



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA CIVIL – ESTRUCTURAS

LOCALIZACIÓN DE DAÑO EN UN MODELO PREFABRICADO DE  
CONCRETO REFORZADO CON CRP EMPLEANDO EL  
MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
DANIEL FUENTES CERVANTES

TUTOR PRINCIPAL  
DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ, INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. (AGOSTO) 2016



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: M.I. Ávila Rodríguez Jorge Arturo  
Secretario: M.I. Mendoza Escobedo Carlos Javier  
Vocal: Dr. Escobar Sánchez José Alberto  
1<sup>er.</sup> Suplente: Dr. López Bátiz José Alberto  
2<sup>d o.</sup> Suplente: Dr. Pozos Estrada Adrián

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: INSTITUTO DE INGENIERÍA

**TUTOR DE TESIS:**

DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ

-----  
**FIRMA**

## AGRADECIMIENTOS

A Dios, ente primordial en mi vida al que le debo todo lo que tengo, lo que soy y lo que me depara el destino.

A mis padres, sustento esencial durante el desarrollo de mi trayectoria académica y formación integral como ser humano, partes fundamentales e indispensables que fungen como cimientos para un constante crecimiento a lo largo de mi vida.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme permitido recorrer sus aulas desde temprana edad, con la finalidad de aprovechar todo el conocimiento posible para posteriormente, aplicarlo con el objetivo primordial de brindar múltiples beneficios a la sociedad.

Al Instituto de Ingeniería, organismo líder en investigación que me brindó las herramientas necesarias, a través de sus integrantes, para la elaboración del presente trabajo.

A todos y cada uno de los catedráticos miembros del Instituto de Ingeniería, mismos que me aportaron todo el saber posible y así mismo, motivaron a seguir aprendiendo de manera autodidacta e ininterrumpida.

Al Dr. José Alberto Escobar Sánchez, por su valiosa tutoría y seguimiento a lo largo de la realización del presente escrito.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por su importante contribución económica; ya que sin ella, la ejecución de mis estudios de posgrado no hubiera sido posible.

## **RESUMEN**

Es común que la infraestructura civil presente daños en cualquier etapa de su vida. Éstos se hacen evidentes al alterar las propiedades dinámicas de las estructuras. Con ello, se vuelven vulnerables ante cualquier exigencia. La identificación temprana del daño es prioritaria para realizar un diagnóstico apropiado de la estructura. Técnicas analíticas y experimentales se han desarrollado para tal fin.

En la presente investigación, se aplica el método de la matriz de transformación para identificar, localizar y cuantificar daño en una estructura de concreto prefabricado con contraventeos restringidos al pando. El daño se simula en ocho escenarios distintos. Los resultados obtenidos demuestran la efectividad del método mencionado.

## **ABSTRACT**

Civil infrastructure systems suffer damage during its lifetime. The existence of damage automatically modify the dynamic properties of structural systems decreasing their performance and turning them highly vulnerable. Early damage identification is necessary in order to examine the structure and give the best analysis. Analytical and experimental techniques have been developed to address this issue.

In the present investigation, the matrix transformation method is used to identify, locate and quantify damage on a precast concrete building provided with buckling restrained braces. Damage is simulated at eight different scenarios. The computed results demonstrate the effectiveness of the algorithm.

## CONTENIDO

RESUMEN.....	IV
ABSTRACT .....	V
INTRODUCCIÓN.....	1
<b>CAPÍTULO 1. ASPECTOS FUNDAMENTALES EN EL PROCESO DE IDENTIFICACIÓN DE DAÑO .....</b>	<b>3</b>
1.1. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS .....	3
1.1.2. Extracción de propiedades dinámicas analíticas .....	4
1.2. PRUEBAS DE VIBRACIÓN .....	4
1.2.1. Instrumentación.....	4
1.2.2. Extracción de propiedades dinámicas experimentales .....	5
1.3. COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES EXPERIMENTALES Y ANALÍTICOS.....	5
1.4. MÉTODOS DE DETECCIÓN DE DAÑO ANALÍTICOS.....	6
1.4.1. Métodos basados en el uso de las propiedades dinámicas .....	6
1.4.1.1. <i>Cambios en las frecuencias naturales</i> .....	6
1.4.1.2. <i>Cambios en los modos de vibrar</i> .....	7
1.4.1.3. <i>Cambios en el amortiguamiento</i> .....	8
1.4.1.4. <i>Cambios en la flexibilidad dinámica</i> .....	8
1.4.1.5. <i>Cambios en la energía de deformación modal</i> .....	10
1.4.1.6. <i>Actualización de matrices</i> .....	11
1.4.2. Métodos basados en la actualización de modelos .....	12
<b>CAPÍTULO 2. EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN .....</b>	<b>13</b>
2.1. CONCEPTOS PRELIMINARES .....	13
2.1.1. Condensación de la matriz de rigideces .....	13
2.1.2. Reconstrucción de la matriz de rigideces experimental .....	13
2.1.2.1. <i>Método directo de reconstrucción de matrices de Yang y Chen</i> .....	14
2.1.3. Resolución de sistemas de ecuaciones rectangulares .....	15
2.2. MMT EN MARCOS PLANOS .....	15
2.2.1. Algoritmo .....	17
2.3. MMT EN ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES.....	18
2.3.1. Algoritmo .....	19
2.4. APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN EN EL MMT .....	20
<b>CAPÍTULO 3. DESCRIPCIÓN DEL MODELO PREFABRICADO DE CONCRETO REFORZADO EQUIPADO CON CRP .....</b>	<b>21</b>
3.1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO EXPERIMENTAL .....	21
3.1.1. Componentes estructurales del modelo.....	23
3.1.1.1. <i>Columns</i> .....	23
3.1.1.2. <i>CRP</i> .....	23
3.1.1.3. <i>Sistema de piso</i> .....	24
3.1.1.4. <i>Trabes</i> .....	24
3.1.2. Construcción y proceso de montaje del modelo.....	25
3.1.2.1. <i>Materiales</i> .....	25
3.1.2.2. <i>Sistema de prefabricación empleado</i> .....	25

3.1.2.3. <i>Ensamble del modelo</i> .....	27
3.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ANALÍTICO.....	29
3.2.1. Programa CAL-SAP .....	29
3.2.2. Matriz de masas .....	29
3.2.3. Matriz de rigideces.....	30
3.2.3.1. <i>Consideraciones generales</i> .....	30
3.2.3.2. <i>Marcos constitutivos de la estructura</i> .....	32
3.2.3.2. <i>Formulación de la matriz de rigideces</i> .....	33
<b>CAPÍTULO 4. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO .....</b>	<b>34</b>
4.1. PRUEBAS DE VIBRACIÓN .....	34
4.1.1. Instrumentación.....	34
4.1.1.1. <i>Acelerómetros</i> .....	35
4.1.1.2. <i>Transductores de desplazamiento</i> .....	35
4.1.1.3. <i>Transductores de hilo</i> .....	35
4.1.1.4. <i>Deformímetros</i> .....	35
4.1.2. Ejecución de pruebas .....	37
4.2. CÁLCULO DE PROPIEDADES DINÁMICAS ANALÍTICAS.....	38
4.3. CÁLCULO DE PROPIEDADES DINÁMICAS EXPERIMENTALES .....	38
4.3.1. Cálculo de modos de vibrar.....	39
4.3.2. Cálculo de frecuencias .....	39
4.4. DETECCIÓN DE DAÑO .....	41
<b>CAPÍTULO 5. RESULTADOS.....</b>	<b>43</b>
5.1. CONFIGURACIÓN 4X1 – 4X2.....	44
5.2. CONFIGURACIÓN 4X1 – 3X2.....	46
5.3. CONFIGURACIÓN 3X1 – 3X2.....	48
5.4. CONFIGURACIÓN 3X1 – 2X2.....	50
5.5. CONFIGURACIÓN 2X1 – 2X2.....	52
5.6. CONFIGURACIÓN 2X1 – 1X2.....	54
5.7. CONFIGURACIÓN 1X1 – 1X2.....	56
5.8. CONFIGURACIÓN 1X1 – 0X2.....	58
5.9. CONFIGURACIÓN 0X1 – 0X2.....	60
5.10. DISCUSIÓN DE RESULTADOS .....	62
5.11. ANÁLISIS DE DETECCIÓN DE DAÑO.....	63
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>65</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS .....</b>	<b>66</b>

## INTRODUCCIÓN

A lo largo de su vida, las obras civiles son susceptibles a sufrir daño en cualquiera de sus componentes estructurales, esto es, cualquier alteración que modifique adversamente el desempeño de la misma. El daño puede ser generado por diversos medios, desde terremotos que produzcan demandas importantes de esfuerzos en el sistema estructural, hasta el deterioro que se da por el envejecimiento en los materiales que conforman a los elementos de éste. Su localización temprana y oportuna permite, en caso de ser completamente necesario, hacer las modificaciones pertinentes para que la estructura se halle en buenas condiciones ante cualquier eventualidad.

El daño puede manifestarse a través de diversas características en los materiales. Algunas de éstas pueden ser la aparición de grietas, desprendimiento de concreto, existencia de corrosión, entre otras.

Para abordar de manera apropiada el problema del daño es necesario establecer un estado inicial (estado no dañado) y un estado final (estado dañado) del sistema estructural. De esta forma, se cuenta con un punto de comparación adecuado. Adicionalmente, es importante jerarquizar la situación del daño. Rytter (1993) definió una clasificación de cuatro niveles de identificación de daño:

- Nivel 1: Determinación de la presencia de daño en la estructura.
- Nivel 2: Localización del daño en la estructura.
- Nivel 3: Cuantificación del daño.
- Nivel 4: Estimación de la vida remanente de la estructura.

Recientemente, algunos investigadores han incluido un nivel adicional de daño que aborda la relación entre sus características físicas y la correspondiente magnitud determinada analíticamente.

Dependiendo del nivel al que se quiera llegar, es necesario utilizar una metodología específica que permita evaluar lo más preciso posible la etapa de daño a analizar.

En las últimas décadas, se han desarrollado numerosos algoritmos matemáticos para la identificación de daño basados fundamentalmente en las propiedades dinámicas de las estructuras. Un cambio en los parámetros modales de éstas significa una disminución de la rigidez estructural y por ende, advierte la existencia de daño. Las metodologías propuestas van desde las más elementales hasta las más sofisticadas.

Además de los procesos analíticos, se han empleado técnicas experimentales. Algunas de ellas son la captura de radiografías, emisión acústica, inducción térmica, etcétera. Para su ejecución es necesario un contacto y conocimiento previo de la ubicación del daño. Por ello, se hacen imprácticos en estructuras con numerosos elementos; característica común en obras de interés para la ingeniería civil. Sin embargo, en las industrias aeroespacial y mecánica, se han utilizado ampliamente proporcionando buenos resultados.

En el presente trabajo, se aplica el método de la matriz de transformación para localizar y cuantificar daño en una estructura prefabricada de concreto reforzado provista de contraventeos restringidos al pandeo (CRP). El edificio es sometido a pruebas de vibración de baja intensidad con la finalidad de extraer sus propiedades dinámicas.

También se desarrolla un modelo de elementos finitos de la estructura lo más preciso posible. De este se extraen los parámetros modales analíticos, mismos que sirven para completar los experimentales no identificados.

Finalmente, se ejecuta el método previamente mencionado para diversas configuraciones de daño simulado, las cuales se crean removiendo sistemáticamente los CRP. El estado sin daño es constante y corresponde a la estructura suministrada con todos los CRP disponibles.

## CAPÍTULO 1

### ASPECTOS FUNDAMENTALES EN EL PROCESO DE IDENTIFICACIÓN DE DAÑO

La infraestructura civil es altamente propensa a sufrir diversos tipos de daño en sus miembros estructurales durante su vida útil. Éste puede ser causado por fenómenos naturales (huracanes, terremotos, tornados, etcétera) o la acción humana. En el segundo caso, el daño es provocado a través de modificaciones generadas intencionalmente o por el simple uso que le da la sociedad a las obras civiles. La integridad de las estructuras se debilita a medida que la magnitud del daño incrementa; volviéndolas vulnerables e inaptas para desempeñarse óptimamente ante cualquier exigencia.

El daño afecta directamente la rigidez y el amortiguamiento, provocando un cambio en las propiedades dinámicas de las estructuras. La identificación, localización y cuantificación oportunas del daño, permiten determinar si la estructura es capaz de comportarse adecuadamente aun con la presencia de deterioro; o en su defecto, necesita ser rehabilitada, reforzada, y en situaciones extremas, demolida.

Para que el proceso de identificación de daño se lleve a cabo exitosamente es necesario tomar en cuenta tres aspectos fundamentales: el desarrollo de un modelo de elementos finitos de la estructura a analizar; la óptima extracción de datos experimentales; y el empleo de una metodología que permita evaluar adecuadamente el daño.

#### 1.1. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos ha sido empleado en el modelado de sistemas estructurales en diversas ramas de la ingeniería. Consiste en idealizar matemáticamente a los miembros que forman parte de una estructura así como la interacción entre ellos; de modo que se cuente con un modelo lo más representativo de la realidad. Los elementos básicos que se utilizan en el método son las barras, los cascarones, las membranas y las placas.

Durante la realización del modelado se deben tomar las consideraciones apropiadas y asignar a los diversos elementos que conformen al modelo, las características que emulen de la mejor manera el comportamiento de su contraparte real. No obstante, durante la etapa de construcción del modelo, se pueden cometer diversos errores. Mottershead et al. (2011) los engloban en tres grupos:

- Idealización errónea del comportamiento mecánico de los miembros que conforman la estructura.
- Errores generados por los métodos numéricos empleados en la resolución de la respuesta estructural analítica.
- Consideraciones equívocas en los diversos parámetros del modelo.

Minimizar las fallas en la ejecución de los modelos de elementos finitos es de suma importancia para así, tener la certeza de que el modelo será útil al momento de utilizarlo como base en algún algoritmo de detección de daño.

### 1.1.2. Extracción de propiedades dinámicas analíticas

El modelo de elementos finitos de una estructura puede ser empleado para determinar sus parámetros modales analíticos. Generalmente, se obtienen las frecuencias y modos de vibrar correspondientes al sistema estructural no amortiguado en vibración libre. Estas propiedades se calculan resolviendo el problema de valores y vectores característicos, mismo que se expresa en la ecuación (1.1).

$$[K - \omega_i^2 M]\phi_i = 0 \quad (1.1)$$

donde:

- $K$  = Matriz de rigideces
- $\omega_i$  =  $i$ -ésima frecuencia modal
- $M$  = Matriz de masas
- $\phi_i$  =  $i$ -ésimo modo de vibrar

## 1.2. PRUEBAS DE VIBRACIÓN

En una prueba de vibración es fundamental proveer la cantidad de energía suficiente a la estructura para lograr excitar el mayor número posible de modos de vibrar.

Las pruebas de vibración forzada, vibración ambiental y vibración libre, son prácticas que se ejecutan con la finalidad de inducir, artificial o naturalmente, excitación a la estructura.

En las pruebas de vibración forzada se aplica una fuerza a la estructura que puede ser generada a través de diversos dispositivos (actuadores hidráulicos, actuadores hidromecánicos, martillos instrumentados, mesas vibratoras, vibradores de masa excéntrica, etcétera). Usualmente, la magnitud de las cargas aplicadas es controlada y registrada.

La vibración ambiental es aquella que experimentan las estructuras bajo condiciones de servicio. En puentes, este tipo de técnica ha sido empleada como alternativa a la excitación generada por medio de pruebas de vibración forzada. Lo anterior, debido a que este tipo de sistemas estructurales se encuentran sometidos constantemente a excitaciones ambientales generadas por el tránsito vehicular, corrientes de viento, flujo peatonal y en algunos casos, la ocurrencia de sismos. Es común que durante las pruebas de vibración ambiental las fuerzas de entrada no se puedan medir o simplemente se omite deliberadamente su registro, a excepción de las cargas dinámicas provocadas por eventos sísmicos (Sohn et al., 2004).

En las pruebas de vibración libre, se ejerce una fuerza estática al sistema estructural que posteriormente es retirada para así permitir que oscile libremente. Generalmente, lo anterior se logra sujetando a la estructura por medio de cables los cuales se tensan y posteriormente se liberan.

### 1.2.1. Instrumentación

Las magnitudes de interés registradas de manera usual durante las pruebas de vibración, para extraer las propiedades dinámicas de una estructura, son las aceleraciones y los desplazamientos.

Para la captura de aceleraciones, comúnmente se emplean acelerómetros hechos con componentes de materiales piezoeléctricos que generan una señal eléctrica de salida, cuya magnitud es proporcional a la aceleración aplicada en el instrumento. Su costo es relativamente bajo y poseen resoluciones de diversos intervalos. Estos dispositivos son capaces de medir aceleraciones hasta en tres direcciones ortogonales.

Los transductores de desplazamiento, los sistemas de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés) y los vibrómetros láser, son algunas de las tecnologías usadas en la medición de desplazamientos.

Adicionalmente, si se desean determinar esfuerzos en los materiales, se emplean deformímetros.

Una estructura instrumentada debe proveer información suficiente para reconstruir la respuesta del sistema estructural con el mayor detalle posible; de modo que se pueda comparar con la respuesta producida por modelos matemáticos (Celebi, 2013). Por ello, es altamente recomendable que la colocación de instrumentos en una estructura se ejecute cuidadosamente por gente especializada en el tema, más aún, cuando se cuenta con una cantidad limitada de dispositivos para ser ubicados en estructuras de grandes dimensiones, como es el caso de las obras civiles.

### **1.2.2. Extracción de propiedades dinámicas experimentales**

Al concluir una prueba de vibración, la información capturada por los instrumentos pasa a ser procesada por algún equipo de cómputo que permita su adecuado análisis.

Al término del experimento, las señales medidas son discretas y se hallan registradas en el dominio del tiempo. En el campo de la ingeniería estructural es común optar por el manejo de datos en el dominio de la frecuencia, para la posterior identificación de parámetros modales. La técnica empleada para convertir las señales del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia es la transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés). Una vez transformada la información a este dominio, se pueden aplicar diversas metodologías para la extracción de las propiedades dinámicas experimentales.

Es importante considerar que los datos registrados durante las pruebas de vibración son susceptibles a ser perturbados por la presencia de ruido, lo que puede interferir directamente en la estimación de los parámetros modales experimentales.

## **1.3. COMPARACIÓN DE PARÁMETROS MODALES EXPERIMENTALES Y ANALÍTICOS**

Una vez procesada la información obtenida en la prueba de vibración, resulta útil comparar las propiedades dinámicas experimentales identificadas con aquéllas predichas por el modelo analítico. Usualmente, los parámetros cotejados son las frecuencias y los modos de vibrar.

En el primer caso, se puede analizar la variación del error relativo entre las frecuencias analíticas y experimentales. Un porcentaje de error cercano a cero, indica una correcta modelación de la estructura o en su defecto, una apropiada identificación de parámetros experimentales.

Generalmente, un error menor al cinco por ciento es aceptable. Desde luego, el criterio varía según el analista, pudiendo ser dicha recomendación más rigurosa o bien, más flexible.

En lo referente a los modos de vibrar, el criterio de correlación modal (MAC, por sus siglas en inglés, Pastor et al., 2004), ha sido la herramienta por excelencia para evaluar la correspondencia entre un modo de vibrar analítico y su contraparte experimental. El cálculo de este indicador se muestra en la ecuación (1.2).

$$MAC_i = \frac{|\{\phi_e\}_i^T \{\phi_a\}_i|^2}{(\{\phi_a\}_i^T \{\phi_a\}_i)(\{\phi_e\}_i^T \{\phi_e\}_i)} \quad (1.2)$$

donde:

$MAC_i$  = Criterio de correlación modal del  $i$ -ésimo modo de vibrar

$\{\phi_a\}_i$  =  $i$ -ésimo modo de vibrar experimental

$\{\phi_e\}_i$  =  $i$ -ésimo modo de vibrar analítico

El MAC puede tomar valores entre cero y uno. Entre más cercano a la unidad sea éste, una mayor correlación entre las parejas de modos existirá.

## 1.4. MÉTODOS DE DETECCIÓN DE DAÑO ANALÍTICOS

En los últimos años se han propuesto una amplia gama de métodos para la detección de daño en estructuras de interés para las industrias aeroespacial, civil y mecánica. Estos procesos poseen ventajas y desventajas, así como ciertas limitantes. A continuación se presenta una reseña de algunos de ellos y experimentos en los que se han aplicado.

### 1.4.1. Métodos basados en el uso de propiedades dinámicas

#### 1.4.1.1. Cambios en las frecuencias naturales

Una modificación en las frecuencias de una estructura implica la disminución de rigidez y consecuentemente la existencia de daño. Diversas pruebas de vibración permiten extraer propiedades modales del sistema estructural analizado. Desgraciadamente, se puede presentar el problema de la presencia de ruido y otras características que interfieren en el registro y posterior procesamiento de datos. Por lo tanto, es necesaria una ejecución controlada de los ensayos que conduzca a la obtención de información confiable y por lo tanto una identificación correcta de daño.

Chowdhury y Ramirez (1992) examinaron el comportamiento dinámico de un grupo de vigas de concreto simple y concreto reforzado para identificar defectos simulados artificialmente. Éstos fueron la degradación estructural e imperfecciones internas de los elementos. En el primer caso, se inspeccionó la variación de resistencia y la falla debido a cargas aplicadas de manera constante e incremental. Para el segundo caso, se simuló el efecto de delaminación y la aparición de grietas; fenómenos logrados con la inclusión de poliestireno y piezas de plástico respectivamente.

En todos los experimentos se observaron variaciones entre las frecuencias naturales de las traveses sin daño y sus contrapartes deterioradas.

Hearn y Testa (1991) determinaron que el cambio en la  $i$ -ésima frecuencia natural debido a una alteración en la rigidez global de una estructura se puede calcular con la ecuación (1.3). Los investigadores analizaron en dos experimentos distintos, el efecto que causa el daño en los parámetros modales. El primero consistió en someter a carga cíclica un marco metálico cuadrado

con uniones soldadas. En el segundo, generaron ligeros cortes en diversos cables sujetos a tensión constante. En ambas situaciones, observaron la influencia del daño en la modificación de las propiedades modales.

$$\Delta\omega_i^2 = \frac{\{\phi\}_i^T [\Delta K] \{\phi\}_i}{\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i} \quad (1.3)$$

donde:

- $\Delta\omega_i^2$  = Cambio en la  $i$ -ésima frecuencia natural
- $[\Delta K]$  = Cambio en la matriz de rigideces de la estructura
- $[M]$  = Matriz de masas

Sinou y Lees (2005) propusieron una expresión para calcular el porcentaje en el cambio de las frecuencias naturales en una flecha mecánica con y sin agrietamiento.

Para detectar la presencia de daño con la ecuación (1.4), las frecuencias naturales del sistema sin daño deben ser medidas minuciosamente. De este modo, al registrar los parámetros del estado dañado, se registren frecuencias con valores menores, y así se pueda determinar con certeza la existencia de alguna avería.

$$\%C_i = \frac{f_{isd} - f_{id}}{f_{isd}} \quad (1.4)$$

donde:

- $\%C_i$  = Porcentaje de cambio en la  $i$ -ésima frecuencia natural
- $f_{isd}$  =  $i$ -ésima frecuencia natural sin daño
- $f_{id}$  =  $i$ -ésima frecuencia natural con daño

Algunos resultados mostraron que si la grieta se ubicaba cerca de un nodo de los modos de vibrar, ésta tenía una participación despreciable en la variación de los mismos. Por otro lado, si la fisura se localizaba donde el momento flexionante del  $i$ -ésimo modo fuese máximo, ésta impactaba de mayor manera en el cambio de los modos de vibrar y producía un incremento considerable en el factor  $\%C_i$  (Sinou, 2009).

#### 1.4.1.2. Cambios en los modos de vibrar

Los modos de vibrar proporcionan una descripción de la configuración deformada y las coordenadas modales de los grados de libertad (gdl) elegidos para caracterizar un sistema estructural. Cada modo se asocia a una frecuencia natural de la estructura. La presencia de daño modifica automáticamente la amplitud de las coordenadas previamente mencionadas. Éstas se verán afectadas en función de la magnitud y ubicación del daño.

Alavinasab et al. (2011) analizaron el efecto producido por la rotura de los cables de presfuerzo en los modos de vibrar de una tubería de concreto presforzado. Concluyeron que la variación en la curvatura de los modos de vibrar debido al daño simulado en los cables, puede proveer información acerca de la falla de éstos en tuberías de concreto presforzado.

Kulla (2003) empleó los cambios en las frecuencias y los modos de vibrar del puente Z24 en Suiza, determinando su confiabilidad como indicadores en la detección de daño.

Law y Zhu (2004) estudiaron el comportamiento dinámico de puentes de concreto reforzado dañados sujetos a cargas móviles. En el experimento emplearon una viga T de concreto reforzado deteriorada intencionalmente. Estudiaron la respuesta de la trabe ante el paso de dos vehículos de manera separada, uno de configuración liviana y otro de mayor peso. Observaron un incremento importante en la deflexión de la viga a medida que el daño aumentaba; determinando que la deflexión puede ser un parámetro apropiado en la identificación de daño en puentes.

#### 1.4.1.3. Cambios en el amortiguamiento

Una de las maneras en que el daño se manifiesta en las estructuras es a través de grietas. Su presencia incrementa el amortiguamiento y la capacidad de disipación de energía en los sistemas estructurales debido a la fricción que se genera en éstas.

Modena et al. (1999) investigaron el efecto del agrietamiento en un conjunto de losas alveolares prefabricadas de concreto reforzado. En el análisis seccionaron los paneles con el fin de ubicar averías en lugares específicos. Para localizar el daño emplearon la variación del amortiguamiento modal en las distintas partes de la losa, basándose en el hecho de que la aparición de grietas crea un mecanismo local de disipación de energía. Encontraron que la presencia de grietas visualmente indetectables en estos elementos causaba cambios inapreciables en sus frecuencias naturales. Sin embargo, se dio una variación importante en el porcentaje de amortiguamiento. En algunos casos este valor incrementaba del estado sano al dañado, más del 50 %.

Panteliou et al. (2011) observaron el incremento del amortiguamiento en barras de plexiglás a medida que se aumentaba la longitud de un corte intencionado en la sección transversal de los elementos a la mitad de su claro.

#### 1.4.1.4. Cambios en la flexibilidad dinámica

Este tipo de métodos usan la matriz de flexibilidades dinámica para detectar daño en las estructuras.

Considerando una normalización de los modos de vibrar respecto a la masa, la matriz de flexibilidades dinámica relacionada con los parámetros modales se puede expresar con la ecuación (1.5):

$$[F] = [\Phi][\Omega]^{-1}[\Phi]^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \quad (1.5)$$

donde:

- $[F]$  = Matriz de flexibilidades dinámica
- $[\Phi]$  = Matriz de modos de vibrar
- $[\Omega]$  = Matriz de frecuencias modales

En la ecuación (1.5), se aprecia que la contribución modal a la matriz de flexibilidades decrece conforme el valor de las frecuencias aumenta. Por lo tanto, se puede hacer una buena estimación de la matriz de flexibilidades dinámica contando únicamente con un número reducido de modos de vibrar.

Si se extraen los parámetros modales de una estructura intacta y de su contraparte dañada, con el uso de la ecuación (1.5) es posible calcular la matriz de flexibilidades dinámica para ambos estados. Cada columna de esta matriz representa un conjunto de desplazamientos asociados a una fuerza unitaria aplicada a los gdl de la estructura. El cambio en la matriz de flexibilidades dinámica se puede determinar con la ecuación (1.6).

$$[\Delta F] = [F_{sd}] - [F_d] \quad (1.6)$$

donde:

- $[\Delta F]$  = Cambio en la matriz de flexibilidades dinámica
- $[F_{sd}]$  = Matriz de flexibilidades dinámica sin daño
- $[F_d]$  = Matriz de flexibilidades dinámica con daño

Aktan et al. (1994) plantearon el empleo de la flexibilidad dinámica medida en pruebas experimentales para determinar de manera relativa la integridad estructural de los puentes. Aplicaron la técnica en dos puentes metálicos, logrando verificar la correlación entre las flexibilidades modales y las deflexiones inducidas durante pruebas de carga estática.

Lin (1998) propuso el método de comprobación de unicidad para localizar daño en sistemas estructurales. El método parte del hecho de que el producto de la matriz de flexibilidades por la matriz de rigideces genera la matriz identidad, sin importar el estado de daño de la estructura (ecuación (1.7)).

$$[F_d][K_d] = [I] \quad (1.7)$$

donde:

- $[K_d]$  = Matriz de rigideces con daño
- $[I]$  = Matriz identidad

Sustituyendo la ecuación (1.7) en la ecuación (1.6), se obtiene la ecuación (1.8).

$$[F_d][\Delta K] = [F_d][K_{sd}] - [I] \quad (1.8)$$

donde:

- $[\Delta K]$  = Cambio en la matriz de rigideces
- $[K_{sd}]$  = Matriz de rigideces sin daño

Suponiendo que la matriz de rigideces de la estructura del estado inicial está adecuadamente calibrada, el término a obtener es la matriz  $[\Delta K]$ . El sistema puede resolverse con alguna técnica de mínimos cuadrados.

Pandey y Biswas (1994) establecieron un método para la detección y localización de daño basándose en la medición de la matriz de flexibilidades dinámica. Para ubicar el deterioro en la estructura usaron la ecuación (1.9).

$$\bar{\delta}_j = \max_i |\delta_{ij}| \quad (1.9)$$

donde:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}_j &= \text{Máximo valor absoluto de los elementos ubicados en la } j\text{-ésima columna de la matriz } [\Delta F] \\ \delta_{ij} &= i\text{-ésimo elemento de la } j\text{-ésima columna de la matriz } [\Delta F]\end{aligned}$$

Determinaron que la variación en la flexibilidad es altamente sensible a la cantidad de daño presente. Probaron su método en modelos analíticos y experimentales de vigas metálicas con diferentes condiciones de apoyo. Con los resultados obtenidos concluyeron: el método no requiere del empleo de un modelo analítico de la estructura; las estimaciones de daño se basan únicamente en los parámetros modales registrados del sistema estructural; y que el diagnóstico de daño se puede realizar sin contar con todos los parámetros modales del sistema a estudiar.

#### 1.4.1.5. Cambios en la energía de deformación modal

La energía de deformación modal (MSE, por sus siglas en inglés) es una propiedad que puede ser utilizada como un indicador de daño. Este parámetro ha sido usado para cuantificar la participación de los elementos estructurales en un modo de vibrar en particular (Shi et al., 1998). Su cálculo para un estado con y sin daño se realiza con la ecuación (1.10).

$$MSE_{ij}^{sd} = \{\phi_{sd}\}_i^T [k]_j \{\phi_{sd}\}_i \quad MSE_{ij}^d = \{\phi_d\}_i^T [k]_j \{\phi_d\}_i \quad (1.10)$$

donde:

$$\begin{aligned}MSE_{ij}^{sd} &= \text{Energía de deformación modal del estado sin daño del } j\text{-ésimo elemento en el } i\text{-ésimo modo de vibrar} \\ MSE_{ij}^d &= \text{Energía de deformación modal del estado con daño del } j\text{-ésimo elemento en el } i\text{-ésimo modo de vibrar} \\ \{\phi_{sd}\}_i &= i\text{-ésimo modo de vibrar sin daño} \\ \{\phi_d\}_i &= i\text{-ésimo modo de vibrar con daño} \\ [k]_j &= \text{Matriz de rigideces del } j\text{-ésimo elemento}\end{aligned}$$

En la expresión anterior se muestra que la MSE presentará un cambio irrelevante para los elementos no dañados. Sin embargo, la variación será importante si éstos muestran algún deterioro. Tomando en cuenta lo anterior, la relación de cambio de la energía de deformación modal (MSECR, por sus siglas en inglés) se puede expresar con la ecuación (1.11).

$$MSECR_j^i = \frac{|MSE_{ij}^d - MSE_{ij}^{sd}|}{MSE_{ij}^{sd}} \quad (1.11)$$

donde:

$$MSECR_j^i = \text{Relación de cambio de la energía de deformación modal del } j\text{-ésimo elemento en el } i\text{-ésimo modo de vibrar}$$

Si se desea considerar la MSE de varios modos de vibrar, entonces la MSCER del  $j$ -ésimo elemento se calcula con la ecuación (1.12).

$$MSECR_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{MSECR_j^i}{MSECR_{max}^i} \quad (1.12)$$

donde:

$$\begin{aligned} MSECR_j &= \text{Relación de cambio de la energía de deformación modal del } j\text{-ésimo elemento} \\ MSECR_{max}^i &= \text{Máxima relación de cambio de la energía de deformación modal en el } i\text{-ésimo} \\ &\quad \text{modo de vibrar} \end{aligned}$$

Shi et al. (1998) emplearon el MSECR para detectar daño en dos experimentos diferentes.

En el primer caso, se estudió el modelo analítico de una armadura plana. El daño se simuló reduciendo la rigidez en un solo elemento. En un ejemplo adicional, se deterioró dicha propiedad en múltiples ubicaciones. También se empleó información modal completa e incompleta, y se incluyó la presencia de ruido aleatorio. Con todas las consideraciones anteriores, se aplicaron las ecuaciones (1.11) y (1.12) detectando daño de manera consistente.

En el segundo experimento, se utilizó un marco plano metálico experimental de una cruz y dos niveles. Para este caso, se calibró un modelo de elementos finitos de la estructura. El deterioro se indujo removiendo algunas piezas presentes en las conexiones del marco. Nuevamente, el empleo de las ecuaciones (1.11) y (1.12) resultó útil en la localización del daño.

Alvandi y Cremona (2006) emplearon la MSE para la detección de daño en una viga simplemente apoyada. Compararon los resultados producidos por el método de energía de deformación con los generados por otras técnicas de identificación de daño (cambios en la flexibilidad dinámica, cambios en la curvatura de los modos de vibrar y cambios en la curvatura de la flexibilidad). El uso de la MSE presentó un mejor comportamiento en comparación al de las otras tres metodologías empleadas. Adicionalmente, con la información experimental disponible de diversas estructuras existentes, los investigadores mostraron que el uso conjunto de los métodos basados en la variación de la MSE y la curvatura de la flexibilidad es adecuado para la identificación de daño. Esto sin importar la existencia de escenarios de daño complejos y simultáneos, deterioros cerca de los apoyos e inclusive la captura de datos con resolución baja.

Carrasco et al. (1997) analizaron el modelo experimental de una armadura tridimensional fabricada de aluminio. Se instrumentó con 273 acelerómetros y tres transductores de fuerza. En la estructura se introdujeron tres tipos de daño: reducción del 50 % de la sección transversal de los elementos a 1/16 de su longitud; reducción del 50 % de la sección transversal de los elementos a un tercio de su dimensión; y una disminución del 100 % del área. Todos los deterioros anteriores fueron generados a través de cortes. Utilizando la variación de la MSE entre los estados sanos y dañados ubicaron el daño en algunas de las simulaciones estudiadas.

#### 1.4.1.6. Actualización de matrices

En los métodos de actualización de matrices se busca reproducir de la forma más precisa posible la respuesta dinámica o estática de la estructura, con base en modificaciones de las matrices que caracterizan al sistema estructural (matriz de masas, matriz de rigideces y matriz de amortiguamiento). Estos métodos se basan en resolver un problema de optimización basado en las ecuaciones de movimiento, el modelo estructural y la información capturada. Al comparar las variaciones entre las matrices originales y las actualizadas, es posible localizar el daño y cuantificarlo (Doebbling et al., 1996).

#### 1.4.2. Métodos basados en la actualización de modelos

La actualización de modelos consiste en modificar ciertos parámetros de un modelo de elementos finitos (módulos de elasticidad, secciones transversales, etcétera) con la finalidad de que éste sea lo más representativo de su contraparte real. La metodología parte de características dinámicas experimentales, tales como frecuencias naturales y modos de vibrar. Posteriormente, se seleccionan los parámetros a ser actualizados y finalmente, a través de un proceso iterativo, se modifican los valores de los parámetros seleccionados para refinar el modelo de elementos finitos.

Con las técnicas de actualización de modelos es posible localizar y cuantificar daño basándose en las variaciones que sufran las propiedades a ser actualizadas.

Brownjohn et al. (2001) actualizaron el modelo de un marco metálico experimental afectado con cuatro cortes, dos en una columna y el otro par en la trabe. Para el modelado de los cortes se incorporaron “vigas débiles” en la ubicación del daño, es decir, miembros con secciones transversales sensiblemente menores. Los parámetros a actualizar fueron las áreas de las secciones transversales y el momento de inercia de dichos elementos. Adicionalmente, se optó por actualizar de manera global el módulo de Young de todos los miembros metálicos.

Chellini et al. (2010) aplicaron una metodología de actualización de modelos en un marco tridimensional de dos niveles. El algoritmo consistió en minimizar las diferencias entre los valores analíticos y experimentales de las frecuencias y modos de vibrar del edificio. La estructura formada con columnas de sección compuesta y un sistema de piso tipo losacero, fue probada en ensayos de carga cíclica yseudodinámicos. Los parámetros actualizados fueron la rigidez de las zonas donde se esperaba el daño, esto es, las uniones viga-columna y la base de las columnas del primer piso. El proceso de actualización se ejecutó para tres niveles de daño distintos: estado intacto, estado límite último, y estado límite de colapso. En las diferentes fases fue posible detectar, evaluar y cuantificar el daño.

Shiradhonkar y Shrikhande (2011) estudiaron el modelo de elementos finitos de un marco plano de concreto reforzado de una crujía y siete niveles, sometido a los sismos de Loma Prieta y San Fernando. Una de las consideraciones principales fue la manifestación de daño como la formación de articulaciones plásticas en los extremos de las vigas. Por esta razón se decidió actualizar la rigidez rotacional de las trabes en dichos puntos; de modo que se pudiese evaluar adecuadamente el daño en caso de presentarse.

## CAPÍTULO 2

### EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

El método de la matriz de transformación (MMT) es un algoritmo que permite identificar, localizar y cuantificar daño en estructuras (Escobar et al., 2005).

Antes de explicar a detalle el MMT, se presentan brevemente algunos conceptos que son parte fundamental en la implementación del método.

#### 2.1. CONCEPTOS PRELIMINARES

##### 2.1.1. Condensación de la matriz de rigideces

Generalmente, los sistemas estructurales están dotados de un gran número de elementos, lo que conlleva a que posean numerosos gdl. Experimentalmente, es prácticamente imposible registrar la respuesta de todos los gdl de una estructura, por lo que una reducción de estos en el modelo analítico se vuelve necesaria.

Para abordar este problema, se puede emplear el método de condensación estática (Paz y Leigh, 2004). En el proceso se selecciona un conjunto de gdl secundarios que se expresarán en términos de los gdl primarios remanentes.

La reducción de los gdl secundarios en una estructura cuyo comportamiento es únicamente en el plano se logra obteniendo su matriz de rigideces condensada, que se calcula con la ecuación (2.1). Esta ecuación emplea la matriz de transformación (ecuación (2.2.a)) que a su vez se obtiene de la partición de la matriz de rigideces original (ecuación (2.2.b)).

$$[\bar{K}] = [T]^T [K] [T] \quad (2.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= \text{Matriz de rigideces lateral} \\ [T] &= \text{Matriz de transformación} \\ [K] &= \text{Matriz de rigideces global} \end{aligned}$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [I] & \\ & -[K_{22}]^{-1}[K_{21}] \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \vdots & [K_{12}] \\ \dots & \vdots & \dots \\ [K_{21}] & \vdots & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

##### 2.1.2. Reconstrucción de la matriz de rigideces experimental

La reconstrucción adecuada de la matriz de rigideces experimental es esencial para el funcionamiento óptimo del MMT.

En el presente trabajo, se utilizó al algoritmo de Yang y Chen para la reconstrucción de las matrices de rigideces experimentales de la estructura estudiada. A continuación se muestra una breve explicación del método.

### 2.1.2.1. Método directo de reconstrucción de matrices de Yang y Chen

Una de las numerosas técnicas de reconstrucción de matrices a partir de información modal experimental incompleta es el método propuesto por Yang y Chen (2009). Esta metodología tiene la virtud de conservar el significado físico de la estructura, es decir, mantiene los valores nulos de la matriz original y modifica únicamente, en caso de ser necesario, aquéllos diferentes de cero. Por tal razón, se prefirió el uso de este algoritmo sobre el de otros métodos.

La metodología contempla una actualización de la matriz de masas previo a la modificación de la matriz de rigideces. Sin embargo, en el MMT se conserva esta primera en cualquier etapa de daño. Por dicho motivo, se utilizó únicamente la reconstrucción de la matriz de rigideces dejando intacta la matriz de masas.

Para el cálculo de la matriz de rigideces experimental reconstruida contando con los primeros parámetros modales experimentales se emplean las ecuaciones (2.3) y (2.4):

$$[C_K] = [(\omega_x^2)^*] - [(\omega_a^2)^*] - [(\Delta\Phi)^*]^T [K_a] [(\Phi_a)^*] - [(\Phi_a)^*]^T [K_a] [(\Delta\Phi)^*] \quad (2.3)$$

donde:

- $[C_k]$  = Matriz de corrección de rigideces
- $[K_a]$  = Matriz de rigideces analítica
- $[(\omega_x^2)^*]$  = Matriz de frecuencias experimentales identificadas
- $[(\omega_a^2)^*]$  = Matriz de frecuencias analíticas
- $[(\Delta\Phi)^*]$  = Matriz que contiene la diferencia entre los modos de vibrar experimentales identificados y su contraparte analítica
- $[(\Phi_a)^*]$  = Matriz de modos de vibrar analíticos

$$[K_x] = [K_a] + [M_a] [(\Phi_a)^*] [C_K] [(\Phi_a)^*]^T [M_a] \quad (2.4)$$

donde:

- $[K_x]$  = Matriz de rigideces experimental reconstruida
- $[M_a]$  = Matriz de masas analítica

La realización de las matrices  $[(\omega_x^2)^*]$ ,  $[(\omega_a^2)^*]$ ,  $[(\Delta\Phi)^*]$  y  $[(\Phi_a)^*]$  no es tan evidente. Su construcción se ejemplifica en las ecuaciones (2.6) a (2.8), suponiendo una estructura de cinco gdl en la que se hayan identificado experimentalmente tres frecuencias con sus correspondientes modos de vibrar.

$$[(\omega_x^2)^*] = \begin{bmatrix} (\omega_x)_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_x)_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_x)_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[(\omega_a^2)^*] = \begin{bmatrix} (\omega_a)_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\omega_a)_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\omega_a)_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[(\Delta\phi)^*] = \begin{bmatrix} \Delta\phi_{11} & \Delta\phi_{12} & \Delta\phi_{13} & 0 & 0 \\ \Delta\phi_{21} & \Delta\phi_{22} & \Delta\phi_{23} & 0 & 0 \\ \Delta\phi_{31} & \Delta\phi_{32} & \Delta\phi_{33} & 0 & 0 \\ \Delta\phi_{41} & \Delta\phi_{42} & \Delta\phi_{43} & 0 & 0 \\ \Delta\phi_{51} & \Delta\phi_{52} & \Delta\phi_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$[(\phi_a)^*] = \begin{bmatrix} (\phi_a)_{11} & (\phi_a)_{12} & (\phi_a)_{13} & 0 & 0 \\ (\phi_a)_{21} & (\phi_a)_{22} & (\phi_a)_{23} & 0 & 0 \\ (\phi_a)_{31} & (\phi_a)_{32} & (\phi_a)_{33} & 0 & 0 \\ (\phi_a)_{41} & (\phi_a)_{42} & (\phi_a)_{43} & 0 & 0 \\ (\phi_a)_{51} & (\phi_a)_{52} & (\phi_a)_{53} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

El orden de las cuatro matrices anteriores, así como la cantidad de columnas con valores nulos que poseen, depende del número de gdl del sistema y del total de parámetros modales experimentales identificados respectivamente.

### 2.1.3 Resolución de sistemas de ecuaciones rectangulares

Generalmente, el MMT involucra la construcción de sistemas de ecuaciones en los que existe un mayor número de igualdades que de incógnitas y viceversa. Esto es, sistemas de ecuaciones rectangulares sobredeterminados o subdeterminados respectivamente. En el presente trabajo, este problema se solucionó calculando la pseudoinversa de Moore-Penrose de acuerdo con las siguientes propiedades:

- 1) Sea  $[A]$  una matriz de  $m$  filas y  $n$  columnas, donde  $m \leq n$  y el producto de  $[A]^T[A]$  genera una matriz no singular, la pseudoinversa de  $[A]$  se calcula con la ecuación (2.9).

$$[A]^+ = [A]^T[[A][A]^T]^{-1} \quad (2.9)$$

- 2) Sea  $[A]$  una matriz de  $m$  filas y  $n$  columnas, donde  $m \geq n$  y el producto de  $[A][A]^T$  genera una matriz no singular, la pseudoinversa de  $[A]$  se calcula con la ecuación (2.10).

$$[A]^+ = [[A]^T[A]]^{-1}[A]^T \quad (2.10)$$

## 2.2. MMT EN MARCOS PLANOS

El desarrollo del MMT para la detección de daño en marcos planos se basa en la matriz de transformación, misma que es empleada para realizar la condensación estática en este tipo de estructuras (Sección 2.1.1). Partiendo de esta premisa, se puede ahondar en el desarrollo del algoritmo.

La matriz de rigideces global de un marco plano, puede representarse como el aporte de las matrices de rigideces en coordenadas globales de los miembros que lo conforman. Utilizando este concepto, la matriz de rigideces de un marco plano para cualquier estado de daño puede representarse con la ecuación (2.11).

$$[K_d]_j = \sum_{i=1}^{nej} (1 - x_{ij}) [K]_{ij} \quad (2.11)$$

donde:

- $[K_d]_j$  = Matriz de rigideces global dañada del  $j$ -ésimo marco
- $nej$  = Número de miembros que conforman al  $j$ -ésimo marco dañado
- $x_{ij}$  = Parámetro adimensional que representa la disminución en la contribución del  $i$ -ésimo elemento a la matriz de rigideces global del  $j$ -ésimo marco
- $[K]_{ij}$  = Matriz de rigideces global del  $i$ -ésimo elemento perteneciente al  $j$ -ésimo marco

Desarrollando la expresión anterior se llega a la ecuación (2.12).

$$[K_d]_j = \sum_{i=1}^{nej} [K]_{ij} - \sum_{i=1}^{nej} x_{ij} [K]_{ij} \quad (2.12)$$

La primer sumatoria del miembro derecho de la ecuación (2.12) simboliza la matriz de rigideces global del marco sin daño. Consecuentemente, la igualdad anterior se puede expresar con la ecuación (2.13); la cual muestra que la matriz de rigideces global de un estado dañado, corresponde a la diferencia de su contraparte sana menos una matriz portante de los elementos con cierto estado de deterioro.

$$[K_d]_j = [K]_j - \sum_{i=1}^{nej} x_{ij} [K]_{ij} \quad (2.13)$$

donde:

- $[K]_j$  = Matriz de rigideces global del  $j$ -ésimo marco

Con ayuda de la matriz de transformación, se puede aplicar la condensación estática en la ecuación (2.13) para así, obtener la ecuación (2.14).

$$[\bar{K}_d]_j = [T_d]_j^T [K]_j [T_d]_j - \sum_{i=1}^{nej} x_{ij} [T_d]_j^T [K]_{ij} [T_d]_j \quad (2.14)$$

donde:

- $[\bar{K}_d]_j$  = Matriz de rigideces lateral dañada del  $j$ -ésimo marco
- $[T_d]_j$  = Matriz de transformación asociada al estado dañado del  $j$ -ésimo marco

Al principio del análisis es válido suponer que la matriz de transformación del estado dañado no difiere de la correspondiente al estado sin daño. En este contexto, es posible establecer un procedimiento iterativo para la detección de los elementos dañados. Con ello, la ecuación anterior se puede escribir como:

$$[\bar{K}]_j - [\bar{K}_d]_j = \sum_{i=1}^{nej} x_{ij} [\bar{K}]_{ij} \quad (2.15)$$

donde:

$[\bar{K}]_j$  = Matriz de rigideces lateral del  $j$ -ésimo marco

Tomando en cuenta que las matrices de rigideces son cuadradas y simétricas de  $m$  renglones por  $m$  columnas, la cantidad de términos independientes de cada una de ellas es igual a  $m(m+1)/2$ . Los términos independientes de las matrices del miembro izquierdo de la ecuación (2.15) pueden ordenarse en forma de vectores. Por otro lado, los valores de las matrices que corresponden al miembro derecho de la misma igualdad, se pueden agrupar en una nueva matriz. Así, la ecuación (2.15) queda expresada en forma matricial mediante la ecuación (2.16).

$$\{\bar{k}\}_{nit \times 1} - \{\bar{k}_d\}_{nit \times 1} = [S_k]_{nit \times nej} \{x\}_{nej \times 1} \quad (2.16)$$

donde:

$\{\bar{k}\}_{nit \times 1}$  = Vector portante de términos independientes correspondientes a la matriz de rigideces lateral sin daño  
 $\{\bar{k}_d\}_{nit \times 1}$  = Vector portante de términos independientes correspondientes a la matriz de rigideces lateral dañada  
 $[S_k]_{nit \times nej}$  = Matriz portante de los términos independientes correspondientes a las matrices de rigideces laterales de los elementos estructurales  
 $\{x\}_{nej \times 1}$  = Vector portante del deterioro de los elementos estructurales

De manera general, el parámetro  $x$  adopta valores entre cero y uno. Sin embargo, en el caso de estructuras con simetría de cargas y rigideces, este intervalo se puede incrementar en función del número de elementos simétricos. Por ejemplo, si dos columnas poseen las mismas características de resistencia y rigidez, su participación en la matriz de rigideces será idéntica. Por lo tanto, es posible asignar un sólo factor  $x$  para ambos miembros, el cual tome valores entre cero y dos.

### 2.2.1. Algoritmo

1. Calcular la matriz de rigideces global de cada elemento perteneciente al  $j$ -ésimo marco.
2. Calcular la matriz de rigideces global de la estructura ensamblando las matrices obtenidas en el paso 1.
3. Calcular la matriz de transformación de la estructura para el estado sin daño.
4. Calcular las matrices de rigideces condensadas de los elementos estructurales.
5. Calcular la matriz de rigideces lateral de la estructura sumando las matrices obtenidas en el paso 4.
6. Construir los vectores de términos independientes  $\{\bar{k}\}$  y  $\{\bar{k}_d\}$ . Este último vector corresponde a un estado dañado previamente conocido.
7. Construir la matriz  $[S_k]$ .

8. Establecer el intervalo de valores que tomará el parámetro  $x$  de acuerdo con las condiciones de simetría de la estructura.
9. Resolver el sistema de ecuaciones con la teoría estipulada en la sección 2.1.2.
10. Con el vector resultante obtenido en el paso 9, calcular la matriz de rigideces global asociada al estado de daño en cuestión.
11. Calcular la matriz de transformación de la estructura dañada.
12. Calcular la matriz de rigideces lateral de la estructura dañada y formar un vector  $\{\bar{k}_d\}_{aproximado}$ .
13. Calcular el cuadrado del valor absoluto de la diferencia entre los vectores  $\{\bar{k}_d\}_{conocido}$  y  $\{\bar{k}_d\}_{aproximado}$ . Si el valor determinado es menor que cierta tolerancia, finalizar el proceso. De otro modo, regresar al paso 4.

### 2.3. MMT EN ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

El planteamiento de la sección 2.2, se puede expandir al caso de estructuras tridimensionales compuestas de marcos planos acoplados, cuyos gdl primarios se asocian a los desplazamientos de los diafragmas rígidos de cada nivel de la estructura (dos desplazamientos horizontales ortogonales entre sí y un giro alrededor de un eje vertical). Para determinar la matriz de rigideces condensada en este tipo de sistemas estructurales, es necesario asociar los gdl laterales de cada marco con los gdl primarios de la estructura tridimensional. Esto se logra con la matriz de transformación de desplazamientos  $[C]$  (Bazán y Meli, 2004). Así, con la ecuación (2.17), es posible obtener la matriz de rigideces lateral de cada marco asociada a los gdl de interés del sistema estructural tridimensional.

$$[\bar{K}]_j = [C]_j^T [T]_j^T [K]_{ij} [T]_j [C]_j \quad (2.17)$$

donde:

$[C]_j$  = Matriz de transformación de desplazamientos del  $j$ -ésimo marco

Aplicando la idea anterior a la ecuación (2.14), y sumando el aporte de la rigidez lateral de los marcos acoplados al sistema en tres dimensiones, la matriz de rigideces lateral dañada del modelo tridimensional se puede calcular con la ecuación (2.18).

$$[\bar{K}t_d] = \sum_{j=1}^{Nm} [C]_j^T [T_d]_j^T [K]_j [T_d]_j [C]_j - \sum_{j=1}^{Nm} \sum_{i=1}^{nej} x_{ij} [C]_j^T [T]_j^T [K]_{ij} [T]_j [C]_j \quad (2.18)$$

donde:

$[\bar{K}t_d]$  = Matriz de rigideces lateral dañada del modelo tridimensional  
 $Nm$  = Número de marcos del modelo tridimensional

Con la finalidad de establecer un solo factor  $x$  asociado a cada elemento estructural, sin importar que éste pertenezca a más de un marco, la ecuación (2.18) queda expresada como:

$$[\overline{Kt}_d] = \sum_{j=1}^{Nm} [C]_j^T [T_d]_j^T [K]_j [T_d]_j [C]_j - \sum_{r=1}^{Nr} x_r \sum_{\substack{j=1 \\ r \in j}}^{Nm} [C]_j^T [T_d]_j^T [K]_{rj} [T_d]_j [C]_j \quad (2.19)$$

donde:

- $Nr$  = Número de elementos que conforman al modelo tridimensional
- $x_r$  = Parámetro adimensional que representa la disminución en la contribución del  $r$ -ésimo elemento a la matriz de rigideces del modelo tridimensional
- $[K]_{rj}$  = Matriz de rigideces global del  $r$ -ésimo elemento estructural perteneciente al  $j$ -ésimo marco

El primer y segundo términos del miembro derecho de la ecuación (2.19), representan la matriz de rigidez lateral de la estructura sin daño y la contribución del  $r$ -ésimo elemento a la rigidez de cada marco respectivamente. Esta igualdad se puede reescribir como:

$$[\overline{Kt}] - [\overline{Kt}_d] = \sum_{r=1}^{Nr} x_r [\overline{K}_d]_r \quad (2.20)$$

donde:

- $[\overline{Kt}]$  = Matriz de rigideces lateral del modelo tridimensional
- $[\overline{Kt}_d]_r$  = Matriz de rigideces lateral de la estructura sin daño

Con la ecuación (2.20) se puede plantear un sistema de ecuaciones, que en forma matricial se escribe como:

$$\{\overline{kt}\} - \{\overline{kt}_d\} = [S_k]\{x\} \quad (2.21)$$

donde:

- $\{\overline{kt}\}$  = Vector portante de términos independientes correspondientes a la matriz de rigideces lateral sin daño del modelo tridimensional
- $\{\overline{kt}_d\}$  = Vector portante de términos independientes correspondientes a la matriz de rigideces lateral dañada del modelo tridimensional
- $[S_k]$  = Matriz portante de los términos independientes correspondientes a las matrices de rigideces laterales de los elementos estructurales
- $\{x\}$  = Vector portante del deterioro de los elementos estructurales

Análogo al caso de marcos planos, se puede considerar la simetría de la estructura para variar de manera congruente el intervalo de valores que pueda tomar el parámetro  $x_r$ .

### 2.3.1. Algoritmo

1. Calcular la matriz de transformación de desplazamientos del  $j$ -ésimo marco.
2. Calcular la matriz de rigideces global de cada elemento perteneciente al  $j$ -ésimo marco.
3. Calcular la matriz de rigideces global del  $j$ -ésimo marco ensamblando las matrices obtenidas en el paso 2.

4. Calcular la matriz de transformación del  $j$ -ésimo marco para un estado sin daño.
5. Calcular la matriz de rigideces condensada del  $j$ -ésimo marco asociada a los gdl de la estructura tridimensional.
6. Calcular la matriz de rigideces lateral de la estructura tridimensional sumando las matrices obtenidas en el paso 5.
7. Construir los vectores de términos independientes  $\{\bar{kt}\}$  y  $\{\bar{kt}_d\}$ . Este último vector corresponde a un estado dañado previamente conocido.
8. Construir la matriz  $[S_k]$ .
9. Establecer el intervalo de valores que tomará el parámetro  $x_r$ , de acuerdo con las condiciones de simetría de la estructura.
10. Resolver el sistema de ecuaciones con la teoría estipulada en la sección 2.1.2.
11. Con el vector resultante obtenido en el paso 10, calcular la matriz de rigideces global de la estructura tridimensional asociada al estado de daño en cuestión.
12. Calcular la matriz de transformación del  $j$ -ésimo marco dañado.
13. Calcular la matriz de rigideces lateral de la estructura tridimensional dañada y formar un vector  $\{\bar{kt}_d\}_{aproximado}$ .
14. Calcular el cuadrado del valor absoluto de la diferencia entre los vectores  $\{\bar{kt}_d\}_{conocido}$  y  $\{\bar{kt}_d\}_{aproximado}$ . Si el valor determinado es menor que cierta tolerancia, finalizar el proceso. De otro modo, regresar al paso 5.

#### 2.4. APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN EN EL MMT

En el MMT, tanto para marcos planos como para estructuras tridimensionales, la aproximación de la solución en cada iteración se realiza empleando una fracción de las dos anteriores. Esto se expresa en la ecuación (2.22).

$$\{x\}_{z+1} = \beta(\{x\}_z + \{x\}_{z-1}) \quad (2.22)$$

El concepto anterior es análogo al método de bisección, técnica numérica empleada para encontrar las raíces de una ecuación de la forma  $f(x) = 0$ .

El parámetro de convergencia  $\beta$  puede tomar cualquier valor entre cero y uno. A medida que el MMT se ejecuta, la variación en la matriz de transformación permite ubicar los elementos dañados.

## CAPÍTULO 3

### DESCRIPCIÓN DEL MODELO PREFABRICADO DE CONCRETO REFORZADO EQUIPADO CON CRP

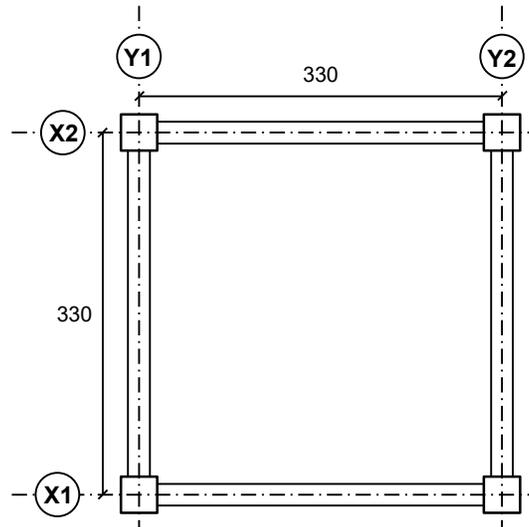
#### 3.1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO EXPERIMENTAL

El modelo experimental analizado es una estructura prefabricada de concreto reforzado equipada con Contraventeos Restringidos al Pandeo, CRP. Cuenta con cuatro plantas cuadradas de 3.3 m de lado ubicadas a una altura de entrepiso de 1.1 m cada una. El sistema de piso se forma de tres placas alveolares de 10 cm de espesor, dos idénticas y una desigual, apoyadas en las traveses portantes de la dirección transversal del edificio. Adicionalmente, cada nivel está provisto de un firme de concreto reforzado de 2 cm de grueso.

La estructura tiene un total de ocho CRP colocados en zigzag en las caras longitudinales de manera simétrica, que a su vez se hallan anclados al modelo mediante placas metálicas. El núcleo metálico de los CRP localizados en los primeros dos niveles es de  $60 \text{ mm}^2$ ; mientras que el de los pisos superiores es de  $30 \text{ mm}^2$ . Las dimensiones de las secciones transversales de las traveses y las columnas son de  $15 \text{ cm} \times 27 \text{ cm}$  y  $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$  respectivamente.

Las columnas y los CRP del primer nivel poseen dados en sus bases de 30 cm de altura y una sección transversal cuadrada de 45 cm de lado. Estos fungieron como medio de montaje del sistema estructural a la plataforma de la mesa vibradora donde se ejecutaron las pruebas de vibración.

En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3, se muestran las vistas en planta, elevación de la dirección  $x$  (longitudinal) y elevación de la dirección  $y$  (transversal) del modelo respectivamente.



Acotaciones en cm

**Figura 3.1. Vista en planta del modelo**

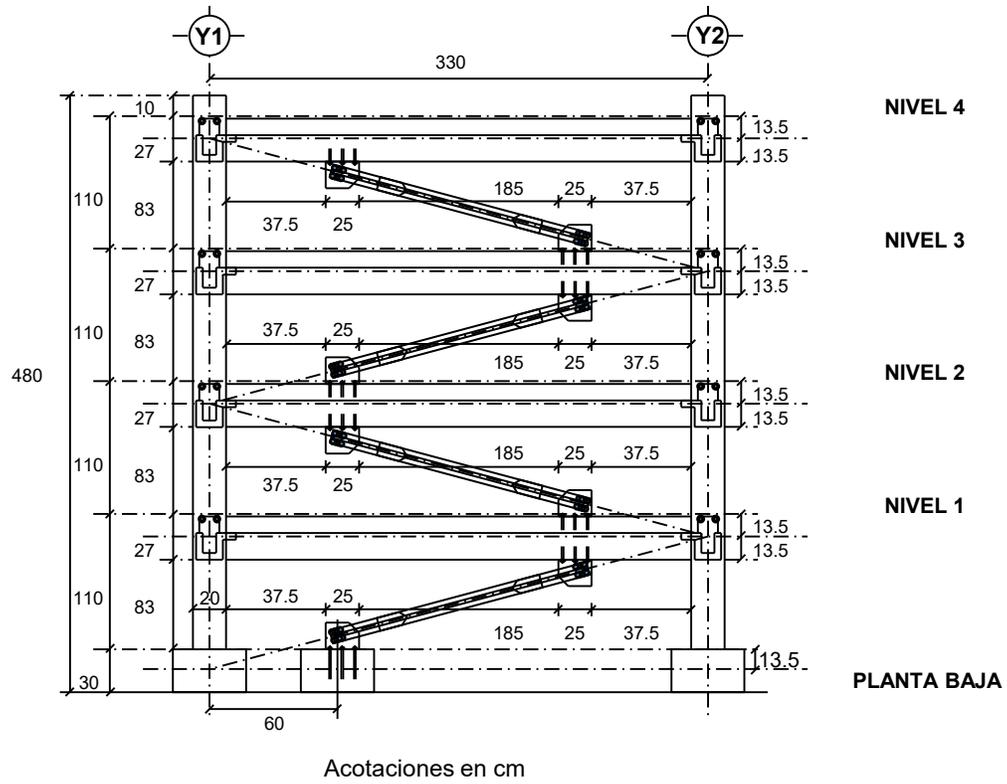


Figura 3.2. Vista en elevación de los marcos de la dirección longitudinal

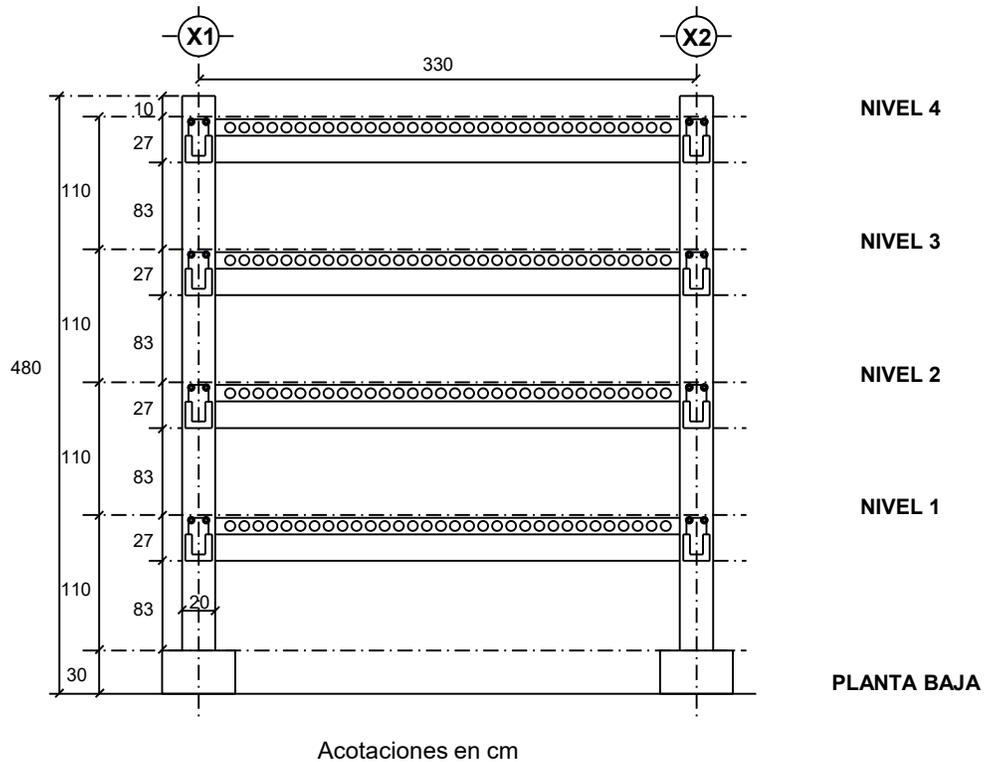


Figura 3.3. Vista en elevación de los marcos de la dirección transversal

### 3.1.1. Componentes estructurales del modelo

#### 3.1.1.1. Columnas

Las cuatro columnas de cada eje se conforman por dos piezas conectadas en el tercer entrepiso. La C-1 constituye las columnas de los pisos uno, dos y parte del tercero. Mientras que la C-2, compone la columna del cuarto nivel y una sección del piso inferior.

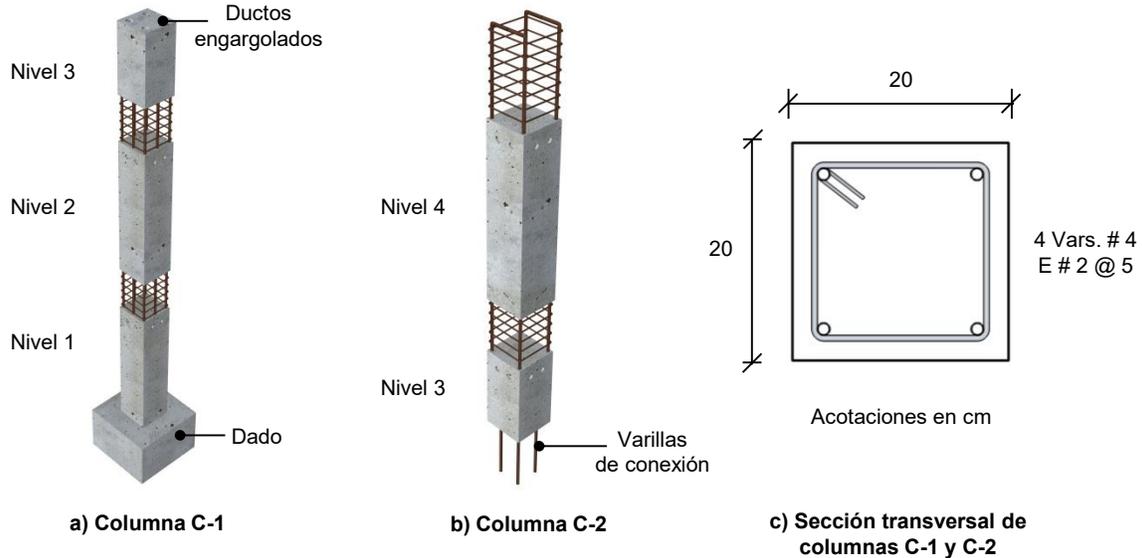


Figura 3.4. Vista en isométrico y sección transversal de columnas tipo

#### 3.1.1.2. CRP

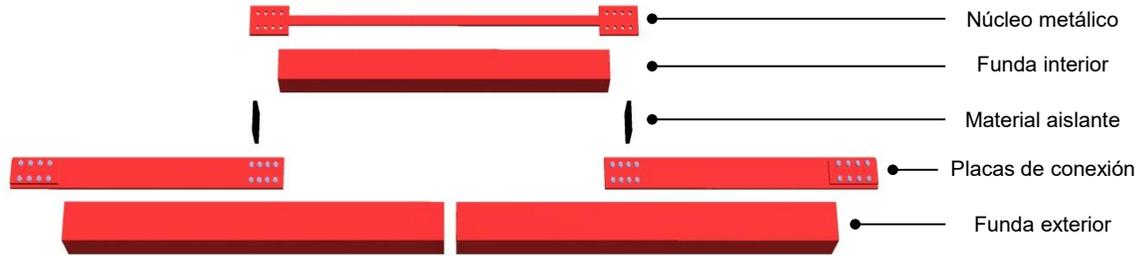
Los contraventeos empleados están conformados por los siguientes elementos:

- 1) Núcleo de acero S275 de sección rectangular.
- 2) Cuatro capas de cinta teflón que funcionan como material aislante.
- 3) Funda interior compuesta de un tubo cuadrado metálico y rellena de mortero.
- 4) Placas de conexión de acero.
- 5) Funda exterior compuesta de un tubo cuadrado metálico y rellena de mortero.

Para la fabricación de los CRP se siguió el proceso descrito a continuación:

- 1) Recubrimiento del núcleo metálico con cuatro capas de cinta teflón y una capa adicional de material elástico en el canto del núcleo.
- 2) Colocación del núcleo en el interior del tubo metálico y posterior inyección de mortero.
- 3) Montaje de placas de conexión.
- 4) Colocación de material elástico de 15 mm de espesor entre la funda interior y las placas de conexión.
- 5) Introducción de las placas de conexión y extremos de la funda interior en su correspondiente funda exterior.
- 6) Inyección de mortero en las fundas exteriores desde el extremo de éstas hasta el contacto con el material elástico.

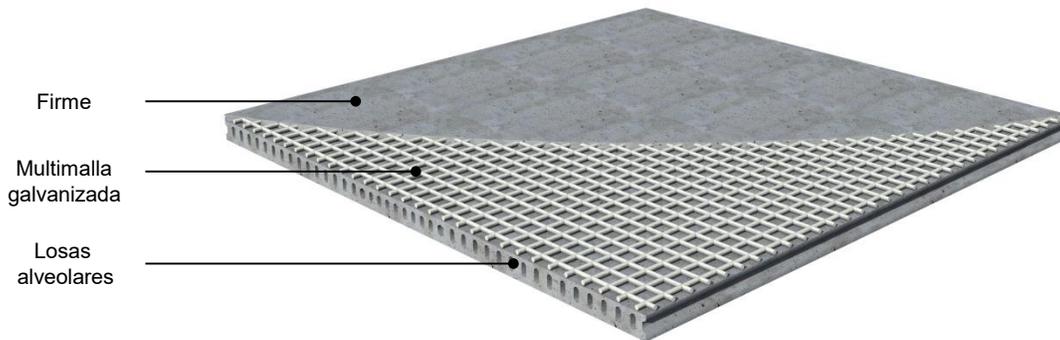
En la figura 3.5 se presenta la composición de los CRP.



**Figura 3.5. Despiece de CRP empleados en el modelo**

**3.1.1.3. Sistema de piso**

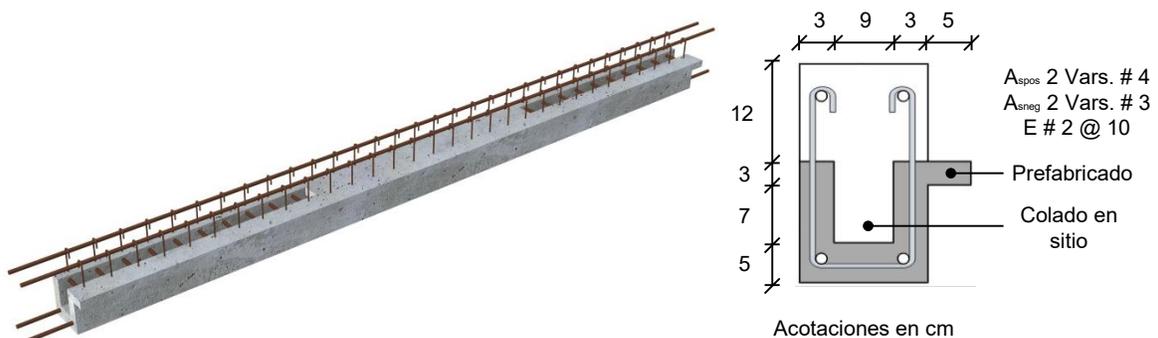
El sistema de piso está conformado por tres losas alveolares de 10 cm de peralte, dos extremas de 120 cm x 315 cm y una intermedia de 60 cm x 315 cm. Así mismo, posee un firme de concreto reforzado de 2 cm de espesor con multimalla galvanizada 10 cm x 10 cm cal 10.



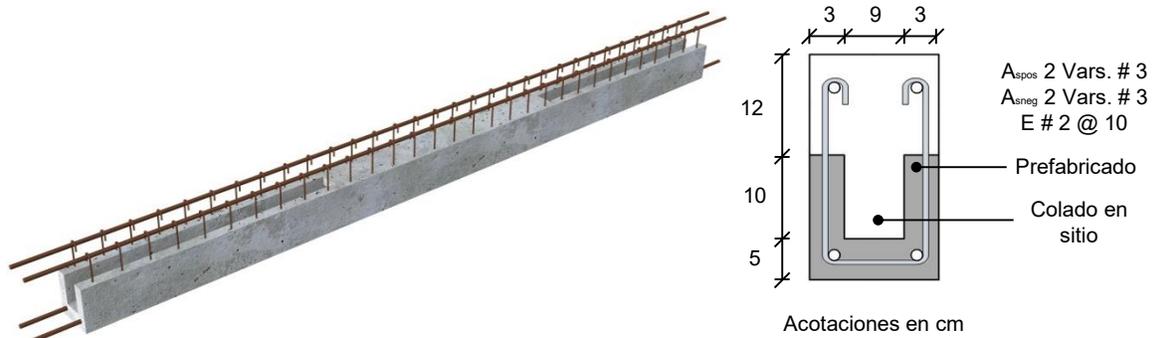
**Figura 3.6. Vista en isométrico del sistema de piso**

**3.1.1.4. Trabes**

En el modelo se utilizaron dos clases de trabes. Las trabes T-1 poseen una ménsula en su cara lateral que funge como apoyo para el sistema de piso. Las trabes T-2 tienen ductos en los que se introdujeron los anclajes de las placas de conexión de los CRP. Ambas están provistas de una zona aligerada en el tercio medio de su claro. Sus características de armado y dimensiones, así como una vista en isométrico de éstas se muestran en las figuras 3.7 y 3.8.



**Figura 3.7 Vista en isométrico y sección transversal de trabes T-1**



**Figura 3.8. Vista en isométrico y sección transversal de traveses T-2**

Aunque la sección transversal de la trabe T-1 rigurosamente cuenta con un momento de inercia diferente al de la T-2 debido a la existencia de la ménsula, para fines prácticos, durante la ejecución del modelo de elementos finitos, ésta se despreció.

### 3.1.2. Construcción y proceso de montaje del modelo

#### 3.1.2.1. Materiales

En la tabla 3.1 se muestran las propiedades mecánicas de los concretos con los que se fabricaron los diversos componentes de la estructura. La  $f'_c$  fue obtenida de pruebas ejecutadas en laboratorio a los diversos materiales. El módulo de elasticidad de las traveses y las columnas también se determinó experimentalmente. Por otro lado, la misma propiedad se calculó analíticamente para conexiones y firmes con la siguiente expresión:  $8\,500 * f'_c^{0.5} + 50\,000$ . La ecuación anterior está en  $\text{kg/cm}^2$ .

**Tabla 3.1. Propiedades mecánicas de los concretos usados en los elementos estructurales del modelo estudiado**

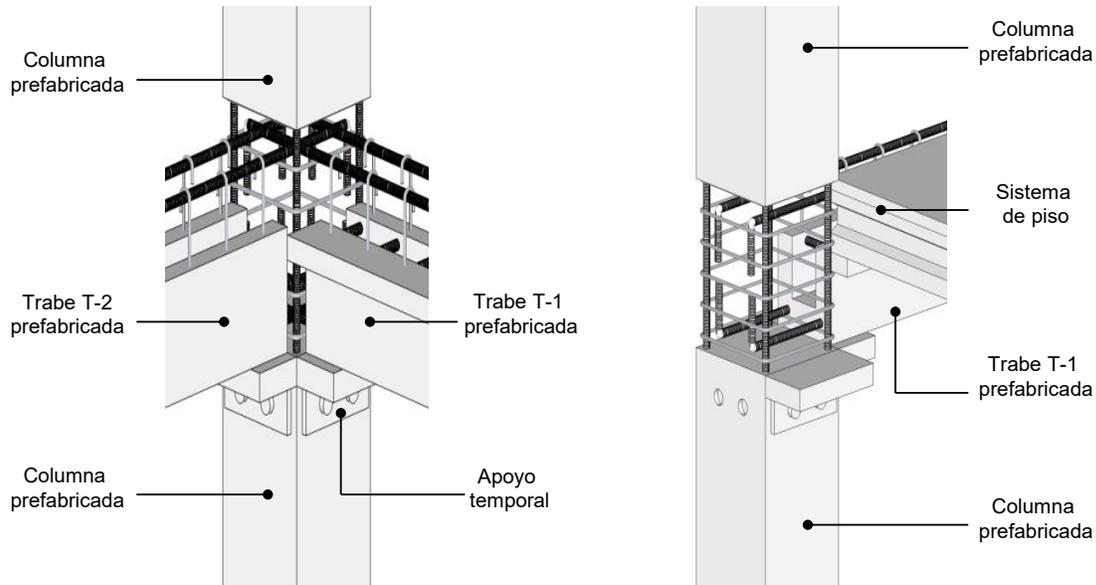
Elemento	Nivel	$f'_c$ promedio		Módulo de elasticidad	
		(MPa)	( $\text{kg/cm}^2$ )	(MPa)	( $\text{kg/cm}^2$ )
Trabe prefabricada	1 a 4	70.12	715	28 318.87	288 772
Columna prefabricada	1 a 4	55.9	570	23 616	240 816
Conexión trabe-columna	1 y 2	55.7	568	24 769.46	252 578
	3 y 4	53.15	542	24 309.14	247 888
Firme	1 y 2	54.13	552	24 487.7	249 705
	3 y 4	46.97	479	23 146.84	236 032

El módulo de elasticidad y el esfuerzo de fluencia del acero se consideraron de  $2.06 \times 10^{11}$  Pa y  $4.5 \times 10^8$  Pa respectivamente.

#### 3.1.2.2. Sistema de prefabricación empleado

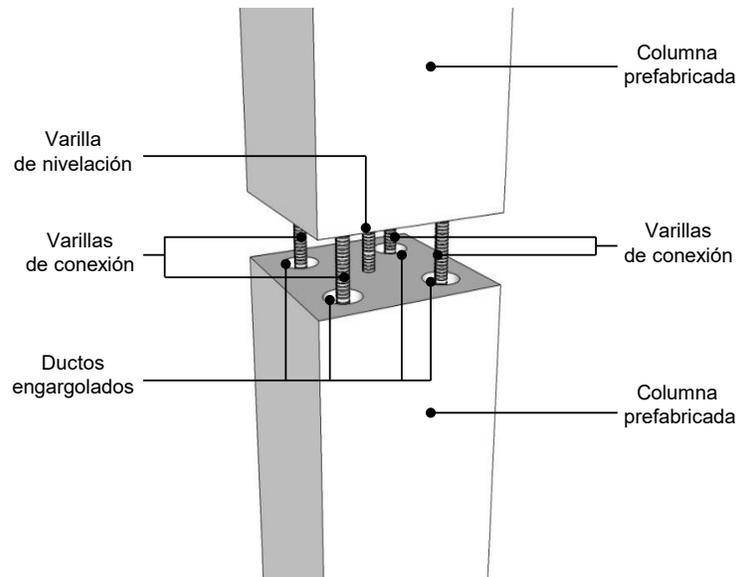
El ensamble de los elementos en el sistema prefabricado utilizado se realizó mediante conexiones viga-columna (Figura 3.9) y uniones columna-columna (Figura 3.10). El enlace de las traveses y las columnas consistió en una conexión húmeda con ventanas en las columnas y uso de colado en sitio. Para realizar esta conexión, se colocaron las traveses en apoyos temporales ubicados en las columnas; mismos que se removieron una vez alcanzada la resistencia de diseño del material dispuesto in situ.

En lo que respecta al sistema de piso, este fue soportado mediante ménsulas ubicadas en la cara lateral de las traveses T-1. Con esto se evitó una reducción de la sección de la trabe por la inclusión del sistema de piso.



**Figura 3.9. Conexión trabe-columna**

La unión columna-columna constó de dos tramos de columna superpuestos, uno superior con varillas de conexión ahogadas que sobresalen del elemento; y uno inferior con ductos metálicos engargolados. Éste primero contó con una varilla de nivelación que ayudó a la correcta colocación de ambas partes. Después de haber introducido las varillas en sus correspondientes ductos y sujetadas las dos piezas que conforman la columna, los huecos se rellenaron con grout de alta resistencia. Una vez lograda la resistencia de diseño del grout, se continuó con la colocación del piso superior.



**Figura 3.10. Conexión columna-columna**

### 3.1.2.3. Ensamble del modelo

El montaje del modelo, mismo que se muestra en la figuras 3.11 y 3.12, consistió del siguiente proceso:

- Colocación de las columnas del primer y segundo nivel.
- Colocación de apoyos temporales de las traves del primer y segundo nivel.
- Colocación de las traves y sistema de piso del primer y segundo nivel.
- Colocación de cimbra y colado en primer y segundo nivel de conexiones viga-columna, firmes y lecho superior de traves.
- Colocación de anclajes y placas de conexión de los CRP del primer y segundo nivel.
- Preparación de la conexión columna-columna entre el segundo y tercer nivel.
- Colocación de las columnas del tercer y cuarto nivel.
- Repetición de los pasos b) a e) para el montaje del tercer y cuarto nivel.
- Colocación de CRP.

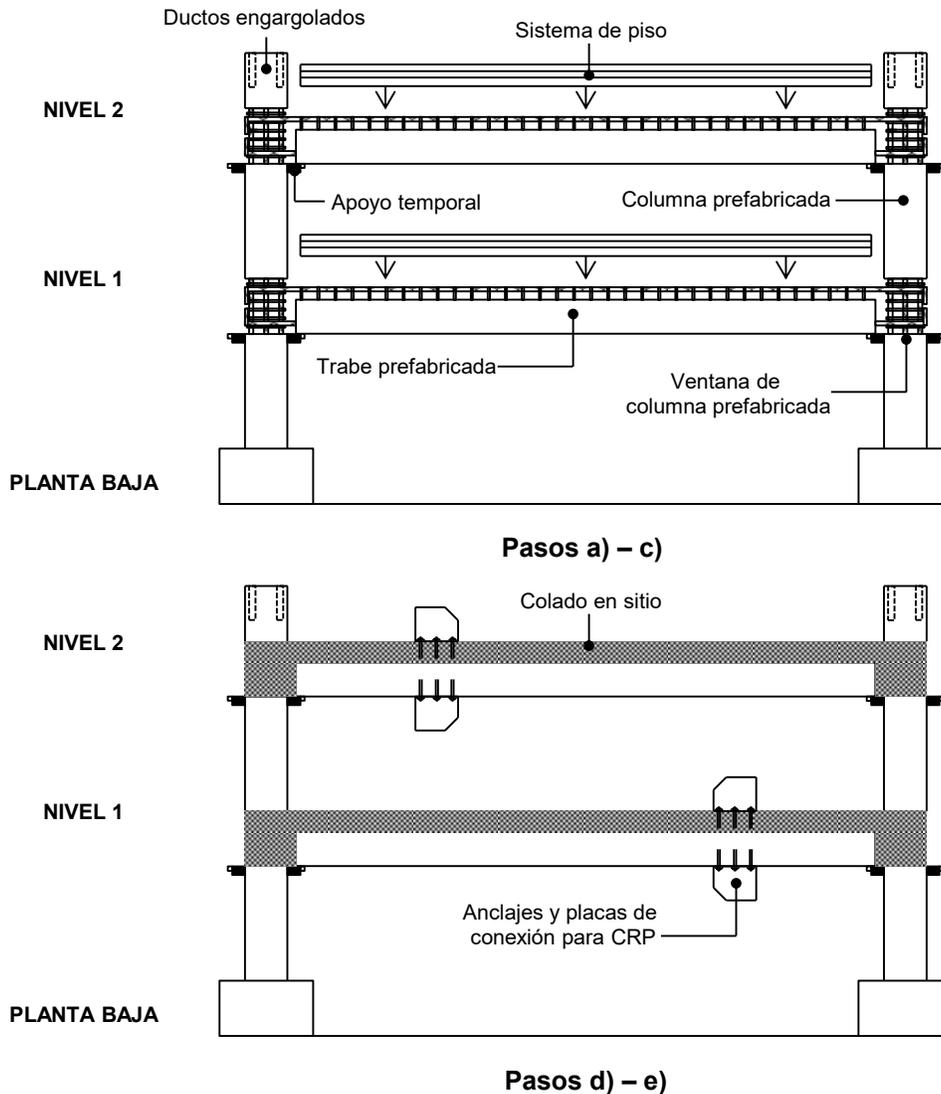


Figura 3.11. Pasos a) – e) del montaje del modelo

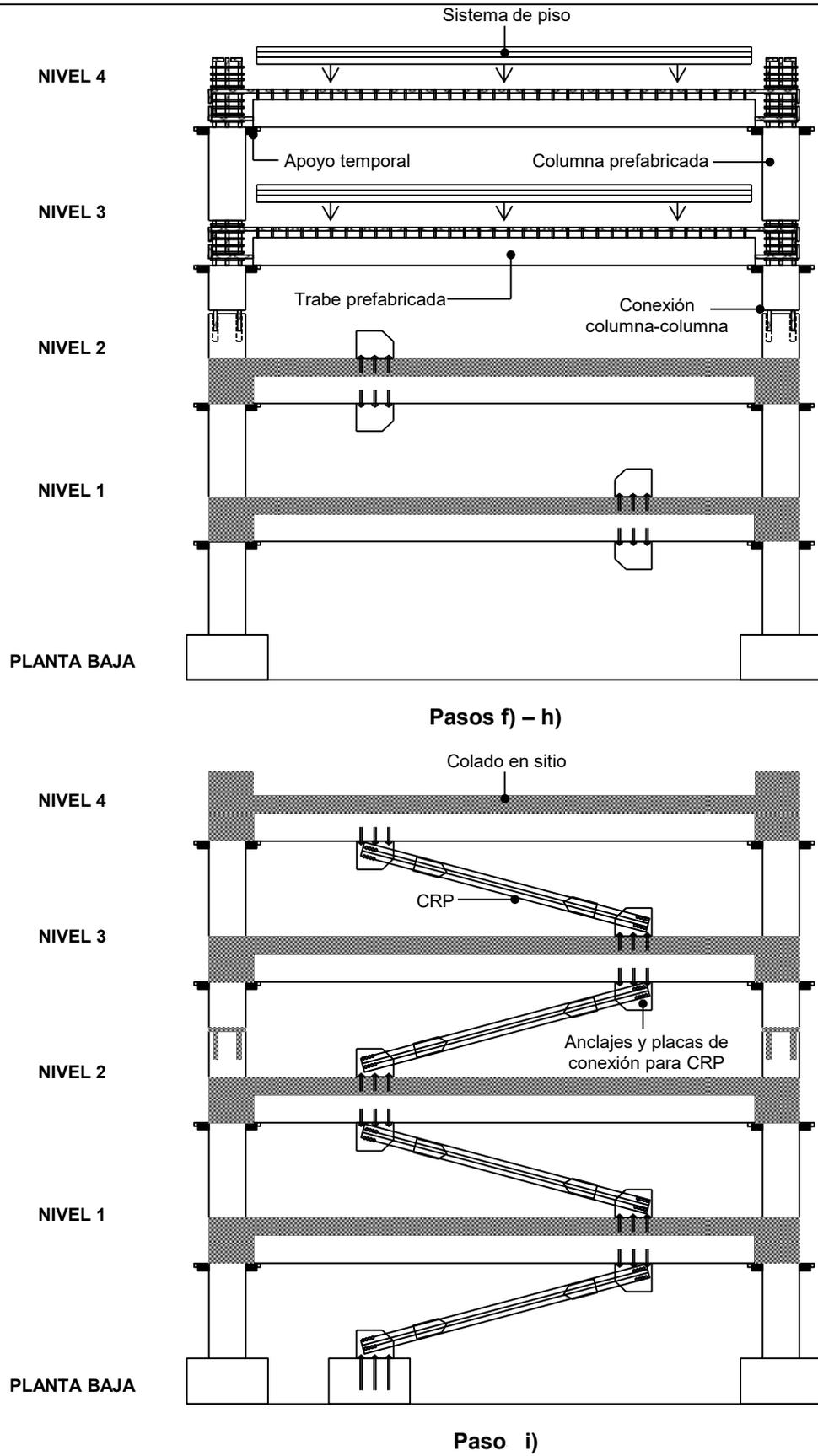


Figura 3.12. Pasos f) – i) del montaje del modelo

### 3.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO ANALÍTICO

#### 3.2.1. Programa CAL – SAP

La elaboración del modelo analítico del edificio se realizó en el programa de cómputo CAL – SAP (CAL – SAP, 2008). Esta herramienta permite elaborar versátilmente modelos de estructuras planas y tridimensionales, conformadas por elementos barra y compuestas por un máximo de mil gdl. Una vez desarrollado el modelo matemático, el CAL-SAP es capaz de efectuar en éste, análisis estructurales estáticos y dinámicos. También es posible manejar operaciones matriciales básicas.

#### 3.2.2. Matriz de masas

Para la construcción de esta matriz, se calcularon las masas de los distintos componentes estructurales del modelo considerando de manera precisa sus volúmenes, así como las densidades típicas de los materiales con los que se elaboraron ( $2\,200\text{ kg/m}^3$ ,  $2\,400\text{ kg/m}^3$  y  $7\,847\text{ kg/m}^3$  para concreto simple, concreto armado y acero respectivamente). En el caso de los CRP, su masa se despreció.

En la tabla 3.2 se muestra la cantidad de masa que aportan los distintos componentes del modelo a cada nivel. La altura considerada para el cálculo del volumen y la correspondiente masa de las columnas en cada piso fue de 181.5 cm, 110 cm, 110 cm y 78.5 cm para las columnas del primero, segundo, tercero y cuarto nivel respectivamente. Por ello, en la tabla 3.2 se observa una variación de la masa en las columnas de cada planta.

**Tabla 3.2. Masas de los elementos estructurales**

Elemento	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4
	m (kg)			
Columnas	581.76	422.4	422.4	301.44
Dados	874.8	NA	NA	NA
Sistema de piso	2 010.262	2 010.262	2 010.262	2 010.262
Trabes	1 189.728	1 189.728	1 189.728	1 189.728
Total	4 656.55	3 622.39	3 622.39	3 501.43

La matriz de masas resultante se presenta en la figura 3.13.

$$M = \begin{bmatrix} 4656.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3622.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3622.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3501.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4656.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3622.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3622.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3501.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8451.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6574.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6574.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6355.1 \end{bmatrix}$$

**Figura 3.13. Matriz de masas del modelo**

Los primeros ocho términos de la diagonal principal corresponden a las masas traslacionales y poseen unidades de [kg], los últimos cuatro se refieren a las masas rotacionales y tienen unidades de [kg\*m<sup>2</sup>]. Éstas representan el momento polar de inercia de la masa con respecto a su centro, que se obtiene multiplicando  $m*l^2/6$ . En la operación anterior,  $m$  representa la masa traslacional del nivel en cuestión y  $l$  la dimensión de la planta.

Es importante mencionar que la matriz de masas permaneció constante durante los análisis realizados en el presente experimento.

### 3.2.3. Matriz de rigideces

La ejecución de la matriz de rigideces constó de la realización de cuatro marcos planos (marco X1, marco X2, marco Y1 y marco Y2), que posteriormente se acoplaron para así conformar el sistema estructural tridimensional. Debido a la simetría de la estructura, el marco X1 es idéntico al X2, y consecuentemente, el Y1 tiene las mismas características que el Y2.

#### 3.2.3.1. Consideraciones generales

Las características esenciales que se deben tener en cuenta para realizar la matriz de rigideces de un sistema estructural son:

- a) Geometría del modelo.
- b) Condiciones de apoyo.
- c) Conectividades entre elementos y correspondientes gdl.
- d) Dimensiones de los miembros estructurales.
- e) Propiedades mecánicas de los materiales que constituyen a la estructura.

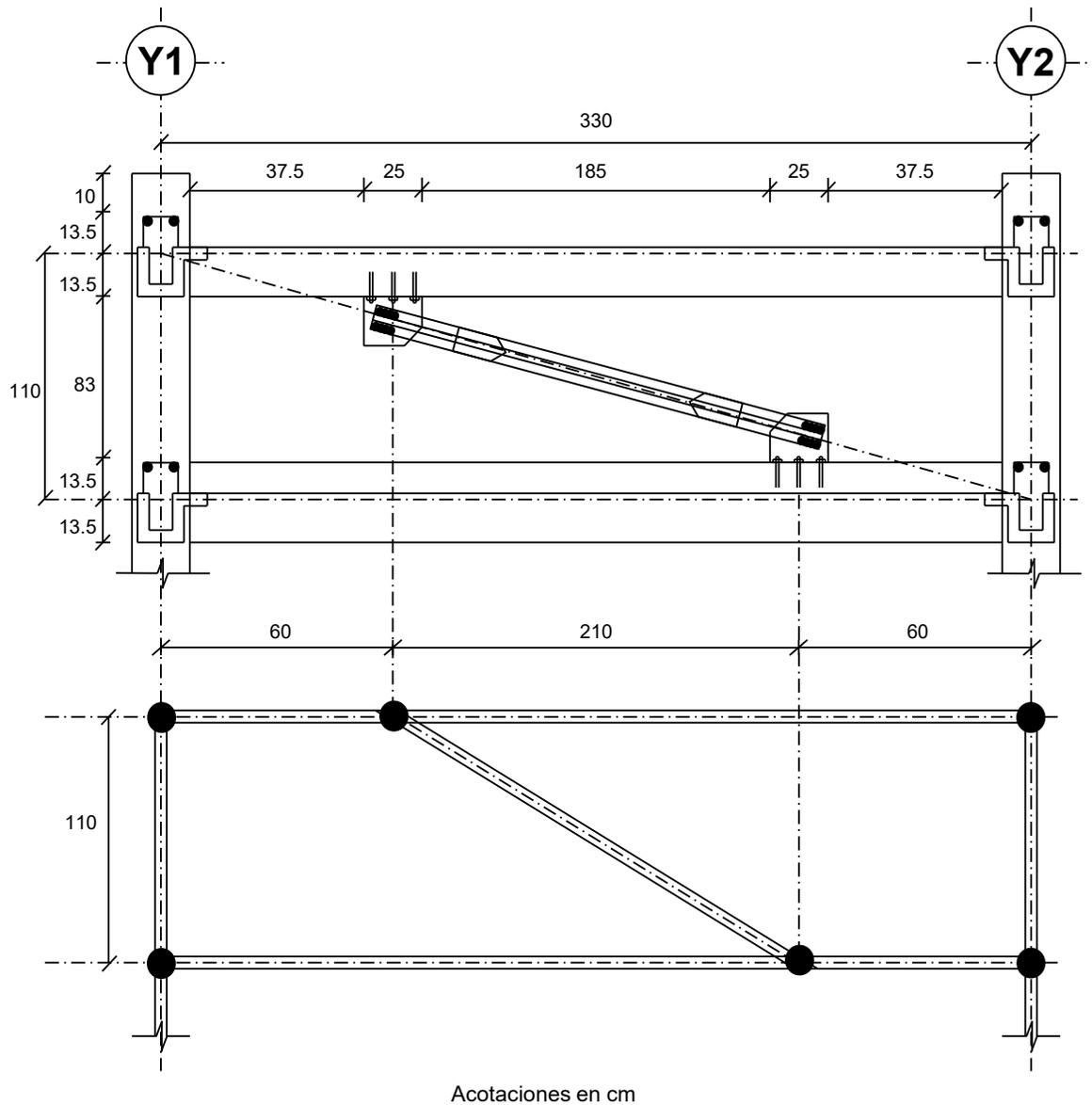
Los aspectos enlistados previamente, correspondientes al modelo analizado en la presente investigación, se describen a continuación.

Las dimensiones longitudinales de las trabes y las columnas en ambos marcos, se consideraron como la distancia libre entre ejes centroidales de los elementos del modelo real. Por esta razón, la altura total de la estructura del modelo matemático es menor que la de su contraparte real; ya que en la columna del último nivel, se despreció el tramo medido entre el eje centroidal de la trabe de este piso y el paño superior de la columna.

El largo de los CRP fue el correspondiente a la medida entre el cruce del eje centroidal de las trabes, con la mitad del ancho de las placas de conexión de los CRP. Cabe mencionar que el CRP del primer nivel, inicia a partir del paño superior del dado al que se encuentra anclado.

Las ideas expresadas en los dos párrafos anteriores, se ejemplifican en la figura 3.14. En esta imagen, las líneas punteadas representan, tanto en el modelo real como en el de elementos finitos, los ejes centroidales de los miembros estructurales.

La parte superior de la figura corresponde a la estructura prefabricada, mientras que la inferior al modelo analítico.



**Figura 3.14. Consideraciones en la asignación de las dimensiones longitudinales en los miembros del modelo de elementos finitos**

Los módulos de elasticidad asignados a las columnas y las traveses de los marcos modelados corresponden a los valores mostrados en la sección 3.1.2.1. Es importante señalar que no se consideró la variación de esta propiedad en las uniones trabe-columna. En el caso de los CRP, el módulo de elasticidad establecido para a este tipo de elementos fue de  $2 \times 10^{11}$  Pa. Esta propiedad mecánica fue obtenida de la respuesta histerética registrada durante el ensaye de uno de ellos.

En la figura 3.15 se presentan gráficamente los gdl considerados en los nodos de los distintos marcos. Cada flecha representa un gdl. En esta imagen se ilustra que la conectividad entre traveses y columnas constó de tres gdl, mientras que la unión entre traveses y contraventeos presentó hasta cinco gdl.

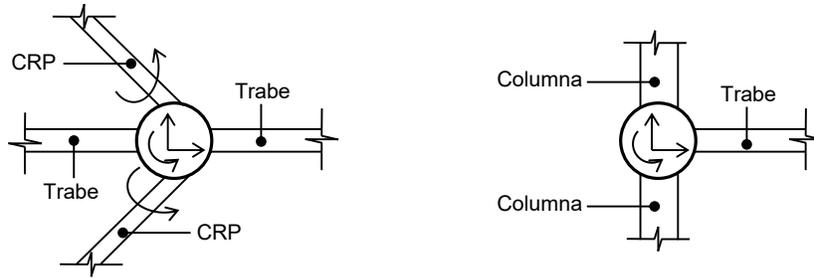
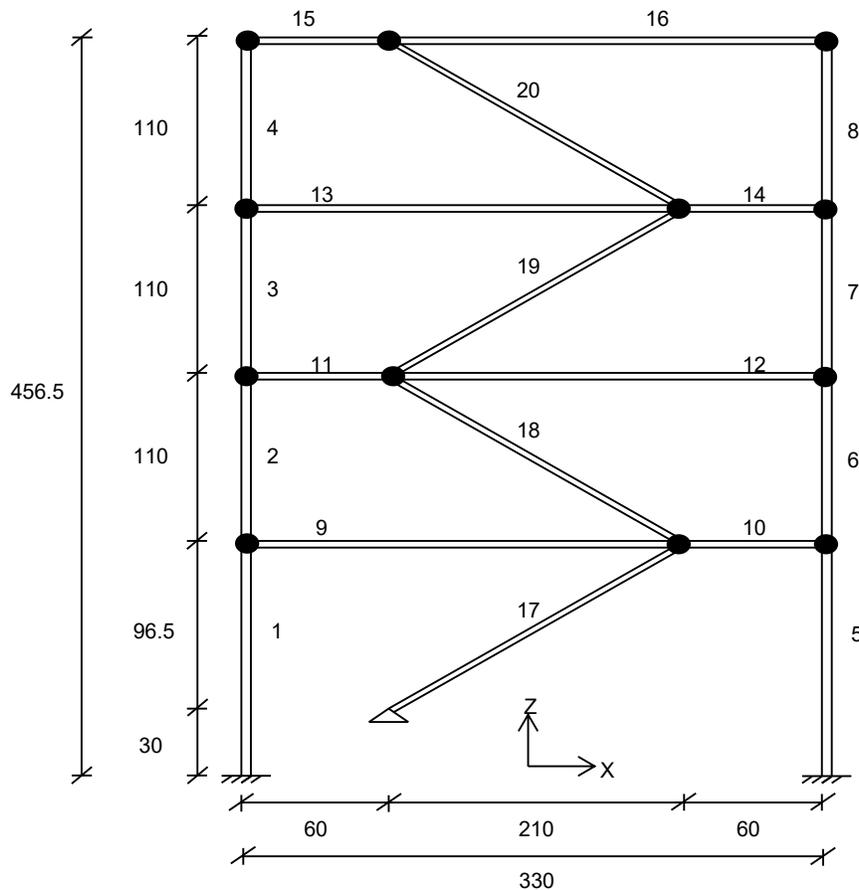


Figura 3.15. Gdl correspondientes a los nodos de los marcos del modelo

**3.2.3.2. Marcos constitutivos de la estructura**

Tomando en cuenta las consideraciones estipuladas en la sección 3.2.3.1, se modelaron los marcos del edificio estudiado. La descripción de estos se muestra a continuación.

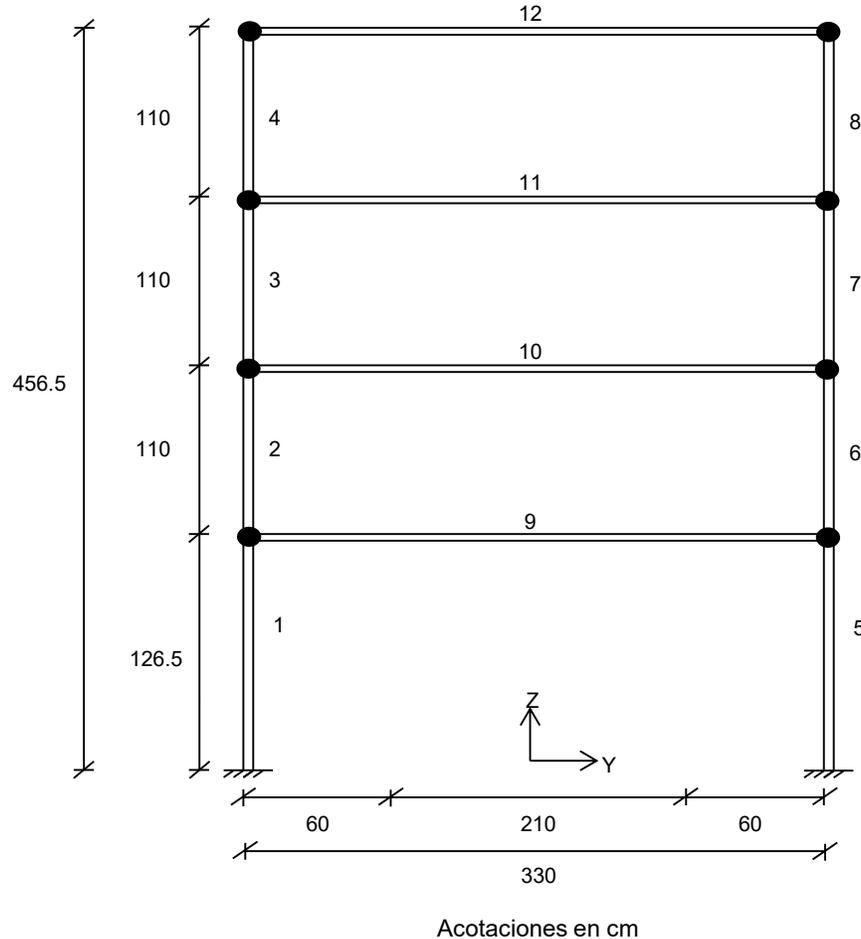
Los marcos de la dirección  $x$  (Figura 3.16) poseen 20 elementos barra, doce nodos y 44 gdl. Las columnas del primer nivel están empotradas y los miembros diagonales se hallan articulados en sus extremos. Las traveses están constituidas por dos tramos, de este modo, es posible añadir un nodo en el que se considere la conectividad existente entre las vigas y los CRP.



Acotaciones en cm

Figura 3.16. Modelo de elementos finitos de los marcos X1 y X2

Los marcos de la dirección y (Figura 3.17) cuentan con doce elementos barra, ocho nodos y 24 gdl. Análogo al caso de los marcos X1 y X2, las columnas presentan empotramiento en la base. A diferencia de los marcos en la dirección longitudinal, las traveses se hayan modeladas como un solo elemento.



**Figura 3.17. Modelo de elementos finitos de los marcos Y1 y Y2**

En las figuras 3.16 y 3.17 se muestran acotadas las medidas contempladas en la formulación del modelo analítico. También se indica la numeración asignada a cada miembro estructural, misma que se expresa con una cifra colocada a un costado de cada componente.

### 3.2.3.3. Formulación de la matriz de rigideces

Una vez modelados los cuatro marcos con sus respectivas consideraciones, se aplicó la condensación estática reduciendo la cantidad de gdl a un desplazamiento lateral por nivel en cada marco. Subsiguientemente, haciendo uso de la hipótesis de marcos planos acoplados, se obtuvo un sistema de doce gdl. Esto es, tres gdl por nivel (dos traslacionales ortogonales entre sí y un giro alrededor del eje vertical).

## CAPÍTULO 4

### DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

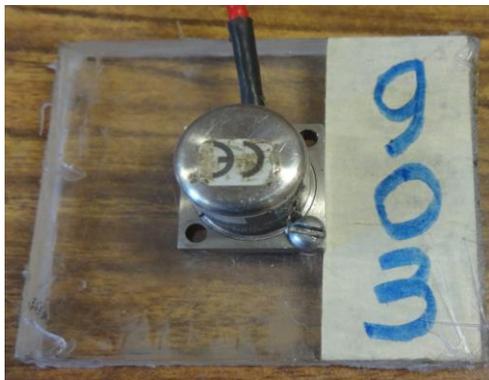
#### 4.1. PRUEBAS DE VIBRACIÓN

Las pruebas de vibración se realizaron en el laboratorio de la mesa vibradora del Instituto de Ingeniería de la UNAM. Una descripción general del complejo se puede hallar en Fuentes (2014).

En las siguientes secciones se describe la instrumentación implementada en el modelo y el programa de pruebas ejecutado.

##### 4.1.1. Instrumentación

El modelo se instrumentó con acelerómetros, deformímetros, transductores de desplazamiento y transductores de hilo. En la figura 4.1 se exhiben los instrumentos empleados en el experimento.



**Acelerómetro**



**Transductor  
de hilo**



**Deformímetro**



**Transductor de  
desplazamiento**

**Figura 4.1. Instrumentos empleados en el modelo**

En las tablas 4.1 a 4.4, se muestran el nivel de la estructura en el que se colocaron los instrumentos, su dirección de registro y el canal al que fueron conectados. Así mismo, en la figura 4.2 se presenta una descripción gráfica de su montaje.

**4.1.1.1. Acelerómetro**

Se colocaron un total de 21 acelerómetros. Uno en la base en dirección  $x$ ; cuatro en los niveles uno a tres, tres en dirección  $x$  y uno en la dirección ortogonal; y ocho en la última planta, siete en dirección  $x$  y uno en dirección  $y$ .

**Tabla 4.1. Nivel de posicionamiento, dirección de registro y canal de conexión de los acelerómetros**

Nivel	PB	1				2				3				4							
Canal	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	19	20	21	22	23	24
Dirección de registro	$x$	$x$	$x$	$y$	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$												

La razón de ubicar en los niveles uno a tres, dos acelerómetros alejados del centro de gravedad de la planta, fue para evaluar posibles giros alrededor del eje vertical del mismo centro.

**4.1.1.2. Transductores de desplazamiento**

Con la finalidad de registrar desplazamientos relativos se montaron 16 transductores de desplazamiento. Uno en cada nivel de los marcos X1 y X2 y los restantes sobre los CRP.

**Tabla 4.2. Nivel de posicionamiento, dirección de registro y canal de conexión de los transductores de desplazamiento**

Nivel	1				2				3				4			
Canal	28	31	35	36	30	32	37	38	27	29	33	39	25	26	34	40
Dirección de medición	$x$															

**4.1.1.3. Transductores de hilo**

Se fijaron cinco transductores de hilo en el marco de referencia de la mesa vibradora para medir desplazamientos absolutos. Su funcionamiento resultó inadecuado debido a la falta de tensión propicia de los hilos que poseen los transductores durante las pruebas.

**Tabla 4.3. Nivel de posicionamiento, dirección de registro y canal de conexión de los transductores de hilo**

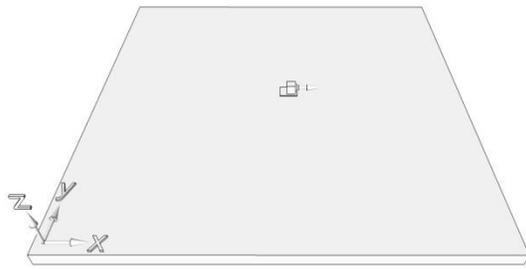
Nivel	PB	1	2	3	4
Canal	41	42	43	44	45
Dirección de registro	$x$	$x$	$x$	$x$	$x$

**4.1.1.4. Deformímetros**

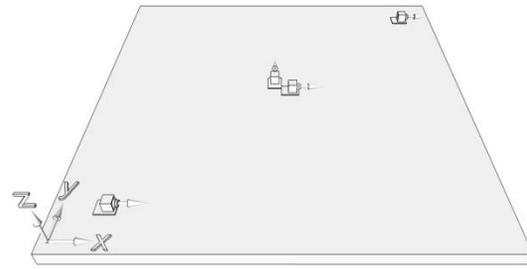
Para evaluar las deformaciones unitarias de los CRP ubicados en los tres primeros niveles del marco X2, se adhirieron dos deformímetros en el núcleo de cada uno de ellos.

**Tabla 4.4. Nivel de posicionamiento, dirección y canal de conexión de los deformímetros**

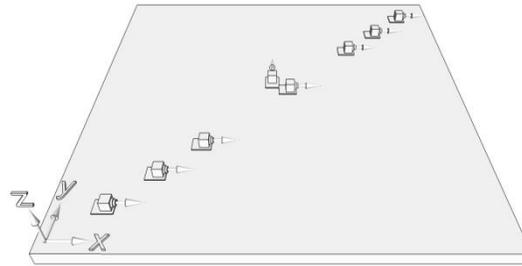
Nivel	2	2	3	3	1	1
Canal	48	49	50	51	52	53



**Posicionamiento de acelerómetros  
en planta baja**



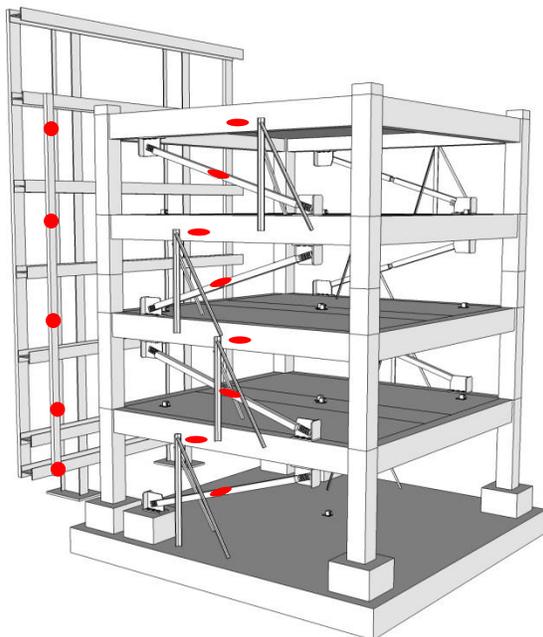
**Posicionamiento de acelerómetros  
en niveles 1, 2 y 3**



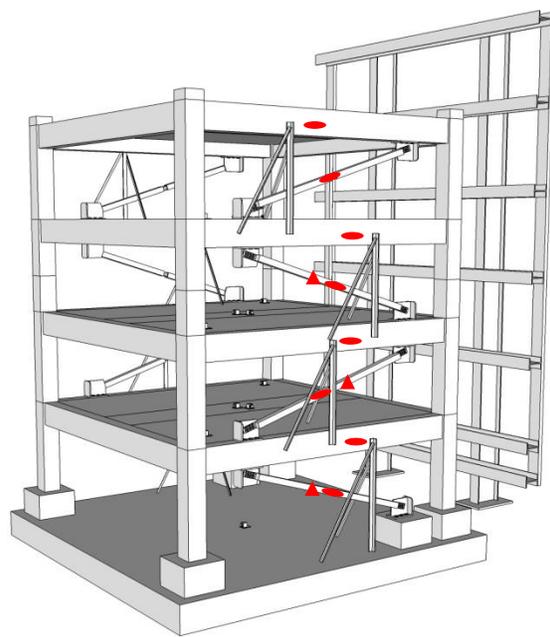
**Posicionamiento de acelerómetros  
en nivel 4**

#### Nomenclatura

- Transductor de desplazamiento
- Transductor de hilo
- ▲ Deformímetro



**Vista frontal del modelo**



**Vista trasera del modelo**

**Figura 4.2. Montaje y ubicación de instrumentos en el modelo**

### 4.1.2 Ejecución de pruebas

Se realizaron nueve ensayos que consistieron en la aplicación de ruido blanco de baja intensidad. Durante las pruebas se incluyeron sistemáticamente los CRP, generando un total de nueve configuraciones contraventeadas en el modelo. Ocho de éstas fungieron como estados dañados de la estructura; mientras que la correspondiente al edificio con todos los CRP montados, sirvió como el estado sin daño. En la figura 4.3 se muestran las configuraciones analizadas.

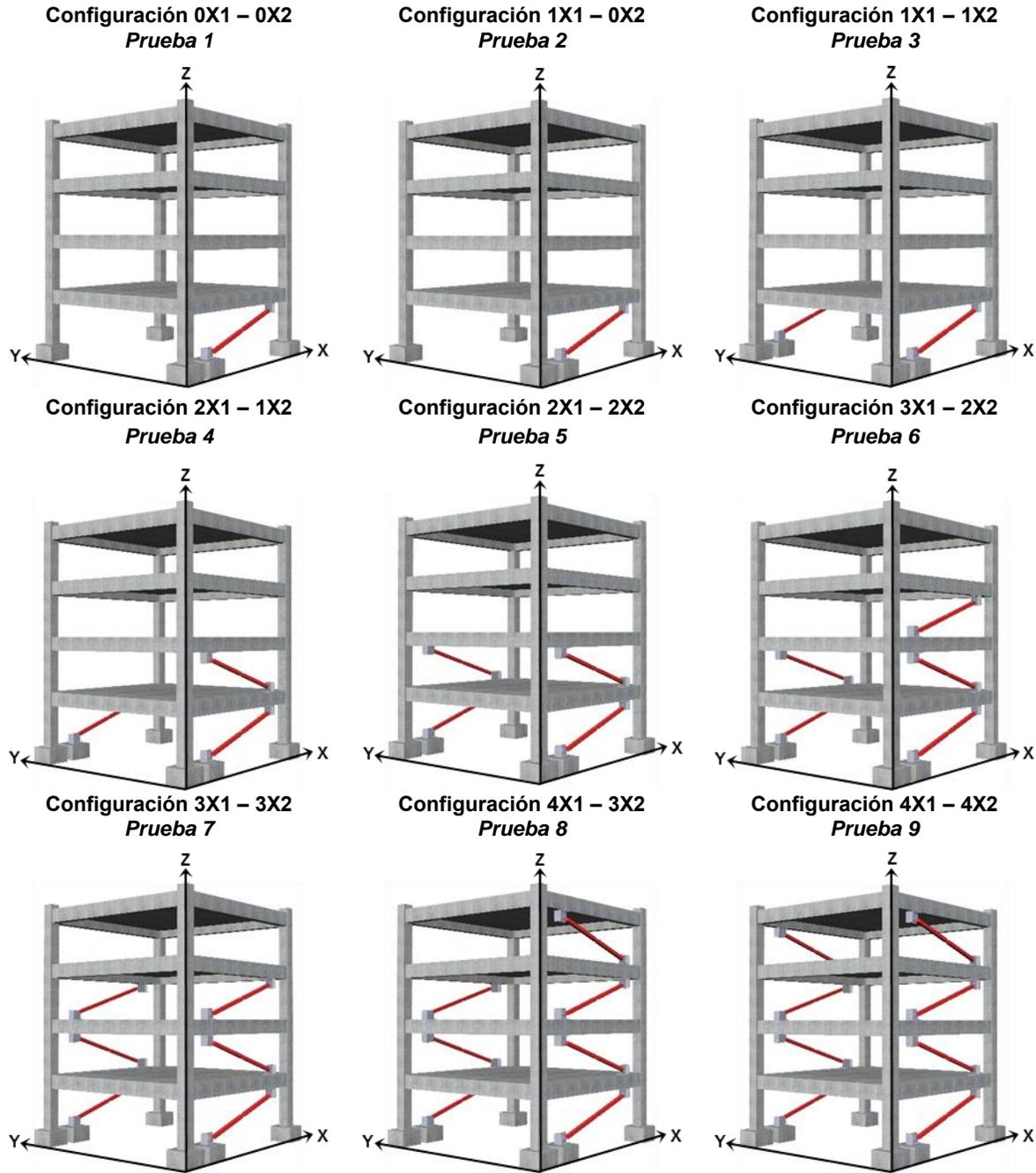


Figura 4.3. Configuraciones analizadas

## 4.2. CÁLCULO DE PROPIEDADES DINÁMICAS ANALÍTICAS

La estimación de las propiedades dinámicas analíticas, se realizó para todas las configuraciones a partir de su modelo de elementos finitos correspondiente. Cada modelo se desarrolló conforme a las consideraciones estipuladas en la sección 3.2.3., realizando los cambios pertinentes en los marcos X1 y X2. Estas modificaciones consistieron en remover los CRP para lograr el arreglo referente a la contraparte real del modelo analítico.

El cálculo de las frecuencias y modos de vibrar analíticos se efectuó en el programa CAL – SAP. Estas se determinaron resolviendo el problema de los valores y vectores característicos. Para cada configuración se obtuvo la matriz de frecuencias modales y de modos de vibrar. Ambas de orden 12x12.

## 4.3. CÁLCULO DE PROPIEDADES DINÁMICAS EXPERIMENTALES

Previo a la descripción de la identificación de los parámetros modales experimentales, es necesario tener presente los siguientes aspectos:

- a) La primera forma modal y su respectiva frecuencia en cada configuración, corresponden a un modo de traslación en la dirección  $y$ .
- b) La segunda forma modal y su respectiva frecuencia en cada configuración, corresponden a un modo de traslación en la dirección  $x$ .
- c) La tercera forma modal y su respectiva frecuencia en cada configuración, corresponden a un modo de torsión.
- d) Los modos de vibrar constan de doce coordenadas modales. En cada modo, las coordenadas uno a cuatro representan traslaciones en la dirección  $x$ ; las coordenadas cinco a ocho corresponden a traslaciones en la dirección  $y$ ; y las coordenadas nueve a doce se refieren a giros alrededor del eje vertical.

Para un mejor entendimiento del inciso d), se muestra de manera simbólica un modo de vibrar en la figura 4.4. En esta imagen, los subíndices  $x$ ,  $y$  y  $r$ , representan las coordenadas modales traslacionales en dirección longitudinal, las coordenadas modales traslacionales en dirección transversal y las coordenadas modales rotacionales respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \phi_{1x} \\ \phi_{2x} \\ \phi_{3x} \\ \phi_{4x} \\ \phi_{1y} \\ \phi_{2y} \\ \phi_{3y} \\ \phi_{4y} \\ \phi_{1r} \\ \phi_{2r} \\ \phi_{3r} \\ \phi_{4r} \end{bmatrix}$$

**Figura 4.4. Modo de vibrar expresado simbólicamente**

### 4.3.1 Cálculo de modos de vibrar

En las pruebas uno y nueve, se identificó el segundo modo de vibrar experimentalmente. Para determinar dicho modo en las demás configuraciones, se aplicó la ecuación (4.1).

$$\phi_{e_{ix,2} c-n} = \frac{\phi_{a_{ix,2} c-n}}{\phi_{a_{ix,2} c-4X1-4X2}} * \phi_{e_{ix,2} c-4X1-4X2} \quad (4.1)$$

donde:

- $\phi_{e_{ix,2} c-n}$  =  $i$ -ésima coordenada modal en dirección  $x$  del segundo modo de vibrar experimental perteneciente a la configuración  $n$
- $\phi_{a_{ix,2} c-n}$  =  $i$ -ésima coordenada modal en dirección  $x$  del segundo modo de vibrar analítico perteneciente a la configuración  $n$
- $\phi_{a_{ix,2} c-4X1-4X2}$  =  $i$ -ésima coordenada modal en dirección  $x$  del segundo modo de vibrar analítico perteneciente a la configuración  $4X1-4X2$
- $\phi_{e_{ix,2} c-4X1-4X2}$  =  $i$ -ésima coordenada modal en dirección  $x$  del segundo modo de vibrar experimental perteneciente a la configuración  $4X1-4X2$

El primer modo de vibrar experimental se consideró en todas las configuraciones, como el correspondiente al modo de traslación en dirección  $x$  y identificado en la prueba uno. Esto debido a la simetría de la estructura.

El tercer modo de vibrar experimental de cada configuración, se estimó con la relación existente entre las coordenadas modales traslacionales en dirección  $x$  del segundo modo, y las rotacionales del tercero (ecuación (4.2)).

$$\phi_{e_{ir,3} c-n} = \frac{\phi_{a_{ir,3} c-n}}{\phi_{a_{ix,2} c-n}} * \phi_{e_{ix,2} c-n} \quad (4.2)$$

donde:

- $\phi_{e_{ir,3} c-n}$  =  $i$ -ésima coordenada modal rotacional del tercer modo de vibrar experimental perteneciente a la configuración  $n$
- $\phi_{a_{ir,3} c-n}$  =  $i$ -ésima coordenada modal rotacional del tercer modo de vibrar analítico perteneciente a la configuración  $n$
- $\phi_{a_{ix,2} c-n}$  =  $i$ -ésima coordenada modal traslacional en dirección  $x$  del segundo modo de vibrar analítico perteneciente a la configuración  $n$
- $\phi_{e_{ix,2} c-n}$  =  $i$ -ésima coordenada modal traslacional en dirección  $x$  del segundo modo de vibrar experimental perteneciente a la configuración  $n$

### 4.3.2 Cálculo de frecuencias

En las pruebas uno y nueve, se determinó la frecuencia asociada al segundo modo de vibrar empleando análisis espectral convencional. La frecuencia correspondiente al primer modo en todas las configuraciones, se consideró como la identificada para el segundo modo en la prueba uno.

Para obtener la frecuencia relacionada con el segundo modo en las pruebas dos a ocho, se aplicó el siguiente proceso:

1. Cálculo del parámetro  $\Delta_\alpha$  con la ecuación (4.3).
2. Cálculo del parámetro  $\alpha$  de la  $n$ -ésima prueba con la ecuación (4.4).
3. Cálculo de la frecuencia experimental de la  $n$ -ésima prueba con la ecuación (4.5).
4. Repetición de los pasos dos y tres hasta la obtención de la frecuencia experimental de la prueba dos.

Es sumamente relevante resaltar, que la primera frecuencia a calcular fue la referente a la prueba ocho. Por lo que el primer parámetro  $\alpha$  que se obtuvo fue el de la prueba nueve. Así mismo, el cómputo de las frecuencias y valores de  $\alpha$  restantes, se efectuó secuencialmente de manera regresiva, es decir, comenzando por la prueba ocho y finalizando con la dos.

$$\Delta_\alpha = \frac{\frac{f_{a_2 p-1}}{f_{e_2 p-1}} - \frac{f_{a_2 p-9}}{f_{e_2 p-9}}}{8} \quad (4.3)$$

donde:

- $\Delta_\alpha$  = Parámetro  $\Delta_\alpha$  adimensional
- $f_{a_2 p-1}$  = Frecuencia analítica correspondiente al segundo modo de vibrar de la prueba uno
- $f_{e_2 p-1}$  = Frecuencia experimental correspondiente al segundo modo de vibrar de la prueba uno
- $f_{a_2 p-9}$  = Frecuencia analítica correspondiente al segundo modo de vibrar de la prueba nueve
- $f_{e_2 p-9}$  = Frecuencia analítica correspondiente al segundo modo de vibrar de la prueba nueve

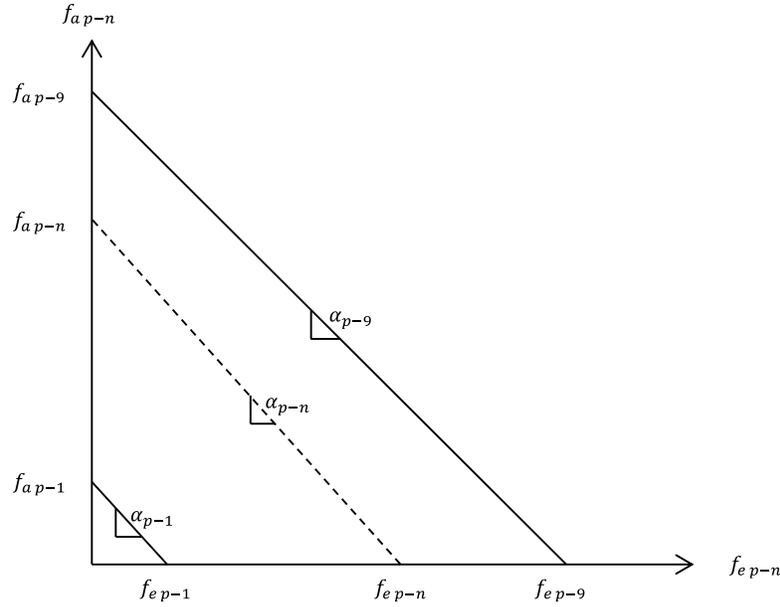
$$\alpha_{p-n} = \frac{f_{a_2 p-n}}{f_{e_2 p-n}} \quad (4.4)$$

donde:

- $\alpha_{p-n}$  = Parámetro  $\alpha$  adimensional de la  $n$ -ésima prueba
- $f_{a_2 p-1}$  = Frecuencia analítica correspondiente al segundo modo de vibrar de la  $n$ -ésima prueba
- $f_{e_2 p-1}$  = Frecuencia experimental correspondiente al segundo modo de vibrar de la  $n$ -ésima prueba

$$f_{e_2 p-n} = \frac{f_{a_2 p-n}}{\alpha_{p-n+1} + \Delta_\alpha} \quad (4.5)$$

Las ecuaciones (4.3) a (4.5) se basan en relaciones trigonométricas, mismas que se ejemplifican en la figura 4.5.



**Figura 4.5. Representación gráfica de las ecuaciones (4.3) a (4.5)**

El parámetro  $\alpha$  representa la pendiente de la línea trazada entre el valor de la frecuencia experimental de la  $n$ -ésima prueba y su contraparte analítica. La cantidad  $\Delta_\alpha$  se estima con la finalidad de asignar un incremento idéntico al valor de  $\alpha$  a medida que se calculan las frecuencias experimentales de las pruebas ocho a dos. De este modo, se logra un aumento paulatino en el valor de las pendientes y así, una relación con variación proporcional entre los pares de frecuencias analíticas y experimentales. Lo anterior implica que el valor de  $\alpha$  crece linealmente desde el noveno par de frecuencias hasta el primero.

Finalmente, para el cálculo de la tercera frecuencia experimental en todas las configuraciones, se aplicó la ecuación (4.6).

$$f_{e_3 p-n} = \frac{f_{a_3 p-n}}{f_{a_2 p-n}} \times f_{e_2 p-n} \quad (4.6)$$

Es importante señalar que las ecuaciones (4.2) y (4.6) son análogas al planteamiento establecido por Ángeles (2012).

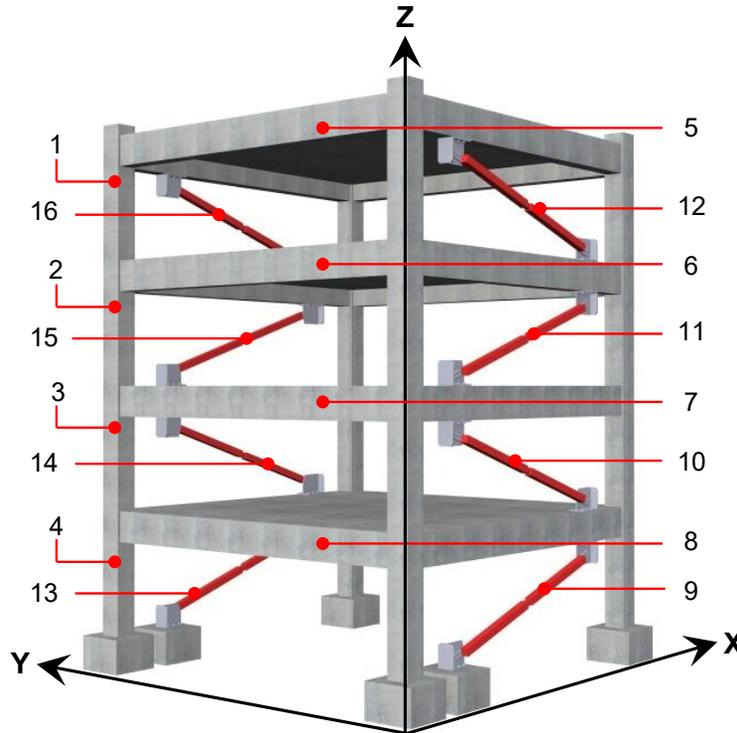
#### 4.4. DETECCIÓN DE DAÑO

Antes de llevar a cabo el proceso de detección de daño, se reconstruyeron las matrices de rigidez lateral de los estados deteriorados de la estructura empleando el algoritmo de Yang y Chen, mismo que se describió en la sección 2.1.2.1. Para la reconstrucción de dichas matrices, se emplearon las propiedades dinámicas analíticas calculadas y experimentales identificadas, conforme a lo estipulado en las secciones 4.2 y 4.3 respectivamente.

Partiendo del estado inicial del modelo (configuración 4X1 – 4X2), se ejecutó el MMT en su modalidad para estructuras tridimensionales para así, identificar, localizar y cuantificar daño en las

ocho configuraciones con daño simulado. En la aplicación del método se realizaron las siguientes consideraciones:

- Elección de 16 elementos independientes (Figura 4.6); esto fue, cuatro columnas, cuatro traveses y los ocho CRP.
- Intervalo de valores asignado al parámetro  $x$ , en traveses y columnas de  $[0,4]$ .
- Intervalo de valores asignado al parámetro  $x$ , en CRP de  $[0,1]$ .
- Valor asignado a  $\beta$  de 0.5.



**Figura 4.6. Elementos independientes utilizados en la ejecución del MMT**

El hecho de que todas las columnas y las traveses tuviesen la misma sección transversal con sus respectivas dimensiones y formas, y la estructura contase con planta cuadrada constante en todos sus niveles, permitió reducir el número de elementos independientes a 16. Ésta cantidad pudo haberse disminuido a doce si se hubiese tomado un CRP por piso. Sin embargo, en el análisis se buscó localizar puntualmente a los CRP dañados. Por tal motivo, se optó por incluir como elementos independientes a los ocho CRP.

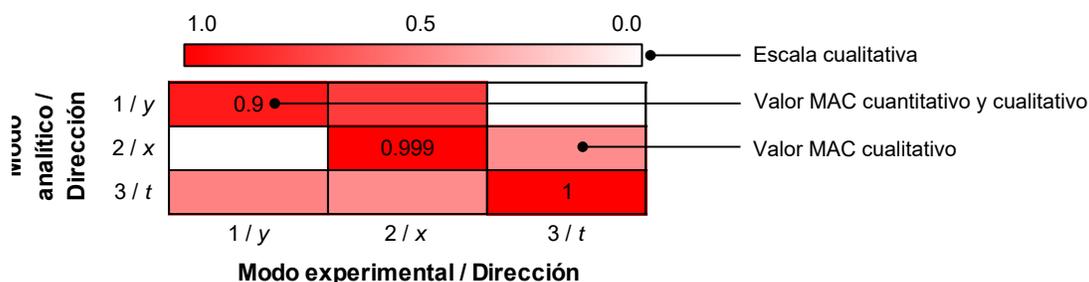
## CAPÍTULO 5

### RESULTADOS

En este capítulo se exhiben los resultados obtenidos en la presente investigación. Estos se muestran ordenados de la siguiente manera:

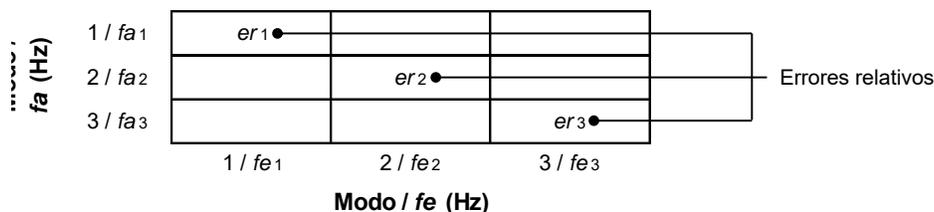
- Matriz de modos de vibrar analítica completa.
- Matriz de modos de vibrar experimental incompleta.
- Matriz MAC para los primeros tres modos de vibrar.
- Matriz comparativa entre las primeras tres frecuencias analíticas y sus contrapartes experimentales.
- Matriz de rigideces analítica.
- Matriz de rigideces experimental reconstruida.
- Matriz de porcentaje de error relativo entre los elementos de la matriz de rigideces analítica y su contraparte experimental.

En la matriz MAC (Figura 5.1) se muestra cuantitativa y cualitativamente, el nivel de correspondencia existente entre los modos de vibrar analíticos y experimentales. Para las casillas en las que el MAC se expone únicamente de manera cualitativa, el valor analítico puede ser estimado con ayuda de la escala ubicada en la parte superior de la misma matriz.



**Figura 5.1. Matriz MAC tipo, para los primeros tres modos de vibrar**

En lo que concierne a la matriz comparativa de frecuencias experimentales y analíticas (Figura 5.2), se presentan los valores de éstas asociadas a su correspondiente modo de vibrar, así como el error relativo existente entre ellas, expresado en porcentaje.



**Figura 5.2. Matriz tipo comparativa de frecuencias experimentales y analíticas**

Una vez expuesta la información anterior para cada configuración, se comentan los resultados y finalmente, se reportan los valores generados al aplicar el MMT en los diversos estados dañados.

5.1. CONFIGURACIÓN 4X1 – 4X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.30 & 0.00 & 0.00 & 8.95 & 0.00 & 0.00 & 9.52 & 0.00 & 5.75 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.74 & 0.00 & 0.00 & 9.28 & 0.00 & 0.00 & -4.27 & 0.00 & -11.24 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.61 & 0.00 & 0.00 & 0.35 & 0.00 & 0.00 & -9.50 & 0.00 & 9.66 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.34 & 0.00 & 0.00 & -9.48 & 0.00 & 0.00 & 7.27 & 0.00 & -3.79 & 0.00 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.46 & 0.00 & 0.00 & 6.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 7.11 & 4.22 \\ 0.00 & 0.00 & 5.04 & 0.00 & 0.00 & 6.88 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.21 & -8.31 \\ 0.00 & 0.00 & 7.14 & 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -6.99 & 7.23 \\ 0.00 & 0.00 & 8.39 & 0.00 & 0.00 & -7.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.38 & -2.84 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.55 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.84 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.70 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.11 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

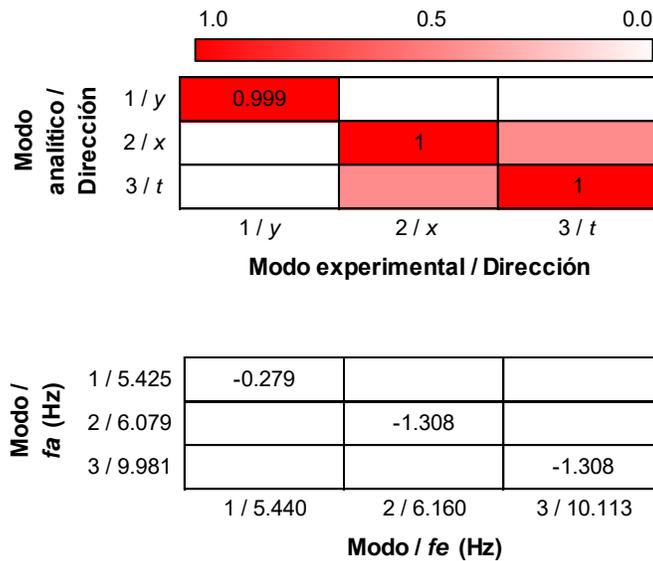


Figura 5.3. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 4X1 – 4X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 163.0 & -101.9 & 20.0 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -101.9 & 166.3 & -98.2 & 17.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.0 & -98.2 & 153.7 & -73.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9 & 17.3 & -73.4 & 57.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.8 & -537.4 & 112.0 & -10.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.4 & 873.7 & -526.9 & 96.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.0 & -526.9 & 814.2 & -387.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.8 & 96.2 & -387.0 & 299.7 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 163.0 & -101.9 & 20.0 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -101.9 & 166.3 & -98.1 & 17.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.0 & -98.1 & 153.8 & -73.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9 & 17.3 & -73.3 & 57.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.9 & -537.3 & 112.1 & -10.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.3 & 873.8 & -526.7 & 96.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.1 & -526.7 & 814.4 & -386.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.7 & 96.4 & -386.7 & 300.0 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.02 & -0.12 & 1.29 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.02 & -0.03 & 0.03 & -0.25 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.12 & 0.03 & -0.04 & 0.08 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1.29 & -0.25 & 0.08 & -0.10 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.03 & 0.00 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.00 & -0.01 & 0.00 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0.00 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & -0.01 & 0.02 & -0.12 & 1.12 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.02 & -0.01 & 0.04 & -0.20 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & -0.12 & 0.04 & -0.03 & 0.08 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 1.12 & -0.20 & 0.08 & -0.09 \end{bmatrix} [%]$$

**Figura 5.4. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 4X1 – 4X2**

5.2. CONFIGURACIÓN 4X1-3X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.28 & -0.06 & 0.00 & -8.83 & -1.44 & 0.00 & -9.49 & 0.00 & 5.82 & -0.06 & 0.00 \\ 0.00 & 6.69 & -0.10 & 0.00 & -9.33 & 0.35 & 0.00 & 3.99 & 0.00 & -11.32 & 0.15 & 0.00 \\ 0.00 & 9.58 & -0.08 & 0.00 & -0.60 & 1.45 & 0.00 & 9.51 & 0.00 & 9.55 & -0.31 & -0.05 \\ 0.00 & 11.40 & 0.04 & 0.00 & 9.56 & -0.87 & 0.00 & -7.07 & 0.00 & -3.66 & 0.22 & 0.05 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.45 & 0.00 & -0.09 & 6.50 & 0.00 & -0.99 & 0.00 & -0.19 & -7.14 & 4.25 \\ 0.00 & 0.01 & 5.02 & 0.00 & -0.14 & 6.83 & 0.00 & -0.95 & 0.00 & -0.01 & 3.11 & -8.35 \\ 0.00 & 0.02 & 7.13 & 0.00 & -0.11 & 0.35 & 0.00 & 0.07 & 0.00 & 0.17 & 7.03 & 7.19 \\ 0.00 & 0.06 & 8.41 & 0.00 & 0.08 & -7.04 & 0.00 & 0.96 & 0.00 & -0.06 & -5.33 & -2.79 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.53 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.79 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.67 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.63 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.10 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.19 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.23 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

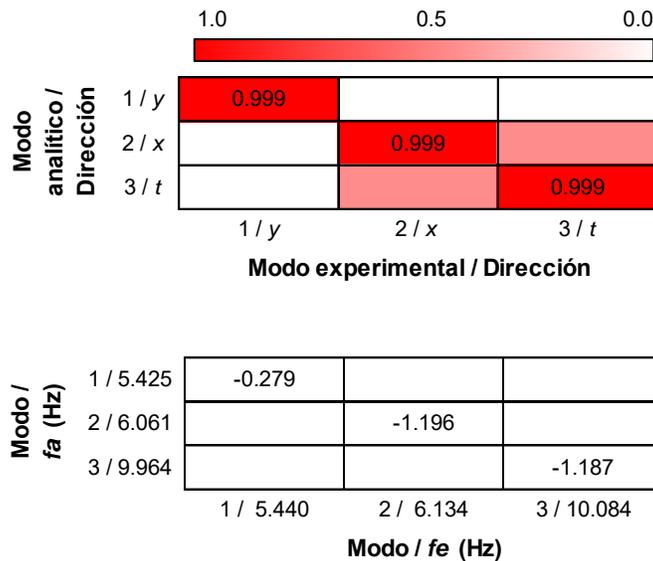


Figura 5.5. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 4X1 – 3X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 163.0 & -101.9 & 20.0 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \\ -101.9 & 166.2 & -98.3 & 17.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.3 \\ 20.0 & -98.3 & 151.5 & -71.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & -0.3 & -3.7 & 4.0 \\ -1.9 & 17.4 & -71.0 & 55.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.3 & 4.0 & -4.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.8 & -537.4 & 112.1 & -10.9 \\ 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.4 & 873.7 & -527.4 & 96.7 \\ 0.0 & -0.3 & -3.7 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.1 & -527.4 & 808.0 & -380.5 \\ -0.1 & 0.3 & 4.0 & -4.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.9 & 96.7 & -380.5 & 292.8 \end{bmatrix} \quad [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 163.0 & -101.9 & 20.0 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 \\ -101.9 & 166.3 & -98.3 & 17.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.3 \\ 20.0 & -98.3 & 151.5 & -70.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & -0.3 & -3.7 & 4.0 \\ -1.9 & 17.5 & -70.9 & 55.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.3 & 4.0 & -4.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.9 & -537.3 & 112.2 & -10.8 \\ 0.0 & 0.0 & -0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.3 & 873.8 & -527.2 & 96.9 \\ 0.1 & -0.3 & -3.7 & 4.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.2 & -527.2 & 808.2 & -380.2 \\ 0.0 & 0.3 & 4.0 & -4.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.8 & 96.9 & -380.2 & 293.1 \end{bmatrix} \quad [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.03 & -0.07 & 1.19 & - & - & - & - & -126.1 & -57.6 & -12.63 & 18.75 \\ -0.03 & -0.04 & 0.03 & -0.19 & - & - & - & - & -58.06 & 63.7 & 4.33 & -4.32 \\ -0.07 & 0.03 & -0.03 & 0.07 & - & - & - & - & -13.52 & 4.61 & 0.48 & -0.5 \\ 1.19 & -0.19 & 0.07 & -0.11 & - & - & - & - & 23.14 & -5.03 & -0.55 & 0.62 \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ -126.1 & -58.06 & -13.52 & 23.14 & - & - & - & - & -0.01 & 0.02 & -0.12 & 0.98 \\ -57.6 & 63.7 & 4.61 & -5.03 & - & - & - & - & 0.02 & -0.01 & 0.03 & -0.18 \\ -12.63 & 4.33 & 0.48 & -0.55 & - & - & - & - & -0.12 & 0.03 & -0.03 & 0.07 \\ 18.75 & -4.32 & -0.5 & 0.62 & - & - & - & - & 0.98 & -0.18 & 0.07 & -0.1 \end{bmatrix} \quad [%]$$

**Figura 5.6. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 4X1 – 3X2**

5.3. CONFIGURACIÓN 3X1-3X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.25 & 0.00 & 0.00 & 8.71 & 0.00 & 0.00 & 9.68 & 0.00 & 5.89 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.65 & 0.00 & 0.00 & 9.38 & 0.00 & 0.00 & -3.74 & 0.00 & -11.40 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.55 & 0.00 & 0.00 & 0.84 & 0.00 & 0.00 & -9.73 & 0.00 & 9.46 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.46 & 0.00 & 0.00 & -9.64 & 0.00 & 0.00 & 6.98 & 0.00 & -3.54 & 0.00 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.44 & 0.00 & 0.00 & 6.53 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 7.17 & 4.27 \\ 0.00 & 0.00 & 5.01 & 0.00 & 0.00 & 6.91 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.01 & -8.38 \\ 0.00 & 0.00 & 7.12 & 0.00 & 0.00 & 0.43 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -7.08 & 7.15 \\ 0.00 & 0.00 & 8.43 & 0.00 & 0.00 & -7.14 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.27 & -2.74 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.64 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.22 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.18 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

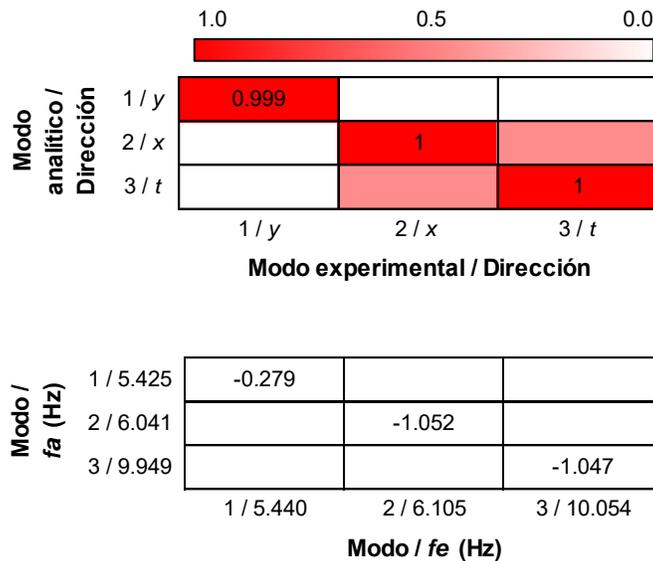


Figura 5.7. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 3X1 – 3X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 163.0 & -101.9 & 20.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -101.9 & 166.2 & -98.5 & 17.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.0 & -98.5 & 149.2 & -68.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.0 & 17.6 & -68.5 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.8 & -537.4 & 112.1 & -11.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.4 & 873.7 & -527.8 & 97.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.1 & -527.8 & 801.8 & -373.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.0 & 97.2 & -373.9 & 285.9 \end{bmatrix} \quad [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 163.0 & -101.9 & 20.1 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -101.9 & 166.2 & -98.5 & 17.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.1 & -98.5 & 149.2 & -68.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9 & 17.7 & -68.5 & 52.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.9 & -537.3 & 112.2 & -10.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.3 & 873.8 & -527.7 & 97.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.2 & -527.7 & 802.0 & -373.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.9 & 97.3 & -373.7 & 286.1 \end{bmatrix} \quad [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.01 & -0.03 & -0.07 & 1.04 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.03 & 0.01 & 0.03 & -0.19 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.07 & 0.03 & -0.01 & 0.07 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 1.04 & -0.19 & 0.07 & -0.11 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & -0.01 & 0.02 & -0.05 & 0.84 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.02 & -0.02 & 0.02 & -0.16 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & -0.05 & 0.02 & -0.03 & 0.06 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.84 & -0.16 & 0.06 & -0.08 \end{bmatrix} \quad [%]$$

**Figura 5.8. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 3X1 – 3X2**

5.4. CONFIGURACIÓN 3X1-2X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.20 & -0.12 & 0.00 & 8.74 & 0.24 & 0.00 & -9.61 & 0.00 & -5.98 & -0.03 & -0.01 \\ 0.00 & 6.58 & -0.18 & 0.00 & 9.46 & -0.12 & 0.00 & 3.71 & 0.00 & 11.38 & 0.11 & 0.08 \\ 0.00 & 9.57 & -0.08 & 0.00 & 0.81 & -0.47 & 0.00 & 9.76 & 0.00 & -9.39 & -0.10 & -0.07 \\ 0.00 & 11.51 & -0.05 & 0.00 & -9.52 & 0.45 & 0.00 & -7.04 & 0.00 & 3.57 & 0.02 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.01 & 2.42 & 0.00 & 0.09 & 6.54 & 0.00 & 0.26 & 0.00 & -0.02 & -7.15 & 4.31 \\ 0.00 & 0.03 & 4.98 & 0.00 & 0.13 & 6.94 & 0.00 & 0.26 & 0.00 & -0.04 & 3.00 & -8.37 \\ 0.00 & 0.09 & 7.12 & 0.00 & 0.05 & 0.42 & 0.00 & 0.03 & 0.00 & -0.10 & 7.09 & 7.13 \\ 0.00 & 0.11 & 8.45 & 0.00 & 0.02 & -7.09 & 0.00 & -0.31 & 0.00 & 0.15 & -5.30 & -2.75 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.44 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.67 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.66 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.26 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.60 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.19 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.27 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

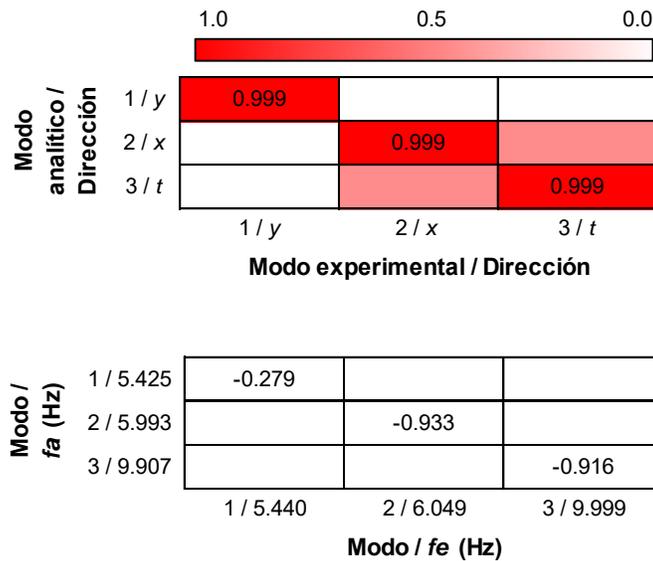


Figura 5.9. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 3X1 – 2X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 163.0 & -102.0 & 20.2 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \\ -102.0 & 164.3 & -96.6 & 17.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -3.2 & 3.2 & 0.2 \\ 20.2 & -96.6 & 147.3 & -68.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 3.2 & -3.1 & -0.2 \\ -1.9 & 17.8 & -68.7 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.2 & -0.2 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.8 & -537.8 & 112.5 & -11.0 \\ -0.2 & -3.2 & 3.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.8 & 868.3 & -522.6 & 97.5 \\ 0.2 & 3.2 & -3.1 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.5 & -522.6 & 796.6 & -374.3 \\ 0.0 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.0 & 97.5 & -374.3 & 285.9 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 163.0 & -102.0 & 20.2 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & -0.2 & 0.3 & 0.0 \\ -102.0 & 164.3 & -96.6 & 17.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -3.2 & 3.2 & 0.3 \\ 20.2 & -96.6 & 147.3 & -68.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 3.2 & -3.1 & -0.2 \\ -1.9 & 17.8 & -68.6 & 52.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.3 & -0.2 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0 & -0.2 & 0.3 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.8 & -537.8 & 112.6 & -10.9 \\ -0.2 & -3.2 & 3.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -537.8 & 868.4 & -522.4 & 97.7 \\ 0.3 & 3.2 & -3.1 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.6 & -522.4 & 796.8 & -374.1 \\ 0.0 & 0.3 & -0.2 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.9 & 97.7 & -374.1 & 286.1 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 & -0.09 & 0.92 & - & - & - & - & 68.3 & 5.24 & -6.76 & -54.13 \\ 0.02 & -0.02 & 0.03 & -0.15 & - & - & - & - & 5.38 & 0.64 & -0.9 & -12.94 \\ -0.09 & 0.03 & -0.01 & 0.06 & - & - & - & - & -7.4 & -0.96 & 1.46 & 30.19 \\ 0.92 & -0.15 & 0.06 & -0.09 & - & - & - & - & -57.03 & -14.01 & 31.11 & -135 \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ 68.3 & 5.38 & -7.4 & -57.03 & - & - & - & - & 0 & 0 & -0.05 & 0.76 \\ 5.24 & 0.64 & -0.96 & -14.01 & - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0.03 & -0.14 \\ -6.76 & -0.9 & 1.46 & 31.11 & - & - & - & - & -0.05 & 0.03 & -0.03 & 0.05 \\ -54.13 & -12.94 & 30.19 & -135 & - & - & - & - & 0.76 & -0.14 & 0.05 & -0.09 \end{bmatrix} [%]$$

**Figura 5.10. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 3X1 – 2X2**

5.5. CONFIGURACIÓN 2X1-2X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.14 & 0.00 & 0.00 & 8.77 & 0.00 & 0.00 & 9.54 & 0.00 & 6.08 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.50 & 0.00 & 0.00 & 9.55 & 0.00 & 0.00 & -3.69 & 0.00 & -11.36 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.60 & 0.00 & 0.00 & 0.77 & 0.00 & 0.00 & -9.82 & 0.00 & 9.33 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.55 & 0.00 & 0.00 & -9.40 & 0.00 & 0.00 & 7.13 & 0.00 & -3.60 & 0.00 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.40 & 0.00 & 0.00 & 6.56 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 7.12 & 4.34 \\ 0.00 & 0.00 & 4.95 & 0.00 & 0.00 & 6.98 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -2.99 & -8.36 \\ 0.00 & 0.00 & 7.13 & 0.00 & 0.00 & 0.41 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -7.11 & 7.11 \\ 0.00 & 0.00 & 8.47 & 0.00 & 0.00 & -7.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.32 & -2.77 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.38 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.60 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.68 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.31 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.58 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.03 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.29 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

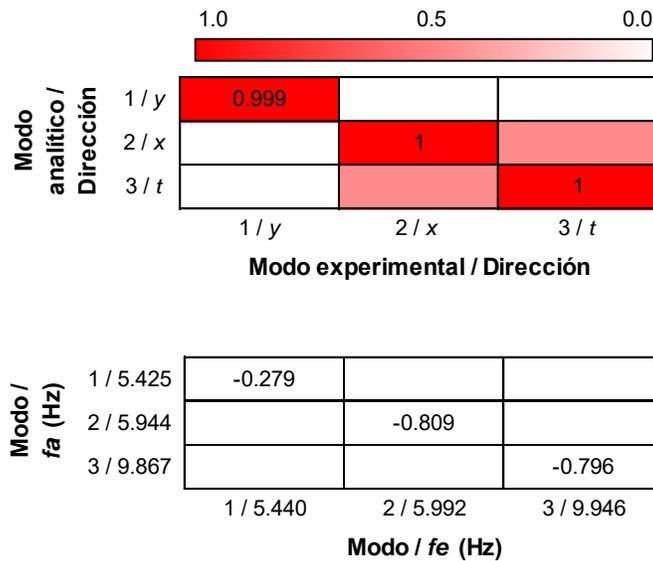


Figura 5.11. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 2X1 – 2X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 163.0 & -102.2 & 20.3 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -102.2 & 162.3 & -94.6 & 17.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.3 & -94.6 & 145.4 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9 & 17.9 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 847.8 & -538.2 & 112.9 & -10.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -538.2 & 863.0 & -517.3 & 97.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 112.9 & -517.3 & 791.4 & -374.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.9 & 97.9 & -374.7 & 285.8 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 163.0 & -102.2 & 20.4 & -1.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -102.2 & 162.3 & -94.6 & 17.9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.4 & -94.6 & 145.4 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.9 & 17.9 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 847.8 & -538.2 & 113.0 & -10.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -538.2 & 863.1 & -517.2 & 98.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 113.0 & -517.2 & 791.5 & -374.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10.9 & 98.0 & -374.5 & 286.0 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.03 & -0.03 & -0.05 & 0.79 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.03 & 0 & 0.03 & -0.12 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.05 & 0.03 & -0.01 & 0.05 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.79 & -0.12 & 0.05 & -0.09 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & -0.05 & 0.69 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0.02 & -0.11 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & -0.05 & 0.02 & -0.01 & 0.04 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.69 & -0.11 & 0.04 & -0.06 \end{bmatrix} [%]$$

**Figura 5.12. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 2X1 – 2X2**

5.6. CONFIGURACIÓN 2X1-1X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.07 & 0.18 & 0.00 & 8.74 & -0.21 & 0.00 & -9.70 & 0.00 & 5.89 & -0.33 & 0.09 \\ 0.00 & 6.58 & 0.12 & 0.00 & 9.56 & 0.09 & 0.00 & 3.85 & 0.00 & -11.24 & 0.49 & -0.11 \\ 0.00 & 9.62 & 0.28 & 0.00 & 0.77 & 0.18 & 0.00 & 9.56 & 0.00 & 9.56 & -0.20 & 0.01 \\ 0.00 & 11.50 & 0.46 & 0.00 & -9.43 & -0.15 & 0.00 & -7.10 & 0.00 & -3.72 & 0.06 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.06 & -2.37 & 0.00 & -0.01 & 6.54 & 0.00 & -0.27 & 0.00 & 0.32 & 7.17 & -4.28 \\ 0.00 & 0.19 & -4.98 & 0.00 & -0.01 & 6.98 & 0.00 & -0.10 & 0.00 & -0.14 & -3.05 & 8.32 \\ 0.00 & 0.25 & -7.14 & 0.00 & -0.02 & 0.41 & 0.00 & -0.01 & 0.00 & -0.18 & -7.01 & -7.19 \\ 0.00 & 0.27 & -8.44 & 0.00 & -0.03 & -7.06 & 0.00 & 0.02 & 0.00 & 0.20 & 5.31 & 2.81 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.31 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.67 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.71 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.55 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.05 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -7.20 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -8.27 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

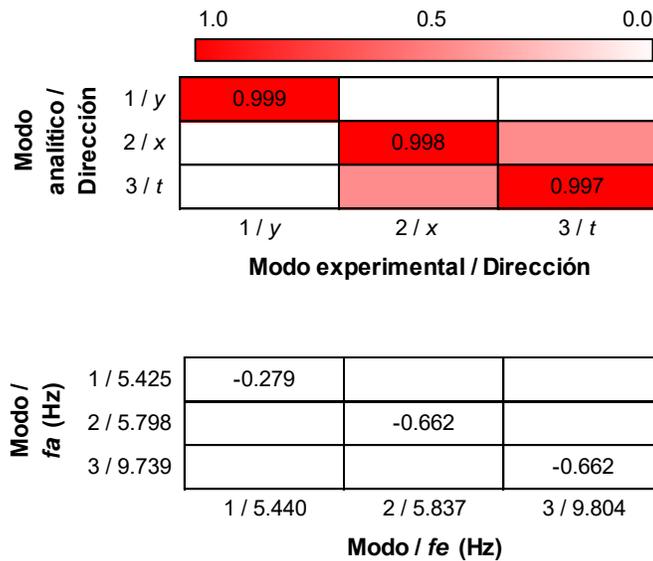


Figura 5.13. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 2X1 – 1X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 159.3 & -98.4 & 20.7 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.1 & 6.1 & 0.6 & -0.2 \\ -98.4 & 158.5 & -95.0 & 18.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.1 & -6.2 & -0.6 & 0.2 \\ 20.7 & -95.0 & 145.4 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & -0.6 & -0.1 & 0.0 \\ -2.0 & 18.0 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.1 & 6.1 & 0.6 & -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 837.7 & -528.1 & 113.9 & -11.2 \\ 6.1 & -6.2 & -0.6 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -528.1 & 852.7 & -518.3 & 98.2 \\ 0.6 & -0.6 & -0.1 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 113.9 & -518.3 & 791.3 & -374.6 \\ -0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.2 & 98.2 & -374.6 & 285.8 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 159.3 & -98.5 & 20.7 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.1 & 6.2 & 0.6 & -0.1 \\ -98.5 & 158.5 & -95.0 & 18.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.2 & -6.2 & -0.5 & 0.3 \\ 20.7 & -95.0 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & -0.5 & 0.1 & 0.2 \\ -2.0 & 18.0 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6.1 & 6.2 & 0.7 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 837.7 & -528.1 & 113.9 & -11.2 \\ 6.2 & -6.2 & -0.5 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -528.1 & 852.7 & -518.3 & 98.2 \\ 0.6 & -0.5 & 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 113.9 & -518.3 & 791.3 & -374.6 \\ -0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.2 & 98.2 & -374.6 & 285.8 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.03 & -0.01 & 0 & -0.25 & - & - & - & - & 0.39 & -0.61 & -8.41 & 70.12 \\ -0.01 & 0.03 & 0 & 0.01 & - & - & - & - & -0.62 & 1.02 & 17.72 & -40.35 \\ 0 & 0 & 0.03 & -0.02 & - & - & - & - & -8.69 & 18.16 & -178.2 & -91.1 \\ -0.25 & 0.01 & -0.02 & 0.02 & - & - & - & - & 76 & -41.1 & -91.18 & -102.2 \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ 0.39 & -0.62 & -8.69 & 76 & - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0.02 & -0.04 \\ -0.61 & 1.02 & 18.16 & -41.1 & - & - & - & - & -0.01 & 0 & 0 & 0.01 \\ -8.41 & 17.72 & -178.2 & -91.18 & - & - & - & - & 0.02 & 0 & 0 & 0.01 \\ 70.12 & -40.35 & -91.1 & -102.2 & - & - & - & - & -0.04 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} [%]$$

**Figura 5.14. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 2X1 – 1X2**

5.7. CONFIGURACIÓN 1X1-1X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.01 & 0.00 & 0.00 & 8.70 & 0.00 & 0.00 & 9.86 & 0.00 & 5.73 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.66 & 0.00 & 0.00 & 9.57 & 0.00 & 0.00 & -4.00 & 0.00 & -11.14 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.66 & 0.00 & 0.00 & 0.77 & 0.00 & 0.00 & -9.31 & 0.00 & 9.77 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.45 & 0.00 & 0.00 & -9.47 & 0.00 & 0.00 & 7.08 & 0.00 & -3.83 & 0.00 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.35 & 0.00 & 0.00 & 6.53 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 7.24 & 4.21 \\ 0.00 & 0.00 & 5.01 & 0.00 & 0.00 & 6.98 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.11 & -8.28 \\ 0.00 & 0.00 & 7.16 & 0.00 & 0.00 & 0.41 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -6.92 & 7.27 \\ 0.00 & 0.00 & 8.43 & 0.00 & 0.00 & -7.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.31 & -2.85 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.24 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.52 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.08 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

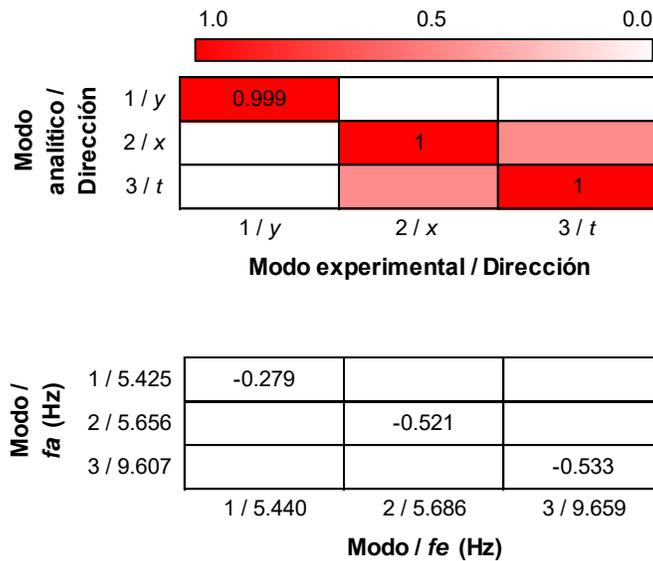


Figura 5.15. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 1X1 – 1X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 155.6 & -94.7 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -94.7 & 154.8 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 827.7 & -517.9 & 114.9 & -11.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -517.9 & 842.5 & -519.3 & 98.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 114.9 & -519.3 & 791.2 & -374.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.4 & 98.4 & -374.6 & 285.8 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 155.6 & -94.7 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -94.7 & 154.8 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 827.7 & -517.9 & 114.9 & -11.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -517.9 & 842.5 & -519.2 & 98.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 114.9 & -519.2 & 791.3 & -374.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.4 & 98.5 & -374.5 & 285.9 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 & -0.04 & 0.42 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 & -0.08 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.04 & 0.01 & 0.01 & 0.03 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.42 & -0.08 & 0.03 & -0.06 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & 0.02 & -0.08 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0.02 & -0.01 & 0.03 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.4 & -0.08 & 0.03 & -0.03 \end{bmatrix} [%]$$

**Figura 5.16. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 1X1 – 1X2**

5.8. CONFIGURACIÓN 1X1-0X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.17 & -0.15 & 0.00 & -8.80 & 1.34 & 0.00 & 9.66 & 0.00 & 5.67 & -0.13 & 0.02 \\ 0.00 & 6.75 & 0.02 & 0.00 & -9.40 & -0.90 & 0.00 & -4.10 & 0.00 & -11.15 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & 9.64 & 0.28 & 0.00 & -0.54 & -1.45 & 0.00 & -9.21 & 0.00 & 9.80 & -0.03 & 0.00 \\ 0.00 & 11.35 & 0.47 & 0.00 & 9.52 & 1.21 & 0.00 & 7.05 & 0.00 & -3.84 & 0.01 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.11 & -2.40 & 0.00 & -0.11 & 6.49 & 0.00 & -0.98 & 0.00 & 0.02 & 7.20 & -4.19 \\ 0.00 & 0.16 & -5.05 & 0.00 & -0.01 & 6.83 & 0.00 & -1.11 & 0.00 & -0.06 & -3.18 & 8.28 \\ 0.00 & 0.19 & -7.14 & 0.00 & 0.16 & 0.31 & 0.00 & -0.11 & 0.00 & -0.05 & -6.92 & -7.28 \\ 0.00 & 0.20 & -8.39 & 0.00 & 0.29 & -7.01 & 0.00 & 1.07 & 0.00 & 0.05 & 5.33 & 2.86 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.41 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.85 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.72 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.11 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.59 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -5.12 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -7.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -8.21 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

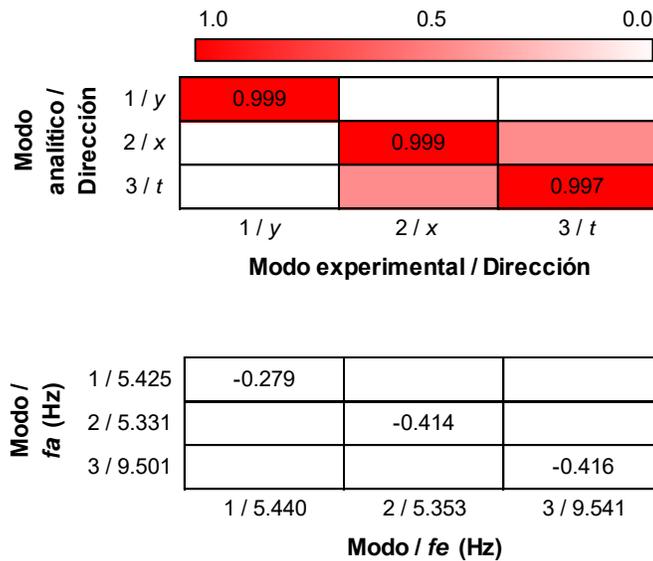


Figura 5.17. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 1X1 – 0X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 152.0 & -95.1 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.9 & -0.7 & 0.1 & 0.0 \\ -95.1 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & -0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.9 & -0.7 & 0.1 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 818.0 & -519.0 & 115.0 & -11.4 \\ -0.7 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -519.0 & 842.4 & -519.3 & 98.4 \\ 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 115.0 & -519.3 & 791.2 & -374.6 \\ 0.021 & 0.002 & 0.000 & 0.000 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.4 & 98.4 & -374.6 & 285.8 \end{bmatrix} \quad [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 152.0 & -95.1 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.9 & -0.6 & 0.1 & 0.1 \\ -95.1 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.0 & 0.1 & 0.1 \\ 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.9 & -0.6 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 818.0 & -519.0 & 115.1 & -11.4 \\ -0.6 & 0.0 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -519.0 & 842.4 & -519.2 & 98.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 115.1 & -519.2 & 791.3 & -374.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.4 & 98.5 & -374.5 & 285.9 \end{bmatrix} \quad [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & -0.04 & 0.34 & - & - & - & - & 0.33 & 4.97 & -39.27 & -70.44 \\ 0.01 & 0.02 & 0.01 & -0.08 & - & - & - & - & 4.89 & 209.03 & -90.23 & -97.15 \\ -0.04 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - & -38.67 & -90.15 & -100.8 & -100.2 \\ 0.34 & -0.08 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - & -69.82 & -97.11 & -100.2 & -100.1 \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ 0.33 & 4.89 & -38.67 & -69.82 & - & - & - & - & 0 & 0 & -0.07 & 0.44 \\ 4.97 & 209.03 & -90.15 & -97.11 & - & - & - & - & 0 & 0 & 0.01 & -0.08 \\ -39.27 & -90.23 & -100.8 & -100.2 & - & - & - & - & -0.07 & 0.01 & -0.01 & 0.03 \\ -70.44 & -97.15 & -100.2 & -100.1 & - & - & - & - & 0.44 & -0.08 & 0.03 & -0.03 \end{bmatrix} \quad [%]$$

**Figura 5.18. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 1X1 – 0X2**

5.9. CONFIGURACIÓN 0X1-0X2

$$\Phi_a = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 \\ 3.32 & 0.00 & 0.00 & 8.90 & 0.00 & 0.00 & 9.64 & 0.00 & 5.62 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 6.85 & 0.00 & 0.00 & 9.24 & 0.00 & 0.00 & -4.37 & 0.00 & -11.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.62 & 0.00 & 0.00 & 0.32 & 0.00 & 0.00 & -9.33 & 0.00 & 9.82 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.25 & 0.00 & 0.00 & -9.59 & 0.00 & 0.00 & 7.22 & 0.00 & -3.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.46 & 0.00 & 0.00 & 6.60 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 7.16 & 4.17 \\ 0.00 & 0.00 & 5.09 & 0.00 & 0.00 & 6.86 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -3.24 & -8.29 \\ 0.00 & 0.00 & 7.14 & 0.00 & 0.00 & 0.24 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & -6.92 & 7.29 \\ 0.00 & 0.00 & 8.35 & 0.00 & 0.00 & -7.12 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.36 & -2.86 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.00 & 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.74 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 7.17 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 9.39 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 11.07 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.78 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.32 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 6.97 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 8.22 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

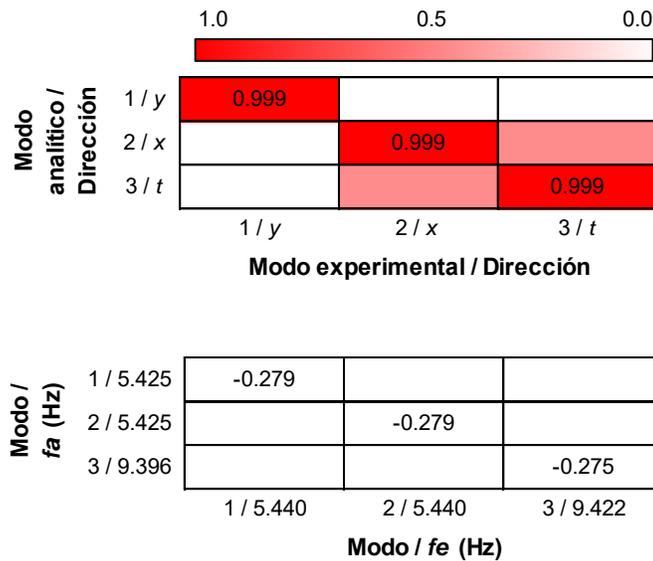


Figura 5.19. Matriz de modos de vibrar analítica, matriz de modos de vibrar experimental incompleta, matriz MAC y matriz comparativa de frecuencias para la configuración 0X1 – 0X2

$$K_a = \begin{bmatrix} 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.1 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.1 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 808.3 & -520.1 & 115.1 & -11.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -520.1 & 842.3 & -519.3 & 98.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 115.1 & -519.3 & 791.2 & -374.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.4 & 98.4 & -374.6 & 285.8 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_e = \begin{bmatrix} 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1 & 18.1 & -68.8 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 148.4 & -95.5 & 21.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -95.5 & 154.7 & -95.4 & 18.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21.2 & -95.4 & 145.3 & -68.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.082 & 18.09 & -68.79 & 52.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 808.3 & -520.1 & 115.2 & -11.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -520.1 & 842.3 & -519.2 & 98.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 115.2 & -519.2 & 791.3 & -374.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11.3 & 98.5 & -374.5 & 285.9 \end{bmatrix} [MN/m]$$

$$K_{error} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.03 & 0 & -0.03 & 0.26 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0 & -0.07 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & -0.03 & 0 & 0.01 & 0.01 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & 0.26 & -0.07 & 0.01 & -0.02 & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & 0 & -0.06 & 0.23 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & -0.01 & 0.01 & -0.05 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & -0.06 & 0.01 & -0.01 & 0.03 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0.23 & -0.05 & 0.03 & -0.03 \end{bmatrix} [%]$$

**Figura 5.20. Matriz de rigideces analítica, matriz de rigideces experimental reconstruida y matriz de error entre las matrices de rigideces analítica y experimental para la configuración 0X1 – 0X2**

## 5.10. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En todas las configuraciones, se aprecia en las matrices modales analíticas la existencia de cuatro modos de vibrar en dirección  $x$  (2, 5, 8 y 10), cuatro en dirección  $y$  (1, 4, 7 y 9) y cuatro de torsión (3, 6, 11 y 12). La presencia de los doce modos identificados, fue consecuencia del modelado del sistema estructural con un total de doce gdl; claro está, después de haber realizado las condensaciones estáticas en los marcos y su posterior acoplamiento.

En las nueve configuraciones, se mantuvieron constantes aquellos modos identificados en dirección  $y$ , producto de la simetría del edificio en este sentido. En lo que respecta a los ocho modos restantes, estos sufrieron variaciones de configuración a configuración, debido al cambio en la rigidez de los marcos de la dirección  $x$ , provocada por la inclusión de los contraventeos. Cabe resaltar que en los modos de torsión y traslacionales en dirección  $x$ , existió un ligero acoplamiento. En lo que corresponde a los modos de la dirección  $y$ , estos presentaron coordenadas modales distintas de cero únicamente en esa dirección.

En las matrices modales experimentales incompletas, se mostró invariable el primer modo de vibrar en todas las configuraciones; mientras que el segundo y el tercero, al igual que en sus contrapartes analíticas, cambiaron de configuración a configuración. Lo anterior, como consecuencia de la variación en la rigidez de los marcos X1 y X2.

Como se mencionó en el primer capítulo, las matrices MAC indican el nivel de correspondencia entre las distintas parejas de modos de vibrar. En las nueve matrices MAC expuestas, se observa una contundente correspondencia con valores MAC que prácticamente generan la unidad. También se exhiben casillas con una cantidad MAC, estimada con ayuda de la escala de color, de aproximadamente 0.5. Sin embargo, al ser un valor alejado del uno, se puede despreciar y asegurar que las parejas experimentales y analíticas de los tres primeros modos de vibrar, guardan una relación adecuada.

Los arreglos comparativos de frecuencias experimentales y analíticas, exhiben errores relativos entre  $-0.279\%$  y  $-1.308\%$ , por lo que el modelo matemático subvaluó al experimental. Esto es, al resolver el problema de los valores característicos con los datos analíticos, se obtuvieron frecuencias con valores menores a las identificadas experimentalmente.

Para reconstruir las matrices de rigideces experimentales, se emplearon los tres primeros parámetros modales en cada configuración (modos de vibrar analíticos, frecuencias analíticas, modos de vibrar experimentales y frecuencias experimentales). Con la finalidad de corroborar la precisión en la reconstrucción de las matrices empleando el algoritmo de Yang y Chen, se presentan los arreglos  $K_{error}$ . Estos indican errores relativos en la diagonal principal entre  $-0.11\%$  y  $0.3\%$ . Fuera de ésta, los errores ascienden hasta cantidades negativas de  $-178.16\%$  y positivas de  $209.03\%$ . Sin embargo, los valores que se comparan y generan errores relativos considerables, se ubican en zonas de la matriz de rigideces alejadas de los elementos con mayor valor e influencia en la misma. Por ello, es aceptable considerar adecuadas a las matrices de rigideces experimentales reconstruidas con el algoritmo de Yang y Chen, empleando las propiedades dinámicas mencionadas. Así mismo, se puede validar el uso de las ecuaciones empleadas para la identificación de datos experimentales en las configuraciones que carecían de dicha información.

Con los valores MAC computados y el error relativo calculado entre las frecuencias analíticas y experimentales, es posible afirmar que el modelo de elementos finitos y las consideraciones hechas al momento de su ejecución, fueron apropiadas para reproducir analíticamente la respuesta del modelo real.

Teniendo la certeza de contar con un modelo matemático del edificio óptimamente realizado, y matrices de rigideces experimentales reconstruidas correctamente, fue posible utilizar el MMT con toda seguridad.

### 5.11. ANÁLISIS DE DETECCIÓN DE DAÑO

El MMT se aplicó para las ocho configuraciones de daño simulado estipuladas en la sección 4.1.2.

En las tablas 5.1 y 5.2, se presentan los valores del parámetro  $x_r$  producto de la ejecución del MMT, así como el porcentaje de daño asociado a estos, respectivamente. Como se mencionó en el capítulo 2 del presente trabajo, dicho parámetro es adimensional y representa la disminución en la contribución del  $r$ -ésimo elemento a la matriz de rigideces del modelo tridimensional. Las cantidades de la segunda tabla se obtuvieron al multiplicar los de la primera por cien por ciento. En algunos casos, los valores difieren debido a que las cantidades del parámetro  $x_r$  se redondearon con la finalidad de expresarlos con tres cifras después del punto decimal. Por ejemplo, para el elemento uno en la configuración 0X1-0X2, el valor de  $x_r$  es -0.002 y el porcentaje correspondiente es de -0.166 %.

En todos los escenarios de daño simulado analizados, se destacan fundamentalmente los siguientes aspectos:

- Existencia de valores negativos en el parámetro  $x_r$  y los porcentajes de daño.
- Identificación de daño en elementos donde éste es inexistente.
- Estimación del daño superior al cien por ciento en los CRP.

En primera instancia, los tópicos anteriores podrían dar idea de algún error en la aplicación del MMT, e inclusive despertar dudas acerca de su efectividad. A pesar de lo anterior, se pueden realizar las siguientes constataciones:

- Los valores negativos del parámetro  $x_r$  son del orden de milésimos.
- La cuantificación de daño en elementos carentes de éste, generó porcentajes inferiores a la unidad.
- El daño en los CRP se sobrevalora solamente hasta en un 4.1 %.

Tomando en cuenta los tres enunciados anteriores, las características descritas en un inicio se pueden omitir y por lo tanto, tomar como válidos los resultados producidos.

Se aprecia que la detección del daño simulado es adecuado en todas las configuraciones. Por ejemplo, en la configuración 1X1 – 1X2, se observa la pérdida total de la rigidez axial de los CRP ubicados en los niveles dos a cuatro, una baja en ésta de hasta 0.005 % en los CRP del nivel uno, y un daño despreciable en columnas y trabes. Para fines prácticos, se concluye que las columnas, las vigas y los CRP localizados en la primera planta permanecieron intactos; mientras que los CRP restantes disminuyeron completamente su capacidad. El mismo patrón se replica en las ocho situaciones estudiadas, esto es: identificación puntual de los CRP removidos y presencia de deterioro irrelevante en los elementos restantes.

Es importante mencionar que los resultados expuestos en las tablas 5.1 y 5.2, se generaron en la primera iteración; consecuentemente, no fue necesario ejecutar el MMT más de una ocasión.

**Tabla 5.1. Valores del parámetro  $x_r$  obtenidos en la ejecución del MMT**

Configuración	0X1-0X2	1X1-0X2	1X1-1X2	2X1-1X2	2X2-2X2	3X1-2X2	3X1-3X2	4X1-3X2
Elemento								
1 – Columna N1	-0.002	-0.001	0.000	0.002	0.001	0.001	0.000	-0.001
2 – Columna N2	0.000	0.000	0.000	-0.002	0.001	0.000	0.002	0.002
3 – Columna N3	-0.002	-0.003	-0.002	-0.001	0.000	0.001	-0.001	-0.002
4 – Columna N4	0.003	0.003	0.003	0.002	-0.003	-0.003	0.001	0.003
5 – Trabe N1	0.002	-0.002	-0.003	0.006	-0.005	-0.003	-0.009	-0.007
6 – Trabe N2	0.005	0.006	0.004	-0.001	0.001	-0.001	0.001	0.003
7 – Trabe N3	0.001	0.002	0.003	0.002	0.001	-0.001	0.000	0.001
8 – Trabe N4	-0.003	-0.003	-0.004	-0.002	0.002	0.003	-0.001	-0.004
9 – CRP N1 Marco X1	1.021	0.008	0.005	0.000	-0.003	0.000	-0.005	-0.005
10 – CRP N2 Marco X1	1.031	1.034	1.034	0.001	-0.001	-0.002	0.000	0.000
11 – CRP N3 Marco X1	1.011	1.012	1.011	1.021	1.018	0.000	-0.003	-0.003
12 – CRP N4 Marco X1	1.016	1.016	1.016	1.017	1.013	1.013	1.014	-0.005
13 – CRP N1 Marco X2	1.026	1.019	0.003	-0.003	-0.006	-0.006	-0.007	-0.004
14 – CRP N2 Marco X2	1.036	1.035	1.035	1.041	-0.005	-0.005	-0.008	-0.006
15 – CRP N3 Marco X2	1.021	1.024	1.017	1.020	1.021	1.016	-0.005	-0.004
16 – CRP N4 Marco X2	1.008	1.010	1.008	1.013	1.021	1.020	1.013	1.004

**Tabla 5.2. Valores del porcentaje de daño obtenidos en la ejecución del MMT**

Configuración	0X1-0X2	1X1-0X2	1X1-1X2	2X1-1X2	2X2-2X2	3X1-2X2	3X1-3X2	4X1-3X2
Elemento								
1 – Columna N1	-0.166	-0.104	0.016	0.164	0.075	0.110	0.010	-0.082
2 – Columna N2	0.003	0.044	0.041	-0.191	0.061	0.019	0.231	0.235
3 – Columna N3	-0.246	-0.261	-0.194	-0.119	0.032	0.130	-0.062	-0.157
4 – Columna N4	0.311	0.262	0.294	0.194	-0.250	-0.325	0.068	0.311
5 – Trabe N1	0.194	-0.205	-0.303	0.628	-0.468	-0.259	-0.923	-0.709
6 – Trabe N2	0.500	0.565	0.353	-0.059	0.082	-0.065	0.066	0.309
7 – Trabe N3	0.103	0.212	0.288	0.191	0.058	-0.137	0.031	0.100
8 – Trabe N4	-0.320	-0.301	-0.353	-0.166	0.210	0.276	-0.098	-0.363
9 – CRP N1 Marco X1	102.110	0.806	0.520	0.049	-0.271	-0.018	-0.513	-0.451
10 – CRP N2 Marco X1	103.050	103.420	103.390	0.054	-0.122	-0.159	0.019	-0.037
11 – CRP N3 Marco X1	101.100	101.150	101.060	102.140	101.840	0.000	-0.286	-0.332
12 – CRP N4 Marco X1	101.630	101.610	101.610	101.710	101.260	101.250	101.400	-0.538
13 – CRP N1 Marco X2	102.560	101.910	0.275	-0.297	-0.556	-0.561	-0.711	-0.449
14 – CRP N2 Marco X2	103.620	103.470	103.460	104.110	-0.547	-0.513	-0.823	-0.606
15 – CRP N3 Marco X2	102.070	102.370	101.680	101.980	102.090	101.590	-0.461	-0.446
16 – CRP N4 Marco X2	100.830	100.990	100.800	101.290	102.140	102.010	101.270	100.360

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La presencia de daño es inevitable en las obras civiles de cualquier índole. Detectarlo a tiempo y proporcionar una evaluación correcta del mismo, es indispensable para salvaguardar la integridad de los sistemas estructurales. De este modo, se puedan determinar con toda seguridad, las acciones pertinentes que se llevarán a cabo posterior a la identificación del deterioro. Para tal fin, se requiere de un modelo de elementos finitos de la estructura a analizar realizado óptimamente; pruebas de vibración bien ejecutadas; y el uso de una metodología de detección de daño adecuada.

Las ideas previamente mencionadas, fueron parte esencial en el planteamiento de la presente investigación y se cumplieron satisfactoriamente.

Primeramente, el modelo matemático del edificio prefabricado de concreto reforzado equipado con CRP, predijo adecuadamente la respuesta de su contraparte real. Esto se demostró con una certera correlación en los modos de vibrar y un error entre las frecuencias analíticas y experimentales que osciló entre -1.308 % y -0.279 %. Así mismo, se corroboraron las consideraciones y simplificaciones hechas en el desarrollo del modelo de elementos finitos de la estructura en cuestión.

En lo que corresponde a las propiedades dinámicas experimentales, se comprobó que realizando ciertas suposiciones y formulando relaciones entre dichas propiedades y sus contrapartes analíticas, fue posible obtener algunos parámetros modales que durante las pruebas de vibración no se lograron identificar. Por lo que la falta de información modal experimental, no representó obstáculo alguno en el proceso de detección de daño.

Finalmente, se cumplió el objetivo primordial del presente trabajo, identificar, localizar y cuantificar daño en diversos escenarios de deterioro simulado. Esto se logró empleando el MMT, mismo que mostró un funcionamiento inmejorable, detectando el daño de manera precisa y puntual en las ocho configuraciones propuestas. Cabe mencionar que el desempeño del método se hubiese visto afectado de no haber efectuado una adecuada reconstrucción en las distintas matrices de rigideces experimentales. Por lo que el algoritmo de Yang y Chen, tomó un papel importante en el proceso de detección de daño.

Si bien es cierto que el MMT generó resultados contundentes, es necesario seguir probándolo en diversas estructuras, de modo que se pueda seguir validando su uso.

El constante refinamiento y desarrollo de las técnicas de detección de daño son necesarios ya que el problema en cuestión no ha quedado resuelto en su totalidad. Adicionalmente, hay que tomar en cuenta los tópicos fundamentales que interfieren en la efectividad de estas metodologías, tales como los errores existentes en el desarrollo de modelos de elementos finitos, la información modal experimental incompleta, etcétera.

A medida que los métodos de identificación de daño se consoliden y su uso se torne irrefutable, estos podrán ser integrados en programas de cómputo comerciales. Con ello, los analistas expertos contarán con herramientas confiables que les permitan evaluar, de manera prácticamente inmediata, el daño presente en los distintos sistemas estructurales. Claro está, con el conocimiento previo y correcto de la teoría en la que se basan dichas metodologías.

## BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Aktan A.E., Lee. K.L., Chuntavan C. y Askel T. (1994), "Modal testing for structural identification and condition assessment of constructed facilities", IMAC XII, pp. 462-468.

Alavinasab A., Jha R. y Ahmadi G. (2011), "Damage identification of prestressed concrete pipes", en Pipelines 2011: A sound conduit for sharing solutions, Jeong D.H. S. y Pecha D. (editores), American Society of Civil Engineers, pp. 12-23.

Alvandi A. y Cremona C. (2006), "Assessment of vibration-based damage identification techniques", Journal of sound and vibration, **292** (1-2), pp. 179-202.

Ángeles P.I. (2012), "Identificación de daño en edificios mediante instrumentación estructural", Tesis de maestría. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM, México.

Bazán E. y Meli R. (2004), "Diseño sísmico de edificios", Limusa, México D.F., 317 pp.

Brownjohn J.M.W., Xia P.Q., Hao H. y Xia Y. (2001), "Civil structure condition assessment by FE model updating: methodology and case studies", Finite Elements in Analysis and Design, **37** (10), pp. 761-775.

CAL – SAP (2008), [http://www.edwilson.org/CAL-SAP/cal\\_\\_sap.htm](http://www.edwilson.org/CAL-SAP/cal__sap.htm).

Carrasco C.J., Osegueda R.A., Ferregut C.M. y Grygler M. (1997), "Damage localization in a space truss model using modal strain energy", IMAC XV, pp. 1786-792.

Celebi M. (2013), "Seismic monitoring of structures and new developments", en Earthquakes and health monitoring of civil structures, Garevski M. (editor), Springer Environmental Science and Engineering, Springer Holanda, pp. 37-84.

Chellini G., De Roeck G., Nardini L. y Salvatore W. (2010), "Damage analysis of a steel-concrete frame by finite element model updating", Journal of Constructional Steel Research, **66** (3), pp. 398-411.

Chowdhury M. R. y Ramirez M. (1992), "A comparison of the modal responses for defective versus nondefective concrete test beams", IMAC X, pp. 508-515.

Doebbling S.W., Farrar C.R., Prime M.B. y Shevitz D. W. (1996), "Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: A literature review", Los Alamos National Laboratory report LA-13070-MS, pp. 1-127, EUA.

Escobar J.A., Sosa J.J. y Gómez R. (2005), "Structural damage detection using the transformation matrix", Computers and Structures, **83** (4-5), pp. 357-368.

Friswell M.I. y Mottershead J.E. (1995), "Finite model updating in structural dynamics", Kluwer Academic Publishers, Holanda, 283 pp.

- Fuentes D. (2014), "Actualización de frecuencias experimentales de una estructura de acero a partir de sus características dinámicas analíticas", Tesis de licenciatura. Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- Hearn G. y Testa R. B. (1991), "Modal analysis for damage detection in structures", *Journal of Structural Engineering*, **117**(10), pp. 3042-3063.
- Kulla J. (2003), "Damage detection of the Z24 bridge using control charts", *Mechanical Systems and Signal Processing* **17**(1), pp. 163-170.
- Law S.S. y Zhu X.Q. (2004), "Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads", *Engineering Structures*, **26**(9), pp. 1279-1293.
- Lin C.S. (1998), "Unity check method for structural damage detection", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **35**(4), pp. 577-579.
- Modena C., Sonda D. y Zonta D. (1999), "Damage localization in reinforced concrete structures by using damping measurements", *Key Engineering Materials*, **167-168**, pp. 132-141.
- Mottershead J.E., Link M. y Friswell M. (2011), "The sensitivity method in finite element model updating", *Mechanical Systems and Signals*, **25**(7), pp. 2275-2296.
- Pandey A.K. y Biswas M. (1994), "Damage detection in structures using changes in flexibility", *Journal of Sound and Vibration*, **169**(1), pp. 3-17.
- Panteliou S.D., Chondros T.G. y Argyrakis V.C. (2001), "Damping factor as an indicator of crack severity", *Journal of Sound and Vibration*, **241**(2), pp. 235-245.
- Pastor M., Binda M. y Harčarik T. (2012), "Modal assurance criterion", *Procedia Engineering*, **48**, pp. 543-548.
- Paz M. y Leigh W. (2004), "Structural dynamics: Theory and computation" (5ta edición), Springer Science+Business Media, Nueva York, 812 pp.
- Rytter A. (1993), "Vibration based inspection of civil engineering structures", Tesis doctoral, Departamento de Tecnología en Construcción e Ingeniería Estructural, Universidad de Aalborg, Dinamarca.
- Shi Z.Y., Law S.S. y Zhang L.M. (1998), "Structural damage localization from modal strain energy change", *Journal of Sound and Vibration*, **218**(5), pp. 825-844.
- Shiradhonkar S.R. y Shrikhande M. (2011), "Seismic damage detection in a building frame via finite element model updating", *Computers and Structures*, **89**(23-24), pp. 2425-2438.
- Sinou J-J. y Lees A.W. (2005), "The influence of cracks in rotating shafts", *Journal of Sound and Vibration*, **285**(4-5), pp. 1015-1037.
- Sinou J-J. (2009), "A review of damage detection and health monitoring of mechanical systems from changes in the measurements of linear and non-linear vibrations" en *Mechanical vibrations: Measurements, effects and control*, Sapri R.C. (editor), Nova Science Publishers, Inc., pp. 643-702.

Sohn H., Farrar C.R., Hemez F.M., Shunk D.D., Stinemates D.W., Nadler B.R. y Czamecki J.J. (2004), "A Review of Structural Health Monitoring Literature: 1996-2001", Los Alamos National Laboratory report LA-13976-MS, pp. 1-301, EUA.

Sosa J.J. (1998), "Detección de daño en modelos tridimensionales de edificios", Tesis de maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM, México.

Yang Y.B. y Chen Y.J. (2009), "A new direct method for updating structural models based on measured modal data", *Engineering Structures*, 31 (1) pp. 32-42.