



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ÓRBITAS PERIÓDICAS EN MODELOS DE PREDADOR PRESA

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
CRISTÓBAL FALCONI HOYOS

DIRECTOR DE LA TESIS  
DR. MANUEL JESÚS FALCONI MAGAÑA  
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

Ciudad Universitaria, CD. MX. Agosto 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Orbitas periódicas en modelos depredador presa

Enero del 2016

# Índice general

Resumen	I
<b>0. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>8</b>
1.1. La función de retorno de Poincaré . . . . .	12
1.2. Cálculo de los valores focales . . . . .	15
<b>2. Bifurcación cero Hopf en un modelo depredador-presa</b>	<b>18</b>
2.1. Resultados principales . . . . .	23
<b>3. Bifurcación de Andronov-Hopf en un modelo depredador-presa</b>	<b>35</b>
3.1. Resultados principales . . . . .	39
<b>4. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>A. Expresiones auxiliares</b>	<b>51</b>
A.1. Expresiones del capítulo 2 . . . . .	51
A.2. Expresiones del capítulo 3 . . . . .	54
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>

# Resumen

En esta tesis se estudia la forma en que se generan órbitas periódicas en un par de modelos depredador-presa en el plano. El primero de éstos es una generalización de un modelo de Holling-Tanner con respuesta funcional de tipo IV presentado en [F/G/LI]. Ahí los autores toman en cuenta una fuente alternativa de alimento para el depredador. Mostramos que nuestro sistema puede tener desde 0 hasta 3 puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante. Además se demuestra la acotabilidad de las órbitas del modelo, así como la imposibilidad de que se presente una bifurcación de Andronov-Hopf. Finalmente, se dan parámetros para los cuales el sistema exhibe una bifurcación cero Hopf.

El segundo modelo que estudiamos es una generalización de un modelo de Gause con respuesta funcional no monótona analizado en [R/X]. Aquí hemos añadido un flujo positivo constante en la población del depredador, que puede representar fenómenos como el de la inmigración. Demostramos que nuestro modelo tiene a lo más 5 puntos de equilibrio en el interior del primer cuadrante y que las órbitas son acotadas. Por último, se dan parámetros para los cuales el sistema admite una bifurcación de Andronov-Hopf.

# Capítulo 0

## Introducción

El estudio de la existencia de ciclos límite en los sistemas dinámicos en el plano es por lo general un problema difícil, aún en el caso de los sistemas polinomiales. Baste recordar el famoso problema 16 de Hilbert, que consiste en determinar  $H_n$ , el máximo número de ciclos límite de un sistema polinomial de grado  $n$ , que permanece abierto para  $n \geq 2$ . Por supuesto  $H_1 = 0$ , pues los sistemas lineales no tienen ciclos límite y, de hecho, es relativamente sencillo describir teóricamente toda su dinámica (véase por ejemplo el capítulo 1 de [P], o [H/S] para una exposición detallada). En el caso  $n = 2$ , se sabe que un sistema cuadrático tiene a lo más tres ciclos límite locales [B] (estos son ciclos alrededor del mismo punto de equilibrio) y se han exhibido sistemas con cuatro ciclos límite [S][Ch/Wa], de manera que  $H_2 \geq 4$ . También vale la pena mencionar que todo sistema polinomial tiene a lo más un número finito de ciclos límite, resultado demostrado entre otros por Y. Ilyashenko [I], y que siempre es posible construir un sistema polinomial cuyos ciclos límite tengan la configuración deseada (en cuanto a cantidad y posición relativa)[Ll/R][D/Ll/A].

En este trabajo se estudia la existencia de órbitas periódicas en dos modelos depredador-presa. Específicamente, analizamos la existencia de bifurcaciones de Andronov-Hopf y cero Hopf en el primer cuadrante.

La bifurcación de Andronov-Hopf fue analizada en 1930 por A. Andronov y A. Witt [A/W], quienes se basaron en trabajos previos de Poincaré [Po]. Posteriormente en 1942, E. Hopf publicó un artículo en donde enunció condiciones para que se dé esta bifurcación en la variedad central de un sistema de dimensión  $n$  [H]. En el plano, la bifurcación de Andronov-Hopf ocurre cuando al variar un parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , los valores propios de un foco cruzan transversalmente al eje imaginario y surge un ciclo límite alrededor del foco. El hecho de que los valores propios crucen al eje imaginario (en algún  $\lambda = \lambda_0$ ) conlleva un cambio de estabilidad en el foco. Bajo ciertas condiciones, esto da lugar a que se genere el ciclo límite, en cuyo caso se tiene una bifurcación de Andronov-Hopf en el valor de bifurcación  $\lambda = \lambda_0$  (Fig. 1). La bifurcación cero Hopf en el plano fue descrita en 2012 por M. Falconi, E. González-Olivares y Jaume Llibre [F/G/Ll]. Consiste en el surgimiento de un ciclo límite alrededor de un foco cuando este último cambia de estabilidad al variar un parámetro. La diferen-

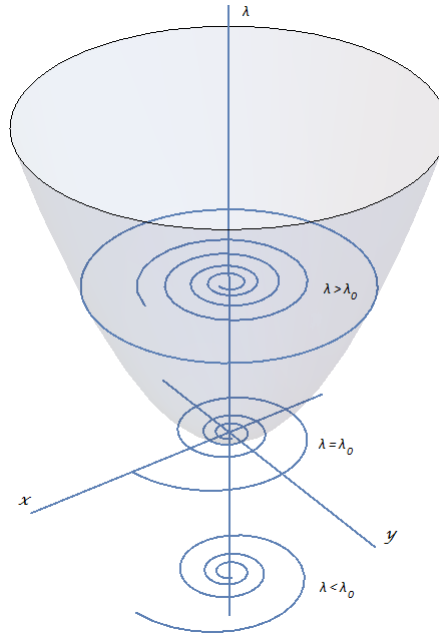


Figura 1: Bifurcación de Andronov-Hopf en el origen con valor de bifurcación  $\lambda = \lambda_0$ .

cia con la bifurcación de Andronov-Hopf es que durante la variación del parámetro, los valores propios del foco permanecen sobre el eje imaginario.

En el capítulo 1 daremos definiciones precisas de ambas bifurcaciones y expon-dremos resultados relacionados que usaremos en el estudio de nuestros modelos.

Una característica interesante de los modelos depredador-presa es que suelen presentar órbitas periódicas, al menos para algunos parámetros. Estas órbitas contribuyen a explicar las oscilaciones en el tamaño de las poblaciones que se han observado en la interacción entre ciertas especies en la naturaleza (véase [T] para ejemplos de dichas interacciones).

Entre los primeros y más simples modelos depredador-presa se encuentra el modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x - \beta xy \\y' &= \gamma xy - \delta y\end{aligned}\tag{1}$$

En 1926, V. Volterra [V] usó este modelo para explicar registros estadísticos que mostraban un aumento en la proporción de peces depredadores capturados durante la primera guerra mundial. De manera independiente, A. Lotka [L] desarrolló estas ecuaciones al estudiar comportamientos periódicos en reacciones químicas. Las constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , son positivas,  $x(t)$  es la población de la presa y  $y(t)$  es la población del depredador al tiempo  $t$ . En ausencia del depredador ( $y = 0$ )  $x$  crece exponencialmente,  $x' = \alpha x$ . Por efecto de la depredación, la tasa de crecimiento neta de la presa disminuye de manera proporcional a ambas poblaciones. Por otra

parte, el depredador se extingue rápidamente en ausencia de la presa, pero su tasa de crecimiento aumenta al beneficiarse de la depredación.

El sistema (1) tiene puntos de equilibrio en  $(0,0)$ ,  $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$ . Se demuestra fácilmente (véase [A/P][F]) que las soluciones de (3) están dadas por la familia de curvas

$$x^\delta e^{-\gamma x} y^\alpha e^{-\beta y} = k$$

y que el punto de equilibrio  $(\delta/\gamma, \alpha/\beta)$  es un centro (Fig. 2).

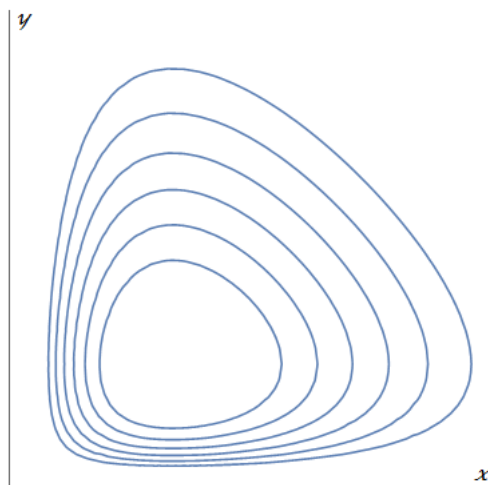


Figura 2: Trayectorias del sistema (1) con  $\alpha = 2/3$ ,  $\beta = 4/3$ ,  $\gamma = \delta = 1$ .

El factor  $\beta x$  en (1) se puede interpretar como la tasa de depredación por depredador. En el modelo de Lotka-Volterra, a un incremento en  $x$ , el depredador responde consumiendo más presas y este consumo es no acotado. En 1949, Solomon [So] introdujo el concepto de respuesta funcional para referirse a la relación que hay entre el número de presas consumidas por depredador y la cantidad de presas disponibles. Una hipótesis más realista que la del modelo de Lotka-Volterra es que la respuesta funcional es una función acotada,  $p(x)$ . Este es el caso si, por ejemplo, el depredador experimenta algún tipo de saciedad. En 1959, Holling [Hol] consideró funciones monótonas crecientes y acotadas y distinguió tres tipos de respuesta funcional (Fig. 3), dependiendo de la forma en que crece  $p(x)$  [K][T].

Como es de esperarse, la dinámica depredador-presa varía de acuerdo con el tipo de respuesta funcional de que se trate. Una variación simple de (1) es el modelo de Gause:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - p(x)y \\ y' &= \gamma p(x)y - \delta y \end{aligned} \tag{2}$$

Este modelo fué propuesto por Gause [G] en 1936, para explicar los resultados obtenidos en una serie de experimentos que involucraban a un par de especies de protozoarios. Como ejemplo de como cambia la dinámica del sistema dependiendo



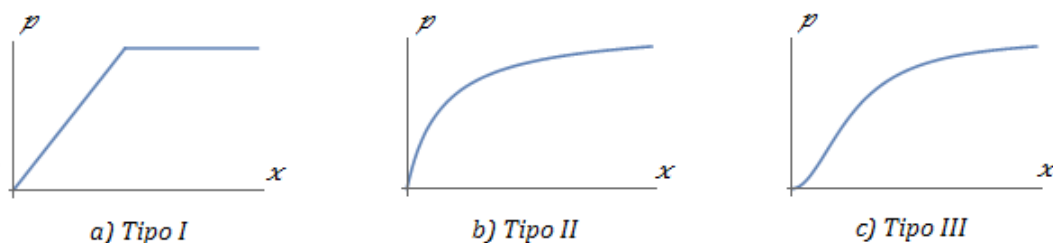


Figura 3: Respuestas funcionales de Holling.

del tipo de respuesta funcional, consideremos  $\gamma = 1$  en (2). En este caso, el sistema tiene un punto de equilibrio que es un repulsor global si la respuesta funcional  $p$  es del tipo II. Si en cambio la respuesta funcional es del tipo III, el sistema puede tener o un punto de equilibrio atractor global, o un ciclo límite estable (véase [C]).

El siguiente modelo depredador-presa es conocido como el modelo de Holling-Tanner (véase [A/P])

$$\begin{aligned} x' &= x \left( r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x+a} \right), \\ y' &= sy \left( 1 - \frac{y}{nx} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Todos los parámetros son positivos,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  representan como función del tiempo a las poblaciones de presa y depredador, respectivamente. En ausencia del depredador ( $y = 0$ )  $x$  crece logísticamente. La tasa de crecimiento *per capita* está dada por

$$\frac{x'}{x} = r \left( 1 - \frac{x}{K} \right),$$

donde  $r$  es la tasa intrínseca o promedio por individuo de crecimiento de la presa y  $K$  es la capacidad de carga del medio, i.e. la población máxima de  $x$  que el entorno puede sustentar. Es fácil convencerse de que  $x = K$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable de esta ecuación logística para  $x$  vista como una ecuación diferencial en  $\mathbb{R}$ .

La respuesta funcional (de Holling tipo II en este caso) es descrita por la función

$$f(x) = \frac{qx}{x+a},$$

que como función de  $x$  es monótona creciente y acotada superiormente por  $q$ . Aquí  $q$  es la tasa máxima de consumo de presa por depredador y  $a$  es una constante de saturación, se introduce para que la respuesta funcional modele la saciedad del depredador cuando la presa es abundante (haciendo  $x = a$  se observa que  $a$  es igual al tamaño de la población necesario para alcanzar la mitad de la tasa máxima de consumo  $q$ ). En efecto, puesto que  $x/(x+a)$  tiende asintóticamente a 1 cuando  $x \rightarrow \infty$ , la tasa de depredación  $f(x)y$  se aproxima a  $qy$  al incrementarse la población de la presa y es cada vez menos sensible a dichos incrementos. Si  $x$  es pequeña,

entonces la tasa de depredación es más o menos proporcional a  $xy$ , que es el número de posibles encuentros entre miembros de las dos especies. En este caso, depende en buena medida de la cantidad de interacciones depredador-presa que se presenten, en donde el valor de  $x$  es más relevante.

El depredador crece logísticamente,  $s$  es su tasa de crecimiento intrínseca y la capacidad de carga del medio  $nx$  depende exclusivamente de la presa, con  $n$  una medida del valor alimenticio de la presa.

Se sabe que (3) admite una bifurcación de Andronov-Hopf para ciertos parámetros [G-O/S].

Otro tipo de respuesta funcional, no monótona, es la de Holling tipo IV (Fig. 4). Su uso es motivado por diversas observaciones de un fenómeno conocido como defensa grupal. Cuando la población de la presa es suficientemente grande, ésta forma grupos que disminuyen la eficacia del depredador. Un ejemplo de este fenómeno fué descrito por Tener [Te] en sus estudios sobre el toro almizclero en Canadá. Tener observó que el éxito de los lobos al atacar grupos de toros almizcleros disminuía al aumentar el número de toros en el grupo y, de hecho, no registró ningún ataque exitoso a un grupo de más de 6 toros. En el capítulo 9 de [T] se discute el tema de la defensa grupal y se dan referencias de ejemplos muy interesantes.

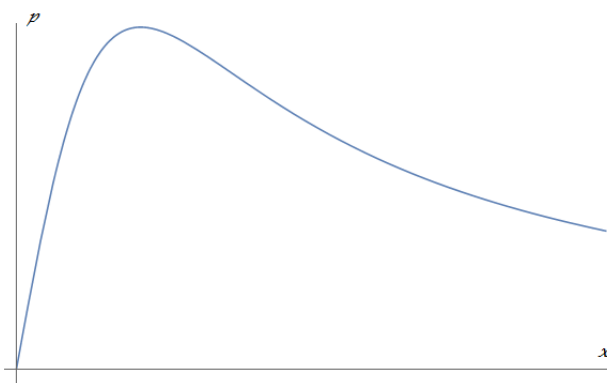


Figura 4: Respuesta funcional de Holling tipo IV.

En [G/G/M] se analiza un modelo similar a (3), pero con una respuesta funcional de la forma

$$\frac{qx}{x^2 + a}.$$

Esta es una respuesta funcional de Holling tipo IV, que como hemos mencionado, simula un mecanismo de defensa si la población de la presa es suficientemente grande. En este caso, la tasa de depredación tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . Los autores demuestran la existencia de ciclos límite usando el teorema de Poincaré-Bendixon.

En [F/G/L] se demuestra que con  $m = 1$  el siguiente sistema no tiene bifurcaciones de Andronov-Hopf pero si tiene una bifurcación cero Hopf para una elección

adecuada de los parámetros.

$$\begin{aligned} x' &= x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{K} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\ y' &= sy \left( 1 - \frac{y}{nx + c} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

El depredador es generalista, la constante  $c$  representa una fuente alternativa de alimento. Nótese que una población suficientemente pequeña del depredador ( $y \leq c$ ) no decae aún en ausencia de la presa.

Mostraremos que (4) no tiene bifurcaciones de Andronov-Hopf para ninguna  $m > 0$  y en el caso  $m = 2$  exhibiremos un conjunto de parámetros donde se presenta una bifurcación cero Hopf. Cabe mencionar que con estos mismos parámetros, resultados preliminares que obtuvimos sugieren la existencia de una bifurcación cero Hopf para toda  $m$  en un intervalo  $(0, \bar{m})$  con  $\bar{m} \approx 6,5$ . Creemos pues, que el sistema (4) admite bifurcaciones cero Hopf para toda  $m > 0$ .

Una variación del modelo (4) se estudia en [B/F/V], donde se considera una respuesta funcional

$$\frac{qx}{x^M + a}.$$

Ahí se demuestra que en el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x \left( r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x^M + a} \right) \\ y' &= sy \left( 1 - \frac{y}{nx + c} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

no hay bifurcaciones de Andronov-Hopf si  $M > 0$ , pero que al menos para  $M$  en un cierto intervalo existen parámetros donde se da una bifurcación cero Hopf.

Los resultados anteriores sugieren una relación entre el hecho de que el depredador sea generalista y la forma en que se generan las órbitas periódicas del modelo. En presencia del depredador generalista sigue habiendo ciclos límite, pero éstos no se dan como resultado de una bifurcación de Andronov-Hopf.

El segundo modelo que estudiaremos es el siguiente:

$$\begin{aligned} x' &= x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{K} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\ y' &= s \left( \frac{qyx}{x^2 + a} \right) + c - \mu y, \end{aligned} \quad (6)$$

en donde tratamos de explorar un poco la relación que acabamos de mencionar, sustituyendo en (4) la ecuación logística del depredador por la ecuación

$$y' = s \left( \frac{qyx}{x^2 + a} \right) + c - \mu y.$$

Las constantes  $c$ ,  $\mu$  son ambas positivas,  $\mu$  es la tasa intrínseca de mortalidad del depredador y  $c$  representa una inmigración constante. La tasa de crecimiento de  $y$ , sin tomar en cuenta la mortalidad y la inmigración, es proporcional a la depredación. En  $[R/X]$  se hace un análisis de la dinámica global de este sistema en el caso particular  $m = 1$ ,  $c = 0$ .

Aunque el depredador en (6) no es un generalista, nótese que en ausencia de la presa, las ecuaciones para el depredador en (4) y (6) tienen un único punto de equilibrio positivo, que es un atractor en ambos casos.

Se demostrará que si  $m > 0$  entonces existen parámetros para los cuales el sistema (6) presenta una bifurcación de Andronov-Hopf.

Con lo anterior, esperamos haber dado una idea del tipo de cuestiones que han dado lugar a los modelos que estudiamos en esta tesis. A continuación, haremos una descripción de la estructura de la misma.

La tesis consta de cuatro capítulos. En el primero se hace un breve repaso de los conceptos y resultados de la teoría de bifurcaciones que usaremos en este trabajo. En el segundo capítulo se describe el modelo (4) y se demuestran los resultados correspondientes a éste. En el tercer capítulo se hace lo propio con el modelo (6) y en el último capítulo se exponen las conclusiones a las que hemos llegado.

Cabe señalar que los resultados presentados en los capítulos 2 y 3 de este trabajo son originales.

Por último, agradezco al proyecto PAPIIT IN112715 por el apoyo para la realización de esta tesis.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo se exponen los principales resultados que usaremos en nuestro trabajo. Damos por conocidos algunos teoremas fundamentales de la teoría de las ecuaciones diferenciales, entre los que destacan los de existencia y unicidad de las soluciones, dependencia continua respecto de condiciones iniciales y parámetros, así como los de Hartman-Grobman y Poincaré-Bendixson [Ch][P].

Los modelos que estudiaremos se reducirán a sistemas polinomiales via una reparametrización del tiempo, los retratos fase de éstos últimos coincidirán con los de los sistemas originales, lo que se justifica de la siguiente manera:

Considérese la ecuación

$$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}),$$

con  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(U)$ .

Sean  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave positiva y  $\gamma : I \rightarrow U$  una solución de la ecuación, definida en algún intervalo abierto  $I$ .

Como la función

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{1}{g(\gamma(s))} ds$$

es derivable en  $I$  con derivada

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{g(\gamma(t))}$$

continua y positiva, por el teorema de la función inversa  $\tau$  es invertible en  $\tau(I)$ . Más aún, al considerar a  $\tau$  como una nueva variable y expresar a  $t = t(\tau)$  como función de  $\tau$ , se debe satisfacer

$$\frac{dt}{d\tau}(\tau) = g(\gamma(t(\tau))).$$

Por lo anterior, si definimos  $\sigma : \tau(I) \rightarrow U$  dada por  $\sigma(\tau) = \gamma(t(\tau))$ , entonces por la regla de la cadena se tiene que

$$\sigma'(\tau) = \gamma'(t) \frac{dt}{d\tau} = f(\gamma(t))g(\gamma(t)) = f(\sigma(\tau))g(\sigma(\tau)),$$

de donde  $\sigma(\tau)$  es una solución de la ecuación

$$\mathbf{x}' = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}).$$

Nótese además que como curvas parametrizadas,  $\sigma$  es una reparametrización de  $\gamma$  que preserva la orientación. Como conclusión de este argumento, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.** *Sean  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(U)$ , y  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave positiva. Si  $\tau$  es un nuevo tiempo dado por*

$$g(\mathbf{x})d\tau = dt,$$

entonces los sistemas

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= f(\mathbf{x}), \\ \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} &= g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

tienen los mismos retratos fase en  $U$ , y las soluciones son recorridas en el mismo sentido al incrementar  $t$ ,  $\tau$ .

Las reparametrizaciones que haremos en los capítulos 2 y 3 serán todas de este tipo. También en dichos capítulos, daremos una cota superior para el número de puntos de equilibrio que puede tener cada uno de los modelos que analizamos. Para esto usaremos la siguiente versión de la conocida regla de los signos de Descartes.

**Teorema 1.1.** *Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de la forma*

$$p(x) = a_n x^{\xi_n} + a_{n-1} x^{\xi_{n-1}} + \dots + a_1 x^{\xi_1} + a_0,$$

donde los  $\xi_i$ ,  $a_j$ , son números reales tales que  $\xi_n > \xi_{n-1} > \dots > \xi_1 > 0$ , y  $a_j \neq 0$  si  $j \neq 0$ . Entonces el número de raíces positivas de  $p$  distintas entre sí, no excede al número de cambios de signo en la sucesión  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ .

### **Demostración.**

Procederemos por inducción sobre  $m$ , el número de cambios de signo en los coeficientes de la función.

Claramente el resultado se cumple cuando  $m = 0$ . Supongamos ahora que el resultado es válido para las funciones cuya sucesión de coeficientes presenta  $m - 1$  cambios de signo.

Sea

$$p(x) = a_n x^{\xi_n} + a_{n-1} x^{\xi_{n-1}} + \dots + a_1 x^{\xi_1} + a_0$$

una función con  $r$  raíces positivas diferentes, tal que la sucesión  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  tiene  $m$  cambios de signo con  $m \geq 1$ . Si  $\beta \in \mathbb{R}^+$  y definimos  $q(x) = x^{-\beta} p(x)$ , entonces es evidente que  $q$ ,  $p$ , tienen las mismas  $r$  raíces positivas. Por el teorema

de Rolle, entre cualesquiera dos raíces consecutivas de  $q$  debe haber una raíz de  $q'$ , de manera que  $q'$  tiene al menos  $r - 1$  raíces positivas diferentes.

Derivando  $q$  obtenemos

$$\begin{aligned} q'(x) &= x^{-\beta}(a_n \xi_n x^{\xi_n - 1} + a_{n-1} \xi_{n-1} x^{\xi_{n-1} - 1} + \dots + a_1 \xi_1 x^{\xi_1 - 1}) \\ &\quad - \beta x^{-\beta-1}(a_n x^{\xi_n} + a_{n-1} x^{\xi_{n-1}} + \dots + a_1 x^{\xi_1} + a_0) \\ &= x^{-\beta-1} \left( a_n (\xi_n - \beta) x^{\xi_n} + a_{n-1} (\xi_{n-1} - \beta) x^{\xi_{n-1}} + \dots + a_1 (\xi_1 - \beta) x^{\xi_1} - \beta a_0 \right). \end{aligned}$$

Se sigue que la función

$$\tilde{q}(x) = a_n (\xi_n - \beta) x^{\xi_n} + a_{n-1} (\xi_{n-1} - \beta) x^{\xi_{n-1}} + \dots + a_1 (\xi_1 - \beta) x^{\xi_1} - \beta a_0$$

tiene al menos  $r - 1$  raíces positivas diferentes.

Por hipótesis, al menos un par de coeficientes consecutivos en  $p(x)$  tienen signos diferentes, digamos  $a_i, a_{i+1}$ . Consideremos la sucesión de coeficientes de  $\tilde{q}$ ,

$$a_n (\xi_n - \beta), a_{n-1} (\xi_{n-1} - \beta), \dots, a_1 (\xi_1 - \beta), -\beta a_0.$$

Haciendo  $\xi_{i+1} > \beta > \xi_i$ , los factores  $(\xi_n - \beta), \dots, (\xi_{i+1} - \beta)$ , serán todos positivos, mientras que los factores  $(\xi_i - \beta), \dots, (\xi_1 - \beta)$  serán negativos, por lo que en esta sucesión se mantienen todos los cambios de signo que hay en  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ , con excepción del cambio de signo entre  $a_i, a_{i+1}$ . Luego, la sucesión de coeficientes de  $\tilde{q}$  tiene exactamente  $m - 1$  cambios de signo. Por hipótesis de inducción, se debe cumplir que  $r - 1 \leq m - 1$ , o equivalentemente  $r \leq m$ , que es lo que se quería demostrar. ■

Ahora daremos definiciones de las bifurcaciones de Andronov-Hopf y cero Hopf en el plano.

**Definición 1.1.** *Supongamos que tenemos una ecuación diferencial en el plano dependiente de un parámetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y para  $\lambda$  en un intervalo alrededor de  $\lambda_0$  hay una curva suave de puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_\lambda$ , hiperbólicos excepto por  $\mathbf{x}_{\lambda_0}$ , tales que sus valores propios tienen parte imaginaria distinta de cero, varían suavemente respecto de  $\lambda$  y cruzan el eje imaginario cuando  $\lambda = \lambda_0$ ; diremos que la ecuación tiene una bifurcación de Andronov-Hopf en  $\lambda_0$  si al aumentar o decrecer  $\lambda_0$  surge un ciclo límite alrededor del punto de equilibrio.*

Como se mencionó en la página 1 de la introducción, la diferencia entre las bifurcaciones de Andronov-Hopf y cero Hopf es que en la segunda los puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_\lambda$  tienen siempre valores propios imaginarios puros.

**Definición 1.2.** *Si en la definición 1.1 los puntos de equilibrio  $\mathbf{x}_\lambda$  tienen todos valores propios imaginarios puros, y para  $\mathbf{x}_{\lambda_0}$  se cumple que al aumentar o decrecer  $\lambda_0$  se genera un ciclo límite alrededor del punto de equilibrio, entonces diremos que la ecuación tiene una bifurcación cero Hopf en  $\lambda_0$ .*

Intuitivamente, ocurre una bifurcación de Andronov-Hopf (o cero Hopf) cuando al variar un parámetro un foco cambia de estabilidad y se genera una órbita periódica.

Dependiendo de la estabilidad de dicha órbita, se distinguen dos casos para cada una de estas bifurcaciones.

**Definición 1.3.** *En la definición 1.1 o 1.2, si el ciclo límite es estable, entonces la bifurcación se llama supercrítica, cuando el ciclo límite es inestable se dice que la bifurcación es subcrítica.*

Como ejemplo de una bifurcación de Andronov-Hopf supercrítica, consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= -10y + x(\lambda - x^2 - y^2), \\y' &= 10x + y(\lambda - x^2 - y^2),\end{aligned}$$

que tiene un único punto de equilibrio en el origen. El comportamiento de las soluciones es fácil de observar si escribimos el sistema en coordenadas polares

$$\begin{aligned}r' &= r(\lambda - r^2), \\ \theta' &= 10.\end{aligned}$$

Si  $\lambda \leq 0$  entonces  $r$  es siempre decreciente y el punto de equilibrio es un foco estable. Cuando  $\lambda > 0$  el foco es inestable y se tiene un ciclo límite estable, descrito por la ecuación  $r = \sqrt{\lambda}$ . Los retratos fase de este sistema se muestran en la Fig. 1.1.

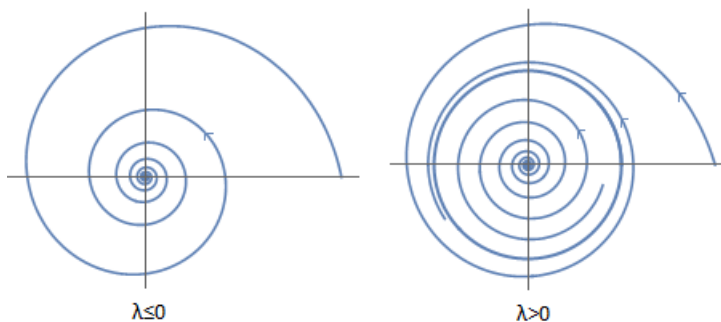


Figura 1.1: Bifurcación de Andronov-Hopf supercrítica

El hecho de que los valores propios crucen el eje imaginario no garantiza la existencia de ciclos límite, esto se puede observar fácilmente en el sistema

$$\begin{aligned}x' &= \lambda x - y, \\ y' &= x + \lambda y,\end{aligned}\tag{1.1}$$



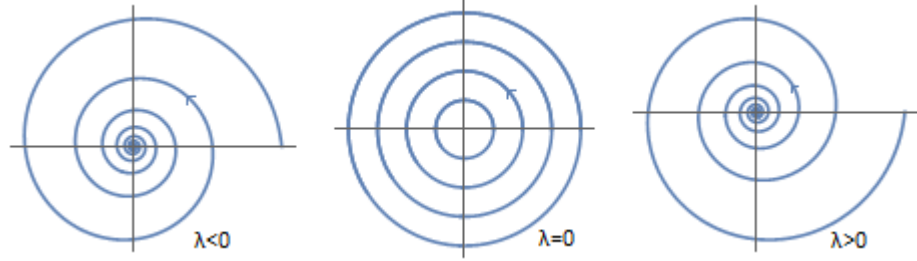


Figura 1.2: Retratos fase del sistema (1.1). Los valores propios cruzan el eje imaginario al variar  $\lambda$ , pero el sistema no tiene ciclos límite

que tiene un único punto de equilibrio en el origen con valores propios  $\lambda \pm i$  (Fig. 1.2). En el valor de bifurcación  $\lambda = 0$  este equilibrio es un centro del sistema, a diferencia del caso en el que hay bifurcación de Andronov-Hopf, donde el equilibrio  $\mathbf{x}_{\lambda_0}$  sigue siendo un foco, que recibe el nombre de foco débil o múltiple. Para precisar este concepto y enunciar condiciones necesarias para la existencia de una bifurcación de Hopf usaremos la noción de coeficiente de Lyapunov, que definiremos más adelante.

### 1.1. La función de retorno de Poincaré

En lo que sigue, supondremos que el punto singular en cuestión ha sido trasladado al origen. Consideremos la forma normal de un sistema analítico plano con el origen un centro o un foco de la parte lineal

$$\begin{aligned} x' &= ax - by + p(x, y), \\ y' &= bx + ay + q(x, y), \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $b \neq 0$  (asumiremos  $b > 0$ ) y las expansiones en serie de potencias de  $p$  y  $q$  empiezan con términos de grado  $\geq 2$ . En coordenadas polares tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} r' &= ar + \cos \theta p(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta q(r \cos \theta, r \sin \theta) = ar + O(r^2), \\ \theta' &= b + \cos \theta \frac{q(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} - \sin \theta \frac{p(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r} = b + O(r). \end{aligned}$$

Nótese que para  $r$  suficientemente pequeña,  $|r| < \epsilon$ , se cumple que  $\theta' > 0$ . Luego, si  $|r_0| < \epsilon$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , entonces  $\theta(t, r_0, \theta_0)$  es invertible en un intervalo alrededor de  $\theta_0$  y  $r(\theta) = r(t(\theta), r_0, \theta_0)$  debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'}{\theta'} \equiv F(r, \theta). \quad (1.3)$$

Más aún,  $F$  es un cociente de funciones analíticas donde el denominador no se anula si  $|r|$  es suficientemente pequeño, de manera que  $F$  es analítica en  $|r| < \epsilon$ . Se sigue por el teorema de existencia y unicidad y el teorema de dependencia continua de las soluciones respecto de condiciones iniciales y parámetros [Ch][P], que dados  $|r_0| < \epsilon$ ,  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ , existe una única solución  $r(\theta, r_0, \theta_0)$  de la ecuación (1.3), definida en un intervalo alrededor de  $\theta_0$ , analítica respecto de sus argumentos y que satisface  $r(\theta_0, r_0, \theta_0) = r_0$ . Nótese además que cuando  $r_0 = 0$ , la solución de la ecuación es  $r(\theta, 0, \theta_0) = 0$ , definida para toda  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Eligiendo  $\delta > 0$  tal que al incrementar  $t$  las soluciones con condición inicial  $|r_0| < \delta$  crucen todos los rayos  $\theta = cte$  sin abandonar el disco  $|r| < \epsilon$ , se tendrá que  $r(\theta, r_0, \theta_0)$  estará definida para toda  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 2\pi$ . De lo anterior, la función  $P_{\theta_0}(r_0)$  dada por

$$P_{\theta_0}(r_0) = r(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0),$$

que es conocida como función de retorno de Poincaré en el rayo  $\theta = \theta_0$ , está bien definida y es analítica para  $|r_0| < \delta$  (si  $b < 0$  en (1.2) entonces se define  $P_{\theta_0}(r_0) = r(\theta_0 - 2\pi, r_0, \theta_0)$ ). Geométricamente, después de dar una vuelta al origen, la solución de la ecuación (1.2) por el punto  $(r_0, \theta_0)$  vuelve a intersectar a la recta  $\theta = \theta_0$  en el punto  $(P_{\theta_0}(r_0), \theta_0)$  (Fig. 1.3).

Ahora podemos definir la función desplazamiento  $d_{\theta_0}(r_0) = P_{\theta_0}(r_0) - r_0$  con  $\theta_0 \in \mathbb{R}$ . A partir de la interpretación geométrica de  $P_{\theta_0}$  se deduce la proposición enunciada a continuación.

**Proposición 1.2.** *En el sistema (1.2), el origen es un punto de equilibrio de la siguiente naturaleza:*

- i) un centro si y sólo si  $d_{\theta_0} = 0$  en una vecindad de este,*
- ii) un foco atractor si y sólo si  $d_{\theta_0}(r_0) < 0$  para toda  $r_0 > 0$  suficientemente pequeña,*
- iii) un foco repulsor si y sólo si  $d_{\theta_0}(r_0) > 0$  para toda  $r_0 > 0$  suficientemente pequeña.*

Para  $r_0 < 0$  se obtienen resultados análogos a *ii)*, y *iii)* invirtiendo el signo de  $d_{\theta_0}$ , pues en una vecindad del origen se debe satisfacer la desigualdad

$$d_{\theta_0}(r_0) \cdot d_{\theta_0}(-r_0) < 0. \quad (1.4)$$

En efecto, si después de dar una vuelta al origen la solución por el punto  $M_0 = (-r_0, \theta_0)$  vuelve a intersectar a la recta  $\theta = \theta_0$  en el punto  $M_1 = (-r_1, \theta_0)$ , con  $r_0, r_1 > 0$ , entonces por definición se tendrá que  $d_{\theta_0}(-r_0) = -r_0 - (-r_1) = r_1 - r_0$ . Por otro lado, al expresar  $M_0, M_1$  en las coordenadas polares  $M_0 = (r_0, \theta_0 + \pi)$ ,  $M_1 = (r_1, \theta_0 + \pi)$ , tenemos que  $d_{\theta_0 + \pi}(r_0) = r_0 - r_1 = -d_{\theta_0}(-r_0)$  (Fig. 1.3). Como los criterios *ii)*, *iii)*, se satisfacen para  $\theta_0$  arbitraria, los signos de  $d_{\theta_0 + \pi}(r_0)$  y  $d_{\theta_0}(r_0)$  deben coincidir, por lo que se cumple la desigualdad (1.4)

Por comodidad, en adelante tomaremos  $\theta_0 = 0$ , escribiremos  $d(r_0)$  en vez de  $d_{\theta_0}(r_0)$  y asumiremos siempre que  $r_0$  es suficientemente pequeña. Como veremos a continuación, las derivadas de  $d$  en cero nos dan información acerca del tipo de punto de equilibrio del que se trata y de las bifurcaciones que pueden ocurrir en éste; al

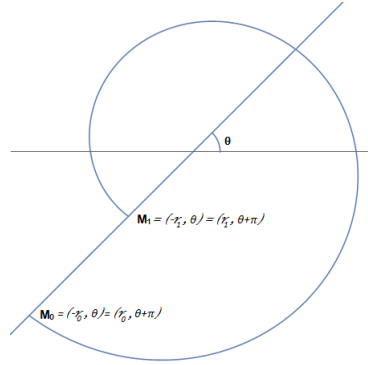


Figura 1.3: La función de retorno de Poincaré.  $P_\theta(-r_0) = -r_1$ .

número  $d^{(i)}(0)$  se le llama el  $i$ -ésimo valor o número focal de dicho punto. De la serie de Taylor para  $d$  alrededor del cero y tomando en cuenta que  $d(0) = 0$  tenemos que

$$d(r_0) = d'(0)r_0 + \frac{d''(0)}{2!}r_0^2 + \dots + \frac{d^{(k)}(0)}{k!}r_0^k + O(r_0^{k+1}).$$

Si  $d^{(k)}(0) = 0$  para toda  $k \in \mathbb{Z}^+$ , entonces por el criterio  $i$ ) el origen es un centro del sistema. Supongamos que existe  $k \geq 1$  tal que

$$d'(0) = d''(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0, \quad d^{(k)}(0) \neq 0. \quad (1.5)$$

En este caso se tiene que

$$d(r_0) = \frac{d^{(k)}(0)}{k!}r_0^k + O(r_0^{k+1}).$$

De esta igualdad y los criterios  $ii$ ) y  $iii$ ) en la proposición 1.2, se concluye que cuando se tienen las condiciones dadas en (1.5), el origen es un foco estable si y sólo si  $d^{(k)}(0) < 0$ , o un foco inestable si  $d^{(k)}(0) > 0$ .

Mas aún,  $k$  debe ser impar, pues de lo contrario se tendría que  $d(r_0) \cdot d(-r_0) > 0$ , en contradicción con la desigualdad (1.4).

Al primer valor focal que no se anula,  $d^{(k)}(0)$  en (1.5), se le llama el valor o constante de Lyapunov del foco. A los valores focales impares se les llama coeficientes (cantidades, valores) de Lyapunov del foco. Más precisamente, si  $k = 2m + 1$  con  $m > 0$ , entonces  $d^{(k)}(0)$  es el  $m$ -ésimo coeficiente de Lyapunov del foco. Cuando el primer valor focal que no se anula es el  $m$ -ésimo coeficiente de Lyapunov, se dice que el punto de equilibrio es un foco débil o múltiple (de multiplicidad  $m$ ).

Si  $m = 0$  ( $k = 1$ ), el foco recibe el nombre de foco simple. Se trata de hecho de un punto de equilibrio hiperbólico, pues el primer valor focal del sistema (1.2) está dado por

$$d'(0) = e^{\frac{2\pi a}{b}} - 1,$$

de donde es claro que  $d'(0) \neq 0$  implica  $a \neq 0$ . Más adelante se expone un método para calcular los valores focales.

Usaremos la siguiente definición para enunciar un resultado que muestra la relevancia de los valores focales en el estudio de las bifurcaciones de un foco múltiple.

**Definición 1.4.** *Dos sistemas  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}' = g(\mathbf{x})$ , con  $f, g \in C^k(E)$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ , son  $\delta$ -ceranos hasta el orden  $k$  en  $E$  si en cada punto  $\mathbf{x} \in E$  se satisface  $|f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| < \delta$ , y las parciales correspondientes hasta el orden  $k$  valuadas en  $\mathbf{x}$  también distan en menos que  $\delta$ .*

En el caso de un foco múltiple, en [A/L] se demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 1.2.** *Si  $(0,0)$  es un foco de multiplicidad  $m \geq 1$  del sistema  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ , con  $f \in C^k(E)$ ,  $k > m$ , entonces:*

a) *Existe una vecindad del origen tal que todo sistema  $\mathbf{x}' = g(\mathbf{x})$ ,  $g \in C^k(E)$  suficientemente cercano a  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$  hasta el orden  $k = 2m + 1$  tiene a lo más  $m$  órbitas periódicas en dicha vecindad.*

b) *Para toda  $r$  con  $1 \leq r \leq m$  y toda vecindad de  $(0,0)$ , existe un sistema  $\mathbf{x}' = g(\mathbf{x})$ ,  $g \in C^k(E)$  arbitrariamente cercano a  $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$  hasta el orden  $k = 2m + 1$  que tiene exactamente  $r$  órbitas periódicas en esa vecindad.*

En el siguiente capítulo usaremos los valores focales para encontrar cambios de signo de la función desplazamiento en una vecindad de un punto de equilibrio. Estos cambios de signo implican (por continuidad) la existencia de ceros de la función, que como dijimos anteriormente, corresponden a órbitas periódicas.

## 1.2. Cálculo de los valores focales

En vista de los resultados hasta ahora mencionados, el cálculo de los valores focales es una cuestión importante. Para ello se puede proceder de la siguiente manera:

Usando las expresiones para  $r'$ ,  $\theta'$  obtenidas al convertir el sistema (1.2) a coordenadas polares, en la ecuación (1.3) se desarrolla a  $F$  como serie de potencias de  $r$ ,

$$\frac{dr}{d\theta} = F_1(\theta)r + F_2(\theta)r^2 + \dots \quad (1.6)$$

Como se hizo notar en la sección 1.1, la solución  $r(\theta, r_0, 0)$  de esta ecuación con condición inicial  $r(0) = r_0$  es analítica respecto de sus argumentos, por lo que se puede desarrollar como una serie de potencias de la condición inicial  $r_0$ ,

$$r(\theta, r_0, 0) = u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + \dots \quad (1.7)$$

Además, puesto que  $r(0, r_0, 0) = r_0$  también se cumple que

$$u_1(0) = 1, \quad u_j(0) = 0 \text{ si } j > 1. \quad (1.8)$$

Sustituyendo  $r$  en ambos lados de la igualdad (1.6) por la serie dada en (1.7), y derivando el lado izquierdo término a término tenemos que

$$\frac{du_1}{d\theta}r_0 + \frac{du_2}{d\theta}r_0^2 + \dots = F_1(\theta)(u_1(\theta)r_0 + u_2(\theta)r_0^2 + \dots) + F_2(\theta)(u_1^2(\theta)r_0^2 + 2u_1(\theta)u_2(\theta)r_0^3 + \dots) + \dots$$

Al igualar los coeficientes en ambas series obtenemos una sucesión de ecuaciones diferenciales, con condiciones iniciales dadas por (1.8)

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\theta} &= F_1(\theta)u_1(\theta), & u_1(0) &= 1, \\ \frac{du_2}{d\theta} &= F_1(\theta)u_2(\theta) + F_2(\theta)u_1^2(\theta), & u_2(0) &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

las cuales se resuelven recursivamente como ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{aligned} u_1(\theta) &= e^{\int_0^\theta F_1(s)ds}, \\ u_2(\theta) &= e^{\int_0^\theta F_1(s)ds} \int_0^\theta F_2(s)u_1(s)ds, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por definición  $d(r_0) = P(r_0) - r_0 = r(2\pi, r_0, 0) - r_0$ , usando (1.7) en esta expresión se sigue que

$$d(r_0) = (u_1(2\pi) - 1)r_0 + u_2(2\pi)r_0^2 + \dots,$$

tomando el desarrollo en serie de Taylor de  $d$  alrededor del cero se tiene

$$(u_1(2\pi) - 1)r_0 + u_2(2\pi)r_0^2 + \dots = d'(0)r_0 + \frac{d''(0)}{2!}r_0^2 + \dots,$$

comparando los coeficientes en ambas series se obtienen los valores focales

$$d^{(k)}(0) = k!u_k(2\pi). \quad (1.9)$$

Así, vemos que el cálculo de la sucesión de los valores focales equivale a resolver recursivamente una sucesión de ecuaciones diferenciales. La complejidad de las ecuaciones involucradas crece rápidamente, razón por la cual el éxito en encontrar los valores focales depende en buena medida de los recursos tecnológicos disponibles. Para hacerse una idea de la situación considérese el siguiente ejemplo: la expresión para el tercer coeficiente de Lyapunov (esto es, el séptimo valor focal) en forma general se encontró por primera vez en el año 2008 [K/L], mientras que la expresión para el noveno valor focal en forma general se dió por primera vez en el 2011 y ocupa más de 45 páginas [Kva].

La expresión para el primer coeficiente de Lyapunov se conoce desde mediados del siglo pasado y se debe a N. Bautin. Si tenemos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots \\ y' &= cx + dy + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots \end{aligned}$$

donde  $P_2, P_3, Q_2, Q_3$ , están dadas por

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \\ P_3(x, y) &= a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ Q_2(x, y) &= b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \\ Q_3(x, y) &= b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, \end{aligned} \tag{1.10}$$

entonces el primer coeficiente de Lyapunov  $d'''(0)$  es igual a

$$\begin{aligned} d'''(0) &= -\frac{3\pi}{2b(ad-bc)^{\frac{3}{2}}} \left( [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) \right. \\ &\quad + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ &\quad - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] \\ &\quad \left. - (a^2 + bc)[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \right). \end{aligned}$$

En particular, para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= \mu x - y + P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots \\ y' &= x + \mu y + Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots \end{aligned} \tag{1.11}$$

con  $P_i, Q_i$ , como en (1.10), el origen es un equilibrio del sistema y se tendrá que el primer coeficiente de Lyapunov cuando  $\mu = 0$  es

$$\begin{aligned} d'''(0) &= \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) \\ &\quad - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})], \end{aligned} \tag{1.12}$$

si este valor es distinto de cero, entonces el punto de equilibrio es un foco de multiplicidad 1, cuya estabilidad se determina por el signo de  $d'''(0)$  de acuerdo con los criterios *ii*), *iii*) en la proposición 1.2. Para terminar esta sección, enunciamos un resultado demostrado en [A/L] en el que se dan condiciones para que el sistema (1.11) presente una bifurcación de Andronov-Hopf en el origen.

**Teorema 1.3.** *Si  $d'''(0) \neq 0$  en la ecuación (1.12), entonces el sistema (1.11) presenta una bifurcación de Andronov-Hopf en el origen en el valor de bifurcación  $\mu = 0$ . Cuando  $d'''(0) < 0$ , se genera un único ciclo límite estable al crecer  $\mu$  a partir de cero.*

*Si  $d'''(0) > 0$ , entonces se genera un único ciclo límite inestable al decrecer  $\mu$  a partir de cero.*

En el capítulo 3, mediante un cambio de coordenadas transformaremos al sistema estudiado en un sistema de la forma (1.11) y usaremos este teorema para mostrar que hay parámetros para los cuales el sistema así obtenido tiene una bifurcación de Andronov-Hopf.

## Capítulo 2

# Bifurcación cero Hopf en un modelo depredador-presa

En este capítulo estudiaremos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\y' &= sy \left( 1 - \frac{y}{nx + c} \right),\end{aligned}\tag{2.1}$$

restringido al primer cuadrante  $x, y \geq 0$ . Las funciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  representan como función del tiempo a las poblaciones de presa y depredador respectivamente y la interpretación de las constantes positivas  $r, k, q, a, s, n, c$ , es la siguiente:

- i)*  $r$  y  $s$  son las tasas intrínsecas de crecimiento de la presa y el depredador respectivamente.
- ii)*  $k$  es la capacidad de carga del medio respecto de la presa.
- iii)*  $q$  es la tasa máxima de consumo de presa por depredador.
- iv)*  $a$  es una constante de saturación.
- v)*  $n$  es una medida del valor alimenticio de la presa.
- vi)*  $c$  representa una fuente alternativa de alimento para el depredador.

Tomando un nuevo tiempo  $\tau = st$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{x}{s} \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\ \frac{dy}{d\tau} &= y \left( 1 - \frac{y}{nx + c} \right),\end{aligned}$$

renombrando  $r/s, q/s, \tau$ , como  $r, q, t$ , respectivamente obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\y' &= y \left( 1 - \frac{y}{nx + c} \right),\end{aligned}\tag{2.2}$$

por lo que sin pérdida de generalidad, en adelante asumiremos que  $s = 1$  y trabajaremos con el sistema (2.2).

El objetivo principal de éste capítulo es mostrar que (2.2) no admite una bifurcación de Andronov-Hopf, independientemente de los parámetros que se tengan, pero que si éstos se eligen adecuadamente, entonces se puede dar una bifurcación cero Hopf.

Una primera observación acerca de este sistema es que las soluciones son acotadas, lo que enunciamos de manera más precisa en la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.** *Existe  $B > 0$  con la propiedad de que para cada solución de (2.2) con condición inicial  $x(0), y(0) > 0$ , existe un  $t_0 \geq 0$  tal que  $0 \leq x(t), y(t) \leq B$  si  $t \geq t_0$ .*

**Demostración.**

Puesto que  $x' = 0$  si  $x = 0$ , tenemos que el eje  $Y$  está formado por soluciones de (2.2). Análogamente, el eje  $X$  también está formado por soluciones de la ecuación.

Se sigue por el teorema de existencia y unicidad que las trayectorias del sistema (2.2) no pueden cruzar los ejes. Luego, una solución  $(x(t), y(t))$  con condición inicial  $x(0), y(0) > 0$  estará totalmente contenida en el primer cuadrante y en particular satisfará

$$x(t), y(t) \geq 0, \quad \text{si } t \geq 0. \quad (2.3)$$

Por otro lado, como todas las constantes son positivas en la ecuación

$$x' = x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right),$$

se debe cumplir en el primer cuadrante que  $x' < 0$  si  $x \geq k$ . Sea  $\Gamma = (x(t), y(t))$  una solución particular del sistema con  $x(0), y(0) > 0$ . Por lo que acabamos de mencionar  $x(t)$  debe ser acotada, esto es existen  $k_1, t_1 \geq 0$  tales que

$$x(t) \leq k_1, \quad \text{si } t \geq t_1. \quad (2.4)$$

Ahora consideremos la ecuación

$$y' = y \left( 1 - \frac{y}{nx + c} \right),$$

de ésta se infiere que  $y' < 0$  si y sólo si  $y > nx + c$ . Por (2.4) se tiene que si  $y(t) > nk_1 + c$  y  $t$  es suficientemente grande, entonces  $y(t) > nx(t) + c$ , o equivalentemente  $y'(t) < 0$ . De manera que  $y(t)$  también es acotada. Luego, existen  $k_2, t_2 \geq 0$  tales que

$$y(t) \leq k_2, \quad \text{si } t \geq t_2. \quad (2.5)$$

Las desigualdades (2.3), (2.4) y (2.5) muestran que  $\Gamma$  está contenida en el compacto  $[0, k_\Gamma] \times [0, k_\Gamma]$  si  $t \geq t_\Gamma$ , donde  $t_\Gamma = \max\{t_1, t_2\}$ ,  $k_\Gamma = \max\{k_1, k_2\}$ . Por el teorema de Poincaré-Bendixson para sistemas analíticos [P], el  $\omega$ -límite de  $\Gamma$  es o un punto de equilibrio, o un ciclo límite, o una gráfica de (2.2).



Ahora bien, hemos visto que  $x' < 0$  si  $x \geq k$  y  $y' < 0$  si y sólo si  $y > nx + c$ . Dividiremos al interior del primer cuadrante en cuatro regiones, delimitadas por las rectas  $x = k$ ,  $y = nx + c$  y  $y = nk + c$ , de la siguiente manera (Fig. 2.1):

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x < k, y < nk + c\}$ . Obsérvese que las soluciones que entren a esta región permanecerán siempre en ella, pues  $y' < 0$  en el segmento  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x < k, y = nk + c\}$  y  $x' < 0$  en el segmento  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x = k, y \leq nk + c\}$ .

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x > k, y < nx + c\}$ , en donde  $x' < 0, y' > 0$ .

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x > k, y > nx + c\}$ , en la cual se satisface  $x', y' < 0$ .

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x < k, y > nk + c\}$ , en donde  $y' < 0$ .

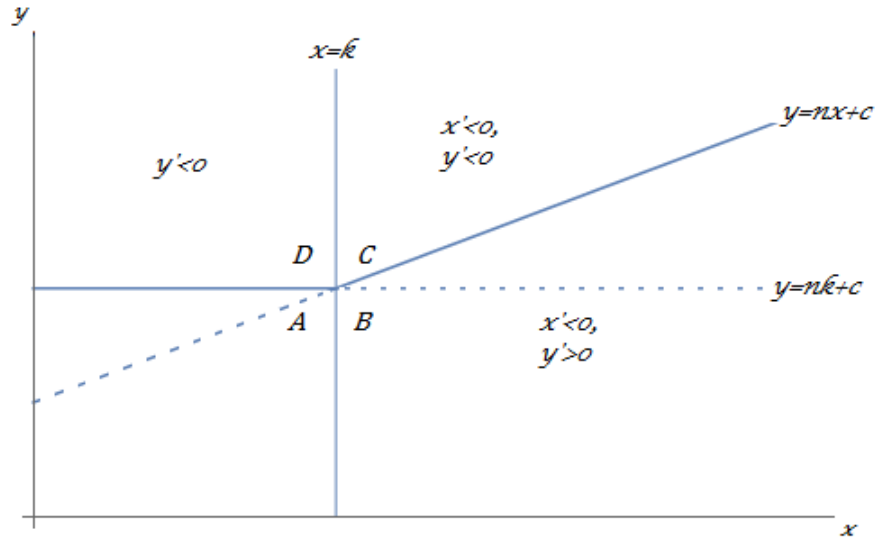


Figura 2.1: División del primer cuadrante en las regiones  $A, B, C, D$ , definidas en la demostración de la proposición 2.1

Nótese que todos los puntos de equilibrio del sistema deben estar contenidos en el interior del compacto  $[0, k] \times [0, nk + c]$ , pues tanto en su exterior como en su frontera siempre se cumple que  $x' \neq 0$  o  $y' \neq 0$ .

Consideremos una solución  $\Gamma = (x(t), y(t))$  que satisfaga  $(x(t_0), y(t_0)) \in B$  para algún  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Sabemos que  $\Gamma$  es acotada y que su  $\omega$ -límite es alguno de los tres casos mencionados anteriormente. Si  $\Gamma$  permaneciera en  $B$  para toda  $t \geq t_0$ , su  $\omega$ -límite no podría ser un ciclo límite, pues  $x' < 0, y' > 0$  en  $B$ , y por lo tanto tendría que contener al menos a un punto crítico del sistema. Como no hay puntos críticos en

$B$  ni en su frontera, se sigue que  $\Gamma$  debe entrar en algún momento a alguna de las regiones  $A$  o  $C$ . Con un razonamiento similar, vemos que una solución que en algún momento esté en la región  $C$ , termina por entrar en alguna de las regiones  $A$  o  $D$  (las soluciones no pueden cruzar de la región  $C$  hacia  $B$ , pues en la frontera entre ambas, el rayo  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x > k, y = nx + c\}$ , se tiene que  $x' < 0, y' = 0$ ). Análogamente, toda solución que satisfaga  $(x(t_0), y(t_0)) \in D$  para alguna  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entrará en algún momento a la región  $A$ . De aquí se sigue el resultado. ■

Los puntos de equilibrio del sistema corresponden a las intersecciones de la isoclina  $x' = 0$  con la isoclina  $y' = 0$ . En el caso  $x' = 0$ , la isoclina está dada por las ecuaciones

$$x = 0, \quad y = \frac{r}{qk^m}(k^m - x^m)(x^2 + a),$$

mientras que para  $y' = 0$  se tienen las ecuaciones

$$y = 0, \quad y = nx + c.$$

De las intersecciones con alguna de las rectas  $x = 0, y = 0$ , se obtienen los puntos de equilibrio  $(0, 0), (0, c), (k, 0)$ , estos implican la extinción de al menos una de las especies. Veamos ahora cuántos puntos de equilibrio  $(\alpha, \beta)$  con  $\alpha, \beta > 0$  puede tener el sistema (2.2), a éstos se les llama puntos de equilibrio de coexistencia.

Desarrollando el producto  $(k^m - x^m)(x^2 + a)$  en la isoclina

$$y = \frac{r}{qk^m}(k^m - x^m)(x^2 + a),$$

tenemos que

$$y = \frac{r}{qk^m}p(x),$$

donde

$$p(x) = -x^{m+2} - ax^m + k^m x^2 + ak^m. \quad (2.6)$$

Nótese que  $p(0) = ak^m$  y además  $p(x) = O(-x^{m+2})$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Si  $m > 2$ , entonces  $p(x) = O(x^2)$  cuando  $x \rightarrow 0$ , de manera que  $p$  será creciente en una vecindad del cero (con  $x > 0$ ) y después decrecerá indefinidamente conforme los términos negativos  $-x^{m+2}, -ax^m$ , comiencen a dominar el comportamiento de la función (Fig. 2.2, a).

Algo similar ocurre cuando  $m = 2$  y  $k^m > a$ . Si en cambio,  $k^m < a$  con  $m = 2$ , es claro que  $p$  debe ser decreciente en el intervalo  $(0, \infty)$ .

Finalmente, para  $m < 2$  se tiene que  $p(x) = O(-x^m)$  cuando  $x \rightarrow 0$ , por lo que  $p$  es decreciente cerca de 0. Si  $k^m$  es suficientemente grande respecto de  $a$ , habrá un intervalo en donde  $p$  es creciente (debido al término  $k^m x^2$ ) para después decrecer indefinidamente. De lo contrario  $p$  será siempre decreciente. Ambos comportamientos se ilustran en las partes b), c), de la Fig. 2.2

Por otra parte, la isoclina  $y = nx + c$  es simplemente una recta de pendiente  $n$  y ordenada al origen  $c$ . Considerando las posibles intersecciones de esta recta con

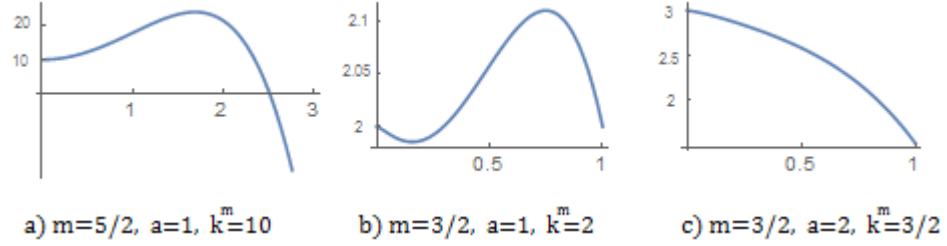


Figura 2.2: Gráficas de (2.6) para diversos parámetros

alguna de las curvas mostradas en la Fig. 2.2, tenemos que la ecuación diferencial (2.2) puede tener desde 0 hasta 3 puntos de equilibrio de coexistencia.

Más aún, haciendo  $y' = 0$ , si

$$\beta \left( 1 - \frac{\beta}{n\alpha + c} \right) = 0,$$

entonces se debe tener  $\beta = n\alpha + c$ . Sustituyendo en la ecuación para  $x'$ , al igualar a cero y despejar se obtiene la condición

$$q = \frac{r(k^m - \alpha^m)(\alpha^2 + a)}{k^m(n\alpha + c)}.$$

Nótese que puesto que  $q > 0$ , esta última igualdad impone la restricción  $k > \alpha$ .

Es fácil convencerse de que estas condiciones son suficientes para que  $(\alpha, \beta)$  sea un punto de equilibrio de (2.2). Por lo anterior se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.2.** *El punto  $(\alpha, n\alpha + c)$  es un equilibrio de coexistencia del sistema (2.2) si y sólo si*

$$q = \frac{r(k^m - \alpha^m)(\alpha^2 + a)}{k^m(n\alpha + c)}, \quad k > \alpha.$$

De hecho, si  $(\alpha, n\alpha + c)$  es de equilibrio y hacemos el cambio de coordenadas dado por  $x = \alpha X$ ,  $y = \alpha Y$ , obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} X' &= X \left( r \left( 1 - \left( \frac{X}{k/\alpha} \right)^m \right) - \frac{(q/\alpha)Y}{X^2 + (a/\alpha^2)} \right), \\ Y' &= Y \left( 1 - \frac{Y}{nX + (c/\alpha)} \right), \end{aligned}$$

renombrando  $X, Y, k/\alpha, q/\alpha, a/\alpha^2, c/\alpha$ , como  $x, y, k, q, a, c$ , respectivamente se tiene de nuevo el sistema (2.2), ahora con equilibrio en  $(1, n + c)$  y las restricciones

$$q = \frac{r(k^m - 1)(1 + a)}{k^m(n + c)}, \quad k > 1. \quad (2.7)$$

De manera que si (2.2) tiene un punto de equilibrio de coexistencia, sin pérdida de generalidad asumiremos que dicho punto es  $(1, c + n)$  y que se satisfacen las condiciones (2.7).

Finalmente, reescalaremos el tiempo a un nuevo tiempo  $\tau$  dado por

$$dt = k^m(x^2 + a)(nx + c)d\tau,$$

para transformar el sistema (2.2) en el sistema polinomial

$$\begin{aligned} x' &= x(nx + c)(rk^m(x^2 + a) - rx^m(x^2 + a) - qk^m y), \\ y' &= yk^m(x^2 + a)(nx + c - y). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nótese que  $k^m(x^2 + a)(nx + c) > 0$  en el primer cuadrante, así que por lo argumentado en el capítulo 1, los retratos fase de (2.2) y (2.8) son iguales. En lo que resta de este capítulo trabajaremos con el sistema (2.8), en el entendido de que los resultados demostrados serán válidos también para (2.1).

## 2.1. Resultados principales

Mostraremos ahora que en los puntos de equilibrio de coexistencia de (2.8) no se puede dar una bifurcación de Andronov-Hopf, cualesquiera que sean los parámetros. Este hecho es consecuencia inmediata del siguiente resultado:

**Proposición 2.3.** *El punto de equilibrio  $(1, n + c)$  del sistema (2.8) no puede ser un foco simple con valores propios  $\epsilon \pm i\omega$ ,  $\epsilon, \omega \neq 0$ , si  $\epsilon$  es suficientemente pequeña.*

### Demostración.

Mostraremos que el suponer que  $\epsilon \pm i\omega$  son los valores propios de  $(1, n + c)$  contradice la hipótesis  $n, c > 0$ .

Consideremos la función

$$f(x, y) = (x(nx + c)(rk^m(x^2 + a) - rx^m(x^2 + a) - qk^m y), yk^m(x^2 + a)(nx + c - y)),$$

cuya derivada  $Df$ , es la matriz con entradas dadas por

$$\begin{aligned} Df_{11} &= x(c + nx) (-mr(x^2 + a)x^{m-1} - 2rx^{m+1} + 2k^m rx) + nx[r(x^2 + a)k^m \\ &\quad - qyk^m - rx^m(x^2 + a)] + (c + nx)(r(x^2 + a)k^m - qyk^m - rx^m(x^2 + a)), \end{aligned}$$

$$Df_{12} = -k^m qx(c + nx),$$

$$Df_{21} = n(x^2 + a)yk^m + 2x(c + nx - y)yk^m,$$

$$Df_{22} = k^m(x^2 + a)(c + nx - y) - k^m(x^2 + a)y.$$



termina la demostración. ■

Como corolario evidente de la Proposición 2.3, tenemos el primer resultado que nos propusimos demostrar:

**Teorema 2.1.** *El sistema (2.8) no puede tener una bifurcación de Andronov-Hopf en el primer cuadrante  $\{(x, y) | x, y > 0\}$ , independientemente de los parámetros elegidos.*

A continuación demostraremos el resultado principal de este capítulo, el sistema (2.8) con  $m = 2$  tiene una bifurcación cero Hopf si los parámetros se eligen adecuadamente. Recordemos que este tipo de bifurcación se presenta cuando al variar un parámetro se genera una órbita periódica alrededor de un punto de equilibrio, y durante la variación de este parámetro, el punto de equilibrio en cuestión tiene siempre valores propios imaginarios puros. Procederemos de la siguiente manera: tomaremos un centro de la parte lineal de (2.8) y aproximaremos la función desplazamiento usando el método expuesto en el capítulo 1 para encontrar los coeficientes de Lyapunov correspondientes al punto de equilibrio. Durante este proceso además reduciremos el número de parámetros. Después mostraremos que dicho punto es un foco que cambia de estabilidad cuando un cierto parámetro alcanza un valor de bifurcación y, que al incrementar el parámetro a partir del valor de bifurcación, la función desplazamiento tiene un cero en una vecindad del foco. Esto indica la presencia de una órbita periódica.

**Teorema 2.2.** *Existe un conjunto de parámetros para el cual el sistema (2.8) con  $m = 2$  presenta una bifurcación cero Hopf.*

**Demostración.**

Consideremos un punto de equilibrio en  $(1, c + n)$ . Sustituyendo en (2.8) el valor de  $q$  dado en (2.7) obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x(c + nx) \left( -\frac{(a + 1)ry(k^m - 1)}{c + n} + r(a + x^2)k^m - r(a + x^2)x^m \right), \\ y' &= y(a + x^2)k^m(c + nx - y). \end{aligned}$$

Para simplificar los cálculos posteriores asumiremos  $n + c = 1$ , de manera que podemos reducir el número de parámetros expresando a  $n$  en términos de  $c$  y escribir el sistema en la forma  $(x', y') = g(x, y)$  donde

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \left( x((1 - c)x + c) \left( r(a + x^2)k^m - (a + 1)ry(k^m - 1) - r(a + x^2)x^m \right), \right. \\ &\quad \left. y(a + x^2)k^m((1 - c)x + c - y) \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

nótese que esto restringe a  $n, c$ , al intervalo  $(0, 1)$ .

Ahora vamos a obtener la linearización del sistema en el punto de equilibrio, calculamos primero las entradas de  $Dg$ , la derivada de  $g$ ,

$$\begin{aligned} Dg_{11} &= x(c + (1 - c)x) (-mr(x^2 + a)x^{m-1} - 2rx^{m+1} + 2k^mrx) \\ &\quad + (1 - c)x (r(x^2 + a)k^m - rx^m(x^2 + a) - (a + 1)(k^m - 1)ry) \\ &\quad + (c + (1 - c)x) (r(x^2 + a)k^m - rx^m(x^2 + a) - (a + 1)(k^m - 1)ry), \end{aligned}$$

$$Dg_{12} = (-a - 1)(k^m - 1)rx(c + (1 - c)x),$$

$$Dg_{21} = (1 - c)(x^2 + a)yk^m + 2x(c + (1 - c)x - y)yk^m,$$

$$Dg_{22} = k^m(x^2 + a)(c + (1 - c)x - y) - k^m(x^2 + a)y.$$

De donde  $Dg(1, 1)$ , la matriz de la parte lineal del sistema en el punto  $(1, 1)$ , es

$$\begin{pmatrix} (a + 1)rk^m + 2rk^m - (a + 1)r - (a + 1)(k^m - 1)r & (-a - 1)(k^m - 1)r \\ + (1 - c)((a + 1)rk^m + (-a - 1)r - (a + 1)(k^m - 1)r) & \\ - (a + 1)mr - 2r & \\ (a + 1)(1 - c)k^m & (-a - 1)k^m \end{pmatrix},$$

con polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda[(a + 1)k^m + r(am + m + 2) - 2rk^m] + [a^2r(c + m - 1)k^m \\ &\quad - (a + 1)r(a(c - 1) + c + 1)k^{2m} + 2ar(c + m)k^m + crk^m + mrk^m + rk^m]. \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $(1, 1)$  es un centro de la parte lineal con valores propios  $\pm i\omega$ , entonces se debe cumplir que  $p(\lambda) = (\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) = \lambda^2 + \omega^2$ . Igualando coeficientes y resolviendo para  $c, r$  se tienen los valores

$$\begin{aligned} c &= k^{-2m} [(a + 1)^2(a(m - 1) + m + 1)k^{2m} + (a - 1)(a + 1)^2k^{3m} \\ &\quad + \omega^2(am + m + 2) - 2\omega^2k^m] / [(a + 1)^3(k^m - 1)], \\ r &= \frac{(a + 1)k^m}{-am + 2k^m - m - 2}. \end{aligned}$$

Puesto que  $r > 0$ , es necesario que  $-am + 2k^m - m - 2 > 0$ . Si hacemos  $k^m = 2m + 1$  esta condición se transforma en  $a < 3$ , y además se tendrá que

$$\begin{aligned} c &= \frac{3a^3(2m + 1)^2 + a(4m^2 + 4m + \omega^2 + 1) + 5(2am + a)^2 - 4m^2 - 4m - 3\omega^2 - 1}{2(a + 1)^3(2m + 1)^2}, \\ r &= -\frac{(a + 1)(2m + 1)}{(a - 3)m}. \end{aligned}$$

En este punto es conveniente hacer notar que se cumple con la restricción  $k > 1$  dada en (2.7).

Ahora elegimos los valores propios  $\pm i(2m + 1)$  para el punto de equilibrio (esto es, hacemos  $\omega = 2m + 1$ ). La expresión de  $c$  se reduce entonces a

$$c = \frac{3a^3 + 5a^2 + 2a - 4}{2(a + 1)^3},$$

y la desigualdad  $0 < c < 1$  se satisfará si  $a$  se restringe al intervalo  $(\bar{a}, 3)$  donde  $\bar{a} \approx 0,630451$ . La gráfica de la función

$$c(a) = \frac{3a^3 + 5a^2 + 2a - 4}{2(a + 1)^3}$$

se muestra en la Fig. 2.3

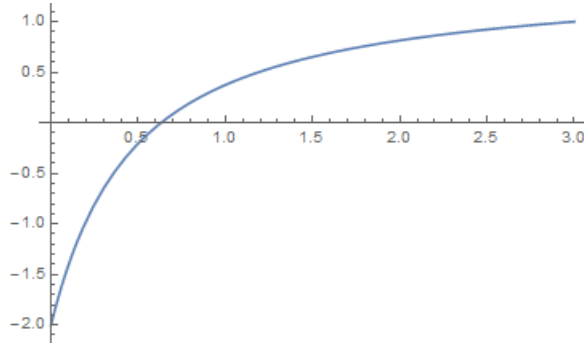


Figura 2.3: Gráfica de  $c(a) = \frac{3a^3 + 5a^2 + 2a - 4}{2(a+1)^3}$

El efectuar en (2.10) las sustituciones

$$k^m = 2m + 1, \quad r = -\frac{(a + 1)(2m + 1)}{(a - 3)m}, \quad c = \frac{3a^3 + 5a^2 + 2a - 4}{2(a + 1)^3},$$

da como resultado el sistema

$$\begin{aligned} x' &= (2m + 1)x [-a(x^m + 2m(y - 1) - 1) - x^{m+2} + (2m + 1)x^2 - 2my] \\ &\quad \cdot [a^3(x - 3) - a^2(x + 5) - 2a(2x + 1) - 6x + 4] / [2(a - 3)(a + 1)^2m], \\ y' &= -(2m + 1)y(a + x^2) [a^3(x + 2y - 3) - a^2(x - 6y + 5) + a(-4x + 6y - 2) \\ &\quad - 6x + 2y + 4] / [2(a + 1)^3]. \end{aligned}$$

Mediante el cambio de coordenadas  $x = X + 1$ ,  $y = Y + 1$ , trasladamos el punto



de equilibrio  $(1, 1)$  en cuestión al origen y nuestro sistema se convierte en

$$\begin{aligned} X' &= (2m+1)(X+1) [a^3(X-2) - a^2(X+6) - 2a(2X+3) - 6X-2] \\ &\quad \cdot [-a((X+1)^m + 2mY-1) + X^2(-(X+1)^m + 2m+1) - (X+1)^m \\ &\quad + X(-2(X+1)^m + 4m+2) - 2mY+1] / [2(a-3)(a+1)^2m], \\ Y' &= -(2m+1)(Y+1) [(a^3 - a^2 - 4a - 6)X + 2(a+1)^3Y] \\ &\quad \cdot (a + (X+1)^2) / [2(a+1)^3], \end{aligned}$$

cuya linearización en  $(0, 0)$  está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} (a+1)(2m+1) & 2(a+1)^2(2m+1)/(a-3) \\ -(a^3 - a^2 - 4a - 6)(2m+1)/(2(a+1)^2) & (-a-1)(2m+1) \end{pmatrix}.$$

Un vector propio correspondiente al valor propio  $i(2m+1)$  es

$$\left( 1, -\frac{a^2 - (2+i)a - (3-3i)}{2(a+1)^2} \right),$$

que podemos escribir en la forma  $u_1 + iv_1$ , donde  $u_1, v_1 \in \mathbb{R}^2$ , son iguales a

$$\begin{aligned} u_1 &= \left( 1, \frac{-a^2 + 2a + 3}{2(a+1)^2} \right), \\ v_1 &= \left( 0, \frac{a-3}{2(a+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Tomando estos vectores como columnas formamos la matriz invertible  $P = [v_1, u_1]$ . Si hacemos el cambio de coordenadas  $(u, v) = P^{-1}(X, Y)$ , la parte lineal del sistema quedará en la forma normal

$$\begin{pmatrix} 0 & -(2m+1) \\ 2m+1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En estas nuevas coordenadas tenemos el sistema

$$\begin{aligned} u' &= (2m+1) \left[ (3-a)(a+(v+1)^2)(au+u+v)[a^2(2-v) + a(u+2v+4) - 3u \right. \\ &\quad \left. + 3v+2] + \frac{1}{m}(a+1)(v+1)[a^3(v-2) - a^2(v+6) - 2a(2v+3) - 6v-2] \right. \\ &\quad \cdot \left( a^2(-(v+1)^m + mv+1) + m(3u+2v^2+v) - (v+1)^2((v+1)^m - 1) \right. \\ &\quad \left. \left. + a[m(2v(v+1) - u) - (v^2+2v+2)((v+1)^m - 1)] \right] \right] / [2(a-3)(a+1)^3], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v' = & (2m+1)(v+1) (a^3(v-2) - a^2(v+6) - 2a(2v+3) - 6v-2) \\
& \cdot \left[ a^2 (-(v+1)^m + mv+1) + m(3u+2v^2+v) - (v+1)^2 ((v+1)^m - 1) \right. \\
& \left. + a [m(2v(v+1) - u) - (v^2+2v+2) ((v+1)^m - 1)] \right] / [2(a-3)(a+1)^3 m].
\end{aligned}$$

Después de realizar el cambio a coordenadas polares  $u = R \cos \theta$ ,  $v = R \sin \theta$ , tomar  $m = 2$ , y desarrollar  $R'$ ,  $\theta'$ , como serie de potencias de  $R$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
R' &= a_2(\theta)R^2 + a_3(\theta)R^3 + a_4(\theta)R^4 + a_5(\theta)R^5 + O(R^6), \\
\theta' &= 5 + b_1(\theta)R + b_2(\theta)R^2 + b_3(\theta)R^3 + b_4(\theta)R^4 + b_5(\theta)R^5 + O(R^6).
\end{aligned}$$

Los coeficientes  $a_i(\theta)$ ,  $b_i(\theta)$ , al igual que la mayoría de los coeficientes involucrados en lo que resta de esta demostración, se pueden consultar en un apéndice al final de esta tesis. A partir de las expresiones anteriores, se sigue que el desarrollo de la ecuación  $\frac{dR}{d\theta}$  como serie en  $R$  es igual a

$$\frac{dR}{d\theta} = c_2(\theta)R^2 + c_3(\theta)R^3 + c_4(\theta)R^4 + c_5(\theta)R^5 + O(R^6), \quad (2.11)$$

donde

$$\begin{aligned}
c_2(\theta) &= \frac{a_2(\theta)}{5}, \\
c_3(\theta) &= \frac{a_3(\theta)}{5} - \frac{a_2(\theta)b_1(\theta)}{25}, \\
c_4(\theta) &= \frac{25a_4(\theta) - 5a_3(\theta)b_1(\theta) + a_2(\theta)b_1(\theta)^2 - 5a_2(\theta)b_2(\theta)}{125}, \\
c_5(\theta) &= \frac{1}{625} [125a_5(\theta) - 25a_4(\theta)b_1(\theta) + 5a_3(\theta)b_1(\theta)^2 - a_2(\theta)b_1(\theta)^3 - 25a_3(\theta)b_2(\theta) \\
&\quad + 10a_2(\theta)b_1(\theta)b_2(\theta) - 25a_2(\theta)b_3(\theta)].
\end{aligned}$$

Consideremos la solución  $R(\theta, x, 0)$  de la ecuación (2.11) con condición inicial  $R(0) = x$ . Como se vió en el capítulo 1, esta admite la expansión

$$R(\theta, x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\theta)x^i = v_1(\theta)x + v_2(\theta)x^2 + v_3(\theta)x^3 + v_4(\theta)x^4 + v_5(\theta)x^5 + O(x^6), \quad (2.12)$$

y la condición inicial  $R(0, x, 0) = x$  implica las igualdades

$$\begin{aligned}
v_1(0) &= 1, \\
v_i(0) &= 0, \quad i > 1.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.12) en ambos lados de (2.11) e igualando coeficientes se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
v_1'(\theta) &= 0, \\
v_2'(\theta) &= c_2(\theta), \\
v_3'(\theta) &= c_3(\theta) + 2c_2(\theta)v_2(\theta), \\
v_4'(\theta) &= c_4(\theta) + 3c_3(\theta)v_2(\theta) + c_2(\theta)v_2(\theta)^2 + 2c_2(\theta)v_3(\theta), \\
v_5'(\theta) &= c_5(\theta) + 4c_4(\theta)v_2(\theta) + 3c_3(\theta)v_2(\theta)^2 + 3c_3(\theta)v_3(\theta) \\
&\quad + 2c_2(\theta)v_2(\theta)v_3(\theta) + 2c_2(\theta)v_4(\theta).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por definición, la función desplazamiento sobre el rayo  $\theta = 0$  es igual a  $d(x) = R(2\pi, x, 0) - x$ . Resolviendo recursivamente las ecuaciones (2.14) sujetas a las condiciones iniciales (2.13), obtenemos las funciones  $v_i(\theta)$ , evaluando en  $\theta = 2\pi$  resulta

$$v_1(2\pi) = 1,$$

$$v_2(2\pi) = 0,$$

$$v_3(2\pi) = \frac{\pi (a^8 + 5a^7 + 11a^6 + 25a^5 + 32a^4 - 10a^3 - 104a^2 - 56a - 40)}{4(a-3)^2(a+1)^3},$$

$$v_4(2\pi) = \frac{\pi}{12(a-3)^3(a+1)^5} [2a^{12} + 12a^{11} + 33a^{10} + 89a^9 + 180a^8 + 176a^7 + 49a^6 - 71a^5 - 576a^4 - 1334a^3 - 192a^2 - 200a + 200],$$

$$\begin{aligned}
v_5(2\pi) &= \frac{\pi}{1152(a-3)^4(a+1)^9} [70a^{20} + 2(595 + 54\pi)a^{19} + 2(4963 + 702\pi)a^{18} \\
&\quad + (53494 + 8640\pi)a^{17} + (208303 + 35856\pi)a^{16} + (620615 + 115128\pi)a^{15} \\
&\quad + (1424369 + 289656\pi)a^{14} + (2397731 + 543888\pi)a^{13} \\
&\quad + (2480041 + 677808\pi)a^{12} + (236844\pi - 126037)a^{11} \\
&\quad - (6498947 + 1401732\pi)a^{10} - 9(1614725 + 475632\pi)a^9 \\
&\quad - 2(9107435 + 3187728\pi)a^8 - 144(88190 + 29487\pi)a^7 \\
&\quad + 16(133839\pi - 67376)a^6 + 32(257119 + 247806\pi)a^5 \\
&\quad + 4(2538187 + 2310336\pi)a^4 + (6503780 + 6680448\pi)a^3 \\
&\quad + 24(97591 + 133632\pi)a^2 + 8(47851 + 125280\pi)a + 16(10800\pi - 793)].
\end{aligned}$$

Luego,

$$d(x) = v_3(2\pi)x^3 + v_4(2\pi)x^4 + v_5(2\pi)x^5 + O(x^6). \tag{2.15}$$

Obsérvese que salvo por un factor positivo, cada coeficiente  $v_i(2\pi)$  es el  $i$ -ésimo valor focal y  $v_3(2\pi), v_5(2\pi)$ , son los primeros dos coeficientes de Lyapunov. Como se vio al principio de la demostración,  $a$  debe estar restringida al intervalo  $(\bar{a}, 3)$  con  $\bar{a} \approx 0,630451$ . La función  $L_1(a) = v_3(2\pi)$  tiene un cero en este intervalo en  $a_0 \approx 1,34205$  y es negativa si  $a < a_0$ , positiva si  $a > a_0$  (la gráfica de esta función

para  $\bar{a} \leq a \leq 1,5$  se muestra en la Fig. 2.4). De lo anterior y la expresión (2.15), es claro que para valores de  $x$  positivos suficientemente pequeños, el desplazamiento  $d(x)$  es negativo si  $a < a_0$ , positivo si  $a > a_0$ . Por lo visto en el capítulo 1, el punto de equilibrio es entonces un foco, estable en el primer caso, e inestable en el segundo. En el valor  $a_0$ , donde se anula el primer coeficiente de Lyapunov o tercer valor focal  $v_3(2\pi)$ , también se debe anular el cuarto valor focal  $v_4(2\pi)$ . Además al expresar el segundo coeficiente de Lyapunov  $L_2(a) = v_5(2\pi)$  como función de  $a$ , se cumple que  $L_2(a_0) \approx -29,5096$ . De manera que el punto de equilibrio es un foco atractor que cambia de estabilidad cuando al incrementar el parámetro  $a$  este supera el valor de bifurcación  $a = a_0$ .

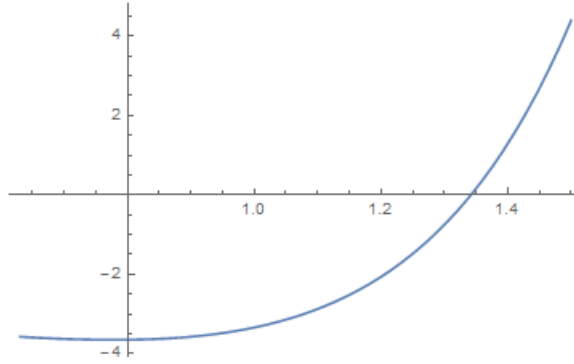


Figura 2.4: Gráfica de  $L_1(a) = \frac{\pi(a^8+5a^7+11a^6+25a^5+32a^4-10a^3-104a^2-56a-40)}{4(a-3)^2(a+1)^3}$

Más aún, si en la vecindad del cero fijamos  $x_1 > 0$  tal que  $d(x_1) < 0$  cuando  $a = a_0$ , entonces para valores de  $a > a_0$  cercanos a  $a_0$  se seguirá satisfaciendo  $d(x_1) < 0$ . Pero al ser el foco inestable, si  $x > 0$  es suficientemente pequeña se debe tener  $d(x) > 0$ . Por la continuidad de  $d$ , esto implica la existencia de un  $x_0 < x_1$  (que por supuesto depende de  $a$ ) con  $d(x_0) = 0$ , lo que demuestra la existencia de una órbita periódica. ■

En la demostración anterior, al convertir el sistema a coordenadas polares aparecen factores de la forma  $(1 + R \sin(\theta))^m$ , que al tomar  $m = 2$  se reducen a  $1 + 2R \sin(\theta) + R^2 \sin^2(\theta)$ . El caso general se puede tratar reemplazando este factor por su expansión en serie

$$1 + mR \sin(\theta) + \frac{(m-1)mR^2 \sin^2(\theta)}{2} + \frac{(m-2)(m-1)mR^3 \sin^3(\theta)}{6} + \dots$$

y después procediendo como se hizo en la demostración hasta obtener los primeros dos coeficientes de Lyapunov, esta vez como función no sólo de  $a$  sino también de  $m$ . Cabe destacar que de esta manera y con los mismos parámetros de la demostración, encontramos para cada  $m \neq 1$  entre cero y 6.5 aproximadamente, un valor  $a_m$  dentro del rango permitido al parámetro  $a$ , donde el primer coeficiente de Lyapunov  $L_1(a, m)$  cambia de signo, de negativo a positivo con  $a$  creciente, mientras que

$L_1(a_m, m) = 0$ ,  $L_2(a_m, m) < 0$ . Lo que como ya sabemos, implica la aparición de una órbita periódica al cruzar el valor de bifurcación  $a_m$ . Por esta razón, creemos que para toda  $m > 0$  existe un conjunto de parámetros tal que el sistema (2.1) presenta una bifurcación cero Hopf. La Fig. 2.5 muestra una parte de las gráficas de  $L_1(a, m)$ ,  $L_2(a, m)$ , en rojo y azul respectivamente, ambas como funciones de  $a, m$ , la función constante 0 se muestra en color verde. En la Fig. 2.6, mostramos una vista superior de las gráficas en diversas regiones para apreciar mejor el comportamiento que acabamos de describir.

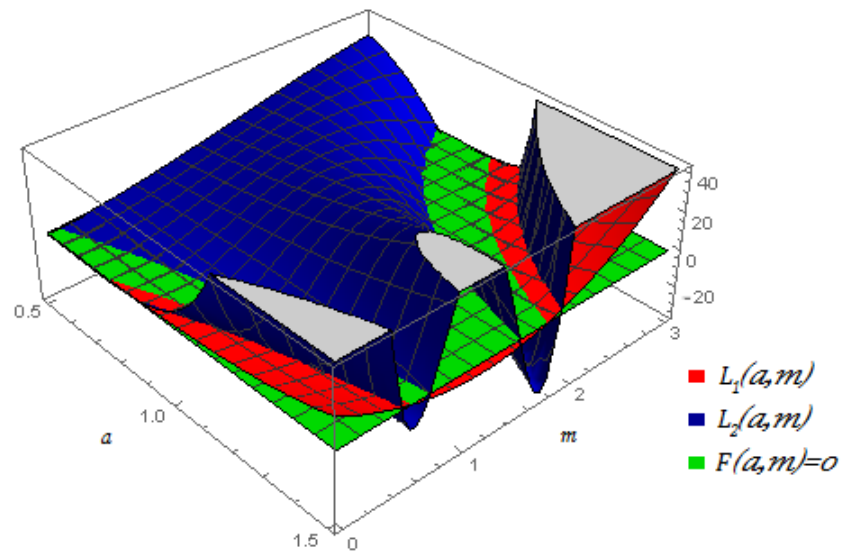


Figura 2.5: Los primeros dos coeficientes de Lyapunov como funciones de  $a, m$ .

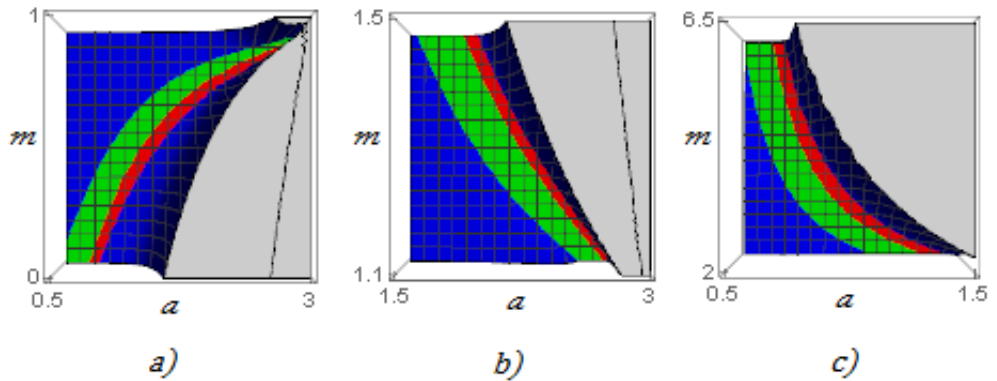


Figura 2.6: Vista superior de las gráficas de  $L_1(a, m)$ ,  $L_2(a, m)$ , en diversas regiones.

Para terminar este capítulo, haremos el retrato del sistema (2.8) con los parámetros usados en la demostración del teorema 2.2, estos son

$$\begin{aligned} m = 2, \quad k = \sqrt{5}, \quad r = \frac{5(a+1)}{2(3-a)}, \quad c = \frac{3a^3 + 5a^2 + 2a - 4}{2(a+1)^3}, \\ n = 1 - \frac{3a^3 + 5a^2 + 2a - 4}{2(a+1)^3}, \quad q = \frac{2(a+1)^2}{(3-a)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Se vio en dicha demostración que el sistema tiene un valor de bifurcación  $a \approx 1,34205$ . Elegiremos  $a = 7/5 = 1,4$ , en este caso, hay un único punto de equilibrio de coexistencia en  $(1, 1)$ , que como se ha argumentado en el párrafo que sigue a la ecuación (2.15), debe ser un foco inestable.

Sobre los ejes se tienen los puntos de equilibrio  $(0, 0)$ ,  $(0, c)$ ,  $(k, 0)$ . Puesto que estos son todos hiperbólicos, su naturaleza se puede determinar usando el hecho de que los ejes están formados por soluciones del sistema (recuérdese que  $x' = 0$  si  $x = 0$  y  $y' = 0$  si  $y = 0$ ) y el teorema de Grobman-Hartman (que establece que en una vecindad de un punto de equilibrio hiperbólico, los flujos de una ecuación diferencial  $C^1$  y su linealización son topológicamente conjugados [P]).

En efecto, un cálculo de rutina muestra que  $(0, c)$  es un punto silla de la parte lineal de (2.8), con valores propios  $-1841/432$ ,  $3419/1296$ . Se sigue por el teorema de Grobman-Hartman que  $(0, c)$  es también un punto silla de (2.8). Más aún, las dos trayectorias que aproximan al equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$  están contenidas en el eje  $Y$ , pues  $y' = 7y(c - y)$  cuando  $x = 0$ .

Análogamente,  $(k, 0)$  es un punto silla de (2.8) (con valores propios  $-(5/9)(263 + 169\sqrt{5})$ ,  $(2/27)(263 + 169\sqrt{5})$ ) y las trayectorias que lo aproximan cuando  $t \rightarrow \infty$  están contenidas en el eje  $X$ .

Finalmente, el origen tiene valores propios  $9205/576$ ,  $1841/432$ , por lo que debe ser un punto de equilibrio de (2.8) topológicamente equivalente a un nodo inestable. Como el sistema es  $C^2$ , se concluye que el origen es un nodo inestable de (2.8).

Por la proposición 2.1, si  $\Gamma$  es una trayectoria de (2.2) (o de (2.8)), entonces a partir de cierta  $t$  se tendrá que  $\Gamma$  estará contenida en un compacto de la forma  $[0, B] \times [0, B]$ .

Debido a su naturaleza, ninguno de los puntos de equilibrio de (2.8) puede formar parte del  $\omega$ -límite de  $\Gamma$ . Se sigue del teorema de Poincaré-Bendixson la existencia del ciclo límite  $\omega(\Gamma)$ , que por supuesto debe contener en su interior al punto  $(1, 1)$  y es un atractor global en este caso.

Vale la pena destacar que las soluciones de (2.8) son acotadas independientemente de los parámetros elegidos. Así mismo, no es difícil verificar que los puntos  $(0, 0)$ ,  $(k, 0)$ , son siempre un nodo inestable y un punto silla respectivamente, ambos hiperbólicos. Mientras que  $(0, c)$  es punto silla hiperbólico siempre y cuando se satisfaga la desigualdad  $ar > cq$ . De aquí que se pueda usar el teorema de Poincaré-Bendixson como en el argumento anterior, para demostrar la existencia de ciclos límite de (2.8) en cualquier región de parámetros tal que el único equilibrio de coexistencia sea un foco inestable y se cumpla  $ar > cq$ , quedando entonces por resolver

la cuestión de si esos ciclos límite se pueden o no obtener a través de una bifurcación cero-Hopf.

En la Fig. 2.7 se muestra el retrato generado por computadora del sistema (2.8) con los parámetros mencionados en (2.16) y  $a = 7/5$ .

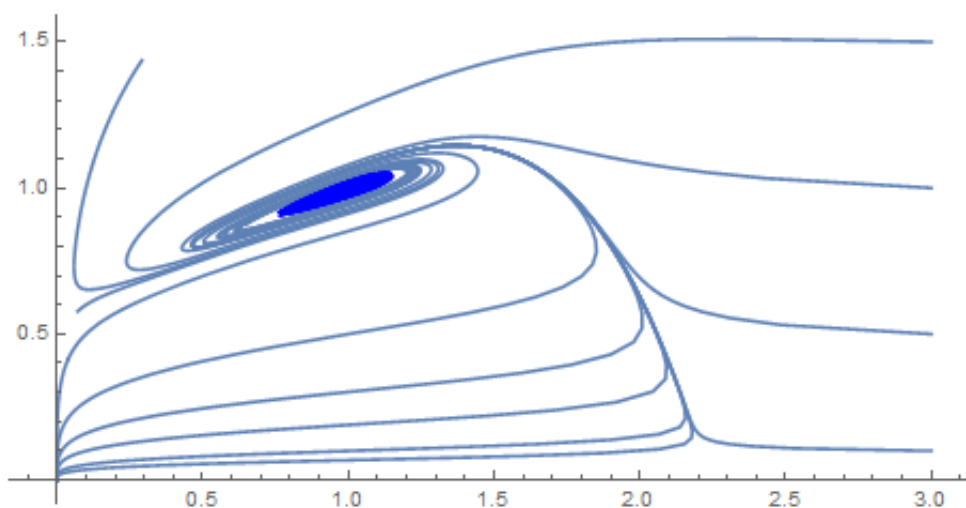


Figura 2.7: Retrato del sistema (2.8) con un ciclo límite estable producto de una bifurcación cero Hopf

La región en azul oscuro corresponde a una sola solución, con condición inicial  $x(0) = 1,01$ ,  $y(0) = 1,01$ , para  $t \in [0, 1000]$ . Como se puede apreciar, ésta aproxima al ciclo límite muy lentamente, en contraste con el caso de la bifurcación de Andronov-Hopf, como veremos en el siguiente capítulo.

## Capítulo 3

# Bifurcación de Andronov-Hopf en un modelo depredador-presa

En este capítulo se estudia el modelo

$$\begin{aligned}x' &= x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\y' &= \left( \frac{sqyx}{x^2 + a} \right) + c - \mu y,\end{aligned}\tag{3.1}$$

en el cuadrante  $x, y \geq 0$ , donde  $x, y$  representan como funciones del tiempo a las poblaciones de la presa y el depredador respectivamente. Las constantes  $r, k, m, q, a, s, c, \mu$ , son todas positivas, con la siguiente interpretación:

- i)*  $r$  y  $s$  son las tasas intrínsecas de crecimiento de la presa y el depredador respectivamente.
- ii)*  $k$  es la capacidad de carga del medio respecto de la presa.
- iii)*  $q$  es la tasa máxima de consumo de presa por depredador.
- iv)*  $a$  es una constante de saturación.
- v)*  $\mu$  es la tasa de mortalidad del depredador.
- vi)*  $c$  representa una inmigración constante del depredador.

Haciendo el reescalamiento del tiempo  $\tau = qt$ , se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \frac{x}{q} \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{qy}{x^2 + a} \right), \\ \frac{dy}{d\tau} &= \left( \frac{syx}{x^2 + a} \right) + \frac{c}{q} - \frac{\mu}{q}y.\end{aligned}$$

Renombrando  $r/q, c/q, \mu/q, \tau$ , como  $r, c, \mu, t$ , respectivamente, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}x' &= x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{y}{x^2 + a} \right), \\y' &= \left( \frac{syx}{x^2 + a} \right) + c - \mu y,\end{aligned}\tag{3.2}$$



de manera que sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $q = 1$  y trabajar con el modelo (3.2).

En éste capítulo demostraremos que éste modelo admite una bifurcación de Andronov-Hopf si los parámetros se eligen adecuadamente.

Al igual que en el modelo (2.2) del capítulo anterior, las soluciones de (3.2) son acotadas, lo que mostraremos a continuación.

**Proposición 3.1.** *Para cada solución  $\Gamma$  de (3.2), con condición inicial  $x(0), y(0) > 0$ , existen  $B_\Gamma \geq 0$  y  $t_0 \geq 0$ , tales que  $0 \leq x(t), y(t) \leq B_\Gamma$  si  $t \geq t_0$ .*

**Demostración.**

Puesto que  $x' = 0$  si  $x = 0$ , tenemos que el eje  $Y$  está formado por soluciones de (2.2), se sigue por el teorema de existencia y unicidad que las trayectorias  $(x(t), y(t))$  del sistema (3.2) no pueden cruzar este eje. Por otra parte, si  $y = 0$  entonces  $y' = c > 0$ , de manera que las trayectorias que cruzan el eje  $X$  con  $t$  creciente, lo hacen en dirección del semiplano  $y > 0$ .

Luego, las soluciones de (3.2) con condición inicial  $x(0), y(0) > 0$  estarán contenidas en el primer cuadrante para  $t \geq 0$ , por lo que satisfacen

$$x(t), y(t) \geq 0, \quad \text{si } t \geq 0. \quad (3.3)$$

Por otro lado, como todas las constantes son positivas en la ecuación

$$x' = x \left( r \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) - \frac{y}{x^2 + a} \right),$$

se debe cumplir en el primer cuadrante que  $x' < 0$  si  $x \geq k$ . Sea  $\Gamma = (x(t), y(t))$  una solución particular del sistema con  $x(0), y(0) > 0$ , por lo que acabamos de mencionar  $x(t)$  debe ser acotada, esto es existen  $k_1, t_1 \geq 0$  tales que

$$x(t) \leq k_1, \quad \text{si } t \geq t_1. \quad (3.4)$$

Ahora consideremos la ecuación

$$sx' + y' = sxr \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) + c - \mu y,$$

obtenida a partir de (3.2). De ésta se sigue que  $sx' + y' < 0$  si y sólo si

$$y > \frac{1}{\mu} \left( sxr \left( 1 - \left( \frac{x}{k} \right)^m \right) + c \right) = h(x). \quad (3.5)$$

Por (3.4) y (3.5), si  $t$  es suficientemente grande entonces

$$sx(t) + y(t) \leq sk_1 + \text{máx}\{h(x) : x \geq 0\},$$

de manera que  $sx + y$  es acotada sobre  $\Gamma$  y en consecuencia  $y(t)$  también es acotada. De aquí se sigue el resultado. ■

Para analizar los puntos de equilibrio del sistema consideraremos las intersecciones de las isoclinas  $x' = 0$ ,  $y' = 0$ . La isoclina  $x' = 0$  está dada por las ecuaciones

$$x = 0, \quad y = \frac{r}{k^m}(k^m - x^m)(x^2 + a), \quad (3.6)$$

mientras que  $y' = 0$  está descrita por la ecuación

$$y = \frac{c(x^2 + a)}{\mu(x^2 + a) - sx}. \quad (3.7)$$

De las intersección de la recta  $x = 0$  con la isoclina  $y' = 0$  se obtiene el punto de equilibrio  $(0, c/\mu)$ , que es un atractor sobre el eje  $Y$ , y es el único punto de equilibrio sobre alguno de los ejes. Ahora vamos a dar una cota superior para el número de puntos de equilibrio de coexistencia que puede tener el sistema (3.2). Estos corresponden a las intersecciones de las curvas

$$y = \frac{r}{k^m}(k^m - x^m)(x^2 + a), \quad y = \frac{c(x^2 + a)}{\mu(x^2 + a) - sx}.$$

Igualando ambas ecuaciones obtenemos

$$\frac{r}{k^m}(k^m - x^m)(x^2 + a) = \frac{c(x^2 + a)}{\mu(x^2 + a) - sx},$$

que desarrollando y despejando se transforma en

$$\frac{r}{k^m} \left[ -\mu x^{m+2} + sx^{m+1} - a\mu x^m + k^m \mu x^2 - k^m sx + k^m \left( a\mu - \frac{c}{r} \right) \right] = 0. \quad (3.8)$$

Las abscisas de los puntos de equilibrio de coexistencia de (3.2) deben satisfacer la igualdad anterior. Nótese que el miembro izquierdo de (3.8), al que llamaremos  $f(x)$ , es igual a  $r(a\mu - (c/r))$  en  $x = 0$ , y tiende a  $-\infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , por lo que la ecuación (3.2) tendrá al menos un punto de equilibrio de coexistencia si  $a\mu - (c/r) > 0$ .

Más aún, por la regla de Descartes de los signos, si  $\sigma$  es el número de cambios de signo en  $f(x)$  cuando sus términos están en orden decreciente respecto de los exponentes (nótese que este orden depende de  $m$ ), entonces (3.8) tiene a lo más  $\sigma$  soluciones positivas diferentes.

De lo anterior, es fácil verificar que si  $m > 2$ , entonces el sistema (3.2) tiene a lo más 5 puntos de equilibrio de coexistencia cuando  $a\mu - (c/r)$  es mayor que cero y a lo más 4 si  $a\mu - (c/r) \leq 0$ . Para  $m \leq 2$ , se tendrán como máximo 3 de estos equilibrios si  $a\mu - (c/r) > 0$ , o 2 en caso contrario. Queda como una cuestión abierta el determinar con exactitud los casos posibles para el número de puntos de equilibrio de este sistema.

Por otra parte, si  $(\alpha, \beta)$  es un equilibrio de coexistencia de (3.2), por la segunda igualdad en (3.6) se sigue que

$$\beta = \frac{r}{k^m}(k^m - \alpha^m)(\alpha^2 + a),$$

### 38 3. Bifurcación de Andronov-Hopf en un modelo depredador-presa

y puesto que  $\beta > 0$ , es necesario que se cumpla

$$k > \alpha.$$

Sustituyendo  $\alpha$  y esta expresión para  $\beta$  en (3.7), obtenemos después de despejar,

$$c = \frac{r}{k^m}(k^m - \alpha^m)(\mu(\alpha^2 + a) - s\alpha),$$

lo que implica la restricción adicional

$$\mu(\alpha^2 + a) - s\alpha > 0.$$

Es inmediato comprobar que las condiciones anteriores son suficientes para que  $(\alpha, \beta)$  sea un punto de equilibrio de coexistencia de nuestro modelo. Resumiremos estas observaciones en la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.** *El punto  $(\alpha, r(k^m - \alpha^m)(\alpha^2 + a)/k^m)$  es un equilibrio de coexistencia del sistema (3.2) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

- i)  $c = r(k^m - \alpha^m)(\mu(\alpha^2 + a) - s\alpha)/k^m$ ,
- ii)  $k > \alpha$ ,
- iii)  $\mu(\alpha^2 + a) - s\alpha > 0$ .

Ahora bien, si  $(\alpha, r(k^m - \alpha^m)(\alpha^2 + a)/k^m)$  es de equilibrio y hacemos el cambio de coordenadas dado por  $x = \alpha X$ ,  $y = \alpha^2 Y$ , obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} X' &= X \left( r \left( 1 - \left( \frac{X}{k/\alpha} \right)^m \right) - \frac{Y}{X^2 + (a/\alpha^2)} \right), \\ Y' &= \left( \frac{(s/\alpha)YX}{X^2 + (a/\alpha^2)} \right) + (c/\alpha^2) - \mu Y, \end{aligned}$$

renombrando  $X$ ,  $Y$ ,  $k/\alpha$ ,  $a/\alpha^2$ ,  $s/\alpha$ ,  $c/\alpha^2$ , como  $x$ ,  $y$ ,  $k$ ,  $a$ ,  $s$ ,  $c$ , respectivamente, se tiene de nuevo el sistema (3.2), ahora con equilibrio en

$$\left( 1, \frac{r}{k^m}(k^m - 1)(1 + a) \right)$$

y las restricciones

$$c = \frac{r}{k^m}(k^m - 1)(\mu(1 + a) - s), \quad \mu(1 + a) - s > 0, \quad k > 1. \quad (3.9)$$

De manera que si (3.2) tiene un punto de equilibrio de coexistencia, sin pérdida de generalidad asumiremos que dicho punto es  $(1, r(k^m - 1)(1 + a)/k^m)$  y que se satisfacen las condiciones (3.9).

Por último, tomaremos un nuevo tiempo  $\tau$  dado por  $dt = k^m(x^2 + a)d\tau$  para transformar la ecuación (3.2) en el sistema polinomial

$$\begin{aligned} x' &= x(r(x^2 + a)(k^m - x^m) - k^m y), \\ y' &= k^m s y x + k^m c(x^2 + a) - k^m \mu y(x^2 + a). \end{aligned} \quad (3.10)$$

### 3.1. Resultados principales

A continuación enunciaremos y demostraremos el resultado principal de este capítulo, el sistema (3.10) (y en consecuencia también el sistema (3.2)) presenta una bifurcación de Andronov-Hopf si los parámetros se eligen adecuadamente. La idea de la demostración es tomar un punto de equilibrio de coexistencia y llevarlo a la forma normal requerida por el teorema 1.3, reduciendo el número de parámetros durante el proceso.

**Teorema 3.1.** *Existe un conjunto de parámetros para el cual el sistema (3.10) presenta una bifurcación de Andronov-Hopf.*

#### Demostración.

Consideremos un punto de equilibrio en  $(1, r(k^m - 1)(1 + a)/k^m)$ . Sustituyendo en (3.10) la expresión para  $c$  dada en (3.9) obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x(r(x^2 + a)(k^m - x^m) - k^m y), \\ y' &= k^m s y x + r(k^m - 1)(\mu(1 + a) - s)(x^2 + a) - k^m \mu y(x^2 + a). \end{aligned}$$

Reduciremos el número de parámetros asumiendo que el equilibrio se da en  $(1, 1)$ , esto obliga a

$$r = \frac{k^m}{(k^m - 1)(1 + a)}.$$

Como una simplificación adicional, haremos

$$k^m = 2m + 1,$$

lo que implica

$$r = \frac{2m + 1}{2m(1 + a)}.$$

Obsérvese que esta elección de  $k$  satisface la restricción  $k > 1$  dada en (3.9).

Después de efectuar estas sustituciones, al escribir el sistema en la forma  $(x', y') = g(x, y)$  resulta

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \left( x \left( \frac{(2m + 1)(a + x^2)(-x^m + 2m + 1)}{2(a + 1)m} - (2m + 1)y \right), \right. \\ &\quad \left. \frac{(2m + 1)(a + x^2)((a + 1)\mu - s)}{a + 1} - \mu(2m + 1)y(a + x^2) + (2m + 1)sxy \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para obtener la linearización del sistema en el punto de equilibrio, cal-

### 40 3. Bifurcación de Andronov-Hopf en un modelo depredador-presa

culamos primero las entradas de la derivada de  $g$

$$\begin{aligned} Dg_{11} &= -(2m+1)[a(m(x^m+2y-2)+x^m-1) \\ &\quad + (m+3)x^{m+2}-3(2m+1)x^2+2my]/[2(a+1)m], \\ Dg_{12} &= (-2m-1)x, \\ Dg_{21} &= (2m+1)sy-2(2m+1)x\mu y + \frac{2(2m+1)x((a+1)\mu-s)}{a+1}, \\ Dg_{22} &= (2m+1)sx-(2m+1)(x^2+a)\mu. \end{aligned}$$

De donde  $Dg(1,1)$ , la matriz de la parte lineal del sistema en el punto  $(1,1)$  es

$$\begin{pmatrix} (1/2)(-2m-1) + (2(2m+1)/(a+1)) & -2m-1 \\ (2m+1)s - 2(2m+1)\mu \\ + (2(2m+1)((a+1)\mu-s)/(a+1)) & (2m+1)s - (a+1)(2m+1)\mu \end{pmatrix},$$

con polinomio característico

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + \frac{\lambda(2m+1)(2a^2\mu+4a\mu-2as+a+2\mu-2s-3)}{2(a+1)} \\ &\quad + \frac{1}{2}(2m+1)^2((a-3)\mu+s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vamos a forzar a  $(1,1)$  a ser un foco con valores propios  $M \pm i$ . En dado caso, el polinomio característico tendría que ser de la forma  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2M\lambda + (1 + M^2)$ , de donde es necesario que se satisfaga

$$\frac{1}{2}(2m+1)^2((a-3)\mu+s) > 0,$$

o equivalentemente  $(a-3)\mu+s > 0$ .

Introduciremos temporalmente un nuevo parámetro  $\omega > 0$  y haremos  $s = \mu(1 + \omega a)$ . Nótese que la condición  $\mu(1+a) - s > 0$  en (3.9) se transforma en la restricción  $\omega < 1$ . La desigualdad  $(a-3)\mu+s > 0$  se convierte en  $a(\omega+1) > 2$ , que se satisface si elegimos  $a = 2$ .

Al efectuar en (3.12) las sustituciones  $a = 2$ ,  $s = \mu(1 + 2\omega)$ , obtenemos

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda(2m+1)(12(\omega-1)\mu+1) + \omega\mu(2m+1)^2.$$

Igualando coeficientes con  $\lambda^2 - 2M\lambda + (1 + M^2)$  y resolviendo para  $M$ ,  $\omega$ , resulta

$$M = \frac{1}{6(\mu + 2\mu m)} \left[ 3\mu(2m + 1)^2 - \sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right], \quad (3.13)$$

$$\omega = \frac{1}{12(\mu + 2\mu m)^2} \left[ 5\mu(2m + 1)^2 + 12(\mu + 2\mu m)^2 - 2\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right]. \quad (3.14)$$

Si ahora hacemos

$$a = 2, \quad s = \mu(1 + \omega a),$$

en el sistema (3.11), con  $\omega$  dada por la expresión (3.14), obtendremos

$$x' = \frac{1}{6}(2m + 1)x \left( \frac{(x^2 + 2)(-x^m + 2m + 1)}{m} - 6y \right), \quad (3.15)$$

$$y' = \frac{2\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} (x^2 - 3xy + 2)}{18(\mu + 2\mu m)} - \frac{5\mu(2m + 1)^2 (x^2 - 3xy + 2) - 18(x^2 - 3x + 2)y(\mu + 2\mu m)^2}{18(\mu + 2\mu m)}.$$

Este sistema tiene un foco en  $(1, 1)$  con valores propios  $M \pm i$ , donde  $M$  es como en (3.13).

En este punto es conveniente hacer un paréntesis para aclarar algunos detalles. Hemos asumido implícitamente que  $M$  es un número real, lo cual no se cumple si  $m$ ,  $\mu$  son ambas pequeñas. Sin embargo, para cada  $m > 0$ , si  $\mu$  es suficientemente grande entonces  $M$  es real, como se puede apreciar en la gráfica de  $M(\mu, m)$  (en rojo en las figuras 3.1 y 3.2, el plano  $z = 0$  se muestra en azul)

Más aún, para toda  $m > 0$  existe un único valor  $\mu_m$  de  $\mu$  donde  $M$  se anula,  $M(\mu_m, m) = 0$ . Nótese que existe un intervalo alrededor de  $\mu_m$  donde  $M$ , vista como función de  $\mu$ , es decreciente. Una expresión para  $\mu_m$  en términos de  $m$  se puede obtener haciendo  $M = 0$  en (3.13) y despejando  $\mu$  para llegar a

$$\mu_m = \frac{4m^2 + 4m + 13}{12(2m + 1)^2} \quad (3.16)$$

En la Fig. 3.3 se exhibe la gráfica de  $\mu_m$  como función de  $m$ .

Por otro lado tenemos la restricción  $\omega < 1$ . Sustituyendo (3.16) en (3.14) obtenemos

$$\omega(\mu_m, m) = \frac{12}{4m^2 + 4m + 13},$$

la gráfica de esta función de  $m$  se muestra en la Fig. 3.4.

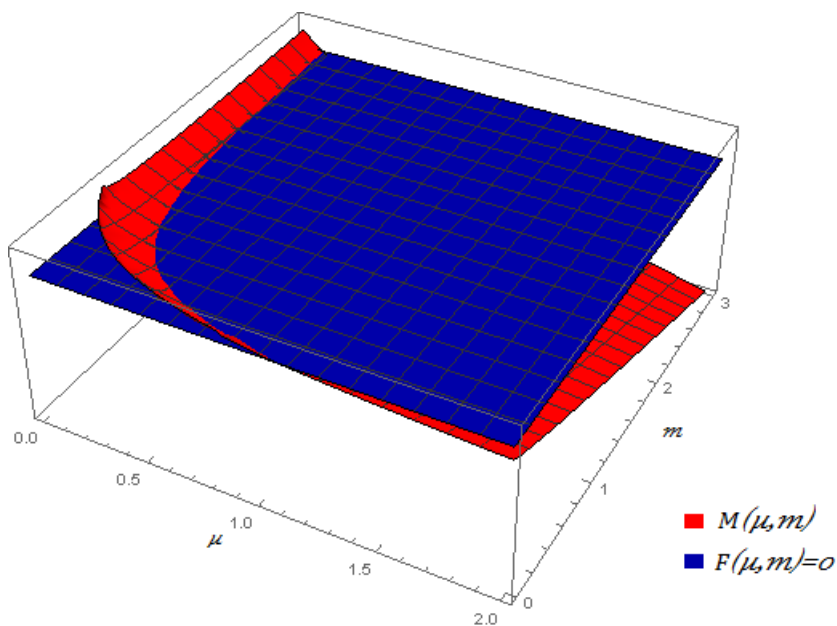


Figura 3.1: Gráfica de  $M$  como función de  $\mu, m$ .

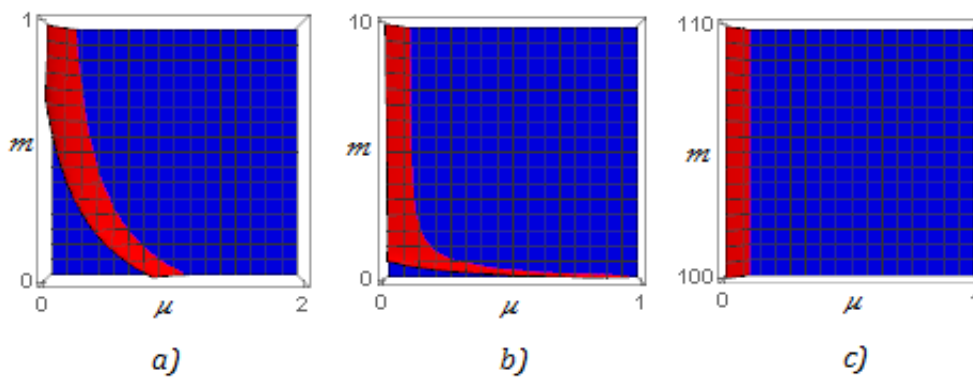


Figura 3.2: Vista superior de la gráfica de  $M(\mu, m)$  en diversas regiones.

Para  $m \in \mathbb{R}^+$  fija, tenemos que  $0 < \omega(\mu_m, m) < 1$ . Por continuidad existe un intervalo alrededor de  $\mu_m$  en donde se cumple  $0 < \omega(\mu, m) < 1$ .

La conclusión de este paréntesis es que para toda  $m > 0$ , existe un intervalo de variación de  $\mu$  en donde se cumple lo siguiente:

- i)* Las sustituciones que hemos hecho satisfacen restricciones equivalentes a (3.9).
- ii)*  $M$  es decreciente como función de  $\mu$ .
- iii)* El intervalo contiene un punto  $\mu_m$  tal que  $M(\mu_m, m) = 0$ .

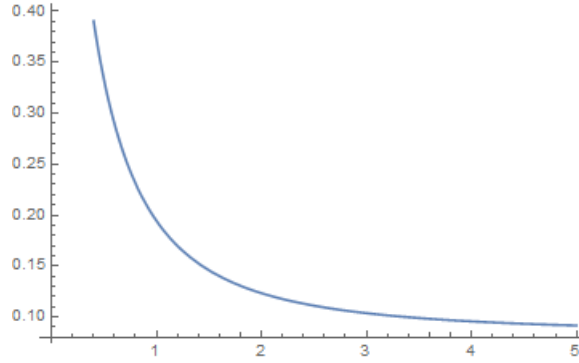


Figura 3.3: Gráfica de  $\mu_m(m) = \frac{4m^2+4m+13}{12(2m+1)^2}$ .

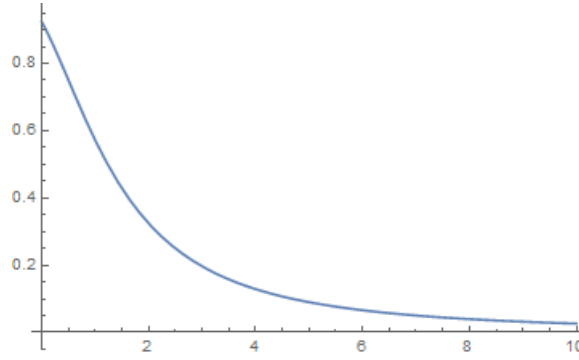


Figura 3.4: Gráfica de  $\omega(\mu_m, m) = \frac{12}{4m^2+4m+13}$ .

Ahora trasladamos el punto de equilibrio al origen mediante el cambio de coordenadas  $x = X + 1$ ,  $y = Y + 1$ , el sistema (3.15) toma entonces la forma

$$X' = \frac{1}{6}(2m+1)(X+1) \left( \frac{((X+1)^2+2)(-(X+1)^m+2m+1)}{m} - 6(Y+1) \right),$$

$$Y' = \mu(-2m-1)((X+1)^2+2)(Y+1) + \frac{(X+1)(Y+1)}{6(\mu+2\mu m)} \left[ 5\mu(2m+1)^2 + 18(\mu+2\mu m)^2 \right. \\ \left. - 2\sqrt{6}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right] + \frac{(X^2+2X+3)}{18(\mu+2\mu m)} \\ \cdot \left( 2\sqrt{6}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} - 5\mu(2m+1)^2 \right),$$

cuya linearización en el origen está dada por la matriz con entradas  $A_{ij}$

$$A_{11} = \frac{1}{2}(-2m-1) + \frac{2}{3}(2m+1),$$



$$A_{12} = -1 - 2m,$$

$$A_{21} = \left[ -2\sqrt{6}\sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} + 5\mu(2m + 1)^2 + 18(\mu + 2\mu m)^2 \right] / [18(\mu + 2\mu m)],$$

$$A_{22} = \frac{-2\sqrt{6}\sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} + 5\mu(2m + 1)^2}{6(\mu + 2\mu m)}.$$

Consideremos un vector propio correspondiente al valor propio  $M+i$ , por ejemplo

$$\begin{pmatrix} -6\mu(2m + 1)^2 \\ -\sqrt{6}\sqrt{\mu^2(2m + 1)^2 (6\mu + 24\mu m^2 + 4m^2 + 24\mu m + 4m - 5)} \\ + (2 + 6i)\mu + 8\mu m^2 + (8 + 12i)\mu m \end{pmatrix},$$

que escribiremos en la forma  $u_1 + iv_1$  con  $u_1, v_1 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} -6\mu(2m + 1)^2 \\ -\sqrt{6}\sqrt{\mu^2(2m + 1)^2 (6\mu + 24\mu m^2 + 4m^2 + 24\mu m + 4m - 5)} \\ + 2\mu + 8\mu m^2 + 8\mu m \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 6\mu + 12m\mu \end{pmatrix}.$$

Llevaremos la parte lineal del sistema a la forma normal

$$\begin{pmatrix} M & -1 \\ 1 & M \end{pmatrix}.$$

Para esto, haremos el cambio de coordenadas  $(u, v) = P^{-1}(X, Y)$ , donde  $P$  es la matriz  $P = [v_1, u_1]$ . Las expresiones en estas nuevas coordenadas para  $u'$ ,  $v'$ , se muestran en el apéndice al final de la tesis. En ambas aparece el término  $(1 - 6\mu(2m + 1)^2 v)^m$ . Para encontrar el primer coeficiente de Lyapunov y usar el teorema 1.3, necesitamos sólo los términos de grado a lo más 3 en los desarrollos de  $u'$ ,  $v'$ , como series en  $uv$ , por lo que podemos reemplazar a  $(1 - 6\mu(2m + 1)^2 v)^m$  por los primeros 4 términos de la serie de Taylor en  $v = 0$

$$(1 - 6\mu(2m + 1)^2 v)^m = 1 - 6v(m(\mu + 4\mu m^2 + 4\mu m)) + 18(m - 1)mv^2(\mu + 4\mu m^2 + 4\mu m)^2 - 36v^3((m - 2)(m - 1)m(\mu + 4\mu m^2 + 4\mu m)^3) + O(v^4).$$

Procediendo de esta manera, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} u' &= Mu - v + a_{20}(\mu, m)u^2 + a_{11}(\mu, m)uv + a_{02}(\mu, m)v^2 \\ &\quad + a_{30}(\mu, m)u^3 + a_{21}(\mu, m)u^2v + a_{12}(\mu, m)uv^2 + a_{03}(\mu, m)v^3 + \dots \\ v' &= u + Mv + b_{20}(\mu, m)u^2 + b_{11}(\mu, m)uv + b_{02}(\mu, m)v^2 \\ &\quad + b_{30}(\mu, m)u^3 + b_{21}(\mu, m)u^2v + b_{12}(\mu, m)uv^2 + b_{03}(\mu, m)v^3 + \dots \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}(\mu, m) = a_{ij}$ ,  $b_{ij}(\mu, m) = b_{ij}$ , están dados por

$$\begin{aligned}
a_{20} &= a_{30} = a_{21} = 0, \\
a_{11} &= (-2m - 1)uv \left[ -\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \\
&\quad \left. + 3\mu(2m + 1)^2 + 6(\mu + 2\mu m)^2 \right], \\
a_{02} &= -\frac{(2m + 1)^2}{12} \left[ -\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \\
&\quad \cdot (3m + 13) - 2\mu(6\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \\
&\quad \left. - 12m^3 - 80m^2 - 71m + 19) + 168(\mu + 2\mu m)^2 \right], \\
a_{12} &= -36\mu^3(2m + 1)^5, \\
a_{03} &= \frac{1}{2}\mu(2m + 1)^4 (-12\mu + m^2 + 2m - 1) \\
&\quad \cdot \left( 2\mu(2m + 1)^2 - \sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right), \\
b_{20} &= b_{30} = b_{21} = b_{12} = 0, \\
b_{11} &= -6(1 + 2m)^2\mu, \\
b_{02} &= \frac{(2m + 1)}{2} \left( 2\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \\
&\quad \left. + 3\mu(m - 3)(2m + 1)^2 \right), \\
b_{03} &= -3\mu^2(2m + 1)^5 (m^2 + 2m - 1).
\end{aligned}$$

Por lo visto en el capítulo 1, el valor cuando  $M = 0$  del primer coeficiente de Lyapunov,  $\sigma$ , debe ser igual a

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{3\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) \\
&\quad - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Al sustituir en (3.18) las expresiones que hemos encontrado para los  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ , obtendremos una expresión  $\sigma(\mu, m)$  que depende de  $\mu$  y de  $m$  (ésta se puede consultar en el apéndice). Sin embargo, como se vio en la deducción de la igualdad (3.16),  $M = 0$  si y sólo si

$$\mu = \mu_m = \frac{4m^2 + 4m + 13}{12(2m + 1)^2}.$$

De manera que  $\sigma(m) = \sigma(\mu_m, m)$  nos dará el valor cuando  $M = 0$  del primer coeficiente de Lyapunov como función solo de  $m$ , en efecto

$$\sigma(m) = \frac{\pi (4m^2 + 4m + 13)^2 (96m^6 - 112m^5 - 528m^4 - 1064m^3 - 138m^2 + 449m + 106)}{768(2m + 1)}.$$

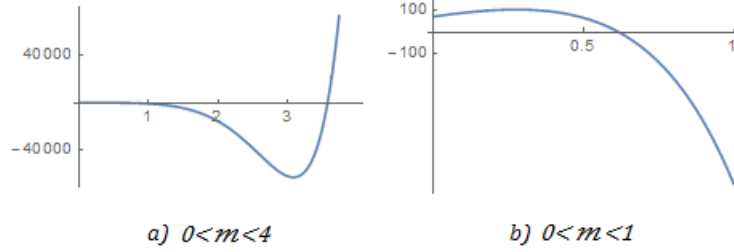


Figura 3.5: Gráfica de  $\sigma(m)$ , el primer coeficiente de Lyapunov cuando  $M = 0$ , con  $m$  en dos intervalos diferentes.

En la Fig. 3.5 mostramos la gráfica de  $\sigma(m)$ .

La función  $\sigma(m)$  tiene dos raíces positivas  $m_1 \approx ,616549$ ,  $m_2 \approx 3,57409$ , es negativa si  $m \in (m_1, m_2)$  y positiva si  $0 < m < m_1$  o  $m > m_2$ .

Por el teorema 1.3, se sigue que si  $m \in (m_1, m_2)$ , entonces el sistema (3.17) presenta en el origen una bifurcación de Andronov-Hopf supercrítica en el valor de bifurcación  $M = 0$  (en términos del parámetro  $\mu$ , el valor de bifurcación es  $\mu = \mu_m$ ), generándose un único ciclo límite estable al crecer  $M$  a partir de cero (o equivalentemente, al decrecer  $\mu$  a partir de  $\mu_m$ ).

En los casos  $0 < m < m_1$ ,  $m > m_2$ , se da una bifurcación de Andronov-Hopf subcrítica en el origen, se genera un único ciclo límite inestable al crecer  $\mu$  a partir del valor de bifurcación  $\mu = \mu_m$ . ■

Terminaremos este capítulo mostrando el retrato del sistema (3.10) para  $m = 2$ , con los parámetros usados en la demostración del teorema 3.1, estos son

$$\begin{aligned}
 m = 2, \quad a = 2, \quad k = \sqrt{5}, \quad r &= \frac{k^m}{(k^m - 1)(1 + a)} = \frac{5}{12}, \\
 s = \mu(1 + \omega a) &= \frac{1}{30} \left( -\frac{2\sqrt{6}\sqrt{\mu^2(150\mu + 19)}}{\mu} + 90\mu + 25 \right), \\
 c = \frac{r}{k^m}(k^m - 1)(\mu(1 + a) - s) &= \frac{2\sqrt{6}\sqrt{\mu^2(150\mu + 19)} - 25\mu}{90\mu},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde  $\omega$  está dada por la expresión (3.14). Efectuando las sustituciones indicadas en (3.19), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}
 x' &= -\frac{5}{12}x(x^4 - 3x^2 + 12y - 10), \\
 y' &= \frac{1}{18\mu} \left[ 2\sqrt{6}\sqrt{\mu^2(150\mu + 19)}(x^2 - 3xy + 2) \right. \\
 &\quad \left. - 90\mu^2(x^2 - 3x + 2)y - 25\mu(x^2 - 3xy + 2) \right],
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

que como se vió en dicha demostración, debe tener un valor de bifurcación en

$$\mu = \frac{4m^2 + 4m + 13}{12(2m + 1)^2} = \frac{37}{300},$$

generándose un ciclo límite estable al decrecer  $\mu$  a partir de este valor. Si elegimos  $\mu = 1/10$ , entonces (3.20) se transforma en

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{5}{12}x(x^4 - 3x^2 + 12y - 10), \\ y' &= \frac{1}{18} \left( -9(x^2 - 3x + 2)y + 4\sqrt{51}(x^2 - 3xy + 2) - 25(x^2 - 3xy + 2) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hay un único punto de equilibrio de coexistencia en  $(1, 1)$ , que es un foco repulsor con valores propios  $((5/2) - \sqrt{17/3}) \pm i$ .

Sobre los ejes se tiene el punto de equilibrio  $(0, c/\mu) \approx (0, 0,39619)$ , éste es un punto silla con valores propios  $-1, (325 - 40\sqrt{51})/18$ , y las dos trayectorias que aproximan al equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$  están contenidas en el eje  $Y$ .

Por la proposición 3.1 las trayectorias de (3.21) son acotadas. Tal como se argumentó al hacer el retrato del sistema (2.8) en el capítulo 2, la existencia de un ciclo límite estable se sigue del teorema de Poincaré-Bendixson. De manera más general,  $(0, c/\mu)$  es un punto silla de (3.10) si y sólo si  $ar\mu > c$ , por lo que se puede garantizar la existencia de una órbita periódica de (3.10), en cualquier región de parámetros en donde se satisfaga esta desigualdad y un foco inestable sea el único punto de equilibrio de coexistencia.

En la Fig. 3.6 se exhibe el retrato generado por computadora del sistema (3.21).

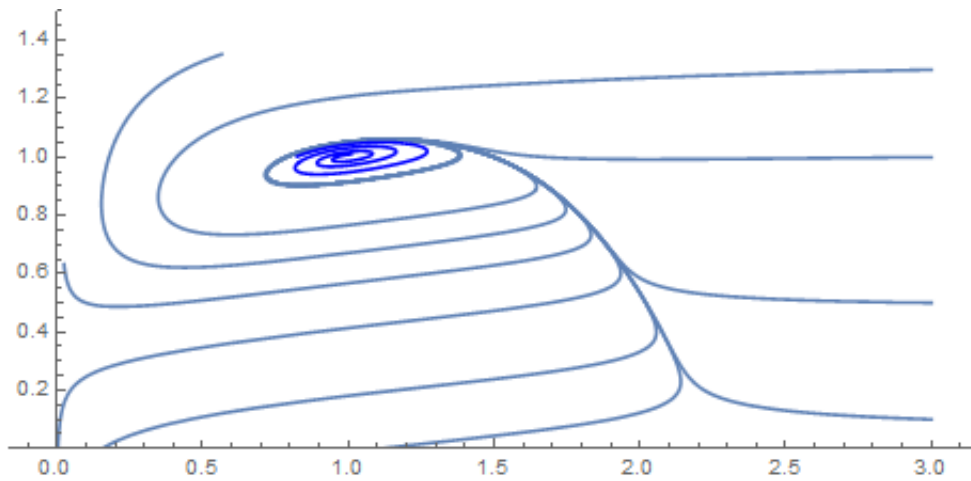


Figura 3.6: Retrato del sistema (3.21) con un ciclo límite estable producto de una bifurcación de Andronov-Hopf

La curva en azul oscuro corresponde a una trayectoria con condición inicial  $x(0) = 1,01$ ,  $y(0) = 1,01$ , para  $t \in [0, 20]$ ; como se puede apreciar, ésta aproxima rápidamente al ciclo límite en comparación con la trayectoria mostrada en la Fig. 2.7. De hecho, los retratos mostrados en las figuras 2.7 y 3.6 reflejan una diferencia cualitativa entre las bifurcaciones de Andronov-Hopf y cero-Hopf: en el caso de la bifurcación de Andronov-Hopf, basta con una aproximación lineal del sistema para identificar como un foco al punto de equilibrio en cuestión; mientras que en la bifurcación cero-Hopf, el foco es indistinguible de un centro mediante una aproximación lineal.

## Capítulo 4

# Conclusiones

En el desarrollo moderno de la Ecología, ha cobrado importancia el uso de herramientas matemáticas para tratar de explicar los datos registrados al estudiar diversos ecosistemas, entre las herramientas que se utilizan frecuentemente se encuentran los sistemas de ecuaciones diferenciales, como es el caso de los modelos depredador-presa. Es un problema de interés matemático el analizar distintos comportamientos en estos modelos y determinar qué tan robustos son, es decir, qué tanto dependen de los parámetros. En este sentido por ejemplo, hemos demostrado que la acotabilidad de las órbitas de los modelos (4) y (6) es un comportamiento totalmente robusto, pues es independiente de los parámetros. Lo mismo se puede decir de la no existencia de una bifurcación de Andronov-Hopf para el sistema (4) y de las cotas superiores para el número de puntos de equilibrio de coexistencia en ambos modelos.

Respecto de el número de puntos de equilibrio, cabe añadir que la cota superior de 3 puntos de equilibrio de coexistencia (puntos CEP) para el modelo (4) es fina, y a partir del análisis que hicimos es fácil dar ejemplos en donde se tengan 0, 1, 2 o 3 de estos puntos. Por ejemplo, con los parámetros  $m = 3/2$ ,  $k = 2^{2/3}$ ,  $a = s = q = n = 1$ ,  $r = c = 2$ , no hay puntos de equilibrio de coexistencia. Haciendo la modificación  $n = 1/100$ ,  $c = 199/100$  se tendrán 3 de estos equilibrios (nótese que esta modificación consiste en mover un poco una ceroclina dada por una recta). Para el modelo (6), dimos una cota de 5 puntos CEP basándonos en una generalización de la regla de los signos de Descartes; sin embargo, consideraciones geométricas similares a las que hicimos para el sistema (4), nos llevan a suponer que de hecho (6) sólo puede tener 0, 1, 2 o 3 de estos equilibrios. El confirmar esta conjetura es una cuestión que queda abierta para un estudio posterior, así como el caracterizar cada uno de los casos posibles en ambos modelos en términos de los parámetros. En particular, una caracterización del caso de 1 punto CEP sería un paso importante hacia un criterio de existencia de una órbita periódica, apoyándose en el teorema de Poincaré-Bendixson como hicimos al final de los capítulos 2 y 3.

Como hemos demostrado, el modelo (4) no puede tener una bifurcación de Andronoc-Hopf. Sin embargo, al reemplazar la ecuación del depredador, el modelo (6) así obtenido admite una bifurcación de Andronov-Hopf para toda  $m > 0$ . Una

primera línea de investigación a futuro, sería el determinar regiones de parámetros para (6) en donde se dé este comportamiento. Para esto disponemos de teoremas generales, como el teorema 1.3, y también se pueden usar como referencia las ideas expuestas en [R/X], [Z/C/W], en donde se hace un extenso análisis de las bifurcaciones posibles en modelos similares a (6).

En el caso de la bifurcación cero Hopf, demostramos que ésta se puede presentar en (4) si  $m = 2$ , y tenemos buenas bases para pensar que lo mismo ocurre para toda  $m > 0$ . Además de el confirmar o descartar ésta hipótesis, de aquí surgen otros problemas que nos parecen interesantes. Por ejemplo: para sistemas particulares, dar regiones de parámetros tales que se pueda tener una bifurcación cero Hopf; o de manera más general, establecer resultados análogos al teorema 1.3.

En cuanto a la herramienta que hemos usado, esta tesis es un ejemplo de el uso de los coeficientes de Lyapunov en la búsqueda de órbitas periódicas. Como ya hemos mencionado, el cálculo de estas constantes se complica rápidamente y sin el uso de tecnología se vuelve prácticamente imposible. A este respecto es necesario mencionar que la mayor parte del análisis numérico en la tesis se realizó por medio de el software Mathematica.

# Apéndice A

## Expresiones auxiliares

### A.1. Expresiones del capítulo 2

Coeficientes del desarrollo de  $R', \theta'$ , como series en  $R$ .

$$a_2(\theta) = -\frac{5}{8(a-3)(a+1)^3} \left[ (-a^6 - 6a^5 - 14a^4 - 28a^3 - 12a^2 + 20a + 29) \cos(\theta) \right. \\ \left. - (a+1) [(5a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 28a - 9) \sin(\theta) + (a^4 - 8a^3 - 16a^2 + 12a - 13) \cdot \sin(3\theta)] + (a^6 + 6a^5 + 18a^4 + 12a^3 + 4a^2 + 28a + 7) \cos(3\theta) \right]$$

$$a_3(\theta) = \frac{5 \sin(\theta)}{16(a-3)(a+1)^3} \left[ (a^6 + 18a^5 + 72a^4 + 136a^3 + 187a^2 + 58a - 80) \cos(\theta) \right. \\ \left. + a^5 \sin(\theta) - 3a^5 \sin(3\theta) + 57a^4 \sin(\theta) - 11a^4 \sin(3\theta) + 165a^3 \sin(\theta) \right. \\ \left. - 63a^3 \sin(3\theta) + 251a^2 \sin(\theta) - 81a^2 \sin(3\theta) + 230a \sin(\theta) - 2a \sin(3\theta) \right. \\ \left. - (a^6 + 18a^5 + 72a^4 + 152a^3 + 107a^2 + 106a + 64) \cos(3\theta) + 24 \sin(\theta) \right. \\ \left. - 40 \sin(3\theta) \right]$$

$$a_4(\theta) = \frac{5 \sin^2(\theta)}{16(a-3)(a+1)^3} \left[ (a^6 - 4a^5 - 50a^4 - 144a^3 - 171a^2 - 148a - 76) \cos(3\theta) \right. \\ \left. - 3a^5 \sin(\theta) + a^5 \sin(3\theta) + 17a^4 \sin(\theta) - 3a^4 \sin(3\theta) + 127a^3 \sin(\theta) \right. \\ \left. - 53a^3 \sin(3\theta) + (-a^6 + 4a^5 + 50a^4 + 136a^3 + 211a^2 + 124a + 4) \cos(\theta) \right. \\ \left. + 279a^2 \sin(\theta) - 101a^2 \sin(3\theta) + 324a \sin(\theta) - 60a \sin(3\theta) + 120 \sin(\theta) \right. \\ \left. - 40 \sin(3\theta) \right]$$

$$a_5(\theta) = -\frac{5(3a^3 - 11a^2 - 26a - 32) \sin^5(\theta) ((a+1) \cos(\theta) + \sin(\theta))}{4(a-3)(a+1)^2}$$

$$b_1(\theta) = -\frac{5 \sin(\theta)}{2(a-3)(a+1)^3} \left[ (a^5 - 7a^4 - 24a^3 - 4a^2 - a - 13) \sin(\theta) \cos(\theta) \right. \\ \left. + (-2a^4 + 13a^2 + 10a + 15) \cos^2(\theta) + (a+1)^2 (a^4 + 4a^3 + 7a^2 - 6a + 22) \sin^2(\theta) \right]$$



$$b_2(\theta) = 5 \sin^2(\theta) [(a^6 + 18a^5 + 72a^4 + 152a^3 + 107a^2 + 106a + 64) \cos(2\theta) \\ - a^6 - 18a^5 - 76a^4 - 128a^3 - 143a^2 - 106a - 64 \\ + (3a^5 + 11a^4 + 63a^3 + 81a^2 + 2a + 40) \sin(2\theta)] / [8(a-3)(a+1)^3]$$

$$b_3(\theta) = -5 \sin^3(\theta) [(a^6 - 4a^5 - 50a^4 - 144a^3 - 171a^2 - 148a - 76) \cos(2\theta) \\ + (a^5 - 3a^4 - 53a^3 - 101a^2 - 60a - 40) \sin(2\theta) \\ - (a+1)^2 (a^4 - 6a^3 - 39a^2 - 56a - 40)] / [8(a-3)(a+1)^3]$$

$$b_4(\theta) = \frac{5(3a^3 - 11a^2 - 26a - 32) \sin^5(\theta) ((a+1) \sin(\theta) - \cos(\theta))}{4(a-3)(a+1)^2}$$

$$b_5(\theta) = \frac{5(a^2 + 2a + 2) \sin^6(\theta) ((a+1) \sin(\theta) - \cos(\theta))}{4(a+1)^2}$$

Coeficientes del desarrollo de  $\frac{dR}{d\theta}$  como serie en  $R$ .

$$c_2(\theta) = \frac{1}{8(a-3)(a+1)^3} [(a^6 + 6a^5 + 14a^4 + 28a^3 + 12a^2 - 20a - 29) \cos(\theta) \\ - (a^6 + 6a^5 + 18a^4 + 12a^3 + 4a^2 + 28a + 7) \cos(3\theta) + (a+1) \\ \cdot [(5a^4 + 8a^3 + 8a^2 + 28a - 9) \sin(\theta) + (a^4 - 8a^3 - 16a^2 + 12a - 13) \sin(3\theta)]]$$

$$c_3(\theta) = \frac{1}{128(a-3)^2(a+1)^6} [(5 \sin(2\theta) - 4 \sin(4\theta) + \sin(6\theta))a^{12} + (\dots)a^{11} \\ + \dots + 224 \cos(4\theta) + 598 \cos(2\theta) - 984 \sin(2\theta) + 456 \sin(4\theta) \\ - 120 \sin(6\theta) - 182 \cos(6\theta) - 640]$$

$$c_4(\theta) = -\sin^2(\theta) [(-5 \cos(5\theta) + \cos(7\theta) - 5 \cos(\theta) + 9 \cos(3\theta))a^{18} + (\dots)a^{17} \\ + \dots + 29414 \cos(\theta) + 9534 \cos(3\theta) + 10914 \cos(5\theta) - 3206 \cos(7\theta) \\ + 4002 \sin(\theta) + 5422 \sin(3\theta) + 3950 \sin(5\theta) - 286 \sin(7\theta)] / [512(a-3)^3(a+1)^9]$$

$$c_5(\theta) = \sin^3(\theta) [(20 \cos(5\theta) - 7 \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + 14 \cos(\theta) - 28 \cos(3\theta))a^{24} \\ + (\dots)a^{23} + \dots - 1201072 \cos(\theta) - 544280 \cos(3\theta) - 371560 \cos(5\theta) \\ + 82772 \cos(7\theta) - 18724 \cos(9\theta) + 412296 \sin(\theta) - 193000 \sin(3\theta) \\ + 123928 \sin(5\theta) + 272872 \sin(7\theta) - 43680 \sin(9\theta)] / [4096(a-3)^4(a+1)^{12}]$$

**Coefficientes de la solución  $R(\theta, x, 0)$  con condición inicial  $R(0) = x$ .**

$$v_1(\theta) = 1$$

$$v_2(\theta) = \frac{1}{24(a-3)(a+1)^3} \left[ 3a^6 \sin(\theta) - a^6 \sin(3\theta) + 18a^5 \sin(\theta) - 6a^5 \sin(3\theta) \right. \\ - 15a^5 \cos(\theta) - a^5 \cos(3\theta) + 16a^5 + 42a^4 \sin(\theta) - 18a^4 \sin(3\theta) \\ - 39a^4 \cos(\theta) + 7a^4 \cos(3\theta) + 32a^4 + 84a^3 \sin(\theta) - 12a^3 \sin(3\theta) \\ - 48a^3 \cos(\theta) + 24a^3 \cos(3\theta) + 24a^3 + 36a^2 \sin(\theta) - 4a^2 \sin(3\theta) \\ - 108a^2 \cos(\theta) + 4a^2 \cos(3\theta) + 104a^2 - 60a \sin(\theta) - 28a \sin(3\theta) \\ - 57a \cos(\theta) + a \cos(3\theta) + 56a - 87 \sin(\theta) - 7 \sin(3\theta) \\ \left. + 27 \cos(\theta) + 13 \cos(3\theta) - 40 \right]$$

$$v_3(\theta) = \frac{1}{2304(a-3)^2(a+1)^6} \left[ (-75 \cos(2\theta) + 30 \cos(4\theta) - 5 \cos(6\theta) + 50)a^{12} + (\dots)a^{11} \right. \\ + \dots - 11520\theta - 8640 \cos(\theta) - 984 \cos(2\theta) - 4160 \cos(3\theta) - 3084 \cos(4\theta) \\ + 600 \cos(6\theta) + 27840 \sin(\theta) - 246 \sin(2\theta) + 2240 \sin(3\theta) - 4272 \sin(4\theta) \\ \left. - 910 \sin(6\theta) + 16268 \right]$$

$$v_4(\theta) = \frac{1}{138240(a-3)^3(a+1)^9} \left[ 2520 \sin(\theta)a^{18} - 1680 \sin(3\theta)a^{18} + 720 \sin(5\theta)a^{18} \right. \\ - 180 \sin(7\theta)a^{18} + 20 \sin(9\theta)a^{18} + (\dots)a^{17} + \dots \\ + 3456000\theta - 1555200\theta \cos(\theta) - 1782540 \cos(\theta) + 295200 \cos(2\theta) \\ - 748800\theta \cos(3\theta) + 2116140 \cos(3\theta) + 925200 \cos(4\theta) + 67140 \cos(5\theta) \\ - 180000 \cos(6\theta) - 336060 \cos(7\theta) + 5720 \cos(9\theta) + 5011200\theta \sin(\theta) \\ - 3491460 \sin(\theta) + 73800 \sin(2\theta) + 403200\theta \sin(3\theta) - 2181060 \sin(3\theta) \\ + 1281600 \sin(4\theta) + 543564 \sin(5\theta) + 273000 \sin(6\theta) - 24300 \sin(7\theta) \\ \left. - 64120 \sin(9\theta) - 1110800 \right]$$

$$v_5(\theta) = \frac{1}{106168320(a-3)^4(a+1)^{12}} \left[ (-914760 \cos(2\theta) + 571725 \cos(4\theta) \right. \\ - 254100 \cos(6\theta) + 76230 \cos(8\theta) - 13860 \cos(10\theta) \\ \left. + 1155 \cos(12\theta) + 533610 \right) a^{24} + (\dots)a^{23} \\ + \dots + 3981312000\theta^2 - 14778224640\theta + 7962624000\theta \cos(\theta) \\ + 17852313600 \cos(\theta) + 680140800\theta \cos(2\theta) + 2119705344 \cos(2\theta) \\ + 3833856000\theta \cos(3\theta) - 6633369600 \cos(3\theta) + 2131660800\theta \cos(4\theta) \\ - 6353115156 \cos(4\theta) - 343756800 \cos(5\theta) - 414720000\theta \cos(6\theta) \\ + 687831936 \cos(6\theta) + 1720627200 \cos(7\theta) + 669921336 \cos(8\theta) \\ - 29286400 \cos(9\theta) - 267361920 \cos(10\theta) - 21626220 \cos(12\theta) \\ - 25657344000\theta \sin(\theta) - 10239897600 \sin(\theta) + 170035200\theta \sin(2\theta) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 9793648224 \sin(2\theta) - 2064384000\theta \sin(3\theta) + 8904806400 \sin(3\theta) \\
& + 2952806400\theta \sin(4\theta) - 3476494944 \sin(4\theta) - 2783047680 \sin(5\theta) \\
& + 628992000\theta \sin(6\theta) - 2925929904 \sin(6\theta) + 124416000 \sin(7\theta) \\
& + 562593024 \sin(8\theta) + 328294400 \sin(9\theta) + 217874160 \sin(10\theta) \\
& - 50450400 \sin(12\theta) - 9401883320 \Big]
\end{aligned}$$

## A.2. Expresiones del capítulo 3

Expresiones para  $u'$ ,  $v'$ .

$$\begin{aligned}
u' = & \frac{1}{36\mu^2(2m+1)^3} \Bigg[ \frac{1}{6}(2m+1)(1-6\mu(2m+1)^2v) \\
& \cdot \left( 2\mu(2m+1)^2 - \sqrt{6}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right) \\
& \cdot \left( \frac{\left( (1-6\mu(2m+1)^2v)^2 + 2 \right) \left( -(1-6\mu(2m+1)^2v)^m + 2m+1 \right)}{m} \right. \\
& - 6 \left( 8\mu m^2v + 6u(\mu+2\mu m) + 8\mu mv + 2\mu v + 1 \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{6v}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right) \right) \\
& + 2\mu(2m+1)^3 \left( \frac{12\mu^2(2m+1)^4v^2 - 4\mu(2m+1)^2v + 1}{2\mu(2m+1)^2} \right. \\
& \cdot \left[ 2\sqrt{6}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} - 5\mu(2m+1)^2 \right] \\
& - 3\mu \left( (1-6\mu(2m+1)^2v)^2 + 2 \right) \left[ 8\mu m^2v + 6u(\mu+2\mu m) + 8\mu mv + 2\mu v + 1 \right. \\
& \left. - \sqrt{6v}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right] \\
& - \frac{6\mu(2m+1)^2v-1}{2\mu(2m+1)^2} \left[ 5\mu(2m+1)^2 + 18(\mu+2\mu m)^2 \right. \\
& \left. - 2\sqrt{6}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right] \\
& \cdot \left[ 8\mu m^2v + 6u(\mu+2\mu m) + 8\mu mv + 2\mu v + 1 \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{6v}\sqrt{(\mu+2\mu m)^2(6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$v' = -\frac{1-6\mu(2m+1)^2v}{36(\mu+2\mu m)} \left[ \frac{\left( (1-6\mu(2m+1)^2v)^2 + 2 \right) \left( -(1-6\mu(2m+1)^2v)^m + 2m+1 \right)}{m} \right. \\ \left. - 6 \left( 8\mu m^2v + 6u(\mu+2\mu m) + 8\mu mv + 2\mu v + 1 \right. \right. \\ \left. \left. - \sqrt{6v} \sqrt{(\mu+2\mu m)^2 (6\mu+4(6\mu+1)m^2+4(6\mu+1)m-5)} \right) \right]$$

El primer coeficiente de Lyapunov,  $\sigma(\mu, m)$ .

$$\sigma(\mu, m) = \frac{3\pi}{2} \left[ -9\mu^2 (m^2 + 2m - 1) (2m + 1)^5 - 36\mu^3 (2m + 1)^5 + 3\mu(2m + 1)^3 \right. \\ \cdot \left( 2\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \\ \left. + 3\mu(m - 3)(2m + 1)^2 \right) + \frac{1}{12} (2m + 1)^3 \left[ 3\mu(2m + 1)^2 + 6(\mu + 2\mu m)^2 \right. \\ \left. - \sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right] \\ \cdot \left[ 168(\mu + 2\mu m)^2 - \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \\ \cdot \sqrt{6}(3m + 13) - 2\mu(-12m^3 - 80m^2 - 71m + 19) \\ \left. + 6\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right] \\ \left. - \frac{1}{12} (2m + 1)^3 \left[ 2\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \right. \\ \left. \left. + 3\mu(m - 3)(2m + 1)^2 \right] \right. \\ \cdot \left( -\sqrt{6}(3m + 13) \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right. \\ \left. + 168(\mu + 2\mu m)^2 - 2\mu[-12m^3 - 80m^2 - 71m + 19] \right. \\ \left. \left. + 6\sqrt{6} \sqrt{(\mu + 2\mu m)^2 (6\mu + 4(6\mu + 1)m^2 + 4(6\mu + 1)m - 5)} \right) \right]$$

# Bibliografía

- [A/L] A. Andronov, A. Leontovich, I. Gordon, G. Maier *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Israel Program for Scientific Translations, (1971)
- [A/P] D.K. Arrowsmith, C.M. Place, *Dynamical systems. Differential equations, maps and chaotic behaviour*, Chapman and Hall, (1992)
- [A/W] A. Andronov, A. Witt *Sur la théorie mathématique des auto-oscillations*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 190 (1930)
- [B] N. Bautin, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, American Mathematical Society, (1954)
- [B/F/V] G. Blé, M. Falconi, L.M. Valenzuela, *General conditions for the existence of a Zero-Hopf bifurcation*, Preprint, (2015)
- [C] V. Castellanos, *Ciclos límite en dimensión 2*, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, (1993)
- [Ch] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Springer-Verlag, (1999)
- [Ch/Wa] L. Chen, M. Wang, *The relative position and number of limit cycles of the quadratic differential system* Acta Math. Sinica, 22 (1979)
- [D/Ll/A] F. Dumortier, J. Llibre, J.C. Artés, *Qualitative theory of planar differential systems*, Springer-Verlag, (2006)
- [F/G/Ll] M. Falconi, E. González-Olivares, J. Llibre, *Zero-Hopf bifurcation in a predator-prey model*, Scientiae Mathematicae Japonicae, Vol.76 No.1 (2013)
- [F] H.I. Freedman, *Deterministic mathematical models in population ecology*, Marcel Dekker, (1980)
- [G] G.F. Gause, *The struggle for existence*, The Williams & Wilkins Company, (1934)

- [G/G/M] E. González-Olivares, B. González-Yaez, J. Mena-Lorca, *Multistability on a Leslie-Gower type predator-prey model with nonmonotonic functional response*, *Biomat* (2006), World Scientific (2007)
- [G-O/S] E. González-Olivares, E. Sáez, *Dynamics of a predator-prey model*, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.59 No.5 (1999)
- [H] E. Hopf, *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems*, *Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Nat.*, 94 (1942)
- [Hol] C.S. Holling, *Some characteristics of simple types of predation and parasitism*, *The Canadian Entomologist*, 91 (1959)
- [H/S] M.W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, Inc., (1974)
- [I] Y. Ilyashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, American Mathematical Society, *Translations of Mathematical Monographs*, Vol.94 (1991)
- [K] M. Kot, *Elements of mathematical ecology*, Cambridge University Press, (2001)
- [Kva] O. Kusnetsova, *Lyapunov quantities and limit cycles in two-dimensional dynamical systems* Jyväskylä University Printing House, (2011)
- [K/L] N.V. Kuznetsov, G.A. Leonov, *Computation of Lyapunov quantities*, 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference, (2008)
- [Ll/R] J. Llibre, G. Rodríguez, *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*, *Journal of Differential Equations*, Vol.198 (2004)
- [L] A.J. Lotka, *Undamped oscillations derived from the law of mass action*, *J. Am. Chem. Soc.*, 42 (1920)
- [P] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, (2001)
- [Po] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier-Villars, Vol.1 (1892)
- [R/X] S. Ruan, D. Xiao, *Global analysis in a predator-prey system with non-monotonic functional response*, *SIAM J. Appl. Math.*, Vol.61 No.4 (2000-2001)
- [S] S. Songling, *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, *SCIENCE CHINA Mathematics*, 23 (1980)

- [So] M.E. Solomon, *The natural control of animal populations*, Journal of Animal Ecology, 18 (1949)
- [T] R.J. Taylor, *Predation*, Chapman and Hall, (1984)
- [Te] J.S. Tener, *Muskoxen*, Queen's Printer, (1965)
- [V] V. Volterra, *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Vol.2 (1926)
- [Z/C/W] H.Zhu, S.A. Campbell, G.S.K. Wolkowicz, *Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response*, SIAM J. Appl. Math., Vol.63 No.2 (2002)