UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

ANILLOS QUE TIENEN RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS ISOMORFAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ PATRICIO SÁNCHEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA (Facultad de Ciencias, UNAM)

COMITÉ TUTORIAL:
DR. JOSÉ RÍOS MONTES (Instituto de Matemáticas, UNAM)
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA (Facultad de Ciencias, UNAM)

MÉXICO, D. F. 1 DE MARZO DEL 2016

A mis padres,
cuyo amor me ha hecho lo que soy.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar, y sobre todo, al Dr. Hugo Rincón, mi tutor, que hizo todo esto posible y me enseñó la riqueza y belleza de las matemáticas.

A mi Comité Tutorial: Dr. Alejandro Alvarado y Dr. José Ríos -quien además ha fungido como uno de mis sinodales-, por ayudarme en todo este proceso, siempre brindándome los mejores consejos y enseñanzas.

A mis sinodales: Dra. Diana Avella, Dr. Juan Morales y Dr. Carlos Signoret, por revisar este trabajo con esmero y enriquecerlo con sus aportaciones.

A Armando, Esther, Óscar, Sebastián y Teodoro, por la gran estima y amistad que me han ofrecido.

A Christian, Carlos y Fernando, mis hermanos, por siempre estar a mi lado.

A toda mi familia y amigos por siempre brindarme su apoyo y estima.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme la beca para realizar mis estudios de doctorado.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por abrirme sus puertas y enseñarme que la virtud humana está en el espíritu y no en su raza.

Índice general

Introducción **1**

1. $\mathbb{L}_{\varrho}$−equivalencia **3**

1.1. Morita equivalencia y $\mathbb{L}_{\varrho}$-equivalencia 4

1.2. Campos y $\mathbb{L}_{\varrho}$-equivalencia 8

1.3. Campos $\mathbb{L}_{\prod}$-equivalentes 18

2. Retículas atómicas y uniformes **27**

2.1. Átomos y Zoclo 28

2.2. Retículas atómicas y uniformes 30

Bibliografía **45**

Introducción

En 1982, Bican, Kepka y Němec definieron la p-equivalencia de anillos, definiendo que dos anillos son p-equivalentes si sus respectivas retículas de preradicales son isomorfas [Bi82]. Considerando eso, ellos compararon la equivalencia de Morita con la p-equivalencia de anillos.

En ese espíritu, a cada anillo R podemos asociarle una gran retícula que consiste en clases de módulos. Si ρ denota un subconjunto de $\{\leq,\ /, ext,\ \prod,$ $\oplus, E,\ P\ \}$, entonces denotamos por $\mathbb{L}_\rho(R)$ la clase de las clases cerradas bajo las operaciones que corresponden a los símbolos pertenecientes a ρ.

Si $\rho\ \subseteq\ \{\leq, /, \oplus, \prod, ext, E, P\}$, entonces definimos $\mathbb{L}_\rho(R)$, propiedades de cerradura tales que sean cerradas bajo tomar submódulos, cocientes, cápsulas inyectivas, cubiertas proyectivas, extensiones, productos y sumas directas, tal como se describe en [Al10]. Si tomamos dos anillos R y S, entonces podemos definir la $\mathbb{L}_\rho-$equivalencia entre ellos, si sus retículas de clases de módulos $\mathbb{L}_\rho(R)$ y $\mathbb{L}_\rho(S)$ son isomorfas como retículas.

Nuestra primera inquietud era saber como era esta $\mathbb{L}_\rho-$equivalencia comparada con la equivalencia de Morita. Así, en el primer capítulo definimos la $\mathbb{L}_\rho-$equivalencia y la comparamos con la equivalencia de Morita, demostrando -último teorema de la primera sección- que la equivalencia de Morita implica la $\mathbb{L}_\rho-$equivalencia.

En la sección dos de ese mismo capítulo, nos preguntamos si la $\mathbb{L}_\rho-$equivalencia implica la equivalencia de Morita. Al considerar el caso de los campos como ejemplo, demostramos que ciertos campos son $\mathbb{L}_\rho-$equivalentes pero no son Morita equivalentes, concluyendo que el recíproco del teorema obtenido en la primera sección no es válido para todos los anillos.

Por último, en la sección tres del primer capítulo, mostramos que no todos los campos son $\mathbb{L}_\rho$-equivalentes.

En el segundo capítulo, comenzamos estudiando los átomos y zoclos de las retículas $\mathbb{L}_\varrho(R)$, para distintas propiedades de cerradura, para un anillo R. Después, definimos la $\sigma-\rho$ uniformidad de $\mathbb{L}_\sigma(R)$, para comparar conjuntos de propiedades de cerradura σ, ρ tales que $\sigma \subseteq \rho$ y la uniformidad de $\mathbb{L}_\sigma(R)$

y $\mathbb{L}_\rho(R)$. La $\sigma-\rho$ uniformidad también nos ayudó a comparar lo atomicidad de $\mathbb{L}_\sigma(R)$ y de $\mathbb{L}_\rho(R)$. A partir de lo anterior, pudimos caracterizar anillos considerando que $\mathbb{L}_\rho(R)$ fuera atómica o uniforme para distintos conjuntos de propiedades de cerradura ρ.

Capítulo 1

$\mathbb{L}_\varrho-$equivalencia comparada con Morita equivalencia

Bican, Kepka y Němec definieron que dos anillos sean p-equivalentes cuando sus respectivas retículas de prerradicales son isomorfas [Bi82]. Ellos compararon la equivalencia de Morita con la p-equivalencia de anillos.

En ese espíritu comparamos la equivalencia de Morita con tener retículas de clases de módulos isomorfas, que es como definiremos la $\mathbb{L}_\rho-$equivalencia.

Se puede asociar a cada anillo una gran retícula que consiste en clases de módulos. Sea R un anillo asociativo con uno. Una clase de R-módulos $\mathcal{C}$ se llama abstracta si es cerrada bajo isomorfismos, es decir, si $M \in \mathcal{C}$ y $N \cong M$, entonces $N \in \mathcal{C}$. Consideraremos clases de módulos abstractas cerradas bajo ciertas propiedades.

Se dice que una clase $\mathcal{C}$ de R módulos es hereditaria si es cerrada bajo tomar submódulos. Denotamos por $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ la clase de las clases hereditarias de $R-$módulos. De manera similar, denotamos por $\mathbb{L}_{/}(R)$ la clase de las clases cerradas bajo cocientes, es decir, la clase de las clases cohereditarias; por $\mathbb{L}_{\oplus}(R)$ la clase de las clases cerradas bajo sumas directas. $\mathbb{L}_{\prod}(R)$ denotará la clase de las clases cerradas bajo productos. $\mathbb{L}_{ext}(R)$ denotará la clase de las clases cerradas bajo extensiones. $\mathbb{L}_{E}(R)$ denotará la clase de las clases cerradas bajo cápsulas inyectivas. $\mathbb{L}_{P}(R)$ denotará la clase de las clases cerradas bajo cubiertas proyectivas.

En general, si ϱ denota un subconjunto de $\{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E, P\}$, entonces denotamos por $\mathbb{L}_\varrho(R)$ la clase de las clases cerradas bajo las operaciones que corresponden a los símbolos pertenecientes a ϱ.

Por ejemplo, $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ denota la clase de las clases que son hereditarias y cohereditarias. Es conocido que $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus,ext}(R)$, la clase de las clases hereditarias, cohereditarias, cerrada bajo sumas directas y extensiones, está en correspondencia biyectiva con la clase de las teorías de torsión hereditarias (ver [St75]). Por otra parte, $\mathbb{L}_{\leq,\oplus,E}(R)$ es la clase de clases naturales, estudiada por Dauns y Zhou [Da06].

Es claro que la intersección de una familia de clases en $\mathbb{L}_\varrho(R)$, con $\varrho \subseteq \{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E\,P\}$ pertenece a $\mathbb{L}_\rho(R)$. Por esta razón podemos considerar $\mathbb{L}_\varrho$ como retícula con el orden de la inclusión de clases y con la intersección como ínfimo. Podemos describir el supremo de una familia $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ en $\mathbb{L}_\rho$ como la intersección la de todas las clases que contienen a $\bigcup\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$:

$$\bigvee\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I} = \bigcap\{\{\mathcal{D} \in \mathbb{L}_\varrho(R) | \{\mathcal{C}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Algunos de estos tipos de retículas se estudiaron en [Da06].

En todo este trabajo, R denotará un anillo asociativo con uno.

Para detalles sobre los resultados de teoría de anillos que usaremos se pueden consultar los libros [An73] y [St75].

1.1. Morita equivalencia y $\mathbb{L}_\varrho$-equivalencia

1.1.1 Definición. *Sean R y S dos anillos y $\varrho \subseteq \{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E, P\}$. Decimos que R y S son $\mathbb{L}_\varrho$-equivalentes si existe un isomorfismo de retículas $\Phi : \mathbb{L}_\rho(R) \to \mathbb{L}_\rho(S)$.*

1.1.2 Definición. *Sean R y S dos anillos. Decimos que R y S son Morita equivalentes si $Mod - R$ y $Mod - S$ son equivalentes, es decir, si estas categorías de módulos son naturalmente equivalentes.*

Para detalles sobre los conceptos y resultados concernientes a la equivalencia de Morita, consultar [St75] y [An73].

En lo que sigue usaremos el resultado de [An73, Prop. 21.6] que anunciamos a continuación:

1.1.3 Proposición. *Sean R y S anillos Morita equivalentes con el funtor $F : Mod{-}R \to Mod{-}S$. Sean M, $N \in Mod{-}R$. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

1. *M es proyectivo (inyectivo) si y sólo si $F(M)$ es proyectivo (inyectivo).*

2. *Un monomorfismo (epimorfismo) $f : N \to M$ es esencial (superfluo) si y sólo si $F(f) : F(N) \to F(M)$ es un monomorfismo (epimorfismo) esencial (superfluo).*

3. *$f : N \to M$ es una cápsula inyectiva (cubierta proyectiva) si y sólo si $F(f) : F(N) \to F(M)$ es una cápsula inyectiva (cubierta proyectiva).*

1.1.4 Teorema. *Sean R y S dos anillos. Si R y S son Morita equivalentes, entonces R y S son $\mathbb{L}_\varrho$-equivalentes para cada $\varrho \subseteq \{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E, P\}$.*

Demostración. Como R y S son Morita equivalentes, existen ${}_RP_S$ y ${}_SQ_R$ bimódulos tales que $\cdot \otimes_R P : Mod - R \to Mod - S$ y $\cdot \otimes_S Q : Mod - S \to Mod - R$ son equivalencias de categorías, donde ambos son funtores exactos y existen isomorfismos naturales $(\cdot \otimes_R P) \otimes_S Q \cong 1_{Mod-R}$, $(\cdot \otimes_S Q) \otimes_R P \cong 1_{Mod-S}$, ver [St75, Corolario IV. 10.2].

Definamos $\Phi : \mathbb{L}_\varrho(R) \to \mathbb{L}_\varrho(S)$ por:

$$\Phi(\mathcal{C}) = \{L \in Mod - S | L \cong M \otimes_R P, \text{ para algún } M \in \mathcal{C}\}.$$

Primero mostremos que Φ está bien definida verificando para cada uno de los símbolos que pertenezcan a ϱ.

Comencemos observando que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\leq(R)$ implica que $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_\leq(S)$.

Supongamos que $L \in \Phi(\mathcal{C})$ y $N \leq L$. Luego, existe $M \in \mathcal{C}$ tal que $L \cong M \otimes_R P$. Entonces obtenemos un monomorfismo $N \rightarrowtail M \otimes_R P$.

Aplicando el funtor $\cdot \otimes_S Q$, obtenemos un monomorfismo

$$\begin{aligned} N \otimes_S Q \rightarrowtail\ & (M \otimes_R P) \otimes_S Q \qquad \text{(ya que } \cdot \otimes_S Q \text{ es exacto)} \\ & \cong M \otimes_R (P \otimes_S Q) \\ & \cong M \otimes_R R \\ & \cong M. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar submódulos, tenemos que $N \otimes_S Q \in \mathcal{C}$.

Entonces $(N \otimes_S Q) \otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$, y así, $N \in \Phi(\mathcal{C})$, ya que $N \cong (N \otimes_S Q) \otimes_R P$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar submódulos.

Ahora procedemos a mostrar que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_/(R)$ implica que $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_/(S)$.

Si $M \in \mathcal{C}$ y $M \otimes_R P \twoheadrightarrow N$, entonces $M \cong (M \otimes_R P) \otimes_S Q \twoheadrightarrow N \otimes_S Q$ ya que el funtor $\cdot \otimes_S Q$ es exacto derecho. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar cocientes, tenemos que $N \otimes_S Q \in \mathcal{C}$. Así, $N \cong (N \otimes_S Q) \otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar cocientes.

Ahora veamos que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\oplus(R)$ implica que $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_\oplus(S)$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos pertenecientes a $\mathcal{C}$ y tomemos $N_i \cong M_i \otimes_R P$ para cada $i \in I$. Tenemos que

$$(\oplus_{i\in I} N_i) \otimes_S Q \cong (\oplus_{i\in I}(M_i \otimes_R P)) \otimes_S Q \cong ((\oplus_{i\in I} M_i) \otimes_R P) \otimes_S Q \cong \oplus_{i\in I} M_i.$$

Luego, $(\oplus_{i\in I}N_i)\otimes_S Q \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar sumas directas. Así, $\oplus_{i\in I}N_i \cong ((\oplus_{i\in I}N_i)\otimes_S Q)\otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar sumas directas.

Supongamos que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\prod}(R)$. Ahora mostremos que $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_{\prod}(S)$.

Como el funtor $\cdot\otimes_S Q$ es una equivalencia, su adjunto derecho $Hom_R(Q,\cdot)$ es también una equivalencia y tal adjunto derecho es naturalmente equivalente a $\cdot\otimes_R P$, ver [St75, Prop. I. 9.2].

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos pertenecientes a $\mathcal{C}$ y tomemos $N_i \cong M_i \otimes_R P$ para cada $i \in I$.

Luego,

$$\begin{array}{rcl}
(\prod_{i\in I} N_i)\otimes_S Q & \cong & (\prod_{i\in I}(M_i\otimes_R P))\otimes_S Q \\
& \cong & (\prod_{i\in I}(Hom_R(Q,M_i))\otimes_S Q \\
& \cong & (Hom_R(Q,\prod_{i\in I} M_i))\otimes_S Q \\
& \cong & ((\prod_{i\in I} M_i)\otimes_R P)\otimes_S Q \\
& \cong & (\prod_{i\in I} M_i)\otimes_R (P\otimes_S Q) \\
& \cong & (\prod_{i\in I} M_i)\otimes_R (R) \\
& \cong & \prod_{i\in I} M_i
\end{array}$$

Luego, $(\prod_{i\in I} N_i)\otimes_S Q \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar productos. Así, $\prod_{i\in I} N_i \cong ((\prod_{i\in I} N_i)\otimes_S Q)\otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar productos.

Veamos que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_{ext}(R)$ implica que $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_{ext}(S)$.

Si $0 \to L\otimes_R P \to M \to N\otimes_R P \to 0$ es una sucesión exacta en $Mod-S$, con $L, N \in \mathcal{C}$, entonces

$$0 \to (L\otimes_R P)\otimes_S Q \to M\otimes_S Q \to (N\otimes_R P)\otimes_S Q \to 0$$

es una sucesión exacta en $Mod-R$, ya que $\cdot\otimes_S Q$ es un funtor exacto. Luego, $0 \to L \to M\otimes_S Q \to N \to 0$ es una sucesión exacta. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar extensiones, entonces $M\otimes_S Q \in \mathcal{C}$ y $M \cong (M\otimes_S Q)\otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar extensiones.

Ahora mostramos que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_E(R)$ implica que $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_E(S)$.

Sean $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_E(R)$ y $M \in \Phi(\mathcal{C})$. Luego, $M \cong N\otimes_R P$ con $N \in \mathcal{C}$. Así, por la Proposición 1.1.3, $E(N)\otimes_R P$ es la cápsula inyectiva de $N\otimes_R P$. Luego, $E(M) \cong E(N)\otimes_R P$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas, tenemos que $E(N) \in \mathcal{C}$. Así, $E(M) \cong E(N) \otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.

Por último, supongamos que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_P(R)$ y $M \in \Phi(\mathcal{C})$. Si M no tiene cubierta proyectiva, hemos terminado. Supongamos que M tiene una cubierta proyectiva $P(M) \twoheadrightarrow M$. Como $M \cong N \otimes_R P$ para algún $N \in \mathcal{C}$, entonces

$$P(M) \otimes_S Q \twoheadrightarrow M \otimes_S Q \cong (N \otimes_R P) \otimes_S Q \cong N.$$

Luego, por la Proposición 1.1.3, $P(M) \otimes_S Q$ es una cubierta proyectiva de N. Así, $P(M) \otimes_S Q \in \mathcal{C}$, ya que $N \in \mathcal{C}$, que es cerrada bajo tomar cubiertas proyectivas. Entonces $P(M) \cong (P(M) \otimes_S Q) \otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$. Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_P(S)$.

En vista de las observaciones previas para cada uno de los símbolos que pertenecen a ϱ, tenemos que Φ está bien definida.

Demostremos ahora que Φ es un isomorfismo de retículas.

Probaremos primero que Φ es un morfismo de clases parcialmente ordenadas. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{L}_\rho(R)$ tales que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y supongamos que $M \in \Phi(\mathcal{C})$. Entonces existe $N \in \mathcal{C}$ tal que $M \cong N \otimes_R P$. Como $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, entonces $M \in \Phi(\mathcal{D})$.

Ahora es suficiente con mostrar que Φ tiene un morfismo inverso de clases parcialmente ordenadas.

Definamos $\Theta : \mathbb{L}_\varrho(S) \to \mathbb{L}_\varrho(R)$ por:

$$\Theta(\mathcal{C}) = \{L \in Mod - S | L \cong M \otimes_S Q \text{ para algún } M \in \mathcal{C}\}.$$

Como lo hicimos antes, Θ es un morfismo de órdenes bien definido.

Afirmamos que $\Theta(\Phi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ para cada $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\varrho(R)$. Sea $M \in \mathcal{C}$. Luego,

$$M \cong M \otimes_R R \cong M \otimes_R (P \otimes_S Q) \cong (M \otimes_R P) \otimes_S Q.$$

Como $M \otimes_R P \in \Phi(\mathcal{C})$, ya que $M \in \mathcal{C}$, y $(M \otimes_R P) \otimes_S Q \in \Theta(\Phi(\mathcal{C}))$, tenemos que $M \in \Theta(\Phi(\mathcal{C}))$. Por lo tanto, $\Theta(\Phi(\mathcal{C})) \supseteq \mathcal{C}$.

Por otro lado, sea $L \in \Theta(\Phi(\mathcal{C}))$. Entonces existe $N \in \Phi(\mathcal{C})$ tal que $L \cong N \otimes_S Q$. Luego, existe $M \in \mathcal{C}$ tal que $N \cong M \otimes_R P$. Así, $L \cong (M \otimes_R P) \otimes_S Q \cong M$. Luego, $L \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\Theta(\Phi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$.

De manera similar podemos ver que $\Phi(\Theta(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Por lo tanto, Φ es un morfismo de clases parcialmente ordenadas que tiene inverso. Luego, Φ es un isomorfismo de clases parcialmente ordenadas, y así, Φ es un isomorfismo de retículas.

Por lo tanto, $\mathbb{L}_\varrho(R) \cong \mathbb{L}_\varrho(S)$.

$\square$

1.2. Campos y $\mathbb{L}_\varrho$-equivalencia

En esta sección mostraremos que el recíproco del Teorema 1.1.4 no se válido en general.

Tenemos la siguiente proposición [An73, Prop. 21.10]:

1.2.1 Proposición. *Si R y S son dos anillos Morita equivalentes, entonces $Cen(R) \cong Cen(S)$.*

En vista de la Proposición 1.2.1, tenemos:

1.2.2 Observación. *Sean R y S dos anillos conmutativos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *R y S son isomorfos.*

(ii) *R y S son Morita equivalentes.*

1.2.3 Observación. *Si V es un espacio vectorial sobre un campo F, entonces $V \cong F^{(X)}$ para algún conjunto X, que es único salvo por equipotencia.*

1.2.4 Definición. *Sean K y F dos campos. Decimos que K y F son dimensionalmente equivalentes si para cada familia $\{X_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos tenemos que*

$$dim_K(\prod_{i\in I} K^{(X_i)}) = dim_F(\prod_{i\in I} F^{(X_i)}).$$

1.2.5 Observación.

(i) *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias de conjuntos tales que $|A_i| \leq |B_i|$ para todo $i \in I$, entonces*

$$\left|\prod_{i\in I} A_i\right| \leq \left|\prod_{i\in I} B_i\right|.$$

(ii) *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ son familias de conjuntos son tales que $|A_i| = |B_i|$ para todo $i \in I$, entonces*

$$\left|\prod_{i\in I} A_i\right| = \left|\prod_{i\in I} B_i\right|.$$

Necesitaremos el siguiente resultado sobre cardinales, ver [Hr99, Lema 9.3.6]:

1.2.6 Observación. *Si* $\lambda \geq \aleph_0$ *y* $2 \leq \kappa \leq \lambda$ *entonces* $2^\lambda = \kappa^\lambda = \lambda^\lambda$.

1.2.7 Lema. *Sean* F *un campo y* $F^{(Y)}$ *es un espacio vectorial sobre* F *de dimensión* $|Y|$ *con* Y *un conjunto infinito. Entonces* $|F^{(Y)}| = max\{|F|, |Y|\} \geq |Y| = dim_F(F^{(Y)})$.

Demostración. Sean F un campo y Y un conjunto infinito.

Supongamos que F es finito. Para cada $\varphi : Y \to F$ denotamos $sop(\varphi) = \{y \in Y|\varphi(y) \neq 0\}$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} |F^{(Y)}| & = & |\{\varphi : Y \to F|sop(\varphi) \text{ es finito}\}| \\ & = & 1 + |Y||F| + |Y \times Y||F \times F| + \cdots \\ & = & 1 + |Y| + |Y| + \cdots \\ & = & |Y| \\ & = & max\{|F|, |Y|\}. \end{array}$$

Supongamos que F es infinito. Luego,

$$\begin{array}{rcl} |F^{(Y)}| & = & |\{\varphi : Y \to F|sop(\varphi) \text{ es finito}\}| \\ & = & 1 + |Y||F| + |Y \times Y||F \times F| + \cdots \\ & = & 1 + |Y||F| + |Y||F| + \cdots \\ & & \text{ya que } F \text{ y } Y \text{ son infinitos,} \\ & = & |Y||F| \\ & = & max\{|F|, |Y|\}. \end{array}$$

Por lo tanto, $|F^{(Y)}| = max\{|F|, |Y|\} \geq |Y| = dim_F(F^{(Y)})$

$\square$

1.2.8 Corolario. *Si* F *es un campo y* Y *es un conjunto infinito tal que* $|F| \leq |Y|$*, entonces* $|F^{(Y)}| = dim_F(F^{(Y)}) = |Y|$*. En otras palabras, si* V *es un espacio vectorial infinito sobre* F *tal que* $|F| \leq |V|$*, entonces* $dim_F(V) = |V|$.

Demostración. Es inmediata por el Lema 1.2.7. $\square$

1.2.9 Teorema. *Todos los campos finitos son dimensionalmente equivalentes.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. Supongamos que $\mathbb{F}_n$ y $\mathbb{F}_m$ son dos campos finitos con $n \leq m$. Definamos $\sim$ una relación en I dada por $i \sim j$ si y sólo si $|X_i| = |X_j|$ o $|X_i|$ y $|X_j|$ son ambos finitos. Tenemos que $\sim$ es una relación de equivalencia. Denotemos la clase de j por $[j]$. Ahora, sea $J \subseteq I$ un conjunto de representantes de cada clase. Podemos ordenar J por $i \leq j$ si X_i y X_j son ambos finitos o $|X_i| \leq |X_j|$.

Luego,

$$\prod_{i\in I}\mathbb{F}_n^{(X_i)} = \prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{F}_n^{(X_i)}).$$

Y de manera similar para $\mathbb{F}_m$, tenemos que

$$\prod_{i\in I}\mathbb{F}_m^{(X_i)} = \prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{F}_m^{(X_i)}).$$

Sea $[j_0]$ la clase de equivalencia para todos los X_i finitos. Tenemos dos casos:

Caso (I) $[j_0]$ es finito. Entonces

$$dim_{\mathbb{F}_n}(\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_n^{(X_i)}) = \sum_{i\in[j_0]}|X_i| = dim_{\mathbb{F}_m}(\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_m^{(X_i)})$$

Caso (II) $[j_0]$ es infinito. Notemos que para cada $i\in[j_0]$, tenemos que $|\mathbb{F}_n| \leq |\mathbb{F}_n^{(X_i)}| \leq |\mathbb{F}_m^{(X_i)}| \leq |\mathbb{Q}^{(X_i)}| = |\mathbb{Q}|$, ya que $|X_i|$ es finito $\forall i\in[j_0]$. Luego, usando las Observaciones 1.2.5 y 1.2.6,

$$\begin{array}{rcl} 2^{|[j_0]|} \leq n^{|[j_0]|} & = & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_n\right| \\ & \leq & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_n^{(X_i)}\right| \\ & \leq & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_m^{(X_i)}\right| \\ & \leq & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right| \\ & = & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{Q}\right| \\ & = & \aleph_0^{|[j_0]|} \qquad \leq 2^{|[j_0]|}. \end{array}$$

Así,

$$\left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_n^{(X_i)}\right| = \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_m^{(X_i)}\right| = \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right|. \qquad (*)$$

Ahora del Corolario 1.2.8, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} dim_{\mathbb{F}_n}(\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_n^{(X_i)}) & = & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_n^{(X_i)}\right| \\ & = & \left|\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_m^{(X_i)}\right| \\ & = & dim_{\mathbb{F}_m}(\prod_{i\in[j_0]}\mathbb{F}_m^{(X_i)}). \end{array}$$

Así, podemos suponer que X_i es infinito para cada $i \in I$. Entonces, por el Corolario 1.2.8, $|\mathbb{F}_n^{(X_i)}| = |X_i| = |\mathbb{F}_m^{(X_i)}|$ para cada $i \in I$. Luego, por la Observación 1.2.5, tenemos que $\left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{F}_n^{(X_i)}\right| = \left|\prod_{i\in[j]} X_i\right| = \left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{F}_m^{(X_i)}\right|$ para cada $j \in J$.

De nuevo, usando el Corolario 1.2.8 y la Observación 1.2.5, obtenemos

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{F}_n}(\textstyle\prod_{i\in I} \mathbb{F}_n^{(X_i)}) &= \left|\textstyle\prod_{i\in I} \mathbb{F}_n^{(X_i)}\right| \\ &= \left|\textstyle\prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{F}_n^{(X_i)})\right| \\ &= \left|\textstyle\prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{F}_m^{(X_i)})\right| \\ &= \left|\textstyle\prod_{i\in I} \mathbb{F}_m^{(X_i)}\right| \\ &= dim_{\mathbb{F}_m}(\textstyle\prod_{i\in I} \mathbb{F}_m^{(X_i)}). \end{aligned}$$

□

1.2.10 Teorema. $\mathbb{F}_2$ *y* $\mathbb{Q}$ *son dimensionalmente equivalentes.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos y consideremos $\sim$ y J como en la demostración del Teorema 1.2.9. Sea $[j_o]$ la clase de los i tales que X_i es finito. Tenemos dos casos:

Caso (I) $[j_0]$ es finito. Luego,

$$dim_{\mathbb{F}_2}(\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{F}_2^{(X_i)}) = \sum_{i\in[j_0]} |X_i| = dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)})$$

Caso (II) $[j_0]$ es infinito. Luego,

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{F}_2}(\textstyle\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{F}_2^{(X_i)}) &= \left|\textstyle\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{F}_2^{(X_i)}\right| && \text{por el Corolario 1.2.8} \\ &= \left|\textstyle\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}\right| && \text{por (*) en la demostración del Teorema 1.2.9} \\ &= dim_{\mathbb{Q}}(\textstyle\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}) && \text{por el Corolario 1.2.8.} \end{aligned}$$

Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que X_i infinito para cada $i \in I$. Luego, por el Lema 1.2.7, $|\mathbb{F}_2^{(X_i)}| = |X_i| = |\mathbb{Q}^{(X_i)}|$ para cada $i \in I$. Entonces, por la Observación 1.2.5,

$$\left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{F}_2^{(X_i)}\right| = \left|\prod_{i\in[j]} X_i\right| = \left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{Q}^{(X_i)}\right|$$

para cada $j \in J$.

Por lo tanto,

$$\begin{array}{rcll} dim_{\mathbb{F}_2}(\prod_{i\in I}\mathbb{F}_2^{(X_i)}) & = & \left|\prod_{i\in I}\mathbb{F}_2^{(X_i)}\right| & \text{por el Corolario 1.2.8} \\ & = & \left|\prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{F}_2^{(X_i)})\right| & \\ & = & \left|\prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{Q}^{(X_i)})\right| & \text{por la Observación 1.2.5} \\ & = & \left|\prod_{i\in I}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right| & \\ & = & dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in I}\mathbb{Q}^{(X_i)}) & \text{por el Corolario 1.2.8.} \end{array}$$

□

1.2.11 Corolario. *Cada campo finito $\mathbb{F}_n$ y $\mathbb{Q}$ son dimensionalmente equivalentes.*

Notemos que en la demostración del Teorema 1.2.10 podemos sustituir $\mathbb{Q}$ por cualquier campo F de cardinalidad $\aleph_0$. Por lo tanto,

1.2.12 Corolario. *Si K y F son dos campos tales que $|K|, |F| \leq \aleph_0$ entonces K y F son dimensionalmente equivalentes.*

1.2.13 Observación. $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0}$.

Demostración. Como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}^{(X)}$ para algún conjunto X. Luego, $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Por otro lado, por el Lema 1.2.7, tenemos que $max\{|X|, |\mathbb{R}|\} = |\mathbb{R}^{(X)}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$.

Así, $|X| \leq |\mathbb{R}|$. Por lo tanto, $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \leq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Para ver la otra desigualdad es suficiente con encontrar un subconjunto D de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que sea linealmente independiente y tenga cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definimos $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por:

$$f_x(n) = e^{nx}$$

Sea $D = \{f_x | x \in \mathbb{R}\}$. Es claro que $|D| = 2^{\aleph_0}$. Afirmamos que D es linealmente independiente. Supongamos que $c_1 f_{x_1} + \cdots + c_n f_{x_n} = 0$, para algunas $f_{x_i} \in D$, $1 \leq i \leq n$, donde $c_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$.

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{x_1} & e^{x_2} & \cdots & e^{x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e^{(n-1)x_1} & e^{(n-1)x_2} & \cdots & e^{(n-1)x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $z_i = e^{x_i}$ para toda $1 \le i \le n$. Luego,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que la matriz izquierda es una matriz de Vandermonde. Como la función e^x es inyectiva y $x_i \neq x_j$ cualesquiera $1 \le i, j \le n$ tales que $i \neq j$, entonces $z_i \neq z_j$ para cualesquiera $1 \le i, j \le n$ tales que $i \neq j$. Luego, la matriz de Vandermonde anterior es invertible y la única solución que tiene el sistema de ecuaciones es la solución trivial. Así, $c_i = 0$ para cada $1 \le i \le n$. Luego, D es linealmente independiente.

Por lo tanto, $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0}$.

□

1.2.14 Teorema. *$\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son dimensionalmente equivalentes.*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos y consideremos J como en la demostración del Teorema 1.2.9. Sea $[j_o]$ la clase de los i tales que X_i es finito. Tenemos dos casos:

Caso (I) $[j_0]$ es finito. Entonces

$$dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}) = \sum_{i \in [j_0]} |X_i| = dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{R}^{(X_i)}).$$

Caso (II) $[j_0]$ es infinito. Si $|[j_0]| = \aleph_0$, entonces

$$\begin{aligned} dim_{\mathbb{Q}}(\textstyle\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}) &= \left|\textstyle\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}\right| && \text{por el Corolario 1.2.8,} \\ &= \left|\textstyle\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{Q}\right| && |\mathbb{Q}^{(X_i)}| = |\mathbb{Q}| \\ & && \text{al ser } X_i \text{ finito,} \\ &= 2^{\aleph_0} \\ &= dim_{\mathbb{R}}(\textstyle\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{R}) && \text{por la Obs. 1.2.13,} \\ &= dim_{\mathbb{R}}(\textstyle\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{R}^{(X_i)}). \end{aligned}$$

La última igualdad es porque $\left|\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{R}^{(X_i)}\right| = 2^{\aleph_0}$ y $dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$, que es un subespacio vectorial de $\prod_{i \in [j_0]} \mathbb{R}^{(X_i)}$.

Si $|[j_0]| > \aleph_0$, entonces

$$\begin{array}{rcll}
dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}) & = & \left|\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{Q}^{(X_i)}\right| & \text{por el Corolario 1.2.8,} \\
 & = & \left|\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{Q}\right| & |\mathbb{Q}^{(X_i)}| = |\mathbb{Q}| \\
 & & & \text{al ser } X_i \text{ finito,} \\
 & = & \aleph_0^{|[j_0]|} & \\
 & = & 2^{|[j_0]|} & \text{por la Obs. 1.2.6,} \\
 & = & 2^{(\aleph_0 \cdot |[j_0]|)} & \\
 & = & (2^{\aleph_0})^{|[j_0]|} & \\
 & = & \left|\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{R}\right| & \\
 & = & \left|\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{R}^{(X_i)}\right| & \\
 & = & dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i\in[j_0]} \mathbb{R}^{(X_i)}) & \text{por el Corolario 1.2.8.}
\end{array}$$

Sea $j \in J$ y supongamos que $|X_i| = \aleph_0$, para cada $i \in [j]$. Tenemos tres casos:

Caso (I) $[j]$ es finito. Entonces

$$dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{Q}^{(X_i)}) = \sum_{i\in[j]} |X_i| = dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{R}^{(X_i)}).$$

Caso (II) $|[j]| = \aleph_0$. Luego,

$$\begin{array}{rcll}
dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{Q}^{(X_i)}) & = & \left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{Q}^{(X_i)}\right| & \text{por el Corolario 1.2.8,} \\
 & = & \left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{Q}\right| & |\mathbb{Q}^{(X_i)}| = |\mathbb{Q}| \\
 & & & \text{al ser } |X_i| = \aleph_0, \\
 & = & 2^{\aleph_0} & \\
 & = & dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{R}^{(X_i)}). &
\end{array}$$

La igualdad anterior es porque $\left|\prod_{i\in[j]} \mathbb{R}^{(X_i)}\right| = (max\{2^{\aleph_0}, |X_i|\})^{|[j]|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ y $dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i\in[j]} \mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$, que es un subespacio vectorial de $\prod_{i\in[j]} \mathbb{R}^{(X_i)}$.

Caso (III) $|[j]| > \aleph_0$. Entonces

$$\begin{array}{rcll}
dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{Q}^{(X_i)}) & = & \left|\prod_{i\in[j]}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right| & \text{por el Corolario 1.2.8,}\\
& = & (max\{\aleph_0, |X_i|\})^{|[j]|} & \\
& = & (\aleph_0)^{|[j]|} & \\
& = & (\aleph_0)^{\aleph_0\cdot|[j]|} & \\
& = & (\aleph_0^{\aleph_0})^{|[j]|} & \\
& = & (2^{\aleph_0})^{|[j]|} & \text{por la Observación 1.2.6,}\\
& = & |\mathbb{R}^{(X_i)}|^{|[j]|} & \text{ya que } 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}^{(X_i)}|,\\
& = & \left|\prod_{i\in[j]}\mathbb{R}^{(X_i)}\right| & \\
& = & dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{R}^{(X_i)}) & \text{por el Corolario 1.2.8.}
\end{array}$$

Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $|X_i| > \aleph_0$ para toda $i \in I$. Por el Corolario 1.2.8, tenemos que $|\mathbb{Q}^{(X_i)}| = |X_i| = |\mathbb{R}^{(X_i)}|$ para toda $i \in I$. Luego, or la Observación 1.2.5, $\left|\prod_{i\in[j]}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right| = \left|\prod_{i\in[j]}X_i\right| = \left|\prod_{i\in[j]}\mathbb{R}^{(X_i)}\right|$ para cada $j \in J$. Entonces

$$\begin{array}{rcll}
dim_{\mathbb{Q}}(\prod_{i\in I}\mathbb{Q}^{(X_i)}) & = & \left|\prod_{i\in I}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right| & \text{ya que } \aleph_0 < \left|\prod_{i\in I}\mathbb{Q}^{(X_i)}\right|\\
& & & \text{y por el Corolario 1.2.8,}\\
& = & \left|\prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{Q}^{(X_i)})\right| & \\
& = & \left|\prod_{j\in J}(\prod_{i\in[j]}\mathbb{R}^{(X_i)})\right| & \text{por la Observación 1.2.5,}\\
& = & \left|\prod_{i\in I}\mathbb{R}^{(X_i)}\right| & \\
& = & dim_{\mathbb{R}}(\prod_{i\in I}\mathbb{R}^{(X_i)}) & \text{por el Corolario 1.2.8.}
\end{array}$$

□

1.2.15 Proposición. *No todos los campos son dimensionalmente equivalentes.*

Demostración. Sean X, Y conjuntos tales que $|\mathbb{R}| \leq |X|$, $|Y| = 2^{|X|}$ y consideremos $\mathbb{Q}(Y)$ un campo extensión de $\mathbb{Q}$ de dimensión $|Y|$.

Sea $M = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Como $|M| = |\mathbb{R}|$, usando el Corolario 1.2.8, obtenemos que $dim_{\mathbb{Q}}(M) = |M| = |\mathbb{R}|$.

Por otro lado, si $N = \mathbb{Q}(Y)^{\mathbb{N}}$, entonces

$$\begin{array}{rcll}
|N| & = & |\mathbb{Q}(Y)^{\mathbb{N}}| & \\
 & = & |\mathbb{Q}(Y)|^{|\mathbb{N}|} & \\
 & = & |Y|^{|\mathbb{N}|} & \text{ya que por el Lema 1.2.7} \\
 & & & |\mathbb{Q}(Y)| = max\{|\mathbb{Q}|, |Y|\} = |Y|, \\
 & = & (2^{|X|})^{|\mathbb{N}|} & \\
 & = & 2^{|X|\cdot|\mathbb{N}|} & \\
 & = & 2^{|X|} & \\
 & = & |Y|. &
\end{array}$$

Luego, $dim_{\mathbb{Q}(Y)}(N) \leq |Y|$.

Veamos que $dim_{\mathbb{Q}(Y)}(N) = |Y|$. Para cada $y \in Y$, definimos $\alpha_y : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}(Y)$ por $\alpha_y(n) = y^n$. Sea $L = \{\alpha_y \in \mathbb{Q}(Y)^{\mathbb{N}} | y \in Y\}$. Afirmamos que L es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{Q}(Y)^{\mathbb{N}}$. En efecto, supongamos que $c_1\alpha_{y_1} + \cdots + c_n\alpha_{y_n} = 0$ donde $c_i \in \mathbb{Q}(Y)$ para toda $1 \leq i \leq n$.

Evaluando sucesivamente en $0, 1, ..., n-1$ obtenemos un sistema de ecuaciones que se puede representar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \\ (y_1)^{n-1} & (y_2)^{n-1} & \cdots & (y_n)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz izquierda es una matriz de Vandermonde. Como $y_i \neq y_j$ para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$ tales que $i \neq j$, entonces la matriz de Vandermonde anterior es invertible y el sistema de ecuaciones tiene únicamente la solución trivial. Luego, $c_i = 0$ para toda $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, L es linealmente independiente.

Como $|L| = |Y|$, entonces $dim_{\mathbb{Q}(Y)}(N) \geq |Y|$.

Luego, $dim_{\mathbb{Q}(Y)}(N) = |Y|$ y así, $dim_{\mathbb{Q}}(M) \neq dim_{\mathbb{Q}(Y)}(N)$.

Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}(Y)$ no son dimensionalmente equivalentes.

$\square$

1.2.16 Teorema. *Si K y F son dos campos dimensionalmente equivalentes, entonces K y F son $\mathbb{L}_\varrho$−equivalentes para todo $\varrho \subseteq \{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E, P\}$.*

Demostración. Sean K y F dimensionalmente equivalentes y tomemos $\varrho \subseteq \{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E, P\}$. Definamos $\varphi : \mathbb{L}_\varrho(K) \to \mathbb{L}_\varrho(F)$ para toda $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\rho(K)$ por

$$\varphi(\mathcal{C}) = \{M \in F - Mod |\, M \cong F^{(X)} \text{ si } K^{(X)} \in \mathcal{C}\}.$$

Veamos primero que φ está bien definida, es decir, que $\varphi(\mathcal{C})$ es cerrada bajo tomar las operaciones correspondientes a los símbolos en ϱ. Consideremos cada una de las posibilidades.

Caso (I) $\leq \in \varrho$. Sea $M \in \varphi(\mathcal{C})$ y tomemos $N \leq M$. Luego, $M \cong F^{(X)}$ para algún conjunto X tal que $K^{(X)} \in \mathcal{C}$. Entonces $N \cong F^{(Y)}$ para algún conjunto Y tal que $|Y| \leq |X|$. Luego, existe un monomorfismo $K^{(Y)} \to K^{(X)}$, y así, $K^{(Y)} \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo tomar submódulos. Por lo tanto, $N \in \varphi(\mathcal{C})$.

Caso (II) $/ \in \varrho$. Sea $M \in \varphi(\mathcal{C})$ y tomemos $M \twoheadrightarrow N$. Luego, $M \cong F^{(X)}$ para algún conjunto X tal que $K^{(X)} \in \mathcal{C}$. Entonces $N \cong F^{(Y)}$ para algún conjunto Y tal que $|Y| \leq |X|$. Luego, existe un epimorfismo $K^{(X)} \twoheadrightarrow K^{(Y)}$, y así, $K^{(Y)} \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo tomar cocientes. Por lo tanto, $N \in \varphi(\mathcal{C})$.

Caso (III) $ext \in \varrho$. Sean $M, N \in \varphi(\mathcal{C})$ y $0 \to M \to L \to N \to 0$ una sucesión exacta. Luego, $M \cong F^{(X)}, N \cong F^{(Y)}$ para algunos conjuntos X, Y tales que $K^{(X)}, K^{(Y)} \in \mathcal{C}$. Entonces $F^{(X)} \oplus F^{(Y)} \cong L$. Sea Z un conjunto tal que $|Z| = |X| + |Y|$. Luego, $L \cong F^{(Z)}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar extensiones, entonces $K^{(Z)} \cong K^{(X)} \oplus K^{(Y)} \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $L \in \varphi(\mathcal{C})$.

Caso (IV) $\oplus \in \varrho$. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \varphi(\mathcal{C})$. Luego, para cada $i \in I$ tenemos que $M_i \cong F^{(X_i)}$ para algún conjunto X_i tal que $K^{(X_i)} \in \mathcal{C}$. Sea $M = \oplus_{i\in I} M_i$. Entonces $dim_F(M) = dim_F(\oplus_{i\in I} M_i) = dim_F(\oplus_{i\in I} F^{(X_i)}) = \sum_{i\in I} |X_i|$. Sea X un conjunto tal que $|X| = \sum_{i\in I} |X_i|$. Así, $M \cong F^{(X)}$. Por otro lado, $\oplus_{i\in I} K^{(X_i)} \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo tomar sumas directas. Luego, $dim_K(\oplus_{i\in I} K^{(X_i)}) = \sum_{i\in I} |X_i|$. Así, $K^{(X)} \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, $M \in \varphi(\mathcal{C})$.

Caso (V) $\prod \in \varrho$. Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \varphi(\mathcal{C})$. Luego, para cada $i \in I$ tenemos que $M_i \cong F^{(X_i)}$ para algún conjunto X_i tal que $K^{(X_i)} \in \mathcal{C}$. Sea $M = \prod_{i\in I} M_i$. Entonces $dim_F(M) = dim_F(\prod_{i\in I} F^{(X_i)}) = dim_K(\prod_{i\in I} K^{(X_i)})$, ya que K y F son dimensionalmente equivalentes. Sea X un conjunto tal que $|X| = dim_F(M)$. Así, $M \cong F^{(X)}$. Luego, $K^{(X)} \cong \prod_{i\in I} K^{(X_i)} \in \mathcal{C}$, ya que $\mathcal{C}$ es cerrado bajo tomar productos. Por lo tanto, $M \in \varphi(\mathcal{C})$.

Como K es un campo, cada K-módulo es proyectivo e inyectivo. Luego, cada clase $\mathcal{C}$ de K-módulos es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas y cubiertas proyectivas.

De manera similar, cada clase $\varphi(\mathcal{C})$ de F-módulos es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas y cubiertas proyectivas.

Por lo tanto, φ está bien definida.

Ahora probemos que φ es un isomorfismo de retículas.

Comenzaremos mostrando que φ es un morfismo de clases parcialmente ordenadas. En efecto, sea $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{L}_\varrho(K)$ tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y tomemos $M \in \varphi(\mathcal{C})$. Entonces existe $K^{(X)} \in \mathcal{C}$, para algún conjunto X tal que $M \cong F^{(X)}$. Luego, $M \in \varphi(\mathcal{D})$, ya que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$.

Definimos $\theta : \mathbb{L}_\varrho(F) \to \mathbb{L}_\varrho(K)$ por:

$$\theta(\mathcal{C}) = \{M \in K - Mod |\, M \cong K^{(X)} \text{ si } F^{(X)} \in \mathcal{C}\}.$$

Por los mismos argumentos, θ está bien definida y es un morfismo de clases parcialmente ordenadas.

Afirmamos que $\theta(\varphi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$ para todo $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\varrho(K)$. En efecto, sea $M \in \mathcal{C}$. Entonces $M \cong K^{(X)}$ para algún conjunto X. Luego, $F^{(X)} \in \varphi(\mathcal{C})$. Entonces $M \in \theta(\varphi(\mathcal{C}))$, ya que $M \cong K^{(X)}$ y $F^{(X)} \in \varphi(\mathcal{C})$.

Por lo tanto, $\theta(\varphi(\mathcal{C})) \supseteq \mathcal{C}$.

Recíprocamente, sea $L \in \theta(\varphi(\mathcal{C}))$. Entonces $L \cong K^{(X)}$ y $F^{(X)} \in \varphi(\mathcal{C})$ para algún conjunto X. Como $F^{(X)} \in \varphi(\mathcal{C})$, tenemos que $K^{(X)} \in \mathcal{C}$. Luego, $L \in \mathcal{C}$.

Por lo tanto, $\theta(\varphi(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$.

De manera similar, $\varphi(\theta(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$. Entonces φ es un morfismo de clases parcialmente ordenadas que tiene un morfismo inverso de clases parcialmente ordenadas. Luego, φ es un isomorfismo de clases parcialmente ordenadas y, por lo tanto, φ es un isomorfismo de retículas.

Por lo tanto, $\mathbb{L}_\varrho(K) \cong \mathbb{L}_\varrho(F)$.

□

1.2.17 Observación. *Por el Teorema 1.2.15, tenemos que $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son $\mathbb{L}_\varrho$-equivalentes, ya que son dimensionalmente equivalentes. Por otro lado, como $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no son campos isomorfos, por la Observación 1.2.2, tenemos que no son Morita equivalentes. De manera similar, $\mathbb{F}_n$, $\mathbb{F}_m$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son $\mathbb{L}_\varrho$-equivalentes, pero no son Morita equivalentes. Lo que muestra que el recíproco del Teorema 1.1.4 no es válido para todos los anillos.*

1.3. Campos $\mathbb{L}_\prod$-equivalentes

Para la siguiente demostración definimos $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}$.

1.3.1 Lema. *Sea F un campo infinito. Si X es un conjunto no vacío tal que $|X| \leq |F^{\mathbb{N}}|$, entonces $dim_F((F^{(X)})^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$. En particular, $dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$.*

Demostración. Sea F un campo infinito. Luego, $|F| \leq |F^{\mathbb{N}}|$. Veamos primero que $dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$. Supongamos que $|F| = |F^{\mathbb{N}}|$.

Así, por el Lema 1.2.7, $dim_F(F^{\mathbb{N}}) \leq |F^{\mathbb{N}}|$.

Veamos que $dim_F(F^{\mathbb{N}}) \geq |F^{\mathbb{N}}|$. Sabemos que existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\mathbb{F}_n$ es subcampo de F. Luego, F es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}_n$. Como $\aleph_0 \leq |F|$, entonces $|\mathbb{F}_n| \leq |F|$. Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{F}_n}(F) = |F|$.

Sea Y una base de F sobre $\mathbb{F}_n$.

Para cada $y \in Y$, definimos $\alpha_y : \mathbb{N} \to F$ por $\alpha_y(n) = y^n$. Sea $L = \{\alpha_y \in F^{\mathbb{N}} | y \in Y\}$. Afirmamos que L es un conjunto linealmente independiente de $F^{\mathbb{N}}$. Basta ver que todo subconjunto finito de L es linealmente independiente. Supongamos que $c_1\alpha_{y_1} + \cdots + c_n\alpha_{y_n} = 0$ con $c_i \in \mathbb{F}_n(Y) = F$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Evaluando sucesivamente en $0, 1, ..., n-1$ obtenemos un sistema de ecuaciones que se puede representar matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & \\ (y_1)^{n-1} & (y_2)^{n-1} & \cdots & (y_n)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz izquierda en la igualdad anterior es una matriz de Vandermonde. Como $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$ para todos $1 \leq i, j \leq n$, entonces la matriz de Vandermonde anterior es invertible y el sistema de ecuaciones anterior tiene únicamente la solución trivial.

Por lo tanto, L es linealmente independiente. Y como $|L| = |Y|$, entonces $dim_F(F^{\mathbb{N}}) \geq |Y|$.

Así, $dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |Y| = |F| = |F^{\mathbb{N}}|$.

Si $|F| < |F^{\mathbb{N}}|$, entonces, por el Corolario 1.2.8, $dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$.
Por lo tanto, $dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$.
Sea X un conjunto no vacío tal que $|X| \leq |F^{\mathbb{N}}|$. Luego, $|F| \leq |F^{\mathbb{N}}|$
Supongamos que $|F| = |F^{\mathbb{N}}|$. Entonces $|X| \leq |F|$.
Luego,

$$\begin{aligned} |(F^{(X)})^{\mathbb{N}}| &= |F^{(X)}|^{|\mathbb{N}|} \\ &= |F|^{|\mathbb{N}|} && \text{por el Lema 1.2.7 ya que } |X| \leq |F| \\ &= |F^{\mathbb{N}}| && \text{ya que } |F| = |F^{\mathbb{N}}|. \end{aligned}$$

Así, por el Lema 1.2.7, $dim_F((F^{(X)})^{\mathbb{N}}) \leq |F^{\mathbb{N}}|$.

Por otro lado, como F es un subespacio vectorial de $F^{(X)}$, entonces $|F^{\mathbb{N}}| = dim_F((F)^{\mathbb{N}}) \leq dim_F((F^{(X)})^{\mathbb{N}})$. Por lo tanto, $dim_F((F^{(X)})^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$.

Ahora supongamos que $|F| < |F^{\mathbb{N}}|$. Entonces, por el Lema 1.2.7, $|F^{(X)}| = max\{|F|, |X|\} \leq |F^{\mathbb{N}}|$ y $|F| \leq |F^{(X)}|$.

Así,

$$|F| \leq |F^{(X)}| \leq |F^{\mathbb{N}}|.$$

Luego, por la Observación 1.2.5,

$$|F|^{|\mathbb{N}|} \leq |F^{(X)}|^{|\mathbb{N}|} \leq |F^{\mathbb{N}}|^{|\mathbb{N}|} = |F|^{|\mathbb{N}|\cdot|\mathbb{N}|} = |F|^{|\mathbb{N}|}.$$

Entonces $|(F^{(X)})^{\mathbb{N}}| = |F^{(X)}|^{|\mathbb{N}|} = |F|^{|\mathbb{N}|} = |F^{\mathbb{N}}|$.

Así, $|F| < |F^{\mathbb{N}}| = |(F^{(X)})^{\mathbb{N}}|$.

Entonces, por el Corolario 1.2.8, $dim_F((F^{(X)})^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$.

Así, en cualquier caso, $dim_F((F^{(X)})^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}|$. □

Decimos que una clase $\mathcal{C}$ es totalmente ordenada si cualesquiera dos elementos de la clase son comparables. Decimos que una clase $\mathcal{C}$ es bien ordenada si cualquier subclase no vacía $\mathcal{D}$ tiene un elemento menor.

Denotaremos a $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]_{\prod} = \{\mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\prod}(F) | \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$

1.3.2 Proposición. *Sean F un campo y X un conjunto infinito. Entonces las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(*a*) *Si $\underline{0} \neq \mathcal{A} \in [0, \xi_{\prod}(F^{(X)})]_{\prod}$, entonces $\mathcal{A} = \xi_{\prod}((F^{(X)})^Y)$ para algún conjunto no vacío Y.*

(*b*) *$[0, \xi_{\prod}(F^{(X)})]_{\prod}$ es totalmente ordenado.*

Demostración. (a) Sean F un campo y X un conjunto infinito.

Sea $\underline{0} \neq \mathcal{A} \in [\underline{0}, \xi_{\prod}(F^{(X)})]_{\prod}$. Luego, $\mathcal{A} \leq \xi_{\prod} F^{(X)}$. Como un conjunto de cardinales está bien ordenado, existe un conjunto Y tal que $((F^{(X)})^Y) \in \mathcal{A}$ y tal que para todo conjunto no vacío Z tal que $|Z| < |Y|$ se tiene que $(F^{(X)})^Z \notin \mathcal{A}$.

Notemos que si Y es finito, entonces $(F^{(X)})^Y \cong F^{(X)}$, pues X es infinito, y así, $\mathcal{A} = \xi_{\prod}(F^{(X)})$.

Por lo anterior, sin pérdida de generalidad podemos suponer que Y es infinito.

Supongamos que $0 \neq V \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} \leq \xi_{\prod}(F^{(X)})$, entonces $V \cong (F^{(X)})^Z$ para algún conjunto no vacío Z tal que $|Y| \leq |Z|$. Luego,

$$\begin{array}{rcll} ((F^{(X)})^Y)^Z & \cong & (F^{(X)})^{Y\times Z} & \\ & \cong & (F^{(X)})^Z & \text{ya que } |\mathbb{N}| \leq |Y| \leq |Z| \\ & \cong & V. & \end{array}$$

Luego, $V \in \xi_{\prod}((F^{(X)})^Y)$.
Por lo tanto, $\mathcal{A} = \xi_{\prod}((F^{(X)})^Y)$.

(b) Sean $\underline{0} \neq \mathcal{A}, \mathcal{B} \in [0, \xi_{\prod} F^{(X)}]_{\prod}$. Luego, $\mathcal{A} = \xi_{\prod}((F^{(X)})^Y)$ y $\mathcal{B} = \xi_{\prod}((F^{(X)})^Z)$ para conjuntos no vacíos Y, Z. De nuevo, podemos suponer que Y y Z son infinitos. Más aún, podemos suponer que $|Y| \leq |Z|$. Luego,

$$((F^{(X)})^Y)^Z \cong ((F^{(X)})^{Y\times Z}) \cong ((F^{(X)})^Z).$$

Así, $((F^{(X)})^Z) \in \xi_{\prod}((F^{(X)})^Y) = \mathcal{A}$. Entonces

$$\mathcal{B} = \xi_{\prod}((F^{(X)})^Z) \leq \xi_{\prod}((F^{(X)})^Y) = \mathcal{A}.$$

Así, $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$.
En el caso que $|Z| \leq |Y|$, la demostración es similar.
Por lo tanto, $[0, \xi_{\prod}(F^{(X)})]_{\prod}$ es totalmente ordenado.

$\square$

1.3.3 Proposición. *Sea F un campo. Si $\underline{0} \neq \mathcal{A} \in \mathbb{L}_{\prod}(F)$ y $[\underline{0}, \mathcal{A}]_{\prod}$ es una clase totalmente ordenada, entonces $\mathcal{A} = \xi_{\prod}(F^{(X)})$ para algún conjunto infinito X.*

Demostración. Sea F un campo. Supongamos que $\underline{0} \neq \mathcal{A} \in \mathbb{L}_{\prod}(F)$ y que $[\underline{0}, \mathcal{A}]_{\prod}$ es una clase totalmente ordenada.

Como un conjunto de cardinales es bien ordenado, entonces existe un conjunto no vacío X tal que $F^{(X)} \in \mathcal{A}$ y para todo conjunto no vacío Y con $|Y| < |X|$ se tiene que $F^{(Y)} \notin \mathcal{A}$.

Veamos que $\mathcal{A} = \xi_{\prod}(F^{(X)})$. Es claro que $\xi_{\prod}(F^{(X)}) \leq \mathcal{A}$.

Para la otra desigualdad, sea $V \in \mathcal{A}$ tal que $V \cong F^{(Z)}$ y $|Z| > |X|$.

Como $[\underline{0}, \mathcal{A}]_{\prod}$ es totalmente ordenado, por hipótesis, entonces $\xi_{\prod}(F^{(X)}) \leq \xi_{\prod}(F^{(Z)})$ o $\xi_{\prod}(F^{(X)}) \geq \xi_{\prod}(F^{(Z)})$.

Supongamos que $\xi_{\prod}(F^{(X)}) \leq \xi_{\prod}(F^{(Z)})$. Entonces $F^{(X)} \in \xi_{\prod}(F^{(Z)})$. Luego,

$$(F^{(Z)})^Y \cong F^{(X)}$$

para algún conjunto no vacío Y, pues X es no vacío. Luego, $dim_F((F^{(Z)})^Y) = dim_F(F^{(X)})$. Pero

$$dim_F((F^{(Z)})^Y) \geq dim_F(F^{(Z)}) = |Z| > |X| = dim_F(F^{(X)}),$$

lo que es una contradicción.

Así, $\xi_{\prod}(F^{(X)}) \geq \xi_{\prod}(F^{(Z)})$. Luego, $V \in \xi_{\prod}(F^{(X)})$ para todo $V \in \mathcal{A}$.

Por lo tanto, $\mathcal{A} = \xi_{\prod}(F^{(X)})$.

Falta ver que X es infinito. Supongamos que X es finito. Luego, $\xi_{\prod}(F^{(2X)})$ y $\xi_{\prod}(F^{(3X)})$ son dos clases distintas de cero menores que $\xi_{\prod}(F^{(X)}) = \mathcal{A}$.

Es claro que $F^{(3X)} \notin \xi_{\prod}(F^{(2X)})$ y que $F^{(2X)} \notin \xi_{\prod}(F^{(3X)})$, ya que X es finito. Luego, $\xi_{\prod}(F^{(2X)}) \not\leq \xi_{\prod}(F^{(3X)})$ y $\xi_{\prod}(F^{(3X)}) \not\leq \xi_{\prod}(F^{(2X)})$, lo que contradice que $[\underline{0}, \mathcal{A}]$ es totalmente ordenado.

Por lo tanto, X es infinito.

$\square$

Para la siguiente proposición vamos a suponer la hipótesis generalizada del continuo, es decir, para cualquier conjunto infinito A, no existe un conjunto B, tal que $|A| < |B| < 2^{|A|}$.

1.3.4 Teorema. *No todos los campos son $\mathbb{L}_{\prod}$-equivalentes.*

Demostración. Sea $F = \mathbb{Q}(2^{\mathbb{R}})$ la extensión de $\mathbb{Q}$ de dimensión $|2^{\mathbb{R}}|$. Luego, $|F| = |2^{\mathbb{R}}|$.

Entonces, por el Lema 1.3.1,

$$dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}| = |F|^{|\mathbb{N}|} = |2^{\mathbb{R}}|^{|\mathbb{N}|} = 2^{|\mathbb{R}| \times |\mathbb{N}|} = |2^{\mathbb{R}}|.$$

Así, $dim_F(F^{\mathbb{N}}) = |2^{\mathbb{R}}|$.

De manera similar, por el Lema 1.3.1, $dim_F((F^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{R}}|$.

Como $|\mathbb{R}| < |2^{\mathbb{R}}| = |F^{\mathbb{N}}|$, entonces, por el Lema 1.3.1, $dim_F((F^{(\mathbb{R})})^{\mathbb{N}}) = |F^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{R}}|$.

Luego, $(F^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N}} \cong (F^{(\mathbb{R})})^{\mathbb{N}} \cong F^{(2^{\mathbb{R}})}$.

Entonces $F^{(2^{\mathbb{R}})} \in \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{N})}) \wedge \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{R})})$

Así, $\xi_{\prod}(F^{(\mathbb{N})}) \wedge \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{R})}) \geq \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})})$.

Sean $\mathcal{A} = \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{N})})$ y $\mathcal{B} = \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{R})})$.

Veamos cuáles son los elementos de $\mathcal{A}$.

Supongamos primero que X es un conjunto no vacío. Si X es finito, entonces $(F^{(\mathbb{N})})^X \cong F^{(\mathbb{N})}$.

Si X es infinito, entonces $(F^{(\mathbb{N})})^X \cong (F^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N} \times X} \cong ((F^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N}})^X \cong (F^{(2^{\mathbb{R}})})^X$. Luego, $(F^{(\mathbb{N})})^X \in \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})})$.

Así, $F^{(\mathbb{R})} \notin \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{N})}) = \mathcal{A}$, ya que $F^{(\mathbb{R})} \notin \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})})$ y $F^{(\mathbb{R})} \ncong F^{(\mathbb{N})}$.

Por lo tanto, $\mathcal{B} \nleq \mathcal{A}$.

De manera similar, si X es un conjunto no vacío. Entonces $(F^{(\mathbb{R})})^X \cong F^{(\mathbb{R})}$ o $(F^{(\mathbb{R})})^X \in \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})})$.

Luego, $F^{(\mathbb{N})} \notin \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{R})}) = \mathcal{B}$, ya que $F^{(\mathbb{N})} \notin \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})})$ y $F^{(\mathbb{R})} \ncong F^{(\mathbb{N})}$. Entonces $\mathcal{A} \nleq \mathcal{B}$.

Por lo tanto $\mathcal{A} \nleq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \nleq \mathcal{A}$.

Por otro lado, de lo anterior también obtenemos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{N})}) \wedge \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{R})}) = \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})})$ y, además, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \xi_{\prod}(F^{(2^{\mathbb{R}})}) \cup \{F^{(\mathbb{N})}, F^{(\mathbb{R})}\}$.

Luego, $[\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}]_{\prod} = \{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, donde $\mathcal{A} \nleq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \nleq \mathcal{A}$. Es decir, un rombo.

Supongamos que $\Phi : \mathbb{L}_{\prod}(F) \to \mathbb{L}_{\prod}(\mathbb{Q})$ es un isomorfismo de retículas.

Luego,

$$[\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}]_{\prod} \cong [\Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B}), \Phi(\mathcal{A}) \vee \Phi(\mathcal{B})]_{\prod}.$$

Veamos que lo anterior es imposible. Lo haremos mostrando que $[\Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B}), \Phi(\mathcal{A}) \vee \Phi(\mathcal{B})]_{\prod}$ tiene al menos cinco elementos y no puede ser un rombo.

Veamos que $\Phi(\mathcal{A}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$ para algún conjunto infinito X.

Por la Proposición 1.3.2, tenemos que $[\underline{0}, \mathcal{A}]_{\prod}$ es totalmente ordenado, ya que $\mathcal{A} = \xi_{\prod}(F^{(\mathbb{N})})$.

Luego, como Φ es un isomorfismo de retículas,

$$[\Phi(\underline{0}), \Phi(\mathcal{A})]_{\prod} = [\underline{0}_{\mathbb{L}_{\prod}(\mathbb{Q})}, \Phi(\mathcal{A})]_{\prod}$$

es totalmente ordenado.

Entonces, por la Proposición 1.3.3, $\Phi(\mathcal{A}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$ para algún conjunto infinito X.

De manera similar, tenemos que $\Phi(\mathcal{B}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)})$ para algún conjunto infinito Y.

Luego, $|X| \neq |Y|$, ya que $\mathcal{A} \nleq \mathcal{B}$ y Φ es un isomorfismo de retículas. Además, $\mathbb{Q}^{(Y)} \notin \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$ y $\mathbb{Q}^{(X)} \notin \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)})$, ya que $\mathcal{B} \nleq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A} \nleq \mathcal{B}$ y Φ es un isomorfismo de retículas.

Supongamos que $|X| < |Y|$. Luego, por la hipótesis generalizada del continuo, $|Y| \geq 2^{|X|}$.

Si $|Y| = 2^{|X|}$, entonces

$$\begin{array}{rcll} |(\mathbb{Q}^{(X)})^X| & = & |\mathbb{Q}^{(X)}|^{|X|} & \\ & = & |X|^{|X|} & X \text{ es infinito,} \\ & = & 2^{|X|} & \text{por la Observación 1.2.6,} \\ & = & |Y|. & \end{array}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}((\mathbb{Q}^{(X)})^X) = |Y|$.

Así, $\mathbb{Q}^{(Y)} \cong (\mathbb{Q}^{(X)})^X \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $|Y| > 2^{|X|}$.

Veamos que $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}) \wedge \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)})$.

Por un lado,

$$\begin{array}{rcll} |(\mathbb{Q}^{(X)})^Y| & = & |\mathbb{Q}^{(X)}|^{|Y|} & \\ & = & |X|^{|Y|} & X \text{ es infinito,} \\ & = & 2^{|Y|} & \text{por la Observación 1.2.6.} \end{array}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}((\mathbb{Q}^{(X)})^Y) = 2^{|Y|}$.

Así, $\mathbb{Q}^{(2^Y)} \cong (\mathbb{Q}^{(X)})^Y \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$.

Por otro lado,

$$\begin{array}{rcll} |(\mathbb{Q}^{(Y)})^Y| & = & |\mathbb{Q}^{(Y)}|^{|Y|} & \\ & = & |Y|^{|Y|} & Y \text{ es infinito,} \\ & = & 2^{|Y|} & \text{por la Observación 1.2.6.} \end{array}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}((\mathbb{Q}^{(Y)})^Y) = 2^{|Y|}$.

Así, $\mathbb{Q}^{(2^Y)} \cong (\mathbb{Q}^{(Y)})^Y \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)})$.

Por lo tanto, $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}) \wedge \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)}) \geq \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)})$.

Veamos que se cumple la otra desigualdad.

Sea $0 \neq V \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}) \wedge \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)})$. Luego, como $V \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)})$, existe un conjunto no vacío Z tal que $V \cong (\mathbb{Q}^{(Y)})^Z$. Entonces $|V| = |(\mathbb{Q}^{(Y)})^Z| = |Y|^{|Z|} \geq |Y| \geq |\mathbb{Q}|$.

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}(V) = |V|$. Así, por la hipótesis generalizada del continuo, tenemos que $dim_{\mathbb{Q}}(V) = |V| = |Y|$ o $dim_{\mathbb{Q}}(V) = |V| \geq 2^{|Y|}$.

Si $dim_{\mathbb{Q}}(V) = |Y|$, entonces $V \cong \mathbb{Q}^{(Y)}$, y, como $V \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$, tenemos que $\mathbb{Q}^{(Y)} \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, $dim_{\mathbb{Q}}(V) = |V| \geq 2^{|Y|}$.

Luego, $|Y|^{|Z|} = |V| \geq 2^{|Y|}$.

Si $|V| = 2^{|Y|}$, entonces $V \cong \mathbb{Q}^{(2^Y)}$.

Supongamos ahora que $|V| > 2^{|Y|}$.

Si $|Z| \leq |Y|$ entonces $|V| = |Y|^{|Z|} \leq |Y|^{|Y|} = 2^{|Y|} < |V|$, lo que es una contradicción.

Así, $|Y| < |Z|$. Luego,

$$\begin{array}{rcll} |(\mathbb{Q}^{(2^Y)})^Z| & = & |\mathbb{Q}^{(2^{|Y|})}|^{|Z|} & \\ & = & |2^Y|^{|Z|} & \\ & = & 2^{|Y||Z|} & \\ & = & 2^{|Z|} & \text{ya que } |Y| < |Z|, \\ & = & |Y|^{|Z|} & \text{por la Observación 1.2.6,} \\ & = & |V| & \end{array}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^{(2^Y)})^Z) = |V|$.
Así, $V \cong ((\mathbb{Q}^{(2^Y)})^Z \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)})$.
Por lo tanto, $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}) \wedge \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)})$.
Por último, veamos que $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)}) \in [\Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B}), \Phi(\mathcal{A}) \vee \Phi(\mathcal{B})]$.
Por un lado, tenemos que

$$\begin{array}{rcll} |(\mathbb{Q}^{(X)})^X| & = & |\mathbb{Q}^{(X)}|^{|X|} & \\ & = & |X|^{|X|} & \text{ya que } X \text{ es infinito,} \\ & = & 2^{|X|} & \text{por la Observación 1.2.6.} \end{array}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}((\mathbb{Q}^{(X)})^X) = 2^{|X|}$.
Luego, $\mathbb{Q}^{(2^X)} \cong (\mathbb{Q}^{(X)})^X \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)})$.
Por lo tanto,

$$\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)}) \leq \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}).$$

Si $V \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)})$, entonces V tiene dimensión 0 ó V tiene dimensión mayor o igual a la cardinalidad de 2^X, que es estrictamente mayor que la cardinalidad de X. Por lo tanto, $V \ncong \mathbb{Q}^{(X)}$.
Luego, $\mathbb{Q}^{(X)} \notin \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)})$. Por lo tanto,

$$\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)}) < \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}) = \Phi(\mathcal{A}) \leq \Phi(\mathcal{A}) \vee \Phi(\mathcal{B}).$$

Por otro lado,

$$\begin{array}{rcll} |(\mathbb{Q}^{(2^X)})^Y| & = & |\mathbb{Q}^{(2^X)}|^{|Y|} & \\ & = & |2^X|^{|Y|} & \text{ya que } 2X \text{ es infinito,} \\ & = & 2^{|X||Y|} & \\ & = & 2^{|Y|} & \text{ya que } |X| < |2^X| < |Y|. \end{array}$$

Luego, por el Corolario 1.2.8, $dim_{\mathbb{Q}}((\mathbb{Q}^{(2^X)})^Y) = |2|^{|Y|}$. Así, $\mathbb{Q}^{(2^Y)} \cong (\mathbb{Q}^{(2^X)})^Y \in \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)})$.
Por lo tanto, $\Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)}) \leq \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)})$.
Además, como $|2^X| < |2^Y|$, tenemos que $\mathbb{Q}^{(2^X)} \notin \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)})$.

Por lo tanto,

$$\Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B}) = \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)}) < \xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)}).$$

Así, $[\Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B}), \Phi(\mathcal{A}) \vee \Phi(\mathcal{B})]_{\prod}$ tiene al menos 5 elementos, que son $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^X)})$, $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(2^Y)}) = \Phi(\mathcal{A}) \wedge \Phi(\mathcal{B})$, $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(Y)}) = \Phi(\mathcal{B})$, $\xi_{\prod}(\mathbb{Q}^{(X)}) = \Phi(\mathcal{A})$ y $\Phi(\mathcal{A}) \vee \Phi(\mathcal{B})$, lo que es una contradicción, ya que $[\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}]_{\prod} = \{\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{B}\}$.

Para $|X| > |Y|$, sustituimos Y por X y X por Y en la demostración anterior y siguen siendo correctos los argumentos usados.

Por lo tanto, F y $\mathbb{Q}$ no son $\mathbb{L}_{\prod}$-equivalentes.

$\square$

Capítulo 2

Retículas atómicas y uniformes

En este capítulo obtenemos resultados y caracterizaciones de anillos cuando suponemos que sus grandes retículas de clases de módulos son cerradas bajo ciertas propiedades de cerradura, son atómicas o uniformes.

Recordemos algunas definiciones de la Teoría de Anillos que requerimos para este capítulo. R es local izquierdo si R sólo tiene un tipo de $R-$módulo simple. R es semi-artiniano izquierdo si todo $R-$módulo tiene un submódulo simple. R es max izquierdo si cada $R-$módulo tiene un cociente simple. Un anillo R es llamado un V anillo izquierdo si cada R-módulo simple es inyectivo. Decimos que un R-módulo M es comprimible si para todo submódulo distinto de cero N, existe un monomorfismo $\alpha : M \rightarrowtail N$. De manera similar, decimos que un R-módulo M es cocomprimible si para cada cociente distinto de cero N, existe un epimorfismo $\alpha : N \twoheadrightarrow M$. En particular, cada módulo simple es comprimible y cocomprimible. Denotamos a $R-simp$ como el conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de los R-módulos simples y definimos $E_0 = E(\oplus\{S|S \in R - simp\})$. Se puede probar que E_0 es un cogenerador inyectivo de $R - Mod$. Recordemos que N es un subcociente de M si N se sumerge en un cociente M, equivalentemente si N es un cociente de un submódulo de M. Así, cada R-módulo distinto de cero M tiene un subcociente simple.

Referimos al lector a [Al10] donde la notación de retículas de clases de módulos definidas por propiedades de cerradura es introducida, y a [Da06] para notación, terminología y conceptos de retículas, teorías de torsión e información adicional sobre retículas de módulos.

Para resultados y conceptos de Teoría de Retículas, ver [Bi73], [Ca00] y [Gr78].

2.1. Átomos y Zoclo

Sean $\varrho \subseteq \{\leq, /, ext, \prod, \oplus, E, P\}$ y $\mathcal{C}$ una clase de módulos no vacía. Entonces podemos definir la clase generada por $\mathcal{C}$ en $\mathbb{L}_\varrho(R)$ por:

$$\xi_\varrho(\mathcal{C}) = \bigwedge\{\mathcal{D} \in \mathbb{L}_\varrho(R) | \mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

2.1.1 Definición. *Sea $\mathbb{L}$ una retícula. Decimos que $\mathbb{L}$ es acotada si existen $\underline{0}, \underline{1} \in \mathbb{L}$ tal que para cada $\mathcal{C} \in \mathbb{L}$, se tiene que $\underline{0} \leq \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \leq \underline{1}$.*

Es claro que toda retícula completa es acotada.

2.1.2 Definición. *Sea $\mathbb{L}$ una retícula acotada. Decimos que $0 \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}$ es un átomo si para cada $0 \neq \mathcal{D} \in \mathbb{L}$ tal que $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{D} = \mathcal{C}$.*

Es claro que si $\mathcal{C}$ es un átomo de $\mathbb{L}_\rho(R)$ y $0 \neq M \in \mathcal{C}$, entonces $\xi_\rho(M) = \mathcal{C}$.

2.1.3 Definición. *Sea $\mathbb{L}$ una retícula completa. Definimos el zoclo de una retícula como el supremo de todos los átomos y lo denotamos por $Zoc(\mathbb{L})$.*

En el siguiente teorema describimos los zoclos de algunas retículas de clases de módulos.

2.1.4 Teorema. *Para cualquier anillo R, tenemos que:*

(*a*) $Zoc(\mathbb{L}_{\leq}(R)) = \{M \in R - Mod | M \text{ es comprimible}\}$.

(*b*) $Zoc(\mathbb{L}_{/}(R)) = \{M \in R - Mod | M \text{ es cocomprimible}\}$.

(*c*) $Zoc(\mathbb{L}_{\oplus}(R)) = \underline{0}$.

(*d*) $Zoc(\mathbb{L}_{\prod}(R)) = \underline{0}$.

(*e*) $Zoc(\mathbb{L}_E(R)) = \{E \in R - Mod | E \text{ es inyectivo}\}$.

(*f*) $Zoc(\mathbb{L}_P(R)) = \{P \in R{-}Mod | P \text{ es proyectivo o no tiene cubierta proyectiva}\}$.

(*g*) $Zoc(\mathbb{L}_{\leq,/}(R)) = \{S \in R - Mod | S \text{ es simple}\} \cup \{0\}$.

Demostración.

(a) Los átomos en $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ son exactamente $\xi_{\leq}(M)$ tales que M es comprimible. En efecto, si $\mathcal{C}$ es un átomo y $0 \neq M \in \mathcal{C}$, entonces $\xi_{\leq}(M) = \mathcal{C}$. Si $0 \neq N \leq M$, entonces $\xi_{\leq}(N) = \mathcal{C}$. Luego, $M \in \xi_{\leq}(N)$. Así, existe un monomorfismo $M \rightarrowtail N$. Entonces M es comprimible. Por lo tanto, cada $M \in Zoc(\mathbb{L}_{\leq}(R))$ es comprimible. Por otro lado, es claro que cada módulo comprimible genera un átomo en $\mathbb{L}_{\leq}(R)$. Por lo tanto, $Zoc(\mathbb{L}_{\leq}(R)) = \{M \in R - Mod | M \text{ es comprimible}\}$.

(b) La demostración es similar a la demostración del inciso (a).

(c) Si $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\oplus}(R)$ es un átomo, entonces $\xi_{\oplus}(M) = \mathcal{C}$, para cada módulo M distinto de cero que pertenece a $\mathcal{C}$. Luego, existe un conjunto X tal que $|M| < |M^{(X)}|$. Entonces $\xi_{\oplus}(M) = \mathcal{C} = \xi_{\oplus}(M^{(X)})$. Así, $M \in \xi_{\oplus}(M^{(X)})$ y $M \cong (M^{(X)})^{(Y)}$ para algún conjunto no vacío Y. Pero $|M| < |M^{(X)}| \leq |(M^{(X)})^{(Y)}|$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\oplus}(R)$ no tiene átomos.

(d) La demostración es similar a la demostración del inciso (c).

(e) Si $\mathcal{C}$ es un átomo de $\mathbb{L}_E(R)$, entonces $\mathcal{C} = \xi_E(E) = \{0, E\}$ para algún E inyectivo. Así, los átomos están en una correspondencia biyectiva con las clases de isomorfismo de los módulos inyectivos. Por lo tanto, $Zoc(\mathbb{L}_E(R)) = \{E \in R - Mod | E$ es inyectivo$\}$.

(f) Sea $\mathcal{C}$ un átomo de $\mathbb{L}_P(R)$. Si $0 \neq M \in \mathcal{C}$, entonces $\xi_P(M) = \mathcal{C}$. Tenemos dos casos: M tiene una cubierta proyectiva o M no tiene una cubierta proyectiva. Si sucede lo primero, tenemos que $\{0, P(M)\} = \xi_P(P(M)) = \xi_P(M)$. Así, $M = P(M)$. Por otro lado, si M no tiene cubierta proyectiva, entonces $\mathcal{C} = \xi_P(M) = \{0, M\}$. Por lo tanto, los átomos están determinados por los módulos proyectivos o los módulos que no tienen cubierta proyectiva.

(g) Si $\mathcal{C}$ es un átomo de $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$, entonces $\mathcal{C} = \{0, S\}$ para un módulo simple S, ya que todo módulo distinto de cero tiene un módulo simple como subcociente. Por otro lado, todo módulo simple genera un átomo. Por lo tanto, $Zoc(\mathbb{L}_{\leq,/}(R)) = \{S \in R - Mod | S$ es simple$\} \cup \{0\}$.

□

2.1.5 Definición. *Sea $\mathbb{L}$ una retícula completa. Decimos que $\mathcal{C}$ es esencial en $\mathbb{L}$ si para cualquier $\underline{0} \neq \mathcal{D} \in \mathbb{L}$ tenemos que $\mathcal{D} \wedge \mathcal{C} \neq \underline{0}$. Denotamos $\mathfrak{E}(\mathbb{L}) = \bigwedge\{\mathcal{E} \in \mathbb{L} | \, \mathcal{E}$ es esencial en $\mathbb{L}\}$.*

Si $\mathcal{E} \in \mathbb{L}$ es esencial, es claro que para cada $\mathcal{C}$ átomo en $\mathbb{L}$, tenemos que $\mathcal{C} \leq \mathcal{E}$. Así, $Zoc(\mathbb{L}) \leq \mathcal{E}$ para todo elemento esencial $\mathcal{E}$ en $\mathbb{L}$.

Una clase de R-módulos es llamada estable si es cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas.

2.1.6 Proposición. *Sea R un anillo. Entonces:*

(*a*) $Zoc(\mathbb{L}_E(R)) = \mathfrak{E}(\mathbb{L}_E(R))$.

(*b*) $Zoc(\mathbb{L}_P(R)) = \mathfrak{E}(\mathbb{L}_P(R))$.

(*c*) $Zoc(\mathbb{L}_\oplus(R)) = \mathfrak{E}(\mathbb{L}_\oplus(R))$.

(*d*) $Zoc(\mathbb{L}_\prod(R)) = \mathfrak{E}(\mathbb{L}_\prod(R))$.

Demostración. (a) Es suficiente ver que $Zoc(\mathbb{L}_E(R))$ es esencial. Sea $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_E(R)$. Como $\mathcal{C}$ estable, entonces existe un módulo inyectivo $0 \neq E$ en $\mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C} \wedge Zoc(\mathbb{L}_E(R)) \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $Zoc(\mathbb{L}_E(R))$ es esencial y $Zoc(\mathbb{L}_E(R)) = \mathfrak{E}(\mathbb{L}_E(R))$.

(b) La demostración es similar a la demostración del inciso (a).

(c) Sea $0 \neq M \in R-Mod$ y definamos $\mathcal{C}_M = \{0 \neq L \in R-Mod | L$ no es sumando directo de $M\}$. Afirmamos que $\mathcal{C}_M \in \mathbb{L}_\oplus(R)$ y, además, $\mathcal{C}_M$ es esencial. En efecto, sea $\{L_i\}_{i\in I} \in \mathcal{C}_M$. Si $\oplus_{i\in I} L_i$ es sumando directo de M, entonces L_i es sumando directo de M para toda $i \in I$, lo que es un contradicción. Así, $\oplus_{i\in I} L_i \in \mathcal{C}_M$ y, por lo tanto, $\mathcal{C}_M$ es cerrada bajo tomar sumas directas.

Ahora veamos que $\mathcal{C}_M$ es esencial. Sean $\mathcal{D} \in \mathbb{L}_\oplus(R)$ y $0 \neq N \in \mathcal{D}$. Si $N \in \mathcal{C}_M$ hemos terminado. Supongamos pues que N es sumando directo de M. Entonces existe un conjunto X tal que $|M| < |N^{(X)}|$. Luego, $N^{(X)}$ no es sumando directo de M. Así, $0 \neq N^{(X)} \in \mathcal{D} \wedge \mathcal{C}_M$. Por lo tanto, $\mathcal{C}_M$ es esencial en $\mathbb{L}_\oplus(R)$.

Como $M \notin \mathcal{C}_M$, entonces $M \notin \mathfrak{E}_\oplus(R)$. Por lo tanto, $\mathfrak{E}_\oplus(R) = \underline{0} = Zoc_\oplus(R)$.

(d) La demostración es similar a la demostración del inciso (c).

□

2.2. Retículas atómicas y uniformes

2.2.1 Definición. *Sea R un anillo y sean σ y ρ tales que $\sigma \subseteq \rho \subseteq \{\leq, /, \oplus, \prod, ext, E, P\}$. Decimos que $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$ es $\sigma - \rho$ esencial si para todo $\underline{0} \neq \mathcal{D} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$ tal que $\mathcal{D} \leq \xi_\rho(\mathcal{C})$ se tiene que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \neq \underline{0}$. $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es llamada $\sigma - \rho$ uniforme si cada $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$ es $\sigma - \rho$ esencial.*

2.2.2 Definición. *Sea $\mathbb{L}$ una retícula con $\underline{0}$. Decimos que $\mathbb{L}$ es atómica si para todo $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}$ existe un átomo $\mathcal{D} \in \mathbb{L}$ tal que $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$.*

2.2.3 Teorema. *Sea $\mathbb{L}_\sigma(R)$ $\sigma - \rho$ uniforme. Si $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es atómica, entonces $\mathbb{L}_\rho(R)$ es atómica.*

Demostración. Sea $\mathbb{L}_\sigma(R)$ $\sigma-\rho$ uniforme. Supongamos que $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es atómica y sea $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_\rho(R)$. Entonces $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$ y existe un átomo $\mathcal{D} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$ tal que $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$. Luego, $\xi_\rho(\mathcal{D}) \leq \mathcal{C}$. Veamos que $\xi_\rho(\mathcal{D})$ es un átomo en $\mathbb{L}_\rho(R)$. Sea $\underline{0} \neq \mathcal{A} \in \mathbb{L}_\rho(R)$ tal que $\mathcal{A} \leq \xi_\rho(\mathcal{D})$. Luego, $\mathcal{A} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$. Como $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es $\sigma-\rho$ uniforme, tenemos que $\mathcal{D} \wedge \mathcal{A} \neq \underline{0}$. Entonces, al ser $\mathcal{D}$ un átomo en $\mathbb{L}_\sigma(R)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D} \wedge \mathcal{A} \leq \mathcal{A}$. Luego, $\xi_\rho(\mathcal{D}) \leq \mathcal{A}$ y $\xi_\rho(\mathcal{D}) = \mathcal{A}$. Así, $\xi_\rho(\mathcal{D})$ es un átomo en $\mathbb{L}_\rho(R)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_\rho(R)$ es atómica.

□

2.2.4 Definición. *Sea $\mathbb{L}$ una retícula con $\underline{0}$. Decimos que $\mathbb{L}$ es uniforme si para cualesquiera $\underline{0} \neq \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{L}$ se tiene que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \neq \underline{0}$.*

2.2.5 Teorema. *Si $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es $\sigma-\rho$ uniforme, entonces $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es uniforme si y sólo si $\mathbb{L}_\rho(R)$ es uniforme.*

Demostración. Sea $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es $\sigma-\rho$ uniforme.

Supongamos que $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es uniforme y sean $\underline{0} \neq \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{L}_\rho(R)$. Entonces $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$. Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_\rho(R)$ es uniforme.

Veamos el recíproco. Sea $\mathbb{L}_\rho(R)$ uniforme y tomemos $\underline{0} \neq \mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$. Entonces $\xi_\rho(\mathcal{C}) \wedge \xi_\rho(\mathcal{D}) \neq \underline{0}$. Sea $\mathcal{A} = \xi_\rho(\mathcal{C}) \wedge \xi_\rho(\mathcal{D})$. Como $\mathcal{A} \in \mathbb{L}_\sigma(R)$, $\mathcal{A} \leq \xi_\rho(\mathcal{C})$ y $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es $\sigma-\rho$ uniforme, tenemos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \neq \underline{0}$. Luego, como $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \leq \mathcal{A} \leq \xi_\rho(\mathcal{D})$ y como $\mathcal{D}$ es $\sigma-\rho$ esencial, tenemos que $\mathcal{A} \wedge \mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \neq 0$. Así, $\mathcal{C} \wedge \mathcal{D} \neq 0$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_\sigma(R)$ es uniforme.

□

Veamos algunos ejemplos de retículas $\mathbb{L}_\sigma(R)$ tales que son $\sigma-\rho$ uniformes.

2.2.6 Lema. *$\mathbb{L}_\leq(R)$ es $\{\leq\}-\{\leq,\oplus\}$ uniforme.*

Demostración. Sean $0 \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_\leq(R)$ y $0 \neq N \in \xi_{\leq,\oplus}(\mathcal{C})$. Veamos que $\mathcal{C} \wedge \xi_\leq(N) \neq \underline{0}$. Como $N \in \xi_{\leq,\oplus}(\mathcal{C})$, entonces existe un monomorfismo $N \overset{\alpha}{\rightarrowtail} \oplus_{i\in I}\{M_i\}$ donde $M_i \in \mathcal{C}$ $\forall i \in I$, por lo que cada $0 \neq x \in N$, $\alpha(x)$ puede ser escrito como $m_{i_0} + \cdots + m_{i_k}$. Escojamos $0 \neq x \in N$ tal que k sea el menor posible. Esta elección implica que $(0 : m_{i_s}) = (0 : m_{i_r})$ para cualesquiera $0 \leq r, s, \leq k$. Así, $(0 : x) = (0 : m_{i_0})$.

Entonces
$$Rx \cong \frac{R}{(0:x)} = \frac{R}{(0:m_{i_0})} \cong Rm_{i_0}.$$

Así, $Rx \overset{\cong}{\rightarrowtail} Rm_{i_0} \hookrightarrow M_{i_0}$ y $Rx \leq N$. Luego, $\mathcal{C} \wedge \xi_\leq(N) \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_\leq(R)$ es $\{\leq\}-\{\leq,\oplus\}$ uniforme.

□

Un anillo con un endomorfismo aditivo D que satisface $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ para cualesquiera $a, b \in R$ es llamado un anillo diferencial y decimos que R es un anillo con derivación D.

Sea K un campo con derivación D y $K[y, D]$ denota el anillo diferencial de polinomios en la indeterminada y con coeficientes en K, es decir, el grupo aditivo de $K[y, D]$ es el grupo del anillo de polinomios en la indeterminada y con coeficientes en K, y la multiplicación en $K[y, D]$ es definida por $ya = ay + D(a)$ para todo $a \in K$.

Sea K un campo con característica 0 y D una derivación de K. Un resultado de Kolchin ([Ko53, Teorema, p.771]) asegura la existencia de un campo $K \subseteq U$ y una derivación $\overline{D}$ de U, que es una extensión de D, tal que la ecuación

$$p(x, \overline{D}(x), \cdots, \overline{D}^{(n)}(x)) = 0 \qquad n \text{ arbitrario},$$

tiene una solución $\xi \in U$ para todo $p(X) \in U[X_1, ..., X_{n+1}] - U$. Más aún, cada ecuación lineal diferencial homogénea en $\overline{D}$ sobre U tiene una solución no trivial en U. Tal campo U es llamado una extensión universal de K o un campo diferencial universal, ver ([Ko53, Teorema, p. 771]).

Sea K un campo diferencial univesal con derivación D. Denotemos $R = K[y, D]$, ver [Co69, p. 76]. Tenemos el siguiente resultado para R ([Co69, Teorema 1.4]):

2.2.7 Teorema. *El anillo R tiene las siguiente propiedades:*

(a) *R es un dominio de ideales principales derechos e izquierdos.*

(b) *R es un anillo simple (y $zoc(R) = 0$).*

(c) *R es $V-$anillo derecho.*

(d) *R no es un campo.*

(e) *R tiene, salvo isomorfismo, un único módulo simple derecho.*

2.2.8 Ejemplo. $\mathbb{L}_{\leq}(R^*)$ *no siempre es $\{\leq\} - \{\leq, \prod\}$ uniforme. Denotemos por R^* el anillo opuesto de R. Luego, por el Teorema 2.2.7, R^* es local izquierdo, V-anillo izquierdo y $zoc(R^*) = 0$. Sea S el R^*-módulo simple. Como R^* es un V-anillo izquierdo, entonces tenemos que S es un módulo inyectivo. Como R^*-simp tiene sólo un miembro, que además es inyectivo, entonces tenemos que R^* se sumerge en un producto S^X. Luego, $R^* \in \xi_{\leq, \prod}(S)$. Como $zoc(R^*) = 0$, entonces $\xi_{\leq}(R^*) \wedge \xi_{\leq}(S) = \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq}(R^*)$ no es $\{\leq\} - \{\leq, \prod\}$ uniforme.*

2.2.9 Lema. $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ *es $\{\leq, /\} - \{\leq, /, \oplus\}$ uniforme.*

Demostración. Sean $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ y $0 \neq N \in \xi_{\leq,/,\oplus}(\mathcal{C})$. Veamos que $\mathcal{C} \wedge \xi_{\leq,/}(N) \neq \underline{0}$. Por hipótesis existe un epimorfismo α tal como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \oplus_{i\in I} M_i \arrow[r, two heads, "\alpha"] & M \\ & N \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

donde $M_i \in \mathcal{C}$, $\forall i \in I$.

Escojamos $0 \neq x \in N$ tal que $x = \alpha(m_{i_0} + \cdots + m_{i_k})$ con k el menor posible. Luego, $(0 : m_{i_s}) = (0 : m_{i_r})$ para cualesquiera $0 \leq r, s, \leq k$. Así, $(0 : x) = (0 : m_{i_0})$.

Entonces

$$Rx \cong \frac{R}{(0 : x)} \cong \frac{R}{(0 : m_{i_0})} \cong Rm_{i_0}.$$

Así, $Rx \overset{\cong}{\rightarrowtail} Rm_{i_0} \hookrightarrow M_{i_0}$ y $Rx \leq N$. Luego, $\mathcal{C} \wedge \xi_{\leq,/}(N) \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es $\{\leq, /\} - \{\leq, /, \oplus\}$ uniforme.

□

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ dos clases de $R-$módulos. Definimos

$$(\mathcal{C} : \mathcal{D}) = \left\{ L \in R - Mod \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{existe } M \in \mathcal{C},\ N \in \mathcal{D} \text{ y una sucesión} \\ \text{exacta } 0 \to M \to L \to N \to 0 \end{array} \right\}.$$

Una clase de $R-$módulos cerrada bajo tomar isomorfismos es llamada con cero si contiene al módulo cero.

2.2.10 Observación. *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ tres clases con cero de R-módulos. Luego, $((\mathcal{C} : \mathcal{D}) : \mathcal{E}) = (\mathcal{C} : (\mathcal{D} : \mathcal{E}))$, ver [Al10, Proposición 2.2].*

Podemos definir recursivamente: $\mathcal{C}^{:0} = \{0\}$ y $\mathcal{C}^{:(n+1)} = (\mathcal{C} : \mathcal{C}^{:n})$.

2.2.11 Observación. *Sea $\mathcal{C}$ una clase con cero de $R-$módulos. Luego, $\xi_{ext}(\mathcal{C}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$.*

Demostración. Veamos primero que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n} \in \mathbb{L}_{ext}$. Supongamos que

$$0 \to N \to M \to L \to 0$$

es exacta con $N, L \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$. Luego, $N \in \mathcal{C}^{:n}$ y $L \in \mathcal{C}^{:m}$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. Luego, $M \in (\mathcal{C}^{n} : \mathcal{C}^{:m}) = \mathcal{C}^{:(n+m)}$, por la Observación 2.2.10. Así, $M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n} \in \mathbb{L}_{ext}$.

Ahora, si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D} \in \mathbb{L}_{ext}$, entonces $(\mathcal{C} : \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{D} : \mathcal{D}) = \mathcal{D}$, e, inductivamente, $\mathcal{C}^{:n} \subseteq \mathcal{D}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n} \subseteq \mathcal{D}$.

□

Es fácil ver que si $\mathcal{C}$ es una clase hereditaria, entonces $\xi_{ext}(\mathcal{C})$ es también una clase hereditaria. Similarmente, si $\mathcal{C}$ una clase cohereditaria, entonces $\xi_{ext}(\mathcal{C})$ es también una clase cohereditaria. Por lo tanto, $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\leq,/}$ implica que $\xi_{ext}(\mathcal{C}) \in \mathbb{L}_{\leq,/,ext}$.

2.2.12 Lema. *$\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es $\{\leq\} - \{\leq, ext\}$ uniforme.*

Demostración. Sea $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\leq,}(R)$. Es suficiente con demostrar que para todo $M \in \xi_{\leq,ext}(\mathcal{C})$ distinto de cero se tiene que $\mathcal{C} \wedge \xi_{\leq}(M) \neq \underline{0}$. Se sigue de la Observación 2.2.11 que $\xi_{\leq,ext}(\mathcal{C}) = \xi_{ext}(\mathcal{C}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$.

Como $0 \neq M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$, entonces $M \in \mathcal{C}^{:n}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Escojamos el mejor n con esta propiedad.

Si $n = 1$, entonces $M \in \mathcal{C}$.

Si $n > 1$, entonces $M \in (\mathcal{C} : \mathcal{C}^{:(n-1)})$, y así, existe una sucesión exacta

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

con $L \in \mathcal{C}$ y $N \in \mathcal{C}^{:(n-1)}$.

Luego, $0 \neq L \in \mathcal{C} \wedge \xi_{\leq}(M)$.

Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es $\{\leq\} - \{\leq, ext\}$ uniforme.

$\square$

2.2.13 Lema. *$\mathbb{L}_{/}(R)$ es $\{/\} - \{/, ext\}$ uniforme.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración del Lema 2.2.12.

$\square$

2.2.14 Lema. *$\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es $\{\leq, /\} - \{\leq, /, ext\}$ uniforme.*

Demostración. Sea $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\leq,/}(R)$. Es fácil ver que $\xi_{\leq,/,ext}(\mathcal{C}) = \xi_{ext}(\mathcal{C}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$, por la Observación 2.2.11.

Supongamos que $0 \neq N$ es tal que $\xi_{\leq,/,ext}(N) \in \mathcal{C}$. Veamos que $\xi_{\leq,/}(N) \wedge \mathcal{C} \neq \underline{0}$.

Como $0 \neq N \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{:n}$, podemos tomar el menor n tal que $N \in \mathcal{C}^{:n}$.

Si $n = 1$, entonces $N \in \mathcal{C}$ y hemos terminado.

Si $n > 1$, entonces existe una sucesión exacta

$$0 \to L \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \to 0$$

con $L \in \mathcal{C}$ y $M \in \mathcal{C}^{:(n-1)}$.

Luego, L es un subcociente distinto de cero de N que pertenece a $\mathcal{C}$. Así, $0 \neq L \in \mathcal{C} \wedge \xi_{\leq,/}(N)$.

Por lo tanto $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es $\{\leq, /\} - \{\leq, /, ext\}$ uniforme.

$\square$

2.2.15 Definición. *Sea* $\mathbb{L}$ *una retícula con menor elemento* $\underline{0}$*. Decimos que* $a' \in \mathbb{L}$ *es un seudocomplemento de* $a \in \mathbb{L}$ *si* a' *es un elemento máximo tal que* $a \wedge a' = \underline{0}$*.* $\mathbb{L}$ *es una retícula seudocomplementada si todos sus elementos tienen un seudocomplemento.*

2.2.16 Observación. ([*Al*10, *Lema* 1.7; 6, *Sec.* 2]) $\mathbb{L}_{\leq,/}$ *es una gran retícula seudocomplementada. El seudocomplemento para* $\mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\leq,/}$ *está dado por*

$$\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,/\}}} = \{M \in R-Mod | M \text{ no tiene un subcociente distinto de cero en } \mathcal{C}\}.$$

Más aún, $\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,/\}}}$ *pertenece a* $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus,ext}$.

2.2.17 Lema. $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ *es* $\{\leq,/\} - \{\leq,/,\oplus,ext\}$ *uniforme.*

Demostración. Sean $\underline{0} \neq \mathcal{C} \in \mathbb{L}_{\leq,/}$ y $0 \neq N \in \xi_{\leq,/,\oplus,ext}(\mathcal{C})$. Afirmamos que $\mathcal{C} \wedge \xi_{\leq,/}(N) \neq \underline{0}$. Como consecuencia de la Observación 2.2.16, tenemos que $(\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,/\}}})^{\perp_{\{\leq,/\}}}$ pertenece a $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus,ext}$ y contiene a $\mathcal{C}$. Entonces es claro que $\xi_{\leq,/,\oplus,ext}(\mathcal{C}) \leq (\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,/\}}})^{\perp_{\{\leq,/\}}}$.

Es fácil ver que $(\mathcal{C}^{\perp_{\{\leq,/\}}})^{\perp_{\{\leq,/\}}}$ consiste precisamente de los módulos tales que cada uno de sus subcocientes distintos de cero tienen un subcociente distinto de cero en $\mathcal{C}$

En particular, como N es un subcociente distinto de cero de sí mismo, entonces N tiene un subcociente distinto de cero perteneciente a $\mathcal{C}$. Luego, $\mathcal{C} \wedge \xi_{\leq,/}(N) \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq,/}$ es $\{\leq,/\}$ -$\{\leq,/,\oplus,ext\}$ uniforme. □

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema 2.1.4.

2.2.18 Teorema. *Sea* R *un anillo. Las siguiente afirmaciones se cumplen,*

(a) $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ *es atómica si y sólo si para cada* $M \in R-Mod$ *tiene un submódulo comprimible.*

(b) $\mathbb{L}_{/}(R)$ *es atómica si y sólo si para cada* $M \in R-Mod$ *tiene un cociente cocomprimible.*

(c) $\mathbb{L}_{\oplus}(R)$ *y* $\mathbb{L}_{\prod}(R)$ *nunca son atómicas*

(d) $\mathbb{L}_{E}(R)$ *y* $\mathbb{L}_{P}(R)$ *nunca son atómicas.*

2.2.19 Proposición. *Para todo anillo* R*,* $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ *es atómica.*

Demostración. La prueba es inmediata del hecho de que todo módulo distinto de cero posee un subcociente simple distinto de cero.

□

2.2.20 Proposición. *Para todo anillo* R*,* $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus}(R)$ *es atómica.*

Demostración. Por el Lema 2.2.9, tenemos que $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es $\{\leq,/\}-\{\leq,/,\oplus\}$ uniforme. Luego, por el Teorema 2.2.3, $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus}(R)$ es atómica.

□

2.2.21 Proposición. *Para todo anillo R, $\mathbb{L}_{\leq,/,ext}(R)$ y $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus,ext}(R)$ son atómicas.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración de la Proposición 2.2.20.

□

2.2.22 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(i) $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ *es uniforme.*

(ii) *R es local izquierdo y semi-artiniano izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es uniforme. Sean S, S' simples módulos. Luego, $\{0,S\},\{0,S'\}\in\mathbb{L}_{\leq}(R)$. Entonces, por hipótesis, $\{0,S\}\wedge\{0,S'\}\neq \underline{0}$. Entonces $\{0,S\}=\{0,S'\}$ y así, $S\cong S'$. Por lo tanto, R es un anillo local izquierdo.

Sea $0\neq M\in R-Mod$. Entonces $\xi_{\leq}(M)\wedge\{0,S\}\neq\underline{0}$. Luego, $S\in\xi_{\leq}(M)$. Así, S se sumerge en M. Por lo tanto, R es un anillo semi-artiniano izquierdo.

Recíprocamente, supongamos que R es un anillo semi-artiniano izquierdo y local izquierdo. Es suficiente con mostrar que $\xi_{\leq}(N)\wedge\xi_{\leq}(M)\neq\underline{0}$ para cualesquiera $N, M\in R-Mod$ distintos de cero. Pero esto se sigue del hecho de que al ser R un anillo semi-artiniano izquierdo y local izquierdo, una copia del único módulo simple S se sumerge tanto en N como en M. Luego, $0\neq S\in\xi_{\leq}(N)\wedge\xi_{\leq}(M)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es uniforme.

□

2.2.23 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(i) $\mathbb{L}_{\leq,ext}(R)$ *es uniforme.*

(ii) *R es local izquierdo y semi-artiniano izquierdo.*

Demostración. Por el Lema 2.2.12, tenemos que $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es $\{\leq\}-\{\leq,ext\}$ uniforme. Luego, por el Teorema 2.2.5, $\mathbb{L}_{\leq,ext}(R)$ es uniforme si y sólo si $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es uniforme. Por otro lado, por el Teorema 2.2.22, $\mathbb{L}_{\leq}(R)$ es uniforme si y sólo si R es local izquierdo y semi-artiniano izquierdo. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq,ext}(R)$ es uniforme si y sólo si R es local izquierdo y semi-artiniano izquierdo.

□

2.2.24 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\leq,\oplus}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es local izquierdo y semi-artiniano izquierdo.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración del Teorema 2.2.23. □

2.2.25 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{/}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es local izquierdo y max izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{/}(R)$ es uniforme. Sean S, S' módulos simples. Luego, $\{0, S\}, \{0, S'\} \in \mathbb{L}_{/}(R)$. Entonces, por hipótesis, $\{0, S\} \wedge \{0, S'\} \neq \underline{0}$. Luego, $\{0, S\} = \{0, S'\}$ y $S \cong S'$. Por lo tanto, R es un anillo local izquierdo.

Sea $0 \neq M \in R\text{−}Mod$. Entonces $\xi_{/}(M) \wedge \{0, S\} \neq \underline{0}$. Luego, $S \in \xi_{/}(M)$. Entonces existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow S$. Luego, existe $N \leq M$ tal que $M/N \cong S$. Esto implica que N es un submódulo máximo de M. Por lo tanto, R es un anillo max izquierdo.

Recíprocamente, supongamos que R es un anillo local izquierdo y max izquierdo. Sean $0 \neq N, M \in R - Mod$. Como R es max izquierdo, entonces existen submódulos máximos $M_1 \leq M$ y $N_1 \leq N$ respectivamente. Luego, $M/M_1 \cong S \cong N/N_1$, ya que R es local izquierdo. Así, $0 \neq S \in \xi_{/}(M) \wedge \xi_{/}(N)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{/}(R)$ es uniforme.

□

2.2.26 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{/,ext}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es local izquierdo y max izquierdo.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.2.25 y del Lema 2.2.13.

□

2.2.27 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\oplus}(R)$ *es uniforme.*

(II) *R es semisimple y local izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\oplus}(R)$ es uniforme. Sean $0 \neq M, P \in R-Mod$ tal que P es un módulo proyectivo. Por hipótesis, $\xi_{\oplus}(M) \wedge \xi_{\oplus}(P) \neq \underline{0}$. Así, existen X, Y conjuntos, tales que $M^{(X)} \cong P^{(Y)}$. Como P es proyectivo, entonces $P^{(Y)}$ y $M^{(X)}$ son proyectivos. Luego, cada módulo M es proyectivo. Por lo tanto, R es un anillo semisimple.

Sean S, S' dos módulos simples. Luego, $\xi_{\oplus}(S) \wedge \xi_{\oplus}(S') \neq \underline{0}$. Así, existen X, Y conjuntos, tales que $S^{(X)} \cong S'^{(Y)}$. Entonces $S \cong S'$. Por lo tanto, R es local izquierdo.

Por otro lado, supongamos que R es un anillo semisimple y local izquierdo. Sean $0 \neq M, N \in R-Mod$ y denotemos por S al módulo simple. Como R es semisimple, entonces $M \cong S^{(X)}$ y $N \cong S^{(Y)}$ para algunos conjuntos X, Y. Sea Z un conjunto infinito tal que $|X|, |Y| \leq |Z|$. Luego, $M^{(Z)} \cong (S^{(X)})^{(Z)} \cong S^{(X \times Z)} \cong S^{(Z)} \cong S^{(Y \times Z)} \cong (S^{(Y)})^{(Z)} = N^{(Z)}$. Entonces $0 \neq M^{(Z)} \in \xi_{\oplus}(M) \wedge \xi_{\oplus}(N)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\oplus}(R)$ es uniforme.

$\square$

2.2.28 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\prod}(R)$ *es uniforme.*

(II) *R es semisimple y local izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\prod}(R)$ es uniforme. Sean $0 \neq M, E \in R-Mod$ tal que E es un módulo inyectivo. Entonces, por hipótesis, $\xi_{\prod}(M) \wedge \xi_{\prod}(E) \neq \underline{0}$. Así, existen conjuntos X, Y tales que $M^X \cong E^Y$. Como E es inyectivo, entonces E^Y es también lo es. Así, M^X es inyectivo. Luego, M es inyectivo. Por lo tanto, R es un anillo semisimple.

Sean S, S' dos módulos simples. Luego, $\xi_{\prod}(S) \wedge \xi_{\prod}(S') \neq \underline{0}$. Así, existen conjuntos X, Y tales que $S^X \cong S'^Y$. Luego, $S \cong S'$. Por lo tanto, R es local izquierdo.

Supongamos ahora que R es un anillo semisimple y local izquierdo. Sean $M, N \in R-Mod$ distintos de cero. Si S es el módulo simple, entonces $M \cong S^{(X)}$ y $N \cong S^{(Y)}$ para algunos X, Y conjuntos. Sea Z un conjunto infinito tal que $|M|, |N| \leq |Z|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que R no es el anillo trivial. Luego, $2 \leq |M|, |N|$ y, así, $|2^Z| \leq |M^Z| \leq |Z^Z| \leq |(2^Z)^Z| = |2^{(Z \times Z)}| = |2^Z|$. Luego, $|M|^{|Z|} = |2|^{|Z|}$. Similarmente, $|N|^{|Z|} = |2|^{|Z|}$. Entonces $|M|^{|Z|} = |N|^{|Z|}$.

Por otro lado, existe un conjunto A tal que $M^Z \cong S^{(A)}$. Como M^Z es infinito, entonces $S^{(A)}$ es infinito, ya que $|M^Z| = |S^{(A)}|$. Luego, $|S^{(A)}| = max\{|S|, |A|\}$. Como $|S| \leq |S^{(X)}| = |M| < |M^Z| = |S^{(A)}| = max\{|S|, |A|\}$, se tiene que $|S| < max\{|S|, |A|\}$. Luego, $|A| = max\{|S|, |A|\} = |M^Z|$.

De manera similar, existe un conjunto B tal que $N^Z \cong S^{(B)}$ y $|N^Z| = |B|$. Entonces $|A| = |B|$. Luego, $M^Z \cong S^{(A)} \cong S^{(B)} \cong N^Z$. Así, $0 \neq M^Z \in \xi_{\prod}(M) \wedge \xi_{\prod}(N)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\prod}(R)$ es uniforme.

$\square$

2.2.29 Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_E(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es trivial.*

Demostración. Supongamos que R no es trivial. Sea $0 \neq E$ un módulo inyectivo. Entonces existe X conjunto tal que $|E^X| > |E|$. Como E y E^X son inyectivos, entonces $\{0, E\}, \{0, E^X\} \in \mathbb{L}_E(R)$ y su ínfimo es $\{0\}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_E(R)$ no es uniforme.

El recíproco es inmediato.

$\square$

2.2.30 Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_P(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es trivial.*

Demostración. Supongamos que R no es trivial. Sea $0 \neq P$ un módulo proyectivo. Entonces existe X conjunto tal que $|P^{(X)}| > |P|$. Como P y $P^{(X)}$ son proyectivos, entonces $\{0, P\}, \{0, P^{(X)}\} \in \mathbb{L}_P(R)$ y su ínfimo es $\{0\}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_P(R)$ no es uniforme.

El recíproco es inmediato.

$\square$

2.2.31 Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{ext}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es trivial.*

Demostración. Supongamos que R no es trivial. Sea $0 \neq E$ un módulo inyectivo. Entonces $\{0, E^X\} \in \mathbb{L}_{ext}(R)$ para todo conjunto infinito X. Sean X, Y conjuntos infinitos tales que $|E^X| < |E^Y|$. Entonces $E^X \ncong E^Y$. Así, $\{0, E^X\} \wedge \{0, E^Y\} = \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{ext}(R)$ no es uniforme.

El recíproco es inmediato.

□

2.2.32 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es local izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es uniforme. Sean $S, S' \in R-Mod$ módulos simples. Entonces $\{0, S\} \wedge \{0, S'\} \neq \underline{0}$, ya que ambos pertenecen a $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$, que es uniforme. Luego, $S \cong S'$. Por lo tanto, R es un anillo local izquierdo.

Supongamos ahora que R es un anillo local izquierdo. Sean $0 \neq M, N \in R-Mod$. Luego, existen S y S' módulos simples que son subcocientes de M y N respectivamente. Entonces $S \cong S'$, ya que R es local izquierdo. Así, $\underline{0} \neq \{0, S\} \leq \xi_{\leq,/}(M) \wedge \xi_{\leq,/}(N)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es uniforme.

□

El siguiente teorema establece que la gran retícula de Serre de los anillos locales izquierdos es uniforme.

2.2.33 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\leq,/,ext}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es local izquierdo.*

Demostración. Por el Lema 2.2.14, tenemos que $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es $\{\leq,/\}-\{\leq,/,ext\}$ uniforme. Luego, por el Teorema 2.2.5, $\mathbb{L}_{\leq,/,ext}(R)$ es uniforme si y sólo si $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es uniforme. Por otro lado, por el Teorema 2.2.32 tenemos que $\mathbb{L}_{\leq,/}(R)$ es uniforme si y sólo si R es local izquierdo. Así, $\mathbb{L}_{\leq,/,ext}(R)$ es uniforme si y sólo si R es local izquierdo.

□

2.2.34 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus}(R)$ *es uniforme.*

(II) *R es local izquierdo.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.2.32 y del Lema 2.2.9.

□

El siguiente Teorema describe los anillos para los cuales la retícula de teorías de torsión hereditarias es uniforme.

2.2.35 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\leq,/,\oplus,ext}(R)$ *es uniforme.*

(II) *R es local izquierdo.*

Demostración. Se sigue del Teorema 2.2.32 y del Lema 2.2.17.

□

2.2.36 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\leq,E}(R)$ *es uniforme.*

(II) *R semi-artiniano izquierdo y local izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\leq,E}(R)$ es uniforme. Sean $0 \neq M, S \in R-Mod$, donde S es un módulo simple. Como $\mathbb{L}_{\leq,E}(R)$ es uniforme y $\xi_{\leq,E}(E) = \xi_{\leq}(E)$ para todo módulo inyectivo E, entonces existe un $0 \neq N \in R-Mod$ tal que $N \in \xi_{\leq}(E(S)) \wedge \xi_{\leq}(E(M))$, es decir, que $N \leq E(S)$ y $N \leq E(M)$. Luego, $0 \neq N \cap S$ y $S \leq N \leq E(M)$. Así, $0 \neq M \cap S$. Entonces $S \leq M$. Por lo tanto, R es un anillo semi-artiniano izquierdo .

Si S y S' son dos módulos simples, entonces, procediendo como antes, tenemos que $S \leq S'$. Luego, $S \cong S'$. Por lo tanto, R es local izquierdo.

Recíprocamente, supongamos que R es un anillo semi-artiniano izquierdo y local izquierdo. Sean $0 \neq M, N \in R-Mod$. Si S es módulo simple, entonces S se sumerge tanto en M como en N. Luego, $0 \neq S \in \xi_{\leq,E}(M) \wedge \xi_{\leq,E}(N)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\leq,E}(R)$ es uniforme.

□

2.2.37 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{\oplus,/}(R)$ *es uniforme.*

(II) *R es local izquierdo y max izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{\oplus,/}(R)$ es uniforme. Sea S un módulo simple. Entonces $\xi_{\oplus,/}(S) = \{S^{(X)} | X \text{ es conjunto}\}$. Es claro que $\xi_{\oplus,/}(S)$ es un átomo. Luego, $\mathbb{L}_{\oplus,/}(R)$ tiene un único átomo, ya que $\mathbb{L}_{\oplus,/}(R)$ es uniforme. Por lo que R sólo tiene un tipo de simple. Por lo tanto, R es un anillo local izquierdo.

Sea $0 \neq M \in R-Mod$. Luego, $\xi_{\oplus,/}(M) = \{N | \exists \alpha : M^{(X)} \twoheadrightarrow N\}$. Como $\xi_{\oplus,/}(S)$ es el único átomo y $\mathbb{L}_{\oplus,/}(R)$ es uniforme, entonces $\xi_{\oplus,/}(S) \leq \xi_{\oplus,/}(M)$. Entonces existe un epimorfismo $M^{(X)} \twoheadrightarrow S$ para algún conjunto X, ya que $S \in \xi_{\oplus,/}(M)$. Luego, S es un cociente de M. Entonces M tiene un submódulo máximo. Por lo tanto, R es max izquierdo.

Supongamos que R es un anillo local izquierdo y max izquierdo. Sean $0 \neq M, N \in R-Mod$ y denotemos por S al único tipo de módulo simple de R. Como R es max izquierdo, entonces existe $M' \leq M$ submódulo máximo. Luego, $M/M' \cong S$. Entonces existe un epimorfismo $M \twoheadrightarrow S$. Entonces $S \in \xi_{\oplus,/}(M)$ y, además, $\xi_{\oplus,/}(S) \leq \xi_{\oplus,/}(M)$.

De manera similar, para N tenemos que $\xi_{\oplus,/}(S) \leq \xi_{\oplus,/}(N)$. Luego, $\underline{0} \neq \xi_{\oplus,/}(S) \leq \xi_{\oplus,/}(M) \wedge \xi_{\oplus,/}(N)$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{\oplus,/}(R)$ es uniforme.

□

2.2.38 Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{ext,E}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es trivial.*

Demostración. Supongamos que R no es trivial. Sea $0 \neq E$ un módulo inyectivo. Luego, $\{0, E^X\} \in \mathbb{L}_{ext,E}(R)$ para todo conjunto infinito X. Sean X, Y conjuntos tales que $|E^X| < |E^Y|$. Entonces $E^X \ncong E^Y$. Así, $\{0, E^X\} \wedge \{0, E^Y\} = \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{ext,E}(R)$ no es uniforme.

El recíproco es inmediato.

□

2.2.39 Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{ext,P}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es trivial.*

Demostración. La demostración es similar a la demostración de la Proposición 2.2.38.

□

2.2.40 Observación. *(Lemma de Bumby) Si A, B son dos módulos inyectivos tales que A es isomorfo a un submódulo de B y, a su vez, B es isomorfo a un submódulo de A, entonces $A \cong B$, ver [$Fa73$ Proposición 3.60].*

2.2.41 Teorema. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(I) $\mathbb{L}_{E,\prod}(R)$ *es uniforme.*

(II) R *es local izquierdo y semi-artiniano izquierdo.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{L}_{E,\prod}(R)$ es uniforme. Notemos que si E es inyectivo, entonces $\xi_{E,\prod}(E) = \{E^X | X \text{ es conjunto}\}$. Sean $0 \neq M \in R-Mod$ y S un módulo simple. Entonces, como $\mathbb{L}_{E,\prod}(R)$ es uniforme, existen conjuntos X, Y tales que $E(S)^X \cong E(M)^Y$. Luego, $S \leq E(M)$. Así, $S \leq M$, ya que $E(M)$ es la cápsula inyectiva de M. Por lo tanto, R es un anillo semi-artiniano izquierdo.

Si tomamos a $M = S'$, donde S' es un módulo simple, entonces $S \leq S'$. Luego, $S \cong S'$. Por lo tanto, R es local izquierdo.

Supongamos que R es un anillo local izquierdo y semi-artiniano izquierdo. Sean $0 \neq M, N \in R-Mod$ y S el único tipo de módulo simple. Tomemos $E = E(S)$. Como S se sumerge en M, al ser R semi-artiniano izquierdo, entonces $E \leq E(M)$. Por otro lado, $zoc(M) = S^{(X)}$ para algún conjunto X. Entonces $zoc(M)$ es esencial en M, ya que R semi-artiniano izquierdo. Así, $E(M) \leq E(zoc(M))$. Luego, $E(M) = E(zoc(M)) \leq E(S^{(X)}) \leq E(S^X) \leq E(S)^X$. Así, $E(M) \leq E^X$.

Si X es infinito, entonces $E^X \leq E(M)^X \leq (E^X)^X \cong E^{X\times X} \cong E^X$. Luego, por el lema de Bomby, $E^X \cong E(M)^X$.

Si X es finito, sea $Y = \mathbb{N}$. Entonces $E(M) \leq E(S)^X \leq E(S)^Y = E^Y$ y procedemos como en el caso cuando X es infinito.

Así, en cualquiera caso, existe un conjunto X tal que $E^X \cong E(M)^X$.

Similarmente, para N existe un conjunto Z tal que $E^Z \cong E(N)^Z$.

Sea Y un conjunto infinito tal que $|X|, |Z| \leq |Y|$. Luego, $(E(M)^X)^Y \cong (E^X)^Y \cong E^{X\times Y} \cong E^Y \cong E^{Z\times Y} \cong (E^Z)^Y \cong (E(N)^Z)^Y$.

Así, $E(M)^Y \cong (E(M)^X)^Y \cong (E(N)^Z)^Y \cong E(N)^Y$.

Luego, $\xi_{E,\prod}(M) \wedge \xi_{E,\prod}(N) \neq \underline{0}$. Por lo tanto, $\mathbb{L}_{E,\prod}(R)$ es uniforme.

□

Recordemos que la retícula de clases naturales es precisamente $\mathbb{L}_{\oplus,\,E,\leq}(R)$, y es denotada por $R - nat$. Dauns and Zhou probaron que $R - nat$ es una retícula completa de Boole, ver [Da06 Teorema 5.1.5, p. 119].

2.2.42 Proposición. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un anillo R:*

(i) *$R - nat$ es uniforme.*

(ii) *R es trivial.*

Demostración. Se sigue del hecho de que $R{-}nat$ es una retícula de Boole. $\square$

Bibliografía

[Al10] A. Alvarado-García, H. A. Rincón-Mejía and J. Ríos-Montes, *On big lattices of classes of R-modules defined by closure properties*, Advances in ring theory, 19-36, Trends Math., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[Al14] A. Alvarado-García, C. Cejudo-Castilla, H. A. Rincón-Mejía and I. F. Vilchis-Montalvo, *On classes of modules closed under injective hulls and Artinian principal ideals rings*, Int. Electron. J. Algebra, 15 (2014), 1-12.

[Am05] J. A. Amor-Montaño, Teoría de Conjuntos, Las Prensas de Ciencias, 2005.

[An73] F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, 1973.

[Bi82] L. Bican, Y. Zhou, P. Němec, *Rings, modules, and preradicals.* Lecture Notes in Pure and Applied, 1982.

[Bi73] G. Birkhoff, Lattice Theory, American Mathematical Society, 1973.

[Ca00] G. Calugareanu, Lattice Concepts of Module Therory, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[Co69] J. H. Cozzens, Homological Properties of the Ring of Differential Polynomials, Thesis (Ph.D.)-Rutgers The State University of New Jersey - New Brunswick, 1969.

[Da06] J. Dauns and Y. Zhou, Classes of Modules, Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), 281, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[Fa73] C. Faith, Algebra: Rings, Modules and Categories, I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 190, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[Gr78] G.Grätzer, General Lattice Theory, Academic Press, Inc, 1978.

[Hd03] F. Hernández-Hernández, Teoría de Conjuntos, Una introducción, Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[Hr99] K. Hrbacek, T. Jech, Introduction to Set Theory, 3^{rd} ed. rev. and expanded. Marcel Dekker, Inc. New York-Basel, 1999.

[Ka82] F. Kasch, Modules and Rings, Academic Press, 1982.

[Ko53] E. R. Kolchin, *Galois theory of differential fields*, Amer. J. Math., 75 (1953), 753-824.

[Ri15] H. A. Rincón-Mejía and J. P. Sánchez Hernández, *On uniformity in lattices of classes of modules defined by closure properties*, Int. Electron. J. Algebra, 18 (2015), 92-106.

[St75] Bo. Stenstrom, Rings of Quotients, An Introduction of Ring Theory, Springer-Verlag, 1975.