

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA**



ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE INGENIERO QUIMICO

PRESENTA:

GALVÁN REYES JOSALD ANGEL

DIRECTOR DEL TRABAJO DE TESIS:

DR. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA

CIUDAD DE MÉXICO

OCTUBRE 2016



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACION

ESCOLAR

PRESENTE

Comunico usted que el alumno Galván Reyes Josaid Angel con número de cuenta 306018398 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado el día 27 del mes de Octubre del 2016 a las 12:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en las sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente: Dr. Esteban Minor Pérez

Vocal: Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)

Secretario: Dr. Mariano Pérez Camacho

Suplente: I.Q. Consuelo Matías Garduño

Suplente: M.I. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez

El título de la tesis que se presenta es: Estudio de un fluido no newtoniano bajo el efecto de un campo eléctrico. Ecuación constitutiva de Ellis.

Opción de Titulación: Examen Profesional

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

AGRADECIMIENTOS

- A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- A Socorro Columba Galván Reyes que sin su apoyo y confianza nada de esto sería posible
- Al M. en C. Mariano Pérez Camacho por sus valiosas aportaciones, comentarios y sugerencias para la comparación y discusión de los datos experimentales.
- A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por el tiempo dedicado para lograr este proyecto, gracias por su vasto conocimiento y experiencia, por enseñarme cosas más allá de lo académico, gracias por esos momentos de reflexión y ánimo que me ayudaron a ampliar mi visión profesional, así como de la vida.
- A la I.Q. Consuelo Matías Garduño por sus valiosas aportaciones y comentarios en la parte de aplicación.
- Al Dr. Esteban Minor Perez por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Al I.Q. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.
- **Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM << IN115615>> << Fenómenos de Transporte y Reología de Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.**
- **Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIME) de la UNAM << PE112716>> << Fenómenos de Transporte y Reología de**

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Fluidos Complejos aplicados a Sistemas Biológicos>>. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

DEDICATORIAS

- A la Carrera de Ingeniería Química, de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- A Socorro Columba Galván Reyes por confiar siempre en mi y soportar todas mis locuras.
- Al Dr. Mariano Pérez Camacho por sus valiosas aportaciones, comentarios y sugerencias para la comparación y discusión de los datos experimentales.
- A mi asesor el Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia, por el tiempo dedicado para lograr este proyecto, gracias por su vasto conocimiento y experiencia, por enseñarme cosas más allá de lo académico, gracias por esos momentos de reflexión y animo que me ayudaron a ampliar mi visión profesional, así como de la vida.
- A la I.Q. Consuelo Matías Garduño por sus valiosas aportaciones y comentarios en la parte de aplicación.
- Al Dr. Esteban Minor Perez por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Al M.I. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez por sus valiosas aportaciones y comentarios.
- Finalmente agradezco a todas aquellas personas que me apoyaron a lo largo de mi crecimiento personal y profesional y que de alguna manera ayudaron en la culminación de este trabajo muchas gracias.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Contenido

AGRADECIMIENTOS	3
DEDICATORIAS	¡Error! Marcador no definido.
NOMENCLATURA	9
Variables adimensionales	11
Letras Griegas	11
Números adimensionales.....	11
GLOSARIO.....	13
ÍNDICE DE FIGURAS	14
ÍNDICE DE TABLAS	16
RESUMEN	14
APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO	18
CAPÍTULO I	20
INTRODUCCIÓN	20
1.1 Antecedentes.....	21
1.2 Objetivos.....	32
1.3 Hipótesis del trabajo	32
1.4 Justificación	33
CAPÍTULO II	36
MARCO TEÓRICO.....	36
2.1 Fluidos complejos	37

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

2.2 Sistemas coloidales	38
2.3 Fundamentos básicos de reología	41
2.4 Ecuaciones constitutivas.....	45
2.5 Tipos de Flujo y Funciones Materiales.....	52
2.6 Resumen de los conceptos teóricos y aplicaciones.....	54
CAPÍTULO III	55
PROBLEMA FÍSICO	55
3.1 Descripción del problema	56
3.2 Cinemática y dinámica de flujo de un flujo cortante.....	57
3.4 Ecuaciones de continuidad y momento	61
CAPÍTULO IV	67
MODELADO MATEMÁTICO	67
Modelo visco-elástico.....	70
CAPÍTULO V	79
SIMULACIONES COMPUTACIONALES	79
CAPÍTULO VI	103
ANÁLISIS DE RESULTADOS	103
Funciones Materiales.....	106
CAPÍTULO VII	109
CONCLUSIONES.....	109
Y TRABAJO FUTURO	109
Descripción física del problema	110

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Perfiles de velocidad	110
Flujo volumétrico	111
Aplicación a un sistema no newtoniano con partículas	112
Trabajo futuro	113
Modelos viscoelásticos no lineales y estructurales	113
Distribución de carga en el sistema	113
Flujo pulsátil sanguíneo con liberado de fármacos	114
Efectos convectivos y transitorios en la temperatura	114
Métodos matemáticos y computacionales	115
Sistemas y Reometría.....	115
BIBLIOGRAFIA	117
APENDICE A.....	122
APENDICE B.....	126

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

NOMENCLATURA

Vectores y tensores

σ	Tensor de esfuerzos viscoso [Pa]
D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
$\nabla \mathbf{v}$	Tensor gradiente de velocidad [1/s]
$\nabla \mathbf{v}^T$	Tensor gradiente de velocidad transpuesto [1/s]
\mathbf{v}	Vector de velocidad [m/s]
\mathbf{g}	Vector de aceleración de la gravedad [1/s]
\mathbf{E}	Vector campo eléctrico [N/C]

Operadores Matemáticos

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$	Operador Nabla [1/m]
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	Derivada parcial de la coordenada x^i [1/m]
$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$	Derivada material [1/s]
$\nabla \cdot$	Operador divergencia [1/m]

Variables dimensionales

L	Longitud [m]
V_z	Componente axial del vector de velocidad [m/s]
t	Tiempo [s]
t_{car}	Tiempo característico [s]
Q	Flujo volumétrico [m ³ /s]

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Variables adimensionales

Q^*	Flujo volumétrico adimensional en estado no estacionario [1]
Q_0^*	Flujo volumétrico adimensional en estado estacionario [1]
v_z^*	Velocidad axial adimensional [1]
σ^*	Esfuerzo cortante adimensional [1]
x^*	Coordenada axial adimensional [1]

Letras Griegas

α	Exponente del modelo de Ley de potencia [1]
dV_z/dx	Rapidez de deformación xz [1/s]
φ_0	Fluidez a baja rapidez de deformación [1/Pa s]
φ_1 [1/Pa s ⁿ]	Fluidez a moderada rapidez de deformación
λ_0	Tiempo de relajación de Maxwell [s]
ρ	Densidad [rad/s]
ρ_e	Densidad de carga [C/m ³]
σ_{xz}	Componente xz del esfuerzo cortante [Pa]
σ_w	Esfuerzo en la pared [Pa]

Números adimensionales

Re	Número de Reynolds [1]
De	Número de Deborah [1]

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

GLOSARIO

Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación)
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo
Ecuación de continuidad:	Ecuación de conservación de la masa
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo
Modelo de Ellis:	Ecuación constitutiva no newtoniana que contiene como caso particular el modelo newtoniano y el modelo de ley de potencia.
Modelo de Tanner:	Ecuación constitutiva no newtoniana viscoelástica que contiene como caso particular el modelo newtoniano generalizado y el modelo viscoelástico de Maxwell.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación
Fluido engrozante al corte:	Fluido que aumenta su velocidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Fluido adelgazante al corte: Fluido que aumenta su velocidad por efecto de un aumento en la rapidez de deformación.

Sistema coloidal: Sistema complejo que contiene un cumulo de partículas dispersas en un medio.

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Organización del proyecto de tesis.

Figura 2. Esquema que clasifica las diferentes estructuras y arreglos que se presentan en los cristales líquidos por efecto de la temperatura.

Figura 3. Surfactante y sistemas micelares en función de la concentración micelar crítica. En el lado izquierdo un molécula de tensoactivo que contiene una parte hidrofóbica y una hidrofílica. El lado derecho muestra una micela compuesta de varias moléculas de agente tensoactivo. Abajo en el centro, una micela en forma de cilindro debido al aumento en la concentración micelar critica.

Figura 4. Ilustra la composición de un sistema coloidal

Figura 5. Flujo cortante simple.

Figura 6. Ilustra el sistema de estudio. Dos placas paralelas separadas a una distancia $2H$ y Longitud L respectivamente. Se tiene un sistema coloidal disperso en un fluido

Figura 7. Ilustra la componente xy del tensor de esfuerzos en función de la coordenada axial adimensional, para diferentes valores del gradiente modificado.

Figura 8. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional en función del exponente alfa del modelo de Ellis asociado con el adelgazamiento al corte del fluido.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Figura 9. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional, en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.

Figura 10. Ilustra el primer coeficiente de esfuerzos normales vs esfuerzo adimensional en la pared como función del número de Deborah. Los otros parámetros utilizados en la simulación son: (i) $\alpha = 2$, (ii) $\Phi = 1$.

Figura 11. Ilustra el perfil de velocidades axial adimensional vs coordenada axial adimensional en función del exponente alfa del modelo de Ellis. Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\Phi = 1$, (ii) $\sigma_w^* = 1$

Figura 12. Ilustra el perfil de velocidades axial adimensional vs coordenada ortogonal adimensional en función del exponente alfa del modelo de Ellis. Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\Phi = 1$, (ii) $\sigma_w^* = 1$

Figura 13. Ilustra el perfil de velocidades axial adimensional vs coordenada axial adimensional en función del número adimensional Φ . Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\alpha = 2$, (ii) $\sigma_w^* = 1$

Figura 14. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional, en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.

Figura 15. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional, en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.

Figura 16. Ilustra el sistema coloidal al cual se le da de forma continua e irreversiblemente por el flujo combinado

Figura 17. Ilustra el diagrama reológico de la función viscosidad como función del esfuerzo en la pared para el valor de alfa 1.4 obtenido del ajuste de los datos reométricos obtenidos de la literatura.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Figura 18. Ilustra el diagrama reológico del primer coeficiente de esfuerzos normales vs esfuerzo en la pared adimensional como función del número adimensional Φ . El valor del exponente alfa del modelo de Ellis es igual a 1.6.

Figura 19. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.

Figura 20. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores del número adimensional Φ . Aquí se ha definido alfa con un valor de 1.6 respectivamente.

Figura 21. Flujo volumétrico adimensional en función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del número no newtoniano Φ . El valor del exponente alfa del modelo de Ellis es $\alpha = 1.6$.

Figura 22. Resumen cualitativo de los principales resultados de las funciones materiales del modelo Tanner-Ellis

Figura 23. Resumen cualitativo de los principales resultados de las funciones materiales del modelo Tanner-Ellis

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Ilustra los diferentes tipos de coloides

Tabla 2. Variables dimensionales y adimensionales.

Tabla 3. Variables características.

Tabla 4. Parámetros materiales utilizados en el modelo de Ellis para una suspensión de tipo coloidal.

.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

RESUMEN

En este trabajo se estudió la reología y transferencia de momento de un sistema complejo bajo la acción de un campo eléctrico. Para la caracterización reológica y de flujo en el sistema se utilizó una ecuación constitutiva de Tanner la cual, contiene un tiempo de relajación de Maxwell en el sistema y una función viscosidad que depende del segundo invariante del tensor rapidez de deformación. Para caracterizar la función viscosidad, se utilizó el modelo de Ellis, el cual acopla los modelos newtonianos y de ley potencia. Suponiendo estado estacionario, fluido incompresible, proceso isotérmico y que el fluido es deformado continua e irreversiblemente debido a una fuerza cortante producida por un gradiente de presión en la dirección del flujo combinado con un campo eléctrico uniforme (constante), se obtienen expresiones analíticas para la función viscosidad, la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales respectivamente. Suponiendo que los mecanismos inerciales son despreciables es decir números de Reynolds bajos y que la densidad de carga en el sistema es constante (se asume una solución saturada), se obtienen expresiones analíticas para el esfuerzo cortante, velocidad axial, velocidad promedio flujo volumétrico, función viscosidad primera y segunda diferencia de esfuerzos normales en función de las propiedades materiales del sistema. Finalmente, los resultados de nuestro modelo son alimentados con datos reométricos de un sistema no coloidal y se generan las respectivas curvas teóricas, los cuales concuerdan con resultados presentados por otros modelos en la literatura.

Palabras claves: Fenómenos de Transporte, Fluido Electrorreológicos, Fluido Viscoelástico, Modelo de Tanner, Fluido de Ellis, Campo Eléctrico

ABSTRACT

In this work, the rheology and momentum transport of a complex system (viscoelastic fluid) under an external applied electric force were studied. In order to characterize the rheology and flow of the system, the Tanner constitutive equation

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

coupled with the Ellis viscous function was used. The Ellis model can be separated in two contributions, the first one is associated with the Newtonian mechanisms and the second one with non-Newtonian behavior through the power law constitutive equation. These equations contain four materials properties associated to different physical mechanism: a relaxation Maxwell time, two fluidities at low and intermediate wall stress and a power law exponent related to the shear thinning and shear thickening mechanisms. By assuming steady state, incompressible flow and an isothermal process, analytical expression for axial velocity and volumetric flow were found. Finally, the theoretical predictions were tested using rheometric data for a non-colloidal system. The predictions show good agreement with experimental data for similar flow situations.

Key words: Transport phenomena, Electrorheological Fluid, Viscoelastic Fluid, Tanner Constitutive Equation, Ellis Fluid, Electrical Field

APORTACIÓN AL CONOCIMIENTO

Este trabajo versa en la descripción de partículas suspendidas en fluidos viscoelásticos. El flujo combinado gradiente de presión-campo eléctrico se modela suponiendo que el flujo es homogéneo, estacionario e isotérmico y que el sistema es caracterizado por la ecuación constitutiva de Tanner-Ellis. Para obtener expresiones analíticas, se supone que se satisface la condición de adherencia del fluido al sólido respectivamente. Las principales aportaciones al conocimiento de esta investigación, se resumen a continuación:

- a) Estudio del efecto combinado del flujo gradiente de presión constante y campo eléctrico en una geometría de platos paralelos en un fluido viscoelástico con partículas dispersas en el medio (Sistema coloidal).
- b) El fluido no-newtoniano fue caracterizado mediante la ecuación reológica viscoelástico no lineal de Tanner-Ellis. Este modelo acopla modifica el de Maxwell con una función viscosidad variable dependiente del segundo invariante del tensor rapidez de deformación y como función viscosidad se utiliza el modelo inelástico de Ellis.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

- c) El sistema de ecuaciones diferenciales acopladas se resolvieron de manera analíticas obteniéndose expresiones cerradas para el perfil de velocidades axial, Flujo volumétrico, velocidad promedio, función viscosidad, primer y segundo coeficiente de esfuerzos normales respectivamente.
- d) Se propuso un conjunto de variables adimensionales las cuales permitieron acotar el sistema y facilitar el análisis computacional a través de números adimensionales que relaciona las propiedades no newtonianas y viscoelásticas del sistema.
- e) Todas las variables dinámicas dependen del número de Reynolds y de la frecuencia de oscilación en la perturbación.
- f) Utilizando datos reométricos de un sistema coloidal de un fluido no newtoniano, se prueban las expresiones cerradas obtenidas en la teoría.

Para concluir los objetivos planteados en este trabajo se reforzaron los conocimientos matemáticos en general así como de ecuaciones diferenciales, fenómenos de transporte, adimensionamiento de ecuaciones, modelado de procesos, conocimiento de conceptos básicos de reología, fluidos complejos, y uso de software Mathematica 10.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

1.1 Antecedentes

1.1.1 Aplicaciones

El análisis de fluidos complejos sometidos a campos externos que los deforman continúa e irreversiblemente, han sido de mucho interés para diferentes grupos de investigación en el mundo, debido a sus aplicaciones potenciales en las áreas de medicina, ingeniería ambiental (separadores electrostáticos de polvo), sistemas biológicos (células ciliadas externas) liberación de fármacos y diseño de micro dispositivos a niveles micro y nano respectivamente (Alves et al. 2001; Chakkraborty 2005; Afonso et al. 2009).

Ejemplos de estos sistemas, se presentan en la ciencia de polímeros innovadores en las áreas de la medicina que liberan fármacos controlados que ayudan a prevenir infecciones (Burgeon y Nakache 1964). Estos sistemas son estudiados en un base de silicona, el cual es conocido por su aplicación en los materiales de implante los cuales pueden liberar diclofenaco o ibuprofeno.

Otros ejemplos importantes se encuentran en la ciencia de la medicina, específicamente en la elaboración de material quirúrgico como las gasas inteligentes de colágeno y en la regeneración de hueso mediante implantes. La ventaja de usar este biomaterial, radica en que al liberar el fármaco que contenga, ya se vancomicina o diclofenaco, se evitara el estar cambiando las gasa y se prevendrán infecciones, mientras que el colágeno ayuda a mejorar la cicatrización y en la regeneración de hueso, en los implantes dentales debido a la perdida de hueso por malformaciones debido a condiciones genéticas y biológicas.

La electroforesis utiliza campos eléctricos para separar las biomoléculas de un sistema. La gran mayoría de macromoléculas están cargadas eléctricamente y, al igual que los electrolitos, se pueden clasificar en fuertes y débiles dependiendo de sus propiedades fisicoquímicas (constante de ionización de grupos ácidos y básicos). Por lo general, para caracterizar la molécula se determina la velocidad a la que esta se mueve en un campo eléctrico y en el caso de proteínas, la masa molecular o para detectar cambios de aminoácidos y separar cuantitativamente

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

distintas especies moleculares; en particular para ácidos nucleicos se determina su tamaño, medido en pares de bases.

Por otra parte, los micros dispositivos utilizados en la industria de la farmacia son de vital importancia en estos tiempos (Stone et al. 2004; Bruss 2008). Estos sistemas presentan grandes ventajas debido a que se necesitan cantidades diminutas de fluido y que el sistema de flujo de estudio se encuentra en régimen laminar, i.e. los efectos inerciales son despreciables en la ecuación de balance de cantidad de movimiento, por lo que se tiene un balance entre las fuerzas superficiales (viscosos y debido a la presión) y las fuerzas de bulto (fuerzas gravitacionales por unidad de volumen, Bruss 2008). Finalmente, estos fenómenos presentan mecanismos acoplados entre la transferencia de energía y masa respectivamente (Bruss 2008).

Una de las aplicaciones más importantes de los fluidos expuestos a campos eléctricos se da en el área de la electro-osmosis (Arulanandam y Li 2000; Alves et al. 2001; Afonso et al. 2009). La electroósmosis es el movimiento de un fluido inducido por la aplicación de una diferencia de potencial en un material poroso, capilar, tubo, membrana o micro canal (Yang et al. 1997; Wang et al. 2007). La principal aplicación de la electro-osmosis es en la liberación de fármacos en el torrente sanguíneo del cuerpo humano (Jendreck et al. 2003) y que sean de ayuda contra enfermedades como la diabetes, hiperglucemia, cáncer, etc, las cuales han sido una pandemia en los últimos 30 años.

Por último, la mayoría de las aplicaciones de los fluidos electro-reológicos que se emplean en áreas de interés para la humanidad como son: (i) biología, (ii) física y química son no newtonianos (Bird et al. 1977), i.e. su viscosidad no permanece constante por efecto de la rapidez de deformación, por lo que se debe considerar como una función material (Ver Cap. 4, Bird et al. 1977) la cual, depende de la concentración, temperatura, ph, frecuencia angular y del escalar asociado al tensor gradiente de velocidad (segundo invariante del tensor rapidez de

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

deformación, Thruston y Greiling 1978; Jendrejack et al. 2003; Moyers-Gonzalez 2008)

1.1.2 Flujos electro-osmóticos

El análisis teórico de flujos electro-osmóticos, en fluidos Newtonianos y no newtonianos en micro canales ha sido sujeto de diversos estudios utilizando ecuaciones de transporte y para caracterizar la transferencia de momento y la reología se han caracterizado con diferentes ecuaciones constitutivas (Alves et al. 2001; Afonso et al. 2009; Cruz y Pinho 2004, Cruz et al. 2005, Das y Chakraborty 2006). La más simple de ellas, es la de Newton, la cual relaciona la rapidez de deformación con el esfuerzo cortante mediante una sola función material (Bird et al. 1977, Fredrickson 1964; Lamb H 1932). Sin embargo, estos sistemas presentan comportamientos complejos dependiendo de la rapidez con la que sean deformados por lo que el modelo newtoniano no describe correctamente estos sistemas.

Para caracterizar correctamente las propiedades no newtonianas de estos sistemas se han empleado diferentes modelos constitutivos no newtoniano: (i) Viscosos (Ley de potencia, Ellis, Reiner-Phillipoff, Cross, etc.), (ii) Viscoelásticos lineales (Maxwell, Jeffrey, Burguers, etc), (iii) Viscoleásticos no lineales (Tanner, White-Metzner, Oldroyd B, Johnson-Segalman etc), a continuación, se presentan algunos de estos resultados (Bird et al. 1977; Fyrrillas et al. 1999; Cruz et al. 2005; Cruz y Pinho 2007). Por otra parte, el efecto de la geometría sobre el flujo ha sido estudiado con diferentes sistemas: (i) rendijas, (ii) cilindros y cilindros coaxiales, (iii) esferas, etc (Oliveira y Pinho 1999; Pinho y Oliveira 2000; Bird et al. 2002). Afonso et al. (2009) estudiaron el flujo combinado eléctrico-osmótico y gradiente de presión constante de fluidos viscoelásticos en micro rendijas con diferentes líquidos. Para describir la dinámica lineal y no lineal de flujo, utilizaron dos ecuaciones constitutivas inspiradas en los formalismos de Phan-Thien y del modelo de mancuernas tipo FENE-P. Sus resultados demostraron que: (i) los perfiles de velocidad, (ii) velocidad promedio, (iii) flujo volumétrico y (iv) primera y segunda diferencia de esfuerzos normales son muy sensibles a los siguientes

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

parámetros: (i) campo externo aplicado y (ii) mecanismos no newtonianos a través de las propiedades materiales de la ecuaciones constitutivas empleadas en la dinámica de flujo (viscosidades a bajo y alto corte, tiempos de relajación, tiempos de retardo y módulos elástico). Por otra parte, Burgreen y Nakache (1964) estudiaron el efecto del potencial de superficie en el transporte de un líquido dentro de un capilar ultra fino, el cual bajo ciertas condiciones, su geometría puede aproximarse por medio de una rendija validando la simplificación de Debye-Hukel (Oliveira y Pinho 2000; Park y Lee 2008), para la distribución del potencial eléctrico que está expuesto a un campo eléctrico. Estos sistemas se utilizan en soluciones de electrolitos y plasmas (gases ionizados) respectivamente. Rise y Whitehead (1965) discutieron el mismo sistema físico, pero en un capilar por lo que el análisis expuesto por Burgen y Nakache (1964) es válido sin embargo, las implicaciones matemáticas cambian por efecto de la curvatura asociada a las coordenadas cilíndricas en el sistema.

En este mismo contexto, Dutta y Beskok (2001) estudiaron sistemas similares de flujo en rendijas. Ellos analizaron el flujo combinado electro-osmótico y gradiente de presión en la dirección de flujo, obteniendo expresiones analíticas para el perfil de velocidades, velocidad promedio, flujo volumétrico y másico. En su investigación, analizaron el efecto de la capa eléctrica doble formada por efecto de los iones que son absorbidos en el sistema y que después interactúan con los iones dispersos en el bulto mediante los mecanismos eléctricos (Fuerzas coulombianas). Es importante resaltar que la primera capa se forma por efecto de interacciones químicas y la segunda por efecto de las interacciones físicas eléctricas. Arulanandam y Li (2000) propusieron un modelo analítico en dos dimensiones para un flujo electro-cinetico en un micro canal rectangular, basados en las ecuaciones de Poisson-Boltzmann y Navier-Stokes las cuales son descritas mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas. Bajo ciertas restricciones físicas (escalas de magnitud), se obtuvieron expresiones analíticas, y los casos generales se resolvieron numéricamente discretizando las ecuaciones diferenciales acopladas por método de diferencias finitas.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Los sistemas reales que involucran fluidos electroreológicos, rara vez se describen mediante un mecanismo aislado dominante ya sea, mediante la transferencia de momento, energía o masa, la mayoría de los problemas presentan sistemas acoplados (Das y Chakraborty 2006). En este contexto, Zade et al. (1879) obtuvieron soluciones analíticas para la transferencia de calor de fluidos Newtonianos bajo fuerzas combinadas de presión y electro-osmosis, en micro canales planos. En este trabajo, ellos dedujeron soluciones analíticas en estado estacionario y no estacionario cuando el campo eléctrico es constante con una distribución de potencial zeta a lo largo de la pared (Qian y Bau). Literatura especializada puede ser consultada para profundizar acerca de los fluidos electro-osmóticos para fluidos no newtonianos en micro-canales (Rice y Whitehead 1965; Yang y Li 1997; Wang et al. 2007)

1.1.3 Fluidos Biológicos

Por otra parte, los bio-fluidos (sangre con diferentes patologías y fluidos corporales) son sistemas que contienen cadenas moleculares largas y que por su misma naturaleza y peso molecular adquieren características no-Newtonianas (Bird et al. 1977; Fam et al. 2007). En este tipo de fluidos, la viscosidad es una función material que depende de la rapidez de deformación, elasticidad a través de la primera diferencia de esfuerzos normales (cambian la forma del elemento de control, pero su volumen es constante) y presentan ciclos de histéresis asociados a la tixotropía y reopexía (Bird et al. 1977). Estos fluidos son encontrados en dispositivos usados para análisis químicos y biológicos en micro reómetros (Fam et al. 2007)

El estudio teórico de flujos electro-osmóticos en fluidos no-Newtonianos es reciente y ha sido en su mayoría limitado a modelos inelásticos simples, tales como el de ley de potencia, debido a dificultades analíticas inherentes para introducir ecuaciones constitutivas más complejas.

Das y Chakraborty (2006) presentan resultados acerca de los perfiles de velocidad, temperatura y concentración en flujos electro-osmóticos en micro

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

canales con bio-fluidos no-Newtonianos descritos por un modelo inelástico no newtoniano tipo ley de potencia, el cual en un reograma describe la zona intermedia de rapidez de deformación y contiene dos propiedades materiales, las cuales se interpretan como una viscosidad generalizada (parámetro de consistencia) y el exponente asociado a los mecanismos adelgazantes o espesantes al corte respectivamente (Bird et al. 1977). En este mismo rubro, Oliveira y Pinho (1999) y Oliveira (2002) deducen soluciones analíticas para el flujo transitorio en rendijas y geometrías cilíndricas con diferentes ecuaciones constitutivas viscoelásticas no lineales las cuales son descritas a través de los parámetros materiales asociados a los modelos matemáticos. Suponiendo flujo incompresible (densidad constante), y asumiendo que el sistema de flujo se encuentra totalmente desarrollado, se obtienen expresiones cerradas para los perfiles de velocidad, flujo volumétrico, velocidad promedio, viscosidad cortante y primera diferencia de esfuerzos normales respectivamente. Distribución de partículas en medios viscoelásticos con diferentes cargas bajo la acción combinada de gradientes de presión, efectos gravitacionales y campos eléctricos, son de vital importancia en los estudios básicos de liberado de fármacos (Alves et al. 2001; Afonso et al. 2009). En estos trabajos, los autores estudiaron la transferencia de momento y reología con diferentes ecuaciones constitutivas despreciando los efectos superficiales de capa y de doble capa en la pared del sistema en donde se presentan fenómenos fisicoquímicos de adsorción y de tipo eléctrico respectivamente.

Los resultados de Alves et al. 2001 y Afonso et al. 2009 se centran en la funciones materiales del sistema (función viscosidad, primera diferencia de esfuerzos normales), perfiles velocidades, velocidad promedio y flujo volumétrico. Es importante resaltar que todos estos fenómenos, se rigen a través de las propiedades geométricas, longitudes características que involucran los dispositivos utilizados en la liberación de fármacos, y de las interacciones químicas (adsorción) y de las fuerzas eléctricas tipo Coulomb. En casi todos los dispositivos utilizados en escala nanométrica, la longitud característica del

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

sistema, es por lo menos un orden más grande que la asociada a los procesos de químicos y físicos de la teoría de la capa y doble capa y el fluido está distribuido uniformemente por el conducto. Afonso et al. (2009) analizaron el fenómeno electro-osmótico mediante ecuaciones viscoelásticas no lineales tipo Phan-Thien, tomando en cuenta los efectos del solvente y del polímero. Su trabajo demostró que las variables dinámicas se ven influenciados a través de los mecanismos viscoelásticos a través de las propiedades materiales (viscosidades a corte bajo, alto, tiempos de relajación, tiempos de flujo etc). La influencia de estos materiales, fue analizada a través de grupos adimensionales asociados a los diferentes mecanismos aplicados (Bird et al. 1977) y de nueva cuenta, sus resultados reflejan los efectos de las propiedades electro-reológicas newtonianas sobre el flujo.

Por otra parte, este tipo de flujos en geometrías rectangulares puede inducir inestabilidades de flujo, los cuales están asociados con términos no lineales en las ecuaciones gobernantes. El problema de estas inestabilidades de flujo, es la de generar soluciones no acotadas que evolucionan en el tiempo. En términos generales, los flujos electro-osmótico en micro canales, inestabilidades de flujo pueden ser provocadas por la oscilación de campos eléctricos (Arulanandam 2000; Afonso and Pinho 2009), los cuales pueden acoplar los efectos térmicos a través de la ecuación de balance de transporte de energía y para ciertos casos admiten soluciones analíticas (Lin et al. 2014). Además que los efectos inerciales a través de un aumento en la velocidad provocan inestabilidades de flujo las cuales pueden ser inducidas por un aumento en el número de Reynolds, i.e. debido a una transición de flujo de laminar a turbulento. Por ejemplo, para fluidos viscoelásticos se observaron inestabilidades constitutivas en Poiseuille y los flujos de Couette cuando las ecuaciones constitutivas exhiben un comportamiento no-monotónico para el esfuerzo cortante. Alves et al. (2001) analizan la inestabilidad del flujo osmótico con una ecuación constitutiva de Johnson-Segalman y demostraron que existen propiedades críticas (Esfuerzo crítico) para el cual, las curvas reométricas presentan inestabilidades asociadas a las oscilaciones. Existen otras inestabilidades de flujo asociadas con perturbaciones

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

basados en funciones exponenciales complejas y que son punto de partida en los análisis de factores de dispersión. Oliveira y Pinho (1999) analizaron la derivada convectiva de gordon-Schowalter en el modelo PTT (Bird et al. 2002) para el flujo completamente desarrollado en un microcanal. Ellos derivaron expresiones analíticas para la rapidez de deformación y para números de Deborah relacionados a las propiedades de inestabilidad de los flujos.

En este punto, existen aspectos de interés en los flujos no-newtonianos sometidos a campos eléctricos respectivamente:

- a) El efecto de las propiedades materiales del fluido en las propiedades de transferencia de momento y reológicas.
- b) El efecto de las propiedades electrostáticas debido a la condición de cúmulo de partículas
- c) El efecto de las propiedades fisicoquímicas y eléctricas debido a la adsorción de cargas en la superficie cargada (capa y doble capa) y las interacciones eléctricas (Fuerzas de Coulomb)

En la siguiente sección, se mencionaran los aspectos más relevantes de la presente investigación.

1.1.4 Elementos importantes de este trabajo

Finalmente, el camino a seguir para entender el flujo de fluidos visco elásticos en campos eléctricos es probar diferentes ecuaciones constitutivas que permitan analizar fenómenos en el régimen de deformación línea y no lineal. Por otra parte, si el fluido contiene un cúmulo de partículas cargadas (iones) como se orientan estas debido al flujo, ¿Qué tipo de fenómenos físicos se presentan por efecto de los fenómenos interfaciales y eléctricos respetivos?, que efecto tendrían las propiedades viscosas y elásticas en la dinámica de flujo.

- Una de las estrategias a seguir es modelar los problemas con menos restricciones físicas y con modelos más realistas, lo que implementaría la

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

complejidad matemática e invocaría los algoritmos computacionales y métodos numéricos.

- Otra de las posibilidades, sería la de modelar el flujo electro-osmótico en condiciones reales, i.e. cuando se liberan los fármacos en la sangre a través de geometrías que se alejen de rendijas y tubos circulares.
- Paquetes computacionales basados en técnica matemáticas sofisticadas (elemento finito, volumen finito e híbridos) serian de gran utilidad para una mejor descripción del flujo en estos sistemas computacionales.
- Otro efecto importante, es el reto que presenta el campo eléctrico en un sistema en donde existe una disminución en el radio de flujo lo que implicaría que el vector velocidad tenga dos componentes radial y axial por lo que se tendría un sistema de ecuaciones acopladas respectivamente.
- Finalmente para describir la física de estos sistemas partícula-partícula, partícula-cúmulo y cúmulo-cúmulo se necesita incorporar el tamaño de estas en los cálculos y sus interacciones.

Hasta este momento, existen varias preguntas que deben ser contestadas y cuestiones las cuales son formuladas a continuación:

- ✓ La transferencia de momento y reología en el sistema de flujo, puede ser descrito por el modelo visco-elástico no lineal de Tanner y la función viscosidad modelada con el modelo constitutivo de Ellis el cual acopla el modelo la rapidez de deformación del modelo newtoniano y el de ley de potencia.
- ✓ El efecto de las propiedades del fluido debe influir en las propiedades dinámicas del fluido, i.e. los mecanismos viscosos asociados a el adelgazamiento o engrosamiento y elásticos en el sistema.
- ✓Cuál es el efecto del gradiente de presión y campo eléctrico combinado en el sistema de flujo.
- ✓Cuál es el efecto de las propiedades materiales a través de los grupos adimensionales.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

1.1.5 Distribución del material de estudio

La organización del trabajo se presenta en forma esquemática en la Fig. 1, la cual se profundiza a continuación: (i) En el capítulo I se definen los conceptos básicos relacionados con el transporte de fluidos visco elásticos en campos eléctricos, junto con el objetivo general y los objetivos particulares en el sistema además se formula la Hipótesis de trabajo que será verificada con las conclusiones del mismo. En la sección (2) se presentan los antecedentes de flujos en campos eléctricos, i.e. los trabajos previos que han sido estudiados en la literatura y que son punto de partida en la presente investigación. (iii) En la sección 3 se hace hincapié en las bases de Fenómenos de transporte, ecuaciones constitutivas y reología, los tipos de flujo etc. En la sección (4) se describe el problema físico del fluido visco elástico en campos eléctricos. En el quinto capítulo se resuelven las ecuaciones de transporte y reológica en estado estacionario, suponiendo un proceso isotérmico. En este capítulo se obtiene las expresiones dinámicas de la velocidad, flujo volumétrico y permeabilidad intrínseca asociada con el tipo de ecuación constitutiva. En el sexto capítulo se hacen las simulaciones correspondientes, y se obtienen las respectivas predicciones de nuestro modelo. Por otra parte, para contrastar las predicciones teóricas, se utilizan datos reométricos de un agente coloidal. En el séptimo capítulo se hace el análisis de resultados y finalmente En el último capítulo se dan las conclusiones de este trabajo, perspectivas futuras y recomendaciones.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

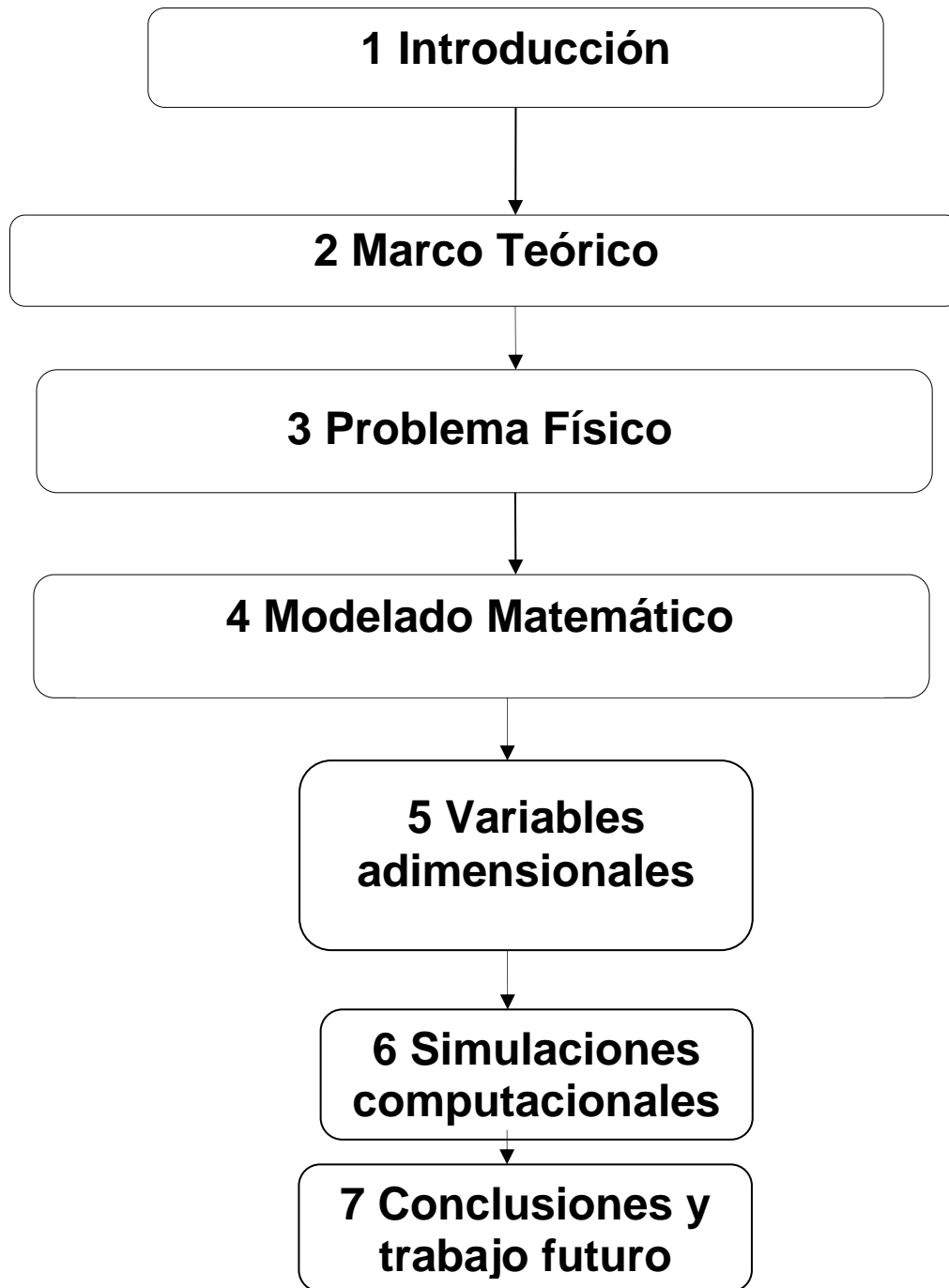


Figura 1. Organización del proyecto de tesis.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

- Analizar el comportamiento reológico de un fluido viscoelástico deformado continua e irreversiblemente por la combinación de un gradiente de presión constante y un campo eléctrico en la dirección de flujo en una rendija de ancho $2H$ y longitud L .

1.2.2 Objetivos particulares

- Para caracterizar el flujo y la reología nuestro líquido complejo, se utiliza una ecuación reológica constitutiva tipo Tanner-Ellis, la cual describe las propiedades viscoelásticas en el sistema.
- Calcular las propiedades reológicas de los sistemas como son, la función viscosidad, primera diferencia de esfuerzos normales.
- A partir de las hipótesis de flujo cortante en estado estacionario, calcular la velocidad axial, velocidad promedio, flujo volumétrico, flujo másico, primera y segunda diferencias de esfuerzos normales en función de las propiedades visco-elásticas y eléctricas del medio y del campo externo respectivamente.
- Proponer un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener los grupos adimensionales que permitan describir el sistema físico y faciliten los resultados computacionales.
- Comparar los resultados y predicciones teóricas con datos reométricos de un sistema coloidal y predecir las variables dinámicas en el sistema.

1.3 Hipótesis del trabajo

Si la dinámica de flujo en el sistema depende de las fuerzas cortantes, mecanismos adelgazantes, engrosantes, visco-elásticas, entonces esta se verá influenciada por las propiedades no-newtonianas a través de los parámetros materiales, y la combinación de la fuerza motriz gradiente de presión-campo eléctrico.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

1.4 Justificación

El trabajo de esta tesis contempla el análisis dinámico de un sistema de placas paralelas de longitud L y separación $2H$. El fluido viscoelástico es cortado debido a un gradiente de presión en la dirección x y un campo eléctrico constante en la dirección axial respectivamente. Este tipo de sistemas, tiene una aplicación esencial en liberado de fármacos en donde se tiene una distribución de partículas en un medio viscoso o viscoelástico. Algunas de ellas son mencionadas a continuación:

- a) Estudio de problemas de colesterol en sangre (Hipercolesterolemia) o de coagulación de la sangre.
- b) Otra aplicación de estos sistemas, es en el área de Ingeniería Ambiental debido a los problemas de contaminación y en general de polución en el mundo, el uso de dispositivos para separar partículas de polvo de gases combinados con ciclotrones en el medio ambiente, son de vital importancia debido a los problemas de salud.
- c) Desde un punto de vista mecánico, las partículas separadas en el separador electrostático pueden ser mezcladas con cemento y pueden aumentar las propiedades mecánicas del sistema debido que contribuyen a formar una malla y favorece los entrecruzamientos.
- d) Problemas de electro motilidad de las células ciliadas en el oído externo que son las responsables de amplificar el sonido y que debido a la porosidad de las membranas existen un intercambio de iones potasio y calcio lo que implica una distribución de partículas sometidas a campos eléctricos fisiológicos.

Este trabajo representa una primera aproximación en el entendimiento de la dinámica de flujo de fluidos viscoelástico en campos eléctricos. La primera aproximación que se hace, es suponer que el sistema se lleva a cabo en estado estacionario, i.e. las variables dinámicas o intrínsecas del sistema no dependen del tiempo, por lo que el sistema se describe en el régimen laminar y los efectos

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

inerciales no son tomados en cuenta. La segunda hipótesis es suponer que el fluido es incompresible y que el campo eléctrico es constante en el medio y que la distribución de partículas es constante, i.e. que no existe una función de distribución que dependa de la posición respectivamente (físicamente se podría pensar en una solución saturada). A partir de estas hipótesis las soluciones para el perfil de velocidades, velocidad promedio, esfuerzo cortante, flujo másico, flujo volumétrico, función viscosidad y primera diferencia de esfuerzos normales son obtenidas.

Por otra parte al incorporar los efectos viscoelásticos no lineales en la ecuación de movimiento la descripción matemática se complica por lo que representa un reto desde el punto de vista del modelado. Académicamente, el uso de modelos matemáticos no lineales representa un reto para el estudiante de ingeniería química y las soluciones aproximadas y numéricas son herramientas que permiten la caracterización de estos sistemas.

Finalmente, el propósito de presente trabajo es entender estas herramientas aplicadas al modelamiento de un separador electrostático de Polvo incorporando los efectos inerciales el cual, se conoce en reología como problemas de inicio de flujo. Académicamente este cambio complica la matemática y el modelado computacional de este sistema. La segunda aportación de este trabajo versa en el detalle explícito de todos los pasos matemáticos que comúnmente son omitidos o no se muestra en la literatura concerniente al tema.

Por ultimo este trabajo se enfoca en la descripción matemática y versa en el estudio de la transferencia de momento y reología de sistema que interactúan con partículas y es punto de partida en estudios posteriores experimentales en donde se podría contrastar los resultados teóricos encontrados en esta propuesta con aplicaciones a nivel laboratorio, planta piloto y escalarlo o proponerlos a diferentes industrias.

Este es un esfuerzo en la búsqueda constante de sistemas físicos modelados mediante la ingeniería y representa un reto en la solución matemática

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

y descripción física, lo que motiva posteriores estudios con diferentes geometrías y fluidos.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

2.1 Fluidos complejos

Los fluidos complejos como su nombre lo indica, son aquellos que presentan comportamiento reológicos en estado estacionario y no estacionario, muy interesantes debido a los agentes externos que apliquen en ellos (Gennes y Prost 1994; Rey y Herrera-Valencia 2012a, Rey y Herrera-Valencia 2012b). En la Fig. 2 se presentan algunos de los arreglos más comunes en los fluidos complejos en función de la concentración:

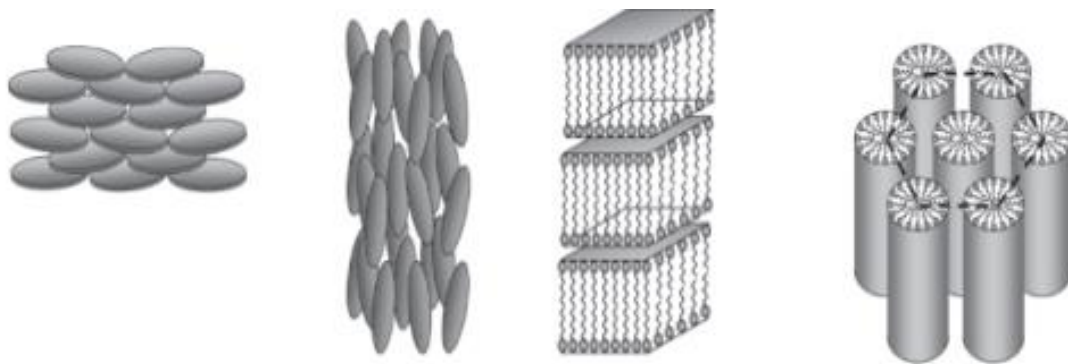


Figura 2. Esquema que clasifica las diferentes estructuras y arreglos que se presentan en los cristales líquidos por efecto de la temperatura.

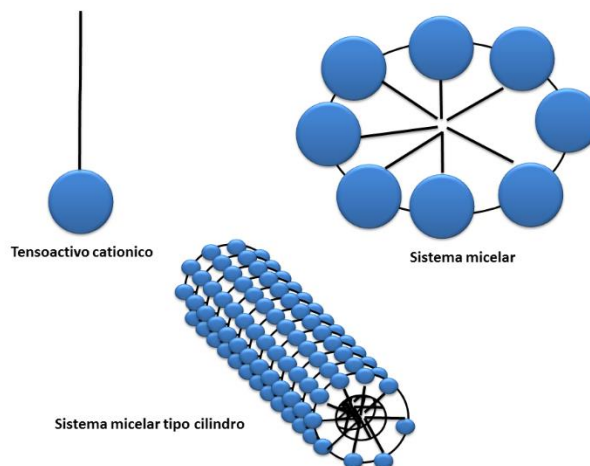


Figura 3. Surfactante y sistemas micelares en función de la concentración micelar crítica. En el lado izquierdo un molécula de tensoactivo que contiene una parte hidrofóbica y una hidrofílica. El lado derecho muestra una micela compuesta de

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

varias moléculas de agente tensoactivo. Abajo en el centro, una micela en forma de cilindro debido al aumento en la concentración micelar crítica.

2.2 Sistemas coloidales

En la naturaleza abundan las sustancias puras. La mayor parte de las sustancias que manejamos son mezclas, algunas de las cuales denominamos disoluciones. Cuando hablamos de disoluciones nos referimos a sistemas de más de un componente en los que distinguimos un disolvente (normalmente el componente en mayor proporción) y uno o varios solutos. En la mayor parte de los casos el soluto está constituido por moléculas normales, cuyo tamaño suele ser inferior a 1 nm. Si bien los solutos macromoleculares, como proteínas, polisacáridos, polímeros sintéticos, etc., pueden formar también disoluciones verdaderas, estos sistemas, sin embargo, presentan comportamientos específicos que se les considere como un tipo especial de sistemas dispersos o *sistemas coloidales*. Los sistemas coloidales son sistemas de, al menos, dos fases, una de ellas finamente dividida en pequeñas partículas (fase dispersa, fase discontinua) a las que rodea completamente la otra sustancia (fase dispersante, medio de dispersión, fase continua). Estos sistemas presentan propiedades claramente de carácter coloidal cuando las dimensiones de la fase dispersa se encuentran en el margen de 1 nm a 1000 nm, es decir, entre la millonésima y la mil millonésima parte de metro.

Como ya se ha explicado un coloide es una dispersión de pequeñas partículas en un medio continuo, las cuales cumplen con ciertas características fundamentales:

- Capacidad para dispersar la luz.
- Aparente ausencia de presión osmótica.
- Apariencia nebulosa (turbia).
- Sus partículas no se sedimentan fácilmente.
- Se forman y aparecen en diferentes estados de agregación.

Debido a estas características, se pensó en un principio que estas partículas serían moléculas mucho más grandes que las pequeñas y sencillas (como las del agua o el alcohol y sales simples como el NaCl). Incluso se pensó que eran

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

agregados de muchas moléculas pequeñas unidas en una especie de estado amorfo diferente de los estados cristalinos comunes de otras sustancias. Hoy se conoce que muchos de estos “agregados”. Son, de hecho, moléculas únicas con una masa molecular muy grande. Existen diferentes combinaciones entre sólidos, líquidos y gases que pueden formar coloides, con excepción de las mezclas de gases que no reaccionan (pues forman soluciones verdaderas). El que una mezcla dada forme una solución, una dispersión coloidal, o una suspensión, depende del tamaño de las partículas dispersas, de su miscibilidad y solubilidad.

- **Material disperso**
- **Material dispersante**

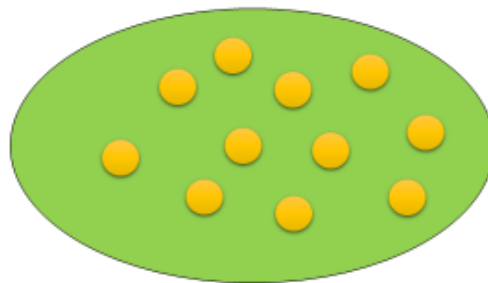


Figura 4. Ilustra la composición de un sistema coloidal

2.2.1 Clasificación de los coloides

Una manera de clasificar los sistemas coloidales, esto es, de acuerdo con la relación existente entre la fase dispersa y el medio dispersante; así se tienen tres tipos de coloides:

- Coloides liofílicos, o coloides que atraen al solvente (también llamados geles).
- Coloides liofóbicos, o coloides que repelen al solvente (también llamados soles).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

- Coloides anfifílicos, o coloides de asociación; poseen propiedades tensoactivas. A bajas concentraciones se encuentra disuelto en el medio.

Tabla 1. Ilustra los diferentes tipos de coloides

Fase Dispersa	Medio Dispersante	Nombre Común	Ejemplos
Sólido	Sólido	“Solución Sólida”	Hule reforzado, Porcelana, plásticos pigmentados
Líquido	Sólido	Emulsión Sólida o Gel	Queso, mantequilla, jaleas, gelatina
Gas	Sólido	Espuma Sólida	Esponja, espuma, piedra pómez
Sólido	Líquido	Sol	Pudines, Leche de magnesia, pintura, lodo
Líquido	Líquido	Emulsión	Leche, mayonesa, aderezo para ensalada, cremas
Gas	Líquido	Espuma	Crema batida, espuma de la cerveza, espuma de rasurar
Sólido	Gas	Aerosol Sólido	Humo, virus que se transporta por el aire
Líquido	Gas	Aerosol Líquido	Humedad, niebla, nubes

2.2.2 Uso industrial de los coloides

Los sistemas coloidales encuentran usos en numerosas áreas científicas e industriales. En ambos ámbitos se aprovecha la estabilidad de estos sistemas coloidales con el fin de mejorar e incluso encontrar nuevas aplicaciones de determinados materiales, por lo que el estudio de la estabilidad o inestabilidad de los coloides cobra una importancia fundamental. Algunas de las áreas industriales en las que regularmente pueden encontrarse sustancias en estado coloidal se señalan a continuación:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

- (i) Productos químicos: Pinturas, pigmentos, adhesivos, agentes espesantes, lubricantes, catalizadores, emulsiones fotográficas, papel, tintas de impresión, industria de los productos del petróleo etc.
- (ii) Industria farmacéutica: Emulsiones, microemulsiones, cremas, ungüentos, materiales absorbentes, etc.
- (iii) Materiales: Metalurgia, enriquecimiento de minerales, aleaciones, cerámicas, cementos, fibras, plásticos, alquitrán y materiales bituminosos, etc.
- (iv) Productos domésticos: Leche, mantequilla y demás productos lácteos, bebidas, cosméticos, agentes de limpieza, aditivos alimentarios, etc.

2.3 Fundamentos básicos de reología

2.3.1 ¿Qué es la Reología?

La reología es una rama de la física que estudia el flujo y la deformación de la materia (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977). Es decir, esta ciencia estudia las fuerzas que ocasionan que la materia se deforme continua e irreversiblemente, y por otra parte la respuesta de los materiales a través de las propiedades que los conforman. El tipo de materiales de estudio de la reología es de amplio, debido a que abarca desde el estudio de gases, líquidos viscosos-inelásticos, viscoelásticos en el régimen lineal y no lineal, plásticos sustancias asfálticas, materia blanda, materiales cristalinos (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977). Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977).

2.3.2 ¿Por qué fluye un material?

Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente e irreversiblemente cuando se somete a un esfuerzo cortante inducido por una fuerza externa superficial (Gradiente de presión, fuerzas superficiales, fuerzas interfaciales, etc) y de bulto (fuerzas gravitacionales, Campos Eléctricos y Magnéticos). Una manera más simple de

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

cuantificar la resistencia que tiene un sistema a fluir es su viscosidad, i.e. la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977).

2.3.3 Tensor de esfuerzos

Matemáticamente, el tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzos normales. Un aspecto matemático que es importante destacar, es que el tensor de esfuerzos es simétrico, i.e. Los elementos fuera de la diagonal principal (Matriz triangular superior y matriz triangular inferior) son iguales $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Físicamente, los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye. Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen, i.e. este permanece constante al aplicarle una fuerza (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977). La representación matricial del tensor de esfuerzos en un sistema de coordenadas cartesianas se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

2.3.4 Tensor rapidez de deformación

El tensor gradiente de velocidad físicamente, nos da información acerca de la evolución de la deformación en el medio continuo, y sus unidades son de inverso de tiempo. El tensor gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ puede ser descompuesto en una parte simétrica $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V})_S$ y anti simétrica $\mathbf{W} = (\nabla \mathbf{V})_A$ llamados tensores rapidez de deformación y tensor de vorticidad respectivamente (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\nabla\mathbf{V} = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T)}_{\text{Simétrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T)}_{\text{Antisimétrico}} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.2)$$

El tensor rapidez de deformación puede ser descrito matemáticamente en la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación es un tensor de segundo orden simétrico, i.e., $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$. Físicamente nos da información acerca de la rapidez con que es deformado el sistema (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977).

2.3.5 Tensor de vorticidad

El tensor de vorticidad nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el sistema:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Es importante notar, que el tensor de vorticidad, es un tensor de segundo orden antisimétrico, es decir, $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$. Físicamente nos da información acerca de las rotaciones de los elementos materiales en el medio continuo (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

2.3.6 Invariantes del tensor rapidez de deformación.

Los invariantes como su nombre lo dice son cantidades físicas que no cambien, i.e. son combinaciones matemáticas del tensor rapidez de deformación que generan tensores de orden cero (escalares). **Los invariantes juegan un papel crucial en las ecuaciones constitutivas**

Primer Invariante

El primero de ellos, es la traza del tensor rapidez de deformación, el cual matemáticamente se puede expresar como:

$$I_D = \text{Tra}(\mathbf{D}) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.5)$$

La Ec. (2.5) indica que el primer invariante del tensor rapidez de deformación, es igual a la divergencia del campo de velocidades relacionado con la compresibilidad del material. Si el fluido tiene una densidad constante en el espacio y tiempo, este se anula para un flujo cortante simple.

Segundo Invariante

El segundo invariante del tensor rapidez de deformación se obtiene tomando el doble producto punto entre los tensores rapidez de deformación. La expresión en coordenadas cartesianas toma la forma:

$$\begin{aligned} (II_D)^2 = 2(\mathbf{D} : \mathbf{D}) &= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Es importante destacar que el segundo invariante del tensor rapidez de deformación nos da información física del tipo de flujo, i.e. flujo cortante, flujo extensional o una combinación de ellos (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

2.3.7 Ecuación de transporte de cantidad de movimiento.

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de Newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.7)$$

En la Ec. (2.5) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, p es el gradiente de presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante. Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (2.7) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (2.8)$$

2.4 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. Primero se define la ecuación más simple, el modelo newtoniano, seguida de alguno de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema.

2.4.1 Fluido newtoniano

En esta ecuación tan simple, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación, siguen una relación lineal, y la ecuación básica de este sistema, se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D} \quad (2.9)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad newtoniana μ [Pas]. En la Ec. (2.9), $\boldsymbol{\sigma}$ [Pa] es el tensor de esfuerzos y \mathbf{D} [1/s] es el tensor rapidez de deformación que es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad. Por definición, todos aquellos fluidos que no se comportan de acuerdo con la Ec.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

(2.9) son no newtonianos. En la siguiente subsección presentamos algunos de los más notables fluidos no newtonianos.

2.4.2 Fluidos no newtonianos inelásticos

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes. La definición más simple y sencilla de un fluido newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme, temperatura, presión, composición, pH, frecuencia, tiempo etc. A continuación se presentan y explican las ecuaciones reológicas más comunes y que describen sus propiedades matemáticas y físicas respectivamente.

Modelo de ley de potencia

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el de ley de Potencia, o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1} \mathbf{D} \quad (2.10)$$

Este modelo contiene dos propiedades materiales m y n respectivamente. Matemáticamente, el parámetro m es conocido como el índice de consistencia el cual se puede entender como una viscosidad generalizada en el régimen de rapidez de deformación moderadas y el exponente n está asociado a los cambios de la función viscosidad con la rapidez de deformación característica del sistema. Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentados la velocidad de deformación. Por el contrario, cuando $n > 1$ la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrozante al corte). Una limitación matemática importante de la ley de la potencia, es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte, i.e. solo es válido en el régimen de

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

moderadas rapidezces de deformación en una ventana de observación de $[10^{-3}, 10^3] \text{ s}^{-1}$. Un hecho importante es que este modelo se reduce al newtoniano cuando $n = 1$, por lo que el parámetro de consistencia m , se puede identificar con el de la viscosidad newtoniana, i.e. $m = \mu$. Por último, este modelo ha servido como punto de partida en todo tipo de sistemas de flujo por su sencillez en comparación con otros modelos empíricos propuestos en la literatura.

Modelo de Ellis

El siguiente modelo es el de Ellis el cual, fue desarrollado para cubrir las inconsistencias del modelo de ley de potencia a bajos cortes. Este modelo se desarrolló como la suma de las rapidezces de deformación newtoniana y no newtoniana del modelo de ley de potencia, y es válido a bajos y moderados cortes respectivamente. Además solo contiene tres parámetros materiales los cuales pueden ser expresados en término del inverso de la viscosidad conocida como fluidez. Las propiedades materiales del modelo de Ellis son:

$$\varphi_0 \left[\frac{1}{\text{Pa} \cdot \text{s}} \right] = \frac{1}{\eta_0}, \varphi_1 \left[\frac{1}{\text{Pa} \cdot \text{s}} \right] = \frac{1}{m^\alpha}, \alpha[1] = \frac{1}{n} \quad (2.11)$$

La primera de estas expresiones es la fluidez a bajo corte valida en la zona constante a rapidez de deformación baja, la segunda expresión se puede interpretar como una fluidez generalizada en el intervalo de moderados cortes y por último el índice $\alpha = 1/n$ el cual es una medida de los mecanismos adelgazantes o engrozantes al corte inducidos por el flujo. Matemáticamente, este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc.

$$2\mathbf{D} = \varphi_0 \boldsymbol{\sigma} + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.12a)$$

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma})} \quad (2.12b)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Es importante destacar de la Ec. (2.12b) que las barras $||$ representan la magnitud del tensor de esfuerzos análogo al segundo invariante del tensor rapidez de deformación explicado en las secciones anteriores. Por último cuando la fluidez a moderados cortes es cero, i.e. $\varphi_1 = 0$ el modelo se reduce al newtoniano en donde la fluidez φ_0 se reduce al inverso de la viscosidad newtoniana i.e. $\varphi_0 = 1/\mu$.

2.4.3 Modelos viscoelásticos

a) Régimen lineal (bajas deformaciones)

En la ecuación generalizada de la ley de viscosidad de Newton, se excluyen las derivadas temporales y las integrales temporales en la construcción de una expresión lineal para el tensor de esfuerzos en términos del gradiente de velocidad. En esta sección incluiremos las derivadas temporales o las integrales temporales, pero esto requiere una relación no lineal entre el tensor de esfuerzos y la rapidez de deformación. Empezaremos por escribir la expresión de Newton para el tensor de esfuerzo para un líquido viscoso incompresible, de manera análoga la expresión de Hooke para el tensor de esfuerzo de un sólido elástico incompresible:

$$\text{Newton:} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\mu(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) = 2\mu\mathbf{D} \quad (2.13)$$

$$\text{Hooke:} \quad \boldsymbol{\sigma} = 2G(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) = 2G\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.14)$$

En la segunda expresión G es el módulo elástico, y \mathbf{u} es el vector desplazamiento, que nos da la distancia y dirección que un punto en el sólido sea movido con respecto a su posición inicial cuando se le aplica un esfuerzo y $\boldsymbol{\varepsilon}$ se le conoce como tensor de deformación. El tensor rapidez de deformación y el tensor de deformación están relacionados de la siguiente manera:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{D}$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Es decir la evolución del tensor de deformación es igual al tensor rapidez de deformación el cual como se mencionó anteriormente, es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad. Por otra parte, el sólido de Hooke tiene una memoria perfecta; cuando un esfuerzo aplicado es removido, el sólido regresa a su configuración inicial, i.e. regresa a su estado basal de mínima energía. La ley de Hooke es válida solo para gradientes de desplazamiento muy bajos, es decir el régimen de deformaciones bajas, i.e. $\nabla \mathbf{u} \ll 1$. En la siguiente sección, se combinarán las ideas que envuelven las Ecs. (2.11-12) que describen los fluidos viscoelásticos.

Ecuación constitutiva de Maxwell

El modelo de Maxwell, es el modelo viscoelástico más sencillo que describe a los fluidos viscoelásticos en el régimen lineal. Este modelo combina al sólido de Hooke, con el fluido newtoniano. El modelo de Maxwell contiene dos parámetros materiales que describen la viscoelasticidad del fluido. El primero de ellos, el tiempo de relajación de Maxwell λ_0 [s] y la viscosidad η_0 [Pa s]. El tiempo de relajación λ_0 es de naturaleza viscoelástica y físicamente se puede interpretar como el tiempo que tarda el fluido en alcanzar el equilibrio después de ser sometido a un esfuerzo o deformación, este puede ser calculado como el cociente entre la viscosidad cortante η_0 y el módulo elástico G_0 , i.e. $\lambda_0 = \eta_0/G_0$. Otra definición aceptada para el tiempo viscoelástico de Maxwell, es la de que es inverso de la frecuencia de cruce entre el módulo de almacenamiento G_0'' y el de pérdida G_0' en una prueba de flujo oscilatorio en donde la respuesta mecánica del fluido es probada. La ecuación constitutiva de Maxwell en forma tensorial se describe de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.15)$$

Nótese que en la Ec. (2.15), si el tiempo de Maxwell $\lambda_0 = \eta_0/G_0$ es cero, i.e. $\lambda_0 = 0$, el sistema se reduce al modelo newtoniano, mientras que a velocidades muy bajas, la Ec. (2.15) puede ser integrada con respecto al tiempo para obtener el modelo de

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Hooke. Modelos viscoelásticos no lineales. La mayoría de los procesos industriales (extrusión, hilado) presentan elevados gradientes de velocidad, i.e. altas rapidezces de cortes o lo que es equivalente altas deformaciones. La mayoría de los fluidos estudiados con aplicación tecnológica raramente pueden ser descritos de una manera fenomenológica con modelos viscosos o viscoelásticos en el régimen lineal para esto, se necesitan de modelos no lineales en el régimen de visco elasticidad no lineal de tal manera que describan de una manera adecuada los comportamientos complejos en estado estacionario y no estacionario. A continuación se describen solo algunos de estos modelos con el fin de que el lector interesado en este tipo de ecuaciones constitutivas tenga una noción de la fenomenología implícita en ellos.

Modelo de Tanner-Ellis (Propuesto en esta tesis)

El modelo de Tanner es un modelo viscoelástico no lineal que acopla el modelo codeformacional de Maxwell con una función viscosidad. Este, modelo a flujo cortante simple presenta función viscosidad y primea diferencia de esfuerzos normales, los cuales son asociados a la elasticidad. El modelo matemáticamente tiene la siguiente representación:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D} \quad (2.16)$$

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\sigma} - \nabla \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \nabla \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \quad (2.17)$$

En el modelo de Tanner, λ_0 es el tiempo de relajación de Maxwell, $\eta(\Pi_D)$ es la función viscosidad, la cual depende de la rapidez de deformación y $(\overset{\nabla}{\cdot})$ es la derivada convectiva superior de Maxwell. Esta derivada, describe cambios temporales, espaciales en dirección de la velocidad ya demás contiene efectos no lineales a través del producto tensorial entre el tensor de esfuerzos y el tensor gradiente de velocidad. La función viscosidad $\eta(\Pi_D)$ puede ser cualquier modelo viscoso que dependa de la rapidez de deformación (Ley de potencia, Carreau,

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Ellis, Reiner-Phillipoff, etc), por lo regular se escoge un modelo que permita obtener soluciones analíticas y facilite hasta cierto punto los resultados numéricos.

- a) **Finalmente en la sección final se discute el modelo viscoelástico no lineal de Tanner-Ellis y se concluye que este engloba los tres modelos antes mencionados, para diferentes casos particulares.**

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta(\mathbf{II}_{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{D}$$

Combinando los dos modelos el de Tanner y Ellis, obtenemos una ecuación constitutiva no lineal en el esfuerzo. Esta ecuación predice adelgazamiento o engrosamiento al corte a través de la función viscosidad y primera diferencia de esfuerzos normales asociados a la elasticidad del fluido.

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta(\mathbf{II}_{\boldsymbol{\sigma}})\mathbf{D} = 2\left(\frac{1}{\varphi_0 + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}}\right)\mathbf{D}$$

Reescribiendo este modelo, se obtiene lo siguiente:

$$\left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \left(\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = 2\eta_0 \mathbf{D}$$

Este modelo se conoce en la literatura como el modelo viscoelástico de Tanner modificado por la función viscosidad de Ellis. En el contexto de este trabajo, es general debido a que incluye los modelos reológicas descritos anteriormente.

- (i) Cuando el tiempo viscoelástico de relajación de Maxwell es cero, se reduce al modelo de Ellis.
- (ii) Si el tiempo viscoelástico de relajación de Maxwell es cero, y la fluidez a intermedios cortes es cero, el sistema se reduce al modelo de Newtoniano.
- (iii) En el caso de flujo homogéneo y estado estacionario, el sistema se reduce a un modelo no lineal en el tensor de esfuerzos y viscoelástico

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} + \lambda_0 \left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \{\nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V}\}$$

2.5 Tipos de Flujo y Funciones Materiales

Flujo cortante simple

El flujo cortante simple, es un flujo homogéneo, es decir que no depende de la posición y se genera cuando a un elemento de control se le aplica una fuerza tangente y el material se deforma continua e irreversible mente como se observa en la Fig. (5). En la placa superior se aplica una fuerza de tal manera que adquiere una velocidad v en la dirección paralela a la fuerza, esto implica que transfiere el momento en la dirección ortogonal a la velocidad, lo que implica que las placas de fluido que se encuentran debajo de la de mayor velocidad adquieran una velocidad mucho menor hasta su valor mínimo de cero. (Nótese que en este análisis no se están considerando los efectos de deslizamiento en la pared)

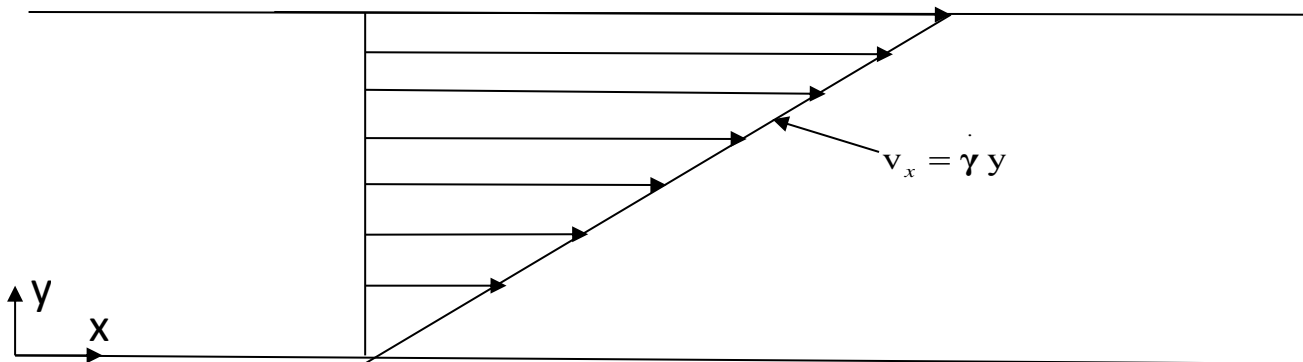


Figura 5. Flujo cortante simple.

Funciones Materiales para un flujo cortante simple

Las funciones materiales describen el estado de la respuesta que sufre el material a las deformaciones impuestas, en función de las constantes materiales (Estas dependen de la ecuación constitutiva que se emplea y pueden ser viscosidades a bajo y alto corte, tiempos de retardo, fluideces, módulos elásticos entre otras.) Las funciones materiales en corte se definen como la función viscosidad, el primero y

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

segundo coeficiente de esfuerzos lineales, los cuales describen la respuesta del material cuando se somete a un flujo cortante simple. Desde el punto de vista reométricos esta prueba representa que una muestra es destruida por efecto del flujo para ver efectos del cambio. Matemáticamente las funciones materiales en corte se pueden describir de la siguiente manera:

$$\eta \left(\dot{\gamma}_{yx} \right) = \frac{\sigma_{yx}}{\dot{\gamma}_{yx}} \quad (2.18)$$

$$\psi_1 = \frac{N_1}{\left(\dot{\gamma}_{yx} \right)^2} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\left(\dot{\gamma}_{yx} \right)^2} \quad (2.19)$$

$$\psi_2 = \frac{N_2}{\left(\dot{\gamma}_{yx} \right)^2} = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\left(\dot{\gamma}_{yx} \right)^2} \quad (2.20)$$

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura. En general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, Los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniera de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos. En este contexto, los fluidos biológicos involucran conocimientos multidisciplinarios, como la física, química, biología, matemáticas e ingeniera. Ejemplo de estos fluidos son los secretan los insectos, la formación de la seda de la araña y diferentes gusanos, los

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

fluidos corporales, y la sangre con diferentes patologías que representan una pandemia en la actualidad por el estilo de vida sedentaria en el que se vive actualmente.

2.6 Resumen de los conceptos teóricos y aplicaciones

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura. En general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, Los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) Fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos (Rey y Herrera-Valencia 2012).

En el siguiente capítulo, se modelara modelaremos el flujo cortante inducido por una combinación entre el gradiente de presión y el campo eléctrico en una rendija de espesor $2H$ y longitud L , por el cual fluye un líquido no newtoniano (viscoelástico), caracterizado por un modelo acoplado Tanner-Ellis.

Este modelo acopla el modelo de Maxwell modificado con una función viscosidad variable. La parte viscosa es modelada con el modelo de Ellis el cual, es la suma del modelo newtoniano y el de ley de potencia.

La elección de este modelo, fue debido a su simplicidad en comparación con otros mucho más complejos, además todos las propiedades materiales pueden ser calculadas mediante experimentos reológicos.

CAPÍTULO III

PROBLEMA FÍSICO

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

3.1 Descripción del problema

En esta sección se describe físicamente el sistema de estudio, se plantean las principales restricciones físicas y las ecuaciones físicas que gobiernan la cinemática y dinámica de flujo en el sistema fluido-partículas. La Fig. 6 ilustra el sistema de estudio en la presente tesis de licenciatura. Se tienen dos placas paralelas separadas una distancia $2H$ en donde un sistema coloidal (partículas dispersas en un medio) fluye por efecto de un campo eléctrico homogéneo.

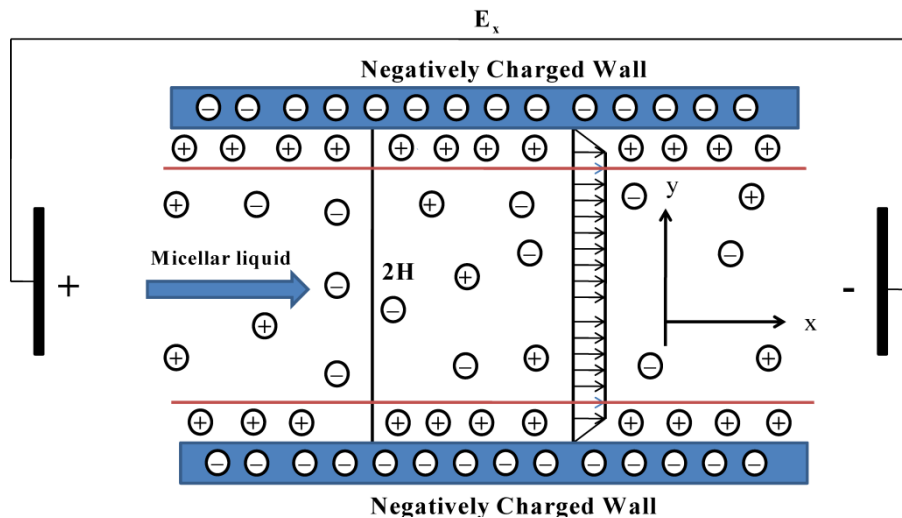


Figura 6. Ilustra el sistema de estudio. Dos placas paralelas separadas a una distancia $2H$ y Longitud L respectivamente. Se tiene un sistema coloidal disperso en un fluido

Las restricciones físicas y matemáticas del problema de estudio (Fig. 6) son mencionadas y descritas a continuación:

- El proceso en estado estacionario: Ningún atributo intrínseco o característica dinámica del sistema depende del tiempo. Matemáticamente la derivada temporal con respecto a cualquier variable dinámica es cero.
 $\partial\{\}/\partial t = 0.$
- Proceso Isotérmico: La temperatura en el sistema es constante de tal manera, que el balance de energía no se toma en cuenta debido a que no contribuye en el sistema.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

- c) Fluido Incompresible: Físicamente la densidad del fluido permanece constante, i.e. no depende de la posición y del tiempo, matemáticamente se tiene un flujo solenoidal en donde la divergencia del campo de velocidades es cero:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

- d) El fluido se deforma continua e irreversiblemente debido a un gradiente de presión y un gradiente de potencial eléctrico inducido por un campo eléctrico, ambos están aplicados en la dirección del flujo.
- e) Flujo unidireccional, i.e. el campo de velocidades solo tiene una componente en la dirección del eje coordenado x:

$$\mathbf{V} = (V_x(x,y,z), 0, 0)$$

- f) Efectos gravitacionales son despreciables, i.e. la fuerza motriz que induce el corte se debe principalmente a la combinación del gradiente de presión y el campo eléctrico:

$$\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z) = (0, 0, g_z) \approx (0, 0, 0)$$

- g) El sistema de referencia colocado en el centro de las placas paralelas como se observa en la Fig. 6. EL eje x corresponde a la velocidad del sistema, el eje y al del gradiente de velocidad $\nabla \mathbf{V}$ y el eje z es el eje neutro asociado a la Vorticidad del fluido $\omega = \nabla \times \mathbf{V}$

3.2 Cinemática y dinámica de flujo de un flujo cortante

3.2.1 Vector de velocidad

El vector de velocidad en este sistema de flujo está dado por el siguiente vector renglón:

$$\mathbf{V} = (V_x(x,y,z), 0, 0) \tag{3.1}$$

El campo de velocidades de la Ec. (3.1) implica que la componente x del vector de velocidad puede depender de las coordenadas x, y & z respectivamente.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

3.2.2 Tensores cinemáticos

Tensor gradiente de velocidad y su transpuesta

Utilizando el tensor gradiente de velocidad definido en el Cap. II en coordenadas cartesianas, y el vector de velocidad definido en la Ec. (4.1), se construye el tensor gradiente de velocidad el cual tiene la siguiente representación matricial

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.2)$$

La transpuesta de la Ec. (3.2) toma la forma:

$$(\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{dV_x}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Físicamente el tensor gradiente de velocidad, da información acerca de los cambios de la velocidad en dirección espacial.

Tensor rapidez de deformación

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de deformación \mathbf{D} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{D} = (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T)/2$

$$2\mathbf{D} = \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{dV_x}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Físicamente, este tensor nos da información acerca de la rapidez con la que es deformado el sistema, en este caso, la transferencia de momento se da en la dirección del eje coordenado x y se transmite en la dirección y .

Tensor de vorticidad

A partir de las definiciones del capítulo II, el tensor rapidez de Vorticidad \mathbf{W} se construye a partir del tensor gradiente de velocidad y su transpuesta respectivamente, i.e. $\mathbf{W} = (\nabla\mathbf{V} - (\nabla\mathbf{V})^T)/2$

$$2\mathbf{W} = \nabla\mathbf{V} - \nabla\mathbf{V}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{dV_x}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{dV_x}{dy} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Este tensor nos da información acerca de las rotaciones materiales en el sistema. Por lo tanto, en un fluido cortante existen elementos cortantes que se deforman continua e irreversiblemente y que rotan por efecto del flujo.

3.2.3 Segundo invariante del tensor rapidez de deformación

A partir del tensor rapidez de deformación se construye el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, que no es otra cosa que el doble producto punto del tensor rapidez de deformación consigo mismo. Físicamente, el segundo invariante nos da información acerca del flujo y de la magnitud del mismo, es decir, dependiendo de las derivadas parciales que se combine, se puede saber si el flujo es cortante, extensional o una combinación de estos.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\begin{aligned} \Pi_D = \sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})} &= \sqrt{2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{2 \left(\left(\frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{dV_x}{dy} \right)^2 \right)} = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dy} \right)^2} = \left| \frac{dV_x}{dy} \right| \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por lo tanto el segundo invariante del tensor rapidez de deformación, es simplemente el valor absoluto del escalar rapidez de deformación, y puede tener matemáticamente dos posibilidades, de acuerdo a la definición de valor absoluto.

$$\left| \frac{dV_x}{dy} \right| = \begin{cases} + \frac{dV_x}{dy}; & \frac{dV_x}{dy} > 0 \\ - \frac{dV_x}{dy}; & \frac{dV_x}{dy} < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Nótese que en el cero, la rapidez de deformación no está definido debido que el valor absoluto es discontinuo en ele cero. La Ec. (3.7) es válida en una vecindad del cero y no en el cero.

3.2.4 Tensor de esfuerzos

Matemáticamente el tensor de esfuerzos es una matriz simétrica que describe la transferencia de cantidad movimiento y físicamente nos da la distribución de las fuerzas en cada área de los elementos de control que son cortados debido al flujo.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

La Ec. (3.8) contiene información acerca de los elementos cortantes y extensionales respectivamente. Por ejemplo, los elementos cortantes son los responsables de deformar continua e irreversiblemente el fluido, y cumplen la

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

condición $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ debido a la simetría del tensor de esfuerzo. Los elementos en la diagonal principal $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}\}$, están asociados con la elasticidad del material en flujo cortante en estado estacionario. A partir de estos, se define la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$\begin{aligned}
 N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelástico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases} \\
 N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} &= \begin{cases} \neq 0; \text{No-Newtoniano viscoelástico} \\ = 0; \text{Newtoniano} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

El cálculo de la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales puede ser aplicado para explicar la formación de vórtices en contracciones expansiones de flujo.

3.4 Ecuaciones de continuidad y momento

En esta sección se presentan las ecuaciones generales para el estudio del flujo electro-osmótico.

Ecuación de continuidad

Suponiendo que el fluido es incompresible y que el flujo es unidireccional, es decir que el vector velocidad solo tiene componente en y, de acuerdo con la Ec. (3.1)

$$\begin{aligned}
 \text{Fluido-Incompresible} \\
 \frac{\partial p}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0; V_x \neq f(x)
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

La Ec. (3.10) implica que el campo de velocidades no depende de la variable z y suponiendo que solo depende de la coordenada ortogonal y al campo de velocidades toma la forma:

$$\mathbf{V} = (V_x(y,z), 0, 0) \cong (V_x(y), 0, 0)
 \tag{3.11}$$

La Ec. (3.11) implica que la velocidad V_x es una función exclusiva de la coordenada ortogonal al flujo y. Este hecho es válido si existen dos longitudes

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

características del sistema, y una de ellas es mucho menor que la otra, i.e. $2H \ll W$, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \gg \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.12)$$

i.e. los cambios con respecto a la variable z son despreciables.

Ecuación de momento modificada por el campo eléctrico

La ecuación de momento es la segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo. Aplicando un balance de fuerza a un elemento de control, se tiene la siguiente ecuación de carácter vectorial desacoplada toma la forma:

Componente x de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial V_x}{\partial t}}_{\text{Estado-Estacionario}} + \underbrace{V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}}_{\text{Ecuacion de Continuidad}} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} + \underbrace{\rho g_x}_{\text{Efectos Gravitacionales}} \\ + F_{e_x} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Componente y de la ecuación de movimiento modificada

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial V_y}{\partial t}}_{\text{Estado-Estacionario}} + \underbrace{V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}}_{\text{Ecuacion de Continuidad}} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} \\ + \underbrace{\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} + \underbrace{\rho g_y}_{\text{Efectos Gravitacionales}} + \underbrace{F_{e_y}}_{\text{No hay campo Electrico en la direccion z}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Componente y de la ecuación de movimiento modificada

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\begin{aligned}
 \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial t} + \underbrace{V_x \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial x} + V_y \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial y}}_{\text{Flujo-Unidireccional}} + \underbrace{V_z \frac{\overset{=0}{\partial V_z}}{\partial z}}_{\text{Ecuacion de Continuidad}} = - \frac{\overset{=0}{\partial p}}{\partial z} + \underbrace{\frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{xz}}}{\partial x}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} + \underbrace{\frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{yz}}}{\partial y}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} \\
 + \underbrace{\frac{\overset{=0}{\partial \sigma_{zz}}}{\partial z}}_{\text{Transferencia de momento solo en la direccion y}} + \underbrace{\rho g_z}_{\text{Efectos Gravitacionales}} + \underbrace{F_{e_z}}_{\text{No hay campo electrico en la direccion z}}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Aplicando las hipótesis anteriores (estado estacionario, fluido incompresible, solo hay transferencia de momento en la componente y_x del tensor de esfuerzos, se llega a la siguiente expresión simplificada..

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} - F_{e_x}
 \tag{3.16}$$

La Ec. (3.16) representa el balance de la divergencia del tensor de esfuerzos con el gradiente de presión axial y la fuerza eléctrica.

a) Fuerza Eléctrica

La fuerza Eléctrica por unidad de volumen que deforma el sistema fluido-coloide esta dada por la siguiente expresión:

$$F_{e_x} = \rho_e E_x
 \tag{3.17}$$

La Ec, (3.17) representa la fuerza eléctrica que experimenta el sistema fluido-coloide. Nótese que ρ_e es la densidad de carga en el sistema. En este punto suponemos que la densidad constante sin embargo, una siguiente aproximación es la de pensar en una distribución de carga por unidad de volumen (Pinho et al. 2001) Finalmente el balance de fuerza toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} - \rho_e E_x
 \tag{3.18}$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Ecuaciones constitutivas

a) Modelo Newtoniano

El modelo newtoniano es el más simple de todas las ecuaciones constitutiva debido a que la relación entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación es lineal y contiene solamente una propiedad material conocida como viscosidad:

$$\sigma_{yx} = \mu \dot{\gamma}_{yx} = \mu \frac{dV_x}{dy} \quad (3.19)$$

En la Ec. (3.19) η_0 es la viscosidad newtoniana.

b) Modelos no-Newtonianos

Modelo de Ostwaeld

El modelo de Ostwaeld contiene dos parámetros materiales y se aplica a fluidos adelgazantes y engrozantes al corte. La componente yx del modelo de Ostwaeld toma la forma:

$$\sigma_{yx} = m \left| \dot{\gamma}_{yx} \right|^n = m \left| \frac{dV_x}{dy} \right|^n \quad (3.20)$$

En la Ec. (3.20) m y n son los parámetros de consistencia y el exponente del modelo de ley de potencia respectivamente. Nótese, que este modelo es discontinuo cuando la rapidez de deformación se aproxima a cero.

c) Modelo de Ellis

El modelo de Ellis se puede interpretar como la suma de una contribución newtoniana y no-newtoniana asociada al modelo de ley de potencia. La ecuación constitutiva del moldeo de Ellis se puede expresar como:

$$\dot{\gamma}_{yx} = \phi_0 + \phi_1 \left(\sigma_{yx} \right)^\alpha \quad (3.21a)$$

En donde las constantes del modelo de Ellis se definen en términos de la contribución newtoniana y no newtoniana del modelo de Ellis:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\varphi_0 = \frac{1}{\eta_0}; \varphi_1 = \frac{1}{m^{1/n}} = \frac{1}{m^a} \quad (3.22b)$$

El modelo de Ellis describe una zona constante a rapidez de deformación baja y una zona adelgazante o engrozante al corte respectivamente.

d) Modelo Viscoelástico de Tanner

El modelo viscoelástico de Tanner es una de las ecuaciones reológicas más sencillas viscoelásticas no lineales, la cual puede ser descrita en términos de un sistema de ecuaciones algebraicas acoplada

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - 2\lambda_0 \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yx} &= 0 \\ \sigma_{xy} - \lambda_0 \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yy} &= \eta \left(\frac{dV_x}{dy} \right) \frac{dV_x}{dy} \\ \sigma_{yx} - \lambda_0 \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yy} &= \eta \left(\frac{dV_x}{dy} \right) \frac{dV_x}{dy} \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23 \text{ a-d})$$

Las Ecs. (3.23a-d) representan los componentes del modelo de Tanner, simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\lambda_0 \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} = \sigma_{yx} &= \eta \left(\frac{dV_x}{dy} \right) \frac{dV_x}{dy} \end{aligned} \quad (3.24 \text{ a-b})$$

De los resultados anteriores, se demuestra que las componentes xy y yx del tensor de esfuerzo son iguales, debido a la simetría del tensor de esfuerzos. Por otra parte, las componentes normales yy y zz del tensor de esfuerzos son cero por lo que se, tiene lo siguiente:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= 2\lambda_0\eta\left(\frac{dV_x}{dy}\right)\left(\frac{dV_x}{dy}\right)^2 \\ \sigma_{xy} &= \eta\left(\frac{dV_x}{dy}\right)\frac{dV_x}{dy}\end{aligned}\tag{3.25}$$

Nótese que la parte viscoelástica se tiene por efecto por efecto del tiempo de relajación por lo que, si el tiempo de relajación λ_0 tiende a cero, se obtiene el newtoniano generalizado. Es importante resaltar que componente xx del tensor de esfuerzos depende del cuadrado del escalar rapidez de deformación xy. En el siguiente capítulo se resolverá explícitamente el modelo de Tanner y a partir de este, se demostrara que contiene como casos particulares a las ecuaciones constitutivas antes mencionadas.

CAPÍTULO IV

MODELADO MATEMÁTICO

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

En este capítulo se desarrollan los resultados principales para cuatro ecuaciones constitutivas descritas por los modelos de: (i) Newton, (ii) Ley de potencia, (iii) Ellis y (iv) Modelo viscoelástico de Tanner. Suponiendo estado estacionario, fluido incompresible y proceso isotérmico y suponiendo que los mecanismos inerciales son despreciables, la ecuación de movimiento se simplifica en un balance de fuerzas entre la divergencia del tensor de esfuerzos, gradiente de presión y campo eléctrico respectivamente:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{dp}{dx} - \rho_e E_x \quad (4.1a)$$

Si suponemos que el campo eléctrico es un campo vectorial conservativo, i.e. es el resultado del negativo de un gradiente de potencial eléctrico, se tiene lo siguiente:

$$E_x = -\frac{d\Phi}{dx} \quad (4.1b)$$

Sustituyendo el campo eléctrico (Ec.4.1b), en la Ec. (4.1a), se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{d}{dx} [p + \rho_e \Phi] = \frac{dP_m}{dx} \quad (4.1c)$$

En donde la nueva presión es la suma de la presión termodinámica p y la contribución del potencial eléctrico multiplicado por la densidad de carga eléctrica.

$$P_m = p + \rho_e \Phi \quad (4.1d)$$

A partir de esto, se deducen las funciones materiales: (i) función viscosidad, (ii) Primer coeficiente de esfuerzos normales, (iii) Segundo coeficiente de esfuerzos normales, (iv) Perfil de velocidades, (v) Flujo volumétrico en función de las propiedades materiales del fluido considerado en este trabajo. Para caracterizar la transferencia de momento y reología se utiliza el modelo constitutivo de Tanner-Ellis el cual es viscoelástico y contiene como casos particulares al de Ostwaeld y

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

al newtoniano respectivamente. En forma tensorial, el modelo de Tanner-Ellis se puede expresar como:

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \left(\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = 2\mathbf{D} \quad (4.2)$$

En donde la derivada convectiva superior de Maxwell está definida como:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt}}_{\text{Derivada-Material}} - \underbrace{\left(\nabla\mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V}\right)}_{\text{Terminos no-lineales}} \quad (4.3)$$

Esta derivada toma en cuenta los cambios temporales, espaciales en dirección de la velocidad a través de la derivada material D/Dt

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\right) \boldsymbol{\sigma} \quad (4.4)$$

y los efectos no lineales a través de las combinaciones de los productos entre los tensores gradiente de velocidad y de esfuerzos.

$$\nabla\mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V} \quad (4.5)$$

Este modelo es una generalización de la ecuación constitutiva de Ellis tomando en cuenta los efectos elásticos a través de la primera diferencia de esfuerzos normales. Un caso interesante que permite deducir expresiones analíticas, es cuando el sistema ha llegado al estado estacionario, i.e. ninguna propiedad, atributo o característica intrínseca del sistema es función del tiempo (tiempos largos) y homogéneo, i.e. ninguna variable cinemática y dinámica del sistema depende de la posición, e.g. el gradiente del tensor de esfuerzos en este caso es cero. i.e. $\nabla\boldsymbol{\sigma}$. En particular, si la propiedad material φ_1 es cero el modelo se reduce a la ecuación convectiva superior de Maxwell definida como:

$$\varphi_0 \left(\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = 2\mathbf{D} \quad (4.6)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Por otra parte, si la fluidez a moderados cortes es mucho mayor que la fluidez a bajos, el modelo se simplifica al siguiente caso particular:

$$\left(\varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \left(\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \nabla \boldsymbol{\sigma}\right) = 2\mathbf{D} \quad (4.7)$$

En la tercera sección se combinan los dos primeros modelos i.e. el newtoniano y el de ley de potencia y se demuestra que tanto en los perfiles de velocidad y flujo volumétrico el modelo de Ellis es la contribución de las dos ecuaciones constitutivas previamente analizadas.

$$(2\mathbf{D})_{\text{Ellis}} = (2\mathbf{D})_{\text{N}} + (2\mathbf{D})_{\text{NN}} = \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \boldsymbol{\sigma} \quad (4.8)$$

En la segunda sección, de este capítulo se discute el modelo de ley de potencia el cual, nos da las características no-newtonianas (adelgazante o engrozante al corte) en el sistema a moderados cortes.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2m \left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1} \mathbf{D} \quad (4.9)$$

Si el tiempo de relajación de Maxwell es cero, i.e. $\lambda_0 = 0$, y $\varphi_1 = 0$ el sistema se reduce al modelo de Newton.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (4.10)$$

Modelo visco-elástico.

Modelo de Tanner.

En esta sección se modela el sistema coloidal sometido a un campo eléctrico en un fluido no-newtoniano, es decir un fluido cuya viscosidad no depende del tiempo, el modelo estudiado en esta sección será el modelo de Tanner.

$$\left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} + \lambda_0 \left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \left\{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \right\} \quad (4.11)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

La derivada convectiva superior de Maxwell toma la forma:

$$\underbrace{\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt}}_{\text{Derivada-Material}} - \underbrace{(\nabla\mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V})}_{\text{Terminos no-lineales}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\sigma} - (\nabla\mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V}) \quad (4.12)$$

En la Ec. (4.12) D/Dt es derivada material del tensor de esfuerzos. Es importante, recordar que la derivada convectiva superior permite al modelo tomar en cuenta los efectos no lineales debido a las deformaciones altas ocasionadas por elevados gradientes de velocidad. Este modelo es una extensión del modelo de Maxwell que se usa en el régimen de viscoelasticidad lineal por lo que, es válido en el régimen viscoelástico no lineal. Como en los casos anteriores, los tensores de esfuerzo y tensor gradiente de velocidad son los mismos, por lo que al sustituirlos en la ecuación constitutiva Ec. (4.11), y realizando las operaciones matriciales entre el tensor de esfuerzos y el tensor gradiente de velocidad y su transpuesta:

$$(\nabla\mathbf{V})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yx} & \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xy} \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ \sigma_{yy} \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

El valor absoluto del tensor de esfuerzos se puede calcular de la siguiente manera;

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) : \left(\begin{array}{ccc} 0 & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)} = \sqrt{\sigma_{yx}^2} = |\sigma_{xy}| \quad (4.15)$$

Si suponemos flujo homogéneo la Ec. (4.11). llega a la siguiente forma.

$$\left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} + \lambda_0 \left(1 + (\varphi_1 / \varphi_0) |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1}\right) \{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \} \quad (4.16)$$

Extendiendo a su forma matricial la ecuación constitutiva para el modelo de Tanner se obtiene lo siguiente:

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1} \right) \left(\begin{array}{ccc} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{array} \right) = \lambda_0 \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1} \right) \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \frac{dVx}{dy} \sigma_{yx} & \frac{dVx}{dy} \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccc} \sigma_{xy} \frac{dVx}{dy} & 0 & 0 \\ \sigma_{yy} \frac{dVx}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\} \\ + 2 \left(\begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{2} \frac{dVx}{dy} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{dVx}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.17a)$$

Simplificando los cálculos matriciales, se tiene lo siguiente:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = + \lambda_0 \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \begin{pmatrix} 2 \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yx} & \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yy} & 0 \\ \sigma_{yy} \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17 b)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \frac{dV_x}{dy} & 0 \\ \frac{dV_x}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desacoplando la Ec. (4.17b) obtenemos los componentes del tensor de esfuerzos que deseamos

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{xx} = 2\lambda_0 \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yx} \quad (4.18a)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{xy} = \lambda_0 \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yy} + \frac{dV_x}{dy} \quad (4.18b)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{yx} = \lambda_0 \left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yy} + \frac{dV_x}{dy} \quad (4.18c)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{yy} = 0 \quad (4.18d)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{zz} = 0 \quad (4.18e)$$

Simplificando las ecuaciones acopladas, se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{xx} = 2\lambda_0 \frac{dV_x}{dy} \sigma_{yx} = 2\lambda_0 \left(\varphi_0 \sigma_{yx} + \varphi_1 \sigma_{yx}^\alpha\right) \sigma_{yx} \quad (4.19a)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{xy} = \frac{dV_x}{dy} \quad (4.19b)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{yx} = \frac{dV_x}{dy} \quad (4.19c)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{yy} = 0 \quad (4.19d)$$

$$\left(\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}\right) \sigma_{zz} = 0 \quad (4.19e)$$

Primera y segunda diferencia de esfuerzos normales

Simplificando las Ecs. (4.19 a-e) se obtiene el esfuerzo cortante xy y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:

$$N_1(\dot{\gamma}_{yx}) = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2\lambda_0 (\varphi_0 \sigma_{yx} + \varphi_1 \sigma_{yx}^\alpha) \sigma_{yx} = 2\lambda_0 (\varphi_0 \sigma_{yx}^2 + \varphi_1 \sigma_{yx}^{\alpha+1}) \quad (4.20)$$

$$N_2(\dot{\gamma}_{yx}) = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} = 0 \quad (4.21)$$

Funciones Materiales

Función viscosidad

$$\eta(\sigma_{yx}) = \frac{\sigma_{yx}}{\dot{\gamma}_{yx}(\sigma_{yx})} = \frac{1}{\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}} \quad (4.21)$$

La función viscosidad nos da información acerca de la resistencia que tiene el sistema por efecto de la rapidez con la que sea deformado.

a) Primer coeficiente de esfuerzos normales

El primer coeficiente de esfuerzos normales se obtiene a partir de la primera diferencia de esfuerzos normales y es una manifestación clara de los efectos elásticos del material debido a la naturaleza no lineal del sistema.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\Psi_1(\dot{\gamma}_{yx}) = \frac{N_1(\dot{\gamma}_{yx})}{\dot{\gamma}_{yx}^2} = \frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(\dot{\gamma}_{yx})}{\dot{\gamma}_{yx}^2} = 2\lambda_0 \frac{\sigma_{yx}(\dot{\gamma}_{yx})}{\dot{\gamma}_{yx}} \quad (4.22)$$

Por lo tanto la primera diferencia de esfuerzos normales depende del tiempo de relajación del modelo de Maxwell el cual, está asociado a la viscoelasticidad del material.

$$\Psi_1(\dot{\gamma}_{yx}) = 2 \frac{\lambda_0}{\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}} \quad (4.23)$$

Finalmente, se concluye que el primer coeficiente es diferente de cero, para un fluido elástico en el régimen no lineal

b) Segundo coeficiente de esfuerzos normales

$$\Psi_2(\dot{\gamma}_{yx}) = \frac{N_2(\dot{\gamma}_{yx})}{\dot{\gamma}_{yx}^2} = \frac{(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})(\dot{\gamma}_{yx})}{\dot{\gamma}_{yx}^2} = 0 \quad (4.24)$$

Por lo tanto el segundo coeficiente de esfuerzos normales es cero empleando el modelo viscoelástico no lineal de Tanner.

Casos asintóticos de las funciones materiales

Es importante mencionar que el comportamiento de la función viscosidad, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales, primer y segundo coeficientes de esfuerzos normales están determinados por la ecuación constitutiva característica que se utilice para describir el flujo y la reología del sistema.

$$\eta(\dot{\gamma}_{yx}) = \frac{\sigma_{yx}}{\dot{\gamma}_{yx}} = \frac{1}{\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}} = \begin{cases} 1/\varphi_0 & ; \sigma_{yx} \rightarrow 0 \\ 1/\varphi_1 (\sigma_{yx})^\alpha & ; \sigma_{yx} \gg 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\Psi_1(\dot{\gamma}_{yx}) = 2\lambda_0 \eta(\dot{\gamma}_{yx}) = \frac{2\lambda_0}{\varphi_0 + \varphi_1 |\sigma_{yx}|^{\alpha-1}} = \begin{cases} 2\lambda_0 (1/\varphi_0) & ; \sigma_{yx} \rightarrow 0 \\ 2\lambda_0/\varphi_1 (\sigma_{yx})^\alpha & ; \sigma_{yx} \gg 1 \end{cases} \quad (4.26)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

A continuación se presenta un resumen de los principales logros de esta sección en donde se desarrollaron los perfiles de velocidad, flujo volumétrico, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales, primer y segundo coeficientes de esfuerzos normales.

Perfil de velocidades del modelo del modelo de Tanner- Ellis

De la misma manera, que en los casos newtonianos y del modelo de ley de potencia al combinar la ecuación constitutiva y el balance mecánico, se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{dV_x}{dy} = \varphi_0 \sigma_{yx} + \varphi_1 (\sigma_{yx})^\alpha = \varphi_0 \frac{dP_m}{dx} y + \varphi_1 \left(\frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha y^\alpha \quad (4.27)$$

Integrando con respecto a la coordenada axial y, se obtiene la solución general del perfil de velocidades:

$$V_x(y) = \frac{\varphi_0}{2} \frac{dP_m}{dx} y^2 + \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left(\frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha y^{\alpha+1} + G \quad (4.28)$$

Aplicando la misma condición de frontera de no deslizamiento en la pared, i.e.

$$y = B; V_x(y=B) = 0 \quad (4.29)$$

La constante G toma la siguiente forma analítica:

$$G = - \frac{\varphi_0}{2} \left(\frac{dP_m}{dx} \right) B^2 - \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left(\frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha B^{\alpha+1} \quad (4.30)$$

Sustituyendo el valor de la constante G2 en la ecuación general se tiene el perfil general del modelo constitutivo de Ellis

$$\boxed{V_x(y) = \frac{\varphi_0 B^2}{2} \left(- \frac{dP_m}{dx} \right) \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^2 \right) + \frac{\varphi_1 B^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(- \frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^{\alpha+1} \right)} \quad (4.31)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Obsérvese que la componente axial del campo de velocidades se divide en una contribución newtoniana y otra no newtoniana del modelo de ley de potencia.

Flujo volumétrico del modelo de Ellis

Integrando el perfil de velocidades sobre el área de sección transversal, se tiene la expresión analítica para el flujo volumétrico del modelo de Ellis:

$$Q = \frac{2}{3} \phi_0 WB^3 \left(-\frac{dP_m}{dx} \right) + \frac{2}{\alpha+2} \phi_1 WB^{\alpha+2} \left(-\frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha = Q_N + Q_O \quad (4.32)$$

Por lo tanto, el modelo de Ellis se puede descomponer, en dos contribuciones una asociada al modelo Newtoniano y al de Ley de potencia respectivamente. La Ec. (4.32) es el flujo volumétrico en la rendija, para un fluido no newtoniano caracterizado por el modelo de ley de potencia.

Modelos inelásticos

Los resultados obtenidos mediante las ecuaciones constitutivas: (i) Newton, (ii) Ley de potencia y (iii) Ellis. Tres resultados parciales pueden ser resaltados:

- a) Es importante resaltar, que los coeficientes primero y segundo de esfuerzos normales (Ecs. 4.23, 4.24) son cero, debido a que estas están asociadas a la elasticidad del sistema y para fluidos inelásticos newtonianos y no newtonianos no hay componentes elásticas.
- b) En los modelos de ley de potencia y Ellis) el primer y segundo coeficiente de esfuerzos normales siempre serán cero.
- c) Las funciones materiales ψ_1 y ψ_2 son diferentes de cero en el régimen de viscoelasticidad no lineal y dependen de la ecuación constitutiva que se escoja para modelar la transferencia de momento y reología en

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

el sistema de estudio. En la siguiente sección, se presenta el resultado general del presente análisis con un fluido viscoelástico.

CAPÍTULO V

SIMULACIONES COMPUTACIONALES

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

5.1 Variables adimensionales

En esta sección, se presentan las variables adimensionales que nos facilitaran las simulaciones y la descripción de los mecanismos que domina el sistema a través de los grupos adimensionales. En la tabla 1 se muestran las variables características más importantes del presenta análisis: Las variables escaladas son: (i) Coordenada radial, (ii) Esfuerzo cortante, (iii) Esfuerzos normales, (iv) Velocidad axial, (v) Flujo volumétrico.

Tabla 2. Variables dimensionales y adimensionales.

Coordenada	Variable dimensional	Variable Característica	Variable adimensional
Coordenada ortogonal [m]	y	H	$y^* = y/H$
Componente del esfuerzo cortante yx [Pa]	σ_{yx}	$\eta_0 \frac{\langle V_x \rangle}{h}$	$\sigma_{xy}^* = \frac{\sigma_{xy}}{\eta_0 \frac{\langle V_x \rangle}{h}}$
Componentes normales del esfuerzo [Pa]	$\sigma_{ii}; ii=\{xx,yy\}$	$\eta_0 \frac{\langle V \rangle}{h}$	$\sigma_{ii}^* = \frac{\sigma_{ii}}{\eta_0 \frac{\langle V_x \rangle}{h}}; ii=\{xx,yy\}$
Presión termodinámica [Pa]	p	$\eta_0 \frac{\langle V \rangle}{h}$	$p^* = \frac{p}{\eta_0 \frac{\langle V_x \rangle}{h}}$
Fuerza eléctrica [N]	Fe	$\eta_0 \frac{\langle V \rangle}{h}$	$fe^* = \frac{fe}{\eta_0 \frac{\langle V_x \rangle}{h}}$
Velocidad axial [m/s]	Vx	$\langle V_x \rangle$	$V_x^* = \frac{V_x}{\langle V_x \rangle}$
Flujo volumétrico [m ³ /s]	Q	$hW \langle V_x \rangle$	$Q^* = \frac{Q}{hW \langle V_x \rangle}$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

En la Tabla 2 se muestran las variables características y sus unidades correspondientes en el sistema MKS respectivamente.

Tabla 3. Variables características.

Nombre	Variable Característica	Nombre	Unidades (MKS)
Variable geométrica	H	Separación de las placas	m
Propiedad reológica del fluido	φ_0	Fluidez a corte bajo	1/Pa s
Propiedad reológica del material	φ_1	Fluidez a moderados cortes	1/Pa s ⁿ
Propiedad reológica del material	α	Exponente del modelo de Ellis	[1]

Es importante destacar que el conjunto de variables adimensionales, nos permiten:

- a) Escalar las variables
- b) Simplifican las simulaciones computacionales
- c) Aparecen grupos adimensionales que engloban los mecanismos más importantes en el sistema.

A continuación se presentan las ecuaciones adimensionales, que son punto de partida en los cálculos posteriores.

5.2 Ecuaciones adimensionales

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Función viscosidad

$$\eta^*(\sigma_{xy}^*) = \frac{1}{1 + \Phi(\sigma_{xy}^*)^{\alpha-1}}$$

Primer coeficiente de esfuerzos normales

$$\Psi_1^*(\sigma_{xy}^*) = \frac{2De}{1 + \Phi(\sigma_{xy}^*)^{\alpha-1}}$$

Segundo coeficiente de normales

$$\Psi_2^* = 0$$

Ecuación de velocidad adimensional:

$$V_X^*(y^*) = \frac{1}{2} \sigma_w^* (1 - (y^*)^2) + \frac{\Phi}{\alpha+1} (\sigma_w^*)^\alpha (1 - (y^*)^{\alpha+1})$$

Flujo volumétrico adimensional

$$Q^*(\sigma_w^*) = \frac{1}{4} (\sigma_w^*) + \frac{\Phi}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^\alpha$$

5.3 Números adimensionales

Al introducir las variables adimensionales en las ecuaciones desacopladas se obtienen dos números adimensionales los cuales describen los mecanismos globales en el sistema. El número adimensional que caracteriza a este sistema de flujo vibrátil es el número adimensional del Reynolds Re .

$$\Phi = \frac{\Phi_1}{\Phi_0^{1-\alpha} (h/\langle V \rangle)} \Rightarrow \begin{cases} \Phi \gg 1; \text{Efectos no-newtonianos} \gg \text{Efectos Newtonianos} \\ \Phi = 1; \text{Efectos no-Newtonianos} = \text{Efectos Newtonianos} \\ \Phi \ll 1; \text{Efectos no-newtonianos} \ll \text{Efectos Newtonianos} \end{cases}$$

El número de Reynolds nos da información acerca del tipo de flujo que se está analizando:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$De = \lambda_0 \frac{\langle V_x \rangle}{h} \Rightarrow \begin{cases} De \ll 1; & \text{Fuerzas viscosas} \gg \text{Fuerzas elásticas} \\ De = 1; & \text{Fuerzas viscosas} = \text{Fuerzas elásticas} \\ De \gg 1; & \text{Fuerzas viscosas} \ll \text{Fuerzas elásticas} \end{cases}$$

5.4 Simulación y análisis de resultados

En esta subsección se presentan las simulaciones correspondientes del modelo de Tanner-Ellis. Los puntos importantes a desarrollar son:

- (i) Funciones materiales
 - a) Función viscosidad
 - b) Primer coeficiente de esfuerzos normales
- (ii) Velocidad axial
- (iii) Flujo volumétrico
- (iv) Esfuerzo cortante

El principal objetivo de esta sección, es cuantificar el efecto del comportamiento no newtoniano en la dinámica de flujo mediante los números adimensionales definidos anteriormente en función de las propiedades materiales del modelo constitutivo de Tanner-Ellis. En este capítulo se presentan las simulaciones computacionales de las Ecuaciones adimensionales expuestas en el capítulo anterior. Los resultados se enfocaron principalmente en: (i) función viscosidad, (ii) velocidad axial, (iii) flujo volumétrico, (iv) aumento en el flujo y (vi) aumento en la potencia. Las simulaciones computacionales fueron realizadas en Mathematica 9.0 y exportadas a una hoja de cálculo para su posterior visualización.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

5.5 Predicciones computacionales

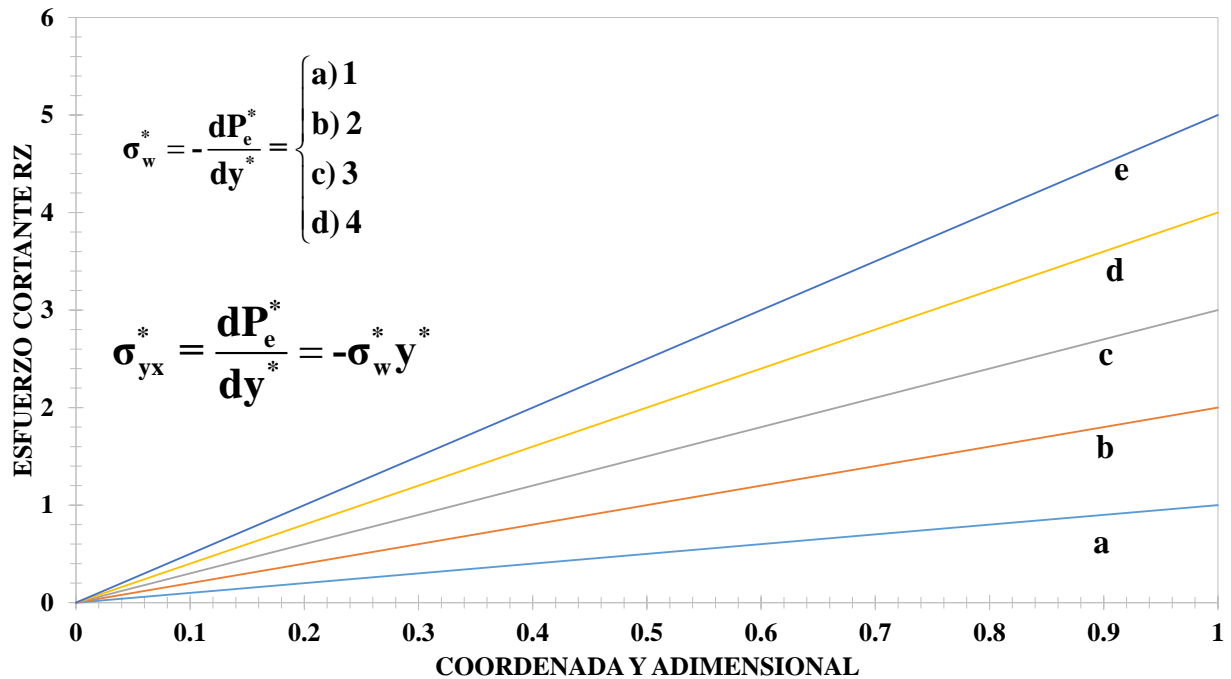


Figura 7. Ilustra la componente xy del tensor de esfuerzos en función de la coordenada axial adimensional, para diferentes valores del gradiente modificado.

En la Fig.7 se grafica el esfuerzo en la pared adimensional en función de la coordenada axial adimensional en el sistema de flujo. Matemáticamente, las cinco simulaciones muestran una relación lineal entre la componente xy del esfuerzo en la pared y la coordenada axial adimensional, en donde la pendiente está definida por el gradiente de presión en la dirección x modificada por el producto de la densidad carga por la diferencia de potencial asociada con el campo eléctrico en dirección del flujo. Físicamente, la componente xy del tensor de esfuerzos se ve modificada por efecto del gradiente de presión adimensional modificado por los mecanismos eléctricos:

$$P_m^* = p^* + \rho_e^* \Phi^*$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

En la Fig.8 se ilustra la función viscosidad adimensional en función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del exponente α . En esta simulación el número adimensional $\Phi = 1$. A esfuerzos en la pared bajos, la función viscosidad muestra un comportamiento constante, i.e. es independiente de la componente cortante xy del tensor de esfuerzos. Por otra parte, a un valor crítico del componente xy del tensor de esfuerzos el líquido muestra un comportamiento monótono decreciente a moderadas y altos valores de escalar xy del tensor de esfuerzos. Nótese que matemáticamente la pendiente de la zona decreciente asociada a el adelgazamiento al corte del fluido, aumenta conforme el exponente α lo hace. En la Fig. 9 se simula el efecto de la función viscosidad en función del esfuerzo en la pared adimensional en función del número adimensional Φ , el cual está asociado a los mecanismos no newtonianos del sistema. En esta simulación el valor del exponente del líquido de Ellis es $\alpha = 2$. Como en la Fig. (8) se observa que a esfuerzos en la pared bajos el comportamiento es constante y para un esfuerzo crítico cercano a 0.001, la función viscosidad adimensional presenta un comportamiento monótono decreciente, en el cual se observan tres cambios de pendientes en el intervalo de 10^{-2} a 10^1 en el esfuerzo en la pared adimensional. Nótese que el parámetro Φ es una medida de las propiedades no newtonianas en el sistema siendo $\Phi = 0$ el caso newtoniano, en donde la función viscosidad constantes (Letra a en la Fig.9). Por otra parte, para $\Phi \neq 0$ el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente asociada a las propiedades adelgazantes a l corte. Es importante resaltar, que al aumentar el parámetro Φ , el modelo de Ellis tiende al de Ostwaeld, i.e. el de ley de potencia y la zona constante a bajos esfuerzos en la pared disminuye como se aprecia en la Figura 9. Finalmente, en la Fig. 8 se estudian las propiedades adelgazantes a través del exponente alfa mientras que, en la Fig. 9 se hace mediante los mecanismos adelgazantes a través de las propiedades materiales a bajo y moderado corte respectivamente

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

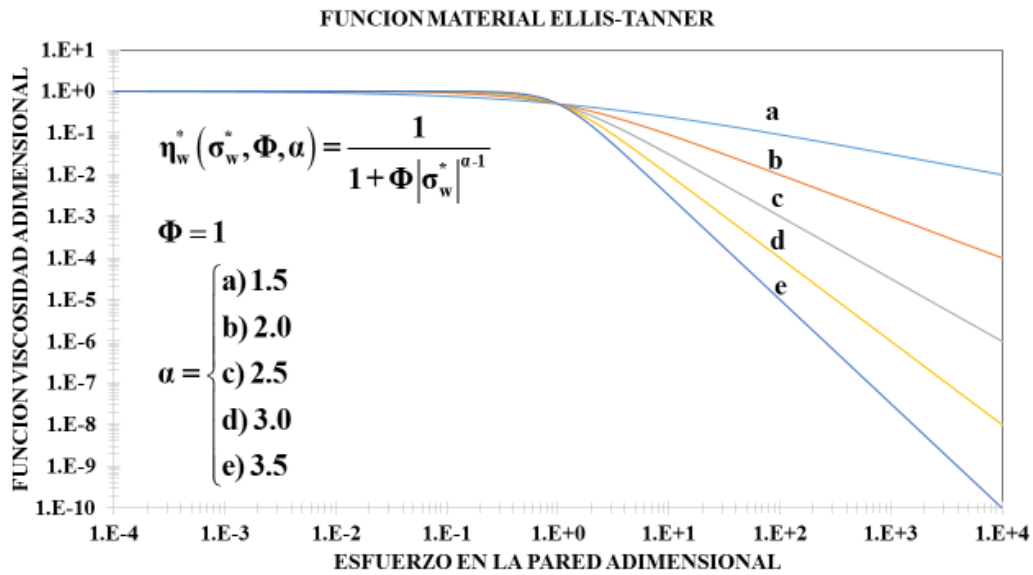


Figura 8. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional en función del exponente alfa del modelo de Ellis asociado con el adelgazamiento al corte del fluido.

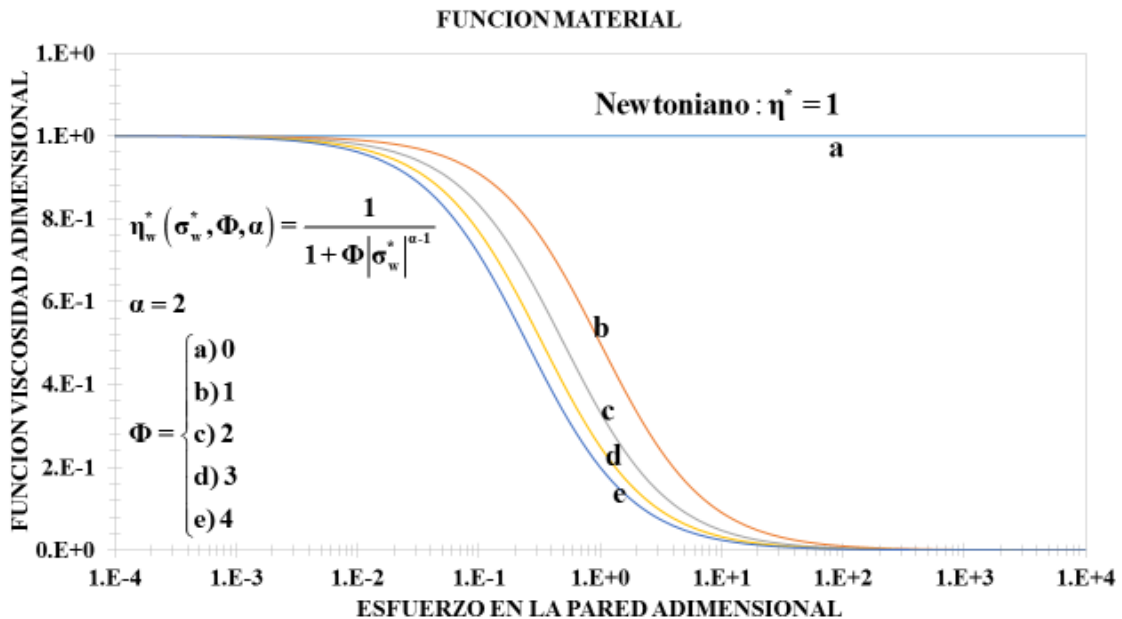


Figura 9. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional, en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

En la Fig. 10 se ilustra el primer coeficiente de esfuerzos normales adimensional en función del esfuerzo adimensional para diferentes valores del número de Deborah. Los otros parámetros adimensionales utilizados en la simulación son: $\Phi = 1$ y $\alpha = 2$. Los valores asignados representan una competencia entre los mecanismos newtonianos y no newtonianos a moderados cortes y el exponente alfa asociado a los procesos adelgazantes en el sistema. Matemáticamente, la Fig.10 tiene un comportamiento similar al de la Figs. 8,9. A bajos esfuerzos en la pared, el primer coeficiente de esfuerzos normales muestra un comportamiento constante, y a un esfuerzo crítico en la pared, el sistema decrece con una pendiente constante, a moderados y altos esfuerzo en la pared respectivamente. Es importante resaltar varios aspectos entes simulación:

- a) El número de Deborah que está asociado a los mecanismos viscoelásticos en el sistema, desfasa las curvas a estados de mayor elasticidad cuando el $De > 1$, mientras que a $De < 1$ el primer coeficiente de esfuerzo normales decrece, aunque la simulación es la misma.
- b) A número de Deborah cero, el sistema no presenta elasticidad por lo que liquido es no newtoniano inelástico.
- c) EL primer coeficiente de esfuerzo normales asociado a la prueba de corte, describe los mecanismos elásticos en una prueba de corte en donde se genera un flujo homogéneo, i.e. un flujo que no dependa de la posición.
- d) Nótese que el modelo de Tanner-Ellis no presenta segundo coeficiente de esfuerzos normales, por lo que no tenemos información física de la elasticidad asociada a segunda diferencia de esfuerzos normales.

La Fig.11 ilustra la velocidad axial adimensional en función de la coordenada axial adimensional en función del exponente α , los otros parámetros utilizados en la simulación computacional son: (i) $\Phi = 1$; (ii) $\sigma_w^* = 1$. En todas las simulaciones, el perfil de velocidades es axi-simétrico, i.e. es simétrico con respecto al centro del cilindro. El efecto del exponente alfa es aumentar la velocidad de los elementos materiales que se están deformando por efecto del flujo. La velocidad máxima en el sistema se obtiene en el centro del tubo y puede ser calculada analíticamente

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

mediante la Ec. (X). Nótese que debido al modelo constitutivo utilizado, esta es la suma de la contribución newtoniana y no newtoniana respectivamente.

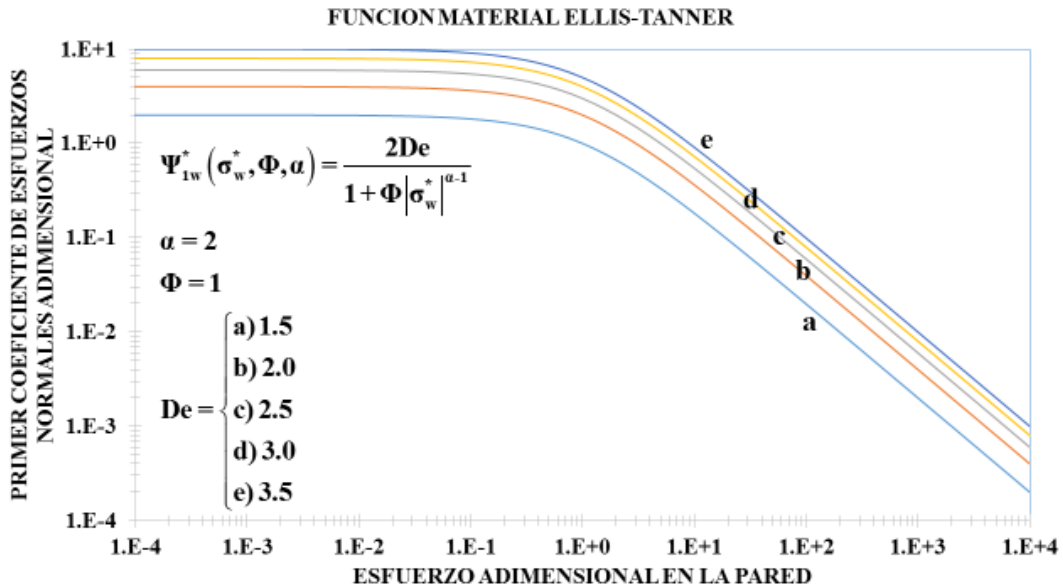
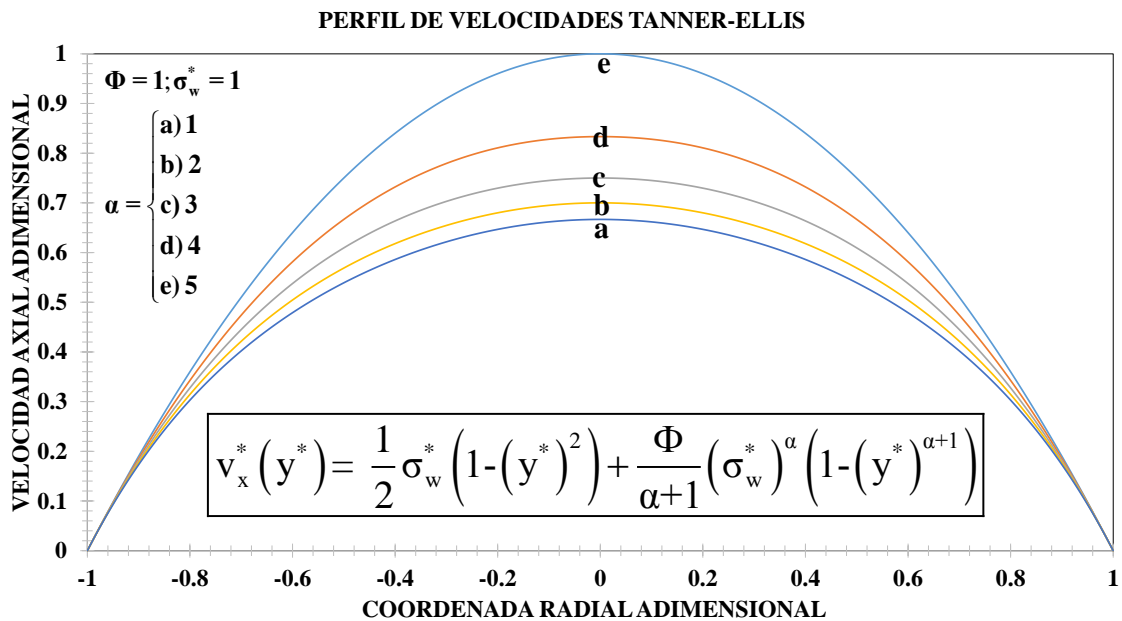


Figura 10. Ilustra el primer coeficiente de esfuerzos normales vs esfuerzo adimensional en la pared como función del número de Deborah. Los otros parámetros utilizados en la simulación son: (i) $\alpha = 2$, (ii) $\Phi = 1$.



ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Figura 11. Ilustra el perfil de velocidades axial adimensional vs coordenada axial adimensional en función del exponente alfa del modelo de Ellis. Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\Phi = 1$, (ii) $\sigma_w^* = 1$

En la Fig. 12 se presentan los resultados numéricos de la velocidad axial vs coordenada adimensional y^* en función del esfuerzo en la pared adimensional. Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\Phi = 1$; (ii) $\alpha = 2$. Es claro, que el líquido simulado es un adelgazante al corte y como en el caso anterior (Fig. 11), el perfil de velocidades es axi-simétrico en $y^* = 0$. En todos los casos, el máximo en el perfil de velocidades está determinado por un acoplamiento entre las propiedades newtonianas y no newtonianas (adelgazantes). La expresión analítica de este, toma la forma:

$$V_{\max}^* = V_X^*(y^* = 0) = \frac{1}{2}\sigma_w^* + \frac{\Phi}{\alpha+1}(\sigma_w^*)^\alpha$$

Es decir, la máxima velocidad del sistema está determinada por un acoplamiento entre la fuerza motriz asociada al gradiente modificado, exponente del modelo de Ellis y el número adimensional Φ asociado a las propiedades newtonianas y no newtonianas del sistema. Es importante resaltar, que el efecto de la fuerza motriz asociado al gradiente de presión modificado, es el de desfasar los elementos de control de estados de menor a mayor velocidad por efecto del flujo.

En la Fig. 7 se simulan los perfiles de velocidad axial adimensionales vs coordenada y adimensional en función del Φ . Los otros parámetros empleados en la simulación fueron: (i) $\alpha=2$, (ii) $\sigma_w^* = 1$. Se observa que el efecto del número adimensional Φ es el desfasarlas las curvas de estados de menor velocidad a mayor velocidad por efecto de los mecanismos newtonianos y no newtonianos respectivamente. Nótese que a diferencia de las Figs. 11,12 los máximos de velocidad son mayores, por efecto del número adimensional $\Phi = 1$. Es importante observar que para $\Phi = 0$ el fluido es newtoniano (viscosidad constante), mientras que para valores de $\Phi \gg 1$, el sistema es dominado por la ecuación constitutiva

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

de Ostwaeld (Ley de potencia). Por último, para valores intermedios del número adimensional Φ , el sistema es dominado por el modelo constitutivo de Ellis. Un hecho importante de la simulación de la Fig.13, es que al aumentar los mecanismos no newtonianos, se observa que en una vecindad del centro, el sistema presenta una zona en donde los elementos materiales del sistema no presentan una diferencia de velocidades relativas, por lo que se forma un frente de velocidades homogéneo por efecto de los mecanismos adelgazantes al corte.

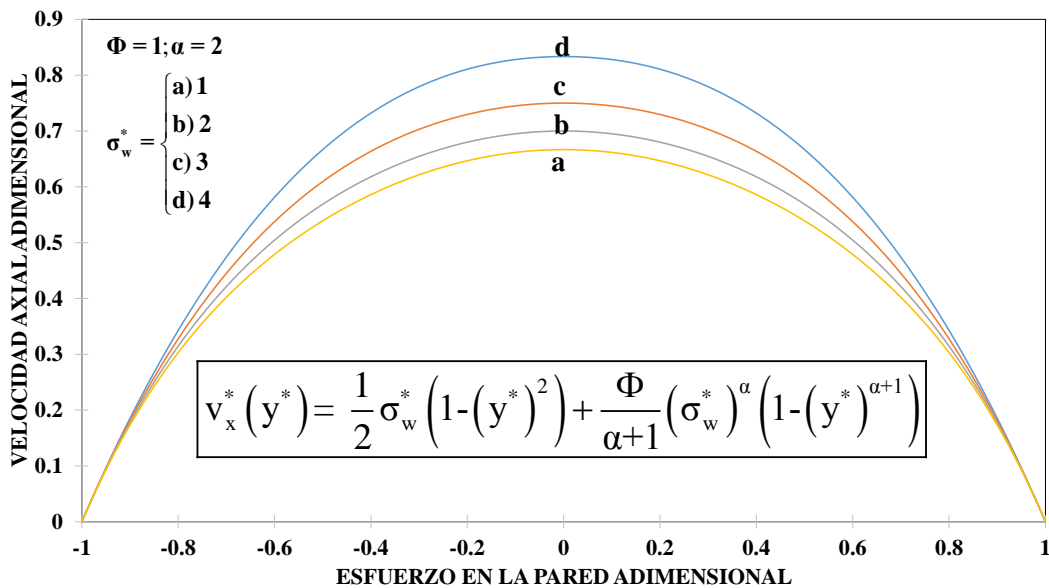


Figura 12. Ilustra el perfil de velocidades axial adimensional vs coordenada ortogonal adimensional en función del exponente alfa del modelo de Ellis. Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\Phi = 1$, (ii) $\sigma_w^* = 1$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

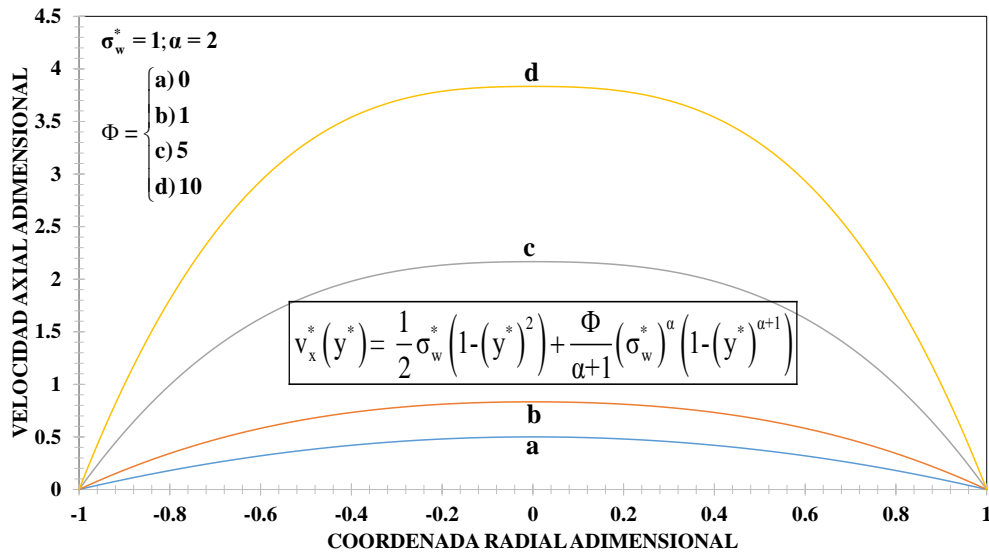


Figura 13. Ilustra el perfil de velocidades axial adimensional vs coordenada axial adimensional en función del número adimensional Φ . Los otros parámetros empleados en la simulación son: (i) $\alpha=2$, (ii) $\sigma_w^* = 1$

La Fig. 14 presenta el flujo volumétrico adimensional en función del esfuerzo adimensional para diferentes valores del exponente del modelo de Ellis. En esta simulación, el número adimensional $\Phi = 1$. A esfuerzos adimensionales bajos se observa un comportamiento lineal entre la variable dependiente asociada al flujo volumétrico y la variable independiente relacionada con el esfuerzo en la pared adimensional respectivamente. A un esfuerzo en la pared crítico, el sistema presenta un cambio en la pendiente asociado a estados de menor a mayor flujo adimensional por efecto del flujo. Es claro, que los efectos adelgazantes modifican y aumentan el flujo por efecto de la disminución en la viscosidad aparente en el sistema.

$$Q^*(\sigma_w^*) = \left(1 + \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1} \right) \frac{1}{4} (\sigma_w^*) = \varphi^*(\sigma_w^*) Q_N^*$$

La ecuación anterior implica que el flujo del modelo Ellis-Tanner, se puede expresar como la fluidez adimensional aparente $\varphi^*(\sigma_w^*)$, multiplicado por el flujo volumétrico newtoniano. La desviación del fluido newtoniano (cambio de la

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

pendiente en la Fig. 14) se debe a la función fluidez definida en la ecuación anterior, i.e.

$$\varphi^* (\sigma_w^*) = 1 + \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1}$$

Nótese que la función fluidez depende del esfuerzo en la pared asociada a la fuerza motriz que deforma continua e irreversiblemente el sistema y el exponente del modelo de Ellis asociado a los procesos adelgazantes del modelo de Ellis heredados de la ecuación constitutiva de Ostwaeld. En la Fig. 15 se ilustra el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del número adimensional Φ . En el caso de un fluido newtoniano $\Phi = 0$ (simulación a Fig. 15) se observa una relación lineal entre la variable dependiente (Flujo volumétrico adimensional) y la variable dependiente (esfuerzo en la pared adimensional). Nótese que la pendiente en el caso de una rendija y un fluido newtoniano es 0.66 mientras que, si la geometría es cilíndrica la pendiente es menor e igual a 0.25. Por otra parte para $\Phi \neq 0$ con $\Phi > 0$, el sistema presenta un comportamiento lineal a bajos esfuerzos en la pared seguido de un cambio en la pendiente asociada a los mecanismos adelgazantes en el sistema.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

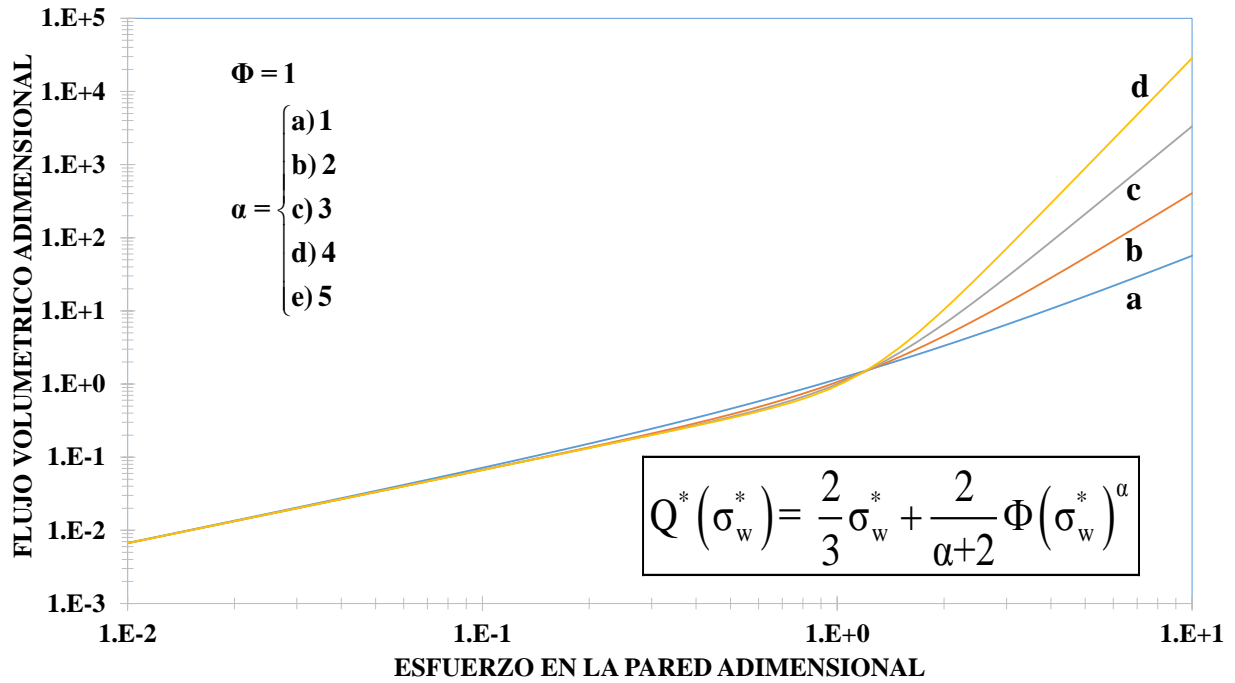
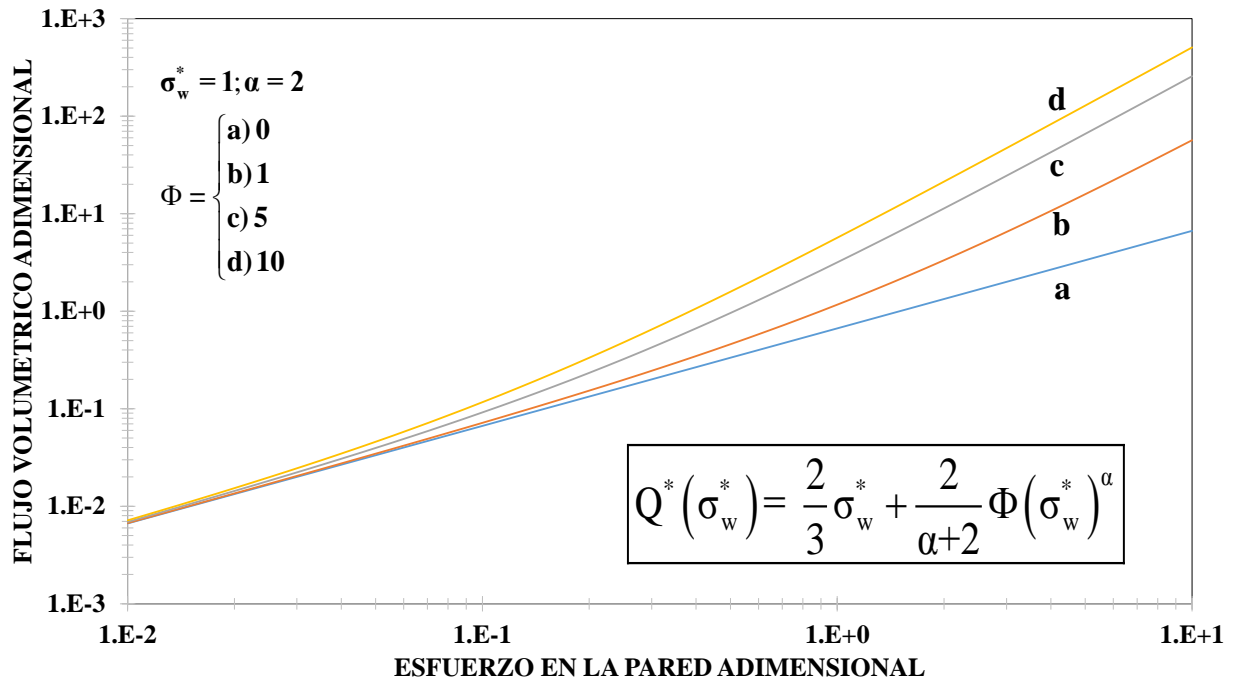


Figura 14. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional, en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.



ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Figura 15. Ilustra la función viscosidad adimensional vs esfuerzo en la pared adimensional, en función de las propiedades adelgazantes al corte a través de los parámetros materiales alfa.

5.6 Aplicación a un fluido complejo sistema con partículas dispersas

En esta sección, se presenta una aplicación de los resultados teóricos aquí obtenidos. Para ejemplificar utilizaremos los resultados reométricos y experimentales obtenidos por Lin et al. (2014) en un sistema con partículas dispersas (no coloidal). La hipótesis de que un cumulo de partículas, se dispersa en una fase continua las cuales forma agregados que al combinarse con la fase continua les dan las características no newtonianas al sistema. Las interacciones partícula-partícula forman agregados y a su vez estos interactúan con las partículas o con otros agregados, los cuales al ser sometidos a flujo, i.e. una fuerza que los deforme continua e irreversiblemente se rompen y se reestructuran cambiando las propiedades no newtonianas del sistema. En esta sección se utilizan estos conceptos aplicados al flujo en una rendija sometido a un campo eléctrico (Lin et al. 2014)

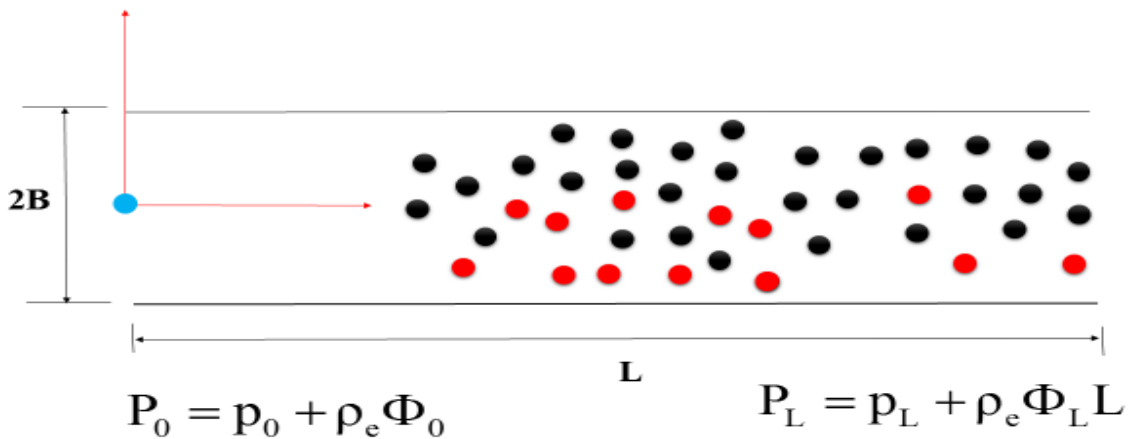


Figura 16. Ilustra el sistema coloidal al cual se le de forma continua e irreversiblemente por el flujo combinado

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

- Las condiciones de procesos del sistema son las mismas que en la teoría, i.e., se supone que el sistema es isotérmico es decir, no es necesario introducir el balance de energía.
- El fluido de prueba es una suspensión de tipo coloidal en donde las partículas son esferas de acero.
- Los datos reométricos se obtuvieron a partir de una geometría de cilindros concéntricos.
- Los datos experimentales fueron ajustados mediante una regresión de tipo lineal y el mejor ajuste de estos, dio un $\alpha = 1.372$ aproximadamente.
- Los datos reométricos de esta sección provienen de una suspensión en la cual, Están dispersas partículas esféricas.
- Las interacciones partícula - partícula, partícula- cúmulos o cúmulos- cúmulos se desprecian.

Tabla 3. Parámetros materiales utilizados en el modelo de Ellis para una suspensión de tipo coloidal.

Modelo	η_0 [Pas]	η_∞ [Pas]	n [1]	m [1]	$\alpha = 1/n$ [1]	ρ [kgm ⁻³]
ELLIS	0.0326	---	0.6290	0.1	1.5893	1053

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

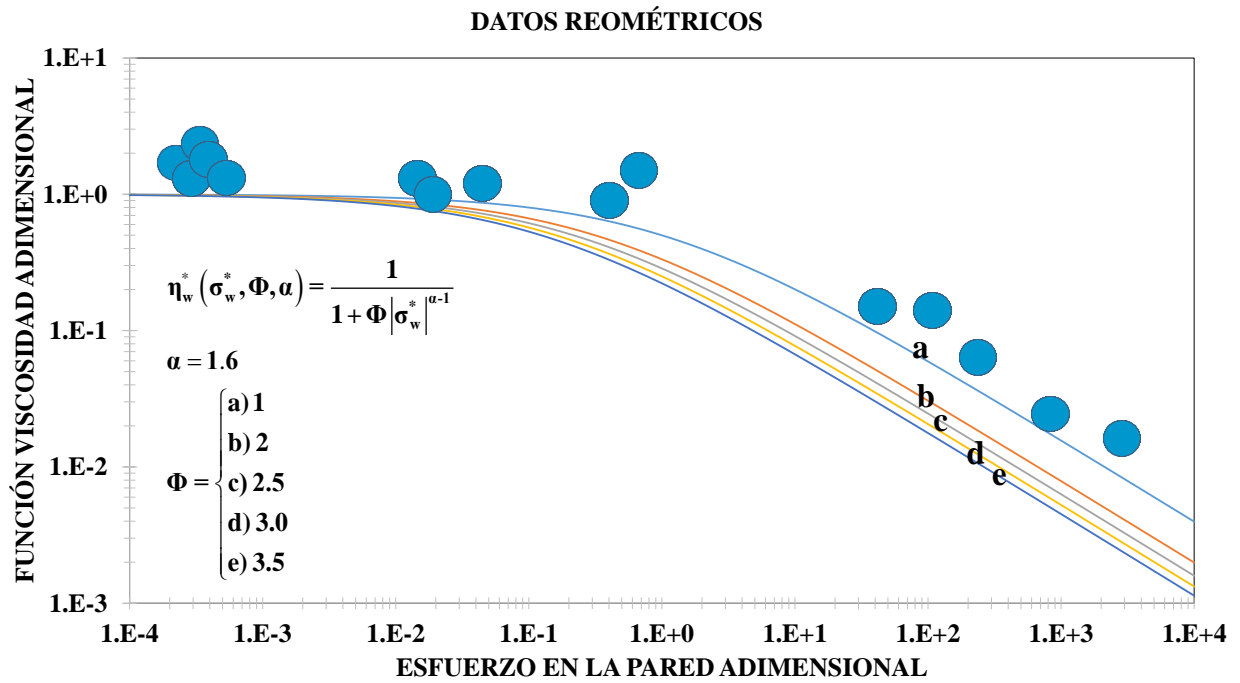


Figura 17. Ilustra el diagrama reológico de la función viscosidad como función del esfuerzo en la pared para el valor de alfa 1.4 obtenido del ajuste de los datos reométricos obtenidos de la literatura.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

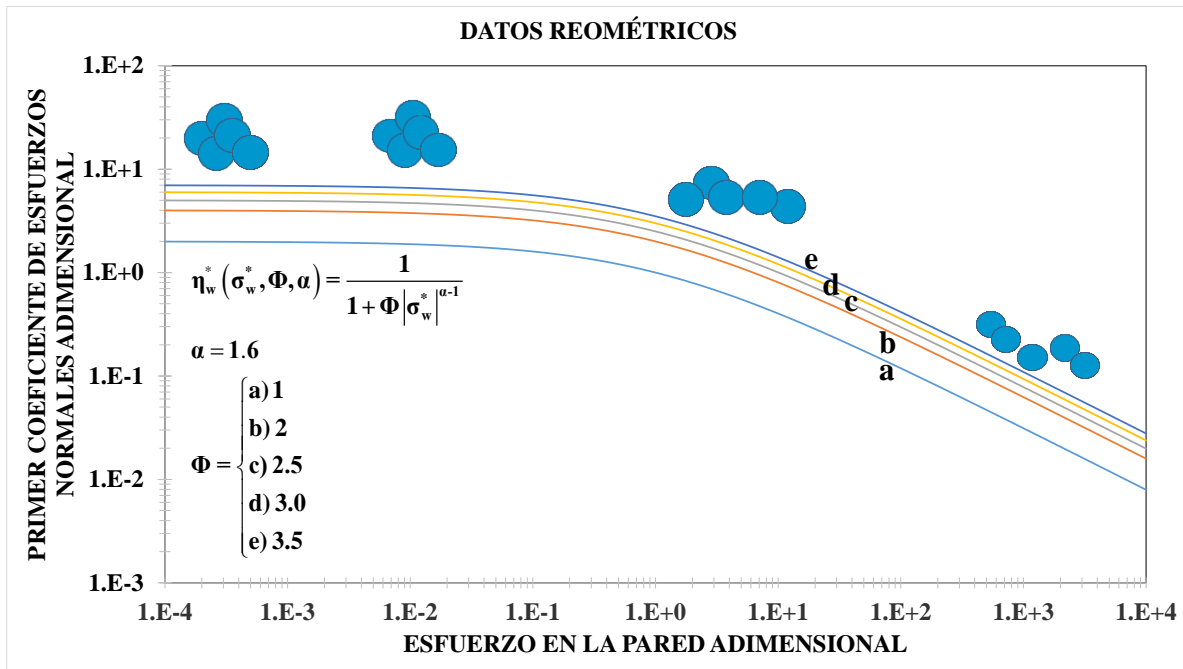


Figura 18. Ilustra el diagrama reológico del primer coeficiente de esfuerzos normales vs esfuerzo en la pared adimensional como función del número adimensional Φ . El valor del exponente alfa del modelo de Ellis es igual a 1.6.

En la Fig. 17 se observa la función viscosidad como función del esfuerzo en la pared adimensional para el modelo de Ellis. A valores bajos del esfuerzo en la pared, se observa que las partículas forman cúmulos. A un esfuerzo en la pared parte del; cumulo se rompen y alguna de ellas se orientan por efecto del esfuerzo en la pared que lo deforma continua e irreversiblemente. Finalmente a un segundo esfuerzo en la pared, se rompen los cúmulos y las partículas se orientan debido al corte. En la Fig. 18 se observa el efecto elástico del sistema a través del primer coeficiente de esfuerzos normales en función del número adimensional Φ respectivamente. Como en el caso de la función viscosidad, el primer coeficiente de esfuerzos normales muestra una zona constante en donde a bajos valores del esfuerzo adimensional, el constante lo que implica que la elasticidad de material no experimenta cambios debido a la fuerza motriz asociada con el gradiente de

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

presiones adimensionales. A un esfuerzo en la pared crítico, la elasticidad en el sistema experimenta constantes cambios por efecto del aumento del esfuerzo en la pared. Dos hechos son importantes en estas gráficas (Figs 17,18):

- A) En Este trabajo se desprecian las interacciones entre las partículas es decir las interacciones partícula-partícula, partícula-cumulo y cumulo-cumulo.
- B) Los efectos eléctricos asociados con las interacciones, son despreciables, así como efectos electro-osmóticos en general.

Perfil de velocidad

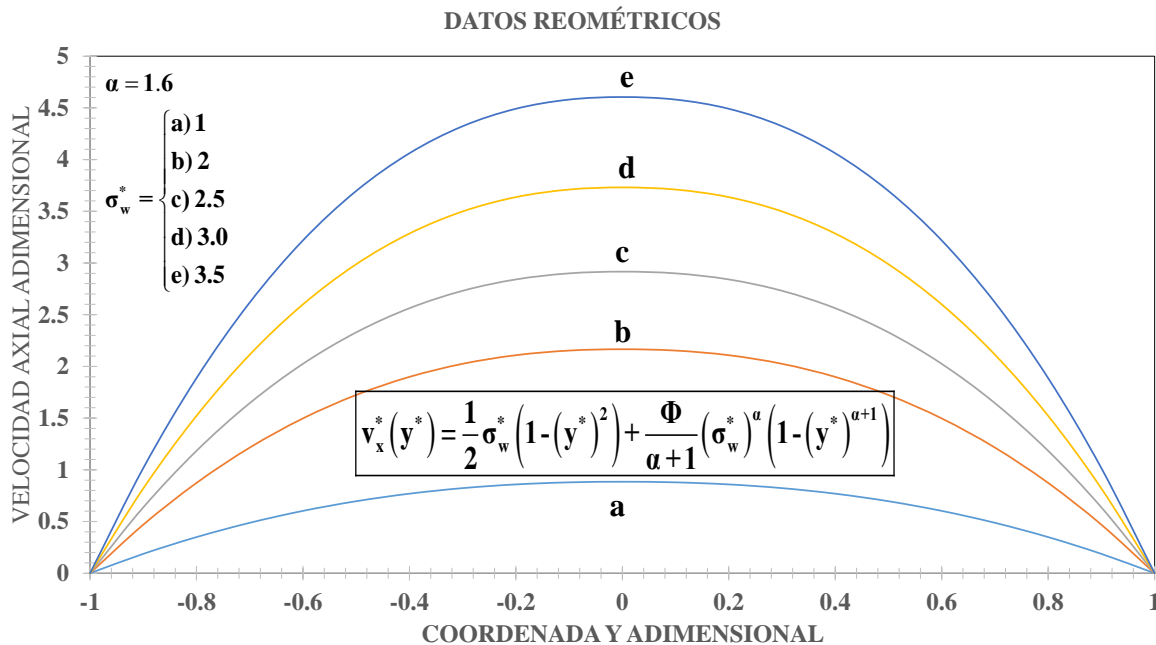


Figura 19. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores de la fuerza motriz asociada al gradiente de presión.

En la Fig. 19 se presentan las simulaciones correspondientes al perfil de velocidades vs coordenada radial adimensional en función del esfuerzo en la pared adimensional para un fluido de Ellis con exponente α 1.6 (Fluido

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

adelgazante al corte). Al igual que las simulaciones teóricas obtenidas en la sección previa, en todos los casos, el sistema muestra el clásico comportamiento parabólico, i.e. existe una simetría en torno a un eje, en este caso $r^* = 0$. En estas simulaciones se observa que al aumentar el esfuerzo en la pared, las curvas teóricas se desfasan de estados de menor a mayor velocidad asociada a la fuerza motriz que induce el corte. La máxima velocidad se obtiene en el centro del tubo y puede ser calculada directamente a través de la ecuación analítica:

$$V_{\max}^* = \frac{1}{2} \sigma_w^* + \frac{\Phi}{\alpha+1} (\sigma_w^*)^\alpha$$

Es decir, la velocidad máxima del modelo de Ellis, es la suma de la contribución newtoniana y no newtoniana del modelo de Ellis y su valor está determinado por un acoplamiento entre los mecanismos adelgazantes y cortantes asociados al esfuerzo en la pared adimensional.

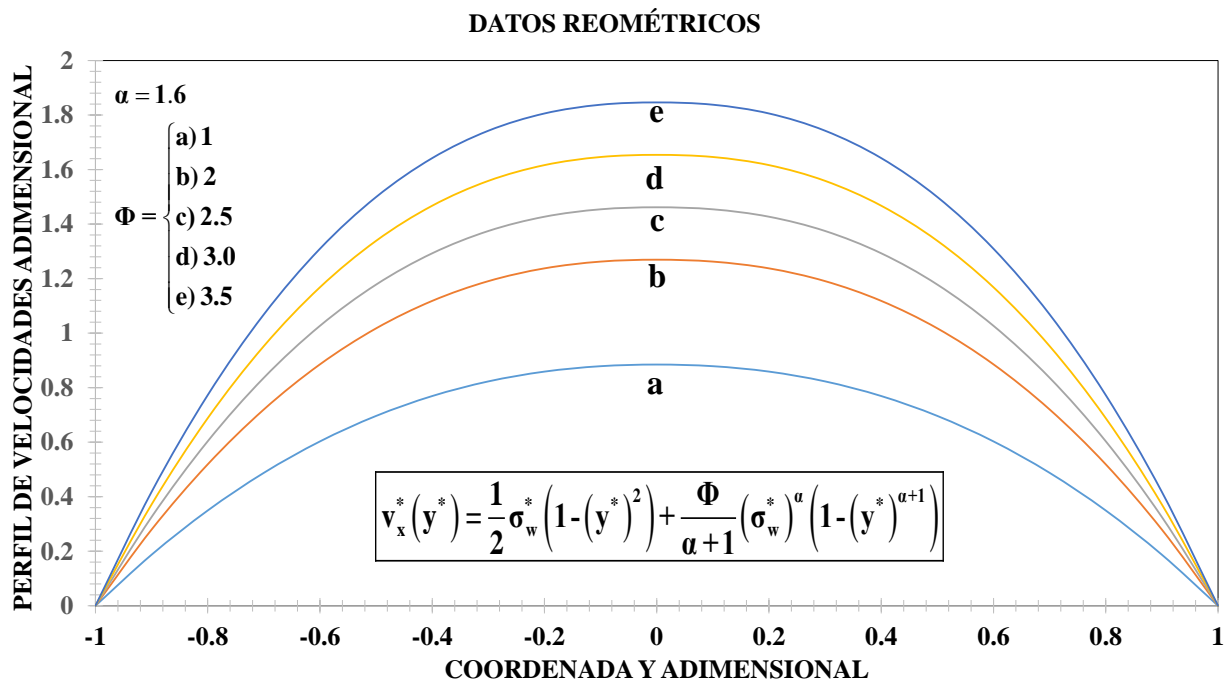


Figura 20. Velocidad axial en función de la coordenada radial adimensional, para diferentes valores del número adimensional Φ . Aquí se ha definido alfa con un valor de 1.6 respectivamente.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

En la Fig. 20 se ilustra la velocidad axial adimensional vs coordenada radial adimensional para un sistema coloidal en función de los mecanismos no newtonianos a través del número adimensional Φ . En general, la misma descripción matemática se presenta en la Fig. 14 en donde el sistema presenta un comportamiento parabólico-axi-simétrico, en donde en la pared, la velocidad es cero, y en el centro del tubo la velocidad es máxima y acoplada con el gradiente de presión y los mecanismos adelgazantes respectivamente. Es importante resaltar que al variar el número adimensional Φ cualitativamente se obtiene curvas similares al de la Fig.19, sin embargo cuantitativamente difieren en sus valores. Nótese, que este número relaciona los mecanismos no newtonianos del modelo de Ellis con la rapidez de deformación del proceso:

$$\Phi = \frac{\phi_1}{\phi_0^{1-\alpha} (\dot{\gamma}/V)}$$

Por lo que al aumentar su valor, los mecanismos no newtonianos crecen y el sistema se encuentra en la zona de moderados-altos esfuerzos en la pared por lo que el sistema es dominado por las propiedades no-newtonianas en el sistema.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

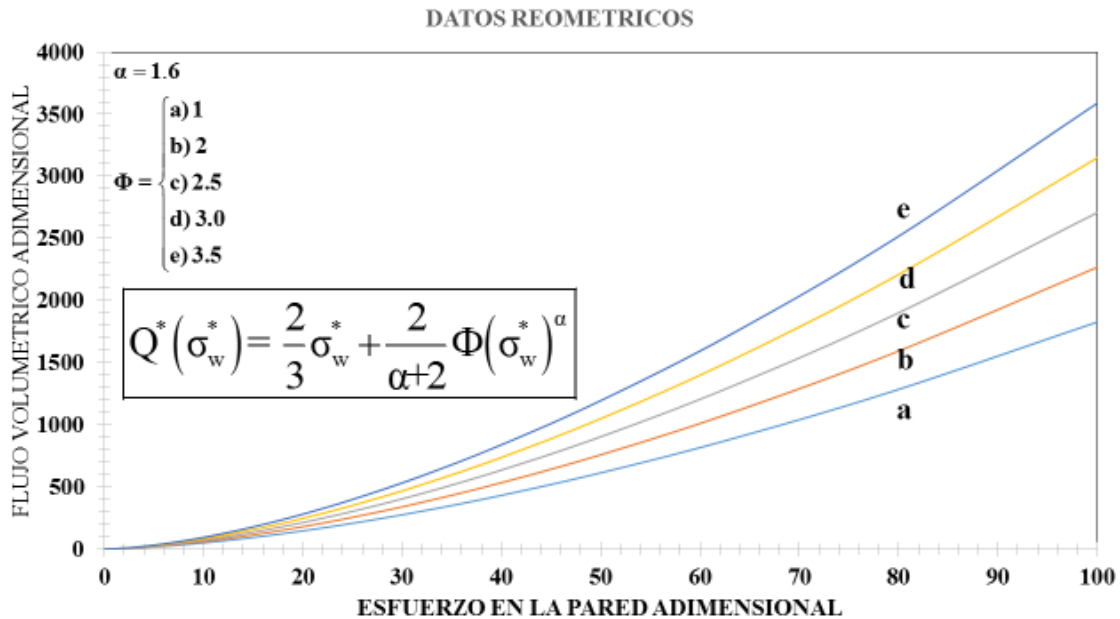


Figura 21. Flujo volumétrico adimensional en función del esfuerzo en la pared adimensional para diferentes valores del número no newtoniano Φ . El valor del exponente alfa del modelo de Ellis es $\alpha = 1.6$.

Finalmente en la Fig. 21 se ilustra el flujo volumétrico en función del esfuerzo en la pared adimensional. En esta simulación se modificaron las propiedades no-newtonianas a través del número adimensional Φ . El valor del exponente alfa en estas simulaciones fue de 1.6.

La Fig. 21 presenta el flujo volumétrico adimensional en función del esfuerzo adimensional para diferentes valores del exponente del modelo de Ellis. A valores bajos, moderados y altos del esfuerzo adimensional en la pared, se observa un comportamiento monótono creciente en toda la ventana de observación de la Fig.15. Es importante resaltar que a valores de esfuerzo en la pared bajos, el sistema es dominado por la contribución newtoniana, i.e.

$$Q^*(\sigma_w^*) = \frac{2}{3}Q_N^*$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Mientras que a esfuerzos en la pared moderados y altos, la contribución no-newtoniana domina sobre el sistema, i.e.

$$Q^*(\sigma_w^*) = \frac{2}{\alpha+2} Q_N^*$$

Por lo que, fijando el valor del exponente alfa en el sistema, i.e. el grado de adelgazamiento al corte del fluido, el flujo volumétrico está completamente determinado por el esfuerzo en la pared adimensional respectivamente. Es importante resaltar los siguientes puntos importantes:

- El flujo en una rendija se puede simplificar debido a que solo se toma una contribución al perfil de velocidades en una dirección, i.e. se debe de cumplir que el espesor de la rendija sea muy pequeño en comparación con la longitud característica relacionada con la Vorticidad en el sistema.
- Existe una transición de flujo de newtoniano a no-newtoniano inducida por los mecanismos adelgazantes al corte, y esta puede ser descrita en términos del cambio en la pendiente en el sistema:

$$Q^*(\sigma_w^*) = \left(1 + \frac{4}{\alpha+3} (\sigma_w^*)^{\alpha-1} \right) \frac{1}{4} (\sigma_w^*) = \varphi^*(\sigma_w^*) Q_N^*$$

- A partir de la curva de flujo-esfuerzo, se puede obtener una relación entre el flujo volumétrico y el primer coeficiente de esfuerzos normales asociado a la elasticidad del sistema, i.e. $\sigma_w^* = \sigma_w^*(Q^*; \alpha, \Phi)$, a través de esta relación se podría obtener resultados directos entre la elasticidad del sistema en función del flujo y de las propiedades no newtonianas.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS DE RESULTADOS

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

En esta sección se presentan el análisis de las predicciones computacionales desarrolladas en las Figs. (7-19). Se analizó el flujo cortante de un líquido en una rendija de longitud axial $2H$. El fluido es cortado por efecto de un gradiente de presión modificado por un campo eléctrico constante en la dirección del campo de velocidades. El líquido fue caracterizado por el modelo viscoelástico de Tanner-Ellis. A partir de los resultados obtenidos se observa que la componente z_x del tensor de esfuerzos es el producto del gradiente de presión y la coordenada axial $y^*=1$. A partir del balance entre la componente rz del tensor de esfuerzo y del gradiente de presión, se obtuvo una expresión analítica para la velocidad axial adimensional en función de la fuerza motriz inducida por el gradiente de presión modificada, el número adimensional Φ y el exponente α del modelo de Ellis. Los perfiles de velocidad muestran aumentos debido a los mecanismos adelgazantes o engrosantes en el sistema. Se observó que al aumentar el exponente α se forma un frente homogéneo de velocidades por efecto del flujo. Estos resultados obtenidos, concuerdan con los analizados por otros autores con diferentes ecuaciones constitutivas inelásticos y viscoelásticos (Bird 1977; Pinho et al. 2001). Los modelos viscoelásticos tipo Phan Thien Tanner Giesekus (Bird et al 1977) han sido examinados analizando diferentes mecanismos como son adelgazantes, engrosantes, tixotrópicos reopécticos y de esfuerzo de cedencia. Los resultados obtenidos mediante el modelo de Tanner-Ellis son parecidos a los simulados con otras ecuaciones constitutivas viscoelásticos. Por ejemplo, Pinho et al. 2001 estudia los perfiles de velocidad utilizando el modelo constitutivo de Giesekus, en corte simple predice las funciones materiales: (i) Función viscosidad, (ii) primer coeficiente de esfuerzos normales, y (iii) segundo coeficiente de esfuerzos normales. A través de las propiedades materiales, se estudian los mecanismos adelgazantes y espesantes del fluido. Pinho et al. (2001) demostraron la influencia de las propiedades materiales incluido la anisotropía del fluido. Por otra parte, otros trabajos estudian el flujo cortante simple incluyendo el factor de fricción en geometrías simples como son: (i) Rendijas, (ii) Cilindros y (iii) Esferas. La mayoría de estos modelos, permiten incluir el cociente entre las viscosidades a bajo y a

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

corte alto, este nos da una medida del grado de adelgazamiento entre los fluidos, i.e. η_0 / η_∞ . Es claro que el modelo de Tanner-Ellis no contiene una propiedad material asociada con la viscosidad a alto corte, solo tenemos información de la función viscosidad a bajo y alto corte. Una opción, para incluir la viscosidad a corte alto, es la de cambiar el modelo de Ellis por el de Reinner-Phillipoff de tres constantes incluyendo las dos viscosidades a bajo y a corte alto respectivamente y la tercera constante asociada al inverso de un esfuerzo crítico relacionado con los cambios de estados de mayor a menor estados de viscosidad respectivamente. Por otra parte, la primera diferencia de esfuerzos normales describe los mecanismos elásticos del material por lo que, se observa que están siendo dominados por el número de Deborah el cual relaciona dos tiempos de escala. (i) El primero de ellos, relacionado con los procesos viscoelásticos y el segundo, con el tiempo característico de proceso. Es claro, que si el tiempo de relajación es cero el sistema se reduce a un líquido inelástico. Algunos modelos, predicen primera y segunda diferencia de esfuerzos normales como son: (i) Giesekus y (ii) Oldroyd B, predicen segunda diferencia de esfuerzos normales. La ecuación constitutiva utilizada en este trabajo no presenta la segunda diferencia relacionada con la elasticidad del Material.

En esta sección, se analizan los resultados obtenidos mediante las simulaciones computacionales. En particular, se analizó el efecto de un líquido viscoelástico sometido a un gradiente de presión y un campo eléctrico en la dirección del flujo. La transferencia de momento y la reología fue descrita mediante la ecuación constitutiva viscoelástica no-lineal de Tanner y como función viscosidad se utilizó el modelo de Ellis. Suponiendo estado estacionario, proceso isotérmico y fluido incompresible se obtuvieron expresiones analíticas para: (i) Función viscosidad, (ii) Primer coeficiente de esfuerzos normales, (iii) Perfil de velocidades, (iv) Flujo volumétrico y (v) Fluidez aparente. A partir de un conjunto de variables adimensionales se obtienen los correspondientes grupos adimensionales que involucran las propiedades newtonianas y no newtonianas del sistema y las viscoelásticas $\{\Phi, De\}$ en el modelo de Tanner-Ellis

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Funciones Materiales

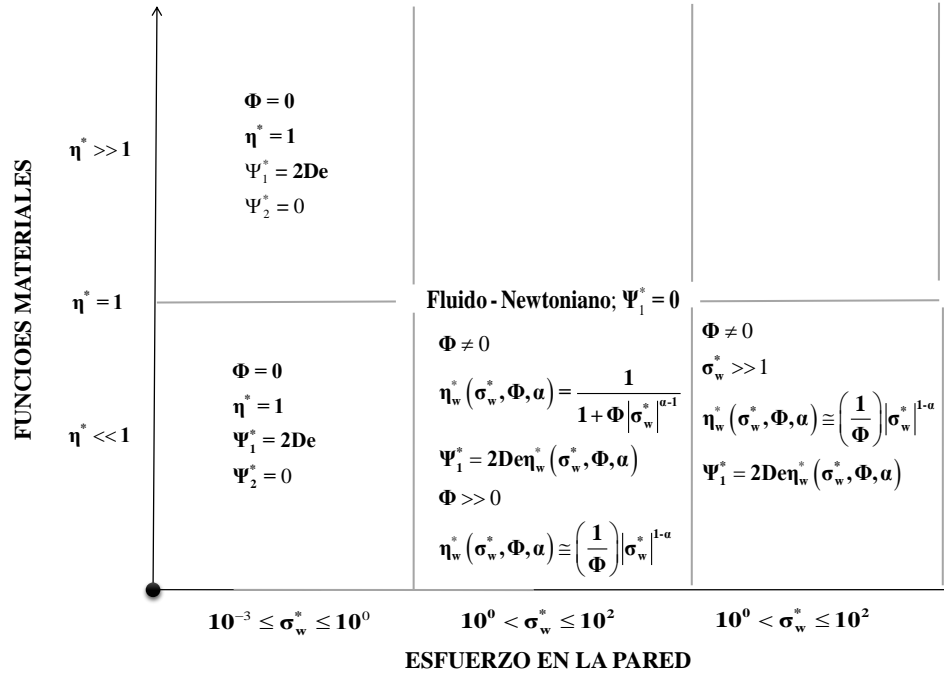
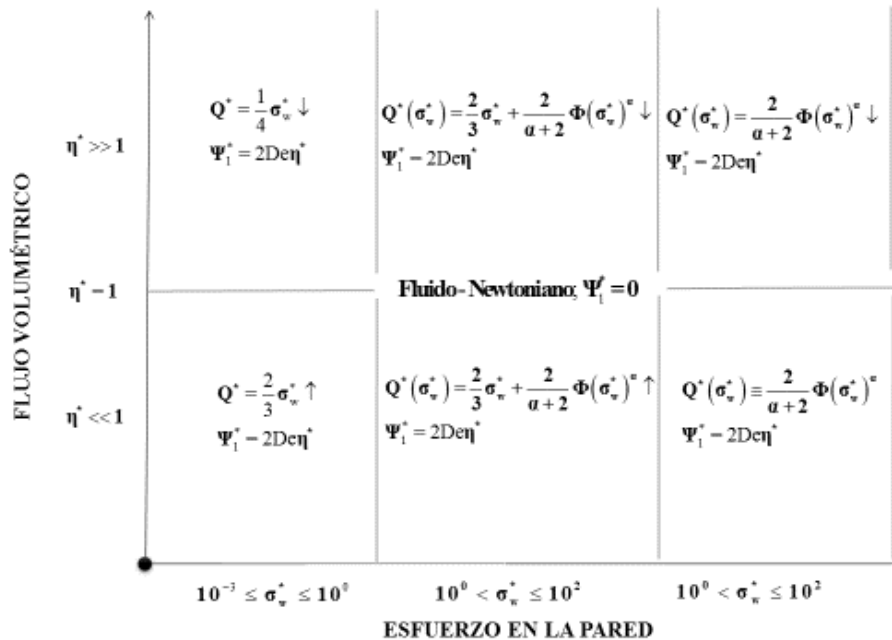


Figura 22. Resumen cualitativo de los principales resultados de las funciones materiales del modelo Tanner-Ellis



ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Figura 23. Resumen cualitativo de los principales resultados de las funciones materiales del modelo Tanner-Ellis

En el flujo combinado gradiente de presión y campo eléctrico induce un flujo cortante simple por lo que en estado estacionario, proceso isotérmico y fluido incompresible. Este tipo de fluidos viscoelásticos han sido estudiados previamente con diferentes ecuaciones constitutivas inducen cambios en las funciones materiales, perfil de velocidades, flujo volumétrico y potencia (Fredrickson 1964; Bird et al. 1977; Afonso y Pinho 2009; Alves et al. 2001; Cruz y Pinho 2004; Cruz et al. 2005; Cruz y Pinho 2007). Las principales contribuciones y los puntos claves es las simulaciones computacionales se resumen cualitativamente en la Fig. 16.

- Cuando el exponente del modelo de Ellis alfa es igual a uno, el aumento en el flujo es siempre cero, mientras que el aumento de potencia para un fluido newtoniano siempre es diferente de cero.
- De acuerdo al modelo de Ellis, el introducir un gradiente de presión pulsátil en la ecuación de movimiento provoca un aumento en el flujo volumétrico, con respecto a aquel a gradiente de presión constante.
- Se demuestra que el cambio del flujo volumétrico es enorme en la región donde el líquido es adelgazante al corte. La predicción de estos aumentos depende de las propiedades no-newtonianas y de la amplitud M introducido en el gradiente de presión pulsátil.
- El aumento en el flujo volumétrico es una función de las propiedades materiales del sistema, en particular el aumento es mucho más grande cuando el líquido presenta adelgazamiento al corte es decir la viscosidad disminuye con la rapidez de deformación.
- De acuerdo con el modelo de Ellis, en el flujo pulsátil no se presentan las curvas resonantes descritas en la literatura (Bird et al. 1977, Phan-Thien 1980, 1981, Phan-Thien & Dudek 1981).
- A esfuerzo en la pared elevados, el flujo pulsátil es constante en todo el intervalo de simulación lo que concuerda con la literatura especializada en el tema (Phan-Thien et al. 1977; Phan-Thien 1980, 1981).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Fluidez aparente y Flujo volumétrico

En el flujo vibrátil el fluido se deforma mediante un gradiente de presión constante y la pared se mueve en forma axial debido a una velocidad estocástica en la pared. Esta fuerza macroscópica que se impone en el sistema produce un cambio en el flujo volumétrico debido a la no linealidad asociada a las propiedades no newtonianas del modelo de Ellis.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Descripción física del problema

En este trabajo se analiza un líquido no-newtoniano con estructura transitoria que fluye a través de una rendija de espesor $2H$, longitud L , y anchura W con $W \gg 2H$. El proceso es isotérmico y el líquido es incompresible. El líquido se deforma continua e irreversiblemente debido a una combinación de dos fuerzas motrices: (i) Gradiente de presión y (ii) campo eléctrico, ambos en la dirección de la velocidad axial. Suponiendo que el campo eléctrico es conservativo, i.e. es el resultado de un gradiente de una función potencial, la presión y la diferencia de potencia se pueden combinar en una sola variable llamada presión modificada. Para caracterizar el líquido complejo, se utilizó la ecuación constitutiva viscoelástica de Tanner con una función viscosidad tipo Ellis, la cual consiste en la suma de dos modelos: Newtoniano y de Ostwald de Waele. Para simplificar el problema, se propuso un conjunto de variables adimensionales con el fin de acotar el espacio solución, e introducir un conjunto de números adimensionales que describen la física lineal (a bajas rapidezces de corte) y no lineal del sistema (moderadas y altas rapidezces de deformación). Los dos números adimensionales resultantes describen la transición de estados de mayor a menor viscosidad por efecto del flujo y la viscoelasticidad del sistema (número de Deborah). El sistema de ecuaciones adimensionales desacopladas se resuelve con las condiciones de simetría de flujo y de no deslizamiento en las pared (Bird et al. 1977, Herrera et al. 2009, 2010). A partir de estos resultados, se obtienen expresiones analíticas para las funciones materiales: (i) Función viscosidad, (ii) Primer coeficiente de esfuerzos normales, velocidad axial y flujo volumétrico respectivamente. Todos los resultados indican una fuerte dependencia con los mecanismos no newtonianos a través de los grupos adimensionales $\{\Phi, De\}$. A continuación, se exponen los principales resultados de los perfiles de velocidad y del flujo volumétrico.

Perfiles de velocidad

Los resultados obtenidos indican que los perfiles de velocidad presentan las siguientes características. Estos dependen de las propiedades no newtonianas del modelo de Ellis (Exponente del modelo de Ellis, fluidezces a corte bajo y moderado

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

respectivamente), a través del número adimensional Φ . En todos los casos, el sistema muestran un eje de simetría $y^* = 0$, por lo que el flujo es axi-simétrico. Es claro que en las paredes de la rendija, se cumple la condición de adherencia del sólido al fluido, i.e. el fluido adquiere la velocidad del fluido por lo que la velocidad del sistema es cero. En el centro de la rendija, la velocidad es Máxima y debido a la ecuación constitutiva que se eligió, la velocidad es aditiva, i.e. es la suma de la contribución newtoniana y la no newtoniana del modelo de ley de potencia, la cual depende de la fuerza motriz combinada (gradiente de presión modificado por los efectos eléctricos) y las propiedades no newtonianas asociadas al exponente del modelo de Ellis y del número adimensional Φ respectivamente. La velocidad axial puede separarse en una contribución newtoniana y otra no newtoniana respectivamente, i.e.

$$Vz^*(y^*, \sigma_w^*, \alpha, \Phi) = Vz_N^*(y^*, \sigma_w^*) + Vz_{NN}^*(y^*, \sigma_w^*, \alpha, \Phi)$$

La velocidad depende del exponente alfa del modelo de Ellis el cual, se relaciona a los procesos adelgazantes y engrosantes al corte en el fluido y finalmente del esfuerzo en la pared modificado en el sistema.

$$Vz_{ELLIS}^*(y^*) = Vz_N^*(y^*)$$

Por otra parte, el flujo vibrátil depende de las variables antes mencionadas, pero además de la frecuencia dimensional y del número de Reynolds antes mencionado.

$$Vz_{ELLIS}^*(y^*) = Vz_{NN}^*(y^*, \sigma_w^*, \alpha, \Phi)$$

Flujo volumétrico

Integrando el perfil de velocidades sobre el área de sección transversal, se obtuvo el flujo volumétrico en función de la fuerza motriz (gradiente de presión modificado) y el número adimensional Φ . Como en el caso de la velocidad axial, el flujo volumétrico puede ser descrito como la suma de dos contribuciones: Una asociada a los mecanismos newtonianos y no newtonianos en el sistema:

$$Q_{ELLIS}^*(\sigma_w^*, \alpha, \Phi) = Q_N^*(\sigma_w^*) + Q_{NN}^*(\sigma_w^*, \alpha, \Phi)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

- A) La condición necesaria para que exista aumento en el flujo volumétrico, es que el fluido sea adelgazante al corte, i.e. el exponente alfa de ver ser mayor a uno, i.e. $\alpha > 1$, lo que implica que el fluido debe de disminuir su viscosidad aparente en función del esfuerzo en la pared.
- B) El flujo volumétrico muestra un comportamiento monótono creciente a valores bajos de esfuerzo en la pared, mientras que para un esfuerzo crítico se observa un aumento en la pendiente por efecto del esfuerzo en la pared.
- C) El flujo volumétrico asociado a los mecanismos no newtonianos domina sobre los newtonianos a un valor crítico de esfuerzo en la pared, i.e. para un $\sigma_w^* \in (10^{-3}, 10^3)$ el flujo volumétrico presenta un transición por flujo observable gráficamente con el cambio en la pendiente.

Aplicación a un sistema no newtoniano con partículas

Para probar las bondades de nuestro modelo, se utilizó un sistema coloidal el cual se puede interpretar como una suspensión en donde el tamaño de partícula es del orden de nanómetros. Se ajustaron los datos reométricos de artículo Li et al. 2015 y se encontraron que el exponente alfa es igual a 1.872. A partir de este valor, se calcularon las funciones materiales, los perfiles de velocidad y flujo volumétrico respectivamente. Las principales conclusiones se enlistan a continuación:

- a) Para el valor de alfa calculado implica que el sistema presenta mecanismos adelgazantes inducido por la distribución de las partículas en el fluido
- b) El flujo volumétrico describe un comportamiento lineal y aun esfuerzo crítico, cambia de pendiente asociado a los mecanismos no newtonianos.
- c) El valor del máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades macroscópicas del sistema.
- d) Las interacciones partícula-partícula se desprecian en el aumento de flujo.
- e) Las interacciones partícula-cumulo se desprecian en la contribución al aumento en el flujo.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

f) Las interacciones cumulo- cumulo se desprecian de la misma manera

Finalmente, en el siguiente capítulo se presenta las posibles alternativas y caminos a seguir para enriquecer este tipo de investigación en flujos pulsátiles.

Trabajo futuro

En esta sección se presenta las posibles continuaciones de este trabajo.

Modelos viscoelásticos no lineales y estructurales

Por otra parte, fenómenos más complejos están relacionados con el régimen de viscoelasticidad no lineal a través de ecuaciones constitutivas no lineales que describan la naturaleza compleja de estos sistemas. En este punto se pueden utilizar modelos como son: (i) Jonhson Segalman, (ii) White-Metzner, (iii) Oldroyd-B, (iv) Giesekus entre otros (Bird et al. 1987, 2002). Este tipo de modelos permitiría cuantificar fenómenos complejos en estado estacionario y no estacionario como son:

- (i) Mecanismos Adelgazantes o Engrozantes
- (ii) Tixotropicos y Reopecticos
- (iii) Mecanismos de cedencia
- (iv) Flujo Bandeado

Distribución de carga en el sistema

La más natural de todas, es suponer que la densidad carga no es constante, i.e. que existe una distribución de estas las cuales dependen de la posición por lo que se tendría una función in-homogénea de la posición para la distribución de carga $\rho_E = \rho_E(x)$

$$\rho_E(x) = \rho_0 \text{Senh}(\beta x)$$

En la distribución de carga, el parámetro β es el inverso de una longitud característica asociada a la distribución de las cargas. Una primera aproximación sería repetir los cálculos utilizando esta propuesta. A consecuencia de esto, es que todos los cálculos cinemáticos y dinámicos se obtendrían vía métodos numéricos y

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

solamente en casos muy especiales, se podría obtener alguna descripción de tipo analítico, i.e. $\beta x \ll 1$, por lo que:

$$\rho_E(x) = \rho_0 \text{Senh}(\beta x) \approx \rho_0 \beta x$$

Esta simplificación implicaría que para ciertos casos de la velocidad y el flujo volumétrico se podría obtener resultados de tipo analítico respectivamente.

Flujo pulsátil sanguíneo con liberado de fármacos

El flujo pulsátil sanguíneo es uno de los sistemas más estudiados debido a su potencial aplicación con tensoactivos en la extracción terciaria de petróleo y en general de los fluidos complejos. En este punto, se tendría que modificar el gradiente de presión para incorporar las perturbaciones pulsátiles mediante una función, que permita describir los cambios en el gradiente de presión. El movimiento oscilatorio en ambos fluidos es simulado por una función estocástica $n(t)$, en la cual su promedio es cero. Suponiendo estado no estacionario y fluido incompresible el sistema de ecuaciones acopladas, se resuelve mediante una técnica de tipo perturbativo, suponiendo que la velocidad puede descomponerse en dos contribuciones estacionaria y no estacionaria. Las ecuaciones a resolver, en este caso serían:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} V_z(x,t) = -\frac{\partial p}{\partial z} (1 + \epsilon n(t)) + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xz}) + \rho_e(x) g \quad ; \quad \rho_e(x) = \rho_0 \text{Senh}(\beta x)$$
$$\frac{\partial V_z(x,t)}{\partial x} = \varphi_0 \sigma_{xz} + \varphi_1 (\sigma_{xz})^\alpha$$

Es decir, el problema del flujo pulsátil sería calcular el efecto de la función estocástica $n(t)$ y la distribución de partículas $p_e(x)$ definida en las expresiones anteriores. A partir de éste sistema acoplado, se calcularía el flujo volumétrico perturbado y se compara con el correspondiente sin perturbación.

Efectos convectivos y transitorios en la temperatura

Por otra parte, se pueden incorporar los efectos convectivos y transitorios de la ecuación de transporte de energía, en este caso, el conjunto de ecuaciones acopladas que resultan de nuestras nuevas hipótesis son las siguientes:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} Vz(x,t) = -\frac{\partial p}{\partial z}(1 + \epsilon n(t)) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xz}) + \rho_e(x)g \quad ; \quad \rho_e(x) = \rho_0 \text{Senh}(\beta x)$$
$$\frac{\partial Vz(x,t)}{\partial x} = \varphi_0 \sigma_{xz} + \varphi_1 (\sigma_{xz})^\alpha$$
$$\rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + Vz(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \right) T = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sigma_{xz} \frac{\partial Vz(x,t)}{\partial x}$$

En este punto, se incorporan estos mecanismos (convectivos y transitorios) a través de la derivada material DT/Dt de la ecuación de transporte de energía. Esta derivada describe los cambios de la temperatura temporalmente y con el espacio en la dirección de la velocidad.

Métodos matemáticos y computacionales

Para resolver el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas: (i) momento, (ii) energía y (iii) constitutiva, pueden ser empleados diferentes técnicas matemáticas como son: (i) Teoría de perturbaciones, (ii) Métodos numéricos basados en diferencias finitas y elemento finito. Por otra parte, para visualizar los patrones de flujo en el sistema, se puede utilizar paquetes comerciales tipo COMSOL-MULTIPHYSICS, CFD, etc. Los cuales se basan en discretizar el espacio en donde se describe el sistema físico, por medio de mallas las cuales describen el espacio en el que se resuelven las ecuaciones dinámicas del sistema.

Sistemas y Reometría

Otro punto importante en este trabajo es el concerniente a reometría en un viscosímetro de platos concéntricos y por medio de pruebas de compresión calcular los parámetros materiales que describen el flujo y la reología de estos materiales. Aquí, se puede caracterizar diferentes tipos de fluidos complejos como son: (i) Sistemas Micelares, (ii) Polímeros, (iii) Polímeros Asociativos, (iv) fibras naturales o sintéticas, (v) Cristales Líquidos entre otros.

Finalmente, este tema de tesis motiva el estudio de sistemas complejos los cuales, son punto de partida en la busca del modelado de materiales nuevos.

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

basados en mimetizar a los creados por la naturaleza. La presente investigación representa un paso en la búsqueda constante de modelos simples, que permitan dilucidar cómo funcionan estos sistemas y se entienda su uso en la formulación de nuevos materiales aplicados a la industria de procesamiento de polímeros en medicina.

**ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN
CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS**

BIBLIOGRAFIA

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Afonso A.M, Alves, A.M. Pinho F.T. Analytical solution of mixed electro-osmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 159 50-63 (2009).

Alves M.A., Pinho F.T., Oliveira P.J. Study of steady pipe and channel flows of a single-mode Phan Thien-Tanner fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 101 55-76 (2001).

Arulanandam S., Li D. Liquid transport in rectangular microchannels by electroosmotic pumping, *Colloids Surf. A* 161 29-102 (2000).

Berli C.L.A., Olivares M.L. Electrokinetic flow of non-Newtonian fluids in microchannels, *J. Colloid Interface Sci.* 320 582-589 (2008).

Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids, vol 1. *Fluid Mechanics.* Wiley, New York (1977).

Bird R.B., Dotson P.J. Johnson N.L. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 101 55-76 (2001).

Burgreen D., Nakache F.R. Electrokinetic flow in ultrafine cylindrical capillary, *J. Phys. Chem.* 68 1084-1091 (1964).

Chakraborty S. Electroosmotically driven capillary transport of typical non-Newtonian biofluids in rectangular microchannels, *Anal. Chim. Acta* 605 175-184 (2007).

Chakraborty S. Dynamics of capillary of blood into a microfluidic channel, *Lab-on-a-chip.* 5 421-430 (2005)

Cruz D.O.A., Pinho P.J. Kkewed Poiseuille-Couette flows of SPTT fluid in concentric annuli and channels, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 121 1-14 (2004)

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Cruz D.O.A., Pinho F,T. Oliveira P.J. Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 132 28-35 (2005).

Cruz D.O.A., Pinho, F,T. Fully-developed pipe and planar flows of multimode viscoelastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 141 85-98 (2007).

Das S., Chakraborty S. Analytical solutions for velocity, temperature and concentration distribution in electroosmotic microchannel flows of a non-Newtonian bio-fluid, *Anal. Chim. Acta* 559 15-24 (2006).

Dutta P., Beskok A. Analytical solution of combined electroosmotic/pressure driven flows in two-dimensional straight channel: finite Debye layer effects, *Anal. Chem.* 73 1979-1986 (2001).

Fam H., Bryant J.T., Konopoulou M. Rheological properties of synovial fluids, *Biorheology* 44 59-74 (2007).

Fredrickson A.G. Principles and Applications of Rheology. Prentice-Hall, Anglewood Cliffs (1964).

Fyrillas M.M., Georgiou G.C., Vlassopoulos D. Time dependent plane Poiseuille flow of a Johnson-Segalman fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 82 105-123 (1999).

Jendrejack R. M., Dimalanta E.T., Schwartz D.C., Graham M.D., de Pablo J.J. DNA dynamics in a microchannel, *Phys. Rev. Lett.* 91 038102 (2003).

Lamb H, *Hydrodynamic*, 6th edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1932).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Lin Y., Han Tan G.W., Phan-Thien N., Cheong Khoo B. Flow enhancement in pulsating flow of non-colloidal suspensions in tubes, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 212 13-17 (2014).

Levine S., Marriot J.R., Neale G., Epstein N. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta potentials, *J. Colloid Interface Sci.* 52 136 (1975).

Mala G.M., Li D, Dale J. D. Heat transfer and fluid flow in microchannels, *Int. J. Heat Mass Transfer* 40 3079-3088 (1997).

Moyers-Gonzalez M., Owens R.G., Fang J. A non-homogeneous constitutive model for human blood. Part I: Model derivation and steady flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 617 327-354 (2008).

Park H.M., Lee W.M. Helmholtz-Smoluchowsky velocity for viscoelastic electroosmotic flows. *J. Colloid Interface Sci.* 317 631-636 (2008).

Pinho F.T., Oliveira P.J. Axial annular flow of a nonlinear viscoelastic fluid-an analytical solution, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 93 325-337 (2000).

Phan-Thien N., Tanner R.I., New constitutive equation derived from network theory, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 2 353-365 (1977).

Phan-Thien N. A non-linear network viscoelastic model, *J. Rheol.* 22 259-283 (1978).

Oliveira P.J., Pinho F.T. Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien-Tanner fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 387 271-280 (1999).

Oliveira P.J. An exact solution for tube and slit flow of a FENE-P fluid, *Acta Mech*, 158 157-167 (2002).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Owens R.G. A new microstructure-based constitutive model for human blood. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 140 57-70 (2006).

Rice C.L., Whitehead, R. Electrokinetic flow in a narrow cylindrical capillary, *J. Phys. Chem.* 69 4017-4024 (1965).

Rodd L.E., Cooper-White J.J., Boger D.V., McKinley G.H. Role of the elasticity number in the entry flow of dilute polymer solution in microfabricated contraction geometries. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 143 170-191 (2007).

Schleiniger G., Weinacht R., J. Steady Poiseuille flows for a Giesekus fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 40 79-102 (1991).

Stone H.A., Stroock A.D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: microfluidics toward a Lab-on-a-Chip, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36 381-411 (2004).

Thurston G.B., Greiling H. Viscoelastic properties of pathological synovial fluids, for a wide range of oscillatory shear and frequencies, *Rheol. Acta* 17 433-445 (1978).

Van Schaftingen J.J., Crochet M.J. Analytical and numerical of the Poiseuille flow of a Johnson-Segalman fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 18 335-351 (1985).

Wang C., Wong T.N., Yang C., Ooi K.T. Characterization of electro-osmotic flow in rectangular microchannels, *Int. J. Heat Mass Transf.* 50 3115-3121 (2007).

Yang C., Li D. Electrokinetic effect on pressure-driven liquid flows in rectangular microchannels, *J. Colloid interface Sci.* 194 95-107 (1997).

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

APÉNDICE A

En este apéndice, se desarrolla paso a paso el perfil de velocidades y flujo volumétrico para los fluidos: (i) Newtoniano, (ii) Ley de potencia.

Modelo Newtoniano (Viscosidad constante)

En forma tensorial la ecuación constitutiva del modelo newtoniano toma la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\mathbf{D} \quad (\text{A.1})$$

En una geometría rectangular, y suponiendo flujo cortante, el modelo de Newton en forma matricial toma la siguiente forma analítica:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Igualando las entradas de las matrices definidas en la Ec. (4.3), se tiene lo siguiente:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Funciones materiales

(a) Función viscosidad

La función viscosidad es el cociente entre el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}_{xy}} = \mu \quad (\text{A.5})$$

La Ec. (A.5) implica que para un fluido newtoniano la función viscosidad es constante e independiente de la rapidez de deformación. El primer y segundo coeficiente de esfuerzos normales con calculados a través de la diferencia de esfuerzos normales y son definidos de la siguiente manera:

(b) Primer coeficiente de esfuerzos normales

$$\Psi_1 = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\dot{\gamma}_{xy}^2} = 0 \quad (\text{A.6})$$

(c) Segundo coeficiente de esfuerzos normales

$$\Psi_2 = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\dot{\gamma}_{xy}^2} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Para el modelo newtoniano, el primer y segunda coeficiente de esfuerzos normales es igual a cero debido a que el sistema no presenta componentes elásticas.

4.1.3 Perfil de velocidades

De la ecuación de movimiento, se tiene la siguiente ecuación diferencial, la cual es un balance entre la divergencia del tensor de esfuerzos, el gradiente de presión y las fuerzas gravitacionales

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{dP_m}{dx} \quad (\text{A.8})$$

Integrando la ecuación diferencial ordinaria (Ec.A.8) por el método de variables separables, se tiene lo siguiente

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\sigma_{xy} = \frac{dP_m}{dx} y + C_1 \quad (\text{A.9})$$

Para evaluar la constante C_1 de la Ec. (A.10), suponemos que en el centro de la rendija el perfil de velocidades es máximo, entonces el esfuerzo cortante es cero, i.e.

$$\sigma_{xy}(y=0) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Al sustituir esta condición de frontera en la Ec. (A.11) obtenemos:

$$\sigma_{xy} = \frac{dP_m}{dx} y \quad (\text{A.11})$$

Finalmente, combinado el modelo newtoniano y el esfuerzo en la pared, se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\mu \frac{dV_x}{dy} = \frac{dP_m}{dx} y \quad (\text{A.12})$$

Integrando la Ec. (A.12) obtenemos la siguiente expresión

$$V_x(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP_m}{dx} y^2 + C_2 \quad (\text{A.13})$$

La solución particular de la Ec. (A.13) se puede deducir suponiendo que no existe deslizamiento en la pared, por lo que se cumple con la siguiente condición normalizada.

$$V_x(y=B) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Aplicando la Ec. (A.14) en la Ec. (A.13) se obtiene la constante C_2 :

$$C_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dP_m}{dx} B^2 \quad (\text{A.15})$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Sustituyendo la Ec. (A.15) en la Ec. (A.13) llegamos la ecuación que describe el perfil de velocidad que es de la forma:

$$\boxed{V_x(y) = \frac{B^2}{2\mu} \left(-\frac{dP_m}{dx} \right) \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^2 \right)} \quad (A.16)$$

La Ec. (4.16) es el componente axial del perfil de velocidades el cual depende de la variable geométrica B, de la viscosidad newtoniana μ y de la fuerza motriz asociada a la combinación del gradiente de presión y el campo eléctrico aplicado. Nótese que la velocidad máxima en el sistema se obtiene en el centro del tubo, por lo que, su expresión analítica es:

$$V_{\max} = V_x(y=0) = \frac{B^2}{2\mu} \left(-\frac{dP_m}{dx} \right) > 0 \quad (A.17)$$

4.1.4 Flujo volumétrico

El flujo volumétrico se calcula integrando el perfil de velocidades sobre el área de sección transversal, i.e.

$$Q = \int_{-B}^B \int_{-B}^B V_x(y) dy dz = 2W \frac{B^2}{2\mu} \left(-\frac{dP_m}{dx} \right) \int_0^B \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^2 \right) dy \quad (A.18)$$

Al sustituir el perfil de velocidades Ec. (A.16) en el flujo volumétrico Ec. (A.18), se tiene lo siguiente:

$$\boxed{Q = \frac{2}{3} \frac{B^3 W}{\mu} \left(-\frac{dP_m}{dx} \right)} \quad (A.19)$$

La Ec. (A.19) se puede separar en dos contribuciones asociadas al gradiente de presión y al campo eléctrico respectivamente:

$$Q = \frac{2}{3} \frac{B^3 W}{\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) + \frac{2}{3} \frac{B^3 W}{\mu} \left(-\frac{d(\rho_e \Phi)}{dx} \right) = Q_p + Q_e \quad (A.20)$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

Claramente, la Ec. (A.21) se puede re-escribir como la suma de dos flujos asociados al gradiente de presión y al campo eléctrico:

$$Q = Q_p + Q_E \quad (\text{A.21})$$

APENDICE B

Finalmente, se tiene que el flujo total en el sistema, es la suma del flujo inducido por el campo eléctrico y la contribución asociada al gradiente de presión respectivamente.

Modelos no newtonianos inelásticos

Modelo de ley de potencia

En esta sección se modela el sistema coloidal sometido a un campo eléctrico en un fluido no-newtoniano, es decir un fluido cuya viscosidad no depende del tiempo, el modelo estudiado en esta sección es el de ley de potencia. Suponiendo que se cumplen las condiciones para el caso newtoniano, con excepción a la que hace referencia al líquido.

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1} \mathbf{D} \quad (\text{B.1})$$

Extendiendo a su forma matricial la ecuación constitutiva para el modelo de ley de potencia expuesto en el capítulo dos se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = 2m\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

El segundo invariante del tensor rapidez de deformación, puede ser expresado como la raíz cuadrada del doble producto punto del tensor rapidez de deformación consigo mismo:

$$\Pi_D = \sqrt{2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)^2} = \left|\frac{\partial V_x}{\partial y}\right| \quad (\text{B.3})$$

Sustituyendo en la ecuación constitutiva del modelo de ley de potencia, el segundo invariante, se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \left|\frac{\partial V_x}{\partial y}\right|^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Desacoplando (B.4) y considerando que la matriz es simétrica se tiene lo siguiente

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = m \left|\frac{dV_x}{dy}\right|^{n-1} \left(\frac{dV_x}{dy}\right) \quad (\text{B.5})$$

4.2.2 Funciones materiales para el modelo de ley de potencia

Función viscosidad

$$\eta = \frac{\sigma}{\dot{\gamma}} = m \left|\frac{dV_x}{dy}\right|^{n-1} \quad (\text{B.6})$$

(b) Primer coeficiente de esfuerzos normales

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$\Psi_1 = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\gamma_{xy}^2} = 0 \quad (\text{B.7})$$

(b) Segundo coeficiente de esfuerzos normales

$$\Psi_2 = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}}{\gamma_{xy}^2} = 0 \quad (\text{B.8})$$

Perfil de velocidades para el modelo de ley de potencia

Aplicando el mismo principio que en el modelo newtoniano, del balance de fuerzas y la ecuación constitutiva se tiene lo siguiente:

$$m \left| \frac{dV_x}{dy} \right|^n = \frac{dP_m}{dx} y \quad (\text{B.9})$$

Suponiendo que el escalar rapidez de deformación es positivo, se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$m \left(\frac{dV_x}{dy} \right)^n = \frac{dP_m}{dx} y \quad (\text{B.10})$$

Despejando y ordenando la Ec. (B.10) obtenemos

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{1}{m^{1/n}} \frac{dP_m^{1/n}}{dx} y^{1/n} = \varphi_1 \frac{dP_m^\alpha}{dx} y^\alpha \quad (\text{B.11})$$

En donde se han definido las siguientes variables:

$$\alpha = \frac{1}{n}; \varphi_1 = \frac{1}{m^{1/n}} = \frac{1}{m^\alpha} \quad (\text{B.12})$$

Resolviendo la ecuación diferencial Ec. (B.11), i.e, separando variables e integrando, se tiene lo siguiente:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS

$$V_x(y) = \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left(\frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha y^{\alpha+1} + K \quad (\text{B.13})$$

La condición de no deslizamiento en la pared, es la misma que en el caso newtoniano, i.e. $v_x(y = B) = 0$, por lo que la constante K toma la forma:

$$K = - \frac{\varphi_1}{\alpha+1} \left(\frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha B^{\alpha+1} \quad (\text{B.14})$$

Sustituyendo la condición de frontera en la Ec. diferencial general, se obtiene el perfil de velocidades del modelo de Ley de potencia:

$$\boxed{V_x(y) = \frac{\varphi_1 B^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(- \frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^{\alpha+1} \right)} \quad (\text{B.15})$$

4.2.5 Flujo volumétrico

De la misma manera que en el caso newtoniano, el flujo volumétrico se calcula de la misma manera:

$$Q = 2WB \int_0^B V_x(y) dy = 2W \frac{\varphi_1 B^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(- \frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha \int_0^B \left(1 - \left(\frac{y}{B} \right)^{\alpha+1} \right) dy \quad (\text{B.16})$$

Integrando la Ec. (B.16) se tiene el flujo volumétrico del modelo de ley de potencia en función de los parámetros materiales.

$$\boxed{Q = \frac{2}{\alpha+2} \varphi_1 W B^{\alpha+2} \left(- \frac{dP_m}{dx} \right)^\alpha} \quad (\text{B.17})$$

La Ec. (B.17) es el flujo volumétrico en la rendija, para un fluido no newtoniano caracterizado por el modelo de ley de potencia. En particular, cuando $\alpha = 1$; $\varphi_1 = \varphi_0$, se obtiene el modelo newtoniano discutido previamente:

ESTUDIO DE UN FLUIDO NO NEWTONIANO BAJO EL EFECTO DE UN CAMPO ELÉCTRICO. ECUACIÓN CONSTITUTIVA DE ELLIS