



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

DINÁMICA DE MATERIA CARGADA EN RELATIVIDAD GENERAL

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

JOSÉ MANUEL TORRES CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. MIGUEL ALCUBIERRE MOYA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

COMITÉ TUTORAL:

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DR. TONATIUH MATOS CHASSIN
CINVESTAV

MÉXICO, D.F. ENERO, 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mis padres.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a todas las personas que han hecho posible que me encuentre en este punto de mi carrera por todo su apoyo a lo largo de este camino.

Primeramente a mis padres quienes siempre han estado acompañándome y son en gran parte responsables de la persona en quien me he convertido y me han apoyado en todos mis planes confiando en mi capacidad para llevarlos a cabo. También agradezco a mi hermano por todo lo que hemos vivido y por motivarme siempre a dar lo mejor y no conformarme con menos.

También un merecido reconocimiento merecen mis tutores Miguel Alcubierre y Darío Núñez por ayudarme a definir el rumbo de mi carrera a inicios de la licenciatura y por encauzarme en los años siguientes. Agradezco a los miembros del jurado, Francisco Guzmán, Luis Ureña, Alberto Diez y Juan Carlos Degollado, por revisar este trabajo y por sus valiosos comentarios. Igualmente agradezco a la gente con que he colaborado y con quienes actualmente colaboro por sus valiosas discusiones y puntos de vista que han enriquecido este trabajo.

Y en otro apartado a la gente que se ha mantenido cercana, y también quienes han aparecido reciente y fugazmente y han enriquecido mi vida. A mis amigos de toda la vida: Santiago, Boyzo, Anibal y Daniel que siempre me han brindado su apoyo y saben que cuentan con el mío. También aquellos con los compartí la licenciatura y el posgrado: Pati, Lorena, Juan Manuel, Florencia, Ángel, Mariana, David, Mario, Michelle y algunos que al momento de redactar estas líneas omito porque la mente a veces no es tan ágil como uno quisiera. No puedo evitar mencionar al Coro de la Facultad de Ciencias que también fue

parte de mi vida paralelamente en esta etapa y siempre llevaré conmigo. Gracias Eduardo por ser un buen amigo y permitirme hacer música contigo.

Finalmente, agradezco los distintos apoyos económicos durante este período. A CONACyT por la beca durante mis estudios, a la División de Gravitación y Física Matemática de la Sociedad Mexicana de Física por los apoyos para participar en distintos Talleres y Escuelas en los que he presentado los avances de los trabajos aquí contenidos, a los Amigos Mexicanos de la Universidad Hebrea de Jerusalén que hicieron posible que participara en la 32nd Winter School in Theoretical Physics y a la UNAM por apoyos a través del proyecto PAPIIT IN103514, "Sobre los diferentes modelos de materia oscura y sus consecuencias observacionales".

Resumen

Este trabajo abarca el estudio de sistemas autogravitantes bajo el marco de la relatividad numérica en configuraciones particulares que presentan simetría esférica o rotacional, ahondando también en el formalismo matemático empleado. Uno de los objetivos principales de esta tesis fue el de la inclusión de campos electromagnéticos en los escenarios estudiados.

En el caso en simetría esférica se muestran los desarrollos de tres trabajos que han sido publicados recientemente. El primero de ellos [13] trata acerca de la implementación de condiciones de un conjunto de condiciones de frontera basadas en la estructura hiperbólica del sistema de ecuaciones de evolución, las cuales están adaptadas a las constricciones en el sentido de que minimizan las reflexiones espurias y las violaciones residuales a las constricciones convergen a cero consistentemente al aumentar la resolución en las simulaciones. El segundo de trabajo [191] consiste en el estudio del colapso de configuraciones de campo escalar acoplado al campo electromagnético y las posibles implicaciones de este fenómeno a la conjetura de censura cósmica. Para las dos familias de datos iniciales empleadas se encontró que la configuración final presenta un horizonte aparente y la geometría tiende a la de un agujero negro estacionario con carga. Se observa que esto ocurre dado que la interacción electromagnética entre las dos componentes del campo escalar complejo tiende a neutralizar la configuración en una escala de tiempo menor que el tiempo de colapso. Esta sección finaliza con un estudio del colapso de un campo escalar real en un universo en expansión [192]. Se observa que para configuraciones suficientemente extensas el contraste de densidad crece de manera casi indistinguible a como lo hace la materia oscura fría modelada como un fluido perfecto sin presión.

Las diferencias ocurren una vez que el colapso entra en un régimen de campo fuerte en el que se observa que el campo escalar tarda más tiempo en llegar a un colapso total. Estos resultados se alinean con la hipótesis de que el campo escalar puede constituir un tipo de materia oscura viable que da formación a la estructura cósmica observada actualmente a partir de pequeñas fluctuaciones primigenias sobre un fondo cosmológico casi homogéneo e isotrópico.

El capítulo que trata acerca de sistemas con simetría axial contiene el desarrollo de la formulación BSSN adaptada a esta simetría incluyendo los casos que presentan rotación, así como los detalles de la regularización en el eje. Con esta formulación de las ecuaciones de evolución se desarrolló un código numérico que fue aplicado en el estudio de la colisión frontal de agujeros negros con carga eléctrica utilizando el formalismo de punturas móviles.

Abstract

This work is about the study of self-gravitating systems using the framework of numerical relativity for particular configurations that present either spherical or axial symmetry, also making emphasis on the mathematical formalism. One of the main objectives of this work was the inclusion of dynamical electromagnetic fields in the studied scenarios.

For the spherically symmetric case we show three works that got published recently. The first one [13] deals with the development and implementation of a set of boundary conditions based on the hyperbolic structure of the evolution system, which is adapted to the constraint equations in the sense that spurious reflections are minimized and the residual violations to the constraint equations converge to zero consistently as one increases the resolution of the simulations. The second work in this line [191] is a study of the collapse of charged scalar fields coupled to the electromagnetic field, and the possible link of the outcome of this phenomena to the cosmic censorship hypothesis. We found for both sets of initial data that the final configuration has an apparent horizon and the geometry approaches that of a charged stationary black hole. This happens because the electromagnetic interaction between both components of the complex scalar field tends to neutralize the configuration on a shorter timescale than the collapse time. This section closes with a study of the collapse of a real scalar field in an expanding universe [192]. It is observed that for extended configurations the density contrast grows in a way that mimics well the growth associated to cold dark matter modeled as a pressureless perfect fluid. The differences are present once the collapse is in a regime of strong field and it is observed that the scalar field collapses later than the pressureless fluid. These

results support the hypothesis that a scalar field can be a type of dark matter viable in the sense that it can drive the formation of the cosmic structure observed today from small perturbations of an almost homogeneous and isotropic cosmological background.

The part of this thesis dealing with axisymmetric systems contains the theoretical development of the adapted BSSN formulation even for rotating scenarios, as well as the details taken into account when dealing with the regularisation of the axis. Based on this formulation of the evolution system we developed a numerical code that was used to study the head on collision of charged black holes using the moving puncture formalism.

Índice

Prefacio	1
1 Gravitación en el formalismo 3+1	7
1.1 Relatividad General	7
1.2 Formulación variacional	11
1.2.1 Formulación Lagrangiana	11
1.2.2 Formalismo 3+1	13
1.2.3 Ecuaciones de Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi	16
1.2.4 Formulación Hamiltoniana	17
1.3 Relatividad Numérica	22
1.3.1 Formulación ADM <i>a la</i> York	23
1.3.2 Formulaciones <i>bien puestas</i> y sistemas hiperbólicos	26
1.3.3 Formulación BSSN generalizada	29
1.3.4 Datos iniciales	39
1.3.5 Condiciones de frontera	41
1.4 Soluciones astrofísicas y agujeros negros	43

1.4.1	Solución exterior de Schwarzschild	43
1.4.2	Agujero Negro de Schwarzschild	45
1.4.3	Agujeros Negros estacionarios	48
1.4.4	Agujeros negros dinámicos	54
1.5	Soluciones cosmológicas	55
2	Dinámica de materia autogravitante	61
2.1	Electromagnetismo	61
2.1.1	Descomposición en el formalismo 3+1	62
2.1.2	Tensor de energía-momento del campo electromagnético	66
2.1.3	Hiperbolicidad de las ecuaciones de Maxwell	67
2.2	Campo escalar complejo	68
2.2.1	Formulación Hamiltoniana	69
2.2.2	Tensor de energía-momento del campo escalar	71
2.2.3	Campo escalar con interacción electromagnética	71
2.3	Hidrodinámica	74
3	Escenarios en simetría esférica	77
3.1	Sistema BSSN en simetría esférica	78
3.1.1	Regularización en el origen	81
3.1.2	Hiperbolicidad del sistema en simetría esférica	83
3.2	Condiciones de frontera para el sistema BSSN en simetría esférica	87
3.2.1	Condiciones de frontera para los campos propios que no se propagan	88

3.2.2	Condiciones de frontera para los campos de norma	89
3.2.3	Condiciones de frontera adaptadas a las constricciones	90
3.2.4	Pruebas numéricas	93
3.2.5	Conclusiones	101
3.3	Colapso de campos escalares cargados	102
3.3.1	Sistema Einstein-Maxwell-Klein-Gordon en simetría esférica	104
3.3.2	Datos iniciales	107
3.3.3	Análisis y código numérico	111
3.3.4	Resultados	115
3.3.5	Conclusiones	141
3.4	Colapso esférico de campo escalar en un contexto cosmológico	144
3.4.1	Datos iniciales con expansión constante	147
3.4.2	Perturbaciones en el régimen lineal	148
3.4.3	Fluido perfecto sin presión	150
3.4.4	Campo escalar masivo	158
3.4.5	Conclusiones	165
4	Escenarios en simetría axial	175
4.1	Sistema BSSN Generalizado en simetría axial	179
4.1.1	Ecuaciones de Evolución	181
4.1.2	Regularización en el eje ($r = 0$)	184
4.1.3	Análisis en coordenadas esféricas	187

4.2	El código OllinAxis2	190
4.3	Pruebas numéricas	198
4.3.1	Dinámica de norma	198
4.3.2	Campo escalar real	205
4.3.3	Agujeros Negros	211
4.4	Colisión frontal de agujeros negros cargados	223
4.4.1	Ecuaciones de Maxwell en axisimetría	223
4.4.2	Datos iniciales	225
4.4.3	Condiciones de frontera para el campo electromagnético	227
4.4.4	Resultados Numéricos	228
4.5	Discusión	233
5	Conclusiones	245
A	Cantidades conservadas: masa, carga y momento angular	249
A.1	Integrales de Komar	249
A.2	Integrales ADM	250
A.3	Integral de carga	251
B	Caracterización de Agujeros Negros	253
B.1	Horizonte de eventos	254
B.2	Horizontes de Killing	255
B.3	Condiciones de energía	257

B.4	Censura Cósmica	259
B.5	Horizontes aparentes	259
B.5.1	Horizontes aparentes en espacios con simetrías	261
C	El tensor de curvatura conforme	265
C.1	Descomposición multipolar	269
D	Análisis hiperbólico	273
D.1	Ecuación de Onda	273
D.2	Ecuaciones de Maxwell	276
E	Propiedades del tensor métrico de un espacio axisimétrico	285
F	Derivada de Lie de las funciones axisimétricas	287
G	Scripts para cálculos algebraicos	289
	Bibliografía	295

Prefacio

Este trabajo recolecta resultados y desarrollos en torno al estudio de fenómenos gravitatorios en el marco de la teoría más exitosa a la fecha para su descripción: la Relatividad General [79, 78]. Esta se sustenta en principios muy simples que pueden resumirse en que la dinámica de la materia se da en un espacio-tiempo curvo, y dicha curvatura se determina por cómo se distribuye la materia en el mismo. No obstante a su simplicidad conceptual, Albert Einstein al proponerla identificó la complejidad matemática de la teoría e hizo notar la necesidad de abordar métodos de aproximación a las soluciones de las ecuaciones de campo. En los últimos 50 años, en paralelo a los grandes avances en cómputo e informática, ha surgido y se ha consolidado la rama de Relatividad Numérica que aborda ampliamente distintas estrategias de aproximación a las soluciones de las ecuaciones de campo y el análisis numérico de las mismas, usando como metodología principal el reconstruir la geometría del espacio-tiempo como un problema de valores iniciales. La complejidad de las ecuaciones y las dificultades encontradas al explorar estrategias de aproximación han sido tales que han hecho de esta rama un área muy prolífica que incursiona directamente en temas de matemáticas, física y cómputo. Es importante recalcar que el avance más importante en esta rama se dio cuando se hizo notorio que la comprensión de las propiedades analíticas del problema de valores iniciales era crítica para la implementación de métodos de aproximación robustos. Fue entonces cuando un las ecuaciones mismas se convirtieron en un objeto fundamental de estudio en Relatividad Numérica y es por ello que esta es una de las disciplinas físicas que se desarrollan con mayor rigor matemático.

La Relatividad Numérica comenzó con el trabajo pionero de Hahn y Lind-

quist [100], en el que se intentó estudiar el problema de dos cuerpos puntuales en Relatividad General cuando aún no se acuñaba el término *agujero negro*. Afortunadamente a la fecha existen en la literatura diversos textos especializados y artículos de revisión en el tema que vale la pena aquí mencionar, tanto porque funcionan como material introductorio y porque abarcan detalles muy específicos [4, 45, 30, 156, 89, 95, 203, 119, 61, 67, 104]. El planteamiento de las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales es conocido desde la formulación Hamiltoniana estudiada por Arnowitt, Deser y Misner [20] (cuya motivación era cuantizar la gravedad siguiendo el formalismo canónico), y posteriormente se difundió más con la reformulación más intuitiva hecha por York [205]. Gran parte de los esfuerzos iniciales en Relatividad Numérica se enfocaron inicialmente en el estudio de la colisión frontal de agujeros negros, ya que el poder de cómputo en esas décadas no era suficiente para hacer viables los estudios en tres dimensiones. Por otro lado, el estudio de escenarios con simetría axial y/o esférica es sensible a patologías inducidas por usar coordenadas adaptadas, de modo que muchos avances se dieron para lograr la colisión frontal y extraer la información asociada a las ondas gravitacionales emitidas en este tipo de eventos. Cuando en la década de 1990 la capacidad de cómputo alcanzó niveles que hicieron viable la simulación de escenarios tridimensionales el desarrollo se movió en esta dirección, incluso cuando los escenarios presentaban simetrías que redujeran su dimensionalidad efectiva. Con este cambio surgió otro problema por el cual la colisión de agujeros negros orbitantes tardó otros quince años en resolverse satisfactoriamente, ya que al utilizar la formulación ADM-York en tres dimensiones el problema de valores iniciales asociado no resulta bien puesto y con ello el error asociado a las aproximaciones numéricas es suficiente para generar inestabilidades. Eventualmente, mediante el estudio de las propiedades de hiperbolicidad de distintas reformulaciones de las ecuaciones de evolución (y el estudio de condiciones de norma que permitieron el formalismo de punturas móviles) se obtuvieron en 2005 las primeras simulaciones exitosas de la colisión de agujeros negros orbitantes [151, 56]. Un recuento más detallado del desarrollo de la Relatividad Numérica se encuentra en el review reciente de Cardoso, et al. [61].

Cabe mencionar que hacia la década del 2000 había bastante tensión en

tanto al problema de dos cuerpos en Relatividad General ya que las primeras versiones de los proyectos de detección directa de ondas gravitacionales (LIGO, VIRGO, TAMA, GEO600) estaban en desarrollo y aún estaba en jaque si se predeciría teóricamente la señal asociada a colisiones de agujeros negros antes de que los interferómetros estuvieran en línea. A la fecha no se han registrado mediciones directas exitosas y los experimentos se encuentran en fase de ajuste para aumentar el umbral de sensibilidad. Se espera que utilizando los patrones de señales generados mediante simulaciones se incremente la posibilidad de extraer señales físicas en el “data-stream” que contiene mucho ruido. Otra línea que apoya en la detección directa de ondas gravitacionales consiste en considerar colisiones altamente energéticas y la interacción de los objetos con un medio material. De este modo se espera que cuando la colisión se da en un medio ionizado se produzcan señales electromagnéticas que se puedan correlacionar con señales gravitacionales.

Los logros de la Relatividad General son evidentes en situaciones ajenas al dominio cotidiano de la física Newtoniana. No obstante, no se puede considerar como la teoría definitiva en base a las observaciones actuales. Primeramente, no se tiene un entendimiento de la gravedad a un nivel microscópico al mismo nivel que la también exitosa teoría cuántica de campos que ha sido capaz de dar una descripción acertada de las demás interacciones de la naturaleza y la materia sujeta a estas a un nivel fundamental. Se especula que de lograrse una formulación cuántica de la gravitación las predicciones “patológicas” (singularidades) se eviten naturalmente y entonces la naturaleza no dependa de mecanismos de autocensura para ser descrita consistentemente aún bajo la presencia de estas. La investigación en esta dirección es un tema de alto interés en la actualidad y ha arrojado resultados parciales esperanzadores, principalmente en las líneas de la gravitación cuántica de lazos [21]. Por otro lado, las observaciones cosmológicas actuales sugieren que para entender el universo a gran escala en el marco de la Relatividad General¹ el contenido de materia luminosa es apenas del orden del 5%; para reproducir la dinámica a nivel galáctico y superior se requiere un contenido de materia unas cinco veces superior al inferido por ob-

¹Otra posible explicación se da al modificar la dinámica a escalas galácticas/cosmológicas, aunque aún no es claro que una teoría en esta dirección pueda explicar todos los fenómenos.

servaciones en el espectro electromagnético, y para explicar la fase actual de expansión acelerada se requiere un contenido energético que produzca repulsión gravitatoria y que se ajusta muy bien cuando se considera la Relatividad General con una constante cosmológica. La naturaleza de estas componentes “oscuras” (materia y energía oscuras, respectivamente) es aún una cuestión que determinar y en general se cree que el entendimiento de este sector oscuro extenderá necesariamente nuestra concepción del modelo estándar y la física fundamental.

El trabajo original expuesto en esta tesis está concentrado principalmente en los Capítulos 3 y 4, en los que se expone material que se ha publicado en revistas arbitradas y material en preparación para su publicación. Originalmente los objetivos de este trabajo contemplaban la inclusión de campos electromagnéticos en simulaciones relativistas y el desarrollo e implementación de la formulación de Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura en simetría axial, y como aplicaciones inmediatas de estos desarrollos llevar a cabo el estudio del colapso de campos escalares cargados en simetría esférica y de la colisión frontal de agujeros negros con carga eléctrica. Fue durante el desarrollo de esta tesis que surgió la oportunidad de llevar a cabo estudios analíticos de condiciones de frontera y de la dinámica de campos escalares en contexto cosmológico, los cuales también se incluyen en esta versión final.

En el Capítulo 3 se expone primeramente el trabajo [13], en el cual se centra en el desarrollo e implementación de condiciones de frontera en simetría esférica adaptadas a las constricciones, permitiendo así la simulación de sistemas por períodos prolongados al evitar la introducción de errores sistemáticos que no convergen debido a la interacción en las fronteras. Posteriormente se expone el trabajo [191], cuyo objetivo es estudiar el colapso de campos escalares cargados en simetría esférica y las implicaciones de este tipo de fenómenos respecto a la conjetura de censura cósmica. Este trabajo se diferencia de otros [142, 148] en el formalismo de evolución, que se basa en la descomposición ADM del espacio-tiempo, y en los datos iniciales utilizados. Los resultados concuerdan con los obtenidos por otros autores, y nos permiten concluir que en simetría esférica es la misma dinámica electromagnética la

responsable de que el resultado final siempre presente un horizonte aparente. Finalmente se cierra el capítulo con la exposición del trabajo [192] cuyo objetivo es el estudio de la dinámica de un campo escalar masivo en un contexto cosmológico y extiende el trabajo [8] que se realizó paralelamente pero fue publicado posteriormente (este último no se incluye en esta tesis por su reciente publicación, y porque el tratamiento analítico utilizado no está directamente relacionado a la temática central de esta tesis). La motivación de este trabajo fue la viabilidad del modelo de campo escalar como materia oscura, el cual debe ser capaz de reproducir las características aceptadas del modelo de materia oscura fría, entre ellas la formación de estructura a partir de inhomogeneidades.

El Capítulo 4 consta de trabajo totalmente original, que se ha expuesto parcialmente en memorias de congresos [190] y del cual se preparan actualmente artículos para su publicación. En este se lleva a cabo todo el desarrollo de la formulación BSSN en axisimetría, haciendo énfasis en la regularización de las funciones en el eje, para aplicarlo finalmente en la simulación de la colisión frontal de agujeros negros cargados.

A parte de los trabajos ya publicados, debido a la estructura de este trabajo algunos desarrollos originales también se encuentran dispersos tanto en las secciones introductorias como en los apéndices. Estos incluyen la descomposición característica de las ecuaciones de Maxwell y del sistema de ecuaciones BSSN en coordenadas curvilíneas, la obtención de datos iniciales de tipo puntura que describen un agujero negro de Kerr-Newmann a partir de la solución analítica, la descripción de campos escalares complejos con carga electromagnética en el formalismo $3 + 1$, y la simplificación de la descomposición del tensor de Weyl en términos de armónicos esféricos en el caso axisimétrico.

Esta tesis está compilada como sigue: el Capítulo 1 sienta las bases para la descripción del espacio-tiempo como un problema de valores iniciales. Luego en el Capítulo 2 se asientan las ideas de cómo es la dinámica de los tipos de materia considerados. Posteriormente el Capítulo 3 enmarca la descripción de sistemas autogravitantes esféricamente simétricos e incluye los trabajos desarrollados en esta dirección. De manera similar, el Capítulo 4 incluye la descripción de sistemas autogravitantes que presentan únicamente simetría rotacional. El punto

principal en este último capítulo es que aunque se retoman las ideas desarrolladas en el trabajo de Doctorado de Milton Ruíz [165], estas se desarrollan y generalizan en la formulación BSSN, dando como resultado un código muy robusto para el estudio de sistemas axisimétricos con rotación. Por último se tienen las conclusiones globales del trabajo en el Capítulo 5.

Capítulo 1

Gravitación en el formalismo 3+1

1.1 Relatividad General

El desarrollo de la teoría de gravitación se remonta a Newton, al identificar que esta fuerza es generada por la masa inercial de los objetos. Bajo esta observación fue posible determinar que las leyes que dictan el movimiento en el sistema solar son las mismas que describen la caída libre en la superficie del planeta. La ecuación básica newtoniana relaciona al potencial gravitacional ϕ localmente con la densidad de materia ρ

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho . \tag{1.1}$$

Una consecuencia directa de esta ecuación es que los objetos de prueba son afectados del mismo modo por un campo gravitacional independientemente de su masa. La teoría newtoniana fue muy exitosa describiendo la mecánica celeste, es posible hacer modelos estelares realistas en base a ella y en el régimen del sistema solar es tan válida que las misiones espaciales se han desarrollado exitosamente.

No obstante su efectividad práctica la gravitación newtoniana no es la teoría definitiva, lo cual se evidenció al mostrarse incompatible con la Relatividad Especial de Einstein. Pese a ser la gravitación newtoniana muy similar en el

caso estático a la teoría electromagnética de Maxwell, se diferencia en tanto a que el campo gravitatorio Newtoniano y los efectos físicos asociados a este se propagan instantáneamente a velocidad infinita. Estas incompatibilidades llevaron a Einstein a formular la teoría de la Relatividad General, que se sustenta en el principio de equivalencia que dicta que las leyes de la física en caída libre son las mismas que en un sistema inercial. Así se reemplaza la acción de la fuerza gravitacional por el movimiento inercial en un espacio-tiempo con geometría no trivial. Este cambio de paradigma también implica naturalmente que los objetos de prueba sean afectados del mismo modo por un campo gravitacional. El elemento que cierra la teoría es la ley que dicta como se curva el espacio-tiempo, que en analogía con el caso newtoniano está asociado a la distribución de masa-energía. Estos elementos los identificó Einstein al relacionar la curvatura del espacio-tiempo con el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(4)}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

con $g_{\mu\nu}$ la métrica del espacio-tiempo, ${}^{(4)}R_{\mu\nu}$ y ${}^{(4)}R$ el tensor de Ricci asociado a esta métrica y su traza respectivamente. La combinación del lado izquierdo $G_{\mu\nu} := {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}{}^{(4)}R$ en (1.2) es muy particular y recibe el nombre de tensor de Einstein; una característica muy importante es que su divergencia es nula, $\nabla_{\mu}G^{\mu\nu} = 0$. Este hecho es consistente con suponer que la distribución de materia cumple las ecuaciones de conservación $\nabla_{\mu}T^{\mu\nu} = 0$, que relacionan directamente los cambios de densidad medidos localmente con los flujos de energía/momento.

Dado que el tensor de curvatura se construye a partir de combinaciones no lineales de derivadas de primero y segundo orden del tensor métrico, las ecuaciones de la Relatividad General constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales para las componentes de la métrica. En general es muy complicado encontrar soluciones exactas de este sistema, y la estrategia principal para ello consiste en suponer simetrías del espacio-tiempo y en la dinámica del sistema que reducen considerablemente las ecuaciones.

Una de las características importantes de la Relatividad General es el estar escrita de manera covariante, de modo que la teoría es independiente de las coordenadas que se usan para describirla y no hay distinción entre las dimensiones espaciales y la temporal. Escrita de este modo no es evidente que sea una teoría predictiva, pues encontrar una solución al menos localmente de (1.2) implica conocer la métrica y la materia en una región abierta del espacio tiempo. Por otro lado, las teorías físicas (mecánica clásica, electromagnetismo) nos permiten partiendo de una situación conocida en un momento poder predecir su evolución en el tiempo o deducir las condiciones que llevaron a esa condición inicial. Si bien el concepto de simultaneidad es ambiguo dentro del contexto de las teorías relativistas es posible formular a la Relatividad General como una teoría dinámica en la que partiendo de datos iniciales *generales* se puede conocer la evolución de la geometría del espacio-tiempo. El método más formal y natural para este fin se logra por medio del formalismo variacional de la mecánica clásica.

Una ventaja de la formulación variacional de la Relatividad General es que da un punto de partida para explorar posibles extensiones de la teoría bajo el mismo paradigma en que la gravitación es la manifestación de la geometría del espacio-tiempo. Este tipo de extensiones se han propuesto en distintos contextos para explicar fenómenos que escapan de las predicciones dadas por la teoría estándar, o bien para dar explicaciones alternativas para evitar hipótesis necesarias en el marco de la Relatividad General (como la inclusión de materia y energía oscuras como contenido principal del universo). Actualmente este tema tiene gran interés debido a que pese a los éxitos de la Relatividad General estos han sido probados en el régimen de campo débil, por lo que aún es necesario proponer pruebas factibles para validar la teoría en el límite de campos fuertes [34]. Este tipo de extensiones están más allá del alcance de este trabajo, pero hago mención ya que en muchos casos las técnicas aquí desarrolladas son aplicables en el estudio de teorías alternativas a la Relatividad General.

Notación y convenciones

A menos que se especifique otra cosa, en este trabajo se emplean unidades geometrizadas en las que $G = c = 1$, de modo que las unidades de energía, tiempo y longitud tienen las mismas dimensiones. La signatura del espacio tiempo se toma como $(-, +, +, +)$. Los índices griegos $(\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots)$ toman valores de 0 a 3, mientras que los latinos (i, j, k, l, \dots) corresponden a tensores tangentes al espacio tridimensional y toman valores de 1 a 3. La convención de suma de Einstein sobre índices repetidos se asume a menos que se indique otra cosa. La siguiente es una lista de los símbolos comunes que aparecen en el texto:

$\partial_\mu f \equiv f_{,\mu}$	$\equiv \partial f / \partial x^\mu$, derivada parcial de f con respecto a la coordenada x^μ
\dot{a}	$:= \partial a / \partial t$, derivada con respecto al tiempo coordinado
$\mathcal{L}_{\vec{v}} T$	Derivada de Lie en la dirección del vector \vec{v} del tensor T
$g_{\mu\nu}$	Métrica del espacio-tiempo
${}^{(4)}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$	$:= \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$, coeficientes de la conexión (símbolos de Christoffel) adaptada a la métrica del espacio-tiempo
${}^{(4)}\nabla_\mu$	Derivada covariante adaptada a la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$
${}^{(4)}\nabla^2$	$:= g^{\mu\nu} {}^{(4)}\nabla_\mu {}^{(4)}\nabla_\nu$, y existen análogos para cada derivada covariante utilizada
${}^{(4)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$	$\partial_\mu {}^{(4)}\Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu {}^{(4)}\Gamma_{\beta\mu}^\alpha + {}^{(4)}\Gamma_{\mu\sigma}^\alpha {}^{(4)}\Gamma_{\beta\nu}^\sigma - {}^{(4)}\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha {}^{(4)}\Gamma_{\beta\mu}^\sigma$, tensor de curvatura (Riemann) del espacio-tiempo
γ_{ij}	Métrica inducida en la sección espacialoide normal al campo temporaloide unitario \vec{n} .
${}^{(3)}\Gamma_{mn}^a$	coeficientes de la conexión (símbolos de Christoffel) adaptada a la métrica inducida en la sección espacialoide γ_{ij} .
${}^{(3)}\nabla_m$	Derivada covariante adaptada a la métrica inducida en la sección espacialoide γ_{ij}
${}^{(3)}R_{bmn}^a$	$\partial_m {}^{(3)}\Gamma_{bn}^a - \partial_n {}^{(3)}\Gamma_{bm}^a + {}^{(3)}\Gamma_{ml}^a {}^{(3)}\Gamma_{bn}^l - {}^{(3)}\Gamma_{nl}^a {}^{(3)}\Gamma_{bm}^l$, tensor de curvatura intrínseca inducida (Riemann) de la sección espacialoide

$$\begin{aligned}
K_{ij} &:= -\mathcal{E}_{\vec{n}} \gamma_{ij} / 2, \text{ tensor de curvatura extrínseca de la sección espacialoide} \\
[T]_{ij}^{TF} &:= (\gamma_i^a \gamma_j^b - \gamma_{ij} \gamma^{ab} / 3) T_{ab}, \text{ proyección sin traza canónica de un tensor } T \text{ sobre la superficie espacialoide} \\
h_{pq} &\text{ Métrica transversa a un vector de propagación espacialoide} \\
[T]_{pq}^{TT} &:= (h_p^a h_q^b - h_{pq} h^{ab} / 2) T_{ab}, \text{ proyección sin traza en el subespacio transverso} \\
\mathcal{D}_\mu &:= {}^{(4)}\nabla_\mu + iqA_\mu, \text{ derivada invariante de norma (electromagnética)}
\end{aligned}$$

Al trabajar en el formalismo 3+1 lo más usual es utilizar los objetos tridimensionales, por lo que a menos de que cause confusión, se omitirá el superíndice ⁽³⁾ cuando se manipulen estas cantidades. También se definirán más métricas espacialoides tridimensionales $\hat{\gamma}_{ij}$ $\hat{\gamma}^{ij}$, y los tensores y conexiones adaptados a estas se marcan de un modo análogo utilizando la misma marca distintiva.

1.2 Formulación variacional

1.2.1 Formulación Lagrangiana

La relatividad general puede formularse como una teoría de campo que sigue un principio de mínima acción. Esta fue la manera en que Hilbert derivó las ecuaciones de campo casi simultáneamente con Einstein. Dado que la Lagrangiana de una teoría es una función escalar, la elección más sencilla que podemos tomar es a partir del escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo. La acción de Einstein-Hilbert al considerar campos de materia queda:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int g^{\mu\nu(4)} R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.3)$$

donde la integración se hace sobre una región comprendida entre dos superficies temporaloides. Es importante tener en cuenta las fronteras de la región de integración pues la topología del espacio-tiempo considerado no es necesariamente trivial. Esta acción corresponde a una teoría de gravitación con acople

mínimo de materia. La dependencia explícita en el tensor métrico está comprendida tanto en el tensor de Ricci como en el elemento de volúmen. Considerando variaciones de la métrica $g^{\alpha\beta}$ y tomando en cuenta que $\delta g = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ se tiene entonces que la variación del sector gravitacional está dada por tres términos

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} {}^{(4)}R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \delta g^{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

El último término se obtiene al desarrollar la variación del elemento de volúmen. Así la variación total de la acción puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \left[\frac{1}{8\pi} \left({}^{(4)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} {}^{(4)}R \right) + \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ & + \frac{1}{8\pi} \int g^{\mu\nu} \delta {}^{(4)}R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \end{aligned} \quad (1.5)$$

En el primer término aparece la combinación que identificamos con el tensor de energía-momento

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m. \quad (1.6)$$

Entonces al pedir que el primer término se anule para toda variación admisible de la métrica se obtienen las ecuaciones de Einstein (1.2). El segundo término puede convertirse en un término de frontera; notando que $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ es un tensor, desarrollando se obtiene

$$\begin{aligned} \int g^{\mu\nu} \delta {}^{(4)}R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x &= \int {}^{(4)}\nabla_{\mu} \left(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \oint \left(g^{\alpha\beta} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - g^{\alpha\mu} \delta \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} \right) n_{\mu} \sqrt{|h|} d^3x. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Este término de frontera contiene las derivadas de orden superior que uno esperarí al comenzar con una función Lagrangiana que posee segundas derivadas. Si consideramos que las variaciones de la métrica y sus primeras derivadas se anulan en la frontera este término automáticamente se cancela. Un tratamiento

más formal consiste en agregar un término de frontera en la Lagrangiana inicialmente, que anula a este último término. Más detalles de este tratamiento se pueden consultar en [150].

Vemos entonces que la formulación Lagrangiana da una ruta alternativa para llegar a las ecuaciones que describen al campo gravitatorio en este contexto geométrico.

1.2.2 Formalismo 3+1

La teoría Hamiltoniana permite reescribir las ecuaciones fundamentales como un sistema de ecuaciones de evolución de primer orden. Dado que la Relatividad General se formula naturalmente de manera covariante es necesario de entrada romper esta covariancia para definir la evolución temporal, y ya que la teoría es invariante ante difeomorfismos es necesario identificar los grados de libertad dinámicos de aquellos que solo tienen que ver con la elección de coordenadas. Una forma natural de hacer esto consiste en descomponer el espacio-tiempo mediante una foliación en hipersuperficies espacialoides; esta descomposición se debe originalmente al trabajo de Arnowitt, Dessser y Misner[20].

Para que la dinámica del espacio-tiempo esté adecuadamente descrita las superficies en que se separa deben ser *superficies de Cauchy*, esto es que cumplen con que la unión de sus dominios de dependencia pasado y futuro cubra todo el espacio-tiempo. Dada esta condición podemos introducir una familia de hipersuperficies Σ_t parametrizadas por una función de tiempo global t que cubre a todo el espacio-tiempo, asociado a estas se tiene un campo vectorial normal a Σ_t y unitario n^μ , de modo que la métrica inducida en estas hipersuperficies al estar encajadas en el espacio-tiempo es

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (1.8)$$

Es inmediato verificar que este operador proyecta tensores sobre la hipersuperficie correspondiente. Para completar la descripción de la foliación se usa la función de lapso $\alpha(t, x^i)$ que corresponde al tiempo propio entre hipersuperfi-

cies medido por los observadores que se mueven en la dirección normal a la hipersuperficie (llamados observadores *Eulerianos*):

$$d\tau = \alpha(t, x^i)dt \quad (1.9)$$

Como último detalle se tiene que al ser libre la elección de coordenadas, al mapear puntos en una hipersuperficie hacia otras por medio del flujo definido por el campo normal, los puntos resultantes no poseen las mismas coordenadas. Podemos describir este desfase del sistema coordenado por medio de un campo vectorial tangente a las superficies β^i llamado vector de corrimiento o *shift*. En términos de este, las coordenadas de un observador Euleriano cambian como:

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^i)dt. \quad (1.10)$$

En la Figura 1.1 se esquematizan dos secciones de una foliación del espacio-tiempo junto con un sistema coordenado que lo describe localmente, y el comportamiento de las funciones de norma que caracterizan esta foliación.

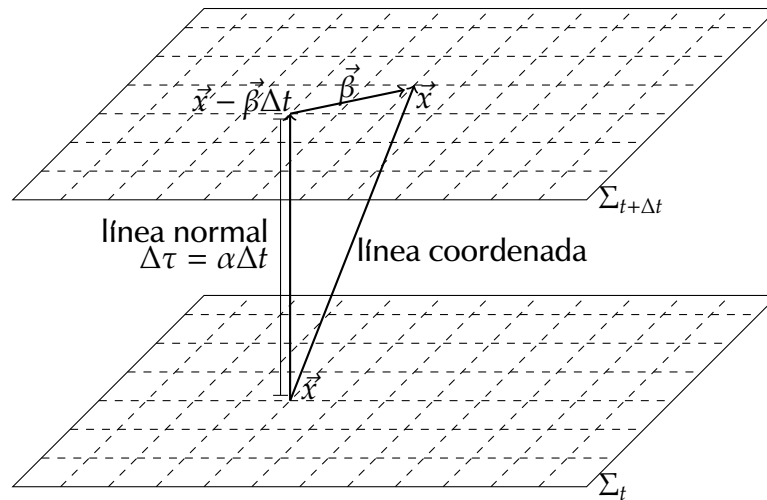


Figura 1.1: Representación de la foliación del espacio-tiempo y la interpretación de las funciones de norma α y $\vec{\beta}$.

Tomando en cuenta todas estas consideraciones, es posible reescribir el

elemento de línea del espacio tiempo como:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.11)$$

Aquí t es la función parametriza que la foliación y x^i son las coordenadas en las hipersuperficies. Esta relación puesta de forma contravariante queda

$$\partial_s^2 = -\frac{1}{\alpha^2} \partial_t^2 - 2\frac{\beta^i}{\alpha^2} \partial_t \partial_i + \left(\gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \right) \partial_i \partial_j. \quad (1.12)$$

En estas coordenadas el vector normal unitario toma la forma

$$n^\mu = (1/\alpha, -\beta^i/\alpha), \quad n_\mu = (-\alpha, 0). \quad (1.13)$$

Esta expresión implica $\partial n^\mu / \partial \alpha = -n^\mu / \alpha$ y $\partial n^\mu / \partial \beta^i = -\gamma_i^\mu / \alpha$. Aplicando estas relaciones cuando derivamos la métrica reescrita como (1.8) obtenemos:

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \alpha} = -2 \frac{n^\mu n^\nu}{\alpha}, \quad (1.14a)$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \beta^i} = -\frac{1}{\alpha} (\gamma_i^\mu n^\nu + \gamma_i^\nu n^\mu), \quad (1.14b)$$

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \gamma_{ab}} = -\gamma^{\mu a} \gamma^{\nu b}. \quad (1.14c)$$

Por último, el elemento de volumen reescrito en términos de estas cantidades queda explícitamente

$$\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma}. \quad (1.15)$$

Las hipersuperficies de esta foliación poseen una curvatura intrínseca que dice cómo se desvían vectores tangentes al transportarse paralelamente restringidos a las mismas. Esto no es suficiente para caracterizar la curvatura global del espacio-tiempo y es por ello que es necesario introducir el concepto de curvatura extrínseca, que caracteriza el encaje de las hipersuperficies en el espacio-tiempo y mide el cambio en el vector normal al transportarlo paralelamente en curvas

restringidas a la hipersuperficie. Un ejemplo de cómo se diferencian estas curvaturas es la inmersión de subvariedades de un espacio euclidiano: un cilindro, un plano y un cono tienen la misma geometría intrínseca (plana) pero su curvatura extrínseca difiere, dicho de otro modo los tres son planos y la diferencia entre ellos consiste en la forma diferente en que están inmersos en el espacio tridimensional. En términos del vector normal, la curvatura extrínseca está dada por

$$K_{\mu\nu} = -\gamma_{\mu}^{\alpha(4)}\nabla_{\alpha}n_{\nu} = -({}^{(4)}\nabla_{\mu}n_{\nu} + n_{\mu}n^{\alpha(4)}\nabla_{\alpha}n_{\nu}). \quad (1.16)$$

Se puede mostrar que esta definición es equivalente a la derivada de Lie de la métrica inducida en la dirección normal

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\vec{n}}\gamma_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

de donde se ve que este es un tensor simétrico. Expresando el vector normal en términos de las variables de norma se puede reescribir esta relación en términos de la derivada temporal de la métrica, es decir:

$$\partial_t\gamma_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}}\gamma_{\mu\nu} - 2\alpha K_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

Recapitulando y en conexión con el objetivo de obtener la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General, mediante esta foliación del espacio-tiempo se logra identificar de los grados de libertad originales $g_{\mu\nu}$ aquellos que solo tienen que ver con la elección de coordenadas α , β^i y los geométricos γ_{ij} que llevan la dinámica de la teoría. Asimismo identificamos en el tensor de curvatura extrínseca las derivadas temporales de las variables geométricas intrínsecas.

1.2.3 Ecuaciones de Gauss-Codazzi, Codazzi-Mainardi

Para pasar de la formulación Lagrangiana a la formulación Hamiltoniana es necesario reescribir la función Lagrangiana en términos de las cantidades fun-

damentales 3+1. Para ello es necesario relacionar el tensor de curvatura del espacio-tiempo con los tensores de curvatura intrínseca y extrínseca de las hipersuperficies. Al proyectar todos los índices del tensor de curvatura sobre la hipersuperficie se obtiene la ecuación de Gauss-Codazzi

$$\gamma_a^\alpha \gamma_m^\mu \gamma_b^\beta \gamma_n^\nu {}^{(4)}R_{\alpha\mu\beta\nu} = {}^{(3)}R_{ambn} + K_{ab}K_{mn} - K_{an}K_{mb} . \quad (1.19)$$

Si se proyecta un índice en la dirección normal se obtiene la ecuación de Codazzi-Mainardi

$$\gamma_a^\alpha \gamma_b^\beta \gamma_n^\nu n^\mu {}^{(4)}R_{\mu\alpha\beta\nu} = {}^{(3)}\nabla_n K_{ab} - {}^{(3)}\nabla_b K_{an} . \quad (1.20)$$

La derivación completa de estas ecuaciones se puede consultar en [150].

De estas ecuaciones se derivan otras identidades importantes que involucran al tensor de Einstein

$$2G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^{(3)}R + K^2 - K^{ab}K_{ab}, \quad (1.21)$$

$$G_{\alpha\beta} \gamma_a^\alpha n^\beta = {}^{(3)}\nabla_b K_a^b - {}^{(3)}\nabla_a K. \quad (1.22)$$

Por último, el escalar de curvatura cumple la identidad

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R - K^2 + K^{ab}K_{ab} - 2{}^{(4)}\nabla_\alpha (n^\beta {}^{(4)}\nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha {}^{(4)}\nabla_\beta n^\beta) . \quad (1.23)$$

1.2.4 Formulación Hamiltoniana

Usando una foliación tipo ADM la acción de Relatividad General queda

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{8\pi} \int \int ({}^{(3)}R - K^2 + K^{ab}K_{ab}) \alpha \sqrt{\gamma} d^3x dt \\ & - \frac{1}{4\pi} \oint (n^\beta {}^{(4)}\nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha {}^{(4)}\nabla_\beta n^\beta) v_\alpha d^3y + S_m . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Una diferencia fundamental con la formulación Lagrangiana radica en que para que esta integración tenga sentido debe realizarse entre dos hipersuperficies espacialoides que coinciden en sus fronteras. El término de frontera puede ser ignorado ya que si se consideran variaciones que se anulen en la frontera este no contribuye a la variación de la acción. Los momentos canónicos conjugados a las variables métricas están dados por

$$\pi^{ab} = \frac{\delta \mathbf{L}_G}{\delta \dot{\gamma}_{ab}} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} \frac{\partial}{\partial K_{ij}} (\mathcal{L}_G \alpha \sqrt{\gamma}) = -\frac{\sqrt{\gamma}}{8\pi} (K^{ab} - K\gamma^{ab}). \quad (1.25)$$

Tomando la traza en esta última relación se llega a $\pi^l_l = \sqrt{\gamma}K/(4\pi)^1$. Usando esto es inmediato invertir la relación para expresar la curvatura extrínseca en términos del momento conjugado y su traza, de modo que podemos trabajar indistintamente con la curvatura extrínseca o con los momentos canónicos. Al no depender la Lagrangiana de derivadas temporales de las variables de norma, los momentos asociados a estas son nulos. La Hamiltoniana asociada al sector gravitacional de la teoría es finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \int \left[\pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} - \frac{1}{8\pi} \left({}^{(3)}R - K^2 + K^{ab} K_{ab} \right) \alpha \sqrt{\gamma} \right] d^3x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left[-\alpha \left({}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(K^{ab} - K\gamma^{ab} \right) {}^{(3)}\nabla_a \beta_b \right] \sqrt{\gamma} d^3x. \end{aligned} \quad (1.26)$$

El último término puede integrarse por partes para dar un término de frontera adicional. Finalmente los términos del *bulto* resultantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_G &= \frac{1}{8\pi} \int \left[-\alpha \left({}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\beta_b {}^{(3)}\nabla_a \left(K^{ab} - K\gamma^{ab} \right) \right] \sqrt{\gamma} d^3x, \end{aligned} \quad (1.27)$$

¹Nótese que se expresa la contracción de los índices del momento canónico para evitar confusiones con la constante universal π

o en términos de las variables canónicas:

$$\mathbf{H}_G = \int \left[-\frac{\alpha \sqrt{\gamma}}{8\pi} {}^{(3)}R - \frac{8\pi\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1}{2} \pi_l^l{}^2 - \pi^{ab} \pi_{ab} \right) - 2\beta^{b(3)} \nabla_a \pi^a_b \right] d^3x. \quad (1.28)$$

Las ecuaciones de campo en la formulación Hamiltoniana se obtienen al tomar la variación de la función Hamiltoniana respecto a las variables canónicas. Al hacer la variación de la acción obtenemos

$$\delta S = \int \delta \left[\int \pi^{ab} \dot{\gamma}_{ab} d^3x - \mathbf{H}_G \right] dt + \int \int \delta (\mathcal{L}_m \alpha \sqrt{\gamma}) d^3x dt. \quad (1.29)$$

Los términos provenientes de la acción para la materia pueden ponerse en términos del tensor de energía-momento usando las ecuaciones (1.14a), (1.14b) y (1.14c)

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int \int T_{\mu\nu} \left[2 \frac{n^\nu n^\mu}{\alpha} \delta\alpha + \frac{1}{\alpha} (\gamma_i^\mu n^\nu + \gamma_i^\nu n^\mu) \delta\beta^i \right. \\ &\quad \left. + \gamma^{\mu a} \gamma^{\nu b} \delta\gamma_{ab} \right] \alpha \sqrt{\gamma} d^3x dt \\ &= \int \int (2\rho \delta\alpha - 2j_i \delta\beta^i + S^{ab} \alpha \delta\gamma_{ab}) \sqrt{\gamma} d^3x dt. \end{aligned} \quad (1.30)$$

En la última línea asumimos las definiciones de densidad de energía, densidad de momento y tensor de esfuerzos medidos por observadores Eulerianos:

$$\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (1.31a)$$

$$j_i := -\gamma_i^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (1.31b)$$

$$S^{ab} := \gamma^{\mu a} \gamma^{\nu b} T_{\mu\nu}. \quad (1.31c)$$

Finalmente podemos expresar la variación total de la acción con respecto a las

variables geométricas como

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int \int \left[-\frac{1}{8\pi} \left({}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} \right) + 2\rho \right] \delta\alpha \sqrt{\gamma} d^3x dt \\
& - \int \int 2 \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}} {}^{(3)}\nabla_a \pi^a_b + j_b \right] \delta\beta^b \sqrt{\gamma} d^3x dt \\
& + \int \int \left[-\left(\dot{\pi}^{ab} + \frac{\delta \mathbf{H}_G}{\delta \gamma_{ab}} - \alpha \sqrt{\gamma} S^{ab} \right) \delta\gamma_{ab} \right. \\
& \quad \left. + \left(\dot{\gamma}_{ab} - \frac{\delta \mathbf{H}_G}{\delta \pi^{ab}} \right) \delta\pi^{ab} \right] d^3x dt.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Al requerir que la acción sea estacionaria respecto a la variación de la acción respecto a las funciones de norma se obtienen cuatro ecuaciones que no poseen derivadas temporales de las variables canónicas:

$$\mathcal{H} := {}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} - 16\pi\rho = 0, \tag{1.33a}$$

$$\mathcal{M}_a := \frac{1}{\sqrt{\gamma}} {}^{(3)}\nabla_b \pi^b_a + j_a = 0. \tag{1.33b}$$

Estas son ecuaciones de constricción que han de satisfacerse en todo momento y definen el subespacio de soluciones físicamente admisibles. Una teoría análoga es el electromagnetismo, en el cual una libertad de norma se ve reflejada en la existencia de ecuaciones de constricción, en ese sentido la relatividad general es una teoría análoga con un grupo de simetrías más grande.

Las ecuaciones de evolución se obtienen al asumir que la acción es estacionaria ante variaciones respecto a las variables canónicas. Las ecuaciones de evolución para las componentes métricas son entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{ab} &= \frac{\delta \mathbf{H}_G}{\delta \pi^{ab}} \\
&= -\frac{8\pi\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^l_{\ l} \gamma_{ab} - 2\pi_{ab} \right) + 2 {}^{(3)}\nabla_{(a} \beta_{b)} \\
&= \mathcal{E}_{\beta} \gamma_{ab} - 2\alpha K_{ab}.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Estrictamente estas ecuaciones tienen significado geométrico y no dinámico ya que son equivalentes a la definición del tensor de curvatura extrínseca que representa el encaje de las hipersuperficies espacialoides en el espacio-tiempo.

La variación respecto a los momentos canónicos es más elaborada, pero es la que finalmente da la dinámica del espacio-tiempo. Al variar el término proporcional al escalar de Ricci tridimensional se obtiene el correspondiente tensor de Einstein (tridimensional) más un término que esta vez no es de superficie por la dependencia en α . Es necesario integrar por partes obteniendo así dependencia explícita de las derivadas de α en las ecuaciones canónicas. Bajo estas consideraciones las ecuaciones de evolución para los momentos conjugados quedan:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ab} &= \alpha \sqrt{\gamma} S^{ab} - \frac{\delta \mathbf{H}_G}{\delta \gamma_{ab}} \\
&= -\frac{\alpha \sqrt{\gamma}}{8\pi} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2} \gamma^{ab} {}^{(3)}R \right) - \frac{4\pi\alpha}{\sqrt{\gamma}} \gamma^{ab} \left(\frac{1}{2} \pi^l{}_l{}^2 - \pi^{cd} \pi_{cd} \right) \\
&\quad + \frac{8\pi\alpha}{\sqrt{\gamma}} \left(\pi^l{}_l \pi^{ab} - 2\pi^{ac} \pi_c{}^b \right) + \frac{\sqrt{\gamma}}{8\pi} \left({}^{(3)}\nabla^a {}^{(3)}\nabla^b \alpha - \gamma^{ab} {}^{(3)}\nabla^2 \alpha \right) \\
&\quad + {}^{(3)}\nabla_c \left(\pi^{ab} \beta^c \right) - 2\pi^{c(a} {}^{(3)}\nabla_c \beta^{b)} + \alpha \sqrt{\gamma} S^{ab}. \tag{1.35}
\end{aligned}$$

En conjunto, las ecuaciones (1.33a), (1.33b), (1.34) y (1.35) determinan la dinámica de la geometría del espacio-tiempo y permiten reescribir la teoría como un problema de valores iniciales. Las variables dinámicas son las componentes del tensor métrico y sus momentos conjugados. De manera equivalente se puede reemplazar a los últimos por las componentes del tensor de curvatura extrínseca cuya interpretación geométrica es inmediata; la ecuación de evolución que se sigue de la última para las componentes de la curvatura extrínseca es:

$$\begin{aligned}
\dot{K}_{ab} &= \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ab} - {}^{(3)}\nabla_a {}^{(3)}\nabla_b \alpha + \alpha \left({}^{(3)}R_{ab} + K K_{ab} - 2K_{ab} K^{ab} \right) \\
&\quad + 4\pi\alpha \left(\gamma_{ab} S - 2S_{ab} \right) - \frac{\alpha}{4} \gamma_{ab} \left({}^{(3)}R + K^2 - K_{mn} K^{mn} \right). \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Concluyo esta sección remarcando que la Relatividad General es una teoría en la que a partir de un conjunto de datos iniciales se puede conocer la evolución de un sistema. Las ecuaciones que determinan la evolución son las obtenidas por medio del formalismo Hamiltoniano. El sistema resultante consta de ecuaciones que dictan la evolución de la métrica intrínseca y la curvatura extrínseca de las hipersuperficies, y cuatro ecuaciones de constricción adicionales que relacionan a las variables del sistema. En ese sentido el sistema es similar al electromagnetismo, salvo que las ecuaciones son mucho más complicadas al ser no lineales e incluir un gran número de términos. Es importante saber que estas ecuaciones *per se* no se implementan en la práctica pues su estructura analítica no es adecuada para buscar una solución sistemática con los métodos numéricos usuales.

1.3 Relatividad Numérica

Resolver las ecuaciones de Einstein como un problema de valores iniciales es un trabajo que requiere muchas consideraciones finas. La formulación Hamiltoniana ADM provee de un conjunto de ecuaciones que especifican la dinámica del campo gravitatorio, pero la implementación de algoritmos en base a estas no es adecuada por dificultades matemáticas inherentes al sistema. No obstante es posible partiendo de la formulación Hamiltoniana encontrar sistemas físicamente equivalentes con propiedades matemáticas distintas. Un espacio-tiempo que es solución a las ecuaciones de Einstein cumple el conjunto de ecuaciones (1.33a), (1.33b), (1.34) y (1.35), que pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= 0, \\ \mathcal{M}_a &= 0, \\ \mathcal{Q}_{ab} &:= \dot{\gamma}_{ab} - \frac{\delta \mathbf{H}_G}{\delta \pi^{ab}} = 0, \\ \mathcal{P}^{ab} &:= \dot{\pi}^{ab} + \frac{\delta \mathbf{H}_G}{\delta \gamma_{ab}} - S^{ab} = 0.\end{aligned}$$

Siempre que construyamos un sistema lineal homogéneo no singular usando estas funciones, la solución del sistema será una solución válida de las ecuaciones de Einstein. Aunque efectivamente las soluciones físicas de este sistema no se ven afectadas por este procedimiento, al aplicarlo se añaden términos diferenciales a las ecuaciones de evolución que cambian su estructura y propiedades. El sistema dinámico modificado comparte únicamente el subespacio de soluciones físicas, que cumplen las constricciones, con el sistema original y el comportamiento de las soluciones al desviarse de este subespacio puede ser muy distinto. Comprender las características de este tipo de sistemas es el punto clave para poder hacer simulaciones estables a largo plazo de fenómenos físicos y en particular gravitatorios.

1.3.1 Formulación ADM a la York

La formulación usual empleada en Relatividad Numérica es debida a York [204], y aunque es físicamente equivalente a la formulación de ADM fue obtenida de otra forma. Partiendo de las ecuaciones de campo covariantes de la Relatividad General, se toman las proyecciones de estas adaptadas a la foliación y se usan las identidades de Gauss-Codazzi (1.19), (1.20) para expresar las ecuaciones resultantes en cantidades definidas en las hipersuperficies. Las variables naturales de la teoría son la métrica intrínseca γ_{ab} y la curvatura extrínseca K_{ab} de la hipersuperficie ². Las proyecciones que se toman son explícitamente

$$\mathcal{H} := 2n^\mu n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0, \quad (1.37)$$

$$\mathcal{M}^\alpha := -\gamma^{\alpha\mu} n^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0, \quad (1.38)$$

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} := \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = 0. \quad (1.39)$$

Al tomar proyecciones en la dirección normal se obtienen ecuaciones que coinciden con las constricciones de la teoría Hamiltoniana, y la dinámica del sistema está contenida en la proyección tangente. Se puede ver que estas ecuaciones

²También llamadas primera y segunda forma fundamentales respectivamente en los textos canónicos en geometría diferencial.

también se pueden obtener en la formulación Hamiltoniana si se considera como variable fundamental al lapso *densitizado* $\tilde{\alpha} = \alpha \sqrt{\gamma}$ al tomar la variación de la función Hamiltoniana (1.28). En este caso la ecuación que se obtiene para la evolución de la curvatura extrínseca es

$$\begin{aligned} \dot{K}_{ab} = & \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K_{ab} - {}^{(3)}\nabla_a {}^{(3)}\nabla_b \alpha + \alpha (R_{ab} + K K_{ab} - 2K_{ac} K_b^c) \\ & + 4\pi\alpha [\gamma_{ab}(S - \rho) - 2S_{ab}]. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Esta ecuación difiere de la obtenida por ADM (1.36), más la diferencia no es arbitraria sino un múltiplo de la constricción Hamiltoniana:

$$\dot{K}_{ab}^{(ADM)} - \dot{K}_{ab}^{(York)} = -\frac{\alpha}{4} \gamma_{ab} \mathcal{H}. \quad (1.41)$$

La diferencia entre los dos sistemas radica en que el sistema obtenido por York toma como ecuación de evolución $\mathcal{E}_{ab} = \gamma_{ab} \mathcal{H}/2$ en sustitución de (1.39). Dado que la diferencia es proporcional a la constricción Hamiltoniana, las soluciones físicas son admisibles para ambos.

Dado que ambos sistemas son equivalentes mientras se cumplen las constricciones es necesario analizar este sector para notar sus diferencias. Las constricciones cumplen un sistema de ecuaciones de evolución que se deriva del sistema original. Partiendo de las ecuaciones de campo, las identidades de Bianchi implican

$${}^{(4)}\nabla^\nu (G_{\mu\nu} - 8\pi T_{\mu\nu}) = {}^{(4)}\nabla^\nu (n_\mu n_\nu \mathcal{H}/2 + n_\mu \mathcal{M}_\nu + n_\nu \mathcal{M}_\mu + \mathcal{E}_{\mu\nu}) = 0. \quad (1.42)$$

Al tomar las proyecciones normal y tangente de estas últimas identidades, se obtienen las ecuaciones de evolución para las constricciones Hamiltoniana y de momentos respectivamente:

$$\partial_t \mathcal{H} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{H} + \alpha \mathcal{H} K - 2\alpha {}^{(3)}\nabla^a \mathcal{M}_a - 4\mathcal{M}_a {}^{(3)}\nabla^a \alpha + 2\alpha \mathcal{E}_{ab} K^{ab}, \quad (1.43a)$$

$$\partial_t \mathcal{M}_a = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{M}_a + \alpha K \mathcal{M}_a - \alpha {}^{(3)}\nabla_i \mathcal{E}_a^i - \frac{\mathcal{H}}{2} {}^{(3)}\nabla_a \alpha - \mathcal{E}_a^i {}^{(3)}\nabla_i \alpha. \quad (1.43b)$$

Notamos que si las constricciones son cero inicialmente, las ecuaciones de evolución garantizan que mantengan ese valor durante la evolución. La forma final de estas ecuaciones depende del sistema en consideración. Para el sistema ADM original la evolución se lleva a cabo con $\mathcal{E}_{ab} = 0$, por lo que queda

$$\partial_t \mathcal{H} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{H} + \alpha \mathcal{H} K - 2\alpha {}^{(3)}\nabla^a \mathcal{M}_a - 4\mathcal{M}_a {}^{(3)}\nabla^a \alpha, \quad (1.44a)$$

$$\partial_t \mathcal{M}_a = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{M}_a + \alpha K \mathcal{M}_a - \frac{\mathcal{H}}{2} {}^{(3)}\nabla_a \alpha. \quad (1.44b)$$

Mientras que para el sistema de York la evolución se efectúa con $\mathcal{E}_{ab} = \gamma_{ab} \mathcal{H}/2$, dando como resultado

$$\partial_t \mathcal{H} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{H} + 2\alpha \mathcal{H} K - 2\alpha {}^{(3)}\nabla^a \mathcal{M}_a - 4\mathcal{M}_a {}^{(3)}\nabla^a \alpha, \quad (1.45a)$$

$$\partial_t \mathcal{M}_a = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{M}_a + \alpha K \mathcal{M}_a - \alpha {}^{(3)}\nabla_a \mathcal{H}/2 - \mathcal{H} {}^{(3)}\nabla_a \alpha. \quad (1.45b)$$

De esta comparación resulta que la estructura de las ecuaciones es muy distinta, pues en el caso del sistema de York hay primeras derivadas de \mathcal{H} que son fuente para la evolución de \mathcal{M}_a . Esto implica que si tomamos otra derivada temporal en (1.45a) y sustituimos el lado derecho de (1.45b), a parte principal (considerando las derivadas de mayor orden) tenemos

$$\partial_t^2 \mathcal{H} \simeq \alpha^2 {}^{(3)}\nabla^a {}^{(3)}\nabla_a \mathcal{H}. \quad (1.46)$$

Entonces en el sistema de ecuaciones de York si se toman datos que violan la restricción Hamiltoniana, estas violaciones esencialmente se propagarán como una onda que viaja a la velocidad (coordenada) de la luz. En el sistema original ADM no ocurre esto y en la práctica se observa que las violaciones a las constricciones se acumulan y crecen. Estas propiedades del sistema de constricciones son heredadas de las propiedades de las ecuaciones de evolución y serán detalladas en el siguiente apartado en el que se conecta el concepto de hiperbolicidad con la formulación de problemas de valores iniciales *bien puestos*. Por el momento basta decir que esta es la razón por la cual el sistema

de York es preferido como base para las implementaciones numéricas, pero por razones similares tampoco resulta totalmente adecuado en la práctica. Cabe mencionar que existe un trabajo muy didáctico [114] que en analogía a lo que pasa en el sistema ADM, se estudia las propiedades de estabilidad de las ecuaciones de Maxwell al modificarlas por medio de las constricciones.

1.3.2 Formulaciones *bien puestas* y sistemas hiperbólicos

Un problema de valores iniciales se dice *bien puesto* si sus soluciones dependen continuamente de los datos iniciales. Esta propiedad más que deseable es indispensable para cualquier implementación numérica, pues dadas las limitaciones técnicas siempre se tendrá error de truncado tanto asociado a los métodos de discretización como a la precisión inherente de las máquinas. Este concepto se formaliza pidiendo como condición que exista una norma de la solución tal que a cualquier tiempo la solución queda acotada por la norma de la solución inicial multiplicada por una exponencial del tiempo

$$\|u(t, x)\| \leq ke^{\sigma t} \|u(x, 0)\| \quad (1.47)$$

con k y σ constantes independientes de los datos iniciales.

La mayoría de los resultados y conceptos requeridos se han derivado para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, lo cual no es un problema ya que definiendo variables auxiliares podemos reescribir cualquier sistema en esta forma. Un sistema de ecuaciones de evolución de primer orden se puede escribir como

$$\partial_t \underline{u} + \mathbb{M}^i \partial_i \underline{u} = \underline{S}(\underline{u}). \quad (1.48)$$

Dada una dirección caracterizada por un vector arbitrario \vec{s} ³, podemos

³Usualmente se asume que el vector es unitario, pero en este análisis dejo su norma libre ya que con frecuencia se consideran los vectores coordenados, cuya norma no necesariamente es uno.

descomponer el operador diferencial en la parte normal y tangente

$$\partial_t \underline{u} + \mathbb{C} s^i \partial_i \underline{u} + \mathbb{M}^a h_a^i \partial_i \underline{u} = \underline{S}(\underline{u}), \quad \mathbb{C} := \frac{\mathbb{M}^a s_a}{|s|^2} \quad (1.49)$$

con $h_a^i = \delta_a^i - s_a s^i / |s|^2$ el proyector sobre el subespacio normal al vector \vec{s} . Aquí definimos el símbolo principal $\mathbb{C}(\vec{s})$, que juega un papel clave en la clasificación de los sistemas.

Un sistema de este tipo se dice hiperbólico si para cualquier dirección los valores propios del símbolo principal son reales. La clasificación se refina en base a otras propiedades que son:

- *Débilmente hiperbólico* si es hiperbólico pero el símbolo principal no posee un conjunto completo de eigenvectores.
- *Fuertemente hiperbólico* cuando sí cuenta con un conjunto completo de eigenvectores en todo el espacio y para toda dirección.
- *Simétricamente hiperbólico* si además de ser hiperbólico las matrices \mathbb{M}^i son simétricas.

El énfasis de la existencia de sistemas fuertemente hiperbólicos radica en que formalmente están bien puestos con base en que siempre es posible definir una norma conservada que se construye en base a los eigenvectores del símbolo principal. Para cada sistema fuertemente hiperbólico existe un operador simetrizador H tal que

$$H\mathbb{C} - \mathbb{C}^T H = 0. \quad (1.50)$$

En términos de la matriz R , cuyas columnas son los vectores propios del sistema, el simetrizador toma la forma

$$H = (R^{-1})^T R^{-1}. \quad (1.51)$$

El simetrizador define localmente el producto interior

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle := \underline{u}^\dagger H \underline{v}, \quad (1.52)$$

y por la propiedad (1.50) la norma asociada a este producto es conservada, mostrando con ello que el sistema está bien puesto. Que este producto dependa de la dirección de propagación elegida no altera las conclusiones, como se expone en [156].

Para un sistema fuertemente hiperbólico las funciones propias forman una base y se definen como

$$\underline{w} = R^{-1}\underline{u} . \quad (1.53)$$

Entonces, al considerar los términos asociados al operador tangente como fuentes el sistema de ecuaciones toma a parte principal la forma

$$\partial_t \underline{w} + R^{-1} C R s^i \partial_i \underline{w} = \partial_t \underline{w} + \lambda_w s^i \partial_i \underline{w} \simeq 0 . \quad (1.54)$$

En esta base el símbolo principal es diagonal, de modo que el sistema se desacopla en ecuaciones de advección para las funciones propias con velocidades características dadas por los valores propios de modo $v^i = \lambda_w s^i$. Vemos que el cambiar la norma del vector de dirección \vec{s} induce únicamente un reescalamiento de los eigenvalores de modo que las componentes de la velocidad de las funciones propias son independientes de esta.

Habiendo desarrollado estos conceptos, es posible ver que que las formulaciones de ADM y York no son adecuadas al no ser fuertemente hiperbólicas [48]. La formulación original de ADM sufre aún más al no ser fuertemente hiperbólico el sistema de las constricciones, y es por ello que las violaciones numéricas a las constricciones inducen inestabilidades que hacen irremediable su uso. Esto no significa que la Relatividad General no pueda ser formulada como un problema de valores iniciales bien puesto, sino que a diferencia de otras teorías el sistema resultante de la formulación variacional no lo es. El sistema de York tampoco es bien puesto en general, pero su existencia motiva la posibilidad de recombinar las ecuaciones de evolución y constricciones para encontrar aquellos que si lo son. En esta dirección se han propuesto muchos sistemas (Bona-Masso, NOR, BSSN, Z4) [42, 43, 135, 31, 178, 137, 39, 40, 44, 45] que son fuertemente hiperbólicos (una revisión muy completa puede consultarse en [156]) . En la di-

rección del grupo nos hemos enfocado en la implementación de la formulación BSSN por mostrarse empíricamente mucho más ventajosa.

1.3.3 Formulación BSSN generalizada

La formulación BSSN [137, 31]⁴ ha probado ser muy robusta en tanto a su aplicación numérica y es en la que la mayoría de los grupos de relatividad numérica trabajan hoy en día. La formulación BSSN estándar está expresada en términos de densidades tensoriales y variables de conexión que no son tensores y es por ello no se puede utilizar en coordenadas curvilíneas. Para estudiar sistemas con simetría esférica o axial que son mejor descritos en sistemas de coordenadas curvilíneas es necesario utilizar una versión generalizada [47, 12].

Para esta formulación se introduce una métrica auxiliar de fondo $\hat{\gamma}_{ij}$ conocida a todo tiempo y fija, que se usa para poder expresar el tensor de curvatura en términos de cantidades tensoriales. Se toma un reescalamiento conforme de la métrica física γ_{ij} , donde el factor conforme representa el cociente del elemento de volumen físico respecto al reescalado:

$$\hat{\gamma}_{ij} := e^{-4\phi} \gamma_{ij}, \quad (1.55)$$

$$\phi := \frac{1}{12} \ln(\gamma/\hat{\gamma}), \quad (1.56)$$

Se define un tensor de curvatura extrínseca sin traza, al cual también se reescala con el mismo factor conforme y se promueve la traza a variable independiente:

$$\hat{A}_{ij} := e^{-4\phi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad (1.57)$$

⁴Originalmente propuesta en 1987 por Nakamura, Oohara y Kojima [137]. La formulación ganó popularidad con un trabajo de Baumgarte y Shapiro donde mostraban sistemáticamente su superioridad respecto a la formulación ADM [31], y la versión más conocida se basa en este trabajo y uno previo de Shibata y Nakamura [179].

y se introducen nuevas variables auxiliares, las *funciones de conexión conformes*

$$\hat{\Delta}^i := \hat{\gamma}^{jk} \hat{\Delta}_{jk}^i = \hat{\gamma}^{jk} (\hat{\Gamma}_{jk}^i - \hat{\Gamma}_{jk}^i). \quad (1.58)$$

La definición anterior es equivalente a la expresión:

$$\hat{\Delta}^i = -\hat{\nabla}_j \hat{\gamma}^{ij} - \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \ln(\hat{\gamma}/\hat{\gamma}^0). \quad (1.59)$$

Al promover este vector a formar parte de las variables del sistema estamos asumiendo una constricción adicional

$$C_{\Delta}^i := \hat{\Delta}^i + \hat{\nabla}_j \hat{\gamma}^{ij} + \frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j \ln(\hat{\gamma}/\hat{\gamma}^0) = 0. \quad (1.60)$$

Esta definición podría parecer bastante tautológica pero será importante posteriormente para el análisis.

El tensor de Ricci físico se puede descomponer en una contribución del factor conforme sumada al tensor de curvatura correspondiente al espacio con la métrica conforme. Esto es $R_{ij} = \hat{R}_{ij} + R_{ij}^{\phi}$, con

$$R_{ij}^{\phi} := -2 \left[\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j \phi + 2 \left(\hat{\nabla}_i \phi \hat{\nabla}_j \phi - \hat{\gamma}_{ij} \hat{\nabla}^m \phi \hat{\nabla}_m \phi \right) + \hat{\gamma}_{ij} \hat{\nabla}^m \hat{\nabla}_m \phi \right]. \quad (1.61)$$

El tensor de Ricci de la métrica conforme, al escribirlo en términos de la métrica auxiliar queda:

$$\hat{R}_{ab} = -\frac{1}{2} \hat{\gamma}^{mn} \hat{\nabla}_m \hat{\nabla}_n \hat{\gamma}_{ab} + \hat{\gamma}_{m(a} \hat{\nabla}_{b)} \hat{\Delta}^m + 2 \hat{\Delta}^{mn} {}_{(a} \hat{\Delta}_{b)mn} + \hat{\Delta}^{mn} {}_a \hat{\Delta}_{mnb}. \quad (1.62)$$

Reescrito de este modo, el tensor de Ricci usado en la formulación BSSN resulta ser igual al calculado a partir de las derivadas de la métrica tal como aparece en la formulación ADM-York siempre y cuando se satisfaga la ecuación de constricción asociada a $\hat{\Delta}^i$. La relación entre ambos es

$$R_{ab}^{(\text{BSSN})} = R_{ab}^{(\text{ADM})} + \hat{\gamma}_{m(a} \hat{\nabla}_{b)} C_{\Delta}^m. \quad (1.63)$$

Usando las definiciones anteriores podemos reescribir las ecuaciones de constricción de la formulación ADM en términos del tensor métrico conforme $\hat{\gamma}_{ab}$, la curvatura extrínseca sin traza \hat{A}_{ab} , el logaritmo del factor conforme ϕ , la expansión de la congruencia normal codificada en K y el vector $\hat{\Delta}^i$ y sus derivadas. Estas quedan

$$0 = \mathcal{H}^{(\text{ADM})} = R^{(\text{BSSN})} - e^{-4\phi} \hat{\nabla}_m C_{\Delta}^m - \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} + \frac{2}{3} K^2 - 16\pi\rho, \quad (1.64a)$$

$$0 = \mathcal{M}_i^{(\text{ADM})} = \hat{\nabla}_j \hat{A}_i^j + 6\hat{A}_i^j \partial_j \phi - \frac{2}{3} \partial_i K - 8\pi j_i. \quad (1.64b)$$

En la expresión para la constricción Hamiltoniana el término $R^{(\text{BSSN})}$ corresponde al cálculo del escalar de Ricci usando las ecuaciones (1.61) y (1.62). Entonces en la formulación BSSN podemos definir ecuaciones de constricción dadas por $\mathcal{H}^{(\text{BSSN})} = \mathcal{H}^{(\text{ADM})} + e^{-4\phi} \hat{\nabla}_m C_{\Delta}^m$ y $\mathcal{M}_i^{(\text{BSSN})} = \mathcal{M}_i^{(\text{ADM})}$, a fin de omitir el término nulo asociado a la ecuación de constricción adicional (1.60).

Las ecuaciones de evolución se siguen de las ecuaciones ADM (o equivalentemente de las ADM-York), pero como ya se expuso anteriormente, al añadir cualquier combinación lineal de las ecuaciones de constricción el sistema resultante es consistente con las ecuaciones de campo. Usando esto podemos proponer una modificación a la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca, propiamente

$$\dot{K}_{ab}^{(\text{BSSN})} = \dot{K}_{ab}^{(\text{York})} - \frac{\alpha}{3} \gamma_{ab} \mathcal{H}^{(\text{ADM})} + \alpha \hat{\gamma}_{m(a} \hat{\nabla}_{b)} C_{\Delta}^m. \quad (1.65)$$

Esta elección se usa para eliminar una contribución del escalar de Ricci que aparece al momento de calcular la ecuación de evolución para la traza de la curvatura extrínseca. Tomando esto en consideración las ecuaciones de evolución

resultantes son:

$$\partial_t \hat{\gamma}_{ab} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{\gamma}_{ab} - 2\alpha \hat{A}_{ab} - \frac{2}{3} \sigma \hat{\gamma}_{ab} \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (1.66a)$$

$$\partial_t \phi = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \phi - \frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (1.66b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{A}_{ab} = & \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{A}_{ab} + e^{-4\phi} \left\{ \alpha R_{ab} - {}^{(3)}\nabla_i {}^{(3)}\nabla_j \alpha - 8\pi \alpha S_{ab} \right\}^{TF} \\ & + \alpha \left(K \hat{A}_{ab} - 2 \hat{A}_{ka} \hat{A}_b^k \right) - \frac{2}{3} \sigma \hat{A}_{ab} \hat{\nabla}_m \beta^m, \end{aligned} \quad (1.66c)$$

$$\partial_t K = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K + \alpha \left(\hat{A}_{ab} \hat{A}^{ab} + \frac{1}{3} K^2 \right) - {}^{(3)}\nabla^2 \alpha + 4\pi \alpha (\rho + S), \quad (1.66d)$$

donde el superíndice TF significa la parte sin traza de la expresión entre llaves. Curiosamente el término que se añadió a la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca no tiene repercusión en la ecuación de evolución para \hat{A}_{ab} ya que se cancela automáticamente al tomar la parte sin traza. El parámetro σ se incluye para contemplar los casos de evolución Lagrangiano ($\partial_t \hat{\gamma} = 0$, con $\sigma = 1$) y Euleriano ($(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \hat{\gamma} = 0$ con $\sigma = 0$). Para promover las variables $\hat{\Delta}^i$ a funciones dinámicas obtenemos sus ecuaciones de evolución partiendo de su definición, ecuación (1.59). En este caso se añade también un múltiplo arbitrario de la restricción de momento $\xi \alpha \hat{\gamma}^{ij} \mathcal{M}_j$, dando como resultado

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^i = & \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{\Delta}^i + \hat{\gamma}^{jk} \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}_k \beta^i - 2 \hat{A}^{ij} \partial_j \alpha - \alpha (2 - \xi) \hat{\nabla}_j \hat{A}^{ij} + 2\alpha \hat{A}^{jk} \hat{\Delta}_{jk}^i \\ & + \alpha \xi \left(6 \hat{A}^{ij} \partial_j \phi - \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{ij} \partial_j K - 8\pi \hat{\gamma}^{im} j_m \right) \\ & + \frac{\sigma}{3} \left[\hat{\nabla}^i (\hat{\nabla}_m \beta^m) + 2 \hat{\Delta}^i \hat{\nabla}_m \beta^m \right]. \end{aligned} \quad (1.66e)$$

Donde se cumple $\xi > 1/2$ para obtener un sistema fuertemente hiperbólico. De lo contrario el sistema resulta peor incluso que el sistema ADM original, pero se ha comprobado que cumpliendo esta desigualdad el sistema es muy robusto. Con esta elección se tiene que la restricción adicional evoluciona de acuerdo

a

$$\partial_t C_{\Delta}^a = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} C_{\Delta}^a + \alpha \xi \gamma^{ab} \mathcal{M}_b + \frac{2}{3} \sigma C_{\Delta}^a \hat{\nabla}_m \beta^m \quad (1.67a)$$

En la práctica para este parámetro suele tomarse $\xi = 2$, ya que esta elección implica que las velocidades de propagación de todos los campos no asociados a la foliación es igual a la velocidad de la luz.

Condiciones hiperbólicas de norma (Norma estándar)

Para cerrar el sistema de ecuaciones que describen la evolución del espacio-tiempo es necesario especificar la evolución de las fuentes de materia, y las condiciones de norma que determinan la elección de foliación y coordenadas. Este tema merece mucha más atención y en este apartado me limitaré a especificar por completez las condiciones que han tenido mayor éxito en las simulaciones de colisiones binarias. Una forma directa de motivar estas condiciones es observando que las variables K y $\hat{\Delta}^a$ tienen respectivamente como fuentes a parte principal términos que van como los laplacianos de α y β^a respectivamente. Entonces podemos construir condiciones de foliación hiperbólicas al considerar a estas variables como fuentes de la evolución de las funciones de norma:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha \sim K & \Rightarrow \partial_t^2 \alpha \sim \nabla^b \nabla_b \alpha , \\ \partial_t \beta^a \sim \hat{\Delta}^a & \Rightarrow \partial_t^2 \beta^a \sim \nabla^b \nabla_b \beta^a . \end{aligned}$$

La condición de foliación más común que cumple con esta característica es conocida como la familia Bona-Maso [41], porque en realidad representa un conjunto de condiciones parametrizado por una función positiva y arbitraria del lapso

$$\partial_t \alpha = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \alpha - \alpha^2 f(\alpha) K . \quad (1.68)$$

Es posible mostrar que en ausencia del vector de corrimiento, esta ecuación se puede integrar para dar condiciones algebraicas del tipo $\alpha = F(\gamma)$, de las cuales la condición de foliación harmónica $\alpha = \sqrt{\gamma}$ y la condición "1+log", $\alpha = 1 + \ln \gamma$ son casos particulares. Estas dos últimas son casos dignos de mencionarse ya que la condición de foliación harmónica ha sido ampliamente empleada en estudios analíticos de las propiedades de las ecuaciones de campo, y la segunda es una condición que empíricamente ha mostrado ser muy robusta en implementaciones numéricas. Estas pueden escribirse como una ecuación del tipo (1.68) eligiendo $f(\alpha) = 1$ y $f(\alpha) = 2/\alpha$ respectivamente.

La condición para el vector de corrimiento más usada actualmente es conocida como *Gamma Driver* y fue propuesta de modo empírico. Se puede observar analíticamente que esta elección resulta en una ecuación hiperbólica que emula en buena medida la condición de distorsión mínima. Usualmente esta condición se implementa a segundo orden como el subsistema

$$\partial_t \beta^a = \beta^b \partial_b \beta^a + B^a, \quad (1.69)$$

$$\partial_t B^a = \beta^b \partial_b B^a + \alpha^2 c_s (\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \hat{\Delta}^a - \eta B^a, \quad (1.70)$$

donde c_s es un parámetro que fija la velocidad de propagación y η añade términos disipativos para evitar oscilaciones fuertes.

Hiperbolicidad de la formulación BSSN generalizada

En este apartado presento un análisis de hiperbolicidad detallado del sistema BSSN generalizado basado en el análisis de [4]. La notación elegida es consistente con [13], trabajo que se expondrá en el próximo capítulo.

Para el sistema BSSN generalizado, es conveniente definir las cantidades

auxiliares

$$q_a := \partial_a \ln \alpha, \quad (1.71a)$$

$$\hat{d}_{abc} := \frac{1}{2} \partial_a \hat{\gamma}_{bc}, \quad (1.71b)$$

$$\chi_a := \partial_a \phi. \quad (1.71c)$$

A las primeras derivadas de la métrica conforme \hat{d}_{abc} las denotamos con la misma marca para indicar que subimos y bajamos índices con dicha métrica. Por el momento asumimos que el vector de corrimiento es *una función dada*. En este caso tenemos el vector de sistema $\underline{u} = (q_a, \chi_a, \hat{d}_{abc}, K, \hat{A}_{ab}, \hat{\Delta}^a)$. A diferencia de la formulación original, el determinante de la métrica conforme no es constante en este caso pero las combinaciones $\hat{\gamma}^{ab} \hat{d}_{cab}$ evolucionan de una manera casi trivial. En lo siguiente denotaremos $\partial_0 := \partial_t - \beta^i \partial_i$ al operador diferencial que contiene los términos principales de la derivada en la dirección normal a la foliación. El sistema de ecuaciones de evolución asumiendo foliación del tipo Bona-Masso queda a parte principal

$$\partial_0 q_a \simeq -\alpha f \partial_a K, \quad (1.72a)$$

$$\partial_0 \chi_a \simeq -\frac{\alpha}{6} \partial_a K + \frac{\sigma}{6} \beta^l \partial_a (\hat{\gamma}^{mn} \hat{d}_{lmn}), \quad (1.72b)$$

$$\partial_0 K \simeq -\alpha e^{-4\phi} \hat{\gamma}^{mn} \partial_m q_n, \quad (1.72c)$$

$$\partial_0 \hat{d}_{abc} \simeq -\alpha \partial_a \hat{A}_{bc} - \frac{\sigma}{3} \hat{\gamma}_{bc} \beta^l \partial_a (\hat{\gamma}^{mn} \hat{d}_{lmn}), \quad (1.72d)$$

$$\partial_0 \hat{A}_{ab} \simeq -\alpha e^{-4\phi} \partial_m \Lambda_{ab}^m, \quad \Lambda_{ab}^m := \left[\hat{d}_{ab}^m + \delta_{(a}^m (q + 2\chi - \hat{\Delta})_{b)} \right]^{TF}, \quad (1.72e)$$

$$\begin{aligned} \partial_0 \hat{\Delta}^i &\simeq -\alpha \left[(2 - \xi) \hat{\gamma}^{il} \hat{\gamma}^{mn} \partial_m \hat{A}_{ln} + \frac{2}{3} \xi \hat{\gamma}^{il} \partial_l K \right] \\ &\quad + \frac{\sigma}{3} \hat{\gamma}^{ia} \beta^b \partial_a (\hat{\gamma}^{mn} \hat{d}_{bmn}). \end{aligned} \quad (1.72f)$$

En lugar de calcular el polinomio característico de una matriz de dimensión 33, buscamos por inspección las funciones propias. Primeramente tenemos tres combinaciones que no se propagan sobre la malla, correspondientes a las

derivadas del elemento de volumen

$$s^a \hat{\gamma}^{mn} \hat{d}_{amn} . \quad (1.73)$$

Tenemos otras combinaciones que físicamente no se propagan, esto es que su velocidad de propagación compensa al vector de corrimiento $\lambda = -\beta^a s_a / |s|^2$

$$h_a^b \hat{d}_{bmn} , \quad h_a^b q_b , \quad h_a^b \chi_b , \quad (1.74)$$

$$s^a (6f \chi_a + f \hat{\gamma}^{mn} \hat{d}_{amn} - q_a) , \quad (1.75)$$

$$\hat{\Delta}^i - (2 - \xi) \hat{d}_m^{mi} - 4\xi \hat{\gamma}^{im} \chi_m - \hat{\gamma}^{mn} \hat{d}_{mn}^i . \quad (1.76)$$

Están divididos en tres grupos por conveniencia. Los primeros 16 (1.74) corresponden a proyecciones normales a la dirección de propagación, mientras que es posible checar que las combinaciones (1.76) son modos que físicamente no aparecen pues violan las constricciones.

Hasta aquí tenemos un total de 21 funciones propias y aún no se toma en cuenta el tensor de curvatura extrínseca sin traza. Las ecuaciones para q_a y K están escritas de modo que podemos identificar un par de funciones propias asociadas a la foliación que se propagan con velocidades λ_{\pm}^{α} respectivamente:

$$\omega_{\pm}^{\alpha} = s^a q_a \pm |s| \sqrt{f} K , \quad \lambda_{\pm}^{\alpha} = -\frac{\beta^a s_a}{|s|^2} \pm \frac{\alpha}{|s|} \sqrt{f} . \quad (1.77)$$

Para que estas velocidades sean reales es necesario que $f > 0$. Las 10 funciones propias restantes son más difíciles de identificar y están relacionadas con las componentes de la curvatura extrínseca sin traza. Primeramente los modos transversos/sin traza:

$$\begin{aligned} \omega_{\pm}^{\text{TT}}{}_{pq} &= \left(s_m \Lambda_{ab}^m h_p^a h_q^b + \frac{h_{pq}}{2|s|^2} s^i s^j s_m \Lambda_{ij}^m \right) \\ &\quad \pm |s| e^{4\phi} \left(\hat{A}_{ab} h_p^a h_q^b + \frac{h_{pq}}{2|s|^2} s^i s^j \hat{A}_{ij} \right) , \\ \lambda_{\pm}^{\text{TT}} &= -\frac{\beta^a s_a}{|s|^2} \pm \frac{\alpha}{|s|} . \end{aligned} \quad (1.78)$$

Estos son cuatro modos en total, pues están definidos sobre el espacio transversal y son simétricos sin traza $h^{ab}\omega_{\pm pq}^{TT} = 0$, por lo que cada uno de estos tensores tiene dos componentes independientes. Esto se puede ver explícitamente trabajando más las expresiones (y multiplicando por $|s|^{-1}$ que es una amplitud superflua)

$$\begin{aligned}\omega_{\pm pq}^{TT} &= \left(\frac{s^m}{|s|} \hat{d}_{mab} \pm \hat{A}_{ab} \right)^{TT} \\ &\equiv \left(\frac{s^m}{|s|} \hat{d}_{mab} \pm \hat{A}_{ab} \right) \left(h_p^a h_q^b - \frac{h_{pq}}{2} h^{ab} \right).\end{aligned}\quad (1.79)$$

La velocidad de propagación es la de la luz en relación al vector de dirección. Todas estas propiedades apuntan en que estos modos están directamente relacionados con ondas gravitacionales. Para explorar esta conexión definimos en términos de las componentes en la base de una triada que tiene $\vec{e}_1 = \vec{s}$

$$\omega_{\pm}^+ := \omega_{\pm (2)(2)}^{TT} - \omega_{\pm (3)(3)}^{TT} \quad (1.80a)$$

$$\omega_{\pm}^{\times} := 2\omega_{\pm (2)(3)}^{TT} \quad (1.80b)$$

Ahora volviendo a las funciones propias, las componentes mixtas

$$\begin{aligned}\omega_q^{\pm} &= s^a h_q^b \left(s_m \Lambda_{ab}^m \pm |s| e^{4\phi} \sqrt{\frac{\xi}{2}} \hat{A}_{ab} \right), \\ \lambda_q^{\pm} &= -\frac{\beta^a s_a}{|s|^2} \pm \frac{\alpha}{|s|} \sqrt{\frac{\xi}{2}}.\end{aligned}\quad (1.81)$$

Nuevamente la condición de velocidades reales nos restringe el valor del parámetro $\xi > 0$. Desarrollando

$$\omega_q^{\pm} = e^{4\phi} s^a h_q^b \left(s^m \hat{d}_{mab} \pm \sqrt{\frac{\xi}{2}} \hat{A}_{ab} \right) + \frac{1}{2} h_q^a (q_a + 2\xi_a - \hat{\Delta}_a) \quad (1.82)$$

Los últimos modos son longitudinales totalmente

$$\begin{aligned}
\omega_{\pm}^l &= \left(s_m s^a s^b \Lambda_{ab}^m - \frac{2}{3} |s|^2 s^m q_m \right) \\
&\quad \pm |s| e^{4\phi} \sqrt{\frac{2\xi - 1}{3}} \left(s^a s^b \hat{A}_{ab} - \frac{2}{3} |s|^2 e^{-4\phi} K \right), \\
\lambda_{\pm}^l &= -\frac{\beta^a s_a}{|s|^2} \pm \frac{\alpha}{|s|} \sqrt{\frac{2\xi - 1}{3}}.
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Estos últimos modos restringen aún más el valor de ξ de modo que para que las velocidades sean reales $\xi > 1/2$. En particular se observa que la elección $\xi = 2$ resulta en que todos los modos asociados a las componentes de la curvatura extrínseca sin traza \hat{A}_{ij} se propagan a la misma velocidad, que es la velocidad de la luz.

Se encontró un conjunto completo de funciones propias y todos los valores propios son reales, por lo que el sistema es fuertemente hiperbólico.

También es interesante analizar la hiperbolicidad del sistema asociado a las constricciones. En [96] se presenta este sistema para la formulación BSSN y el siguiente desarrollo sigue el de la referencia, aunque allí utilizan una reparametrización un poco obscura. A parte principal las constricciones quedan

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &\simeq e^{-4\phi} \left(-\hat{\gamma}^{mn} \partial_m \hat{d}_{na}^a - 8\hat{\gamma}^{mn} \partial_m \chi_n + \partial_m \hat{\Delta}^m \right), \\
\mathcal{M}^i &\simeq \hat{\gamma}^{ia} \hat{\gamma}^{mn} \partial_m \hat{A}_{na} - \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{im} \partial_m K, \\
C_{\Delta j}^i &\simeq \partial_j \left(\hat{\Delta}^i - 2\hat{d}_m^{mi} + \hat{d}_m^i{}^m \right).
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Como la definición de $\hat{\Delta}$ implica únicamente primeras derivadas de la métrica conforme, es necesario elevar las derivadas de esa definición a constricciones del sistema. También se tiene como restricción $\hat{A}_i^i = 0$ pero me parece que es totalmente sano ignorarla (su evolución es cero a parte principal, y es proporcional a la misma restricción al considerarla completa). Bajo estas

consideraciones el sistema de constricciones queda a parte principal

$$\begin{aligned}
\partial_0 \mathcal{H} &\simeq -\alpha e^{-4\phi} (2 - \xi) \partial_m \mathcal{M}^m, \\
\partial_0 \mathcal{M}^i &\simeq \frac{\alpha}{6} \hat{\gamma}^{im} \partial_m \mathcal{H} + \frac{\alpha}{2} e^{-4\phi} \hat{\gamma}^{mn} \partial_m C_{\Delta n}^i, \\
\partial_0 C_{\Delta j}^i &\simeq \alpha \xi \partial_j \mathcal{M}^i.
\end{aligned} \tag{1.85}$$

La evolución de la última está dada únicamente porque añadimos a la ecuación de evolución para $\hat{\Delta}^i$ un múltiplo de la restricción de momento.

Tenemos entonces modos que no se propagan

$$h_c^b C_{\Delta b}^i, \quad \xi \mathcal{H} + e^{-4\phi} (2 - \xi) C_{\Delta a}^a. \tag{1.86}$$

En caso que $\xi = 2$, la restricción Hamiltoniana a parte principal no se propaga.

Los modos restantes están asociados a los que corresponden a proyecciones longitudinales del sistema de evolución. El asociado a la proyección mixta

$$\Omega_{\pm}^a = h_b^a \left(\mathcal{M}^b \mp \frac{1}{|s| \sqrt{2\xi}} s^n C_{\Delta n}^b \right), \quad \lambda_{\pm} = -\frac{\beta^a s_a}{|s|^2} \pm \frac{\alpha}{|s|} \sqrt{\frac{\xi}{2}}. \tag{1.87}$$

Los modos longitudinales

$$\Omega_{\pm}^l = \left(\frac{e^{4\phi}}{6} \mathcal{H} + \frac{s_a s^b}{2|s|^2} C_{\Delta b}^a \right) \mp \frac{1}{|s|} \sqrt{\frac{2\xi - 1}{3}} s_a \mathcal{M}^a, \quad \lambda_{\pm}^l = -\frac{\beta^a s_a}{|s|^2} \pm \frac{\alpha}{|s|} \sqrt{\frac{2\xi - 1}{3}}. \tag{1.88}$$

1.3.4 Datos iniciales

La elección de datos iniciales que representen una situación física particular constituye en sí un problema interesante ya que cualesquiera que estos sean deben satisfacer las constricciones que forman un sistema de cuatro ecuaciones elípticas acopladas, y en general los enfoques de aproximación numéricos

conlleven altos costos computacionales⁵. Las soluciones exactas conocidas son muy pocas y muchas de ellas son soluciones completas de las ecuaciones de Einstein, de las cuales no se puede esperar obtener nueva información y sólo pueden servir como pruebas para calibrar los códigos. Aún así es útil contar con soluciones exactas ya que en base a ellas es posible construir funciones de prueba (*Ansatz*) adecuados para describir distintas situaciones físicas (distribución de materia/ondas gravitacionales alrededor de agujeros negros, etc.).

Un procedimiento bastante estandarizado es la llamada descomposición de York-Lichnerowicz, en la cual se asume que la métrica física está relacionada conformemente a una métrica conocida

$$\gamma_{ij} = \bar{\psi}^4 \bar{\gamma}_{ij}. \quad (1.89)$$

La métrica conforme y el factor que los relaciona no tienen por qué coincidir con las cantidades fundamentales de la formulación BSSN. Al hacer esta elección, la constricción Hamiltoniana (1.64a) se reduce a

$$-\frac{8}{\bar{\psi}^5} \bar{\nabla}^2 \bar{\psi} + \frac{\bar{R}}{\bar{\psi}^4} - A_{ij} A^{ij} + \frac{2}{3} K^2 - 16\pi\rho = 0, \quad (1.90)$$

donde A_{ij} es la parte sin traza del tensor de curvatura extrínseca. De este modo la constricción Hamiltoniana resulta en una ecuación elíptica no lineal que debe satisfacer el factor conforme. Si se conoce a priori el tensor de curvatura extrínseca, el problema de encontrar datos iniciales se reduce a resolver esta ecuación.

Para especificar la curvatura extrínseca es necesario satisfacer las constrictiones de momento, ecuaciones (1.64b). Estas presentan un reto más interesante que no se abordará en esta sección, pero podemos mencionar que existen distintas estrategias de reescalamientos conformes de la parte sin traza que simplifican considerablemente las ecuaciones. Para las aplicaciones desarrolladas en este trabajo la estrategia general fue buscar situaciones en las que las

⁵Actualmente existen técnicas que han mejorado la eficiencia de los algoritmos para obtener soluciones a ecuaciones de este tipo basados en múltiples discretizaciones y/o métodos espectrales [149, 90].

constricciones de momento se satisfacen de la manera más trivial posible. Por ejemplo, al imponer que el dato inicial se de en un instante momentáneamente en reposo, tanto la densidad de momento como el tensor de curvatura extrínseca se anulan trivialmente.

1.3.5 Condiciones de frontera

La formulación del problema de valores iniciales debe incluir las consideraciones tomadas en las fronteras. Usualmente cuando un problema está definido en un dominio finito delimitado por una frontera bastan consideraciones físicas para determinar las condiciones adecuadas. No obstante, cuando analizamos problemas definidos en un dominio infinito (como al modelar fenómenos astrofísicos) es necesario por limitaciones técnicas tomar un dominio finito e introducir fronteras artificiales.⁶

Existen distintas técnicas para aplicar condiciones de frontera adaptadas a casos particulares, pero en general se busca que al considerar un dominio con fronteras artificiales estas cumplan una serie de condiciones:

- **Estabilidad:** en el sentido de que el comportamiento considerado en las fronteras no afecte las propiedades de un sistema de ecuaciones de evolución bien puesto a nivel analítico, ni la estabilidad del método de integración una vez discretizado.
- **Física:** de modo que una solución obedezca las ecuaciones de evolución como si no estuviera presente una frontera. En este sentido para sistemas constreñidos como las ecuaciones de Einstein nos interesa también que el comportamiento en las fronteras artificiales no introduzcan violaciones a las ecuaciones de restricción.
- **Aislamiento:** pensando que para un sistema aislado, las condiciones de frontera no introducen efectos que pueden interpretarse como información proveniente del exterior.

⁶Existen técnicas para compactificar dominios infinitos para aplicar condiciones de frontera físicas, pero requieren de otras consideraciones prácticas.

El tipo de condiciones de frontera es dependiente del sistema particular considerado y del problema que se está abordando. Para sistemas con simetría traslacional es adecuado considerar condiciones de frontera periódicas, cuya implementación es trivial y reproducen la física adecuadamente. Un caso que puede tratarse de este modo es al hacer estudios cosmológicos.

Un tipo de condiciones de frontera bastante difundido para sistemas aislados consiste en considerar el comportamiento asintótico de las soluciones. Como en general para este tipo de sistemas la información que llega a las fronteras tiene asintóticamente el comportamiento de ondas esféricas salientes del tipo:

$$u = u_0 + \frac{f(r - vt)}{r}, \quad (1.91)$$

como el perfil particular de la onda saliente f no es relevante, este comportamiento se puede modelar a nivel diferencial como

$$\partial_t u + v \partial_r u + v \frac{u - u_0}{r} = 0. \quad (1.92)$$

Este tipo de condiciones de frontera generalmente mantienen las soluciones estables pero es posible que introduzcan reflexiones espurias por no cumplir todas las consideraciones físicas. Estas reflexiones se minimizan al ubicar lejos las fronteras y este es un procedimiento bastante usado en la práctica.

Una forma de mejorar este tipo de condiciones para sistemas fuertemente hiperbólicos consiste en identificar las funciones propias del sistema y aplicar condiciones de frontera sobre las mismas. En cada punto de la frontera podemos fijarnos en la propagación en dirección normal \vec{s} a la misma obteniendo un conjunto de funciones propias ω_λ que a parte principal evolucionan conforme a ecuaciones de advección:

$$\partial_t \omega_\lambda + \lambda \partial_{\vec{s}} \omega_\lambda \simeq 0. \quad (1.93)$$

entonces, las funciones que se propagan hacia afuera de las fronteras se dejan evolucionar libremente, mientras que las entrantes se suprimen.

1.4 Soluciones astrofísicas y agujeros negros

La simplificación más significativa en la mecánica clásica consiste en asumir partículas puntuales, esto equivale a requerir que la distribución de materia sea singular. En relatividad general esta hipótesis tiene implicaciones mucho más trascendentes y por eso debe ser tratada con cuidado. Su consideración ha llevado al desarrollo de toda la teoría alrededor del concepto de Agujeros Negros, en el que las singularidades no se deben solamente a la materia, sino también a la geometría del espacio-tiempo.

En la gravitación newtoniana es posible encontrar soluciones para distribuciones de materia singulares. Partiendo de la solución exterior (fuera del soporte compacto de la distribución de materia), estática y esféricamente simétrica de (1.1)

$$\phi = -\frac{M}{r}, \quad M = \int_S \rho dV, \quad (1.94)$$

donde la integral se toma en una región S compacta que contiene el soporte de la densidad ρ . Es posible extender esta solución para que sea válida en todo el espacio solamente si en este límite la densidad es singular.

Naturalmente la primera solución no trivial que se tuvo de las ecuaciones de Einstein es una generalización de esta última y corresponde a la métrica de Schwarzschild. Esta solución describe adecuadamente el exterior de cualquier distribución de materia compacta y esférica (lo cual es consecuencia de los teoremas de unicidad [103]), pero su continuación a todo el espacio es altamente no trivial comparado al caso Newtoniano.

1.4.1 Solución exterior de Schwarzschild

Un espacio-tiempo es estacionario si posee un vector de Killing $\vec{\xi}$ temporaloi-de. Este vector induce naturalmente una foliación caracterizada por el campo unitario $\vec{n} = \vec{\xi}/|\vec{\xi}|$. En simetría esférica es posible foliar la sección espacial

con cascarones esféricos de modo que la topología es localmente $\mathbb{R} \times S^2$. Para completar el sistema coordenado asumiendo que puntos pertenecientes a una misma esfera se caracterizan con los ángulos usuales, basta elegir una coordenada radial y una elección natural es el *radio de área*, que asigna a puntos en una esfera la coordenada radial

$$r = \sqrt{\frac{A_S}{4\pi}}, \quad (1.95)$$

donde A_S es el área de la esfera en cuestión. Bajo esta elección, la métrica del espacio-tiempo en coordenadas esféricas toma la forma

$$dS^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.96)$$

Como solamente hay dos incógnitas en esta métrica, las ecuaciones de campo solo poseen dos componentes independientes. Las componentes temporales y radiales de las ecuaciones de Einstein dan

$$\frac{\alpha^2}{r^2} (1 - f - rf') = 8\pi T_{tt}, \quad (1.97)$$

$$\frac{1}{r^2 f} (f - 1) + \frac{2\alpha'}{r\alpha} = 8\pi T_{rr}. \quad (1.98)$$

Las características de las soluciones dependerán fuertemente de las propiedades de la materia, la cual ha de caracterizarse por tener una interacción capaz de generar presión que soporte estructuras estacionarias contra el colapso gravitacional. No obstante, independientemente del tipo de materia, si la distribución tiene soporte compacto, en el exterior $T_{\mu\nu} = 0$ y estas ecuaciones tienen solución dada por

$$\alpha^2 = f = 1 + \frac{C}{r}. \quad (1.99)$$

La constante de integración C se determina por condiciones de empalme de la

métrica. Podemos reescribir en el interior

$$f(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (1.100)$$

con la función nombrada $m(r)$ por conveniencia, entonces $C = -m(r)$ evaluada en la frontera de la distribución. La interpretación de esta función se obtiene sustituyendo este *ansatz* en (1.97) y usando la definición de densidad $\rho = n^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu} = T_{tt}/\alpha^2$, entonces

$$m'(r) = 4\pi\rho r^2, \quad (1.101)$$

o en forma integral

$$m(R) = \int_0^R \oint \rho r^2 d\Omega dr, \quad (1.102)$$

que es justo la expresión newtoniana para la masa contenida al radio R . Este argumento no es suficiente para justificar que $m(r)$ represente la masa del sistema, más usando los conceptos expuestos en el Apéndice B se puede comprobar que lo es. Los requerimientos para que esta solución sea regular son más fuertes que en el caso newtoniano, aparte de que la función de masa se anule en el origen, es necesario que su crecimiento este acotado por el valor de la coordenada radial. De no cumplirse este último requerimiento existe una región del espacio-tiempo en la que las coordenadas t y r intercambian papeles y falla la hipótesis de estacionariedad con que partimos. Esta patología es un indicio de que el espacio-tiempo contiene un agujero negro.

1.4.2 Agujero Negro de Schwarzschild

La solución exterior de Schwarzschild, puede extenderse hasta $r = 0$ tomando $m(r) = M$ constante y considerando que el tensor de energía-momento se anula en todo el espacio-tiempo. En este caso los coeficientes métricos son irregulares en $r = 0, 2M$. En la región $0 \leq r \leq 2M$ las coordenadas (t, r) intercambian papeles y si bien se puede mostrar que la singularidad en $r = 2M$ es solamente

por efecto de las coordenadas (el tensor de curvatura es regular), en $r = 0$ la curvatura diverge y con ello las fuerzas de marea crecen ilimitadamente.

Si en lugar de utilizar el radio de área usamos una coordenada para la cual la sección espacial es conformemente plana, la métrica es en este caso

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2). \quad (1.103)$$

Los valores de α y ψ que resuelven las ecuaciones de Einstein son

$$\alpha^2 = \frac{2\tilde{r} - M}{2\tilde{r} + M}, \quad (1.104)$$

$$\psi = 1 + \frac{M}{2\tilde{r}}. \quad (1.105)$$

Esta solución es la métrica de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas. Estas coordenadas están relacionadas con las usuales por

$$r_{Sch} = \tilde{r} \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}} \right)^2, \quad (1.106)$$

Las constantes de integración son tales que la superficie $r_{Sch} = 2M$ corresponde a $\tilde{r} = M/2$ en estas coordenadas. Otra propiedad importante es que tanto $\tilde{r} \rightarrow 0$ como $\tilde{r} \rightarrow \infty$ corresponden a $r_{Sch} \rightarrow \infty$ y el espacio posee una isometría dada por $\tilde{r} \rightarrow M^2/4\tilde{r}$. En estas coordenadas no se cubre la región interior de la solución de Schwarzschild y se observa una estructura de agujero de gusano que conecta dos universos idénticos (Figura 1.2). La singularidad en $\tilde{r} = 0$ en este caso es efecto coordenado por la compactificación de un universo de extensión infinita en una región coordenada finita. En la Figura 1.3 se muestra la estructura global del espacio-tiempo de Schwarzschild en un diagrama de Penrose; allí mismo se muestran las líneas en las que las coordenadas usuales de Boyer-Lindquist (en las que se usa el radio de área) son constantes.

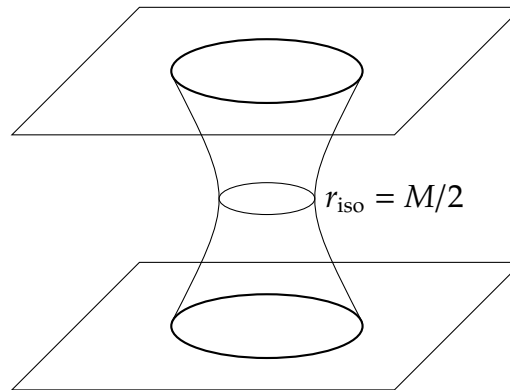


Figura 1.2: Estructura de agujero de gusano en una hipersuperficie de t constante en la métrica de Schwarzschild expresada en coordenadas isotrópicas.

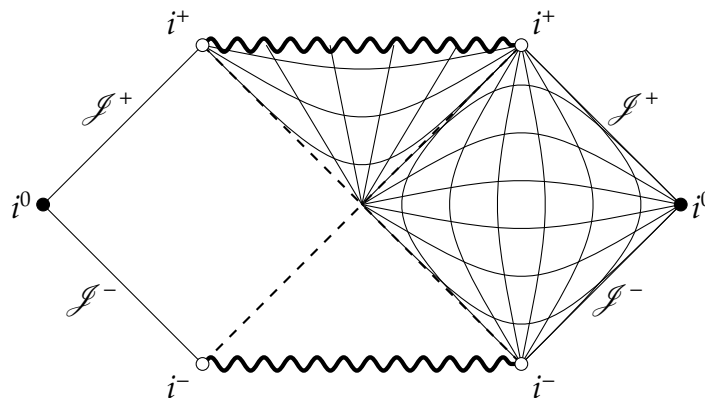


Figura 1.3: Diagrama conforme de un agujero negro de Schwarzschild. Se muestran las líneas para las cuales las coordenadas de Boyer-Lindquist son constantes. Las líneas de r constante tienen extremos en infinitos temporales i^\pm , mientras que las líneas de t constante tienen por un extremo el infinito espacial i^0 , y en el otro se extienden hacia la singularidad.

1.4.3 Agujeros Negros estacionarios

De acuerdo a los teoremas sobre agujeros negros estacionarios, todos ellos pertenecen a la *familia de Kerr-Newman* caracterizada únicamente por tres parámetros: masa M , carga Q y momento angular J . En el caso de agujeros cargados la solución no es de vacío, pues hay que tener en cuenta la contribución del campo electromagnético a las ecuaciones de campo. En coordenadas de *Boyer-Lindquist* (que coinciden con las coordenadas de Schwarzschild cuando $Q = J = 0$) el elemento de línea es

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.107)$$

donde

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (1.108a)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2, \quad (1.108b)$$

$$a = \frac{J}{M}, \quad (1.108c)$$

y el tensor de Faraday escrito como una 2-forma queda

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{\Sigma^2} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \mathbf{d}r \wedge [\mathbf{d}t - a \sin^2 \theta \mathbf{d}\phi] + \frac{2Qar}{\Sigma^2} \cos \theta \sin \theta \mathbf{d}\theta \wedge [(r^2 + a^2) \mathbf{d}\phi - a \mathbf{d}t]. \quad (1.109)$$

Esta 2-forma es la derivada exterior de la 1-forma potencial, que salvo ambigüedades de norma puede escribirse como

$$\mathbf{A} = -\frac{Qr(\mathbf{d}t - a \sin^2 \theta \mathbf{d}\phi)}{\Sigma}. \quad (1.110)$$

Estas expresiones aparecen tal cual en [132] (con $\Sigma = \rho^2$). Pese a que esta es una solución analítica bien conocida dista mucho de ser trivial, citando al libro “Expressions (1.107) for the metric and (1.109) are sufficiently long to be somewhat frightening”. En ese entendido podemos analizar algunas de las características de esta familia de soluciones, pero no entraremos a detalle en la derivación de todas ellas. Históricamente se hallaron primero casos particulares de esta métrica, que son el agujero negro cargado de Reissner-Nordström (RN con $J = 0$) [153, 140] y el agujero negro rotante de Kerr ($Q = 0$)[113].

Esta solución posee varias características que es importante notar. La métrica posee singularidades físicas en $\Sigma = 0$ (el tensor de curvatura diverge), que corresponde a un anillo ya que nos podemos acercar a $r = 0$ sin problemas siempre que no se incida en el plano $\theta = \pi/2$. También se tienen singularidades coordenadas cuando $\Delta = 0$, esto es en las esferas de radios

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \quad (1.111)$$

con $a = J/M$ el momento angular por unidad de masa. Estas esferas corresponden a horizontes de eventos, y la singularidad coordenada aparece por exigir que la métrica sea estacionaria en estas coordenadas. Hay varias formas de remover la singularidad, una de ellas es introducir una coordenada radial cuasi-isotrópica la cual analizaremos adelante más a detalle. La existencia de varios horizontes esta asociado con la topología interna del agujero negro, que es mucho más compleja que el caso de Schwarzschild (Figuras 1.4 y 1.5).

También hay un horizonte de Killing (Apéndice B) asociado al vector de desplazamientos temporales \vec{t} , que es donde el coeficiente métrico g_{tt} se anula, propiamente la superficie

$$r_{ergo} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (1.112)$$

En la región entre el horizonte y esta superficie no pueden haber observadores estáticos y se dice que los sistemas inerciales son arrastrados por la rotación del agujero negro. Para esta geometría la estructura de la singularidad es temporaloide. Cabe notar que la existencia de horizontes está condicionada

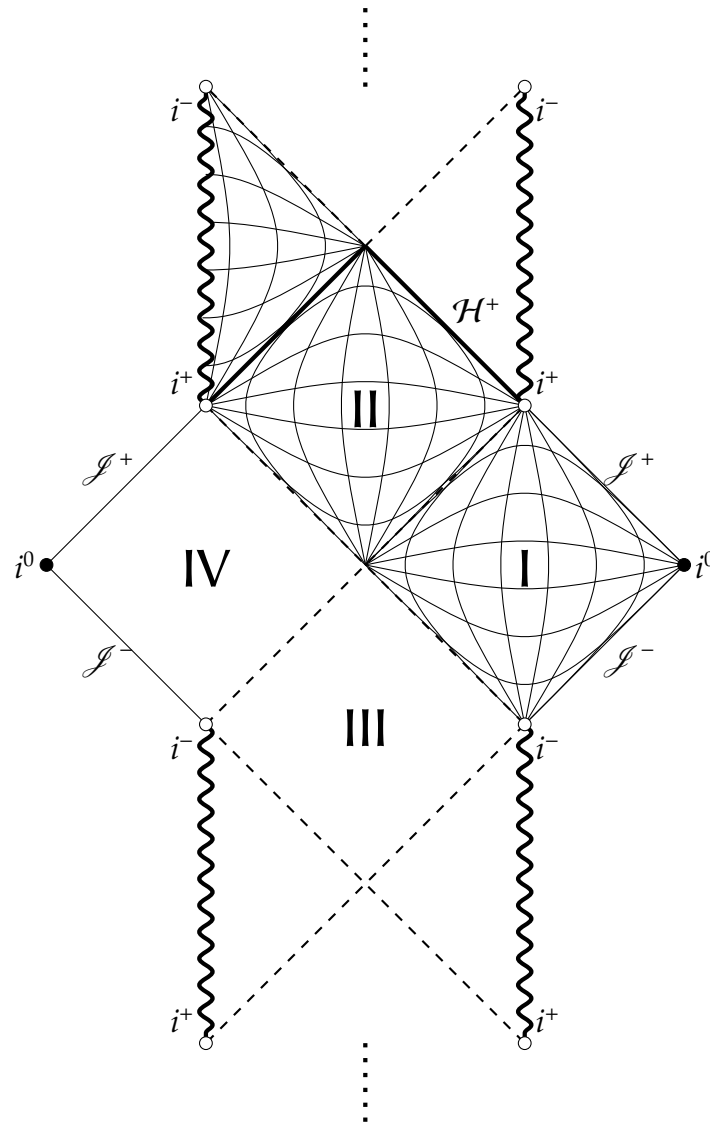


Figura 1.4: Diagrama de Penrose de un Agujero negro de Reissner-Nördstrom con $M > |Q|$. La misma estructura se repite indefinidamente en ambos sentidos en la dirección temporal.

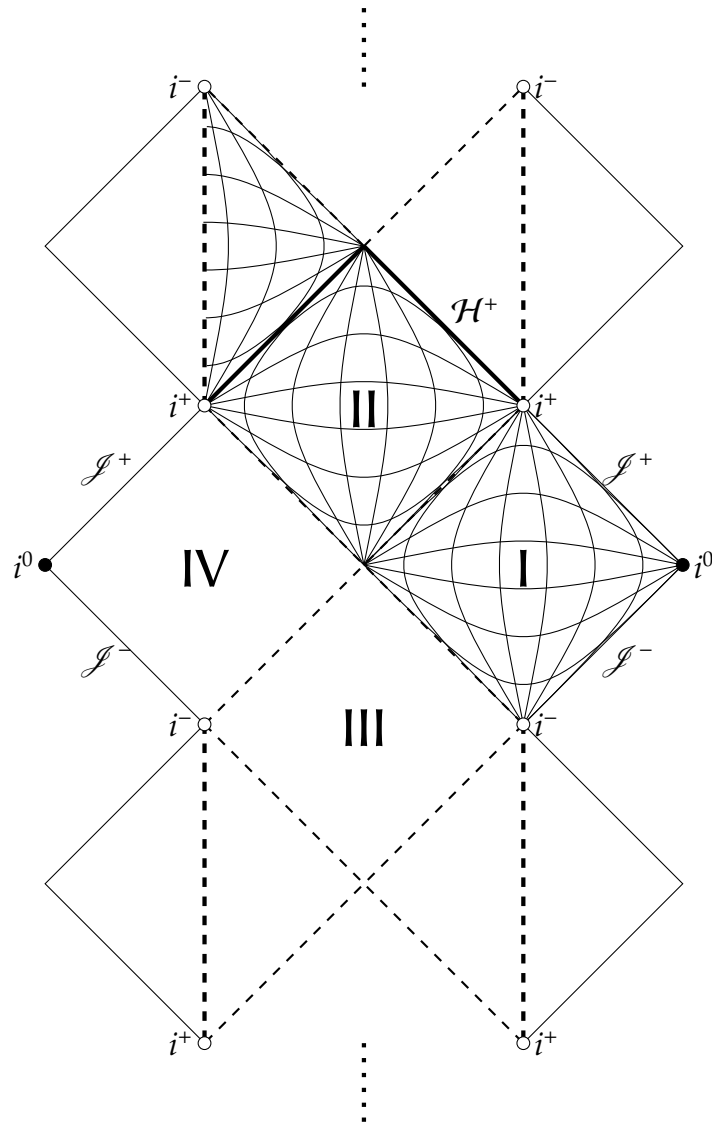


Figura 1.5: Diagrama de Penrose de un Agujero negro de Kerr con $M > |a|$. La misma estructura se repite indefinidamente en ambos sentidos en la dirección temporal.

a $M^2 > Q^2 + a^2$, que para los casos especiales se reduce a $M > |Q|$ y $M > |a|$ para los espacio-tiempos de Reissner-Nördstrom y Kerr respectivamente.

Como se mencionó, es posible remover la singularidad en los horizontes por medio de una transformación de coordenadas. Las coordenadas *cuasi-isotrópicas* se obtienen al usar una coordenada radial \tilde{r} que generaliza al radio isotrópico; la relación con el radio de Boyer Lindquist r es

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M + \sqrt{a^2 + Q^2}}{2\tilde{r}} \right) \left(1 + \frac{M - \sqrt{a^2 + Q^2}}{2\tilde{r}} \right). \quad (1.113)$$

Es notable que el radio de Boyer-Lindquist no es monótono y alcanza su mínimo en el horizonte exterior, el cual en estas coordenadas se ubica en

$$\tilde{r}_+ = \frac{\sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}}{2}. \quad (1.114)$$

Este comportamiento se debe a que el sistema coordenado cubre las regiones I y II en las Figuras 1.4 y 1.5 sin penetrar el agujero negro en ningún momento. Al ser en este sistema una hipersuperficie con $t = \text{const.}$ espacialoide y regular en todos lados, es candidato ideal para tomar como dato inicial para probar el formalismo de evolución. Una relación por construcción es

$$\left(\frac{dr}{d\tilde{r}} \right)^2 = \frac{\Delta}{r^2} = \left(1 - \frac{M^2 - Q^2 - a^2}{4\tilde{r}^2} \right)^2. \quad (1.115)$$

De aquí se observa que alrededor de r_+ la función $\Delta^{1/2}$ es suave y cambia de signo, hecho que será necesario más adelante.

En estas coordenadas la métrica queda expresada como

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} \right) dt d\phi \\ + \psi^4 \left(d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \chi \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (1.116)$$

con

$$\psi^4 = \Sigma/\tilde{r}^2, \quad (1.117a)$$

$$\chi = \frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2}. \quad (1.117b)$$

De aquí podemos identificar los objetos que caracterizan una sección de $t = \text{const.}$ La métrica espacial está totalmente caracterizada por las ecuaciones (1.117a) y (1.117b). De las componentes $g_{t\mu}$ identificamos las funciones de norma que hacen esta métrica estacionaria:

$$\beta_\phi = -a \sin^2 \theta \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma}, \quad \beta^\phi = -a \frac{r^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma^2 \chi}, \quad (1.118a)$$

$$\alpha^2 = \frac{\Delta}{\Sigma \chi} \quad (1.118b)$$

Como en esta norma la métrica es estacionaria, la curvatura extrínseca cumple

$$K_{ij} = \frac{1}{2\alpha} (\nabla_i \beta_j + \nabla_j \beta_i), \quad (1.119)$$

cuyas componentes no nulas están dadas por:

$$K_{i\phi} = \frac{1}{2\alpha} (\partial_i \beta_\phi - 2\Gamma_{i\phi}^\phi \beta_\phi) = \frac{1}{2\alpha} \gamma_{\phi\phi} \partial_i \beta^\phi, \quad (i \neq \phi) \quad (1.120a)$$

$$K_{\tilde{r}\phi} = \frac{a \sin^2 \theta}{\tilde{r} \Sigma^2 \sqrt{\Sigma \chi}} \times [M(2r^2(r^2 + a^2) + \Sigma(r^2 - a^2)) - Q^2 r(\Sigma + r^2 + a^2)], \quad (1.120b)$$

$$K_{\theta\phi} = -\frac{a^3 \sqrt{\Delta} (2Mr - Q^2) \sin^3 \theta \cos \theta}{\Sigma^2 \sqrt{\Sigma \chi}}. \quad (1.120c)$$

Se agrupan términos de modo que su implementación sea clara, como en el

caso de $\Sigma\chi = r^2 + a^2 - a\beta_\phi$.

Para terminar la descripción hay que especificar la forma de los campos electromagnéticos, que se deriva del tensor de Faraday (1.109). Para el campo eléctrico tenemos de (2.8) la expresión $E^i = \gamma^{i\mu} n^\nu F_{\nu\mu}$

$$E^{\bar{r}} = \gamma^{\bar{r}\mu} \frac{1}{\alpha} (-F_{t\mu} + \beta^\phi F_{\phi\mu}) = \frac{Q\bar{r}(r^2 + a^2)}{\Sigma^3 \sqrt{\Sigma\chi}} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) , \quad (1.121a)$$

$$E^\theta = -\gamma^{\theta\mu} \frac{1}{\alpha} (-F_{t\mu} + \beta^\phi F_{\phi\mu}) = \frac{2Qa^2 r \sqrt{\Delta}}{\Sigma^3 \sqrt{\Sigma\chi}} \cos \theta \sin \theta . \quad (1.121b)$$

Por otro lado, de (2.9) obtenemos $B^i = -n_\mu \epsilon^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$

$$B^{\bar{r}} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} F_{\theta\phi} = -\frac{2Qar\bar{r} \cos \theta}{\Sigma^3 \sqrt{\Sigma\chi}} (r^2 + a^2) , \quad (1.122a)$$

$$B^\theta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} F_{\bar{r}\phi} = -\frac{2Qa^2 \sqrt{\Delta} \sin \theta}{\Sigma^3 \sqrt{\Sigma\chi}} (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) . \quad (1.122b)$$

Cabe mencionar que estas expresiones para datos iniciales que describen la métrica de Kerr-Newman fueron derivadas independientemente a inicios de 2014, y a mi conocimiento no habían aparecido publicadas hasta finales del mismo año [208].

1.4.4 Agujeros negros dinámicos

Los agujeros negros astrofísicos relevantes se forman por procesos de colapso gravitacional y tienden asintóticamente al estado estacionario. Después de un tiempo suficiente son adecuadamente descritos con el formalismo anterior, pero durante la transición es necesario un mayor cuidado en su tratamiento ya que puede haber interacción con más materia y emisión de radiación. Para lidiar con situaciones dinámicas se ha introducido el formalismo de horizontes aislados y dinámicos [22] que generaliza estos resultados.

El concepto de carga del agujero negro se generaliza fácilmente tomando la integral de carga sobre el horizonte del agujero negro, que es por definición la carga encerrada por el horizonte.

El momento angular se generaliza de un modo similar, basta que exista un vector de Killing rotacional sobre el horizonte y entonces la expresión final es similar a la integral de Komar (Apéndice B), tomada en este caso sobre el horizonte.

La generalización de la masa es más complicada y se deduce a partir de la termodinámica de agujeros negros. Un resultado importante es que la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte, por lo cual en todo proceso el área solo puede crecer o permanecer constante. Esto nos lleva a definir la masa irreducible de un agujero negro en términos del área

$$M_{\text{irr}} = \sqrt{\frac{A}{16\pi}} \quad (1.123)$$

que es la masa de un agujero negro sin momento angular ni carga eléctrica, con área A . La masa de un agujero negro en general está dada por

$$M^2 = \left(M_{\text{irr}} + \frac{Q^2}{4M_{\text{irr}}} \right) + \frac{J^2}{4M_{\text{irr}}^2} . \quad (1.124)$$

1.5 Soluciones cosmológicas

Las soluciones cosmológicas describen en conjunto la evolución del universo a gran escala (una revisión completa y reciente del estado actual de la cosmología se puede revisar en [63]). Se basan en la hipótesis de que existe una foliación tal que las secciones de t constante son homogéneas e isotrópicas, de este modo la geometría del espacio-tiempo queda descrita por el elemento de línea

$$ds^2 = -\alpha(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \hat{\gamma}_{ij} dx^i dx^j . \quad (1.125)$$

Esta métrica es referida en la literatura como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)⁷ [86, 87, 120, 162, 163, 164, 200]. Se ha dejado el lapso como una función arbitraria del tiempo coordinado, usualmente se utilizan como coordenadas temporales el tiempo propio cósmico $d\tau = \alpha dt$ o el tiempo cósmico conforme $d\eta = a dt$. Cabe notar que la métrica espacial a cualquier tiempo es conforme a una métrica independiente del tiempo, cuya única propiedad de acuerdo a las simetrías impuestas es que su escalar de curvatura es constante: $\hat{R} = 6k$. Esta forma de escribir al escalar de curvatura es para hacer coincidir la notación con la encontrada en textos de cosmología, y la constante k puede tomarse sin pérdida de generalidad igual a $\{0, \pm 1\}$ y las observaciones apuntan a que su valor es cero. El factor de proporcionalidad entre la métrica física y conforme, $a(t)$, es conocido como factor de escala y describe la dinámica del universo.

La expansión observada por un observador con cuadri-velocidad u^μ es simplemente el cambio relativo del elemento de volumen que observa

$$\Theta_{\vec{u}} := \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{d\tau_{\vec{u}}} = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} u^\mu \partial_\mu \gamma_{\alpha\beta} = \frac{3}{a} u^\mu \partial_\mu a + \frac{1}{2} u^\mu \partial_\mu \ln \hat{\gamma}. \quad (1.126)$$

El segundo término se cancela para observadores en reposo en esta foliación ($u^\mu = n^\mu$), en este caso se les llama observadores comóviles. Por otro lado, el primer término no se cancela y está directamente relacionado con la expansión/contracción experimentada en el marco comóvil/homogéneo; el factor de 3 aparece por la dimensionalidad del espacio. Esto lleva a proponer un factor que mide la expansión lineal observada en el marco comóvil, llamado factor de Hubble:

$$H := \frac{1}{3} \Theta_{\vec{n}} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau_{\vec{n}}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.127)$$

Por otro lado, este factor se puede asociar a la traza de la curvatura extrínseca

⁷Es común en la literatura encontrarla mencionada a nombre de solo algunos de esos autores, dependiendo de las fuentes consultadas.

por medio de las ecuaciones ADM

$$H = -\frac{1}{3}K . \quad (1.128)$$

Las ecuaciones de Einstein en este caso describen como evoluciona el factor de escala y son conocidas como ecuaciones de Friedmann

$$\frac{da}{dt} = a\alpha H , \quad (1.129a)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2} , \quad (1.129b)$$

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha H^2 - \frac{4\pi}{3}\alpha(\rho + 3p) , \quad (1.129c)$$

con $p := S/3$. El sistema queda determinado al especificar el tipo de materia contenido en este espacio-tiempo. Las ecuaciones (1.129b) y (1.129c) pueden combinarse para dar una ecuación de evolución para la materia, que es básicamente la ecuación de continuidad:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\alpha H(\rho + p) . \quad (1.130)$$

Esta relación puede verse como un equivalente microscópico de la conservación de la energía. Si definimos la energía en una región comóvil con la expansión como la integral de la densidad de energía ρ en la misma, tenemos

$$dU = dt \int \left(\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma}}{dt} \right) \sqrt{\gamma} d^3x = -p dt \int \frac{d\sqrt{\gamma}}{dt} d^3x = -p dV . \quad (1.131)$$

Entonces el cambio en la energía de la región es solamente debido al trabajo realizado al expandirse la región considerada. Falta para cerrar el sistema especificar la presión, esto se logra mediante una ecuación de estado que normalmente se deriva de la microfísica de la materia. Usualmente en cosmología se toma una relación del tipo $p = \omega\rho$, con ω una constante.⁸ Cuando se tiene

⁸Aunque este es un modelo muy simplificado es posible modelar las componentes de materia dominantes en el modelo cosmológico estándar de este modo (energía oscura $\omega = -1$, materia

esta relación la ecuación (1.130) toma una forma inmediatamente integrable

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{da}{a}, \quad (1.132)$$

que finalmente da una relación entre la densidad y el factor de escala

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}. \quad (1.133)$$

Esta relación puede sustituirse nuevamente en las ecuaciones de Friedmann para llegar a una solución para el factor de escala $a(t)$. La solución en el caso plano $k = 0$ y $\omega > -1$ queda en términos del tiempo propio cosmológico

$$a(\tau) = \left(a_0^{\frac{3}{2}(1+\omega)} + (1 + \omega) \sqrt{6\pi\rho_0 a_0^{3(1+\omega)}} (\tau - \tau_0) \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (1.134)$$

y más comúnmente se ajusta para que el factor de escala se anule a $\tau = 0$

$$a(\tau) = A(\omega) \tau^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (1.135)$$

El caso particular $\omega = -1$ requiere más cuidado en su integración y resulta en el espacio-tiempo de de Sitter, en el que la densidad de materia es constante y el factor de escala evoluciona exponencialmente.

Cabe mencionar que las ecuaciones de Friedmann son totalmente equivalentes a las ecuaciones ADM/BSSN identificando $a = e^{2\phi}$. Las únicas ecuaciones de evolución no triviales son:

$$\partial_t \phi = -\frac{1}{6} \alpha K, \quad (1.136a)$$

$$\partial_t K = \frac{1}{3} \alpha K^2 + 4\pi\alpha (\rho + S), \quad (1.136b)$$

no relativista $\omega = 0$, radiación $\omega = 1/3$).

y la constricción no trivial en este caso es la Hamiltoniana, que toma la forma:

$$\mathcal{H} := 6ke^{-4\phi(t)} + \frac{2}{3}K(t)^2 - 16\pi\rho(t) = 0. \quad (1.136c)$$

Capítulo 2

Dinámica de materia autogravitante

La dinámica de la materia acoplada mínimamente al campo gravitatorio se reduce a la usual sobre un espacio-tiempo curvo. En esta sección se hace un resumen de la dinámica de los tipos de materia considerados en los capítulos subsecuentes, que son campo electromagnético, campo escalar complejo acoplado a este último y un fluido perfecto.

2.1 Electromagnetismo

Los campos electromagnéticos están descritos por el tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ que se construye a partir de un potencial vectorial A^μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (2.1)$$

La teoría electromagnética se puede formular en el contexto gravitacional partiendo de su contribución a la acción

$$S_m = \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \alpha \sqrt{\gamma} d^4x + \int \mathcal{L}_\Psi \alpha \sqrt{\gamma} d^4x , \quad (2.2)$$

donde el último término refiere a otros campos de materia acoplados al campo electromagnético. Las ecuaciones de campo que se obtienen al minimizar la

acción con respecto a variaciones del potencial vectorial son

$${}^{(4)}\nabla_{\mu}F^{\mu\nu} = -4\pi j_{\text{em}}^{\nu}, \quad j_{\text{em}}^{\nu} := -\frac{\partial \mathcal{L}_{\Psi}}{\partial A_{\nu}}. \quad (2.3)$$

Por construcción, se tiene que para el tensor dual $F^{*\mu\nu} = -{}^{(4)}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}/2$ se cumple

$${}^{(4)}\nabla_{\mu}F^{*\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

Y en conjunto las ecuaciones (2.3) y (2.4) son las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo curvo. La teoría es invariante de norma ante transformaciones del tipo $A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}f$. Como consecuencia de esta simetría, la corriente cumple una ecuación de conservación ${}^{(4)}\nabla_{\nu}j_{\text{em}}^{\nu} = 0$ lo cual implica la conservación de la carga eléctrica.

2.1.1 Descomposición en el formalismo 3+1

El potencial vectorial se puede reescribir en términos de sus proyecciones normal y tangentes a las hipersuperficies del formalismo 3 + 1 como:

$$A^{\mu} = n^{\mu}\Phi + a^{\mu} \quad (2.5)$$

donde las proyecciones coinciden con los potenciales electromagnéticos escalar y vectorial medidos por observadores Eulerianos¹

$$\Phi := -n_{\mu}A^{\mu}, \quad (2.6)$$

$$a^i := {}^{(3)}A^i = \gamma_{\mu}^i A^{\mu}. \quad (2.7)$$

¹En sentido estricto no son medidos por ningún observador pues son potenciales cuyos efectos físicos están dados por sus derivadas, más usamos esta analogía verbal porque son las cantidades que se utilizarían para la descripción local.

El tensor de Faraday puede descomponerse en términos de los campos eléctrico y magnético medidos por los observadores Eulerianos

$$E^\mu := -n_\nu F^{\nu\mu} , \quad (2.8)$$

$$B^\mu := -n_\nu F^{*\nu\mu} . \quad (2.9)$$

Por la antisimetría de $F^{\nu\mu}$, estos campos son perpendiculares a n^μ , de modo que son tangentes a las superficies de t constante. El tensor de Faraday puede escribirse entonces como

$$F^{\mu\nu} = \gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu F^{\alpha\beta} + n^\mu E^\nu - n^\nu E^\mu . \quad (2.10)$$

El primer término puede reescribirse usando (2.9)

$$\gamma_\alpha^\mu \gamma_\beta^\nu F^{\alpha\beta} = {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\alpha} B_\alpha , \quad {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\alpha} := n_\beta \epsilon^{\beta\mu\nu\alpha} . \quad (2.11)$$

Bajo estas consideraciones el tensor de Faraday y su dual toman explícitamente la forma

$$F^{\mu\nu} = {}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\sigma} B_\sigma + n^\mu E^\nu - E^\mu n^\nu , \quad (2.12)$$

$$F^{*\mu\nu} = -{}^{(3)}\epsilon^{\mu\nu\sigma} E_\sigma + n^\mu B^\nu - B^\mu n^\nu . \quad (2.13)$$

Al escribir el tensor de Faraday en términos de los potenciales, las ecuaciones (2.8) y (2.9) dan las relaciones usuales

$$\partial_t a_i = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} a^i - \alpha E_i - {}^{(3)}\nabla_i(\alpha\Phi) , \quad (2.14)$$

$$B^i = \frac{1}{2} {}^{(3)}\epsilon^{imn} (\partial_m a_n - \partial_n a_m) = {}^{(3)}\epsilon^{imn} \partial_m a_n = ({}^{(3)}\nabla \times a)^i . \quad (2.15)$$

Utilizando esta descomposición del tensor de Faraday, la acción toma la

forma

$$S_m = \frac{1}{8\pi} \int \gamma^{\mu\nu} (B_\mu B_\nu - E_\mu E_\nu) \alpha \sqrt{\gamma} d^4x + \int \mathcal{L}_\Psi \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.16)$$

Como consecuencia de la libertad de norma, el Lagrangiano no depende de Φ . Tomando como variables dinámicas a las componentes del potencial vectorial a_i , los momentos conjugados quedan

$$\pi_E^a = -\frac{\sqrt{\gamma}}{4\pi} E^a \quad (2.17)$$

y la función Hamiltoniana queda entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\text{em}} &= \int \left\{ \pi_E^a \left[\mathcal{L}_{\vec{\beta}} a_a - \alpha E_a - \nabla_a(\alpha\Phi) \right] - \frac{1}{8\pi} (B_a B^a - E_a E^a) \right\} \alpha \sqrt{\gamma} d^3x \\ &= \int \left[-\frac{\alpha}{8\pi} (B_a B^a + E_a E^a) + \pi_E^a \mathcal{L}_{\vec{\beta}} a_a + \alpha\Phi \nabla_a \pi_E^a \right] \sqrt{\gamma} d^3x, \end{aligned} \quad (2.18)$$

en donde el último término se integró por partes.

En la formulación Hamiltoniana el electromagnetismo queda descrito efectivamente por el potencial vectorial y el campo eléctrico. La invariancia de norma de la teoría queda manifiesta al ser nulo el momento conjugado al potencial escalar, que implica al variar la acción respecto a este la constricción

$$\mathcal{G} := \nabla_i E^i - 4\pi \rho_{\text{em}} = 0, \quad (2.19a)$$

con $\rho_{\text{em}} := -n_\mu j_{\text{em}}^\mu$. Otra ecuación de constricción que se tiene de la construcción es

$$\mathcal{B} := \nabla_i B^i = 0. \quad (2.19b)$$

Por otro lado, la evolución del campo eléctrico esta dada por

$$\partial_t E^i = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} E^i + (\nabla \times \alpha B)^i + \alpha K E^i - 4\pi \alpha {}^{(3)}j_{\text{em}}^i, \quad (2.20)$$

con ${}^{(3)}j_{\text{em}}^i := \gamma^i_{\mu} j_{\text{em}}^{\mu}$. La ecuación de conservación $(4)\nabla_{\mu} j_{\text{em}}^{\mu} = 0$, obtenida al tomar la divergencia de (2.4), queda en términos de las proyecciones 3+1

$$\partial_t \rho_{\text{em}} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \rho_{\text{em}} + \nabla_a \left(\alpha {}^{(3)}j_{\text{em}}^a \right) = \alpha K \rho_{\text{em}} \quad (2.21)$$

Si bien las ecuaciones anteriores describen totalmente al electromagnetismo en términos de los potenciales a_i y Φ , los campos que producen efectos físicos son E^i y B^i . En la mayoría de los casos es posible trabajar directamente con los campos físicos tomando en cuenta la ecuación (2.15). En este caso la ecuación de evolución resultante para el campo magnético es:

$$\partial_t B^i = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} B^i - (\nabla \times \alpha E)^i + \alpha K B^i. \quad (2.22)$$

Otra gran ventaja de considerar la evolución en términos de los campos físicos es el hecho de evitar el problema de la elección de norma para los potenciales.

Por completez podemos también incluir el sistema de evolución asociado que cumplen las constricciones. Utilizando las ecuaciones de evolución es posible ver que si definimos las constricciones eléctrica $\mathcal{G} := \nabla_i E^i - 4\pi \rho_{\text{em}} = 0$ y magnética $\mathcal{B} := \nabla_i B^i = 0$, entonces estas cumplen el sistema

$$\partial_t \mathcal{G} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{G} = \alpha K \mathcal{G}, \quad (2.23a)$$

$$\partial_t \mathcal{B} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{B} = \alpha K \mathcal{B}. \quad (2.23b)$$

Para sistemas acoplados en los que la dependencia en los potenciales es explícita no es suficiente solamente considerar a los campos eléctricos y magnéticos, puesto que no es posible recuperar unívocamente a los potenciales. Al ser el campo magnético definido como el rotacional del potencial vectorial (2.15), cualquier uno-forma que difiera de este último por una uno-forma cerrada es equivalente. Es necesario entonces seguir la evolución del sistema considerando los potenciales usando la ecuación (2.14). Para completar el sistema es necesario fijar la norma respecto al potencial escalar, y una elección acorde al sistema obtenido es la norma de Lorentz, $(4)\nabla_{\mu} A^{\mu} = 0$, que al

hacer la descomposición 3+1 da una ecuación de evolución para este

$$\partial_t \Phi = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Phi + \alpha K \Phi - \nabla_i (\alpha a^i). \quad (2.24)$$

2.1.2 Tensor de energía-momento del campo electromagnético

El tensor de energía-momento del campo electromagnético es

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[F_{\mu\lambda} F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma} \right]. \quad (2.25)$$

que al utilizar las ecuaciones (2.12) y (2.13), queda explícitamente en términos de los campos eléctrico y magnético

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left[-(E_\mu E_\nu + B_\mu B_\nu) + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} (E^2 + B^2) + \frac{1}{2} n_\mu n_\nu (E^2 + B^2) + 2E^\lambda B^\sigma {}^{(3)}\epsilon_{\lambda\sigma(\mu} n_{\nu)} \right], \quad (2.26)$$

donde $E^2 = E^i E_i$ y $B^2 = B^i B_i$. Los términos correspondientes a la descomposición 3 + 1 de este tensor, llamando \mathcal{E} a la densidad de energía del campo electromagnético, son

$$\mathcal{E} := \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad (2.27a)$$

$$J_i := \frac{1}{4\pi} {}^{(3)}\epsilon_{ijk} E^j B^k, \quad (2.27b)$$

$$S_{ij} := \frac{1}{8\pi} \left[\gamma_{ij} (E^2 + B^2) - 2(E_i E_j + B_i B_j) \right]. \quad (2.27c)$$

estas expresiones corresponden a la densidad de energía, flujo de momento (vector de Poynting) y tensor de esfuerzos medidos por observadores Eulerianos.

2.1.3 Hiperbolicidad de las ecuaciones de Maxwell

El sistema formado por las ecuaciones de Maxwell es suficientemente sencillo para llevar a cabo el análisis de hiperbolicidad completo y es mucho más interesante en cuanto al tipo de funciones propias que aparecen que están asociadas a la radiación electromagnética.

En resumen, las ecuaciones de Maxwell forman un sistema simétricamente hiperbólico. Para hacer un análisis local tomamos una dirección caracterizada por un vector unitario \hat{s} y damos una tétrada ortonormal $\{\hat{e}_{(a)}\}$ en la cual $\hat{e}_{(1)} = \hat{s}$. Las velocidades características y sus funciones propias entonces quedan:

- $\lambda^0 = -\beta^a s_a$

$$E^a s_a, \quad B^a s_a .$$

- $\lambda^+ = -\beta^a s_a + \alpha$

$$(E_{(2)} + B_{(3)}), \quad (E_{(3)} - B_{(2)}) .$$

- $\lambda^- = -\beta^a s_a - \alpha$

$$(E_{(2)} - B_{(3)}), \quad (E_{(3)} + B_{(2)}) .$$

Los escalares complejos que describen al campo electromagnético quedan

$$\Phi_0 \propto E^a s_a + iB^a s_a ,$$

$$\Phi_1 \propto (E_{(2)} - B_{(3)}) + i(E_{(3)} + B_{(2)}) ,$$

$$\Phi_2 \propto (E_{(2)} + B_{(3)}) + i(E_{(3)} - B_{(2)}) .$$

Los detalles de esta derivación pueden verse en el Apéndice D.

2.2 Campo escalar complejo

El modelo de campo escalar posee una gran importancia teórica al ser el más sencillo de formular en una teoría Lagrangiana. No obstante, este modelo ha adquirido gran relevancia desde la propuesta del mecanismo de Higgs para dotar de masa a las partículas del modelo estándar. Más aún, con los recientes resultados experimentales que afirman haber observado esta partícula en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN (LHC por sus siglas en inglés), el estudio de este tipo de campos está en apogeo. Es posible modelar por medio de campos escalares estructuras compactas conocidas como estrellas de bosones y estudiar la estabilidad de estos sistemas autogravitantes. Otros estudios que involucran campos escalares incluyen la dinámica de la energía oscura [94], las consecuencias del acople no mínimo en teorías alternativas de gravitación [168, 169, 9], así como modelos de materia oscura [126, 127, 128, 129, 196, 6, 130, 186] e inflación [98, 99, 122, 138].

La contribución a la acción del campo escalar complejo es

$$S_\varphi = \int \left[-\frac{1}{2} {}^{(4)}\nabla_\mu \varphi^* {}^{(4)}\nabla^\mu \varphi - V(|\varphi|^2) \right] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.28)$$

donde el potencial $V(|\varphi|^2)$ es una función escalar arbitraria. Los modelos más simples constan de los primeros términos de la expansión polinomial

$$V = \frac{m^2}{2} \varphi^* \varphi + \frac{\lambda}{4} (\varphi^* \varphi)^2, \quad (2.29)$$

donde el primer término es debido a la masa m del bosón en cuestión, y el segundo término corresponde a una autointeracción medida por λ . Cabe notar que esta acción es invariante ante transformaciones globales del campo en el grupo $U(1)$, esto es transformaciones de la forma $\varphi \rightarrow e^{i\theta} \varphi$.

En lo siguiente trataremos como variables independientes al campo φ y su conjugado φ^* , pensando que es inmediato el reconstruir las partes real e imaginaria en términos de estos. La ecuación de evolución que se obtiene minimizando la acción respecto a variaciones de la componente conjugada $\delta\varphi^*$

es la ecuación de Klein-Gordon:

$$(\square - 2V')\varphi = 0, \quad V' \equiv \frac{dV}{d|\varphi|^2}. \quad (2.30)$$

De igual modo podemos obtener la ecuación de evolución para φ^* tomando la variación del campo $\delta\varphi$, obteniendo el conjugado de esta última.

Como consecuencia de la invariancia del Lagrangiano ante transformaciones globales del grupo U(1) ($\varphi \rightarrow e^{i\theta}\varphi$) tenemos una corriente conservada (${}^{(4)}\nabla_\mu u^\mu = 0$) dada por

$$u^\mu = \frac{i}{2} (\varphi^{*(4)}\nabla^\mu\varphi - \varphi^{(4)}\nabla^\mu\varphi^*). \quad (2.31)$$

2.2.1 Formulación Hamiltoniana

Para reescribir la teoría del campo escalar, definimos las variables adaptadas a la foliación

$$\Pi := n^\mu {}^{(4)}\nabla_\mu\varphi, \quad \chi_i := {}^{(3)}\nabla_i\varphi. \quad (2.32)$$

Como $g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$, reescribimos la acción en términos de estas variables

$$S = \int \mathbf{L}_\varphi dt = \int \left[\frac{1}{2} (\Pi^*\Pi - \chi_i^*\chi^i) - V \right] \alpha \sqrt{\gamma} d^4x. \quad (2.33)$$

y de aquí, como $\alpha\Pi = \dot{\varphi} - \beta^a \chi_a$, se tiene que los momentos conjugados están dados por la relación

$$p = \frac{\delta \mathbf{L}_\varphi}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \Pi^*. \quad (2.34)$$

La función Hamiltoniana queda entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_\varphi &= \int (p\dot{\varphi} + p^*\dot{\varphi}^* - \mathbf{L}_\varphi\alpha\sqrt{\gamma})d^3x \\ &= \int \left\{ \left[\frac{\alpha}{2} (\Pi^*\Pi + \chi_i^*\chi^i) + \alpha V \right] \sqrt{\gamma} + p\beta^a\chi_a + p^*\beta^a\chi_a^* \right\} d^3x.\end{aligned}\quad (2.35)$$

La evolución del campo escalar queda descrita por el sistema

$$\partial_t\varphi = \frac{\delta\mathbf{H}_\varphi}{\delta p} = \mathcal{E}_{\vec{\beta}}\varphi + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}p^* \quad (2.36a)$$

$$\partial_t p^* = -\frac{\delta\mathbf{H}_\varphi}{\delta\varphi^*} = \partial_a(p^*\beta^a) + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\nabla_a(\alpha\chi^a) - \alpha\sqrt{\gamma}V'\varphi. \quad (2.36b)$$

Donde para la última ecuación se hicieron integraciones por partes para sustituir $f\delta\chi_a^* \rightarrow \delta\varphi^{*(3)}\nabla_a f$. El sistema se puede reescribir de forma muy concisa (notando que $\partial_a(p^*\beta^a) = \mathcal{E}_{\vec{\beta}}p^*$ por ser densidad tensorial)

$$\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\mathcal{E}_{\vec{n}}\varphi = p^*, \quad \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\mathcal{E}_{\vec{n}}p^* = \frac{1}{\alpha}{}^{(3)}\nabla_a(\alpha\chi^a) - 2V'\varphi$$

Estas últimas ecuaciones pueden reescribirse como un sistema de primer orden para las variables auxiliares

$$\partial_t\varphi = \mathcal{E}_{\vec{\beta}}\varphi + \alpha\Pi, \quad (2.37a)$$

$$\partial_t\chi_i = \mathcal{E}_{\vec{\beta}}\chi_i + \nabla_i(\alpha\Pi), \quad (2.37b)$$

$$\partial_t\Pi = \mathcal{E}_{\vec{\beta}}\Pi + \alpha{}^{(3)}\nabla_i(\alpha\chi^i) + \alpha\Pi K - 2\alpha\varphi V'. \quad (2.37c)$$

Esta última ecuación es la que contiene toda la dinámica de la ecuación de Klein-Gordon.

En cuanto a la hiperbolicidad de este sistema, se tiene que el campo escalar a parte principal evoluciona de acuerdo a una ecuación de onda. Para el campo

complejo la evolución esta dada por dos ecuaciones de onda acopladas solo en términos inferiores. Los modos que no propagan son

$$\omega_a^0 = h_a^b \chi_b, \quad \lambda^0 = -\frac{\beta^a S_a}{|\vec{s}|^2}, \quad (2.38)$$

y una pareja de modos entrante y saliente que se propagan a la velocidad de la luz:

$$\omega^\pm = \Pi \mp \hat{s}^b \chi_b, \quad \lambda = -\frac{\beta^a S_a}{|\vec{s}|^2}. \quad (2.39)$$

Estas últimas ecuaciones en el entendido de que pueden construirse tanto para la parte real o imaginaria, o pueden considerarse los valores complejos.

2.2.2 Tensor de energía-momento del campo escalar

El tensor de energía-momento se obtiene inmediatamente de este Lagrangiano:

$$T_{\mu\nu}^\varphi = \frac{1}{2} \left({}^{(4)}\nabla_\mu \varphi^* {}^{(4)}\nabla_\nu \varphi + {}^{(4)}\nabla_\nu \varphi^* {}^{(4)}\nabla_\mu \varphi \right) + g_{\mu\nu} \mathcal{L}_\varphi. \quad (2.40)$$

Entonces los términos de fuente asociados a la materia quedan

$$\rho^\varphi = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\Pi^* \Pi + \chi_i^* \chi^i \right) + V, \quad (2.41a)$$

$$j_i^\varphi = -\gamma_i^\mu n^\nu T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(\Pi^* \chi_i + \chi_i^* \Pi \right), \quad (2.41b)$$

$$S_{ij}^\varphi = \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\chi_i^* \chi_j + \chi_j^* \chi_i \right) + \gamma_{ij} \mathcal{L}_\varphi. \quad (2.41c)$$

2.2.3 Campo escalar con interacción electromagnética

El campo escalar complejo naturalmente se acopla al campo electromagnético al promover la simetría $U(1)$ de global a local. Esto se obtiene al hacer la sustitución

$\nabla_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \nabla_\mu + iqA_\mu$, de modo que la acción queda

$$S = \int -\frac{1}{2} \left(\mathcal{D}_\mu \varphi^* \mathcal{D}^\mu \varphi + 2V(|\varphi|^2) \right) \alpha \sqrt{\gamma} d^4x. \quad (2.42)$$

Este operador diferencial \mathcal{D} es *invariante de norma*, ya que al operar sobre el campo escalar el resultado es invariante ante transformaciones $\varphi \rightarrow \varphi e^{iq\theta}$ y $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \theta$. La variación de esta acción con respecto al potencial electromagnético nos da la corriente que se acopla como fuente de los campos electromagnéticos

$$j_{\text{em}}^\mu = \frac{iq}{2} (\varphi^* \mathcal{D}^\mu \varphi - (\mathcal{D}^\mu \varphi^*) \varphi). \quad (2.43)$$

En este caso conviene definir nuevas variables auxiliares

$$\tilde{\Pi} := n^\mu \mathcal{D}_\mu \varphi = \Pi - iq\Phi\varphi, \quad \tilde{\chi}_i := \gamma_i^\mu \mathcal{D}_\mu \varphi = \chi_i + iq a_i \varphi. \quad (2.44)$$

En términos de estas variables la acción toma una forma idéntica al caso neutro, ecuación (2.33).

$$S = \int \left[\frac{1}{2} (\tilde{\Pi}^* \tilde{\Pi} - \tilde{\chi}_i^* \tilde{\chi}^i) - V \right] \alpha \sqrt{\gamma} d^4x, \quad (2.45)$$

Y las fuentes electromagnéticas quedan

$$\rho_{\text{em}} = -n_\mu u^\mu = \frac{iq}{2m} (\tilde{\Pi}^* \varphi - \varphi^* \tilde{\Pi}), \quad (2.46a)$$

$${}^{(3)}j_{\text{em}}^j = \gamma_\mu^j u^\mu = \frac{iq}{2m} (\varphi^* \tilde{\chi}^j - \tilde{\chi}^{*j} \varphi). \quad (2.46b)$$

La variación de esta acción con respecto a las componentes del campo escalar dan la ecuación de evolución

$$\left(\mathcal{D}^\mu \mathcal{D}_\mu - 2V' \right) \varphi = 0, \quad (2.47)$$

que al expandir el primer término para separar el operador DAlambertiano, la

ecuación anterior queda reescrita como

$$\square\varphi = 2V'\varphi - q(2iA^\mu\nabla_\mu\varphi + i\varphi\nabla^\mu A_\mu - qA_\mu A^\mu\varphi). \quad (2.48)$$

En términos de los potenciales vectorial y escalar esta ecuación toma la forma final

$$\square\varphi = \left[2V' + q^2(a_i a^i - \Phi^2)\right]\varphi - iq(2(a^i\chi_i + \Phi\Pi) + \varphi\nabla^\mu A_\mu). \quad (2.49)$$

Esta ecuación difiere de la ecuación (2.30) únicamente en la fuente del lado derecho y por lo tanto puede reescribirse como el sistema de ecuaciones (2.37a),(2.37b) y (2.37c) haciendo la sustitución correspondiente.

La formulación Hamiltoniana en este caso es muy similar. Los momentos conjugados al campo escalar quedan

$$p = \frac{\delta\mathbf{L}_\varphi}{\delta\dot{\varphi}} = \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\Pi^*. \quad (2.50)$$

De este modo la función Hamiltoniana queda dada por la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\varphi = & \int \left\{ \left[\frac{\alpha}{2} (\tilde{\Pi}^* \tilde{\Pi} + \tilde{\chi}_i^* \tilde{\chi}^i) + \alpha V \right] \sqrt{\gamma} + p\beta^a \chi_a + p^* \beta^a \chi_a^* \right\} d^3x \\ & + \int iq\alpha\Phi(p\varphi - p^*\varphi^*) d^3x. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Las ecuaciones de evolución resultantes quedan

$$\partial_t\varphi = \frac{\delta\mathbf{H}_\varphi}{\delta p} = \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}\varphi + \frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}p^* + iq\alpha\Phi\varphi, \quad (2.52a)$$

$$\partial_t p^* = -\frac{\delta\mathbf{H}_\varphi}{\delta p} = \mathcal{E}_{\tilde{\beta}}p^* + \frac{\sqrt{\gamma}}{2}\mathcal{D}_a(\alpha\tilde{\chi}^a) - \sqrt{\gamma}\alpha\varphi V' + iq\alpha\Phi p^*. \quad (2.52b)$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse de forma compacta definiendo una deri-

vada de Lie invariante de norma $\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{\sigma}} := \mathcal{E}_{\vec{\sigma}} + iqA_{\mu}v^{\mu}$

$$\frac{2}{\sqrt{\mathcal{Y}}}\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{n}}\varphi = p^*, \quad \frac{2}{\sqrt{\mathcal{Y}}}\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{n}}p^* = \frac{1}{\alpha}\mathcal{D}_a(\alpha\tilde{\chi}^a) - 2V'\varphi$$

En tanto a la hiperbolicidad del sistema notamos que en la norma de Lorentz, a parte principal los sectores electromagnético y escalar están desacoplados y su estructura característica no cambia.

Los términos del tensor de energía momento quedan expresados en término de las variables invariantes de norma

$$\rho^{\varphi} = n^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tilde{\Pi}^*\tilde{\Pi} + \tilde{\chi}_i^*\tilde{\chi}^i) + V, \quad (2.53a)$$

$$j_i^{\varphi} = -\gamma_i^{\mu}n^{\nu}T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\tilde{\Pi}^*\tilde{\chi}_i + \tilde{\chi}_i^*\tilde{\Pi}), \quad (2.53b)$$

$$S_{ij}^{\varphi} = \gamma_i^{\mu}\gamma_j^{\nu}T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\tilde{\chi}_i^*\tilde{\chi}_j + \tilde{\chi}_j^*\tilde{\chi}_i) + \gamma_{ij}\left[\frac{1}{2}(\tilde{\Pi}^*\tilde{\Pi} - \tilde{\chi}_i^*\tilde{\chi}^i) - V\right]. \quad (2.53c)$$

2.3 Hidrodinámica

La mayoría de la materia a nivel astrofísico se modela como un fluido (perfecto). Comenzaremos la discusión de la dinámica de un fluido perfecto por el tensor de energía-momento que lo caracteriza, que es de la forma²:

$$T_{\mu\nu} = (\rho_u + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

Las variables que describen al fluido de esta forma son la densidad de energía comóvil ρ_u , el campo de cuadrivelocidades que siguen los elementos de fluido u^{μ} , y la presión resultante de la autointeracción. La evolución queda determinada por las ecuaciones de conservación, suplementadas con una ecuación de estado.

Es común separar a la densidad como una contribución en reposo ρ_0 y otra

²Citando a Hawking: We shall call any matter whose energy-momentum tensor is of the above form (whether or not it is derived from a Lagrangian) a perfect fluid.

debida a la energía interna, quedando $\rho = \rho_0(1 + \varepsilon)$ con ε la energía interna específica. De este modo podemos definir la entalpía específica como

$$h := 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho_0}, \quad (2.55)$$

y reescribir el tensor de energía-momento como

$$T_{\mu\nu} = \rho_0 h u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

Todas estas redefiniciones son para simplificar la ecuación de conservación de partículas

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = 0. \quad (2.57)$$

El campo de quadri-velocidades resulta redundante, pues la relación $u^\mu u_\mu = -1$ liga las componentes. Por ello se puede tomar el campo de tres-velocidades sin pérdida alguna de generalidad. Ahora, en el formalismo 3+1 podemos definir el factor de Lorentz medido por observadores Eulerianos

$$W := -u^\mu n_\mu = \alpha u^0 = 1 / \sqrt{1 - \gamma_{ij} v^i v^j}, \quad (2.58)$$

de modo que el campo de tres-velocidades queda explícitamente $v_i = W^{-1} u_i$.

Por las propiedades no lineales de las ecuaciones hidrodinámicas conviene escribirlas en una forma totalmente conservativa. Para este fin se desarrolló la llamada formulación de Valencia [85, 84], donde se definen las bien llamadas variables conservadas

$$D := \rho_0 W, \quad (2.59a)$$

$$\mathcal{S}^i := \rho_0 h W^2 v^i, \quad (2.59b)$$

$$\mathcal{E} := \rho_0 h W^2 - p - D. \quad (2.59c)$$

Estas cantidades conservadas tienen la siguiente interpretación física: D es la

densidad de masa en reposo medida por los observadores Eulerianos, \mathcal{S}^i es la densidad de momento medida por los mismos observadores, y \mathcal{E} es la diferencia entre la densidad de energía total y la densidad de masa en reposo medida en el mismo marco Euleriano, $\mathcal{E} = \rho_{\text{ADM}} - D$.

En términos de estas cantidades conservadas, las ecuaciones de evolución para el fluido perfecto pueden escribirse como ecuaciones de balance en forma 3 + 1

$$\partial_t D - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} D + \nabla_k (\alpha D v^k) = \alpha K D, \quad (2.60a)$$

$$\partial_t \mathcal{S}^i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{S}^i + \nabla_k [\alpha (\mathcal{S}^i v^k + \gamma^{ik} p)] = -(\mathcal{E} + D) \nabla^i \alpha + \alpha K \mathcal{S}^i, \quad (2.60b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E} + \nabla_k [\alpha (\mathcal{E} + p) v^k] &= (\mathcal{E} + D + p) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \nabla_m \alpha) \\ &+ \alpha K (\mathcal{E} + p) \end{aligned} \quad (2.60c)$$

Las fuentes del campo gravitacional, ecuaciones (1.31a), se reducen en términos de estas variables a

$$\rho_{\text{ADM}} = \mathcal{E} + D, \quad (2.61a)$$

$$j_{\text{ADM}}^i = \mathcal{S}^i, \quad (2.61b)$$

$$S_{\text{ADM}}^{ij} = v^i \mathcal{S}^j + \gamma^{ij} p. \quad (2.61c)$$

Capítulo 3

Escenarios en simetría esférica

Una primera aproximación para el estudio de fenómenos gravitacionales consiste en considerar procesos y configuraciones esféricamente simétricos. En estos casos es posible abstraer las características principales de los fenómenos de colapso y acreción, con las ventajas computacionales de tratar con un sistema mucho más simple que el caso general. No obstante al limitarnos al estudio en este contexto se suprimen fenómenos físicos interesantes, como la emisión de radiación en estos procesos, y se corre el riesgo de encontrar resultados poco genéricos que solo son válidos al imponer este tipo de simetría y desaparecen cuando el fenómeno estudiado se desvía mínimamente de esta.

Los trabajos desarrollados en esta sección abarcan desde el estudio de las ecuaciones a nivel analítico para derivar condiciones adecuadas para la implementación de códigos numéricos en simetría esférica, hasta aplicaciones numéricas para el estudio de colapso de campos escalares en distintos contextos. Por un lado se estudia el colapso de campos escalares cargados y sus posibles implicaciones a la conjetura de censura cósmica, proceso en el que observamos que la misma dinámica del campo electromagnético es tal que evita la formación de singularidades desnudas. En otra línea se estudian distribuciones de campo escalar inhomogéneas en un escenario cosmológico, a fin de observar y comparar los procesos de formación de estructura cosmológica con los modelos usuales. Más detalles acerca de estos trabajos serán presentados en

las secciones correspondientes.

Para formular las ecuaciones de campo de un sistema autogravitante en simetría esférica partimos de una descripción de la geometría adaptada a esta, en la que el elemento de línea toma la forma

$$ds^2 = -\left(\alpha(r, t)^2 - \beta_r(r, t)\beta^r(r, t)\right) dt^2 + 2\beta_r(r, t)drdt + \psi(r, t)^4 \left(a(r, t)dr^2 + r^2b(r, t)d\Omega^2\right), \quad (3.1)$$

de modo que las componentes métricas toman la forma $\gamma_{rr} = \psi^4 a$, $\gamma_{\theta\theta} = \psi^4 r^2 b$ y $\gamma_{\phi\phi} = \psi^4 r^2 \sin^2(\theta)b$. Al escribir la métrica de esta forma ya se consideró que en simetría esférica los campos vectoriales solo poseen una componente radial, y que las funciones relevantes solo tienen dependencia en las coordenadas radial r y temporal t . En el resto de este capítulo se omitirán los índices de los vectores siempre que esto no presente ambigüedades.

En la siguiente sección se plantearán las ecuaciones que describen la dinámica del espacio-tiempo en presencia de sistemas autogravitantes imponiendo simetría esférica en la formulación BSSN. Consecuentemente, en el resto del capítulo se abordarán los temas desarrollados durante el doctorado en estas direcciones.

3.1 Sistema BSSN en simetría esférica

Al aplicar las consideraciones asociadas a la simetría esférica al sistema BSSN generalizado expuesto en la sección 1.3.3 se obtiene una versión bastante manejable para las ecuaciones de evolución. La derivación del sistema puede verse en [12], y en esta sección solamente haré una breve recapitulación.

Las variables del sistema al considerar una métrica del tipo (3.1) son solamente: el exponente conforme ϕ , las funciones asociadas a la métrica a y b , la traza de la curvatura extrínseca K y las componentes mixtas del tensor de

curvatura extrínseca sin traza \hat{A}_i^j :

$$A_a := \hat{A}_r^r, \quad A_b := \hat{A}_\theta^\theta. \quad (3.2)$$

Esta nomenclatura será común para nombrar a las componentes mixtas de los tensores de segundo rango, por lo que las fuentes del campo gravitacional quedan descritas en términos de las componentes $S_a = S_r^r$ y $S_b = S_\theta^\theta$ del tensor de esfuerzos. También tenemos el vector $\hat{\Delta}^i$ que solo posee componente radial no nula. Las componentes del tensor de curvatura extrínseca sin traza cumplen $A_a + 2A_b = 0$, por lo que basta considerar únicamente una de ellas.

El sistema de ecuaciones de evolución BSSN resultante es:

$$\partial_t \phi = \beta^r \partial_r \phi + \frac{\sigma}{6} \hat{\nabla}_m \beta^m - \frac{1}{6} \alpha K, \quad (3.3a)$$

$$\partial_t a = \beta^r \partial_r a + 2a \partial_r \beta^r - \frac{2}{3} \sigma a \hat{\nabla}_m \beta^m - 2\alpha a A_a, \quad (3.3b)$$

$$\partial_t b = \beta^r \partial_r b + 2b \frac{\beta^r}{r} - \frac{2}{3} \sigma b \hat{\nabla}_m \beta^m - 2\alpha b A_b, \quad (3.3c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K &= \beta^r \partial_r K - \nabla^2 \alpha + \alpha \left(A_a^2 + 2A_b^2 + \frac{1}{3} K^2 \right) \\ &\quad + 4\pi \alpha (\rho + S_a + 2S_b), \end{aligned} \quad (3.3d)$$

$$\begin{aligned} \partial_t A_a &= \beta^r \partial_r A_a - \left((\nabla \nabla \alpha)_a - \frac{1}{3} \nabla^2 \alpha \right) + \alpha \left(R_a - \frac{1}{3} R \right) \\ &\quad + \alpha K A_a - \frac{16\pi}{3} \alpha (S_a - S_b), \end{aligned} \quad (3.3e)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^r &= \beta^r \partial_r \hat{\Delta}^r - \hat{\Delta}^r \partial_r \beta^r + \frac{1}{a} \partial_r^2 \beta^r + \frac{2}{b} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) \\ &\quad + \frac{\sigma}{3} \left(\frac{1}{a} \partial_r (\hat{\nabla}_m \beta^m) + 2\hat{\Delta}^r \hat{\nabla}_m \beta^m \right) \\ &\quad - \frac{2}{a} (A_a \partial_r \alpha + \alpha \partial_r A_a) + 2\alpha \left(A_a \hat{\Delta}^r - \frac{2}{rb} (A_a - A_b) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha \xi}{a} \left[\partial_r A_a - \frac{2}{3} \partial_r K + 6A_a \partial_r \phi \right. \\ &\quad \left. + (A_a - A_b) \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r b}{b} \right) - 8\pi j_r \right]. \end{aligned} \quad (3.3f)$$

El sistema está escrito de manera casi explícita en términos de las variables

fundamentales salvo por términos geométricos complicados. Estos los podemos enumerar y poner explícitamente comenzando por la divergencia conforme del vector de corrimiento:

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}_m \beta^m &= \partial_r \beta^r + \beta^r \frac{\partial_r (r^4 ab^2)}{2r^4 ab^2} \\ &= \partial_r \beta^r + \beta^r \left(\frac{\partial_r a}{2a} + \frac{\partial_r b}{b} + \frac{2}{r} \right).\end{aligned}\quad (3.4)$$

La componente radial mixta de la segunda derivada covariante del lapso, $(\nabla\nabla)_a \alpha := \nabla^r \nabla_r \alpha$, y el laplaciano del mismo

$$(\nabla\nabla)_a \alpha = \frac{1}{ae^{4\phi}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r a}{2a} + 2\partial_r \phi \right) \right], \quad (3.5a)$$

$$\nabla^2 \alpha = \frac{1}{ae^{4\phi}} \left[\partial_r^2 \alpha - \partial_r \alpha \left(\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - 2\partial_r \phi - \frac{2}{r} \right) \right]. \quad (3.5b)$$

La componente radial mixta del tensor de Ricci $R_a := R_r^r$ y su traza

$$\begin{aligned}R_a &= -\frac{1}{ae^{4\phi}} \left[\frac{\partial_r^2 a}{2a} - a\partial_r \hat{\Delta}^r - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r b}{b} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \hat{\Delta}^r \partial_r a + \frac{\partial_r a}{rb} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \left(1 + \frac{r\partial_r b}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4\partial_r^2 \phi - 2\partial_r \phi \left(\frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} - \frac{2}{r} \right) \right],\end{aligned}\quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned}R &= -\frac{1}{ae^{4\phi}} \left[\frac{\partial_r^2 a}{2a} + \frac{\partial_r^2 b}{b} - a\partial_r \hat{\Delta}^r - \left(\frac{\partial_r a}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_r b}{b} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{rb} \left(3 - \frac{a}{b} \right) \partial_r b + \frac{4}{r^2} \left(1 - \frac{a}{b} \right) \right. \\ &\quad \left. + 8 \left(\partial_r^2 \phi + (\partial_r \phi)^2 \right) - 8 \partial_r \phi \left(\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - \frac{2}{r} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.6b)$$

Junto con las ecuaciones de evolución es necesario considerar las cons-

tricciones del sistema, constituidas por las constricciones Hamiltoniana y de momento, junto con la resultante de la definición del vector $\hat{\Delta}^i$. En términos de las variables del sistema toman la forma:

$$\mathcal{H} = R - \frac{3}{2}A_a^2 + \frac{2}{3}K - 16\pi\rho = 0, \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{M}_r = \partial_r A_a - \frac{3}{2}\partial_r K + 6A_a\partial_r\phi + \frac{2}{3}A_a\left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r b}{b}\right) - 8\pi j_r = 0, \quad (3.7b)$$

$$C_\Delta = a\hat{\Delta}^r - \left(\frac{\partial_r a}{2a} - \frac{\partial_r b}{b} - 2\frac{a-b}{r}\right) = 0. \quad (3.7c)$$

3.1.1 Regularización en el origen

Una aparente desventaja de las formulaciones en coordenadas curvilíneas se manifiesta por el hecho de que los mismos sistemas coordenados pueden ser singulares. En simetría esférica se han desarrollado distintas estrategias para llevar a cabo simulaciones robustas pese a este problema [18, 11, 166, 133]. El enfoque que utilizamos [12] consiste en requerir que numéricamente se cumpla la condición derivada de que el espacio es localmente plano en el origen:

$$a - b \sim O(r^2), \quad A_a - A_b \sim O(r^2), \quad (3.8)$$

Como tratar de imponer la condición sobredeterminaría el sistema, se introducen variables auxiliares:

$$\lambda := \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{a}{b}\right), \quad (3.9a)$$

$$A_\lambda := \frac{1}{r^2} (A_a - A_b) = \frac{3}{2r^2} A_a. \quad (3.9b)$$

Al introducir estas variables las ecuaciones de evolución y constricciones toman una forma aparentemente regular, ya que la definición de las mismas esconde los términos problemáticos. Para remediar esto se promueven ambas variables a funciones independientes, cuyo valor inicial se fija al requerir que inicialmente

se cumplan las ecuaciones (3.9). De los comportamientos en el origen (3.8) se sigue que es consistente considerar que estas nuevas variables tienen un comportamiento par del tipo:

$$\begin{aligned}\lambda &\sim \lambda^0 + \mathcal{O}(r^2), \\ A_\lambda &\sim A_\lambda^0 + \mathcal{O}(r^2).\end{aligned}$$

Entonces al imponer este comportamiento como condición de frontera los términos problemáticos en las ecuaciones de evolución se regularizan. Para poder aplicar consistentemente la condición de paridad en el origen es necesario encontrar las ecuaciones de evolución consistentes a partir de la definición. La ecuación de evolución para λ , consistente con las ecuaciones (3.3b) y (3.3c) es

$$\partial_t \lambda = \beta^r \partial_r \lambda + \frac{2}{r} \left[\beta^r \lambda - \frac{a}{b} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) \right] + \frac{2\alpha a}{b} A_\lambda. \quad (3.10)$$

Para A_λ tenemos la identidad derivada de $A_a + 2A_b = 0$,

$$A_\lambda = \frac{3A_a}{2r^2}. \quad (3.11)$$

De modo que la condición de regularidad es equivalente a que los términos de la curvatura extrínseca sin traza sean a su vez pares cerca del origen, y se anulen allí. La ecuación de evolución se obtiene reescribiendo (3.3e) en términos de

las variables nuevas, y es explícitamente

$$\begin{aligned}
\partial_t A_\lambda &= \beta^r \partial_r A_\lambda + 2A_\lambda \frac{\beta^r}{r} \\
&\quad - \frac{1}{rae^{4\phi}} \left[\partial_r \left(\frac{\partial_r \alpha}{r} \right) - \frac{\partial_r \alpha}{2r} \left(\frac{\partial_r a}{a} + \frac{\partial_r b}{b} + 8\partial_r \phi \right) \right] \\
&\quad - \frac{\alpha}{rae^{4\phi}} \left[2\partial_r \left(\frac{\partial_r \phi}{r} \right) - \frac{\partial_r \phi}{r} \left(\frac{\partial_r a}{a} + \frac{\partial_r b}{b} + 4\partial_r \phi \right) \right] \\
&\quad + \frac{\alpha}{ae^{4\phi}} \left[\frac{b}{2a} \partial_r^2 \lambda + \frac{a}{r} \partial_r \left(\frac{\hat{\Delta}^r}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial_r \lambda}{r} \left(1 + \frac{2b}{a} - \frac{rb}{2} \hat{\Delta}^r \right) + \frac{\partial_r a}{ar^2} \left(\frac{3}{4} \frac{\partial_r a}{a} - \frac{\partial_r b}{b} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{r} \left(b \hat{\Delta}^r + 2 \frac{\partial_r b}{b} \right) + \frac{b}{a} \lambda^2 \right] \\
&\quad + \alpha K A_\lambda - 8\pi \alpha S_\lambda,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

con $S_\lambda := (S_a - S_b)/r^2$.

3.1.2 Hiperbolicidad del sistema en simetría esférica

El análisis de hiperbolicidad se recupera del presentado en la sección 1.3.3 al aplicar las consideraciones de simetría esférica. Como el sistema en este caso es mucho más simple podemos desarrollar el análisis directamente. Para escribir el sistema a primer orden conviene definir las variables

$$q := \partial_r \ln \alpha, \quad \chi := \partial_r \phi, \tag{3.13}$$

$$d_a := \frac{1}{2} \partial_r \ln a, \quad d_b := \frac{1}{2} \partial_r \ln b. \tag{3.14}$$

En el resto de la sección asumimos que la componente radial del vector de corriente β^r es una función conocida del espacio-tiempo. Para el lapso asumimos

una condición tipo Bona-Maso de la forma

$$\partial_t \alpha - \beta^r \partial_r \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (3.15)$$

con $f(\alpha) > 0$ una función arbitraria del lapso α en tanto sea positiva.

En particular consideraremos el caso $\xi = 2$. El sistema a parte principal queda

$$\partial_0 q \simeq -\alpha f \partial_r K, \quad (3.16a)$$

$$\partial_0 \chi \simeq -\frac{1}{6} \alpha \partial_r K + \frac{\sigma}{6} \beta^r \partial_r (d_a + 2d_b), \quad (3.16b)$$

$$\partial_0 d_a \simeq -\alpha \partial_r A_a - \frac{\beta^r}{3} \sigma \partial_r (d_a + 2d_b), \quad (3.16c)$$

$$\partial_0 d_b \simeq -\alpha \partial_r A_b - \frac{\beta^r}{3} \sigma \partial_r (d_a + 2d_b), \quad (3.16d)$$

$$\partial_0 K \simeq -\frac{\alpha}{ae^{4\phi}} \partial_r q, \quad (3.16e)$$

$$\partial_0 A_a \simeq -\frac{2\alpha}{3ae^{4\phi}} \partial_r (q + d_a - d_b + 2\chi - a\Delta^r), \quad (3.16f)$$

$$\partial_0 \Delta^r \simeq -\frac{4\alpha}{3a} \partial_r K + \frac{\beta^r}{3a} \sigma \partial_r (d_a + 2d_b), \quad (3.16g)$$

Donde hemos definido $\partial_0 := \partial_t - \beta^r \partial_r$, y \simeq denota “igual a parte principal”. Dado que la única dirección de propagación compatible con la simetría es la radial, es inmediato identificar las componentes del símbolo principal obtenido al considerar propagación a lo largo del vector coordenado $r^a = \delta_r^a$.

De la estructura de estas ecuaciones podemos identificar inmediatamente una combinación particular que se corresponde con el gradiente del elemento de volumen conforme

$$\omega^d := d_a + 2d_b, \quad (3.17a)$$

y su velocidad de propagación es $-\beta^r(1 - \sigma)$, de modo que depende del tipo de evolución considerada (Euleriana $\sigma = 0$ o Lagrangiana $\sigma = 1$). También podemos identificar dos campos que se propagan sobre las líneas normales con velocidad

$-\beta^r$. Explícitamente

$$\omega^q := q - 6f\chi - f(d_a + 2d_b) , \quad (3.17b)$$

$$\omega^\Delta := \Delta^r - 8\chi/a - (d_a + 2d_b)/a . \quad (3.17c)$$

Existen dos campos asociados a la condición de foliación, que son

$$\omega_\pm^\alpha = e^{2\phi} \sqrt{af} K \pm q , \quad (3.18)$$

y se propagan con velocidades

$$\lambda_\pm^\alpha = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/a} . \quad (3.19)$$

Por último, los campos transversos

$$\omega_\pm^l = e^{2\phi} \sqrt{a} \left(A_a - \frac{2}{3}K \right) \pm \frac{2}{3} (d_a - d_b - a\Delta^r + 2\chi) , \quad (3.20)$$

y se propagan con velocidades

$$\lambda_\pm^l = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{1/a} , \quad (3.21)$$

que son las velocidades coordenadas de la luz en las direcciones saliente y entrante.

El subsistema de las constricciones

Para cerrar este análisis incluyo la estructura característica del subsistema de las constricciones. Este análisis se basa en el de la referencia [96], con algunas modificaciones para adaptarlo a este caso específico. Las ecuaciones de constricción del sistema BSSN satisfacen a su vez un subsistema de ecuaciones de evolución cuya estructura hiperbólica es heredada del sistema principal. Al considerar la ecuación de constricción adicional C_Δ , y escribiendo el escalar de Ricci que aparece en la constricción Hamiltoniana en términos de la variable

auxiliar Δ^r , el subsistema de evolución de las constricciones en simetría esférica se reduce a parte principal a

$$\partial_0 \mathcal{H} \simeq -\alpha e^{-4\phi} (2 - \xi) \partial_r \mathcal{M}_r, \quad (3.22)$$

$$\partial_0 \mathcal{M} \simeq \frac{\alpha}{6} \partial_r \mathcal{H} + \frac{\alpha}{2a} e^{-4\phi} \partial_r^2 C_\Delta, \quad (3.23)$$

$$\partial_0 (\partial_r C_\Delta) \simeq \xi \alpha \partial_r \mathcal{M}_r. \quad (3.24)$$

Podemos notar inmediatamente que la restricción Hamiltoniana se comporta como un campo propio que no se propaga $\Omega_0 := H$, mientras que el par de combinaciones

$$\Omega_\pm = \frac{ae^{4\phi} H}{6} + \frac{\partial_r C_\Delta}{2} \mp \sqrt{ae^{2\phi}} M, \quad (3.25)$$

se propagan con velocidades propias dadas por

$$\lambda_\pm^\Omega = -\beta^r \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{1/a}, \quad (3.26)$$

que coinciden con la velocidad coordinada de propagación de la luz en las direcciones saliente y entrante.

Un resultado importante que emplearemos adelante acerca de los campos propios Ω es que cada uno de ellos está relacionado a un campo propio ω del sistema de evolución completo que se propaga con la misma velocidad, satisfaciendo

$$\Omega \simeq s^i \partial_i \omega,$$

con \vec{s} un vector que caracteriza la dirección de propagación. Para este caso resulta que $\lambda_\pm^l = \lambda_\pm^\Omega$ y entonces

$$\Omega_\pm \simeq \partial_r \omega_\pm^l. \quad (3.27)$$

3.2 Condiciones de frontera para el sistema BSSN en simetría esférica

Los desarrollos y resultados presentados en esta sección son parte de un artículo publicado en colaboración con Miguel Alcubierre en *Classical and Quantum Gravity* [13].

El estudio del impacto de las condiciones de frontera en la evolución es relevante ya que estas últimas pueden descomponer las propiedades de hiperbolicidad del sistema de ecuaciones de evolución. Es por ello que recientemente varios autores se han enfocado en el estudio de la Relatividad General como un problema de valores iniciales y a la frontera (IBVP) [88, 187, 188, 55, 155, 170, 35, 136, 25, 171, 202]. Como resultado se ha demostrado que para muchas formulaciones con condiciones de frontera adecuadas, el IBVP está bien puesto. En particular, avances recientes se han logrado para el sistema Z4 [38, 106], pero el avance ha sido más lento para la formulación BSSN [141].

Una consideración adicional que surge de las condiciones de frontera aplicadas en las fronteras del dominio numérico, es el hecho de que generalmente no estén adaptadas a las ecuaciones de constricción, en el sentido que aunque siendo el IBVP bien puesto, las fronteras introducen violaciones a las ecuaciones de constricción que se propagan libremente en el interior del dominio computacional. Este problema se ha considerado cuidadosamente al estudiar la propagación de distintos campos en las fronteras [53, 54, 24, 116, 51, 115, 52]. Sin embargo, aún no es muy claro el cómo construir condiciones de frontera en general que posean la propiedad de conservar las constricciones para el sistema de evolución BSSN que tengan una implementación sencilla en códigos numéricos.

Partiendo del análisis de hiperbolicidad expuesto en la sección anterior podemos proponer condiciones de frontera apropiadas. Para esto consideraremos por simplicidad que el vector de corrimiento se anula en la frontera (en simulaciones actuales de sistemas aislados esto no es generalmente cierto, pero la

magnitud del vector de corrimiento es suficientemente pequeña en la frontera de modo que la aproximación es buena).

3.2.1 Condiciones de frontera para los campos propios que no se propagan

Bajo la suposición de que el vector de corrimiento se anula en la frontera, las direcciones normal y temporal coinciden, de modo que podemos considerar simultáneamente los campos que se propagan en ambas direcciones ω^d , ω^q y ω^Δ . Cuando el vector de corrimiento es nulo estos campos efectivamente no se propagan, de modo que en principio se pueden evolucionar directamente hasta la frontera.

Primero notamos que q , χ , d_a y d_b son cantidades auxiliares (derivadas espaciales de componentes métricas) que no se evolucionan directamente en la formulación BSSN. En la práctica hemos encontrado que se puede evolucionar α , ϕ , a and b directamente hasta las frontera, sin aplicar ninguna condición de frontera. Cuando el vector de corrimiento se anula en la frontera, las ecuaciones de evolución de estas cantidades no requieren la evaluación de derivadas espaciales, de modo que evolucionar hasta las fronteras es una tarea trivial.

Queda solamente por definir la condición de frontera para Δ^r . Hemos intentado dos métodos:

1. El método más simple consiste en evolucionar Δ^r hasta la frontera, usando diferencias laterales para estimar las derivadas espaciales de α y K que aparecen en su ecuación de evolución (3.3f) (recordando que tomamos la elección estándar $\xi = 2$).
2. La otra posibilidad consiste en reconstruir el campo propio ω^Δ en la frontera del nivel temporal previo, y evolucionarla directamente hasta el nuevo paso de tiempo, y después de eso resolver para $\hat{\Delta}^r$ usando el hecho de que al ya haber actualizado el valor de ϕ entonces podemos calcular su derivada radial χ en el nuevo paso de tiempo usando diferencias laterales.

Estos dos métodos nos permiten obtener evoluciones estables y convergentes, y de hecho los resultados obtenidos parecen ser casi idénticos. Pero al ser el segundo mucho más complicado de implementar, en la práctica preferimos el primero.

3.2.2 Condiciones de frontera para los campos de norma

Consideremos ahora los campos propios asociados a las variables de norma:

$$\omega_{\pm}^{\alpha} = e^{2\phi} \sqrt{af} K \pm q , \quad (3.28)$$

que se propagan con velocidad $\lambda_{\pm}^{\alpha} = \pm \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/a}$ (asumiendo de nuevo un vector de corrimiento nulo).

Claramente, uno de los campos propios se propaga de manera saliente mientras el otro es entrante. Para respetar la causalidad solamente se pueden especificar condiciones de frontera para el campo entrante. Una elección obvia sería igualar a cero el valor del campo entrante en la frontera. Esto funciona bien en el caso de ondas planas en coordenadas Cartesianas, pero produce reflexiones considerables en la frontera para el caso de ondas esféricas que decaen como $1/r$.

Para especificar la condición a la frontera asumimos que el lapso se comporta como una onda esférica de la forma:

$$\alpha = 1 + g(r - vt)/r , \quad (3.29)$$

con g una función desconocida y $v = \alpha e^{-2\phi} \sqrt{f/a}$. Esta suposición es válida para espacios asintóticamente planos, por lo que en casos cosmológicos es necesario modificarla. Sustituyendo la ecuación de evolución para el lapso en la definición del modo entrante tenemos

$$\omega_{-}^{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(-\frac{1}{v} \partial_t \alpha - \partial_r \alpha \right) , \quad (3.30)$$

de modo que al considerar un comportamiento de onda saliente, el campo

propio entrante no se anula y tiene la forma:

$$\omega_-^\alpha = (\alpha - 1) / r, \quad (3.31)$$

independientemente de la forma de la función g .

Entonces, para nuestra condición de frontera primero actualizamos α hasta la frontera, determinamos ω_-^α de la expresión anterior, calculamos $q = \partial_r(\ln \alpha)$ en la frontera usando diferencias laterales, y finalmente resolvemos para K de la definición de ω_-^α :

$$K = \frac{\omega_-^\alpha + q}{e^{2\phi} \sqrt{af}}. \quad (3.32)$$

Este procedimiento es consistente porque solo nos es permitido aplicar condiciones sobre los campos entrantes, y usamos esto para resolver para K . En la práctica hemos encontrado que esta condición es muy robusta y estable, y provoca muy pequeñas reflexiones en la frontera, las cuales se vuelven aún más pequeñas cuando la frontera se sitúa más lejos.

Como comentario final observamos que al ser este un sector asociado únicamente a la norma, cualquier condición que elijamos para el campo entrante es consistente, en el sentido de que la física no cambia. De todos modos, es deseable minimizar las reflexiones de modo que la norma no cambie al cambiar la posición de las fronteras.

3.2.3 Condiciones de frontera adaptadas a las constricciones

Siguiendo este enfoque podemos encontrar condiciones de frontera a los campos propios restantes (3.20). Resulta que en este caso aplicar condiciones de frontera que respetan la causalidad no es suficiente, ya que en Relatividad General tenemos que asegurarnos de que las ecuaciones de restricción se satisfacen en la frontera, y para que esto suceda no podemos conservar la libertad de especificar libremente los campos entrantes. Lo primero que podemos notar es

que podemos construir las derivadas radial y temporal de estos campos ω_{\pm}^l como una combinación de las constricciones. Por ejemplo, comenzando por eq. (3.20), tomamos una derivada radial y reorganizando los términos obtenemos:

$$\partial_r \omega_{\pm}^l = \sqrt{ae^{2\phi}} \mathcal{M}_r \mp \left(\frac{ae^{4\phi} \mathcal{H}}{6} + \frac{\partial_r C_{\Delta}}{2} \right) + P_{\pm} , \quad (3.33)$$

con \mathcal{H} , \mathcal{M}_r y C_{Δ} las constricciones definidas anteriormente, y donde P_{\pm} es un término de fuente que involucra únicamente primeras derivadas de la métrica y componentes de la curvatura extrínseca sin derivadas, cuya forma explícita no es ilustrativa. De esta manera podemos identificar que se cumple la relación (3.27). Asumiendo que las ecuaciones de restricción se anulan, esta última ecuación se reduce a:

$$\partial_r \omega_{\pm}^l = P_{\pm} . \quad (3.34)$$

De manera similar, se puede tomar la derivada temporal de ω_{\pm}^l , utilizar las ecuaciones de evolución de las distintas cantidades dinámicas y reagrupar términos para encontrar

$$\partial_t \omega_{\pm}^l = \left(\beta^r \mp \frac{\alpha}{\sqrt{ae^{2\phi}}} \right) \left[\sqrt{ae^{2\phi}} \mathcal{M}_r \mp \left(\frac{ae^{4\phi} \mathcal{H}}{6} + \frac{\partial_r C_{\Delta}}{2} \right) \right] + Q_{\pm} , \quad (3.35)$$

y como antes, Q_{\pm} engloba a las fuentes de orden menor. Asumiendo que las constricciones se anulan esto se reduce a:

$$\partial_t \omega_{\pm}^l = Q_{\pm} . \quad (3.36)$$

De hecho, las ecuaciones (3.33) y (3.35) pueden ser combinadas resultando en:

$$\partial_t \omega_{\pm}^l + \left(-\beta^r \pm \frac{\alpha}{\sqrt{ae^{2\phi}}} \right) \partial_r \omega_{\pm}^l = Q_{\pm} + \left(-\beta^r \pm \frac{\alpha}{\sqrt{ae^{2\phi}}} \right) P_{\pm} , \quad (3.37)$$

lo cual confirma que ω_+^l y ω_-^l son efectivamente campos salientes y entrantes

respectivamente.

Es claro que no es consistente asumir que en una implementación numérica todas las constricciones se anulen simultáneamente en la frontera, ya que el valor asumido por la combinación saliente ha de propagarse libremente hacia el exterior del dominio. Lo que sí podemos asumir es el comportamiento del valor del modo entrante, que en particular tomaremos $\Omega_-^l = 0$.

Estos resultados sugieren dos caminos para imponer condiciones de frontera en el campo entrante ω_-^l :

1. Método de la derivada radial: Calcular el valor del término fuente P_- en el nuevo nivel temporal cerca de la frontera (usualmente un punto hacia adentro), usando los valores locales de la curvatura extrínseca y evaluando numéricamente las derivadas radiales de las componentes métricas. Usando este valor para P_- obtener $\partial_r \omega_-^l$ cerca de la frontera, y resolver para el valor de ω_-^l en la frontera usando la ecuación (3.34) y aproximando numéricamente la derivada.

Finalmente, una vez obtenido ω_-^l en la frontera podemos simplemente usar la ecuación (3.20) para obtener el valor de A_a en la frontera, conociendo previamente los valores de K , Δ^r y las componentes métricas hasta la frontera.

2. Método de la derivada temporal: Calcular el valor del término fuente Q_- en la frontera al mismo tiempo que se calculan las derivadas temporales de todos los otros campos, usando derivadas laterales en la frontera. Usar la ecuación (3.36) para evolucionar ω_-^l en la frontera al mismo tiempo que los demás campos dinámicos. Finalmente obtener el valor de frontera de A_a usando (3.20).

Ambos métodos son fáciles de implementar, aunque el que se basa en la derivada temporal es conceptualmente más sencillo y uno esperaría obtener con él resultados más acertados. Una preocupación podría radicar en el hecho de que se asumió que el modo entrante se las constricciones se anula en las

ecuaciones (3.33) y (3.35), lo cual solo es cierto para ondas planas. Como se ve a continuación esto introduce pequeñas reflexiones en el valor residual de las constricciones, pero estas reflexiones convergen a cero al incrementar la resolución.

3.2.4 Pruebas numéricas

Para concretar la exposición anterior se muestra una simulación de la propagación de un pulso de campo escalar real sin masa. Este fenómeno ha sido bastante estudiado en relatividad numérica y su estudio llevó al descubrimiento de fenómenos críticos en el colapso gravitacional [65].

Para este caso la elección de norma consistió en considerar un vector de corrimiento nulo y un lapso del tipo “1+log”, que corresponde a la foliación Bona-Masso (1.68) con $f(\alpha) = 2/\alpha$:

$$\partial_t \alpha = -2\alpha K . \quad (3.38)$$

La dinámica del campo escalar real sin masa es un caso particular de la expuesta en la subsección 2.2, tomando el potencial nulo $V = 0$ y considerando que una de las componentes real e imaginaria guardan la misma proporción a todo tiempo. Así el tensor de energía-momento queda:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi . \quad (3.39)$$

Llamando Π a la derivada normal y Ψ a la derivada radial del campo escalar, los términos que funcionan como fuentes en las ecuaciones del campo gravitacional,

ecuaciones (2.41), quedan explícitamente:

$$\rho := \frac{1}{2} \left(\Pi^2 + \frac{\Psi^2}{ae^{4\phi}} \right), \quad (3.40a)$$

$$j^r := -\Pi\Psi, \quad (3.40b)$$

$$S_a := \frac{1}{2} \left(\Pi^2 + \frac{\Psi^2}{ae^{4\phi}} \right), \quad (3.40c)$$

$$S_b := \frac{1}{2} \left(\Pi^2 - \frac{\Psi^2}{ae^{4\phi}} \right). \quad (3.40d)$$

Al ser estos términos funciones de primeras derivadas del campo escalar, el sector geométrico del sistema completo sigue desacoplado del sector de materia a parte principal, por lo que se pueden analizar independientemente.

Las ecuaciones de evolución solo tienen parte real y ya reducidas en simetría esférica quedan:

$$\partial_t \varphi = \alpha \Pi, \quad (3.41a)$$

$$\partial_t \Psi = \partial_r (\alpha \Pi), \quad (3.41b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi = & \frac{\alpha}{ae^{4\phi}} \left[\partial_r \Psi + \Psi \left(\frac{2}{r} - \frac{\partial_r a}{2a} + \frac{\partial_r b}{b} + 2\partial_r \phi \right) \right] \\ & + \frac{\Psi}{ae^{4\phi}} \partial_r \alpha + \alpha K \Pi. \end{aligned} \quad (3.41c)$$

En simetría esférica los modos transversos del campo escalar no se pueden excitar. Por ello es suficiente considerar los modos longitudinales ω_{\pm}^{φ} , ecuación (2.39), y sus velocidades correspondientes λ_{\pm}^{φ} , que explícitamente son:

$$\omega_{\pm}^{\varphi} = \Pi \mp \frac{\Psi}{e^{2\phi} \sqrt{a}}, \quad \lambda_{\pm}^{\varphi} = \pm \frac{\alpha}{e^{2\phi} \sqrt{a}}. \quad (3.42)$$

Al igual que para las variables geométricas utilizamos estos modos para asociar condiciones de frontera. Con este análisis vemos que el campo escalar

queda como una variable auxiliar que no se propaga y por ello integrarlo hasta las fronteras sin imponer condiciones resulta adecuado. Para los modos que se propagan no asumimos ingenuamente que el modo entrante es cero, sino que consideramos que el campo escalar se comporta asintóticamente como una onda esférica:

$$\phi = g(r - vt)/r, \quad (3.43)$$

con g una función arbitraria y $v = \alpha e^{-2\phi} / \sqrt{a}$. De manera análoga a la derivación de la ecuación (3.31) obtenemos que el campo entrante ω_-^φ se comporta como:

$$\omega_-^\varphi = -\frac{\varphi}{re^{2\phi}\sqrt{a}}. \quad (3.44)$$

Para aplicar este resultado integramos las ecuaciones de evolución para φ y Ψ hasta la frontera, y con calculamos el campo entrante en la frontera usando la ecuación (3.44). Finalmente obtenemos el valor de Π en la frontera de la definición de los campos propios, ecuación (3.42).

Para especificar los datos iniciales es necesario resolver las ecuaciones de constricción (3.7). La constricción de momentos (3.7b) se satisface trivialmente asumiendo simetría temporal, lo cual implica que tanto la curvatura extrínseca K_{ij} como la derivada temporal del campo escalar Π se anulan inicialmente. Entonces falta por satisfacerse la constricción Hamiltoniana (3.7a), que se simplifica asumiendo que la métrica inicial es conformemente plana, $a = b = 1$. La constricción Hamiltoniana se reduce a una ecuación tipo Poisson en una dimensión para el factor conforme $\psi \equiv e^\phi$:

$$\partial_r^2 \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + 2\pi\psi^5 \rho = 0. \quad (3.45)$$

Para un campo escalar sin masa esta ecuación es lineal en ψ , ya que con estas suposiciones $\rho = \Psi^2/\psi^4$. Estamos en condiciones de especificar libremente el perfil inicial del campo escalar, el cual elegimos como una distribución

Gaussiana centrada en el origen:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-(r/\sigma_0)^2}. \quad (3.46)$$

Una vez especificado el perfil del campo escalar podemos calcular la densidad y resolver esta ecuación, asumiendo que asintóticamente el factor conforme decae como $\psi = 1 + c/r$, con c alguna constante

Para las simulaciones aquí presentadas se usaron como parámetros del pulso inicial $\varphi_0 = 0.2$ y $\sigma_0 = 5.0$. El lapso se asume constante inicialmente, $\alpha(t=0) = 1$. A fin de analizar convergencia se usan tres resoluciones distintas $\Delta r = 0.2, 0.1, 0.05$, con las fronteras exteriores ubicadas en $r = 25$, y el paso temporal asignado por $\Delta t = \Delta r/2$. Estas simulaciones fueron discretizadas e integradas a cuarto orden.

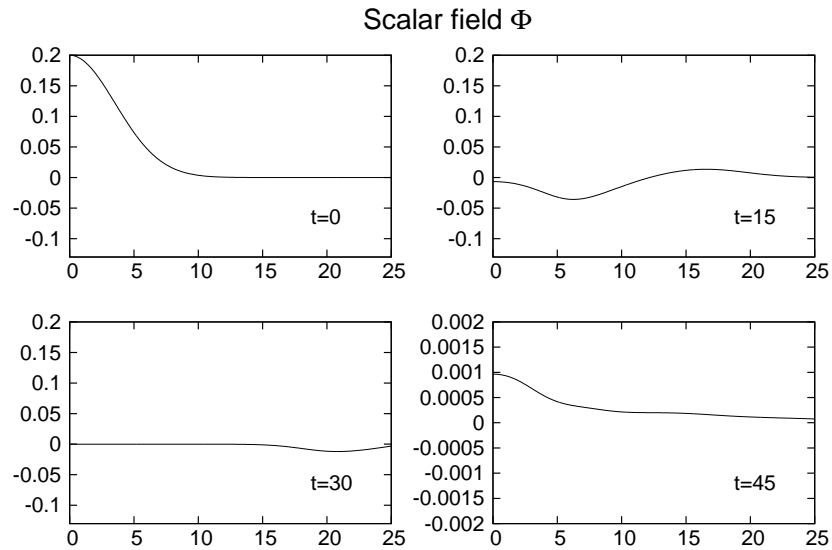


Figura 3.1: Evolución del campo escalar φ . Cuando el pulso alcanza la frontera se produce una pequeña reflexión, que solo es apreciable al reescalar el rango vertical en el último panel.

En la Figura 3.1 se muestra la evolución de el campo escalar en el caso en que se usan las condiciones de frontera basadas en el método de la derivada radial. El primer panel muestra el perfil Gaussiano inicial del campo escalar. Los paneles 2 y 3 muestran la evolución a $t = 15$ y $t = 30$, cuando el pulso saliente

de campo escalar está alcanzando la frontera. El último panel corresponde a $t = 45$, después de que el pulso ha pasado por la frontera. En este último panel se ha reajustado la escala vertical a fin de mostrar las reflexiones pequeñas introducidas por la frontera numérica, cuyo valor es al menos dos ordenes de magnitud menor al tamaño del pulso saliente al alcanzar la frontera. También se muestra en la Figura 3.2 el valor central del lapso como función del tiempo. Se puede apreciar que este valor cae inicialmente como consecuencia de la curvatura producida por una concentración considerable de materia y alcanza un mínimo alrededor de 0.5, pero la configuración se dispersa antes de que se forme una superficie atrapada y el valor del lapso en el origen regresa rápidamente cerca de 1 (este dato de hecho corresponde al régimen de campo intenso, y es muy cercano a las configuraciones que colapsan en un agujero negro). Es de notar que el pulso saliente alcanza la frontera alrededor de $t \sim 30$, y las reflexiones implotan en el origen alrededor de $t \sim 60$. El efecto de esas reflexiones difícilmente puede apreciarse en el comportamiento del valor central del lapso.

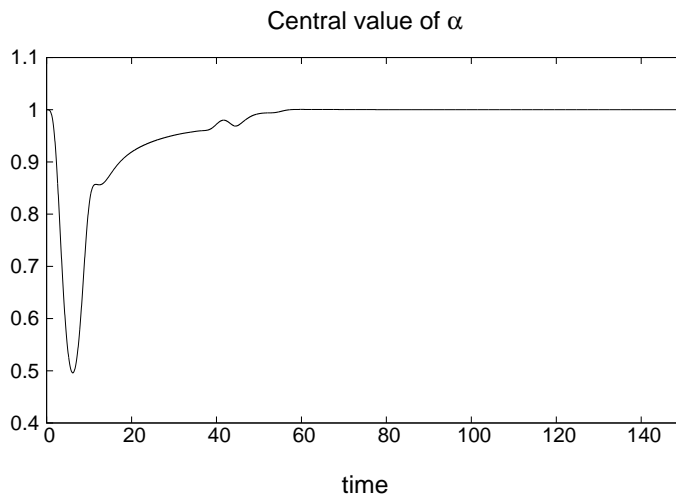


Figura 3.2: Valor central de la función de lapso como función del tiempo. Inicialmente el valor del lapso cae como consecuencia de una gran curvatura en la región central, pero al dispersarse el campo este valor regresa a su valor original.

Para analizar a detalle el comportamiento de estas reflexiones en la frontera, se muestran en la Figura 3.3 detalles de la evolución de las constricciones

Hamiltoniana y de momento respectivamente a tiempos $t = 23, 35, 75$, para las tres resoluciones distintas consideradas. Los valores obtenidos son reescalados por los factores apropiados al orden esperado de convergencia. En todos los paneles de ambas figuras el eje radial comienza en $r = 10$ a fin de apreciar mejor las regiones cercanas a la frontera. El primer panel en ambas gráficas muestra la situación a $t = 23$, correspondiente a un momento antes de que el primer pulso alcance la frontera. Podemos apreciar convergencia a cuarto orden salvo en los últimos puntos cercanos a la frontera donde la situación parece converger a tercer orden. Los dos paneles finales muestran la situación a $t = 35$ después de que los pulsos han atravesado la frontera y producido reflexiones, y a $t = 75$ después de que estas reflexiones han implotado en el origen. En estos últimos paneles observamos un desfase y pérdida de orden en la convergencia. El hecho de que la convergencia se vea afectada después de que los pulsos se reflejan es intrigante y podría radicar en los detalles de la implementación. Aún así, la convergencia se da a un orden mayor que tres en todo el dominio computacional.

A continuación, en la Figura 3.4 se considera el mismo caso usando las condiciones de frontera basadas en el método de la derivada temporal. Los paneles se corresponden con los tiempos analizados en el caso anterior, y también se utilizaron las mismas escalas. En este caso se aprecia convergencia a cuarto orden a todos los tiempos, salvo en los puntos más cercanos a la frontera donde nuevamente parece que se pierde un orden en la convergencia. Aún así, esta pérdida de convergencia en la frontera no parece contaminar la evolución en el interior de modo significativo aún después de que las reflexiones en la frontera se han propagado por todo el dominio computacional.

Estos ejemplos muestran que las condiciones de frontera utilizadas funcionan bien aún en los casos que incluyen materia. Aunque ambos métodos funcionan muy bien en la práctica, en el sentido de que son estables y robustos, el método de la derivada temporal muestra propiedades de convergencia mucho más limpias, de modo que ha de ser preferido sobre el método de la derivada radial.

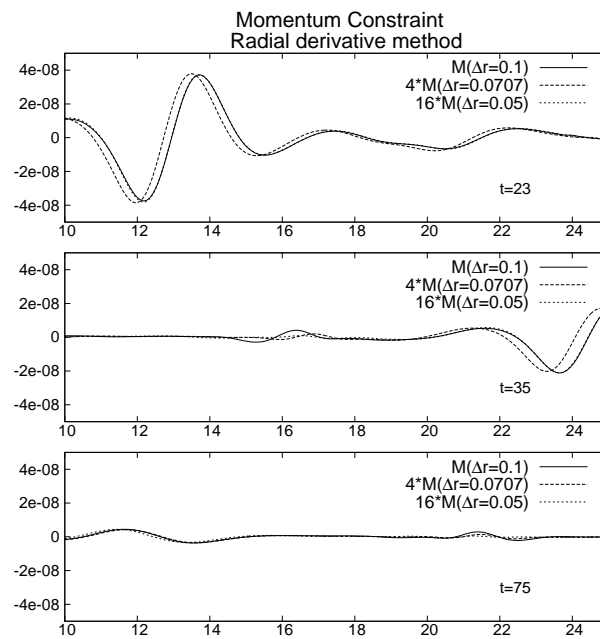
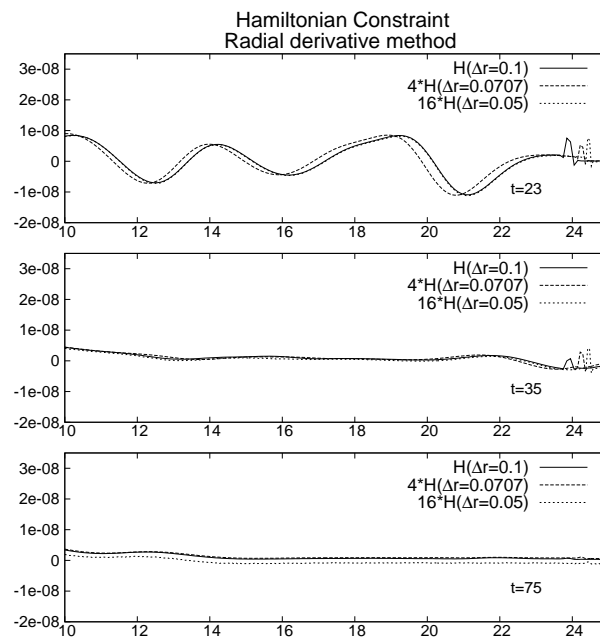


Figura 3.3: Evolución de las constricciones usando el método de la derivada radial. Notar que la escala radial comienza en $r = 10$.

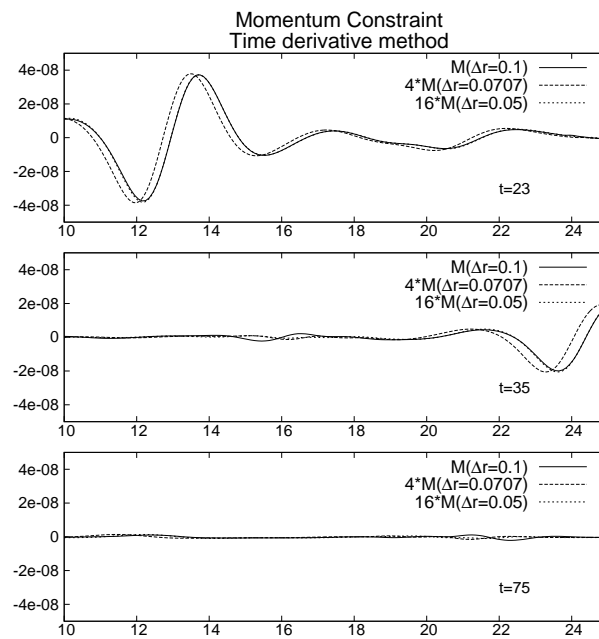
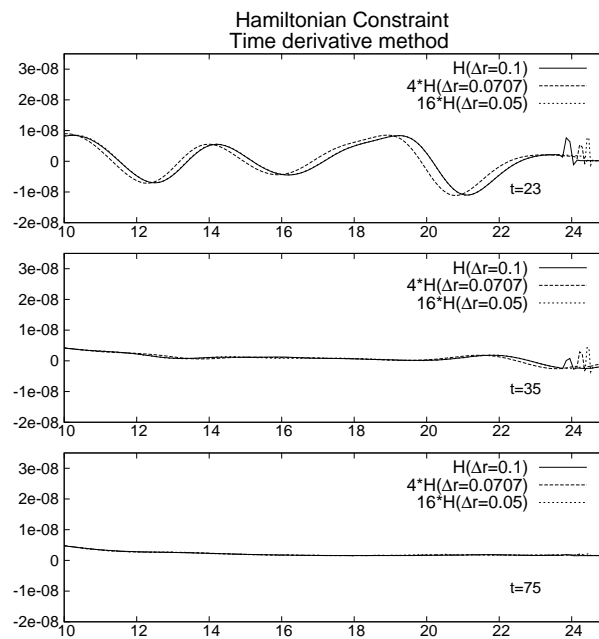


Figura 3.4: Evolución de las constricciones usando el método de la derivada temporal. Notar que la escala radial comienza en $r = 10$.

3.2.5 Conclusiones

El objetivo del trabajo expuesto en esta sección era mostrar condiciones de frontera que se derivan naturalmente de la estructura hiperbólica del sistema BSSN, tomando en particular el caso en simetría esférica. El conjunto resultante de condiciones de frontera preserva las constricciones en el sentido de que no se introducen violaciones espurias a las mismas en la frontera. Aunque observamos residuos de las constricciones reflejados en la frontera, estos convergen a cero al incrementar la resolución.

La idea principal del método es primero identificar los campos propios del sistema de evolución, los cuales a parte principal se propagan regidos por ecuaciones de advección. Entonces es posible considerar por separado las partes entrantes, salientes y estacionarias (que no se propagan a parte principal) sobre la frontera. Las partes estacionarias y salientes pueden evolucionarse en toda la malla numérica hasta la frontera, utilizando diferencias ladeadas cuando es necesario. El caso de los campos entrantes es más sutil ya que la suposición ingenua de asumir que se anulan en la frontera es consistente sólo para ondas planas en coordenadas cartesianas. En la mayoría de los casos al estudiar sistemas físicos aislados el comportamiento asintótico de los campos es el de ondas esféricas salientes. Esta suposición implica distintas condiciones para un subconjunto de los campos entrantes, los cuales son utilizados para reconstruir los campos originales en la frontera.

Por otra parte, existe un tipo especial de campos propios que han de considerarse por separado: aquellos que al tomar su derivada radial o temporal pueden escribirse a parte principal como una combinación de constricciones que resultan ser funciones propias del subsistema de constricciones. Para estos campos no es posible asignar condiciones de frontera libremente, ya que el requerimiento de que las constricciones se anulen fija totalmente su evolución. Para encontrar esos campos uno primero impone que la combinación entrante de constricciones se anule. Con ello se pueden seguir dos rutas distintas: reconstruir los campos entrantes usando la derivada radial en la frontera, o bien integrar en el tiempo el valor de los campos propios.

Para mostrar estas condiciones de frontera en la práctica se realizó una serie de simulaciones, y en particular en este caso se expone el caso de la propagación de un campo escalar utilizando nuestro código que implementa la formulación BSSN en simetría esférica (Un recuento detallado se puede consultar en [13]). Se observa que en todos los casos los dos métodos usados para imponer condiciones de frontera que preservan las constricciones funcionan muy bien en la práctica, observando que el valor residual de las constricciones converge a cero en todo el dominio computacional aún a tiempos tardíos, bastante después de que los pulsos iniciales han alcanzado las fronteras. Al comparar ambos métodos observamos que al utilizar la derivada temporal se obtienen mejores propiedades de convergencia que utilizando la derivada espacial, particularmente en los casos con materia.

3.3 Colapso de campos escalares cargados

Los resultados y desarrollos presentados en esta sección fueron publicados en colaboración con Miguel Alcubierre en la revista *General Relativity and Gravitation* [191].

El colapso gravitacional es un fenómeno genérico en la naturaleza que ocurre siempre que la gravitación domina sobre las interacciones repulsivas que tienen lugar en el interior de la materia. En el contexto de la Relatividad General este fenómeno es importante ya que es el mecanismo que da paso a la formación de objetos compactos y finalmente singularidades en el espacio-tiempo, y el entender la estructura causal de estas singularidades es un problema de suma importancia para asegurar la predictibilidad de la teoría. Se tiene la creencia de que el destino final durante un colapso gravitacional es la formación de un agujero negro con lo cual las singularidades están causalmente desconectadas de observadores distantes. El hecho de que ninguna singularidad del espacio-tiempo ha sido identificada ha dado paso a la formulación de la conjetura de censura cósmica [147], la cual dicta que no es posible generar singularidades desnudas a partir de datos iniciales genéricos en los que el espacio-tiempo es regular y la materia satisface la condición de energía dominante (ver Apéndice B.

Las teorías que buscan extender la Relatividad General generalmente buscan que la descripción de la gravedad/espacio-tiempo en un régimen cuántico evite naturalmente la formación de singularidades. Aún en ese caso es importante entender la dinámica del colapso gravitacional ya que los efectos cuánticos sólo juegan un papel importante en las regiones en las que clásicamente se espera la formación de una singularidad, de modo que para los agujeros negros macroscópicos la dinámica efectiva cerca del horizonte no debería desviarse significativamente de la predicha por la teoría clásica.

Es bien conocido que las únicas soluciones estacionarias y asintóticamente planas de las ecuaciones de Einstein que representan agujeros negros corresponden a la familia de Kerr-Newman la cual es caracterizada por la masa, carga eléctrica y momento angular. Esas soluciones solamente representan agujeros negros cuando los parámetros satisfacen la relación $M^2 > Q^2 + a^2$ (con M la masa, Q la carga eléctrica total y a el momento angular total por unidad de masa), de otro modo no hay un horizonte de eventos presente en el espacio-tiempo y la singularidad se presenta desnuda. En un escenario realista de colapso gravitacional se espera que la región exterior del espacio-tiempo se aproxime asintóticamente a esta, pero en principio no hay restricciones que aseguren que la relación anterior se cumpla. Han habido estudios analíticos y numéricos de escenarios de colapso que encuentran singularidades desnudas [176, 65, 68], pero no se ha confirmado que estos ejemplos sean una amenaza verdadera a la conjetura de censura cósmica ya que estos resultados pueden deberse a las simetrías impuestas o incluso las condiciones de norma. Parece que, al menos para el caso sin carga $Q = 0$, el resultado genérico del colapso gravitacional es un agujero negro y que el exceso de momento angular contenido en los datos iniciales se pierde en radiación gravitacional.

También es interesante considerar el colapso de materia cargada que podría acabar en la formación de agujeros negros cargados o incluso singularidades desnudas. Se espera que el colapso de materia cargada no termine como una solución súper-extremal ($Q \geq M$) ya que en este caso la repulsión eléctrica es comparable a la atracción gravitacional. Un modelo sencillo de materia cargada es el de un campo escalar complejo acoplado al campo electromagnético, esta

configuración representa materia compuesta de partículas bosónicas cargadas y sus antipartículas que poseen carga opuesta. El modelo de campo escalar ha sido usado ampliamente en Relatividad general porque su evolución es gobernada por una simple ecuación de onda y no desarrolla discontinuidades como genéricamente pasa en los fluidos. El campo escalar complejo autogravitante puede formar estrellas de bosones, que son configuraciones autogravitantes de campo escalar que no se dispersan y tienen propiedades parecidas a las de las estrellas de neutrones (un artículo de revisión reciente puede consultarse en [121]). Las estrellas de bosones también pueden estar hechas de campo escalar cargado [112], siendo este un ejemplo de un sistema astrofísico que posee carga neta y es susceptible a colapsar. La simulación numérica del colapso de campos escalares cargados en simetría esférica se ha estudiado previamente con diferentes enfoques y objetivos: Por ejemplo, en [148] se utiliza una descomposición 3 + 1 con foliación polar para analizar fenómenos críticos, se encuentra un comportamiento crítico similar al que ocurre en el caso sin carga [65] y los autores reportan que la carga se aproxima a cero más rápido que la masa al acercarse a la solución crítica, de modo que esta última no presenta carga; en [142] se introduce un formalismo nulo para estudiar la estructura interna del agujero negro resultante. El enfoque de este trabajo es en como se presenta la configuración resultante vista por observadores externos, determinando en particular si el resultado final de este proceso puede ser una singularidad desnuda.

3.3.1 Sistema Einstein-Maxwell-Klein-Gordon en simetría esférica

Campo electromagnético

Cuando uno considera el campo electromagnético en simetría esférica ocurren muchas simplificaciones. Considerando únicamente los campos físicos E^i , B^i , ocurre que los modos dinámicos correspondientes a la radiación se anulan al ser transversos a la dirección radial. Y aún más fuerte es el requerimiento de simetría

esférica ya que el campo magnético ha de anularse. Esto se ve de que los campos solo tienen componente radial, y las constricciones electromagnéticas (2.19) al escribirlas en forma integral se trivializan asociando valores a los campos equivalentes a la carga encerrada. Pero al fijarse inicialmente la restricción sobre la no existencia de monopolos magnéticos, la componente radial del campo magnético es cero. Entonces el campo electromagnético se reduce a la componente monopolar del campo eléctrico la cual solo evoluciona conforme a la dinámica de las fuentes y de la geometría. Por otro lado nos podemos fijar en el sector de los potenciales electromagnéticos, el cual al utilizar la condición de norma de Lorentz (2.24) toma la forma de la ecuación de onda. El sistema resultante para las ecuaciones del electromagnetismo en simetría esférica queda entonces:

$$\partial_t \Phi = \beta \partial_r \Phi + \alpha K \Phi - \frac{1}{r^2 \psi^6 \sqrt{ab}} \partial_r \left(\frac{\alpha b r^2 \psi^2}{\sqrt{a}} a_r \right), \quad (3.47a)$$

$$\partial_t a_r = \beta \partial_r a_r + a_r \partial_r \beta - \alpha a \psi^4 E^r - \partial_r (\alpha \Phi), \quad (3.47b)$$

$$\partial_t E^r = \beta \partial_r E^r - E^r \partial_r \beta + \alpha K E^r - 4\pi j_{em}^r, \quad (3.47c)$$

con β la componente radial del vector de corrimiento y a_r es la componente radial del potencial vectorial y no ha de confundirse con $a \equiv \hat{\gamma}_{rr}$.

Campo escalar cargado

El campo escalar descrito en la Sección 2.2.3, se simplifica notablemente al considerarlo en simetría esférica, porque únicamente es relevante la derivada

radial $\chi \equiv \chi_r$ y las ecuaciones de evolución (2.52) se reducen a:

$$\partial_t \varphi = \alpha \Pi + \beta \chi, \quad (3.48a)$$

$$\partial_t \chi = \partial_r (\alpha \Pi + \beta \chi), \quad (3.48b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi = & \beta \partial_r \Pi + \frac{1}{r^2 \psi^6 \sqrt{ab}} \partial_r \left(\alpha \frac{br^2 \psi^2}{\sqrt{a}} \chi \right) + \alpha \Pi K \\ & - \alpha \left[2V' + q^2 \left(\frac{a_r^2}{a\psi^4} - \Phi^2 \right) \right] \varphi + 2iq\alpha \left[\frac{a_r \chi}{a\psi^4} + \Phi \Pi \right]. \end{aligned} \quad (3.48c)$$

Donde q es el valor de la carga fundamental de la partícula asociada al campo escalar y $V(|\varphi|^2)$ es el potencial.

Las fuentes de las ecuaciones de Maxwell debidas al campo escalar (ecuaciones (2.46)) quedan:

$$\rho_{em} = -q \mathbf{Im}(\Pi^* \varphi) - q^2 \Phi \varphi^* \varphi, \quad (3.49a)$$

$$(j_{em})_i = +q \mathbf{Im}(\chi_i^* \varphi) - q^2 a_i \varphi^* \varphi. \quad (3.49b)$$

Tensor de energía-momento

Las fuentes del campo gravitacional están codificadas en el tensor de energía-momento, el cual se construye a partir de contribuciones del campo electromagnético y del campo eléctrico

$$T^{\mu\nu} = T_e^{\mu\nu} + T_\varphi^{\mu\nu}. \quad (3.50)$$

Las proyecciones 3 + 1 correspondientes quedan finalmente

$$\rho := \frac{1}{8\pi} \psi^4 a (E^r)^2 + \frac{1}{2} \left(|\tilde{\Pi}|^2 + \frac{|\tilde{\chi}|^2}{a\psi^4} \right) + V, \quad (3.51a)$$

$$j_r = -\frac{1}{2} \left(\tilde{\Pi}^* \tilde{\chi} + \tilde{\chi}^* \tilde{\Pi} \right), \quad (3.51b)$$

$$S_a := -\frac{1}{8\pi} \psi^4 a (E^r)^2 + \frac{1}{2} \left(|\tilde{\Pi}|^2 + \frac{|\tilde{\chi}|^2}{a\psi^4} \right) - V, \quad (3.51c)$$

$$S_b := \frac{1}{8\pi} \psi^4 a (E^r)^2 + \frac{1}{2} \left(|\tilde{\Pi}|^2 - \frac{|\tilde{\chi}|^2}{a\psi^4} \right) - V. \quad (3.51d)$$

3.3.2 Datos iniciales

Para asignar datos iniciales que incluyen campos electromagnéticos es necesario satisfacer junto con las constricciones propias de Relatividad General 1.33, la ley de Gauss y la no-existencia de monopolos magnéticos 2.19. Una forma de simplificar estas últimas es mediante un reescalamiento conforme de los campos electromagnéticos definiendo $\hat{E}^i = \psi^6 E^i$ y $\hat{B}^i = \psi^6 B^i$. De este modo las constricciones electromagnéticas quedan en términos de la geometría conforme

$$\hat{\nabla}_i \hat{E}^i = 4\pi \rho_{\text{em}} \psi^6, \quad \hat{\nabla}_i \hat{B}^i = 0. \quad (3.52)$$

La ventaja de este reescalamiento se hace evidente en ausencia de cargas ya que en esas región estas ecuaciones se desacoplan de las constricciones gravitacionales.

Ahora, podemos asumir simetría esférica y una situación momentáneamente estacionaria, satisfaciendo trivialmente la constricción de momentos (3.7b) y la constricción magnética (2.19b). El potencial vectorial electromagnético también se asume inicialmente nulo.

La última suposición es tomar que la métrica conforme es inicialmente plana. Al hacer esto los operadores diferenciales en las constricciones se reducen a los del espacio plano y los términos asociados a la curvatura de la métrica conforme

se anulan. Así la constricción Hamiltoniana toma la forma final:

$$\partial_r^2 \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + 2\pi |\chi|^2 \psi + (\pi q^2 \Phi^2 |\varphi|^2 + 2\pi V) \psi^5 + \frac{(\hat{E}^r)^2}{4\psi^3} = 0, \quad (3.53a)$$

mientras que la ley de Gauss puede escribirse como:

$$\partial_r \hat{E}^r + \frac{2}{r} \hat{E}^r + 4\pi q^2 \Phi |\varphi|^2 \psi^6 = 0. \quad (3.53b)$$

En particular, tomamos $V = 0$ en nuestras simulaciones, de modo que nuestro campo escalar es no masivo sin autointeracciones, pero se incluye el término en la derivación por completez.

Bajo estas consideraciones la estrategia es especificar libremente la forma del potencial escalar Φ y del campo escalar φ , y utilizar estos valores para resolver simultáneamente las dos constricciones para encontrar Ψ y E^r . Para ello se requiere especificar condiciones de frontera. Para el campo eléctrico basta especificar una sola condición E^r al ser una ecuación de primer orden, y por condiciones de regularidad esta condición se toma en el origen donde el campo eléctrico se ha de anular $E^r(r = 0) = 0$. Para el factor conforme ψ hay que tomar dos condiciones. Primeramente se requiere regularidad en el origen, o bien formulada como $\partial_r \psi|_{r=0} = 0$. La otra condición es sobre el comportamiento asintótico, que lo especificamos como $\psi(r \rightarrow \infty) = 1 + C/r$ para alguna constante C , lo cual se puede formular como una condición mixta $\partial_r \psi = (1 - \psi)/r$.

A continuación consideramos dos familias distintas de datos iniciales, que se diferencian en que la primera tiene carga global nula mientras que la segunda tiene carga distinta de cero.

Carga global nula

La elección más simple para dar valores iniciales a los potenciales electromagnéticos es simplemente igualarlos a cero. Con esta elección la densidad de carga (3.49a) adquiere contribuciones proporcionales a las partes real e imagi-

na de Π , y para la densidad de corriente (3.49b) ocurre algo similar con χ . Si asumimos que $\Pi = 0$, entonces la densidad de carga ρ_{em} se anula inicialmente y en consecuencia la carga total contenida en el espacio-tiempo también se anula. La densidad de corriente $(j_{em})_r$ no se anula siempre que el producto $\chi^* \varphi$ tenga parte imaginaria no nula. Esto excluye la propuesta más simple, $\varphi = \varphi_0(r)e^{i\theta}$ con argumento θ constante, que incluye los casos particulares en los que el campo escalar es puramente real o imaginario φ . Por lo tanto consideremos un perfil inicial complejo de la forma

$$\varphi(r) = f(r) + ig(r) , \quad (3.54)$$

con $f(r)$ y $g(r)$ funciones reales. De este modo obtenemos que $(j_{em})_r = q(gf' - fg')$. Así que mientras f y g sean funciones distintas que se empalmen en alguna región obtendremos una densidad de corriente inicial distinta de cero. Para nuestras simulaciones consideramos f y g como perfiles gaussianos ligeramente desfasados.

Con estas elecciones es sencillo verificar que la densidad de momento (3.51b) inicialmente se anula, de modo que las constricciones de momento se satisfacen trivialmente. Eso es que inicialmente son nulas las densidades de carga y de momento (no hay flujo de energía), pero la densidad de corriente no es nula. Esta situación es análoga a un sistema con distribución inicial idéntica de partículas con la misma masa y carga contraria, moviéndose en direcciones opuestas.

Como la densidad de carga inicial es nula, la constricción de Gauss (3.52) implica que para datos iniciales regulares el campo eléctrico debe anularse inicialmente. Entonces solo necesitamos obtener el factor conforme resolviendo la constricción Hamiltoniana, que se simplifica a

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \psi) + \pi |\chi|^2 \psi + 2\pi V \psi^5 = 0 . \quad (3.55)$$

En este caso específico la constricción Hamiltoniana toma exactamente la misma forma que tomaría si el campo escalar estuviera desacoplado del campo

electromagnético. Es notable que la ecuación (3.55) no depende del valor de la carga fundamental del campo escalar q , así que los datos iniciales obtenidos con este método pueden ser evolucionados para valores arbitrarios de q .

Configuraciones globalmente cargadas

También nos interesa la construcción de configuraciones iniciales con carga total no nula ya que nos interesa el estudio de casos en los que la configuración inicial es tal que $Q/M > 1$. De las ecuaciones (3.49a) y (3.49b) vemos que esto es posible haciendo algunas suposiciones. Primero, al considerar una configuración en un momento estacionario, tenemos que requerir $\Pi = 0$. Es posible obtener configuraciones con densidad de carga no nula y corriente nula al hacer $a_r = 0$, $\Phi \neq 0$, y $\mathbf{Im}(\varphi) = 0$. Esta elección representa una distribución de carga inicialmente en reposo cuya densidad está dada por $\rho_{em} = -q^2\varphi^2\Phi$.

Con estas elecciones la densidad de momento aún se anula al ser $\Pi = 0$, y ambas φ y χ puramente reales, así que las constricciones de momento se satisfacen trivialmente. Como la densidad de carga no es nula, tenemos ahora que resolver simultáneamente las constricciones Hamiltoniana y de Gauss una vez que se han elegido φ y Φ .

Antes de buscar soluciones a las ecuaciones de restricción podemos analizar las propiedades de este tipo de datos iniciales considerando un modelo sencillo en el que la materia está contenida en un cascarón delgado localizado en $r = r_0$. Por el teorema de Israel [103] la región exterior corresponde a la solución de Reissner-Nördstrom (RN) [153, 140], que en nuestra sección inicial se especifica por medio del factor conforme y el campo eléctrico:

$$\psi = \left[\left(1 + \frac{M}{2r}\right)^2 - \left(\frac{Q}{2r}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.56a)$$

$$\hat{E}^r = \frac{Q}{r^2}. \quad (3.56b)$$

Es inmediato verificar que estas funciones son solución de las constricciones

(3.53a)-(3.53b) cuando el campo escalar se anula.

La solución en el interior del cascarón es trivial ya que estamos buscando datos iniciales regulares. En esa región la métrica es plana y el campo eléctrico es nulo, de modo que solo es necesario especificar el factor conforme en el interior ψ_0 que es constante. Estas soluciones pueden ser empalmadas en r_0 para dar la solución completa en la sección inicial, y esto determina el valor de ψ_0 . La geometría de RN en esta foliación tiene una región atrapada en $r \leq \sqrt{M^2 - Q^2}/2$ que solo existe si $M > |Q|$. Si el cascarón inicial se especifica a un radio menor a este valor, entonces se tendrá un agujero negro desde el momento inicial y toda la materia estará cubierta por el horizonte. Este tipo de solución no es interesante ya que los observadores distantes no la distinguirían de un agujero negro RN estacionario. Por otro lado, cuando $|Q| > M$ se encuentra un comportamiento patológico en estas coordenadas ya que en el radio finito $r_p = (|Q| - M)/2$ el factor conforme ψ se anula. Esto corresponde a la región en la que la singularidad de la solución RN sobre-extrema es mapeada en estas coordenadas, y la región interior $r < r_p$ carece de relevancia física.

El análisis de este modelo simplificado muestra que hay que ser cautelosos al resolver las ecuaciones de construcción para densidades de carga eléctrica grandes. En ese caso, si especificamos que la materia esté distribuida de manera compacta cerca del origen en una región de radio R , se podría encontrar que $R < r_p$, en cuyo caso el dato inicial no representará un espacio-tiempo asintóticamente plano. Numéricamente encontramos que al construir configuraciones de cascarones localizados con $|Q|/M$ creciente, eventualmente el algoritmo falla al alcanzar el factor conforme un valor nulo fuera del cascarón de campo escalar. Esto no fue problema en el caso sin carga presentado antes, ya que en ese caso la métrica se acerca a la solución de Schwarzschild en el exterior, la cual no presenta esas patologías.

3.3.3 Análisis y código numérico

Para estas simulaciones numéricas integramos las ecuaciones obtenidas en la subsección 3.3.1, a su vez con el sistema BSSN (3.3), usando un esquema

de diferencias finitas. El código usa un método de líneas con diferenciación espacial a segundo o cuarto orden, junto con integradores temporales tanto Crank-Nicholson iterativo a tres pasos, o Runge-Kutta a cuarto orden.

Las evoluciones presentadas fueron realizadas a tres resoluciones distintas para descartar efectos de las discretización, propiamente $\Delta r = 0.02, 0.01, 0.005$, con 3000, 6000 y 12000 puntos en la malla respectivamente, de modo que la frontera se ubica en $r = 60.0$.

Elección de norma

Para estas simulaciones elegimos por simplicidad un vector de corrimiento nulo, y para la función de lapso se eligió la condición de foliación maximal $K = \partial_t K = 0$, que resulta en una ecuación elíptica para la función de lapso α que en simetría esférica toma la forma

$$\partial_r^2 \alpha + \left(\frac{2}{r} - \frac{\partial_r a}{2a} + \frac{\partial_r b}{b} + 2\partial_r \ln \psi \right) \partial_r \alpha = \alpha a \psi^4 \left[\mathbb{K}^2 + 4\pi (\rho + S) \right], \quad (3.57)$$

con $\mathbb{K}^2 = K_{ij}K^{ij}$, y S la traza de S_{ij} . Como en simetría esférica esta es una ecuación diferencial ordinaria para α , puede ser resuelta numéricamente a cada paso de tiempo invirtiendo la matriz del sistema, sin incrementar significativamente el costo computacional del esquema de integración.

Masa y Carga totales del espaciotiempo en simetría esférica

Una manera conveniente de determinar la masa de una distribución esféricamente simétrica es considerando la dependencia radial de las componentes métricas. Cuando se expresa en términos del radio de área R , en las que el área de una esfera es $4\pi R^2$, la componente radial de la métrica se puede escribir como:

$$g_{RR} = \left(1 - \frac{2M(R)}{R} \right)^{-1}. \quad (3.58)$$

Con un poco de álgebra podemos escribir esta función $M(R)$ en términos de las cantidades fundamentales y la coordenada radial r como

$$M(r) = \frac{r\psi^2 b^{1/2}}{2} \left[1 - \frac{b}{a} \left(1 + r \frac{\partial_r b}{2b} + 2r \frac{\partial_r \psi}{\psi} \right)^2 \right]. \quad (3.59)$$

Esta función puede ser identificada con la masa total fuera de las fuentes de materia, ya que alcanza el valor de la masa ADM en la región de vacío. En este caso, como el campo eléctrico se extiende hasta el infinito, el valor de esta función de masa es siempre menor que la masa ADM total, pero se acerca rápidamente a este ya que el campo eléctrico decae como $1/r^2$.

Para la carga eléctrica, toda la información está contenida en las ecuaciones de Maxwell. Podemos definir la carga total contenida en una región a tiempo t constante integrando la densidad de carga ρ_{em} , y simplificar esta expresión utilizando las ecuaciones de evolución y el teorema de Stokes. Utilizando la simetría esférica esta expresión se simplifica a la carga encerrada en la esfera de radio r

$$Q(r) = r^2 \psi^6 \sqrt{ab} E^r. \quad (3.60)$$

donde hemos asumido que el interior de la esfera es regular.

Como en estas simulaciones el dominio numérico es finito solo podemos considerar la carga encerrada en esferas finitas, la cual no será conservada ya que puede haber campo escalar dispersado a infinito llevando carga con él más allá del dominio computacional. De cualquier forma, es posible cuantificar la tasa de cambio de la carga encerrada usando la ecuación de continuidad para la corriente electromagnética. Después de un poco de álgebra llegamos a

$$\frac{dQ(r)}{dt} = \int_{S(r)} D_i \left(\rho_{em} \beta^i - \alpha^{(3)} j_{em}^i \right) dV, \quad (3.61)$$

donde hemos conservado la dependencia en el vector de corrimiento por generalidad. Nuevamente, la integral puede transformarse en una integral de contorno usando el teorema de Stokes y la dependencia angular puede integrarse

inmediatamente obteniendo

$$\frac{dQ(r)}{dt} = 4\pi r^2 \psi^6 \sqrt{ab} (\rho_{\text{em}} \beta - \alpha^{(3)} j_{\text{em}}^r) . \quad (3.62)$$

Esta ecuación puede integrarse en el tiempo para encontrar el cambio total en la carga encerrada a un radio fijo r después de un tiempo T

$$\Delta Q(r, T) = 4\pi r^2 \int_0^T \psi^6 \sqrt{ab} (\rho_{\text{em}} \beta - \alpha^{(3)} j_{\text{em}}^r) dt . \quad (3.63)$$

Un ultimo punto en tanto a la determinación de la masa y la carga, es que cuando se forma un horizonte de eventos, a este podemos asociarle parámetros de masa y carga. Estos conceptos fueron expuestos en la Sección 1.4.4 y en este caso se aplican en el caso en el que el momento angular es nulo $J = 0$.

Condiciones de frontera para el campo escalar cargado

Retomando la discusión de la sección anterior en tanto a condiciones de frontera, para el campo escalar complejo encontramos a parte principal las mismas funciones propias (3.42), solo que en este caso son complejas (o dos funciones salientes y dos entrantes reales si trabajamos con las partes real e imaginaria del campo). Entonces al campo escalar aplicamos los métodos expuestos en la sección anterior.

Las ecuaciones de evolución para los potenciales electromagnéticos y el campo eléctrico resultan idénticas en este caso a las del campo escalar a parte principal. Solo es necesario hacer las identificaciones $\Pi \rightarrow \Phi$, $\chi \rightarrow -a_r$, $\varphi \rightarrow E^r$. En este caso los campos propios y sus velocidades correspondientes son

$$\omega_E^0 = E^r , \quad \lambda_E^0 = -\beta , \quad (3.64a)$$

$$\omega_E^\pm = \Phi \pm \frac{a_r}{\sqrt{a}\psi^2} , \quad \lambda_E^\pm = -\beta \pm \frac{\alpha}{\sqrt{a}\psi^2} . \quad (3.64b)$$

Sin embargo, la analogía con el campo escalar termina aquí, ya que los po-

tenciales electromagnéticos no se relacionan con el campo eléctrico como sus derivadas radial y normal.

Como en ausencia del vector de corrimiento el campo eléctrico evoluciona trivialmente a parte principal, únicamente lo actualizamos usando los valores de las fuentes en la frontera.

Para los potenciales electromagnéticos tenemos libertad de especificar el modo entrante. Sin embargo, al igual que con el campo escalar, si queremos evitar reflexiones grandes en la frontera el modo entrante no puede ser escogido igual a cero. Pero en este caso se nos presenta un nuevo problema: para el campo escalar podíamos modelar φ como una onda esférica saliente y de allí deducir la forma de ω_{φ}^{-} en la frontera. Para el campo electromagnético no podemos hacer lo mismo ya que, como se había mencionado, los potenciales electromagnéticos no son las derivadas de temporales y espaciales de otro campo. Sin embargo dada la estructura de ecuación de onda que presentan las ecuaciones de evolución podemos asumir que en la frontera los campos Φ y a_r se propagan como onda saliente, lo que a su vez implica que la combinación entrante ω_E^{-} en la frontera no se anule, sino que tenga que ser tratada a su vez como una onda saliente de modo que cumple una ecuación de advección de la forma

$$\partial_t \omega_E^{-} + \lambda \partial_r \omega_E^{-} + \lambda \frac{\omega_E^{-}}{r} = 0. \quad (3.65)$$

Esta ecuación se evoluciona en la frontera para obtener el valor del campo entrante en el nuevo paso temporal, y de aquí se reconstruye el valor de los potenciales electromagnéticos en la frontera.

3.3.4 Resultados

Ahora discutiremos los resultados de algunas simulaciones ilustrativas. Analizaremos por separado los casos con carga global nula, y con carga inicial distinta de cero.

Configuraciones sin carga global

De acuerdo a lo expuesto en la sección 3.3.2 inicialmente se consideran los perfiles para el campo escalar:

$$\text{Re}(\varphi) = \varphi_0 \left[e^{-(r-r_R)^2/\sigma^2} + e^{-(r+r_R)^2/\sigma^2} \right], \quad (3.66)$$

$$\text{Im}(\varphi) = \varphi_0 \left[e^{-(r-r_I)^2/\sigma^2} + e^{-(r+r_I)^2/\sigma^2} \right], \quad (3.67)$$

donde usamos la misma amplitud φ_0 y ancho σ para ambas partes real e imaginaria, pero estos perfiles están centrados en diferentes puntos, $r_R \neq r_I$, de modo que exista una corriente neta. También sumamos la imagen reflejada de los pulsos Gaussianos de modo que el campo escalar tenga el comportamiento adecuado en el origen.

Para todas las simulaciones que mostramos elegimos $r_R = 5.0$, $r_I = 5.1$ y $\sigma = 1.0$, y se resolvió la constricción Hamiltoniana para distintos valores de φ_0 . Realizamos simulaciones para una familia de configuraciones biparamétrica, con la carga fundamental q variando de 0 a 8, y la amplitud inicial de los pulsos φ_0 variando de 0.03 a 0.1.

Las simulaciones con valores pequeños de φ_0 evolucionan como se esperaba: el campo escalar se propaga y eventualmente es dispersado a infinito dejando el espacio-tiempo plano en el dominio computacional. Como ejemplo mostramos la evolución en el caso con $\varphi_0 = 0.03$ y $q = 2.0$. Inicialmente el pulso se separa en una parte entrante y una saliente, y una densidad de carga distinta de cero rápidamente emerge. Esto puede verse en la Figura 3.5, la cual muestra una instantánea de la evolución a $t = 4$. El panel superior muestra al campo escalar, mientras que los inferiores muestran la función de masa $M(r)$ y la carga encerrada a ese radio $Q(r)$.

Las Figuras 3.6 y 3.7 muestran la evolución del campo escalar y de la función de lapso respectivamente. Notamos que a $t \sim 8$ el pulso entrante alcanza el origen y la función de lapso decrece significativamente allí. Sin embargo en

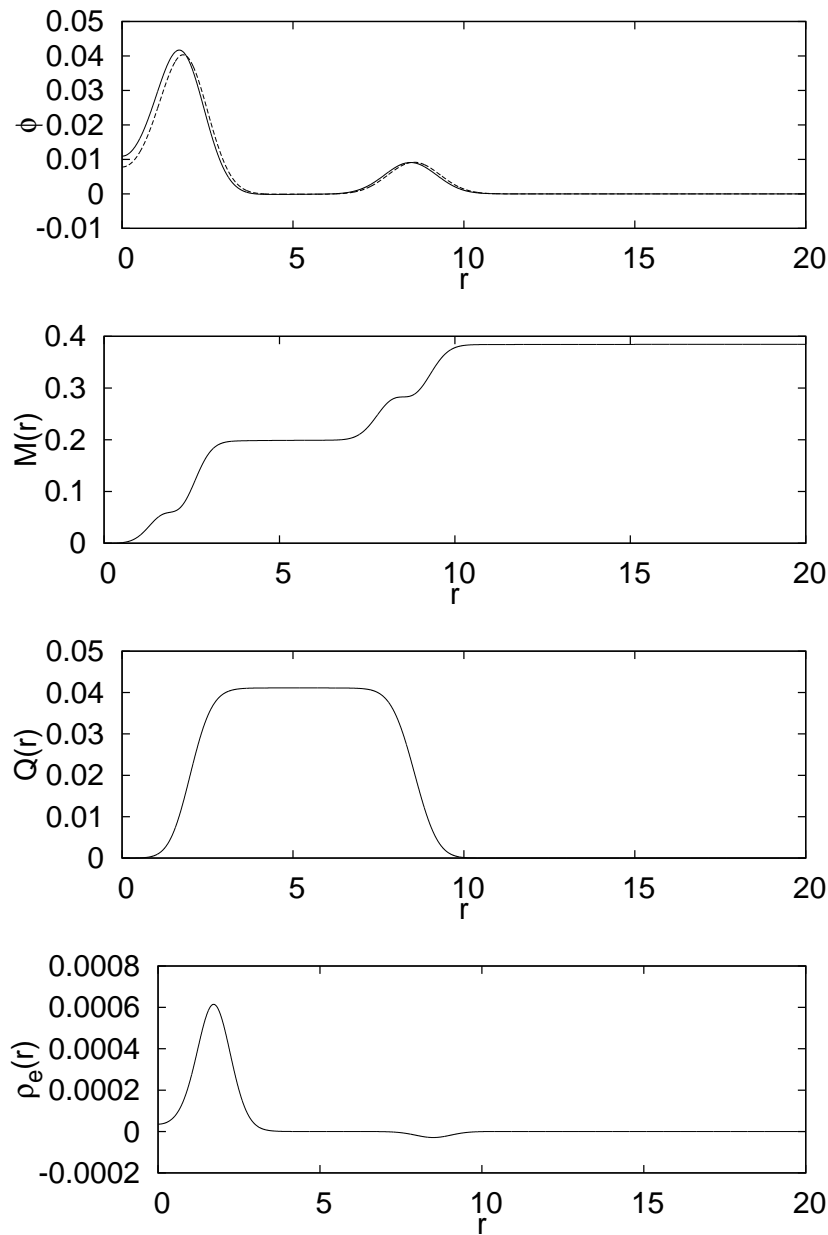


Figura 3.5: Gráfica de los primeros momentos de la evolución ($t = 4$) de una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.03$, $q = 2.0$. El panel superior muestra el campo escalar (distinguiendo con líneas sólidas y segmentadas la parte real e imaginaria respectivamente), mientras que los siguientes tres paneles muestran la masa $M(r)$, la carga $Q(r)$ y la densidad de carga ρ_{em} .

este caso la autogravedad del campo escalar no es suficientemente fuerte para producir colapso, y el campo continua dispersándose a infinito mientras el lapso lentamente regresa a su valor en espacio plano. Las Figuras 3.8 y 3.9 muestran la evolución de la función de masa y la carga en esta simulación.

La convergencia se verifica analizando el residuo obtenido al evaluar numéricamente las constricciones, el cual es producto del esquema de discretización. La Figura 3.10 muestra el valor absoluto de la constricción Hamiltoniana a diferentes tiempos para dos resoluciones diferentes, mostrando que el error reescala con la resolución consistentemente con el orden de la discretización (cuarto orden en este caso).

Para valores mayores de la amplitud φ_0 encontramos que el resultado es muy diferente del descrito antes. Para mostrar esto usamos como ejemplo el caso con $\varphi_0 = 0.05$ y $q = 2.0$ (Figuras 3.11-3.16). La fase inicial de la simulación procede en la misma manera que en el ejemplo anterior (Figura 3.11), pero en esta ocasión cuando el pulso entrante llega al origen la función de lapso colapsa dramáticamente (Figura 3.13), y eventualmente se encuentra un horizonte aparente en $t \sim 11$ (Figura 3.16), indicando la formación de un agujero negro.

Las Figuras 3.14 y 3.15 muestran la evolución de las funciones de masa y carga, y observamos que ambas tienden a estabilizarse rápidamente afuera del horizonte aparente después de que el campo dispersado abandona la región central. La Figura 3.16 muestra la evolución de las diferentes propiedades del horizonte aparente. Al realizar esta simulación con un vector de corrimiento nulo observamos que el radio coordenado donde encontramos esta superficie continúa creciendo mientras avanza la simulación. Este crecimiento es un efecto de norma bien conocido debido a que los observadores Eulerianos están cayendo hacia el agujero, y no se compensa este efecto al ignorar el vector de corrimiento. Por otro lado, el área, la carga encerrada y la masa asociada con el horizonte rápidamente se estabilizan. Estas cantidades están bien definidas sobre el horizonte aparente: la carga del agujero negro se calcula con la ecuación (3.60) evaluada en el radio del horizonte, mientras que la masa total se calcula con la ecuación (1.124) (tomando $J = 0$), la cual incluye la contribución

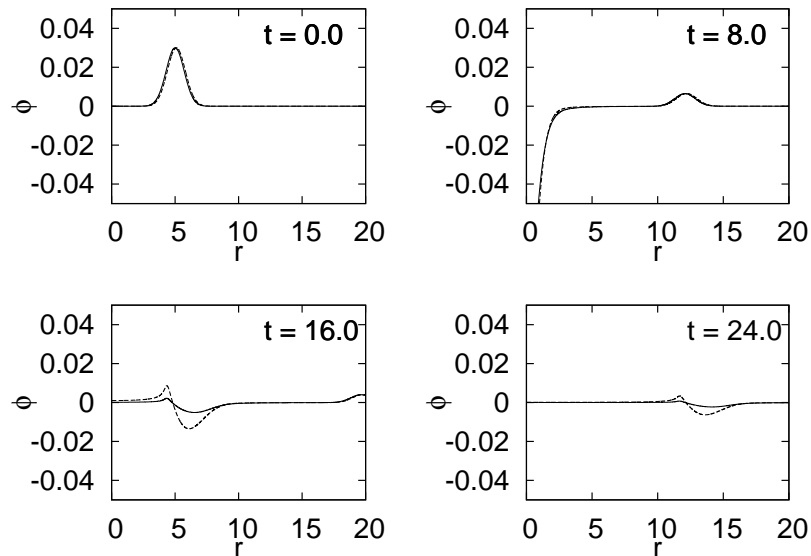


Figura 3.6: Evolución del campo escalar para una configuración con densidad inicial de carga nula y $\varphi_0 = 0.03$, $q = 2.0$. Las líneas sólida y segmentada corresponden a las partes real e imaginaria respectivamente.

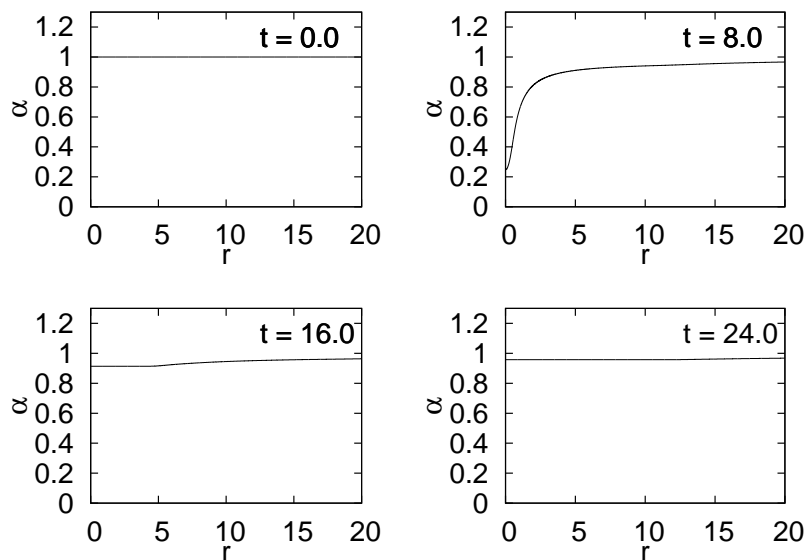


Figura 3.7: Evolución de la función de lapso α para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.03$, $q = 2.0$. El lapso cae abruptamente cuando la densidad de la configuración en el origen aumenta debido a que el campo escalar se ha concentrado en la región central, pero la densidad no es suficientemente grande como para colapsar el objeto.

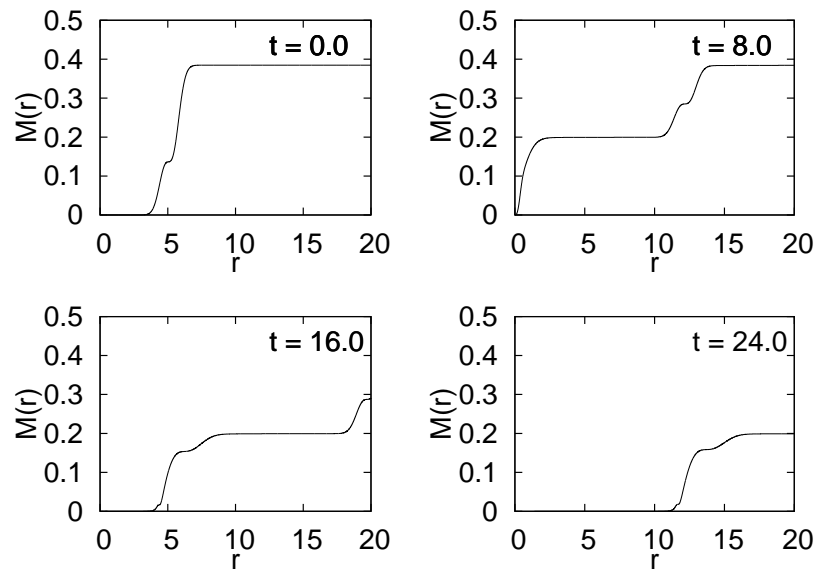


Figura 3.8: Evolución de la función de masa $M(r)$ para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.03$, $q = 2.0$.

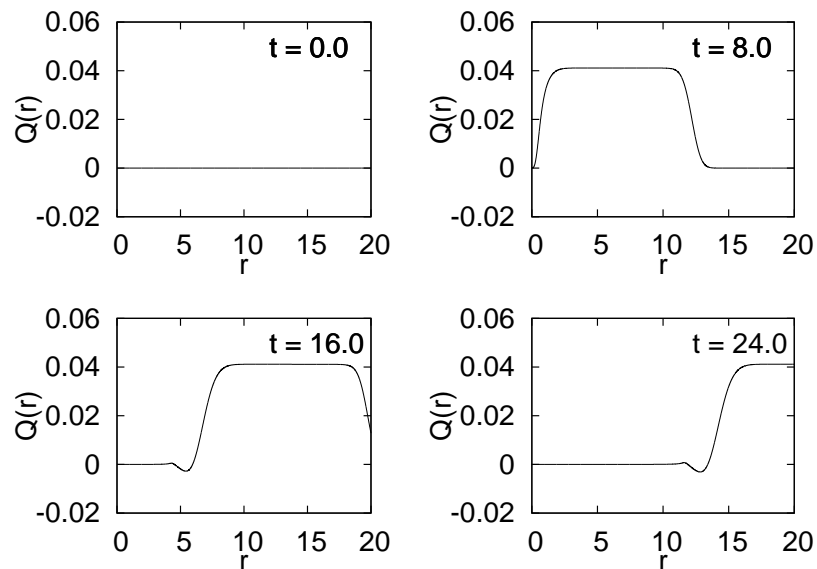


Figura 3.9: Evolución de la función de carga $Q(r)$ para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.03$, $q = 2.0$.

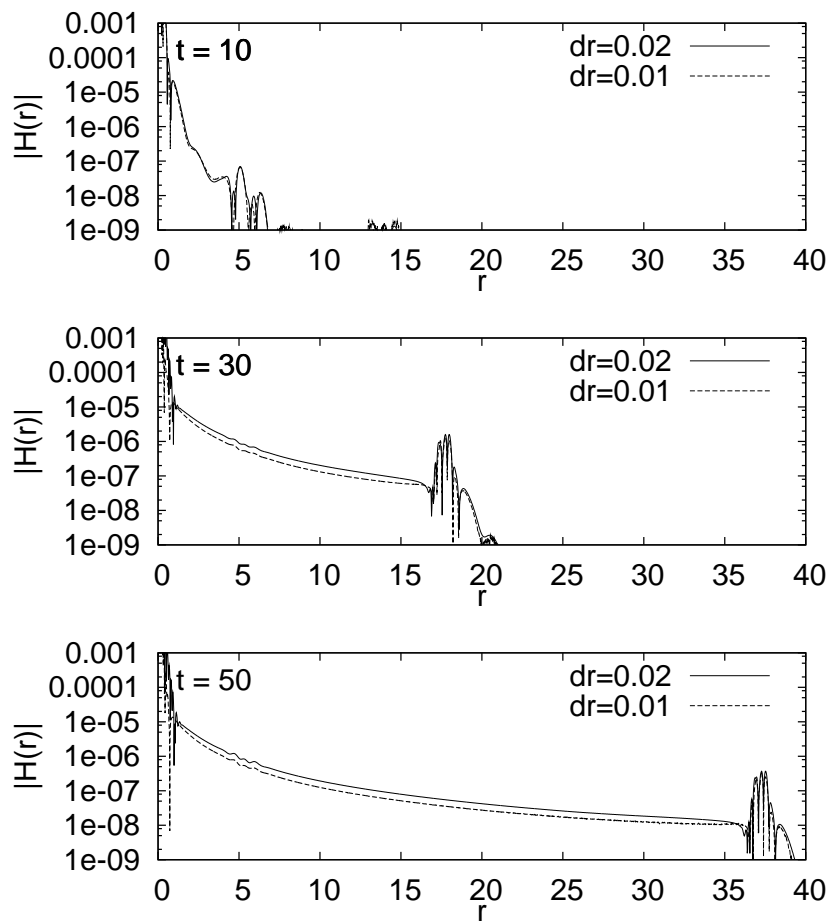


Figura 3.10: Gráfica del valor residual de la restricción Hamiltoniana en todo el dominio numérico a diferentes tiempos con dos resoluciones distintas, para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.03$, $q = 2.0$. El valor obtenido a la resolución mayor ha sido amplificado por un factor de 16 mostrando convergencia a cuarto orden.

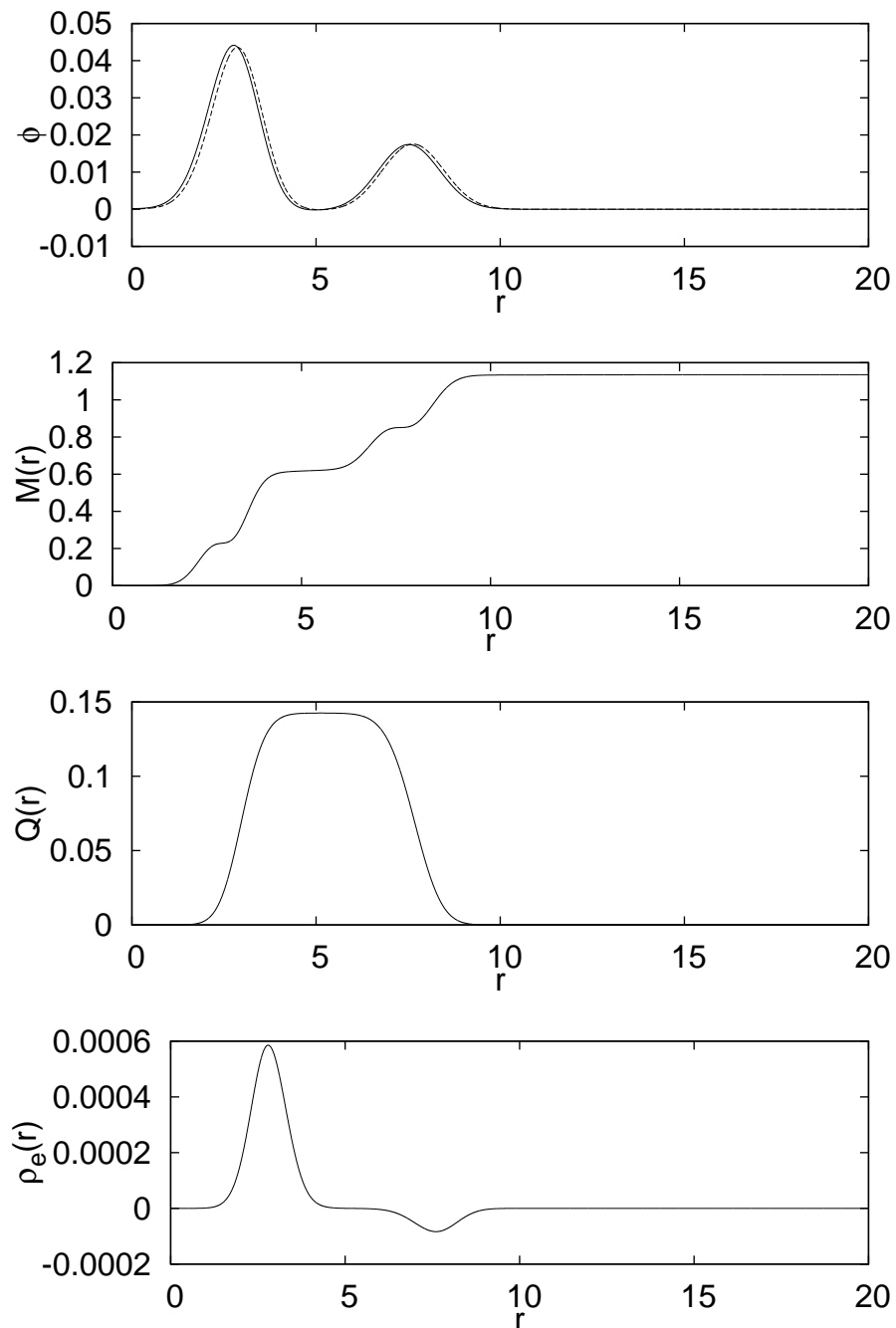


Figura 3.11: Gráfica de los primeros momentos de la evolución ($t = 4$) de una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$. El panel superior muestra el campo escalar (distinguiendo con líneas sólidas y segmentadas la parte real e imaginaria respectivamente), mientras que los siguientes tres paneles muestran la masa $M(r)$, carga $Q(r)$ y densidad de carga ρ_{em} .

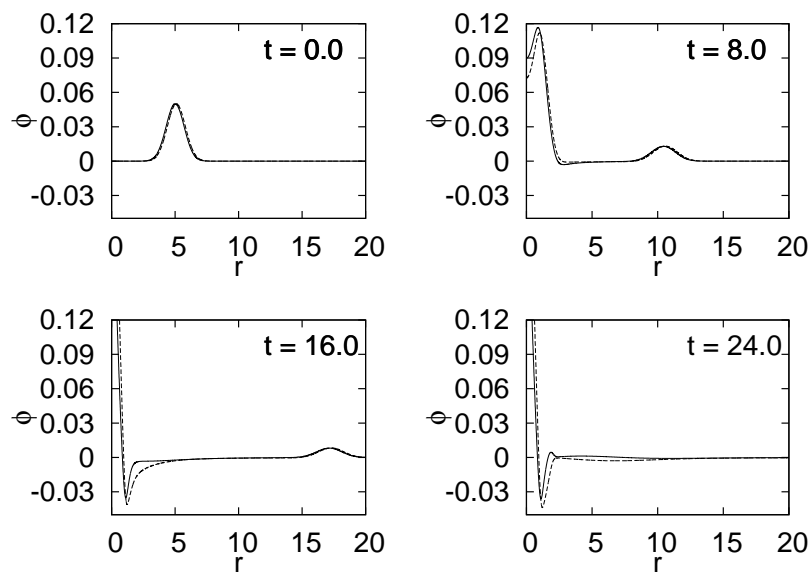


Figura 3.12: Evolución del campo escalar para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$. Las líneas sólida y segmentada corresponden a las partes real e imaginaria respectivamente.

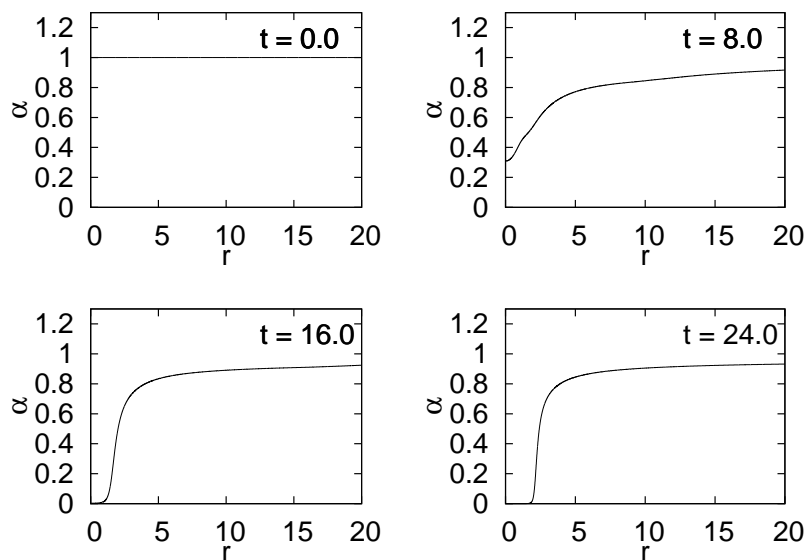


Figura 3.13: Evolución de la función de lapso α para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$.

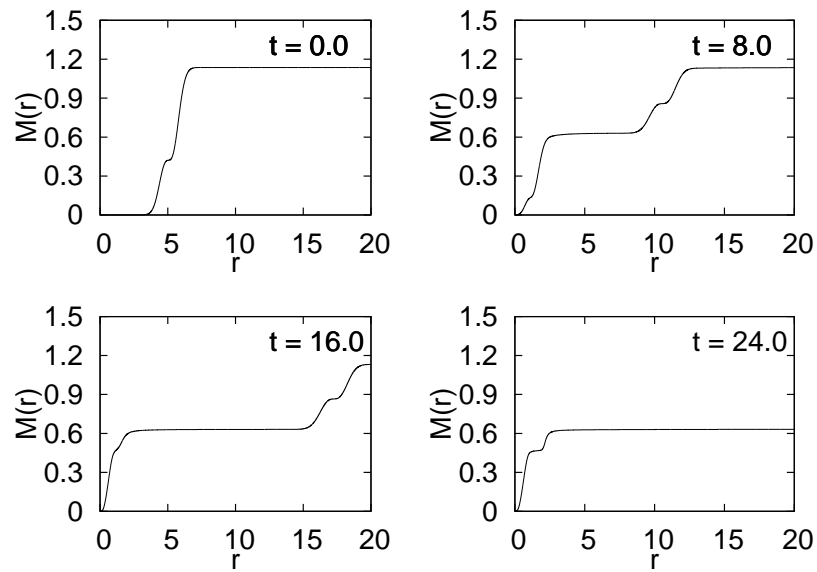


Figura 3.14: Evolución de la función de masa $M(r)$ para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$.

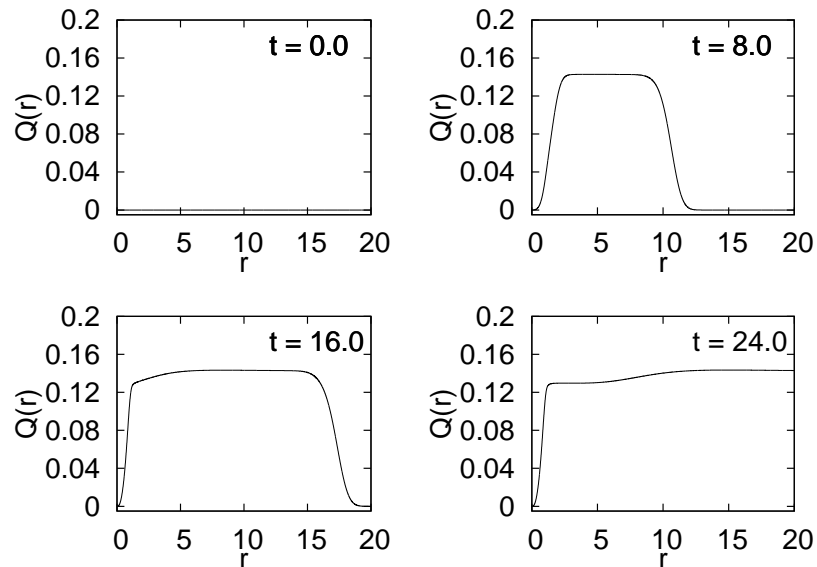


Figura 3.15: Evolución de la función de carga $Q(r)$ para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$.

de la carga encerrada.

Finalmente, la falta de un vector de corrimiento induce efectos de “slice stretching” (estiramiento de las secciones) en las componentes métricas que eventualmente ocasionan que nuestras simulaciones fallen. Sin embargo encontramos que estos efectos son retrasados para valores mayores de la masa final del agujero y las simulaciones duran lo suficiente para poder estudiar las propiedades físicas del agujero negro resultante. La Figura 3.17 es un acercamiento del área y la masa del horizonte en el que se muestra como se estabilizan las propiedades antes de que la simulación falle (las oscilaciones pequeñas son debidas a los métodos numéricos y decrecen al aumentar la resolución).

Una vez que el campo escalar fuera del horizonte aparente es radiado terminamos con una región electro-vacía en donde solamente el campo Coulombiano asociado al campo escalar atrapado permanece. Las condiciones de norma, y en particular la ausencia de vector de corrimiento, previenen que se alcance una

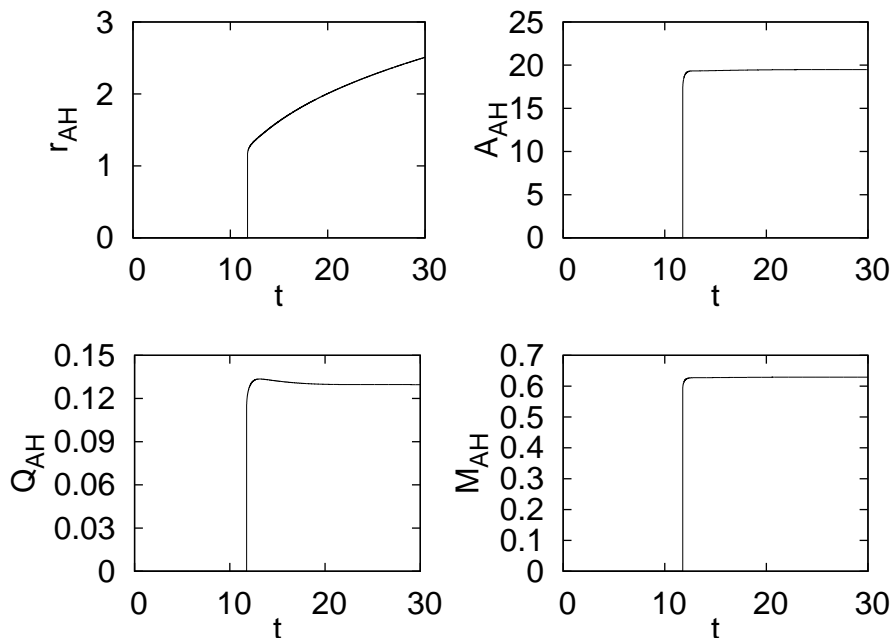


Figura 3.16: Evolución del horizonte aparente para una configuración con densidad de carga inicial nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$: Radio coordinado (arriba/izquierda), área (arriba/derecha), carga encerrada (abajo/izquierda) y masa asociada al horizonte (abajo/derecha).

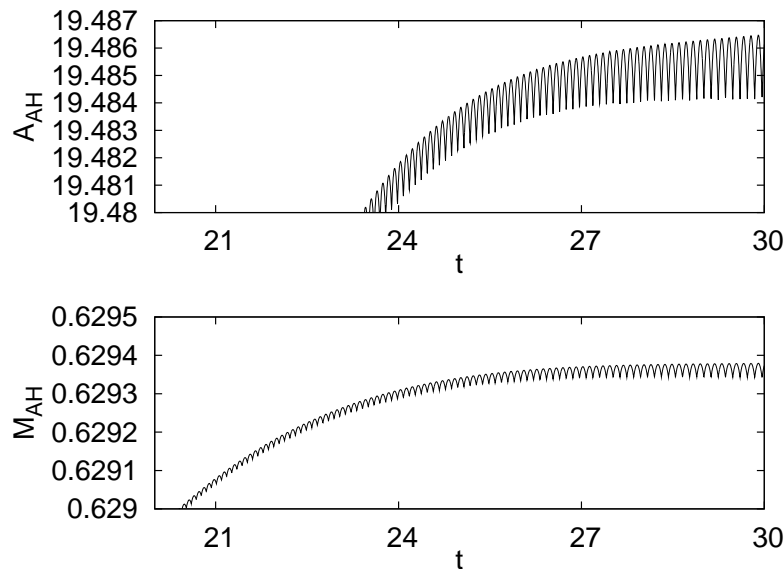


Figura 3.17: Acercamiento de el área del horizonte aparente (arriba), y masa (abajo) mostrados en la Figura 3.16 anteriormente. Las oscilaciones pequeñas son debidas a error numérico y decrecen al aumentar la resolución.

situación estacionaria afuera de la superficie atrapada, pero como hemos visto las propiedades físicas relevantes rápidamente tienden a valores estacionarios.

Se realizaron simulaciones para valores de la carga del campo escalar q variando de 0.0 a 8.0, y amplitudes iniciales φ_0 de 0.03 a 0.1, enfocándonos en la región del espacio de parámetros que representa configuraciones que colapsan gravitacionalmente. Las simulaciones proceden de un modo similar a la que acabamos de analizar, la diferencia principal es que cuando se incrementan ambos parámetros la forma de los pulsos iniciales se distorsiona mucho más después de que se separan, mostrando poco parecido con los pulsos iniciales superpuestos. En cada caso, una vez que un horizonte aparente es encontrado, sus propiedades físicas se estabilizan rápidamente. También, el campo escalar sobrante es radiado, y las funciones de masa y carga se estabilizan en la región de electro-vacío. Es interesante observar que en esta región del espacio de parámetros la masa final del agujero negro no es muy sensible al valor de la carga fundamental q , lo cual es sorprendente tal que esta masa incluye contribuciones del campo eléctrico (ver Figura 3.18). También hemos encontrado que el cociente

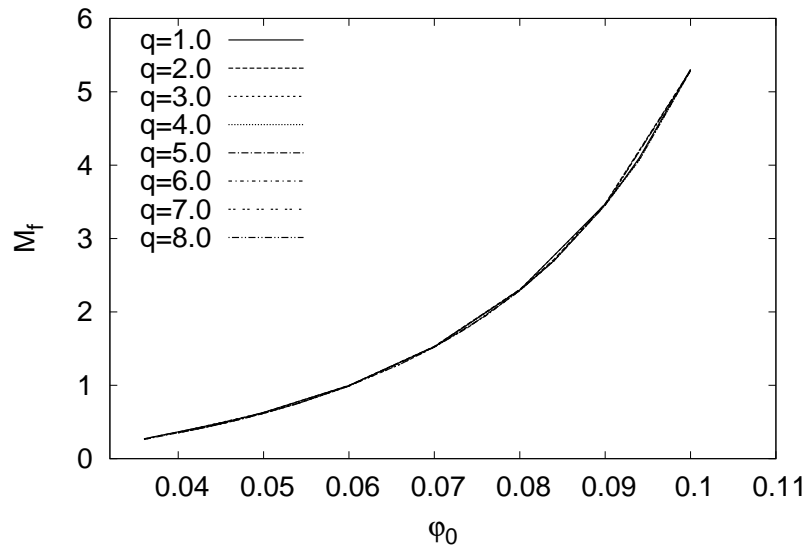


Figura 3.18: Masa final del agujero negro M_f para las configuraciones con densidad de carga inicial nula, como función de la amplitud inicial del pulso φ_0 y distintos valores de q . Notar que para valores pequeños de φ_0 no se da formación de agujeros negros.

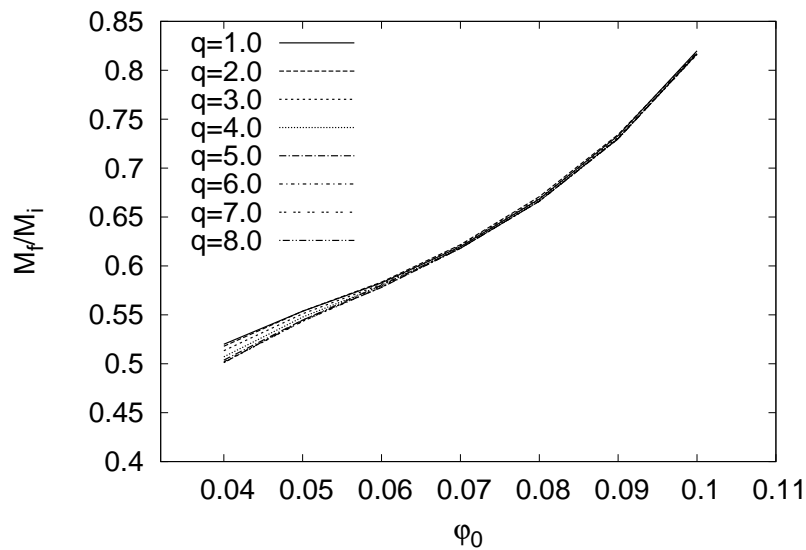


Figura 3.19: Razón entre la masa final del agujero negro M_f y la masa ADM inicial M_i para configuraciones con densidad de carga inicial nula, como función de la amplitud inicial φ_0 .

de la masa final del agujero negro contra la masa ADM inicial de la configuración, M_f/M_i , incrementa con la amplitud φ_0 (ver Figura 3.19), lo cual se comprende fácilmente ya que al incrementar la amplitud del campo escalar obtenemos configuraciones más compactas.

Ahora analizamos la carga de las configuraciones finales, la cual es en cierto modo menos intuitiva. Para valores fijos de la carga fundamental q la carga final de la configuración incrementa inicialmente con la amplitud del pulso inicial, pero eventualmente alcanza un máximo y decrece nuevamente, y puede oscilar alrededor de cero (ver Figura 3.20). Encontramos que al aumentar la carga fundamental este máximo se alcanza a amplitudes menores y tiene un valor menor.

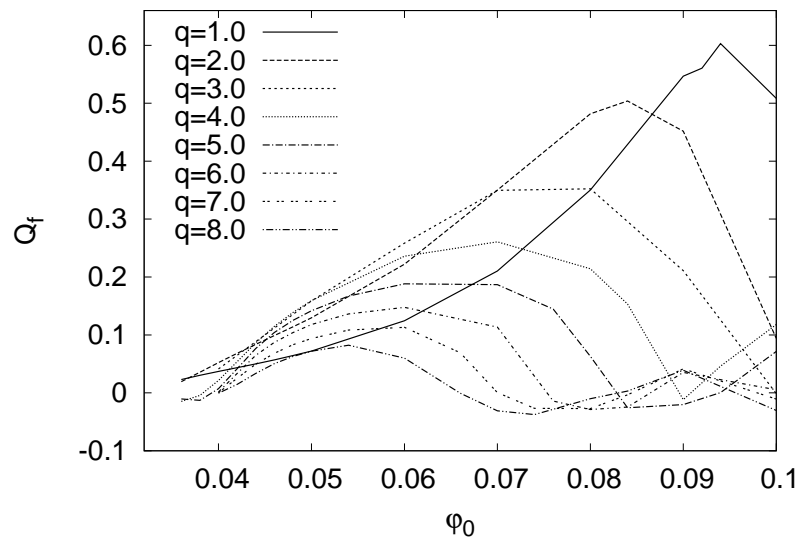


Figura 3.20: Carga final del agujero negro Q_f para las configuraciones con densidad de carga inicial nula, como función de la amplitud inicial φ_0 para distintos valores de q .

Al combinar estos resultados podemos calcular el cociente de carga y masa finales del agujero negro Q/M (ver Figura 3.21). Podemos observar que al incrementar la amplitud φ_0 para q fija, este cociente alcanza un máximo y decrece nuevamente. El máximo global que hemos encontrado para esta familia de simulaciones corresponde al valor $Q/M \simeq 0.25$, lo que muestra que el estado final de estas configuraciones está muy lejano de alcanzar una configuración

extrema con $Q/M = 1$.

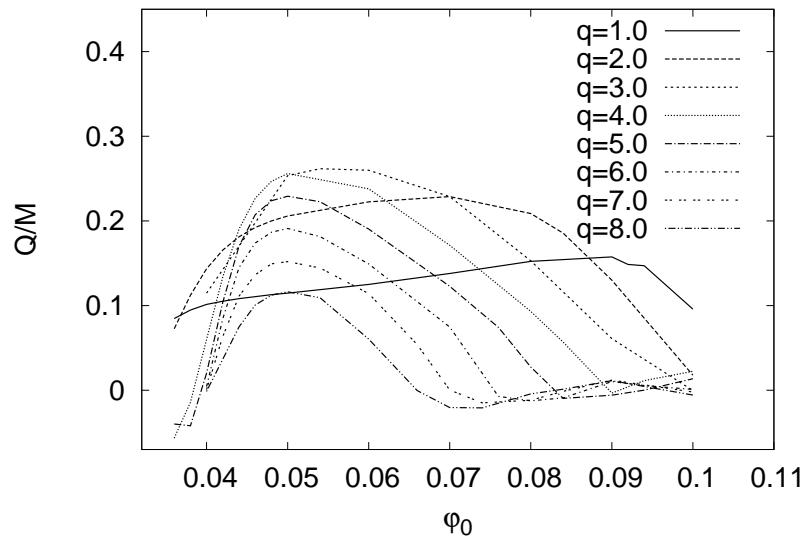


Figura 3.21: Razón Q_f/M_f del agujero negro final para las configuraciones con densidad de carga inicial nula, como función de la amplitud inicial φ_0 para diferentes valores de q .

Configuraciones globalmente cargadas

Para las configuraciones con carga global no nula usamos los siguientes perfiles iniciales para el campo escalar y el potencial escalar electromagnético

$$\text{Re}(\varphi) = \varphi_0 \left[e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2} + e^{-(r+r_0)^2/\sigma^2} \right], \quad (3.68)$$

$$\text{Im}(\varphi) = 0, \quad (3.69)$$

$$\Phi = \Phi_0 \left[e^{-(r-r_0)^2/\sigma^2} + e^{-(r+r_0)^2/\sigma^2} \right]. \quad (3.70)$$

Para todas las simulaciones presentadas los pulsos están centrados en $r_0 = 5.0$ con ancho $\sigma = 1.0$. Encontramos que al tomar la amplitud inicial del potencial escalar $\Phi_0 = 1$, fue posible construir configuraciones que tienen inicialmente un cociente carga/masa mayor que uno.

La evolución de este tipo de datos iniciales es muy similar a la observada en el caso con carga global nula. Como ejemplo consideramos el caso $\varphi_0 = 0.05$ y $q = 0.5$, la cual es una combinación de parámetros que resulta en una configuración que colapsa gravitacionalmente. Como se observa en la Figura 3.22, donde se muestra la evolución temprana a $t = 4$, el pulso inicial se separa en componentes entrante y saliente, y cada una retiene aproximadamente la mitad de la carga inicial. Las Figuras 3.23-3.26 muestran instantáneas de la evolución del campo escalar y la función de lapso, así como las funciones de masa y carga. Nuevamente vemos que cuando el pulso entrante alcanza el origen la función de lapso colapsa. Aunque ocurre esto, parte del campo escalar se dispersa (ver Figura 3.23) llevándose parte de la masa y la carga de la configuración, como puede verse en las Figuras 3.25 y 3.26. Algunas propiedades del horizonte aparente para esta evolución se muestran en la Figura 3.27.

Ahora nos concentraremos en configuraciones con amplitud $\varphi_0 = 0.05$, para distintos valores de la carga fundamental de $q = 0$ a $q = 1.2$. Todas esas configuraciones colapsan gravitacionalmente. La masa ADM inicial resulta ser una función creciente en q al tener el efecto combinado de un campo eléctrico más intenso y un mayor radio de área para el cascarón inicial (ver Figura 3.28).

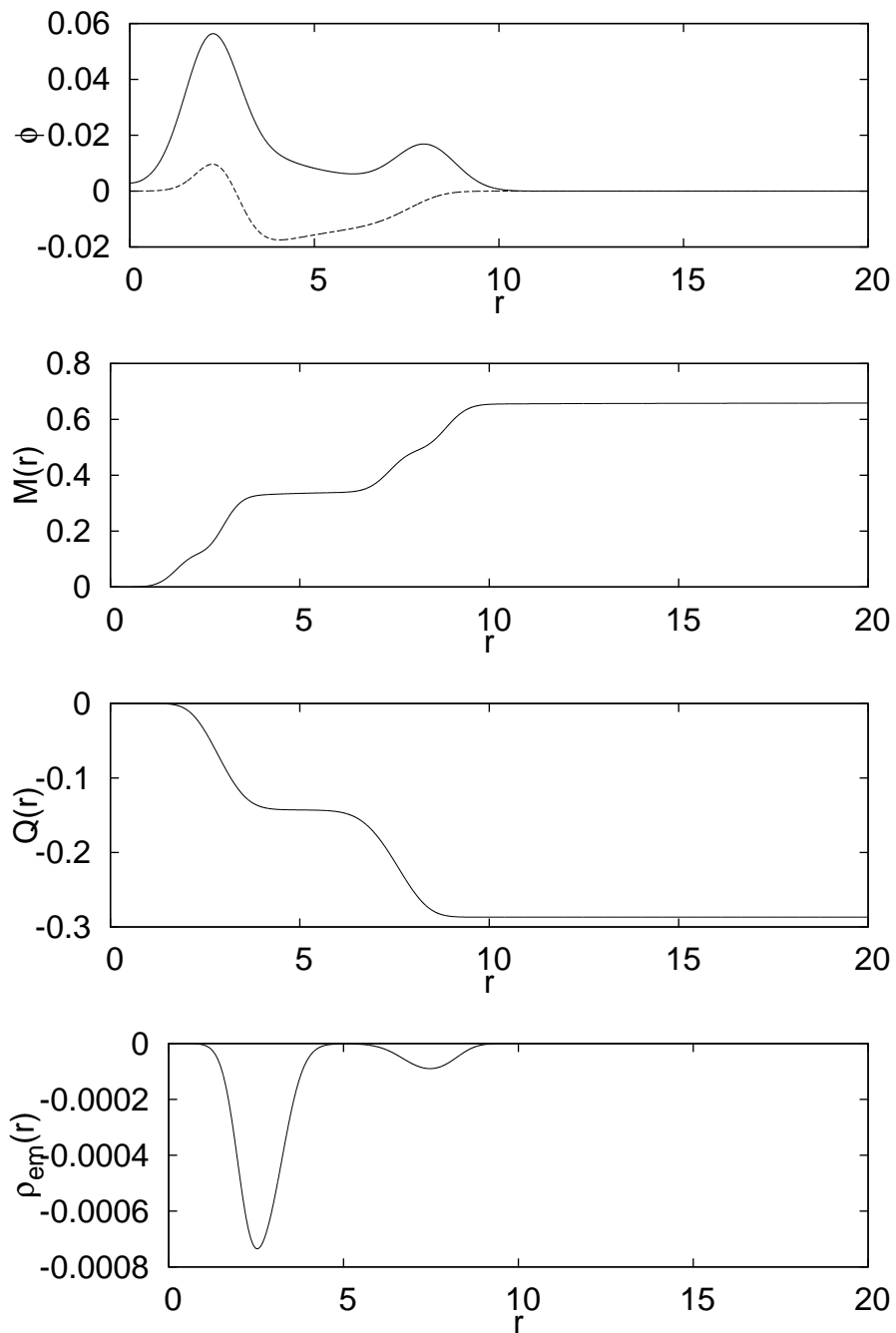


Figura 3.22: Gráfica de los primeros momentos de la evolución ($t = 4.0$) de una configuración con densidad de carga inicial no nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 0.5$. El panel superior muestra el campo escalar (distinguiendo con líneas sólidas y segmentadas la parte real e imaginaria respectivamente), mientras que los siguientes dos paneles muestran la masa $M(r)$ y carga $Q(r)$ (nótese que la carga es negativa).

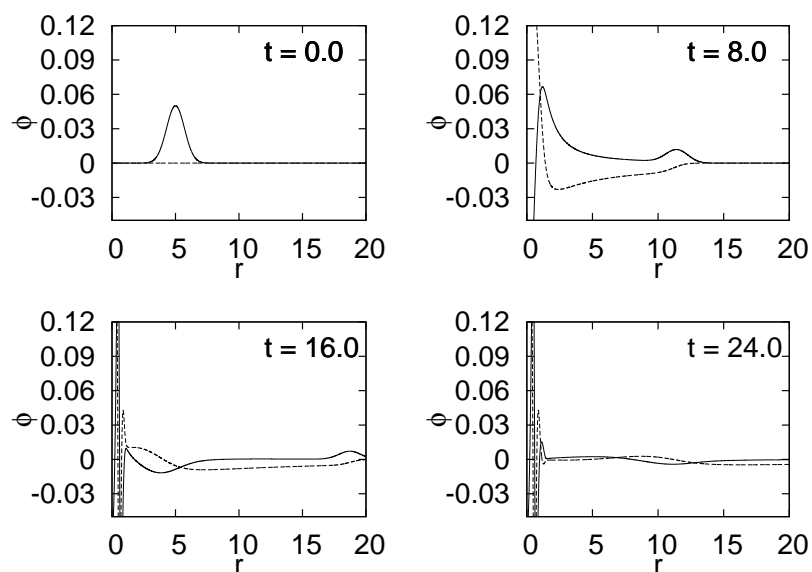


Figura 3.23: Evolución de las partes real (línea sólida) e imaginaria (línea segmentada) del campo escalar a diferentes tiempos, para una configuración con densidad de carga inicial no nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 0.5$.

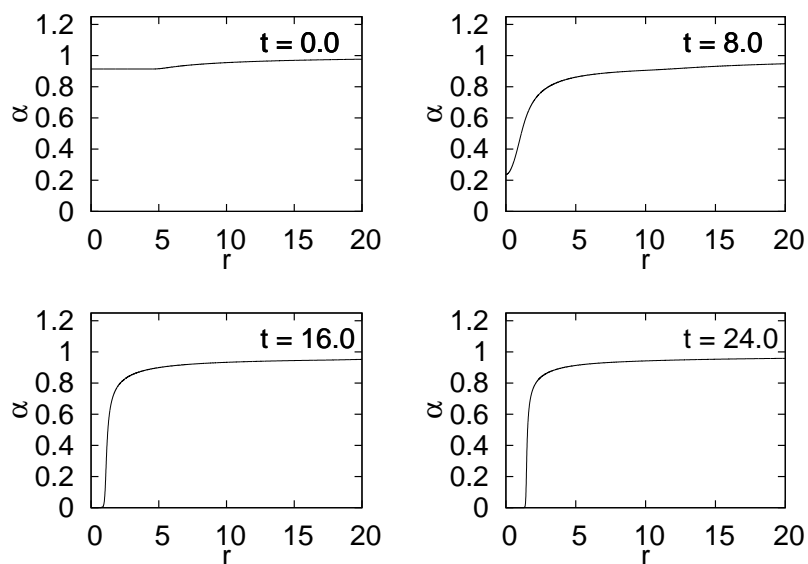


Figura 3.24: Evolución de la función de lapso α para una configuración con densidad de carga inicial no nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 0.5$.

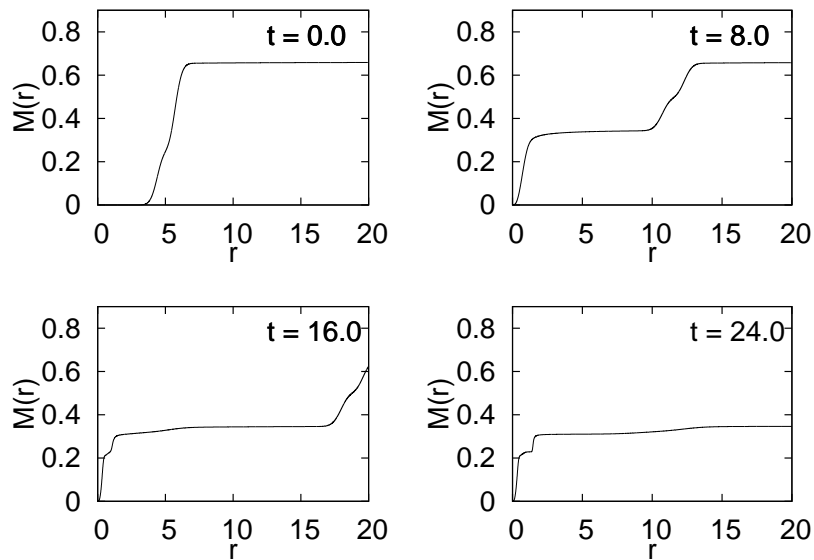


Figura 3.25: Evolución de la función de masa $M(r)$ para una configuración con densidad de carga inicial no nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 0.5$.

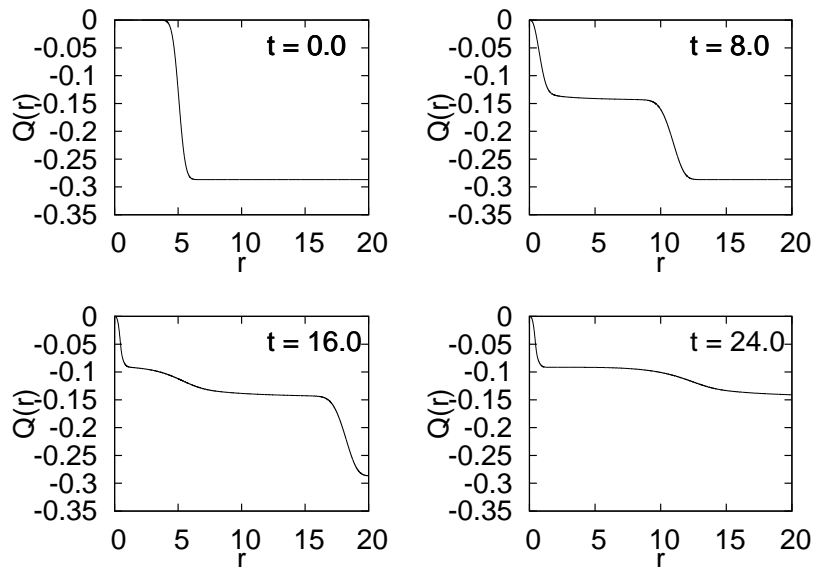


Figura 3.26: Evolución de la función de carga $Q(r)$ para una configuración con densidad de carga inicial no nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 0.5$.

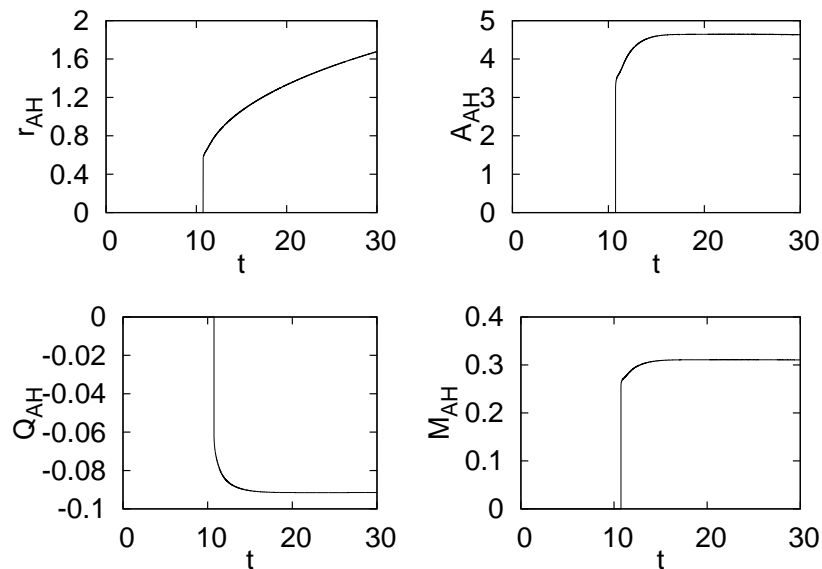


Figura 3.27: Evolución del horizonte aparente para una configuración con densidad de carga inicial no nula y $\varphi_0 = 0.05$, $q = 0.5$: Radio coordinado (arriba/izquierda), área (arriba/derecha), carga encerrada (abajo/izquierda) y masa asociada al horizonte (abajo/derecha).

Como se espera, la masa final del agujero negro también es función creciente de q (ver Figura 3.29). La Figura 3.30 muestra el cociente de la masa final del agujero negro contra la masa ADM inicial, M_f/M_i . Como se espera, este valor es siempre menor que 0.5 ya que la mitad de la masa es llevada por el pulso saliente. También es notable que este cociente de masas muestra una dependencia fuerte con q , y de hecho decrece para valores mayores de q . Esto puede interpretarse como un efecto de la repulsión eléctrica en el pulso inicial: existe una acumulación de carga de igual signo que tiende a dispersarse, así que al incrementar q una fracción mayor del pulso entrante inicial termina siendo dispersada a infinito antes de entrar a la región atrapada.

Considerando ahora la carga eléctrica de estas configuraciones, encontramos que la carga inicial Q_i depende de un modo casi cuadrático en la carga fundamental q , como se observa en la Figura 3.31 (notar que la carga inicial es negativa). Por otro lado, la carga final del agujero negro Q_f decrece en valor absoluto para valores mayores de q , como se muestra en la Figura 3.32. El cociente Q_f/Q_i se muestra en la Figura 3.33. Este comportamiento se puede interpretar

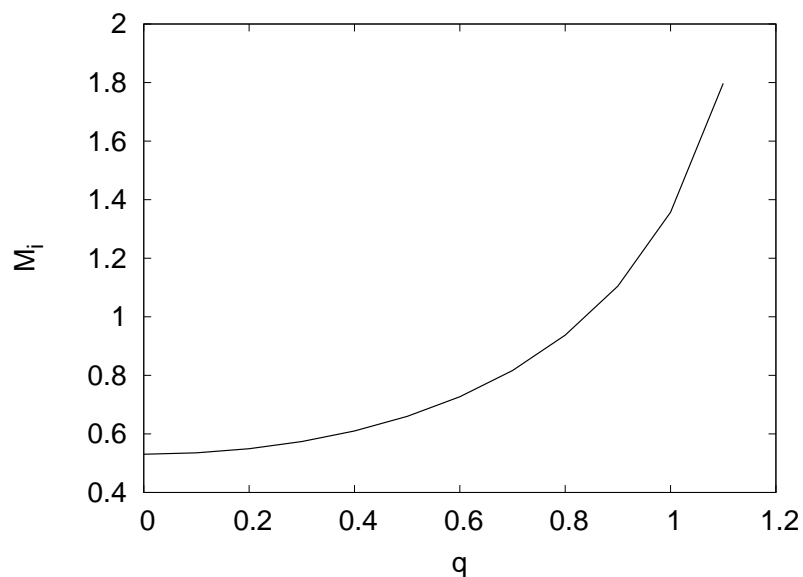


Figura 3.28: Masa ADM inicial para las configuraciones con densidad de carga inicial no nula, como función de la carga fundamental q para una amplitud fija $\varphi_0 = 0.05$.

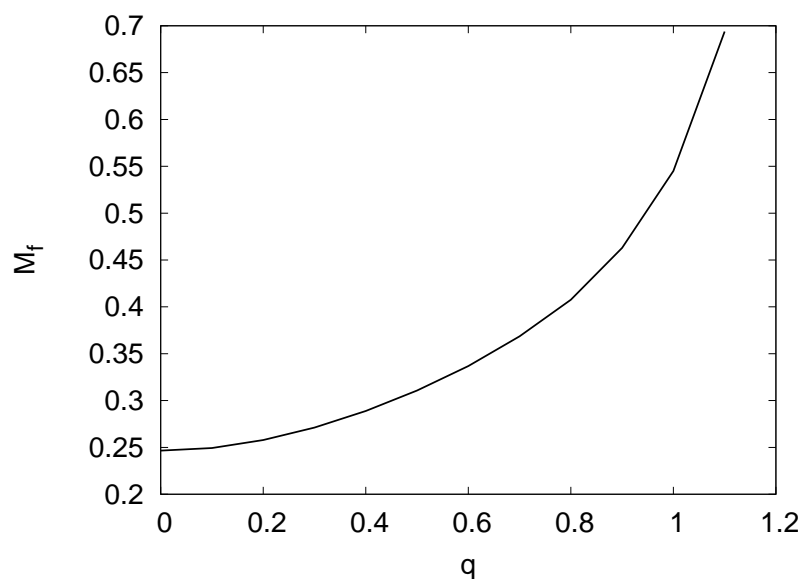


Figura 3.29: Masa del agujero negro final para las configuraciones con densidad de carga inicial no nula, como función de la carga fundamental q para una amplitud fija $\varphi_0 = 0.05$.

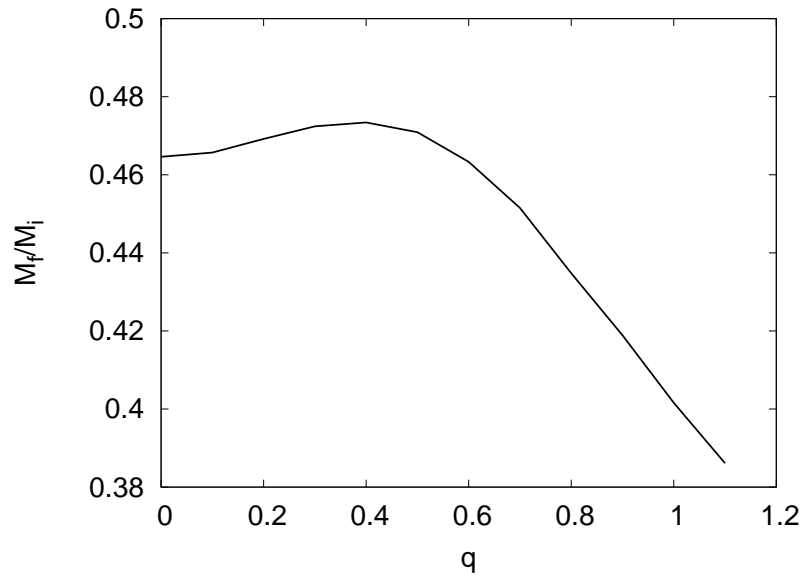


Figura 3.30: Cociente entre la masa del agujero negro final y la masa ADM inicial para las configuraciones con densidad de carga inicial no nula, como función de la carga fundamental q para una amplitud fija $\varphi_0 = 0.05$.

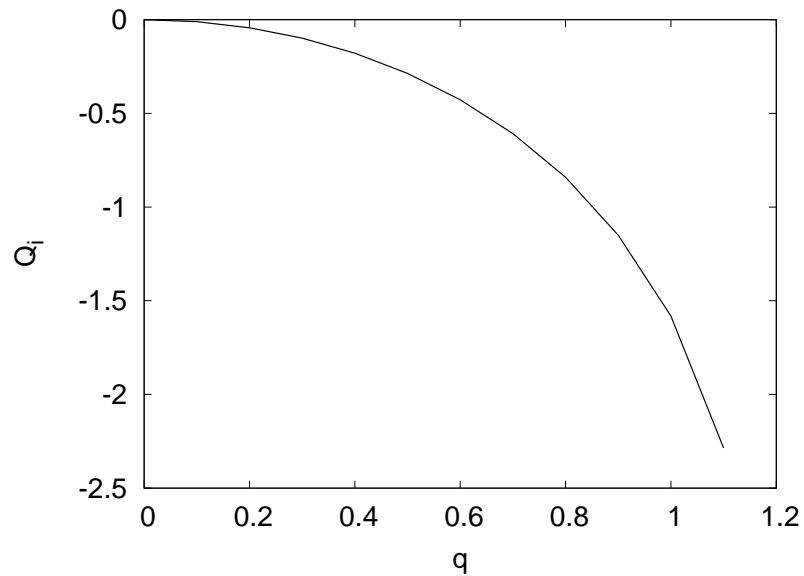


Figura 3.31: Carga inicial global de las configuraciones, como función de la carga fundamental q .

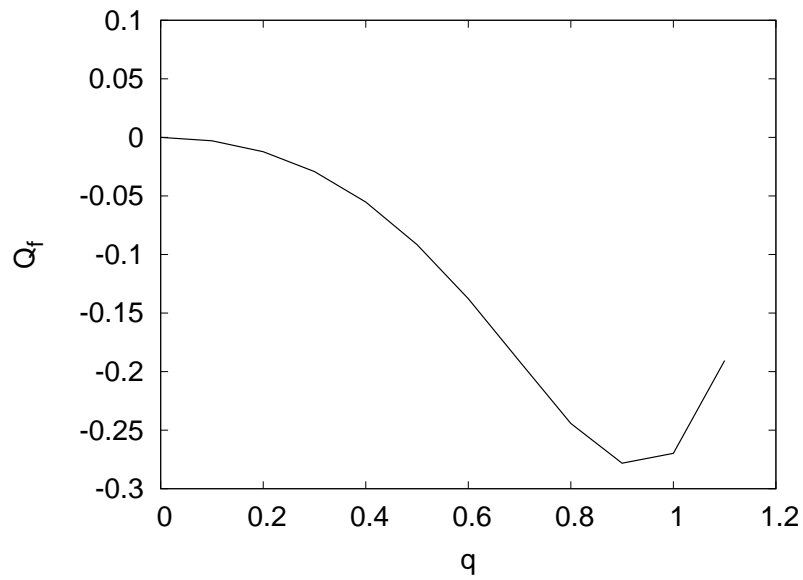


Figura 3.32: Carga final global de las configuraciones, como función de la carga fundamental q .

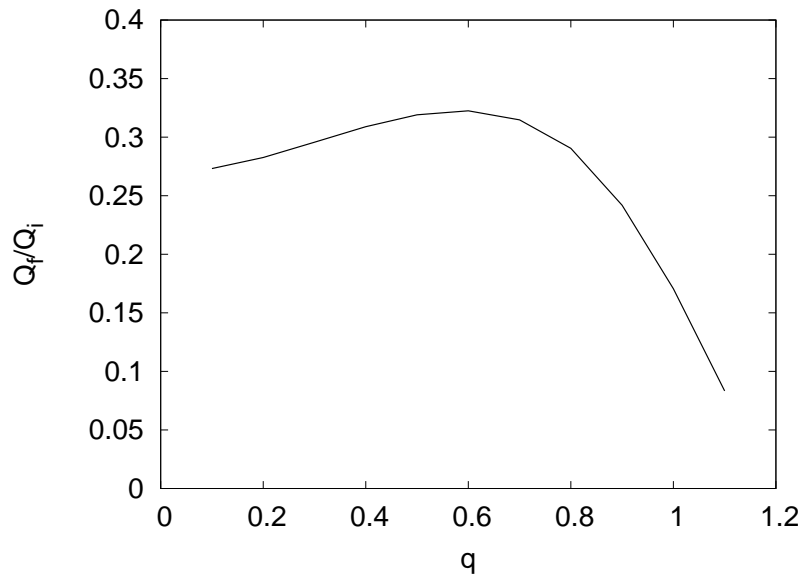


Figura 3.33: Cociente entre la carga final y la carga inicial Q_f/Q_i , como función de la carga fundamental q .

como sigue: cuando el pulso inicial se separa la interacción electromagnética del pulso entrante es tan grande que dispersa campo escalar que lleva con él el exceso de carga, mientras que posibilita la acreción de campo escalar con carga del signo opuesto, eventualmente este efecto es tan fuerte que la carga del agujero negro cambia de signo con respecto a la configuración inicial. Este cambio de signo en la carga del agujero negro también se observa en las configuraciones previas sin carga global (figuras 3.20 y 3.21), pero en ese caso no hay carga inicial contra el cual comparar.

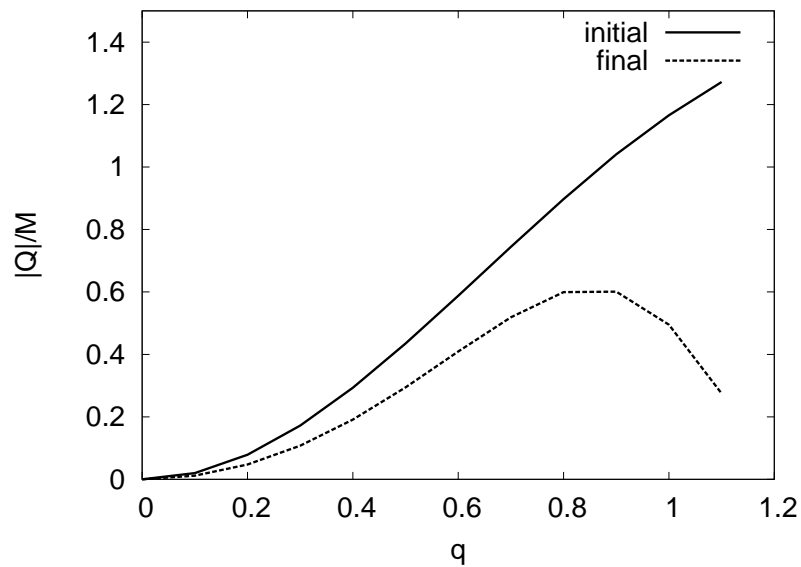


Figura 3.34: Razón $|Q/M|$ como función de la carga fundamental q . La línea sólida corresponde a la configuración inicial, y la segmentada al agujero negro final.

Finalmente, en la Figura 3.34 se muestra el comportamiento del cociente carga/masa $|Q/M|$, tanto para la configuración inicial como para el agujero negro resultante. Para la configuración inicial este cociente aumenta con la carga fundamental. En particular se vuelve mayor que uno después de $q \sim 0.9$. Sin embargo, para el agujero negro final este valor es siempre menor que su valor original, y como la carga final decrece al aumentar la carga fundamental q encontramos que el cociente también decrece más allá de $q = 0.9$. Para esta familia de configuraciones el máximo del cociente carga/masa para el agujero negro final es aproximadamente $|Q_f/M_f| \sim 0.62$ y se alcanza alrededor del valor $q \sim 0.8$.

Naturaleza del agujero negro resultante

En todas las configuraciones estudiadas es una característica común encontrar que después de haber colapsado el campo escalar en la región central se forma un horizonte aparente. Encontramos que aunque nuestras condiciones de norma evitan que se alcance una situación completamente estacionaria, las propiedades físicas del horizonte aparente, esencialmente su área y la carga contenida dentro del mismo, se estabilizan rápidamente. Como no se espera que la pequeña porción del campo escalar dispersada afecte el objeto colapsado, podemos asumir que una vez que las propiedades del horizonte aparente se han asentado, el sistema se ha convertido en un agujero negro, y que el horizonte aparente coincide para cualquier propósito práctico con el horizonte de eventos. Si esto es correcto el agujero negro será del tipo Reissner-Nördstrom, de acuerdo con los teoremas de unicidad en el caso de simetría esférica.

Una forma de verificar esto es comparando el valor asintótico de la función de masa (3.59) con la “masa del horizonte” inferida de las propiedades del horizonte aparente y dada por (1.124), $M_H = M_{\text{irr}} + Q_H/4M_{\text{irr}}$. Como la diferencia de estas cantidades entre las dos mayores resoluciones resulta en el rango de las oscilaciones mostradas en la Figura 3.17 hemos escogido estimar el error usando la amplitud de las mismas. Por otro lado, la masa asintótica se mide tomando el valor de la función de masa $M(r)$ al radio coordenado $r = 30$ (el

punto medio de nuestro dominio computacional) a tiempos tardíos, una vez que el agujero negro resultante se ha estabilizado. El error en este caso se estimó considerando la diferencia de la función de masa evaluada a las dos resoluciones más altas. Como hemos mencionado, debe tomarse en cuenta que a tiempos tardíos la región exterior al horizonte de hecho no es vacío ya que contiene la contribución del campo Coulombiano, de modo que la función de masa $M(r)$ será siempre menor que la masa ADM. De cualquier forma, este efecto resulta ser muy pequeño. Es adecuado notar que las cantidades asociadas al horizonte aparente heredan la dependencia de norma de este, pero al interesarnos en los valores una vez que se ha alcanzado un estado estacionario, estos valores resultan ser los asociados al horizonte de eventos y entonces se vuelven independientes de la norma. También hay que notar que los errores reportados correspondientes a la integración numérica de las ecuaciones de evolución son consistentes con los datos iniciales, ya que los parámetros que describen los datos se dan a precisión de máquina y el error inicial es dominado por el que se introduce al resolver numéricamente las constricciones, que es menor al error de evolución por varios ordenes de magnitud.

La Tabla 3.1 resume los resultados obtenidos para la familia de datos iniciales con densidad de carga inicial nula, para diferentes valores de q y φ_0 . Notamos en particular que para el ejemplo descrito en el texto correspondiente a $\varphi_0 = 0.05$, $q = 2.0$, encontramos una masa asintótica estimada de $M_\infty = 0.6290 \pm 0.0003$, mientras que para la masa del horizonte encontramos $M_H = 0.6294 \pm 0.00007$.

Los resultados para la familia de datos iniciales con densidad de carga no nula se muestran en la Tabla 3.2, para distintos valores de q y una amplitud fija $\varphi_0 = 0.05$. Para el ejemplo discutido en el texto, correspondiente a $q = 0.5$, encontramos un valor estimado para la masa asintótica de $M_\infty = 0.3107 \pm 0.000576$ y para la masa del horizonte $M_H = 0.3109 \pm 0.000092$.

Las tablas muestran en todos los casos una coincidencia excelente entre los valores de la masa asintótica M_∞ y la masa del horizonte M_H , con la diferencia quedando dentro de los errores asociados a la discretización empleada. Este resultado es bastante satisfactorio ya que compara el comportamiento asintótico

q	φ_0	M_{irr}	Q_H	δQ_H	M_H	δM_H	M_∞	δM_∞	Q_H/M_H
1.0	0.040	0.3656	0.03698	0.00003	0.3666	0.00008	0.3651	0.0002	0.1009
1.0	0.060	0.9928	0.1246	0.00004	0.9967	0.00008	0.9969	0.00005	0.1250
1.0	0.080	2.287	0.3502	0.0002	2.300	0.00003	2.300	0.00007	0.1523
2.0	0.040	0.3628	0.0522	0.00004	0.3647	0.00008	0.3636	0.0003	0.1431
2.0	0.050	0.6225	0.1295	0.00007	0.6294	0.00007	0.6290	0.0003	0.2059
2.0	0.060	0.9856	0.2221	0.0002	0.9982	0.00007	0.9983	0.0002	0.2225
2.0	0.080	2.282	0.4821	0.0003	2.308	0.00006	2.308	0.00004	0.2089
3.0	0.040	0.3596	0.04136	0.00004	0.3606	0.00008	0.3604	0.0002	0.1147
3.0	0.060	0.9787	0.262	0.001	0.9964	0.00008	0.9946	0.0002	0.2629
3.0	0.080	2.289	0.3521	0.0009	2.302	0.00005	2.303	0.00007	0.1530
4.0	0.040	0.3563	0.02130	0.00002	0.3566	0.0001	0.356	0.0002	0.05973
4.0	0.060	0.9769	0.2363	0.0008	0.992	0.00007	0.9921	0.0002	0.2382
4.0	0.080	2.291	0.2164	0.0009	2.296	0.00005	2.297	0.00009	0.09425
5.0	0.040	0.3539	0.00710	0.000006	0.354	0.00008	0.3537	0.0001	0.02006
5.0	0.060	0.9793	0.1887	0.0001	0.9894	0.00009	0.989	0.00008	0.1907
5.0	0.080	2.292	0.06320	0.0001	2.293	0.00005	2.293	0.00006	0.02756
6.0	0.040	0.3525	0.0016	0.000001	0.3525	0.00008	0.3525	0.0002	0.004549
6.0	0.060	0.9832	0.1527	0.002	0.9897	0.00006	0.9895	0.0002	0.1543
6.0	0.080	2.292	-0.0287	0.00001	2.292	0.00005	2.292	0.00003	-0.01252
7.0	0.040	0.3519	0.0004	0.000001	0.3518	0.00008	0.3519	0.0001	0.001137
7.0	0.060	0.9873	0.1134	0.0001	0.991	0.00007	0.991	0.00003	0.1144
7.0	0.080	2.292	-0.0276	0.0002	2.292	0.00005	2.292	0.00005	-0.01204
8.0	0.040	0.3519	-0.0002	0.00009	0.3519	0.00007	0.3519	0.0003	-0.0005683
8.0	0.060	0.992	0.0603	0.0003	0.9928	0.00007	0.993	0.00003	0.06074
8.0	0.080	2.291	-0.0101	0.00007	2.291	0.00005	2.292	0.00004	-0.004409

Tabla 3.1: Propiedades del agujero negro final (M_{irr}, Q_H, M_H), y masa asintótica estimada M_∞ , para la familia de datos iniciales con densidad de carga inicial nula, para diferentes valores de q y φ_0 .

de la métrica con mediciones locales sobre el horizonte (su área) y la carga integrada, y es entonces un indicador fuerte de que el agujero negro final es efectivamente del tipo Reissner-Nördstrom.

3.3.5 Conclusiones

Hemos hecho un estudio sistemático del colapso de configuraciones autogravitantes con simetría esférica de campo escalar cargado en el formalismo 3+1. Para resolver el sistema Einstein-Maxwell-Klein-Gordon (EMKG) acoplamos las ecuaciones de evolución para ambos campos, eléctrico y escalar, a la versión generalizada de la formulación de Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) de la Relatividad General [47, 12].

Nuestro objetivo principal fue explorar distintos escenarios de colapso para poner a prueba la conjetura de censura cósmica y analizar los mecanismos que hacen que se mantenga. Nos enfocamos en dos tipos de configuraciones inicia-

q	M_{irr}	Q_H	δQ_H	M_H	δM_H	M_∞	δM_∞	Q_H/M_H
0.0	0.2463	0.0	0.0	0.2463	0.0001	0.2465	0.0002	0.0
0.1	0.2491	-0.00293	0.000007	0.2491	0.0001	0.2493	0.0003	0.01176
0.2	0.2574	-0.0122	0.00003	0.2575	0.0001	0.2578	0.0003	0.04750
0.3	0.2701	-0.0292	0.00006	0.2709	0.0001	0.2711	0.0004	0.1078
0.4	0.2857	-0.0552	0.00009	0.2884	0.00009	0.2888	0.0004	0.1916
0.5	0.3040	-0.0915	0.0001	0.3109	0.00009	0.3107	0.0006	0.2943
0.6	0.3229	-0.1378	0.0002	0.3376	0.00009	0.3368	0.0008	0.4082
0.7	0.3434	-0.1913	0.0002	0.3700	0.00008	0.3686	0.0009	0.5170
0.8	0.3700	-0.2442	0.0003	0.4105	0.00006	0.4076	0.0008	0.5963
0.9	0.4172	-0.2785	0.0004	0.4638	0.00009	0.4629	0.0004	0.6011
1.0	0.5101	-0.2695	0.0003	0.5457	0.00009	0.5450	0.0002	0.4942
1.1	0.6787	-0.1913	0.0002	0.6922	0.0001	0.6939	0.0008	0.2764

Tabla 3.2: Propiedades del agujero negro final (M_{irr} , Q_H , M_H), y masa asintótica estimada M_∞ , para la familia de datos iniciales con densidad de carga no nula, para valores diferentes de q y $\varphi_0 = 0.05$.

les, ambas conformemente planas y con simetría temporal: el primer conjunto con densidad de carga inicial nula, mientras el otro con densidad de corriente inicial nula. Como el colapso crítico de este tipo de configuraciones es bien entendido [148], nos enfocamos en configuraciones que resultan en colapso más allá del régimen crítico. En todos los casos analizados encontramos la formación de un horizonte aparente, obteniendo evidencia empírica de la validez de la hipótesis de censura cósmica.

También estudiamos el cociente final de carga contra masa de las configuraciones colapsadas, a fin de estudiar que tanto uno puede acercarse a una configuración extrema con $|Q|/M = 1$. Para las configuraciones con carga global nula realizamos una serie de simulaciones variando la amplitud inicial φ_0 y la carga fundamental q . El máximo del cociente final para este tipo de dato inicial fue de $|Q|/M \sim 0.26$, bastante por debajo del valor extremo de 1. Ya que estas configuraciones son insensibles inicialmente al valor de la carga fundamental q , hay algunos aspectos de la dinámica que prácticamente no se afectan. En particular, la interacción entre las componentes salientes y entrantes del campo es mínima, así que la masa final del agujero negro muestra una dependencia muy baja respecto a la carga fundamental.

El efecto de la interacción electromagnética se aprecia mejor al considerar la carga final del agujero negro: al incrementar los valores de φ_0 y q se obtiene

una mayor repulsión electromagnética, lo que tiende a neutralizar la carga final del objeto colapsado. Para las configuraciones con carga global no nula los resultados son bastante similares. El máximo del cociente carga a masa para el agujero negro final es alrededor de $|Q|/M \sim 0.6$. La diferencia principal con el otro conjunto de simulaciones es que en este caso la masa final del agujero negro depende fuertemente en la carga fundamental q . La presencia de un campo eléctrico inicial produce una repulsión considerable del cascarón inicial que tiende a dispersarlo. De cualquier modo, para valores intermedios de la carga q en la región que exploramos esta repulsión no es suficientemente fuerte para tener un efecto neutralizante significativo al momento en que el horizonte aparente se forma, obteniendo configuraciones en las que el cociente carga a masa es mayor que para las configuraciones inicialmente descargadas.

Nuestros resultados son consistentes con el hecho de que al considerar materia regular con carga la conjetura de censura cósmica se mantiene de modo genérico. En nuestro caso, una interacción electromagnética fuerte da lugar a una redistribución de los campos de modo que evita la concentración de carga eléctrica en regiones pequeñas. Esto lleva a configuraciones de materia colapsada que son esencialmente neutras, y el efecto se incrementa al aumentar la interacción electromagnética, por medio de considerar valores mayores de la carga fundamental q . Esto parece indicar que las configuraciones sobrecargadas no son capaces de colapsar reteniendo a su vez el exceso de carga.

También nos interesó estudiar las propiedades de los agujeros negros estacionarios finales. Estas configuraciones son consistentes con los teoremas de unicidad para espacio-tiempos esféricamente simétricos, en el sentido de que, una vez que el colapso se ha dado y que el exceso de carga se ha radiado junto con el campo escalar dispersado, afuera del horizonte la geometría se reduce a la de Reissner-Nördstrom. Esto se verificó comparando el valor de la función de masa expresada en las coordenadas de Boyer-Lindquist y la masa asociada al horizonte del agujero negro. No intentamos responder qué ocurre en el interior del horizonte, lo cual es una pregunta interesante por sí sola. La estructura causal de un agujero negro de Reissner-Nördstrom eterno es muy compleja en el interior del horizonte, con horizontes de Cauchy, singularidades temporaloides,

y agujeros de gusano conectando una repetición infinita de regiones exteriores. Cómo esta estructura cambia exactamente cuando en lugar de un agujero negro eterno uno considera el resultante de un colapso es algo que podría estudiarse por medio de simulaciones numéricas como las presentadas en este trabajo. De cualquier forma, acercarse a una singularidad en simulaciones numéricas dista de ser una tarea trivial ya que allí las cantidades dinámicas son divergentes, y las condiciones de norma que usamos en este caso no son apropiadas para esta tarea.

Como comentario final, en este trabajo solo hemos considerado la dinámica de un campo escalar sin masa cargado, y la pregunta de si los mismos resultados se mantienen para un campo escalar masivo (o con un potencial de autointeracción más general) sigue abierta. Es bien sabido que la dinámica de un campo escalar cambia drásticamente al considerar un potencial no trivial, y que en ese caso es posible encontrar configuraciones ligadas gravitacionalmente lo cual podría llevar a obtener configuraciones con mayor cociente de carga a masa en escenarios de colapso.

3.4 Colapso esférico de campo escalar en un contexto cosmológico

Esta sección aborda la implementación del código esférico para el estudio del colapso esférico de campos escalares en contexto cosmológico, su relación como precursor de la formación de estructura observada actualmente y la comparación contra el modelo de materia oscura fría. Cabe resaltar que aparte de la obtención de datos iniciales que representan un espacio-tiempo en expansión, pocas son las consideraciones adicionales que se tuvieron en cuenta: se utilizó una condición de foliación que es equivalente a la parametrización de la foliación en términos del tiempo cósmico conforme (Bona-Masso con $f = 1/3$), y se evitó la consideración de efectos de frontera ubicando estas lo suficientemente lejos para que se mantuvieran causalmente desconectadas durante todo el tiempo de las simulaciones. Este trabajo fue publicado recientemente en colaboración

con Miguel Alcubierre, Axel de la Macorra, y Alberto Diez en la revista *Physical Review D* [192].

La formación de estructura como consecuencia de la inestabilidad dinámica de la materia auto-gravitante constituye una pieza clave en la cosmología moderna. Siempre que las desviaciones con respecto a un universo homogéneo e isotrópico sean pequeñas, es posible desarrollar una teoría a orden lineal autoconsistente para la cual es posible encontrar soluciones analíticas aproximadas [144, 76, 134]. Sin embargo, cuando las inhomogeneidades crecen y alcanzan el régimen no lineal esas soluciones fallan y las técnicas numéricas se vuelven necesarias.

Para el caso de un universo dominado por partículas clásicas, la evolución de las perturbaciones cosmológicas bajo la influencia de la gravedad (Newtoniana) puede ser seguida mediante simulaciones de N-cuerpos (vease por ejemplo [117]). Sin embargo, cuando una descripción en términos de partículas no es viable, es necesario introducir otras técnicas para tratar con la formación no lineal de estructura. Tal es el caso para modelos que consideran materia oscura o/y energía oscura constituidas por las excitaciones macroscópicas coherentes de un campo escalar (por ejemplo candidatos a materia oscura tipo axion no térmicos [75, 118, 109, 180, 186], modelos de energía oscura tipo quintaesencia [145, 193], k-esencia [19]), o modelos que proponen modificaciones a la relatividad general (por ejemplo MOND [131, 32], Einstein-aether [80, 111], gravedad masiva [108, 72]), solo por dar algunos ejemplos.

En este trabajo utilizamos por primera vez nuestro código para estudiar la evolución cosmológica de distribuciones inhomogéneas de materia que presentan simetría esférica. Aunque este tipo de simulaciones son realizables con la ayuda de los paradigmas de la relatividad numérica, a la fecha son escasas (en [14] se da una revisión completa acerca de cosmología computacional). Se pone atención particularmente a los casos de un fluido perfecto sin presión (polvo) y a un campo escalar real masivo que oscila alrededor del mínimo de potencial, mostrando que en el contexto de un universo en expansión, las perturbaciones pequeñas en ambos casos pueden desarrollar estructuras alrededor de materia distribuida en buena medida de manera homogénea e isotrópica. Este es en efec-

to un resultado interesante: previamente se ha argumentado que, al propagarse las perturbaciones pequeñas de un campo escalar canónico a la velocidad de la luz [92, 173], las excitaciones macroscópicas coherentes de un campo bosónico no pueden dar lugar a la formación efectiva de estructura cosmológica. Este trabajo, en conjunto con [8], busca proveer de evidencia que soporte la idea de que un campo escalar masivo libre (tratado clásicamente) en un contexto cosmológico puede dar paso a la formación de estructura a gran escala. Como parte de las conclusiones encontramos que la evolución de las perturbaciones a orden lineal en un universo dominado por un campo escalar es muy similar inicialmente al caso dominado por polvo, pero con un corte en el espectro al nivel de la longitud de onda de Compton de la partícula escalar (en concordancia con resultados analíticos previos, e.g. [152, 110, 127, 128, 125]). Sin embargo al alcanzar el régimen no lineal, la evolución de las inhomogeneidades para ambos tipos de materia difiere: mientras que en el caso de polvo el colapso es muy rápido, el crecimiento de las perturbaciones para el caso de un campo escalar es más gradual, retrasando la formación de las primeras estructuras en el universo.

Es necesario mencionar que durante la fase final de la preparación de este trabajo los autores nos precatamos de la existencia de dos estudios recientes que tratan temas similares. Por un lado, los autores de [174] (ver también [175]) consideran el problema de la formación de estructura en un universo dominado por un campo escalar ultraligero utilizando un código hidrodinámico en tres dimensiones, pero asumen desde un inicio una aproximación de campo débil no-relativista (ver por ejemplo [3, 50, 49, 157] para posibles efectos relativistas aún en simulaciones de N-cuerpos, y Ref. [195] para el caso particular de un campo escalar). Por otro lado en [154] los autores presentan un código completamente relativista para el estudio de problemas cosmológicos en simetría esférica, y lo usan para reproducir la solución analítica de Lemaître-Tolman-Bondi solution. Creemos que los resultados presentados en este trabajo complementan esos estudios. Vease también [198, 197] para otras aplicaciones recientes de relatividad numérica en cosmología, en el caso particular del universo temprano.

3.4.1 Datos iniciales con expansión constante

En un contexto cosmológico no es posible obtener datos iniciales con simetría temporal (a menos que se trate de una cosmología homogénea y “rebotante”). Entonces la siguiente elección en orden de complejidad consiste en considerar a la sección inicial encajada en el espacio-tiempo con expansión constante, esto es $K_{ij} = \gamma_{ij}K/3$. Esta elección satisface trivialmente las constricciones de momento siempre que se considere que al tiempo inicial el flujo de momento es nulo. Por otra parte, haciendo una descomposición conforme de la métrica física $\gamma_{ij} = \psi^4 \hat{\gamma}_{ij}$, la restricción Hamiltoniana queda

$$-\frac{\hat{\nabla}^2 \psi}{\psi^5} + \frac{\hat{R}}{\psi^4} + \frac{2}{3}K^2 - 16\pi\rho = 0. \quad (3.71)$$

El caso homogéneo e isotrópico se da cuando consideramos que la densidad ρ es constante en la sección inicial, entonces basta tomar las otras cantidades que aparecen en la restricción como constantes y estos valores determinan el valor que ha de tomar la expansión $-K$. En particular se consideró para este trabajo el caso plano en el que $\hat{R} = 0$ (es decir $\hat{\gamma}_{ij} = \hat{\gamma}_{ij}$, la métrica plana).

Una manera de generalizar a un caso no-homogéneo conservando la simetría esférica consiste en considerar una distribución de densidad no trivial, la cual depende únicamente del radio coordenado $\rho(\vec{x}, t_0) = \rho_0(r)$. De este modo es necesario un perfil no trivial para el factor conforme $\psi(t = t_0) = \psi_0(r)$ de modo que se satisfaga la ecuación (3.71). Una simplificación adicional se logra si asumimos que en general podemos descomponer las funciones $f(t, r)$ dadas al tiempo inicial como

$$f_0(r) = \bar{f} + \delta f_0(r), \quad (3.72)$$

donde $\delta f_0(r)$ tiene soporte compacto, y \bar{f} representa el valor promedio (en simetría esférica solamente el comportamiento asintótico es lo que determina este valor). Entonces podemos tomar $K^2 = 24\pi\bar{\rho}$, de manera que el espacio-tiempo tenga el comportamiento asintótico FRW, y se reduzca a uno homogéneo cuando $\delta\rho_0 = 0$. La restricción Hamiltoniana para el caso conformemente

plano se reduce entonces a una ecuación no lineal tipo Poisson para el factor conforme

$$\hat{\nabla}^2 \psi_0 + 2\pi(\delta\rho_0)\psi_0^5 = 0. \quad (3.73)$$

La solución a esta ecuación se busca de modo que cumpla las condiciones de frontera

$$\partial_r \psi_0(r=0) = 0, \quad \psi_0(r \rightarrow \infty) = 1. \quad (3.74)$$

3.4.2 Perturbaciones en el régimen lineal

En este apartado se desarrollan los métodos para comparar los resultados obtenidos al integrar el problema de valores iniciales. En cosmología el tensor métrico de un universo FRW usualmente se parametriza como

$$ds^2 = a_{sc}^2 \left[-(1 + 2\Phi) d\eta^2 - 2\partial_i B dx^i d\eta + (1 - 2\Psi - 2\partial_r^2 E) dr^2 + (1 - 2\Psi - (2/r)\partial_r E) r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (3.75)$$

(Ver la Sección 7.1 en [134]; ya hemos tomado en cuenta las consideraciones de simetría esférica). Esta ecuación solo considera las perturbaciones escalares, ya que los modos vectoriales y tensoriales no pueden excitarse en simetría esférica. Los campos Φ , B , Ψ y E miden la desviación del espacio-tiempo respecto a un universo plano, homogéneo e isotrópico.

Para nuestro estudio en el formalismo 3 + 1 estándar, la métrica toma la forma:

$$ds^2 = a_{sc}^2 \left[-\frac{\psi^4}{a_{sc}^2} d\eta^2 + \frac{\psi^4}{a_{sc}^2} (adr^2 + br^2 d\Omega^2) \right], \quad (3.76)$$

ya que el tiempo cósmico conforme se relaciona al que parametriza la foliación por $dt = (\psi^2/\alpha)d\eta$, junto con la identificación $a_{sc} = e^{2\bar{\chi}}$. Con esto podemos escribir $\psi^2/a_{sc} = e^{2\delta\chi}$. Al comparar estas expresiones e igualar coe-

ficientes métricos identificamos $1 + 2\Phi = e^{4\delta\chi}$, $B = 0$, $1 - 2\Psi - 2\partial_r^2 E = e^{4\delta\chi}a$, $1 - 2\Psi - (2/r)\partial_r E = e^{4\delta\chi}b$. Desarrollando estas expresiones a primer orden en las perturbaciones se llega a

$$\Phi = 2\delta\chi, \quad (3.77a)$$

$$B = 0, \quad (3.77b)$$

$$\Psi = -\frac{1}{2}\delta b - 2\delta\chi - \int^r \frac{dr_1}{2r_1} (\delta b - \delta a), \quad (3.77c)$$

$$E = \int^r r_2 dr_2 \int^{r_2} \frac{dr_1}{2r_1} (\delta b - \delta a). \quad (3.77d)$$

La razón por la que el campo B se anula trivialmente es porque hemos elegido que el vector de corrimiento sea nulo.

Las perturbaciones del tensor métrico definidas en las ecuaciones (3.75) y (3.77) no son invariantes ante transformaciones de coordenadas. No obstante es posible definir cantidades invariantes a primer orden

$$\Phi_{\text{gauge}} = \Phi - (1/a) [a(B - E)]', \quad (3.78a)$$

$$\Psi_{\text{gauge}} = \Psi + \mathcal{H}(B - E). \quad (3.78b)$$

Aquí las cantidades primadas denotan la derivada de dichas funciones respecto al tiempo conforme, y $\mathcal{H} := a'/a$. Siempre que la materia no posea esfuerzos anisotrópicos se cumplirá a orden lineal $\Phi_{\text{gauge}} = \Psi_{\text{gauge}}$. Estos campos son entonces análogos al potencial gravitacional Newtoniano y en adelante así nos referiremos.] Una expresión similar se obtiene para la perturbación invariante de norma de la densidad de energía

$$\delta\rho_{\text{gauge}} = \delta\rho - \bar{\rho}'(B - E'). \quad (3.79)$$

Las ecuaciones (3.78) y (3.79) fueron reportadas por primera vez por Bardeen en [29], y desde entonces se usan frecuentemente para caracterizar las perturbaciones cosmológicas a orden lineal. Como involucran derivadas respecto al

tiempo cósmico conforme, las definiciones anteriores no son triviales. Al tomar la derivada del término en el integrando y utilizar las ecuaciones de evolución para la métrica aparece una contribución de la curvatura extrínseca. Al desarrollar estos términos queda:

$$E' = \frac{3}{2} \bar{\psi}^2 \int^r r_2 dr_2 \int^{r_2} \frac{dr_1}{r_1} A_a, \quad (3.80a)$$

$$E'' = \frac{3}{2} \frac{\bar{\psi}^4}{\bar{\alpha}} \int^r r_2 dr_2 \int^{r_2} \frac{dr_1}{r_1} \left(\partial_t A_a - \frac{1}{3} \bar{\alpha} \bar{K} A_a \right), \quad (3.80b)$$

para la última hemos de considerar la ecuación de evolución para A_a (3.3e). De modo similar se puede encontrar la forma explícita de $\bar{\rho}'$ una vez que se ha especificado el contenido de materia.

3.4.3 Fluido perfecto sin presión

A grandes escalas la materia oscura normalmente es descrita como un fluido perfecto con ecuación de estado $p = 0$, llamado usualmente “polvo”. El tensor de energía-momento de un fluido perfecto sin presión toma la forma $T_{\mu\nu} = \rho_{\text{rest}} u_\mu u_\nu$, donde u_μ es la cuadrivelocidad de los elementos de fluido y $\rho_{\text{rest}} := T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$ es la densidad de energía total mediada por observadores comóviles con el fluido. En general esta densidad de energía medida por los observadores en reposo respecto al fluido no coincide con la densidad de energía medida por los observadores Eulerianos $n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$.

Para el caso de un universo dominado por polvo existen expresiones analíticas para el factor de escala como función del tiempo cósmico conforme,¹

$$a_{\text{sc}}(\eta) = a_0 \left(\frac{\eta}{\eta_{\text{BB}}} - 1 \right)^2, \quad (3.81)$$

¹Ver por ejemplo. Eqs. (1.77), (7.53), y (7.54) en Ref. [134].

así como expresiones para las perturbaciones lineales invariantes de norma,

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{gauge}}(\eta, \vec{x}) &= \Psi_{\text{gauge}}(\eta, \vec{x}) \\ &= C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x}) \left(\frac{\eta}{\eta_{\text{BB}}} - 1 \right)^{-5},\end{aligned}\quad (3.82a)$$

y el contraste en la densidad de energía,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\rho_{\text{gauge}}}{\bar{\rho}}(\eta, \vec{x}) &= \frac{1}{6} \left\{ \left[\Delta C_1(\vec{x}) (\eta - \eta_{\text{BB}})^2 - 12C_1(\vec{x}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\Delta C_2(\vec{x}) (\eta - \eta_{\text{BB}})^2 + 18C_2(\vec{x}) \right] \left(\frac{\eta}{\eta_{\text{BB}}} - 1 \right)^{-5} \right\}.\end{aligned}\quad (3.82b)$$

En estas expresiones el momento inicial $\eta = 0$ se elige arbitrariamente, lo cual fija la singularidad del Big Bang a $\eta = \eta_{\text{BB}} = -[3/(2\pi a_0^2 \bar{\rho}_0)]^{1/2}$. También, $C_1(\vec{x})$ y $C_2(\vec{x})$ son funciones arbitrarias de las coordenadas espaciales que dependen de las perturbaciones iniciales y pueden determinarse a partir de los datos iniciales por medio de las relaciones

$$C_1(\vec{x}) = \Psi_{\text{gauge}}(0, \vec{x}) - \frac{\eta_{\text{BB}}}{5} \Psi'_{\text{gauge}}(0, \vec{x}), \quad (3.83a)$$

$$C_2(\vec{x}) = -\frac{\eta_{\text{BB}}}{5} \Psi'_{\text{gauge}}(0, \vec{x}). \quad (3.83b)$$

Después de un período de transición, el potencial Newtoniano permanece constante, $\Phi_{\text{gauge}} = \Psi_{\text{gauge}} \sim C_1(\vec{x})$. Por su parte, el comportamiento del contraste en la densidad de energía depende del tamaño de las perturbaciones. Los modos más pequeños que el radio de Hubble, $kr_H \gg 1$, crecen como $(\eta - \eta_{\text{BB}})^2$ (el cuadrado del radio comóvil de Hubble $r_H \equiv 1/\mathcal{H} = (\eta - \eta_{\text{BB}})/2$), mientras que los modos que inicialmente son más grandes que el radio de Hubble, $kr_H(\eta = 0) \ll 1$, permanecen esencialmente congelados hasta que el horizonte los alcanza.

La integración de las ecuaciones de evolución se hace usando la formulación de Valencia [85, 84]. Un punto importante de esta formulación es el paso entre cantidades primitivas $(\rho_{\text{rest}}, \epsilon, v^i)$ y conservadas $(D, \mathcal{E}, \mathcal{S}^i)$, el cual usualmente está dado en términos de ecuaciones trascendentes que se fijan de acuerdo a la ecuación de estado. Sin embargo, para esta situación la ecuación de estado es trivial y tenemos $p = 0$, $\epsilon = 0$, $h = 1$, lo que implica

$$v^i = \mathcal{S}^i / (\mathcal{E} + D), \quad \rho_{\text{rest}} = D/W. \quad (3.84)$$

Reescribiendo las ecuaciones de evolución del fluido en la formulación de Valencia, obtenemos que la dinámica de un fluido perfecto sin presión queda regida por el sistema

$$\partial_t D - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} D = -\nabla_k (\alpha D v^k) + \alpha K D, \quad (3.85a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{S}^r - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{S}^r &= -\nabla_k (\alpha \mathcal{S}^r v^k) + \alpha K \mathcal{S}^r \\ &\quad - (\mathcal{E} + D) \nabla^r \alpha, \end{aligned} \quad (3.85b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{E} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \mathcal{E} &= -\nabla_k (\alpha \mathcal{E} v^k) + \alpha K \mathcal{E} \\ &\quad + (\mathcal{E} + D) (\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_m \alpha). \end{aligned} \quad (3.85c)$$

Por otra parte, las fuentes del campo gravitacional toman una forma muy sencilla

$$\rho = \mathcal{E} + D, \quad (3.86a)$$

$$j^r = \mathcal{S}^r = \rho v^r, \quad (3.86b)$$

$$S_a = S^r_r = v^r \mathcal{S}_r = \rho v^r v_r, \quad S_b = 0. \quad (3.86c)$$

Como ya se mencionó, estas simulaciones se realizaron considerando un vector de corrimiento nulo y una condición de foliación de la familia Bona-Masso, Eq. (1.68). En particular se eligió $f = 0.3332$ para poder comparar con los resultados analíticos parametrizados en términos del tiempo cósmico conforme

(en particular las ecuaciones (3.81) y (3.82)). Se utilizó una malla numérica con 10^4 puntos, con un espaciado de $\Delta r = 0.1$.

Para este caso la densidad de momento inicial se anula si consideramos $v^r(t = t_0) = 0$. Con esta consideración los observadores Eulerianos están inicialmente en reposo respecto al fluido, por lo que $\rho(r) = \rho_{\text{rest}}(r)$.

Una vez dado el perfil inicial de densidad de energía $\rho_0(r)$ y se descompone en contribución de fondo y perturbación

$$\rho(r, t = 0) = \bar{\rho} + \delta\rho_0(r), \quad (3.87a)$$

solo hace falta especificar la geometría consistente con esta distribución de materia, como se vio en la Sección 3.4.1. Para construir datos iniciales que corresponden a una inhomogeneidad localizada dentro de un universo en expansión parametrizamos esta perturbación como

$$\delta\rho_0(r) = \delta\rho_* \left(1 - \frac{11r^2}{3L^2}\right) \left[\left(1 - \frac{r}{L}\right)\left(1 + \frac{r}{L}\right)\right]^3, \quad (3.87b)$$

en la región interior $0 < r < L$, y $\delta\rho_0(r) = 0$ para $r \geq L$. Aquí $\delta\rho_*$ y L son respectivamente la amplitud y escala de la perturbación inicial. Esta parametrización garantiza que la perturbación es suave, tiene soporte compacto y su integral es cero, $\int_V \delta\rho_0(r) d^3\vec{x} = 0$. Mientras se cumpla $\delta\rho_* \ll \bar{\rho}_0$ los resultados obtenidos integrando numéricamente el sistema completo se han de corresponder con los obtenidos por la teoría de perturbaciones lineales, Ecs. (3.82), al menos por un intervalo de tiempo en el que los efectos no lineales se vuelven relevantes.

En la figura 3.35 se muestra, para el caso de un universo homogéneo e isotrópico con $\bar{\rho}_0 = 2 \times 10^{-6}$ $\delta\rho_* = 0$, una comparación de la evolución del factor de escala obtenida numéricamente contra la expresión analítica para un universo de Friedmann dada en la ecuación (3.81). Como nos interesa el caso de una configuración en expansión se elige la raíz negativa para la traza de la curvatura extrínseca, $K_0 = -1.228 \times 10^{-2}$.² Como se observa en la figura, el

²Numéricamente trabajamos con cantidades y coordenadas adimensionales. Con el fin de recuperar las dimensiones físicas es necesaria una escala de longitud arbitraria λ tal que

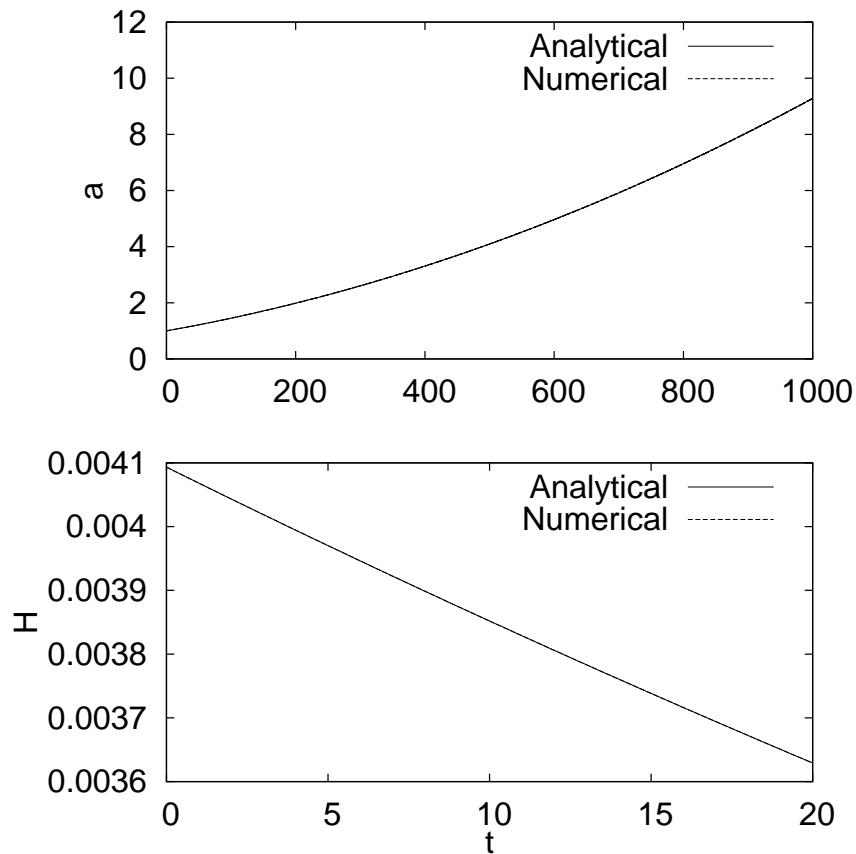


Figura 3.35: Evolución del factor de escala a_{sc} (panel superior) y parámetro de Hubble H (panel inferior), como función del tiempo coordenado t , para un universo homogéneo e isotrópico en expansión dominado por un fluido perfecto sin presión (polvo). Aquí hemos elegido $\rho_0 = 2 \times 10^{-6}$ y $\delta\rho_* = 0$. Mostramos tanto la evolución numérica (línea punteada), y la solución analítica de Eq. (3.81) (línea sólida). La escala está ampliada cerca del origen en el panel inferior a fin de apreciar detalles y para la comparación a continuación.

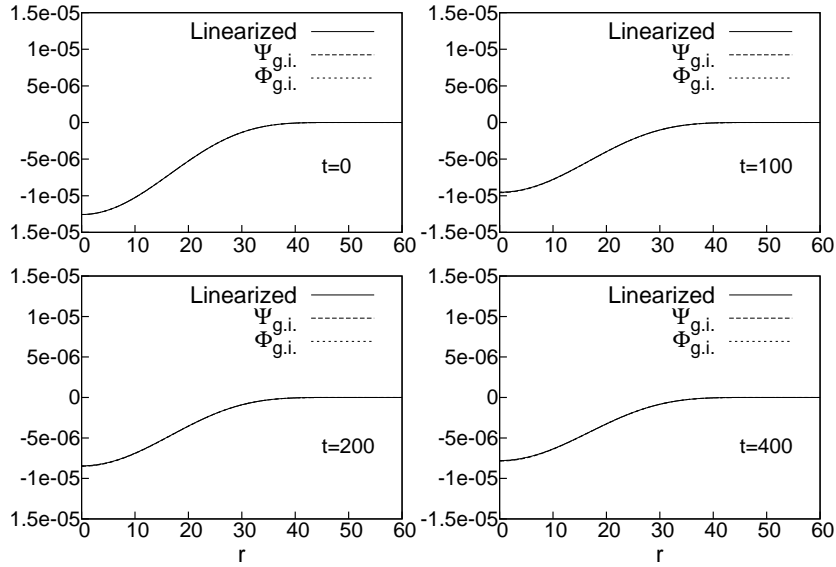


Figura 3.36: Instantáneas de la evolución de las perturbaciones invariantes de norma del tensor métrico, Φ_{gauge} y Ψ_{gauge} , como funciones de la coordenada radial comóvil r . Aquí hemos elegido datos iniciales de la forma Eq. (3.87) con $\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$, $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-8}$ y $L = 50$. Mostramos los resultados de la evolución numérica, Ψ_{gauge} (línea segmentada), Φ_{gauge} (línea punteada), junto con la solución analítica obtenida en el régimen lineal, Eq. (3.82a), (línea sólida). La diferencia es tan pequeña que no se aprecia en esta gráfica.

resultado numérico es muy certero y converge consistentemente con el orden de la discretización.

Ahora analizamos la evolución del caso perturbado. Para este escenario se eligió una densidad para el fondo de $\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$, con una amplitud para la perturbación de $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-8}$. La escala de longitud característica que aparece en la ecuación (3.87) se fijó a $L = 50$. Los parámetros se eligieron de modo que se tienen perturbaciones cuya escala es menor al radio de Hubble, y con un contraste en la densidad de energía que nos permite comparar los resultados numéricos con los obtenidos mediante una aproximación linealizada.

$x_{\text{phys}}^\mu = \lambda x^\mu$; entonces las soluciones numéricas adquieren dimensiones físicas al dividir las derivadas de la curvatura extrínseca K_{ij} y el vector de conexión $\hat{\Delta}^i$ entre λ , y los términos de materia ρ , j^i y S_{ij} entre λ^2 . Para un fluido sin presión no existe una elección a priori de esta escala, lo cual es una ventaja ya que se pueden hacer comparaciones directamente con otros modelos al escoger la escala física adecuada.

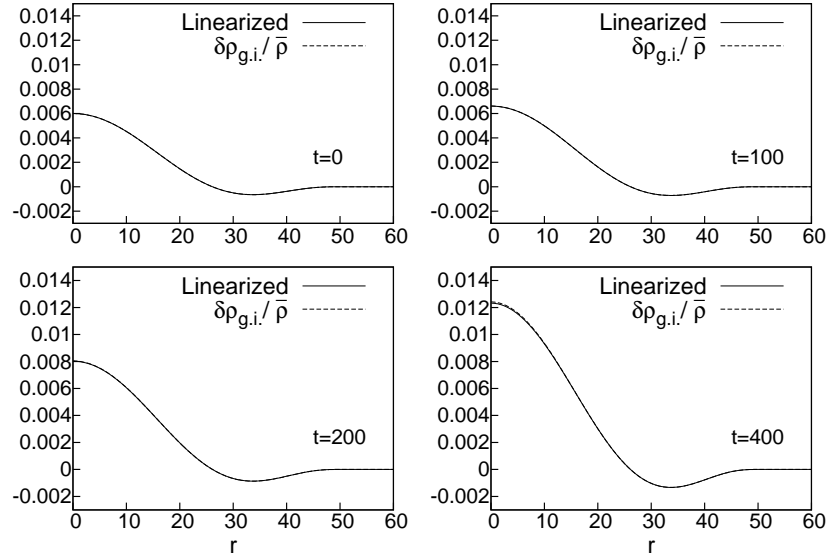


Figura 3.37: Instantáneas del contraste en la densidad de energía, $\delta\rho_{\text{gauge}}/\bar{\rho}$, para la configuración mostrada en la Figura 3.36. Mostramos los resultados de la evolución numérica (línea segmentada), junto con la solución analítica obtenida en el régimen lineal, Eq. (3.82b), (línea sólida).

En la figura 3.36 se muestra la evolución numérica de las perturbaciones a la métrica invariantes de norma, Φ_{gauge} y Ψ_{gauge} , junto con la evolución esperada en el régimen lineal, ecuación (3.82a). Las funciones $C_1(\vec{x})$ y $C_2(\vec{x})$ en la ecuación (3.82a) fueron determinadas a partir de los datos iniciales usando las expresiones en las ecuaciones (3.83). Durante toda la evolución la relación $\Psi_{\text{g.i.}} = \Phi_{\text{g.i.}}$ se satisface a nivel numérico, convergiendo consistentemente con el orden de la discretización. También los resultados numéricos coinciden remarkablemente bien con las predicciones analíticas obtenidas en el régimen lineal. Después de un tiempo, en este caso $t \sim 400$, el potencial Newtoniano tiende a su valor asintótico $C_1(\vec{x})$.

La figura 3.37 muestra, para el caso mostrado en la figura 3.36, la evolución numérica de el contraste en la densidad de energía, $\delta\rho_{\text{gauge}}/\bar{\rho}$, y se compara contra la evolución predicha en el régimen lineal, ecuación (3.82b). Como la escala característica de la perturbación inicial se encuentra dentro del radio de Hubble, todos los modos significativos que contribuyen a la inhomogeneidad crecen al mismo ritmo y el perfil solamente se ve reescalado al avanzar en el

tiempo. Como se puede apreciar, la evolución del contraste en la densidad de energía también coincide con la predicción obtenida en el régimen lineal.

Estos resultados confirman las conclusiones obtenidas por medio de la teoría linealizada para el comportamiento de perturbaciones en este régimen. Sin embargo, en un universo dominado por polvo las perturbaciones crecen indefinidamente mientras el universo se expande. Esto es naturalmente un problema de la aproximación lineal, ya que la evolución natural llevará al sistema fuera de este régimen. Para evaluar el comportamiento en el régimen no lineal hemos hecho simulaciones con los mismos parámetros para el fondo cosmológico usados en las figuras 3.36 y 3.37, pero con una amplitud perturbada mayor, $\delta\rho_* = 6 \times 10^{-7}$, a fin de contar con datos iniciales en los que el valor del contraste en la densidad de energía es de orden 10^{-1} . Las nuevas simulaciones proceden inicialmente de una manera similar a las analizadas previamente, ver figuras 3.38 y 3.39. Sin embargo, como se esperaba, pronto encontramos una desviación apreciable respecto a las predicciones de la teoría linealizada. Esta desviación crece con el tiempo, aunque es interesante notar que las regiones que aún no entran en este régimen no lineal, $r \gtrsim 15$ en las figuras, aún son bien descritas por las expresiones lineales.

Finalmente, en la Figura 3.40 mostramos, para el caso correspondiente a las figuras 3.38 y 3.39, la evolución del valor central de los potenciales $\Psi_{g.i.}$ y $\Phi_{g.i.}$ como función del contraste en la densidad de energía, evaluado en el centro de la configuración. Aunque ambos potenciales siguen siendo cercanos durante la evolución, sus valores comienzan a diferir de la predicción linealizada al avanzar en el tiempo. Más aún, mientras que en la aproximación lineal el valor de los potenciales tiende asintóticamente a un valor, en la evolución no lineal el valor de los potenciales primero decrece en valor absoluto, pero después comienza a hacerse más negativo, y esta transición ocurre aproximadamente cuando el contraste en la densidad de energía ha alcanzado un valor $(\delta\rho_{\text{gauge}}/\bar{\rho})_{\text{max}} \sim 0.6$. No es sorprendente encontrar un comportamiento distinto a este nivel, ya que las cantidades invariantes de norma únicamente están bien definidas en el régimen lineal y debemos ser cuidadosos en como han de extraerse los resultados relevantes una vez que se ha alcanzado el régimen no lineal. Sin

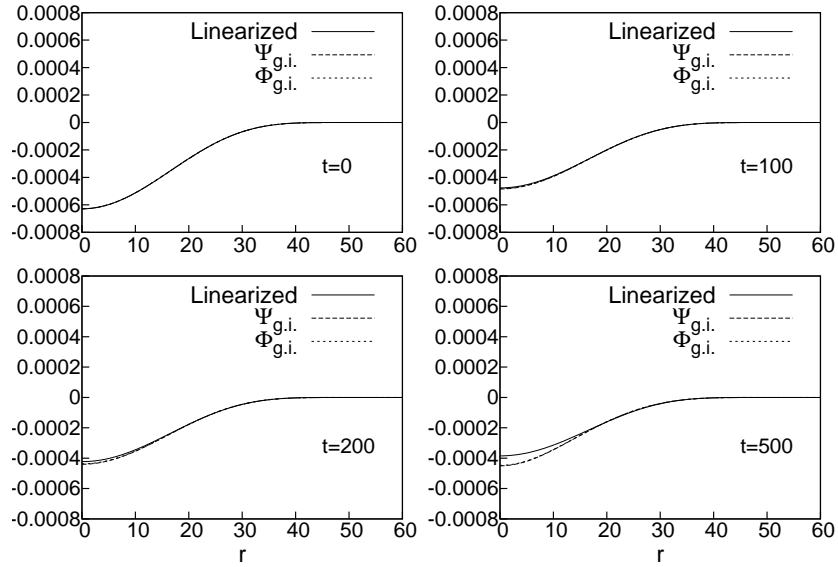


Figura 3.38: Similar a la Figura 3.36 para una configuración con $\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$, $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-7}$ y $L = 50$ en Eq. (3.87). Notar que, después de un tiempo de transición $t \sim 200$, las desviaciones respecto a los resultados linealizados se vuelven evidentes.

embargo, es interesante notar que los modelos de “sombbrero de copa” para formación de estructura sugieren que esta transición debería ocurrir cuando el contraste en la densidad es de orden $(\delta\rho_{\text{gauge}}/\bar{\rho})_{\text{max}} \sim 1.7$, que corresponde al momento en que el núcleo comienza a colapsar como un universo de Friedmann cerrado (ver la Sección 9.3 de [123]). Nuestros resultados muestran que, al menos para las condiciones iniciales aquí consideradas, esta transición ocurre por debajo de dicho valor.

3.4.4 Campo escalar masivo

En esta sección consideramos la evolución de un universo dominado por un campo escalar real (masivo) que satisface la ecuación de Klein-Gordon,

$$(\square - m^2)\varphi = 0. \quad (3.88)$$

En esta ecuación m es el “parámetro de masa” de la partícula escalar y tiene dimensiones de distancia inversa (es simplemente el número de onda asociado

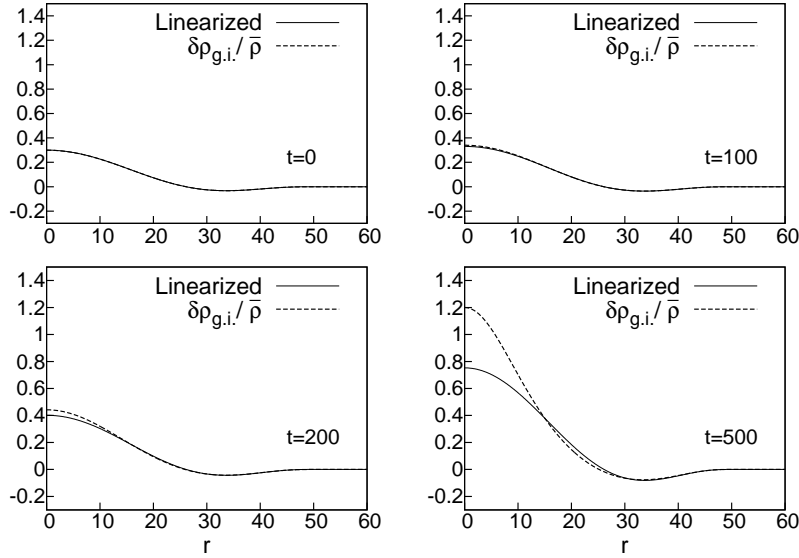


Figura 3.39: Similar a la Figura 3.37 pero para la configuración de la Figura 3.38. Notar de nuevo que, después de un período de transición $t \sim 200$, las desviaciones respecto a las predicciones de la teoría linealizada se hacen evidentes.

a la longitud Compton de la partícula escalar).³ El tensor de energía-momento asociado a un campo escalar real masivo y canónico, sin auto-interacción toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi + m^2\varphi^2). \quad (3.89)$$

Un campo escalar libre que oscila con frecuencia alta (comparado con la tasa de expansión del universo) alrededor de un mínimo de potencial ha sido considerado como un posible candidato para describir el contenido de materia oscura en el universo [75, 128, 125]. Al orden dominante en H/m , la densidad de energía de las oscilaciones coherentes decae con la expansión cosmológica como $\rho \sim 1/a^3$, con $a \sim \eta^2$ [75, 194, 8]. Las perturbaciones a orden lineal evolucionan como las correspondientes a un fluido perfecto sin presión, excepto por el hecho de que la dinámica del campo introduce un corte en el espectro de

³Si la partícula fundamental asociada con el campo escalar tiene masa μ , entonces $m = \mu c/\hbar = 1/\lambda_C$, con λ_C la longitud de onda Compton asociada, donde por claridad hemos escrito explícitamente la dependencia con la velocidad de la luz c . El parámetro de masa entonces provee una escala de longitud natural asociada al campo escalar.

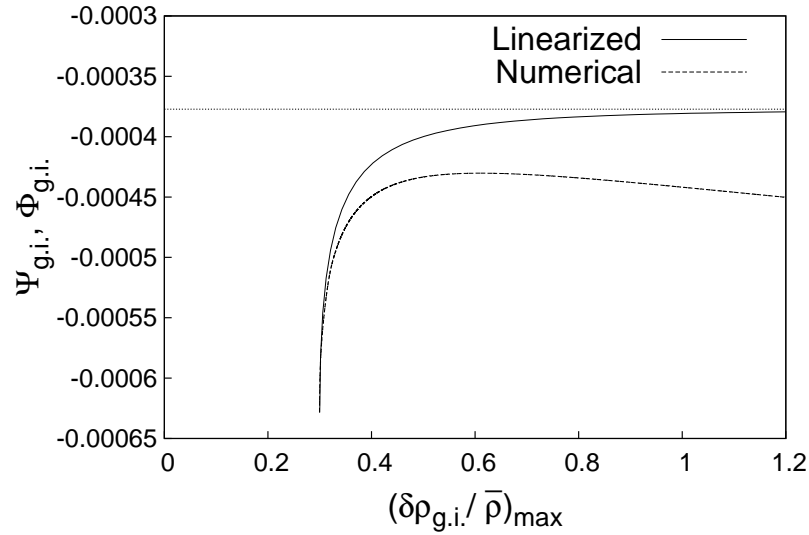


Figura 3.40: Valor central de los potenciales $\Psi_{g,i}$ y $\Phi_{g,i}$ como función del valor central del contraste en la densidad de energía. La línea segmentada corresponde a los resultados de la evolución numérica, mientras que la línea sólida muestra la predicción de la teoría linealizada. La línea punteada muestra el valor asintótico al que tiende la predicción de la teoría linealizada en el origen, $C_1(r=0)$.

potencias de las perturbaciones a la escala de la longitud de onda Compton de la partícula escalar, $\lambda_C \sim 1/m$, de manera que los modos con longitud de onda menor no crecen sino solamente se dispersan con amplitud decadente, como mostramos a continuación [8].

A fin de probar este escenario evolucionamos numéricamente datos iniciales cosmológicos tomando como contenido de materia un campo escalar, utilizando el mismo código que en la Sección 3.4.3. Para perturbaciones pequeñas se corrobora el resultado analítico obtenido a partir de la teoría linealizada. Más aún, cuando las perturbaciones alcanzan el régimen no lineal encontramos que, en general, crecen a un ritmo más lento que en el caso de polvo. Esto tendría repercusiones causando un retraso en la formación de las primeras estructuras en el universo.

Para tratar la evolución numérica del campo escalar reducimos la ecuación de Klein-Gordon a un sistema de primer orden al introducir las variables auxiliares $\Pi := n^\mu \partial_\mu \varphi$ y $\Theta_i := \partial_i \varphi$. La ecuación de Klein-Gordon puede ser entonces

escrita como el sistema

$$\partial_t \varphi - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \varphi = \alpha \Pi, \quad (3.90a)$$

$$\partial_t \Theta_i - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Theta_i = \partial_i(\alpha \Pi), \quad (3.90b)$$

$$\partial_t \Pi - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \Pi = \alpha \Pi K - \alpha m^2 \varphi + \nabla_i(\alpha \Theta^i). \quad (3.90c)$$

Estas ecuaciones se integran simultáneamente con las correspondientes a la geometría del espacio-tiempo. En términos de estas nuevas variables, las fuentes del campo gravitacional toman la forma

$$\rho = \frac{1}{2} (\Pi^2 + \Theta_m \Theta^m + m^2 \varphi^2), \quad (3.91a)$$

$$j_i = -\Pi \Theta_i, \quad (3.91b)$$

$$S_{ij} = \Theta_i \Theta_j + \frac{1}{2} (\Pi^2 - \Theta_m \Theta^m - m^2 \varphi^2) \gamma_{ij}. \quad (3.91c)$$

En nuestro caso particular estas expresiones se reducen ya que el vector Θ_i tiene únicamente componente radial.

Al igual que para el caso de fluido perfecto, no consideramos un vector de corrimiento, y como condición de foliación tomamos una del tipo Bona-Masso con $f = 0.3332$. Nuevamente, consideramos datos iniciales con densidad de momento nula al elegir $\Pi(t = t_0) = 0$. Bajo estas suposiciones los datos iniciales que se especifican libremente se reducen a

$$\rho(t = t_0, r) = \frac{1}{2} [(\psi_0^{-2} \Theta_{r0})^2 + m^2 \varphi_0^2], \quad (3.92a)$$

$$j_r(t = t_0, r) = 0, \quad (3.92b)$$

$$S_a(t = t_0, r) = \frac{1}{2} [(\psi_0^{-2} \Theta_{r0})^2 - m^2 \varphi_0^2], \quad (3.92c)$$

$$S_b(t = t_0, r) = \frac{1}{2} [-(\psi_0^{-2} \Theta_{r0})^2 - m^2 \varphi_0^2]. \quad (3.92d)$$

Notamos que para configuraciones homogéneas e isotrópicas, $\Theta_{r0} = 0$, y en-

tonces se recupera $S_{a0} = S_{b0}$.

A diferencia del caso de polvo analizando en la Sección 3.4.3, ahora no especificamos el perfil inicial de la densidad de energía, $\rho_0(r)$, sino el perfil inicial del campo escalar φ_0 . En particular, consideramos el dato inicial de la forma

$$\varphi_0(r) = \bar{\varphi}_0 + \delta\varphi_0(r), \quad (3.93a)$$

con

$$\delta\varphi_0(r) = \delta\varphi_* \left(1 - \frac{11r^2}{3L^2}\right) \left[\left(1 - \frac{r}{L}\right)\left(1 + \frac{r}{L}\right)\right]^3 \quad (3.93b)$$

para $0 < r < L$, y $\delta\varphi_0(r) = 0$ fuera de esta región. Nuevamente, el parámetro L representa la escala de longitud característica de la perturbación, mientras que $\delta\varphi_*$ mide la amplitud de la inhomogeneidad del campo escalar, ambas evaluadas a $t = t_0$. Notamos que ya que la contribución dominante a la perturbación en la densidad de energía es lineal en $\delta\varphi_0$, esta elección garantiza que a primer orden la perturbación en la densidad tendrá integral nula (a este nivel ignoramos el efecto de los términos no nulos de orden superior). La geometría consistente con esta distribución de materia se obtiene con el procedimiento expuesto en la Sección 3.4.1.

La Figura 3.41 muestra, para un campo escalar de masa $m = 1$ y parámetros iniciales $\bar{\varphi}_0 = 2 \times 10^{-3}$, $\delta\varphi_* = 0$, una comparación de la evolución del factor de escala obtenida con nuestra implementación numérica contra la solución analítica para un universo de Friedmann dominado por polvo, ecuación (3.81). Inicialmente esta configuración ya se ha asentado en un estado que oscila cerca del mínimo de potencial, y dirige la evolución del factor de escala de un modo que simula muy bien el comportamiento obtenido en el caso de polvo, la Figura 3.35 anterior. No obstante, a escalas de tiempo cortas hay oscilaciones pequeñas (de orden H/m) de las cantidades dinámicas alrededor de la solución de polvo. Estas oscilaciones se aprecian mejor en la evolución del factor de Hubble (mostrado en el panel inferior). Salvo estas oscilaciones, ambas soluciones coinciden a precisión numérica.

Para analizar el comportamiento de las perturbaciones pequeñas se consideraron dos escalas distintas, relativas a la longitud de onda Compton de la partícula escalar. Las perturbaciones de onda corta (con longitud característica de orden $L \lesssim 1/m$) están compuestas principalmente de modos más pequeños que la longitud de onda Compton. Estos modos se propagan libremente como un campo escalar masivo, y este tipo de perturbaciones no se espera que colapsen a menos que su amplitud inicial sea muy grande. Como un ejemplo de este comportamiento, en las Figuras 3.42 y 3.43 se muestra la evolución numérica de las perturbaciones invariantes de norma en el tensor métrico, Φ_{gauge} y Ψ_{gauge} , y el contraste en la densidad de energía, $\delta\rho_{\text{gauge}}/\bar{\rho}$, para un campo escalar caracterizado inicialmente por los parámetros $\bar{\varphi}_0 = 2 \times 10^{-3}$, $\delta\varphi_* = 10^{-5}$, y $L = 2$. Observamos que básicamente toda la perturbación se dispersa, dejando a $t = 24$ únicamente un pequeño remanente en las cantidades físicas que determinan las inhomogeneidades.

Por otro lado, las perturbaciones de mayor escala, con $L \gg 1/m$, tienen una contribución significativa de modos más grandes que la longitud de onda de Compton. Estos modos crecen de una manera muy similar a los correspondientes en un universo dominado por polvo [8]. En las figuras 3.44 y 3.45 se muestra, para datos iniciales con los mismos valores de $\bar{\varphi}_0$ y $\delta\varphi_*$ que en las figuras 3.42 y 3.43 pero con $L = 150$, la evolución de las perturbaciones invariantes de la métrica y el contraste en la densidad de energía, respectivamente, junto con la predicción de la teoría linearizada para el caso correspondiente con polvo. Notamos que en ambas figuras la evolución numérica para el caso del campo escalar coincide remarcablemente con la esperada para polvo.

Concluimos esta sección con una comparación del comportamiento no lineal de las perturbaciones, para el cual no existen resultados analíticos, para casos de un universo dominado por polvo y otro por campo escalar. A fin de comenzar en una situación claramente fuera del régimen lineal, consideramos datos iniciales tales que el valor de la densidad de energía en el origen es aproximadamente el doble que el correspondiente en la región asintótica. Para el caso de un universo regido por polvo asumimos los valores $\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$

y $\delta\rho_* = 2.38 \times 10^{-6}$ en la ecuación (3.87), mientras que para el campo escalar tomamos $\bar{\varphi}_0 = 2 \times 10^{-3}$ y $\varphi_* = 9.611 \times 10^{-4}$ en la ecuación (3.93). En ambos casos la inhomogeneidad tiene una escala de $L = 150$. Es notable que, ya que la situación comienza fuera del régimen no lineal, la construcción de los datos iniciales no resulta en el mismo perfil de densidad de energía para ambos casos. Sin embargo, las configuraciones construidas con estos valores son de hecho muy similares, lo suficiente para la comparación, (ver figura 3.46 para los detalles).

Los resultados presentados para este caso no corresponden directamente con los observados en el régimen lineal, ya que algunas de las cantidades usadas en ese caso no están ahora bien definidas. Esto ocurre ya que una vez que nos alejamos del régimen lineal, la dependencia con respecto a la foliación elegida se vuelven relevantes. La región asintótica sigue evolucionando como un fondo, siempre que se mantenga causalmente desconectada de las inhomogeneidades presentes en la región central, y entonces las cantidades medidas por observadores lejanos en reposo a este fondo asintótico son comunes a todos ellos. La pregunta que surge es cómo podemos comparar las propiedades del espacio-tiempo en la región central con respecto a las propiedades del fondo. Resulta que en simetría esférica uno puede considerar para este propósito las cantidades físicas medidas por un observador en el origen como función del tiempo propio, ya que la trayectoria de este observador en el espacio-tiempo resulta independiente de la norma por razones de simetría.

Basados en estas observaciones, para estudiar como colapsa la inhomogeneidad en la Figura 3.47 se muestra la evolución de la densidad de energía medida por los observadores Eulerianos como función del tiempo propio, evaluada tanto en el origen como en la frontera del dominio computacional. Inicialmente, la densidad de energía en el origen decae con una tasa similar en ambos casos de campo escalar y polvo, como consecuencia de la expansión del universo. Sin embargo, después de un tiempo la densidad de energía central alcanza un punto de retorno. Ambas configuraciones eventualmente pasan por una fase de colapso gravitacional, formando (pequeños) horizontes aparentes. Poco después estas simulaciones fallan tanto porque nuestra condición de foliación no

está bien adaptada para la evolución de espacio-tiempos con agujeros negros, y porque la resolución en las regiones centrales no es suficiente. En el caso del polvo el colapso procede directamente, mientras que para el campo escalar una vez que la densidad central crece el efecto de las oscilaciones locales domina de modo que el colapso en agujero negro se ve retrasado.⁴

También se muestra en la Figura 3.48 la evolución de la traza de la curvatura extrínseca en el origen, que codifica la expansión local de los elementos de volumen (una es proporcional al negativo de la otra). También se muestra el valor en la frontera para comparación, todas como función del tiempo propio. Nuestra prescripción de datos iniciales asume que la expansión es idéntica inicialmente en todo el dominio, pero tan pronto la evolución comienza la expansión central decrece más rápido en las regiones sobredensas. Sin embargo, después de un período de transición el efecto de nuestra condición de norma ocasiona que la expansión en la región central siga de cerca la evolución del fondo. Finalmente, una vez que las regiones centrales han alcanzado una etapa de colapso gravitacional total la expansión se desvía del valor de fondo y cambia de signo. Como ya se discutió previamente, para el caso de polvo esto lleva directamente a un agujero negro, pero en el caso del campo escalar el efecto de las oscilaciones locales se vuelve dominante como puede verse claramente en la figura.

3.4.5 Conclusiones

Mediante el formalismo usual de la relatividad numérica se estudió la evolución de escenarios cosmológicos con distribución inhomogénea y esféricamente simétrica de materia. Cuando las inhomogeneidades son pequeñas, tanto la densidad de energía de fondo como las perturbaciones a esta decrecen mientras el universo se expande, y solamente es el contraste en la densidad de energía la cantidad que crece. En nuestras simulaciones fuimos capaces de

⁴Aunque los detalles del colapso en agujero negro no fueron un objetivo de este trabajo, este tema presenta muchas razones de interés. Para este tipo de estudios es necesario encontrar mejores condiciones de foliación que se adapten tanto al fondo asintótico en expansión como a las regiones de colapso.

alcanzar y sobrepasar el llamado punto de retorno, donde los términos no-lineales dominan y las inhomogeneidades mismas comienzan a colapsar.

Se consideraron dos situaciones diferentes: un universo dominado por un fluido perfecto sin presión, *i.e.* polvo, y uno dominado por las oscilaciones coherentes de un campo escalar masivo alrededor del mínimo de potencial. En ambos casos la materia se describe en términos de una teoría (clásica) de campos y las simulaciones de N-cuerpos no son viables.

Para el caso de polvo existe una solución analítica bien conocida que describe el comportamiento del fondo homogéneo e isotrópico al igual que para las perturbaciones pequeñas, y hemos mostrado que nuestras evoluciones numéricas pueden reproducir esa solución con gran precisión. Para el caso de un universo dominado por un campo escalar no existen soluciones analíticas exactas. Sin embargo a tiempos tardíos, cuando el parámetro de masa del campo escalar es mucho mayor que el parámetro de Hubble, $m \gg H$, nuestras simulaciones numéricas muestran que el factor de escala oscila alrededor de la solución correspondiente al polvo, como se esperaba de estudios previos aproximados [75]. Estas oscilaciones tienen pequeña amplitud y alta frecuencia, y se atenúan con la expansión cosmológica.

Las perturbaciones lineales en el caso de un campo escalar real evolucionan de manera muy similar a las correspondientes al polvo, siempre que su extensión inicial sea más grande que la longitud de onda Compton de la partícula escalar, $\lambda_C = 1/m$. Por otra parte, las perturbaciones del campo escalar cuya extensión inicial es de orden λ_C o menor no crecen sino que se propagan libremente con amplitud decadente. Esto introduce un corte en el espectro de potencias del campo escalar, como ha sido señalado previamente por otros autores en *e.g.* Refs. [152, 110, 127, 128, 125]. Una vez en el régimen no lineal, en el caso de polvo la inhomogeneidad inicial simplemente continua colapsando bajo la influencia de su propia gravedad hasta que se forma un agujero negro. Para el caso de campo escalar este colapso final procede de manera diferente: una vez que la densidad central crece lo suficiente, las oscilaciones locales del campo dominan y el colapso en agujero negro se retrasa.

Los resultados de este trabajo soportan la idea de que al considerar las excitaciones coherentes de un campo escalar como candidato a materia oscura es posible recuperar formación estructura cosmológica a gran escala similar a la que se obtiene con el modelo de materia oscura fría estándar (CDM). Algunas diferencias se observan, precisamente las relacionadas al corte finito a escalas chicas, oscilaciones temporales pequeñas en el factor de escala, y la fase final del colapso gravitacional, lo que puede tener consecuencias observacionales.

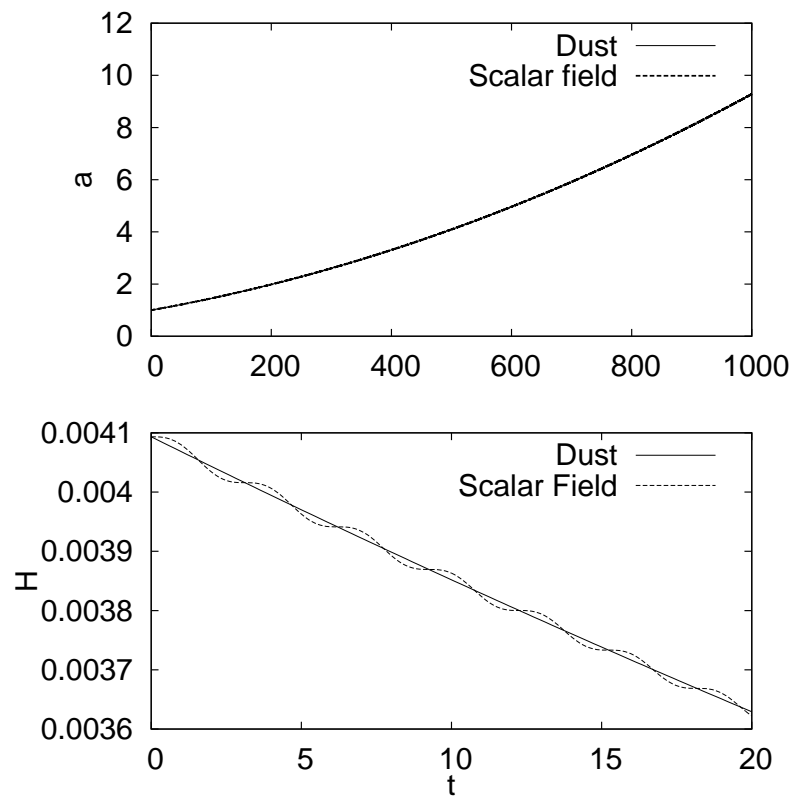


Figura 3.41: Evolución del factor de escala a_{sc} (panel superior) y parámetro de Hubble H (panel inferior), como funciones del tiempo coordenado t , para un universo homogéneo e isotrópico en expansión dominado por las oscilaciones coherentes de un campo escalar masivo (línea segmentada). En este caso elegimos $\varphi_0 = 2 \times 10^{-3}$ y $\delta\varphi_* = 0$ a fin de tener la misma configuración inicial que en la Figura 3.35. También mostramos la expresión analítica para el caso de polvo, Eq. (3.81) (línea sólida). La escala se amplía cerca del origen en el panel inferior a fin de distinguir las oscilaciones en un universo que contiene campo escalar.

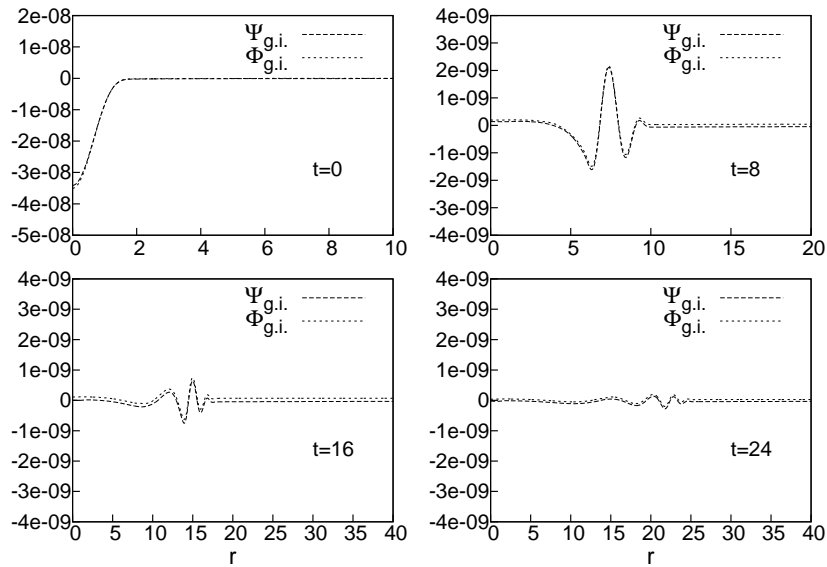


Figura 3.42: Instantáneas de la evolución de las perturbaciones invariantes de norma del tensor métrico, Φ_{gauge} y Ψ_{gauge} , como función de la coordenada radial comóvil, r , en diferentes instantes de la evolución cósmica. Se eligieron datos iniciales de la forma en Eq. (3.93) con $\bar{\varphi}_0 = 2.0 \times 10^{-3}$, $\delta\varphi_* = 10^{-5}$, y $L = 2$. Nótese que la inhomogeneidad está compuesta principalmente de modos de onda corta que se dispersan.

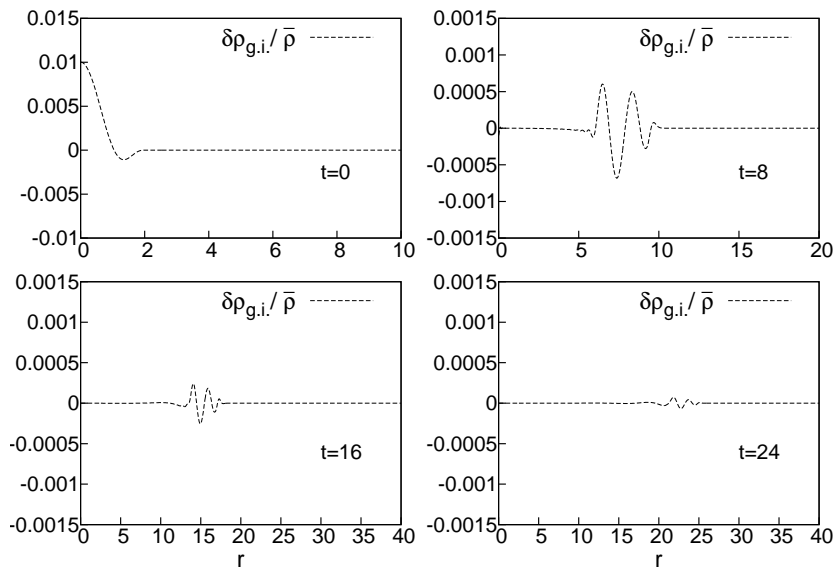


Figura 3.43: Instantáneas del contraste en la densidad de energía, $\delta\rho_{\text{gauge}}/\bar{\rho}$, para la configuración de la Figura 3.42.

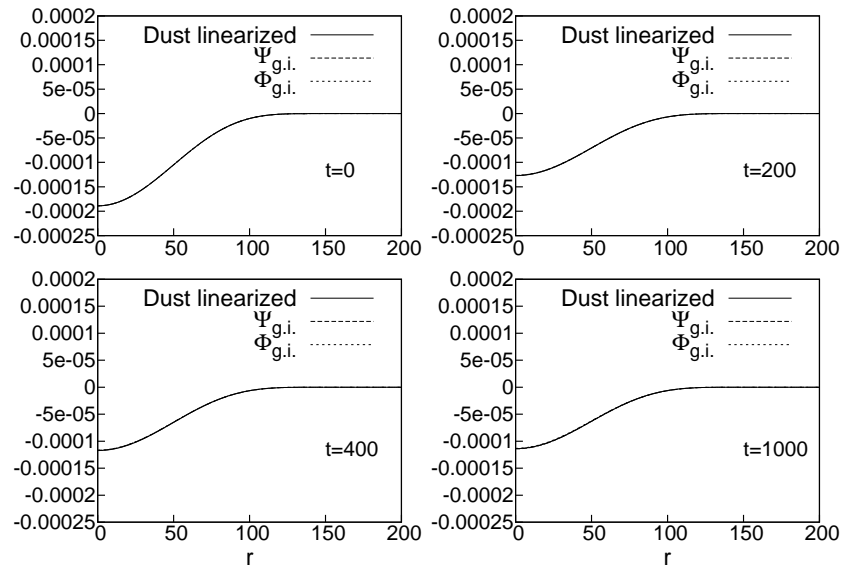


Figura 3.44: Similar a la Figura 3.42 pero considerando una configuración con $L = 150$. Mostramos los resultados de la evolución numérica de las cantidades invariantes de norma $\Psi_{g.i.}$ (línea segmentada) y $\Phi_{g.i.}$ (línea punteada), junto con la solución obtenida en el régimen lineal para el caso en que el contenido es polvo, Eq. (3.82a) (línea sólida).

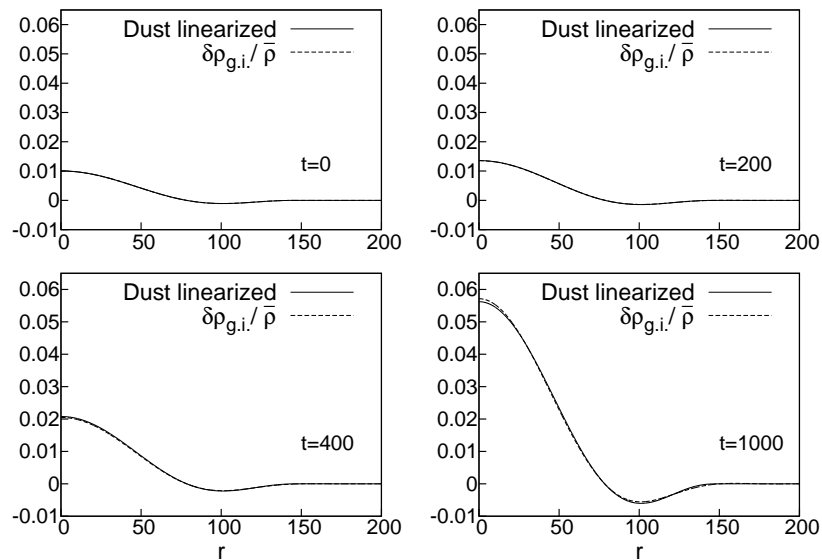


Figura 3.45: Similar a la Figura 3.43 ahora considerando $L = 150$. Mostramos los resultados de la evolución numérica del contraste en la densidad de energía (línea segmentada), simultáneamente con la solución analítica para la misma configuración compuesta por polvo, Eq. (3.82b) (línea sólida).

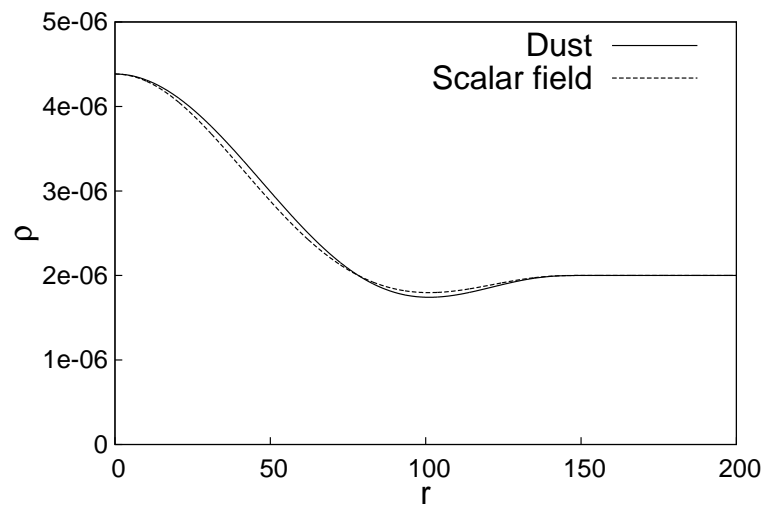


Figura 3.46: Perfiles de densidad iniciales para las simulaciones que empiezan fuera del régimen lineal, Figuras 3.47 y 3.48 a continuación. Los parámetros fueron ajustados para tener inicialmente el mismo valor central de la densidad de energía en ambos casos, tanto polvo (línea sólida) y campo escalar (línea segmentada).

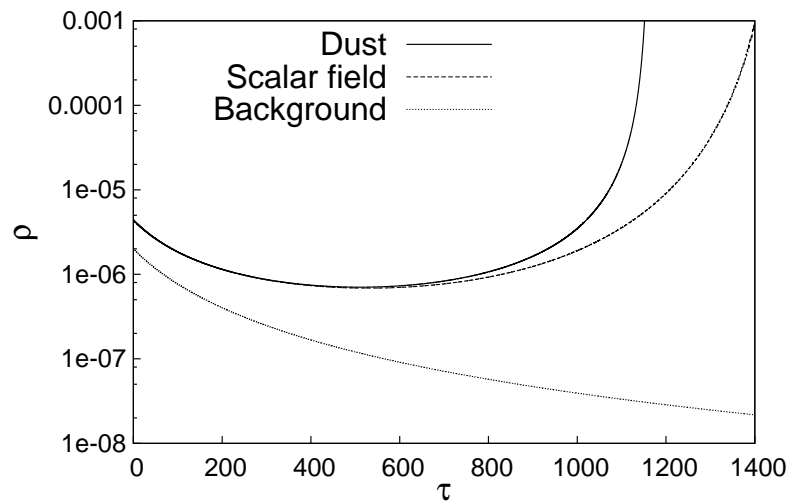


Figura 3.47: Evolución del valor central de la densidad de energía medida por los observadores Eulerianos en función del tiempo propio τ , para un universo dominado por polvo (línea sólida) y otro dominado por un campo escalar (línea segmentada). Para comparación también mostramos la evolución de la densidad de energía en la frontera del dominio (línea punteada). En ambos casos el valor central de la densidad de energía se desvía de la evolución en la región asintótica, alcanzando un punto de retorno para dar paso al colapso total. Mientras, la región asintótica evoluciona como un fondo homogéneo durante el tiempo total de simulación.

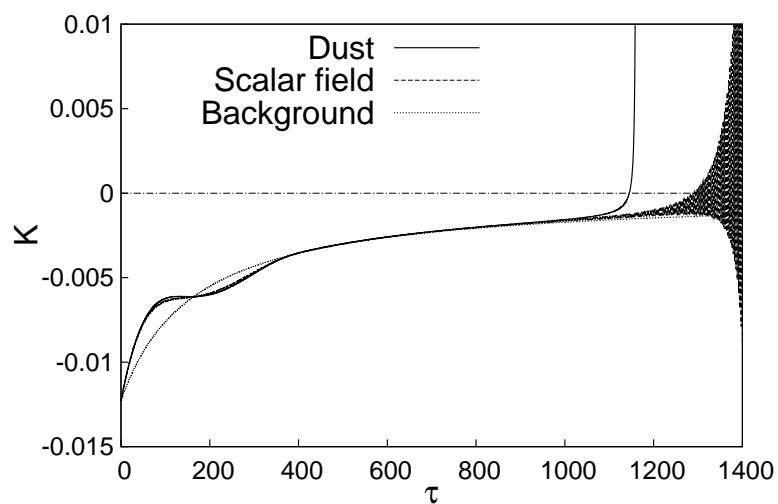


Figura 3.48: Valor central de la traza de la curvatura extrínseca K (esencialmente el negativo de la expansión) como función del tiempo propio tanto para polvo (línea sólida) y campo escalar (línea segmentada). Para comparación también se incluye el valor en la frontera (línea punteada). Después de un período de transición durante el cual los efectos locales dominan, el valor local de la expansión regresa al valor asintótico para después desviarse dramáticamente al alcanzar un estado de colapso total.

Capítulo 4

Escenarios en simetría axial

Cuando nos enfocamos en el estudio de sistemas aislados nos encontramos con que los estados estacionarios presentan simetría axial. Esto es suficiente motivación para el estudio de sistemas en los que la simetría axial está presente en toda la dinámica, y resulta que en muchos casos astrofísicos interesantes esta es una muy buena aproximación a la dinámica global. En el contexto de la Relatividad Numérica, los trabajos pioneros en el uso de técnicas computacionales comenzaron en 1964 cuando Hahn y Lindquist intentaron llevar a cabo la simulación de la colisión frontal de dos agujeros negros¹ en un escenario axisimétrico. Este problema fue retomado subsecuentemente (Smarr y Eppley, etc.) y fue el motor de los avances en esta rama hasta que en 1993 fue desarrollado exitosamente (Anninos et. al.). Con el crecimiento exponencial del poder de cómputo desde entonces se ha hecho viable la simulación de sistemas tridimensionales y en general se dejó de lado el estudio de sistemas axisimétricos, pero no por ser menos interesantes sino por que la complejidad de estos es comparable y porque poseen patologías que no están presentes al considerar sistemas tridimensionales². No obstante la pérdida de interés en la década de

¹Cabe notar que este estudio fue demasiado precóz en el sentido de que incluso el término *agujero negro* aún no era concebido en ese tiempo (por Wheeler en 1967) y la formulación de las ecuaciones de evolución como un problema de valores iniciales estaba a 16 años de conocerse como hoy en día (York 1979).

²Por otro lado, la formulación usual en tres dimensiones no presenta un problema bien puesto, pero la identificación y solución de esta cuestión tomó menos tiempo que resolver satisfactoriamente la colisión frontal en axisimetría.

1990, algunos esfuerzos por retomar el estudio de sistemas axisimétricos se han realizado [66, 158, 161, 71], fundamentados en la descomposición de espacios con simetrías propuesta por Geroch [93] (recientemente se publicó una formulación que no usa esta descomposición, pero utiliza un método espectral junto con una elección de norma particular [172]). En este contexto cuando se tiene un espaciotiempo con una simetría codificada en un vector de Killing, la dinámica se describe de un modo totalmente equivalente en un espacio de dimensionalidad menor, en el que el vector de Killing puede reinterpretarse como términos efectivos de materia. Entonces al aplicar esta idea a espacio-tiempos axisimétricos uno puede estudiarlos equivalentemente como un espacio de dimensión $2+1$ y al usar el formalismo ADM-York en este último se obtiene la llamada “formulación $(2+1)+1$ ”. La motivación principal para el uso de esta formulación consiste en la conjetura de que al eliminar la dirección angular mediante una reducción dimensional, las patologías coordinadas inherentes a esta desaparecen y es posible hacer simulaciones con las mismas consideraciones que en el caso tridimensional. Esta conjetura es falsa ya que uno puede ver que las patologías únicamente se enmascaran en los campos de materia inducidos, pero utilizando métodos de regularización adecuados esta formulación ha resultado exitosa en la práctica.

Actualmente existen problemas abiertos interesantes en torno a los espacio-tiempos axisimétricos [71]. Algunos de los que encabezan la lista son el estudio del colapso de ondas gravitacionales [81, 2, 5, 91, 159, 185, 105], colisiones frontales de agujeros negros cargados [206, 207] [102, 73, 60] y estudios detallados de la dinámica de agujeros negros rotantes [46, 208]. Ante esta gama de problemas abiertos es entendible la viabilidad de un formalismo que permita hacer estudios de este tipo de un modo eficiente.

Uno de los objetivos fundamentales de esta tesis fue el retomar el estudio numérico de escenarios axisimétricos. Dado que la formulación usual no remueve las patologías asociadas a estos y requiere de la introducción de un espacio de configuración efectivo que posteriormente hay que asociarlo al espacio físico de algún modo, el enfoque que aquí se presenta es totalmente análogo al usado en el caso esféricamente simétrico en el capítulo anterior. De

esta manera es posible adaptar la formulación BSSN usual al caso axisimétrico y trabajar directamente en el espacio físico. Usando las mismas ideas es posible obtener un sistema regular en el eje, que resulta ser altamente robusto. El resultado más importante en esta dirección a la fecha es que se ha logrado reproducir la colisión frontal de agujeros negros de manera estable y a largo plazo incluso cuando estos poseen carga eléctrica. El resto del capítulo se desglosa en la derivación de la formulación BSSN axisimétrica y su regularización en el eje, la descripción del código `011inAxis2` desarrollado con este fin; exhibir los resultados obtenidos con este código incluyendo la colisión frontal de agujeros negros cargados, y se finaliza con los desarrollos teóricos para incluir mejoras al código actual.

Generalidades

Primeramente, por espacio-tiempo axisimétrico entendemos a aquel que posee un vector de Killing espacial $\vec{\xi}$ cuyas curvas integrales son cerradas de modo que puede foliarse topológicamente como $S_1 \times \bar{\mathcal{M}}$ con $\bar{\mathcal{M}}$ una subvariedad tridimensional con signatura Lorentziana. Podemos utilizar este vector para definir un sistema de referencia adaptado con una coordenada angular ϕ tal que $\vec{\xi} = \partial_\phi$, de modo que en componentes $\xi^\mu = \delta_\phi^\mu$. Se dice que una función tensorial es axisimétrica si su derivada de Lie respecto a ξ es nula, lo que es equivalente a que sea independiente de la coordenada ϕ . Podemos construir un sistema de coordenadas cilíndrico haciendo uso de esta coordenada, las otras coordenadas forman una malla cartesiana para ϕ constante, denotando por r la distancia al eje³, y otra coordenada z que completa la malla. Esto representa un incremento en la eficiencia en tanto a los recursos computacionales utilizados al reducirse la malla efectiva sobre la que se representa el sistema. A diferencia del caso esféricamente simétrico, el asumir este tipo de simetría no reduce necesariamente el número de variables dinámicas por lo que el análisis en este caso es más próximo al caso tridimensional sin simetrías que al primero. Sin embargo existe una simplificación con la cual el número de variables dinámicas

³En este capítulo usaremos la coordenada r que en el caso plano coincide con la distancia al eje, y la coordenada radial en relación al origen de un sistema esférico la denotamos R

efectivamente se reduce, que es propiamente el caso en que el momento angular localmente se anula; para este caso la métrica espacial posee solo cuatro componentes independientes y los campos vectoriales únicamente dos componentes distintas de cero (el campo electromagnético es más delicado, pues no es trivial ver que para este el número de grados de libertad se reduce a la mitad). Este caso particular es el que podemos ubicar como intermedio entre las simulaciones en simetría esférica y las simulaciones tridimensionales.

En [160] se muestra que en un espacio regular y axisimétrico los distintos tipos de tensores adquieren formas características al expresarse en coordenadas cilíndricas. En particular la métrica puede ser escrita como

$$dl^2 = A dr^2 + B dz^2 + r^2 H d\phi^2 + 2(r C dr dz + r^3 C_1 dr d\phi + r^2 C_2 dz d\phi), \quad (4.1)$$

donde A, B, H, C, C_1, C_2 son funciones pares de r cerca del origen. Se toma para nombrar a estas funciones una convención similar a la usada en [166], y tiene la particularidad de que los términos cruzados están representados por funciones "C" de las cuales aquellas con subíndice caracterizan la ortogonalidad de los planos de ϕ constante con el campo rotacional de Killing. Esta dependencia es característica para cualquier tensor covariante simétrico. Este tipo de dependencia implica que la base coordenada $\{\partial_a\}$ es ortogonal en el eje. Podemos encontrar directamente el comportamiento del tensor métrico contravariante calculándolo como la matriz inversa, en este caso encontramos

$$\gamma^{ij} = \begin{pmatrix} g_A & r g_C & r g_{C_1} \\ r g_C & g_B & g_{C_2} \\ r g_{C_1} & g_{C_2} & g_H / r^2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

donde las funciones g son pares cerca del eje. Las expresiones explícitas para las funciones g se dan en el apéndice E, pero es suficiente para el análisis a continuación expresar la métrica contravariante en términos de estas funciones.

Como todos los tensores covariantes y simétricos toman la misma forma alrededor del eje, podemos utilizar este hecho para introducir una notación en términos de las funciones asociadas a los coeficientes métricos: Un tensor con

una de estas funciones como subíndice se refiere a realizar la misma operación algebraica que se hace para obtener dicha función, pero sustituyendo las componentes métricas por las del tensor en cuestión. Por ejemplo, de este modo podemos expresar el tensor de curvatura extrínseca como

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} K_A & r K_C & r^3 K_{C_1} \\ r K_C & K_B & r^2 K_{C_2} \\ r^3 K_{C_1} & r^2 K_{C_2} & r^2 K_H \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

de este modo vemos que cada componente tensorial M_{ij} tiene una función asociada $M_F = M_{ij}/r^{n_F}$ donde n_F es el exponente del factor r que aparece frente a cada componente. Con esta notación solo hemos renombrado y reescalado las componentes métricas pero tiene un alcance más general que se explotará más adelante.

4.1 Sistema BSSN Generalizado en simetría axial

Por el tipo de reescalamiento conforme usado en la formulación BSSN tanto la métrica física como la conforme tienen el mismo comportamiento en el origen. No se pierde generalidad entonces si imponemos las condiciones de regularidad directamente sobre la métrica conforme. De este modo el elemento de línea queda:

$$dl^2 = e^{4\phi} \left(A dr^2 + B dz^2 + r^2 H d\varphi^2 + 2(r C dr dz + r^3 C_1 dx d\varphi + r^2 C_2 dz d\varphi) \right). \quad (4.4)$$

Para nombrar a las distintas funciones métricas $F\{A, B, H, C, C_1, C_2\}$ de manera abstracta se usarán como subíndices de la métrica $\hat{\gamma}_F$. Las funciones asociadas a la métrica física son entonces $\gamma_F := e^{4\phi} \hat{\gamma}_F$. En esta última expresión denotamos al ángulo azimuthal por φ para distinguirlo del factor conforme que en la literatura se escribe como $e^{4\phi}$. Esto no generará ambigüedad ya que en la discusión

subsecuente la coordenada azimuthal no aparecerá explícitamente más que cuando se use como índice. Definimos por el momento una variable auxiliar:

$$\lambda := \frac{A - H}{r^2}, \quad (4.5)$$

que puede verse como una abreviatura, pero juega un papel importante en la regularización en el eje. Del mismo modo, para cualquier tensor T_{ij} de rango 2 definimos $T_\lambda := (T_{rr} - T_{\phi\phi}/r^2)/r^2$ de modo que se imita la definición de λ .

Las componentes de la curvatura extrínseca sin traza se pueden descomponer de manera análoga a (4.3)

$$\hat{A}_F = e^{-4\phi} \left(K_F - \frac{1}{3} \gamma_F K \right) = e^{-4\phi} K_F - \frac{1}{3} \hat{\gamma}_F K. \quad (4.6)$$

En términos de estas funciones, el determinante de la métrica conforme queda escrito explícitamente como

$$\hat{\gamma} = r^2 \left(ABH + 2r^4 CC_1 C_2 - r^2 AC_2^2 - r^2 HC^2 - r^4 BC_1^2 \right), \quad (4.7)$$

el factor r^2 puede ser visto como el determinante de la métrica auxiliar plana y su presencia es debida únicamente al sistema de coordenadas empleado. Podemos definir una cantidad asociada al elemento de volúmen conforme, independiente de las coordenadas tomando el cociente

$$\mathfrak{h} := \frac{\hat{\gamma}}{\gamma} = \left(ABH + 2r^4 CC_1 C_2 - r^2 AC_2^2 - r^2 HC^2 - r^4 BC_1^2 \right). \quad (4.8)$$

Como última consideración tenemos que las constricciones adicionales de la formulación BSSN derivadas de la introducción del vector auxiliar $\hat{\Delta}^i$ quedan

explícitamente:

$$\hat{\Delta}^r = -\partial_r g_A - r\partial_z g_C + r g_\lambda - \frac{1}{2\mathfrak{h}}(g_A \partial_r \mathfrak{h} + r g_C \partial_z \mathfrak{h}), \quad (4.9a)$$

$$\hat{\Delta}^z = -r\partial_r g_C - \partial_z g_B - 2g_C - \frac{1}{2\mathfrak{h}}(r g_C \partial_r \mathfrak{h} + g_B \partial_z \mathfrak{h}), \quad (4.9b)$$

$$\hat{\Delta}^\phi = -r\partial_r g_{C1} - \partial_z g_{C2} - 4g_H - \frac{1}{2\mathfrak{h}}(r g_{C1} \partial_r \mathfrak{h} + g_{C2} \partial_z \mathfrak{h}). \quad (4.9c)$$

En las expresiones (4.9a) introducimos la abreviatura $g_\lambda := (g_A - g_H)/r^2$.

4.1.1 Ecuaciones de Evolución

El sistema de ecuaciones de evolución se obtiene a partir de las ecuaciones del sistema BSSN expuesto en la Sección 1.3.3, al reescribirlas en términos de las funciones métricas A, B, \dots , etc., y las asociadas a la curvatura extrínseca $\hat{A}_A, \hat{A}_B, \dots$, etc. A continuación se muestra el sistema resultante.

Las características del elemento de volumen conforme quedan codificadas en la función \mathfrak{h} , de modo que el tipo de evolución (Euleriana o Lagrangiana) impacta directamente el comportamiento de esta función:

$$\partial_t \mathfrak{h} = (1 - \sigma) (2\mathfrak{h} \hat{\nabla}_m \beta^m), \quad (4.10)$$

con σ en principio libre de modo que la evolución puede ser de tipo Lagrangiano ($\sigma = 1$) o Euleriano ($\sigma = 0$). Esta ecuación no es independiente del resto, pero la elección tomada se refleja en la forma final de las mismas. Para concretar, tenemos que la divergencia conforme del vector de corrimiento queda explícitamente:

$$\hat{\nabla}_m \beta^m = \partial_m \beta^m + \frac{\beta^r}{r} + \frac{1}{2} \beta^m \partial_m (\ln \mathfrak{h}). \quad (4.11)$$

La ecuación de evolución del factor conforme al estar en términos de escalares es idéntica independientemente del número de dimensiones. De este modo

tenemos

$$\partial_t \phi = \beta^m \partial_m \phi - \frac{1}{6} \alpha K + \frac{1}{6} \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m. \quad (4.12)$$

Las ecuaciones para las funciones métricas se obtienen a partir de las de las componentes, por lo que los términos advectivos se ven modificados

$$\partial_t \hat{\gamma}_F = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{\gamma}_F - 2\alpha \hat{A}_F - \frac{2}{3} \sigma \hat{\gamma}_F \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (4.13)$$

considerando para el cálculo de las derivadas de Lie en la dirección $\vec{\beta}$ que las funciones $\hat{\gamma}_F$ son componentes de densidades tensoriales. Las expresiones explícitas de los términos advectivos se muestran en el apéndice F.

La ecuación de evolución de la traza de la curvatura extrínseca (1.66d) esta dada en términos de auténticos escalares. La reescribimos por completez

$$\partial_t K = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} K - D^2 \alpha + \alpha \left(\hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} - \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi \alpha (\rho + S), \quad (4.14)$$

En este caso el laplaciano físico toma la forma:

$$\begin{aligned} D^2 \alpha = & \frac{1}{e^{4\phi}} \left[g_A \partial_r^2 \alpha + 2r g_C \partial_r \partial_z \alpha + g_B \partial_z^2 \alpha + g_H \frac{\partial_r \alpha}{r} - \hat{\Delta}^i \partial_i \alpha \right. \\ & \left. + 2(g_A \partial_r \alpha \partial_r \phi + r g_C \partial_r \alpha \partial_z \phi + r g_C \partial_z \alpha \partial_r \phi + g_B \partial_z \alpha \partial_z \phi) \right]. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Para la parte sin traza de la curvatura extrínseca tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{A}_F = & \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{A}_F + \frac{1}{e^{4\phi}} \left(-(DD\alpha)_F + \alpha R_F - 8\pi \alpha S_F \right) \\ & - \frac{\hat{\gamma}_F}{3} \left(-D^2 \alpha + \alpha R - 8\pi \alpha S \right) + \alpha \left(K \hat{A}_F - 2 \hat{A}_F^2 \right) \\ & - \frac{2}{3} \sigma \hat{A}_F \hat{\nabla}_m \beta^m, \quad (4.16) \end{aligned}$$

donde $(\hat{A}^2)_{ij} := \hat{A}_{ik} \hat{A}_j^k$ y la segunda derivada covariante del lapso se toma res-

pecto a la métrica física

$$D_i D_j \alpha = \partial_i \partial_j \alpha - \hat{\Gamma}_{ij}^m \partial_m \alpha - 2 \left[\partial_i \alpha \partial_j \phi + \partial_i \phi \partial_j \alpha - \hat{\gamma}_{ij} \left(g_A \partial_r \alpha \partial_r \phi + r g_C \partial_r \alpha \partial_z \phi + r g_C \partial_z \alpha \partial_r \phi + g_B \partial_z \alpha \partial_z \phi \right) \right]. \quad (4.17)$$

Por último la ecuación para el vector construido con las funciones de conexión, $\hat{\Delta}^i$, queda dada por:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^i &= \epsilon_{\hat{\beta}} \hat{\Delta}^i + \hat{\gamma}^{mn} \hat{\nabla}_m \hat{\nabla}_n \beta^i - 2 \hat{A}^{im} \partial_m \alpha - \alpha (2 - \xi) \hat{\nabla}_m \hat{A}^{im} + 2 \alpha \hat{A}^{mn} \hat{\Delta}_{mn}^i \\ &+ \alpha \xi \left(6 \hat{A}^{im} \partial_m \phi - \frac{2}{3} \hat{\gamma}^{im} \partial_m K - 8 \pi \hat{\gamma}^{im} j_m \right) \\ &+ \frac{\sigma}{3} \left[\hat{\nabla}^i (\hat{\nabla}_m \beta^m) + 2 \hat{\Delta}^i \hat{\nabla}_m \beta^m \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

con $\xi > 1/2$ en general para que el sistema sea fuertemente hiperbólico. En particular, para el caso estándar, $\xi = 2$, el término que involucra la divergencia de la parte sin traza de la curvatura extrínseca se anula, simplificando mucho la implementación y el análisis; no obstante para el caso general es necesario considerarlo y es conveniente reescribir esta expresión como:

$$\hat{\nabla}_j \hat{A}^{ij} = \hat{\gamma}^{im} \hat{\gamma}^{jn} \hat{\nabla}_j \hat{A}_{mn} - \hat{A}_m^i \hat{\Delta}^m + \hat{A}_n^m \hat{\nabla}_m \hat{\gamma}^{in} + \hat{\Delta}_{mn}^i \hat{A}^{mn}. \quad (4.19)$$

Las ecuaciones (4.16) y (4.18) son demasiado elaboradas y no se pretende mostrar explícitamente el desarrollo de los términos. Igualmente, no ocurre ninguna simplificación particular en las ecuaciones de constricción de la formulación, lo único que nos concierne es calcularlas en términos de las variables asociadas al sistema axisimétrico y esto resulta en expresiones extensas y poco ilustrativas. No obstante, el cálculo es directamente implementable mediante programas de álgebra computacional, tomando en cuenta todas las consideraciones anteriores. En el apéndice G se incluyen scripts para el cálculo en Maple.

Una última observación es la reducción para el caso sin rotación. En este caso las funciones métricas angulares C_1 y C_2 son nulas. En general los tensores de segundo rango, incluido el tensor de Ricci, toman una forma similar en las que las componentes *angulares-mixtas* se anulan. Si se toma un vector de corrimiento con componente angular β^ϕ nula entonces las ecuaciones de evolución implican que tanto la métrica como la curvatura extrínseca mantendrán la misma forma durante toda la evolución. Es esto lo que nos permite considerar un sistema mucho más reducido en este caso, que se refleja en el cálculo mucho más eficiente de las fuentes de las ecuaciones de evolución.

4.1.2 Regularización en el eje ($r = 0$)

El sistema de coordenadas cilíndricas es patológico en el eje y esto se manifiesta con la aparición de términos con potencias negativas de r en el sistema de ecuaciones, lo cual se observa explícitamente en la definición de $\hat{\Delta}^r$. Por regularidad del espacio-tiempo estas contribuciones irregulares se han de anular analíticamente, pero a nivel numérico esto no necesariamente ocurre y es fuente de problemas.

Haciendo el cálculo inmediato se encuentran términos multiplicados por potencias inversas de r . Haciendo un análisis cuidadoso es posible manipular la mayoría de los términos para cancelar estos factores utilizando las identidades derivadas en el Apéndice E. Este análisis también toma en cuenta que los campos vectoriales regulares cerca del origen tienen un comportamiento del tipo [161]:

$$\begin{aligned} v^r &\sim rW, \\ v^\theta &\sim X, \\ v^\phi &\sim Y. \end{aligned}$$

Con W, X, Y funciones regulares. Aún así encontramos algunos términos aparentemente irregulares que bajo estas consideraciones no se cancelan automáticamente, y notoriamente son muy pocos en comparación a la cantidad

de términos que aparecen en las ecuaciones de evolución. Podemos enlistarlos obteniendo

$$\begin{aligned}
\hat{R}_A &: \frac{A-H}{r^2} g_H (2H g_H - 1), \\
\hat{R}_H &: -g_H g_A H \frac{A-H}{r^2}, \\
\hat{R}_C &: \frac{A-H}{2r^2} g_H^2 \partial_z H, \\
\hat{R}_{C_1} &: \frac{A-H}{r^2} \left[\frac{1}{2} g_{C_2} g_A \partial_z A - g_H g_A C_1 \right], \\
\hat{R}_{C_2} &: -\frac{A-H}{r^2} g_A g_H C_2. \\
\hat{R} &: -\frac{A-H}{r^2} g_H g_A (1 - g_H H), \\
\hat{V}_m \hat{A}_r^m &: \frac{1}{r} \left[g_A (\hat{A}_A - \hat{A}_H) + \hat{A}_H (g_A - g_H) \right] \\
\hat{A}^{mn} \hat{\Delta}_{mn}^r &: -\frac{g_H^2}{r} H \hat{A}_H (g_A - g_H)
\end{aligned}$$

Todos estos términos son proporcionales a las combinaciones $A - H$ y $\hat{A}_A - \hat{A}_H$ (en el Apéndice E se muestra que la combinación $g_A - g_H$ puede reescribirse como $A - H$ más términos proporcionales a r^2). Para un espacio localmente plano estas combinaciones son de orden $\mathcal{O}(r^2)$ en el eje, por lo que analíticamente son regulares. Para imponer esta condición consistentemente consideramos a las variables auxiliares

$$\lambda := \frac{A-H}{r^2}, \quad (4.20a)$$

$$\hat{A}_\lambda := \frac{\hat{A}_A - \hat{A}_H}{r^2}. \quad (4.20b)$$

como variables independientes del sistema. Por consistencia consideramos un comportamiento par respecto a r . Naturalmente esto introduce las definiciones como un par de constricciones adicionales al sistema, que han de satisfacerse a datos iniciales y en una evolución libre solo se violarán de manera consistente

con el error de discretización.

Para completar el algoritmo de regularización derivamos las ecuaciones de evolución para λ y \hat{A}_λ , y las escribimos de modo que sean explícitamente regulares en el origen. Para λ se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t \lambda = & \beta^m \partial_m \lambda + 2\lambda \frac{\beta^r}{r} + 2\lambda \partial_r \beta^r + 2\frac{H}{r} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) \\ & + 2C \frac{\partial_r \beta^z}{r} + 2rC_1 \partial_r \beta^\phi - 2\alpha \hat{A}_\lambda - \frac{2}{3} \sigma \lambda \hat{\nabla}_m \beta^m, \end{aligned} \quad (4.21)$$

y la ecuación para \hat{A}_λ queda

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{A}_\lambda = & \beta^m \partial_m \hat{A}_\lambda + 2\hat{A}_\lambda \partial_r \beta^r + 2\hat{A}_\lambda \frac{\beta^r}{r} + 2\frac{\hat{A}_H}{r} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) + 2\hat{A}_C \frac{\partial_r \beta^z}{r} \\ & + 2r\hat{A}_{C_1} \partial_r \beta^\phi + \frac{1}{e^{4\phi}} (-DD_\lambda \alpha + \alpha R_\lambda - 8\pi \alpha S_\lambda) \\ & - \frac{\lambda}{3} (-D^2 \alpha + \alpha R - 8\pi \alpha S) \\ & + \alpha (K\hat{A}_\lambda - 2\hat{A}_\lambda^2) - \frac{2}{3} \sigma \hat{A}_\lambda \hat{\nabla}_m \beta^m. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas expresiones son idénticas a las ecuaciones de evolución anteriores sustituyendo el índice por λ , pero es posible verificar que en este caso la ecuación para \hat{A}_λ contiene únicamente términos que son explícitamente regulares. Es necesario tener cuidado especial con los términos de la forma $\partial_r(f/r)$ con $f \sim \mathcal{O}(r)$. Tras agrupar convenientemente los términos, la ecuación para \hat{A}_λ queda entonces

$$\partial_t \hat{A}_\lambda = \frac{2\hat{A}_H}{r} \partial_r \left(\frac{\beta^r}{r} \right) + \frac{1}{re^{4\phi}} \left[\alpha H \partial_r \left(\frac{\hat{\Delta}^r}{r} \right) - 2\alpha \partial_r \left(\frac{\partial_r \phi}{r} \right) - \partial_r \left(\frac{\partial_r \alpha}{r} \right) \right] + \mathcal{F}_\lambda, \quad (4.23)$$

donde \mathcal{F}_λ representa los términos explícitamente regulares.

4.1.3 Análisis en coordenadas esféricas

El sistema coordenado cilíndrico presenta ventajas de implementación frente al esférico, principalmente por cuestiones de regularidad ya que en el último caso el origen presenta una singularidad coordenada más fuerte. Aún así, hay situaciones que requieren abandonar este sistema coordenado para el análisis de los datos. La extracción de ondas gravitacionales y las técnicas para localizar horizontes aparentes son dos ejemplos que no están bien adaptados al uso de coordenadas cilíndricas y resulta más apropiado trabajar en coordenadas esféricas. En este apartado se muestra explícitamente la relación entre ambos sistemas y también la construcción de una triada axisimétrica para ser usada en análisis de hiperbolicidad y estudio de radiación.

Transformación a coordenadas esféricas

La forma canónica de construir un sistema de coordenadas esféricas a partir del sistema cilíndrico es conservar la coordenada angular azimuthal ϕ y completar el sistema con un radio esférico R y una coordenada angular polar θ definidos como:

$$r = R \sin \theta, \quad z = R \cos \theta. \quad (4.24)$$

La relación inversa se obtiene directamente

$$R^2 = r^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{r}{z}. \quad (4.25)$$

De estas relaciones la matriz Jacobiana y su inversa se calculan directamente:

$$\frac{\partial(r, z)}{\partial(R, \theta)} = \begin{bmatrix} r/R & z \\ z/R & -r \end{bmatrix}, \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial(R, \theta)}{\partial(r, z)} = \begin{bmatrix} r/R & z/R \\ z/R^2 & -r/R^2 \end{bmatrix}. \quad (4.26b)$$

Estas matrices nos permiten calcular las componentes tensoriales en el sistema esférico en términos de los valores conocidos en el sistema cilíndrico. Usando la primera para transformar índices covariantes obtenemos la expresión para las componentes de la métrica

$$\hat{\gamma}_{RR} = \frac{1}{R^2} (r^2 A + 2r^2 z C + z^2 B) , \quad (4.27a)$$

$$\hat{\gamma}_{\theta\theta} = r^2 B - 2r^2 z C + z^2 A , \quad (4.27b)$$

$$\hat{\gamma}_{\phi\phi} = r^2 H , \quad (4.27c)$$

$$\hat{\gamma}_{R\theta} = \frac{1}{R} (rz(A - B) + (z^2 - r^2)rC) , \quad (4.27d)$$

$$\hat{\gamma}_{R\phi} = \frac{r^2}{R} (r^2 C_1 + z C_2) , \quad (4.27e)$$

$$\hat{\gamma}_{\theta\phi} = r^3 (z C_1 - C_2) . \quad (4.27f)$$

$$(4.27g)$$

Las componentes de tensores covariantes de rango dos se calculan de manera análoga. Por otro lado, usando la matriz inversa obtenemos las componentes de vectores en coordenadas esféricas:

$$v^R = \frac{1}{R} (rv^r + zv^z) , \quad (4.28a)$$

$$v^\theta = \frac{1}{R^2} (zv^r - rv^z) , \quad (4.28b)$$

y la componente azimuthal v^ϕ no cambia.

Construcción de una triada ortonormal

Para construir una triada ortonormal espacial en el caso con simetría axial basta con especificar un campo vectorial unitario \hat{s} que por convención lo identificaremos como la dirección saliente. Ya que el vector azimuthal de Killing $\vec{\xi}$ está definido por defecto, especificar una dirección independiente de este define una triada ya que el vector restante puede tomarse como el producto exterior entre

ellos. En general no se espera que los vectores \hat{s} y $\vec{\xi}$ sean ortogonales, y esto ocurre por que es posible que los planos $\phi = \text{const.}$ se encuentren torcidos en forma de espiral alrededor del eje. Para definir una dirección realmente saliente ortonormalizamos el vector \vec{s} con respecto del vector azimuthal normalizado $\hat{\xi} = \vec{\xi} / \sqrt{\gamma_{\phi\phi}}$

$$\hat{e}_{(1)} = \frac{\hat{s} - \langle \hat{\xi}, \hat{s} \rangle \hat{\xi}}{\sqrt{1 - \langle \hat{\xi}, \hat{s} \rangle^2}}. \quad (4.29)$$

El último vector lo especificamos por medio del producto exterior

$$\hat{e}_{(2)} = \hat{\xi} \times \hat{e}_{(1)}, \quad \hat{e}_{(3)} = \hat{\xi}. \quad (4.30)$$

Para el caso en que el vector de dirección corresponde con la dirección radial esférica $\hat{s} = (\vec{r} + \vec{z}) / |\vec{r} + \vec{z}| = \partial_R / \sqrt{\gamma_{RR}}$, se obtiene en términos de los vectores de la base esférica

$$\{\hat{e}_{(a)}\} = \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}} \frac{\gamma^{\theta\theta} \gamma^{mR} - \gamma^{\theta R} \gamma^{m\theta}}{\sqrt{\gamma_{RR} \gamma_{\phi\phi} - \gamma_{R\phi}^2}} \partial_m, \frac{\sqrt{\gamma} \gamma^{m\theta} \partial_m}{\sqrt{\gamma_{RR} \gamma_{\phi\phi} - \gamma_{R\phi}^2}}, \frac{\partial_\phi}{\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}} \right\}. \quad (4.31)$$

Con γ el determinante de la métrica espacial. Esta expresión es bastante general, y puede escribirse de manera compacta en términos de contracciones de tensores de Levi-Civita, o bien explícitamente

$$\{\hat{e}_{(a)}\} = \left\{ \frac{(\gamma_{\phi\phi} \delta_R^m - \gamma_{R\phi} \delta_\phi^m)}{\sqrt{\gamma \gamma_{\phi\phi} \gamma^{\theta\theta}}} \partial_m, \frac{\gamma^{m\theta} \partial_m}{\sqrt{\gamma^{\theta\theta}}}, \frac{\partial_\phi}{\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}} \right\}. \quad (4.32)$$

El caso en el que el momento angular es nulo se simplifica aún más, ya que $\vec{\xi}$ es ortogonal a cualquier vector tangente a la superficie $\phi = \text{const.}$ En este caso

las expresiones resultantes quedan

$$\{\hat{e}_{(a)}\} = \left\{ \frac{\partial_R}{\sqrt{\gamma_{RR}}}, \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_{RR}\gamma_{\phi\phi}}} \gamma^{m\theta} \partial_m, \frac{\partial_\phi}{\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}} \right\}. \quad (4.33)$$

Para finalizar, podemos construir la métrica inducida sobre las superficies normales a $\hat{e}_{(1)}$, definida como $h_{ab} := \gamma_{ab} - (\hat{e}_{(1)})_a (\hat{e}_{(1)})_b$. Explícitamente queda

$$h_{RR} = \frac{\gamma_{R\phi}^2}{\gamma_{\phi\phi}}, \quad (4.34a)$$

$$h_{R\theta} = \frac{\gamma_{R\phi}\gamma_{\theta\phi}}{\gamma_{\phi\phi}}, \quad (4.34b)$$

$$h_{R\phi} = \gamma_{R\phi}, \quad (4.34c)$$

$$h_{\theta\theta} = \frac{1}{\gamma^{\theta\theta}} - \frac{\gamma_{\phi\theta}^2}{\gamma_{\phi\phi}}, \quad (4.34d)$$

$$h_{\theta\phi} = \gamma_{\theta\phi}, \quad (4.34e)$$

$$h_{\phi\phi} = \gamma_{\phi\phi}. \quad (4.34f)$$

En el caso sin momento angular se reduce aún más, siendo las únicas componentes no nulas

$$h_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta} - \frac{(\gamma_{R\theta})^2}{\gamma_{RR}}, \quad (4.35a)$$

$$h_{\phi\phi} = \gamma_{\phi\phi}. \quad (4.35b)$$

4.2 El código OllinAxis2

Esta sección consta de una descripción general del código OllinAxis2, cuya finalidad es integrar el sistema BSSN generalizado en simetría axial como un problema de valores iniciales, y fue parte medular del proyecto de doctorado. Este código ya forma parte de las herramientas desarrolladas por el grupo Ollin de relatividad numérica en el Instituto de Ciencias Nucleares. El numeral

en el nombre se debe a que previamente se desarrolló un código similar en simetría axial en la formulación Nagy-Ortiz-Reula (NOR) [135] como parte de la tesis doctoral de Milton Ruíz [165]. Este código solamente abordaba el caso sin momento angular y con él obtuvieron resultados favorables en tanto a la regularización en el eje, pero en la práctica el código en esta formulación presentaba inestabilidades. Es por ello que se definió el desarrollo de un código que reuniera las ventajas de la formulación BSSN y en el que se pudieran resolver las complicaciones que aparecen al utilizar sistemas adaptados a la simetría axial como una meta viable durante este doctorado.

El código se basa en la infraestructura del código OllinSphere2 y consiste básicamente en un integrador de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales discretizadas por métodos de líneas, con subrutinas de análisis sobre los datos generados. El código fuente está escrito en FORTRAN 90, junto con scripts en PERL cuya función es generar automáticamente rutinas de acuerdo a ciertas reglas al momento de compilar. Actualmente se trabaja sobre una malla con discretización uniforme independiente en cada dirección, y distribuida de modo que evita el eje $r = 0$. Actualmente está paralelizado para su ejecución en clusters en múltiples nodos utilizando el protocolo MPI (MESSAGE PASSING INTERFACE). El balance de carga entre los procesadores se realiza haciendo una subdivisión rectangular uniforme del dominio contando con un total de procesadores $N = N_r \times N_z$ (Figura 4.1). Para facilitar la intercomunicación entre procesadores a cada uno se le asigna una región *fantasma* cuyos puntos se traslapan en el dominio de procesadores contiguos; para sincronizar la información manejada por todos los procesadores basta entonces con copiar los valores en los puntos fantasmas con los calculados en los procesadores vecinos. Los procesadores que contienen al eje incluyen una zona fantasma que se extiende más allá de este y en este caso los valores se determinan por condiciones de simetría.

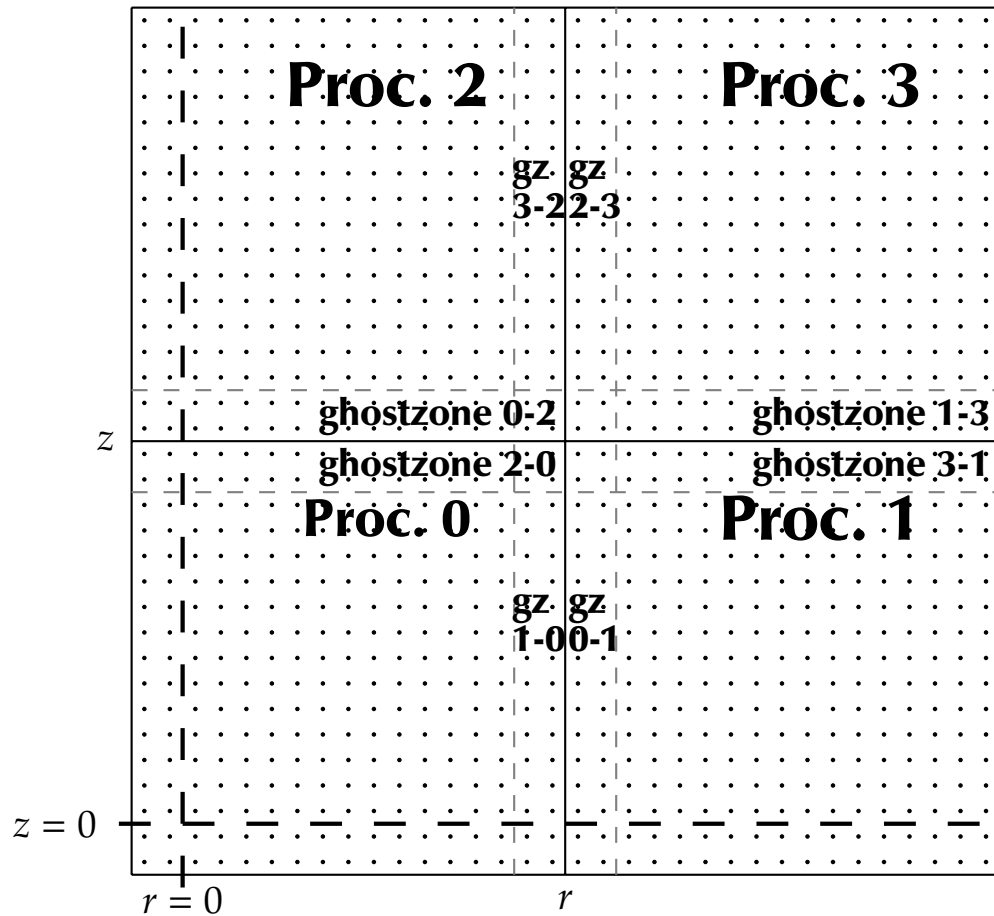


Figura 4.1: Representación de la distribución de la malla numérica manejada por el código OllinAxis2. Se muestra el caso de una malla con 32×32 puntos y simetría equatorial, distribuida equitativamente en 4 procesadores. Las zonas fantasma adyacentes al eje (y ecuador) se actualizan respetando las condiciones de frontera asignadas a las distintas variables. Las zonas fantasma internas designadas por una dupla $n - m$ pertenecen al procesador n y se sincronizan con los puntos correspondientes pertenecientes al procesador adyacente m a cada paso. El tamaño de las zonas fantasmas se ajusta consistentemente con el orden de discretización.

El código posee una serie de módulos que proveen las funcionalidades principales al momento de escribir rutinas. Estos son:

- **arrays:** Este módulo se genera a partir del archivo `base/arrays.config` y contiene las definiciones de todos los arreglos que representan funciones de la malla. Este archivo está escrito en formato FORTRAN 90 pero para su preprocesamiento se requieren más consideraciones: solamente se puede declarar un arreglo por línea y cada declaración va seguida por un comentario con un formato específico en el que se describen los atributos del mismo. Por ejemplo, la definición del arreglo que contiene a la función de lapso:

```
REAL alpha !SYMMETRYR=+1, SYMMETRYZ=+1, INTENT=EVOLVE, STORAGE=ALWAYS
```

Una descripción detallada de como especificar los atributos aparece como un primer comentario en el archivo.

- **param:** Este es un módulo que se compila directamente y contiene las definiciones de los parámetros que posee el código. Este archivo se preprocesa al momento de compilar y por ello sigue reglas similares que el archivo `base/arrays.config`: sólo se puede declarar un parámetro por línea, se debe inicializar a un valor por defecto y es posible acompañar la declaración por un comentario en el que se especifican los valores aceptables, por ejemplo:

```
character(30) :: slicing = 'harmonic' ! range = (static,harmonic)
```

Durante la ejecución, el programa toma un archivo como primer argumento un archivo de texto en el que se especifican los valores de los parámetros como una lista en formato natural

```
parametro = valor # Comentarios
```

Los parámetros que no se modifican toman el valor por defecto.

- **procinfo:** Este módulo contiene parámetros relacionados con la paralelización, los cuales se determinan durante la ejecución.
- **derivatives, derivadvect, interpolators:** Estos módulos contienen funciones que operan sobre las funciones de malla. Existen funciones

para calcular numéricamente derivadas, y para calcular interpolaciones unidimensionales.

- `auxiliary_arrays`: Este módulo actualmente solo posee un arreglo con tres índices que almacena los valores de la densidad tensorial de Levi-Civita, para simplificar cálculos.

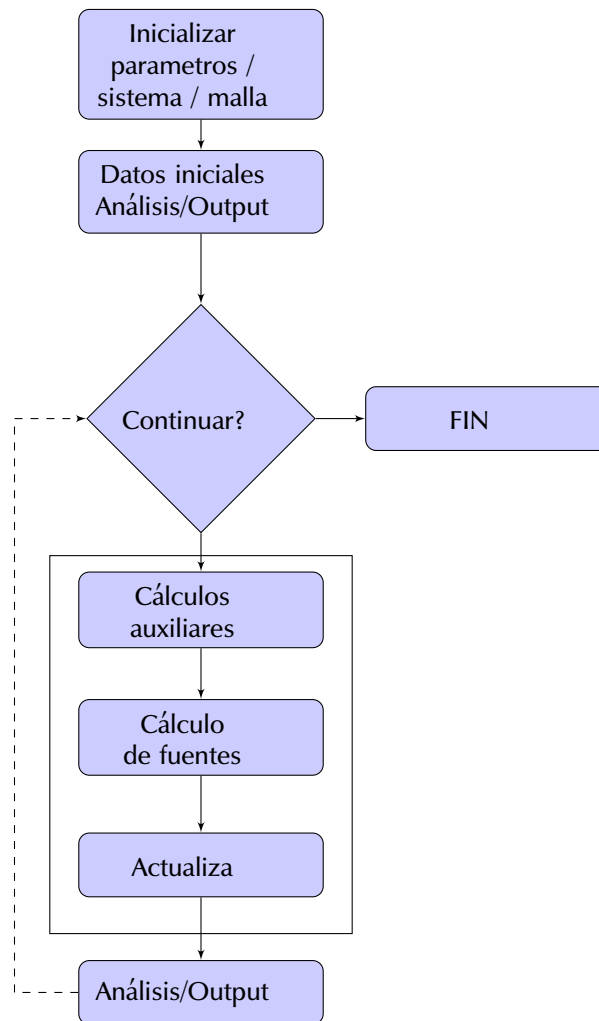


Figura 4.2: Diagrama de flujo simplificado del funcionamiento del código OllinAxis2.

El código se compone de un gran número de rutinas contenidas en archivos con extensión `.f90` contenidos en la carpeta `src/` y en las subcarpetas clasificadas por funcionalidades. Al momento de compilar, todos estos archivos son considerados y enlazados en un solo ejecutable. Para la integración numérica como problema de valores iniciales se utiliza un método de líneas con integradores *Iterative Crank-Nicholson* (ICN) y Runge-Kutta de segundo y cuarto orden respectivamente. Las rutinas que manejan toda la lógica del procedimiento de integración temporal se generan automáticamente al compilar de acuerdo a las reglas establecidas al preprocesar el módulo `arrays`. Para complementar la evolución es necesario especificar las fuentes, propiamente el lado derecho de la ecuación de evolución, al momento adecuado de acuerdo a la lógica del programa. Así, si se tiene una función llamada `var` que evoluciona de acuerdo a una ecuación del tipo

$$\partial_t(var) = F((var), \partial_i(var), \dots) ,$$

entonces el código debe llamar una subrutina que evalúa el lado derecho y lo asigna a un arreglo llamado `svar`. La Figura 4.2 muestra una versión simplificada del flujo del código, allí se observa que la evaluación de las fuentes solo es relevante durante las iteraciones internas para determinar los valores en pasos posteriores.

Otras características del código que se consideran durante la integración temporal corresponden a la implementación de disipación numérica y al manejo de las fronteras del dominio. La disipación numérica usualmente es necesaria ya que los métodos de diferencias finitas solamente pueden resolver modos cuya longitud de onda es del orden del intervalo de discretización. En general este truncamiento de modos y otras consideraciones numéricas inducen inestabilidades, y es por ello que una práctica común es añadir términos a las ecuaciones de evolución cuya función es atenuar estos modos. El tratamiento usual, que es el implementado en el código, es conocido como *disipación de Kreiss-Oliger*[97]. En nuestro caso modificamos las ecuaciones de evolución discretizadas $u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n)$, con S un operador que engloba la integración

temporal, y en su lugar consideramos

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \Delta t S(u_m^n) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta x} (-1)^N \Delta_r^{2N}(u_m^n) - \epsilon \frac{\Delta t}{\Delta z} (-1)^N \Delta_z^{2N}(u_m^n), \quad (4.36)$$

donde Δ_r^{2N} , Δ_z^{2N} son la $2N$ -ésima diferencia centrada en la dirección r y z respectivamente. Se puede mostrar que los términos adicionales en el límite continuo se anulan como $(\Delta x^i)^{2N-1}$ por lo que para ser consistentes con el orden de discretización del código $2N - 1$ debe ser mayor o igual a este último. Dado que el código trabaja la diferenciación a segundo y cuarto orden, los términos de dispersión añadidos son de cuarto y sexto orden respectivamente.

Aparte de condiciones de frontera sencillas usadas para pruebas, el código tiene implementadas en las fronteras exteriores condiciones de onda saliente (radiativas). Estas asumen que las funciones se comportan asintóticamente como ondas esféricas salientes de la forma $u = f(R - vt)/R$. Aquí $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ es la coordenada radial en un sistema esférico. Esta condición puede ser reescrita de manera diferencial como

$$\partial_t u + v \partial_R u + vu/R = 0. \quad (4.37)$$

En nuestro caso el dominio computacional es un cilindro, (que por simetría nos basta considerar una sección) y entonces debemos de adaptar esta condición tanto al "tubo" $r = r_{\max}$ y las tapas $z = z_{\min}, z_{\max}$. Para ello consideramos que al situar las fronteras lejos las derivadas angulares son mucho menor que las radiales, por lo que podemos aproximar $\partial_i u = (x^i/R) \partial_r u$. De este modo tenemos

$$\partial_t u + \frac{R}{r} v \partial_r u + vu/R = 0 \quad \text{en } r = r_{\max}, \quad (4.38a)$$

$$\partial_t u + \frac{R}{z} v \partial_z u + vu/R = 0 \quad \text{en } z = z_{\max/\min}. \quad (4.38b)$$

En la práctica no es consistente aplicar estas condiciones a todas las variables, pero considerando un subconjunto de ellas resultan ser condiciones estables que capturan de manera cualitativa la física en las fronteras del dominio numérico. Tras todas las suposiciones que se hacen es natural que estas con-

diciones introduzcan reflexiones espurias, las cuales aunque se hacen menores mientras más alejadas están las fronteras tardan un tiempo finito en afectar la región central de la solución e introducen violaciones de las ecuaciones de constricción que no convergen a cero.

Los datos que genera el código corresponden a funciones de la malla y se especifican como listas separadas por comas asignadas a los parámetros `output0d`, `output1d` y `output2d`. La diferencia entre estos depende en la información que proporciona el código. Los datos “0d” son series de tiempo de cantidades calculadas a partir de las funciones, tales como promedios, normas, máximos y mínimos. Los datos “1d” corresponden a los valores de la función de malla evaluada sobre los ejes, como función del tiempo. Los datos “2d” corresponden al valor de la función en todo el dominio numérico.

El código todavía está en fase de desarrollo al momento de este escrito. Se ha notado que la información que genera podría organizarse de un modo más eficiente y se tienen en mente muchas funcionalidades que se seguirán implementando con el transcurso del tiempo, entre las cuales destacan la identificación y extracción de información física contenida en la radiación gravitacional, y la identificación de horizontes aparentes. Los desarrollos correspondientes a estos temas se concentran en los Apéndices C y B.

4.3 Pruebas numéricas

En esta sección se presenta una serie de simulaciones en escenarios conocidos para verificar el buen funcionamiento del código. Esto lo hacemos para casos con datos iniciales conocidos analíticamente o que presentan simetría esférica.

4.3.1 Dinámica de norma

La primera prueba que se considera para una formulación como problema de valores iniciales de las ecuaciones de Einstein (y un código basado en esta) consiste en estudiar la dinámica ficticia obtenida al evolucionar datos iniciales del espacio-tiempo de Minkowski utilizando condiciones de foliación no triviales. En este caso elegimos un lapso perturbado que evoluciona con una ecuación de tipo hiperbólico y consideramos una perturbación en la componente angular del vector de corrimiento β^i , que genera perturbaciones en las demás componentes al utilizar una condición de tipo Gamma-Driver. De este modo podemos probar todos los aspectos geométricos del código simultáneamente. Los datos iniciales que describen una geometría trivial son:

$$\phi|_{t=0} = 0, \quad (4.39a)$$

$$A|_{t=0} = B|_{t=0} = H|_{t=0} = 1, \quad (4.39b)$$

$$C|_{t=0} = C_1|_{t=0} = C_2|_{t=0} = 0, \quad (4.39c)$$

$$K|_{t=0} = \hat{A}_F|_{t=0} = 0, \quad (4.39d)$$

$$\hat{\Delta}^i|_{t=0} = 0, \quad (4.39e)$$

lo cual implica para las variables de regularización $\lambda = \hat{A}_\lambda = 0$. Para el lapso elegimos un perfil gaussiano centrado en el origen

$$\alpha|_{t=0} = 1 + \alpha_0 e^{-(r^2+z^2)/\sigma_a^2}, \quad (4.40)$$

donde α_0 es la amplitud inicial y σ_α su anchura (uniforme en ambas direcciones). Esta elección asegura que el lapso inicialmente es regular en el origen. Para esta simulación utilizamos una foliación armónica de modo que la función de lapso evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$\partial_t \alpha = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \alpha - \alpha^2 K. \quad (4.41)$$

De igual modo, para el vector de corrimiento consideramos inicialmente:

$$\beta^\phi|_{t=0} = \beta_0 \left(e^{-((r-r_0)^2+z^2)/\sigma_\beta^2} + e^{-((r+r_0)^2+z^2)/\sigma_\beta^2} \right), \quad (4.42a)$$

$$\beta^r|_{t=0} = \beta^z|_{t=0} = 0, \quad (4.42b)$$

$$\partial_t \beta^i|_{t=0} = 0. \quad (4.42c)$$

Se suma una gaussiana reflejada en el eje para cumplir las condiciones de regularidad. El vector de corrimiento evoluciona usando la condición Gamma-Driver (sin términos advectivos):

$$\partial_t^2 \beta^i = c_s \partial_0 \hat{\Delta}^i, \quad (4.43a)$$

con la elección estándar $c_s = 4/3$. Se escogieron como parámetros iniciales, para el lapso $\alpha_0 = 0.06$, $\sigma_\alpha = 2.5$, y para el vector de corrimiento $\beta_0 = 0.03$, $r_0 = 5.0$ y $\sigma_\beta = 2.0$. De este modo la distribución inicial del lapso consiste en una pequeña perturbación Gaussiana centrada en el origen y esféricamente simétrica alrededor del valor $\alpha = 1$, y el vector de corrimiento solo tiene componente angular con una distribución toroidal centrada en un anillo en el ecuador (figura 4.3). Los parámetros de malla son $\Delta x = \Delta z = 0.25$ con el factor de Courant $\Delta x / \Delta t = 0.25$ y para analizar convergencia se consideraron refinamientos por un factor de 2. Las perturbaciones iniciales son radiadas durante la evolución (figuras 4.4 y 4.5) y las perturbaciones inducidas en las demás variables también son radiadas (figuras 4.6 y 4.7). Se observa que aunque la mayoría de las variables tienen fluctuaciones grandes alrededor del origen todas permanecen bien comportadas y alcanzan un estado estacionario. En esta simulación no se utilizó ningún tipo de disipación numérica para mantener el sistema estable.

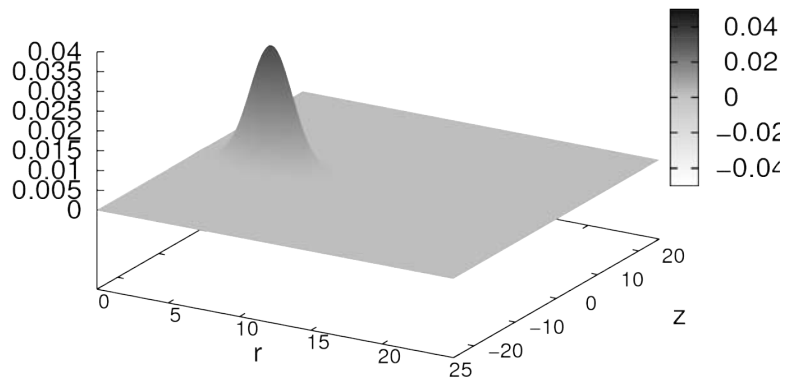


Figura 4.3: Perfil inicial de la componente azimutal del vector de corrimiento.

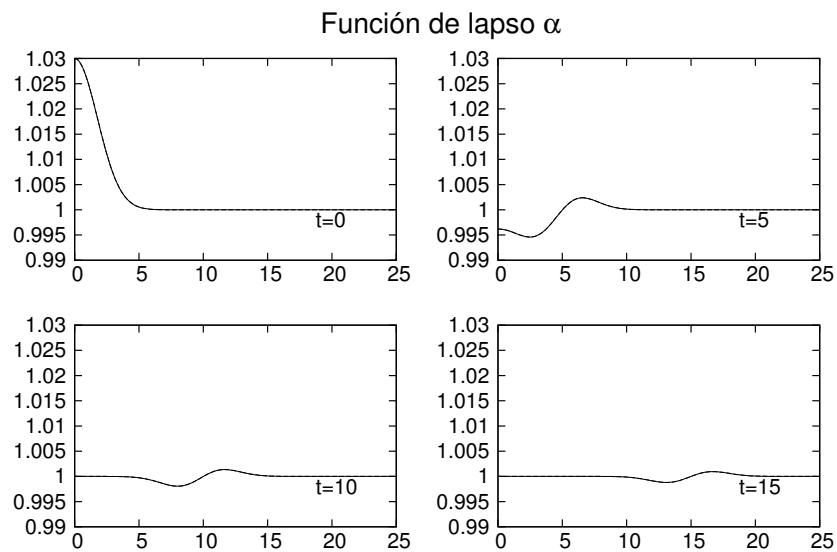


Figura 4.4: Perfil de la función de lapso α sobre ambos ejes, $r = 0$ (línea continua) y $z = 0$ (línea punteada), a distintos momentos. Inicialmente se tiene una Gaussiana esféricamente simétrica, la cual prácticamente no se afecta por la evolución del vector de corrimiento de modo que las dos curvas en la gráfica se observan superpuestas al avanzar la evolución.

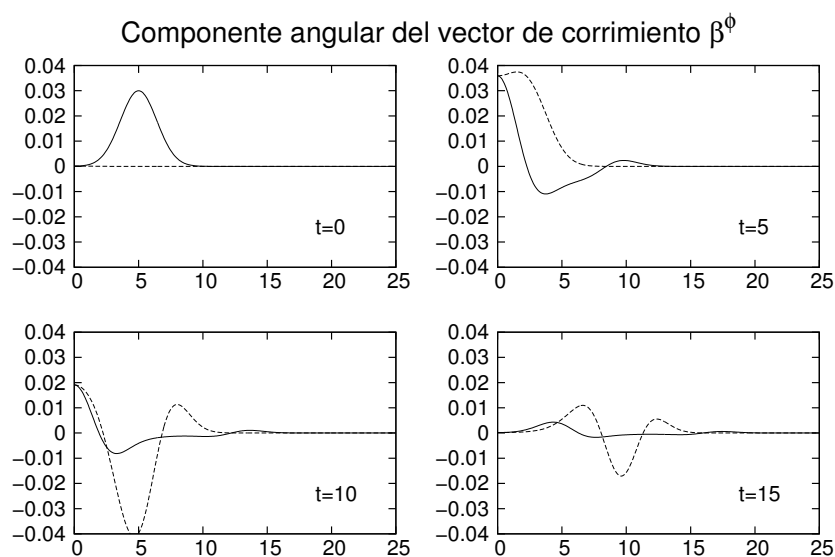


Figura 4.5: Evolución de la componente angular del vector de corrimiento β^ϕ sobre ambos ejes. El perfil inicialmente consta de un anillo Gaussiano en el ecuador, centrado en $r = 5$.

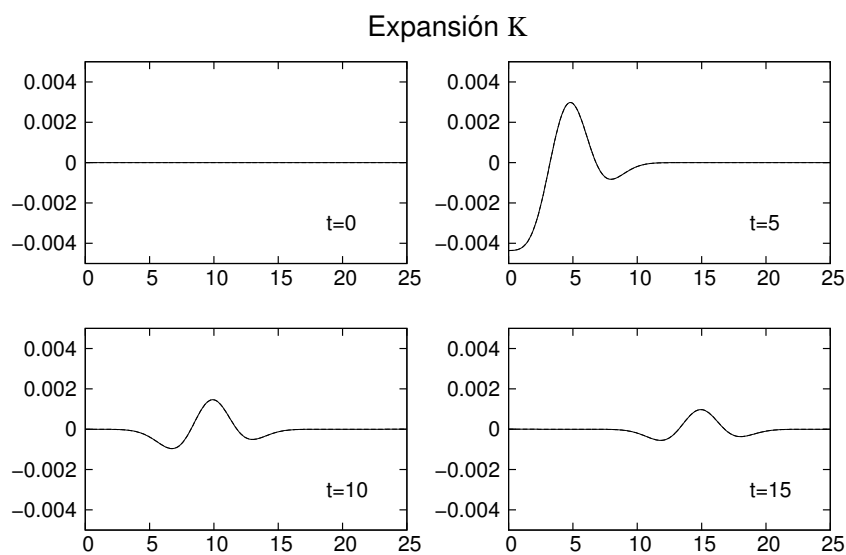


Figura 4.6: Evolución de la traza de la curvatura extrínseca K sobre ambos ejes, $r = 0$ (línea continua) y $z = 0$ (línea punteada). Al igual que la evolución del lapso, esta función mantiene en buena medida un perfil esféricamente simétrico.

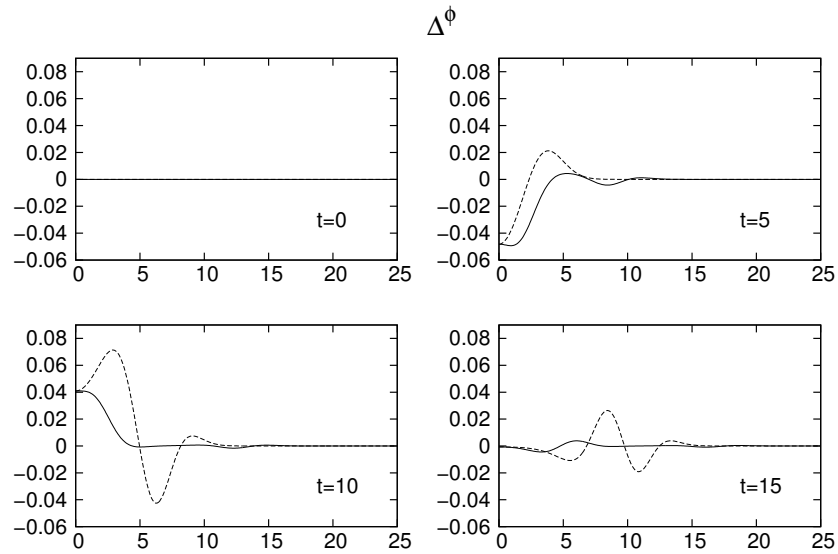


Figura 4.7: Evolución de la componente angular del vector $\hat{\Delta}$ sobre ambos ejes, $r = 0$ (línea continua) y $z = 0$ (línea punteada).

Se verificó la convergencia del código durante la evolución monitoreando el valor adquirido por las constricciones que en principio debe ser cero en el límite continuo, cualquier valor distinto a este es consecuencia de la discretización y el redondeo numérico. La figura 4.8 muestra la norma RMS de la restricción Hamiltoniana como función del tiempo a distintas resoluciones. Cada refinamiento está dado por un factor de 2, manteniendo el mismo factor de Courant en todas las simulaciones. Las curvas obtenidas fueron reescaladas por un factor de 2^4 por cada nivel de refinamiento, de modo que quedan superpuestas consistentemente con el esquema de cuarto orden utilizado⁴. Para las componentes de la restricción de momento se observa un comportamiento similar (Figuras 4.9, 4.10, y 4.11). También se verificó la convergencia al orden esperado al utilizar un esquema de segundo orden.

⁴En las figuras el factor de amplificación usado es de 14, ya que usando el factor esperado de reescalamiento de 16 el empalme es tan justo que no es posible diferenciar las curvas.

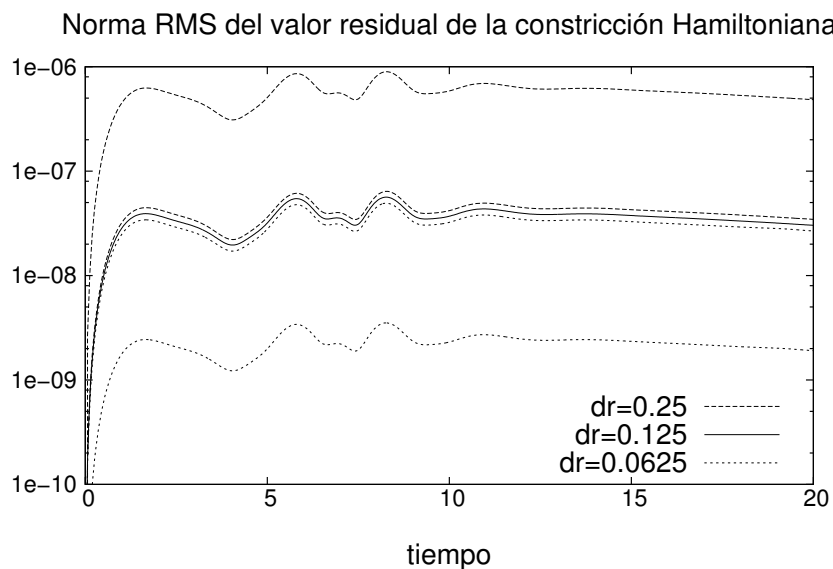


Figura 4.8: Norma RMS del valor residual de la restricción Hamiltoniana. En la misma gráfica se muestra el valor asociado a las resoluciones mayor y menor reescaladas por un factor de 14 (en lugar de 16), mostrando convergencia global a cuarto orden.

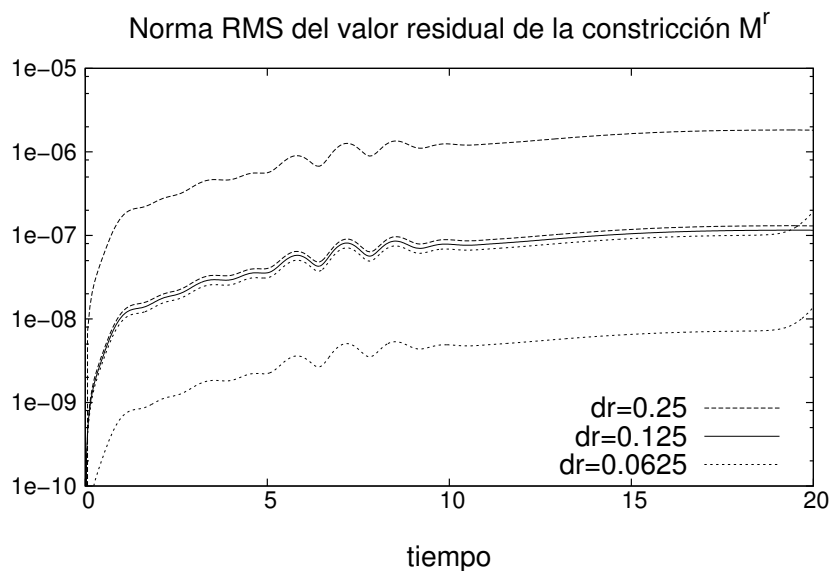


Figura 4.9: Norma RMS del valor residual de la componente r de la restricción de momentos. En la misma gráfica se muestra el valor asociado a las resoluciones mayor y menor reescaladas por un factor de 14 (en lugar de 16), mostrando convergencia global a cuarto orden.

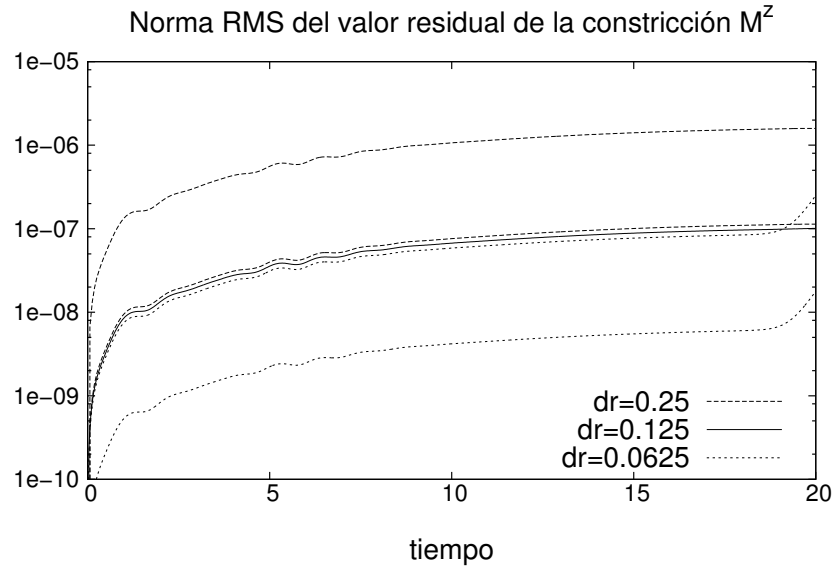


Figura 4.10: Norma RMS del valor residual de la componente z de la constrictión de momentos. En la misma gráfica se muestra el valor asociado a las resoluciones mayor y menor reescaladas por un factor de 14 (en lugar de 16), mostrando convergencia global a cuarto orden.

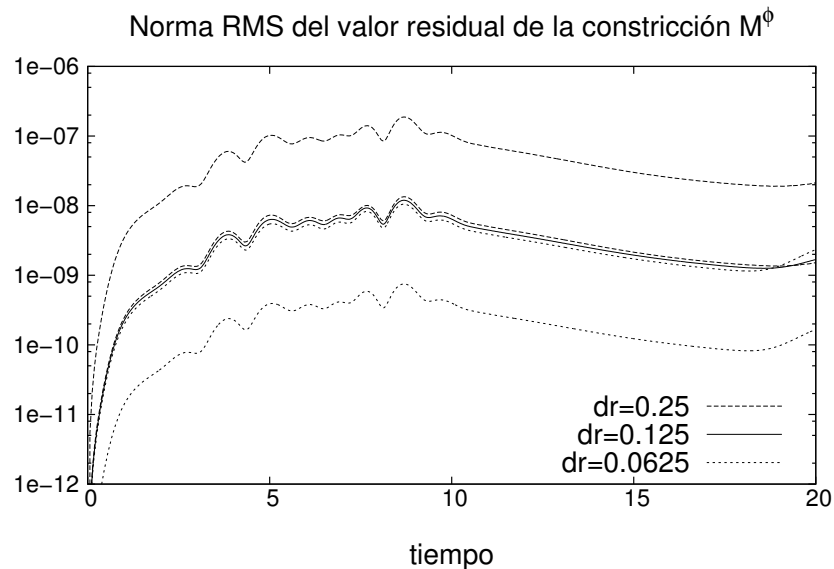


Figura 4.11: Norma RMS del valor residual de la componente ϕ de la constrictión de momentos. En la misma gráfica se muestra el valor asociado a las resoluciones mayor y menor reescaladas por un factor de 14 (en lugar de 16), mostrando convergencia global a cuarto orden.

4.3.2 Campo escalar real

Como un ejemplo con contenido de materia no trivial consideramos la propagación de una distribución de campo escalar real no masivo con simetría esférica. Pese a ser este el mismo caso modelo del capítulo anterior, la formulación axisimétrica desconoce estas características y es por ello que lo podemos utilizar como un ejemplo no trivial para el cual podemos usar a nuestro favor la simetría para encontrar los datos iniciales.

Como dato inicial consideramos que la métrica es conformemente plana, y el dato inicial tiene simetría temporal ($K_{ij} = 0$). Entonces basta resolver la constricción Hamiltoniana en simetría esférica, que toma la forma

$$\frac{d^2\psi}{dR^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dR} + 2\pi (\partial_R\varphi)^2 = 0. \quad (4.44)$$

En esta expresión se consideró que el campo escalar está momentáneamente en reposo ($\Pi = 0$). El campo escalar lo tomamos como un perfil que representa un cascarón esférico de ancho Gaussiano momentáneamente en reposo

$$\varphi = \varphi_0 e^{-(R-R_0)^2/\sigma^2}. \quad (4.45)$$

Una vez obtenido el factor conforme como función de la coordenada radial esférica, este se interpoló a cada punto de la malla tomando valores $\psi_{m\ n} = \psi(\sqrt{r_m^2 + z_n^2})$.

En este caso como condición de norma se tomó el lapso tipo "1+log", correspondiente a la foliación Bona-Masso con $f(\alpha) = 2/\alpha$, esto es

$$\partial_t\alpha = -2\alpha K.$$

El vector de corrimiento se consideró nulo. Los parámetros del campo escalar fueron amplitud $\varphi_0 = 0.01$, posición $R_0 = 3.0$ y ancho $\sigma = 1.0$. Las fronteras se ubicaron en $r = 40$ y $z = 40$ y se utilizaron resoluciones $\Delta r = \Delta z = (0.1, 0.05, 0.025)$.

Con todas estas consideraciones, la evolución del campo escalar en este

caso queda descrita por el sistema

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi &= \alpha \Pi, \\ \partial_t \chi_r &= \nabla_r(\alpha \Pi), \\ \partial_t \chi_z &= \nabla_z(\alpha \Pi), \\ \partial_t \Pi &= \nabla_i(\alpha \chi^i) + \alpha \Pi K.\end{aligned}$$

Al comenzar la simulación, la función de lapso reacciona debido a la presencia del campo escalar más la amplitud de este último no es suficiente para que el lapso colapse totalmente. Entonces vemos en la Figura 4.12 inicialmente un descenso en el valor central y una perturbación que se propaga de manera saliente, con una velocidad mayor por un factor de $\sqrt{2}$ que la del campo escalar asociada a la elección de norma, obteniendo finalmente un perfil plano que tiende hacia el valor inicial. Por su parte el campo escalar se dispersa, conservando en buena medida un perfil esférico (Figura 4.13). Al igual que en el ejemplo anterior, verificamos la precisión del código por medio de las constricciones, las cuales mostramos evaluadas sobre los ejes a distintos momentos (Figuras 4.14, 4.15 y 4.16). Como las condiciones de frontera no están adaptadas a las constricciones se aprecian violaciones entrantes, pero no obstante logramos observar convergencia a cuarto orden en la región interna mientras está desconectada causalmente de las fronteras.

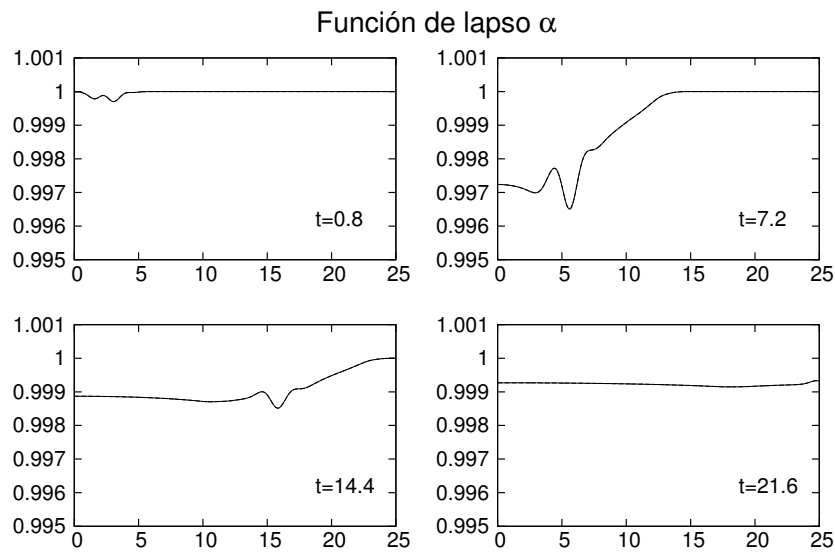


Figura 4.12: Perfil de la función de lapso α sobre ambos ejes a distintos momentos. Se observa que durante la evolución se mantiene el mismo perfil en ambos ejes

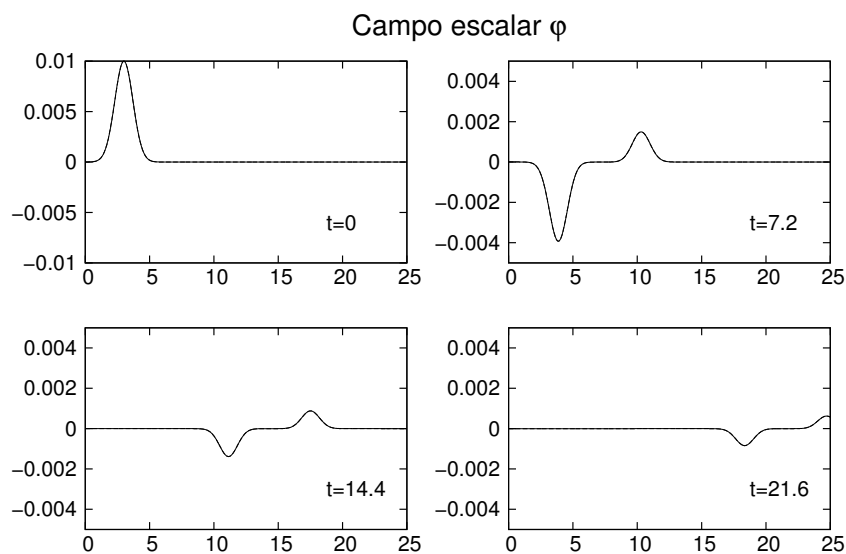


Figura 4.13: Perfil del campo escalar φ sobre ambos ejes a distintos momentos.

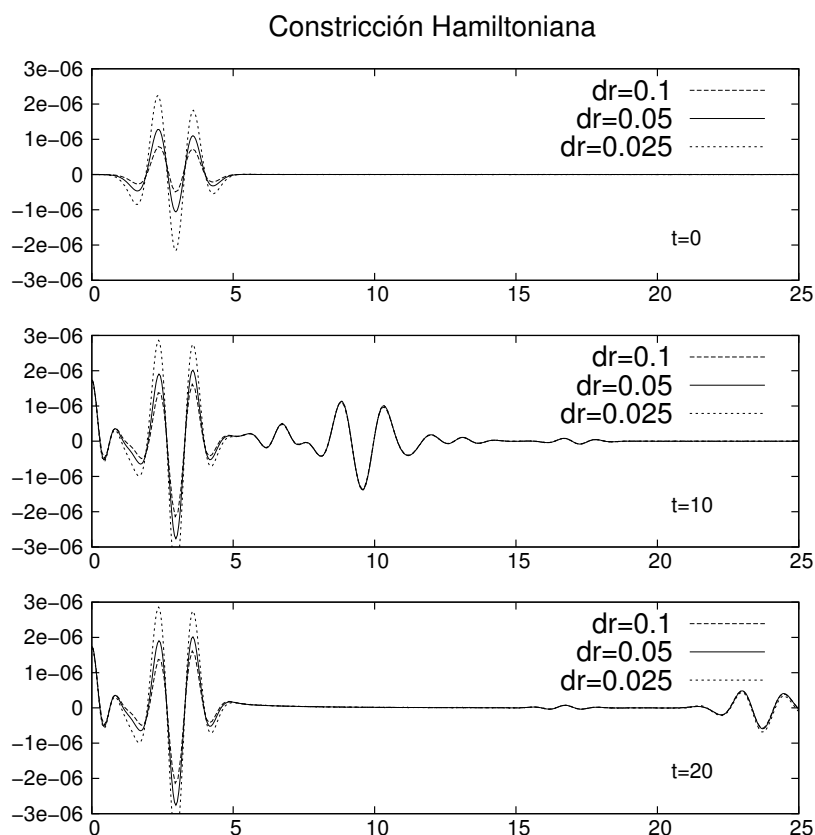


Figura 4.14: Valor residual de la constricción Hamiltoniana sobre el ecuador durante la evolución de una distribución esférica de campo escalar. Las resoluciones más finas fueron reescaladas por factores de 2^4 y 2^8 respectivamente mostrando convergencia al orden esperado. En el primer panel la convergencia no se observa precisamente a cuarto orden, pero esto es consecuencia del algoritmo de interpolación de orden cúbico usado para la obtención de los datos iniciales. Sin embargo la integración temporal introduce un error dominante y en los siguientes paneles se observa en buena medida convergencia a cuarto orden.

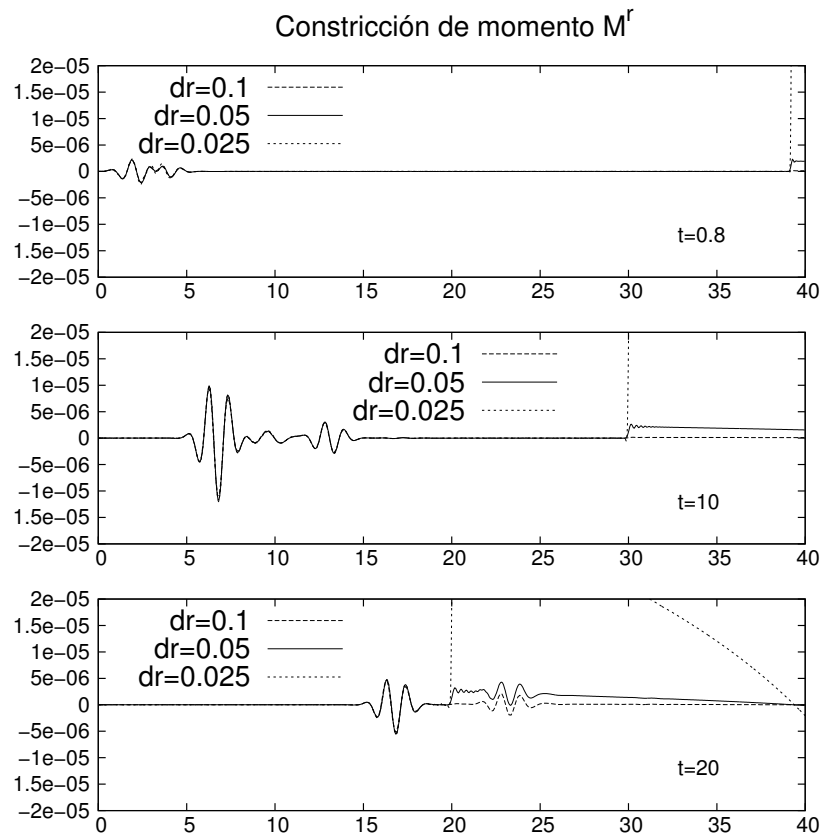


Figura 4.15: Valor residual de la componente radial de la constricción de momento, evaluada sobre el ecuador. Aquí se observa la introducción de errores que no convergen propagándose hacia el interior desde la frontera. No obstante, la convergencia es clara en el interior siempre que estos errores no hayan alcanzado la región.

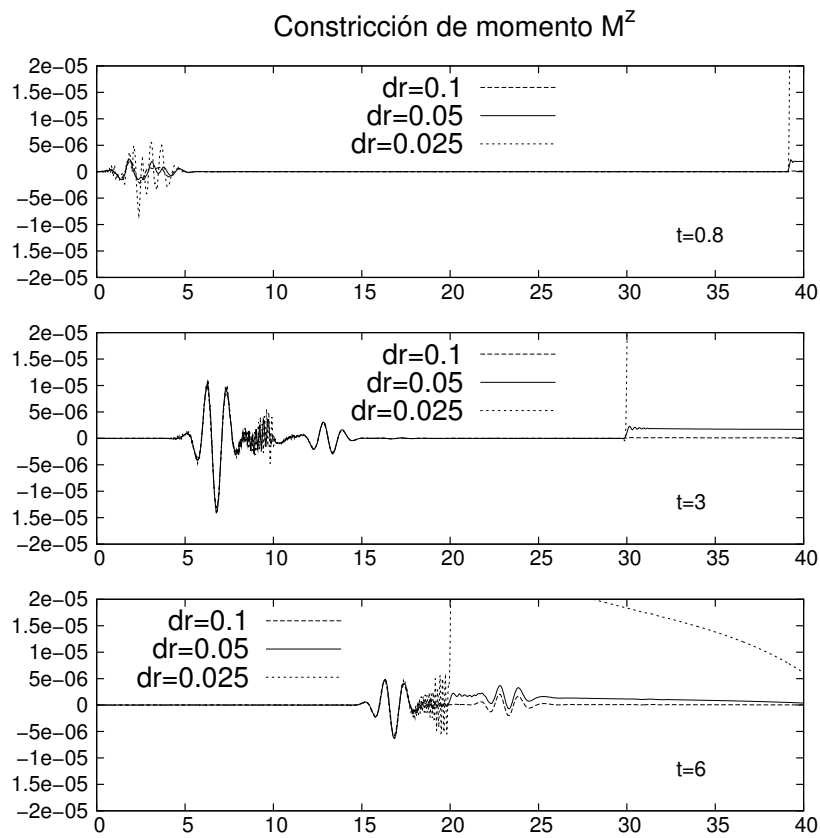


Figura 4.16: Valor residual de la componente vertical de la constricción de momento, evaluada sobre el eje. En este caso se observan errores de alta frecuencia espacial que nos marcan que el error de discretización está alcanzando el error de máquina.

4.3.3 Agujeros Negros

La evolución de datos iniciales tipo puntura se ha vuelto muy común [56, 27, 26, 28, 59, 57, 107] en el campo de la Relatividad Numérica. El ejemplo más sencillo de este tipo de datos iniciales es tomar una sección de t constante para el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas isotrópicas: en este caso las coordenadas cubren ambas regiones asintóticamente planas y el origen coordenado no es parte del espacio-tiempo, sino que corresponde a la región asintóticamente plana ubicada en el otro lado del horizonte aparente. Este tipo de datos iniciales se ha generalizado para múltiples agujeros negros que al tiempo inicial conectan distintas regiones asintóticamente planas, considerando distintos valores para el momento lineal, angular y la carga eléctrica de los mismos. Varios factores han sido clave en estas simulaciones, entre ellos la implementación de condiciones de norma que permiten el movimiento de las punturas a través de la malla numérica, y como notó el grupo de Brownsville [58] sustituir el logaritmo del factor conforme por una potencia inversa del mismo con la finalidad de tratar con funciones regulares en las punturas. En el código se tiene implementado el sustituir la ecuación de evolución del logaritmo del factor conforme ϕ por $\chi = e^{-2\phi}$, cuya ecuación de evolución es

$$\partial_t \chi = \beta^m \partial_m \chi + \frac{1}{3} \alpha \chi K - \frac{1}{3} \chi \sigma \hat{\nabla}_m \beta^m \quad (4.46)$$

Como una prueba del código en el régimen de campos gravitacionales intensos se puede estudiar la evolución de agujeros negros estacionarios con el formalismo de punturas móviles utilizando el lapso "1+log" en conjunto con un vector de corrimiento que sigue una evolución tipo Gamma Driver. Como datos iniciales basta dar los valores que toman la métrica y la curvatura extrínseca tomando una sección de t constante cuando se expresa la solución analítica en coordenadas cuasi-isotrópicas (Sección 1.4.3).

Dado que formalmente la distancia física a la puntura es infinita, las condiciones hiperbólicas para el lapso no son capaces de colapsarlo en un tiempo finito. Es por esta razón que tomamos un perfil inicial precolapsado para el lapso de la forma $\alpha = \psi^{-4}$. Para el vector de corrimiento no es necesario asignar un

perfil inicial y lo consideramos igual a cero. Entonces, las ecuaciones que nos fijan la evolución de las variables de norma como un sistema de primer orden en este caso son

$$\begin{aligned}\partial_t \alpha &= \beta^a \partial_a \alpha - 2\alpha K, \\ \partial_t \beta^i &= P^i, \\ \partial_t P^i &= \frac{3}{4} \alpha^2 (\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}}) \hat{\Delta}^i - \eta P^i.\end{aligned}$$

Un último punto importante a considerar es en tanto a la regularización en el eje, dado que formalmente las suposiciones hechas previamente acerca de la regularidad del espacio-tiempo fallan en las punturas. Sin embargo, se ha observado empíricamente que es posible utilizar esta formulación BSSN sin necesidad de una regularización explícita [133], y recientemente hemos comprobado que en nuestro caso podemos apagar la regularización por completo y obtener evoluciones estables, a costa únicamente de precisión cerca del eje. En el caso axisimétrico esto es crucial ya que aunque se tengan punturas, el resto del eje es regular y el método de integración debe ser capaz de resolver ambos casos simultáneamente. Contrario a lo afirmado por los autores del trabajo previo, encontramos que no es necesario ningún método “implícito” de integración para hacer evoluciones con punturas que se mantengan regulares.

Agujero Negro de Schwarzschild

Para seguir la evolución de un agujero negro de Schwarzschild usando las condiciones de norma estándar tomamos para el factor conforme inicial el perfil tipo puntura

$$\psi = 1 + \frac{M}{2R}.$$

En la práctica asignamos un valor $M = 1$; esto es equivalente a reescalar todas las unidades en términos de esta cantidad. Las simulaciones presentadas en

este apartado se realizaron en mallas uniformes de 100^2 , 200^2 y 400^2 , con resoluciones de $M/4$, $M/8$ y $M/16$ respectivamente e imponiendo simetría ecuatorial. Esto da un dominio numérico de $25M$, el cual se evolucionó por un tiempo de $40M$ utilizando un factor de Courant $\rho = \Delta t/\Delta r = 1/2$. En las fronteras externas se impusieron condiciones de onda salientes. El coeficiente del término disipativo en la condición Gamma Driver se tomó como $\eta = 2/M$.

Al seguir la evolución el lapso cambia su comportamiento en la puntura, anulándose aún pero no con pendiente nula de modo que se forma un pico (Figura 4.17). Por otra parte el vector de corrimiento reacciona acorde con el campo gravitacional, adquiriendo una componente radial/esférica saliente que compensa los efectos de estiramiento de foliación (Figura 4.18).

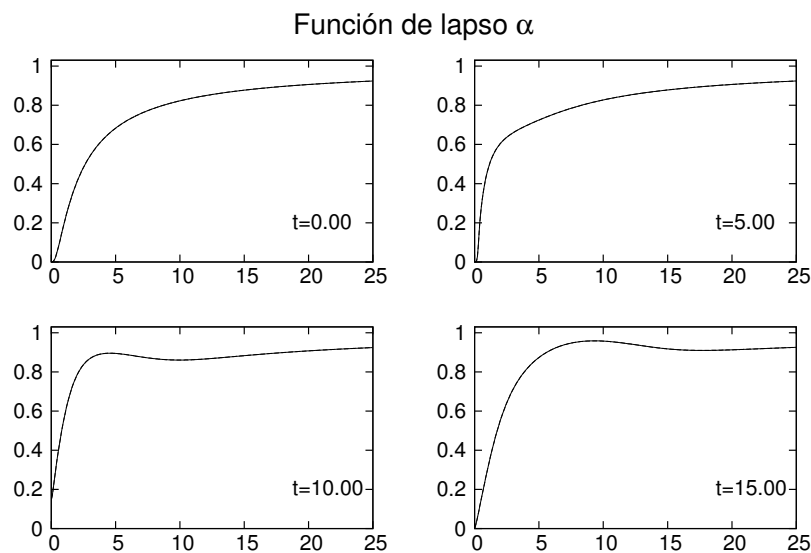


Figura 4.17: Función de lapso evaluada en el ecuador (línea sólida) y en el eje (línea segmentada) a intervalos de tiempo distintos. Inicialmente el comportamiento del lapso cerca del origen es $\alpha = \psi^{-4} \sim R^4$, pero después de un breve período de transición desarrolla un pico de tipo $\alpha \sim |R|$ con $R^2 = r^2 + z^2$, característica de las condiciones de norma.

Pese a que en la puntura se introducen grandes errores al tomar derivadas de cantidades formalmente singulares, la evolución converge al orden esperado y es confiable mientras el error introducido por las fronteras no se propague hasta el interior. La figura 4.20 muestra el detalle de la evolución del error

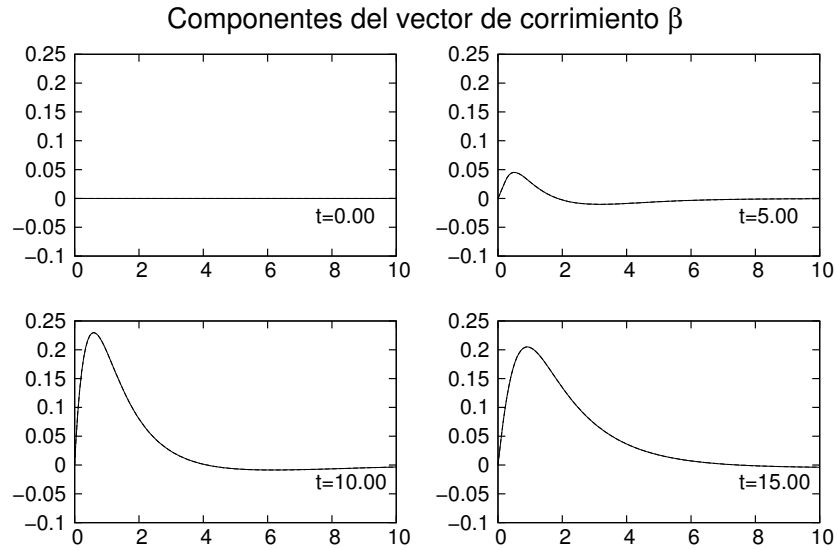


Figura 4.18: Vector de corrimiento $\vec{\beta}$ evaluado en el ecuador (línea continua) y en el eje (línea segmentada). Únicamente se muestran las componentes paralelas a los ejes (β^r y β^z respectivamente), debido a que por la simetría de la configuración las componentes transversas se anulan. Además ambas desarrollan el mismo perfil de modo que se empalman en la figura.

numérico en la restricción Hamiltoniana con los reescalamientos adecuados por potencias de 2^4 consistentes con el orden de convergencia esperado. El error introducido en la frontera no converge en el sentido de que adquiere un valor similar en cada simulación independientemente de la resolución, y al reescalar el valor de las constricciones se observa magnificado para los casos de mayor resolución. Es interesante ver que pese a que no se introduce ningún método de regularización explícito para este caso, la evolución es regular y en el eje la convergencia no se ve afectada. Como última nota, pese a que los errores en la punta son considerables, no se espera que sean catastróficos en el sentido de que por la estructura causal no se espera que se propaguen fuera del horizonte del agujero negro. En el caso de las simulaciones con menor resolución el horizonte, inicialmente en $R = M/2$, queda resuelto muy pobremente y esto da paso a que eventualmente la simulación falle. Esto deja de observarse al aumentar la resolución y es por ello que en el último caso se pudo seguir sin mayor problema hasta un tiempo de $40M$. No se consideró un tiempo mayor ya que a este momento el dominio físico ya está totalmente contaminado por

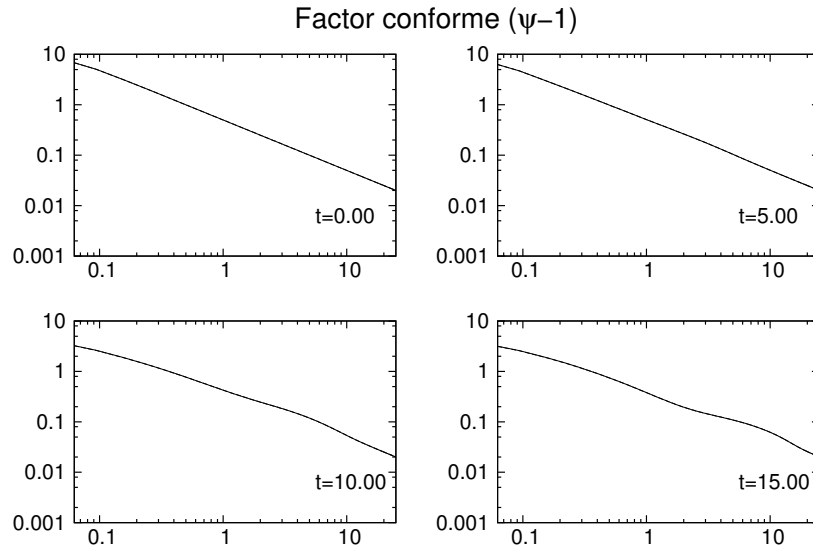


Figura 4.19: Gráfica de la desviación del factor conforme $\psi - 1$ respecto a su valor asintótico, evaluado en el ecuador (línea continua) y en el eje (línea segmentada), presentada en escala logarítmica. Inicialmente esta desviación tiene un comportamiento $\sim 1/r$ cerca del origen, el cual evoluciona hacia un comportamiento $\sim 1/\sqrt{r}$ como se observa al disminuir la pendiente cerca del origen.

violaciones a las constricciones, sin embargo el comportamiento del sistema es bastante estable.

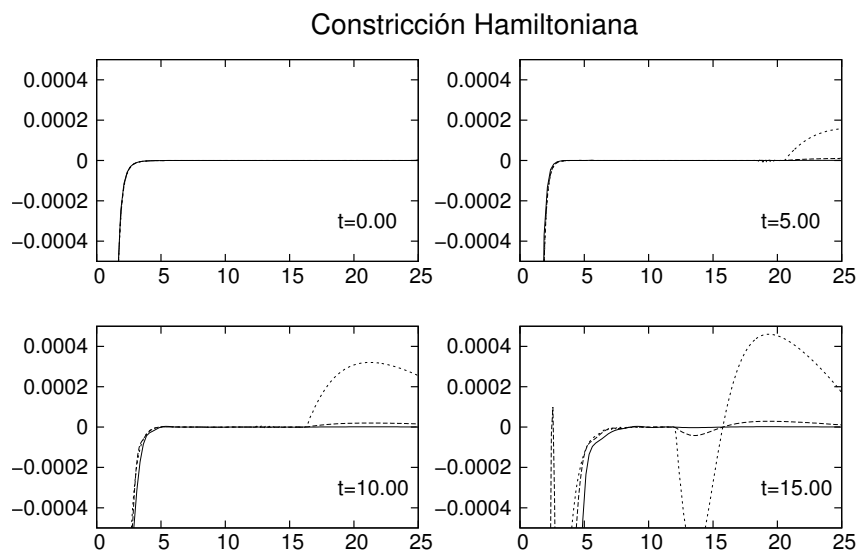


Figura 4.20: Valor de la constricción Hamiltoniana sobre el eje a distintos momentos de la evolución. Desde los primeros momentos se observa como la condición de frontera introduce violaciones que se propagan hacia el interior. Sin embargo, por un período en el que está causalmente desconectada la evolución interior de las fronteras, esta converge al orden esperado.

Agujero Negro de Kerr

Un escenario más interesante que representa una implementación del código en vacío es el que corresponde a la métrica de Kerr, ya que para cualquier valor del parámetro de momento angular no nulo no posee simetría esférica y debido al momento angular total del sistema es necesario utilizar la formulación completa. Aparte, es posible perturbar este tipo de datos iniciales de modo que contengan dinámica de ondas gravitacionales [46]. Como datos iniciales tomamos los correspondientes a una superficie de t constante del espacio tiempo de Kerr, expresado en coordenadas cuasi-isotrópicas expuesto en la Sección 1.4.3, haciendo $Q = 0$. De este modo se tiene que la métrica cuadridimensional es

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{\tilde{r}^2 + a^2 - \Delta}{\Sigma} \right) dt d\phi + \psi^4 \left(dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \chi \sin^2 \theta d\phi^2) \right), \quad (4.47)$$

donde \tilde{r} es en este caso la coordenada radial de Boyer-Lindquist y se utilizan las abreviaciones

$$\Sigma = \tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.48a)$$

$$\Delta = \tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + a^2 = \tilde{r}^2 \left(1 - \frac{M^2 - a^2}{4R^2} \right)^2, \quad (4.48b)$$

$$a = \frac{J}{M}, \quad (4.48c)$$

$$\tilde{r} = R \left(1 + \frac{M + \sqrt{a^2 + Q^2}}{2R} \right) \left(1 + \frac{M - \sqrt{a^2 + Q^2}}{2R} \right). \quad (4.48d)$$

Algo que hay que observar de estas definiciones es que $\sqrt{\Delta}$ en coordenadas cuasi-isotrópicas cambia de signo en el horizonte $R^2 = (M^2 - a^2)/4$ y es necesario respetar esto al construir las componentes de la curvatura extrínseca. De aquí se pueden deducir los valores de la métrica tridimensional y de la curvatura

extrínseca de una superficie de t constante:

$$\psi^4 = \Sigma/R^2, \quad (4.49a)$$

$$H = \frac{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2}. \quad (4.49b)$$

$$K_{R\phi} = \frac{a \sin^2 \theta}{R \Sigma^2 \sqrt{\Sigma \chi}} \left[M \left(2\tilde{r}^2 (\tilde{r}^2 + a^2) + \Sigma (\tilde{r}^2 - a^2) \right) \right], \quad (4.49c)$$

$$K_{\theta\phi} = -\frac{2a^3 \sqrt{\Delta} M \tilde{r} \sin^3 \theta \cos \theta}{\Sigma^2 \sqrt{\Sigma \chi}}. \quad (4.49d)$$

Para estas simulaciones se utilizó una malla homogénea similar al caso del agujero negro de Schwarzschild, y como parámetros del agujero negro se dieron $M = 2$ y $a = 1$. En términos de la masa, la malla en esta ocasión se extiende hasta $12M$ en ambas direcciones, con resoluciones de $M/8$, $M/16$ y $M/32$. En esta ocasión el horizonte aparente está inicialmente en $r = \sqrt{3}M/4 \sim 0.43M$. Igualmente se siguió la evolución por un período de $40M$. El parámetro de disipación en la ecuación de evolución del vector de corrimiento fue de $\eta = 4/M$.

El comportamiento del lapso y de las componentes tangentes al plano se da como en el caso del agujero negro de Schwarzschild, manteniendo un perfil de lapso colapsado en la puntura (figura 4.21), y generando un vector de corrimiento cuya acción es evitar la entrada de las coordenadas en el interior del agujero (figuras 4.22 y 4.23). Una diferencia sutil en este caso se aprecia cerca del origen, donde la configuración dista más de ser esféricamente simétrica, entonces los perfiles del lapso en el ecuador y en el eje no coinciden exactamente, y tampoco las componentes del vector de corrimiento paralelas a los ejes.

La diferencia sustancial en este caso se da debido a las componentes angulares del sistema. Tan pronto comienza la simulación el vector de corrimiento desarrolla una componente angular que se opone al arrastre de las coordenadas propio del espacio-tiempo en la vecindad de la puntura. De los casos estudiados únicamente falló el peor resuelto durante el tiempo de la simulación, no obstante que físicamente las fronteras del dominio se colocaron a la mitad de la distancia considerada en el caso sin rotación. Nuevamente esto se logró

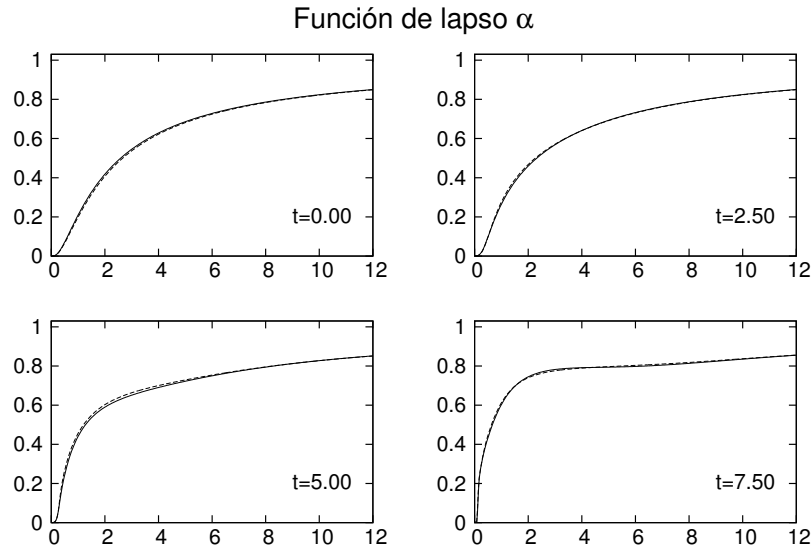


Figura 4.21: Función de lapso evaluada en ecuador (línea continua) y en el eje (línea segmentada) a intervalos de tiempo distintos. Inicialmente el comportamiento del lapso cerca del origen es $\alpha = \psi^{-4} \sim R^4$, pero después de un breve período de transición desarrolla un pico de tipo $\alpha \sim |R|$ con $R^2 = r^2 + z^2$, característica de las condiciones de norma.

sin aplicar métodos de regularización explícitos de las cantidades sobre el eje. Igualmente se observa propagación de error sistemático desde las fronteras del dominio, pero se observa convergencia al orden esperado en el interior (figuras 4.24 y 4.25).

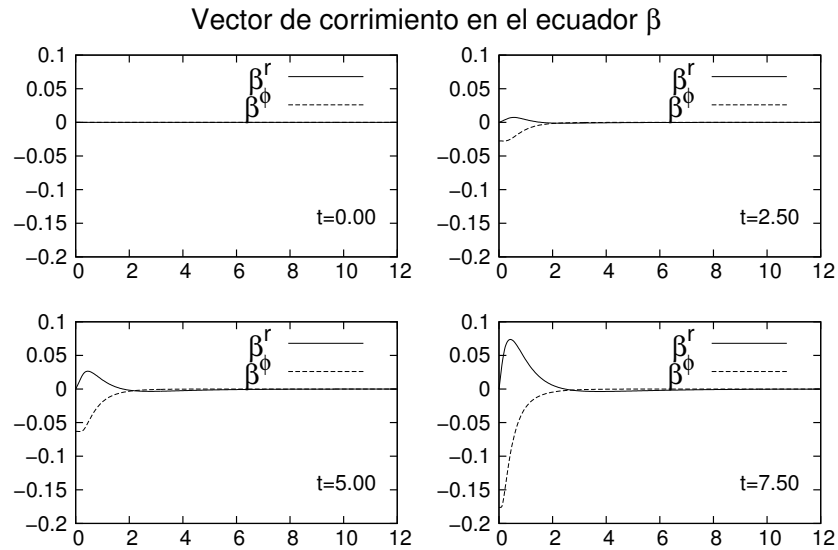


Figura 4.22: Vector de corrimiento $\vec{\beta}$ evaluado en el ecuador. Se muestran únicamente las componentes β^r (línea continua) y β^ϕ (línea segmentada), ya que la componente restante es nula por la simetría de reflexión respecto al ecuador del problema.

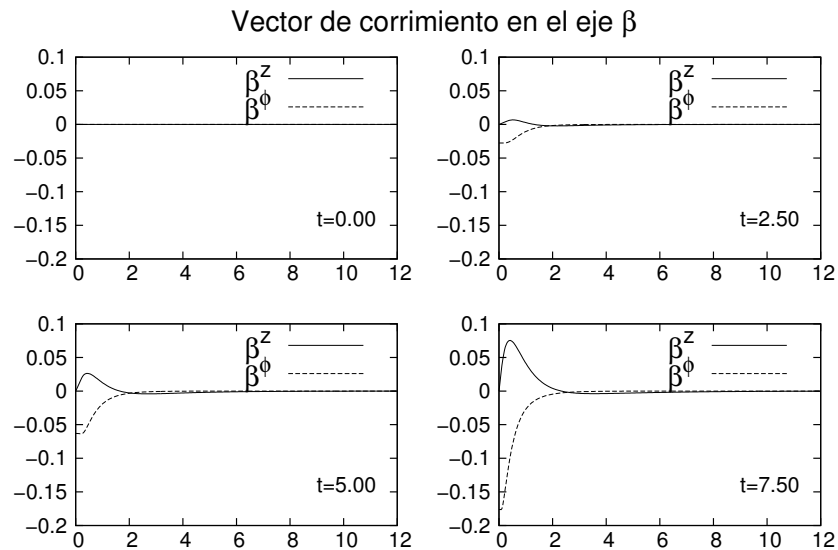


Figura 4.23: Vector de corrimiento $\vec{\beta}$ evaluado en el eje. Se muestran únicamente las componentes β^z (línea continua) y β^ϕ (línea segmentada), ya que la componente radial se anula en el origen.

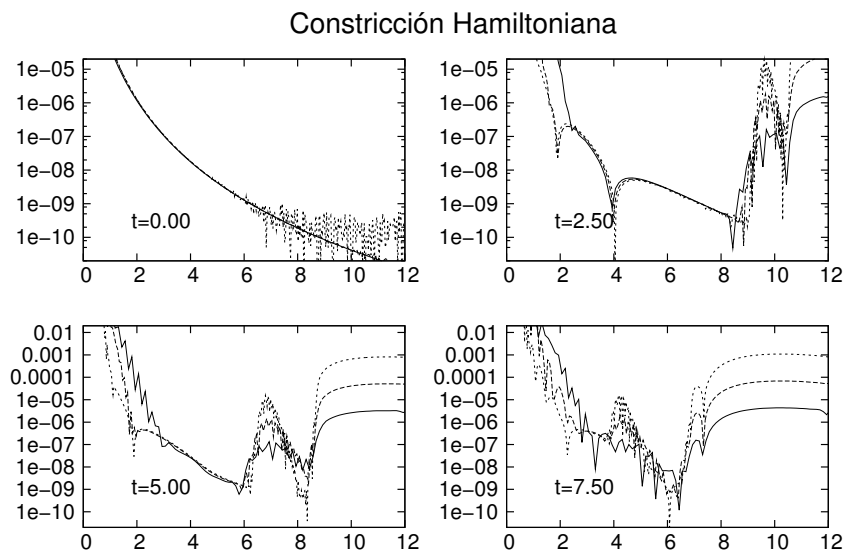


Figura 4.24: Valor rescalado de la constricción Hamiltoniana sobre el eje a distintos momentos de la evolución. La resolución entre puntos corresponde a $M/8$ (línea continua), $M/16$ (línea segmentada) y $M/32$ (línea punteada). Desde los primeros momentos se observa como la condición de frontera introduce violaciones que se propagan hacia el interior. Sin embargo, por un período en el que está causalmente desconectada la evolución interior de las fronteras, esta converge al orden esperado.

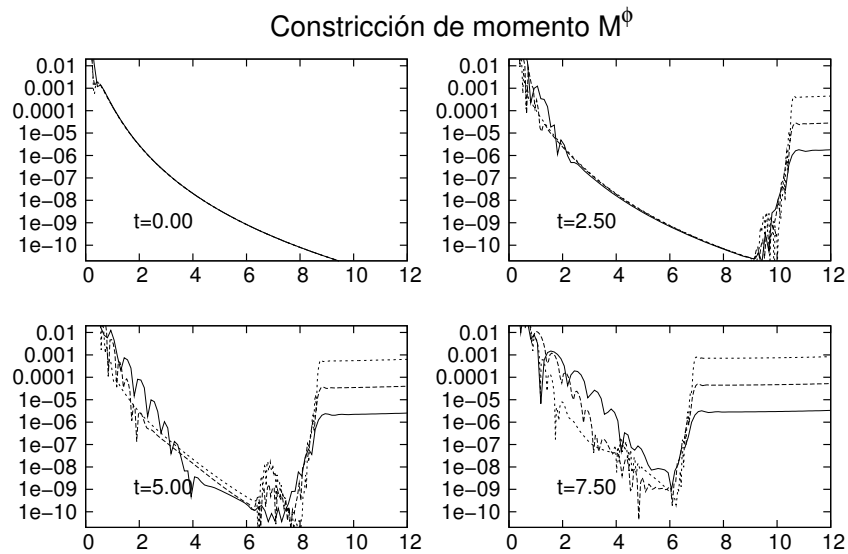


Figura 4.25: Valor reescalado de la constricción de momento sobre el ecuador a distintos momentos de la evolución. La resolución entre puntos corresponde a $M/8$ (línea continua), $M/16$ (línea segmentada) y $M/32$ (línea punteada). Desde los primeros momentos se observa como la condición de frontera introduce violaciones que se propagan hacia el interior. Sin embargo, por un período en el que está causalmente desconectada la evolución interior de las fronteras, esta converge al orden esperado.

4.4 Colisión frontal de agujeros negros cargados

El estudiar la dinámica del espacio-tiempo durante la colisión de dos agujeros negros ha sido el problema insignia de la relatividad numérica. En esta sección se aborda el estudio de la colisión frontal de dos agujeros negros, en una configuración análoga al problema estudiado por Hahn y Lindquist en 1964 [100], que fue retomado durante la década de 1970 [183, 181, 182, 184, 77] y finalmente resuelto en la década de 1990 [1, 15, 33, 17, 16]. En nuestro caso utilizamos la metodología desarrollada para el estudio de la colisión de agujeros negros en órbita que consta de la reformulación de las ecuaciones de evolución y la utilización de condiciones de norma adecuadas. Un enfoque reciente de estos estudios consiste en estudiar la correlación entre las señales de ondas gravitacionales generadas con las posibles señales electromagnéticas asociadas a esos procesos. Para que esto ocurra el sistema debe presentar una configuración de carga y corrientes eléctricas no trivial, lo cual es de esperarse cuando la colisión ocurre en un medio que involucra un plasma ionizado. Los estudios de este tipo requieren de la consideración de las ecuaciones magnetohidrodinámicas completas [83, 82, 37]. Otro modelo menos complicado que cumple con estas características se da al considerar la interacción entre agujeros negros con carga eléctrica. El estudio de la colisión de agujeros negros de este tipo es muy reciente, y los primeros resultados publicados surgieron simultáneamente a la realización de este trabajo [206, 207]. Estos se basan en la evolución de los datos iniciales inicialmente en reposo propuestos en [10] utilizando códigos tridimensionales. Dado que una configuración de agujeros negros no rotantes inicialmente en reposo presenta simetría axial es entonces natural considerar su estudio mediante una formulación adaptada a la simetría.

4.4.1 Ecuaciones de Maxwell en axisimetría

En un escenario electro-vacío podemos trabajar directamente con los campos físicos \vec{E} y \vec{B} . Es posible ver de las ecuaciones de evolución que en ausencia de momento angular el campo eléctrico no posee componente angular, mientras

que esta es la única no nula para el campo magnético. De este modo al asumir que inicialmente las componentes no nulas del campo electromagnético son únicamente E^r , E^z y B^ϕ , las ecuaciones de evolución garantizan que las componentes E^ϕ , B^r y B^z permanecen nulas durante toda la evolución.

Bajo estas consideraciones la constricción de Gauss toma la forma explícita

$$\mathcal{G} := \partial_m E^m + \frac{E^r}{r} + E^m \partial_m \left(\frac{1}{2} \ln \mathfrak{h} + 6\phi \right) - 4\pi \rho_{\text{em}} = 0, \quad (4.50)$$

mientras que la constricción magnética se satisface trivialmente. En esta expresión podemos considerar que los índices no corren sobre la coordenada angular, ya que esos términos son idénticamente nulos ($m = r, z$).

Las ecuaciones de evolución son bastante simples, ya que al tomar el rotacional, los términos de la conexión se anulan al contraerse con el tensor de Levi-Civita $\epsilon^{imn}\Gamma_{mn}^l = 0$ y entonces los términos se pueden expresar como derivadas parciales de los campos *con índices covariantes*. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t E^r &= \beta^m \partial_m E^r - E^m \partial_m \beta^r + \alpha K E^r + \frac{e^{-6\phi}}{r \sqrt{\mathfrak{h}}} \partial_z \left(\alpha e^{4\phi} r^2 H B^\phi \right) \\ &\quad - 4\pi j_{\text{em}}^r, \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t E^z &= \beta^m \partial_m E^z - E^m \partial_m \beta^r + \alpha K E^z - \frac{e^{-6\phi}}{r \sqrt{\mathfrak{h}}} \partial_r \left(\alpha e^{4\phi} r^2 H B^\phi \right) \\ &\quad - 4\pi j_{\text{em}}^z, \end{aligned} \quad (4.51b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B^\phi &= \beta^m \partial_m B^\phi + \alpha K B^r - \frac{e^{-6\phi}}{r \sqrt{\mathfrak{h}}} \left\{ \partial_r \left[\alpha e^{4\phi} r^2 (B E^z + r C E^r) \right] \right. \\ &\quad \left. - \partial_z \left[\alpha e^{4\phi} r^2 (A E^r + r C E^z) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.51c)$$

En la ecuación (4.51c) no hay que confundir el coeficiente métrico $B = \hat{\gamma}_{zz}$ con la componente no nula del campo magnético B^ϕ .

Lo único que falta por considerar es el acople del campo electromagnético en las ecuaciones de la geometría, que están dadas en general por las ecuaciones (2.27). Como el momento angular es nulo estas se simplifican bastante.

4.4.2 Datos iniciales

Para el estudio de agujeros negros cargados es necesario considerar el sistema Einstein-Maxwell que posee dos constricciones adicionales, la Ley de Gauss y la ausencia de monopolos magnéticos. Al considerar una situación momentáneamente estacionaria las únicas constricciones que no se satisfacen trivialmente son la constricción Hamiltoniana y la ley de Gauss. Asumiendo datos iniciales conformemente planos estas toman la forma:

$$\hat{\nabla}^2 \psi + \frac{1}{4\psi^3} \overset{\circ}{\gamma}_{ab} \overset{\circ}{E}^a \overset{\circ}{E}^b = 0, \quad (4.52a)$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\circ}{E}^a = 0. \quad (4.52b)$$

con $\overset{\circ}{\gamma}_{ab}$ la métrica plana, la métrica física $\gamma_{ab} = \psi^4 \overset{\circ}{\gamma}_{ab}$ y el campo eléctrico reescalado $\overset{\circ}{E}^a := \psi^6 E^a$. La construcción propuesta en [10] asume que el campo eléctrico puede darse en términos del gradiente de una función armónica⁵ de modo que cumpla

$$\overset{\circ}{E}_a = -\partial_a \varphi. \quad (4.53)$$

En particular se puede tomar una solución que representa el campo asociado a cargas ubicadas en las coordenadas \vec{r}_i

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad (4.54)$$

Una vez especificado el valor del campo eléctrico se puede buscar una solución a la constricción Hamiltoniana que tenga el comportamiento asintótico de la solución de Reissner-Nördstrom alrededor de cada puntura. En particular, una solución analítica en términos de la misma función armónica que se utilizó para

⁵Una función armónica es una solución a la ecuación de Laplace en un espacio plano $\overset{\circ}{\nabla}^2 F = 0$.

especificar el campo eléctrico es

$$\psi^2 = \left(1 + \frac{k}{2}\varphi\right)^2 - \frac{\varphi^2}{4} = \left(1 + \frac{k+1}{2}\varphi\right)\left(1 + \frac{k-1}{2}\varphi\right). \quad (4.55)$$

En el caso particular $n = 1$ esta solución se reduce a Reissner-Nördstrom cuando, mientras que tomando $k \rightarrow \infty$ se aproxima a la solución de Brill-Lindquist para múltiples agujeros negros sin carga, y cuando $|k| = 1$ se reduce a la solución estática de agujeros negros cargados extremadamente de Papapetrou-Majumdar [143, 124]. Observando el comportamiento de la solución alrededor de cada puntura se observa que representa múltiples agujeros negros cargados con $M_i = kQ_i$, es decir que todos poseen el mismo cociente carga:masa.

Como última nota al respecto, un trabajo muy reciente [70] presenta una construcción analítica que generaliza a la anterior, basada en una solución general a las constricciones (4.52a) y (4.52b) encontrada por Misner y Wheeler en términos de dos funciones armónicas arbitrarias C y D

$$\psi^2 = CD, \quad \mathring{E}_a = C\partial_a D - D\partial_a C. \quad (4.56)$$

En particular se obtiene una solución que representa múltiples agujeros negros con carga eléctrica arbitrarios al tomar

$$C = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i + Q_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}, \quad D = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{M_i - Q_i}{2|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (4.57)$$

En particular, tomando el caso $M_i = kQ_i$ se recupera la solución analítica obtenida anteriormente. Asintóticamente, tomando $r \rightarrow \infty$, la solución tiende a la métrica de Reissner-Nördstrom con masa total $M_{\text{tot.}} = \sum M_i$ y carga $Q_{\text{tot.}} = \sum Q_i$. Sin embargo, tomando $r \rightarrow \vec{r}_i$ se obtienen las masas y cargas

individuales asociadas a cada puntura

$$m_i = M_i + \sum_{j \neq i} \frac{M_i M_j - Q_i Q_j}{2r_{ij}}, \quad (4.58a)$$

$$q_i = Q_i + \sum_{j \neq i} \frac{M_i Q_j - Q_i M_j}{2r_{ij}}. \quad (4.58b)$$

Donde r_{ij} es la distancia coordinada entre las punturas i -ésima y j -ésima. Cabe resaltar que la carga efectiva de cada agujero resulta igual a la carga desnuda cuando el cociente carga:masa es igual para todos ellos.

4.4.3 Condiciones de frontera para el campo electromagnético

El análisis hiperbólico de las ecuaciones de Maxwell muestra que los modos del campo electromagnético que se propagan en la dirección normal a las fronteras se componen de las proyecciones de los campos tangentes a la frontera. En base a esta descomposición resulta entonces que para la componente normal a la frontera basta con hacer la evolución hasta la frontera sin implementar una condición específica, y entonces solo enfocarnos en las componentes tangentes.

El enfoque más consistente consiste en imponer una evolución de los campos en la frontera que permita que los modos salientes se propaguen libremente y solo imponer condiciones sobre los modos entrantes. Sin embargo por el momento no nos ocupamos de una descomposición tan formal e implementamos condiciones de onda saliente para todas las componentes tangentes a las fronteras, y con ello obtenemos una evolución estable. En particular, asumimos que en las fronteras la métrica ya es muy cercana a la métrica plana, de modo que en la frontera radial externa imponemos condiciones de frontera de onda saliente a las componentes E^z y B^ϕ , mientras que en las fronteras verticales se aplican estas condiciones a las componentes E^r y B^ϕ .

Otra condición de frontera surge al imponer simetría ecuatorial. Al conside-

rar campos electromagnéticos existe aún una libertad discreta al imponer esta simetría, la cual consiste en conservar o invertir el signo de la carga eléctrica de la configuración reflejada en el ecuador. En el primer caso, la superposición de campos eléctricos en el plano ecuatorial anula idénticamente la componente E^z , y de modo similar los campos magnéticos se anulan en el origen ya que se pueden interpretar como asociados a corrientes en el eje vertical con direcciones opuestas. En conclusión esto se puede implementar asumiendo que la componente E^r tiene comportamiento par al reflejarse en el plano ecuatorial, mientras que las componentes E^z y B^ϕ tienen comportamiento impar. Un análisis análogo en el caso en que se refleja la configuración y se invierten las cargas lleva a la conclusión de que se tiene que considerar el comportamiento complementario de las componentes del campo electromagnético al reflejarse en el plano ecuatorial.

4.4.4 Resultados Numéricos

Utilizando la prescripción de la sección anterior se construyeron datos iniciales analíticos para la colisión de agujeros negros con mismo cociente Q/M . Los agujeros negros considerados son idénticos, por lo que la simulación puede ejecutarse con mayor eficiencia imponiendo simetría ecuatorial. Los datos iniciales entonces están caracterizados por tres parámetros: la distancia al ecuador z_0 , el parámetro de carga Q y el de masa M de cada agujero negro. Para esta simulación se eligió $M = 2.0$, $Q = 0.5$ y $z_0 = 5.0$. En términos del parámetro individual de masa de cada agujero negro, la simulación se realizó con $Q = M/4$ y $z_0 = 5M/2$, lo cual representa una distancia aproximada entre los horizontes de $4M$. Se utilizaron dominios numéricos con simetría ecuatorial con 200^2 y 400^2 puntos, y resoluciones $M/8$ y $M/16$ respectivamente, de modo que las fronteras se encuentran en $r = 25M$ y $z = 25M$. Como condiciones de norma se utilizó una foliación tipo $1 + \log$ implementada como ecuación de evolución, y un shift del tipo Gamma-Driver con un parámetro de disipación $\eta = 4/M$. Para mantener una evolución estable en el eje se utilizó disipación numérica en todas las variables dinámicas, con un valor de 0.005 para el coeficiente de disipación. Además de esta consideración no se aplicó ningún otro procedimiento para

preservar la regularidad en el origen.

La evolución procede de manera similar al caso sin carga, ya que la repulsión eléctrica no es suficiente para compensar la atracción gravitacional. Las punturas parten del reposo y se aceleran hasta colisionar en el origen del sistema coordinado, momento en el que desaceleran súbitamente para dar paso a la formación de un único agujero negro con carga eléctrica. El agujero negro final se asienta hacia una configuración esféricamente simétrica. Durante la colisión, el movimiento de los agujeros negros cargados da origen a la aparición de un campo magnético azimutal, el cual termina oscilando con amplitud decayente una vez que los agujeros se han fusionado. Las figuras 4.26, 4.27, 4.28, 4.29, muestran la evolución durante un tiempo igual a $25M$, que es aproximadamente el tiempo en que el centro del dominio entra en contacto causal con las fronteras. Durante este período los agujeros negros parten del reposo y se aceleran gradualmente, avanzando aproximadamente una distancia coordinada M hacia el centro de masa. Esto lo podemos identificar sin necesidad de encontrar horizontes aparentes observando el comportamiento del mínimo del lapso, que coincide con el comportamiento de la singularidad en el factor conforme (figuras 4.26 y 4.27).

Por otra parte, como se observa en la figura 4.28 el vector de corrimiento reacciona rápidamente en la vecindad de cada puntura mostrando un comportamiento similar al que desarrolla en el caso de la evolución de un agujero negro aislado. Al continuar la evolución las componentes centrales del shift alrededor de cada puntura se cancelan terminando con un perfil similar al de un agujero negro individual.

Por otra parte, la evolución del campo electromagnético resulta no trivial. Inicialmente el campo magnético es nulo, mientras que el campo eléctrico cerca de cada puntura se asemeja al campo de un agujero negro cargado. Al acelerarse las punturas se genera un campo magnético azimutal, con signos opuestos en ambas punturas como se aprecia con detalle en el eje en la Figura 4.29. Por su parte, el campo eléctrico conserva en buena forma el perfil en la región lejana, mientras que en la parte central la posición de las punturas se mueve y con ello las fuentes en donde identificamos la carga asociada a cada agujero

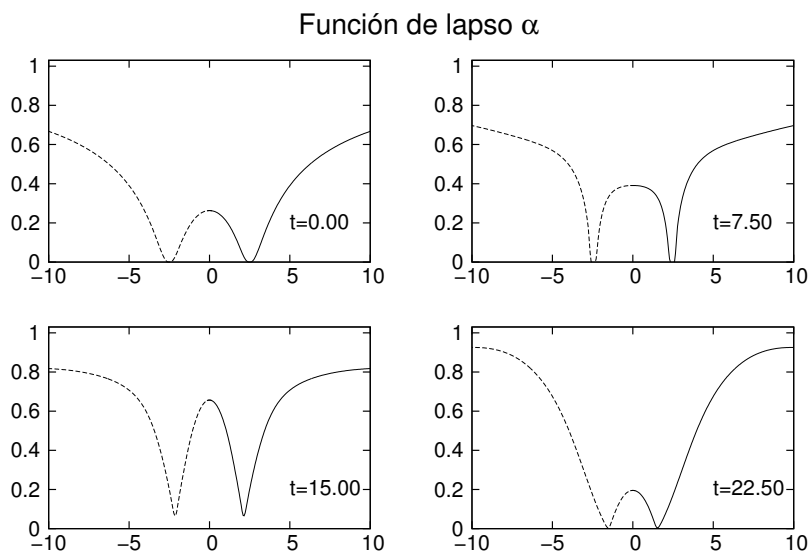


Figura 4.26: Evolución del lapso en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros cargados idénticos con $Q = M/4$. Inicialmente se toma un perfil precolapsado de la forma $\alpha = 1/\psi^4$.

negro (Figura 4.32). Finalmente las punturas se fusionan y el campo tiende a un perfil esférico, que es el correspondiente a un agujero negro RN. Por otra parte, como el agujero negro final por consideraciones de simetría acaba en reposo y posee carga eléctrica, el campo magnético ha de tender a anularse. Esto lo observamos con detalle en la Figura 4.31. Lo que sucede es que una vez que los agujeros negros se desaceleran súbitamente se produce un cambio de signo gradual en la componente angular del campo magnético, y a partir de ese momento comienza a oscilar con amplitud decreciente.

La simulación se considera que llega a un estado final una vez que los agujeros negros colapsan y la evolución tiende a un estado cuasi-estacionario. En la figura 4.30 se aprecian los perfiles finales del lapso, logaritmo del factor conforme, y las componentes z del vector de corrimiento y el campo eléctrico. En este estado la evolución de estas funciones continua aun ritmo menor por efectos de la elección de norma, el lapso sigue colapsando alrededor de la puntura y el vector de corrimiento sigue creciendo para compensar los efectos de estiramiento de la malla.

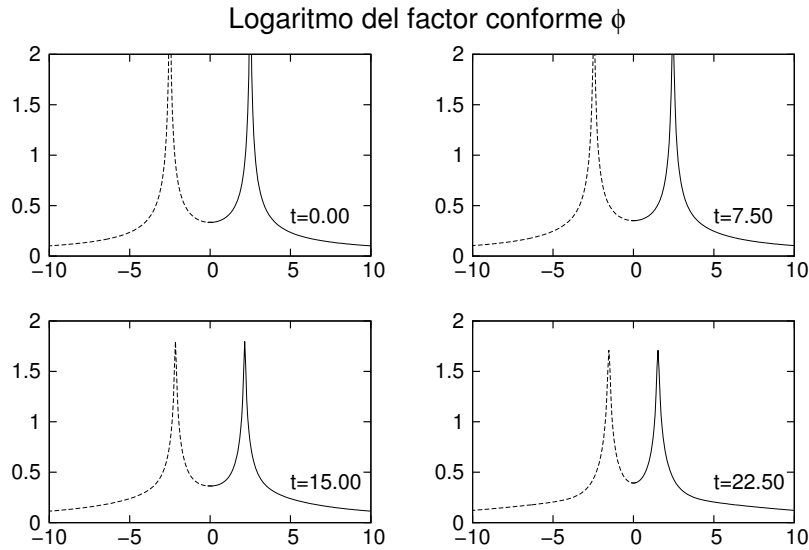


Figura 4.27: Evolución del logaritmo del factor conforme en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros cargados idénticos con $Q = M/4$.

Finalmente se incluye en la Figura 4.33 la gráfica del residuo obtenido al evaluar la constricción de Gauss a distintos momentos de la evolución, para dos resoluciones distintas, mostrando convergencia al orden esperado.

Para comparación presentamos el caso con cargas opuestas utilizando los mismos parámetros, y $Q_2 = -Q_1$. La evolución de la geometría del espacio-tiempo procede de manera muy similar (figuras 4.34, 4.35, 4.36), con la excepción de que al poseer las cargas signos opuestos, experimentan una fuerza atractiva que finalmente hace que el tiempo de colapso sea un poco menor. Esto puede apreciarse mejor en la gráfica de la componente paralela al eje del vector de corrimiento, en la que se observa una pendiente mayor en el origen al mismo momento de la evolución.

La diferencia fundamental se da en los campos electromagnéticos. Al ser las cargas opuestas el efecto lejano es una cancelación del campo eléctrico, resultando en un perfil similar al de un dipolo eléctrico. En la Figura 4.39 se aprecia la distribución del campo eléctrico a distintos momentos de la evolución. Mientras las punturas se acercan la cancelación entre los campos se hace más

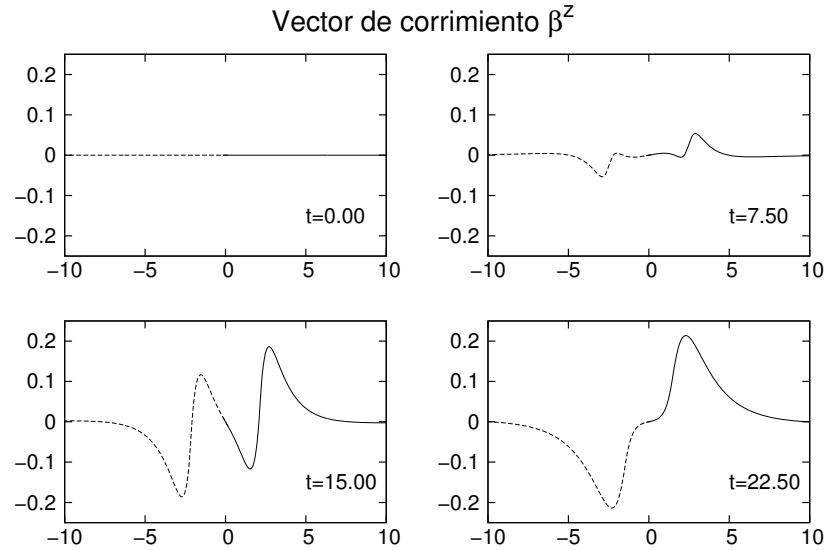


Figura 4.28: Evolución de la componente vertical del vector de corrimiento en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros cargados idénticos con $Q = M/4$.

evidente, y una vez que se juntan el campo residual tiende a desvanecerse, llegando a una configuración que describe un agujero negro sin carga. Por su parte, la componente azimuthal del campo magnético adquiere el mismo valor alrededor de ambas punturas (figura 4.37), y cuando se fusionan las punturas se produce un cambio de signo como producto de la desaceleración de las cargas. Esta configuración del campo magnético comienza a oscilar con amplitud decreciente, de modo que los campos residuales se radían (figura 4.40).

Del mismo modo que en el caso con carga del mismo signo, se incluye en la Figura 4.38 los perfiles del lapso, el logaritmo del factor conforme, el vector de corrimiento y el campo eléctrico una vez que la evolución ha alcanzado un estado cuasi-estacionario. Se observa un campo eléctrico residual oscilante que está en proceso de radiación y que en comparación en esta etapa es dos ordenes de magnitud menor al remanente que quedó en el caso anterior el cual resulta en un agujero negro cargado.

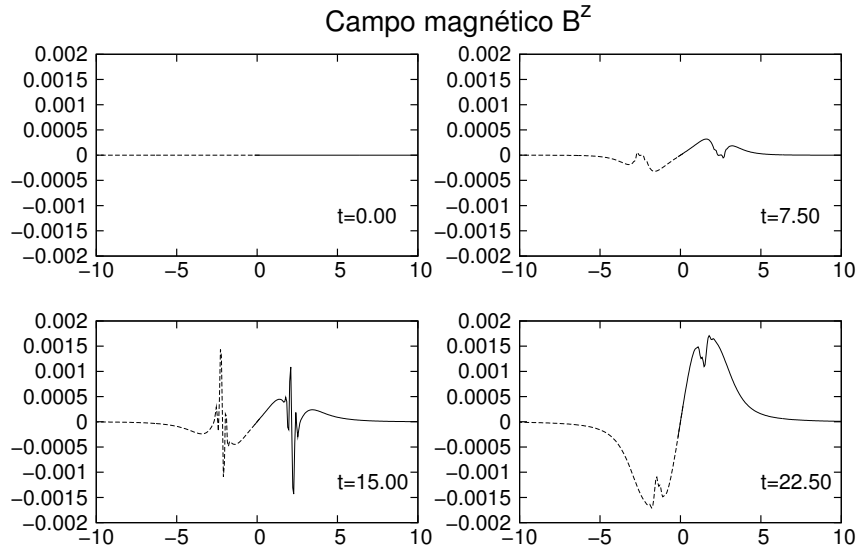


Figura 4.29: Evolución de la componente angular del campo magnético en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros cargados idénticos con $Q = M/4$.

4.5 Discusión

Haciendo un recuento de los avances en la línea de este capítulo, primeramente se tiene que para el caso de espacio-tiempos regulares es posible llegar a una formulación de valores iniciales explícitamente regular en el eje. El formalismo aquí presentado es bastante regular y aquí lo abordamos explícitamente para el caso de la formulación BSSN en el que se busca aislar el elemento de volúmen y la expansión local como variables independientes del sistema. Para este sistema se encuentra una formulación muy robusta que resulta estable incluso al omitir un procedimiento de regularización explícito.

Se analizaron detenidamente pruebas estándar para un código de este tipo, contemplando simulaciones de espacio-tiempo plano con norma no trivial que incluyen la evolución en la dirección angular. Esto representa un buen avance con respecto a otros estudios en axisimetría que asumen una dinámica trivial en la dirección angular. También se consideró la inclusión de materia en la forma de un campo escalar distribuido esféricamente. La evolución en este caso también procede de manera regular. En este caso se observa que para incrementar la

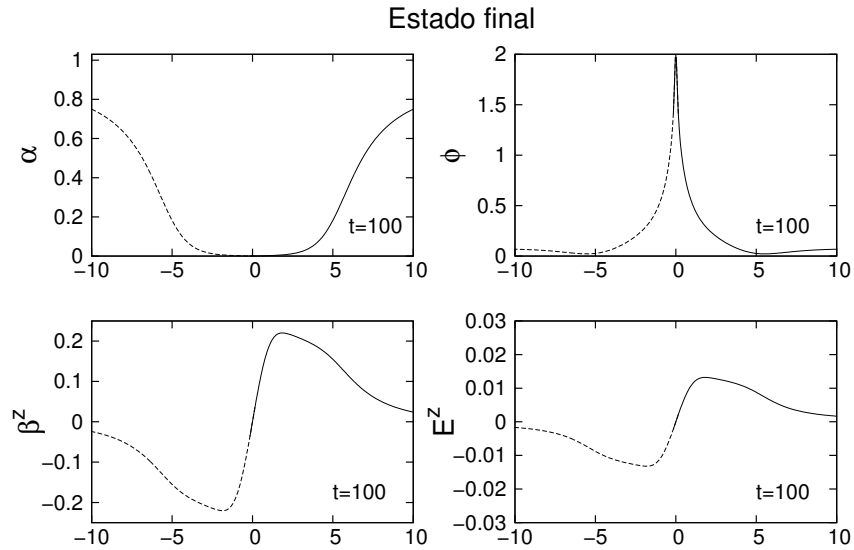


Figura 4.30: Estado final sobre el eje de la función de lapso α , el logaritmo del factor conforme ϕ , la componente vertical del vector de corrimiento β^z , y la componente vertical del campo eléctrico E^z .

estabilidad en el eje es necesario añadir términos de disipación numérica a las ecuaciones de evolución. Esta es una práctica muy común en simulaciones de este tipo y debido a que estos términos se anulan en el límite continuo no se altera considerablemente el comportamiento de las soluciones.

Para probar el código en el régimen de campos intensos se consideraron configuraciones correspondientes a un agujero negro de Schwarzschild y de Kerr utilizando datos iniciales de tipo puntura. Se utilizaron las condiciones de norma estándar para la evolución de punturas móviles y se observa el comportamiento esperado. Dado que el comportamiento del lapso y de las componentes de la curvatura extrínseca en las punturas es diferente del comportamiento regular que asume el algoritmo de regularización, este falla y produce una evolución inestable; por ello se realizaron estas evoluciones sin aplicar dicho procedimiento y en cada caso se observa una evolución estable. Finalmente se abordó el problema de la colisión de agujeros negros cargados, asumiendo masas iguales y los casos de cargas iguales y opuestas. Por la simetría del problema y la conservación de la carga total se esperaba que las configuraciones finales correspondieran a un agujero negro del tipo Reissner-Nördstrom en el caso de

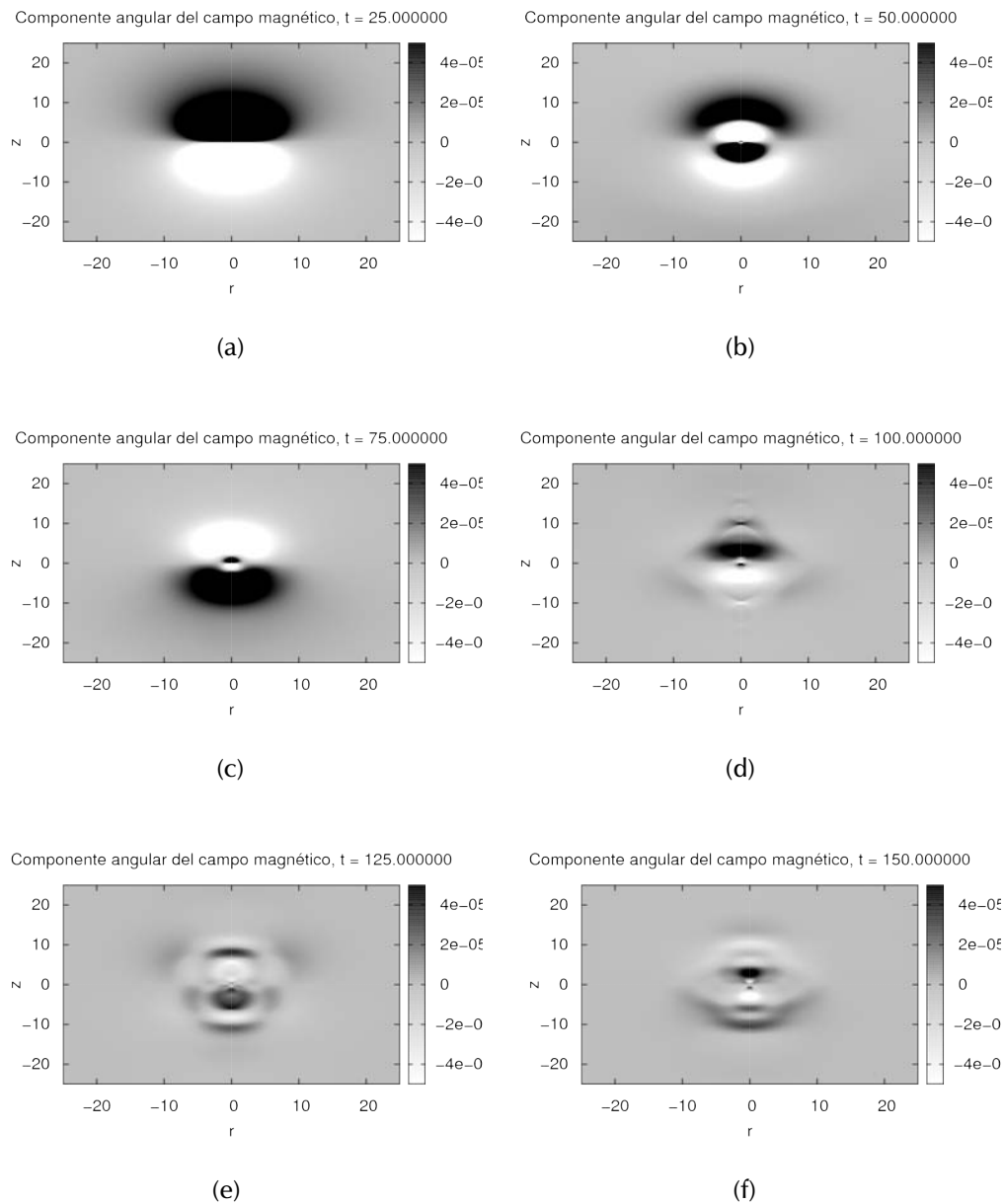


Figura 4.31: Instantáneas de la evolución de la componente azimutal del campo magnético en distintos momentos de la evolución durante la colisión de dos agujeros negros idénticos con carga. Hacia el final de la evolución el campo magnético comienza a oscilar con amplitud decayente (el error introducido por contamina bastante las figuras a tiempos tardíos, sin embargo esto no altera el comportamiento cualitativo del campo).

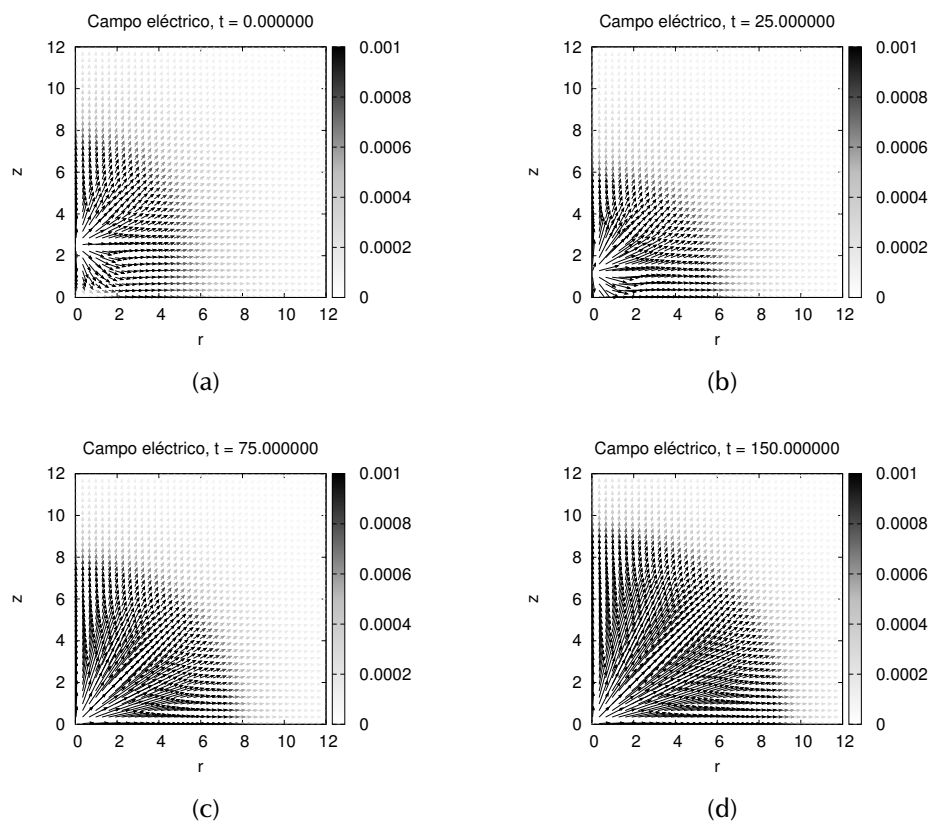


Figura 4.32: Instantáneas de la evolución del campo eléctrico en distintos momentos de la evolución durante la colisión de dos agujeros negros idénticos con carga. Hacia el final de la evolución el campo tiende a una distribución esférica característico de la métrica de RN.

cargas iguales, y a un agujero negro de Schwarzschild en el caso de cargas opuestas. La evolución de la geometría del espacio-tiempo es muy similar en ambos casos, observando un retraso relativo en el tiempo de colapso en el caso en que las cargas poseen el mismo signo. Por otro lado, el comportamiento de los campos electromagnéticos difiere bastante. Para el caso de cargas con signos iguales el espacio-tiempo posee una carga neta y el comportamiento asintótico de los campos coincide con el de una carga central, mientras que al tomar cargas opuestas el comportamiento se asemeja asintóticamente al de una distribución con momento dipolar. En el primer caso durante el colapso la configuración del campo eléctrico tiende a la configuración de una carga puntual en el origen, mientras que en el segundo caso el campo eléctrico tiende a

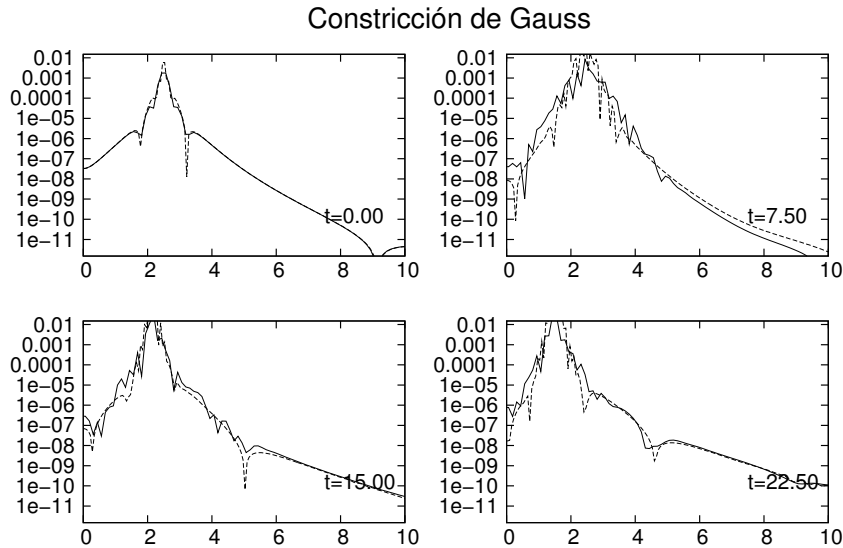


Figura 4.33: Valor absoluto residual de la constricción de Gauss evaluada sobre el eje a distintos momentos de la evolución. Las líneas sólida y segmentada corresponden a los valores obtenidos a distintas resoluciones, siendo la segunda refinada por un factor de dos. La línea segmentada está reescalada por un valor de 2^4 , mostrando convergencia a cuarto orden.

desvanecerse. En ambos casos como resultado de la aceleración de las cargas se produce un campo magnético azimutal en la región central (por la simetría del problema este campo tiene una simetría de reflexión bien definida en el ecuador, siendo impar en el caso de cargas iguales y par en el caso de cargas opuestas). Al colisionar las punturas el campo magnético comienza a decaer y oscilar, dándonos de este modo una huella palpable del proceso de “ring down” mediante el cual un agujero negro se asienta hacia una configuración estacionaria. Este comportamiento del campo magnético es bastante interesante ya que nos lleva a pensar que inmediatamente después de la colisión de agujeros negros de este tipo la acreción de partículas cargadas va a disminuir debido a la fuerza de Lorentz. Para el caso en el que el agujero negro es producto de la colisión de agujeros con cargas iguales el campo magnético residual en un instante desvía un flujo radial de partículas acelerando las de un signo hacia los polos, mientras las del signo contrario son desviadas hacia el ecuador. Para el caso en que los agujeros negros originales tenían cargas opuestas las partículas son desviadas hacia cada polo, dependiendo de su signo.

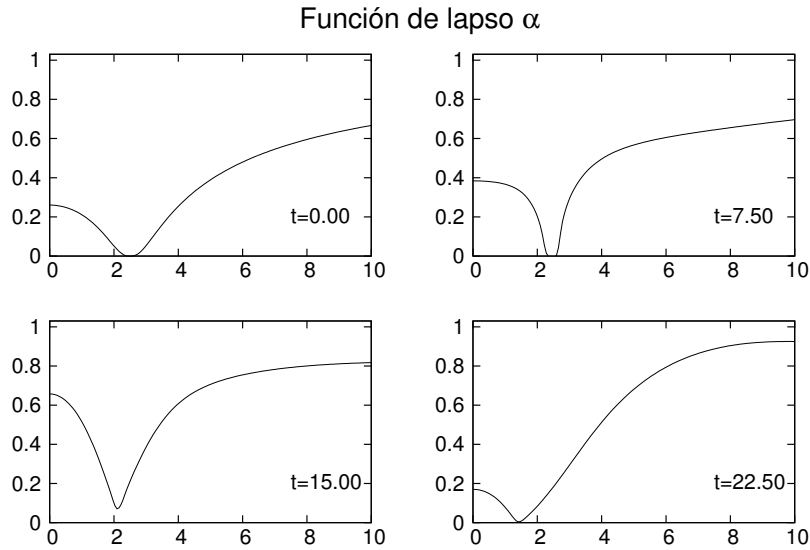


Figura 4.34: Evolución del lapso en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros con masas idénticas y cargas opuestas, con $|Q| = M/4$. Inicialmente se toma un perfil precolapsado.

Con todos estos resultados observamos que la formulación propuesta y desarrollada en este capítulo es muy robusta y permite estudiar objetos astrofísicos relevantes. Una extensión natural de este trabajo es el estudio de la colisión de agujeros negros en medios materiales. Aún se requieren características adicionales en el código que permitan hacer un estudio más detallado. La primera de ellas es la inclusión de condiciones de frontera adaptadas a las constricciones, lo cual es una generalización del desarrollo mostrado en el Capítulo 3. La generalización no es trivial, ya que al salir de la simetría esférica es necesario satisfacer las componentes de la constricción de momentos tangentes a las fronteras, lo cual conceptualmente no presenta problemas ya que en este caso existen dos modos entrantes del sistema de constricciones a partir de los cuales podemos encontrar las condiciones deseadas. El problema conceptual consiste en que fuera de la simetría esférica adicionalmente se tienen modos del sistema que no tienen que ver con las constricciones sino con el contenido de radiación gravitacional entrante y no es trivial determinar cuál es el comportamiento que evita la introducción de este tipo de información en las fronteras. Por el momento es posible ignorar este detalle situando las fronteras del do-

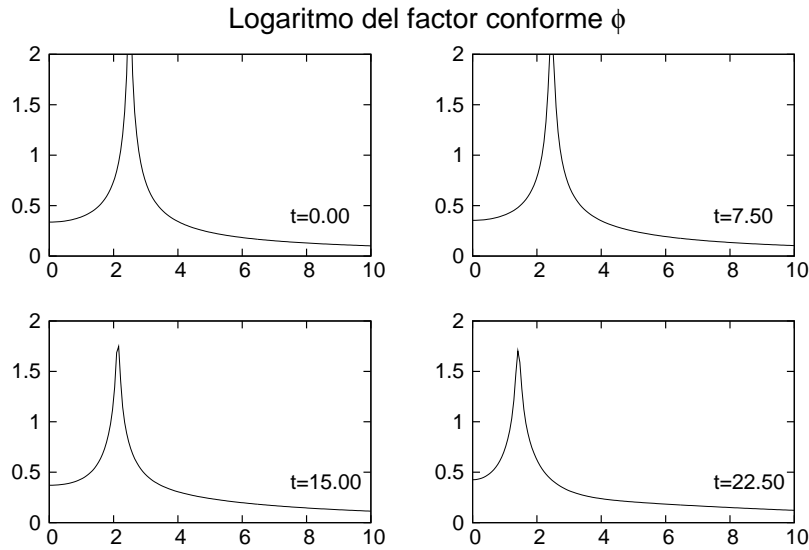


Figura 4.35: Evolución del logaritmo del factor conforme en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros con masas idénticas y cargas opuestas, con $|Q| = M/4$.

minio computacional lo más lejos posible, de modo que la región central esté causalmente desconectada de ellas por mucho tiempo y los errores/radiación introducidos sean mínimos. Otras características necesarias para el análisis son la extracción de radiación gravitacional/electromagnética y la detección de horizontes asociados a agujeros negros, ambas tareas no triviales. Actualmente el formalismo más usado para la extracción de ondas gravitacionales se basa en la reducción del tensor de Weyl en términos de escalares, y a partir de estos calcular la información física relevante. En el Apéndice C abordo estos temas con énfasis particular en el caso de espacio-tiempos con simetría axial. Aunque el tensor de Weyl puede descomponerse de un modo directo en términos de las cantidades calculadas en el código, la descomposición multipolar y el cálculo de las cantidades físicas relevantes requiere de la evaluación de integrales de las distintas cantidades sobre superficies esféricas. El tema de la detección de horizontes asociados a agujeros negros lo trato en el Apéndice B, el enfoque usual consiste en encontrar superficies con expansión nula, lo cual en axisimetría requiere únicamente encontrar curvas que cumplen ciertos criterios. Una vez localizada una superficie de este tipo es posible encontrar las propiedades de la

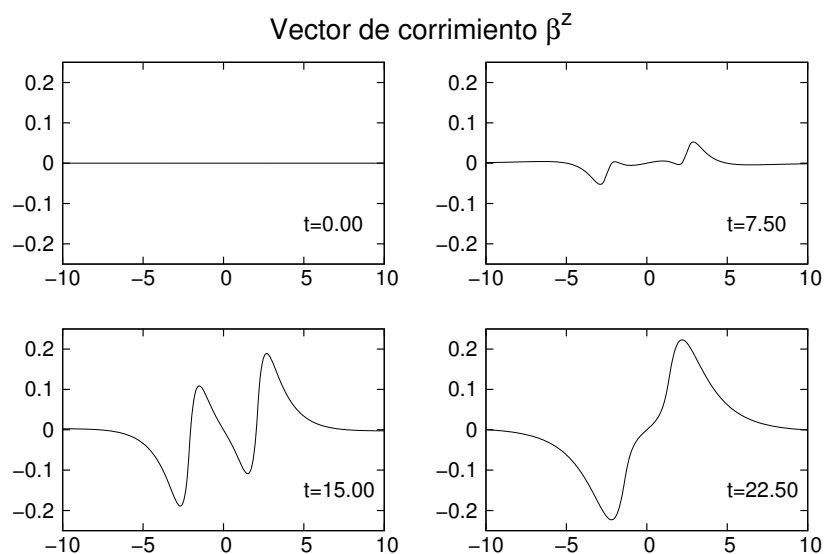


Figura 4.36: Evolución de la componente vertical del vector de corrimiento en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros con masas idénticas y cargas opuestas, con $|Q| = M/4$.

misma realizando distintas integrales sobre ella.

Un último detalle acerca de los resultados de este trabajo y acerca del código en particular, un código de este tipo está en continuo desarrollo y mantenimiento. Aún hay varias tareas de optimización del mismo que se han identificado y se va a seguir trabajando en ello. El acceso al código está disponible bajo petición y se espera que el equipo que trabaje con él crezca con el tiempo.

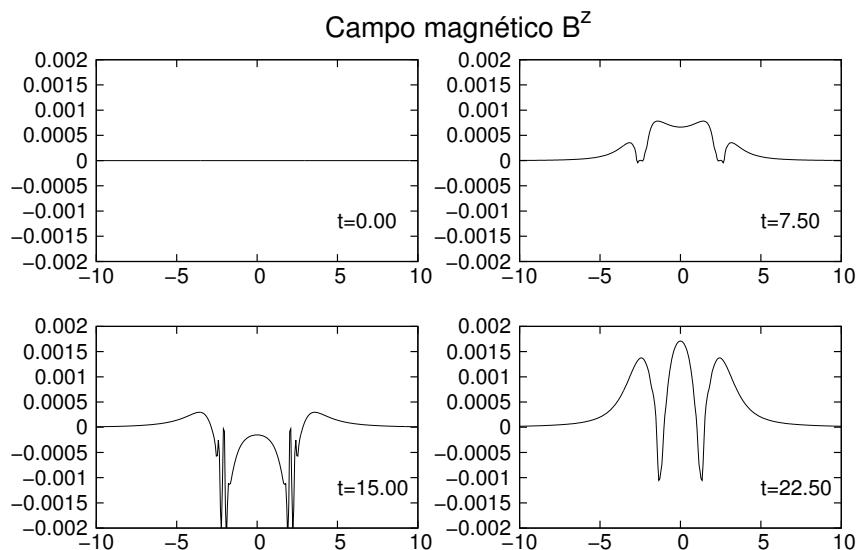


Figura 4.37: Evolución de la componente angular del campo magnético en el eje durante la primera fase de la colisión de dos agujeros negros con masas idénticas y cargas opuestas, con $|Q| = M/4$.

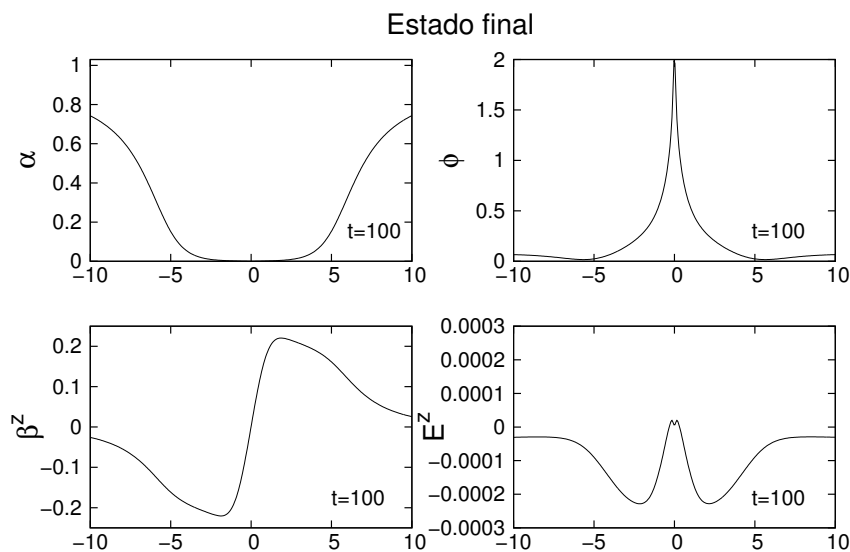


Figura 4.38: Estado final sobre el eje de la función de lapso α , el logaritmo del factor conforme ϕ , la componente vertical del vector de corrimiento β^z , y la componente vertical del campo eléctrico E^z .

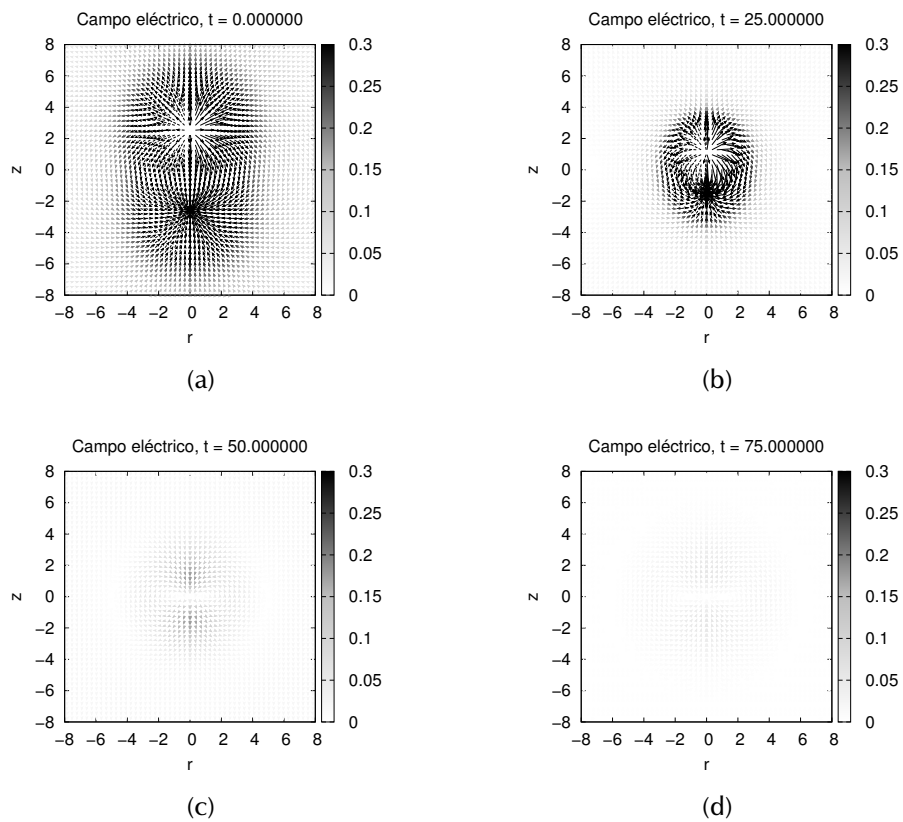


Figura 4.39: Instantáneas de la evolución del campo eléctrico en distintos momentos de la evolución durante la colisión de dos agujeros negros con masas idénticas y cargas opuestas, con $|Q| = M/4$. El agujero negro final tiene carga nula, por lo que el campo tiende rápidamente a desvanecerse.

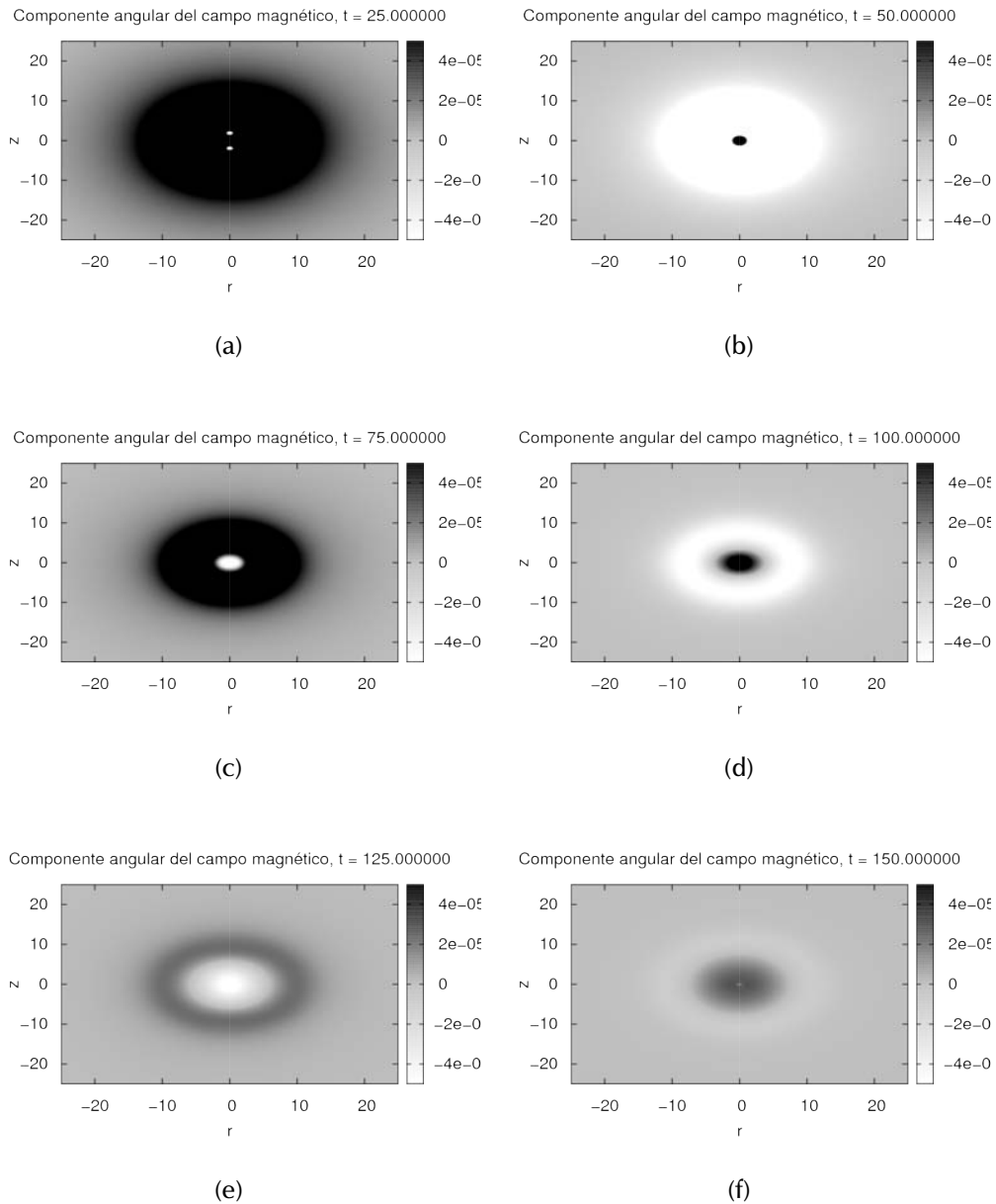


Figura 4.40: Instantáneas de la evolución de la componente azimutal del campo magnético en distintos momentos de la evolución durante la colisión de dos agujeros negros con masas idénticas y cargas opuestas, con $|Q| = M/4$. Hacia el final de la evolución el campo magnético comienza a oscilar con amplitud decreciente.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos abordado varios aspectos de la Relatividad Numérica abarcando desde desarrollos teóricos hasta aplicaciones en astrofísica y cosmología.

En los Capítulos 1 y 2 se hace una recapitulación de la descripción de sistemas autogravitantes en Relatividad General como problemas de valores iniciales. La motivación de esto fue dar una presentación autocontenida de la metodología para abordar este tipo de problemas con un énfasis particular en situaciones simétricas. Actualmente estos tópicos se encuentran diseminados en la literatura especializada y han ido refinándose conforme la investigación en esta área ha avanzado. Consideré importante sintetizar estos contenidos en el contexto de la formulación BSSN, la cual se ha mostrado bastante robusta para su aplicación en la investigación en astrofísica relativista. Además, los contenidos de estos capítulos no son únicamente relevantes como una recopilación bibliográfica, sino que conllevan resultados y derivaciones nuevas, en particular las referentes al análisis hiperbólico de la formulación BSSN generalizada y de las ecuaciones de Maxwell. Los resultados de este tipo de análisis tienen relevancia inmediata en la implementación de condiciones de frontera adecuadas y en el análisis de la radiación emitida por estos sistemas. También la formulación de las ecuaciones para el campo escalar cargado en el formalismo $3 + 1$ constituye un desarrollo original.

El Capítulo 3 contiene los desarrollos de tres trabajos publicados durante este período [13, 191, 192]. El punto en común de estos trabajos consiste en que todos ellos tratan sistemas con simetría esférica y la parte numérica se trabajó utilizando el código `01linSphere2` del grupo de Relatividad Numérica del Instituto de Ciencias Nucleares. El primero de estos trabajos trata acerca de la implementación de condiciones de frontera consistentes con las ecuaciones de constricción de la Relatividad General. Se muestra que este enfoque evita la introducción de errores que violan las constricciones y no convergen a cero en el límite continuo, característicos de las condiciones de frontera de tipo onda saliente que son utilizadas en la mayoría de las simulaciones actuales. Esto representa un incremento en la eficiencia computacional ya que nos permite restringirnos a dominios pequeños y enfocar los recursos para contar con alta resolución sin necesidad de aplicar métodos de mallas adaptativas más sofisticados.

El segundo trabajo contempla la evolución y colapso de campos escalares con interacción electromagnética con el objetivo de probar la conjetura de censura cósmica en este tipo de procesos. Se observa en todos los casos estudiados que resultan en colapso total la formación de un horizonte aparente que rápidamente tiende a estabilizarse hacia una configuración estacionaria consistente con la métrica de Reissner-Nördstrom. Aunque teóricamente es posible tener configuraciones estacionarias que presentan singularidades desnudas para el sistema Einstein-Maxwell, se observa que el impacto de la interacción electromagnética en la dinámica resulta en una tendencia a la formación de configuraciones neutras junto con la dispersión del exceso de carga.

Por último, se utilizó el código para estudiar el colapso de configuraciones cosmológicas inhomogéneas con simetría esférica, haciendo una comparación entre cosmologías dominadas por un fluido perfecto sin presión y un campo escalar real. Este trabajo está intrínsecamente relacionado con un estudio del crecimiento de las perturbaciones lineales de un campo escalar [8], el cual no se incluye en los contenidos de la tesis pero se trabajó en él paralelamente. Los resultados para la evolución de perturbaciones pequeñas (lineales) de fluido perfecto en un universo en expansión son bien conocidos y en nuestro caso

bien reproducidos. No obstante, el caso de campo escalar no ha sido analizado con el mismo rigor (aunque sí existen trabajos previos en los que generalmente se toma el enfoque de considerar promedios espaciales y/o temporales). Utilizando este enfoque obtenemos que para un campo escalar masivo existen configuraciones (cuya extensión es mayor que la longitud Compton asociada al campo escalar) para las cuales en el límite de perturbaciones pequeñas el contraste en la densidad de energía crece de una manera consistente con el crecimiento de las perturbaciones de polvo. Por el contrario, las configuraciones en las cuales la inhomogeneidad está distribuida en una escala comparable o menor que la longitud Compton del campo se dispersan de un modo esencialmente libre. Este resultado corrobora rigurosamente afirmaciones de otros trabajos previos ofreciendo un argumento a favor del modelo de campo escalar como materia oscura en base a la posibilidad de explicar la escasez de galaxias pequeñas en términos de esta frecuencia de corte natural. Por último observamos que al considerar el colapso de este tipo de configuraciones en el régimen no lineal, el modelo de polvo da paso a la formación de estructuras en tiempos menores que el modelo de campo escalar. Esto es bastante intuitivo ya que el polvo no posee presión intrínseca que evite el colapso, mientras que el campo escalar al llegar a una etapa de colapso total presenta una dinámica mucho más complicada.

Finalmente, el Capítulo 4 abarca un objetivo que fue el principal motor de este trabajo: la simulación numérica de espacio-tiempos axisimétricos. El trabajo presentado en esta sección es totalmente original y se están preparando artículos al respecto para su publicación, y a diferencia de otros trabajos similares que usan una reducción dimensional propuesta por Geroch, aquí se emplea el mismo enfoque mediante el cual hacemos simulaciones en simetría esférica en el grupo de Relatividad Numérica del ICN-UNAM. Para esto se adaptó la formulación BSSN para los casos en que la simetría axial es explícita, y se aplicó un procedimiento de regularización a las ecuaciones de evolución de modo que en un espacio-tiempo regular todas las funciones sean bien comportadas en el eje. Una primera versión de este sistema se publicó como parte de las memorias del “IX Taller de la División de Gravitación y Física Matemática de la Sociedad Mexicana de Física” [190]. Por el momento se han considerado las

condiciones de norma estándar hiperbólicas en las que se basan la mayoría de simulaciones de colisiones de agujeros negros en la actualidad. El código contempla la evolución de espacio-tiempos con momento angular, de modo que las simplificaciones del sistema de ecuaciones de evolución por consecuencia de la simetría son mínimas respecto a las que ocurren en simetría esférica. Se han hecho pruebas del código en espacios sin materia, que corresponden a elecciones no triviales de norma y también contemplan la inclusión de agujeros negros estacionarios. Un resultado no esperado son las robustas propiedades de estabilidad de la formulación, ya que se han logrado simulaciones por largos tiempos con resoluciones moderadas e incluso omitiendo el proceso de regularización en el eje. Las simulaciones reproducen los comportamientos conocidos de las distintas funciones del sistema y el valor residual de las constricciones converge a cero consistentemente con el orden de discretización. También se han realizado simulaciones que incluyen materia utilizando un campo escalar real con resultados igual de satisfactorios. Por último se muestran simulaciones correspondientes a la colisión frontal de agujeros negros cargados, tema que sólo ha sido estudiado recientemente en paralelo al desarrollo de este trabajo. Se observan diferencias cualitativas en el comportamiento de los sistemas al comparar el caso con cargas iguales y el caso con cargas opuestas. Estos resultados son muy positivos, pero requieren refinamiento y más desarrollo técnico, sobre todo para poder obtener de ellos información relevante a la física del evento a partir de las señales gravitatorias y electromagnéticas generadas.

Apéndice A

Cantidades conservadas: masa, carga y momento angular

A.1 Integrales de Komar

La densidad de energía de la materia que compone un sistema está codificada en el tensor de energía momento, que cumple una ley de conservación $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$. Esto no es suficiente para dar una definición adecuada de la masa de un sistema en Relatividad General ya que este tensor no considera la contribución del campo gravitacional a la energía total del sistema. Una cantidad adecuada para estos fines puede construirse cuando el espacio-tiempo posee un vector de Killing temporal k^{μ} [62], ya que la existencia de este tipo de vectores está relacionada a las simetrías del espacio-tiempo y estas a su vez con la existencia de cargas conservadas. En este caso podemos construir una corriente

$$J_{\text{K}}^{\mu} := k_{\nu} {}^{(4)}R^{\mu\nu} = {}^{(4)}\nabla^{\nu} {}^{(4)}\nabla^{\mu} k_{\nu}, \quad (\text{A.1})$$

la cual también cumple una ecuación de conservación ${}^{(4)}\nabla_{\mu} J_{\text{K}}^{\mu} = \frac{1}{2} k^{\mu} {}^{(4)}\nabla_{\mu} R = 0$ (la última igualdad es una propiedad al tomar la derivada del escalar de curvatura a lo largo de un vector de Killing). De este modo se puede definir una cantidad

conservada que podemos asociar a la masa del sistema

$$I_K = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} n_{\mu} J_K^{\mu} dV = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} n_{\mu} \nabla^{\nu} \nabla^{\mu} k_{\nu} dV, \quad (\text{A.2})$$

conocida como la *Integral de Komar*. En este caso podemos usar el teorema de Stokes para reescribirla como una integral de superficie

$$I_K = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} n_{\mu} \nabla^{\mu} k^{\nu} dA_{\nu}. \quad (\text{A.3})$$

Para un espacio-tiempo con un vector de Killing angular m^{μ} y espacialoide, es totalmente análogo el cálculo de una constante asociada a la magnitud del momento angular del sistema, en este caso

$$J_K = -\frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Sigma} n_{\mu} \nabla^{\mu} m^{\nu} dA_{\nu}. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Integrales ADM

Otro enfoque para definir los conceptos de masa y momento angular de un sistema fue introducido por Arnowitt, Deser y Misner en su artículo sobre la dinámica de la Relatividad General[20]. Tomando el límite de campo débil, la contribución de la curvatura extrínseca a la densidad se vuelve despreciable y se tiene

$$\rho_{ADM} = \frac{1}{16\pi} {}^3R = \frac{1}{16\pi} \partial_j (\partial_i h_{ij} - \partial_j h). \quad (\text{A.5})$$

Por otra parte, la curvatura extrínseca domina en la densidad de momento

$$j_{ADM_i} = \frac{1}{8\pi} \partial_j (K_{ij} - \delta_j^i K) \quad (\text{A.6})$$

Integrando estas expresiones y utilizando el teorema de Stokes se reducen

estas fórmulas a integrales de superficie

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \oint (\delta^{ij} \partial_i h_{jk} - \partial_k h) dA^k \quad (\text{A.7})$$

$$P_{ADM}^i = \frac{1}{8\pi} \oint (K_j^i - \delta_j^i K) dA^j \quad (\text{A.8})$$

Podemos definir una densidad de momento angular $l^i = \epsilon^{ijk} x_j j_{ADM_i}$ y entonces tenemos para el momento angular total

$$J_{ADM}^i = \frac{1}{8\pi} \oint \epsilon^{ijk} x_j K_{kl} dA^l \quad (\text{A.9})$$

donde el segundo término de la densidad de momento se anula al ser el elemento de área paralelo al vector de posición en infinito.

Es importante notar que estas expresiones se derivan en el límite de campo débil y que para una situación donde la dinámica sea fuerte las integrales de volumen no están bien justificadas; el hecho de que se tomen estas integrales de superficie en infinito hace que estas cantidades estén bien definidas a pesar de lo complicada que pueda ser la dinámica interna.

Un aspecto importante de la masa ADM es que bajo ciertas condiciones es semipositiva, siendo el espacio de Minkowski el único caso donde el valor de esta cantidad es cero. Este resultado es conocido como el *teorema de energía positiva*, y dice que la masa ADM de cualquier espacio-tiempo no singular, asintóticamente plano en el que se satisface la condición de energía dominante, es no negativa.

A.3 Integral de carga

Dado que la corriente electromagnética cumple una ecuación de continuidad, es posible mostrar que la carga eléctrica total es una cantidad conservada. La

densidad de carga en una superficie espacialoide es $\rho_{em} = -n_\mu j_{em}^\mu$, y la carga total es entonces

$$Q = \int_{\Sigma} \rho_{em} dV = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} {}^{(3)}\nabla_m E^m dV, \quad (\text{A.10})$$

y utilizando el teorema de Stokes

$$Q = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} E^m dA_m. \quad (\text{A.11})$$

Definiendo las cantidades conformes asociadas $\hat{\rho}_{em} = \psi^6 \rho_{em}$, $\hat{E}^a = \psi^6 E^a$ y $\hat{\gamma}_{mn} = \psi^{-4} \gamma_{mn}$, se tiene entonces que $dV = \psi^6 d\hat{V}$ y entonces se puede expresar inmediatamente la integral de carga en términos de las cantidades conformes

$$Q = \int_{\Sigma} \hat{\rho}_{em} d\hat{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \hat{\nabla}_m \hat{E}^m d\hat{V} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\Sigma} \hat{E}^m d\hat{A}_m. \quad (\text{A.12})$$

Para lo que se consideró que la constricción de Gauss toma la forma:

$$\hat{\nabla}_m \hat{E}^m = 4\pi \hat{\rho}_{em}.$$

Apéndice B

Caracterización de Agujeros Negros

La existencia de singularidades y agujeros negros en el espacio-tiempo es una predicción genérica de la Relatividad General [101, 146, 69]. Aunque se espera que una descripción cuántica de la gravitación sea capaz de remediar el problema de la existencia de singularidades a nivel clásico, es posible que la estructura causal no trivial asociada a agujeros negros se manifieste macroscópicamente y por ello es relevante caracterizar este tipo de objetos.

El factor que define la existencia de un agujero negro es la presencia de un horizonte que encierra una región causalmente desconectada de otra región exterior. Como ni siquiera la luz es capaz de escapar de esta región, este tipo de objetos no emiten señales electromagnéticas a nivel clásico y de allí surge su nombre. Los agujeros negros estacionarios son relevantes porque son las configuraciones hacia las que tiende el espacio-tiempo como producto del colapso gravitacional y un resultado importante en este sentido son los teoremas de “no pelo” que en general dicen que los agujeros negros estacionarios requieren para su descripción un número finito de parámetros asociados a cargas conservadas. Dada su relevancia dentro de las distintas ramas de la gravitación moderna el estudio y caracterización de agujeros negros ha sido un tema de estudio de alto impacto, y una revisión de esto puede consultarse en [23].

B.1 Horizonte de eventos

El horizonte de eventos es la superficie que encierra la región de no retorno en un agujero negro. Un horizonte de eventos futuro se define formalmente como la frontera del pasado causal del futuro nulo asintótico \mathcal{I}^+ . Por definición un horizonte de eventos es una hipersuperficie nula y es un concepto global que requiere del conocimiento de la totalidad del espacio-tiempo. Se dice que un espacio-tiempo presenta un agujero negro si existe un horizonte de eventos.

Al ser una superficie nula, esta es generada por geodésicas nulas y representa una frontera en la cual el comportamiento de las geodésicas salientes cambia: en el exterior todas las geodésicas salientes pueden ser extendidas arbitrariamente hasta el infinito nulo, mientras que en el interior esto no ocurre y genéricamente llegan a una singularidad.

Un método para determinar la posición de un horizonte de eventos consiste en integrar geodésicas nulas salientes. Esto se optimiza haciendo la integración desde el final de la evolución hacia el pasado ya que de este modo el horizonte de eventos se comporta como un atractor. Como ejemplo tomamos el caso del espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Boyer-Lindquist, en el cual solo consideraremos trayectorias radiales nulas. Esta condición implica que la velocidad asociada a estas trayectorias es

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (\text{B.1})$$

Claramente la posición $r = 2M$ es estacionaria y es la que corresponde al horizonte de eventos en estas coordenadas. En general las trayectorias con este vector tangente en el exterior están determinadas por

$$t - t_0 = 2M \ln \frac{r - 2M}{r_0 - 2M} + r - r_0, \quad r_0 > 2M. \quad (\text{B.2})$$

Todas estas trayectorias se aproximan asintóticamente hacia el horizonte de eventos cuando se extienden al pasado (Figura B.1). En este caso es inmediata la identificación del horizonte, pero al considerar casos no estacionarios y con

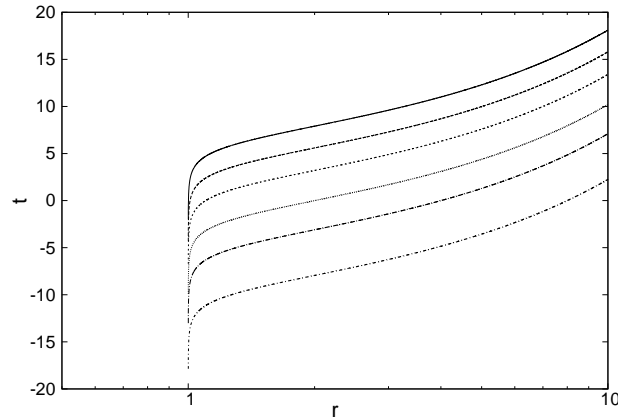


Figura B.1: Geodésicas nulas salientes en la región exterior del espacio-tiempo de Schwarzschild con $M = 1/2$. Mostradas en orden descendente para los parámetros $r_0 = 1.001, 1.01, 1.1, 2, 4, 8$.

menos simetrías la integración de las ecuaciones geodésicas no es tan simple.

Otra idea en esta línea consiste en parametrizar al horizonte como una superficie de nivel de una función escalar F , de modo que al ser su gradiente nulo la función estará restringida a cumplir una ecuación de evolución:

$$\partial_t F = \beta^i \partial_i F - \alpha \sqrt{{}^{(3)}\nabla_i F {}^{(3)}\nabla^i F}. \quad (\text{B.3})$$

Este es un método muy robusto para encontrar horizontes de eventos que ha sido implementado exitosamente en el pasado. Una revisión más extensa puede encontrarse en [74]. Si tomamos el ejemplo anterior la ecuación (B.3) puede resolverse por el método característico. Entonces el perfil inicial que demos a la función escalar F será constante a lo largo de las geodésicas nulas. La Figura B.2 muestra la evolución de la función escalar F .

B.2 Horizontes de Killing

Otras superficies interesantes en la caracterización de agujeros negros son los llamados *Horizontes de Killing*, que consisten en hipersuperficies nulas asociadas a un vector de Killing en las que este cambia de carácter temporal oide a

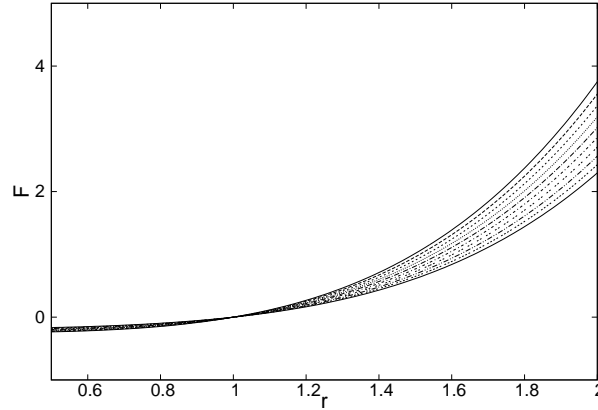


Figura B.2: Evolución de la función F en el espacio-tiempo de Schwarzschild con $M = 1/2$, en coordenadas de Boyer-Lindquist.

espacialoide. La exposición de este concepto la baso en la que aparece en [62]. Una característica de los espacio-tiempos estacionarios es la existencia de un vector de Killing asociado a las traslaciones temporales en infinito \vec{k} , y para el caso de agujeros negros estacionarios también se tiene un vector de Killing rotacional \vec{m} . Para agujeros negros estacionarios se tiene que el horizonte de eventos es un horizonte de Killing de la combinación $\vec{k} + \omega_H \vec{m}$, para un valor constante ω_H que depende del momento angular del sistema.

Un concepto asociado a los Horizontes de Killing es el de *gravedad superficial*, que puede interpretarse como la aceleración de una partícula estática cercana al horizonte medida por un observador en infinito. Como un vector de Killing χ^μ es proporcional al tangente a las geodésicas sobre el horizonte, cumple con la ecuación

$$\chi^\mu \nabla_\mu \chi^\nu = \kappa \chi^\nu, \quad (\text{B.4})$$

donde κ es la gravedad superficial. Dado que $\vec{\chi}$ es vector de Killing y de acuerdo con el teorema de Frobenius, podemos transformar esta expresión en

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \chi_\nu)(\nabla^\mu \chi^\nu). \quad (\text{B.5})$$

Cabe observar que bajo un reescalamiento del vector de Killing por una constan-

te $\vec{\chi} \rightarrow c\vec{\chi}$, la gravedad superficial se ve reescalada $\kappa \rightarrow c^2\kappa$. Una normalización natural en un espacio asintóticamente plano es requerir que la norma del vector de translaciones temporales k^μ cumpla $k^2 = -1$ para $r \rightarrow \infty$ y apunte hacia el futuro.

Podemos verificar la afirmación de que la gravedad superficial corresponde a la aceleración de una partícula en el horizonte vista desde infinito en el caso estático. En el horizonte el vector \vec{k} es proporcional a la cuadrivelocidad del observador estático en el horizonte

$$k^\mu = V(x)u^\mu, \quad V = \sqrt{-k_\mu k^\mu} \quad (\text{B.6})$$

donde V es el factor de corrimiento al rojo. La aceleración del observador estático en el horizonte es entonces

$$a_\mu = u^\nu \nabla_\nu u_\mu = \nabla_\mu \ln V \quad (\text{B.7})$$

y la magnitud de esta aceleración es

$$a = V^{-1} \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} \quad (\text{B.8})$$

Un observador en infinito mediría un valor corrido al rojo

$$\kappa = Va = \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V} \quad (\text{B.9})$$

y se puede verificar que esta expresión es equivalente a (B.5).

B.3 Condiciones de energía

Al ser la relatividad general una teoría clásica es razonable suponer que el contenido de materia que funge como fuente en las ecuaciones de Einstein a través de su tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ satisface algún tipo de condición en tanto al contenido de energía. Los teoremas generales de existencia y unicidad de soluciones así como los teoremas de singularidades parten de la hipótesis

de que la materia cumple con algunas de estas condiciones. En este apartado incluyo una breve descripción de las cuatro condiciones comunes. Una lectura más extensa se puede encontrar en la mayoría de los textos, por ejemplo en [150].

Para escribir las condiciones de energía de un modo concreto se considera la expresión del tensor de energía momento en un sistema que lo diagonaliza localmente $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$. Esta descomposición coincide con la descripción de fluido cuando la tétrada se construye con el vector de cuadrivelocidad del mismo, de modo que ρ es la densidad comóvil.

- **Condición débil:** Especifica que la densidad de energía medida por cualquier observador es no negativa. Esto es que para todo vector temporaloide u^μ se cumple: $T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \geq 0$. Esto también se puede reescribir en términos de la descomposición de fluido como las condiciones $\rho \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$.
- **Condición nula:** Se enuncia de manera similar a la condición débil pero haciendo énfasis en direcciones nulas. En este caso para un vector nulo arbitrario k^μ se tiene: $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$. En la versión de fluido la condición sólo implica las desigualdades $\rho + p_i \geq 0$.
- **Condición fuerte:** Esta es en realidad una condición sobre la curvatura, y se vuelve una condición de energía en virtud de las ecuaciones de Einstein. Se enuncia que para todo vector temporaloide u^μ se cumple: $(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T/2)u^\mu u^\nu \geq 0$. En forma de fluido se enuncia como $\rho + p_1 + p_2 + p_3 \geq 0$ y $\rho + p_i \geq 0$.
- **Condición dominante:** Dicta que el flujo de momento visto por cualquier observador se propaga a lo largo de líneas temporaloides o nulas. Entonces para todo vector temporaloide u^μ se cumple: $T_{\mu\nu}u^\mu$ es un vector dirigido hacia el futuro de carácter temporaloide o nulo. En forma de fluido se enuncia como $\rho \geq 0$ y $\rho \geq |p_i|$.

Estas condiciones están jerarquizadas, siendo las más restrictivas la fuerte

y la dominante. De estas dos únicamente la condición dominante implica la condición débil, y a su vez todas las anteriores implican la condición nula.

B.4 Censura Cósmica

Debido a la existencia inevitable de singularidades, una de las principales interrogantes de la Relatividad General es si, a diferencia del caso de agujeros negros, es posible la formación de *singularidades desnudas* que no posean un horizonte de eventos que las desconecte causalmente de una región del espacio-tiempo. La falta de evidencia de este tipo de singularidades ha llevado a la formulación de la **conjetura de censura cósmica** [147] que brevemente se enuncia como: *Si el espacio-tiempo se encuentra inicialmente en un estado genérico, no singular, asintóticamente plano y además se cumple la condición de energía dominante, el colapso gravitacional no genera singularidades desnudas.* [199]

Se han encontrado contraejemplos no genéricos [177], y se ha replanteado la conjetura en términos más débiles, pero no ha sido posible a la fecha demostrarla formalmente ni encontrar contraejemplos genéricos que permitan desecharla. En el contexto clásico de la Relatividad General la validez de estas conjeturas sigue siendo un problema abierto importante y una de las mayores motivaciones de la investigación en gravedad cuántica está encaminada a la existencia y naturaleza de las singularidades en virtud de las correcciones cuánticas.

B.5 Horizontes aparentes

En la práctica, el concepto de horizonte de eventos no es muy adecuado por el carácter global que se le asocia. Por otra parte, el concepto de horizontes aparentes es muy útil ya que su definición es local en el sentido de que están definidos sobre hipersuperficies espacialoides del espacio-tiempo. Este concepto se basa en la identificación de superficies atrapadas que son aquellas en las que

la expansión de las geodésicas nulas salientes es negativa. Esta es precisamente la noción que se tiene del horizonte de un agujero negro, y bajo condiciones razonables de energía las superficies atrapadas conservan ese carácter durante la evolución.

El *horizonte aparente* se define como la superficie marginalmente atrapada exterior en una región, esto es que la expansión de geodésicas nulas salientes ortogonales a la superficie es cero. Sea la métrica inducida en una superficie contenida en una sección Σ , con normal \vec{s}

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu - s_\mu s_\nu . \quad (\text{B.10})$$

Ahora, la expansión está dada por el cambio de los elementos de volumen en la dirección nula saliente $\vec{l} = \vec{n} + \vec{s}$, después de un poco de álgebra toma la forma

$$H = -\frac{1}{2\sqrt{h}} h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\vec{l}} h_{\mu\nu} = D_m s^m - K + K_{mn} s^m s^n . \quad (\text{B.11})$$

Usualmente se busca que el horizonte sea superficie de nivel de una función escalar F . Como en ese caso $s_\mu = D_\mu F$, la determinación del horizonte consiste encontrar una superficie que satisface una ecuación diferencial elíptica [7].

La presencia de superficies atrapadas está íntimamente ligada a la formación de singularidades, lo cual se expresa en los teoremas de singularidades de Hawking y Penrose [146] que informalmente pueden enunciarse como: *Para un espacio-tiempo genérico en el que se cumple la condición de energía fuerte, la presencia de una superficie atrapada implica la existencia de una curva temporal oide cerrada o una singularidad en el interior.*

Un método general para abordar la solución de la ecuación (B.11) consiste en considerar al horizonte aparente como curva de nivel de una función escalar $F(x^i)$, tal que sin pérdida de generalidad lo definimos como una superficie en la que

$$F(x^i) = 0 . \quad (\text{B.12})$$

La condición de expansión nula solo toma en cuenta el gradiente de modo que

queda escrita de la forma:

$$\left(\gamma^{mn} - \frac{D^m F D^n F}{u^2}\right) \left(\frac{D_m D_n F}{u} - K_{mn}\right) = 0, \quad (\text{B.13})$$

con $u = \sqrt{D_a F D^a F}$ la norma del gradiente. Reexpresando la segunda derivada covariante en términos de la métrica de fondo podemos reescribir

$$\left(u^2 \gamma^{mn} - D^m F D^n F\right) \overset{\circ}{\nabla}_m \overset{\circ}{\nabla}_n F = \left(u^2 \gamma^{mn} - D^m F D^n F\right) (\Delta_{mn}^a \partial_n F + u K_{mn}). \quad (\text{B.14})$$

B.5.1 Horizontes aparentes en espacios con simetrías

El caso en simetría esférica se simplifica notablemente, ya que el horizonte ha de coincidir con una superficie esférica caracterizada por un valor de la coordenada radial y el vector unitario saliente toma la forma $n^i = (1/\sqrt{\gamma_{rr}}, 0, 0)$. Sustituyendo esto en la ecuación (B.11) obtenemos que la expansión de las geodésicas nulas salientes está dada por:

$$H = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r \gamma_{\theta\theta}}{\gamma_{\theta\theta}} \right) - 2K_\theta^\theta. \quad (\text{B.15})$$

Cabe notar que esta no es una ecuación diferencial que sea necesario resolver porque la geometría del espacio-tiempo es conocida y la forma del horizonte está restringida. Esta ecuación es una condición algebraica que cumplen las superficies candidatas a ser horizontes aparentes, por lo que la implementación usual consiste en calcular la expansión en toda la malla y buscar numéricamente la raíz de mayor valor de esta función con la mejor precisión que nos permita la discretización.

Al considerar el caso en simetría axial el procedimiento se vuelve más complicado ya que solamente podemos asumir que el horizonte cumple con la simetría rotacional, por lo que ha de ser una superficie de revolución suave. Asumiendo que el horizonte es representado por una curva de nivel $F(x^i) = 0$, entonces ha de cumplir la condición (B.14). El problema restante radica en que la condición de expansión nula no es suficiente para determinar una curva que

genere al horizonte. Una vía común para eliminar esta ambigüedad consiste en asumir una parametrización tipo *Strahlkörper* (cuerpo de rayos), que asume que el horizonte posee un punto en su interior desde el cual los rayos trazados en todas direcciones la cruzan una única vez. Esta parametrización está adaptada a un sistema coordenado esférico, de modo que la función escalar queda expresada como:

$$F(x^i) = R(x^i) - h(\theta(x^i)) , \quad (\text{B.16})$$

La función $h(\theta(x^i))$ da la coordenada radial como función del ángulo polar.

Haciendo uso de que la condición para la expansión nula es escalar, evaluamos el lado izquierdo en el sistema esférico. Para ello utilizamos la identidad

$$\begin{aligned} (u^2 \gamma^{mn} - D^m F D^n F) &= (\gamma^{ab} \gamma^{mn} - \gamma^{an} \gamma^{bm}) D_a F D_b F \\ &= \epsilon^{iam} \epsilon^{jbn} \gamma_{ij} D_a F D_b F . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

De este modo podemos reescribir la condición como una ecuación diferencial para la función h

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{d\theta^2} - r - \frac{\sin^2 \theta}{\gamma_{\phi\phi}} (\gamma_{RR} h'^2 + 2\gamma_{R\theta} h' + \gamma_{\theta\theta}) (r - h' \cot(\theta)) + \frac{2}{h} h'^2 \\ = - \left(\frac{|\gamma|}{\gamma_{\phi\phi}} \right) \Big|_s (u^2 \gamma^{mn} - D^m F D^n F) (\Delta_{mn}^a \partial_a F + u K_{mn}) . \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

El lado derecho puede ser evaluado en cualquier sistema, salvo el primer factor. Como condicies de frontera consideramos que la curva sea suave, lo cual en simetría axial se interpreta como:

$$\partial_\theta h|_{\theta=0,\pi} = 0 . \quad (\text{B.19})$$

Para el caso en que también exista simetría ecuatorial, la suavidad de la superficie implica que la derivada de h también se anula en el ecuador, por lo que podemos

terminar allí la integración.

Una generalización para la determinación de horizontes aparentes en axisimetría consiste en utilizar el hecho de que estos son superficies de revolución, por lo cual al tener una curva que la genera, el vector tangente unitario a la curva \hat{u} y el vector rotacional de Killing $\vec{\xi}$ son tangentes a la superficie. Esto implica que el vector normal unitario puede calcularse como el producto exterior de estos últimos, $\hat{s} = \hat{u} \times \vec{\xi}$. Entonces la condición de expansión nula, ecuación (B.11) se vuelve una relación diferencial entre las componentes del vector tangente. Para determinar completamente una curva en un espacio tridimensional requerimos integrar tres ecuaciones diferenciales independientes. Completamos el conjunto con el requerimiento de que el vector tangente sea unitario y ortogonal al vector rotacional de Killing. Este método no ha sido implementado a mi conocimiento y tiene la ventaja de que no es necesario parametrizar al horizonte como una curva de nivel.

Apéndice C

El tensor de curvatura conforme

La parte relevante del tensor de curvatura en las ecuaciones de Einstein es el tensor de Ricci, que puede ser interpretado como la traza del tensor de Riemann. Los grados de libertad que se pierden al tomar la traza del tensor de Riemann están contenidos en el llamado tensor de Weyl $C_{\alpha\beta\mu\nu}$, que en un espacio $n > 2$ dimensional toma la forma:

$$C_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{2}{n-2} [g_{\alpha[\mu}R_{\nu]\beta} - g_{\beta[\mu}R_{\nu]\alpha}] + \frac{2}{(n-1)(n-2)} g_{\alpha[\mu}g_{\nu]\beta}R. \quad (\text{C.1})$$

De su definición es posible ver que este tensor comparte las simetrías del tensor de Riemann, aparte de tener traza cero $C^{\alpha}_{\beta\alpha\nu} = 0$. Una característica del tensor de Weyl es que resulta ser idéntico para variedades relacionadas por una transformación conforme.

Ahora para el caso en cuatro dimensiones, se puede separar al tensor de Weyl en un par de tensores simétricos sin traza llamados la parte eléctrica y magnética por analogía con el campo electromagnético. Estos son definidos al

proyectar el tensor en la dirección normal a una hipersuperficie espacialoide:

$$E_{\mu\nu} := n^\alpha n^\beta C_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (\text{C.2a})$$

$$B_{\mu\nu} := n^\alpha n^\beta C^*_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (\text{C.2b})$$

En la última expresión $C^*_{\alpha\mu\beta\nu} = C_{\alpha\mu\lambda\sigma} \epsilon^{\lambda\sigma}_{\beta\nu} / 2$ es referida como el dual del tensor de Weyl. Estos tensores resultan ser espacialoides ya que su proyección con el normal es nula. Al contar con 10 componentes independientes en total, estos tensores poseen toda la información referente al tensor de Weyl. Usando las identidades de Gauss-Codazi-Mainardi estos pueden ser escritos en términos de cantidades definidas sobre la hipersuperficie:

$$E_{ab} = \frac{1}{2} \left[\underline{\mathcal{L}}_{\vec{n}} K_{ab} + {}^{(3)}R_{ab} + K K_{ab} + \frac{1}{\alpha} {}^{(3)}\nabla_a {}^{(3)}\nabla_b \alpha \right]^{TF}, \quad (\text{C.3a})$$

$$B_{ab} = {}^{(3)}\epsilon^{mm}_{(a} \left[{}^{(3)}\nabla_m \left(K_{nb} - \frac{1}{2} \gamma_{nb} {}^{(3)}\nabla_m K \right) - \frac{1}{2} \gamma_{bm} {}^{(3)}\nabla_c K_m^c \right]. \quad (\text{C.3b})$$

Al sustituir la ecuación de evolución de la curvatura extrínseca, y omitiendo términos proporcionales a las constricciones se puede llegar a las expresiones:

$$E_{ab} = \left[{}^{(3)}R_{ab} + K K_{ab} - K_{am} K^m_b - 4\pi S_{ab} \right]^{TF}, \quad (\text{C.4a})$$

$$B_{ab} = {}^{(3)}\epsilon^{mm}_{(a} {}^{(3)}\nabla_m A_{nb)}, \quad (\text{C.4b})$$

donde $A_{ab} = K_{ab} - \gamma_{ab} K / 3$ es la parte sin traza de la curvatura extrínseca.

Las 10 componentes del tensor de Weyl pueden ser representadas en términos de 5 escalares complejos, llamados escalares de Weyl, que se obtienen al proyectar estos tensores sobre una tétrada nula. Esta es la base del formalismo de evolución de Newmann-Penrose [139] que resulta muy útil ya que estos escalares codifican la información física propagada en ondas gravitacionales. La tétrada siempre puede ser construida usando el vector normal n^μ y una triada espacialoide unitaria $\hat{e}^a_{(i)}$ (usualmente esta triada se construye

de modo que en la región asintótica el vector $\hat{e}_{(1)}$ corresponde al vector radial saliente unitario \hat{r} de un sistema coordenado esférico y los otros dos corresponden a los vectores angulares tangentes a las esferas de radio constante. Por convención usaremos que el vector azimutal es $\hat{e}_{(3)}$. Definiendo el vector complejo $\vec{m} := (\hat{e}_{(2)} + i\hat{e}_{(3)})/\sqrt{2}$ y el tensor complejo $Q_{ab} := E_{ab} - iB_{ab}$ estos escalares pueden finalmente expresarse como

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= Q_{ab}m^am^b, \\ \Psi_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}Q_{ab}m^ae_{(1)}^b, \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2}Q_{ab}e_{(1)}^ae_{(1)}^b, \\ \Psi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}Q_{ab}\bar{m}^ae_{(1)}^b, \\ \Psi_4 &= Q_{ab}\bar{m}^a\bar{m}^b.\end{aligned}$$

Expandiendo estas expresiones obtenemos

$$\Psi_0 = \frac{1}{2} \left[(E_{(2)(2)} - E_{(3)(3)} + 2B_{(2)(3)}) - i(B_{(2)(2)} - B_{(3)(3)} - 2E_{(2)(3)}) \right], \quad (\text{C.6a})$$

$$\Psi_1 = -\frac{1}{2} \left[(E_{(2)(1)} + B_{(3)(1)}) - i(B_{(2)(1)} - E_{(3)(1)}) \right], \quad (\text{C.6b})$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} (E_{(1)(1)} - iB_{(1)(1)}), \quad (\text{C.6c})$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{2} \left[(E_{(2)(1)} - B_{(3)(1)}) - i(B_{(2)(1)} + E_{(3)(1)}) \right], \quad (\text{C.6d})$$

$$\Psi_4 = \frac{1}{2} \left[(E_{(2)(2)} - E_{(3)(3)} - 2B_{(2)(3)}) - i(B_{(2)(2)} - B_{(3)(3)} + 2E_{(2)(3)}) \right]. \quad (\text{C.6e})$$

La información acerca de la radiación gravitacional entrante y saliente está codificada en los escalares Ψ_0 y Ψ_4 respectivamente. Aunque estas expresiones son bastante generales, un resultado importante para espacios axisimétricos sin momento angular es que estos cinco escalares son reales. Esto puede verse al notar que mientras que las componentes angulares de la parte eléctrica del tensor de Weyl $E_{a\phi}$ ($a \neq \phi$) se anulan, la parte magnética al ser un pseudotensor

tiene un comportamiento distinto, y son precisamente esas componentes ($B_{a\phi}$) las únicas no nulas (esto se puede verificar haciendo el cálculo directo). Entonces las proyecciones que aparecen en las partes imaginarias son idénticamente cero. La implicación física de este resultado es que un espacio-tiempo axisimétrico sin momento angular tiene una única polarización admisible de ondas gravitacionales (un resultado similar puede derivarse para ondas electromagnéticas), y conversamente se puede inferir que la razón entre las señales asociadas a las dos polarizaciones independientes puede dar indicios acerca de las propiedades de momento angular de las fuentes.

A partir de estas expresiones podemos hacer uso del tensor de energía-momento de Issacson para calcular la energía y momento que llevan las ondas gravitacionales. El flujo de energía está dado por

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \oint \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 dA . \quad (\text{C.7})$$

Para el flujo de momento tenemos una expresión similar, que escrita en términos del vector saliente queda

$$\frac{dP_i}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \oint e_{(1)i} \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4 dt' \right|^2 dA . \quad (\text{C.8})$$

No es claro de esta expresión, pero la simetría axial requiere que el momento lineal radiado sea paralelo al eje. Cualquier contribución normal al eje es cancelada por una idéntica pero con el signo opuesto.

Otra consecuencia de la simetría axial es el que las ondas gravitacionales en este caso no lleven momento angular. Este solo se radía cuando la dinámica no ocurre uniformemente alrededor del eje de rotación.

C.1 Descomposición multipolar

En el caso axisimétrico la descomposición multipolar [189, 167] se simplifica en buena medida. Comenzando por el hecho de que cualquier función f con peso de espín s puede escribirse como la expansión en armónicos esféricos con peso de espín

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l,m} f^{l,m} ({}_s Y^{l,m}(\theta, \phi)), \quad (\text{C.9})$$

con coeficientes dados por

$$f^{l,m} = \oint f(\theta, \phi) ({}_s \bar{Y}^{l,m}(\theta, \phi)) d\Omega. \quad (\text{C.10})$$

Nos enfocamos en la descomposición de funciones sin dependencia en el ángulo azimutal. Considerando que los armónicos esféricos con peso de espín puede reescribirse en términos de las *matrices-D de rotación de Wigner*[201] como

$${}_s Y^{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} e^{-is\psi} D_{-ms}^l(\phi, \theta, -\psi), \quad (\text{C.11})$$

y a su vez escribiendo la matriz-D en términos de la matriz-d (pequeña)

$${}_s Y^{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} e^{im\phi} d_{-ms}^l(\theta). \quad (\text{C.12})$$

Se tiene entonces que la dependencia angular queda factorizada, y como la dependencia azimutal está dada por el factor $e^{im\phi}$, entonces para una función que no depende del ángulo azimutal los únicos coeficientes no nulos de la expansión son aquellos con $m = 0$. Más aún, la expresión explícita de las funciones ${}_s Y^{l,0}$ es

$${}_s Y^{l,0} = (-1)^s \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-s)!}{(l+s)!}} P_l^s(\cos \theta), \quad (\text{C.13})$$

con $P_l^s(\cos \theta)$ los polinomios asociados de Legendre.¹

Con esto en mente, la expansión relevante para el escalar de Weyl Ψ_4 en simetría axial es solamente

$$\Psi_4 = \sum_{l=2}^{\infty} \Psi_4^l \left({}_{-2}Y^{l,0}(\theta, \phi) \right), \quad (\text{C.14})$$

con los coeficientes dados por

$$\Psi_4^l = \sqrt{\pi(2l+1) \frac{(l-2)!}{(l+2)!}} \int_0^\pi \Psi_4 P_l^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (\text{C.15})$$

que son precisamente los coeficientes (C.10) con $m = 0$.

Las expresiones para la energía y momento radiados [167] se simplifican aún más al emplear los símbolos 3- j de Wigner [36]. La energía radiada es la suma de la norma de los coeficientes de la expansión integrados en el tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^t \Psi_4^l dt' \right|^2. \quad (\text{C.16})$$

Para la expresión del momento lineal es necesario evaluar integrales cerradas sobre tres armónicos esféricos con peso de espín. Las componentes perpendiculares al eje se cancelan automáticamente al tomar la integral sobre el ángulo azimutal ϕ . Para la componente z la integración se reduce al producto de tres polinomios asociados de Legendre, que pueden calcularse en términos de la fórmula de Gaunt [64] dando:

$$\begin{aligned} \frac{dP_z}{dt} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^2}{16\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{-\infty}^t \Psi_4^l dt' \\ &\quad \times \int_{-\infty}^t \left(c_l \bar{\Psi}_4^{l-1} + c_{l+1} \bar{\Psi}_4^{l+1} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

¹Desconozco la existencia previa de la demostración de esta identidad en la literatura, pero por su simplicidad sospecho que ha de ser conocida. Este resultado lo obtuve en Abril de 2008 como parte de mi servicio social.

donde

$$c_l := \sqrt{\frac{(l-2)(l+2)}{(2l+1)(2l-1)}}. \quad (\text{C.18})$$

Apéndice D

Análisis hiperbólico

En este apéndice se desarrolla el análisis de hiperbolicidad de dos sistemas de ecuaciones de evolución lineales, la ecuación de onda y las ecuaciones del campo electromagnético, para los cuales es posible encontrar la descomposición espectral del símbolo principal de manera directa. Estos resultan ser ejemplos muy didácticos y el segundo caso fue desarrollado en particular para entender el comportamiento de los campos electromagnéticos en las fronteras del dominio computacional y dar condiciones de frontera que resulten en una evolución estable.

D.1 Ecuación de Onda

La ecuación de onda en $n + 1$ dimensiones en un espacio-tiempo arbitrario toma la forma:

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi &= \mathcal{E}_{\vec{\beta}} \varphi + \alpha \Pi, \\ \partial_t \chi_a &= \mathcal{E}_{\vec{\beta}} \chi_a + \alpha \nabla_a \Pi + \Pi \nabla_a \alpha, \\ \partial_t \Pi &= \mathcal{E}_{\vec{\beta}} \Pi + \alpha K \Pi + \alpha \nabla_a \chi^a + \chi^a \nabla_a \alpha.\end{aligned}$$

Entonces a parte principal tenemos que considerar el subsistema para χ_a y Π . Esto queda

$$\partial_t \chi_a - \beta^m \partial_m \chi_a - \alpha \partial_a \Pi \simeq 0, \quad (\text{D.1a})$$

$$\partial_t \Pi - \beta^m \partial_m \Pi - \alpha \partial_m \chi^m \simeq 0. \quad (\text{D.1b})$$

Entonces las matrices características toman una forma por bloques:

$$\mathbb{M}^m = \begin{pmatrix} -\beta^m \mathbb{I}_n & -\alpha \delta_a^m \\ -\alpha \gamma^{am} & -\beta^m \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

donde \mathbb{I}_n es la matriz identidad de dimensión n . El símbolo principal conserva esta forma, quedando al considerar una dirección de propagación arbitraria caracterizada por el vector s^m

$$\mathbb{C}^m = \frac{1}{|s|^2} s_a \mathbb{M}^a = -\frac{1}{|s|} \begin{pmatrix} \beta^m \hat{s}_m \mathbb{I}_n & \alpha \hat{s}_a \\ \alpha \hat{s}^a & \beta^m \hat{s}_m \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Para calcular los valores propios hacemos uso de la identidad para matrices por bloques

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B),$$

que es válida siempre que el bloque A sea invertible. Entonces

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{C} - \lambda \mathbb{I}) &= (-\eta - \lambda)^n \left((-\eta - \lambda) - \frac{\alpha^2}{|s|^4} \frac{s^a s_a}{(-\eta - \lambda)} \right) \\ &= (-\eta - \lambda)^{n-1} \left((-\eta - \lambda) + \frac{\alpha}{|s|} \right) \left((-\eta - \lambda) - \frac{\alpha}{|s|} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Donde $\eta = \beta^m s_m / |s|^2$. Con base a esta descomposición encontramos que todos los valores propios son reales y haciendo un análisis detallado se ve que los

vectores propios forman un conjunto real. Es posible adoptar la convención para los vectores del sistema de escribirlos por componentes como (v^a, b) con v^a las componentes de un vector espacialoide, y b un número real. Enlistando tenemos:

- $\lambda^0 = -\beta^m s_m / |s|^2$

$$\underline{u}_{(p)}^0 = \left(\hat{u}_{(p)}, 0 \right). \quad (\text{D.5a})$$

En esta expresión $\{\hat{u}_{(p)}\}$ es una base ortonormal del complemento ortogonal a s^m , de modo que la multiplicidad de este valor propio es $n - 1$. Entonces, los vectores propios son todos aquellos con $\Pi = 0$ y $s^a \chi_a = 0$.

- $\lambda^\pm = -\beta^m s_m / |s|^2 \pm \alpha / |s|$

$$\underline{u}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{s}, \mp 1 \right). \quad (\text{D.5b})$$

En estos casos los vectores propios cumplen $\chi_a = \mp \hat{s}_a \Pi$ respectivamente. La normalización se escogió por conveniencia. Esto nos muestra que las componentes del campo escalar que se propagan corresponden a las derivadas en las direcciones nulas.

Es inmediato definir un producto interno entre vectores de sistema, denotado por $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ basándonos en la descomposición que hemos hecho. Este queda

$$\langle (A_a, F), (B_b, G) \rangle = \gamma^{ab} A_a B_b + FG. \quad (\text{D.6})$$

Bajo este producto interior los vectores propios que definimos son ortonormales.

La matriz cuyas columnas son los vectores propios en este caso queda

$$\mathbb{R} := \left(\underline{u}_{(p)}^0 \quad \underline{u}^+ \quad \underline{u}^- \right) \quad (\text{D.7})$$

Usando las propiedades de ortonormalidad de los vectores propios se tiene entonces que la matriz inversa de esta es la que tiene por renglones a las unoformas asociadas a los mismos vectores. Por lo tanto podemos calcular el vector de funciones propias $\underline{w} = \mathbb{R}^{-1}\underline{u}$, que usando el proyector normal a s^m definido $h_p^m := \gamma_p^m - \hat{s}^m \hat{s}_p$, queda entonces

$$w_{(p)}^0 = u_{(p)}^m \chi_m = h_p^m \chi_m, \quad (\text{D.8a})$$

$$w^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{s}^m \chi_m \mp \Pi). \quad (\text{D.8b})$$

D.2 Ecuaciones de Maxwell

La discusión de la hiperbolicidad de las ecuaciones de Maxwell que aparece en [10] a mi parecer no contempla el caso general, aunque en esta referencia se mencione que el símbolo principal Eq. (*2.63) se sigue de las ecuaciones de Maxwell generales (*2.37) y (*2.38)¹. Si escribimos dichas ecuaciones a parte principal tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t E^i - \beta^a \partial_a E^i - \alpha \epsilon^{iab} \partial_a B_b &\sim 0, \\ \partial_t B^i - \beta^a \partial_a B^i + \alpha \epsilon^{iab} \partial_a E_b &\sim 0. \end{aligned}$$

Hay una inconsistencia entre el último término y los primeros en ambas ecuaciones, ya que cambia la naturaleza covariante/contravariante de las componentes de los campos consideradas. El cambio podría parecer mínimo pero debe considerarse en los cálculos de los vectores propios del símbolo principal. Entonces, el sistema a parte principal, tomando como variables fundamentales las com-

¹Agrego una marca (*) al referirme a estas ecuaciones para distinguir que siguen la numeración en la referencia mencionada.

ponentes contravariantes queda

$$\partial_t E^i - \beta^a \partial_a E^i - \alpha \epsilon^{ia} \partial_a B^b \sim 0, \quad (\text{D.9a})$$

$$\partial_t B^i - \beta^a \partial_a B^i + \alpha \epsilon^{ia} \partial_a E^b \sim 0. \quad (\text{D.9b})$$

Entendiendo que $\epsilon^{ia}{}_b = \epsilon^{iac} \gamma_{bc}$. Tomando el vector de variables del sistema $\underline{u} = (E^i, B^i)$ las matrices características toman una forma sencilla en bloques cuadrados

$$\mathbb{M}^a = \begin{pmatrix} -\beta^a \mathbb{I} & -\alpha \epsilon^a \\ \alpha \epsilon^a & -\beta^a \mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

donde en componentes $(\epsilon^a)^i{}_j = \epsilon^{ia}{}_j$. Cabe notar que dada la antisimetría del símbolo de Levi-Civita, $(\epsilon^a)^T = -\epsilon^a$ y entonces las matrices características resultan ser simétricas.

El símbolo principal, dado un vector de propagación arbitrario s^i es entonces:

$$\mathbb{C}(\vec{s}) = \frac{1}{|s|^2} s_a \mathbb{M}^a = \frac{1}{|s|} \begin{pmatrix} -\hat{s}_a \beta^a \mathbb{I} & -\alpha \hat{s}_a \epsilon^a \\ \alpha \hat{s}_a \epsilon^a & -\hat{s}_a \beta^a \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

con \hat{s} el vector normalizado.

Para calcular los valores propios hay que calcular el determinante de $\mathbb{C} - \lambda \mathbb{I}_6$ igualado a cero. Es ahora cuando la forma en bloques de las matrices nos permiten aplicar el siguiente resultado:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (AD - BC),$$

que es válido cuando todos los bloques son cuadrados y C conmuta con D .

Como resultado directo tenemos

$$\det(\mathbb{C} - \lambda \mathbb{I}_6) = \det\left((\hat{s}_a \tilde{\beta}^a + \lambda)^2 \mathbb{I}^2 + \tilde{\alpha}^2 (\hat{s}_a \epsilon^a)^2\right),$$

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{|s|}, \quad \tilde{\beta}^r = \frac{\beta^r}{|s|}. \quad (\text{D.12})$$

La única operación no trivial al manipular las matrices se da en el último término, el cuál se puede desarrollar en términos de las propiedades del símbolo de Levi-Civita

$$\begin{aligned} (\hat{s}_a \epsilon^a)^2{}^i{}_j &= \hat{s}_a \hat{s}_b \epsilon^{ia}{}{}_m \epsilon^{mb}{}_j \\ &= \hat{s}_a \hat{s}_b (\gamma^{ib} \delta_j^a - \gamma^{ab} \delta_j^i) \\ &= \hat{s}_j \hat{s}^i - \delta_j^i \\ &= (\hat{s} \otimes \gamma(\hat{s}) - \mathbb{I})^i{}_j. \end{aligned}$$

De la tercera línea podemos concluir que el tensor $(\hat{s}_a \epsilon^a)^2$ es el negativo del proyector normal al vector de propagación y al final únicamente reescribimos el resultado en términos del producto tensorial del vector \hat{s} con su contraparte covariante con componentes $\gamma(\hat{s})_b = \gamma_{ab} \hat{s}^a$. De esto se sigue que la aplicación compuesta de este tensor sea cíclica

$$(\hat{s}_a \epsilon^a)^3 = (\hat{s}_a \epsilon^a) (\hat{s} \otimes \gamma(\hat{s}) - \mathbb{I}) = -(\hat{s}_a \epsilon^a).$$

Ahora al haberlo reducido al cálculo del determinante de una matriz tridimensional, podemos evaluarlo usando la fórmula para el determinante en términos de las componentes de una matriz, y abreviando $\eta = \hat{s}_a \tilde{\beta}^a + \lambda$ tene-

mos:

$$\begin{aligned}
 \det(\mathbb{C} - \lambda \mathbb{I}_6) &= \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \prod_{(m,n) \in I} \left([\eta^2 - \tilde{\alpha}^2] \mathbb{I}^2 + \tilde{\alpha}^2 (\hat{s} \otimes \gamma(\hat{s}))_n^m \right) \\
 &= \frac{(\eta^2 - \tilde{\alpha}^2)^2}{3!} \left[(\eta^2 - \tilde{\alpha}^2) \epsilon_{abc} \epsilon^{abc} + 3\tilde{\alpha}^2 \epsilon_{abc} \epsilon^{abk} \hat{s}^c \hat{s}_k \right] \\
 &= (\eta^2 - \tilde{\alpha}^2)^2 \eta^2 \tag{D.13}
 \end{aligned}$$

donde el conjunto de pares de índices $I = \{(a, i), (b, j), (c, k)\}$. La última igualdad es consecuencia de las propiedades de las contracciones de símbolos de Levi-Civita. Al igualar este determinante a cero se obtienen los valores $\eta = 0, \pm \tilde{\alpha}$ con multiplicidad 2 todos. Con base a estos encontramos los valores propios correspondientes al sustituir de nuevo la expresión para η :

- $\lambda^0 = -\hat{s}_a \frac{\beta^a}{|\hat{s}|}$

$$\underline{u}_{(E)}^0 = \begin{pmatrix} \hat{s} , \hat{0} \end{pmatrix} \tag{D.14a}$$

$$\underline{u}_{(B)}^0 = \begin{pmatrix} \hat{0} , \hat{s} \end{pmatrix} \tag{D.14b}$$

Estos modos no son físicos ya que violan las constricciones, las cuales implican que la dirección de propagación es simultáneamente perpendicular tanto al campo eléctrico como al magnético. Por lo tanto se puede escribir la dirección de propagación como

$$s^a \propto (E \times B)^a = \epsilon^a_{mn} E^m B^n .$$

- $\lambda^\pm = -\hat{s}_a \frac{\beta^a}{|\hat{s}|} \pm \frac{\alpha}{|\hat{s}|}$

$$\underline{u}_{(k)}^\pm = \left((\hat{s} \otimes \gamma(\hat{s}) - \mathbb{I})_{(k)}, \mp (\hat{s}_a \epsilon^a)_{(k)} \right), \quad k = 1, 2, 3. \tag{D.14c}$$

El subíndice (k) indica tomar las componentes de dicha columna de las matrices. En este caso aparentemente falla la simetría entre los sectores eléctrico y magnético del vector del sistema. Sin embargo, se puede ver

que también son vectores propios para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$\underline{u}_{(k)}^{\pm} = \left((\hat{s}_a \epsilon^a)^{n+1}_{(k)}, \mp (\hat{s}_a \epsilon^a)^n_{(k)} \right)$$

que se obtienen al combinar linealmente los originales. Enlistamos tres vectores propios pero solamente dos son linealmente independientes, ya que

$$\sum s^k \underline{u}_{(k)}^{\pm} = \underline{0}.$$

Esta degeneración se puede resolver de un modo muy elegante. Si damos una base del espacio tangente que incluya al vector de propagación \hat{s} , entonces $\underline{u}_{(s)}^{\pm} = 0$ por lo que los eigenvectores que no son nulos son $\underline{u}_{(a)}^{\pm}$ con el índice a denotando las direcciones transversas. En general estos casos nos interesan ya que usualmente la descomposición característica es relevante en casos en los que el vector de propagación es paralelo a las direcciones coordenadas: por ejemplo las fronteras computacionales son superficies normales a una de estas (i.e. la frontera en la dirección x^i es normal al vector ∂_i), y para el análisis de la radiación electromagnética emitida por una distribución localizada usualmente se toman superficies normales al vector radial esférico ∂_r .

Para tomar un conjunto completo de vectores propios, podemos tomar una base ortogonal(/normal) que incluya al vector de propagación; $\{\hat{s}, \hat{e}_{(a)}\}$ donde a es un índice que etiqueta las direcciones normales a \hat{s} . Entonces, por construcción los vectores

$$\underline{v}_{(a)}^{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{e}_{(m)}^a \underline{u}_{(a)}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{e}_{(m)} \oplus \pm \hat{s} \times \hat{e}_{(m)} \right), \quad (\text{D.15})$$

están bien definidos, son linealmente independientes y completan el conjunto de vectores propios para todo vector de propagación \hat{s} .

Dejando en claro como tomar una base de vectores que generan los subespacios asociados a los valores propios λ^{\pm} nos podemos centrar en la interpretación física. Los campos asociados a estos modos son compa-

tibles con las constricciones ya que tanto sus contribuciones a los campos eléctricos y magnéticos son normales a la dirección de propagación (al considerar cada una de las componentes vectoriales en (D.14c) proyectadas sobre la dirección de propagación). Tomando el producto interior de los campos eléctrico y magnético asociados a estos modos

$$E_{(k)}^{\pm} B_{(j)a}^{\pm} \propto s^m \epsilon_{mkj} .$$

por lo que los campos asociados a estos modos son perpendiculares entre sí y están asociados a las dos polarizaciones de las ondas electromagnéticas, que pueden ser salientes o entrantes con respecto al vector de propagación. Por otro lado

$$E_{(k)}^{\pm} E_{(j)a}^{\pm} \propto E_{(k)}^{\pm} E_{(j)a}^{\pm} \propto (\gamma_{kj} - s_k s_j) ,$$

Por lo que queda claro que estos vectores viven en el subespacios transversos al vector de propagación, y el vector del sistema es transverso al vector (\hat{s}, \hat{s}) .

Podemos calcular el producto interior de los vectores propios del sistema

$$\langle \underline{u}_{(E)}^0, \underline{u}_{(E)}^0 \rangle = \langle \underline{u}_{(B)}^0, \underline{u}_{(B)}^0 \rangle = 1 , \quad (\text{D.16a})$$

$$\langle \underline{u}_{(E)}^0, \underline{u}_{(B)}^0 \rangle = \langle \underline{u}_{(E)}^0, \underline{u}_{(n)}^{\pm} \rangle = \langle \underline{u}_{(B)}^0, \underline{u}_{(n)}^{\pm} \rangle = 0 , \quad (\text{D.16b})$$

$$\langle \underline{u}_{(m)}^{\pm}, \underline{u}_{(n)}^{\pm} \rangle = 2(\gamma_{mn} - \hat{s}_m \hat{s}_n) , \quad (\text{D.16c})$$

$$\langle \underline{u}_{(m)}^{\pm}, \underline{u}_{(n)}^{\mp} \rangle = 0 . \quad (\text{D.16d})$$

De aquí se sigue que los vectores asignados a los modos que se radían cumplen

$$\langle \underline{v}_{(m)}^{\pm}, \underline{v}_{(n)}^{\pm} \rangle = \hat{e}_{(a)}^m \hat{e}_{(b)}^n \langle \underline{u}_{(m)}^{\pm}, \underline{u}_{(n)}^{\pm} \rangle = (\gamma_{mn} - \hat{s}_m \hat{s}_n) \hat{e}_{(a)}^m \hat{e}_{(b)}^n = h_{(a)(b)} , \quad (\text{D.17a})$$

$$\langle \underline{v}_{(m)}^{\pm}, \underline{v}_{(n)}^{\mp} \rangle = \hat{e}_{(a)}^m \hat{e}_{(b)}^n \langle \underline{u}_{(m)}^{\pm}, \underline{u}_{(n)}^{\mp} \rangle = 0 . \quad (\text{D.17b})$$

Usando estas propiedades se pueden obtener los campos propios a partir de la matriz de vectores propios (ya considero que la base es ortonormal)

$$\mathbb{R} := \begin{pmatrix} \underline{u}_{(E)}^0 & \underline{u}_{(B)}^0 & \frac{v_{(1)}^+}{\sqrt{2}} & \frac{v_{(1)}^-}{\sqrt{2}} & \frac{v_{(2)}^+}{\sqrt{2}} & \frac{v_{(2)}^-}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Por la ortogonalidad de los vectores propios se sigue que la matriz inversa tiene por renglones las uno-formas asociadas a los vectores columna de la matriz \mathbb{R} . Entonces ya es posible calcular las funciones propias $\underline{w} = \mathbb{R}^{-1}\underline{u}$

$$w_{(E)}^0 = \langle \underline{u}_{(E)}^0, \underline{u} \rangle = \hat{s}_a E^a, \quad (\text{D.19a})$$

$$w_{(B)}^0 = \langle \underline{u}_{(B)}^0, \underline{u} \rangle = \hat{s}_a B^a, \quad (\text{D.19b})$$

$$w_{(a)}^\pm = \langle \underline{v}_{(a)}^\pm, \underline{u} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e_{(a)}^b E_b \pm (\hat{s} \times \hat{e}_{(a)})^b B_b \right). \quad (\text{D.19c})$$

Como resultado final, al introducir el formalismo de Newman-Penrose en el estudio de las ecuaciones de Maxwell, estas quedan escritas en términos de los escalares complejos

$$\Phi_0 = F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu k^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \quad \Phi_2 = F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu k^\nu. \quad (\text{D.20})$$

Si la tétrada nula considerada se forma con el vector normal temporal oide unitario a la hipersuperficie y la triada usada para el análisis anterior, entonces se tiene

$$\Phi_0 \propto w_{(2)}^- + iw_{(3)}^-, \quad \Phi_1 \propto w_{(E)}^0 + iw_{(B)}^0, \quad \Phi_2 \propto w_{(2)}^+ + iw_{(3)}^+, \quad (\text{D.21})$$

Un último detalle en tanto a la inclusión de los potenciales electromagnéticos en el análisis. Al tomar la norma de Lorentz se observa que a parte principal el sector de los potenciales está desacoplado y su estructura es el de la ecuación de onda, con dos modos que no se propagan

$$\omega_a^0 = h_a^b a_b, \quad \lambda^0 = -\frac{\beta^a s_a}{|\vec{s}|^2}, \quad (\text{D.22})$$

y una pareja de modos entrante y saliente que se propagan a la velocidad de la luz:

$$\omega^\pm = \Phi \pm \hat{s}^b a_b, \quad \lambda = -\frac{\beta^a s_a}{|\hat{s}|^2}. \quad (\text{D.23})$$

Apéndice E

Propiedades del tensor métrico de un espacio axisimétrico

En este apéndice se describen algunos detalles de cálculo que se asumen en la Sección 4.1. La métrica contravariante está expresada en términos de las funciones g que son regulares incluso sobre el eje. Al calcular la matriz inversa y factorizar las potencias de r correspondientes se tiene

$$\begin{aligned} g_A &= \frac{BH - r^2 C_2^2}{\mathfrak{h}}, & g_B &= \frac{AH - r^4 C_1^2}{\mathfrak{h}}, \\ g_H &= \frac{AB - r^2 C^2}{\mathfrak{h}}, & g_C &= \frac{r^2 C_1 C_2 - CH}{\mathfrak{h}}, \\ g_{C_1} &= \frac{CC_2 - BC_1}{\mathfrak{h}}, & g_{C_2} &= \frac{r^2 CC_1 - AC_2}{\mathfrak{h}}. \end{aligned} \tag{E.1}$$

Donde de la ecuación (4.8) se tiene

$$\mathfrak{h} = \left(ABH + 2r^4 CC_1 C_2 - r^2 AC_2^2 - r^2 HC^2 - r^4 BC_1^2 \right).$$

Un resultado importante es que al expandir la combinación

$$g_\lambda := \frac{g_A - g_H}{r^2} = -\frac{B}{r^2 \mathfrak{h}} (A - H) - \frac{C_2^2 - C^2}{\mathfrak{h}}, \tag{E.2}$$

el único término que va como $1/r^2$ es proporcional a $A - H$, de modo que cada vez que aparece en los cálculos podemos asumir que tiene un comportamiento regular en el eje.

También de la definición de la métrica inversa se tienen varias identidades útiles que combinan las funciones

$$Ag_A - Hg_H = r^2(C_2g_{C_2} - Cg_C), \quad (\text{E.3a})$$

$$1 - Hg_H = r^2(r^2C_1g_{C_1} + C_2g_{C_2}), \quad (\text{E.3b})$$

$$Hg_{C_1} + C_2g_C = -C_1g_A, \quad (\text{E.3c})$$

$$C_2g_B + Hg_{C_2} = -r^2C_1g_C, \quad (\text{E.3d})$$

$$Ag_C + Cg_B = -r^2C_1g_{C_2}. \quad (\text{E.3e})$$

De estas se pueden derivar identidades con productos múltiples:

$$Cg_{AgB} + Hg_Hg_C = r^2(Cg_C^2 + Hg_{C_1}g_{C_2}), \quad (\text{E.4a})$$

$$Cg_{AgB} + g_C = r^2(g_C(r^2C_1g_{C_1} + Cg_C) - C_1g_Ag_{C_2}), \quad (\text{E.4b})$$

$$C_2g_{AgB} + g_{C_2} = r^2(g_{C_2}(r^2C_1g_{C_1} + Cg_C + g_A\lambda) - C_1g_Ag_C). \quad (\text{E.4c})$$

Apéndice F

Derivada de Lie de las funciones axisimétricas

En esta sección se exhiben los términos advectivos que surgen de las derivadas de Lie respecto al vector de corrimiento en las ecuaciones de evolución para las funciones métricas y asociadas a la curvatura extrínseca. El análisis en ambos casos es idéntico por lo que lo mostramos solo en el caso de las funciones métricas. Las componentes de la métrica son de la forma $\hat{\gamma}_{ij} = r^n F$, donde F es alguna de las funciones A, B, H, C, C_1, C_2 y n es un entero de 0 a 3. Entonces tenemos por la regla del producto que la derivada de Lie satisface

$$\frac{1}{r^n} \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_{\vec{\beta}} F + nF \frac{\beta^r}{r}. \quad (\text{F.1})$$

Por otro lado, expandiendo el lado izquierdo de esta expresión y usando la expresión para la derivada de Lie de un tensor simétrico de rango 2 obtenemos:

$$\frac{1}{r^n} \mathcal{L}_{\vec{\beta}} \hat{\gamma}_{ij} = \beta^m \partial_m F + \frac{2}{r^n} \hat{\gamma}_{m(i} \partial_{j)} \beta^m + nF \frac{\beta^r}{r}. \quad (\text{F.2})$$

Igualando ambas expresiones podemos identificar:

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}} F = \beta^m \partial_m F + \frac{2}{r^n} \hat{\gamma}_{m(i} \partial_{j)} \beta^m. \quad (\text{F.3})$$

La expresión completa para cada función queda

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}A = \beta^m \partial_m A + 2A \partial_r \beta^r + 2rC \partial_r \beta^z + 2r^3 C_1 \partial_r \beta^\phi, \quad (\text{F.4a})$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}B = \beta^m \partial_m B + 2rC \partial_z \beta^r + 2B \partial_z \beta^z + 2r^2 C_2 \partial_z \beta^\phi, \quad (\text{F.4b})$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}H = \beta^m \partial_m H, \quad (\text{F.4c})$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}C = \beta^m \partial_m C + \frac{1}{r}(B \partial_r \beta^z + A \partial_z \beta^r) \quad (\text{F.4d})$$

$$+ C(\partial_r \beta^r + \partial_z \beta^z) + r^2 C_1 \partial_z \beta^\phi + r C_2 \partial_r \beta^\phi, \quad (\text{F.4e})$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}C_1 = \beta^m \partial_m C_1 + \frac{1}{r}(C_2 \partial_r \beta^z + H \partial_r \beta^\phi) + C_1 \partial_r \beta^r, \quad (\text{F.4f})$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}C_2 = \beta^m \partial_m C_2 + r C_1 \partial_z \beta^r + C_2 \partial_z \beta^z + H \partial_z \beta^\phi. \quad (\text{F.4g})$$

Apéndice G

Scripts para cálculos algebraicos

En este apartado se presenta y describe una hoja de cálculo desarrollada en Maple para el cálculo de los términos del tensor de Ricci conforme en axisimetría, sin expandir las funciones g_A , etc. Para ello se puede utilizar el paquete por defecto para manejo de tensores incluido con el programa.

```
# Ricci Tensor
# Jose Manuel Torres
#
# Carga de paquete para el manejo de tensores
> with(tensor):
#
# Definiciones

# Definicion de las coordenadas
> coords:=[r, z,phi]:

# Definicion de la metrica. En un arreglo se definen las componentes y
# luego se genera el objeto metric como un tensor covariante usando la
# funcion create, que toma una lista que indica el caracter de cada indice
# (-1 covariante, 1 contravariante) y un arreglo que contiene las componentes.

> g:=array (symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
> g[1,1]:=A(r,z): g[2,2]:=B(r,z): g[3,3]:=H(r,z)*r^2:g[1,2]:=C(r,z)*r:
> metric:=create([-1,-1], eval(g));
```

```

# Se calculan primeramente los tensores derivados de la metrica covariante
# utilizando la funcion tensors GR. Esta recibe la lista de coordenadas y el
# tensor metrico, junto con los nombres de los tensores que va a calcular en
# el siguiente orden: metrica contravariante, determinante de la metrica,
# simbolos de Christoffel del primer tipo (indices covariantes) y del
# segundo tipo (un indice contravariante), tensor de Riemann, tensor de Ricci,
# tensor de Einstein y tensor de Weyl

> tensorsGR(coords,metric,contra_metric,det_met, Ch1, Ch2, Rm, Rc, R, G, Cw);

# De manera similar definimos la metrica auxiliar de fondo en coordenadas
# cilindricas y calculamos los tensores asociados a esta para obtener la
# conexion compatible. Los demas tensores son redundantes

> g:=array (symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
> g[1,1]:=1: g[2,2]:=1: g[3,3]:=r^2:
> metric0:=create([-1,-1], eval(g));

> tensorsGR(coords,metric0,contra_metric0,det_met0,Ch10,Ch20,Rm0,Rc0,R0,G0,Cw0);

# Ahora definimos la metrica contravariante en terminos de las funciones g_A,
# etc.
> g:=array (symmetric, sparse, 1..3, 1..3):
> g[1,1]:=g_A(r,z): g[2,2]:=g_B(r,z): g[3,3]:=g_H(r,z)/r^2:g[1,2]:=g_C(r,z)*r:
> metricI:=create([1,1], eval(g));

# Definimos tambien el vector auxiliar Delta que promovemos a variable
# independiente
> DeltaV:=create([1],array([Delta_r(r,z),Delta_z(r,z),Delta_p(r,z)]));

#
# Ricci Tensor/Scalar
#
# El tensor de Ricci que calcula Maple considera la expansion completa de
# las funciones g_A, etc., y del vector Delta. Para el analisis y la imple-
# mentacion numerica es preferible no expandir estos terminos y por ello
# realizamos el calculo directo.

```

```

#
# Para mayor claridad separamos los distintos terminos que conforman la
# expresion del tensor en terminos de una metrica auxiliar. Estos constan de
# un termino que representa el laplaciano de la metrica, un termino que
# contiene la derivada covariante del vector Delta, y dos terminos son
# contracciones del tensor Delta consigo mismo (ver Capitulo 1)/

# El laplaciano (plano) de la metrica

# Se utilizan varias funciones:
#
# lin_com:  acepta una lista de argumentos alternando coeficientes y tensores
#
# prod:    realiza el producto de dos tensores y acepta pares de indices a
#          contraerse entre ambos tensores (deben ser uno covariante y otro
#          contravariante por cada par)
#
# cov_diff: Recibe un tensor, la lista de coordenadas y la conexion elegida
#           para la derivada covariante. Produce un tensor con un indice
#           covariante adicional.

# Notese que estoy dando un formato para facilitar la lectura de modo que en
# las expresiones largas los parentesis coinciden en la misma columna
#
> RR1:=lin_com(-1/2,prod(
                    metricI,cov_diff(
                        cov_diff(metric,coords,Ch20), coords,Ch20
                        ), [1,3],[2,4]
                    )
):

# Derivada covariante del vector Delta
#
# symmetrize: Recibe un tensor y un par de indices, y regresa un tensor del
#            mismo rango simetrizado.

> RR2:=symmetrize(prod(metric,cov_diff(DeltaV,coords,Ch2)],[1,1]
                ),[1,2]
                ):

```

```

#
# Los terminos restantes corresponden a contracciones del tensor Delta, que
# es una diferencia entre conexiones. Para obtener la conexion asociada a la
# metrica conforme sin expandir la metrica contravariante tomamos los
# coeficientes con indices contravariantes y les subimos el indice usando la
# metrica contravariante definida anteriormente. Es necesario tener mucho
# cuidado con las contracciones de indices ya que el programa maneja
# convenciones distintas para los indices de los simbolos de Christoffel de
# primer y segundo tipo.

> aux1:=prod(raise(metricI,Ch1,1,3),Ch1,[1,2],[3,1]):
> aux2:=prod(raise(metricI,Ch1,1,3),lower(metric,Ch20,1),[1,3],[3,2]):
> aux3:=prod(raise(metricI,Ch20,2),Ch1,[1,1],[2,2]):
> aux4:=prod(raise(metricI,Ch20,2),lower(metric,Ch20,1),[1,2],[2,3]):

> RR3:=symmetrize(lin_com(2,aux1,-2,aux2,-2,aux3,2,aux4),[1,2]):

> aux1:=prod(raise(metricI,Ch1,1,3),Ch1,[3,3],[1,1]):
> aux2:=prod(raise(metricI,Ch1,1,3),lower(metric,Ch20,1),[3,1],[1,2]):
> aux3:=prod(raise(metricI,Ch20,2),Ch1,[1,3],[2,1]):
> aux4:=prod(raise(metricI,Ch20,2),lower(metric,Ch20,1),[1,1],[2,2]):

> RR4:=lin_com(1,aux1,-1,aux2,-1,aux3,1,aux4):

# Full Ricci

# Finalmente podemos tomar la combinacion lineal de estos terminos para
# formar el tensor completo (aunque es recomendable conservar los terminos
# individuales para facilitar el analisis)

> RicciFull:=lin_com(1,RR1,1,RR2,1,RR3,1,RR4):

# El escalar de Ricci se obtiene al contraer los indices del anterior.

> RicciSc:=prod(metricI,RicciFull,[1,1],[2,2]):

```

No incluyo la expresion completa del tensor de Ricci obtenida de este modo por ser muy extensa y poco ilustrativa. Sin embargo es posible verificar a este nivel la validez del calculo comparandolo con el que se obtuvo con la función `tensorsGR`. Para ello hay que sustituir los valores del tensor $\hat{\Delta}_{mn}^i$, el vector $\hat{\Delta}^i$ y las componentes de la métrica contravariante.

```
> Delta:=lin_com(1,Ch2,-1,Ch20):
> DeltaV:=prod(metricI,Delta,[1,2],[2,3]):

> detg:=(r,z)->( A(r,z)*B(r,z)*H(r,z)+2*r^4*C(r,z)*C1(r,z)*C2(r,z)
  -r^2*(A(r,z)*C2(r,z)^2+H(r,z)*C(r,z)^2+r^2*B(r,z)*C1(r,z)^2 )):

> g_A:=(r,z)->(B(r,z)*H(r,z)-(r*C2(r,z))^2)/detg(r,z):
> g_B:=(r,z)->(A(r,z)*H(r,z)-(r^2*C1(r,z))^2)/detg(r,z):
> g_H:=(r,z)->(B(r,z)*A(r,z)-(r*C(r,z))^2)/detg(r,z):
> g_C:=(r,z)->-(C(r,z)*H(r,z)-r^2*C1(r,z)*C2(r,z))/detg(r,z):
> g_C1:=(r,z)->-(B(r,z)*C1(r,z)-C(r,z)*C2(r,z))/detg(r,z):
> g_C2:=(r,z)->-(A(r,z)*C2(r,z)-r^2*C(r,z)*C1(r,z))/detg(r,z):
```

Con ello podemos hacer la combinación

```
> expand(lin_com(1,RicciFull,1,Rc));
```

la cual debe anularse. Nótese que la convención del programa para el signo del tensor de Ricci es contraria a la que se utiliza en este trabajo, por lo cual los coeficientes en el último comando llevan el mismo signo.

Una vez hecho este cálculo es posible analizar los distintos términos, factorizando aquellos que comparten potencias de r , y proceder a la regularización analítica de aquellos que presentan factores del tipo r^{-n} . En esta sección sólo se exhibe como ejemplo el cálculo del tensor de Ricci, pero para la implementación numérica de las ecuaciones de evolución del sistema BSSN en axisimetría se requirió de un desarrollo similar para los términos más complicados.

Bibliografía

- [1] A. Abrahams, D. Bernstein, D. Hobill, E. Seidel, y L. Smarr. Numerically generated black hole spacetimes: Interaction with gravitational waves. *Phys. Rev.*, D45:3544–3558, 1992.
- [2] A. M. Abrahams y C. R. Evans. Critical behavior and scaling in vacuum axisymmetric gravitational collapse. *Phys. Rev. Lett.*, 70:2980–2983, 1993.
- [3] J. Adamek, D. Daverio, R. Durrer, y M. Kunz. General Relativistic N -body simulations in the weak field limit. *Phys.Rev.*, D88(10):103527, 2013.
- [4] M. Alcubierre. *Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity*. Oxford Univ. Press, New York, 2008.
- [5] M. Alcubierre, G. Allen, B. Brügmann, G. Lanfermann, E. Seidel, W.-M. Suen, y M. Tobias. Gravitational collapse of gravitational waves in 3D numerical relativity. *Phys. Rev.*, D61:041501, 2000.
- [6] M. Alcubierre, R. Becerril, F. Guzman, T. Matos, D. Nuñez, y L. Ureña-Lopez. Numerical studies of ϕ^2 -oscillatons. *Class. Quant. Grav.*, 20:2883–2904, 2003.
- [7] M. Alcubierre, S. Brandt, B. Bruegmann, C. Gundlach, J. Masso, et al. Test beds and applications for apparent horizon finders in numerical relativity. *Class.Quant.Grav.*, 17:2159–2190, 2000.

-
- [8] M. Alcubierre, A. de la Macorra, A. Diez-Tejedor, y J. M. **Torres**. Cosmological scalar field perturbations can grow. *Phys. Rev.*, D92(6):063508, 2015.
- [9] M. Alcubierre, J. C. Degollado, D. Núñez, M. Ruiz, y M. Salgado. Dynamic transition to spontaneous scalarization in boson stars. *Phys. Rev. D*, 81(12):124018, 2010.
- [10] M. Alcubierre, J. C. Degollado, y M. Salgado. The Einstein-Maxwell system in 3+1 form and initial data for multiple charged black holes. *Phys. Rev.*, D80:104022, 2009.
- [11] M. Alcubierre y J. A. González. Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity. *Comp. Phys. Comm.*, 167:76, 2005.
- [12] M. Alcubierre y M. D. Mendez. Formulations of the 3+1 evolution equations in curvilinear coordinates. *Gen. Rel. Grav.*, 43:2769–2806, 2011.
- [13] M. Alcubierre y J. M. **Torres**. Constraint preserving boundary conditions for the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura formulation in spherical symmetry. *Class. Quantum. Grav.*, 32:035006, 2014.
- [14] P. Anninos. Computational cosmology: From the early universe to the large scale structure. *Living Rev. Rel.*, 4:2, 2001.
- [15] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, y W.-M. Suen. Collision of two black hole. *Phys. Rev. Lett.*, 71(18):2851–2854, 1993.
- [16] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, y W.-M. Suen. The Headon collision of two equal mass black holes: Numerical methods. 1994.
- [17] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, y W.-M. Suen. The Headon collision of two equal mass black holes. *Phys. Rev.*, D52:2044–2058, 1995.
- [18] A. Arbona y C. Bona. Dealing with the center and boundary problems in 1d numerical relativity. *Comput. Phys. Commun.*, 118:229–235, 1999.

-
- [19] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, y P. J. Steinhardt. Essentials of k essence. *Phys.Rev.*, D63:103510, 2001.
- [20] R. Arnowitt, S. Deser, y C. W. Misner. The dynamics of general relativity. En L. Witten, editor, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, páginas 227–265. John Wiley, New York, 1962.
- [21] A. Ashtekar, B. K. Berger, J. Isenberg, y M. A. H. MacCallum. *General Relativity and Gravitation: A Centennial Perspective*. 2014.
- [22] A. Ashtekar y B. Krishnan. Isolated and dynamical horizons and their applications. *Living Reviews in Relativity*, 7(10), 2004.
- [23] A. Ashtekar y B. Krishnan. Isolated and dynamical horizons and their applications. *Living Rev. Rel.*, 7:10, 2004.
- [24] M. C. Babiuc, H. O. Kreiss, y J. Winicour. Constraint-preserving Sommerfeld conditions for the harmonic Einstein equations. *Phys. Rev.*, D75:044002, 2007.
- [25] M. C. Babiuc, B. Szilagyi, y J. Winicour. Harmonic initial-boundary evolution in general relativity. *Phys. Rev.*, D73:064017, 2006.
- [26] J. G. Baker, J. Centrella, D.-I. Choi, M. Koppitz, y J. van Meter. Binary black hole merger dynamics and waveforms. *Phys. Rev.*, D73:104002, 2006.
- [27] J. G. Baker, J. Centrella, D.-I. Choi, M. Koppitz, y J. van Meter. Gravitational wave extraction from an inspiraling configuration of merging black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 96:111102, 2006.
- [28] J. G. Baker et al. Modeling kicks from the merger of non-precessing black-hole binaries. 0200.
- [29] J. M. Bardeen. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys.Rev.*, D22:1882–1905, 1980.
- [30] T. Baumgarte y S. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.

-
- [31] T. W. Baumgarte y S. L. Shapiro. On the numerical integration of Einstein's field equations. *Phys.Rev.*, D59:024007, 1998.
- [32] J. D. Bekenstein. Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm. *Phys.Rev.*, D70:083509, 2004.
- [33] D. Bernstein, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, y J. Towns. Numerically generated axisymmetric black hole spacetimes: Numerical methods and code tests. *Phys. Rev.*, D50(8):5000–5024, 1994.
- [34] E. Berti, V. Cardoso, y A. O. Starinets. Quasinormal modes of black holes and black branes. *Class.Quant.Grav.*, 26:163001, 2009.
- [35] H. Beyer y O. Sarbach. On the well posedness of the baumgarte-shapiro-shibata- nakamura formulation of Einstein's field equations. 2004.
- [36] L. C. Biedenharn y J. D. Louck. Angular momentum in quantum physics. Theory and application. *Encycl. Math. Appl.*, 8:1–716, 1981.
- [37] T. Bode, R. Haas, T. Bogdanović, P. Laguna, y D. Shoemaker. Relativistic Mergers of Supermassive Black Holes and Their Electromagnetic Signatures. *The Astrophysical Journal*, 715(2):1117, 2010.
- [38] C. Bona y C. Bona-Casas. Constraint-preserving boundary conditions in the 3+1 first-order approach. *Phys.Rev.*, D82:064008, 2010.
- [39] C. Bona, T. Ledvinka, C. Palenzuela, y M. Zacek. A symmetry-breaking mechanism for the z4 general-covariant evolution system. *Phys. Rev.*, D69:064036, 2004.
- [40] C. Bona, T. Ledvinka, C. Palenzuela-Luque, y M. Zacek. Constraint-preserving boundary conditions in the Z4 numerical relativity formalism. *Class. Quant. Grav.*, 22:2615–2634, 2005.
- [41] C. Bona y J. Massó. Hyperbolic evolution system for numerical relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1097, 1992.
- [42] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, y J. Stela. New formalism for numerical relativity. *Phys.Rev.Lett.*, 75:600–603, 1995.

-
- [43] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, y J. Stela. First order hyperbolic formalism for numerical relativity. *Phys. Rev.*, D56:3405–3415, 1997.
- [44] C. Bona y C. Palenzuela. Dynamical shift conditions for the z4 and bssn hyperbolic formalisms. *Phys. Rev.*, D69:104003, 2004.
- [45] C. Bona, C. Palenzuela-Luque, y C. Bona-Casas. *Elements of Numerical Relativity and Relativistic Hydrodynamics: From Einstein's Equations to Astrophysical Simulations*. Lecture Notes in Physics. Springer, 2009.
- [46] S. R. Brandt y E. Seidel. The Evolution of distorted rotating black holes. 3: Initial data. *Phys.Rev.*, D54:1403–1416, 1996.
- [47] J. D. Brown. Covariant formulations of BSSN and the standard gauge. *Phys.Rev.*, D79:104029, 2009.
- [48] Y. Bruhat. Theoreme d'existence pour certains systemes d'equations aux derivees partielles non lineaires. *Acta Mathematica*, 88:141–225, 1952.
- [49] M. Bruni, J. C. Hidalgo, y D. Wands. Einstein's signature in cosmological large-scale structure. *arXiv:1405.7006*, May 2014.
- [50] M. Bruni, D. B. Thomas, y D. Wands. Computing General Relativistic effects from Newtonian N-body simulations: Frame dragging in the post-Friedmann approach. *Phys.Rev.*, D89:044010, 2014.
- [51] L. T. Buchman y O. C. A. Sarbach. Towards absorbing outer boundaries in general relativity. *Class. Quant. Grav.*, 23:6709–6744, 2006.
- [52] L. T. Buchman y O. C. A. Sarbach. Improved outer boundary conditions for Einstein's field equations. *Class. Quant. Grav.*, 24:S307–S326, 2007.
- [53] G. Calabrese, L. Lehner, y M. Tiglio. Constraint-preserving boundary conditions in numerical relativity. *Phys. Rev.*, D65:104031, 2002.
- [54] G. Calabrese, J. Pullin, O. Sarbach, M. Tiglio, y O. Reula. Well posed constraint-preserving boundary conditions for the linearized Einstein equations. *Commun. Math. Phys.*, 240:377–395, 2003.

- [55] G. Calabrese y O. Sarbach. Detecting ill posed boundary conditions in general relativity. *J. Math. Phys.*, 44:3888–3899, 2003.
- [56] M. Campanelli, C. O. Lousto, P. Marronetti, y Y. Zlochower. Accurate evolutions of orbiting black-hole binaries without excision. *Phys. Rev. Lett.*, 96:111101, 2006.
- [57] M. Campanelli, C. O. Lousto, B. C. Mundim, H. Nakano, Y. Zlochower, y H.-P. Bischof. Advances in Simulations of Generic Black-Hole Binaries. *Class. Quant. Grav.*, 27:084034, 2010.
- [58] M. Campanelli, C. O. Lousto, y Y. Zlochower. The last orbit of binary black holes. *Phys. Rev.*, D73:061501(R), 2006.
- [59] M. Campanelli, C. O. Lousto, y Y. Zlochower. Close encounters of three black holes. *Phys. Rev.*, D77:101501, 2008.
- [60] V. Cardoso. Black hole bombs and explosions: from astrophysics to particle physics. *Gen. Rel. Grav.*, 45:2079–2097, 2013.
- [61] V. Cardoso, L. Gualtieri, C. Herdeiro, y U. Sperhake. Exploring New Physics Frontiers Through Numerical Relativity. 2014.
- [62] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. Addison Wesley, San Francisco, 2004.
- [63] J. L. Cervantes-Cota y G. Smoot. Cosmology today-A brief review. *AIP Conf. Proc.*, 1396:28–52, 2011.
- [64] Y. N. Chiu y L. Y. C. Chiu. *American Scientist*, 49(3):pp. 332A–334A, 1961.
- [65] M. W. Choptuik. Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, 70:9, 1993.
- [66] M. W. Choptuik, E. W. Hirschmann, S. L. Liebling, y F. Pretorius. An axisymmetric gravitational collapse code. *Class. Quant. Grav.*, 20:1857–1878, 2003.

-
- [67] M. W. Choptuik, L. Lehner, y F. Pretorius. Probing Strong Field Gravity Through Numerical Simulations. 2015.
- [68] D. Christodoulou. Examples of naked singularity formation in the gravitational collapse of a scalar field. *Annals of Mathematics*, 140(3):pp. 607–653, 1994.
- [69] P. T. Chrusciel, J. L. Costa, y M. Heusler. Stationary Black Holes: Uniqueness and Beyond. *Living Rev.Rel.*, 15:7, 2012.
- [70] M. Cvetič, G. Gibbons, y C. Pope. Super-Geometrodynamics. 2014.
- [71] S. Dain. Axially symmetric spacetimes: numerical and analytical perspectives. *J. Phys. Conf. Ser.*, 276:012015, 2011.
- [72] C. de Rham. Massive Gravity. *Living Rev.Rel.*, 17:7, 2014.
- [73] J. C. Degollado y C. A. R. Herdeiro. Time evolution of superradiant instabilities for charged black holes in a cavity. 2013.
- [74] P. Diener. A New general purpose event horizon finder for 3-D numerical space-times. *Class.Quant.Grav.*, 20:4901–4918, 2003.
- [75] M. Dine y W. Fischler. The Not So Harmless Axion. *Phys.Lett.*, B120:137–141, 1983.
- [76] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [77] D. M. Eardley y L. Smarr. Time function in numerical relativity. Marginally bound dust collapse. *Phys. Rev.*, D19:2239–2259, 1979.
- [78] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsber.*, páginas 844–847, 1915.
- [79] A. Einstein. Zur allgemeinen relativitätstheorie. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsber.*, páginas 778–786, 1915.
- [80] C. Eling, T. Jacobson, y D. Mattingly. Einstein-Aether theory. páginas 163–179, 2004.

- [81] K. Eppley. Evolution of time-symmetric gravitational waves: Initial data and apparent horizons. *Phys. Rev.*, D16:1609, 1977.
- [82] B. D. Farris, R. Gold, V. Paschalidis, Z. B. Etienne, y S. L. Shapiro. Binary black hole mergers in magnetized disks: simulations in full general relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 109:221102, 2012.
- [83] B. D. Farris, T. K. Li, Y. T. Liu, y S. L. Shapiro. Relativistic Radiation Magnetohydrodynamics in Dynamical Spacetimes: Numerical Methods and Tests. *Phys. Rev.*, D78:024023, 2008.
- [84] J. A. Font. Numerical Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics in General Relativity. *Living Rev. Rel.*, 11:7, 2008.
- [85] J. A. Font, J. M. Ibanez, A. Marquina, y J. M. Martí. Multidimensional relativistic hydrodynamics: Characteristic fields and modern high-resolution shock-capturing schemes. *Astron. Astrophys.*, 282:304–314, Feb. 1994.
- [86] A. Friedman. Über die krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10(1):377–386, 1922.
- [87] A. Friedmann. Über die möglichkeit einer welt mit konstanter negativer krümmung des raumes. *Zeitschrift für Physik*, 21(1):326–332, 1924.
- [88] H. Friedrich y G. Nagy. The initial boundary value problem for Einstein's vacuum field equations. *Comm. Math. Phys.*, 201:619–655, 1999.
- [89] H. Friedrich y A. D. Rendall. The Cauchy problem for the Einstein equations. *Lect. Notes Phys.*, 540:127–224, 2000.
- [90] J. P. Galaviz. *Código computacional para resolver ecuaciones elípticas en relatividad numérica*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.
- [91] D. Garfinkle y G. C. Duncan. Numerical evolution of Brill waves. *Phys. Rev.*, D63:044011, 2001.
- [92] J. Garriga y V. F. Mukhanov. Perturbations in k-inflation. *Phys. Lett.*, B458:219–225, 1999.

- [93] R. P. Geroch. A Method for generating solutions of Einstein's equations. *J.Math.Phys.*, 12:918–924, 1971.
- [94] J. A. González y F. S. Guzmán. Accretion of phantom scalar field into a black hole. *Phys. Rev. D*, 79(12):121501, 2009.
- [95] E.ourgoulhon. *3+1 Formalism in General Relativity, Bases of Numerical Relativity*. Springer, Heidelberg, Germany, 2012.
- [96] C. Gundlach y J. M. Martín-García. Symmetric hyperbolicity and consistent boundary conditions for second-order Einstein equations. *Phys. Rev.*, D70:044032, 2004.
- [97] B. Gustafsson, H. Kreiss, y J. Olinger. *Time dependent problems and difference methods*. Wiley, New York, 1995.
- [98] A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, Jan 1981.
- [99] A. H. Guth y S.-Y. Pi. Fluctuations in the new inflationary universe. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1110–1113, Oct 1982.
- [100] S. Hahn y R. Lindquist. The two-body problem in geometrodynamics. *Ann. Phys.*, 29:304, 1964.
- [101] S. W. Hawking. Singularities in the universe. *Phys. Rev. Lett.*, 17:444–445, 1966.
- [102] C. A. R. Herdeiro, J. C. Degollado, y H. F. Rúnarsson. Rapid growth of superradiant instabilities for charged black holes in a cavity. *Phys. Rev.*, D88:063003, 2013.
- [103] M. Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1996.
- [104] D. Hilditch. An Introduction to Well-posedness and Free-evolution. *Int.J.Mod.Phys.*, A28:1340015, 2013.

-
- [105] D. Hilditch, T. W. Baumgarte, A. Weyhausen, T. Dietrich, B. Brügmann, P. J. Montero, y E. Müller. Collapse of Nonlinear Gravitational Waves in Moving-Puncture Coordinates. *Phys. Rev.*, D88(10):103009, 2013.
- [106] D. Hilditch, S. Bernuzzi, M. Thierfelder, Z. Cao, W. Tichy, et al. Compact binary evolutions with the Z4c formulation. *Phys.Rev.*, D88:084057, 2013.
- [107] I. Hinder. The Current Status of Binary Black Hole Simulations in Numerical Relativity. *Class. Quant. Grav.*, 27:114004, 2010.
- [108] K. Hinterbichler. Theoretical Aspects of Massive Gravity. *Rev.Mod.Phys.*, 84:671–710, 2012.
- [109] W. Hu, R. Barkana, y A. Gruzinov. Cold and fuzzy dark matter. *Phys.Rev.Lett.*, 85:1158–1161, 2000.
- [110] J.-c. Hwang. Roles of a coherent scalar field on the evolution of cosmic structures. *Phys.Lett.*, B401:241–246, 1997.
- [111] T. Jacobson. Einstein-aether gravity: a status report. *arXiv:0801.1547*, Jan. 2008.
- [112] P. Jetzer y J. V. D. Bij. Charged boson stars. *Physics Letters B*, 227:341 – 346, 1989.
- [113] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys.Rev.Lett.*, 11:237–238, 1963.
- [114] A. M. Knapp, E. J. Walker, y T. W. Baumgarte. Illustrating Stability Properties of Numerical Relativity in Electrodynamics. *Phys. Rev.*, D65:064031, 2002.
- [115] H. O. Kreiss, O. Reula, O. Sarbach, y J. Winicour. Well-posed initial-boundary value problem for the harmonic Einstein equations using energy estimates. *Class. Quant. Grav.*, 2007. To appear.

- [116] H. O. Kreiss y J. Winicour. Problems which are well-posed in a generalized sense with applications to the Einstein equations. *Class. Quant. Grav.*, 23:S405–S420, 2006.
- [117] M. Kuhlen, M. Vogelsberger, y R. Angulo. Numerical simulations of the dark universe: State of the art and the next decade. *Physics of the Dark Universe*, 1:50–93, Nov. 2012.
- [118] J.-w. Lee y I.-g. Koh. Galactic halos as boson stars. *Phys.Rev.*, D53:2236–2239, 1996.
- [119] L. Lehner y F. Pretorius. Numerical Relativity and Astrophysics. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 52:661–694, 2014.
- [120] G. Lemaître. Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *MNRAS*, 91:483–490, Mar. 1931.
- [121] S. L. Liebling y C. Palenzuela. Dynamical Boson Stars. *Living Rev.Rel.*, 15:6, 2012.
- [122] A. Linde. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108(6):389 – 393, 1982.
- [123] D. H. Lyth y A. R. Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. Cambridge University Press, 2009.
- [124] S. D. Majumdar. A class of exact solutions of einstein’s field equations. *Phys. Rev.*, 72:390, 1947.
- [125] D. J. Marsh y P. G. Ferreira. Ultra-Light Scalar Fields and the Growth of Structure in the Universe. *Phys.Rev.*, D82:103528, 2010.
- [126] T. Matos, F. S. Guzman, y L. A. Urena-Lopez. Scalar field as dark matter in the universe. *Class. Quant. Grav.*, 17:1707–1712, 2000.
- [127] T. Matos y L. A. Urena-Lopez. Quintessence and scalar dark matter in the universe. *Class. Quant. Grav.*, 17:L75–L81, 2000.

- [128] T. Matos y L. A. Urena-Lopez. A further analysis of a cosmological model of quintessence and scalar dark matter. *Phys.Rev.*, D63:063506, 2001.
- [129] T. Matos y L. A. Urena-Lopez. Scalar field dark matter, cross section and Planck-scale physics. *Phys. Lett.*, B538:246–250, 2002.
- [130] T. Matos, J. A. Vazquez, y J. Magana. ϕ^2 as Dark Matter. 2008.
- [131] M. Milgrom. MOND: A pedagogical review. *Acta Phys.Polon.*, B32:3613, 2001.
- [132] C. W. Misner, K. S. Thorne, y J. A. Wheeler. *Gravitation*. Academic Press, San Francisco, 1973.
- [133] P. J. Montero y I. Cordero-Carrion. BSSN equations in spherical coordinates without regularization: vacuum and non-vacuum spherically symmetric spacetimes. *Phys.Rev.*, D85:124037, 2012.
- [134] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [135] G. Nagy, O. E. Ortiz, y O. A. Reula. Strongly hyperbolic second order Einstein's evolution equations. *Phys. Rev.*, D70:044012, 2004.
- [136] G. Nagy y O. Sarbach. A minimization problem for the lapse and the initial- boundary value problem for Einstein's field equations. *Class. Quant. Grav.*, 23:S477–S504, 2006.
- [137] T. Nakamura, K. Oohara, y Y. Kojima. General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 90:1–218, 1987.
- [138] D. Nanopoulos, K. Olive, y M. Srednicki. After primordial inflation. *Physics Letters B*, 127(1-2):30 – 34, 1983.
- [139] E. T. Newman y R. Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3:566–578, 1962. erratum in *J. Math. Phys.* 4, 998 (1963).

-
- [140] G. Nordström. On the energy of the gravitational field in Einstein's theory. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20:1238–1245, 1918.
- [141] D. Nunez y O. Sarbach. Boundary conditions for the Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura formulation of Einstein's field equations. *Phys.Rev.*, D81:044011, 2010.
- [142] Y. Oren y T. Piran. Collapse of charged scalar fields. *Phys. Rev. D*, 68(4):044013, 2003.
- [143] A. Papapetrou. A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution. *Proc. R. Irish Acad.*, A51:191, 1945.
- [144] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [145] P. Peebles y B. Ratra. The Cosmological constant and dark energy. *Rev.Mod.Phys.*, 75:559–606, 2003.
- [146] R. Penrose. Singularities and time asymmetry. En S. W. Hawking y W. Israel, editores, *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979.
- [147] R. Penrose. The question of cosmic censorship. *J. Astrophys. Astron.*, 20:233–248, 1999.
- [148] R. Petryk. *Maxwell-Klein-Gordon fields in black hole spacetimes*. PhD thesis, University of British Columbia, 2005.
- [149] H. P. Pfeiffer, L. E. Kidder, M. A. Scheel, y S. A. Teukolsky. A Multidomain spectral method for solving elliptic equations. *Comput. Phys. Commun.*, 152:253–273, 2003.
- [150] E. Poisson. *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [151] F. Pretorius. Numerical relativity using a generalized harmonic decomposition. *Class. Quant. Grav.*, 22:425–452, 2005.

- [152] B. Ratra. Expressions for Linearized Perturbations in Ideal Fluid Cosmological Models. *Phys.Rev.*, D38:2399, 1988.
- [153] H. Reissner. Über die eigengravitationn des elektrischen felds nach der Einsteinschen theorie. *Ann. Phys.*, 50:106–120, 1916.
- [154] J. Requier, I. Cordero-Carrion, y A. Fuzfa. Numerical study of Spherically Symmetric solutions on a Cosmological Dynamical Background using the BSSN Formalism. *arXiv:1409.3476*, Sept. 2014.
- [155] O. Reula y O. Sarbach. A model problem for the initial-boundary value formulation of Einstein's field equations. *J. Hyperbol. Diff. Equat.*, 2:397–435, 2005.
- [156] O. A. Reula. Hyperbolic methods for Einstein's equations. *Living Rev. Relativity*, 1:3, 1998.
- [157] G. Rigopoulos. A Relativistic view on large scale N-body simulations. *arXiv:1409.6549*, Sept. 2014.
- [158] O. Rinne. Axisymmetric numerical relativity. *PhD thesis, University of Cambridge. gr-qc/0601064*, 2005.
- [159] O. Rinne. Constrained evolution in axisymmetry and the gravitational collapse of prolate Brill waves. *Class. Quant. Grav.*, 25:135009, 2008.
- [160] O. Rinne y J. Stewart. A strongly hyperbolic and regular reduction of Einstein's equations for axisymmetric spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(6):1143, 2005.
- [161] O. Rinne y J. M. Stewart. A strongly hyperbolic and regular reduction of Einstein's equations for axisymmetric spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 22:1143–1166, 2005.
- [162] H. P. Robertson. Kinematics and World-Structure. *Astrophys. Journal*, 82:284, Nov. 1935.
- [163] H. P. Robertson. Kinematics and World-Structure II. *Astrophys. Journal*, 83:187, Apr. 1936.

- [164] H. P. Robertson. Kinematics and World-Structure III. *Astrophys. Journal*, 83:257, May 1936.
- [165] M. Ruiz. *Relatividad numérica : simetría axial, ondas gravitacionales y condiciones de frontera*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2008.
- [166] M. Ruiz, M. Alcubierre, y D. Nunez. Regularization of spherical and axisymmetric evolution codes in numerical relativity. *Gen.Rel.Grav.*, 40:159–182, 2008.
- [167] M. Ruiz, R. Takahashi, M. Alcubierre, y D. Nunez. Multipole expansions for energy and momenta carried by gravitational waves. 2007.
- [168] M. Salgado. The cauchy problem of scalar-tensor theories of gravity. *Class. Quantum Grav.*, 23:4719, 2006.
- [169] M. Salgado, D. M.-d. Río, M. Alcubierre, y D. Núñez. Hyperbolicity of scalar-tensor theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 77(10):104010, 2008.
- [170] O. Sarbach y M. Tiglio. Boundary conditions for Einstein's field equations: Analytical and numerical analysis. *J. Hyperbol. Diff. Equat.*, 2:839, 2005.
- [171] O. Sarbach y M. Tiglio. Continuum and Discrete Initial-Boundary-Value Problems and Einstein's Field Equations. *Living Rev.Rel.*, 15:9, 2012.
- [172] C. Schell y O. Rinne. Spectral approach to axisymmetric evolution of Einstein's equations. *J. Phys. Conf. Ser.*, 600(1):012060, 2015.
- [173] R. J. Scherrer. Purely kinetic k-essence as unified dark matter. *Phys.Rev.Lett.*, 93:011301, 2004.
- [174] H.-Y. Schive, T. Chiueh, y T. Broadhurst. Cosmic structure as the quantum interference of a coherent dark wave. *Nature Physics*, 10:496–499, July 2014.
- [175] H.-Y. Schive, M.-H. Liao, T.-P. Woo, S.-K. Wong, T. Chiueh, T. Broadhurst, y W. Pauchy Hwang. Understanding the Core-Halo Relation of Quantum

- Wave Dark Matter, ψ DM, from 3D Simulations. *arXiv:1407.7762*, July 2014.
- [176] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky. Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship. *Phys. Rev. Lett.*, 66:994–997, Feb 1991.
- [177] S. L. Shapiro y S. A. Teukolsky. Formation of naked singularities: The violation of cosmic censorship. *Phys. Rev. Lett.*, 66(8):994–997, 1991.
- [178] M. Shibata y T. Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys.Rev.*, D52:5428, 1995.
- [179] M. Shibata y T. Nakamura. Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. *Phys. Rev. D*, 52(10):5428–5444, 1995.
- [180] P. Sikivie y Q. Yang. Bose-Einstein Condensation of Dark Matter Axions. *Phys.Rev.Lett.*, 103:111301, 2009.
- [181] L. Smarr. Gravitational Radiation from Distant Encounters and from Head-on Collisions of Black Holes: The Zero Frequency Limit. *Phys. Rev.*, D15:2069–2077, 1977.
- [182] L. Smarr. Space-Time Generated by Computers: Black Holes with Gravitational Radiation. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 302:569–604, 1977.
- [183] L. Smarr, A.Cadez, B. DeWitt, y K. Eppley. Collision of two black holes: Theoretical framework. *Phys. Rev.*, D14:2443, 1976.
- [184] L. L. Smarr, editor. *Proceedings, Sources of Gravitational Radiation*, Cambridge, 1979. Cambridge Univ. Press, Cambridge Univ. Press.
- [185] E. Sorkin. On critical collapse of gravitational waves. *Class. Quant. Grav.*, 28:025011, 2011.
- [186] A. Suarez, V. Robles, y T. Matos. A Review on the Scalar Field/ Bose-Einstein Condensate Dark Matter Model. *arXiv:1302.0903*, Feb. 2013.

-
- [187] B. Szilágyi, R. Gómez, N. T. Bishop, y J. Winicour. Cauchy boundaries in linearized gravitational theory. *Phys. Rev.*, D62:104006, 2000.
- [188] B. Szilagyí y J. Winicour. Well-posed initial-boundary evolution in general relativity. *Phys. Rev.*, D68:041501, 2003.
- [189] K. Thorne. Multipole expansions of gravitational radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 52:299–339, 1980.
- [190] J. M. **Torres**. Regularization of the generalized BSSN formulation for axisymmetric spacetimes. *AIP Conf.Proc.*, 1473:37–42, 2011.
- [191] J. M. **Torres** y M. Alcubierre. Gravitational collapse of charged scalar fields. *Gen.Rel.Grav.*, 46(9):1773, 2014.
- [192] J. M. **Torres**, M. Alcubierre, A. Diez-Tejedor, y D. Nunez. Cosmological nonlinear structure formation in full general relativity. *Phys. Rev.*, D90(12):123002, 2014.
- [193] S. Tsujikawa. Quintessence: A Review. *Class.Quant.Grav.*, 30:214003, 2013.
- [194] M. S. Turner. Coherent Scalar Field Oscillations in an Expanding Universe. *Phys. Rev.*, D28:1243, 1983.
- [195] L. A. Urena-Lopez. Non-relativistic approach for cosmological Scalar Field Dark Matter. *Phys.Rev.*, D90:027306, 2014.
- [196] L. A. Urena-Lopez y A. R. Liddle. Supermassive black holes in scalar field galaxy halos. *Phys. Rev.*, D66:083005, 2002.
- [197] C. L. Wainwright, M. C. Johnson, A. Aguirre, y H. V. Peiris. Simulating the universe(s) II: phenomenology of cosmic bubble collisions in full General Relativity. *JCAP*, 1410(10):024, 2014.
- [198] C. L. Wainwright, M. C. Johnson, H. V. Peiris, A. Aguirre, L. Lehner, et al. Simulating the universe(s): from cosmic bubble collisions to cosmological observables with numerical relativity. *JCAP*, 1403:030, 2014.

-
- [199] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, U.S.A., 1984.
- [200] A. G. Walker. On milne's theory of world-structure. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42(1):90–127, 1937.
- [201] E. Wigner. *Group Theory and Its Application to Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. New York: Academic Press, New York, U.S.A., 1959.
- [202] J. Winicour. Boundary Conditions for the Gravitational Field. *Class.Quant.Grav.*, 29:113001, 2012.
- [203] H. Witek. Numerical Relativity in higher-dimensional space-times. *Int. J. Mod. Phys.*, A28:1340017, 2013.
- [204] J. York. Kinematics and dynamics of general relativity. En L. Smarr, editor, *Sources of Gravitational Radiation*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1979.
- [205] J. York. Initial data for collisions of black holes and other gravitational miscellany. En C. Evans, L. Finn, y D. Hobill, editores, *Frontiers in Numerical Relativity*, páginas 89–109. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.
- [206] M. Zilhao, V. Cardoso, C. Herdeiro, L. Lehner, y U. Sperhake. Collisions of charged black holes. *Phys.Rev.*, D85:124062, 2012.
- [207] M. Zilhão, V. Cardoso, C. Herdeiro, L. Lehner, y U. Sperhake. Collisions of oppositely charged black holes. *Phys.Rev.*, D89:044008, 2014.
- [208] M. Zilhão, V. Cardoso, C. Herdeiro, L. Lehner, y U. Sperhake. Testing the nonlinear stability of Kerr-Newman black holes. 2014.