuerda se da sobre una trayectoria diferente a una geodésica, es decir, en un movimiento acelerado. Con esto en mente, cuando estudiamos el efecto Unruh necesitamos concentrarnos únicamente en aquellos casos en los que la cuerda esta acelerada.

En este capítulo nos enfocamos en estudiar algunos de estos movimientos y describir en qué caso cada uno de ellos presenta un horizonte en la hoja de mundo dual al quark.

En la sección 4.1 estudiaremos el movimiento rectilíneo con aceleración propia constante del quark. Para mantener este quark en movimiento acelerado se enciende un campo eléctrico constante en las D7-branas de modo que la punta de la cuerda se mueva con aceleración propia constante.

En la sección 4.2 revisaremos la solución dada por Mikhailov en [21] que resuelve las ecuaciones de movimiento para una cuerda con un extremo que se mueve en la frontera de AdS en una trayectoria tipo tiempo. Con esta solución, el análisis del movimiento circular en espacio-tiempo plano (dual a  $AdS_5 \times S^5$ ) y en el espacio-tiempo acotado  $\mathbb{R} \times S^3$  (dual a  $AdS$  Global) se reduce a sustituir la trayectoria del quark en la solución

general. Encontraremos que al igual que en teoría cuántica de campos, el movimiento circular en el espacio-tiempo no acotado siempre tiene una interacción no trivial con el vacío mientras que en el espacio acotado la frecuencia angular del observador dicta si existe o no un horizonte en la hoja de mundo.

Finalmente compararemos estos dos casos para ver qué podemos reducir el movimiento en AdS global al caso del parche de Poincaré con sólo pedir que el radio del círculo en que se mueve el quark sea mucho menor que la curvatura del espacio.

En los casos que existe un horizonte en la hoja de mundo, la temperatura de Hawking que obtenemos para cualquier movimiento acelerado depende sólo de la magnitud de la 6-aceleración del quark en el espacio-tiempo que contiene a AdS,  $\mathbb{R}^{2,4}$ . Esto es diferente a lo que sucede en acoplamiento débil ya que nos dice que existen diferentes tipos de movimiento tales que presentan el mismo tipo de horizonte de eventos en su hoja de mundo.

En la sección 4.4.1 estudiaremos cual es la diferencia entre los movimientos que tienen la misma magnitud en su 6-aceleración. Encontraremos que la diferencia entre estos tipos de movimiento está en la derivada de dicha aceleración con respecto al tiempo.

Todos los resultados de este capítulo se reprodujeron, entre otros, de los artículos [27], [28] y [18].

## 4.1. Movimiento rectilíneo

El caso más sencillo para estudiar el efecto Unruh en una teoría fuertemente acoplada es el movimiento rectilíneo de un quark con masa  $m$  que se mueve con aceleración propia constante  $a$ .

Como vimos en el capítulo anterior, este quark es dual a una cuerda con un extremo en las D7-branas de sabor. Dichas branas se extienden radialmente desde la frontera de AdS  $z = 0$ , hasta  $z_m = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi m}$  y son las responsables del grupo de simetría que permite materia en la representación fundamental en la teoría de norma.

Para encontrar si la cuerda dual al quark presenta un horizonte en su hoja de mundo debemos calcular explícitamente el encaje de la cuerda minimizando la acción de Nambu-Goto en el espacio-tiempo de Anti-de Sitter. El elemento de línea de  $\text{AdS}_5$  está dado por:

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (dt^2 - d\vec{x}^2 - dz^2), \quad (4.1)$$

donde hemos puesto el radio del parche de Poincaré de AdS como  $R = 1$  para simplificar los cálculos. Cabe destacar que esta relación implica, según (3.22) y (3.23), que podemos expresar a la tensión de la cuerda como

$$T_0 = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi}.$$

Es importante resaltar que en este capítulo sólo trataremos con las coordenadas de AdS más no usaremos las de la 5-esfera. Como mencionamos en la introducción de este capítulo, esperamos que la punta de la cuerda fluctué alrededor de su trayectoria clásica. Estas fluctuaciones se dan tanto en las coordenadas de AdS como en las coordenadas de la esfera. Sin embargo, la correspondencia relaciona las coordenadas de la teoría de norma con las coordenadas  $\vec{x}$  en (4.1), a un  $z$  fijo. Mientras que las coordenadas de la 5-esfera las identificamos con los grados de libertad internos de la teoría de norma. Así, en este capítulo sólo consideraremos fluctuaciones del quark alrededor de su trayectoria.

El efecto de pedir que el extremo de la cuerda esté fijo en  $z = z_m$  impone condiciones de frontera sobre las ecuaciones de movimiento. En particular, exigir que el quark se mueva con aceleración constante equivale a acoplar un campo eléctrico constante, que llamaremos  $\mathcal{E}_f$ . Es decir, equivale a acoplar un campo de norma  $A_\mu$ , con grupo de simetría  $U(1)$ , al extremo de la cuerda  $X^\mu(\tau, \sigma^*)$ . A nivel de la acción esto equivale a agregarle un término de la forma

$$S_{Elec} = \int d\tau A_\mu \partial_\tau X^\mu(\tau, z_m), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4 . \quad (4.2)$$

Al tratarse de movimiento rectilíneo, la trayectoria del quark está restringida a una dimensión. Para simplificar los cálculos, escogeremos esta como la coordenada  $x$  de la teoría de campos. También, debido a la invariancia bajo reparametrizaciones de la acción de Nambu-Goto, podemos escoger los parámetros de la hoja de mundo  $(\tau, \sigma)$  como las coordenadas  $(t, z)$  de algún observador inercial en AdS. A esta elección de parámetros se le conoce como la *norma estática* y resulta muy útil para obtener la posición del horizonte en la hoja de mundo en función de las coordenadas espaciotemporales.

Dada esta elección de parámetros, el encaje de la cuerda se puede escribir en forma general como:

$$X(t, z) = (t, x(t, z), 0, 0, z), \quad (4.3)$$

donde  $x(t, z)$ , a un tiempo fijo, es el perfil de la cuerda.

Las ecuaciones de movimiento sobre  $z$  y  $t$  se cumplen trivialmente porque son los parámetros de la superficie así que sólo falta ver la ecuación de movimiento para  $X^1(t, z)$ :

$$\partial_t \left( \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{-}{-g} \right) + \partial_z \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{-}{-g} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{-g} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{x}}{-g} \right) = 0, \quad (4.4)$$

donde  $g = -z^{-4}(x^2 - \dot{x}^2 + 1)$  es el determinante de la métrica inducida en la hoja de mundo. La solución a esta ecuación diferencial, dada por primera vez en [27], es

$$x(t, z) = \pm \sqrt{t^2 + b^2 - z^2}, \quad (4.5)$$

donde  $b$  es una constante que determinaremos usando las condiciones de frontera. La parte positiva de la ecuación (4.5) representa la solución en la que la cuerda sigue a un extremo hacia  $x > 0$  y la parte negativa es la parte de la cuerda que sigue al otro extremo de la cuerda para  $x < 0$ .

Esta solución nos da una cuerda con ambos extremos en las D7-branas por lo que estos extremos son duales a un par quark-antiquark. El perfil de la cuerda está dado en la Figura 4.1.

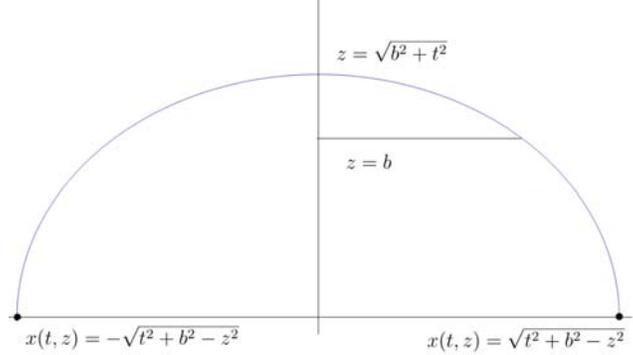


Figura 4.1: Esquema del perfil de la cuerda tomada a un tiempo fijo, los extremos de la cuerda se alejan conforme avanza el tiempo.

Como se comentó en el capítulo 3, los momentos conjugados de la cuerda nos dan información acerca de el flujo de energía y momento a través de la cuerda. Para calcular estos momentos de forma general usamos la fórmula (3.4)

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu}^0 &= \frac{(\partial_{\tau} X^{\nu} \partial_{\sigma} X_{\nu}) \partial_{\sigma} X_{\mu} - (\partial_{\sigma} X^{\nu} \partial_{\sigma} X_{\nu}) \partial_{\tau} X_{\mu}}{-g}, \\ \Pi_{\mu}^1 &= \frac{(\partial_{\tau} X^{\nu} \partial_{\sigma} X_{\nu}) \partial_{\tau} X_{\mu} - (\partial_{\tau} X^{\nu} \partial_{\tau} X_{\nu}) \partial_{\sigma} X_{\mu}}{-g},\end{aligned}\quad (4.6)$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica inducida y  $(\tau, \sigma)$  son los parámetros de la hoja de mundo.

En particular, el flujo de energía,  $E$ , a través de la cuerda está dado por el momento canónico conjugado  $-T_0 \Pi_t^1 = dE/dt$ . Más aún, el trabajo que se realiza sobre el sistema por el campo eléctrico,  $\mathcal{E}_f$ , es  $\mathcal{E}_f (X(t) - X(0))$ . Entonces, la energía suministrada por la fuerza externa al quark desde  $t = 0$  hasta  $t = t$  está dada por:

$$\int_0^t \frac{dE}{dt} \Big|_{z=z_m} dt = -T_0 \int_0^t \Pi_t^1 dt = \frac{T_0}{b z_m} \left[ \sqrt{t^2 + b^2 - z_m^2} - \sqrt{b^2 - z_m^2} \right] \quad (4.7)$$

$$= \frac{T_0}{b z_m} [X(t) - X(0)]. \quad (4.8)$$

De aquí obtenemos  $\mathcal{E}_f = T_0/z_m b$  y entonces  $b = T_0/z_m \mathcal{E}_f$ . Pero la posición de las D7-branas de sabor está dada por  $z_m = \bar{\lambda}/2\pi m$ , entonces la constante  $b$  queda en términos de la aceleración propia del quark:

$$b = \frac{m}{\mathcal{E}_f} = \frac{1}{a}. \quad (4.9)$$

El método de comparar cantidades conservadas en el movimiento de la cuerda con aquellas del quark resultará útil más adelante cuando describamos una fórmula general para la potencia radiada.

Para extraer la información relevante al efecto Unruh, cambiamos el sistema inercial por aquel que se mueve con la cuerda de la misma forma que se hizo en el capítulo 2. Para este caso es posible escoger un sistema de coordenadas que deje no sólo al quark sino a toda la hoja de mundo estática. Dicho cambio de coordenadas está dado por

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{a^{-2} - r^2} e^{\alpha a} \cosh \frac{\tau}{b}, \\ t &= \sqrt{a^{-2} - r^2} e^{\alpha a} \sinh \frac{\tau}{b}, \\ z &= r e^{\alpha a}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si sustituimos este cambio de coordenadas en (4.5) obtenemos la ecuación  $\alpha = 0$ . Lo que indica que desde este sistema de coordenadas el movimiento del quark se ve a velocidad constante. En este cambio de sistema de coordenadas el horizonte de la hoja de mundo está ubicado en la misma posición que el de la métrica de fondo ya que la cuerda permanece estática en estas nuevas coordenadas.

El elemento de línea que resulta de hacer el cambio (4.10) está dado por

$$ds^2 = \frac{1}{r^2} \left\{ [1 - (ra)^2] d\tau^2 - \frac{dr^2}{1 - (ra)^2} - d\alpha^2 - (dy^2 + dz^2) e^{-2\alpha/a} \right\}. \quad (4.11)$$

Esta métrica tiene un horizonte en  $r = a^{-1}$  que separa a la cuerda en dos partes causalmente desconectadas<sup>1</sup>. De acuerdo con (2.41), la temperatura de Hawking asociada a este horizonte de aceleración está dada por

$$T = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{d(1 - (ra)^2)}{dr} \right|_{r=a^{-1}} = \frac{a}{2\pi}. \quad (4.12)$$

Vemos que esta temperatura coincide exactamente con la temperatura de Unruh que obtuvimos en el capítulo 2 usando métodos de teoría cuántica de campos y reafirma la identificación entre un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda y una interacción no trivial con el vacío del observador acelerado.

Las cantidades físicas del movimiento del quark, como su pérdida de energía, encuentran su dual en las cantidades conservadas en la hoja de mundo de la cuerda. En

---

<sup>1</sup>El cambio de coordenadas sólo deja estática a la cuerda para  $0 < z < a^{-1}$

particular, tomando la densidad de momento conjugado  $-T_0\Pi_t^0$  podemos calcular la energía que pierde el quark por radiación emitida si calculamos la energía total de la cuerda y vemos cómo cambia esta cantidad con el tiempo.

Como veremos más adelante, al considerar el quark con masa finita existe una posición radial,  $z = a^{-1}$ , que separa el comportamiento de la cuerda en dos partes. La parte definida por  $z < a^{-1}$  corresponde al quark y las partículas virtuales que lo rodean mientras que  $z \geq a^{-1}$  corresponde al perfil del campo gluónico que emite el quark. Así, podemos calcular con (4.6) la razón con la que pierde energía el quark debido a que radía:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{z_b}^{\overline{t^2+b^2}} -T_0\Pi_t^0 dz = \frac{d}{dt} \int_{z_b}^{\overline{t^2+b^2}} \frac{dE}{dz} dz = \frac{d}{dt} \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} a^2 t = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \frac{E_f^2}{m^2}. \quad (4.13)$$

Donde usamos la relación (4.9) para expresar  $a = E_f/m$ . Esta relación es muy parecida al resultado de electrodinámica clásica [29] donde la potencia radiada de una carga acelerada en una dimensión está dada por

$$P_{elec} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2, \quad (4.14)$$

donde  $p$  es el momento lineal de la partícula y  $e$  su carga.

Encontraremos una relación más general en la sección 4.2 para la potencia radiada por un quark que describe una trayectoria tipo tiempo y notaremos nuevamente que se parece mucho a aquella de electromagnetismo.

Si regresamos al sistema de coordenadas de AdS (4.31) y calculamos la velocidad con la que se mueve la cuerda, a un  $z$  fijo, obtenemos:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{t}{\overline{t^2 + a^{-2} - z^2}}.$$

Esta ecuación presenta un problema ya que nos dice que la velocidad a la que se mueve un pedazo de la cuerda es mayor que uno cuando  $z > a^{-1}$ . Si asociamos el cuerpo de la cuerda con el perfil del campo gluónico emitido por el quark esta ecuación nos diría que la radiación se puede mover más rápido que la luz. Para resolver este problema notamos que si tomamos una superficie de energía constante de la cuerda obtenemos:

$$E(z, t) = C \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0. \quad (4.15)$$

Ya que los momentos conjugados (4.6) nos dan las cantidades  $dE/dt$  y  $dE/dz$ , podemos despejar  $\frac{dz}{dt}$  para obtener la velocidad a la que la energía viaja en la cuerda mediante:

$$v = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{t}{t^2 + b^2} \overline{t^2 + a^{-2} - z^2}. \quad (4.16)$$

Esta cantidad sí es menor que uno, entonces la energía que viaja a través de la cuerda sólo se puede mover a una velocidad menor a la de la luz. De esta forma la interpretación física de la solución sigue siendo válida.

El hecho de que la temperatura que obtenemos en el régimen débilmente acoplado de teoría cuántica de campos coincida con la temperatura en acoplamiento fuerte es un resultado muy importante que sólo se obtuvo gracias a la correspondencia holográfica y nos habla de que el efecto Unruh no es sólo un fenómeno de una teoría débilmente acoplada sino que es una característica fundamental de una teoría cuántica de campos. Un estudio detallado del movimiento rectilíneo uniforme se puede encontrar en [25].

La coincidencia en los resultados sugiere estudiar el movimiento circular uniforme bajo la correspondencia holográfica y ver si surgen las mismas particularidades que para una teoría débilmente acoplada. El trabajo a seguir en este caso es idéntico que para el movimiento rectilíneo sólo que ahora usaremos una solución general encontrada por Mikhailov [21]. Con esta solución, la tarea de encontrar el horizonte de aceleración se simplificará porque el encaje de la cuerda estará dado explícitamente en función de la trayectoria del quark.

## 4.2. Solución de Mikhailov

Como se revisó en la capítulo 3,  $\text{AdS}_5$  se puede ver como un espacio encajado en uno más grande  $\mathbb{R}^{2,4}$ . En este espacio,  $\text{AdS}_5$  es la región que cumple:

$$X^M X_M = (X^{-1})^2 + (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 = 1, \quad M = -1, 0, 1, 2, 3, 4. \quad (4.17)$$

En esta sección usaremos un resultado de Mikhailov [21], que nos da la forma específica del encaje de la cuerda dada una trayectoria tipo tiempo de su extremo. Cabe destacar que este resultado es muy importante porque las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto no son lineales como vemos en la ecuación (4.4) y resolver ecuaciones diferenciales no lineales es en general muy complicado.

El resultado al que llegó Mikhailov es el siguiente:

- Si tenemos una trayectoria  $l^M(\tau)$  en  $\mathbb{R}^{2,4}$ , tal que cumple las siguientes dos condiciones de frontera:

$$l^M l_M = 0 \quad (4.18)$$

$$\partial_\tau l^M \partial_\tau l_M = 1. \quad (4.19)$$

Entonces existe un encaje,  $X^M(\tau, \sigma)$ , que resuelve las ecuaciones de movimiento de Nambu-Goto en la región definida por (4.17), y este encaje está dado por

$$X^M(\tau, \sigma) = \pm \partial_\tau l^M(\tau) + \sigma l^M(\tau). \quad (4.20)$$

Para ver cómo estas condiciones son útiles para el problema del quark acelerándose, notamos que la condición (4.18) significa que  $l^M(\tau)$  es un vector nulo en  $\mathbb{R}^{2,4}$  y los vectores nulos en este espacio representan la frontera de la región (4.17), es decir, la frontera de AdS. Sabemos que esta frontera tiene la misma forma que el espacio-tiempo de Minkowski para el parche de Poincaré y tiene la forma  $\mathbb{R} \times S^3$  para AdS Global. Más aún, como vimos anteriormente podemos fijar la trayectoria del quark a la frontera de AdS si pedimos que la masa de dicho quark sea infinita. Pedir esta condición quiere decir que la curva  $l^M(\tau)$  representa la trayectoria del quark vista desde el espacio  $\mathbb{R}^{2,4}$ . La condición (4.19) nos dice que  $\tau$  es el tiempo propio del quark visto desde  $\mathbb{R}^{2,4}$ .

Por último, la elección del signo en (4.20) distingue entre dos tipos de soluciones distintas. El signo positivo corresponde a soluciones donde la cuerda sigue a la punta de la cuerda, mientras que el negativo corresponde a soluciones en las que el extremo sigue a la cuerda. En la teoría de norma esto significa que la solución con signo positivo representa campos gluónicos que salen del quark, mientras que la solución con signo negativo representa campos gluónicos absorbidos por el quark. Como nos interesa tratar sólo el caso en el que el quark radía, nos enfocaremos sólo en la solución con signo positivo.

Cabe destacar que la solución (4.20) es válida para la región definida por (4.17) y como vimos en el capítulo 3, el parche de Poincaré de AdS parametriza sólo parte de esta región mientras que AdS Global la cubre por completo. Esta distinción es importante porque la teoría de cuerdas IIB en el parche de Poincaré es dual a una teoría de campos de SYM con  $\mathcal{N} = 4$  en el espacio de Minkowski mientras que la teoría de cuerdas en AdS global es dual a una teoría de campos en  $\mathbb{R} \times S^3$ .

A partir de (4.20), podemos obtener la métrica inducida en la hoja de mundo de forma general cuando el extremo de la cuerda se mueve siguiendo la trayectoria  $l^M(\tau)$  en  $\mathbb{R}^{2,4}$ :

$$ds_{ws}^2 = (\partial_a X^M \partial_b X_M) dx^a dx^b = (-A_6^2 + \sigma^2) d\tau^2 - 2d\tau d\sigma, \quad (4.21)$$

donde  $a, b = \sigma, \tau$  y denotamos a  $A_6^2 = -\partial_\tau^2 l_M(\tau) \partial_\tau^2 l^M(\tau)$  como el negativo de la norma al cuadrado de la 6-aceleración, medida en el espacio  $\mathbb{R}^{2,4}$  sobre la curva  $l^M(\tau)$ .

Si tomamos  $A_6$  constante en el tiempo es posible hacer un cambio de parámetros  $(\tau, \sigma)$  de modo que la métrica inducida (4.21) sea estacionaria de la misma forma que la hoja de mundo era estacionaria para el movimiento rectilíneo. El cambio de coordenadas es

$$\bar{\tau} = \tau + \frac{\operatorname{arctanh}(\frac{\sigma}{A_6})}{A_6}. \quad (4.22)$$

Con este cambio, la métrica inducida toma la forma

$$ds_{ws}^2 = (\sigma^2 - A_6^2) d\bar{\tau}^2 - \frac{d\sigma^2}{\sigma^2 - A_6^2}. \quad (4.23)$$

Como observamos en el caso de movimiento rectilíneo uniforme, esta métrica nos señala la posición del horizonte de eventos en la hoja de mundo. Ya que la posición de dicho horizonte define la temperatura de Unruh, observamos que sólo si el factor  $(\sigma^2 - A_6^2)$  se hace cero existe un horizonte de eventos. Pero esto sólo puede ocurrir si  $A_6^2 > 0$  (podría ser negativo porque la métrica no es Euclidiana), ya que si  $A_6^2 > 0$  entonces  $(\sigma^2 - A_6^2) = 0 \Rightarrow \sigma = A_6$  y por lo tanto no existe un horizonte en la hoja de mundo.

Suponiendo que  $A_6^2$  es mayor que cero, podemos calcular la temperatura de Hawking con (2.41) para  $f(\sigma) = (\sigma^2 - A_6^2)$ . Así, la temperatura de Hawking asociada al horizonte de eventos en la hoja de mundo está dada por

$$T_{ws} = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{df}{d\sigma} \right|_{\sigma=A_6} = \frac{A_6}{2\pi}. \quad (4.24)$$

Esta fórmula es idéntica a la del efecto Unruh sólo que la aceleración en este caso es en el espacio en el que está metido AdS ( $\mathbb{R}^{2,4}$ ) y para el efecto Unruh era la 4-aceleración del observador. Esto significa que para ciertos movimientos acelerados podría no existir un horizonte de eventos en la hoja de mundo de la cuerda dual al quark, y por lo tanto la interacción con el vacío cuántico sería trivial.

Un caso que resulta interesante es cuando estamos en el espacio-tiempo de Minkowski. Ahí, la 6-aceleración de la punta de la cuerda coincide exactamente con la 4-aceleración del espacio-tiempo plano por lo que cualquier movimiento acelerado tendrá asociado un horizonte de eventos. La diferencia que tiene (4.24) con el caso débilmente acoplado es que esta temperatura que genera el horizonte en la hoja de mundo es la misma no sólo para movimiento rectilíneo sino para cualquier movimiento que mantenga el módulo de su aceleración constante. Revisaremos con más detalle esta diferencia en la sección 4.4.1.

El resultado (4.24) coincide con el de [19] para detectores moviéndose en AdS cuando el acoplamiento es débil en el sentido en que los dos hablan sobre la 6-aceleración en el espacio más grande  $\mathbb{R}^{2,4}$ . Todos estos resultados son válidos para movimientos en la región (4.17), esto es importante porque AdS sólo cubre una parte de esta región, y AdS global la cubre en su totalidad. Al ser dos parametrizaciones del mismo espacio, la solución de Mikhailov es válida cuando el encaje de la cuerda se restringe a cualquiera de los dos, entonces (4.20) es válida en el parche de Poincaré y en AdS Global.

En lo que resta del capítulo estudiaremos el caso particular del movimiento circular cuando el quark se mueve en  $\mathbb{R}^{1,3}$  y cuando se mueve en  $\mathbb{R} \times S^3$  mediante la solución (4.20).

### 4.3. Movimiento Circular en $\mathbb{R}^{1,3}$

El estudio del efecto Unruh para movimiento circular se realizó en el capítulo 2 donde se mencionó que no siempre existe una interacción no trivial con el vacío. En el problema particular donde el espacio-tiempo de fondo es plano el observador acelerado siempre percibe fluctuaciones alrededor de su trayectoria mientras que para un espacio acotado esto no es necesariamente cierto.

En esta sección se buscará un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda dual al quark que describe un movimiento circular en  $\mathbb{R}^{1,3}$ . Para esto, basta escribir explícitamente el encaje de la cuerda que representa al quark en movimiento circular usando la solución general (4.20).

La forma de recuperar AdS a partir de la región definida por (4.17) es parametrizarla en coordenadas de Poincaré mediante:

$$\begin{aligned} X^{-1} &= \frac{1 - (x^\mu)^2 + z^2}{2z}, \\ X^\mu &= \frac{x^\mu}{z}, \\ X^4 &= \frac{1 + (x^\mu)^2 - z^2}{2z}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $\mu = 0, 1, 2, 3$  cubre los índices del espacio-tiempo donde vive la teoría de norma,  $\mathbb{R}^{1,3}$  y  $(x^\mu)^2 = x^\mu x_\mu$ .

La métrica de AdS la obtenemos transformando el tensor métrico de  $\mathbb{R}^{2,4}$ :

$$ds^2 = dX^M dX_M = \frac{1}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (4.26)$$

Con esta parametrización de la región (4.17) buscamos una curva  $l^M(\tau)$  tal que el extremo de la cuerda dado por (4.20) corresponda a la trayectoria del quark en la frontera de AdS,  $z = 0$ .

Si denotamos como  $\bar{x}^\mu(\tau)$  a la línea de mundo del quark en  $\mathbb{R}^{1,3}$ , entonces la curva que cumple esta condición es:

$$\begin{aligned} l^{-1}(\tau) &= \frac{1 - (\bar{x}^\mu(\tau))^2}{2}, \\ l^\mu(\tau) &= \bar{x}^\mu(\tau), \\ l^4(\tau) &= \frac{1 + (\bar{x}^\mu(\tau))^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para usar el resultado de Mikhailov debemos comprobar que las condiciones (4.18) y (4.19) se cumplen. Vemos que  $l^M(\tau)$  es un vector nulo en  $\mathbb{R}^{2,4}$  como pide la ecuación (4.18) mientras que la condición (4.19) impone

$$\partial_\tau \bar{x}^\mu \partial_\tau \bar{x}_\mu = 1,$$

es decir,  $\tau$  es el tiempo propio del quark.

Sólo falta sustituir (4.27) en (4.20) para obtener las componentes del encaje de la cuerda en términos de  $\bar{x}^\mu$  :

$$\begin{aligned} X^{-1}(\tau, \sigma) &= -\bar{x}_\mu \partial_\tau \bar{x}^\mu + \frac{\sigma}{2} (1 - (\bar{x}^\mu)^2), \\ X^\mu(\tau, \sigma) &= \partial_\tau \bar{x}^\mu + \sigma \bar{x}^\mu, \\ X^4(\tau, \sigma) &= \bar{x}_\mu \partial_\tau \bar{x}^\mu + \frac{\sigma}{2} (1 + (\bar{x}^\mu)^2). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Esta solución está expresada sobre las coordenadas de  $\mathbb{R}^{2,4}$ . Para obtener el encaje de la cuerda en AdS, igualamos (4.25) con (4.28) y despejamos los parámetros de AdS en función de  $\tau$  y  $\sigma$ . Haciendo esto obtenemos  $\sigma = z^{-1}$  y también:

$$x^\mu(\tau, z) = z \partial_\tau \bar{x}^\mu(\tau) + \bar{x}^\mu(\tau). \quad (4.29)$$

Este es el encaje de la cuerda en el parche de Poincaré en términos de  $\tau$  y  $z$ . Dicha ecuación se simplifica si hacemos la reparametrización  $\tau = \bar{x}^0$ , donde  $\bar{x}^0$  es la coordenada temporal de la trayectoria del quark.

Usando  $d\bar{x}^0 = \gamma d\tau$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} t &= x^0(t_{ret}, z) = z\gamma + t_{ret}, \\ \vec{x}(t, z) &= z\vec{v}\gamma + \vec{x}(t_{ret}) = (t - t_{ret})\vec{v} + \vec{x}(t_{ret}), \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde  $t_{ret} = \bar{x}_0$ .

Esta forma de la solución nos dice que el comportamiento de la cuerda, a un tiempo  $t = X^0(\tau, z)$ , está completamente determinado por el comportamiento de la cuerda a un tiempo anterior  $t_{ret}$ .

La forma de esta solución es análoga a los potenciales retardados que encontramos en electromagnetismo clásico [29]. El valor de dichos potenciales a un tiempo  $t$  depende de las fuentes que lo generan en un tiempo anterior  $t_{ret}$ . Este tiempo corresponde al tiempo en el que las señales emitidas por estas fuentes alcanzan el punto donde evaluamos el potencial. De esta forma, podemos entender la solución (4.30) como la propagación de una perturbación que viaja desde el extremo de la cuerda hacia su cuerpo.

El encaje dado por (4.30) es válido para un movimiento general del quark. Para obtener el encaje que corresponde al movimiento circular escribimos la trayectoria del quark ( $\bar{x}^\mu$ ) explícitamente:

$$\begin{aligned} \bar{x}^1(\tau) &= R_0 \cos \omega t_{ret}(\tau), \\ \bar{x}^2(\tau) &= R_0 \sin \omega t_{ret}(\tau), \\ \bar{x}^3(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $R_0$  es el radio del círculo en el que se mueve el quark y  $\omega$  es su velocidad angular. Podemos ver una representación de este movimiento en la Figura 4.3.

El movimiento circular del extremo de la cuerda provoca que la cuerda se enrolle sobre el centro del círculo que describe su extremo. La rotación de la cuerda crea radiación gravitacional que se propaga hasta la frontera de AdS. A partir del tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  podemos calcular la densidad de energía radiada por el quark en la frontera de AdS. Como se revisó en la sección 3.3 la dualidad campo operador nos relaciona este efecto gravitacional, que se ve en forma de un cambio en el tensor de energía momento, con el valor esperado del tensor de energía momento en la frontera de AdS. Un estudio detallado de las consecuencias de dichos efectos gravitacionales se puede encontrar en [28].

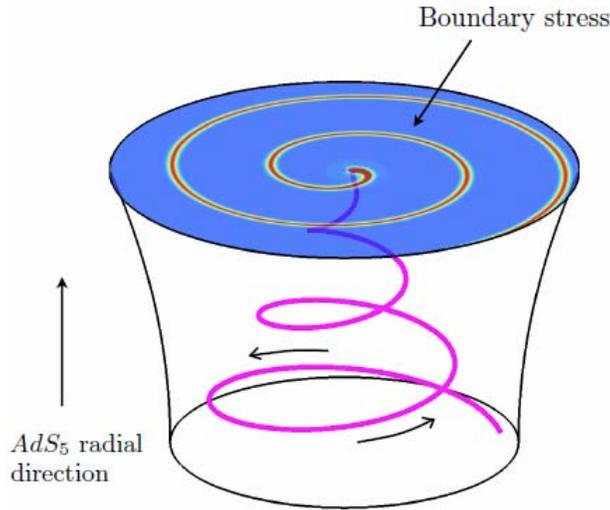


Figura 4.2: Esquema del movimiento de la cuerda debido al movimiento del quark donde se representan los efectos gravitacionales de la cuerda. Vemos que la cuerda va incrementando su radio conforme se extiende hacia el horizonte de AdS. La dirección  $z$  crece en la dirección opuesta a la radial. Imagen tomada de [28].

Sustituyendo esta trayectoria en (4.30), el encaje de la cuerda se vuelve:

$$\begin{aligned}
 t(t_{ret}, z) &= z\gamma + t_{ret}, \\
 x^1(t_{ret}, z) &= -z\gamma R_0\omega \sin \omega t_{ret} + R_0 \cos \omega t_{ret}, \\
 x^2(t_{ret}, z) &= z\gamma R_0\omega \cos \omega t_{ret} + R_0 \sin \omega t_{ret}, \\
 x^3(t_{ret}, z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para concluir esta sección, revisaremos un resultado interesante que surge al considerar la energía de una cuerda que cumple las condiciones de Mikhailov. Es decir, el extremo de la cuerda representa a un quark infinitamente masivo que se mueve en una trayectoria tipo tiempo.

Supongamos que la cuerda está parametrizada por  $t$  y  $z$ . La energía de la cuerda es simplemente la integral de la densidad de energía, es decir, del momento canónico  $\Pi_t^0$ :

$$E = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int_0 \frac{dz}{z^2} \frac{1 + (\partial_z \vec{x})^2}{\sqrt{1 - (\partial_t \vec{x})^2 + (\partial_z \vec{x})^2 - (\partial_z \vec{x})^2 (\partial_t \vec{x})^2 + (\partial_z \vec{x} \cdot \partial_z \vec{x})^2}}. \quad (4.32)$$

Cambiando de coordenadas a las de (4.30), obtenemos

$$E = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int \frac{\ddot{\vec{x}}^2 - \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}^2}{(1 - \dot{\vec{x}}^2)^3} dt_{ret} + E_q(\vec{v}(t)). \quad (4.33)$$

El primer término de la ecuación tiene una interpretación clara cuando revisamos el resultado que se obtiene en electrodinámica clásica. Ahí, encontramos nuevamente una relación casi idéntica para la energía radiada por una carga acelerada<sup>2</sup>.

El segundo término de la ecuación anterior surge de integrar una derivada total y está dado por

$$E_q(\vec{v}) = \lim_{z_m} \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \left( -\frac{1}{1 - \vec{v}^2} \frac{1}{z} \right) \Big|_0^{z_m} = \gamma m, \quad (4.34)$$

donde al pasar de la segunda a la tercera igualdad usamos  $z_m = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi m}$  y dejamos el término  $m$ , aunque se debe entender que este número es muy grande ya que para hacer los cálculos consideramos que las D7-branas donde vive el quark estaban fijas en la frontera.

Vemos de la ecuación anterior que el término  $E_q$  corresponde a la relación de dispersión invariante de Lorentz para el quark. Así, la ecuación (4.33) nos dice que la energía total de la cuerda está separada en dos.

Por una parte, el cuerpo de la cuerda tiene la información de la radiación del quark y se asocia con el campo gluónico producido por el mismo. Esta identificación sugiere asociar la pérdida de energía del quark debida a radiación con el primer término de la ecuación (4.33).

Por otro lado, el término  $E_q$  nos habla de la energía intrínseca del quark. Así, se reafirma la imagen del quark como el extremo de la cuerda y surge la interpretación del cuerpo de la cuerda como el campo gluónico.

Es interesante preguntarse que sucede en el caso de un quark masivo, cuando  $z_m = 0$ , donde se encuentra que el quark no se puede pensar como una partícula puntual sino que se tiene que tomar en cuenta una nube gluónica que rodea al quark. Este caso es tratado en detalle en [24].

---

<sup>2</sup>Esta relación se le conoce como la Fórmula de Liénard y está dada por

$$E = \frac{2}{3} e^2 \int dt \frac{\dot{\vec{v}}^2 - \vec{v} \times \dot{\vec{v}}^2}{1 - \vec{v}^2}.$$

Regresando al caso particular del movimiento circular, basta sustituir el encaje (4.31) en (4.33) y derivar con respecto al tiempo como lo hicimos en la sección anterior. Este cálculo también se puede hacer tomando en cuenta que calcular el flujo de energía a través de la cuerda equivale a calcular el momento canónico  $\Pi_0^1$ .

El flujo de energía que baja a la cuerda desde su extremo debe ser igual a la pérdida de energía por radiación del quark, por conservación de energía. Dicho flujo es entonces igual a la potencia  $P$  radiada por el quark:

$$-T_0\Pi_0^1 = T_0 \frac{\delta S_{NG}}{\delta(\partial_1 X^0)} = P = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} a^2. \quad (4.35)$$

Donde  $S_{NG}$  es la acción de Nambu-Goto.

Vale la pena notar que si hacemos el intercambio  $\bar{\lambda} \rightarrow e^2/3$  obtenemos la fórmula clásica para la potencia radiada de una partícula en movimiento circular que se obtiene en cálculos de electrodinámica para radiación de Larmor [29]. Nuevamente el contacto con el resultado clásico es muy importante ya que previamente no se tenía forma de calcular esta cantidad para una teoría fuertemente acoplada.

Para ver si existe efecto Unruh en este movimiento regresamos a la ecuación (4.24) donde notamos que si la 6-aceleración es positiva entonces hay un horizonte en la hoja de mundo que podemos interpretar como una interacción no trivial con el vacío. Como se mencionó anteriormente en el caso de AdS (Parche de Poncaré),  $A_6^2$  siempre es igual a  $A_4^2$  por lo que el horizonte siempre existe en la hoja de mundo y la temperatura de Hawking es igual a la de Unruh. Este resultado es completamente análogo al resultado en acoplamiento débil en el que se encuentra una interacción no trivial con el vacío para cualquier radio y frecuencia del movimiento circular.

Como se explicó anteriormente, esto no significa que la temperatura de la teoría de campo es  $T_{ws}$ , sólo que el horizonte de eventos en la hoja de mundo ocasiona que el extremo de la cuerda fluctúe alrededor de su trayectoria clásica. Estas fluctuaciones las asociamos en el caso débilmente acoplado con una interacción no trivial con el vacío y del mismo modo hacemos aquí esta identificación, asociando el quark con el extremo de la cuerda.

#### 4.4. Movimiento circular en $\mathbb{R} \times S^3$ .

Este es el último caso que estudiaremos y debido a que la correspondencia en AdS global plantea una equivalencia con una teoría de norma en el espacio acotado  $\mathbb{R} \times S^3$  se compararán los resultados con aquellos de Davies en [17]. En este artículo el tipo de interacción con el vacío del observador acelerado depende de la frecuencia angular del movimiento y también del tamaño del espacio acotado.

Para encontrar el encaje de la cuerda en AdS Global para un movimiento tipo tiempo general repetimos los pasos del caso anterior. Esta vez la región (4.17) queda descrita por los parámetros de AdS Global:

$$X^{-1} = \cos\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2}, \quad X^0 = \sin\left(\frac{t}{b}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{r}{b}\right)^2}, \quad X^a = \frac{r}{b} n^a. \quad (4.36)$$

La métrica de AdS Global queda en función de  $n^a, r$ , donde  $a = 1, 2, 3, 4$  y  $n^a$  son las coordenadas de una 3-esfera de radio  $b$ . El elemento de línea de AdS Global está dado por:

$$ds^2 = \frac{1}{b^2} \left[ f(r) dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega_3^2 \right],$$

con  $f(r) = 1 + (r/b)^2$  y  $d\Omega^3 = dn^a dn^a$  la métrica de la  $S^3$ . Ponemos el radio de la 3-esfera igual a uno para facilitar la notación,  $b = 1$ .

Escogemos nuevamente  $l^M(\tau)$  de modo que el encaje, que se obtiene de (4.20), describa el movimiento del quark (denotado por  $\bar{n}^a$ ) en la frontera de AdS global ( $r = 1$ ):

$$l^{-1} = \cos(t_{ret}(\tau)), \quad l^0 = \sin(t_{ret}(\tau)), \quad l^a = \hat{n}^a(\tau). \quad (4.37)$$

Imponiendo las condiciones de Mikhailov (4.18), (4.19) obtenemos

$$\sum_a (\hat{n}^a)^2 = 1, \quad \partial t_{ret}^2 - \sum_a (\partial_\tau \hat{n}^a(\tau))^2 = 1. \quad (4.38)$$

Si definimos

$$v^a = \partial_{t_{ret}} \hat{n}^a, \quad a^a = \partial_{t_{ret}} v^a, \quad (4.39)$$

entonces la segunda ecuación de (4.38) implica:

$$\partial_\tau t_{ret} = \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (4.40)$$

Así, el encaje en términos de la trayectoria del quark ( $\bar{n}^a$ ) es:

$$\begin{aligned} X^{-1}(t_{ret}, \sigma) &= -\gamma \sin t_{ret} + \sigma \cos t_{ret}, \\ X^0(t_{ret}, \sigma) &= \gamma \cos t_{ret} + \sigma \sin t_{ret}, \\ X^a(t_{ret}, \sigma) &= \gamma v^a + \sigma \bar{n}^a. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Igualando (4.41) y (4.36) despejamos los parámetros de AdS global y obtenemos

$$\begin{aligned} t(t_{ret}, \sigma) &= t_{ret} + \arctan\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right), \\ r(t_{ret}, \sigma) &= \sqrt{\sigma^2 + \gamma^2 v^2}, \\ n^a(t_{ret}, \sigma) &= \frac{\gamma v^a + \sigma \bar{n}^a}{r}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

De este encaje observamos que si hacemos  $\sigma = (-, +)$ , entonces la solución nos arroja que para cualquier tiempo fijo los extremos de la cuerda se encuentran en puntos antipodales de la esfera:

$$n^a(\tau, +) = -n^a(\tau, -) = \hat{n}^a(\tau).$$

Esto sucede siempre y cuando  $\lim_{\sigma \rightarrow \pm} \frac{r}{\sigma} = \pm 1$ . Estos puntos corresponden a los extremos de la cuerda que, por construcción, trazan la trayectoria de un par quark-antiquark en  $\mathbb{R} \times S^3$ .

Nuevamente podemos calcular la energía perdida por el quark a través de la energía que fluye desde el extremo hacia la cuerda  $\Pi_0^1$ . Esta cantidad la relacionamos en el parche de Poincaré con la pérdida de energía por la radiación emitida pero no tenemos una noción clara de lo que signifique radiación en un espacio acotado. Cuando el quark se mueve en  $\mathbb{R}^{1,3}$  la radiación del mismo se propaga hasta infinito. Sin embargo, en un espacio acotado esto no sería el caso ya que la radiación emitida podría regresar al quark en un tiempo finito.

Una forma de entender este problema es imaginar que se identifica la región que está infinitamente lejos del quark con un punto. Esto se hace cuando se parametriza la 2-esfera mediante la proyección estereográfica y podemos entender este punto al infinito como el lugar en donde la radiación del quark es absorbida. Esta pérdida de energía se entiende como una energía que libera el quark y luego es absorbida por el antiquark o viceversa y se puede calcular como la integral de la densidad Hamiltoniana (o el momento  $\Pi_t^0$ ) sobre toda la cuerda:

$$E(t) = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int_{-} \mathcal{H} d\sigma = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int_{-} \left[ \partial_t n^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t n^a)} + \partial_t r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t r)} - \mathcal{L} \right] d\sigma. \quad (4.43)$$

La densidad Lagrangiana de la acción de Nambu-Goto es el determinante de la métrica inducida en la hoja de mundo y está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left[ \dot{X}^2 X^2 - (\dot{X} \cdot X)^2 \right]^{1/2} \\ &= - \left[ (\partial_\sigma r)^2 - \frac{r^2}{1+r^2} (\partial_t n^a)^2 (\partial_\sigma r)^2 + r^2 (1+r^2) (\partial_\sigma n^a)^2 - r^4 (\partial_t n^a)^2 (\partial_\sigma n^b)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{1+r^2} (\partial_t r)^2 (\partial_\sigma n^a)^2 + r^4 (\partial_t n^a \partial_\sigma n^a)^2 + \frac{2r^2}{1+r^2} (\partial_t n^a \partial_\sigma n^a) (\partial_t r) (\partial_\sigma r) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo la forma explícita del encaje para un movimiento general dada por (4.42) obtenemos:

$$E(t) = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \int_{-} P_q dt_{ret} + E_q(\vec{v}(t)). \quad (4.44)$$

Vemos que, al igual que en el caso de movimiento circular en espacio-tiempo plano, esta expresión se divide en dos.

El primer término nos da la energía que fluye desde un extremo hacia el otro que es lo que entendemos como el análogo a la energía perdida por radiación en el caso de AdS. Este término está dado por:

$$P_q = \frac{a^2(1-v^2) + (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 - v^2(1-v^2)/b^2}{(1-v^2)^3}, \quad (4.45)$$

donde volvimos a considerar el radio de la 3-esfera,  $b$ , y la velocidad y aceleración están definidas según (4.39).

Cuando tomamos el límite  $b \rightarrow \infty$  lo que estamos haciendo es tomar el radio de la 3-esfera muy grande en comparación con el radio del movimiento del quark. En este límite el quark siente un espacio-tiempo plano y esperamos que la ecuación (4.45) tienda a la que se obtuvo de forma general para el movimiento plano, es decir, el integrando del primer término en la ecuación (4.33).

Recordando la identidad vectorial  $\vec{a} \times \vec{b}^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$  podemos ver fácilmente que estas dos expresiones coinciden en el llamado límite de descompactificación,  $b \rightarrow \infty$ .

El segundo término proviene de integrar una derivada total y se entiende como la energía intrínseca, análogo a la relación de dispersión que encontramos en (4.34), del par quark-antiquark:

$$E_q = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \gamma \sigma \Big|_{\sigma=-}^{\sigma=}. \quad (4.46)$$

Regresando al problema de detectar un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda notamos que en este caso la 6-aceleración del quark no va a ser la misma que su 4-aceleración en la 3-esfera. La 4-aceleración del quark en la 3-esfera está dada por:

$$A_4^2 = \frac{a^2(1-v^2) + (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 - v^4(1-v^2)/b^2}{(1-v^2)^3} \quad (4.47)$$

La relación entre las dos aceleraciones (cuando el quark se mueve en  $S^3$ ) está dada por

$$A_6^2 = -\partial_\tau^2 l^M \partial_\tau^2 l_M = A_4^2 - \frac{1+v^2}{b^2(1-v^2)}. \quad (4.48)$$

Esta ecuación es un caso particular de una fórmula general dada en [30] que relaciona la aceleración en un espacio-tiempo curvo con la aceleración de un espacio-tiempo plano más grande. En este caso  $A_6^2 = A_4^2 + K_{uu}^2$  para  $K_{uu}^2 = -K_{uu}^M K_{uu}^N \eta_{MN}$  con  $K_{uu}^N$  dado por

$$K_{uu}^N = U^\alpha U^\beta (\partial_\alpha \partial_\beta l^M - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma l^M).$$

Donde  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  son los símbolos de Christoffel del espacio-tiempo curvo, en nuestro caso la 3-esfera.

Como le estamos quitando un término estrictamente positivo a la 4-aceleración, la ecuación (4.48) implica que  $A_4^2 > A_6^2$ . El hecho de que la 6-aceleración deba ser positiva

para encontrar un horizonte en la hoja de mundo nos dice que existen movimientos donde la 4-aceleración del quark es positiva. Sin embargo, el segundo término de (4.48) puede hacer a la 6-aceleración negativa evitando que aparezca un horizonte en la hoja de mundo.

Comparando las ecuaciones (4.47), (4.45) y (4.48) vemos que se cumple la siguiente relación en AdS Global:

$$A_4^2 > P_q > A_6^2, \quad (4.49)$$

donde  $P_q$  está dado en la ecuación (4.45). En el límite de descompactificación,  $b \rightarrow \infty$ , estas tres cantidades coinciden.

Todos los resultados que obtuvimos anteriormente son para un movimiento general del quark,  $\bar{n}^a$ , en  $\mathbb{R} \times S^3$ . Pasamos ahora al caso concreto del movimiento circular. Para esto, sustituimos primero las coordenadas  $n^a$  de la 3-esfera por un conjunto de dos ángulos y una coordenada radial  $\theta, \phi, R$ :

$$\begin{aligned} n^1 &= \sqrt{1 - R^2}, \\ n^2 &= R \cos \theta, \\ n^3 &= R \sin \theta \cos \phi, \\ n^4 &= R \sin \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde  $R \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  y  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

El movimiento circular uniforme tiene rapidez constante, así que la posición del círculo en la 3-esfera tiene que estar relacionada con la magnitud de la 4-aceleración. En particular, el movimiento sobre un ecuador de la 3-esfera es equivalente al movimiento sobre una geodésica de  $\mathbb{R} \times S^3$ . Sabemos que un movimiento sobre una geodésica significa que no hay 4-aceleración. Por lo tanto, de acuerdo a la ecuación (4.48)  $A_6^2 \leq 0$  y según (4.24) no tendremos un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda.

Consideremos entonces el movimiento sobre un círculo no-máximo de  $S^3$ . Podemos parametrizar la trayectoria del quark con:

$$\bar{R}(\tau) = R_0, \quad \bar{\phi}(\tau) = \omega t_{ret}(\tau), \quad \bar{\theta}(\tau) = \frac{\pi}{2}, \quad (4.51)$$

donde  $R_0$  es el radio del círculo en el que se mueve el quark (si  $b = 1$  entonces el radio del círculo es  $R_0 b$ ). Una representación del movimiento en ambos lados de la correspondencia se puede ver en la Figura 4.4.

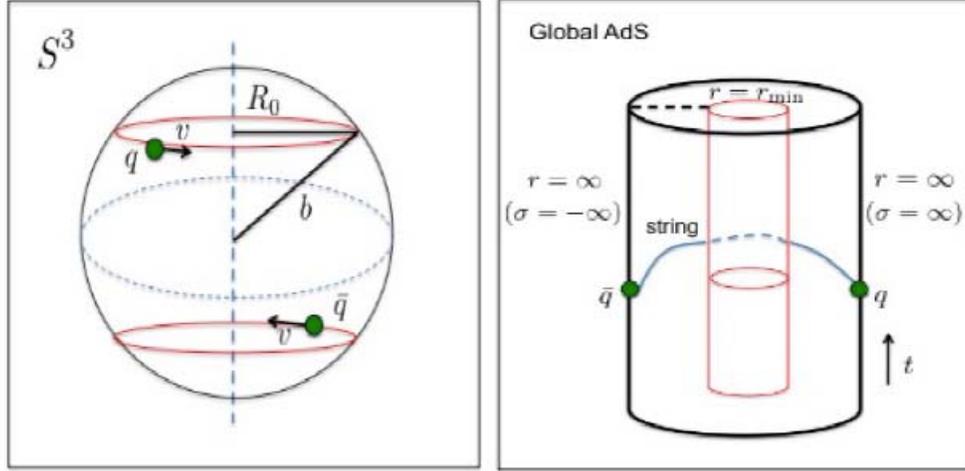


Figura 4.3: En la Figura de la izquierda se representa el movimiento del quark y antiquark sobre la 3-esfera, notamos que ambos se mueven en puntos antipodales de la misma. En la parte derecha se muestra la configuración dual al par quark-antiquark en AdS global, notamos que la cuerda nunca puede tomar un valor radial menor a  $r_{min}$ . Imagen tomada de [18]

Cambiamos las coordenadas de la solución general (4.42) por las coordenadas  $R, \theta, \phi$  mediante (4.50) y sustituimos la trayectoria circular (4.51) para obtener:

$$t(\tau, \sigma) = \gamma\tau + \arctan\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right), \quad (4.52)$$

$$r(\tau, \sigma) = \sqrt{\sigma^2 + \gamma^2\omega^2 R_0^2}, \quad (4.53)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (4.54)$$

$$\phi(\tau, \sigma) = \gamma\omega\tau + \arctan\left(\frac{\gamma\omega}{\sigma}\right), \quad (4.55)$$

$$R(\tau, \sigma) = R_0 \sqrt{\frac{\sigma^2 + \gamma^2\omega^2}{\sigma^2 + \gamma^2\omega^2 R_0^2}}. \quad (4.56)$$

Podemos dejar expresado el encaje sustituyendo  $t$  por  $\tau$ , y  $r$  por  $\sigma$ . Así, usamos las dos primeras ecuaciones de (4.53) para tener la solución en términos de coordenadas del espacio-tiempo y tener una mejor idea de la forma del encaje en AdS Global:

$$R(r) = R_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2\omega^2}{r^2} (1 - R_0^2)}, \quad (4.57)$$

$$\phi(t, r) = \omega t - \omega \arctan\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1 + r^2 - \gamma^2}}\right) + \arctan\left(\frac{\omega\gamma}{\sqrt{1 + r^2 - \gamma^2}}\right). \quad (4.58)$$

Vemos de la ecuación angular que el denominador  $\sqrt{1 + r^2 - \gamma^2} = \sqrt{r^2 - R_0^2\omega^2\gamma^2}$  está definido sólo para  $r \geq (r_{min}, \dots)$  donde  $r_{min} = R_0\omega\gamma$ . Esto significa que la cuerda

tiene sus dos extremos fijos en la frontera de Ads Global pero siempre rodea la región  $r \leq r_{min}$  que representamos como un cilindro en la Figura 4.4.

Dada la fórmula general para la pérdida de energía (4.45), podemos sustituir este encaje en particular y obtenemos  $P_q$  para el movimiento circular. Para esto, calculamos la norma de la velocidad y aceleración (4.39)

$$v^2 = R_0^2 \omega^2, \quad \vec{v} \cdot \vec{a} = 0, \quad a^2 = R_0^2 \omega^4. \quad (4.59)$$

Sustituyendo estos resultados en (4.45) obtenemos

$$P_q = \frac{a^2(1-v^2) - v^2(1-v^2)}{(1-v^2)^3} = \frac{a^2 - v^2}{(1-v^2)^2} = \gamma^4(R_0^2 \omega^4 - R_0^2 \omega^2) = \gamma^4 R_0^2 \omega^2 (\omega^2 - 1). \quad (4.60)$$

Sabemos que para encontrar cuándo aparece un horizonte en la hoja de mundo basta calcular la 6-aceleración  $A_6^2 = -\partial_\tau^2 l^M \partial_\tau^2 l_M$ , con  $l^M$  dado por (4.37) sustituyendo la trayectoria circular. La posición del horizonte en la hoja de mundo está en  $\sigma = A_6$ . En este caso está dada por:

$$A_6^2 = \gamma^4 (R_0^2 \omega^4 - 1). \quad (4.61)$$

Como vimos en la sección 4.2,  $A_6^2$  debe ser positivo para que exista un horizonte en la hoja de mundo. Cambiamos  $\sigma$  por  $r$  usando (4.53) para tener la posición del horizonte en términos de las coordenadas de Ads Global:

$$r_H = \sqrt{\gamma^4 R_0^2 \omega^2 (\omega^2 - 1) - 1}. \quad (4.62)$$

Debemos tener presente que la hoja de mundo de la cuerda no puede pasar cierta posición radial dada por

$$r_{min} = R_0 \omega \gamma. \quad (4.63)$$

Es decir, pueden existir frecuencias angulares para las que  $r_H$  quede por debajo de  $r_{min}$  y por lo tanto no veamos un horizonte en la hoja de mundo.

Para encontrar la frecuencia angular mínima con la que aparece un horizonte fijamos el radio del círculo en el que se mueve el quark ( $R_0$ ) y encontramos para que valor de la frecuencia angular aparece un horizonte. Es decir, vemos para qué valor de  $\omega$  la posición radial del horizonte de aceleración excede o es igual a  $r_{min}$ .

Sustituimos  $r_{min}$  de (4.63) en  $r_H$  de (4.62) y despejamos  $\omega$  para obtener:

$$\omega_c = \frac{1}{R_0}. \quad (4.64)$$

Recordemos que en acoplamiento débil el factor que decidía si existe una interacción no trivial con el vacío es si algún punto del espacio giraba con velocidad mayor a la de la luz. Las restricciones que tenemos para este movimiento son distintas ya que puede existir un horizonte en la hoja de mundo (interacción no trivial con el vacío

del quark) sin que la velocidad tangencial de algún observador sea mayor que la de la luz, explicaremos estos casos más a detalle a continuación.

En una 3-esfera el observador que se mueve con mayor velocidad tangencial es el que se mueve en uno de los ecuadores. No es de sorprender que la dirección de la transferencia de energía (el signo de  $P_q$ ) esté definida por la velocidad tangencial de este observador.

Reintroducimos el radio de la 3-esfera,  $b$ , y analizamos los tres casos en el que el comportamiento del par quark-antiquark es distinto. Escogemos dividir estos casos fijando el radio de la 3-esfera y cambiando la frecuencia angular con la que se mueve el quark aunque es equivalente hacerlo fijando la frecuencia y cambiando  $b$ . Ya con el radio de AdS Global, tenemos

$$P_q = (b^2\omega^2 - 1). \quad (4.65)$$

El primer caso está dado por:

$$0 < \omega b < 1. \quad (4.66)$$

En este caso no existe un horizonte en la hoja de mundo ya que  $R_0 < 1$  y  $\overline{R_0} < 1$   $1 < 1/\overline{R_0}$ , y esto implica que  $\omega < \omega_c$ .

Un observador que se mueve a la misma frecuencia angular que el quark en el ecuador sigue una trayectoria tipo tiempo. La cantidad que define la dirección de la pérdida de energía por “radiación” es  $P_q$  que en este caso es negativa. De la ecuación (4.65) vemos que

$$\omega b < 1 \quad \omega^2 b^2 < 1 \quad (\omega^2 b^2 - 1) < 0 \quad P_q < 0.$$

Esto nos dice que el quark recibe energía del antiquark y necesitamos que la fuerza que se ejerce para mantener al quark en movimiento acelerado se oponga a su movimiento.

En el caso donde  $\omega b = 1$ ,  $P_q = 0$  y no hay intercambio de energía. Es decir, no se necesita fuerza externa para mantener al quark y antiquark en su movimiento acelerado.

El segundo caso está dado por:

$$1 < \omega b < \frac{1}{\overline{R_0}} = \omega_c. \quad (4.67)$$

En este caso todavía no hay un horizonte en la hoja de mundo pero  $P_q > 0$  porque

$$\omega b > 1 \quad \omega^2 b^2 > 1 \quad (\omega^2 b^2 - 1) > 0. \quad P_q > 0$$

Es decir, el quark pierde energía hacia el antiquark y se le tiene que ejercer una fuerza en la dirección de movimiento al quark para mantenerlo en movimiento circular uniforme.

El observador que se mueve con la misma frecuencia angular en el ecuador se mueve más rápido que la luz  $\omega b > 1$ . Este resultado difiere del acoplamiento débil donde esta es la condición para que exista una interacción no trivial con el vacío.

El último caso está dado por:

$$\frac{1}{R_0} < \omega b < \frac{1}{R_0}. \quad (4.68)$$

Aparece un horizonte de aceleración en la hoja de mundo lo que señala una interacción no trivial con el vacío cuántico.  $P_q > 0$  por lo que el quark emite radiación que absorbe el antiquark.

Más allá de la diferencia en la cantidad que marca el límite en el comportamiento los resultados para acoplamiento fuerte son análogos a los que se encuentran para acoplamiento débil en el sentido de que los diferentes casos están divididos de acuerdo al valor de la frecuencia angular con que se mueve el quark.

Para interpretar la diferencia entre los límites que definen el movimiento hace falta tomar en consideración el tamaño finito del espacio y cómo se compara este con el tamaño del pulso de radiación emitido por el quark. Si tomamos el límite de descompactificación donde  $R_0 \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow \infty$ , pero  $R_0 b$  se mantiene constante, vemos que sólo existe el último caso. El primer caso no lo tomamos en cuenta porque si dividimos (4.66) entre  $b$  y dejamos que  $b \rightarrow \infty$ , entonces obtenemos  $\omega = 0$ .

El segundo caso tampoco lo consideramos porque al dividir entre  $b$  la ecuación (4.67) y tomar los límites de descompactificación, obtenemos

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R_0 \rightarrow 0} \frac{1}{b} < \omega < \lim_{b \rightarrow \infty} \lim_{R_0 \rightarrow 0} \frac{1}{b} \frac{1}{R_0 b} - \omega = 0 \quad (4.69)$$

El tercer término de la desigualdad tiende a cero porque el límite que estamos tomando deja al producto  $R_0 b$  constante.

Así, sólo obtenemos el último caso en el límite de descompactificación. Esto era de esperarse ya que el movimiento circular en espacio-tiempo plano siempre presenta un horizonte en la hoja de mundo.

Se puede mostrar [28] que la escala de longitud que controla el tamaño del pulso de la radiación que emite el quark en este movimiento circular está dado por  $\gamma^{-3} a^{-1}$ . Cuando este tamaño es comparable con el tamaño de la 3-esfera, es decir  $\gamma^{-3} a^{-1} \approx b$ , entonces la radiación no se puede entender más como un proceso cuántico en el que un gluón es emitido por el quark y absorbido por el antiquark. En este límite el comportamiento estocástico del quark deja de ocurrir y esto ocurre precisamente cuando  $\omega b \approx \frac{1}{R_0}$  que define la frecuencia crítica a partir de la cual aparece un horizonte en la hoja de mundo.

Para concluir esta sección calculamos la pérdida de energía por radiación para este movimiento usando el hecho de que  $\Pi_\phi^\sigma$  es el flujo de momento desde el extremo hacia la cuerda. Para que este análisis sea consistente, el resultado debe ser igual al de la ecuación (4.60).

Por conservación de energía, el momento canónico es igual a la fuerza externa ejercida sobre el quark en esa dirección y para obtener la potencia radiada basta multiplicar la fuerza por la velocidad angular:

$$\omega \mathcal{F}_\phi = \omega \left( \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \Pi_\phi^\sigma \Big|_{\sigma=} \right) = \frac{\bar{\lambda}}{2\pi} \gamma^4 R_0^2 \omega^2 (\omega^2 - 1), \quad (4.70)$$

que efectivamente coincide con (4.60) si dividimos entre  $\frac{\bar{\lambda}}{2\pi}$ .

#### 4.4.1. Aceleración uniforme

Como se mencionó a lo largo de este capítulo, existe una equivalencia entre la interacción no trivial con el vacío de un observador acelerado y la existencia de un horizonte de eventos en la hoja de mundo de la cuerda a estudiar. Sin embargo, cuando hicimos los cálculos que relacionaban la aceleración y el horizonte de eventos en la hoja de mundo (4.24) notamos que la temperatura de Hawking para distintos tipos de movimiento era la misma, siempre y cuando el módulo de su aceleración fuera igual. Este no es el caso cuando la teoría está débilmente acoplada ya que como mencionamos en el capítulo 2 los diferentes tipos de movimiento dan lugar a una interacción con el vacío distinta. En particular, las fluctuaciones del quark por encima de la trayectoria clásica no significan que este se encuentre inmerso en un baño térmico. Así, concluimos este capítulo con un análisis más detallado de las diferencias que ocurren para movimientos que tienen la misma aceleración en módulo pero difieren en derivadas de mayor orden.

Para esto, debemos analizar cuál es la temperatura local que siente un punto en la hoja de mundo. Esta temperatura,  $\hat{T}_{ws}$ , depende de la posición del punto en la hoja de mundo que estemos considerando y en general está dada por [18]:

$$\hat{T}_{ws}(\sigma) = \frac{T_{ws}}{g_{\hat{\tau}\hat{\tau}}} = \frac{T_{ws}}{\sqrt{\sigma^2 - A_6^2}}. \quad (4.71)$$

Cuando consideramos un movimiento circular uniforme y un movimiento rectilíneo uniforme notamos el módulo de la velocidad es el mismo; la diferencia se encuentra en que la aceleración para el movimiento circular no es cero. Siguiendo este razonamiento, todos los movimientos que compartan el valor del módulo de su aceleración se pueden distinguir entre sí tomando en cuenta derivadas de mayor orden con respecto al tiempo.

Dado esto, definimos la sobreaceleración relativista de acuerdo a [31]:

$$\Sigma^\mu = \frac{dA^\mu}{d\tau} + (A^\mu A_\nu) U^\mu. \quad (4.72)$$

Ya habiendo definido la cantidad que distingue entre diferentes tipos de movimiento con aceleración propia constante podemos calcular la temperatura de cada pedazo de

la cuerda si tomamos en cuenta cada pedazo (a  $\sigma$  fijo) como si fuera una partícula puntual. Siguiendo el análisis que hicimos en la sección anterior falta calcular el tiempo propio de este pedazo de cuerda  $\hat{\tau}$  en función del tiempo propio del quark  $\tau$ :

$$\hat{\tau}(\sigma) = \tau \sqrt{\sigma^2 - A_6^2}.$$

Si definimos la norma de la sobreaceleración del quark en el espacio plano  $\mathbb{R}^{2,6}$  como:

$$-\Sigma^M \Sigma_M = \zeta^2,$$

entonces si suponemos que  $A_6^2, \zeta^2$  son constantes, podemos expresar la 6-aceleración del pedazo de cuerda en función sólo de cantidades asociadas al movimiento del extremo de la cuerda:

$$\hat{A}^2(\sigma) = \frac{A_6^2}{\sigma^2 - A_6^2} + \frac{\zeta^2}{(\sigma - A_6^2)^2}.$$

Esta aceleración sugiere asociarle una “temperatura de Unruh” al pedazo de cuerda debido a su aceleración. Dicha temperatura coincide con (4.71) sólo cuando  $\zeta^2 = 0$ , es decir, cuando la aceleración es uniforme.

La coincidencia de estas temperaturas sugiere que la cuerda sólo está en un baño térmico si estas cantidades coinciden. Así, la simplificación que parecía ocurrir al considerar el acoplamiento fuerte se debe a que no se tomó en cuenta la temperatura del resto de la cuerda dual al quark.

De la misma forma que en acoplamiento débil se dividen los casos para diferentes tipos de movimiento y se distingue que aunque el detector (quark) presente fluctuaciones alrededor de su trayectoria clásica, esto no significa que este inmerso en un baño térmico.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se estudió de qué forma percibe el vacío de una teoría cuántica de campos un observador que se mueve con aceleración propia constante.

En el espacio-tiempo de Minkowski las teorías cuánticas de campos son invariantes bajo transformaciones del grupo de Poincaré. Esto significa que los estados de partícula que detecta un observador inercial son idénticos a los que detecta un observador inercial distinto. Sin embargo, no es obvio que esto siga siendo cierto cuando el movimiento de un observador es acelerado.

Este problema ha sido estudiado extensamente cuando la teoría de campos está débilmente acoplada y el caso más sencillo, el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, da lugar a un fenómeno llamado el efecto Unruh [3]. La principal característica de este fenómeno es que el estado vacío de la teoría cambia cuando se percibe desde el punto de vista del observador acelerado. Más aún, el observador acelerado detecta un estado con partículas que forman un medio térmico. El efecto Unruh se deduce usando herramientas de teoría de campos que son válidas en el régimen débilmente acoplado. Sin embargo, el caso cuando el acoplamiento es fuerte es muy difícil de estudiar por lo que no se tienen resultados teóricos en este límite.

Una de las pocas herramientas que tenemos para estudiar teorías de campos fuertemente acopladas es la correspondencia holográfica [14], misma que establece una equivalencia entre una teoría de campos y una teoría de supercuerdas tipo IIB. El caso mejor entendido de esta correspondencia establece que una teoría de Súper Yang-Mills (SYM)  $SU(N)$  con  $\mathcal{N} = 4$  es equivalente a una teoría de supercuerdas tipo IIB en el espacio tiempo 10-dimensional  $AdS_5 \times S^5$ .

En este trabajo estudiamos el efecto Unruh en Súper Yang-Mills  $SU(N)$  con  $\mathcal{N} = 4$  cuando la trayectoria del observador acelerado es recta y circular en espacio-tiempo plano 4-dimensional. Además, estudiamos el efecto Unruh cuando el movimiento sucede sobre un círculo no máximo del espacio-tiempo 4-dimensional  $\mathbb{R} \times S^3$ . El caso fuertemente acoplado fue estudiado usando la correspondencia holográfica como he-

ramienta que permite trasladar el problema de una teoría de norma fuertemente acoplada a una teoría de supergravedad en 10-dimensiones. Todos los resultados que se encuentran en esta tesis se reprodujeron de los artículos [27], [28] y [18].

Debido a que el caso débilmente acoplado presenta las ideas del efecto Unruh, en este trabajo comenzamos describiendo los conceptos básicos de teoría cuántica de campos que permiten entender el efecto Unruh. Dados estos conceptos, en el capítulo 2, abordamos el problema de describir como cambia una teoría cuántica de campos desde la perspectiva de un observador en un movimiento rectilíneo con aceleración propia constante. Este estudio lo realizamos utilizando el campo escalar libre ya que es un ejemplo sencillo que muestra las características del efecto Unruh.

En este capítulo, encontramos que el vacío cuántico de la teoría del campo escalar libre corresponde a un medio térmico desde la perspectiva de un observador acelerado. La forma en la que esta temperatura se relaciona con la aceleración propia del observador está dada por:  $T_{Unruh} = A/2\pi$ , donde  $A$  es la aceleración propia del observador.

Esta forma de entender la interacción no trivial con el vacío cuántico no es única ya que la métrica que percibe el observador acelerado no es la métrica plana sino la métrica de Rindler. Esta última presenta un horizonte de aceleración definido por las trayectorias nulas:  $x = t, x = -t$ . Este resultado nos lleva a considerar la temperatura de Hawking asociada a este horizonte de aceleración. Calculando dicha temperatura mostramos que coincide con la temperatura de Unruh obtenida comparando la teoría de campos desde la perspectiva del observador inercial y el acelerado. La forma en la que mostramos que las temperaturas coinciden es tomando en cuenta la condición KMS que señala cuando un valor de expectación en una teoría cuántica de campos corresponde a un estado térmico.

El análisis sobre el movimiento rectilíneo sugiere investigar otras trayectorias en busca de una relación más general entre la aceleración propia y la temperatura que percibe el observador acelerado. Siguiendo este razonamiento, el siguiente caso que estudiamos es el movimiento circular uniforme. Dicho movimiento presenta dificultades comparado con el rectilíneo, ya que el cambio de coordenadas que deja al observador acelerado estático no permite definir un vector de Killing tipo tiempo global. Esta restricción nos impide definir una teoría cuántica de campos ya que existen puntos del espacio-tiempo que al girar con la misma velocidad angular del observador acelerado se mueven más rápido que la luz.

Es en este tipo de problemas donde es conveniente usar detectores teóricos con dos niveles de energía acoplados con el campo escalar. Estos detectores son conocidos como detectores de Unruh-DeWitt y su razón de excitación nos permite distinguir si el observador acelerado tiene una interacción no trivial con el vacío. La trayectoria de este detector es afectada por su interacción no trivial con el vacío.

Por último, revisamos el caso en el que el movimiento circular sucede sobre un espacio-tiempo acotado. Así, el problema de definir un vector de Killing tipo tiempo global

depende de la frecuencia de giro del observador. Esto se debe a que en este caso no es necesariamente cierto que algunos puntos se muevan más rápido que la luz.

Concluido el estudio para teorías débilmente acopladas nos enfocamos en el problema de acoplamiento fuerte. Este límite de una teoría cuántica de campos corresponde a considerar interacciones fuertes entre las partículas y ha sido estudiado muy poco. Esto se debe a que las herramientas tradicionales de teoría cuántica de campos se basan en expandir amplitudes de dispersión en series de potencias de la constante de acoplamiento y esto sólo es posible si dicha constante es mucho menor a uno, es decir, si las interacciones entre partículas son débiles.

La correspondencia holográfica nos ha otorgado una ventana hacia este límite así que la información que podemos obtener de esta dualidad es muy valiosa. Dado que esta es la herramienta que usamos para estudiar el efecto Unruh en el régimen fuertemente acoplado, en el capítulo 3 presentamos los temas que nos llevan a una deducción de la correspondencia holográfica.

En este capítulo también mencionamos las entradas del diccionario de la correspondencia que nos permiten estudiar el efecto Unruh en la teoría de norma de Súper Yang-Mills  $SU(N)$  con  $\mathcal{N} = 4$  cuando el número de colores es muy grande. Entre estas entradas mencionamos la forma de agregar grados de libertad en la representación fundamental (quarks) en la teoría de norma. Para ello, necesitamos a agregar una pila de D7-branas orientadas de una manera particular a la teoría de supercuerdas. Estas D7-branas se extienden desde la frontera de AdS hasta una posición radial que fija la masa de los quarks en la teoría de norma. Otra entrada del diccionario de la correspondencia que es útil para este trabajo es la forma de considerar una temperatura diferente de cero en la teoría de SYM. Esto se hace agregando un agujero negro a la métrica de AdS y relacionando la temperatura de Hawking de dicho agujero negro con la temperatura en la teoría de norma.

Presentados los conceptos teóricos de la correspondencia holográfica, el capítulo 4 trata el problema concreto de cómo percibe un observador en movimiento acelerado el vacío cuántico de la teoría de norma de SYM  $SU(N)$  con  $\mathcal{N} = 4$  cuando el acoplamiento es fuerte.

De manera análoga al caso débilmente acoplado, en acoplamiento fuerte un quark que describe la trayectoria de interés funciona como un detector de una interacción no trivial con el vacío ya que dicho quark responde a las fluctuaciones del vacío cuántico describiendo un movimiento estocástico alrededor de su trayectoria clásica [25]. En este caso, el quark en la teoría de norma es dual a una cuerda que se extiende radialmente desde la posición de las D7-branas hasta el horizonte de AdS. El movimiento de dicho quark se puede identificar con el extremo de la cuerda mientras que el cuerpo de la cuerda se identifica con el campo gluónico emitido por el mismo.

El estudio de la respuesta de la dinámica de una cuerda a la presencia de un horizonte de eventos en su hoja de mundo muestra que el extremo de la misma realiza

movimientos aleatorios debidos a las excitaciones térmicas que se propagan por la cuerda. Las excitaciones del extremo de la cuerda dual al quark sugieren identificar un horizonte en la hoja de mundo con una interacción no trivial con el vacío cuántico.

Con estas entradas del diccionario de la correspondencia, comenzamos el capítulo 4 estudiando el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un quark con masa finita que se mueve en la teoría de campos de SYM. Este estudio implica resolver las ecuaciones de movimiento provenientes de la acción de Nambu-Goto sujetas a las condiciones de frontera que imponen las D7-branas y el movimiento acelerado del extremo de la cuerda.

El análisis de este movimiento permite identificar el horizonte de eventos en la hoja de mundo mediante un cambio de coordenadas en el que la cuerda se queda estática. Dicho horizonte de eventos tiene una temperatura de Hawking asociada que corresponde exactamente con la temperatura de Unruh que se encontró en el caso débilmente acoplado.

Continuando con el estudio de la dinámica de la cuerda, encontramos que la potencia radiada por el quark arroja un resultado muy parecido al que se obtiene en electromagnetismo clásico para una carga en movimiento acelerado. Seguimos este capítulo de la misma forma que en el caso de acoplamiento débil estudiando el movimiento circular uniforme. El análisis de este movimiento se simplifica considerablemente cuando tomamos en cuenta una solución debida a Mikhailov [21] que nos dice la forma explícita de la cuerda si el movimiento de su extremo sucede en la frontera de AdS. Esta restricción se hace considerando que la cuerda vive en un espacio más grande que  $\text{AdS}_5, \mathbb{R}^{2,4}$ . Sin embargo, la solución de las ecuaciones de movimiento son válidas cuando la cuerda está en AdS. El hecho de que el extremo de la cuerda esté en la frontera de AdS equivale a pedir que las D7-branas no tengan extensión radial. Esto se traduce en introducir quarks infinitamente masivos a la teoría de campos.

Usamos la solución de Mikhailov para obtener la posición del horizonte en la hoja de mundo y encontramos que este horizonte existe sólo si la 6-aceleración del quark, en el espacio que cubre a AdS:  $\mathbb{R}^{2,4}$ , es positiva. De ser así, la posición del horizonte en la hoja de mundo arroja una temperatura de Hawking dada por:  $T_{ws} = A_6/2\pi$ . Esta temperatura coincide con la de Unruh para movimientos acelerados en espacio-tiempo plano ya que la 6-aceleración siempre es igual a la 4-aceleración. Dado esto, el análisis del movimiento circular en espacio-tiempo plano muestra una interacción no trivial con el vacío de la misma forma que en el caso débilmente acoplado.

Nuevamente realizamos el cálculo de la potencia de radiación del quark estudiando la densidad de energía de la hoja de mundo. Encontramos que el resultado coincide con la fórmula clásica de Liénard para una carga acelerada. La única diferencia entre los dos resultados es que en electromagnetismo aparece un factor de  $e^2/3$ , mientras que en acoplamiento fuerte obtenemos un factor de  $\sqrt{\lambda}$ . Donde  $\lambda$  es la constante de acoplamiento de 't Hooft.

Finalmente, buscando hacer un paralelo con los resultados de Davies *et al* [17], estudiamos el movimiento de un par quark-antiquark infinitamente masivo en el espacio-tiempo acotado  $\mathbb{R} \times S^3$ .

En este caso la teoría de SYM es dual a una teoría de supercuerdas en la extensión geodésicamente completa de AdS, AdS global. En AdS global la 6-aceleración es diferente a la 4-aceleración por lo que existe la posibilidad de que el movimiento no genere un horizonte en la hoja de mundo de la cuerda.

Escribiendo explícitamente la trayectoria y la parametrización de AdS global, encontramos que la interacción no trivial con el vacío (es decir, la presencia de un horizonte en la hoja de mundo) depende de la frecuencia de giro justamente como en los resultados de Davies para acoplamiento débil. Este análisis es sumamente interesante ya que encontramos que la pérdida de energía por radiación del quark no se expande hacia infinito debido a que el espacio es acotado. En vez de que la energía se disipe hacia infinito, la energía que pierde el quark es absorbida por el antiquark para ciertas frecuencias, pero también existe un rango de frecuencias donde el quark absorbe la radiación del antiquark.

El último capítulo concluye mostrando la diferencia entre dos movimientos con la misma 6-aceleración. Haciendo un análisis del cuerpo de la cuerda, mostramos que la diferencia entre distintos movimientos con la misma 6-aceleración está determinada por el hecho de que la cuerda entera esté en un baño térmico. Esto se traduce en la teoría de norma en el hecho de que sólo algunas interacciones no triviales con el vacío provienen de efectos térmicos.

El trabajo de investigación sobre el efecto Unruh en teorías fuertemente acopladas tiene todavía muchos aspectos por estudiar.

En particular, en este trabajo se consideró el movimiento de un quark infinitamente masivo. Aun embargo, la generalización de las ideas aquí expuestas a quarks con masa finita es interesante ya que el quark no se puede considerar como una partícula puntual y en este caso las D7-branas se extienden desde la frontera hasta una posición radial que determina la masa de los quarks.

Otro tema que es interesante estudiar es el del perfil de radiación del quark cuando el movimiento se da en un espacio-tiempo acotado. El estudio de este perfil está relacionado con los casos que divide el valor de la frecuencia angular y que determinan si existe o no un horizonte de eventos en la hoja de mundo de la cuerda.

Desde el punto de vista experimental la teoría de Super Yang-Mills sirve como un modelo para aproximar a la cromodinámica cuántica en el límite donde la temperatura de la teoría es suficientemente grande para que no exista confinamiento. En este caso tenemos un plasma de quark y gluones y la correspondencia ya ha realizado predicciones que se aproximan a resultados experimentales de QCD. Dentro de este contexto, el problema que se trató en este trabajo se puede intentar generalizar a casos donde la temperatura es diferente de cero. Para estos casos se introduce un

agujero negro en AdS y no es claro que las herramientas que utilizamos sigan siendo válidas por lo cual es un tema interesante a estudiar.

# Bibliografía

- [1] Max Abraham, Prinzipien der Dynamik des Elektrons, *Physikalische Zeitschrift* 4 (1b), S.
- [2] H. A. Lorentz, *Enzykt. Math. Wiss.* V, 1, 188 (1903)
- [3] W. G. Unruh, “Notes on black hole evaporation,” *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- [4] “An Introduction to Quantum Field Theory”, Peskin, M.E. and Schroeder, D.V., *Advanced book classics*, 1995, Addison-Wesley Publishing Company
- [5] A. Karch and E. Katz, “Adding flavor to AdS / CFT,” *JHEP* **0206** (2002) 043 [hep-th/0205236].
- [6] J. Cardy, “Conformal Field Theory and Statistical Mechanics,” arXiv:0807.3472 [cond-mat.stat-mech].
- [7] G. 't Hooft, “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions,” *Nucl. Phys. B* **72** (1974) 461.
- [8] S. A. Fulling, “Nonuniqueness of canonical field quantization in Riemannian space-time,” *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2850.
- [9] L. C. B. Crispino, A. Higuchi and G. E. A. Matsas, “The Unruh effect and its applications,” *Rev. Mod. Phys.* **80** (2008) 787 [arXiv:0710.5373 [gr-qc]].
- [10] “A First Course in String Theory”, Zwiebach, B., *A First Course in String Theory*, 2004 Cambridge University Press
- [11] J. R. Letaw and J. D. Pfautsch, “The Quantized Scalar Field in Rotating Coordinates,” *Phys. Rev. D* **22** (1980) 1345.
- [12] S. W. Hawking and W. Israel, “General Relativity : An Einstein Centenary Survey,”
- [13] S. W. Hawking “Path Integral Derivation of Black Hole Radiance,” *Phys. Rev. D* **13**, 2188 (1976).
- [14] J. M. Maldacena, “The large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].

- [15] J. J. Bisognano and E. H. Wichmann, “On the Duality Condition for a Hermitian Scalar Field,” *J. Math. Phys.* **16** (1975) 985.
- [16] M. Socolovsky, “Rindler Space and Unruh Effect,” arXiv:1304.2833 [gr-qc].
- [17] P. C. W. Davies, T. Dray and C. A. Manogue, “The Rotating quantum vacuum,” *Phys. Rev. D* **53** (1996) 4382 [gr-qc/9601034].
- [18] M. Chernicoff and A. Paredes, “Accelerated detectors and worldsheet horizons in AdS/CFT,” *JHEP* **1103**, 063 (2011) doi:10.1007/JHEP03(2011)063 [arXiv:1011.4206 [hep-th]].
- [19] S. Deser and O. Levin, “Accelerated detectors and temperature in (anti)-de Sitter spaces,” *Class. Quant. Grav.* **14** (1997) L163 [gr-qc/9706018].
- [20] J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal and U. A. Wiedemann, “Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions,” arXiv:1101.0618 [hep-th].
- [21] A. Mikhailov, “Nonlinear waves in AdS / CFT correspondence,” hep-th/0305196.
- [22] A. E. Lawrence and E. J. Martinec, “Black hole evaporation along macroscopic strings,” *Phys. Rev. D* **50** (1994) 2680 [hep-th/9312127].
- [23] J. de Boer, V. E. Hubeny, M. Rangamani and M. Shigemori, “Brownian motion in AdS/CFT,” *JHEP* **0907** (2009) 094 [arXiv:0812.5112 [hep-th]].
- [24] M. Chernicoff and A. Guijosa, “Acceleration, Energy Loss and Screening in Strongly-Coupled Gauge Theories,” *JHEP* **0806** (2008) 005 [arXiv:0803.3070 [hep-th]].
- [25] E. Caceres, M. Chernicoff, A. Guijosa and J. F. Pedraza, “Quantum Fluctuations and the Unruh Effect in Strongly-Coupled Conformal Field Theories,” *JHEP* **1006**, 078 (2010) doi:10.1007/JHEP06(2010)078 [arXiv:1003.5332 [hep-th]].
- [26] C. P. Herzog, A. Karch, P. Kovtun, C. Kozcaz and L. G. Yaffe, “Energy loss of a heavy quark moving through N=4 supersymmetric Yang-Mills plasma,” *JHEP* **0607** (2006) 013 [hep-th/0605158].
- [27] B. W. Xiao, “On the exact solution of the accelerating string in AdS(5) space,” *Phys. Lett. B* **665**, 173 (2008) doi:10.1016/j.physletb.2008.06.017 [arXiv:0804.1343 [hep-th]].
- [28] C. Athanasiou, P. M. Chesler, H. Liu, D. Nickel and K. Rajagopal, “Synchrotron radiation in strongly coupled conformal field theories,” *Phys. Rev. D* **81** (2010) 126001 [*Phys. Rev. D* **84** (2011) 069901] [arXiv:1001.3880 [hep-th]].
- [29] Jackson, J.D., “Classical electrodynamics,” 1975, Wiley
- [30] J. G. Russo and P. K. Townsend, “Accelerating Branes and Brane Temperature,” *Class. Quant. Grav.* **25**, 175017 (2008) [arXiv:0805.3488 [hep-th]].

- [31] J. G. Russo and P. K. Townsend, “Relativistic Kinematics and Stationary Motions,” *J. Phys. A* **42** (2009) 445402 [arXiv:0902.4243 [hep-th]].