UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

CONTINUOS 1/n-HOMOGÉNEOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS

PRESENTA:
YAZIEL PACHECO JUÁREZ

DIRECTOR: GERARDO ACOSTA GARCÍA
INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
PATRICIA PELLICER COVARRUBIAS Y
MARÍA ISABEL PUGA ESPINOSA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNAM

MÉXICO, D. F. ABRIL 2016.

Índice General

Prefacio

El presente trabajo está enmarcado en el área de las Matemáticas llamada Topología y, más específicamente, en la Teoría de Continuos. Por ***espacio*** nos referiremos a un espacio topológico y ocuparemos estos dos términos indistintamente. Nuestro objetivo principal es estudiar la noción de $\frac{1}{n}$-homogeneidad, que definiremos en la Sección 1.5, en diversas clases de continuos como los localmente conexos con exactamente un punto de corte, las dendritas, los abanicos y los continuos de Elsa. Empezamos el Capítulo 1 presentando una introducción, así como las definiciones y resultados básicos que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Cabe mencionar que las dendritas ocuparán un lugar importante en nuestro estudio y por ello, en la Sección 1.6, se enuncian las propiedades principales de las mismas que nos serán de utilidad en el Capítulo 3.

En el Capítulo 2, presentamos la noción de n-homogeneidad y n-homogeneidad en un punto, así como su relación con la $\frac{1}{n}$-homogeneidad. En la Sección 2.5, estudiamos brevemente los continuos $\frac{1}{n}$-homogéneos con exactamente un punto de corte. El Teorema 2.16 muestra una relación entre las órbitas del continuo y las órbitas de las componentes del complemento del punto de corte. El Corolario 2.24 da un ejemplo de un continuo $\frac{1}{3}$-homogéneo que se obtiene al pegar copias de un mismo continuo homogéneo y localmente conexo.

La primera sección del Capítulo 3 está dedicada a las dendritas $\frac{1}{n}$-homogéneas con una cantidad finita de puntos de ramificación. En dicha sección se enuncian algunas propiedades generales y su clasificación cuando $n \in \{3, 4, 5, 6\}$; también, dentro de esta sección estudiamos el producto de estas dendritas con m-celdas, el Teorema 3.38 ayuda a obtener el número de órbitas de tal producto.

La segunda sección del Capítulo 3 está dedicada a la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas. Dicho problema está resuelto en la primera sección, cuando la dendrita tiene un conjunto finito de puntos de ramificación. En el caso en que el conjunto de puntos de ramificación no es finito, obtenemos la clasificación dividiendo el problema en cuatro casos: consideramos su conjunto de puntos extremos (cuando es cerrado y cuando no) y si contiene o no arcos libres. El Teorema 3.71 enuncia la clasificación obtenida.

En el Capítulo 4 estudiamos una clase de continuos llamada abanicos. La primera sección está dedicada a los abanicos suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos y $\frac{1}{4}$-homogéneos. El Teorema 4.33 indica que un abanico suave es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si es uno de los siguientes: un n-odo simple, el abanico F_ω, el abanico de Cantor F_C, un abanico que se obtiene al unir, dentro de F_C, una sucesión de distintas copias de F_C que convergen al vértice de F_C, o bien el abanico de Lelek. Presentamos también propiedades de los abanicos suaves $\frac{1}{4}$-homogéneos. Sobre los abanicos no suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos, el Teorema 4.40 indica dos propiedades que cumple el conjunto de puntos extremos, una dice que dicho conjunto es denso y la otra es una condición acerca de la suavidad en el vértice con respecto de cada punto extremo.

Por último, en el Capítulo 5 estudiamos las compactaciones del rayo con residuo el arco, llamados también continuos de Elsa, específicamente estudiamos los continuos de Elsa $\frac{1}{4}$-homogéneos. Un continuo de Elsa importante es el continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ y se construye tomando la cerradura en $\mathbb{R}^2$ del conjunto $\left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}$. Obtuvimos que el único continuo de Elsa separado y $\frac{1}{4}$-homogéneo es el continuo $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Contexto Histórico

Para situarnos dentro del contexto de este trabajo, es importante dar una breve introducción histórica de cómo surgió el estudio de los continuos $\frac{1}{n}$-homogéneos, resaltando la importancia de su investigación en México. En vista de que el presente apartado tiene un carácter expositorio, varios conceptos que se mencionan aparecerán en capítulos posteriores o bien no aparecerán (como la noción de poliedro o de retracto de vecindad absoluta).

En 1920 en el artículo [58] W. Sierpiński establece que un espacio X es ***homogéneo*** si dados dos puntos a y b en X, existe un homeomorfismo h de X en X tal que $h(a) = b$. Dado un espacio X, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ al grupo de homeomorfismos de X en X. Una ***órbita*** de X es la acción de $\mathcal{H}(X)$ en un punto $x \in X$. La definición de espacio homogéneo dada por W. Sierpińsnki puede darse de la siguiente manera: un espacio X es homogéneo si tiene exactamente una órbita bajo la acción del grupo de homeomorfismos $\mathcal{H}(X)$. Intuitivamente un espacio es homogéneo si cualesquiera dos de sus puntos poseen las mismas propiedades topológicas. Esto pasa, por ejemplo, en la recta real, en la circunferencia unitaria o en cualquier subonjunto finito de la recta. También, es sabido que el conjunto de Cantor C es homeomorfo al espacio $\{0, 2\}^\infty$, por lo que es un producto de espacios homogéneos y, así, también es homogéneo.

El estudio de los espacios homogéneos es bastante amplio y hay preguntas muy interesantes en torno a su clasificación que, desde sus inicios, han sido todo un reto para los matemáticos. El lector interesado puede consultar el artículo [39]. Un problema importante que recientemente ha sido resuelto, es la clasificación de los continuos homogéneos del plano. En 1920 B. Knaster y K. Kuratowski preguntan si el círculo es el único continuo plano y homogéneo. En 1948 y 1959 se construyen el pseudoarco y el círculo de pseudoarcos, que también son continuos homogéneos del plano. En 2014 L. Hoehn y L. G. Oversteegen obtuvieron la clasificación de los continuos homogéneos del plano que, además, resultan ser los tres continuos antes mencionados (ver [30]).

Encaminado un poco más hacia nuestro estudio, en 1969 J. Krasinkiewicz probó, en [35], que la curva universal de Sierpiński tiene dos órbitas bajo la acción de su grupo de homeomorfismos. En 1989 H. Patkowska, en [54], usa por primera vez el término espacio $\frac{1}{n}$-homogéneo, definido de la siguiente manera:

Definición 0.1. *Dada $n \in \mathbb{N}$, un espacio X es* **$\frac{1}{n}$-homogéneo** *si tiene exactamente n órbitas bajo la acción del grupo de homeomorfismos $\mathcal{H}(X)$.*

Posteriormente, H. Patkowska prueba lo siguiente:

1) Sea X un ANR compacto de dimensión menor o igual que 2, que es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Entonces X es un poliedro o bien posee una órbita que se puede escribir como la unión de, a lo más, una cantidad numerable de componentes, de modo que cada una de ellas es una imagen continua de la recta real.

Como consecuencia de lo anterior, H. Patkowska clasificó los poliedros que son $\frac{1}{2}$-homogéneos. No fue sino hasta 2006 que aparecieron nuevos resultados en torno al tema de continuos $\frac{1}{2}$-homogéneos, los cuales fueron presentados en [49] por S. B. Nadler, Jr. y P. Pellicer-Covarrubias. En dicho artículo se determinan los continuos X para los cuales el hiperespacio $C(X)$, de los subcontinuos de X, resulta ser $\frac{1}{2}$-homogéneo. Se prueban, entre otros, los siguientes resultados:

2) Si X es un continuo localmente conexo, entonces $C(X)$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple [49, Teorema 3.1];

3) si X es un continuo hereditariamente indescomponible, entonces $C(X)$ no es $\frac{1}{2}$-homogéneo [49, Lema 3.3];

4) si X es un continuo atriódico, entonces $C(X)$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple [49, Teorema 5.1].

Posteriormente, también en 2006, apareció el artículo [52], escrito por V. Neumann-Lara, P. Pellicer-Covarrubias e I. Puga. Dicho artículo, en el que se muestran relaciones entre un continuo $\frac{1}{2}$-homogéneo y sus puntos de corte, está más relacionado con resultados que presentamos en este trabajo pues, por ejemplo, se prueba lo siguiente:

5) Una dendrita X es $\frac{1}{2}$-homogénea si y sólo si X es un arco [52, Lema 3.5];

6) si X es un continuo $\frac{1}{2}$-homogéneo cuyo conjunto de puntos de corte tiene cardinalidad mayor o igual a uno y menor que $\aleph_0$, entonces X posee exactamente un punto de corte [52, Teorema 3.11];

7) el anillo hawaiano es el único continuo $\frac{1}{2}$-homogéneo que no es una gráfica finita, es hereditariamente localmente conexo y posee por lo menos un punto de corte [52, Teorema 3.12];

8) el arco es el único continuo $\frac{1}{2}$-homogéneo que es hereditariamente descomponible y encadenable [52, Teorema 4.3].

Notemos que los incisos 5), 7) y 8) clasifican familias de continuos $\frac{1}{2}$-homogéneos. En 2007 S. B. Nadler, Jr., P. Pellicer-Covarrubias e I. Puga presentaron en [51] otras clasificaciones de familias de continuos $\frac{1}{2}$-homogéneos, mejorando resultados presentados anteriormente en [52]. Se prueba, por ejemplo, lo siguiente:

9) Si X es un continuo $\frac{1}{2}$-homogéneo con al menos un punto de corte, entonces X posee exactamente un punto de corte o bien una cantidad no numerable de puntos de corte [51, Teorema 3.2];

10) si X es un continuo con más de un punto de corte, entonces X es $\frac{1}{2}$-homogéneo si y sólo si X es un arco o bien una compactación métrica de la recta real cuyo residuo es la unión de dos continuos ajenos y homeomorfos [51, Teorema 6.4].

En el mismo artículo se muestran relaciones entre los conceptos de $\frac{1}{2}$-homogeneidad y de 2-homogeneidad (ver Definición 2.1). En el Capítulo 2 del presente trabajo, obtenemos generalizaciones a dichos resultados.

Los tres artículos a los que nos hemos referido, han sido punta de lanza para el desarrollo de una buena cantidad de artículos de investigación, en donde se han tratado otros aspectos en torno a la $\frac{1}{n}$-homogeneidad. Por ejemplo, en conos o bien en otro tipo de hiperespacios como los llamados productos simétricos. Una buena cantidad de dichos artículos han sido liderados por la doctora P. Pellicer-Covarrubias. En México también se han dirigido Tesis de Licenciatura y de Doctorado, en donde la caracterización de continuos, conos o hiperespacios que son $\frac{1}{n}$-homogéneos, es la parte medular del trabajo a desarrollar. Algunos de los artículos de investigación al respecto son [32], [40], [42], [43], [55], [56] y [57], publicados en conjunto con los doctores Ma. de Jesús López, S. Macías, P. Minc, R. Pichardo-Mendoza y A. Santiago-Santos, así como con el Maestro en Ciencias R. Jiménez-Hernández. Otros investigadores que recientemente se han interesado en el tema son J. P. Boroński, B. Vejnar, P. Pyrih, J. Bobok, G. Gruenhage y G. Kozlowski ([9], [10], [11] y [12]).

Actualmente los doctores A. Illanes y R. Hernández-Guitiérrez se encuentran trabajando en la determinación del grado de homogeneidad (el número de órbitas que posee un espacio) de los hiperespacios $F_m(X)$ y $C_m(X)$, cuando X es un arco o una curva cerrada simple. En colaboración con los doctores G. Acosta y L. G. Oversteegen, la autora del presente trabajo se encuentra realizando investigación en torno a los abanicos no suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones y Notación

Este trabajo está enmarcado dentro de la Teoría de Continuos y, más específicamente, en el estudio de los continuos $\frac{1}{n}$-homogéneos. En el presente capítulo enunciaremos las definiciones, los resultados más generales y la notación que usaremos.

Los símbolos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ denotarán a los números naturales y a los números reales, respectivamente. A menos que digamos explícitamente lo contrario, $\mathbb{R}$ tendrá la topología usual y cualquiera de sus subconjuntos tendrá la correspondiente topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}$. Si A es un conjunto, su cardinalidad se denotará por $|A|$. Decimos que A es ***degenerado*** si $|A| = 1$. Decimos que A es ***no degenerado*** si $|A| \geq 2$.

Sean X un espacio topológico y $A \subset X$. Denotaremos al ***interior***, la ***cerradura*** y la ***frontera*** de A en X, como $\mathrm{Int}_X(A)$, $\mathrm{Cl}_X(A)$ y $\mathrm{Bd}_X(A)$, respectivamente. Denotaremos por 1_X a la función identidad de X en X. Además, si $x \in X$, una ***vecindad de*** x ***en*** X es un subconjunto G de X para el que existe un abierto U en X tal que $x \in U \subset G$. En otras palabras, una vecindad de x en X, es un superconjunto de algún abierto en X que contiene al punto x. Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, denotaremos por $\mathrm{diam}(A)$ al ***diámetro del conjunto*** A.

Si f es una función con dominio X y $A \subset X$, denotamos por $f|_A$ a la restricción de f al conjunto A.

A continuación indicaremos, utilizando la noción de orden definida originalmente por K. Kuratowski, que los puntos de un espacio se pueden dividir en tres tipos. Dicha división resultará importante a lo largo del presente trabajo.

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico, $p \in X$ y β un cardinal. Decimos que p* ***tiene orden menor o igual que*** *β en X, y escribimos $\operatorname{ord}_X(p) \leq \beta$, si p tiene una base local $\mathfrak{B}$ tal que, para cada $U \in \mathfrak{B}$, $|\operatorname{Bd}_X(U)| \leq \beta$. Decimos que p* ***tiene orden*** *β en X, y escribimos $\operatorname{ord}_X(p) = \beta$, si $\operatorname{ord}_X(p) \leq \beta$ y $\operatorname{ord}_X(p) \nleq \alpha$, para cada cardinal α tal que $\alpha < \beta$.*

Dado un espacio X, consideramos los siguientes conjuntos:

$$E(X) = \{x \in X \colon \operatorname{ord}_X(x) = 1\}, \quad O(X) = \{x \in X \colon \operatorname{ord}_X(x) = 2\}$$

y

$$R(X) = \{x \in X \colon \operatorname{ord}_X(x) \geq 3\}.$$

A los elementos de $E(X), O(X)$ y $R(X)$ los llamamos ***puntos extremos***, ***puntos ordinarios*** y ***puntos ramificación*** de X, respectivamente. Estos conjuntos serán de gran importancia en el Capítulo 3, para la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas.

Los conceptos definidos hasta el momento son válidos para espacios en general. Sin embargo, a lo largo de este trabajo, consideraremos espacios T_1 y, por lo general, continuos. Un ***continuo*** es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Si X es un continuo, entonces un ***subcontinuo*** de X es un subconjunto de X que es cerrado, conexo y no vacío. Durante este trabajo denotaremos por I al intervalo unitario $[0, 1]$. Los continuos homeomorfos a I los llamamos ***arcos***, mientras que a los continuos homeomorfos a la circunferencia unitaria, los llamaremos ***curvas cerradas simples***.

Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, decimos que X es ***localmente conexo en*** x, si para cada vecindad N de x, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $x \in V \subset N$. Además, X es ***localmente conexo*** si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos. Decimos que X es ***arcoconexo*** si para cada $p, q \in X$, existe una función continua e inyectiva $f \colon [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$. A la imagen $f([0, 1])$ de tal función se le llama un ***arco*** en X de p a q Si A es un arco, entonces existe un homeomorfismo $f\colon [0,1] \to A$. Sean $p = f(0)$ y $q = f(1)$. Es fácil probar que si $h\colon [0,1] \to A$ es un homeomorfismo, entonces $\{h(0), h(1)\} = \{p, q\}$. Por lo tanto, p y q son puntos especiales de A. A saber se llaman ***puntos finales*** de A. En general, si decimos que A es un arco de p a q, entendemos que A es un arco con puntos finales p y q y, además, que existe un homeomorfismo $f\colon [0,1] \to A$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Notemos que si A es un arco de p a q, entonces $E(A) = \{p, q\}$, por lo que p y q son también los puntos extremos de A. Sin embargo, cuando tratemos con un arco, a sus puntos extremos preferiremos llamarlos puntos finales.

Los arcos y las curvas cerradas simples son casos particulares de los continuos que se presentan en la siguiente definición.

Definición 1.2. *Una **gráfica finita** es un continuo que es unión finita de arcos, de manera que cualesquiera dos de ellos, son ajenos o se intersectan en uno o en sus dos puntos finales. Un **árbol** es una gráfica finita sin curvas cerradas simples.*

Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, decimos que X es ***conexo en pequeño en*** x, si para cada vecindad N de x, existe un subconjunto conexo V de X tal que $x \in \mathrm{Int}_X(V) \subset V \subset N$. Es fácil probar que si X es localmente conexo en x, entonces X es conexo en pequeño en x. La otra implicación no siempre se cumple, por ejemplo, en [53, Teorema 7.6, pág. 69] se muestra un continuo X y se prueba a detalle que existe $x \in X$ tal que X es conexo en pequeño en x, pero no localmente conexo en x. Sin embargo, es conocido que un espacio X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en todos sus puntos (ver [53, Teorema 7.8, pág. 73] o en [47, Definición 8.1 (iii), pág. 120]).

Supongamos que un continuo X no es conexo en pequeño en un punto x de X. Entonces existe un subcontinuo no degenerado K de X tal que $p \in K$ y X no es conexo en pequeño en cada punto de K. Esto se deduce de [47, Teorema 5.12, pág. 76]. Notemos que $|K| > \aleph_0$, así que si un continuo no es conexo en pequeño en un punto, entonces no es conexo en pequeño en una cantidad no numerable de puntos. A lo largo del presente trabajo, utilizaremos este resultado en más de una ocasión.

1.2. Orden y Componentes

Con respecto a la noción de orden, en [36] se muestran algunos resultados, entre ellos el siguiente que relaciona el orden de un punto en un espacio, con el orden del mismo punto en subconjuntos. La parte 1) aparece probada en [36, Teorema 3, pág. 278], mientras que la parte 2) se demuestra en [36, Teorema 4, pág. 278].

Teorema 1.3. *Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ y $p \in A$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $\mathrm{ord}_A(p) \leq \mathrm{ord}_X(p)$;

2) *si A es abierto en X, entonces* $\mathrm{ord}_A(p) = \mathrm{ord}_X(p)$.

Corolario 1.4. *Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Si $p \in \mathrm{Int}_X(A)$, entonces:*

$$\mathrm{ord}_A(p) = \mathrm{ord}_X(p).$$

Demostración. Sea $p \in \mathrm{Int}_X(A)$. Notemos que, por la parte 2) del Teorema 1.3, $\mathrm{ord}_{\mathrm{Int}_X(A)}(p) = \mathrm{ord}_X(p)$. Combinando esto con la parte 1) del Teorema 1.3, sucede que:

$$\mathrm{ord}_X(p) = \mathrm{ord}_{\mathrm{Int}_X(A)}(p) \leq \mathrm{ord}_A(p) \leq \mathrm{ord}_X(p).$$

Luego $\mathrm{ord}_A(p) = \mathrm{ord}_X(p)$. □

La prueba de la parte 2) del siguiente teorema se puede consutar en [26, Teorema 3.3, pág. 112]. Recordemos que las componentes de un subconjunto C de un espacio topológico X, son los subconjuntos conexos maximales de C, con respecto al orden de la contención.

Teorema 1.5. *Si $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo entre los espacios X y Y, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $x \in X$, entonces* $\mathrm{ord}_X(x) = \mathrm{ord}_Y(f(x))$;

2) *si A es componente de $C \subset X$, entonces $f(A)$ es componente de $f(C) \subset Y$;*

3) $f(E(X)) = E(Y)$, $f(O(X)) = O(Y)$ *y* $f(R(X)) = R(Y)$.

Demostración. Sea $x \in X$. Si $\mathrm{ord}_X(x) \leq \beta$, podemos tomar una base local $\mathfrak{B}$ de x, con las propiedades indicadas en la Definición 1.1. Hagamos $\mathfrak{C} = \{f(U) : U \in \mathfrak{B}\}$. Como f es un homeomorfismo, $\mathfrak{C}$ es una base local de $f(x)$ y, para cada $U \in \mathfrak{B}\}$, $\mathrm{Bd}_Y(f(U)) = f(\mathrm{Bd}_X(U))$. Luego, $\mathrm{ord}_Y(f(x)) \leq \beta$. Como f^{-1} también es un homeomorfismo, $\mathrm{ord}_X(x) \leq \beta$ si y sólo si $\mathrm{ord}_Y(f(x)) \leq \beta$. De esta observación y la Definición 1.1, se obtiene 1).

De 1) y las respectivas definiciones de punto extremo, punto ordinario y punto de ramificación, obtenemos que $f(E(X)) \subset E(Y)$, $f(O(X)) \subset O(Y)$ y $f(R(X)) \subset R(Y)$. Las igualdades se obtienen al considerar que f^{-1} también es un homeomorfismo. Esto prueba 3). $\square$

Teorema 1.6. *Supongamos que A y C son dos subconjuntos abiertos del espacio métrico X. Si A y C son homeomorfos, entonces $|A \cap R(X)| = |C \cap R(X)|$. Si, además, $R(X)$ es finito y los conjuntos A y C son comparables, se cumple que:*

$$A \cap R(X) = C \cap R(X).$$

Demostración. Sea $f\colon A \to C$ un homeomorfismo. Por la parte 3) del Teorema 1.5, $f(R(A)) = R(C)$. Como A y C son abiertos, por la parte 2) del Teorema 1.3, $R(A) = A \cap R(X)$ y $R(C) = C \cap R(X)$. Luego:

$$f(A \cap R(X)) = f(R(A)) = R(C) = C \cap R(X).$$

Ya que f es biyectiva, resulta que $|A \cap R(X)| = |f(A \cap R(X))| = |C \cap R(X)|$.

Ahora supongamos que $R(X)$ es finito y que A y C son comparables. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subset C$. Entonces, $A \cap R(X) \subset C \cap R(X)$ y, ya que $A \cap R(X)$ y $B \cap R(X)$ son finitos y de la misma cardinalidad, se cumple la igualdad. $\square$

Para la prueba del siguiente resultado utilizaremos el hecho de que si X y Y son espacios métricos y compactos, entonces una función $f\colon X \to Y$ es continua en un punto $a \in X$ si y sólo si para cada sucesión $\{a_n\}_n$ en X que converge al punto a y tal que la sucesión $\{f(a_n)\}_n$ converge a un punto $y \in X$, se tiene que $y = f(a)$.

Teorema 1.7. *Sean X un espacio métrico y compacto, $A, B \subset X$ no cerrados en X y $c, d \in X$ tales que* $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$ *y* $\mathrm{Cl}_X(B) = B \cup \{d\}$. *Si $f\colon A \to B$*

es un homeomorfismo, entonces la función $g\colon \mathrm{Cl}_X(A) \to \mathrm{Cl}_X(B)$ *definida, para cada* $x \in \mathrm{Cl}_X(A)$, *como:*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A; \\ d, & \text{si } x = c; \end{cases}$$

es un homeomorfismo que extiende a f.

Demostración. Como f es biyectiva, g también lo es y su inversa está dada por $(g|_B)^{-1} = f^{-1}$ y $g^{-1}(d) = c$, es decir, g^{-1} es la extensión de f^{-1} que se obtiene mandando d al punto c. Para ver que g es continua en c, supongamos que $\{a_n\}_n$ es una sucesión de puntos de $\mathrm{Cl}_X(A)$ convergente a c y tal que la sucesión $\{g(a_n)\}_n$ converge a un elemento $b \in \mathrm{Cl}_X(B)$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $g(a_n) = f(a_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $b \in B$ y hagamos $a = g^{-1}(b) = f^{-1}(b)$. Notemos que $a \in A$. Como f^{-1} es un homeomorfismo de B en A y $\{f(a_n)\}_n$ es una sucesión de elementos de B cuyo límite es elemento de B, por [44, Proposición 6.1.5, pág. 6] obtenemos lo siguiente:

$$a = f^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(f(a_n)\right) = \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Esto implica que $c = a$, y como $a \in A$, c es elemento de A. Luego, $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\} = A$ y A es cerrado en X. En vista de que esto es una contradicción, resulta que $b = d = g(c)$. Esto prueba que g es continua en c. Como f es una función continua y $g|_A = f$, sucede que g es continua en A. Por lo tanto, g es una función continua. Ya que f^{-1} es una función continua tal que $g^{-1}|_B = f^{-1}$ y $g^{-1}(d) = c$, aplicando el mismo procedimiento que realizamos con f, se puede demostrar que g^{-1} es continua. Por lo tanto, g es un homeomorfismo entre $\mathrm{Cl}_X(A)$ y $\mathrm{Cl}_X(B)$. □

La parte 1) del siguiente resultado, es conocida como el Teorema de los Golpes en la Frontera. Su demostración puede verse en [47, Teorema 5.6, pág. 74]. La parte 2) es una consecuencia de la parte 1), y su demostración puede verse en [47, Corolario 5.9, pág. 75].

Teorema 1.8. *Sean* X *un continuo y* E *un subconjunto propio y no vacío de* X. *Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si* A *es una componente de* E, *entonces* $\mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(X - E) \neq \emptyset$;

2) *si* E *es un subcontinuo de* X, *entonces, para cada componente* A *de* $X - E$, *sucede que* $A \cup E$ *es un subcontinuo de* X.

1.3. Conexidad Local y Puntos de Corte

Sea X un espacio conexo. Decimos que $c \in X$ es un ***punto de corte*** de X si $X - \{c\}$ no es conexo. El símbolo $\mathrm{Cut}(X)$ denotará al conjunto de todos los puntos de corte de X (notemos que $\mathrm{Cut}(X)$ puede ser el conjunto vacío). Además, si $c \in X$, denotaremos por $\mathcal{A}_{\mathbf{c}}$ a la familia de todas las componentes de $X - \{c\}$.

En [26, Teorema 4.2, pág. 113] se caracteriza a los espacios localmente conexos, como aquéllos en los que las componentes de los conjuntos abiertos son nuevamente conjuntos abiertos. Aplicando la parte 2) del Teorema 1.3, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Sean X un espacio métrico conexo, localmente conexo, $c \in X$ y $x \in X - \{c\}$. Si A es la componente de $X - \{c\}$ que tiene a x, entonces* $\mathrm{ord}_A(x) = \mathrm{ord}_X(x)$.

El siguiente resultado muestra propiedades de las componentes del complemento de un punto de corte en un espacio topológico. Recordemos que el símbolo $\mathcal{A}_c$ denota a la familia de todas las componentes de $X - \{c\}$.

Teorema 1.10. *Sean X un continuo y $c \in X$. Entonces, para cada componente A de $X - \{c\}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$ *y* $\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset A$;

2) *si A es abierto en X, entonces todo punto de corte de* $\mathrm{Cl}_X(A)$ *es un punto de corte de X, es decir,* $\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset \mathrm{Cut}(X)$;

3) *si* $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$ *y A es abierto en X, entonces* $\mathrm{Cl}_X(A)$ *es un subcontinuo de X sin puntos de corte, es decir,* $\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(A)) = \emptyset$.

Demostración. Sea A una componente de $X - \{c\}$. Como $X - \{c\}$ es un subconjunto propio y no vacío de X, por la parte 1) del Teorema 1.8 (aplicada a $E = X - \{c\}$), sucede que:

$$\emptyset \neq \mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(X - (X - \{c\}) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap \{c\}.$$

Luego $c \in \mathrm{Cl}_X(A)$ y, así, $A \cup \{c\} \subset \mathrm{Cl}_X(A)$. Por la parte 2) del Teorema 1.8 (aplicada a $E = \{c\}$), $A \cup \{c\}$ es un subcontinuo de X. En particular, $A \cup \{c\}$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a A. Entonces $\mathrm{Cl}_X(A) \subset A \cup \{c\}$.

Esto prueba que $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$. Ahora supongamos que a es un punto de corte de $\mathrm{Cl}_X(A)$. Como $\mathrm{Cl}_X(A) - \{c\} = A$ y A es conexo, $a \neq c$. Por lo tanto, $a \in \mathrm{Cl}_X(A) - \{c\} = A$. Esto prueba 1).

Ahora supongamos que A es abierto en X y que a es un punto de corte de $\mathrm{Cl}_X(A)$. Por 1), $a \in A$. Notemos que $A \in \mathcal{A}_c$. Definamos:

$$B = \bigcup\{C \in \mathcal{A}_c : C \neq A\}.$$

Para cada $C \in \mathcal{A}_c - \{A\}$, tenemos que $C \subset B$ y, por 1), $c \in \mathrm{Cl}_X(C) \subset \mathrm{Cl}_X(B)$. Entonces $B \cup \{c\} \subset \mathrm{Cl}_X(B)$. Como A es abierto en X, $X - A = B \cup \{c\}$ es un subconjunto cerrado de X que contiene a B. Luego $\mathrm{Cl}_X(B) \subset B \cup \{c\}$. Por lo tanto, $\mathrm{Cl}_X(B) = B \cup \{c\}$. Como $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$, $\mathrm{Cl}_X(B) = B \cup \{c\}$ y los conjuntos A y B son disjuntos, deducimos que $A \cap \mathrm{Cl}_X(B) = \emptyset$ y $\mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \emptyset$. Por lo tanto, los conjuntos A y B están mutuamente separados.

Como a es un punto de corte de $\mathrm{Cl}_X(A)$, existen conjuntos no vacíos y mutuamente separados H y K tales que $\mathrm{Cl}_X(A) - \{a\} = H \cup K$. Ya que $c \in \mathrm{Cl}_X(A) - \{a\}$, podemos suponer, sin perder generalidad, que $c \in K$. Entonces $H \subset A$ y:

$$X - \{a\} = \big(\mathrm{Cl}_X(A) - \{a\}\big) \cup B = \big(H \cup K\big) \cup B = H \cup \big(K \cup B\big).$$

Además, H y $K \cup B$ son subconjuntos no vacíos de X tales que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}_X(H) \cap (K \cup B) &= (\mathrm{Cl}_X(H) \cap K) \cup (\mathrm{Cl}_X(H) \cap B) = \\ &= \mathrm{Cl}_X(H) \cap B \subset \mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \emptyset\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}H \cap \mathrm{Cl}_X(K \cup B) &= (H \cap \mathrm{Cl}_X(K)) \cup (H \cap \mathrm{Cl}_X(B)) = \\ &= H \cap \mathrm{Cl}_X(B) \subset A \cap \mathrm{Cl}_X(B) = \emptyset.\end{aligned}$$

Esto implica que a es un punto de corte de X, probando así 2).

Para probar 3), supongamos que $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$ y que A es una componente de $X - \{c\}$ tal que A es abierto en X. Entonces $\mathrm{Cl}_X(A)$ es un subcontinuo de X tal que, por 1) y 2), $\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(A)) \subset A \cap \mathrm{Cut}(X) = A \cap \{c\} = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(A)) = \emptyset$, probando así 3). $\square$

Un espacio X es **cíclicamente conexo** si cualesquiera dos de sus puntos están en una curva cerrada simple contenida en X. En [60, Teorema 9.3, pág. 79] se prueba que los continuos localmente conexos sin puntos de corte son cíclicamente conexos. Así, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.11. *Sea X un continuo localmente conexo con un único punto de corte c. Para cada componente A de $X - \{c\}$, sucede que $\mathrm{Cl}_X(A)$ es un continuo localmente conexo y cíclicamente conexo.*

Demostración. Sea A una componente de $X - \{c\}$. Primero veamos que $\mathrm{Cl}_X(A)$ es localmente conexo en cada punto de A. Sean $a \in A$ y U un abierto en $\mathrm{Cl}_X(A)$ tal que $a \in U$. Utilizando la parte 1) del Teorema 1.10, $U - \{c\} \subset \mathrm{Cl}_X(A) - \{c\} = A$ y, así, $U - \{c\}$ es abierto en A. Ya que X es localmente conexo y $X - \{c\}$ es abierto en X, A también es abierto en X. Luego, $U - \{c\}$ es abierto en X. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $a \in V \subset U - \{c\}$. Como $V \subset U - \{c\} \subset A \subset \mathrm{Cl}_X(A)$, resulta que V también es abierto en $\mathrm{Cl}_X(A)$. Esto prueba que $\mathrm{Cl}_X(A)$ es localmente conexo en a. En particular $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$ es conexo en pequeño en cada punto de A. Si $\mathrm{Cl}_X(A)$ no es conexo en pequeño en c entonces, por [47, Teorema 5.12, pág. 76], $\mathrm{Cl}_X(A)$ no es conexo en pequeño en una cantidad no numerable de puntos. En particular, $\mathrm{Cl}_X(A)$ no es conexo en pequeño en algún punto de A, lo cual contradice lo que acabamos de demostrar. Por consiguiente, $\mathrm{Cl}_X(A)$ es conexo en pequeño en c. Esto prueba que $\mathrm{Cl}_X(A)$ es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos. Así, por [53, Teorema 7.8, pág. 73], $\mathrm{Cl}_X(A)$ es localmente conexo.

Por la parte 3) del Teorema 1.10, $\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(A)) = \emptyset$. Luego, por [60, Teorema 9.3, pág. 79], $\mathrm{Cl}_X(A)$ es cíclicamente conexo. □

1.4. La Métrica de Hausdorff

Algunas veces será de utilidad estudiar a un continuo a través de algunos de sus subconjuntos, dotando a la familia de dichos subconjuntos de una topología que se relacione directamente con la del continuo. Dado un continuo X, los ***hiperespacios*** de X son familias de subconjuntos de X que satisfacen algunas propiedades particulares. Uno de los más estudiados es el siguiente:

$$2^X = \{A \subset X \colon A \text{ es cerrado y no vacío}\}.$$

Se puede dotar a 2^X de una métrica especial, llamada ***métrica de Hausdorff***, la cual describiremos a continuación. Denotemos por d a la métrica en el continuo X. Para cada $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, definimos el siguiente conjunto:

$$N_X(A, \varepsilon) = \{x \in X\colon \text{ existe } a \in A \text{ tal que } d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Dados dos elementos A y B de 2^X, definimos la métrica de Hausdorff de A a B como:

$$H(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0\colon B \subset N_X(A, \varepsilon) \text{ y } A \subset N_X(B, \varepsilon)\}.$$

En [47, Teorema 4.2, pág. 53] se prueba que la función $H\colon 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida de esta manera, es una métrica en 2^X. Además, en [47, Teorema 4.6 pág. 55] se muestra que dicha métrica depende únicamente de la topología de X.

A lo largo del presente trabajo, cuando hagamos referencia a la distancia entre dos subconjuntos cerrados y no vacíos de un continuo X, se entenderá que se está considerando la métrica de Hausdorff. Una vez que 2^X posee dicha métrica, la convergencia de sucesiones en 2^X se entenderá con respecto a la métrica de Hausdorff. Entonces, una sucesión $\{A_n\}_n$ en 2^X converge a un elemento $A \in 2^X$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$.

Los siguientes dos resultados son ampliamente conocidos, incluso, son ejercicios básicos de los cursos de hiperespacios, por lo cual no presentaremos su demostración.

Teorema 1.12. *Sean X un continuo, A y B dos elementos de 2^X y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $B \subset N_X(A, \varepsilon)$ y $A \subset N_X(B, \varepsilon)$.*

Teorema 1.13. *Sean X un continuo, $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ dos sucesiones en 2^X con límites A y B, respectivamente. Entonces:*

1) *Si existe un subconjunto infinito I de $\mathbb{N}$ tal que $A_n \subset B_n$ para toda $n \in I$, entonces $A \subset B$;*

2) *$p \in A$ si y sólo si existe una sucesión $\{p_n\}_n$ en X tal que*

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p \quad y \quad p_n \in A_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

1.5. Espacios $\frac{1}{n}$-homogéneos

Dado un espacio X, denotamos por $\mathcal{H}(X)$ al ***grupo de homeomorfismos*** de X en X. La ***órbita de*** x ***en*** X es el conjunto:

$$\mathrm{Orb}_X(x) = \{h(x) : h \in \mathcal{H}(X)\}.$$

Entonces $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$ si y sólo si existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(x) = y$. Notemos que la órbita de x en X, es la órbita bajo la acción de $\mathcal{H}(X)$ en un punto $x \in X$. De la definición es fácil notar que la familia de las órbitas de un espacio X es una partición de X. Es decir, la colección:

$$\mathfrak{R}(X) = \{\mathrm{Orb}_X(x)\colon x \in X\}$$

satisface las siguientes tres propiedades:

a) Para cada $x \in X$, ocurre que $\mathrm{Orb}_X(x) \neq \emptyset$, pues $x \in \mathrm{Orb}_X(x)$, para toda $x \in X$ ($1_X\colon X \to X$ es un homeomorfismo de X en X tal que $1_X(x) = x$).

b) $X = \bigcup_{x\in X} \mathrm{Orb}_X(x)$, es decir, X es la unión de sus órbitas.

c) Si $x, y \in X$ y $\mathrm{Orb}_X(x) \cap \mathrm{Orb}_X(y) \neq \emptyset$, entonces $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$. Para ver esto, tomemos un punto $z \in \mathrm{Orb}_X(x) \cap \mathrm{Orb}_X(y)$ así, existen homeomorfismos $h_1\colon X \to X$ y $h_2\colon X \to X$ tales que $h_1(x) = z$ y $h_2(y) = z$. Si $a \in \mathrm{Orb}_X(x)$, entonces existe un homeomorfismo $h_3\colon X \to X$ tal que $h_3(x) = a$. Luego, $h = h_3 \circ h_1^{-1} \circ h_2$ es un homeomorfismo de X en X tal que $h(y) = h_3(h_1^{-1}(h_2(y))) = h_3(h_1^{-1}(z)) = h_3(x) = a$. En consecuencia, $a \in \mathrm{Orb}_X(y)$. Esto prueba que $\mathrm{Orb}_X(x) \subset \mathrm{Orb}_X(y)$. De manera similar tenemos que $\mathrm{Orb}_X(y) \subset \mathrm{Orb}_X(x)$. Por lo tanto, $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$.

Aplicando los incisos a) y c) se deduce lo siguiente:

d) Si $x, y \in X$ y $y \notin \mathrm{Orb}_X(x)$, entonces $\mathrm{Orb}_X(x) \cap \mathrm{Orb}_X(y) = \emptyset$.

e) $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$ si y sólo si $x \in \mathrm{Orb}_X(y)$.

Lo anterior nos permite decir que, para un espacio X, el conjunto no vacío $\mathcal{O}$ es una ***órbita de*** X si y sólo si existe $x \in X$ tal que $\mathcal{O} = \mathrm{Orb}_X(x)$. Además, se cumple la siguiente afirmación:

f) y y z están en una misma órbita de X si y sólo si existe un homeomorfismo $f\colon X \to X$ tal que $f(y) = z$. En efecto, si y, z son dos elementos de la órbita $\mathrm{Orb}_X(x)$, existen homemorfismos $h_1, h_2\colon X \to X$ tales que $h_1(x) = y$ y $h_2(x) = z$. Luego $f = h_2 \circ h_1^{-1}$ es un homeomorfismo de X en X tal que $f(y) = z$. La otra implicación es clara.

El ***grado de homogeneidad*** de un espacio X, es la cardinalidad de la familia de las órbitas de X y lo denotaremos por η_X. Como vemos, en la definición de espacio $\frac{1}{n}$-homogéneo (Definición 0.1), estamos interesados en particular en los espacios cuyo grado de homogeneidad es finito.

El siguiente resultado proporciona algunas propiedades adicionales de las órbitas de un espacio.

Teorema 1.14. *Sea X un espacio. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Para toda órbita $\mathcal{O}$ de X y cada $f \in \mathcal{H}(X)$, sucede que $f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$.*

2) *Si $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}_1$ son órbitas de X tales que $\mathcal{O} \cap \mathrm{Cl}_X(\mathcal{O}_1) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{O} \subset \mathrm{Cl}_X(\mathcal{O}_1)$.*

3) *Si $\mathcal{O}$ es una órbita de X tal que $\mathrm{Int}_X(\mathcal{O}) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{O}$ es abierto en X.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{O}$ es una órbita de X. Entonces existe $z \in X$ tal que $\mathcal{O} = \mathrm{Orb}_X(z)$. Para probar 1), tomemos $f \in \mathcal{H}(X)$, $x \in \mathcal{O}$ y un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(z) = x$. Notemos que $f \circ h\colon X \to X$ es un homeomorfismo tal que $(f \circ h)(z) = f(h(z)) = f(x)$. Se sigue que $f(x) \in \mathrm{Orb}_X(z) = \mathcal{O}$, por lo que, $f(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$. Aplicando lo que acabamos de probar, al homeomorfismo f^{-1}, obtenemos que $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ o, equivalentemente, que $\mathcal{O} \subset f(\mathcal{O})$. Por lo tanto, $\mathcal{O} = f(\mathcal{O})$. Esto concluye la prueba de 1).

Para ver 2), sean $x \in \mathcal{O}$ y U un abierto en X tal que $x \in U$. Tomemos $y \in \mathcal{O} \cap \mathrm{Cl}_X(\mathcal{O}_1)$. Como $x, y \in \mathcal{O}$, por e), existe $f \in \mathcal{H}(X)$ tal que $f(x) = y$. Como $f(U)$ es un abierto en X tal que $y \in f(U)$ y $y \in \mathrm{Cl}_X(\mathcal{O}_1)$, sucede que $f(U) \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Ahora bien, $U = f^{-1}(f(U))$ y, por 1), $f^{-1}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_1$, entonces $U \cap \mathcal{O}_1 = f^{-1}(f(U) \cap \mathcal{O}_1) \neq \emptyset$. Luego, $x \in \mathrm{Cl}_X(\mathcal{O}_1)$. Esto prueba 2).

Para ver 3), sea $y \in \mathcal{O}$. Tomemos $x \in \mathrm{Int}_X(\mathcal{O})$. Como $x, y \in \mathcal{O}$, por e), existe $f \in \mathcal{H}(X)$ tal que $f(x) = y$. Entonces $f(\mathrm{Int}_X(\mathcal{O}))$ es un abierto de X que tiene y. Además, por 1), $f(\mathrm{Int}_X(\mathcal{O})) \subset f(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Por lo tanto, $\mathcal{O}$ es abierto en X. Esto prueba 3). $\square$

El siguiente teorema generaliza la parte 1) del Teorema 1.14.

Teorema 1.15. *Sean X y Y dos espacios y $f\colon X \to Y$ un homeomorfismo. Si $z \in X$, entonces:*

$$f(\mathrm{Orb}_X(z)) = \mathrm{Orb}_Y(f(z)).$$

Por lo tanto, la imagen bajo f de una órbita de X, es una órbita de Y.

Demostración. Tomemos $z \in X$ y supongamos que $y \in f(\mathrm{Orb}_X(z))$. Sean $x \in \mathrm{Orb}_X(z)$ tal que $y = f(x)$ y $h\colon X \to X$ un homeomorfismo tal que $h(z) = x$. Entonces $f \circ h^{-1} \circ f^{-1}\colon Y \to Y$ es un homeomorfismo tal que:

$$(f \circ h^{-1} \circ f^{-1})(y) = (f(h^{-1}(f^{-1}(f(x))))) = f(h^{-1}(x)) = f(z).$$

En consecuencia, $y \in \mathrm{Orb}_Y(f(z))$. Esto muestra que $f(\mathrm{Orb}_X(z)) \subset \mathrm{Orb}_Y(f(z))$. Aplicando lo que acabamos de mostrar, al homeomorfismo f^{-1}, obtenemos que:

$$f^{-1}(\mathrm{Orb}_Y(f(z))) \subset \mathrm{Orb}_X(f^{-1}(f(z))) = \mathrm{Orb}_X(z)$$

o, equivalentemente, que $\mathrm{Orb}_Y(f(z)) \subset f(\mathrm{Orb}_X(z))$. Por lo tanto:

$$f(\mathrm{Orb}_X(z)) = \mathrm{Orb}_Y(f(z)).$$

$\square$

Corolario 1.16. *Si X y Y son dos espacios homeomorfos, entonces $\eta_X = \eta_Y$.*

Demostración. Sean $h\colon X \to Y$ un homeomorfismo, $\mathfrak{R}(X)$ y $\mathfrak{R}(Y)$, las familias de las órbitas de X y Y, respectivamente. Por el Teorema 1.15, para cada $x \in X$, ocurre que $h(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_Y(h(x))$. Esto nos permite definir la función $H\colon \mathfrak{R}(X) \to \mathfrak{R}(Y)$, para cada $\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathfrak{R}(X)$, como sigue:

$$H(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_Y(h(x)).$$

Como h es un homeomorfismo, la imagen bajo h de una órbita de X distinta de $\mathrm{Orb}_X(x)$, es una órbita de Y distinta de $\mathrm{Orb}_Y(h(x))$. Esto implica que H

es inyectiva. Incluso H es suprayectiva pues, si $y \in Y$, entonces $h^{-1}(y) \in X$ y $\mathrm{Orb}_X(h^{-1}(y)) \in \mathfrak{R}(X)$ es tal que

$$H(\mathrm{Orb}_X(h^{-1}(y))) = \mathrm{Orb}_Y(h(h^{-1}(y))) = \mathrm{Orb}_Y(y).$$

Por lo tanto, H es biyectiva y, de esta manera, X y Y tienen el mismo número de órbitas. $\square$

Sean X un espacio conexo y $c \in X$. Recordemos que denotamos por $\mathcal{A}_c$ a la familia de todas las componentes de $X - \{c\}$.

Teorema 1.17. *Sean X un continuo localmente conexo y $c \in X$ tales que $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$. Si A y B son dos elementos homeomorfos de $\mathcal{A}_c$, entonces existe un homeomorfismo F, de X en X, tal que $F(A) = B$, $F(c) = c$ y $F(\mathrm{Orb}_A(a)) = \mathrm{Orb}_B(F(a))$, para cada $a \in A$.*

Demostración. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{A}_c$. Sea $B \in \mathcal{A}_c$. Por la parte 1) del Teorema 1.10, $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$ y $\mathrm{Cl}_X(B) = B \cup \{c\}$. Como A y B son homeomorfos, por el Teorema 1.7, podemos tomar un homeomorfismo $g\colon A\cup\{c\} \to B\cup\{c\}$ tal que $g(A) = B$ y $g(c) = c$ (podemos suponer que g es la función identidad si $B = A$). Como X es localmente conexo y $X - \{c\}$ es abierto en X, A y B son abiertos en X, por lo que, $X - (A\cup B)$ es cerrado en X. En consecuencia, $\mathrm{Cl}_X(A) = A\cup\{c\}$, $\mathrm{Cl}_X(B) = B\cup\{c\}$ y $X - (A\cup B)$ son tres subconjuntos cerrados de X que, dos a dos, se intersectan únicamente en c. Sea $F\colon X \to X$ la función definida como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in \mathrm{Cl}_X(A); \\ g^{-1}(x), & \text{si } x \in \mathrm{Cl}_X(B); \\ x, & \text{si } x \in X - (A \cup B). \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} F(X) &= F(\mathrm{Cl}_X(A) \cup \mathrm{Cl}_X(B) \cup (X - (A \cup B))) = \\ &= F(\mathrm{Cl}_X(A)) \cup F(\mathrm{Cl}_X(B)) \cup F(X - (A \cup B)) = \\ &= g(\mathrm{Cl}_X(A)) \cup g^{-1}(\mathrm{Cl}_X(B)) \cup \big(X - (A \cup B)\big) \\ &= \mathrm{Cl}_X(B) \cup \mathrm{Cl}_X(A) \cup (X - (A \cup B)) = X. \end{aligned}$$

Notemos que, g, g^{-1} y la función $1_{X-(A\cup B)}$ son homeomorfismos definidos, respectivamente, en $\mathrm{Cl}_X(A)$, $\mathrm{Cl}_X(B)$ y $X - (A \cup B)$, los cuales son cerrados de X que, dos a dos, se intersectan únicamente en c, mientras que $g(c) = c =$

$g^{-1}(c) = 1_{X-(A\cup B)}(c)$. Lo anterior implica que F es un homeomorfismo de X en X. Además, $F(A) = g(A) = B$ y, si $a \in A$, como $F|_A$ es un homeomorfismo de A en B, por el Teorema 1.15, $F(\mathrm{Orb}_A(a)) = \mathrm{Orb}_B(F(a))$. Esto concluye nuestra prueba. □

1.6. Dendritas

En esta sección introduciremos a las dendritas y daremos las definiciones y resultados más generales que serán utilizados en el Capítulo 3, para la clasificación de algunas familias de dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito, y también para la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas.

Definición 1.18. *Una **dendrita** es un continuo localmente conexo y sin curvas cerradas simples.*

Los arcos son continuos localmente conexos. En [53, Teorema 7.22, pág. 81] se prueba que los continuos que son unión finita de subconjuntos cerrados y localmente conexos, son localmente conexos. Entonces, las gráficas finitas son continuos localmente conexos, pero no siempre son dendritas puesto que pueden contener curvas cerradas simples. Dado que los árboles no contienen curvas cerradas simples, los árboles son dendritas. Además, por [47, Teorema 9.28, pág. 154], podemos caracterizar a los árboles como las dendritas con sólo un número finito de puntos extremos. En [47, Teorema 9.10, pág. 144] se caracteriza a los árboles como las dendritas tales que todos sus puntos son de orden finito y sólo un número finito de puntos tiene orden mayor que 2.

Recordemos que si Y es un espacio conexo y $y \in Y$, entonces y es un punto de corte de Y si $Y - \{y\}$ no es conexo. Un continuo Y es ***hereditariamente localmente conexo*** si cada subcontinuo de Y es localmente conexo. Decimos que un continuo Y es ***hereditariamente unicoherente*** si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos de Y es conexa.

En el siguiente teorema mencionamos otros resultados de las dendritas que utilizaremos en este trabajo. La parte 1) aparece probada en [60, (1.3)(i), pág. 89] (también puede consultarse en [47, Corolario 10.6, pág. 167]). La parte 2) se prueba en [60, (1.3)(ii), pág. 89] (alternativamente, puede verse en [47, Proposición 10.9, pág. 169]). La parte 3) aparece probada en [60, (1.2)(ii), pág. 89]. Una prueba de la parte 4) se encuentra en [60, (1.1)(v), pág. 88] (también aparece en [47, Teorema 10.10, pág. 169]). La parte 5) es una consecuencia inmediata de la parte 4) y, finalmente, la parte 6) aparece probada en [60, (1.1)(ii), pág. 88] (se puede consultar también [47, Teorema 10.7, pág. 168]).

Teorema 1.19. *Si X es una dendrita, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Todo subcontinuo de X es una dendrita, en particular, X es hereditariamente localmente conexo;*

2) *todo subconjunto conexo de X es arcoconexo;*

3) *si $p, q \in X$ y $p \neq q$, entonces existe un único arco en X de p a q;*

4) *la intersección de cualesquiera dos subconjuntos conexos de X es conexa;*

5) *X es hereditariamente unicoherente;*

6) *cada elemento de X es un punto extremo de X o bien un punto de corte de X.*

Notación 1.20. *Sea X una dendrita. Dados dos puntos distintos p y q en X, en vista de la propiedad* 3) *del* Teorema 1.19*, podemos denotar por pq al único arco en X de p a q. Convenimos en que $pq = qp$. Si $p = q$, entonces definimos pq como $\{p\}$. Con esto hemos definido pq para cada $p, q \in X$. Además definimos los siguientes conjuntos:*

$$(pq) = pq - \{p, q\}, \quad [pq) = pq - \{q\} \quad y \quad (pq] = pq - \{p\}.$$

Sean X una dendrita y $p, q \in X$ tales que $p \neq q$. Como el arco pq en X es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$, que es conexo, los conjuntos (pq), $[pq)$ y $(pq]$ son homeomorfos a los intervalos conexos $(0, 1)$, $[0, 1)$ y $(0, 1]$, respectivamente.

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 1.21. *Sea X un espacio métrico. Una sucesión $\{X_n\}_n$ de subconjuntos de X se dice que es* ***nula****, si la sucesión $\{\operatorname{diam}(X_n)\}_n$ converge a 0.*

En una dendrita X, si $p \in X$ y $\operatorname{ord}_X(p)$ es finito, entonces éste coincide con el número de componentes de $X - \{p\}$ (ver [60, (1.1)(iv), pág. 88] o bien [47, Teorema 10.13, pág. 170]). Además, si $\operatorname{ord}_X(p)$ es infinito, la familia $\mathcal{A}_p$ de todas las componentes de $X - \{p\}$ es numerable y sus diámetros tienden a cero (ver [60, Corolario (2.2), pág. 90] o bien [60, (2.6), pág. 92]). Es decir, si $\operatorname{ord}_X(p)$ es infinito, entonces la familia $\mathcal{A}_p$ forma una sucesión nula. En este caso decimos que ***el orden de p en X es omega*** y escribimos:

$$\operatorname{ord}_X(p) = \omega.$$

Por lo tanto, para cada $p \in X$ tenemos que $\operatorname{ord}_X(p) = n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, o bien $\operatorname{ord}_X(p) = \omega$. Convenimos en decir que, en una dendrita, el orden es un elemento del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, \omega\} = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. En particular, un punto de ramificación de una dendrita, es un elemento cuyo orden es elemento de $\{3, 4, \ldots, \omega\}$.

Sea X una dendrita. Para cada $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$, definimos:

$$R_n(X) = \{p \in R(X) \colon \operatorname{ord}_X(p) = n\}.$$

Es decir, $R_n(X)$ es el conjunto de puntos de los puntos de ramificación de X, de orden n. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos la siguiente dendrita construida en $\mathbb{R}^2$:

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{n} aa_i \tag{1.6.1}$$

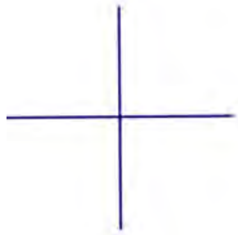
donde $a = (0, 0)$ y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{i^2}\right)$. Consideremos ahora la dendrita:

$$F_\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} aa_i, \tag{1.6.2}$$

construida en $\mathbb{R}^2$, donde $a = (0, 0)$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $a_i = \left(\frac{1}{i}, \frac{1}{i^2}\right)$. Al punto a le llamaremos el vértice tanto,de F_n, para $n \in \mathbb{N}$, como de F_ω.

Para $n \in \left(\mathbb{N} - \{1, 2\}\right)$, un ***$n$-odo simple*** es un continuo homeomorfo a la dendrita F_n. Si X es un n-odo simple con vértice a, entonces a es el único punto de ramificación y su órden es n; es decir, $R(X) = R_n(X) = \{a\}$.

Notemos que F_ω es una dendrita tal que $R(F_\omega) = R_\omega(F_\omega)$ y $|R(F_\omega)| = 1$. Además, si X es una dendrita tal que $R(X) = R_\omega(X)$ y $|R(X)| = 1$, X es homeomorfo a F_ω.



Un 4-odo Simple

La Dendrita F_ω

Entonces, salvo homeomorfismos, $F_3, F_4, \ldots, F_\omega$ representan a todas las dendritas con un único punto de ramificación. Es fácil ver que cada una de estas dendritas es $\frac{1}{3}$-homogénea. Por tanto, todas las dendritas con un único punto de ramificación son $\frac{1}{3}$-homogéneas.

En el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en [36, Teorema 15, pág. 320], mencionamos una caracterización de los puntos extremos de una dendrita.

Teorema 1.22. *Sean X una dendrita y $x \in X$. Entonces $x \in E(X)$ si y sólo si x es punto final de cada arco en X que tiene a x.*

Ahora mencionaremos algunas propiedades de los conjuntos de puntos extremos, de ramificación y ordinarios en una dendrita. Recordemos que un espacio es ***totalmente disconexo*** si sus subconjuntos conexos y no vacíos son degenerados.

Teorema 1.23. *Sea X una dendrita. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *$E(X)$ es totalmente disconexo;*

2) *$R(X)$ es a lo más numerable;*

3) *$O(X)$ es denso en X;*

4) *$X = E(X) \cup O(X) \cup R(X)$;*

5) $|E(X)| \geq 2$;

6) *$R(X) = \emptyset$ si y sólo si $|E(X)| = 2$ y esto ocurre si y sólo si X es un arco;*

7) *si $T(X) \in \{E(X), R(X), O(X)\}$, entonces $T(X)$ es una unión de órbitas de X;*

8) *si $R(X) \neq \emptyset$, entonces X tiene al menos tres órbitas; más aún, si X es $\frac{1}{3}$-homogéneo las órbitas son $E(X), R(X)$ y $O(X)$.*

9) *$X - E(X)$ es conexo.*

Demostración. Una demostración de 1) puede verse en [36, Teorema 2, pág. 292]. Una prueba de 2) aparece en [47, Teorema 10.3, pág. 174]. La prueba de 4) se sigue de las respectivas definiciones de $E(X), R(X)$ y $O(X)$. Para ver 3), tomemos un abierto no vacío U en X. Notemos que U es no degenerado y así, podemos tomar $x, y \in U$ con $x \neq y$. Como X es localmente conexo, podemos suponer que U es conexo y, por la parte 2) del Teorema 1.19, $xy \subset U$. Como el arco xy es un subconjunto conexo de X y no numerable, por el Teorema 1.22, $xy \cap E(X) \subset \{x, y\}$. Luego, $xy - \{x, y\} \subset O(X) \cup R(X)$ y, como $R(X)$ es numerable, sucede que $(xy - \{x, y\}) \cap O(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $U \cap O(X) \neq \emptyset$. Esto prueba 3).

Por la parte 6) del Teorema 1.19, $E(X)$ es el conjunto de puntos de no corte de X. Además, por [47, Teorema 6.6 , pág. 89], todo continuo tiene al menos dos puntos de no corte. En consecuencia, $|E(X)| \geq 2$, probando así 5). Ahora bien, de la definición de punto de ramificación tenemos que $R(X) = \emptyset$ si y sólo si $\mathrm{ord}_X(x) \leq 2$, para cada $x \in X$. Como X no contiene curvas cerradas simples, por [47, Proposición 9.5, pág. 142], esto ocurre si y sólo si X es un arco, el cual tiene únicamente dos puntos extremos. Esto prueba 6).

Para probar 7) tomemos $x \in T(X)$. Si $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(X)$, tal que $h(x) = y$. Así, por la parte 3) del Teorema 1.5, $y \in T(X)$, es decir $\mathrm{Orb}_X(x) \subset T(X)$. Por lo tanto, $T(X)$ es una unión de órbitas de X. Esto prueba 7).

Para probar 8), supongamos que $R(X) \neq \emptyset$. Notemos que, por los incisos 3) y 5) de este teorema, y las respectivas definiciones de $E(X), R(X)$ y $O(X)$, dichos conjuntos son no vacíos y ajenos dos a dos. Entonces, por 7), podemos obtener al menos tres órbitas de X tomando un elemento de cada uno de estos tres conjuntos y luego su respectiva órbita (la órbita de un punto en $E(X)$ está contenida en $E(X)$, la órbita de un punto en $O(X)$ está contenida en $O(X)$ y, por último, la órbita de un punto en $R(X)$ está contenida en $R(X)$). Esto prueba la primera parte de 8). Ahora bien, si X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, las órbitas de X deben de ser $E(X)$, $R(X)$ y $O(X)$.

Ahora probaremos 9). Sean $x, y \in X - E(X)$. Notemos que, el Teorema 1.22 dice que los único puntos del arco xy que pueden pertecener a $E(X)$ son x o y. Pero, como $x, y \notin E(X)$, sucede que xy no contiene puntos extremos de X y, así, $xy \subset X - E(X)$. Esto muestra que $X - E(X)$ es arcoconexo, con lo que, $X - E(X)$ es conexo. $\square$

Supongamos que X es una dendrita. Si X es $\frac{1}{2}$-homogéneo entonces, por las partes 3) y 5) del Teorema 1.23, los conjuntos $E(X)$ y $O(X)$ siempre son no vacíos. Luego, por la parte 7) de dicho teorema y el hecho de que X posee únicamente dos órbitas, necesariamente $R(X)$ es vacío. Entonces, por la parte 6) del teorema anterior, X es un arco. Como un arco es un continuo $\frac{1}{2}$-homogéneo, hemos probado que

($\star$) una dendrita X es $\frac{1}{2}$-homogénea si y sólo si X es un arco.

Este resultado fue probado en [52, Lema 3.5]. Ahora bien, si X es una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea y $R(X) = \emptyset$, entonces X es un arco y, por tanto, una dendrita $\frac{1}{2}$-homogénea. Como ser un continuo $\frac{1}{n}$-homogéneo es una propiedad topológica, obtenemos una contradicción. Luego $R(X) \neq \emptyset$. Así pues, las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas tienen puntos de ramificación. Como ya indicamos, si X es una dendrita con sólo un punto de ramificación, entonces existe $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$ tal que X es homeomorfa a la dendrita F_n, que definimos en (1.6.1) y (1.6.2) según si $n \in \{3, 4, \ldots\}$ o si $n = \omega$. En dicho caso X es $\frac{1}{3}$-homogéneo. Lo interesante se encuentra, por tanto, cuando suponemos que la dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tiene al menos dos puntos de ramificación. Al respecto hablaremos en el Capítulo 3.

A continuación probaremos otras propiedades que poseen las dendritas.

Teorema 1.24. *Sean X una dendrita y $A \subset X$ conexo. Entonces $\mathrm{Cl}_X(A)$ es una dendrita tal que:*

$$\mathrm{Cl}_X(A) - A \subset E(\mathrm{Cl}_X(A)).$$

Demostración. Al ser $\mathrm{Cl}_X(A)$ un subcontinuo de la dendrita X, por la parte 1) del Teorema 1.19, $\mathrm{Cl}_X(A)$ es una dendrita. Supongamos que $x \in \mathrm{Cl}_X(A) - A$. Entonces $A \subset \mathrm{Cl}_X(A) - \{x\} \subset \mathrm{Cl}_X(A)$ y, como A es conexo, $\mathrm{Cl}_X(A) - \{x\}$ es conexo. De esto y del inciso 6) del Teorema 1.23, obtenemos que $x \in E(\mathrm{Cl}_X(A))$. □

Teorema 1.25. *Supongamos que X es una dendrita y que B es un subcontinuo propio de X. Si A es una componente de $X - B$, entonces $\mathrm{Cl}_X(A)$ es una dendrita tal que:*

$$\mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \mathrm{Cl}_X(A) - A \subset E\big(\mathrm{Cl}_X(A)\big).$$

Demostración. Al ser $\mathrm{Cl}_X(A)$ un subcontinuo de la dendrita X, por la parte 1) del Teorema 1.19, $\mathrm{Cl}_X(A)$ es una dendrita. Por la parte 2) del Teorema 1.8, $A \cup B$ es un subcontinuo de X. Así $\mathrm{Cl}_X(A) \subset A \cup B$. Luego, $\mathrm{Cl}_X(A) - A \subset \mathrm{Cl}_X(A) \cap B$. La otra contención es inmediata, pues como A es una componente de $X - B$, $B \subset X - A$. Esto, combinado con el Teorema 1.24, prueba que $\mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \mathrm{Cl}_X(A) - A \subset E\big(\mathrm{Cl}_X(A)\big)$. □

Corolario 1.26. *Sean X una dendrita y $c \in X$. Entonces para cada componente A de $X - \{c\}$, se tiene que $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$ es una dendrita y $c \in E(\mathrm{Cl}_X(A))$.*

Demostración. En la parte 1) del Teorema 1.10, se prueba que $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$. Ahora aplicamos el Teorema 1.25 con $B = \{c\}$. Como $\{c\} = \mathrm{Cl}_X(A) \cap \{c\}$, obtenemos el resultado. □

Dos subconjuntos A y B de un conjunto X son **comparables** si lo son respecto a la contención, es decir, si $A \subset B$ o $B \subset A$.

Teorema 1.27. *Sean X una dendrita y $\mathfrak{D}$ una familia de arcos en X, comparables dos a dos. Si $V = \cup\mathfrak{D}$, entonces existen $z, z' \in X$ tales que:*

$$(zz') \subset V \subset \mathrm{Cl}_X(V) = zz'.$$

Además, si y es punto final de cada arco en $\mathfrak{D}$, sucede que $V = [yz)$ o $V = yz$.

Demostración. Fijemos un elemento $D \in \mathfrak{D}$. Entonces D es no degenerado y $D \subset V \subset \mathrm{Cl}_X(V)$. Por lo tanto, $\mathrm{Cl}_X(V)$ es no degenerado. Además, para cada $B \in \mathfrak{D}$, sucede que $B \subset D$ o bien $D \subset B$. Por lo tanto:

$$V = \big(\bigcup\{B \in \mathfrak{D} \colon B \subset D\}\big) \cup \big(\bigcup\{B \in \mathfrak{D} \colon D \subset B\}\big)$$

$$= D \cup \left(\bigcup\{B \in \mathfrak{D} \colon D \subset B\}\right) = \bigcup\{B \in \mathfrak{D} \colon D \subset B\}.$$

Entonces V es unión de arcos que contienen a D. Luego V es conexo, y por las partes 1) y 2 del Teorema 1.19, V es arcoconexo y $\mathrm{Cl}_X(V)$ es una dendrita. Notemos que si $x \in X$ es tal que $V - \{x\}$ es conexo, entonces $V - \{x\} \subset \mathrm{Cl}_X(V) - \{x\} \subset \mathrm{Cl}_X(V)$ y, así, $\mathrm{Cl}_X(V) - \{x\}$ es conexo. Esto implica que:

$$\mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(V)) \subset \mathrm{Cut}(V). \tag{1.6.3}$$

Supongamos que $\mathrm{Cl}_X(V)$ no es un arco en X. Entonces, por la parte 6) del Teorema 1.23, existe $p \in \mathrm{Cl}_X(V)$ tal que $\mathrm{ord}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(p) \geq 3$. Esto significa que p no es un punto extremo de $\mathrm{Cl}_X(V)$ y, por la parte 6) del Teorema 1.19, $p \in \mathrm{Cut}(\mathrm{Cl}_X(V))$. Notemos que, por (1.6.3), $p \in \mathrm{Cut}(V)$. En particular, $p \in V$.

Veamos que cada componente de $\mathrm{Cl}_X(V) - \{p\}$ intersecta a V. Para esto, supongamos lo contrario, que existe una componente K de $\mathrm{Cl}_X(V) - \{p\}$ tal que $K \cap V = \emptyset$. Entonces, por el Teorema 1.24, $K \subset \mathrm{Cl}_X(V) - V \subset E(\mathrm{Cl}_X(V))$. Esto implica que K es un subconjunto conexo del conjunto de puntos extremos de $\mathrm{Cl}_X(V)$ y, por la parte 1) del Teorema 1.23, K es degenerado. Luego, $K \neq \mathrm{Cl}_X(V)$ es cerrado en $\mathrm{Cl}_X(V)$. Ahora bien, como $\mathrm{Cl}_X(V)$ es una dendrita, en particular, $\mathrm{Cl}_X(V)$ es localmente conexa y, como K es una componente del abierto $\mathrm{Cl}_X(V) - \{p\}$ en $\mathrm{Cl}_X(V)$, resulta que K es abierto en $\mathrm{Cl}_X(V)$. Esto contradice la conexidad de $\mathrm{Cl}_X(V)$ y, por consiguiente, cada componente de $\mathrm{Cl}_X(V) - \{p\}$ intersecta a V.

Ahora veremos que V contiene un triodo simple. Como $\mathrm{ord}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(p) \geq 3$, podemos considerar tres componentes distintas K_1, K_2 y K_3 de $\mathrm{Cl}_X(V) - \{p\}$. Por lo que probamos en el párrafo anterior, existen puntos $a \in K_1 \cap V$, $b \in K_2 \cap V$ y $c \in K_3 \cap V$. Por la parte 1) del Teorema 1.10, $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1) = K_1 \cup \{p\}$, $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_2) = K_2 \cup \{p\}$ y $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_3) = K_3 \cup \{p\}$. De esto, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_2) = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_3) = \\ = \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_2) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_3) = \{p\}. \end{aligned}$$

Como $a, p \in \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1)$ y $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1)$ es un subcontinuo de la dendrita $\mathrm{Cl}_X(V)$, sucede que $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1)$ es arcoconexo. Entonces, el único arco de

a a p, que denotamos por ap, está contenido en $\mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1)$. Como también $a, p \in V$ y V es arcoconexo, tenemos que $ap \subset V$. De manera similar deducimos que:

$$bp \subset \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_2) \cap V \quad \text{y} \quad cp \subset \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_3) \cap V.$$

Notemos que $Y = ap \cup bp \cup cp \subset V$. Además:

$$ap \cap bp \subset \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_2) = \{p\},$$

$$ap \cap cp \subset \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_1) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_3) = \{p\}$$

y

$$bp \cap cp \subset \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_2) \cap \mathrm{Cl}_{\mathrm{Cl}_X(V)}(K_3) = \{p\}.$$

Por lo tanto,Y es un triodo simple contenido en V. Como $a, b, c, p \in Y \subset V$, existen cuatro elementos de $\mathfrak{D}$ que contienen a a, b, c y p. Ya que los elementos de $\mathfrak{D}$ son comparables dos a dos, podemos suponer que uno de ellos, digamos P, contiene al conjunto $\{a, b, c, p\}$. Al ser P un continuo arcoconexo, $Y \subset P$. Luego, Y es un triodo simple contenido en el arco P. Como esto es una contradicción, concluimos que $\mathrm{Cl}_X(V)$ es un arco, digamos zz_1. Como V es conexo, tenemos que $(zz_1) \subset V \subset \mathrm{Cl}_X(V) = zz_1$.

Ahora probemos la última parte del teorema. Supongamos que y es punto final de todo arco en $\mathfrak{D}$. Si y es un punto de corte de V, tomamos a y b en distintas componentes de $V - \{y\}$. Sean $A, B \in \mathfrak{D}$ tales que $a \in A$ y $b \in B$. Sin pérdida de generalidad $A \subset B$, luego $a, b \in B$ y $y \in (ab) \subset B$. Así, y no es punto final del arco B. Ya que esto es una contradicción, hemos probado que y no es punto de corte de V, es decir $y \in \{z_1, z\}$. $\square$

Teorema 1.28. *Sean X un dendrita, $x \in X$ y $\mathcal{A}_x = \{A_n : n \in \Lambda\}$ la familia de las componentes de $X - \{x\}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Para cada $n \in \Lambda$, existe $x_n \in E(\mathrm{Cl}_X(A_n)) - \{x\}$;*

2) *si $\mathrm{ord}_X(x) = \omega$, entonces $\{x\} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Cl}_X(A_n)$.*

Demostración. Para probar 1), notemos primero que si $x \in E(X)$, entonces $X - \{x\}$ es conexo y $\mathrm{Cl}_X(X - \{x\}) = X$. Aplicando la propiedad 5) del Teorema 1.23, tenemos que existe un punto en:

$$E(X) - \{x\} = E(\mathrm{Cl}_X(X - \{x\})) - \{x\}.$$

Supongamos ahora que $x \notin E(X)$. Entonces, por la propiedad 6) del Teorema 1.19, $x \in \mathrm{Cut}(X)$. Sea $n \in \Lambda$. Por el Corolario 1.26, $\mathrm{Cl}_X(A_n) = A_n \cup \{x\}$ es una dendrita y $x \in E(\mathrm{Cl}_X(A_n))$. Por la propiedad 5) del Teorema 1.23, la dendrita $\mathrm{Cl}_X(A_n)$ tiene al menos dos puntos extremos. Entonces existe $x_n \in E(\mathrm{Cl}_X(A_n)) - \{x\}$.

Si $\mathrm{ord}_X(x) = \omega$, por definición, $|\Lambda| = \aleph_0$ y $\mathcal{A}_x = \{A_n \colon n \in \Lambda\}$ es una sucesión nula (ver pág. 17). Como el diámetro de un conjunto y el de su cerradura coinciden, $\{\mathrm{Cl}_X(A_n) \colon n \in \Lambda\}$ también es una sucesión nula. Para ver que dicha sucesión converge a $\{x\}$ en la métrica de Hausdorff, sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{diam}(\mathrm{Cl}_X(A_n)) < \varepsilon$ para cada $n > N$. Sea $n > N$. Notemos que para cada $a_n \in A_n$, como x y a_n son elementos de $\mathrm{Cl}_X(A_n)$, tenemos que $d(x, a_n) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{Cl}_X(A_n)) < \varepsilon$. Así $A_n \subset N_X(\{x\}, \varepsilon)$ y $\{x\} \subset N_X(A_n, \varepsilon)$. Por el Teorema 1.12, $H(\{x\}, A_n) < \varepsilon$. Luego:

$$\{x\} = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Cl}_X(A_n).$$

$\square$

Como ya mencionamos en la parte 1) del Teorema 1.19, las dendritas son continuos hereditariamente localmente conexos. Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 1.29. *Sean X un continuo y K un subcontinuo no degenerado de X. Decimos que K es un* ***continuo de convergencia en*** *X si existe una sucesión $\{A_n\}_n$ de subcontinuos de X, que converge a K en la métrica de Hausdorff y tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, sucede que $K \cap A_n = \emptyset$.*

En [47, Teorema 10.4, pág. 167] se prueba que un continuo X es hereditariamente localmente conexo si y sólo si ningún subcontinuo propio y no degenerado de X es un continuo de convergencia en X. Como consecuencia de esto y de [60, Corolario 2.2, pág. 90] tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.30. *Sean X un continuo hereditariamente localmente conexo y $\{A_n\}_n$ una sucesión de subconjuntos de X, ajenos dos a dos. Si cada A_n es un subcontinuo de X o bien, cada A_n es abierto en X, entonces $\{A_n\}_n$ es una sucesión nula.*

Como caso particular del resultado anterior, toda sucesión de subcontinuos de una dendrita, ajenos dos a dos, es una sucesión nula.

1.7. La Función Primer Punto

En la presente sección vamos a definir una función que es muy importante cuando trabajamos con dendritas. A su vez describiremos su propiedades. Para definir a dicha función, necesitamos del siguiente resultado, cuya demostración completa se encuentra en [47, Lema 10.24, pág. 175].

Teorema 1.31. *Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Para cada $x \in X - Y$, existe un único punto $r(x) \in Y$ tal que $r(x)$ es un elemento de cualquier arco en X de x a cada punto de Y (es decir, para cada $y \in Y$, tenemos que $r(x) \in xy$).*

La idea de la construcción del punto $r(x)$ y de la prueba del Teorema 1.31, es la siguiente: consideremos X, Y y x como en el enunciado del teorema. Fijemos un elemento $z \in Y$. Como X es arcoconexo, existe una función continua e inyectiva $f\colon [0,1] \to X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = z$. Notemos que $f(0) \notin Y$ mientras que $f(1) \in Y$. Como Y es compacto, el conjunto no vacío $J = \{t \in [0,1]\colon f(t) \in Y\}$ también es compacto. Entonces podemos considerar $s = \text{mín}(J)$. Notemos que $s > 0$. Además, $r(x) = f(s) \in Y$ y, para toda $t \in [0, s)$, tenemos que $f(t) \notin Y$. Por lo tanto, $f([0,s]) \cap Y = \{f(s)\} = \{r(x)\}$. Luego, recorriendo el arco $f([0,1])$ de $f(0)$ a $f(1)$, el punto $r(x)$ es la primera vez que dicho arco toca a Y.

Es fácil notar que $f([0,s])$ es el arco en X de x a $r(x)$, el cual denotamos por $xr(x)$. Supongamos ahora que $y \in Y$. Como $r(x)$ y y son elementos del conjunto arcoconexo Y, el arco de $r(x)$ a y, que denotamos por $r(x)y$, está contenido en Y. Notemos, además, lo siguiente:

$$r(x) \in xr(x) \cap r(x)y \subset xr(x) \cap Y = f([0,s]) \cap Y = \{r(x)\}.$$

Así que, $xr(x) \cup r(x)y$ es un arco en X de x a y. Como en una dendrita los arcos son únicos, sucede que $xr(x) \cup r(x)y$ es el arco en X de x a y, el cual denotamos por xy. Por lo tanto, $r(x) \in xy$. De esto se sigue la unicidad de $r(x)$.

Es importante recordar la forma en como se construye $r(x)$: fijamos cualquier punto z de Y y, recorriendo el arco de xz de x a z, $r(x)$ es justo la primera vez que dicho arco xz intersecta a Y.

Supongamos ahora que X es una dendrita y que A es un subcontinuo de X. Como consecuencia del Teorema 1.31, para cada $x \in X - A$, existe un único punto x_A en A con la propiedad de que todo arco en X, de x a cualquier punto de A, pasa por x_A. Esto nos permite definir la función $r\colon X \to A$ como sigue:

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in A; \\ x_A, & \text{si } x \in X - A. \end{cases} \tag{1.7.1}$$

En [47, Lema 10.25, pág. 176] se prueba que r es una función continua. Tal función es muy especial y la utilizaremos en este trabajo con el nombre que indicamos en la siguiente definición.

Definición 1.32. *Supongamos que X es una dendrita y que A es un subcontinuo de X. La función $r\colon X \to A$, definida en* (1.7.1)*, se llama la* ***función primer punto en*** *A.*

En el siguiente resultado mencionamos una serie de propiedades que cumple la función primer punto de X en un arco de X.

Teorema 1.33. *Sean X una dendrita. Tomemos $c, d \in X$ y supongamos que $r\colon X \to cd$ es la función primer punto en cd. Entonces, para cada $z \in X$, se cumple lo siguiente:*

1) $zr(z) \cap cd = \{r(z)\}$;

2) $cz = cr(z) \cup r(z)z$;

3) $dz = dr(z) \cup r(z)z$;

4) $\{r(z)\} = cz \cap cd \cap dz$;

5) *si $c, d \in E(X)$ y $c \neq d$, entonces, para cada $z \in X - \{c, d\}$, $r(z) \in (cd)$, y así, $r(z) \in X - E(X)$, para cada $z \in X - \{c, d\}$;*

6) $\{r(z)\} = cr(z) \cap r(z)z \cap dr(z)$;

7) *si $z \in X - cd$, entonces $r(z) \in \{c, d\} \cup R(X)$;*

8) *si $y \in zr(z)$, entonces $r(y) = r(z)$.*

Demostración. Notemos que la demostración de las propiedades 1), 2) y 3) están incluidas en la prueba del Teorema 1.31. Para probar 4), sea $a \in X$. Notemos que:

$$\begin{aligned} cd \cap cz &= cd \cap (cr(z) \cup r(z)z) = (cd \cap cr(z)) \cup (cd \cap r(z)z) \\ &= cr(z) \cup \{r(z)\} = cr(z). \end{aligned}$$

Similarmente se obtiene que $cd \cap dz = dr(z)$. Luego:

$$cz \cap cd \cap dz = (cd \cap cz) \cap (cd \cap dz) = cr(z) \cap dr(z) = \{r(z)\}.$$

Esto prueba 4). Para mostrar 5), supongamos que $c, d \in E(X)$, $c \neq d$ y tomemos $z \in X - \{c, d\}$. Si $r(z) = c$ entonces, por 1):

$$\{c\} = \{r(z)\} = zr(z) \cap cd = zc \cap cd.$$

Luego, por 3), $zd = zc \cup cd$ es un arco en X que no tiene a c como punto final. Por el Teorema 1.22, esto implica que $c \notin E(X)$. En vista de que esto es una contradicción, sucede que $r(z) \neq c$. De manera similar se prueba que $r(z) \neq d$. Luego $r(z) \in cd - \{c, d\}$. Ahora bien, como cd es un arco en X que no tiene a $r(z)$ como punto final, por el Teorema 1.22, se cumple que $r(z) \notin E(X)$. Esto prueba 5).

Para ver 6), notemos que, como $r(z)$ es un punto del arco cd, $cr(z) \cap r(z)d = \{r(z)\}$. Luego:

$$cr(z) \cap r(z)z \cap r(z)d = \big(cr(z) \cap r(z)d\big) \cap r(z)z = \{r(z)\} \cap r(z)z = \{r(z)\}.$$

Esto prueba 6). Ahora, para probar 7), supongamos que $z \in X - cd$ y $r(z) \notin \{c, d\}$. Notemos que r no es la función identidad en z y, así, $r(z) \notin \{z, c, d\}$. Luego, por 6), $r(z)$ es el único punto común de los tres arcos no degenerados $cr(z)$, $r(z)d$ y $r(z)z$. Además, por 1), se cumple que $\{r(z)\} = r(z)z \cap cd$ y $r(z) \in cd$. Luego, los arcos $[cr(z))$, $(r(z)d]$ y $(r(z)z]$ son ajenos dos a dos y, esto implica que, $X - \{r(z)\}$ tiene al menos tres componentes. Esto concluye la prueba de 7).

Por último, para probar 8), tomemos $y \in zr(z)$. Aplicando 2), tenemos que $y \in zr(z) \subset zc$. Luego $yc \subset zc$ y, análogamente, $yd \subset zd$. Ahora, aplicando 4), obtenemos que:

$$\{r(y)\} = yc \cap cd \cap yd \subset zc \cap cd \cap zd = \{r(z)\}.$$

Por lo tanto, $r(y) = r(z)$. Esto concluye la prueba de 8). $\square$

1.8. Arcos Libres en Dendritas

Como ya hemos indicado, las dendritas son continuos únicamente arcoconexos, en el sentido de que cada dos elementos a y b de una dendrita X son los puntos finales de un único arco en X. Es importante reconocer si todos los elementos de $(ab) = ab - \{a, b\}$ son puntos ordinarios, si los puntos finales del arco ab son ambos puntos de ramificación de X, o bien ambos son puntos extremos de X, etc. De entre todas las posibilidades, destacamos los casos que aparecen en la siguiente definición.

Definición 1.34. *Sean X una dendrita y $a, b \in X$ con $a \neq b$. Entonces el arco $ab \subset X$ es:*

1) *Un* ***arco libre*** *en X, si (ab) es abierto en X;*

2) *un* ***arco libre maximal*** *en X, si ningún arco libre en X lo contiene propiamente;*

3) *un* ***arco interno*** *en X, si $(ab) \subset O(X)$ y $a, b \in R(X)$;*

4) *un* ***arco externo*** *en X, si $(ab) \subset O(X)$, $|\{a, b\} \cap E(X)| = 1$ y $|\{a, b\} \cap R(X)| = 1$.*

Notemos que si ab es un arco externo en X, entonces un punto final de ab es un punto extremo de X, el otro punto final es un punto de ramificación de X y el resto de los puntos de ab son puntos ordinarios de X.

El siguiente resultado muestra una importante caracterización de los arcos libres en una dendrita.

Teorema 1.35. *Sean X una dendrita y $a, b \in X$ con $a \neq b$. Entonces ab es un arco libre en X si y sólo si $(ab) \subset O(X)$.*

Demostración. Supongamos que ab es un arco libre en X. Como (ab) es abierto en X, por el Corolario 1.4, para cada $c \in (ab)$, $\text{ord}_X(c) = \text{ord}_{ab}(c) = 2$, es decir $(ab) \subset O(X)$.

Ahora supongamos que $(ab) \subset O(X)$. Sea $x \in (ab)$. Como X es localmente conexo y x es un elemento del abierto $X - \{a, b\}$ de X, existe un subconjunto U de X, abierto y conexo en X, tal que $x \in U \subset X - \{a, b\}$. Por la parte 2) del Teorema 1.19, U es arcoconexo. Supongamos que existe $c \in U \cap \big(X -$

$(ab)\big)$ y consideremos r, la función primer punto en ab. Como $c, x \in U$, de la arcoconexidad de U y la definición de r, se tiene que $r(c) \in cx \subset U \subset X - \{a, b\}$, así que $r(c) \neq a$ y $r(c) \neq b$. Luego, $r(c) \in (ab)$. Esto implica, por la propiedad 7) del Teorema 1.33, que $r(c) \in R(X)$, contradiciendo el hecho de que $(ab) \subset O(X)$. Por consiguiente $U \subset (ab)$, probando que (ab) es abierto en X. Luego ab es un arco libre en X. □

Así pues, si ab es un arco libre en una dendrita X, sucede que $(ab) \cap R(X) = \emptyset$. Más aún, por la propiedad 7) del Teorema 1.33, para cada $c \in X - ab$, si $r\colon X \to ab$ es la función primer punto en ab, resulta que $r(c) \in \{a, b\}$. Utilizaremos a menudo esta propiedad.

Del Teorema 1.35 se infiere que los arcos internos y los arcos externos en una dendrita X, son arcos libres en X. Notemos que una dendrita X puede contener arcos libres que no son internos ni externos. Basta considerar en $X = [0, 1]$ puntos a y b tales que $0 < a < b < 1$. Entonces ab es un arco libre en X que no es interno ni externo en X.

A continuación presentamos otra propiedad de los arcos libres, que será utilizada en este trabajo con bastante frecuencia. El resultado indica la forma en la que se intersectan dos arcos en una dendrita, en donde uno de ellos es libre.

Teorema 1.36. *Sean X una dendrita y cd un arco libre en X. Supongamos que $a, b \in X$, con $a \neq b$. Entonces se cumple una de las siguientes tres propiedades:*

1) *Si $a, b \in (cd)$, entonces $ab \subsetneq cd$;*

2) *si $|\{a, b\} \cap (cd)| = 1$, entonces $cd \cup ab$ es un arco en X; además, si ab es un arco libre, entonces $cd \cup ab$ también es un arco libre;*

3) *si $a, b \notin (cd)$, entonces $ab \cap cd \subsetneq \{c, d\}$ o bien $cd \subset ab$.*

Demostración. Tomemos $a, b \in X$ tales que $a \neq b$. Entonces, con respecto al conjunto (cd), los puntos a y b satisfacen una y sólo una de las siguientes tres propiedades: $a, b \in (cd)$, $a, b \notin (cd)$ o bien un punto de a y b está en (cd) y el otro no. Vamos a analizar entonces las tres situaciones.

Si $a, b \in (cd)$, por la arconexidad de (cd), sucede que $ab \subset (cd) \subsetneq cd$. Esto prueba 1). Para probar 2) supongamos sin pérdida de generalidad que $b \in (cd)$ y $a \in X - (cd)$. Como cd es un arco libre, $b \in O(X)$. Si $a \in \{c, d\}$, $ab \subset cd$ y, por tanto, $cd \cup ab = cd$ es un arco libre en X. Consideremos entonces que $a \notin \{c, d\}$. Sea $r\colon X \to cd$ la función primer punto en el arco libre cd. Como $a \notin (cd)$, $r(a) \in \{c, d\}$. Supongamos, sin perder generalidad, que $r(a) = c$. De acuerdo con la definición de r, tenemos que $ac \cap cd = ar(a) \cap cd = \{r(a)\} = \{c\}$, de donde, $ac \cup cd$ es un arco en X. Por la unicidad de arcos en X, $ac \cup cd = ac \cup cb \cup cd = ab \cup cd$. Entonces $A = cd \cup ab$ es un arco en X.

Ahora supongamos que ab es un arco libre. Notemos que $A - \{a\} = cd \cup (ab]$ es conexo, pues $b \in cd \cap (ab]$. Luego, a es un punto final del arco A y, como $b \in O(X)$, el otro punto final de A pertenece a $\{c, d\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que a es el otro punto final de A; es decir, $A = ad$. Luego, $c \in (ab)$ y así, $c \in O(X)$. Como también $b \in O(X)$ y $(ab) \cup (cd) \subset O(X)$, se cumple que $(ad) \subset O(X)$, es decir, ad es un arco libre (Teorema 1.35). Esto prueba 2).

Supongamos, por último, que $a, b \notin (cd)$. Notemos que si $ab \cap cd = \emptyset$, claramente, $ab \cap cd \subsetneq \{c, d\}$. Supondremos, por tanto, que $ab \cap cd \neq \emptyset$. Consideremos la función primer punto $r\colon X \to cd$ en el arco libre cd. Como $a, b \notin (cd)$, tenemos que $\{r(a), r(b)\} \subset \{c, d\}$. Hagamos $Y = ar(a) \cup r(b)b$. Supongamos primero que $r(a) = r(b)$. Como $\{r(a), r(b)\} \subset \{c, d\}$, sin perder generalidad, podemos considerar que $r(a) = r(b) = c$. Luego:

$$Y = ar(a) \cup r(b)b = ac \cup cb \quad \text{y} \quad ar(a) \cap r(b)b = ac \cap cb.$$

Si $a = c$, entonces $ab \cap cd = \{c\} \subsetneq \{c, d\}$ y la prueba termina. Supongamos, por tanto, que $a \neq c$ y sea $r_1\colon X \to ac$ la función primer punto en ac. Si $r_1(b) \in [ac)$, sucede que $ab = ar_1(b) \cup r_1(b)b$ y $ab \cap cd = \emptyset$. Esto es un absurdo, así que $r_1(b) = c$. Luego $ac \cap bc = \{c\}$. Como en la dendrita X los arcos son únicos, necesariamente $Y = ab$ y, además, $ab \cap cd = \{c\} \subsetneq \{c, d\}$. Esto termina la prueba del caso $r(a) = r(b)$.

Supongamos ahora que $r(a) \neq r(b)$. Como $\{r(a), r(b)\} \subset \{c, d\}$ podemos considerar, sin perder generalidad, que $r(a) = c$ y $r(b) = d$. Si $a = c$, como en X los arcos son únicos, necesariamente $ab = cd \cup db$, de donde $cd \subset ab$. Supongamos, por tanto, que $a \neq c$. De igual manera podemos suponer que

$b \neq d$. Sea $r_1\colon X \to ac$ la función primer punto en ac. Si $r_1(b) \in [a,c)$ entonces, como hicimos ver en la prueba del caso anterior, obtenemos una contradicción con el hecho de que $ab \cap cd \neq \emptyset$. En consecuencia, $r_1(b) = c$. Ahora bien, de acuerdo a la definición de la función r, recorriendo el arco bc de b a c, sucede que d es el primer elemento de cd en dicho arco bc. Esto implica que los arcos ac y bd son ajenos y que el arco bc es igual a la unión $bd \cup cd$. Por lo tanto, $ab = ac \cup bc$ y, así, $cd \subset ab$. Esto prueba 3). $\square$

En el siguiente resultado, determinamos el interior de un arco interno y el de un arco externo en una dendrita.

Teorema 1.37. *Sean X una dendrita y $a, b \in X$ con $a \neq b$. Si ab es un arco interno en X, entonces $\mathrm{Int}_X(ab) = (ab)$. Si ab es un arco externo en X con $a \in E(X)$, entonces $\mathrm{Int}_X(ab) = [ab)$.*

Demostración. Primero notemos que si $x \in R(X)$ y $x \in yz \subset X$, ocurre que $x \notin \mathrm{Int}_X(yz)$ pues, en caso contrario, por el Corolario 1.4, $\mathrm{ord}_{yz}(x) = \mathrm{ord}_X(x) \geq 3$. Como los puntos de un arco tienen a lo más orden dos, resulta que $x \notin \mathrm{Int}_X(yz)$.

Supongamos que ab es un arco interno en X. Entonces ab es un arco libre en X, por lo que, (ab) es abierto en X. Además, $(ab) \subset ab$, así que $(ab) \subset \mathrm{Int}_X(ab)$. Como $a, b \in R(X)$, por lo que probamos en el párrafo anterior, $a, b \notin \mathrm{Int}_X(ab)$. Por lo tanto, $\mathrm{Int}_X(ab) \subset ab - \{a, b\} = (ab)$. De esta manera se prueba que $\mathrm{Int}_X(ab) = (ab)$.

Ahora supongamos que ab es un arco externo en X, con $a \in E(X)$. Entonces $b \in R(X)$. Sea C la componente de $X - \{b\}$ tal que $[ab) \subset C$. Sea $r\colon X \to ab$ la función primer punto en ab. Si $x \in C - [ab)$, entonces $x \in X - ab$. Como C es arcoconexo y $a, x \in C$, $xa \subset C \subset X - \{b\}$. Por la definición de r, $r(x) \in xa$ y, así, $r(x) \neq b$. En vista de que $a \in E(X)$, por el Teorema 1.22, $r(x) \neq a$. Entonces $r(x) \in (ab)$ y, por la parte 7) del Teorema 1.33, $r(x) \in R(X)$. Esto contradice el hecho de que $(ab) \subset O(X)$ y, así, $C = [ab)$. Por tanto, $[ab)$ es una componente de $X - \{b\}$, el cual es abierto en el espacio localmente conexo X. En consecuencia, $[ab)$ es abierto en X. Además, $[ab) \subset ab$, de donde, $[ab) \subset \mathrm{Int}_X(ab)$. Puesto que $b \in R(X)$, por lo probado en el primer párrafo, $b \notin \mathrm{Int}_X(ab)$. Luego $\mathrm{Int}_X(ab) \subset ab - \{b\} = [ab)$. Por lo tanto, $\mathrm{Int}_X(ab) = [ab)$. $\square$

Sean X una dendrita y ab un arco interno en X. Entonces, el interior relativo de ab es (ab), el cual, por el teorema anterior, coincide con el interior de ab en X. Si ab es un arco externo en X, con $a \in E(X)$, sucede que, el interior relativo de ab es (ab), mientras que, por el teorema anterior, su interior en X es $[ab)$.

Ahora vamos a probar que todo punto en el interior del conjunto de puntos ordinarios de una dendrita, se encuentra en el interior relativo de un arco libre. Además, todo arco libre puede "crecer" hasta tener un arco libre maximal. Por último, se caracterizan los arcos libres maximales, cuando el conjunto de puntos ordinarios es abierto.

Teorema 1.38. *Sea X una dendrita. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Para cada $c \in \mathrm{Int}_X(O(X))$, existen $u, v \in X$ tal que $c \in (uv)$ y uv es un arco libre en X.*

2) *Todo arco libre en X está contenido en un arco libre maximal en X.*

3) *Si $O(X)$ es abierto en X y M es un arco libre en X, entonces M es maximal si y sólo si los puntos finales de M están en $R(X) \cup E(X)$.*

Demostración. Para probar 1), sea $c \in \mathrm{Int}_X(O(X))$. Utilizando la regularidad y la conexidad local de X, podemos encontrar un abierto y conexo U de X tal que:
$$c \in U \subset \mathrm{Cl}_X(U) \subset O(X).$$
Notemos que U es no degenerado y que $\mathrm{Cl}_X(U)$ es subcontinuo de X. Luego, $\mathrm{Cl}_X(U)$ es una dendrita. Como $\mathrm{Cl}_X(U) \subset O(X)$, la parte 1) del Teorema 1.3 dice que, para cada $x \in \mathrm{Cl}_X(U)$, $\mathrm{ord}_{\mathrm{Cl}_X(U)}(x) \leq \mathrm{ord}_X(x) = 2$. Es decir, $\mathrm{Cl}_X(U)$ no tiene puntos de ramificación y, por la parte 6) del Teorema 1.23, $\mathrm{Cl}_X(U)$ es un arco no degenerado. Así, existen $u, v \in \mathrm{Cl}_X(U) \subset X$ tales que $\mathrm{Cl}_X(U) = uv$. Además, por el Corolario 1.4, $\mathrm{ord}_{\mathrm{Cl}_X(U)}(c) = 2$. Por lo tanto, $c \in (uv)$. Esto prueba 1).

Ahora probemos 2). Sea B un arco libre en X. Consideremos la familia:
$$\mathfrak{F} = \{D \subset X \colon D \text{ es un arco libre en } X \text{ tal que } B \subset D\}.$$

Notemos que $B \in \mathfrak{F}$ y, así, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Ordenemos a $\mathfrak{F}$ por la relación de contención "$\subset$" y tomemos una cadena $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{F}$. Entonces para cada $C, D \in \mathfrak{D}$ se cumple que $C \subset D$ o bien $D \subset C$. Hagamos $V = \bigcup \mathfrak{D}$. Por el Teorema 1.27, existen $y, z \in X$ tales que $(yz) \subset V$ y $\mathrm{Cl}_X(V) = yz$. Probemos que yz es un arco libre en X. Para esto, tomemos $x \in (yz)$ así como elementos $c, d \in (yz) \subset V$ tales que $x \in (cd)$. Luego existen $C, D \in \mathfrak{D}$ tales que $c \in C$ y $d \in D$. Como C y D son comparables, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $C \subset D$. Entonces $c, d \in D$ y, así, $cd \subset D$. Como D es un arco libre en X, también cd es un arco libre en X. Aplicando el Teorema 1.35, deducimos que $x \in (cd) \subset O(X)$. Esto prueba que $(yz) \subset O(X)$. Luego, por el Teorema 1.35, yz es un arco libre en X. Como, para cada $A \in \mathfrak{D}$, tenemos que $B \subset A \subset V \subset yz$, resulta que $yz \in \mathfrak{F}$ y que yz es una cota superior de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{F}$. Esto implica, por el Lema de Zorn ([26, Teorema 2.1 (2), pág. 32]), que $\mathfrak{F}$ tiene un elemento maximal, digamos M. Esto prueba 2).

Para la última parte del teorema, supongamos que $O(X)$ es abierto en X y que xy es un arco libre maximal en X. Queremos probar que $x, y \in R(X) \cup E(X)$. Supongamos, por el contrario, que $x \in O(X) = \mathrm{Int}_X(O(X))$. Entonces, por 1), existen $u, v \in X$ tales que uv es un arco libre (no degenerado) en X de modo que $x \in (uv)$. Luego $x \neq u$ y $x \neq v$. Como $u \neq v$, alguno de u y v es diferente de y. Notemos que $u \notin (xy)$ o bien $v \notin (xy)$. Aplicando los incisos 2) y 3) del Teorema 1.36, deducimos que:

a) Si $u, v \notin (xy)$, entonces $uv \cap xy \subsetneq \{x, y\}$ o bien $xy \subset uv$;

b) si $|\{u, v\} \cap (xy)| = 1$ y $|\{u, v\} \cap (X - (xy))| = 1$, entonces $xy \cup uv$ es un arco en X tal que $xy \subset xy \cup uv$.

Supongamos primero que se satisface a). Notemos que, si $y \notin uv$, se cumple que $uv \cap xy \subsetneq \{x, y\}$. Así, ya que $x \in uv$, $uv \cap xy = \{x\}$. Usando el inciso 3) del Teorema 1.36, aplicado al arco libre uv, obtenemos que $xy \cap uv \subsetneq \{u, v\}$, de donde obtenemos que $x \in \{u, v\}$. Ya que esto es una contradicción, concluimos que $y \in uv$. Por lo tanto, $xy \subset uv$ y, como alguno de u y v es diferente de y, en realidad tenemos que $xy \subsetneq uv$. Esto implica que el arco libre maximal xy en X, está contenido propiamente en el arco libre uv de X. Esto es absurdo, por lo que la condición a) no se cumple. Por consiguiente, se satisface b). Como xy y uv son arcos libres en X y $xy \cup uv$ es un arco en X, deducimos que $xy \cup uv$ es un arco libre en X. Como $u, v \in xy \cup uv$ y alguno de u y v es diferente de y, en realidad tenemos que $xy \subsetneq xy \cup uv$. De nuevo esto contradice la maximalidad del arco xy. Por lo tanto, $x \notin O(X)$. Luego $x \in R(X) \cup E(X)$. De manera similar se prueba que $y \in R(X) \cup E(X)$. Esto prueba la primera parte de 3).

Ahora supongamos que $M = ab$ es un arco libre en X tal que $a, b \in R(X) \cup E(X)$. Si cd es un arco en X tal que $ab \subsetneq cd$, entonces $a \in (cd)$ o bien $b \in (cd)$, de donde $(cd) \cap (R(X) \cup E(X)) \neq \emptyset$. Como todo elemento de $E(X)$ es punto final de cada arco que los contiene, en realidad tenemos que $R(X) \cap (cd) \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.35, cd no es un arco libre en X. Esto prueba que ab es un arco libre maximal en X. □

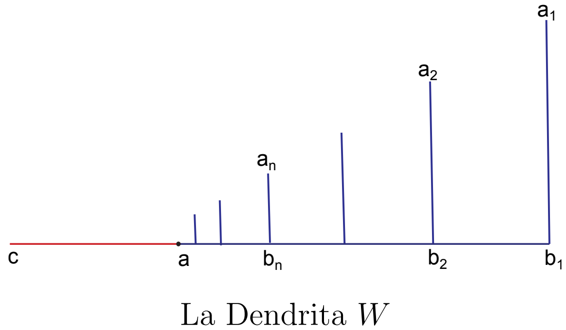
1.9. La Dendrita W

Construiremos a continuación, en $\mathbb{R}^2$, dos dendritas especiales que se conoce como "la dendrita W" y "la dendrita W_0". Posteriormente mostraremos condiciones, bajo las cuales, una dendrita posee una copia topológica de alguna de dichas dendritas. Esto será importante en el Capítulo 3, para la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas.

Para cada $p, q \in \mathbb{R}^2$, denotamos por pq al segmento de línea recta que une los puntos p y q. Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y $b_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Sean $a = (0, 0)$ y $c = (-1, 0)$. Definimos:

$$W_0 = ab_1 \cup \left(\bigcup \{a_n b_n \colon n \in \mathbb{N}\}\right) \quad \text{y} \quad W = ca \cup W_0. \tag{1.9.1}$$

A W se le conoce como "la dendrita W con vértice a y base $ca \cup ab_1$". A W_0 se le llama "la dendrita W_0 con vértice a y base ab_1".



La Dendrita W

Si X es una dendrita, $Y \subset X$ y existe un homeomorfismo $h\colon W \to Y$, decimos que Y es una copia de la dendrita W en X con vértice $h(a)$ y base $h(ca \cup ab_1)$. De igual manera, un subconjunto Z de X es una copia de la dendrita W_0 si existe un homeomorfismo $g\colon W_0 \to Z$. El punto $g(a)$ es el vértice de Z y el arco $g(ab_1)$ es la base de Z.

En la presente sección vamos a mostrar condiciones, bajo las cuales, una dendrita X posee una copia de la dendrita W o bien de la dendrita W_0.

Teorema 1.39. *Sean X una dendrita, $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $r\colon X \to xy$ la función primer punto en xy. Supongamos que $\{y_n\}_n$ es una sucesión en $\big(X - (xy)\big) \cup R(X)$ tal que:*

$$x = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{y, para cada } n \in \mathbb{N}, \quad r(y_n) \in (xy).$$

Entonces:

1) *Existe una subsucesión $\{r(y_{n_k})\}_k$ de $\{r(y_n)\}_n$ tal que si $x_k = r(y_{n_k})$, para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_k\}_k$ es una sucesión en $R(X)$ tal que:*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_k \quad \text{y, para cada } k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} \in (xx_k) \subset (xy);$$

2) *existe una copia de W_0 en X, con vértice x, digamos Y, tal que $R(Y) = \{x_k\colon k \in \mathbb{N}\}$;*

3) *si $\operatorname{ord}_X(x) > 1$, entonces existe $z \in X$ tal que, si Y es la copia de W_0 indicada en 2), entonces $zx \cup Y$ es una copia de W.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ hagamos $r(y_n) = a_n$. Por hipótesis $a_n \in (xy)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Como ya mencionamos antes, en [47, Lema 10.25, pág. 176] se prueba que r es una función continua. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} r(y_n) = r(x) = x$. En consecuencia, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Veamos que a_n es un punto de ramificación de X. En efecto, si $y_n \notin (xy)$, por la propiedad 7) del Teorema 1.33, tenemos que $a_n = r(y_n) \in R(X)$. Si $y_n \in (xy)$, como por hipótesis $y_n \in \big(X - (xy)\big) \cup R(X)$, $y_n \in R(X)$ y, así, $a_n = r(y_n) = y_n$ es un elemento de $R(X)$.

Afirmamos que:

a) Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $n_m > m$ tal que $a_{n_m} \in (xa_m)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$. Como $a_m \neq x$, existe un abierto y conexo U en X tal que $x \in U \subset X - \{a_m\}$. Puesto que la sucesión $\{a_n\}_n$ converge a x, existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $n_m > m$ y $a_{n_m} \in U$. Entonces $x, a_{n_m} \in U \cap xy$. Utilizando las propiedades 2) y 4) del Teorema 1.19, tenemos que $U \cap xy$ es arcoconexo. Luego, $xa_{n_m} \subset U \cap xy \subset [xa_m) \cup (a_m y]$. Por lo tanto, $xa_{n_m} \subset [xa_m)$. Esto prueba a).

Ahora, aplicando a), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 > 1$ y $a_{n_1} \in (xa_1)$. Nuevamente, por a), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_3 > n_1$ y $a_{n_3} \in (xa_{n_1})$. Por inducción, podemos construir una sucesión $\{a_{n_k}\}_k$ de puntos en (xy) tal que, si para cada $k \in \mathbb{N}$ hacemos $x_k = a_{n_k}$, entonces $x_{k+1} \in (xx_k) \subset (xy)$. Como $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, tenemos que $x = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Esto concluye la prueba de 1).

Para probar 2), consideremos la sucesión $\{x_k\}_k$ de puntos de ramificación de X, garantizada en 1). Recordemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_k = r(y_{n_k})$. Dada $k \in \mathbb{N}$, hacemos $z_k = y_{n_k}$ si $y_{n_k} \notin (xy)$. De lo contrario, si $y_{n_k} \in (xy)$, ocurre que $x_k = r(y_{n_k}) = y_{n_k} \in R(X)$ y podemos tomar $z_k \notin (xy)$ de modo que $r(z_k) = x_k$. Entonces, de acuerdo con la definición de r (Definición 1.7.1), el punto x_k es la primera vez que el arco en X de z_k a x intersecta al arco xy. Esto y la propiedad de que $x_{k+1} \in (xx_k) \subset (xy)$, para toda $k \in \mathbb{N}$, implican que $\{z_k x_k\}_k$ es una familia de arcos en X, ajenos dos a dos. Entonces, por el Teorema 1.30, $\{z_k x_k\}_k$ es una sucesión nula. Además, en la métrica de Hausdorff, la sucesión $\{z_k x_k\}_k$ converge a $\{x\}$ y, por consiguiente:

$$Y = xx_1 \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} z_k x_k \right)$$

es una copia de la dendrita W_0 con vértice x, tal que $R(Y) = \{x_k \colon k \in \mathbb{N}\}$. Esto prueba 2).

Por último, si $\mathrm{ord}_X(x) > 1$, podemos tomar un punto z en una componente C de $X - \{x\}$ que no intersecta a la copia Y de la dendrita W_0 que construimos en 2). Así, puesto que $\mathrm{Cl}_X(C) = C \cup \{x\}$, tenemos que $zx \cap Y = \{x\}$, por lo que, $Z = Y \cup zx$ es una copia de la dendrita W. Esto prueba 3). $\square$

Corolario 1.40. *Sean X una dendrita y $x \in X$. Entonces se satisfacen las siguientes proposiciones:*

1) *Si existen una componente C de $X-\{x\}$ y una sucesión $\{y_i\}_i$ de puntos de $R(X) \cap C$ tales que $x = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$ entonces, para cada $y \in C$, existe $z \in (xy]$ tal que el arco $xz \subset xy$ es la base de una copia de la dendrita W_0, contenida en $\mathrm{Cl}_X(C)$, cuyo vértice es x;*

2) *si x es un punto de acumulación de $E(X) \cup R(X)$ y $\mathrm{ord}_X(x)$ es finito, entonces x es el vértice de una copia de W_0; más aún, existe una componente C de $X - \{x\}$ tal que, para cada $y \in E\big(\mathrm{Cl}_X(C)\big) - \{x\}$, existe $z \in (xy]$ tal que el arco xz es la base de una copia de la dendrita W_0, cuyo vértice es x.*

Demostración. Supongamos primero que existen una componente C de $X-\{x\}$ y una sucesión $\{y_i\}_i$ de puntos de $R(X)\cap C$ tales que $x = \lim\limits_{i\to\infty} y_i$. Sean $y \in C$ y $r\colon X \to xy$ la función primer punto en xy. Como C es arcoconexo y, por el Corolario 1.26, x es un punto extremo de $\mathrm{Cl}_X(C)$, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $r(y_i) \in (xy]$. Si existe una subsucesión $\{y_{i_k}\}_k$ de $\{y_i\}_i$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $r(y_{i_k}) = y$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} r(y_{i_k}) = y$. Como r es una función continua ([47, Lema 10.25, pág. 176]), ocurre que:

$$y = \lim_{k\to\infty} r(y_{i_k}) = \lim_{i\to\infty} r(y_i) = r\left(\lim_{i\to\infty} y_i\right) = r(x) = x.$$

Luego $x = y$, lo cual es una contradicción, pues $y \in C \subset X - \{x\}$. Esto prueba que y es la imagen, bajo r, sólo de un número finito de elementos de $\{y_i\}_i$. Así podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que para cada $i \in \mathbb{N}$, $r(y_i) \neq y$, con lo que $r(y_i) \in (xy)$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 1.39 y, así, existe $z \in (xy]$ tal que el arco $xz \subset xy$ es la base de una copia de la dendrita W_0, cuyo vértice es x. Por la construcción que realizamos, la copia de W_0 está contenida en $\mathrm{Cl}_X(C)$.

Ahora supongamos que x es punto de acumulación de $E(X) \cup R(X)$ y que $\mathrm{ord}_X(x)$ es finito. Entonces existe una sucesión $\{y_n\}_n$ de distintos puntos de $E(X) \cup R(X)$ tal que:

$$x = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Como $\mathrm{ord}_X(x)$ es finito, $X - \{x\}$ tiene una cantidad finita de componentes y, por la conexidad local de X, cada una de éstas es abierta en X. Así, existe una componente C de $X - \{x\}$ tal que $y_n \in C$, para una infinidad de índices n. Supongamos entonces, sin perder generalidad, que para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in C$. Aplicando el Corolario 1.26, se cumple lo siguiente:

$$x \in E(\mathrm{Cl}_X(C)).$$

Notemos que, por la parte 1) del Teorema 1.28, el conjunto $E(\mathrm{Cl}_X(C)) - \{x\}$ es no vacío. Sean $y \in E\big(\mathrm{Cl}_X(C)\big) - \{x\}$ y r la función primer punto de $\mathrm{Cl}_X(C)$ en xy. Como x y y son puntos extremos de $\mathrm{Cl}_X(C)$, por la parte 5) del Teorema 1.33, para cada $n \in \mathbb{N}$, $r(y_n) \in (xy)$. Además, como la sucesión $\{y_n\}_n$ es de distintos puntos $E(X) \cup R(X)$ podemos suponer, sin perder generalidad que $\{y_n\}_n$ es una sucesión en $(X - (xy)) \cup R(X)$. Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 1.39 y, así, existe $z \in (xy]$ tal que el arco $xz \subset xy$ es la base de una copia de la dendrita W_0, cuyo vértice es x. Por la construcción que realizamos, la copia de W_0 está contenida en $\mathrm{Cl}_X(C)$. □

Corolario 1.41. *Sea X una dendrita tal que $R(X)$ es finito, entonces $O(X)$ es abierto.*

Demostración. Supongamos que $x \in O(X) \cap \mathrm{Cl}_X(R(X) \cup E(X))$. Como $\mathrm{ord}_X(x) = 2$, por la propiedad 2) del Corolario 1.40, x es el vértice de una copia Y de W_0, con $Y \subset X$. Como los puntos de ramificación de Y también son puntos de ramificación de X, esto contradice que $R(X)$ es finito. Por lo tanto, $O(X)$ es abierto en X. □

Capítulo 2

Distintos Tipos de Homogeneidad

2.1. Introducción

En el presente capítulo introducimos, para $n \in \mathbb{N}$, la noción de espacio n-homogéneo y espacio n-homogéneo en un punto. Analizamos la relación entre los tres tipos de homogeneidad que hemos definido. Como veremos, los espacios n-homogéneos resultan homogéneos y los continuos n-homogéneos en un punto tienen a los más dos órbitas (Teoremas 2.3 y 2.4). En la Sección 2.5, estudiamos brevemente los continuos $\frac{1}{n}$-homogéneos con exactamente un punto de corte. Por ejemplo, el Teorema 2.16 muestra una relación entre las órbitas del continuo y las órbitas de las componentes del complemento del punto de corte. La parte 1) del Teorema 2.18 dice que el grado de homogeneidad de dichas componentes es menor estrictamente al grado de homogeneidad del continuo y, el Teorema 2.24, muestra un ejemplo de un continuo $\frac{1}{3}$-homogéneo que se obtiene al pegar por un punto, copias del mismo continuo homogéneo y localmente conexo. En este ejemplo, la cerradura de cada componente es homogénea.

2.2. Espacios n-homogéneos

Recordemos que, dado un espacio topológico X, el símbolo $\mathcal{H}(X)$ representa al conjunto de los homeomorfismos de X en X.

Definición 2.1. *Sean X un espacio y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que X es* ***n-homogéneo*** *si, para cada par de conjuntos con n elementos A y B, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(A) = B$. Decimos además que X es* ***n-homogéneo en un punto*** *$c \in X$ si, para cada par de conjuntos A y B de n elementos de modo que $c \in A \cap B$, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(A) = B$ y $h(c) = c$.*

En el siguiente resultado, mostramos que ser n-homogéneo en un punto, es un invariante topológico. Por tanto ser n-homogéneo también es un invariante topológico.

Proposición 2.2. *Sean X y Y dos espacios y $n \in \mathbb{N}$. Si existe un homeomorfismo $f : X \to Y$ y X es n-homogéneo en p, entonces Y es n-homogéneo en $f(p)$.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos de Y con exactamente n elementos tales que $f(p) \in A \cap B$. Como $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son dos subconjuntos de X que tienen a p, cada uno con exactamente n elementos, y X es n-homogéneo en p, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(f^{-1}(A)) = f^{-1}(B)$ y $h(p) = p$. Luego, $f \circ h \circ f^{-1}$ es un homeomorfismo, de Y en Y, tal que $(f \circ h \circ f^{-1})(A) = f(f^{-1}(B)) = B$ y $(f \circ h \circ f^{-1})(f(p)) = f(h(p)) = f(p)$. Esto prueba que Y es n-homogéneo en $f(p)$. $\square$

Notemos que las definiciones de espacio 1-homogéneo y espacio $\frac{1}{1}$- homogéneo coinciden con la definición usual de espacio homogéneo. También es importante notar que todos los espacios son trivialmente 1-homogéneos en cada uno de sus puntos. Por tal motivo, para el estudio de los continuos n-homogéneos en un punto, consideraremos siempre $n \geq 2$. Nos gustaría estudiar la relación entre las nociones de espacio $\frac{1}{n}$-homogéneo, espacio n-homogéneo y espacio n-homogéneo en un punto. En este capítulo damos algunos resultados sobre esta relación, en especial cuando nuestros espacios son continuos.

La parte 1) del siguiente teorema aparece probada en [14, Teorema 1, pág. 137], mientras que la parte 2) se muestra en [13, Corolario 2, pág. 647].

Teorema 2.3. *Sean X un espacio y $n \in \mathbb{N}$. Si X es n-homogéneo, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *X es homogéneo;*

2) *si $n \geq 2$, X es $(n-1)$-homogéneo.*

A continuación presentamos una versión del Teorema 2.3, para espacios n-homogeneos en un punto. Para esto utilizaremos el Teorema 1.7.

Teorema 2.4. *Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$. Si X es n-homogéneo en un punto $p \in X$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *$X - \{p\}$ está contenido en una órbita de X;*

2) *X es homogéneo o bien X es $\frac{1}{2}$-homogéneo y sus órbitas son $X - \{p\}$ y $\{p\}$;*

3) *si $n \geq 2$, X es $(n-1)$-homogéneo en p.*

Demostración. Supongamos que X es n-homogéneo en el punto $p \in X$. Para probar 1), sean $x, y \in X - \{p\}$ tales que $x \neq y$. Consideremos $n-2$ puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2} \in X - \{x, y, p\}$. Como X es n-homogéneo en p, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que:

$$h(\{p, x, x_1, \ldots, x_{n-2}\}) = \{p, y, x_1, \ldots, x_{n-2}\} \quad \text{y} \quad h(p) = p.$$

Si $h(x) = y$, tenemos que $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$ y, así, x y y están en la misma órbita de X. Supongamos que $h(x) \neq y$. En consecuencia, existe $i_1 \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ tal que $h(x) = x_{i_1}$. Si $h(x_{i_1}) = y$, entonces $h^2 \in \mathcal{H}(X)$ es tal que $h^2(x) = y$ y, así, x y y están en la misma órbita de X. Supongamos pues, que $h(x_{i_1}) \neq y$. Como $x_{i_1} \in X - \{x, y, p\}$, $h(x) \neq x$ y, así, $h^2(x) \neq h(x)$, es decir $h(x_{i_1}) \neq x_{i_1}$. Luego, existe $i_2 \in \{1, 2, \ldots, n-2\} - \{i_1\}$ tal que $h(x_{i_1}) = x_{i_2}$. De manera similar, si $h(x_{i_2}) \neq y$, encontramos $i_3 \in \{1, 2, \ldots, n-2\} - \{i_1, i_2\}$ tal que $h(x_{i_2}) = x_{i_3}$ y, continuando este proceso, podemos encontrar $m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $h^m(x) = y$. Así $h^m \in \mathcal{H}(X)$ y $h^m(p) = p$. Por lo tanto, los elementos de $X - \{p\}$ pertenecen a la misma órbita $\mathcal{O}$ de X. Esto prueba 1).

Ahora probemos 2). Si X no es homogéneo, el único punto de X que no es un elemento de $\mathcal{O}$ es el punto p. En consecuencia, las dos órbitas de X son $X - \{p\}$ y $\{p\}$. Esto prueba 2). Es importante remarcar que, para demostrar 1) y 2), no es necesaria la suposición de que X es un continuo.

Notemos que, si $n = 2$, entonces 3) se cumple trivialmente, pues todo espacio es 1-homogéneo en cada uno de sus puntos. Luego, podemos suponer que $n \geq 3$. De la Definición 2.1, se cumple que $X - \{p\}$ es $(n-1)$-homogéneo.

Además, por la segunda parte del Teorema 2.3, tenemos que $X-\{p\}$ es también $(n-2)$-homogéneo. Sean A y B dos subconjuntos de X, con exactamente $n-1$ elementos cada uno de ellos, y tales que $p \in A \cap B$. Entonces existe un homeomorfismo $h\colon X-\{p\} \to X-\{p\}$ tal que $h(A-\{p\}) = B-\{p\}$. Ahora, usando el Teorema 1.7, podemos extender h a un homeomorfismo $g\colon X \to X$, con $g(p) = p$. En consecuencia, $g(A) = B$ y $g(p) = p$. Por lo tanto, X es $(n-1)$-homogéneo en el punto p. $\square$

Definición 2.5. *Si X es un continuo y $p \in X$, la* **composante de p en X** *es la unión de todos los subcontinuos propios de X que tienen a p. Decimos que X es un continuo* **descomponible** *si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Finalmente, decimos que X es un continuo* **indescomponible** *si X no es descomponible.*

La parte 1) del siguiente teorema se encuentra probada en [36, Teorema 2, pág. 209]. La parte 2) puede consultar en [47, Teorema 11.15, pág. 203] y, por último, la parte 3) se encuentra probada en [47, Teorema 11.17, pág. 204].

Teorema 2.6. *Sea X un continuo. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Cada composante de X es densa en X;*

2) *si X es indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes;*

3) *si X es indescomponible, entonces las composantes de X son ajenas dos a dos.*

Como indicamos en la parte 1) del Teorema 2.3, si un espacio es n-homogéneo, es homogéneo. Sin embargo, dado un espacio homogéneo Y, no siempre existe $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que Y es n-homogéneo. Para ver esto, como indica el Teorema 2.7, basta considerar un continuo homogéneo e indescomponible, por ejemplo, el pseudoarco.

Teorema 2.7. *Sean X un continuo y $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Si X es m-homogéneo o bien m-homogéneo en algún punto, entonces X es descomponible.*

Demostración. Primero consideraremos que X es m-homogéneo en algún punto, digamos c y que X es indescomponible. Por la tercera parte del Teorema 2.4, X es 2-homogéneo en c. Sea K_c la composante de X que tiene a c. Sabemos que, en general, las composantes en un continuo son densas (Teorema 2.6 inciso 1)). Así, podemos tomar $a \in K_c - \{c\}$. Si $h\colon X \to X$ es un homeomorfismo que fija a c, como la imagen, bajo un homeomorfismo, de una composante es a su vez una composante, ocurre que $h(K_c) = K_c$. Luego $h(\{a, c\}) \subset K_c$. Por la partes 2) y 3) del Teorema 2.6, X tiene una cantidad no numerable de composantes todas ellas ajenas dos a dos. Tomemos $b \in (X - K_c)$. Ya que $h(b) \notin K_c$, no existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(c) = c$ y $h(a) = b$. Ya que esto es una contradicción, X no es m-homogéneo en ninguno de sus puntos.

Ahora supondremos que X es m-homogéneo y, nuevamente, que X es indescomponible. Por la segunda parte del Teorema 2.3, X es 2-homogéneo. Sean K una composante de X, $a, b \in K$ y $c \in X - K$. Como X es 2-homogéneo, existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(\{a, b\}) = \{a, c\}$. Esto indica, por un lado, que $h(K) \cap K \neq \emptyset$, de donde $h(K) = K$ pero, por otro lado, también indica que $c \in h(K) = K$. En vista de que esto contradice la elección de c, inferimos que X es descomponible. $\square$

Sean $n \in \mathbb{N}$ y X un continuo n-homogéneo en algún punto p. Por la parte 2) del Teorema 2.4, podemos preguntar en qué casos X es homogéneo. La parte 3) del mismo teorema indica que, para cada $m < n$, X es m-homogéneo en p. Así que, podemos preguntar si existe $m > n$ tal que X es m-homogéneo en algún punto o bien, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que X es m-homogéneo. Estas preguntas no siempre tienen respuesta positiva, como lo mostrará el Teorema 2.15. A continuación, presentamos en los siguientes resultados, algunos casos en los que n-homogeneidad en algún punto, implica homogeneidad o bien n-homogeneidad. El siguiente resultado generaliza [51, Lema 4.4, pág. 2158].

Teorema 2.8. *Sean X un espacio y $n \in \mathbb{N}$. Si existen dos puntos a y b en X tales que X es n-homogéneo en a y X es n-homogéneo en b, entonces X es homogéneo.*

Demostración. Supongamos que a y b son dos puntos en X tales que X es n-homogéneo en cada uno de ellos y que X no es homogéneo. Como X es n-homogéneo en el punto a, por la parte 1) del Teorema 2.4, X es $\frac{1}{2}$-homogéneo y sus dos órbitas son $X - \{a\}$ y $\{a\}$. Ya que X es también n-homogéneo en el punto b, aplicando de nuevo la parte 1) del Teorema 2.4, también ocurre que $X - \{b\}$ y $\{b\}$ son las dos órbitas de X. Esto es una contracción, pues $a \neq b$. Por lo tanto, X es homogéneo. $\square$

Teorema 2.9. *Sean X un espacio homogéneo y $n \in \mathbb{N}$. Si X es n-homogéneo en algún punto, entonces X es n-homogéneo.*

Demostración. Supongamos que X es n-homogéneo en un punto $p \in X$. Como X es homogéneo, $X = \mathrm{Orb}_X(p)$. Así, por la Proposición 2.2, X es n-homogéneo en cada uno de sus puntos. Para ver que X es n-homogéneo, sean $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{y_1, \ldots y_n\}$ dos subconjuntos de X con exactamente n elementos. Como X es n-homogéneo en x_n, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que:

$$h(\{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}) = \{y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n\} \quad \text{y} \quad h(x_n) = x_n.$$

Como también X es n-homogéneo en y_1, existe $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que:

$$g(\{y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, x_n\}) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \quad \text{y} \quad g(y_1) = y_1.$$

Luego $g \circ h \in \mathcal{H}(X)$ es tal que:

$$(g \circ h)(\{x_1, \ldots x_n\}) = g(\{y_1, \ldots y_{n-1}, x_n\}) = \{y_1, y_2, \ldots y_n\}.$$

Por lo tanto, X es n-homogéneo. $\square$

De los Teoremas 2.8 y 2.9 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.10. *Sean X un espacio y $n \in \mathbb{N}$. Si existen dos puntos distintos en X tales que X es n-homogéneo en cada uno de ellos, entonces X es n-homogéneo.*

2.3. Relación con la Conexidad Local

En el Teorema 2.7 probamos que, para $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, los continuos m-homogéneos son descomponibles. En 1975 G. S. Ungar probó, en [59, Teorema 3.12, pág. 397] el Teorema 2.11, que dice que los continuos 2-homogéneos son localmente conexos. Como consecuencia de esto, por la parte 2) del Teorema 2.3, para cada $m \in \mathbb{N}-\{1\}$, los continuos m-homogéneos son localmente conexos. Sin embargo, como lo muestra el Ejemplo 2.13, no todos los espacios m-homogéneos son localmente conexos, ni tampoco todos los continuos m-homogéneos en un algún punto son localmente conexos.

Teorema 2.11. *Si X es un continuo 2-homogéneo, entonces X es localmente conexo.*

Corolario 2.12. *Sean X un continuo y $m \in \mathbb{N} - \{1\}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si X es m-homogéneo, sucede que X es localmente conexo;*

2) *si X es m-homogéneo en $p \in X$, entonces X es localmente conexo si y sólo si X es conexo en pequeño en algún punto de $X - \{p\}$.*

Demostración. Como ya mencionamos, 1) se obtiene de los Teoremas 2.3 y 2.11. Para probar 2) supongamos que X es conexo en pequeño en algún punto de $X - \{p\}$. Como la conexidad en pequeño es una propiedad topológica y, por la parte 1) del Teorema 2.4, se cumple que $X - \{p\}$ está contenido en una órbita de X, entonces X es conexo en pequeño en cada punto de $X - \{p\}$. Como el conjunto de puntos de no conexidad en pequeño de un continuo no es finito ([47, Corolario 5.13, pág. 78]), ocurre que, también, X es conexo en pequeño en p. Por lo tanto, X es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos y, así, X es localmente conexo. La otra implicación es clara. $\square$

Ejemplo 2.13. *Existen espacios m-homogéneos, espacios m-homogéneos en algún punto, incluso continuos m-homogéneos en algún punto que no son localmente conexos.*

Demostración. Se sabe que, para cada $m \in \mathbb{N}$, el conjunto de Cantor C es m-homogéneo (ver, por ejemplo, [8, pág. 73]). Además, C no es localmente conexo.

Sea $Y = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$. Entonces se puede ver fácilmente que, para cada $m \in \mathbb{N}$, Y es m-homogéneo en el punto 0 y no localmente conexo en 0.

Ahora, tomemos la circunferencia S^1 y un punto fijo $s \in S^1$. Sean $X = \big(S^1 \times C\big)/(\{s\} \times C)$ y $q \colon S^1 \times C \to X$ la función cociente. Es fácil ver que $q(\{s\} \times C)$ es un conjunto con exactamente un elemento, denotaremos por p a tal elemento. Notemos que X es un continuo y $\{p\}$ es una órbita, pues X es unión de copias de S^1 que se tocan únicamente en el punto p. Además, $X - \{p\}$ es homeomorfo a $(S^1 - \{s\}) \times C$, el cual es homogéneo y no es localmente conexo en ninguno de sus puntos. Por lo tanto, $X - \{p\}$ es homogéneo y no tiene puntos de conexidad local. Veamos X es 2-homogéneo en p. Para ello, tomemos $a, b \in X - \{p\}$. Como $X - \{p\}$ es homogéneo, existe un homeomorfismo $f\colon X - \{p\} \to X - \{p\}$ tal que $f(a) = b$. Luego, por el Teorema 1.7, podemos extender f a un homeomorfismo $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que $g(p) = p$. Como g es extensión de f y $a \in X - \{p\}$, $g(a) = f(a) = b$. Por lo tanto, hemos probado que X es un continuo 2-homogéneo en p. Es fácil notar que X no es localmente conexo en ningún punto de $X - \{p\}$. $\square$

2.4. n-homogeneidad y Puntos de Corte

En esta sección presentamos dos sencillos resultados que muestran una relación existente entre los distintos tipos de homogeneidad que hemos considerado, cuando una de sus órbitas es degenerada. El siguiente resultado generaliza [51, Lema 4.3, pág. 2158], el cual afirma que si X es un continuo con un único punto de corte, digamos c, entonces X es $\frac{1}{2}$-homogéneo si y sólo si X es 2-homogéneo en c (notemos que, para dicho punto c, sucede que $\mathrm{Orb}_X(c) = \{c\}$, por ser el único punto de corte de X).

Proposición 2.14. *Sean X un continuo y $c \in X$ tales que $\mathrm{Orb}_X(c) = \{c\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *X es $\frac{1}{2}$-homogéneo;*

2) *existe $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que X es m-homogéneo en c;*

3) *X es 2-homogéneo en c.*

Demostración. Supongamos que X es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Ya que $\{c\}$ es una órbita de X, se cumple que $X - \{c\}$ es la segunda órbita de X. En consecuencia, si $x, y \in X - \{c\}$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(x) = y$ y, como c es el único elemento de su órbita, $h(c) = c$. Esto implica que X es 2-homogéneo en c. Esto prueba que 1) implica 3). Es claro que 3) implica 2). Ahora supongamos que existe $m \in \mathbb{N} - \{1\}$ tal que X es m-homogéneo en c. Como X no es homogéneo, por la parte 2) del Teorema 2.4, X es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Esto prueba que 2) implica 1). $\square$

Teorema 2.15. *Sea X un continuo tal que $Cut(X) \neq \emptyset$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $m \in \mathbb{N}$, entonces X no es m-homogéneo;*

2) *si X es 2-homogéneo en algún punto c, entonces* $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$;

3) *si $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces X no es m-homogéneo en ninguno de sus puntos.*

Demostración. Para ver 1), notemos que, como todo continuo tiene al menos dos puntos de no corte ([47, Teorema 6.6, pág. 89]) y la imagen bajo cualquier homeomorfismo de un punto de corte es un punto de corte, sucede que X no es homogéneo. Luego, usando la parte 1) del Teorema 2.3, obtenemos 1).

Para ver 2), supongamos que X es 2-homogéneo en c. Notemos que 1) dice que X no es homogéneo. Así, por la parte 2) del Teorema 2.4, X es $\frac{1}{2}$-homogéneo y sus órbitas son $X - \{c\}$ y $\{c\}$. Por lo tanto, una de las dos órbitas de X es degenerada. Ahora bien, para todo $h \in \mathcal{H}(X)$, sucede que:

$$h(\mathrm{Cut}(X)) = \mathrm{Cut}(X) \quad \text{y} \quad h(X - \mathrm{Cut}(X)) = X - \mathrm{Cut}(X).$$

Como todo continuo tiene al menos dos puntos de no corte ([47, Teorema 6.6, pág. 89]), las dos órbitas de X son $\mathrm{Cut}(X)$ y $X - \mathrm{Cut}(X)$. Ya que $X - \mathrm{Cut}(X)$ no es un subconjunto degenerado, necesariamente $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$. Esto prueba 2)

Para ver 3), supongamos que $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ es tal que X es m-homogéneo en el punto $c \in X$. Por la parte 3) del Teorema 2.4, X es 2-homogéneo en c, y por 2), $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$. Tomemos una componente C de $X - \{c\}$, sabemos que $|C|$ no es finito y, así, podemos tomar $A \subset C$, con exactamente $m - 1$ elementos. Como c es punto de corte de X, $X - \{c\}$ no es conexo, es decir, $C \neq X - \{c\}$. Luego, como $m - 1 \geq 2$, podemos tomar un subconjunto B de $X - \{c\}$, con exactamente $m - 1$ elementos, de manera que:

$$B \cap C \neq \emptyset \neq B \cap (X - C).$$

Por la parte 2) del Teorema 1.5, la imagen de una componente de $X - \{c\}$, bajo un homeomorfismo de X en X, es nuevamente una componente de $X - \{c\}$. En consecuencia, para cada $h \in \mathcal{H}(X)$, $h(A) \neq B$. Por lo tanto, X no es m-homogéneo en c. $\square$

2.5. $\frac{1}{n}$-homogeneidad y Puntos de Corte

Sean X un espacio conexo y $c \in X$. Recordemos que denotamos por $\mathcal{A}_c$ a la familia de todas las componentes de $X - \{c\}$. Empezamos esta sección mostrando algunos resultados que relacionan las órbitas de un continuo con un único punto de corte c, con las órbitas de las componentes de $X - \{c\}$. El siguiente teorema dice, entre otras cosas, que si el continuo X es localmente conexo, entonces cada órbita de X intersecta, a lo más, una órbita de cada componente y, además, dicha órbita se puede obtener como la unión de las órbitas de las componentes a las que intersecta.

Teorema 2.16. *Sea X un continuo tal que* $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$. *Si $A \in \mathcal{A}_c$ y $a \in A$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $\mathrm{Orb}_X(a) \cap A \subset \mathrm{Orb}_A(a)$;

2) $\mathrm{Orb}_X(a) \subset \bigcup\{\mathrm{Orb}_B(b) \colon B \in \mathcal{A}_c \text{ y } b \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap B\}$.

Además, si X es localmente conexo, entonces se obtienen las igualdades en 1) *y* 2)*.*

Demostración. Para probar 1), tomemos un punto $y \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap A$. Sea $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) = y$. Como a y $h(a)$ son elementos de A, $h(A) \cap A \neq \emptyset$. Luego, por la parte 2) del Teorema 1.5, $h(A) = A$. De esta manera, $h|_A \colon A \to A$ es un homeomorfismo, con lo que $y \in \mathrm{Orb}_A(a)$. Esto prueba 1). Para probar 2), tomemos un punto $y \in \mathrm{Orb}_X(a)$. Como $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$, $\mathrm{Orb}_X(c) = \{c\}$. Por consiguiente, $y \neq c$ y, así, existe $B \in \mathcal{A}_c$ tal que $y \in B$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap B$. Ya que $y \in \mathrm{Orb}_B(y)$, esto prueba 2).

Ahora supongamos que X es localmente conexo y probemos que se obtienen las igualdades en 1) y 2). Para ver que $\mathrm{Orb}_A(a) \subset \mathrm{Orb}_X(a) \cap A$, tomemos un punto $y \in \mathrm{Orb}_A(a)$. Entonces existe un homeomorfismo $f \colon A \to A$ tal que $f(a) = y$. Por la parte 1) del Teorema 1.10, $\mathrm{Cl}_X(A) = A \cup \{c\}$. Además, por el Teorema 1.7, podemos extender f a un homeomorfismo, g, de $\mathrm{Cl}_X(A)$ en sí mismo, tal que $g(c) = c$. Consideremos ahora la función $h \colon X \to X$ definida, para cada $x \in X$, como:

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in \mathrm{Cl}_X(A); \\ x, & \text{si } x \in X - A. \end{cases}$$

En vista de que X es localmente conexo y que A es una componente del subconjunto abierto $X - \{c\}$ de X, resulta que A es abierto en X. Luego $X - A$ es cerrado en X. Además:

$$\mathrm{Cl}_X(A) \cap (X - A) = (A \cup \{c\}) \cap (X - A) = \big(A \cap (X - A)\big) \cup \big(\{c\} \cap (X - A)\big) = \{c\}.$$

Como $g(c) = c = 1_{X-A}(c)$, por [26, Teorema 9.4, pág. 83], tenemos que h está bien definida, es continua y $h(c) = c$. Como, además, g y 1_{X-A} son homeomorfismos, h es un homeomorfismo. Por lo tanto, $h \in \mathcal{H}(X)$ y $h(a) = g(a) = f(a) = y$; es decir $y \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap A$. Esto prueba que $\mathrm{Orb}_A(a) \subset \mathrm{Orb}_X(a) \cap A$. En consecuencia:

$$\mathrm{Orb}_A(a) = \mathrm{Orb}_X(a) \cap A, \quad \text{para cada } A \in \mathcal{A}_c \text{ y } a \in A. \tag{2.5.1}$$

Para probar la igualdad en 2), sea:

$$y \in \bigcup \{\mathrm{Orb}_B(b) \colon B \in \mathcal{A}_c \ \text{ y } \ b \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap B\}.$$

Entonces existen $B \in \mathcal{A}_c$ y $b \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap B$ tales que $y \in \mathrm{Orb}_B(b)$. Por (2.5.1) $\mathrm{Orb}_B(b) = \mathrm{Orb}_X(b) \cap B$, con lo que $y \in \mathrm{Orb}_X(b)$. Como también $b \in \mathrm{Orb}_X(a)$, tenemos que $y \in \mathrm{Orb}_X(b) = \mathrm{Orb}_X(a)$. Esto termina la demostración. □

Teorema 2.17. *Sean X un continuo localmente conexo y $c \in X$ tales que $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$. Supongamos que cada dos elementos de $\mathcal{A}_c$ son homeomorfos. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) *Para toda $x \in X - \{c\}$ y cada $B \in \mathcal{A}_c$, se tiene que $\mathrm{Orb}_X(x) \cap B \neq \emptyset$;*

2) *si cada elemento de $\mathcal{A}_c$ es $\frac{1}{n}$-homogéneo, entonces X es $\frac{1}{n+1}$-homogéneo.*

Demostración. Supongamos primero que cada dos elementos de $\mathcal{A}_c$ son homeomorfos. Entonces, por el Corolario 1.16, los elementos de $\mathcal{A}_c$ poseen el mismo número de órbitas. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{A}_c$. Sean $B \in \mathcal{A}_c$ y $a \in A$. Como demostramos en el Teorema 1.17, existe un homeomorfismo $h_B \colon X \to X$ tal que $h_B(c) = c$, $h_B(A) = B$ y la imagen, bajo h_B de la órbita $\mathrm{Orb}_A(a)$ de A, es la órbita $\mathrm{Orb}_B(h_B(a))$ de B. El homeomorfismo h_B es la identidad de X en X si $B = A$. Además, en dicho caso, por la igualdad en la parte 1) del Teorema 2.16:

$$\mathrm{Orb}_X(a) \cap A = \mathrm{Orb}_A(a). \tag{2.5.2}$$

Supongamos ahora que $B \neq A$. Vamos a probar lo siguiente:

$$\mathrm{Orb}_X(a) \cap B = \mathrm{Orb}_B(h_B(a)). \tag{2.5.3}$$

Sea $x \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap B$. Tomemos un homeomorfismo $g\colon X \to X$ tal que $g(x) = a$. Entonces $h_B \circ g\colon X \to X$ es un homeomorfismo tal que:

$$(h_B \circ g)(x) = h_B(g(x)) = h_B(a).$$

Luego, $x \in \mathrm{Orb}_X(h_B(a))$ y, ya que X es localmente conexo, por la parte 1) del Teorema 2.16, $x \in \mathrm{Orb}_X(h_B(a)) \cap B = \mathrm{Orb}_B(h_B(a))$. Esto prueba que $\mathrm{Orb}_X(a) \cap B \subset \mathrm{Orb}_B(h_B(a))$.

Tomemos ahora $x \in \mathrm{Orb}_B(h_B(a))$. Entonces $x \in B$ y, como ya vimos, $\mathrm{Orb}_X(h_B(a)) \cap B = \mathrm{Orb}_B(h_B(a))$. Así que, $x \in \mathrm{Orb}_X(h_B(a))$. Sea $g\colon X \to X$ un homeomorfismo tal que $g(x) = h_B(a)$. Entonces $h_B^{-1} \circ g\colon X \to X$ es un homeomorfismo tal que $(h_B^{-1} \circ g)(x) = h_B^{-1}(g(x)) = h_B^{-1}(h_B(a)) = a$. Por consiguiente, $x \in \mathrm{Orb}_X(a) \cap B$. Esto prueba que $\mathrm{Orb}_B(h_B(a)) \subset \mathrm{Orb}_X(a) \cap B$. Con esto, y lo probado en el párrafo anterior, obtenemos (2.5.3).

De (2.5.2) y (2.5.3) se sigue que la órbita de a en A intersecta a cada elemento de $\mathcal{A}_c$. Ahora podemos probar 1). Tomemos $x \in X - \{c\}$ y $B \in \mathcal{A}_c$. Sea $A \in \mathcal{A}_c$ tal que $x \in A$. Aplicando (2.5.2) y (2.5.3) con $a = x$, tenemos que $\mathrm{Orb}_X(x) \cap B = \mathrm{Orb}_B(h_B(x)) \neq \emptyset$. Esto prueba 1).

Ahora supongamos que cada elemento de $\mathcal{A}_c$ es $\frac{1}{n}$-homogéneo. Para cada $B \in \mathcal{A}_c$, consideremos que $a_{1_B}, a_{2_B}, \ldots, a_{n_B}$ son elementos de B tales que:

$$\mathrm{Orb}_B(a_{1_B}), \mathrm{Orb}_B(a_{2_B}), \ldots, \mathrm{Orb}_B(a_{n_B})$$

son las n órbitas de B. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{A}_c$. Como el homeomorfismo h_B proporciona una biyección entre las órbitas de A y las de B, reordenando los índices $1_B, 2_B, \ldots, n_B$ de ser necesario, podemos suponer que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$h_B(\mathrm{Orb}_A(a_{i_A})) = \mathrm{Orb}_B(a_{i_B}) \quad \text{y} \quad h_B(a_{i_A}) = a_{i_B}.$$

Notemos que, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y cada $b \in \mathrm{Orb}_B(a_{i_B})$, sucede que $\mathrm{Orb}_B(b) = \mathrm{Orb}_B(a_{i_B})$. Como X es localmente conexo, aplicando (2.5.2), (2.5.3) y la igualdad en la parte 2) del Teorema 2.16, se cumple que:

$$\begin{aligned}\mathrm{Orb}_X(a_{i_A}) &= \bigcup\{\mathrm{Orb}_B(b)\colon B \in \mathcal{A}_c \text{ y } b \in \mathrm{Orb}_X(a_{i_A}) \cap B\}\\ &= \bigcup\{\mathrm{Orb}_B(b)\colon B \in \mathcal{A}_c \text{ y } b \in \mathrm{Orb}_B(a_{i_B})\}\\ &= \bigcup\{\mathrm{Orb}_B(a_{i_B})\colon B \in \mathcal{A}_c\}.\end{aligned}$$

Como $X - \{c\} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}_c} B$ y, para cada $B \in \mathcal{A}_c$, se cumple que $B = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Orb}_B(a_{i_B})$, tenemos que:

$$X - \{c\} = \bigcup_{B\in\mathcal{A}_c}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Orb}_B(a_{i_B})\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{B\in\mathcal{A}_c}\mathrm{Orb}_B(a_{i_B})\right) = \bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Orb}_X(a_{i_A}).$$

De la igualdad:

$$\mathrm{Orb}_X(a_{i_A}) = \bigcup_{B\in\mathcal{A}_c}\mathrm{Orb}_B(a_{i_B})$$

y el hecho de que tanto los elementos de $\mathcal{A}_c$ como las órbitas de cada uno de dichos elementos, son ajenos dos a dos, se infiere que si $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ son tales que $i \neq j$, entonces:

$$\mathrm{Orb}_X(a_{i_A}) \cap \mathrm{Orb}_X(a_{j_A}) = \left(\bigcup_{B\in\mathcal{A}_c}\mathrm{Orb}_B(a_{i_B})\right)\bigcap\left(\bigcup_{B\in\mathcal{A}_c}\mathrm{Orb}_B(a_{j_B})\right) = \emptyset.$$

Como ya probamos que $X - \{c\} = \bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{Orb}_X(a_{i_A})$, esto implica que $X - \{c\}$ es unión de exactamente n órbitas de X y, como $\{c\}$ es también una órbita de X (por ser el único punto de corte de X), ocurre que X es $\frac{1}{n+1}$-homogéneo. Esto prueba 2) y termina la demostración del teorema. □

El siguiente resultado dice que los elementos de $\mathcal{A}_c$ tienen, a lo más, la cantidad de órbitas que tiene X. Esto ayuda a contar las órbitas de los elementos de $\mathcal{A}_c$, en particular, cuando X es localmente conexo.

Teorema 2.18. *Sean X un continuo con exactamente un punto de corte c y $A \in \mathcal{A}_c$. Si $\mathcal{X}_A$ es el conjunto de todas las órbitas de X que intersectan a A, entonces $|\mathcal{X}_A| < n$ y se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *A tiene a lo más $|\mathcal{X}_A|$ órbitas;*

2) *si X es localmente conexo, entonces A tienen exactamente $|\mathcal{X}_A|$ órbitas;*

3) *si* X *es localmente conexo y los elementos de* $\mathcal{A}_c$ *son homeomorfos dos a dos, entonces* $\mathcal{X}_A$ *es el conjunto de todas las órbitas de* X *distintas de* $\{c\}$*; más aún,* X *es* $\frac{1}{n}$*-homogéneo para* $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ *si y sólo si cada* $B \in \mathcal{A}_c$ *es* $\frac{1}{n-1}$*-homogéneo.*

Demostración. Por definición:

$$\mathcal{X}_A = \{\mathrm{Orb}_X(x) \colon x \in X \text{ y } \mathrm{Orb}_X(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Como $\{c\} = Cut(X)$, $\{c\}$ es una órbita de X que no intersecta a A; es decir, $|\mathcal{X}_A| < n$. Para probar 1), tomemos $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathcal{X}_A$. Entonces existe $a_x \in \mathrm{Orb}_X(x) \cap A$. Además, $\mathrm{Orb}_X(a_x) = \mathrm{Orb}_X(x)$ y, por la parte 1) del Teorema 2.16,

$$\mathrm{Orb}_X(x) \cap A = \mathrm{Orb}_X(a_x) \cap A \subset \mathrm{Orb}_A(a_x).$$

Como las órbitas de A forman una partición de A, $\mathrm{Orb}_A(a_x)$ es la única órbita de A que contiene a $\mathrm{Orb}_X(x) \cap A$. Entonces, si $a_0 \in \mathrm{Orb}_X(x) \cap A$ es tal que $a_0 \neq a_x$, como $\mathrm{Orb}_X(a_0) = \mathrm{Orb}_X(x)$ y $\mathrm{Orb}_X(x) \cap A = \mathrm{Orb}_X(a_0) \cap A \subset \mathrm{Orb}_A(a_0)$, necesariamente $\mathrm{Orb}_A(a_0) = \mathrm{Orb}_A(a_x)$. Esto significa que, como a_x, podemos tomar cualquier elemento de $\mathrm{Orb}_X(x) \cap A$. Sean

$$\mathfrak{R}(A) = \{\mathrm{Orb}_A(a) \colon a \in A\}$$

la familia de las órbitas de A y $F \colon \mathcal{X}_A \to \mathfrak{R}(A)$ la función definida, para $\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathcal{X}_A$, como:

$$F\left(\mathrm{Orb}_X(x)\right) = \mathrm{Orb}_A(a_x). \tag{2.5.4}$$

Notemos que F es suprayectiva pues, para $x \in A$, $x \in \mathrm{Orb}_X(x) \cap A$ y, tomando a_x como x, $\mathrm{Orb}_X(x)$ es un elemento de $\mathcal{X}_A$ tal que $F(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_A(a_x)$. La suprayectividad de F implica que $|\mathfrak{R}(A)| \leq |\mathcal{X}_A|$, lo que prueba 1).

Antes de probar 2), notemos que si, para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ X es $\frac{1}{n}$-homogéneo entonces, para cada $B \in \mathcal{A}_c$, sucede que $\mathrm{Orb}_X(c) = \{c\}$ es una órbita de X que no intersecta a B. Luego, utilizando 1), tenemos que $|\mathfrak{R}(B)| \leq |\mathcal{X}_B| \leq n - 1$. Esto implica que cada componente B de $X - \{c\}$ es un espacio a lo más $\frac{1}{n-1}$-homogéneo.

Ahora supongamos que X es localmente conexo. Por lo que hemos indicado, usando la parte 1) del Teorema 2.16, para cada $x \in X$ tal que

$\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathcal{X}_A$ y $a_x \in \mathrm{Orb}_X(x) \cap A$, sucede que $\mathrm{Orb}_X(a_x) = \mathrm{Orb}_X(x)$ y:

$$\mathrm{Orb}_X(x) \cap A = \mathrm{Orb}_X(a_x) \cap A = \mathrm{Orb}_A(a_x).$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_A &= \{\mathrm{Orb}_X(x) \colon x \in X \text{ y } \mathrm{Orb}_X(x) \cap A \neq \emptyset\} \\ &= \{\mathrm{Orb}_X(a_x) \colon x \in X \text{ y } \mathrm{Orb}_A(a_x) \in \mathfrak{R}(A)\}. \end{aligned}$$

Tomemos ahora $x, y \in X$, de modo que $\mathrm{Orb}_X(x), \mathrm{Orb}_X(y) \in \mathcal{X}_A$, así como $a_x \in \mathrm{Orb}_X(x) \cap A$ y $a_y \in \mathrm{Orb}_X(y) \cap A$ tales que, si $F \colon \mathcal{X}_A \to \mathfrak{R}(A)$ es la función que definimos para probar 1), entonces:

$$\mathrm{Orb}_A(a_x) = F(\mathrm{Orb}_X(x)) = F(\mathrm{Orb}_X(y)) = \mathrm{Orb}_A(a_y).$$

Luego:

$$\emptyset \neq \mathrm{Orb}_A(a_x) \cap \mathrm{Orb}_A(a_y) \subset \mathrm{Orb}_X(x) \cap \mathrm{Orb}_X(y).$$

Por lo que, $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$. Esto prueba que F es inyectiva y, como ya demostramos que también es suprayectiva, F es una función biyectiva. Por lo tanto, $|\mathfrak{R}(A)| = |\mathcal{X}_A|$, lo cual prueba 2).

Para ver 3), supongamos que X es localmente conexo y que las componentes de $X - \{c\}$ son homeomorfas dos a dos. Por la parte 1) del Teorema 2.17, la órbita de cualquier punto en $X - \{c\}$ intersecta a cada componente de $X - \{c\}$. En consecuencia, para cada órbita $\mathrm{Orb}_X(x)$, con $x \in X - \{c\}$, ocurre que $\mathrm{Orb}_X(x) \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que $\mathcal{X}_A$ es el conjunto de todas las órbitas de X distintas de $\{c\}$ y, así, tenemos la primera parte de 3).

Ahora supongamos que, para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, X es $\frac{1}{n}$-homogéneo. Esto implica que $|\mathcal{X}_A| = n - 1$ y, aplicando el inciso 2) de este teorema, se cumple que A tiene exactamente $n - 1$ órbitas. Como A fue tomando de manera arbitraria, tenemos que cada elemento de $\mathcal{A}_c$ tiene exactamente $n-1$ órbitas. La otra implicación es la parte 2) del Teorema 2.17. Esto concluye la prueba de 3). □

Corolario 2.19. *Sean X un continuo y $c \in X$ tales que* $\mathrm{Cut}(X) = \{c\}$. *Si X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces cada $A \in \mathcal{A}_c$ es homogéneo o bien cada $A \in \mathcal{A}_c$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.*

Demostración. Ya que X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, por la parte 1) del Teorema 2.18, los elementos de $\mathcal{A}_c$ tienen a lo más 2 órbitas. Supongamos que A y B son dos elementos de A_c, tales que A es homogéneo y B es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Entonces, existen $b_1, b_2 \in B$ tales que $\mathrm{Orb}_B(b_1)$ y $\mathrm{Orb}_B(b_2)$ son las dos órbitas de B.

Por la parte 1) del Teorema 2.16:

$$\mathrm{Orb}_X(b_1) \cap B \subset \mathrm{Orb}_B(b_1) \quad \text{y} \quad \mathrm{Orb}_X(b_2) \cap B \subset \mathrm{Orb}_B(b_2).$$

Ya que $\mathrm{Orb}_B(b_1) \cap \mathrm{Orb}_B(b_2) = \emptyset$, se cumple que $\mathrm{Orb}_X(b_1) \cap \mathrm{Orb}_X(b_2) = \emptyset$. En efecto, si $\mathrm{Orb}_X(b_1) \cap \mathrm{Orb}_X(b_2) \neq \emptyset$, ocurre que $\mathrm{Orb}_X(b_1) = \mathrm{Orb}_X(b_2)$. Entonces:

$$b_1 \in \mathrm{Orb}_X(b_1) \cap B = \mathrm{Orb}_X(b_2) \cap B \subset \mathrm{Orb}_B(b_2),$$

lo cual implica que $\mathrm{Orb}_B(b_1) = \mathrm{Orb}_B(b_2)$, una contradicción. Por lo tanto, $\mathrm{Orb}_X(b_1) \cap \mathrm{Orb}_X(b_2) = \emptyset$. Así que, $\mathrm{Orb}_X(b_1)$, $\mathrm{Orb}_X(b_2)$ y $\{c\}$ son las tres órbitas de X. Sea $a \in A$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \in \mathrm{Orb}_X(b_1)$. Luego, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) = b$. Por la parte 2) del Teorema 1.5, $h(A) = B$. Lo anterior implica que A y B son homeomorfos. Como esto no puede ocurrir, concluimos que todas las componentes de $\mathcal{A}_c$ son homogéneas o todas las componentes de $\mathcal{A}_c$ son $\frac{1}{2}$-homogéneas. $\square$

En la Figura 2.1 se muestran tres ejemplos de continuos $\frac{1}{3}$-homogéneos con exactamente un punto de corte. El primero de ellos se obtiene, pegando por un punto, una esfera con una circunferencia. Dicho continuo es, por tanto, la unión de dos continuos homogéneos, no homeomorfos, que se intersectan en un sólo punto. El segundo continuo se consigue reemplazando cada arco aa_i de la dendrita $F_\omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} aa_i$ descrita en (1.6.2), por un disco, de manera que cada dos de dichos discos se intersectan en el punto de corte a (y de modo que la sucesión de dichos discos unitarios es nula). Por último, el tercer continuo se puede ver como $\big(C \times D\big)/\big(C \times \{1\}\big)$, donde C es el conjunto de Cantor y D es el disco unitario.

Notemos que, los dos primeros ejemplos son localmente conexos y, por Teorema 1.11, para cada continuo X con dichas propiedades, si c es el único punto de corte de X, entonces la cerradura de cada componente de $X - \{c\}$ es un continuo localmente conexo y cíclicamente conexo.

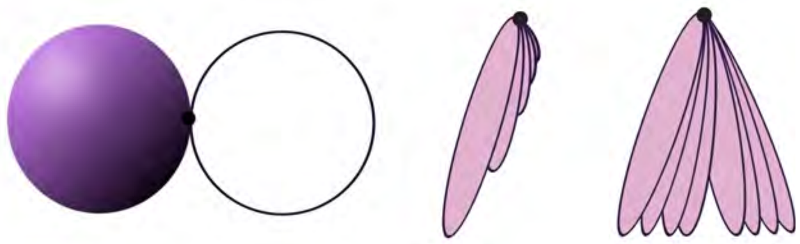


Figura 2.1

A continuación, construiremos un continuo M que será de utlidad para los siguientes resultados de esta sección. Consideremos el cubo $I^3 = [0,1]^3$. Dividimos cada cara del cubo en 9 cuadrados iguales, esto genera una subdivisión del cubo en 27 cubos iguales. Hagamos un agujero a través del interior de cada cuadrado central, esto nos da un continuo M_1 formado por 20 de los 27 cubos pequeños. Ahora apliquemos este proceso a cada uno de los veinte cubos restantes; es decir, dividamos cada cara de cada cubo en 9 cuadrados iguales y hagamos un agujero a través de interior de los cuadrados centrales, de esta manera obtenemos un continuo $M_2 \subset M_1$. Repetimos este proceso para obtener una sucesión anidada de continuos $\{M_n\}_n$. Hagamos:

$$M = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n.$$

M es un continuo llamado **La Curva Universal de Menger** (Figura 2.2) y su nombre se debe a que lo describió por primera vez K. Menger en 1926 y a que es un continuo de dimensión 1 que contiene una copia de cualquier espacio métrico separable de dimensión 1 ([46, Teorema 6.1. pág. 42]). En [3, Teoremas II y III, pág. 320 y 322], se prueba que M es 2-homogéneo en cualquiera de sus puntos. De esto y del Teorema 2.10, M es 2-homogéneo, y aplicando la segunda parte del Teorema 2.3, también obtenemos que M es homogéneo.

En lo que resta de la presente sección, la letra M denotará la curva universal de Menger. La prueba del siguiente resultado puede consultarse en [34, Corolario 4, pág. 97].

Teorema 2.20. *Si X es un continuo, entonces $M \times X$ no es 2-homogéneo.*

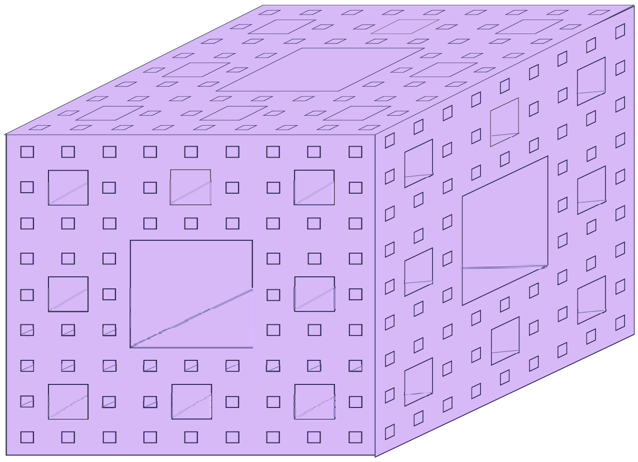


Figura 2.2: La Curva Universal de Menger

Sean $f\colon X_1 \to Y_1$ y $g\colon X_2 \to Y_2$ dos funciones continuas. A partir del siguiente resultado será importante la función producto $f \times g\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ definida, para $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, como:

$$(f \times g)\left((x_1, x_2)\right) = \left(f(x_1), g(x_2)\right).$$

Teorema 2.21. *Sean X un continuo y $c \in M \times X$, entonces $\big(M \times X\big) - \{c\}$ no es homogéneo.*

Demostración. Supongamos que $Y = \big(M \times X\big) - \{c\}$ es homogéneo. Si $u, v \in Y$, existe un homeomorfismo $f\colon Y \to Y$ tal que $f(u) = v$. Por el Teorema 1.7, existe un homeomorfismo $g\colon M \times X \to M \times X$ que extiende a f tal que $g(c) = c$. Luego, $g(u) = v$ y $g(c) = c$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$M \times X \text{ es 2-homogéneo en } c.$$

Ahora, por la parte 2) del Teorema 2.4, $M \times X$ es homogéneo o bien $M \times X$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Supongamos que $M \times X$ es homogéneo. Así, por el Teorema 2.9, $M \times X$ es 2-homogéneo. Como esto contradice el Teorema 2.20, concluimos que M no puede ser homogéneo. Por lo tanto, $M \times X$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo y, por la parte 2) del Teorema 2.4, sus órbitas son $\{c\}$ y $(M \times X) - \{c\}$.

Tomemos $a \in M$ y $x \in X$ tales que $c = (a, x)$. Sea $b \in M - \{a\}$. Notemos que $(b, x) \in (M \times X) - \{c\}$, por lo que $(b, x) \notin \mathrm{Orb}_{M\times X}(c)$. Ahora bien, como

M es homogéneo, existe un homeomorfismo $k\colon M \to M$ tal que $k(a) = b$. Así, la función $h = k \times 1_X\colon M \times X \to M \times X$ es un homeomorfismo tal que:

$$h(c) = h\big((a, x)\big) = \big((k(a), x)\big) = (b, x).$$

Por consiguiente, $(b, x) \in \mathrm{Orb}_{M\times X}\big((a, x)\big) = \mathrm{Orb}_{M\times X}(c)$. Esto contradice el hecho de que $(b, x) \notin \mathrm{Orb}_{M\times X}(c)$. Por lo tanto, $(M \times X) - \{c\}$ no es homogéneo. $\square$

En los siguientes resultados, para un espacio Z, denotaremos por Z^2 al espacio $Z \times Z$.

Teorema 2.22. *Sean $m > 1$ y X un continuo m-homogéneo en el punto $a \in X$. Entonces $Y = \big(X \times X\big) - \{(a, a)\}$ tiene a lo más dos órbitas.*

Demostración. Primero veamos que los elementos de $(X - \{a\})^2$ están en la misma órbita de Y. Para ello, tomemos dos elementos (x, y) y (u, v) en $(X - \{a\})^2$. Como X es m-homogéneo en a, por la parte 3) del Teorema 2.4, X es 2-homogéneo en a. Luego, existen homeomorfismos $f, g\colon X \to X$ tales que $f(x) = u$, $g(y) = v$ y $f(a) = a = g(a)$. Notemos que $f \times g\colon X^2 \to X^2$ es un homeomorfismo tal que:

$$(f \times g)\big((x, y)\big) = \big(f(x), g(y)\big) = (u, v) \quad \text{y} \quad (f \times g)\big((a, a)\big) = (a, a).$$

Por lo tanto, $h = (f \times g)|_Y\colon Y \to Y$ es un homeomorfismo tal que $h(x, y) = (u, v)$. Esto prueba que los elementos de $(X - \{a\})^2$ están en la misma órbita de Y.

Ahora veamos que los elementos de $\big[(\{a\} \times X) \cup (X \times \{a\})\big] - \{(a, a)\}$ están en la misma órbita de Y. Tomemos $x, y \in X - \{a\}$. Como X es 2-homogéneo en a, existe un homeomorfismo $f\colon X \to X$ tal que $f(x) = y$ y $f(a) = a$. Sean $h_1 = (1_X \times f)|_Y$, $h_2 = (f \times 1_X)|_Y$ y h_3 la función definida, para cada $(u, v) \in Y$, por $h(u, v) = (f(v), u)$. Así, $h_1, h_2, h_3\colon Y \to Y$ son homeomorfismos tales que:

$$h_1(a, x) = (a, y), \quad h_2(x, a) = (y, a) \quad \text{y} \quad h_3(a, x) = (y, a).$$

Por la definición de una órbita, se cumple que:

$$(a, y) \in \mathrm{Orb}_Y\big((a, x)\big) \quad \text{y} \quad (y, a) \in \mathrm{Orb}_Y\big((x, a)\big) \cap \mathrm{Orb}_Y\big((a, x)\big).$$

Por consiguiente, $\mathrm{Orb}_Y\big((x,a)\big) = \mathrm{Orb}_Y\big((a,x)\big)$ y, así, $(a,y)\,,(a,x)\,,(y,a)$ y (x,a) son elementos de la misma órbita de Y. Como x, y fueron tomados como puntos arbitrarios de $X - \{a\}$, esto prueba que los elementos de:

$$\big[\{a\} \times (X - \{a\})\big] \cup \big[(X - \{a\}) \times \{a\}\big] = \big[(\{a\} \times X) \cup (X \times \{a\})\big] - \{(a,a)\}$$

están en la misma órbita de Y. Como Y es la unión de los conjuntos $(X - \{a\})^2$ y $\big[(\{a\} \times X) \cup (X \times \{a\})\big] - \{(a,a)\}$, se cumple el resultado. □

Corolario 2.23. *Para cada $c \in M \times M$, se cumple que $(M \times M) - \{c\}$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo.*

Demostración. Supongamos que $c \in M \times M$. Sea $a \in M$. Como ya mencionamos antes, en En [3, Teoremas II y III, pág. 320 y 322], se prueba que M es 2-homogéneo en cualquiera de sus puntos. Ahora, por los Teoremas 2.21 y 2.22, se cumple que $(M \times M) - \{(a,a)\}$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Ya que $M \times M$ es homogéneo, existe un homeomorfismo $h\colon M \times M \to M \times M$ tal que $h(c) = (a,a)$ y, así, $(M \times M) - \{c\}$ es homeomorfo a $M \times M - \{(a,a)\}$. Por lo tanto, $(M \times M) - \{c\}$ es $\frac{1}{2}$-homogéneo. □

Corolario 2.24. *Para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, existen un continuo localmente conexo y $\frac{1}{3}$-homogéneo X_n, así como un punto $c \in X_n$ tales que $\mathrm{Cut}(X_n) = \{c\}$ y, para toda $A \in \mathcal{A}_c$, se cumple que A es $\frac{1}{2}$-homogéneo y $\mathrm{Cl}_X(A)$ es homogéneo. Además, X_n es tal que cada dos elementos de $\mathcal{A}_c$ son homeomorfos.*

Demostración. Sean $c \in M \times M$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ y X_n el espacio que se obtiene al pegar n copias de $M \times M$ por el punto c. Notemos que $\mathrm{Cut}(X_n) = \{c\}$ y, si $A \in A_c$, $\mathrm{Cl}_{X_n}(A)$ es homeomorfo al continuo homogéneo $M \times M$. Luego, A es homeomorfo a $(M \times M) - \{c\}$, y por el Corolario 2.23, A es $\frac{1}{2}$-homogéneo.

Ya que M es localmente conexo, X_n es localmente conexo. Como los elementos de $\mathcal{A}_c$ homeomorfos dos a dos y $\frac{1}{2}$-homogéneos, por la parte 2) del Teorema 2.17, X_n es $\frac{1}{3}$-homogéneo. □

Capítulo 3

Dendritas y $\frac{1}{n}$-homogeneidad

3.1. Introducción

La segunda sección del Capítulo 3 está dedicada a estudiar la familia de las dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito, a la cual denotaremos por $\mathcal{F}$. El Teorema 3.6 describe las órbitas de un punto en una dendrita en $\mathcal{F}$. Esto será útil para obtener, en el Teorema 3.10, una fórmula para contar el número de órbitas. El Corolario 3.18 y los Teoremas 3.21, 3.24 y 3.25 muestran la clasificación de las dendritas de la familia $\mathcal{F}$ que son $\frac{1}{n}$-homogéneas, cuando $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. También, en esta sección, estudiamos el producto de una dendrita en $\mathcal{F}$ con una m-celda (espacio homeomorfo a I^m). La parte 2) del Teorema 3.38 ayuda a obtener el número de órbitas de tal producto.

La tercera sección de este capítulo está dedicada a la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas. Este problema está resuelto en la segunda sección de este capítulo, cuando la dendrita tiene un conjunto finito de puntos de ramificación. Así que, nos interesan las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas cuyo conjunto de puntos de ramificación no es finito. En este caso, estudiamos el conjunto puntos extremos. Cuando éste es cerrado, obtenemos la familia de las dendritas de Gehman descrita en (3.3.1). Cuando el conjunto de puntos extremos no es cerrado, obtenemos las dendritas Universales D_n y una dendrita que construiremos más adelante, a la cual llamaremos "dendrita P" (esta dendrita posee arcos libres, a diferencia de las dendritas D_n). El Teorema 3.71 enuncia la clasificación obtenida.

3.2. La Familia $\mathcal{F}$

Recordemos que, para un espacio topológico X, denotamos por $E(X)$, $O(X)$ y $R(X)$ a los conjuntos de puntos extremos, ordinarios y de ramificación de X, respectivamente. En la Sección 1.6 mencionamos las propiedades fundamentales de las dendritas. En la Sección 1.9 definimos las dendritas W_0 y W, que serán de importancia en este capítulo. También, para $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$, en (1.6.1) y (1.6.2) definimos la dendrita F_n. Como hicimos ver, una dendrita X es tal que $|R(X)| = 1$ si y sólo si existe $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$ tal que X es homeomorfo a F_n.

En lo que resta del presente capítulo, denotaremos por $\mathcal{F}$ a la familia de las dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito. También denotaremos por $\mathcal{T}$ a la familia de los árboles. Notemos que $F_n \in \mathcal{T}$, para cada $n \in \{3, 4, \ldots\}$, mientras que $F_\omega \in \mathcal{F} - \mathcal{T}$.

En este capítulo, los arcos libres serán de gran importancia. De manera especial, en esta sección, lo serán los arcos internos y los arcos externos (ver Definición 1.34), como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 3.1. *Sea $X \in \mathcal{F}$. Si X no es un arco, entonces X es la unión de sus arcos internos y sus arcos externos.*

Demostración. Supongamos que X no es un arco. Sea $x \in X$. Queremos probar que x es un elemento de un arco interno o de un arco externo de X. Tomemos $e \in E(X)$. Como $R(X)$ es finito, el arco xe tiene una cantidad finita de puntos de ramificación. Luego, existe $y \in X$ tal que $(xy) \cap R(X) = \emptyset$. Por el Teorema 1.22, $(xy) \cap E(X) = \emptyset$ y así, $(xy) \subset O(X)$. Por el Teorema 1.35, xy es un arco libre en X. De la parte 2) del Teorema 1.38, obtenemos un arco libre maximal ab en X tal que $xy \subset ab$. Como $O(X)$ es abierto en X y ab es un arco libre maximal en X, por la parte 3) del Teorema 1.38, $a, b \in R(X) \cup E(X)$. Si $a, b \in E(X)$, como ab es un arco libre en X, $X = ab$. Esto contradice la hipótesis de que X no es un arco. Así que, $a, b \in R(X)$ o bien$|\{a, b\} \cap R(X)| = 1$ y $|\{a, b\} \cap E(X)| = 1$. Esto prueba que ab es un arco interno o un arco externo en X que contiene a x. $\square$

El siguiente lema ayudará a probar el Teorema 3.2, el cual indica que, para una dendrita en $\mathcal{F}$, si los puntos finales de un arco libre están en la misma órbita, entonces dicha órbita tiene sólo a esos dos puntos. Recordemos que dos conjuntos A y C son comparables si $A \subset C$ o bien $C \subset A$.

Teorema 3.2. *Sean $X \in \mathcal{F}$ y $a \in R(X)$. Si $b \in \mathrm{Orb}_X(a)$ y ab es un arco libre en X, entonces $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a, b\}$.*

Demostración. Supongamos que $b \in \mathrm{Orb}_X(a)$ y que ab es un arco libre en X. Entonces $a \neq b$ y existe un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(a) = b$. Vamos a establecer cierta notación y probaremos dos afirmaciones que nos llevarán a concluir que $h(b) = a$. Una vez que tengamos probado esto, estaremos en condiciones de mostrar que $\mathrm{Orb}_X(a) \subset \{a, b\}$.

Sea $a_0 = a$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, hagamos $a_i = h^i(a)$. Notemos que $a_1 = b$. Además, considerando que $h^0 = 1_X$, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se cumple que:

$$a_{i+1} = h^{i+1}(a) = h(h^i(a)) = h(a_i).$$

Como a es un punto de ramificación de X y h es un homeomorfismo, por la parte 3) del Teorema 1.5, cada a_i es un punto de ramificación de X. Ahora bien, $R(X)$ es finito, así que el conjunto $\{a_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ es finito. Entonces, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $m < n$ y $a_m = a_n$; es decir, $h^m(a) = h^n(a)$. Luego, $h^{n-m}(a) = a$. Por lo tanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k = \min\{i \in \mathbb{N}\colon a_i = h^i(a) = a\}.$$

Notemos que $k > 1$. Pues, si $k = 1$, $b = a_1 = h^1(a) = h(a) = a$, por lo que, $ab = \{a\}$ no es un arco en X. Además, $a_k = h^k(a) = a$ y $a, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ son puntos de ramificación de X, diferentes dos a dos. Afirmamos que:

a) Para cada $i \in \{1, 2, \ldots k-1\}$, ocurre que $a_{i-1}a_i$ es un arco libre en X y, si $i, j \in \mathbb{N}$ son tales que $i \neq j$ y $j < k$, entonces $a_i \neq a_j$.

Para probar a), sea $i \in \{1, 2, \ldots k-1\}$. Como h^{i-1} es un homeomorfismo y $ab = a_0a_1$ es un arco libre en X, con puntos finales a_0 y a_1, sucede que $h^{i-1}(a_0a_1)$ es un arco libre en X con puntos finales $h^{i-1}(a_0) = a_{i-1}$ y $h^{i-1}(a_1) = h^{i-1}(h(a)) = h^i(a) = a_i$. Luego, $a_{i-1}a_i$ es un arco libre en X. Ahora, supongamos que $i, j \in \mathbb{N}$ son tales que $i \neq j$ y $j < k$. Sin perder generalidad, podemos considerar que $i < j$. Si $h^i(a) = a_i = a_j = h^j(a)$, entonces $h^{j-i}(a) = a$. Como $j - i < j < k$, esto contradice la definición de k. Por lo tanto, $a_i \neq a_j$. Esto concluye la prueba de a).

Queremos ver que $a_2 = h^2(a) = h(h(a)) = h(b) = a$, es decir, que $k = 2$. Supongamos, por el contrario, que $k > 2$. Entonces $a_2 \neq a$ y, por a), a_1a_2 es un arco libre en X. Por la parte 3) del Teorema 1.36, $aa_1 \cap a_1a_2 \subsetneq \{a_1, a_2\}$ o bien $aa_1 \subset a_1a_2$. Como $(aa_1), (a_1a_2) \subset O(X)$ y a, a_1 y a_2 son tres puntos de ramificación distintos de X, $aa_1 \not\subset a_1a_2$ y $aa_1 \cap a_1a_2 = \{a_1\}$. Por lo tanto:

$$aa_2 = aa_1 \cup a_1a_2.$$

Ahora, supongamos que, para cada $l < k$, se cumple que:

$$aa_{l-1} = aa_1 \cup a_1a_2 \cup \cdots \cup a_{l-2}a_{l-1}.$$

Notemos que $aa_{l-1} \cap R(X) = \{a_i \colon i \leq l-1\}$ y, usando a), $a_{l-1}a_l$ es un arco libre en X tal que $a_l \notin aa_{l-1}$. Aplicando la parte 3) del Teorema 1.36, tenemos que $aa_{l-1} \cap a_{l-1}a_l = \{a_{l-1}\}$. Es decir $aa_l = aa_{l-1} \cup a_{l-1}a_l$. Esto prueba que se tienen las siguientes contenciones:

b) $aa_1 \subsetneq aa_2 \subsetneq \cdots \subsetneq aa_{k-1}$.

Ahora, $a_{k-2}a_{k-1}$ es un arco libre en X y:

$$h(a_{k-2}a_{k-1}) = a_{k-1}a_k = a_{k-1}a = aa_{k-1}.$$

Luego, aa_{k-1} también es un arco libre en X. Sin embargo, por b), $a_1 \in (aa_{k-1}) \cap R(X)$. Ya que esto es una contradicción, se sigue que $k = 2$. Esto implica que:

c) $h(b) = a$.

Puesto $h(a) = b$ y $h(b) = a$, $h(ab) = ab$. Por consiguiente, existe $x \in (ab)$ tal que $h(x) = x$. Como $x \in (ab) \subset O(X)$, $X - \{x\}$ tiene exactamente dos componentes, digamos A y B y, sin perder generalidad, podemos suponer que $a \in A$ y $b \in B$. Por la parte 2) del Teorema 1.5, $h(A)$ es la componente de $X - \{x\}$ que tiene a $h(a)$; es decir, $h(A) = B$. Por lo tanto, A y B son homeomorfos.

Ahora, supongamos que existe $c \in \mathrm{Orb}_X(a) - \{a, b\}$. Notemos que $c \in X - \{x\}$, pues $c \in R(X)$ y $x \notin R(X)$. Consideremos, sin pérdida de generalidad, que $c \in A$. Tomemos un homeomorfismo $f \colon X \to X$ tal que $f(a) = c$ y hagamos $d = f(b)$. Notemos que $f \circ h \circ f^{-1} \colon X \to X$ es un homeomorfismo tal que:

$$(f \circ h \circ f^{-1})(d) = f(h(f^{-1}(d))) = f(h(b)) = f(a) = c.$$

Por lo tanto, $d \in \mathrm{Orb}_X(c)$. Además, como ab es un arco libre en X y f es un homeomorfismo, $f(ab) = f(a)f(b) = cd$ es un arco libre en X. Notemos que:

$$(f \circ h \circ f^{-1})(c) = f(h(f^{-1}(c))) = f(h(a)) = f(b) = d.$$

Ya que $x \in O(X)$ y f es un homeomorfismo, $f(x) \in O(X)$. Además, $x \in (ab)$, con lo que, $f(x) \in (cd)$. Más aún:

$$(f \circ h \circ f^{-1})(f(x)) = f(h(f^{-1}(f(x)))) = f(h(x)) = f(x).$$

Así que, $f(x)$ es un punto fijo del homeomorfismo $f \circ h \circ f^{-1}$. Esto implica, por que así fue como lo probamos cuando consideramos el arco libre ab y el punto fijo x de h, que las dos componentes de $X - \{f(x)\}$ son homeomorfas. Ahora bien, A y B son las componentes de $X - \{x\}$, por lo que, $f(A)$ y $f(B)$ son las componentes de $X - \{f(x)\}$. Por consiguiente, $f(A)$ y $f(B)$ son homeomorfos. Como también A es homeomorfo a B, A es homeomorfo a $f(A)$ y B es homeomorfo a $f(B)$, los conjuntos A, B, $f(A)$ y $f(B)$ son homeomorfos dos a dos.

Observemos que $d \in R(X)$, de donde, $d \in X - \{x\} = A \cup B$. Supongamos que $d \in B$. Sea $r\colon X \to ab$ la función primer punto en ab (ver Definición 1.32). Como ab es un arco libre en X, por la parte 7) del Teorema 1.33, $r(c) = a$ y $r(d) = b$. En vista de que en X los arcos son únicos, el arco, en X, de c a d es justo $ca \cup ab \cup bd$. Lo anterior implica que $ab \subset cd$. Entonces ab y cd son dos arcos libres en X tales que $ab \subset cd$, y ya que $a, b \in R(X)$, $ab = cd$. Esto contradice que $c \in X - \{a, b\}$. Por lo tanto, $d \in A$ y se cumple que:

d) $cd \subset A$.

Esto implica que $f(x) \neq x$ y, como las dos componentes de $X - \{f(x)\}$ son $f(A)$ y $f(B)$, tenemos que $x \in f(A)$ o bien $x \in f(B)$. Si $x \in f(A)$, entonces $f(B) \subset X - \{x\}$. Como $f(B)$ es conexo y, por definición, A y B son una separación de $X - \{x\}$, $f(B) \subset A$ o bien $f(B) \subset B$. Ya que $d = f(b) \in f(B)$ y $d \in A$, $d \in f(B) \cap A$. Por consiguiente:

$$f(B) \subset A.$$

Por otro lado, $c = f(a) \in f(A)$ y, así, $c \notin f(B)$. Luego, $f(B) \subset A - \{c\} \subsetneq A$, por lo que, $f(B) \cap R(X) \neq A \cap R(X)$, contradiciendo el Teorema 1.6, pues

$c \in A \cap R(X)$ y, como ya indicamos, A y $f(B)$ son abiertos de X, homeomorfos y comparables. Ahora bien, si $x \in f(B)$, con un procedimiento similar, obtenemos que $f(A) \subset A - \{d\}$ y esto, también, contradice el Teorema 1.6. Por lo tanto, $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a, b\}$. $\square$

Dada una dendrita $X \in \mathcal{F}$, los siguientes tres resultados ayudan a describir las órbitas de los puntos en X y a probar el Teorema 3.10, que proporciona una fórmula para contar las órbitas de X.

Lema 3.3. *Sean $X \in \mathcal{F}$ y ab un arco interno o externo en X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $f, g \in \mathcal{H}(X)$ y $f(a)g(b)$ es un arco libre en X, entonces $f(a) = g(a)$ o bien $f(b) = g(b)$;*

2) *si cd es un arco libre en X tal que $c \in \mathrm{Orb}_X(a)$ y $d \in \mathrm{Orb}_X(b)$, entonces existe $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que $g(a) = c$ y $g(b) = d$.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{H}(X)$ tales que $f(a)g(b)$ es un arco libre en X. Supongamos primero que ab es un arco externo en X. Consideremos que $a \in E(X)$ y $b \in R(X)$. Entonces

$$f(a), g(a) \in E(X) \quad \text{y} \quad f(b), g(b) \in R(X).$$

Como f es un homeomorfismo y ab es un arco libre en X, $f(a)f(b)$ es un arco libre en X. Además, $f(a) \in E(X)$ y $f(b) \in R(X)$. Como $f(a)g(b)$ es un arco libre en X, $f(a) \in E(X)$ y $f(a)f(b) \cap f(a)g(b) \neq \emptyset$, necesariamente $f(a)f(b) = f(a)g(b)$. Por lo que, $g(b) = f(b)$. Supongamos ahora que $a \in R(X)$ y $b \in E(X)$. Así, se cumple los siguiente:

$$f(a), g(a) \in R(X) \quad \text{y} \quad f(b), g(b) \in E(X).$$

Como g es un homeomorfismo y ab es un arco libre en X, $g(a)g(b)$ es un arco libre en X. También $f(a)g(b)$ es un arco libre en X y $g(a)g(b) \cap f(a)g(b) \neq \emptyset$. Además, ya que $g(b) \in E(X)$, $|g(a)g(b) \cap f(a)g(b)| \geq 2$. Por la parte 3) del Teorema 1.36, necesariamente, $g(a)g(b) = f(a)g(b)$. Por consiguiente, $g(a) = f(a)$. Esto termina la prueba de 1) en el caso en que ab es un arco externo en X.

Consideremos ahora el caso en el que ab es un arco interno en X. Entonces $a, b \in R(X)$ y $(ab) \subset O(X)$. Supongamos que:

$$f(a) \neq g(a) \quad \text{y} \quad f(b) \neq g(b).$$

Notemos que $f(a)f(b)$, $g(a)g(b)$ y $f(a)g(b)$ son arcos libres en X tales que $f(a), f(b), g(a), g(b) \in R(X)$. Luego, $f(a), f(b) \notin \big(f(a)g(b)\big)$. Por la parte 3) del Teorema 1.36, $f(b)f(a) \cap f(a)g(b) \subsetneq \{f(a), f(b)\}$ o bien $f(b)f(a) \subset f(a)g(b)$. Lo segundo sólo es posible si $f(b) = g(b)$, lo cual no ocurre. Por lo tanto, $f(b)f(a) \cap f(a)g(b) = \{f(a)\}$. Esto prueba, por la unicidad de arcos en X, que:

a) $f(b)g(b) = f(b)f(a) \cup f(a)g(b)$.

Como $g(b)g(a)$ es un arco libre en X, también por la parte 3) del Teorema 1.36, $g(b)g(a) \subset f(b)g(b)$ o bien $f(b)g(b) \cap g(b)g(a) = \{g(b)\}$. Por a) se cumple que $f(b)g(b) \cap R(X) = \{f(b), f(a), g(b)\}$. Supongamos que $g(b)g(a) \subset g(b)f(b)$. Entonces $g(a) \in g(b)f(b) \cap R(X)$ y, como $g(a) \notin \{g(b), f(a)\}$, necesariamente $g(a) = f(b)$. Ahora, aplicando a) obtenemos que $g(a)g(b) = f(b)g(b) = f(b)f(a) \cup f(a)g(b)$. Esto implica que $f(a) \in (g(a)g(b)) \cap R(X)$, contradiciendo el hecho de que $g(a)g(b)$ es un arco libre en X. Por consiguiente, $g(b)g(a) \not\subset f(b)g(b)$ y se cumple que:

b) $f(b)g(b) \cap g(b)g(a) = \{g(b)\}$.

De a) y b) se tiene lo siguiente:

c) $f(b)f(a) \subsetneq f(b)g(b) \subsetneq f(b)g(a)$.

Por c), tenemos que $f(a), g(b) \in f(b)g(a)$, pero no son los extremos de dicho arco. En consecuencia, $\{f(a), g(b)\} \subset X - E(X)$ y, como $a, b \in R(X) \cup E(X)$, tenemos que $f(a), g(b) \in R(X)$. Sea B la componente de $X - \{f(a)\}$ que tiene a $f(b)$. Si $g(a) \in B$, entonces $f(b)g(a) \subset B$ pero, por c), esto implica que $f(a) \in B$. Esto es absurdo y, así, $g(a) \notin B$. Por lo tanto, $B \subset X - \{g(a)\}$ y, como B es conexo, B está contenido en una componente de $X - \{g(a)\}$.

Hagamos $h = g \circ f^{-1}$ y $B' = h(B)$. Notemos que h es un homeomorfismo tal que, para cada $x \in X$, $h(f(x)) = g(x)$. Por consiguiente:

$$B' \text{ es la componente de } X - \{g(a)\} \text{ que tiene a } g(b).$$

Por c), $f(b)g(b) \subset X - \{g(a)\}$. Luego, $f(b)g(b) \subset B'$ y, como $f(b) \in B$, la componente de $X - \{g(a)\}$ que contiene a B es B'. Esto contradice el

Teorema 1.6, pues $f(a) \in (B' \cap R(X)) - B$. La contradicción surgió de suponer que $f(a) \neq g(a)$ y $f(b) \neq g(b)$. Luego, hemos probado de 1).

Ahora supongamos que cd es un arco libre tal que $c \in \mathrm{Orb}_X(a)$ y $d \in \mathrm{Orb}_X(b)$. Entonces, existen homeomorfismos $f, g \in \mathcal{H}(X)$ tales que $f(a) = c$ y $g(b) = d$. Notemos que $f(a)g(b) = cd$ es un arco libre en X. Como $a, b \in R(X) \cup E(X)$, se sigue que $c, d \in R(X) \cup E(X)$. Por 1), tenemos que $f(a) = g(a)$, o bien $f(b) = g(b)$. Si $g(a) = f(a) = c$, entonces $g \in \mathcal{H}(X)$ es un homeomorfismo tal que $g(a) = c$ y $g(b) = d$, con lo que la prueba termina. Si $f(b) = g(b) = d$, entonces $f \in \mathcal{H}(X)$ es un homeomorfismo tal que $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Esto prueba 2). □

Para cada dendrita $X \in \mathcal{F}$, definimos los siguientes conjuntos:

$$OE(X) = \{x \in O(X) \colon x \text{ pertenece a un arco externo}\},$$

$$RE(X) = \{x \in R(X) \colon x \text{ pertenece a un arco externo}\},$$

$$OI(X) = O(X) - OE(X) \quad \text{y} \quad RI(X) = R(X) - RE(X).$$

Notemos que $OI(X)$ es el conjunto de puntos de $O(X)$ que se encuentran en algún arco interno. Pero, como los puntos de $R(X)$ pueden estar a la vez en un arco interno y un arco externo, $RI(X)$ es el conjunto de puntos de $R(X)$ que únicamente están en arcos internos. Si X es un arco con puntos finales a y b, entonces $X \in \mathcal{F}$ pero, como ab es un arco que no es interno ni externo en X, sucede que $OE(X) = OI(X) = \emptyset$. Además, $R(X) = RE(X) = RI(X) = \emptyset$. Cuando X es un elemento de $\mathcal{F}$ que no es un arco, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.4. *Sea $X \in \mathcal{F}$. Si $R(X) \neq \emptyset$, entonces $OE(X) \neq \emptyset$ y $RE(X) \neq \emptyset$.*

Demostración. Como X no es un arco, por el Teorema 3.1, X es unión de sus arcos internos y externos. Aplicando la parte 4) del Teorema 1.23, $E(X) \neq \emptyset$; es decir, X tiene al menos un arco externo y, así, $OE(X) \neq \emptyset$. Tomemos $e \in E(X)$. Entonces e es un elemento de un arco externo, digamos ex, donde $x \in R(X)$; es decir $RE(X) \neq \emptyset$. □

Lema 3.5. *Sea $X \in \mathcal{F}$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $T(X) \in \{E(X), R(X), O(X), RE(X), RI(X), OE(X), OI(X)\}$, entonces $T(X)$ es la unión de las órbitas de X que intersecta;*

2) *$O(X)$ es la unión disjunta de las órbitas contenidas en $OE(X)$ y $OI(X)$, y $R(X)$ la unión disjunta de las órbitas contenidas en $RE(X)$ y $RI(X)$.*

Demostración. Sean:

$$T(X) \in \{RE(X), OE(X), OI(X), RI(X)\},$$

$x \in T(X)$ y $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$. Como $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(x) = y$. De la parte 1) del Teorema 1.5, tenemos que x y y son ambos puntos ordinarios, ambos puntos de ramificación o ambos puntos extremos de X.

Tomemos un arco interno o externo ab tal que $x \in ab$. Luego, $y \in h(ab)$. De la parte 3) del Teorema 1.5, obtenemos que, ab es interno (respectivamente, externo) si y sólo si $h(ab)$ es interno (respectivamente, externo). Luego, $y \in T(X)$, es decir, $\mathrm{Orb}_X(x) \subset T(X)$. Por lo tanto, $T(X)$ es unión de órbitas de X. Esto y la parte 7) del Teorema 1.23 prueban 1).

Para ver 2) basta notar que $O(X)$ es la unión disjunta de $OI(X)$ y $OE(X)$, y $R(X)$ es la unión disjunta de $RI(X)$ y $RE(X)$. Por 1), se obtiene el resultado. □

Teorema 3.6. *Sean $X \in \mathcal{F}$ y ab un arco interno o externo. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $b \in R(X)$, entonces:*

$$\mathrm{Orb}_X(b) \subset \{d \in R(X) \colon \textit{existe un arco libre } cd \textit{ tal que } c \in \mathrm{Orb}_X(a)\};$$

2) *si $b \in E(X)$, entonces:*

$$\mathrm{Orb}_X(b) = \{d \in E(X) \colon \textit{existe un arco libre } cd \textit{ tal que } c \in \mathrm{Orb}_X(a)\};$$

3) *si $x \in (ab)$, entonces:*

$$\mathrm{Orb}_X(x) = \{y \in O(X) \colon \textit{existe un arco libre } cd \textit{ tal que } y \in (cd),\ c \in \mathrm{Orb}_X(a) \textit{ y } d \in \mathrm{Orb}_X(b)\}.$$

Demostración. Para probar 1) sean $b \in R(X)$ y $d \in \mathrm{Orb}_X(b)$. Luego, existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(b) = d$ y, por el inciso 3) del Teorema 1.5, $d \in R(X)$. Haciendo $c = h(a)$, tenemos que $h(ab) = h(a)h(b) = cd$ es nuevamente un arco libre. Esto prueba 1) y, sustituyendo en esta prueba $R(X)$ por $E(X)$, obtenemos la respectiva contención del inciso 2).

Probemos la igualdad en 2). Supongamos que $b \in E(X)$. Tomemos $d \in E(X)$ y $c \in \text{Orb}_X(a)$ tales que cd es un arco libre. Queremos ver que $d \in \text{Orb}_X(b)$. Sabemos que existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) = c$. Si $d = h(b)$, entonces $d \in \text{Orb}_X(b)$, como queríamos. Supongamos entonces que $h(b) \neq d$ y hagamos $d' = h(b)$. Como $b \in E(X)$, $d' \in E(X)$, por lo que cd y cd' son dos arcos externos cuyo único punto común es c. Tomemos un homeomorfismo $f\colon cd' \to cd$ tal que $f(c) = c$ y $f(d') = d$. Podemos extender f, de manera natural, a una función $F\colon X \to X$ definida como sigue:

$$F(y) = \begin{cases} f(y), & \text{si } y \in cd'; \\ f^{-1}(y), & \text{si } y \in cd; \\ y, & \text{si } y \in X - (cd] \cup (cd']. \end{cases}$$

Es fácil ver que F está definida por homeomorfismos que se pegan correctamente y que, cd, cd' y $X - \big((cd] \cup (cd']\big)$, son cerrados en X. Entonces, $F \in \mathcal{H}(X)$. En consecuencia, $F \circ h$ es un homeomorfismo de X en X tal que:

$$F \circ h(b) = F(h(b)) = F(d') = f(d') = d.$$

Por lo tanto, $d \in \text{Orb}_X(b)$. Esto prueba 2).

Ahora probemos 3). Supongamos que $x \in (ab)$. Para la primera contención, basta notar que si $h \in \mathcal{H}(X)$, $c = h(a)$ y $d = h(b)$, entonces $h(x) \in cd$, $c \in \text{Orb}_X(a), d \in \text{Orb}_X(b)$ y cd es un arco libre.

Mostremos la segunda contención. Tomemos $y \in X$ y cd un arco libre tal que $c \in \text{Orb}_X(a), d \in \text{Orb}_X(b)$ y $y \in (cd)$. Por la parte 2) del Lema 3.3, existe $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que $g(ab) = cd$. Hagamos $z = g^{-1}(y)$. Entonces x y z son elementos de (ab). Por consiguiente, podemos tomar un homeomorfismo f de ab en sí mismo tal que $f(x) = z$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Extendemos f, de manera natural, a una función $F\colon X \to X$ definida como sigue:

$$F(y) = \begin{cases} f(y), & \text{si } y \in ab; \\ y, & \text{si } y \in X - (ab). \end{cases}$$

Es fácil ver que $F \in \mathcal{H}(X)$. En consecuencia, $g \circ F$ es un homeomorfismo de X en X tal que:

$$g \circ F(x) = g(F(x)) = g(f(x)) = g(z) = y.$$

Por lo tanto, $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$. Esto concluye la prueba de 3). $\square$

Supongamos que $X \in \mathcal{F}$ no es un arco. Sea $P_0 = RE(X)$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, denotemos por P_i al siguiente conjunto:

$$\left\{ x \in R(X) - \bigcup_{j=0}^{i-1} P_j \colon \text{existe } y \in P_{i-1} \text{ tal que } xy \text{ es un arco libre en } X \right\}. \tag{3.2.1}$$

Informalmente, podemos decir que P_i es el i-ésimo nivel de "profundidad" de $R(X)$. Dados $p \in R(X)$ y $q \in R(X) \cup E(X)$, diremos que p y q son adyacentes si pq es un arco libre en X (en dicha situación, pq es, de hecho, un arco interno o externo en X). Notemos que, para que dos puntos sean adyacentes, ambos deben ser puntos de ramificación o bien uno debe ser de ramificación y el otro extremo. Con esta terminología, los elementos de P_0 son aquellos puntos de ramificación que tienen adyacente un punto extremo de X. Los elementos de P_1 son aquellos aquellos puntos de ramificación de X, que no están en P_0, pero tienen adyacente a algún punto de P_0. En general, los elementos de P_i son aquellos puntos de ramificación de X, que no están en las P_j anteriores ($0 \leq j \leq i-1$), pero tienen adyacente a algún punto de P_{i-1}.

Lema 3.7. *Si $X \in \mathcal{F}$ no es un arco, existe $\lambda_X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $P_{\lambda_X} \neq \emptyset$, para cada $i > \lambda_X$, sucede que $P_i = \emptyset$ y*

$$\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{\lambda_X}\} \textit{ es una familia de subconjuntos no vacíos de } R(X) \textit{ y ajenos dos a dos.}$$

Demostración. Del Lema 3.4, obtenemos que $RE(X) = P_0$ es no vacío. En vista de que $R(X)$ es finito, existe $\lambda_X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $P_{\lambda_X} \neq \emptyset$ y, para cada $i > \lambda_X$, $P_i = \emptyset$. Además, por definición, los elementos de $\{P_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ son ajenos dos a dos y, si $i \geq 1$ y $P_i \neq \emptyset$, entonces $P_{i-1} \neq \emptyset$. Como $P_{\lambda_X} \neq \emptyset$, se cumple el lema. $\square$

En adelante, para una dendrita $X \in \mathcal{F}$, el símbolo λ_X denotará el número encontrado en el Lema 3.7. En el siguiente resultado mostramos una caracterización de los conjuntos P_i, para $i \in \mathbb{N}$. Recordemos que si $z \in X$, entonces el símbolo zz representa al conjunto $\{z\}$, al cual podemos pensar como un arco degenerado.

Teorema 3.8. *Sea $X \in \mathcal{F}$ tal que $RI(X) \neq \emptyset$. Definimos $P_0 = RE(X)$, para cada $i \in \mathbb{N}$, P_i como en (3.2.1) y λ_X como en el Lema 3.7. Entonces, para $i \in \{1, 2, \dots, \lambda_X\}$, ocurre que $x \in P_i$ si y sólo si $x \in RI(X)$ y existe $x_1 \in P_1$ tal que:*

$$i = |xx_1 \cap R(X)| \leq |xa \cap R(X)|, \quad \textit{para cada } a \in P_1. \tag{3.2.2}$$

Demostración. Lo que queremos demostrar es claro para $i = 1$. Supongamos que $2 \leq i \leq \lambda_X$. Sean $x \in RI(X) = R(X) - P_0$ y $x_1 \in P_1$ tales que (3.2.2) se cumple. Notemos que $x, x_1 \in R(X)$ y $x_1 \neq x$, pues el arco xx_1 tiene i puntos de ramificación. Queremos probar que $x \in P_i$. Consideremos que:

$$x_1x \cap R(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x\}$$

Hagamos $x_i = x$ y notemos que podemos reordenar los elementos de $x_1x \cap R(X)$ de manera que:

a) $x_1x_2 \subsetneq x_1x_3 \subsetneq \dots \subsetneq x_1x_{i-1} \subsetneq x_1x_i = x_1x$.

Notemos que, para cada $2 < j \leq i$, el arco $x_{j-1}x_j$ es libre en X. Si para algún $1 < j \leq i$ se cumple que $x_j \in P_1$, como $x_jx \subset (x_1x]$ y $x_1 \in R(X)$, entonces $|x_jx \cap R(X)| < |x_1x \cap R(X)|$. Ya que esto contradice la elección de x_1, hemos probado lo siguiente:

b) Para ninguna $1 < j < i$ se tiene que $x_j \notin P_1$.

Supongamos que para alguna $2 \leq l \leq i - 1$, $x_l \in P_0$. Sea $j = \max\{l \in \{2, 3, \dots, i-1\} \colon x_l \in P_0\}$. Por la definición de P_1 y el hecho de que $x \notin P_0$, $x_{j+1} \in P_1$, lo cual contradice 1). Esto muestra que:

2) Para ninguna $2 \leq j \leq i$ se tiene que $x_j \in P_0$.

Ya que x_1x_2 es un arco libre en X, $x_1 \in P_1$ y $x_2 \in R(X) - (P_0 \cup P_1)$, por la definición de P_2 dada en (3.2.1), $x_2 \in P_2$. Si $x_3 \in P_2$, entonces existe $a_1 \in P_1$ tal que a_1x_3 es un arco libre en X. Por 1), para cada $j \geq 2$, $a_1 \neq x_j$ y, ya que $x_3 \neq x_1$, pues P_1 y P_2 son ajenos, $x_3x \cap R(X) = \{x_3, x_4, \dots, x_i\}$. Se sigue que $a_1 \notin x_3x$ y, como a_1x_3 es un arco libre en X, por la parte 3) del Teorema 1.36, $a_1x_3 \cap x_3x = \{x_3\}$. Por consiguiente, $a_1x = a_1x_3 \cup x_3x$, por lo que:

$$|a_1x \cap R(X)| = |\{a_1, x_3, x_4 \dots, x_i\}| = i - 1 < i = |x_1x \cap R(X)|$$

Esto contradice la elección de x_1 y, así, $x_3 \notin P_2$. Ya que, además, x_2x_3 es libre, $x_3 \in P_3$. Continuando este proceso, obtenemos que, para cada $j \leq i$, $x_j \in P_j$. Esto prueba que $x_i \in P_i$.

Ahora supongamos que $x \in P_i$. Como $i > 0$:

$$x \in R(X) - P_0 = R(X) - RE(X) = RI(X).$$

Por la definición de P_i, existen $x_{i-1} \in P_{i-1}, x_{i-2} \in P_{i-2}, \ldots, x_1 \in P_1$, tales que:

$$xx_{i-1}, \quad x_{i-1}x_{i-2}, \quad \ldots, \quad x_2x_1$$

son arcos libres en X. Entonces, $x_1x_2 \cap R(X) = \{x_1, x_2\}$. Como $x_3 \notin \{x_1, x_2\}$, por el Teorema 1.36, $x_1x_2 \cap x_2x_3 = \{x_2\}$ y, así, $x_1x_3 = x_1x_2 \cup x_2x_3$. Luego, $x_1x_3 \cap R(X) = \{x_1, x_2, x_3\}$ y, nuevamente por el Teorema 1.36, $x_1x_3 \cap x_3x_4 = \{x_3\}$, de donde $x_1x_4 = x_1x_3 \cup x_3x_4$. Continuando este proceso, tenemos que:

$$xx_1 = x_1x_2 \cup x_2x_3 \cup \cdots \cup x_{i-2}x_{i-1} \cup x_{i-1}x, \qquad |xx_1 \cap R(X)| = i$$

y

$$xx_1 \cap R(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x\}.$$

Sea $a \in P_1$. Supongamos que $a \in xx_1$. Como $\{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x\} \cap P_1 = \{x_1\}$, $a = x_1$. Por lo tanto, $|xx_1 \cap R(X)| = |xa \cap R(X)|$. Supongamos ahora que $a \in X - xx_1$. Sea $r\colon X \to xx_1$ la función primer punto en xx_1. Por la parte 7) del Teorema 1.33:

$$r(a) \in xx_1 \cap R(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x\}.$$

Hagamos $x_i = x$ y sea $1 \leq j \leq i$ tal que $r(a) = x_j$. Entonces, $ax_j \cap xx_1 = \{x_j\}$. Además, como $x_j \in P_j$, en el arco ax_j debemos tener por lo menos un punto de P_2, por lo menos uno en P_3, etc., es decir $|(ax_j) \cap P_s| \geq 1$, para cada $s \in \{2, 3, \ldots, j-1\}$. Esto implica que, $|[ax_j) \cap R(X)| \geq j - 1$. Como $|xx_j \cap R(X)| = i - j + 1$, $ax_j \cap xx_j = \{x_j\}$ y $ax = ax_j \cap xx_j$, sucede que:

$$\begin{aligned} |ax \cap R(X)| = |[ax_j) \cap R(X)| + |xx_j \cap R(X)| &\geq \\ \geq (j-1) + (i-j+1) = i = |xx_1 \cap R(X)|. \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. $\square$

En el siguiente resultado mostramos otras propiedades de los conjuntos $P_0, P_1, \ldots, P_{\lambda_X}$.

Teorema 3.9. *Sea $X \in \mathcal{F}$ tal que X no es un arco. Definimos $P_0 = RE(X)$, para cada $i \in \mathbb{N}$, P_i como en (3.2.1) y λ_X como en el Lema 3.7. Entonces $P_0, P_1, \ldots, P_{\lambda_X}$ son subconjuntos no vacíos de $R(X)$, ajenos dos a dos, con las siguientes propiedades:*

1) *Si $\lambda_X = 0$, entonces $RI(X) = \emptyset$;*

2) *si $\lambda_X \in \mathbb{N}$, entonces $RI(X) = \bigcup_{i=1}^{\lambda_X} P_i$;*

3) *si $0 \leq i \leq \lambda_X$ y $x \in P_i$, entonces $\mathrm{Orb}_X(x) \subset P_i$.*

Demostración. Por el Lema 3.7, $P_0, P_1, \ldots, P_{\lambda_X}$ son subconjuntos no vacíos de $R(X)$ y ajenos dos a dos. Si $\lambda_X = 0$ entonces, por la parte 1) del Lema 3.5, para $x \in P_0$, resulta que $\mathrm{Orb}_X(x) \subset P_0$. Esto prueba, en este caso, 3). Por otro lado, como $\lambda_X = 0$, $P_1 = \emptyset$. Así que, ningún punto de ramificación de X tiene adyacente un elemento de P_0. Luego, cada punto de ramificación de X tiene a algún punto extremo de X como adyacente. Esto implica que $R(X) \subset P_0$ y, como también $P_0 \subset R(X)$, $R(X) = P_0$. Por consiguiente:

$$RI(X) = R(X) - RE(X) = R(X) - P_0 = \emptyset.$$

Esto prueba 1). Supongamos ahora que $\lambda_X \in \mathbb{N}$. Notemos que $RI(X) \neq \emptyset$. Para probar 2), tomemos un punto $x \in RI(X)$. Describiremos un proceso finito, mediante el cual, obtendremos $i \in \{1, 2, \ldots, \lambda_X\}$ y una sucesión finita:

$$x, x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_2, x_1 \tag{3.2.3}$$

de puntos de ramificación de X, todos en el arco xx_1, posiblemente degenerado, y de modo que si $x_i = x$, entonces $xx_1 \cap R(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ y $x_1 \in P_1$. Como $x \in RI(X)$, $x \in R(X)$ y $x \notin P_0$. Así que, ningún punto adyacente a x es un extremo de X. Por lo tanto, todos los puntos adyacentes de x son puntos de ramificación de X. Si algún punto adyacente de x está en P_0, entonces $\lambda_X \geq 1$ y $x \in P_1$. En este caso el proceso termina y la sucesión finita descrita en (3.2.3) es x (es decir, $i = 1$, $i \leq \lambda_X$ y $x_1 = x$). Para continuar el proceso, supongamos que todos los puntos adyacentes de x están en $RI(X) = R(X) - P_0$. Notemos que esto implica que $x \notin P_1$.

Si x tiene un punto adyacente $x_1 \in P_1$, como $x \notin P_1$, $x \in P_2$. En este caso el proceso termina y la sucesión finita descrita en (3.2.3) es x, x_1 (lo cual siginifica que $i = 2$, $i \leq \lambda_X$ y $x_2 = x$). Para continuar el proceso, supongamos que ningún punto adyacente de x está en P_1. Sea:

$$Z_1(x) = \{y \in X - \{x\} \colon y \text{ es adyacente a } x\}.$$

Notemos que, $Z_1(x) \subset X - (P_0 \cup P_1) \subset RI(X)$. Ahora tratamos a los elementos de $Z_1(x)$ como hicimos con x. Observemos que, si un punto adyacente de algún elemento y de $Z_1(x)$ es un punto de $E(X) \cup P_0$, entonces $y \in P_0 \cup P_1$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, para cada $y \in Z_1(x)$:

$$Z_2(y) = \{z \in X - \{y, x\} \colon z \text{ es adyacente a } y\}$$

está contenido en $R(X) - (P_0 \cup P_1)$. Más aún, si algún elemento x_1 de un conjunto $Z_2(x_2)$ está en P_1, x_2 es un punto de ramificación de X, que no está en P_1, pero tiene adyacente a un punto de P_1. Entonces, $\lambda_X \geq 3$ y $x_2 \in P_2$. Por consiguiente, x no es un elemento de $P_0 \cup P_1 \cup P_2$ y tiene adyacente al punto x_2 de P_2; es decir, $x \in P_3$. En este caso el proceso termina y la sucesión finita descrita en (3.2.3) es x, x_2, x_1 (es decir, $i = 3$, $i \leq \lambda_X$ y $x_3 = x$). Para continuar el proceso, supongamos que, para cada $y \in Z_1(x)$, $Z_2(y) \subset R(X) - (P_0 \cup P_1 \cup P_2)$.

Ahora, para cada $y \in Z_1(x)$, tratamos a los elementos de $Z_2(y)$ como hicimos con los de $Z_1(x)$ y así sucesivamente. En vista de que $|R(X)| < \aleph_0$, este proceso termina la primera vez que obtengamos un elemento $i \in \{1, 2, \ldots, \lambda_X\}$ y una sucesión finita:

$$x, x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_2, x_1$$

de puntos de ramificación de X, todos en el arco xx_1 y de modo que si $x_i = x$, entonces $xx_1 \cap R(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ y x_1 tiene un punto adyacente que es un extremo de X, por lo que, $x_1 \in P_1$. Notemos que, por la forma que seleccionamos el arco xx_1, se satisface (3.2.2). Entonces, por el Teorema 3.8, $x \in P_i$. Esto prueba que $RI(X) \subset \bigcup_{i=1}^{\lambda_X} P_i$. Como la otra contención se sigue de la definición de cada P_i, tenemos que $RI(X) = \bigcup_{i=1}^{\lambda_X} P_i$, probando de esta manera 2).

Como ya hicimos ver, si $x \in P_0$, entonces $\mathrm{Orb}_X(x) \subset P_0$ (Lema 3.5). Para terminar la prueba del teorema, sólo falta verificar que, si $1 \leq i \leq \lambda_X$ y $x \in$

P_i, entonces $\mathrm{Orb}_X(x) \subset P_i$. Notemos que, si $x \in P_1$, entonces $x \in R(X) - P_0$ y existe $x_0 \in P_0$ tal que x_0x es un arco libre en X. Si $h \in \mathcal{H}(X)$, entonces $h(x_0)h(x)$ es un arco libre en X tal que $h(x) \in R(X) - P_0$ y $h(x_0) \in P_0$. Es decir, $h(x) \in P_1$. Con esto hemos probado que, si $x \in P_1$, entonces $\mathrm{Orb}_X(x) \subset P_1$.

Ahora supongamos que $1 < i \leq \lambda_X$ y que $x \in P_i$. Por el Teorema 3.8, existe $x_1 \in P_1$ tal que, para cada $a \in P_1$, ocurre que $i = |xx_1 \cap R(X)| \leq |xa \cap R(X)|$. Sean $h \in \mathcal{H}(X)$, $b \in P_1$ y $a = h^{-1}(b)$. Como $a \in \mathrm{Orb}_X(b)$, entonces $a \in P_1$ y, así, $|x_1x \cap R(X)| \leq |ax \cap R(X)|$. Como h es un homeomorfismo, se cumple que:

$$i = |h(x_1)h(x) \cap R(X)| \leq |h(ax) \cap R(X)| = |bh(x) \cap R(X)|.$$

Puesto que elegimos a b como un punto arbitrario de P_1 y $h(x_1) \in P_1$, por el Teorema 3.8, se cumple que $h(x) \in P_i$. Por lo tanto: $\mathrm{Orb}_X(x) \subset P_i$. Esto prueba 3). $\square$

Si $X \in \mathcal{F}$ y $T(X)$ es alguno de los siguientes conjuntos: $E(X)$, $R(X)$, $O(X)$, $RE(X)$, $RI(X)$, $OE(X)$, o $OI(X)$, denotaremos por $\eta_{T(X)}$ a la ***cardinalidad de la familia de las órbitas de X que están contenidas en*** $T(X)$.

Con la finalidad de simplificar la notación, cuando sea claro a qué espacio nos estamos refiriendo, denotaremos por η_E, η_R, η_O, η_{OE}, η_{OI}, η_{RI} y por η_{RE} al número de órbitas contenidas en $E(X)$, $R(X)$, $O(X)$, $OE(X)$, $OI(X)$, $RI(X)$ y $RE(X)$, respectivamente. Notemos que estos números están bien definidos gracias a 1) del Lema 3.5. Recordemos que η_X denota el grado de homogeneidad de un espacio X; es decir, η_X es la cardinalidad de la familia de las órbitas de X.

Teorema 3.10. *Sea $X \in \mathcal{F}$ tal que $R(X) \neq \emptyset$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $\eta_{RE} = \eta_E = \eta_{OE}$;

2) $\eta_{OI} \geq \eta_{RI}$;

3) $\eta_X = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI}$ *y* $3\eta_{RE} + 2\eta_{RI} \leq \eta_X \leq 3\eta_{OE} + 2\eta_{OI}$.

Demostración. Para probar 1), mostraremos primero que $\eta_{OE} = \eta_{RE}$. Para esto definiremos una función biyectiva de la familia de las órbitas contenidas en $OE(X)$, que denotaremos por $\mathcal{OE}$, a la familia de las órbitas contenidas en $RE(X)$, que denotaremos por $\mathcal{RE}$. Por el Lema 3.4, $OE(X) \neq \emptyset$ y $RE(X) \neq \emptyset$, así que, $\mathcal{OE} \neq \emptyset$ y $\mathcal{RE} \neq \emptyset$. Es fácil ver, utilizando el Teorema 3.1, que se cumple la siguiente afirmación:

a) Para cada $x \in OE(X)$ existen dos elementos únicos $a_x \in RE(X)$ y $e_x \in E(X)$ tales que $e_x a_x$ es el arco externo en X que contiene a x en su interior.

Sea $f \colon \mathcal{OE} \to \mathcal{RE}$ la función definida, para cada $\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathcal{OE}$, por:

$$f(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_X(a_x).$$

Veremos que f está bien definida y es biyectiva. Sea $\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathcal{OE}$. Como $\mathrm{Orb}_X(x) \subset OE(X)$, entonces $x \in OE(X)$. Por a), $a_x \in RE(X)$ y, por la parte 1) del Lema 3.5, $\mathrm{Orb}_X(a_x) \subset RE(X)$; es decir, $f(\mathrm{Orb}_X(x)) \in \mathcal{RE}$. Esto prueba que la imagen de f está contenida en $\mathcal{RE}$.

Ahora veamos que:

b) Para cada $x, y \in OE(X)$, $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$ si y sólo si $\mathrm{Orb}_X(a_x) = \mathrm{Orb}_X(a_y)$.

Sean $x, y \in OE(X)$. Si $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$, entonces $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$. Esto significa que, bajo un homeomorfismo, la imagen del arco externo $e_x a_x$ que tiene a x en su interior, es un arco externo que tiene a y en su interior. Aplicando a), dicha imagen es el arco externo $e_y a_y$. Como el orden de un punto es invariante bajo homeomorfismos, sucede entonces que $a_y \in \mathrm{Orb}_X(a_x)$. Por tanto, $\mathrm{Orb}_X(a_y) = \mathrm{Orb}_X(a_x)$. Ahora, supongamos que $\mathrm{Orb}_X(a_x) = \mathrm{Orb}_X(a_y)$. Luego,$e_y a_y$ es un arco externo tal que $a_y \in \mathrm{Orb}_X(a_x)$. Usando la parte 2) del Teorema 3.6, $e_y \in \mathrm{Orb}_X(e_x)$. Entonces, por la parte 3) del Teorema 3.6, $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$. Esto prueba que $\mathrm{Orb}_X(x) = \mathrm{Orb}_X(y)$, lo que concluye la demostración de b).

De b) se infiere que f está bien definida. Además, si $\mathrm{Orb}_X(x), \mathrm{Orb}_X(y) \in \mathcal{OE}$ son tales que:

$$\mathrm{Orb}_X(a_x) = f(\mathrm{Orb}_X(x)) = f(\mathrm{Orb}_X(y)) = \mathrm{Orb}_X(a_y).$$

Entonces $x, y \in OE(X)$ y, por b), $\text{Orb}_X(x) = \text{Orb}_X(y)$. Esto prueba que f es inyectiva. Probemos que f es suprayectiva. Sea $\text{Orb}_X(a) \in \mathcal{RE}$. Entonces $a \in RE(X)$ y, así, existe $e \in E(X)$ tal que ae es un arco externo. Tomemos $x \in (ae)$. Como $x \in OE(X)$, por la parte 2) del Lema 3.5, $\text{Orb}_X(x) \in \mathcal{OE}$. Así que, podemos evaluar f en $\text{Orb}_X(x)$, además, de a), obtenemos que $a = a_x$. En consecuencia, $f(\text{Orb}_X(x)) = \text{Orb}_X(a_x) = \text{Orb}_X(a)$. Esto prueba que f es suprayectiva. Por lo tanto, f es biyectiva y, así, $\eta_{RE} = |\mathcal{RE}| = |\mathcal{OE}| = \eta_{OE}$.

Veamos que $\eta_{RE} = \eta_E$. Notemos que, por el Teorema 3.1, para cada $x \in E(X)$, existe un único $a_x \in RE(X)$ tal que xa_x es un arco externo en X. Usando este hecho y los incisos 1) y 2) del Teorema 3.6, de manera similar al procedimiento anterior, podemos definir una función biyectiva de la familia $\mathcal{E}$ de las órbitas contenidas en $E(X)$ a $\mathcal{RE}$, lo cual muestra que $\eta_{RE} = |\mathcal{RE}| = |\mathcal{E}| = \eta_E$. Esto concluye la prueba de 1).

Para probar 2), definiremos una función suprayectiva de la familia de las órbitas contenidas en $OI(X)$, que denotaremos por $\mathcal{OI}$, a la familia de las órbitas contenidas en $RI(X)$, que denotaremos por $\mathcal{RI}$. Si $RI(X) = \emptyset$, entonces $\mathcal{OI} = \emptyset$ y $\eta_{RI} = 0 \leq \eta_{OI}$. Supongamos, por tanto, que $RI(X) \neq \emptyset$. Entonces, $\mathcal{RI} \neq \emptyset$. Fijemos un elemento $a \in RI(X)$. Luego, a es punto final de un arco interno ab en X. Por consiguiente, $\emptyset \neq (ab) \subset OI(X)$, por lo que $OI(X) \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{OI} \neq \emptyset$. Esto implica que $\eta_{OI} \geq 1$ y $\eta_{RI} \geq 1$.

Sean $P_0 = RE(X)$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, P_i el siguiente conjunto:

$$\left\{ x \in R(X) - \bigcup_{j=0}^{i-1} P_j \colon \text{existe } y \in P_{i-1} \text{ tal que } xy \text{ es un arco libre en } X \right\}.$$

Tomemos λ_X tal que $P_{\lambda_X} \neq \emptyset$ y, para cada $i > \lambda_X$, $P_i = \emptyset$. Recordemos, por el Lema 3.7, que:

$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{\lambda_X}$ son subconjuntos no vacíos de X y ajenos dos a dos.

Como $RI(X) \neq \emptyset$, por la parte 1) del Teorema 3.9, $\lambda_X \in \mathbb{N}$, así que, por la parte 2) del mismo teorema, $RI(X) = \bigcup_{i=1}^{\lambda_X} P_i$. Utilizando el Teorema 3.1, así como la definición de los conjuntos P_j, se tiene el siguiente resultado:

c) Para cada $x \in OI(X)$ existen $i \in \{1, 2, \ldots, \lambda_X\}$ así como dos elementos únicos $x_{i-1} \in P_{i-1}$ y $x_i \in P_i$ tales que $x_{i-1}x_i$ es el arco interno en X que contiene a x en su interior.

Definamos $f\colon \mathcal{OI} \to \mathcal{RI}$ como sigue. Para $\mathrm{Orb}_X(x) \in \mathcal{OI}$, tomamos i, x_{i-1} y x_i como en c) y hacemos:

$$f\big(\mathrm{Orb}_X(x)\big) = \mathrm{Orb}_X(x_i).$$

Veamos que f está bien definida. En efecto, sean $x \in OI(X)$ y $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$. Entonces, existen $i \leq \lambda_X$, $x_{i-1} \in P_{i-1}$, $x_i \in P_i$ y $h \in \mathcal{H}(X)$ tales que $x_{i-1}x_i$ es el arco interno que tiene a x y $h(x) = y$. Por consiguiente, $y \in OI(X)$ es un elemento del arco interno $h(x_{i-1}x_i) = h(x_{i-1})h(x_i)$. Además, por la parte 3) del Teorema 3.9, $h(x_{i-1}) \in P_{i-1}$ y $h(x_i) \in P_i$. Luego, de la definición de f, $f(O_X(y)) = \mathrm{Orb}_X(h(x_i))$. Ya que $\mathrm{Orb}_X(h(x_i)) = \mathrm{Orb}_X(x_i)$, hemos probado lo siguiente:

$$f(O_X(y)) = \mathrm{Orb}_X(h(x_i)).$$

Esto implica que f está bien definida.

Ahora probemos que f es suprayectiva. Tomemos $y \in RI(X)$. Como $RI(X) = \bigcup_{i=1}^{\lambda_X} P_i$, existe $1 \leq i \leq \lambda_X$ tal que $y \in P_i$. Luego, por la definición de P_i, existe $z \in P_{i-1}$ tal que zy es un arco libre en X. Como $i \geq 1$ tenemos que $P_{i-1} \subset R(X)$, por lo que zy es un arco interno en X. Notemos que, si $x \in (zy)$, entonces $x \in OI(X)$ y $f(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_X(y)$. Esto prueba que f es suprayectiva. Por tanto:

$$\eta_{RI} = |\mathcal{RI}| \leq |\mathcal{OI}| = \eta_{OI}.$$

De esta manera, se cumple 2). Para probar 3), recordemos que X es unión de sus órbitas. Como X es unión de los conjuntos ajenos dos a dos:

$$E(X), RE(X), RI(X), OE(X) \text{ y } OI(X),$$

utilizando el Lema 3.5 y las igualdades $\eta_{RE} = \eta_E = \eta_{OE}$, obtenemos que:

$$\eta_X = \eta_E + \eta_{RI} + \eta_{RE} + \eta_{OE} + \eta_{OI} = \eta_{RE} + \eta_{RI} + \eta_{RE} + \eta_{RE} + \eta_{OI} = \\ = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI}.$$

Como $\eta_{OI} \geq \eta_{RI}$, sucede que:

$$3\eta_{RE} + 2\eta_{RI} = 3\eta_{RE} + \eta_{RI} + \eta_{RI} \leq 3\eta_{RE} + \eta_{RI} + \eta_{OI} = \eta_X$$

y

$$\eta_X = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI} \leq \eta_{OI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI} = 3\eta_{RE} + 2\eta_{OI}.$$

Esto prueba 3). $\square$

Corolario 3.11. *Si* $X \in \mathcal{F}$, *entonces* $\eta_X \in \mathbb{N} - \{1\}$. *Es decir, existe* $n \in \mathbb{N} - \{1\}$ *tal que* X *es* $\frac{1}{n}$*-homogéneo.*

Demostración. Si $R(X) = \emptyset$, entonces X es un arco, el cual es $\frac{1}{2}$-homogéneo. Si $R(X) \neq \emptyset$, por la parte 3) del Teorema 3.10, tenemos que:

$$\eta_X = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI}.$$

Ya que $R(X)$ es finito, por el Lema 3.4, $OE(X) \neq \emptyset$ y $RE(X) \neq \emptyset$, así que $\eta_{OE} \geq 1$ y $\eta_{RE} \geq 1$. Luego, $\eta_X = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI} \geq 0 + 3 + 0 = 3$. Ahora bien, como $R(X)$ es finito, los cardinales η_{RI} y η_{RE} son finitos. También, como $R(X)$ es finito y todo arco interno está determinado por sus dos puntos finales, entonces sólo hay una cantidad finita de arcos internos. Además, por los incisos 1) y 3) del Teorema 3.6, si ab es un arco interno en X, entonces (ab) está contenido una órbita de X. Esto es, el cardinal η_{OI} es finito; es decir, $\eta_X \in \mathbb{N} - \{1\}$. □

3.2.1. Dos Familias de Dendritas en $\mathcal{F}$

Empezaremos esta sección construyendo dos familias de dendritas. Con la unión de dichas familias, obtendremos una familia numerable de dendritas en $\mathcal{F}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, dicha familia tiene un elemento $\frac{1}{n}$-homogéneo.

Sean $k \in \mathbb{N}$, $n_1 \in \{2, 3, \ldots, \omega\}$ y $n_2, n_3, \ldots, n_k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Construiremos, en $\mathbb{R}^2$, una dendrita $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. Fijemos un punto $a \in \mathbb{R}^2$ y hagamos $A_1 = \{a\}$. Definimos A_2 como sigue: si $n_1 \in \mathbb{N} - \{1\}$, tomamos $a_1, a_2 \ldots, a_{n_1} \in \mathbb{R}^2 - \{a\}$ de manera que, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$ con $i \neq j$, $aa_i \cap aa_j = \{a\}$ y hacemos $A_2 = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}\}$. Observemos que, $|A_2| = n_1$. Si $n_1 = \omega$, tomamos una sucesión $\{a_n\}_n$ de puntos de $\mathbb{R}^2 - \{a\}$, que converge a a, de manera que, para cada $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, $aa_i \cap a_j = \{a\}$. Definimos $A_2 = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Observemos que, en este caso, $|A_2| = \aleph_0$. Sea:

$$F_{n_1} = \bigcup\{aa_i : a_i \in A_1\}.$$

Notemos que F_{n_1} es una dendrita, homeomorfa a las que definimos en (1.6.1) y (1.6.2). Definamos A_3 como sigue: si $n_2 \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ entonces, para cada $a_i \in A_2$, tomamos $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i(n_2-1)}$ en $\mathbb{R}^2 - F_{n_1}$ con las siguientes propiedades:

1) $a_i a_{il} \cap a_i a_{im} = \{a_i\}$, para cada $l, m \in \{1, 2, \ldots, n_2 - 1\}$, con $l \neq m$;

2) para cada $a_i, a_j \in A_2$, con $i \neq j$, los $(n_2 - 1)$-odos simples $\bigcup\{a_i a_{il} \colon l \in \{1, 2, \ldots, n_2 - 1\}\}$ y $\bigcup\{a_j a_{jl} \colon l \in \{1, 2, \ldots, n_2 - 1\}\}$, son ajenos.

Sea:

$$A_3 = \{a_{ij} \colon a_i \in A_2 \text{ y } j \in \{1, 2, \ldots, n_2 - 1\}\} .$$

Si $n_2 = \omega$ tomamos, para cada $a_i \in A_2$, una sucesión $\{a_{ij}\}_j$ en $\mathbb{R}^2 - F_{n_1}$ que converge a a_i y con las siguientes propiedades:

3) $a_i a_{il} \cap a_i a_{im} = \{a_i\}$, para cada $l, m \in \mathbb{N}$, con $l \neq m$;

4) para cada $a_i, a_j \in A_2$, con $i \neq j$, las copias $\bigcup\{a_i a_{il} \colon l \in \mathbb{N}\}$ y $\bigcup\{a_j a_{jl} \colon l \in \mathbb{N}\}$ de la dendrita F_ω, son ajenas.

Sean $A_3 = \{a_{ij} \colon a_i \in A_2, j \in \mathbb{N}\}$. Observemos que, $|A_3| = (n_1)(n_2 - 1)$, si $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y, en otro caso, $|A_3| = \aleph_0$. Hagamos:

$$F_{n_1,n_2} = F_{n_1} \cup \left(\bigcup\{a_i a_{ij} \colon a_i \in A_2 \text{ y } a_{ij} \in A_3\} \right) .$$

Notemos que, F_{n_1,n_2} es una dendrita que se obtiene, pegando en cada punto extremo de F_{n_1}, $(n_2 - 1)$-odos simples ajenos dos a dos o bien, copias ajenas dos a dos de la dendrita F_ω. Por ejemplo, $F_{\omega,4}$ es la dendrita que se obtiene pegando por cada punto extremo de F_ω, un triodo simple, de manera que los triodos simples son ajenos dos a dos y el vértice de cada uno de estos triodos simples es el correspondiente punto extremo de F_ω. Por otro lado, $F_{4,\omega}$ es la dendrita que se obtiene pegado, por cada punto extremo del 4-odo simple F_4, una copia de la dendrita F_ω, de manera que, las copias son ajenas dos a dos y el vértice de cada una de estas copias, es un punto extremo de F_4. Notemos también que $F_{\omega,4}$ y $F_{4,\omega}$ no son homeomorfos.

Ahora, construimos un conjunto A_4 cuya cardinalidad es $n_1(n_2-1)(n_3-1)$, si $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, o bien es $\aleph_0$. Construimos también una dendrita F_{n_1,n_2,n_3}, que se obtiene pegando en cada punto extremo de F_{n_1,n_2}, $(n_3 - 1)$-odos simples ajenos dos a dos cuyos vértices son el correspondiente punto extremo de F_{n_1,n_2} (si $n_3 \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$), o bien pegando copias ajenas dos a dos de la dendrita F_ω, cuyos vértices son el correspondiente punto extremo de F_{n_1,n_2} (si $n_3 = \omega$). En la Figura 3.1 mostramos la dendrita $F_{3,3,4}$.

Siguiendo este proceso k pasos, construimos el correspondiente conjunto A_{k+1} y la dendrita $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. Hagamos $X = F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. No es difícil ver que,

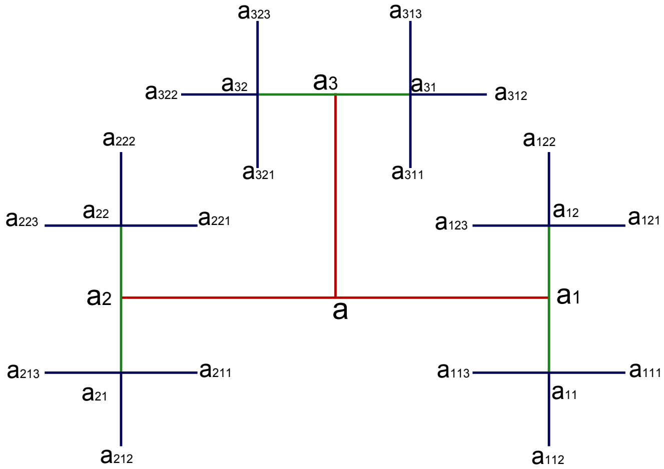


Figura 3.1: $F_{3,3,4}$

si $n_1 \geq 3$, entonces:

$$R(X) = \left(\bigcup_{l=1}^{k} A_l \right) \quad \text{y} \quad E(X) = A_{k+1}.$$

Además, $x \in R(X)$ si y sólo si $x = a$ y $\operatorname{ord}_X(x) = n_1$, o bien, $x \neq a$ y x satisface la siguiente propiedad:

($\star$) Existen $l \in \{2, 3, \ldots, k\}$ y puntos $m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}$ tales que: $m_1 \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$, para cada $2 \leq i \leq l-1$, sucede que $m_i \in \{1, 2, \ldots, n_i - 1\}$, $x = a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}} \in A_l$ y, por último, $\operatorname{ord}_X(x) = n_l$.

Notemos que, si $n_1 = 2$, entonces $R(X) = \bigcup_{l=2}^{k} A_l$, $E(X) = A_{k+1}$ y los puntos ramificación x de X son los que tienen la forma descrita en ($\star$). Independientemente del valor de n_1, al punto a de X le llamaremos el *vértice inicial* de X.

Las dendritas $F_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, tienen un número finito de puntos de ramificación. Por lo tanto, pertenecen a la familia $\mathcal{F}$ que estudiamos en la sección anterior. Observemos que F_2 es un arco.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Vamos a construir ahora, en $\mathbb{R}^2$, una dendrita $Y_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Consideremos dos copias ajenas M_1 y M_2

de la dendrita $F_{n_1-1,n_2,\ldots,n_k}$, con vértices iniciales a y b, respectivamente. Entendemos que, si $n_1 = \omega$, entonces $n_1 - 1 = \omega$. Consideremos un arco B en $\mathbb{R}^2$, con puntos finales a y b y cuya intersección con $M_1 \cup M_2$ es $\{a, b\}$. Definimos:

$$Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = M_1 \cup B \cup M_2.$$

En la Figura 3.2 mostramos la dendrita $Y_{4,3,4}$.

Sea $g\colon M_1 \to M_2$ un homeomorfismo tal que $g(a) = b$. Hagamos $B_1 = \{b\}$. Utilizaremos en M_1, la notación que indicamos en $(\star)$ para los puntos de ramificación de $F_{n_1-1,n_2,\ldots,n_k}$, distintos de su vértice inicial. Si $1 < l \leq k+1$ y $a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}} \in A_l$ es un punto de $R(M_1) \cup E(M_1)$, distinto de a, entonces $b_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}} = g(a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}})$ es un punto de $R(M_2) \cup E(M_2)$ distinto de b, y se encuentra en $B_l = g(A_l)$. De esta manera, $Y = Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ es una dendrita tal que:

$$R(Y) = \bigcup_{l=1}^{k} A_l \cup B_l \quad \text{y} \quad E(Y) = A_{k+1} \cup B_{k+1}.$$

Además, $x \in R(Y)$ si y sólo si existe $l \leq k$ tal que $x \in A_l \cup B_l$ y $\mathrm{ord}_Y(x) = n_l$. Observemos que las dendritas $Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, que acabamos de describir, tienen un número finito de puntos de ramificación. Por lo tanto, pertenecen a la familia $\mathcal{F}$ que estudiamos en la sección anterior. Notemos también que Y_3 es homeomorfo a la letra H.

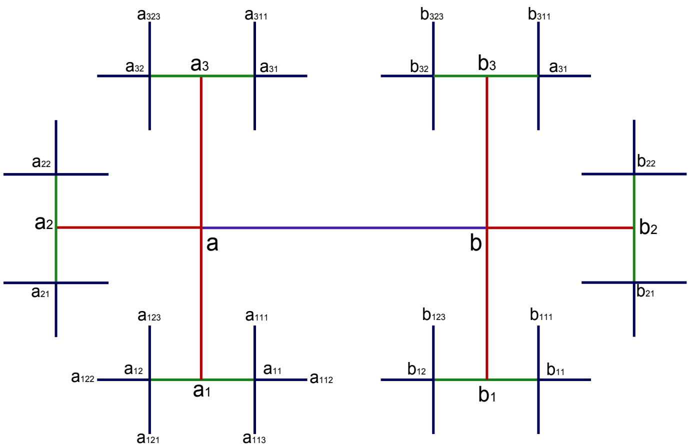


Figura 3.2: Una Copia De $Y_{4,3,4}$

Una vez descritas las dendritas $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ y $Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, nuestro siguiente objetivo es calcular su grado de homogeneidad. Para ello serán de utilidad los siguientes resultados. Recordemos que, si X es un continuo y $a \in X$, entonces $\mathcal{A}_a$ es la familia de todas las componentes de $X - \{a\}$.

Lema 3.12. *Sean $X \in \mathcal{F}$ tal que X no es un arco y $a \in R(X)$. Supongamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_a$ es tal que sus elementos son homeomorfos dos a dos y $|\mathcal{A}| \geq 2$. Entonces, para ningún $h \in \mathcal{H}(X)$, se tiene que $h(a) \in \bigcup \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_c$ tal que sus elementos son homeomorfos dos a dos. Supongamos, por el contrario, que existen $h \in \mathcal{H}(X)$ y $B \in \mathcal{A}$ tales que $h(a) \in B$. Como B es una componente de $X - \{a\}$, $h(B)$ es una componente de $X - \{h(a)\}$. En vista de que X es localmente conexo, B y $h(B)$ son abiertos en X. Ahora bien, por la parte 1) del Teorema 1.10, $\mathrm{Cl}_X(B) = B \cup \{a\}$, así que:

$$h(\mathrm{Cl}_X(B)) = h(B) \cup \{h(a)\} \quad \text{y} \quad h(a) \in B \subset X - \{a\}.$$

Notemos que $h(a) \neq a$. Supongamos que $a \notin h(B)$. Entonces $h(\mathrm{Cl}_X(B))$ es un subconjunto conexo de $X - \{a\}$. Como $h(a) \in h(\mathrm{Cl}_X(B)) \cap B$ y B es una componente de $X - \{a\}$, entonces $h(\mathrm{Cl}_X(B)) \subset B$. De esta manera, B y $h(B)$ son dos subconjuntos abiertos de X, homeomorfos y comparables. Entonces, por el Teorema 1.6, B y $h(B)$ tienen los mismos puntos de ramificación. Sin embargo, $h(a) \in (B \cap R(X)) - h(B)$. De esta contradicción se infiere que $a \in h(B)$.

Puesto que $a \in h(B)$, resulta que $h(B)$ es la componente de $X - \{h(a)\}$ que tiene al punto a. Como $|\mathcal{A}| > 1$, podemos tomar $C \in \mathcal{A} - \{B\}$. Entonces, C es una componente de $X - \{a\}$ diferente de B, por lo que C es abierto en X y, además, $h(a) \notin C$. Luego, $\mathrm{Cl}_X(C) = C \cup \{a\} \subset X - \{h(a)\}$, $C \cup \{a\}$ es conexo y tiene al punto a. Por lo tanto, $C \cup \{a\} \subset h(B)$. De esta manera, C y $h(B)$ son dos subconjuntos abiertos de X, homeomorfos (pues $h(B)$ es homeomorfo a B y B es homeomorfo a C), y comparables. Por el Teorema 1.6, C y $h(B)$ tienen los mismos puntos de ramificación. Sin embargo, $a \in (h(B) \cap R(X)) - C$. De esta contradicción se tiene que $h(a) \notin \bigcup \mathcal{A}$. $\square$

Bajo las condiciones descritas en el lema anterior, para cada $h \in \mathcal{H}(X)$, como $h(a) \notin \bigcup \mathcal{A}$, resulta que $h(a) = a$, o bien $h(a)$ es un elemento de una componente de $X - \{a\}$ que no es homeomorfa a las que integran la familia

$\mathcal{A}$. En efecto, si $h(a) \in C \in \mathcal{A}_a - \mathcal{A}$ y C es homeomorfo a un elemento de $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{C\} \subset \mathcal{A}_a$ es no degenerada, sus elementos son homeomorfos dos a dos y $h(a) \in \bigcup \mathcal{A}'$, contradiciendo el Lema 3.12.

Otra consecuencia del Lema 3.12, es la que presentamos en el siguiente resultado.

Lema 3.13. *Sean $X \in \mathcal{F}$ tal que X no es un arco y $a \in R(X)$. Si para cada $A \in \mathcal{A}_a$ existe $B \in \mathcal{A}_a - \{A\}$ tal que A y B son homeomorfos, entonces* $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a\}$.

Demostración. Si $b \in \mathrm{Orb}_X(a) - \{a\}$, entonces existen $A \in \mathcal{A}_a$ y $h \in \mathcal{H}(X)$ tales que $b \in A$ y $b = h(a)$. Por hipótesis, existe $B \in \mathcal{A}_a - \{A\}$ tal que A y B son homeomorfos. Sea $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una subfamilia no degenerada de $\mathcal{A}_a$, cuyos miembros son homeomorfos y $h(a) \in \bigcup \mathcal{A}$. Esto contradice el Lema 3.12, así que $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a\}$. □

En el siguiente resultado calculamos el grado de homogeneidad de las dendritas $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ y $Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

Teorema 3.14. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *$F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ es $\frac{1}{2k+1}$-homogéneo y, para cada $l \leq k$, $A_l = P_{k-l}$ es una órbita de $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$;*

2) *$Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ es $\frac{1}{2(k+1)}$-homogéneo y, para cada $l \leq k$, $A_l \cup B_l = P_{k-l}$ es una órbita de $Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Para facilitar la notación, hagamos $X = F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

Tomemos $l \in \{2, \ldots, k\}$ y un punto $a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}} \in A_l$. Notemos que $a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}}$ es un punto de ramificación de X que satisface lo que se indica en $(\star)$. Denotemos por $a_{1_{l-1}}$ al punto $a_{11\cdots 1} \in A_l$. Construiremos un homeomorfismo $h \colon X \to X$ tal que $h(a_{1_{l-1}}) = a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}}$ y $h(a) = a$.

Si $n_1 \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, hacemos $I_1 = \{1, 2, \ldots, n_1\}$ y, si $n_1 = \omega$, definimos $I_1 = \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, hacemos $I_i = \{1, 2, \ldots, n_i - 1\}$, si $n_i \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, mientras que, si $n_i = \omega$, definimos $I_i = \mathbb{N}$.

Observemos que $m_i \in I_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, l-1\}$. Definimos, para cada $1 \leq i \leq k$ una función $\sigma_i \colon I_i \to I_i$ de la siguiente manera. Si $1 \leq i \leq l-1$, entonces:

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} m_i, & \text{si } j = 1; \\ 1, & \text{si } j = m_i; \\ t, & \text{si } j \notin \{1, m_i\}. \end{cases}$$

Si $l \leq i \leq k$ hacemos $\sigma_i(t) = t$, para cada $t \in I_i$. No es difícil ver que cada σ_i es biyectiva.

Ahora definiremos el homeomorfismo h. Hagamos $h(a) = a$ y, para cada $j \in I_1$, $h|_{aa_j}$ un homeomorfismo lineal tal que $h(a_j) = a_{\sigma_1(j)}$ y, por tanto, $h(aa_j) = aa_{\sigma_1(j)}$. Tenemos así definido h en F_{n_1}.Supongamos que hemos definido h en $F_{n_1,n_2,\ldots,n_{i-1}}$, para $2 \leq i \leq k$. Notemos que $E(F_{n_1,n_2,\ldots,n_{i-1}}) = A_i$. Para cada $a_{j_1 j_2 \cdots j_i} \in A_{i+1}$ definimos h de manera que:

$$h_{|}a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1}} a_{j_1 j_2 \cdots j_i} \text{ es un homeomorfismo lineal tal que} \\ h(a_{j_1 j_2 \cdots j_i}) = a_{\sigma_1(j_1)\sigma_2(j_2)\cdots\sigma_i(j_i)}.$$

Por tanto,

$$h(a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1}} a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1} j_i}) = h(a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1}}) h(a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1} j_i}) = \\ = a_{\sigma_1(j_1)\sigma_2(j_2)\cdots\sigma_{i-1}(j_{i-1})} a_{\sigma_1(j_1)\sigma_2(j_2)\cdots\sigma_{i-1}(j_{i-1})\sigma_i(j_i)}.$$

Así, hemos definido h en $F_{n_1,n_2,\ldots,n_i}$. Por [26, Teorema 9.4, pág. 83], $h \colon X \to X$ está bien definida y es continua. Además, como cada función σ_i es biyectiva y cada restricción $h|_{a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1}} a_{j_1 j_2 \cdots j_{i-1} j_i}}$ es un homeomorfismo, h también es un homeomorfismo. Observemos que, para cada $i \leq l-1$, $h(a_i) = a_{m_1 m_2 \cdots m_i}$ y $h(a) = a$. Con esto hemos probado la siguiente afirmación:

a) Si $1 \leq l \leq k$ y $x \in A_l$, entonces existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) = a$ y $h(a_{1_{l-1}}) = x$.

Por a), se cumple que:

b) $A_l \subset \mathrm{Orb}_X(a_{1_{l-1}})$, para cada $1 \leq l \leq k$.

Por construcción, $A_{k+1} = E(X)$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, A_i es justo el conjunto de los puntos adyacentes de A_{i+1}, que no están en ninguno de los A_j, para $j > i + 1$. Es decir:

$$P_0 = A_k = RE(X), P_1 = A_{k-1}, \ldots, P_{k-1} = A_1 = \{a\}.$$

De esto y la parte 3) del Teorema 3.9, se sigue que, para cada $l \in \{1, 2 \ldots, k\}$, $\mathrm{Orb}_X(a_{l-1}) \subset A_l$. Por b) obtenemos la igualdad; es decir:

d) Para cada $l \leq k$, A_l es una órbita de X.

Como $RE(X) = A_k$ y $RI(X)$ es la unión de los conjuntos ajenos dos a dos $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, por d) se cumple que:

$$\eta_{RI} = k - 1 \quad \text{y} \quad \eta_{RE} = 1.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, hagamos:

$$O_i = \{x \in X\colon \text{ existe un arco libre } cd \text{ tal que } x \in (cd), c \in A_i \text{ y } d \in A_{i+1}\}.$$

Notemos que, si $x \in O_i$, por d) y la parte 3) del Teorema 3.6, $\mathrm{Orb}_X(x) = O_i$. Por lo tanto, cada O_i es una órbita de X. Como $OI(X)$ es la unión de los conjuntos ajenos dos a dos $O_1, O_2, \ldots, O_{k-1}$, $\eta_{OI} = k - 1$. Aplicando la parte 3) del Teorema 3.10, encontramos que X tiene exactamente $\eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI} = (k-1) + 3 + (k-1) = 2k + 1$ órbitas. Esto concluye la prueba de 1).

Utilizando argumentos similares a la prueba de 1), mostraremos 2). Hagamos $Y = Y_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. Sabemos que $Y = M_1 \cup B \cup M_2$, donde M_1 y M_2 son copias ajenas de $F_{n_1 - 1, n_2, \ldots, n_k}$, con vértices iniciales a y b, respectivamente y, además, B es un arco con puntos finales a y b tal que $M_1 \cup M_2 \cap B = \{a, b\}$. Tomemos, de la construcción de Y, un homeomorfismo $g\colon M_1 \to M_2$ tal que: $g(a) = b$ y, si $1 \leq l \leq k + 1$ y $a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}} \in A_l$ es un elemento de $R(M_1) \cup E(M_1) - \{a\}$, entonces $b_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}} = g(a_{m_1 m_2 \cdots m_{l-1}})$ es un elemento de $R(M_2) \cup E(M_2) - \{b\}$, y se encuentra en $B_l = g(A_l)$.

Sea $f\colon B \to B$ un homeomorfismo tal que $f(a) = b$. Consideremos la función $G\colon Y \to Y$ definida como sigue:

$$G(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in M_1; \\ g^{-1}(x), & \text{si } x \in M_2; \\ f(x), & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Es fácil ver que $G\colon Y \to Y$ es un homeomorfismo. Sean $1 \leq l \leq k$ y $a_{j_1 j_2 \cdots j_{l-1}} \in A_l$. Por a), existe un homeomorfismo $h\colon M_1 \to M_1$ tal que $h(a) = a$ y $h(a_{1_{l-1}}) = a_{j_1 j_2 \cdots j_{l-1}}$. Como $M_1 \cap (B \cup M_2) = \{a\}$, podemos extender h a una función $H\colon Y \to Y$, tomando la identidad en $B \cup M_2$. Luego, H y G son homeomorfismos de Y en sí mismo tales que $(G \circ H)(a) = G(a) = g(a) = b$ y, para cada $(j_1, j_2, \ldots, j_{l-1}) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{l-1}$, se cumple que:

$$(G \circ H)(a_{11\cdots 1}) = G(a_{j_1 j_2 \cdots j_l}) = b_{j_1 j_2 \cdots j_l}.$$

Como B es un arco libre en Y y $b \in \mathrm{Orb}_X(a)$, del Teorema 3.2 y lo que hemos mostrado, se sigue la siguiente afirmación:

e) $\mathrm{Orb}_Y(a) = \{a, b\} = A_1$ y, para cada $2 \leq l \leq k+1$, $A_l \cup B_l \subset \mathrm{Orb}_Y(a_{1_{l-1}})$.

Por construcción, $A_{k+1} \cup B_{k+1} = E(X)$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $A_i \cup B_i$ es el conjunto de los puntos adyacentes de $A_{i+1} \cup B_{i+1}$, que no están en ningun $A_j \cup B_j$, para $j > i+1$. Es decir:

$$P_0 = A_k \cup B_k = RE(X), P_1 = A_{k-1} \cup B_{k-1}, \ldots, P_{k-1} = A_1 \cup B_1 = \{a, b\}.$$

De la parte 3) del Teorema 3.9, se sigue que, para cada $l \in \{1, 2 \ldots, k\}$, $\mathrm{Orb}_X(a_{l-1}) \subset A_l$. Por lo tanto:

f) Para cada $l \leq k$, $A_l \cup B_l$ es una órbita de X.

Como $RE(Y) = A_k \cup B_k$ y $RI(Y)$ es la unión de los conjuntos ajenos dos a dos:

$$A_1 \cup B_1,\ A_2 \cup B_2,\ \ldots, A_{k-1} \cup B_{k-1},$$

por f), $\eta_{RI(Y)} = k - 1$ y $\eta_{RE(Y)} = 1$.

Hagamos $O'_0 = (ab)$ y, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$:

$$O'_i = \{x \in Y\colon \text{ existen } c \in (A_i \cup B_i) \text{ y } d \in (A_{i+1} \cup B_{i+1}) \text{ tales que } x \in (cd) \text{ y } cd \text{ es libre}\}.$$

Sea $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Si $x \in O'_i$, por f) y la parte 3) del Teorema 3.6, $\mathrm{Orb}_Y(x) = O'_i$. Por lo tanto, cada O'_i es una órbita de Y. Como $OI(Y)$ es la unión de los conjuntos ajenos dos a dos $O'_0, O'_1, \ldots, O'_{k-1}$, hemos probado que $\eta_{OI(Y)} = k$. Por la parte 3) del Teorema 3.10, Y tiene exactamente:

$$\eta_{RI(Y)} + 3\eta_{RE(Y)} + \eta_{OI(Y)} = (k-1) + 3 + k = 2k + 2$$

órbitas. Esto prueba 2). $\square$

Corolario 3.15. *Para cada $m \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Existe una familia infinita numerable de árboles $\frac{1}{m}$-homogéneos;*
2) *existe una familia infinita numerable de dendritas $\frac{1}{m}$-homogéneas en $\mathcal{F}$, que no son árboles.*

Demostración. Si m es impar entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k + 1$. Entonces:

$$\{F_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \colon n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N} - \{1, 2\}\}$$

es una familia infinita numerable de árboles $\frac{1}{m}$-homogéneos, mientras que:

$$\{F_{\omega, n_2, \ldots, n_k} \colon n_2, n_3, \ldots, n_k \in \mathbb{N} - \{1, 2\}\}$$

es una familia infinita numerable de dendritas $\frac{1}{m}$-homogéneas en $\mathcal{F}$, que no son árboles.

Si m es par, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = 2k$. Entonces:

$$\{Y_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}} \colon n_1, n_2, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N} - \{1, 2\}\}$$

es una familia infinita numerable de árboles $\frac{1}{m}$-homogéneo, mientras que:

$$\{F_{\omega, n_2, \ldots, n_{k-1}} \colon n_2, n_3, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N} - \{1, 2\}\}$$

es una familia infinita numerable de de dendritas $\frac{1}{m}$-homogéneas en $\mathcal{F}$, que no son árboles. $\square$

Como ya hemos indicado, no hay dendritas homogéneas y la única dendrita $\frac{1}{2}$-homogénea es el arco.

A continuación presentaremos algunos resultados que ayudarán a contar las órbitas de cualquier dendrita X en $\mathcal{F}$. Contaremos las órbitas contenidas en cada uno de los subconjuntos $RE(X)$, $RI(X)$, $OE(X)$, $OI(X)$ y $E(X)$. Esto será útil para caracterizar las dendritas $\frac{1}{n}$-homogéneas de la familia $\mathcal{F}$, para $n \in \{3, 4, 5, 6\}$.

Si $X \in \mathcal{F}$ no es un arco y $a \in R(X)$, definimos

$$N_a = \{b \in R(X) - \{a\} \colon ab \text{ es un arco interno en } X\}. \tag{3.2.4}$$

Entonces N_a es el conjunto de los puntos adyacentes de a, que son puntos de ramificación de X. Observemos que $N_a = \emptyset$ si y sólo si $R(X) = \{a\}$. Notemos también que, si A es una componente de $X - \{a\}$, entonces $A \cap N_a = \emptyset$ si y sólo si $A = (ae]$, para algún punto $e \in E(X)$.

Lema 3.16. *Sean $X \in \mathcal{F}$ tal que X no es un arco y $a \in R(X)$. Si $|N_a| \geq 2$ y los puntos de N_a están en la misma órbita de X, entonces* $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a\}$.

Demostración. Tomemos $a \in R(X)$ y consideremos la familia $\mathcal{A}_a$ de las componentes de $X - \{a\}$. Definimos:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{A}_a \colon A \cap N_a \neq \emptyset\}$$

Como $|N_a| \geq 2$, existen dos elementos distintos B y D en $\mathcal{A}$. Sean $b, d \in N_a$ tales que $b \in B$ y $d \in D$. Por hipótesis, N_a es una órbita de X, así que $d \in \mathrm{Orb}_X(b)$. Ya que ad es un arco libre y $a \in \mathrm{Orb}_X(a)$, por la parte 2) del Lema 3.3 aplicada con $c = a$, existe $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que $g(a) = a$ y $g(b) = d$. Como $g(B)$ es una componente de $X - \{g(a)\} = X - \{a\}$, se cumple que $g(B) = D$. Al tomar B y D de manera arbitraria en $\mathcal{A}$, hemos probado que los elementos de $\mathcal{A}$ son homeomorfos dos a dos. Supongamos que existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) \neq a$. Ya que N_a es no degenerado, usando el Lema 3.12, obtenemos que $h(a) \notin \bigcup \mathcal{A}$. Luego, si A es la componente de $X - \{a\}$ que tiene a $h(a)$, entonces $A \notin \mathcal{A}$; es decir, A no intersecta a N_a. Así, existe $e \in E(X)$ tal que ae es un arco externo. Esto implica que $h(a) \in ae$, pero esto no puede ocurrir, pues $h(a) \neq a$ y $a \in R(X)$. Por lo tanto, $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a\}$. □

Teorema 3.17. *Sea $X \in \mathcal{F}$ tal que X es $\frac{1}{n}$-homogéneo, para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1\}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $R(X) = \emptyset$ *si y sólo si* $n = 2$;

2) *si* $|R(X)| \geq 2$, *entonces* $\eta_{OI} \geq 1$ *y, además,, cada punto de ramificación de* X *es punto final de un arco interno de* X;

3) $|R(X)| = 1$ *si y sólo si* $n = 3$;

4) *si* $\eta_{RE} \geq 2$ *y* $RI(X) \neq \emptyset$, *entonces* $\eta_{OI} \geq 2$ *y* $n \geq 9$;

5) *si* $|RI(X)| \geq 2$, *entonces* $\eta_{OI} \geq 2$ *y* $n \geq 6$.

Demostración. Por la parte 6) del Teorema 1.23, $R(X) = \emptyset$ si y sólo si X es un arco y, por [52, Corolario 3.7, pág. 2225], esto ocurre si y sólo si X es $\frac{1}{2}$-homogéneo, es decir, si y sólo si $n = 2$. Esto prueba 1).

En lo que resta de la prueba consideraremos $R(X) \neq \emptyset$ y, así, por el Lema 3.4, $\eta_{RE} \geq 1$. Además, la parte 3) del Teorema 3.10 dice que:

$$n = \eta_X = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI}. \tag{3.2.5}$$

Para probar 2), supongamos que $R(X)$ es no degenerado. Sean $a \in R(X)$ y $b \in R(X) - \{a\}$. Como $R(X)$ es finito, podemos tomar $a_1 \in ab \cap R(X)$ tal que $(aa_1) \cap R(X) = \emptyset$; es decir, aa_1 es un arco interno en X que tiene al punto de ramificación a. Así, $OI(X) \neq \emptyset$, con lo que, $\eta_{OI} \geq 1$. Ya que a fué tomado de manera arbitraria en $R(X)$, concluimos la prueba de 2).

Para ver 3), supongamos que $|R(X)| = 1$. Entonces, $R(X) = RE(X)$ es una órbita degenerada de X, $RI(X) = \emptyset$ y $OI(X) = \emptyset$. Aplicando (3.2.5), obtenemos que $n = 3$. Ahora, si $n = 3$, como $\eta_{RE} \geq 1$, por (3.2.5), $\eta_{OI} = 0 = \eta_{RI} = 0$. Luego, por 2), $|R(X)| = 1$. Esto prueba 3).

Para probar de 4) y 5) utilizaremos la siguiente afirmación:

a) Si $|R(X)| \geq 2$, ab es un arco interno en X y existe $c \in R(X) - (\mathrm{Orb}_X(a) \cup \mathrm{Orb}_X(b))$, entonces $\eta_{OI} \geq 2$.

En efecto, como $|R(X)| \geq 2$, por 2), existe $d \in R(X)$ tal que cd es un arco interno en X. Puesto que $c \notin \mathrm{Orb}_X(a) \cup \mathrm{Orb}_X(b)$, por la parte 3) del Teorema 3.6, los puntos en (ab) y los puntos en (cd) no comparten órbita. Por lo tanto, $\eta_{OI} \geq 2$. Esto prueba a).

Para probar 4), supongamos que $\eta_{RE} \geq 2$ y que $RI(X) \neq \emptyset$. Si $|R(X)| = 1$ entonces, como hicimos ver en la prueba de 3), $RI(X) = \emptyset$. Esto es una contradicción y, así, $|R(X)| \geq 2$. Por 2), $\eta_{OI} \geq 1$. Sean $a \in RI(X)$ y $b \in R(X)$, de modo que ab es un arco interno en X. Si $b \in RI(X)$, tomamos $c \in RE(X)$ y, si $b \in RE(X)$, como $\eta_{RE} \geq 2$, tomamos $c \in RE(X) - \mathrm{Orb}_X(b)$. Notemos que, en ambos casos, $c \notin \mathrm{Orb}_X(a) \cup \mathrm{Orb}_X(b)$. Luego, por a), $\eta_{OI} \geq 2$. Aplicando (3.2.5), obtenemos que $n \geq 1 + 6 + 2 = 9$. Esto prueba 4).

Para probar 5), supongamos que $|RI(X)| \geq 2$. Como $RI(X) \subset R(X)$, $|R(X)| \geq 2$ y, por 2), $\eta_{OI} \geq 1$. Si $\eta_{RE} \geq 2$, como $|RI(X)| \geq 2$, en particular $RI(X) \neq \emptyset$. Entonces, por 4), $\eta_{OI} \geq 2$ y $n \geq 9 > 6$. Supongamos, por tanto, que $\eta_{RE} = 1$. Si $\eta_{RI} \geq 2$, por la parte 2) del Teorema 3.10, $\eta_{OI} \geq \eta_{RI} \geq 2$ y, por (3.2.5), $n \geq 2 + 3 + 1 = 6$. Supongamos entonces que $\eta_{RI} = 1$. Como $\eta_{RE} = \eta_{RI} = 1$, $RE(X)$ y $RI(X)$ son dos órbitas de X.

Sea $a \in RI(X)$. Entonces $a \in R(X) - RE(X)$, por lo que existen al menos tres arcos internos que tienen a a como punto final. Esto implica que $|N_a| \geq 3$. Si $N_a \subset RE(X)$ o bien $N_a \subset RI(X)$, todos los puntos de N_a están en la misma órbita de X. Luego, por el Lema 3.16, $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a\}$. Esto no puede ocurrir, pues $RI(X)$ es una órbita de X y $|RI(X)| \geq 2$. Por lo tanto, existen $b \in N_a \cap RI(X)$ y $c \in N_a \cap RE(X)$. Notemos que $c \notin \mathrm{Orb}_X(a) \cup \mathrm{Orb}_X(b)$ y, por a), $\eta_{OI} \geq 2$. Además, por (3.2.5), $n \geq 1 + 3 + 2 = 6$. Esto prueba 5). □

Corolario 3.18. *Sea $X \in \mathcal{F}$. Entonces X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si existe $k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$ tal que X es homeomorfo a F_k.*

Demostración. La prueba es consecuencia inmediata del inciso 3) del Teorema 3.17. □

El siguiente resultado proporciona una caracterización de las dendritas $Y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, que ayudará a probar que las únicas dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito y son $\frac{1}{4}$-homogéneas o bien $\frac{1}{6}$-homogéneas, son las dendritas Y_{n_1} y Y_{n_1,n_2}, respectivamente, donde $n_1, n_2 \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$.

Recordemos que, para una dendrita $X \in \mathcal{F}$, $R_n(X)$ es el conjunto de puntos de X que tienen orden n y $P_0 = RE(X)$. Tomaremos λ_X y P_i como en el Lema 3.7, $i \leq \lambda_X$. Es decir, $\lambda_X \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es tal que $P_{\lambda_X} \neq \emptyset$, si $i > \lambda_X$, $P_i = \emptyset$ y, si $1 \leq i \leq \lambda_X$, los elementos de P_i son aquellos puntos de ramificación de X, que no están en las P_j anteriores ($0 \leq j \leq i - 1$), pero tienen adyacente a algún punto de P_{i-1}.

Lema 3.19. *Sean $X \in \mathcal{F}$ tal que X no es un arco, $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Entonces X es homeomorfo a la dendrita $Y_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ si y sólo si existen dos puntos distintos $c, d \in X$, con las siguientes propiedades:*

1) $\lambda_X = k - 1$;

2) $\{c, d\} = P_{k-1}$;

3) *para cada $0 \leq i \leq k - 1$, P_i es una órbita de X y sus puntos tienen orden n_{k-i}.*

Demostración. Supongamos que $X = Y_{n_1 \ldots, n_k}$. Por la parte 2) del Teorema 3.14, para cada $0 \leq i \leq k-1$, $P_i = A_{k-i} \cup B_{k-i}$ es una órbita de X. Además, $R(X) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \cup B_i = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} P_i$ y, ya que $P_{k-1} \neq \emptyset$, esto prueba 1). Tomando $c = a$ y $d = b$, obtenemos 2). Ya que los puntos de $A_{k-i} \cup B_{k-i}$ tienen orden n_{k-i}, X también cumple 3).

Ahora supongamos que X es una dendrita que cumple las condiciones del lema. Veamos que X es homeomorfa a $Y_{n_1, \ldots, n_k}$. Definamos unos conjuntos $C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots, C_k, D_k$ de la siguiente manera.

$$C_1 = \{c\}, \quad D_1 = \{d\}$$

y, para cada $2 \leq i \leq k$ hacemos:

$$C_i = \left\{ x \in \left[R(X) - \bigcup_{j<i} (C_j \cup D_j)\right] : \text{ existe } y \in C_{i-1} \text{ tal que } xy \text{ es libre} \right\}$$
y
$$D_i = \left\{ x \in \left[R(X) - \bigcup_{j<i} (C_j \cup D_j)\right] : \text{ existe } y \in D_{i-1} \text{ tal que } xy \text{ es libre} \right\}.$$

Primero probaremos lo siguiente:

a) Para cada $0 \leq i \leq k - 1$, se cumple que $P_i = C_{k-i} \cup D_{k-i}$.

Por hipótesis, $P_{k-1} = \{c, d\} = C_1 \cup D_1$. Sea $1 \leq i \leq k - 1$ y supongamos que $P_{k-j} = C_j \cup D_j$, para cada $j \leq i$. Ya que P_{k-i} es no vacío, tomemos $x \in P_{k-i}$. Luego, existe $y \in P_{k-i-1}$ tal que xy es libre. Como P_{k-i-1} y $P_k - i$ son órbitas de X, se sigue que:

Para cada $y \in P_{k-i-1}$ existe $x_y \in P_{k-i} = C_i \cup D_i$ tal que xy es libre.

Tomando en cuenta lo anterior probaremos que $P_{k-i-1} = C_{i+1} \cup D_{i+1}$. Sea $y \in P_{k-i-1}$. Puesto que $P_0, P_1, \ldots, P_{k-1}$ son ajenos dos a dos, $y \notin P_{k-1} \cup P_{k-2} \cup \cdots \cup P_{k-i} = (C_1 \cup D_1) \cup (C_2 \cup D_2) \cup \cdots \cup (C_i \cup D_i)$. Como existe $x_y \in C_i \cup D_i$ de manera que $x_y y$ es libre, hemos probado que $y \in C_{i+1} \cup D_{i+1}$.

Ahora tomemos $y \in C_{i+1} D_{i+1}$. Entonces:

$(*)$ $y \notin (C_1 \cup D_1) \cup (C_2 \cup D_2) \cup \cdots \cup (C_i \cup D_i) = P_{k-1} \cup P_{k-2} \cup \cdots \cup P_{k-i}$

y existe $x \in C_i \cup D_i = P_{k-i}$ tal que xy es libre. Como $y \in R(X)$, por 1) de este teorema y $(*)$, podemos tomar $0 \leq l \leq k-i-1$, de manera que $y \in P_l$. Puesto que $x \in P_{k-1}$ y $l < k-i$, $x \notin P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_l$. Además, $y \in P_l$ y xy es libre, lo que significa que $x \in P_{l+1}$. Entonces $x \in P_{l+1} \cap P_{k-i}$, por lo que $l+1 = k-i$. Por lo tanto, $y \in P_l = P_{k-i-1}$. Esto prueba a).

Ahora probaremos lo siguiente:

b) cd es libre y, para cada $2 \leq i \leq k$ y $x_i \in C_i \cup D_i$, existe un único $x_{i-1} \in C_{i-1} \cup D_{i-1}$ tal que $x_i x_{i-1}$ es libre.

Supongamos que cd no es libre. Entonces existe $x \in R(X) \cap (cd)$ tal que cx es libre. Luego, $x \in C_2$, con lo que $k \geq 1$. Del hecho de que $P_2 = C_2 \cup D_2$ y $\{c, d\}$ son órbitas de X, se sigue que $C_2 \cup D_2 \subset (cd)$. Así que, todos los puntos de $R(X)$ adyacentes a c o d, se encuentran en cd. Esto implica que $c, d \in RE(X) = C_k \cup D_k$. Ya que esto contradice que $\{c, d\} = C_1 \cup D_1$ y $k \geq 2$, cd es libre.

Ahora mostraremos la segunda parte de b). Supogamos que existen $2 \leq i \leq k$ y $x_{i+1} \in C_{i+1} \cap D_{i+1}$ tales que x tiene dos puntos adyacentes x_i y y_i en $C_i \cup D_i$. Por la definición de dichos conjuntos, para cada $2 \leq j < i$, existen $x_j, y_j \in C_j \cup D_j$ de manera que los arcos $x_i x_{i-1}, x_{i-1} x_{i-2}, \ldots, x_2 x_1$, $y_i y_{i-1}, y_{i-1} y_{i-2}, \ldots, y_2 y_1$, son libres. Notemos que $\{x_1, y_1\} \subset \{c, d\}$, por lo que $x_1 y_1 = cd$ es un arco libre, o bien es un conjunto degenerado. Luego:

$$Z = \left(\bigcup_{j=1}^{i} x_j x_{j-1} \right) \cup x_1 y_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{i} y_j y_{j-1} \right)$$

es una dendrita tal que $Z \cap (C_{i+1} \cup D_{i+1}) = \emptyset$. Puesto que Z es arcoconexo, $x_i y_i \subset Z$. Ya que $x x_i$ y $x y_i$ son libres y $x_i \neq y_i$, se cumple que $x_i x \cap x y_i = \{x\}$;

es decir $x \in x_iy_i$. Luego, $x \in Z \cap \big(C_{i+1} \cup D_{i+1}\big)$, lo cual es una contradicción. Esto concluye la prueba b).

Ahora probaremos lo siguiente:

c) Para cada $1 \leq i \leq k$, $C_i \cap D_i = \emptyset$.

Mostremos c). Notemos que $C_1 \cap D_1 = \emptyset$. Sea $2 \leq i \leq k$. Supongamos que $C_i \cap D_i = \emptyset$ y que $x \in C_{i+1} \cap D_{i+1}$. Entonces, existen $c_i \in C_i$ y $d_i \in D_i$ de manera que xc_i y xd_i son libres en X y como $C_i \cap D_i = \emptyset$, $c_i \neq d_i$. Ya que esto contradice b), se sigue que $C_{i+1} \cap D_{i+1} = \emptyset$. Esto prueba c).

De a), 1) de este teorema y 2) del Teorema 3.9, obtenemos que:

$$RE(X) = C_k \cup D_k \quad \text{ y } \quad RI(X) = \bigcup_{i=1}^{k-1} P_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \cup D_i.$$

Hagamos:

$$C_{k+1} = \{x \in E(X)\colon \text{ existe } y \in C_k \text{ tal que } xd \text{ es libre } \}$$
$$\text{y}$$
$$D_{k+1} = \{x \in E(X)\colon \text{ existe } y \in D_k \text{ tal que } xd \text{ es libre } \}.$$

Notemos que $C_{k+1} \cup D_{k+1} = E(X)$ y, como cd es libre:

$$X = \left(\bigcup\{xy\colon \text{ para algún } i \leq k,\ x \in C_i, y \in C_{i+1} \text{ y } xy \text{ es libre en } X\}\right)$$
$$\bigcup cd \bigcup \left(\bigcup\{xy\colon \text{ para algún } i \leq k, x \in D_i, y \in D_{i+1} \text{ y } xy \text{ es libre en } X\}\right).$$

Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, definimos I_i de la siguiente manera: si $n_i \in \mathbb{N}$, hacemos $I_i = \{1, \ldots, n_i - 1\}$; si $i = \omega$, hacemos $I_i = \mathbb{N}$. Ya que los elementos de C_i tienen orden n_i, por b), para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, podemos etiquetar a los elementos de C_{i+1} y D_{i+1} como $c_{m_1,\ldots,m_i}$, y $d_{m_1,\ldots,m_i}$, respectivamente, donde $c_{m_1,\ldots,m_{i-1}}$ y $d_{m_1,\ldots,m_{i-1}}$ son lo únicos elementos de C_i y D_i, respectivamente, tales que $c_{m_1,\ldots,m_{i-1}}c_{m_1,\ldots,m_i}$ y $d_{m_1,\ldots,m_{i-1}}d_{m_1,\ldots,m_i}$ son arcos libres con $m_j \in I_j$, para cada $j \leq i$.

Ahora es fácil notar que podemos generar un homeomorfismo de $F_{n_1,\ldots,n_k}$ a X, mandando cada A_i en C_i y B_i en D_i, como sigue: mandamos a en c, b en d, el arco libre ab en el arco libre cd y, para cada $1 \leq i \leq k$, mandamos

$c_{m_1,\ldots,m_i}$ y $d_{m_1,\ldots,m_i}$, en $a_{m_1,\ldots,m_i}$ y $b_{m_1,\ldots,m_i}$, respectivamente y, sus arcos libres correspondientes $c_{m_1,\ldots,m_{i-1}}c_{m_1,\ldots,m_i}$ en $a_{m_1,\ldots,m_{i-1}}a_{m_1,\ldots,m_i}$ y $d_{m_1,\ldots,m_{i-1}}d_{m_1,\ldots,m_i}$ en $b_{m_1,\ldots,m_{i-1}}b_{m_1,\ldots,m_i}$. Por lo tanto, X es homeomorfo a $Y_{n_1,\ldots,n_K}$. □

Corolario 3.20. *Sean $X \in \mathcal{F}$ y $n_i, n_2 \in (\mathbb{N} - \{1,2\}) \cup \{\omega\}$. Entonces:*

1) *X es homeomorfo a Y_{n_1} si y sólo si existen $c, d \in X$ tales que $R(X) = \{c,d\} \subset R_{n_1}(X)$;*

2) *X es homeomorfo a Y_{n_1,n_2} si y sólo si existen $c, d \in X$ tales que $RI(X) = \{c,d\} \subset R_{n_1}(X)$ y $RE(X) \subset R_{n_2}(X)$.*

Demostración. Para ver 1), notemos que el Teorema 3.19 dice que, X es homeomorfo a Y_{n_1} si y sólo si $R(X) = P_0 = \{c,d\}$ y, este conjunto es una órbita de X, cuyos puntos tienen orden n_1. Esto prueba 1).

Para ver 2), notemos que el Teorema 3.19 dice que, X es homeomorfo a Y_{n_1,n_2} si y sólo si $R(X) = P_0 \cup P_1$, $\{c,d\} = P_1$ y, P_0 y P_1 son órbitas de X, cuyos puntos tienen orden n_2 y n_1, respectivamente. Ya que $P_0 = RE(X)$ y $P_1 = R(X) - P_0(X) = RI(X)$, se cumple 2). □

El siguiente resultado caracteriza a las dendritas $\frac{1}{4}$-homogéneas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito. Es una aplicación del Corolario 3.20 y, los Teoremas 3.17 y 3.10, entre otros resultados que hemos probado en esta sección.

Teorema 3.21. *Sea $X \in \mathcal{F}$, entonces X es $\frac{1}{4}$-homogéneo si y sólo si existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que X es homeomorfo a Y_{n_1}.*

Demostración. Supongamos que X es $\frac{1}{4}$-homogéneo. Por las partes 1) y 3) del Teorema 3.17, $|R(X)| \geq 2$ y, por la parte 2) del mismo teorema, $OI(X) \neq \emptyset$; es decir, $\eta_{OI} \geq 1$. Ahora, aplicando el inciso 3) del Teorema 3.10, sabemos que $4 = \eta_{OI} + 3\eta_{RE} + \eta_{RI}$. Como $RE(X) \neq \emptyset$, $\eta_{RE} \geq 1$ y esto obliga a que $\eta_{RE} = \eta_{OI} = 1$ y $\eta_{RI} = 0$. Luego, $RI(X) = \emptyset$, de donde $R(X) = RE(X)$ es una órbita de X. Como $OI(X) \neq \emptyset$, podemos tomar un arco interno ab. Así que, $a, b \in RE(X)$ y $b \in \mathrm{Orb}_X(a)$. Entonces, por el Teorema 3.2, $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a,b\}$. Por lo tanto:

$$R(X) = \{a,b\} \quad \text{y} \quad \mathrm{ord}_X(a) = \mathrm{ord}_X(b).$$

Por el inciso 1) del Corolario 3.20, X es homeomorfo a Y_{n_1}, donde $n_1 = \mathrm{ord}_X(a)$. Por otro lado, el inciso 2) del Teorema 3.14 dice que Y_{n_1} es $\frac{1}{4}$-homogénea. Esto concluye nuestra prueba. □

El siguiente resultado proporciona una caracterización de las dendritas $F_{n_1,\ldots,n_k}$. Esta caracterización ayudará a probar que las únicas dendritas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito y son $\frac{1}{5}$-homogéneas son las dendritas F_{n_1,n_2}, donde $n_1, n_2 \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$.

Lema 3.22. *Sean $X \in \mathcal{F}$ tal que X no es un arco, $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Entonces X es homeomorfo a la dendrita $F_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ si y sólo si existe $c \in X$, con las siguientes propiedades:*

1) *$\lambda_X = k - 1$, donde λ_X es como en el Lema 3.7;*

2) *$\{c\} = P_{k-1}$;*

3) *para cada $0 \leq i \leq k - 1$, P_i es una órbita de X y sus puntos tienen orden n_{k-i}.*

Demostración. La prueba de este teorema utiliza argumentos similares a la del Teorema 3.19, pero es más sencilla, por lo que omitiremos pequeños argumentos que se explicaron a detalle en dicho teorema.

Supongamos que $X = F_{n_1\ldots,n_k}$. Por la parte 1) del Teorema 3.14, para cada $0 \leq i \leq k - 1$, $P_i = A_{k-i}$ es una órbita de X. Además, $R(X) = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} P_i$ y, ya que $P_{k-1} \neq \emptyset$, esto prueba 1). Tomando $c = a$, obtenemos 2). Ya que los puntos de A_{k-i} tienen orden n_{k-i}, X también cumple 3).

Ahora supongamos que X es una dendrita que cumple las condiciones del lema. Veamos que X es homeomorfa a $F_{n_1,\ldots,n_k}$. Definamos unos conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ de la siguiente manera.

$$C_1 = \{c\}, \text{ y, para cada } 2 \leq i \leq k, \text{ hacemos}$$
$$C_i = \left\{ x \in \Big[R(X) - \bigcup_{j<i} (C_j)\Big] : \text{ existe } y \in C_{i-1} \text{ tal que } xy \text{ es libre} \right\}$$

Primero probaremos lo siguiente:

a) Para cada $0 \leq i \leq k - 1$, $P_i = C_{k-i}$.

Por hipótesis, $P_{k-1} = \{c\} = C_1$. Sea $1 \leq i \leq k - 1$ y supongamos que $P_{k-j} = C_j$, para cada $j \leq i$. Tomemos $x \in P_{k-i}$. Luego, existe $y \in P_{k-i-1}$ tal que xy es libre y, como P_{k-i-1} y $P_k - i = C_i$ son órbitas de X, para cada $y \in P_{k-i-1}$ existe $x_y \in C_i$ tal que xy es libre.

Sea $y_0 \in P_{k-i-1}$. Entonces, $y_0 \notin P_{k-1} \cup P_{k-2} \cup \cdots \cup P_{k-i} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_i$, por lo que, $y \in C_{i+1}$. Ahora tomemos $y \in C_{i+1}$. Entonces:

(∗) $y \notin \bigcup_{j=1}^{i} C_j = \bigcup_{j=1}^{i} P_{k-j}$ y existe $x \in C_i = P_{k-i}$ tal que xy es libre.

Tomemos $0 \leq l \leq k-i-1$, de manera que $y \in P_l$. Puesto que $l < k-i$, $x \notin \bigcup_{j=1}^{l} P_j$ y, como xy es libre, $x \in P_{l+1}$. Por lo tanto, $l+1 = k-i$ y $y \in P_l = P_{k-i-1}$. Esto prueba a).

Ahora probaremos lo siguiente:

b) Para cada $2 \leq i \leq k$ y $x_i \in C_i$, existe un único $x_{i-1} \in C_{i-1}$ tal que $x_i x_{i-1}$ es libre.

Supogamos que $2 \leq i \leq k$ y $x \in C_i$ tiene dos puntos adyacentes $x_{i-1}, y_{i-1} \in C_{i-1}$. Para cada $2 \leq j < i$, existen $x_j, y_j \in C_j \cup D_j$ de manera que los arcos $x_i x_{i-1}, x_{i-1} x_{i-2}, \ldots, x_2 c$, $y_i y_{i-1}, y_{i-1} y_{i-2}, \ldots, y_2 c$, son libres. Haciendo $x_1 = y_1 = c$, tenemos que:

$$Z = \left(\bigcup_{j=1}^{i} x_j x_{j-1} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{i} y_j y_{j-1} \right)$$

es conexo y $x_i y_i \subset Z \subset X - C_{i+1}$. Ya que $x x_i$ y $x y_i$ son libres y $x_i \neq y_i$, $x \in x_i y_i$. Luego, $x \in Z \cap C_{i+1}$, lo cual es una contradicción. Esto concluye la prueba b).

Por a), 1) de este teorema y 2) del Teorema 3.9 se cumple que:

$$RE(X) = C_k \quad \text{y} \quad RI(X) = \bigcup_{i=1}^{k-1} P_i = \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i.$$

Hagamos $C_{k+1} = E(X)$. Ya que $C_k = RE(X)$, entonces:

$$X = \bigcup_{i=1}^{k+1} \{xy \colon x \in C_i, y \in C_{i+1} \text{ y } xy \text{ es un arco libre en } X\}.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, definimos I_i de la siguiente manera: si $n_i \in \mathbb{N}$, hacemos $I_i = \{1, \ldots, n_{i-1}\}$; si $i = \omega$ hacemos $I_i = \mathbb{N}$. Para cada $1 \leq i \leq k$, podemos etiquetar a los elementos de C_{i+1} como $c_{m_1,\ldots,m_i}$, donde $c_{m_1,\ldots,m_{i-1}} \in C_i$ y, si $i \geq 2$, $c_{m_1,\ldots,m_{i-1}}c_{m_1,\ldots,m_i}$ es un arco libre y $m_j \in I_j$, para cada $j \leq i$.

Ahora es fácil notar que podemos generar un homeomorfismo de $F_{n_1,\ldots,n_k}$ a X, mandando cada A_i en C_i como sigue: mandamos a en c y, para cada $1 \leq i \leq k$, mandamos $c_{m_1,\ldots,m_i}$, en $a_{m_1,\ldots,m_i}$ y, los arcos libres correspondientes $c_{m_1,\ldots,m_{i-1}}c_{m_1,\ldots,m_i}$ en $a_{m_1,\ldots,m_{i-1}}a_{m_1,\ldots,m_i}$. Por lo tanto, X es homeomorfo a $F_{n_1,\ldots,n_k}$. □

Corolario 3.23. *Sean $X \in \mathcal{F}$ y $n_1, n_2 \in (\mathbb{N} - \{1,2\}) \cup \{\omega\}$. Entonces X es homeomorfo a F_{n_1,n_2} si y sólo si existe $c \in X$ tal que $\{c\} = RI(X) \subset R_{n_1}(X)$ y $RE(X) \subset R_{n_2}(X)$.*

Demostración. Por construcción, F_{n_1,n_2} cumple las características del corolario. Ahora, si X es una dendrita homeomorfa a F_{n_1,n_2}, el Teorema 3.22 dice que: $R(X) = P_0 \cup P_1$, $\{c\} = P_1$ y, tanto P_0 como P_1 son órbitas de X, cuyos puntos tienen orden n_2 y n_1, respectivamente. Ya que $P_0 = RE(X)$, $P_1 = R(X) - P_0(X) = RI(X)$. Por lo tanto, $RE(X) \subset R_{n_2}(X)$ y $\{c\} = RI(X) \subset R_{n_2}(X)$. □

El siguiente resultado caracteriza las dendritas $\frac{1}{5}$-homogéneas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito. Este resultado es una aplicación del Corolario 3.23, así como los Teoremas 3.17 y 3.10, entre otros resultados que hemos probado en esta sección.

Teorema 3.24. *Sea $X \in \mathcal{F}$. Entonces X es $\frac{1}{5}$-homogéneo si y sólo si existen $n_1, n_2 \in (\mathbb{N} - \{1,2\}) \cup \{\omega\}$ tales que X es homeomorfo a F_{n_1,n_2}.*

Demostración. Supongamos que X es $\frac{1}{5}$-homogéneo. Por los incisos 1) y 3) del Teorema 3.17, $|R(X)| \geq 2$ y, por la parte 2) del mismo teorema, $\eta_{OI} \geq 1$. Aplicando la parte 3) del Teorema 3.10, obtenemos que $5 = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI}$ y, por el Lema 3.4, $\eta_{RE} \geq 1$. En consecuencia, tenemos los siguientes dos casos posbles:

$$\eta_{RI} = \eta_{RE} = \eta_{OI} = 1 \quad \text{o bien,} \quad \eta_{RI} = 0, \eta_{RE} = 1 \quad \text{y} \quad \eta_{OI} = 2.$$

Veamos que el segundo caso no se puede dar. Supongamos que $RI(X) = \emptyset$ y $RE(X) = R(X)$. Como $OI(X) \neq \emptyset$, podemos tomar un arco interno ab.

Ya que $R(X) = RE(X)$ es una órbita de X y $a, b \in R(X)$, $b \in \mathrm{Orb}_X(a)$. Aplicando el Teorema 3.2, obtenemos lo siguiente:

$$R(X) = \mathrm{Orb}_X(a) = \{a, b\}.$$

Por la parte 1) del Corolario 3.20, encontramos $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que X es homeomorfo a Y_{n_1}. Esto no puede ocurrir, pues Y_{n_1} es $\frac{1}{4}$-homogéneo (Teorema 3.21). Por lo tanto, $RI(X) \neq \emptyset$. Se sigue que $\eta_{RI} = \eta_{RE} = \eta_{OI} = 1$. Ahora, por la parte 5) del Teorema 3.17, $|RI(X)| = 1$. Así, hemos probado la siguiente afirmación:

a) $\eta_{RI} = \eta_{RE} = \eta_{OI} = 1$ y existe $c \in X$ tal que $RI(X) = \{c\}$.

Por a), existen $n_1, n_2 \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$ tales que $RE(X) \subset R_{n_2}(X)$ y $\{c\} = RI(X) \subset R_{n_1}(X)$. Por el Corolario 3.23, X es homeomorfo a F_{n_1,n_2}.

La segunda implicación está dada por el inciso 1) del Teorema 3.14. □

Concluimos esta parte de la sección presentando una caracterización de las dendritas $\frac{1}{6}$-homogéneas cuyo conjunto de puntos de ramificación es finito.

Teorema 3.25. *Sean $X \in \mathcal{F}$, entonces X es $\frac{1}{6}$-homogéneo si y sólo si existen $n_1, n_2 \in (\mathbb{N} - \{1, 2\}) \cup \{\omega\}$ tales que X es homeomorfo a Y_{n_1,n_2}.*

Demostración. Supongamos que X es $\frac{1}{6}$-homogéneo. Notemos que, por los incisos 1) y 3) del Teorema 3.17, $|R(X)| \geq 2$ y, por 2) del mismo teorema, $\eta_{OI} \geq 1$. Por último, de la parte 4) de este teorema, $\eta_{RE} = 1$. En resumen, se cumple lo siguiente:

$$|R(X)| \geq 2, \quad \eta_{OI} \geq 1 \quad \text{y} \quad \eta_{RE} = 1.$$

Supongamos que $RI(X) = \emptyset$. Entonces $R(X) = RE(X)$ es una órbita de X. Puesto que $\eta_{OI} \geq 1$ podemos tomar un arco interno ab. Como $a, b \in R(X)$, a y b se encuentran en la misma órbita de X y, por el Teorema 3.2, $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a, b\} = R(X)$. De la parte 2) del Corolario 3.20, X es homeomorfo a la dendrita Y_{n_1}, para algún $n_1 \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Sin embargo, Y_{n_1} es $\frac{1}{4}$-homogénea (Teorema 3.21), por lo que $RI(X) \neq \emptyset$. Además, por la parte 3) del Teorema 3.10, $6 = \eta_{RI} + 3\eta_{RE} + \eta_{OI}$ y, por la parte 2) del Teorema 3.10, $\eta_{RI} \leq \eta_{OI}$. En consecuencia:

$$\eta_{OI} = 2 \quad \text{y} \quad \eta_{RI} = 1.$$

Entonces $RI(X)$ y $RE(X)$ son órbitas de X y, así, existen $n_1, n_2 \in (\mathbb{N} - \{1,2\}) \cup \{\omega\}$ tales que el orden de cada punto de $RI(X)$ y $RE(X)$ es n_1 y n_2, respectivamente. Notemos que, si $RI(X)$ es degenerado, X es homeomorfo a F_{n_1,n_2} (Teorema 3.23). Lo anterior no ocurre, pues F_{n_1,n_2} es $\frac{1}{5}$-homogéneo. Por lo tanto, $RI(X)$ tiene al menos dos elementos.

Sea $a \in RI(X)$. Ya que a tiene orden al menos 3 y no pertenece a ningún arco externo, entonces a es parte de al menos tres arcos internos. Es decir:

$$|N_a| \geq 3.$$

Recordemos que, por definición, $N_a \subset R(X)$. Si $N_a \subset RE(X)$, los puntos de N_a están en la misma órbita y, por el Lema 3.16, $\mathrm{Orb}_X(a) = \{a\}$. Como $RI(X)$ es una órbita de X, $RI(X) = \{a\}$, lo cual contradice el hecho de que $|RI(X)| \geq 2$. Por consiguiente, podemos tomar $b \in N_a \cap RI(X)$. Luego, ab es un arco interno cuyos puntos finales están en $RI(X)$. Ya que $RI(X)$ es una órbita de X, por el Teorema 3.2, $RI(X) = \mathrm{Orb}_X(a) = \{a, b\}$. Por lo tanto:

$$RI(X) = \{a, b\} \subset R_{n_1} \quad \text{y} \quad RE(X) \subset R_{n_2}.$$

De lo anterior y el inciso 2) del Corolario 3.20, se sigue que X es homeomorfa a la dendrita Y_{n_1,n_2}. La segunda implicación de este teorema se obtiene por el inciso 2) del Teorema 3.14, tomando $k = 2$. $\square$

Una parte importante para caracterizar a las dendritas $\frac{1}{n}$-homogéneas, para $n \in \{3,4,5,6\}$, está dada por los Teoremas 3.17 y 3.10, los cuales ayudaron a ver que, para estos casos, $\eta_{RE} = 1$ (o de manera equivalente $\eta_E = 1$). Para $n > 6$ no siempre se cumple esto, podemos encontrar dendritas cuyo conjunto de puntos extremos contiene más de una órbita de X. Así que, para $n > 6$ no siempre existen $k \in \mathbb{N}$ y $n_1, \ldots, n_k \in (\mathbb{N} - \{1,2\}) \cup \{\omega\}$ tales que las dendritas $\frac{1}{n}$-homogéneas en $\mathcal{F}$ son homeomorfas a la dendrita $Y_{n_1,\ldots,n_k}$ o bien, a la dendrita $F_{n_1,\ldots,n_k}$.

3.2.2. Productos con m-celdas

Dada $m \in \mathbb{N}$, una **m-celda** es un espacio homeomorfo a I^m. En esta parte de la sección estudiaremos el producto de un elemento de $\mathcal{F}$ con I^m, donde $m \in \mathbb{N}$. Encontramos que el grado de homogeneidad de dicho producto siempre es par y, además, podemos expresarlo en término de las órbitas de

X. Específicamente, si $X \in \mathcal{F}$ y $m \in \mathbb{N}$, el Teorema 3.38 dice que, $\eta_{X\times I^m} = \eta_X + \eta_{RI(X)} + \eta_{OI}$ y, si X no es un arco, entonces $\eta_{X\times I^m} = 2\big(\eta_{RI(X)} + 2\eta_{RE(X)} + \eta_{OI(X)}\big)$.

Cabe destacar que, ya que durante esta sección trabajaremos con productos de espacios, es oportuno indicar la siguiente convención. Si $\{Z_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ es una familia no vacía de espacios topológicos no vacíos y $Z = \prod_{\alpha\in\Lambda}$, durante este trabajo, dotaremos a Z de la topología producto, aún cuando no lo indiquemos explícitamente.

Proposición 3.26. *Sean $\{Y_\alpha \colon \alpha \in \Lambda\}$ una familia no vacía de espacios no vacíos y $Y = \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$. Si $y = (y_\alpha)_\alpha \in Y$, entonces:*

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Orb}_{Y_\alpha}(y_\alpha) \subset \mathrm{Orb}_Y(y).$$

Demostración. Sean $y = (y_\alpha)_\alpha \in Y$ y $a \in \prod_{\alpha\in\Lambda} \mathrm{Orb}_{Y_\alpha}(y_\alpha)$. Queremos probar que $a \in \mathrm{Orb}_Y(y)$. Notemos que $a = (a_\alpha)_\alpha$, donde $a_\alpha \in \mathrm{Orb}_{Y_\alpha}(y_\alpha)$, para cada $\alpha \in \Lambda$. Luego, para cada α, podemos tomar un homeomorfismo $g_\alpha \colon Y_\alpha \to Y_\alpha$ tal que $g_\alpha(y_\alpha) = a_\alpha$. Definamos la función $g \colon Y \to Y$, para cada $(x_\alpha)_\alpha \in Y$, por:

$$g\big((x_\alpha)_\alpha\big) = \big(g(x_\alpha)\big)_\alpha.$$

Por lo tanto, g es un homeomorfismo y $g(y) = \big(g(y_\alpha)\big)_\alpha = \big(a_\alpha\big)_\alpha = a$. $\square$

Corolario 3.27. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ espacios no vacíos y $Y = \prod_{i=1}^k Y_i$. Entonces $\eta_Y \leq \prod_{i=1}^k \eta_{Y_i}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.26, a cada producto de órbitas de la forma $\prod_{i=1}^k \mathrm{Orb}_{Y_i}(y_i)_i$, le podemos asignar la única órbita de Y en la que se queda contenido dicho producto; es decir, le asignamos la órbita $\mathrm{Orb}_Y\big((y_i)_i\big)$. Además, dicha asignación es suprayectiva, pues si $y \in Y$, para cada i podemos tomar y_i tal que $y = (y_i)_i$ y, así, $\mathrm{Orb}_Y(y)$ viene de $\prod_{i=1}^k \mathrm{Orb}_{Y_i}(y_i)_i$, bajo la asignación definida anteriormente. Esto implica que:

$$\eta_Y \leq |\{\prod_{i=1}^k \mathrm{Orb}_{Y_i}(y_i) \colon y_i \in Y_i\}|.$$

Notemos, además, que $|\{\prod_{i=1}^k \mathrm{Orb}_{Y_i}(y_i) \colon y_i \in Y_i\}| = \prod_{i=1}^k \eta_{Y_i}$. Por lo tanto, $\eta_Y \leq \prod_{i=1}^k \eta_{Y_i}$. $\square$

De los Corolarios 3.27 y 3.11, obtenemos el siguiente resultado, el cual indica que el grado de homogeneidad de un producto finito de elementos de $\mathcal{F}$ es finito.

Corolario 3.28. *Sean $k \in \mathbb{N}$, $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{F}$ y $Y = \prod_{i=1}^{k} Y_i$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que Y es $\frac{1}{n}$-homogéneo.*

El siguiente resultado es conocido y presentamos una pequeña demostración.

Teorema 3.29. *Si $m \in \mathbb{N}$, entonces I^m es $\frac{1}{2}$-homogéneo, y las dos órbitas de I^m son $(0,1)^m$ y $I^m - (0,1)^m$.*

Demostración. Por la Proposición 3.26, los puntos en $(0,1)^m$ están en la misma órbita de I^m. Además, por [31, Teorema VI 9, pág. 95], tenemos que, si $f\colon I^m \to I^m$ es un homeomorfismo, entonces $f((0,1)^m) = (0,1)^m$. Como consecuencia de esto $(0,1)^m$ es una órbita de I^m. Es sabido que I^m es homeomorfo al disco de dimensión m, D^m y, así, sus fronteras en $\mathbb{R}^2$, $I^m - (0,1)^m$ y S^{m-1}, son homeomorfos. Además, se sabe que S_{m-1} es homogéneo y, aún más, que sus puntos están en la misma órbita de D^m (ver, por ejemplo, el Teorema 3.36). Por lo tanto, también se cumple que $I^m - (0,1)^m$ es una órbita de I^m. $\square$

Sean $X \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{N}$ y $Z = X \times I^m$. Notemos que si X no es un arco, entonces las componentes de $Z - (R(X) \times I^m)$ son de dos tipos: $[ab) \times I^m$, donde ab es un arco externo en X, $a \in E(X)$ y $b \in R(X)$, a las que llamaremos ***componentes externas*** y, $(ab) \times I^m$, donde ab es un arco interno en X, a las que llamaremos ***componentes internas***. Notemos que, por cada punto extremo $a \in E(X)$, existe una componente externa $[ab) \times I^m$ en Z, a la cual denotaremos por C_a. Ahora, si $(ab) \times I^m$ es una componente interna, ésta queda determinada por los puntos finales del arco interno ab, por tal motivo, la denotaremos por C_{ab}.

En la Figura 3.3, presentamos $Y_6 \times I$. Como vemos, en este caso, sólo hay una componente interna, marcada en color rojo y diez componentes externas, marcadas en verde.

Si $m \in \mathbb{N}$, un $\mathbf{T_m}$-***conjunto*** es continuo formado por la unión de una m-celda Y y un arco A, de manera que $Y \cap A = \{t\}$, donde t es un punto

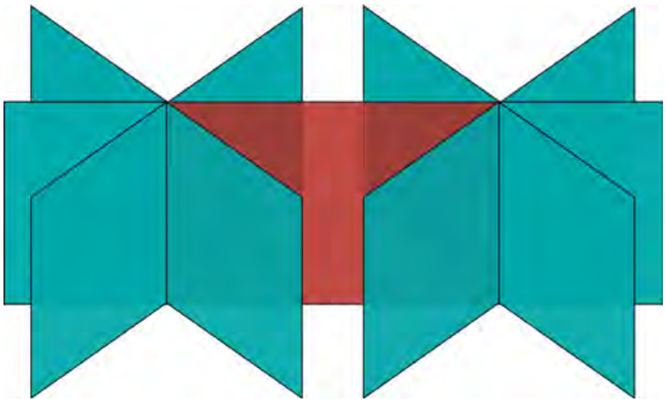


Figura 3.3: $Y_6 \times I$

final de A y un punto en el interior relativo de C. El siguiente resultado es conocido como el Teorema de la Sombrilla y su prueba se puede consultar en [61, Teorema 1, pág. 714].

Teorema 3.30. *Un espacio euclideano de dimensión m no contiene una cantidad no numerable de T_{m-1}-conjuntos ajenos dos a dos.*

Lema 3.31. *Sea T un triodo simple y $m \in \mathbb{N}$. Entonces $T \times I^m$ contiene una cantidad no numerable de T_m-conjuntos ajenos dos ados.*

Demostración. Sean a, b, c y v los tres extremos y el vértice de T, respectivamente, $Z = T \times I^m$ e $\mathbb{I}$ el conjunto de los números irracionales en $[0, 1]$. Para cada $x \in \mathbb{I}$, hagamos $Y_x = ab \times \{x\} \times I^{m-1}$, $v_x = (v, x, 0, \ldots, 0) \in Z$, $c_x = (c, x, 0, \ldots, 0)$ y A_x el segmento de línea recta en Z que une v_x y c_x.

Así que, Y_x es una m-celda, A_x es un arco, $A_x \cap Y_x = \{v_x\}$ y v_x es, tanto un punto en el interior relativo de Y_x, como un punto extremo de A_x. Por lo tanto $\{Y_x \cup A_x \colon x \in \mathbb{I}\}$ es una familia no numerable de T_m-conjuntos en Z. No es dificil ver que, además, sus elementos son ajenos dos a dos. $\square$

Del Teorema 3.30 y el Lema 3.31 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.32. *Si X es una continuo que contiene un triodo simple, entonces $X \times I^m$ no se puede encajar en I^{m+1}.*

Lema 3.33. *Sean $X \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{N}$ y $Z = X \times I^m$. Si $h \colon Z \to Z$ es un homeomorfismo, entonces $h(R(X) \times I^m) = R(X) \times I^m$; ademas, la imagen* *de una componente interna (externa) es nuevamente una componente interna (externa).*

Demostración. Sean $(x, y) \in Z$ y $k = \mathrm{ord}_X(x)$. Veamos como son las vecindades "pequeñas" de (x, y). No es difícil ver que, si $k \leq 2$, (x, y) tiene una base de vecindades homeomorfas a I^{m+1} y, si $k \geq 3$, (x, y) tiene una base de vecindades homeomorfas a $F_k \times I^m$.

Supongamos que $(x, y) \in R(X) \times I$. Ya que $k \geq 3$, (x, y) tiene una base de vecindades homeomorfas a $F_k \times I^m$. Hagamos $(a, b) = h\big((x, y)\big)$. Luego, (a, b) también tiene una base de vecindades homeomorfas a $F_k \times I^m$. Notemos que, si $(a, b) \notin R(X) \times I^m$, $\mathrm{ord}_X(a) \leq 2$ y así, (a, b) tiene una base de vecindades homeomorfas a I^{m+1}. Esto es una contradicción pues, $F_k \times I^m$ no se puede encajar en I^{m+1} (Corolario 3.32). En consecuencia, $h\big((x, y)\big) \in R(X) \times I^m$. Esto implica que, $h(R(X) \times I^m) \subset R(X) \times I^m$. Aplicando este razonamiento a h^{-1}, obtenemos que $h^{-1}(R(X) \times I^m) \subset R(X) \times I^m$. Luego:

$$h(R(X) \times I^m) = R(X) \times I^m.$$

Así, la imagen de una componente de $Z - \big(R(X) \times I\big)$ es otra componente de $Z - \big(R(X) \times I\big)$; además, como las componentes internas no son homeomorfas a las componentes externas, se cumple el lema. $\square$

Para facilitar la demostración de los siguientes resultados introducimos la siguiente notación. Si $X \in \mathcal{F}$ y $Z = X \times I^m$, hacemos:

$$\delta(Z) = \{(x, y) \in Z \colon x \in E(X) \text{ o bien } y \in (I^m - (0, 1)^m)\}.$$

Observación 3.34. *Del Teorema 3.29 y el Lema 3.33, se infiere que, si h es un homeomorfismo de Z en sí mismo, entonces $h\big(\delta(Z)\big) = \delta(Z)$.*

Teorema 3.35. *Sean $X \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{N}$ y $Z = X \times I^m$. Si $h \colon Z \to Z$ es un homeomorfismo, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Para cada $x \in R(X)$, existe $a_x \in R(X)$ tal que $h(\{x\} \times I^m) = \{a_x\} \times I^m$;*

2) *existe $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que, para cada $x \in R(X)$, $g(x) = a_x$, donde a_x es como en 1) y, para cada arco interno (externo) x_1x_2, existe un arco interno (externo) y_1y_2, tal que $g(x_1) = y_1$, $g(x_2) = y_2$ y $h(x_1x_2 \times I^m) = y_1y_2 \times I^m$.*

Demostración. Observemos que si X es un arco, se satisface trivialmente el teorema. Supongamos que X no es un arco. Para probar 1), tomemos $x \in R(X)$. Por el Lema 3.33, $h(\{x\}\times I^m)$ es un subconjunto de $R(X)\times I^m$ y, como $h(\{x\} \times I^m)$ es conexo, existe $a_x \in R(X)$ tal que $h(\{x\} \times I^m) \subset \{a_x\} \times I^m$. Es fácil ver que $\{x\} \times I^m$ desconecta a Z, esto es, $Z - \big(\{x\} \times I^m\big)$ no es conexo. Ya que todo subconjunto propio de $\{a_x\} \times I^m$ no desconecta a X, sucede que $h(\{x\} \times I) = \{a_x\} \times I$. Esto prueba 1).

Ahora probemos 2). Sea x_1x_2 un arco interno o externo. El Lema 3.33 dice que la imagen de una componente interna (externa) es, nuevamente, una componente interna (externa). Luego, existe un arco y_1y_2 interno o externo tal que $h\big((x_1x_2)\times I^m\big) = (y_1y_2)\times I^m$ o bien $h\big([x_1x_2)\times I^m\big) = [y_1y_2)\times I^m$. En cualquier caso, tomando cerradura en ambos lados de la igualdad tenemos que:

$$h\big(x_1x_2 \times I^m\big) = y_1y_2 \times I^m.$$

Primero, definamos g en los arcos internos de X. Para cada $x \in R(X)$, hacemos $g(x) = a_x$, donde a_x es el punto encontrado en 1) y, para cada arco interno x_1x_2, definimos $g(x_1x_2) = a_{x_1}a_{x_2}$ de manera que $g|_{x_1x_2}$ es un homeomorfismo. Así, definimos la función en los extremos de los arcos internos y la extendimos a cada arco interno.

Ahora definamos g en los arcos externos. Si xx_1 es un arco externo, con $x \in E(X)$ y $x_1 \in R(X)$, por el Lema 3.33, se cumple que $h(xx_1 \times I)$ es una componente externa. Como $h(\{x_1\} \times I^m) = a_{x_1} \times I^m$ y $a_{x_1} \in R(X)$, existe $y \in E(X)$ tal que $h(xx_1 \times I^m) = ya_{x_1} \times I^m$. Definamos en este caso $g(x) = y$ y observemos, por la primera parte de la defición de esta función, que $g(x_1) = a_{x_1}$. Entonces, hemos definido g en los extremos de los arcos externos. Por último, hagamos $g(xx_1) = ya_{x_1}$ de manera que $g|_{xx_1}$ es un homeomorfismo.

Como X no es un arco, por el Lema 3.1, X es unión de sus arcos internos y externos. Luego, hemos definido g en X. Notemos que, para cada arco interno o externo x_1x_2, se cumple que $g|_{x_1x_2}$ es un homeomorfismo y, si x_2x_3 es otro arco interno o externo, entonces $\{x_2\} = x_1x_2 \cap x_2x_3$ y $g|_{x_1x_2}(x_2) = a_{x_2} = g|_{x_2x_3}$. Es decir, g está bien definida. Además:

$$\{xy\colon xy \text{ es un arco interno o externo }\}$$

es una familia localmente finita que cubre a X. Así, por [26, Teorema 9.4, pág. 83], $g\colon X \to X$ es un homeomorfismo. Esto prueba 2). $\square$

En [28, Lema 1, pág. 880] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 3.36. *Si M es una variedad con frontera B, α es un arco en B, u y v son los puntos finales de α, y W es un conjunto abierto de M que contiene a α, entonces existe un homeomorfismo $\psi\colon M \to M$ tal que $\psi(u) = v$ y $\psi(x) = x$, para cada $x \in M - W$.*

Notemos que, si $M = I^m$, entonces su frontera (como variedad) es $B = I^m - (0,1)^m$. Del Teorema 3.36, tomando $W = I^m - A$, donde A es cerrado en I^m, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.37. *Sean $m \in \mathbb{N}$, A un subconjunto cerrado de I^m y $\alpha \subset I^m - A$, un arco en $I^m - (0,1)^m$. Si x y y son los extremos de α, entonces existe un homeomorfismo $h\colon I^m \to I^m$ tal que $h(x) = y$ y $h|_A = 1_A$.*

Concluimos esta sección con el siguiente teorema que proporciona una fórmula para contar las órbitas del producto de una dendrita en $\mathcal{F}$ y una m-celda. Recordemos que denotamos por C_e a la componente externa que está inducida por $e \in E(X)$; es decir, $C_e = [ev) \times I^m$, donde ev es el único arco externo que tiene a e.

Teorema 3.38. *Sean $X \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{N}$ y $Z = X \times I^m$. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $(x,y) \in \Big[\big(R(X) \cup OI(X)\big) \times I^m\Big] \bigcup \Big[OE(X) \times (0,1)^m\Big]$, entonces $\mathrm{Orb}_Z\big((x,y)\big) = \mathrm{Orb}_X(x) \times \mathrm{Orb}_{I^m}(y)$;*

2) *Z tiene exactamente $\eta_X + \eta_{RI(X)} + \eta_{OI(X)}$ órbitas; además, si X no es un arco, entonces $\eta_Z = 2(\eta_{RI(X)} + 2\eta_{RE(X)} + \eta_{OI(X)})$.*

Demostración. Sea $(x,y) \in \Big[\big(R(X) \cup OI(X)\big) \times I^m\Big] \bigcup \Big[OE(X) \times (0,1)^m\Big]$. Veamos que $\mathrm{Orb}_Z\big((x,y)\big) \subset \mathrm{Orb}_X(x) \times \mathrm{Orb}_{I^m}(y)$. Sea $(a,b) \in \mathrm{Orb}_Z\big((x,y)\big)$. Entonces, existe un homeomorfismo $h\colon Z \to Z$ tal que:

$$h\big((x,y)\big) = (a,b).$$

Por el Teorema 3.1, podemos tomar un arco interno o externo x_1x_2 tal que:

$$x \in x_1x_2.$$

Luego, por la parte 2) del Teorema 3.35, existen un homeomorfismo $g\colon X \to X$ y un arco a_1a_2 del mismo tipo que x_1x_2 (interno o externo) tales que:

i) $h(x_1x_2 \times I^m) = a_1a_2 \times I^m$;

ii) $g(x_1x_2) = a_1a_2$;

iii) para cada $v \in R(X)$, se cumple que $g(v) = a_v$, donde a_v es el punto de $R(X)$ tal que $h(\{v\} \times I^m) = \{a_v\} \times I^m$.

Como h es un homeomorfismo y $x_1x_2 \times I^m$ es homeomorfo a I^{m+1}, por el Teorema 3.29, se cumple lo siguiente:

$$h\big((x_1x_2) \times (0,1)^m\big) = (a_1a_2) \times (0,1)^m. \tag{3.2.6}$$

Probaremos la siguiente afirmación:

a) Si $(x,y) \in O(X) \times (0,1)^m$, entonces $(a,b) \in \mathrm{Orb}_X(x) \times \mathrm{Orb}_{I^m}(y)$.

Supongamos que $(x,y) \in O(X) \times (0,1)^m$. Notemos que $(x,y) \in (x_1x_2) \times (0,1)^m$ y, por (3.2.6), $(a,b) = h((x,y)) \in (a_1a_2)\times(0,1)^m$. Luego, $a \in (a_1a_2)$ y, por ii), $(a_1a_2) = (g(x_1)g(x_2))$, con lo que $a \in (g(x_1)g(x_2))$. Ya que x_1x_2 y a_1a_2 son arcos libres, por la parte 3) del Teorema 3.6, se cumple que $a \in \mathrm{Orb}_X(x)$. Como también ocurre que, $y, b \in (0,1)^m$, esto prueba a). Ahora probemos la siguiente afirmación:

b) Si $x \in R(X) \cup OI(X)$, entonces $(a,b) \in \mathrm{Orb}_X(x) \times \mathrm{Orb}_{I^m}(y)$.

Primero, supongamos que $x \in R(X)$. Por iii), se $h(\{x\}) = \{a_x\} \times I^m$. Además, ya que x es un elemento del arco libre x_1x_2, $x \in \{x_1, x_2\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x = x_1$. Como $(a,b) = h\big((x,y)\big) \in \{a_x\}\times I^m$, $a = a_x$ y, nuevamente por iii), $g(x) = a_x = a$. En consecuencia:

$$a \in \mathrm{Orb}_X(x).$$

Observemos que, $h|_{\{x\}\times I^m}$ es un homeomorfismo sobre $\{a_x\} \times I^m$, por lo que $b \in (0,1)^m$ si y sólo si $y \in (0,1)^m$. Es decir, $y, b \in (0,1)^m$ o bien $y, b \in I^m - (0,1)^m$. Por lo tanto, $b \in \mathrm{Orb}_{I^m}(y)$ y, en este caso, se cumple b).

Ahora, supongamos que $x \in OI(X)$. Luego, x_1x_2 es el único arco interno que tiene a x. Aplicando iii), obtenemos que $g(x_1) = a_{x_1}$, $g(x_2) = a_{x_2}$ y $g(x_1x_2) = a_{x_1}a_{x_2}$. De ii) se sigue que:

$$a_1a_2 = g(x_1x_2) = a_{x_1}a_{x_2}.$$

Queremos ver que $a \in (a_1a_2)$. Notemos que:

$$(a,b) = h(x,y) \in h\big((x_1x_2) \times I^m\big) = a_1a_2 \times I^m = a_{x_1}a_{x_2} \times I^m.$$

Sin embargo, lo que deseamos probar no es consecuencia de ii), pues, aunque $g(x) \in g(x_1x_2) = (a_1a_2)$, no sabemos si $g(x) = a$. Si $a = a_{x_1} \in R(X)$, por iii), tenemos que:

$$\{x_1\} \times I^m = h^{-1}(\{a_{x_1}\} \times I^m) = h^{-1}(\{a_x\} \times I^m) = \{x\} \times I^m,$$

con lo que $x = x_1$. En consecuencia, $a \neq a_{x_1}$ y, similarmente, $a \neq a_{x_2}$. Por consiguiente, $a \in a_{x_1}a_{x_2} - \{a_{x_1}, a_{x_2}\} = (a_{x_1}a_{x_2}) = (a_1a_2)$, como queríamos. Ahora, aplicando la parte 3) del Teorema 3.6, se cumple que:

$$a \in \mathrm{Orb}_X(x).$$

Si $y \in (0,1)^m$, por a), ocurre que también $b \in (0,1)^m$. Como h es un homeomorfismo, por (3.2.6), $h^{-1}\big((a_1a_2) \times (0,1)^m\big) = (x_1x_2) \times (0,1)^m$. Esto indica que, si $b \in (0,1)^m$, entonces $(x,y) = h^{-1}(a,b) \in (x_1,x_2) \times (0,1)^m$. De lo anterior podemos conlcluir que $y \in (0,1)^m$ si y sólo si $b \in (0,1)^m$. Luego:

$$b \in \mathrm{Orb}_{I^m}(y).$$

Esto termina la prueba de b). De a) y b) concluimos que, si $(x,y) \in (R(X) \cup OI(X)) \times I^m \cup (OE(X) \times (0,1)^m)$, entonces $(\mathrm{Orb}_Z\big((x,y)\big) \in \mathrm{Orb}_X(x) \times \mathrm{Orb}_{I^m}(y)$. La otra contención está dada por la Proposición 3.26, lo que muestra 1).

El Teorema 3.29 indica que I^m tiene exactamente dos órbitas. Ya que el número de órbitas de X contenidas en $OE(X)$, $OI(X)$ y $R(X)$ es $\eta_{OE(X)}$, $\eta_{OI(X)}$ y $\eta_{R(X)}$, respectivamente, por 1), se cumple la siguiente afirmación:

c) $OE \times (0,1)^m$, $R(X) \times I^m$ y $OI(X) \times I^m$ son unión de exactamente $\eta_{OE(X)}$, $2\eta_{R(X)}$ y $2\eta_{OI(X)}$ órbitas de Z, respectivamente.

Para ver 2) notemos que, si $R(X) = \emptyset$, entonces X es un arco y $\eta_{R(X)} = 0 = \eta_{OI(X)}$; además, en este caso, Z es una $m+1$ celda, la cual es $\frac{1}{2}$-homogénea y, así, se cumple la primera parte de 2). Supongamos entonces que $R(X) \neq \emptyset$ o, de manera equivalente, que X no es un arco. Primero probaremos lo siguiente:

d) Si $e \in E(X)$ y $x \in C_e \cap \delta(Z)$, entonces $\mathrm{Orb}_Z(x) = \bigcup\{C_d \cap \delta(Z) \colon d \in \mathrm{Orb}_X(e)\}$.

Sean $e \in E(X)$ y $x \in C_e \cap \delta(Z)$. Tomemos $y \in \mathrm{Orb}_Z(x)$. Entonces, existe un homeomorfismo h, de Z en Z, tal que $h(x) = y$. Por el Lema 3.33, la imagen de la componente externa C_e, es otra componente externa; es decir, existe $d \in E(X)$ tal que $h(C_e) = C_d$. Por la parte 2) del Teorema 3.35, podemos tomar un homeomorfismo $g \colon X \to X$ tal que, $g(e) = d$. Como $h(\delta(Z)) = \delta(Z)$ (Observación 3.34), $y \in \delta(Z) \cap C_d$ y $d \in \mathrm{Orb}_X(e)$. Esto prueba la primera contención.

Ahora supongamos que $d \in \mathrm{Orb}_X(e)$ y que $y \in C_d \cap \delta(Z)$. Luego, existe un homeomorfismo $h \colon Z \to Z$ tal que $h(e) = d$ y, en consecuencia, $h(C_e) = C_d$. Así, $\{h(x), y\} \subset C_d \cap \delta(Z)$. Sea $c \in X$ tal que dc es un arco externo. Entonces $\mathrm{Cl}_Z(C_d) = dc \times I^m$. Notemos que $h(x), y \notin \{c\} \times I$ y, por el Teorema 3.36, existe un homeomorfismo $f \colon \mathrm{Cl}_Z(C_d) \to \mathrm{Cl}_Z(C_d)$ tal que:

$$f(h(x)) = y \quad \text{y} \quad f|_{\{c\} \times I^m} = 1_{\{c\} \times I^m}.$$

Ya que $Z - C_d$ y $\mathrm{Cl}_Z(C_d)$ son dos conjuntos cerrados de Z cuya intersección es $\{c\} \times I^m$ y f es la identidad en dicho conjunto, podemos extender f a un homeomorfismo $F \colon X \to X$, tomando $F|_{Z-Cd} = 1|_{Z-Cd}$. Entonces, F y h son homeomorfismos de Z en sí mismo tales que $F(h(x)) = y$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{Orb}_Z(x)$. Esto concluye la prueba de d).

Hagamos $\delta E = \bigcup\{C_e \cap \delta(Z) \colon e \in E(X)\}$. Como $E(X)$ es la unión de las órbitas de sus elementos,

$$\delta E = \bigcup_{e \in E(X)} \{C_d \cap \delta(Z) \colon d \in \mathrm{Orb}_X(e)\}.$$

Luego, por d), obtenemos lo siguiente:

e) δE es unión de exactamente $\eta_{E(X)}$ órbitas de Z.

No es difícil ver que Z es unión de los conjuntos ajenos dos a dos $\big(R(X) \cup OI(X) \times I^m\big)$, $\big(OE(X) \times (0,1)\big)$ y δE. Aplicando c) y e), obtenemos que;

$$\eta_Z = 2(\eta_{R(X)} + \eta_{OI(X)}) + \eta_{OE(X)} + \eta_{E(X)}.$$

Utilizando este hecho, así como el incisos 1) del Teorema 3.10, tenemos las siguientes igualdades:

$$\eta_Z = 2(\eta_{R(X)} + \eta_{OI(X)}) + \eta_{OE(X)} + \eta_{E(X)} =$$
$$2(\eta_{RI(X)} + \eta_{RE(X)} + \eta_{OI(X)}) + \eta_{RE(X)} + \eta_{RE(X)} = 2\big(\eta_{RI(X)} + 2\eta_{RE(X)} + \eta_{OI(X)}\big).$$

y también:

$$\eta_Z = 2(\eta_{R(X)} + \eta_{OI(X)}) + \eta_{OE(X)} + \eta_{E(X)} = 2\eta_{R(X)} + 2\eta_{OI(X)} + \eta_{OE(X)} + \eta_{E(X)}$$
$$= \eta_{R(X)} + \eta_{OI(X)} + \big(\eta_{R(X)} + \eta_{OI(X)} + \eta_{OE(X)} + \eta_{E(X)}\big) = \eta_{R(X)} + \eta_{OI(X)} + \eta_X.$$

Esto termina la prueba de 2). □

3.3. Dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas

Sea X una dendrita. La propiedad 8) del Teorema 1.23 dice que toda dendrita que no es un arco, tiene al menos 3 órbitas y, en una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea, $E(X)$, $R(X)$ y $O(X)$ son las tres órbitas de X.

Lema 3.39. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea. Si X contiene un arco libre, entonces $O(X)$ es abierto.*

Demostración. Sea ab un arco libre en X, por definición de arco libre y el Teorema 1.35, $(ab) \subset O(X)$ y (ab) es abierto en X. Luego, $\mathrm{Int}_X(O(X)) \neq \emptyset$. Como, además, $O(X)$ es una órbita de X, por la parte 3) del Teorema 1.14, $O(X)$ es abierto. □

El Corolario 3.18 dice que, si $R(X)$ es finito, entonces X es $\frac{1}{3}$-homogénea si y sólo si X es un n-odo o X es la dendrita F_ω. Es decir, se cumple la siguiente observación.

Observación 3.40. *Supongamos que X es una dendrita tal que $R(X)$ es finito. Entonces X es $\frac{1}{3}$-homogénea si y sólo si $|R(X)| = 1$.*

Entonces, para la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas, estamos interesados en estudiar las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas cuyo conjunto de puntos de ramificación es infinito, o de manera equivalente, en las dendritas con más de un punto de ramificación. En adelante todos los resultados se enunciarán para dendritas con estas características.

3.3.1. Conjunto de Puntos Extremos Cerrado

Empezamos estudiando el caso cuando el conjunto de puntos extremos es cerrado. Sea $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, se sabe que la clase de las dendritas cuyo conjunto de puntos extremos es cerrado y tales que sus puntos tienen orden a lo más n, tiene una dendrita universal ([5, Teorema 4.2, pág. 8]); es decir, existe una dendrita que contiene una copia de cada dendrita de tal clase. Esta dendrita es conocida como "la Dendrita de Gehman de orden n" y la denotaremos por G^n. Para describir la construcción de esta dendrita recordamos, en el Teorema 3.41, una caracterización muy conocida del conjunto de Cantor , la cual se encuentra probada, por ejemplo, en [47, Teorema 7.14, pág. 109].

Teorema 3.41. *Un espacio métrico Y es homeomorfo al conjunto de Cantor si y sólo si Y es compacto, totalmente disconexo y perfecto.*

Diremos que un espacio X es ***un conjunto de Cantor*** si X es homeomorfo al conjunto de Cantor estándar, es decir, al que se construye dividiendo el intervalo cerrado $[0, 1]$ en tres partes iguales, y eliminando el "tercio medio".

A continuación construiremos la familia de las dendritas de Gehman, dicha construcción aparece en [5].

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $k_1, \ldots, k_m \in \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$. Definimos $E^n_{k_1,\ldots,k_m}$ como el conjunto de los números $x \in [0, 1]$ tales que x está escrito en el sistema de numeración en base $2n - 3$; es decir:

$$E^n_{k_1,\ldots,k_m} = \left[\frac{k_1}{2n-3} + \cdots + \frac{k_m}{(2n-3)^m}, \frac{k_1}{2n-3} + \cdots + \frac{k_{m-1}}{(2n-3)^{m-1}} + \frac{k_m + 1}{(2n-3)^m}\right].$$

Si todos los números $k_1, \ldots, k_m$ son pares, entonces $p^n_{k_1,\ldots,k_m}$ denotará el punto en el plano cuya primera coordenada es el punto medio del intervalo

$E^n_{k_1,\ldots,k_m}$ y cuya segunda coordenada es $\frac{1}{2^m}$. Notemos que si $m=0$, entonces $E^n=[0,1]$ y $p^n=(\frac{1}{2},0)$. Denotemos por q al punto $(\frac{1}{2},2)$ y, para cada $m\in\mathbb{N}$:

$$H^n_m = p^n q \cup \bigcup \left\{ p^n_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p^n_{k_1,\ldots,k_m} : k_1,\ldots,k_m \in \{0,2,\ldots,2n-4\} \right\}.$$

Observemos que, para cada $m\in\mathbb{N}$, H^n_m es una dendrita con $E(H^n_m) = \{q\} \cup \left\{p^n_{k_1,\ldots,k_m} \colon k_1,\ldots,k_m \in \{0,2,\ldots,2(n-2)\}\right\}$ y como $H^n_m \subset H^n_{m+1}$, entonces $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} H^n_m$ es conexo. Hagamos:

$$H^n = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H^n_m\right). \tag{3.3.1}$$

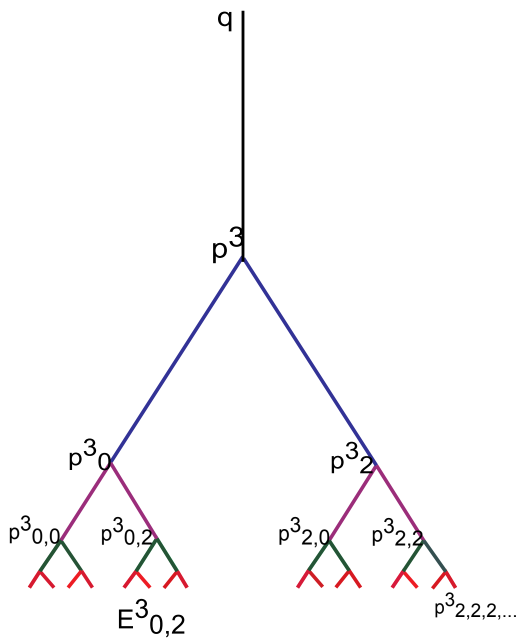


Figura 3.4: H^n

Entonces H^n es una dendrita. Además, para una sucesión $\{k_m\}_m$, de elementos de $\{0,2,\ldots,2n-4\}$, la intersección $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} E^n_{k_1,\ldots,k_m}$ consta de exactamente un punto. Denotemos por $e_{k_1,k_2,\ldots}$ a dicho punto y hagamos $p^n_{k_1,k_2,\ldots} = (e_{k_1,k_2,\ldots},0)\in H^n$. Luego:

$$E(H^n) = \{q\} \cup \left\{p^n_{k_1,k_2,\ldots} : k_i \in \{0,2,\ldots,2n-4\}\right\}$$

Definamos:

$$C^n = \prod_{i=1}^{\infty} \{0, 2, \ldots, 2n-4\}_i. \tag{3.3.2}$$

Supongamos que cada $\{0, \ldots, 2n-4\}$ posee la topología discreta y que C^n posee la topología producto. Por el Teorema 3.41, C^n es homeomorfo al conjunto de Cantor estándar; es decir, al que se construye a partir del intervalo $[0,1]$, dividiendo en tercios y eliminando el interior del tercio medio en cada etapa. Por lo tanto, $E(H^n)$ es un conjunto de Cantor. Finalmente definimos G^n como la unión de dos copias homeomorfas H^n y $(H^n)'$ de H^n con los correspondientes puntos q y q' identificados.

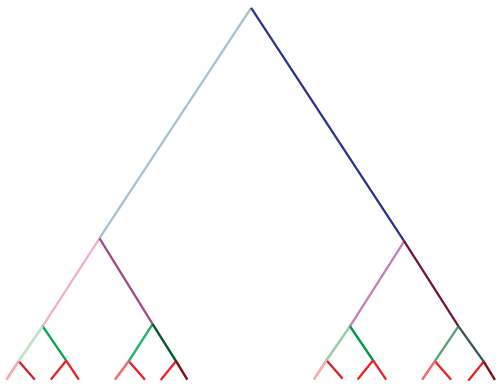


Fig 3.5: Dendrita de Gehman G^3

Notemos que G^n es una dendrita cuyos puntos de ramificación tienen orden n y $E(G^n)$ es homeomorfo al conjunto de Cantor. El siguiente Teorema, cuya prueba aparece en [5, Teorema 4.1, pág. 6], muestra que estas dos propiedades caracterizan a las dendritas de Gehman.

Teorema 3.42. *Sean X una dendrita y $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Entonces X es homeomorfa a G^n si y sólo si $E(X)$ es un conjunto de Cantor y $R(X) = R_n(X)$.*

Nuestro primer objetivo es probar que las dendritas de Gehman son $\frac{1}{3}$-homogéneas. Para ello, utilizaremos el Teorema 3.43. En la prueba dada en [5] del Teorema 3.42, se demuestra, aunque no se enuncia, dicho teorema.

Teorema 3.43. *Sean $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ y X una dendrita tal que $E(X)$ es un conjunto de Cantor y $R(X) = R_n(X)$. Si $a \in O(X)$ y bc es el arco interno que tiene a a, entonces existe un homeomorfismo $h\colon G^n \to X$ tal que:*

1) *$h(q) = a$ y $h(p^n) = b$;*

2) *si B es la componente de $X - \{a\}$ que tiene a b, entonces $h(H^n - \{q\}) = B$.*

Corolario 3.44. *Si $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, entonces $O(G^n)$ y $R(G^n)$ son órbitas de G^n.*

Demostración. Sea $a \in O(G^n)$. Aplicando la parte 1) del Teorema 3.43 a $X = G^n$, obtenemos un homeomorfismo $h\colon G^n \to G^n$ tal que $h(q) = a$. Esto prueba que $a \in \mathrm{Orb}_{G^n}(q)$ y, así, $O(G^n) \subset \mathrm{Orb}_{G^n}(q)$. Sea $b \in R(G^n)$. Es fácil observar, de la construccción de G^n, que b es un punto final de algún arco interno, digamos bc. Tomemos un punto a en (bc). Aplicando el Teorema 3.43 a $X = G^n$, por la parte 2) de dicho teorema, existe un homeomorfismo $g\colon G^n \to G^n$ de manera que $g(p) = a$ y $g(p^n) = b$. Luego, $b \in \mathrm{Orb}_{G^n}(p^n)$. Esto prueba que $R(G^n) \subset \mathrm{Orb}_{G^n}(p^n)$.

Como el orden de un punto es invariante bajo homeomorfismos (partes 1) y 3) del Teorema 1.5), también se obtienen las otras dos contenciones; es decir, $\mathrm{Orb}_{G^n}(q) \subset O(G^n)$ y $\mathrm{Orb}_{G^n}(p^n) \subset R(G^n)$. Esto concluye nuestra prueba. □

Ahora nos interesa probar que $E(G^n)$ es una órbita de G^n. Ya que G^n es la unión de dos copias homeomorfas de H^n y los elementos de $E(H^n)$ están determinados por una sucesión de elementos de $\{0, 2, \ldots, 2n - 4\}$, será de utilidad definir funciones entre los elementos de dichas sucesiones. Para ello, usaremos que $\{0, 2, 4, \ldots, 2n - 4\}$ es un grupo con la operación suma módulo $2(n - 1)$.

Sean $\{r_m\}_m$ y $\{s_m\}_m$ dos sucesiones en $\{0, 2, \ldots, 2(n-2)\}$ y $p^n_{r_1,r_2,\ldots}, p^n_{s_1,s_2,\ldots}$ dos puntos fijos en $E(H^n)$. Como $\{0, 2, \ldots, 2(n - 2)\}$ es un grupo, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $t_m \in \{0, 2, \ldots, 2n - 4\}$ tal que $r_m + t_m = s_m$ (con la suma $\mathrm{mod}\, 2(n - 1)$). Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\sigma_m\colon \{0, 2, \ldots, 2n - 4\} \to \{0, 2, \ldots, 2n - 4\}$ la función definida, para cada $k \in \{0, 2, \ldots, 2n - 4\}$, por:

$$\sigma_m(k) = k + t_m \mod 2(n - 1). \tag{3.3.3}$$

Tomemos $m \in \mathbb{N}$. Veamos que σ_m es biyectiva. Como σ_m está definida en un conjunto finito, bastará probar que σ_m es inyectiva. Supongamos que existen $l, m \in \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$ tales que $\sigma_m(k) = \sigma_m(l)$, $k + t_m = l + t_m \mod 2(n-1)$. Por consiguiente, $k = l \mod 2(n-1)$ y, ya que $k, l \in \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$, entonces $k = l$. Por lo tanto, σ_m es biyectiva.

Notemos que, $\sigma_m(r_m) = s_m$. Tomemos C^n como en (3.3.2). Definamos $\sigma\colon C^n \to C^n$, para cada $(k_m)_m \in C^n = \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0, 2, \ldots, 2n-4\}_i$, por:

$$\sigma\big((k_m)_m\big) = \big(\sigma_m(k_m)\big)_m. \tag{3.3.4}$$

Como cada σ_m es biyectiva, es fácil ver que σ es también una función biyectiva. Además, $\sigma\big((r_m)_m\big) = \big(\sigma_m(r_m)\big)_m = (s_m)_m$. En el siguiente lema utilizaremos las funciones construidas aquí para definir un homeomorfismo en H^n.

Lema 3.45. *Sea $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$. Si $\{r_m\}_m$ y $\{s_m\}_m$ son dos sucesiones de elementos de $\{0, 2, \ldots, 2n-4\}$, entonces existe un homeomorfismo $h\colon H^n \to H^n$ tal que $h(p^n_{r_1,r_2,\ldots}) = p^n_{s_1,s_2,\ldots}$.*

Demostración. Tomemos dos sucesiones $\{r_m\}_m$ y $\{s_m\}_m$ en $\{0, 2, \ldots, 2n-4\}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, $t_m \in \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$ tal que:

$$r_m + t_m = s_m,$$

$\sigma_m\colon \{0, 2, \ldots, 2n-4\} \to \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$, como en (3.3.3) y $\sigma\colon C^n \to C^n$ como en (3.3.4). Ya probamos que cada σ_m y σ son biyectivas.

Definiremos, por partes, el homeomorfismo h. Empezamos definiendo h en $H^n_1 \subset R(H^n) \cup O(H^n)$. Hagamos $h|_{qp^n} = 1_{qp^n}$ y, para cada $k \in \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$, $h(p^n p^n_k) = p^n p^n_{\sigma_1(k)}$ de manera que $h|_{p^n p^n_k}$ es un homeomorfismo lineal y $h(p^n_k) = p^n_{\sigma_1(k)}$. Notemos que $h|_{H^n_1}$ es un homeomorfismo de H^n_1 en sí mismo tal que $h(p^n_{r_1}) = p^n_{s_1}$. Ahora, definamos h en lo que resta de $R(H^n) \cup O(H^n)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $k_1, \ldots, k_m \in \{0, 2, \ldots, 2n-4\}$, definimos:

$$h(p^n_{k_1,\ldots,k_m}) = p^n_{\sigma_1(k_1),\ldots,\sigma_m(k_m)}.$$

y mandamos el arco $p^n_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p^n_{k_1,\ldots,k_m}$ al arco $h(p^n_{k_1,\ldots,k_{m-1}}) h(p^n_{k_1,\ldots,k_m})$ con un homeomorfismo; es decir, hacemos $h|_{p^n_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p^n_{k_1,\ldots,k_m}}$ un homeomorfismo entre los arcos $p^n_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p^n_{k_1,\ldots,k_m}$ y $p^n_{\sigma_1(k_1),\ldots,\sigma_{m-1}(k_{m-1})} p^n_{\sigma_1(k_1),\ldots,\sigma_m(k_m)}$. Hasta el momento hemos definido h, de manera continua, en $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m^n$. Además, como para cada $m \in \mathbb{N}$, σ_m es biyectiva y $h|_{p^n_{k_1,\ldots,k_{m-1}}p^n_{k_1,\ldots,k_m}}$ es un homeomorfismo, $h|_{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m^n}$ es un homeomorfismo de $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m^n$ en sí mismo tal que $h(p^n_{r_1,r_2,\ldots,r_m}) = p^n_{s_1,s_2,\ldots,s_m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Definamos h en $E(H^n)$. Para cada $\{k_m\}_m \in C^n$, hacemos:

$$h(p^n_{k_1,k_2,\ldots}) = p^n_{\sigma(\{k_m\}_m)} = p^n_{\sigma_1(k_1),\sigma_2(k_2),\ldots}.$$

Queremos ver que $h\colon H^n \to H^n$ es un homeomorfismo. Puesto que σ está bien definida y es biyectiva, $h|_{E(H^n)}$ también está bien definida y es biyectiva. Veamos que h es continua en cada punto de $E(H^n)$. Sea $\{k_m\}_m$ una sucesión de elementos de $\{0, 2, \ldots, 2n-4\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomamos la componente $C(k_1, \ldots, k_m)$ de $H^n - \{p^n_{k_1,\ldots,k_m}\}$ que tiene a $p^n_{k_1,\ldots,k_{m+1}}$. Como H^n es localmente conexo, $C(k_1, \ldots, k_m)$ es abierto en H^n; además, por la parte 1) del Teorema 1.10, $\mathrm{Cl}_{H^n}(C(k_1, \ldots, k_m)) = C(k_1, \ldots, k_m) \cup \{p^n_{k_1,\ldots,k_m}\}$.

Por el Teorema 1.30, $\{C(k_1, \ldots, k_m)\}_m$ es una sucesión nula. Así que, $\{\mathrm{Cl}_{H^n}(C(k_1, \ldots, k_m))\}_m$ es también una sucesión nula. Como $\{p^n_{k_1,\ldots,k_m}\}_m$ converge al punto $p^n_{k_1,k_2,\ldots}$, y cada $p^n_{k_1,\ldots,k_m} \in \mathrm{Cl}_{H^n}(C(k_1, \ldots, k_m))$, obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cl}_{H^n}(C(k_1, \ldots, k_m)) = \{p^n_{k_1,k_2,\ldots}\}.$$

Entonces, para cada abierto U de X tal que $p^n_{k_1,k_2,\ldots} \in U$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m > M$, $C(k_1, \ldots, k_m) \subset U$. Esto significa que los conjuntos $C(k_1, \ldots, k_m)$ forman una base local del punto $p^n_{k_1,k_2,\ldots}$.

Denotemos por $D(k_1, \ldots, k_m)$ a la componente de $\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m^n\right) - \{p_{k_1,\ldots,k_m}\}$ que tiene al punto $p_{k_1,\ldots,k_{m+1}}$. Notemos que $D(k_1, \ldots, k_m) = C(k_1, \ldots, k_m) \cap \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m^n\right)$. De lo anterior y del hecho de que $X = \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} H_m^n\right) \cup E(H^n)$, obtenemos las siguientes igualdades:

$$C(k_1,\ldots,k_m) = \left[C(k_1,\ldots,k_m) \cap \left(\underset{m\in\mathbb{N}}{\cup} H_m^n\right)\right] \cup \left(C(k_1,\ldots,k_m) \cap E(H^n)\right)$$
$$= D(k_1,\ldots,k_m) \cup \left(\bigcup \left\{p^n_{l_1,l_2,l_3,\ldots} \in E(H^n) \colon l_i = k_i, \text{ para cada } i \leq m\right\}\right). \tag{3.3.5}$$

Como $h|_{\bigcup\limits_m H_m^n}$ es un homeomorfismo, $h^{-1}\left(D(k_1,\ldots,k_m)\right)$ es la componente de $\left(\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} H_m^n\right) - \{h^{-1}(p^n_{k_1,\ldots,k_m})\} = \left(\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} H_m^n\right) - \{p^n_{\sigma_1^{-1}(k_1),\ldots,\sigma_m^{-1}(k_m)}\}$ que tiene al punto $p^n_{\sigma_1^{-1}(k_1),\ldots,\sigma_{m+1}^{-1}(k_{m+1})}$. Es decir:

$$h^{-1}\left(D(k_1,\ldots,k_m)\right) = D\left(\sigma_1^{-1}(k_1),\ldots,\sigma_m^{-1}(k_m)\right).$$

Aplicando esto y (3.3.5), obtenemos:

$$\begin{aligned}
&h^{-1}\left(C(k_1,\ldots,k_m)\right)\\
&= h^{-1}\left(\left(\bigcup\{p^n_{l_1,l_2,\ldots} \in E(H^n) \colon l_i = k_i, \text{ para } i \leq m\}\right) \cup D(k_1,\ldots,k_m)\right)\\
&= \left(\bigcup\{p^n_{\sigma_1^{-1}(l_1),\sigma_2^{-1}(l_2),\ldots} \in E(H^n) \colon l_i = k_i, \text{ para } i \leq m\}\right) \cup\\
&\qquad D\left(\sigma_1^{-1}(k_1),\ldots,\sigma_m^{-1}(k_m)\right) = C\left(\sigma_1^{-1}(k_1),\ldots,\sigma_m^{-1}(k_m)\right).
\end{aligned}$$

Lo anterior indica que, la preimagen de un elemento de una base local del punto $p^n_{k_1,k_2,\ldots}$, es un abierto de H^n. Por lo tanto, h es continua en cada punto de $E(H^n)$. Entonces, h es un homeomorfismo de H^n en H^n tal que:

$$h(p^n_{r_1,r_2,\ldots}) = p^n_{\sigma_1(r_1),\sigma_2(r_2),\ldots} = p^n_{s_1,s_2,s_3,\ldots}.$$

□

Teorema 3.46. *Para cada $n \in \mathbb{N} - \{1,2\}$, la dendrita de Gehman G^n es $\frac{1}{3}$-homogénea.*

Demostración. Por el Corolario 3.44, sólo falta probar que $E(G^n)$ es una órbita de G^n. Sean x y y dos puntos en $E(G^n)$. Como G^n es la unión de dos copias homeomorfas, H^n y $(H^n)'$, de H^n con los correspondientes puntos, q y q' identificados, existen dos homeomorfismo f y g de G^n en G^n tales que

$f(x), g(y) \in H^n$. Ahora, por el Lema 3.45, podemos tomar otro homeomorfismo $h\colon H^n \to H^n$ tal que $h(g(y)) = f(x)$. Definamos $\gamma\colon G^n \to G^n$, para cada $z \in G^n$, por:

$$\gamma(z) =: \begin{cases} h(z), & \text{si } z \in H^n; \\ z, & \text{si } z \in (H^n)'. \end{cases}$$

Luego, γ es un homeomorfismo y, $f^{-1} \circ \gamma \circ g$ es un homeomorfismo de G^n en sí mismo tal que:

$$f^{-1} \circ \gamma \circ g(y) = f^{-1}\Big(h\left(g(y)\right)\Big) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Por lo tanto, $E(G^n)$ es una órbita de G^n. $\square$

Observemos que G^n es una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea con conjunto de puntos extremos cerrado. En el siguiente resultado probaremos que G^n es la única dendrita, con más de un punto de ramificación, con estas características.

Teorema 3.47. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $|R(X)| > 1$. Si $E(X)$ es cerrado en X, entonces X es una dendrita de Gehman G^n, para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$.*

Demostración. Sean $a \in R(X)$ y $n = \operatorname{ord}_X(a)$. Entonces $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$ y, como $R(X)$ es una órbita, $R(X) = R_n(X)$. Supongamos que $n = \omega$. Entonces, las componentes de $X - \{a\}$ forman una sucesión nula $\{A_m\}_m$ (Teorema 1.30). Además, los dos incisos del Teorema 1.28 indican lo siguiente:

$$\text{Para cada } m \in \mathbb{N}, \text{ existe } a_m \neq a \text{ tal que } a_m \in E\big(\mathrm{Cl}_X(A_m)\big) \text{ y,}$$
$$\mathrm{Cl}_X(A_m) \to \{a\}.$$

Como consecuencia de conexidad local de X, cada A_m es abierto de X. Por el Teorema 1.9, cada a_m es un elemento de $E(X)$ y, ya que $\{\mathrm{Cl}_X(A_m)\}_m$ converge a $\{a\}$, $\{a_m\}_m$ converge a a (parte 2) del Teorema 1.13). Debido a que $E(X)$ es cerrado, $a \in E(X)$. Esto es una contradcción, pues $a \in R(X)$. Por lo tanto, $n \neq \omega$, por lo que:

$$n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}.$$

De acuerdo con el Teorema 3.42, para probar que X es una dendrita de Gehman, sólo resta verificar que $E(X)$ es un conjunto de Cantor. Veamos que cada $x \in E(X)$ es un punto de acumulación de $E(X)$.

De la Obsevación 3.40, $R(X)$ es infinito, por lo que $E(X)$ es infinito ([47, Teorema 9.28, pág.154]). Tomemos una sucesión $\{x_m\}_m$ de puntos de $E(X)$, distintos dos a dos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\{x_m\}_m$ es convergente y llamemos x a su límite. Como $E(X)$ es cerrado, $x \in E(X)$. Luego, x es un punto de acumulación de $E(X)$, que pertenece a $E(X)$. Ya que $E(X)$ es una órbita, $E(X)$ coincide con el conjunto de sus puntos de acumulación. Como, además, $E(X)$ es cerrado, es compacto y, por la parte 1) del Teorema 1.23, también es totalmente disconexo. Del Teorema 3.41, tenemos que $E(X)$ es un conjunto de Cantor, por lo que X es homeomorfo a la dendrita de Gehman G^n. □

Dado que las dendritas de Gehman son $\frac{1}{3}$-homogéneas (Teorema 3.46) y su conjunto de puntos extremos es cerrado, del Teorema 3.47, obtenemos la siguiente caracterización de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas cuyo conjunto de puntos extremos cerrado y con más de un punto de ramificación.

Teorema 3.48. *Sea X una dendrita tal que $E(X)$ es cerrado y $|R(X)| > 1$. Entonces X es $\frac{1}{3}$- homogénea si y sólo si existe $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ tal que X es homeomorfo a la dendrita de Gehman G^n.*

3.3.2. Conjunto de Puntos Extremos no Cerrado

En esta subsección estudiaremos las dendritas X tales que $|R(X)| > 1$ y que $E(X)$ no es cerrado. Para ello, será de gran utilidad analizar los arcos libres de X, así como la descripción de los conjuntos $\mathrm{Cl}_X(R(X))$ y $\mathrm{Cl}_X(E(X))$. Los primeros resultados de esta parte están dedicados a dicha tarea.

Lema 3.49. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $|R(X)| > 1$. Entonces todo arco libre en X está contenido en un arco interno.*

Demostración. Sea ab un arco libre en X. Por la parte 2) del Teorema 1.38, ab está contenido en un arco libre maximal xy. Además, por el Lema 3.39, $O(X)$ es abierto y, por la parte 3) del Teorema 1.38, xy es un arco interno o es un arco externo. Supongamos que xy es un arco externo, con $x \in R(X)$ y $y \in E(X)$. Ya que $(xy) \subset O(X)$ y éste conjunto es una órbita de X, entonces:

Todo punto ordinario de X pertence a algún arco libre de X.

Tomemos $z \in R(X) - \{x\}$. Como $R(X)$ es a lo más numerable (parte 2) del Teorema 1.23), podemos elegir $d \in zx \cap O(X)$. Luego, existe un arco libre uv que contiene a d. De la parte 3) del Teorema 1.36, se sigue que uv está contenido en zx. Aplicando nuevamente la parte 3) del Teorema 1.38, obtenemos un arco interno o externo que contiene a uv. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que uv interno o externo. Como $uv \subset zx$ y, z y x con puntos de ramificación de X, no puede ocurrir que u o v sean puntos extremos de X (Teorema 1.22). Por lo tanto, uv es un arco interno.

Como la imagen bajo homeomorfismos de un arco interno (externo) es un arco interno (externo), los puntos de (uv) y (xy) están en $O(X)$, pero en distintas órbitas de X. Esto es una contradicción, que viene de suponer que xy es externo. Por lo tanto, xy es un arco interno que contiene a ab. $\square$

Teorema 3.50. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea con $|R(X)| > 1$. Si $E(X)$ no es cerrado, entonces $R(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ y $E(X) \subset \mathrm{Cl}_X(R(X))$.*

Demostración. Como $E(X)$ no es cerrado, entonces:

$$\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \cap \big(R(X) \cup O(X)\big) \neq \emptyset.$$

Supongamos primero que $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \cap R(X) \neq \emptyset$. Como $R(X)$ y $E(X)$ son órbitas de X, por la parte 2) del Teorema 1.14, $R(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$.

Ahora supongamos que $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \cap O(X) \neq \emptyset$. Nuevamente, por la parte 3) del Teorema 1.14, $O(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$. Como $O(X)$ es denso en X (inciso 3) del Teorema 1.23), $X = \mathrm{Cl}_X(O(X)) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$. Así que, también en este caso, $R(X) \subset \mathrm{Cl}_X(E(X)$.

Para la segunda parte, supongamos lo contrario, que existe $x \in E(X) - \mathrm{Cl}_X(R(X))$. Entonces, existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U \subset X - R(X)$. Como X es localmente conexo, podemos suponer que U es conexo. Tomemos $y \in U$ y notemos que, por la parte 2) del Teorema 1.19, $xy \subset U \subset X - R(X)$. Luego, xy es un arco libre. Por el Lema 3.49, xy está contenido en un arco interno. Esto es claramente una contradicción, pues $x \in E(X)$. Por lo tanto, $E(X) \subset \mathrm{Cl}_X(R(X))$.

$\square$

Corolario 3.51. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $|R(X)| > 1$. Si $E(X)$ no es cerrado, entonces $\mathrm{Cl}_X(R(X)) = \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$.*

Demostración. Por el Teorema 3.50, ocurre que $R(X) \subset \mathrm{Cl}_X(E(X))$ y $E(X) \subset \mathrm{Cl}_X(R(X))$, de donde $\mathrm{Cl}_X(R(X)) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \subset \mathrm{Cl}_X(R(X))$. Por lo tanto, $\mathrm{Cl}_X(R(X)) = \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$. □

Dendritas sin arcos libres

A continuación describiremos una familia de dendritas sin arcos libres que ha sido muy estudiada y que será importante para nuestra clasificación. Para cada $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$, existe una dendrita que contiene una copia de cualquier dendrita cuyos puntos tienen orden a lo más n. Además, resulta que dicha dendrita no tiene arcos libres. Esta dendrita se describe en el teorema siguiente y su demostración puede consultarse en [25, Teorema 6.2, pág. 229].

Teorema 3.52. *Sean $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$, X y Y dos dendritas tales que se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si $a \in R(X) \cup R(Y)$, entonces $\mathrm{ord}_X(a) = n$ o bien $\mathrm{ord}_Y(a) = n$.*

2) *Si $I \subset X$ y $J \subset Y$ son arcos, entonces $R(X) \cap I \neq \emptyset$ y $R(Y) \cap J \neq \emptyset$.*

Entonces X y Y son homeomorfas, más aún, para parejas distintas de puntos $e_1, e_2 \in E(X)$, y $f_1, f_2 \in E(Y)$, se puede definir un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ de manera que $h(e_1) = f_1$ y $h(e_2) = f_2$.

Para cada $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$, denotamos por D_n a una dendrita que cumpla 1) y 2) del Teorema 3.52. Notemos que, el Teorema 3.52 dice que D_n es la única dendrita que no contiene arcos libres y tal que cada punto de ramificación tiene orden n. En [25, Teorema 6.6 y Teorema 6.7, pág. 230] se prueba que D_n es universal en la clase de las dendritas con puntos de orden a lo más n; esto es, cualquier dendrita cuyos puntos tengan orden a lo más n, se puede encajar en D_n. Entonces, D_ω es universal en la clase de las dendritas; es decir, cualquier dendrita se puede encajar en D_ω.

La prueba del siguiente resultado puede consultarse en [18, Teorema 3.13, pág. 464].

Teorema 3.53. *Sea $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Si $x, y \in D_n$, entonces existe un homeomorfismo $h\colon D_n \to D_n$ tal que $h(x) = y$ si y sólo si $\mathrm{ord}_{D_n}(x) = \mathrm{ord}_{D_n}(y)$.*

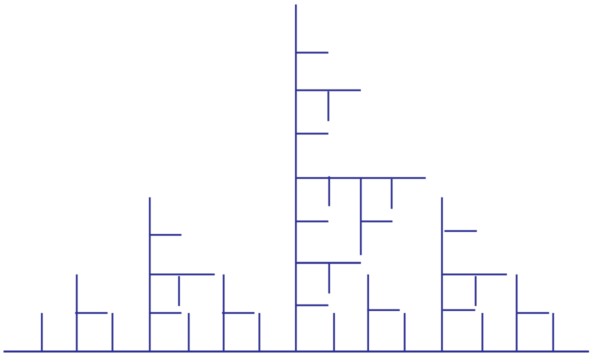


Figura 3.6: Dendrita Universal D_3

Corolario 3.54. *Sea $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$. Entonces la dendrita universal D_n es $\frac{1}{3}$-homogénea.*

El siguiente teorema caracteriza a las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas sin arcos libres.

Teorema 3.55. *Sea X una dendrita sin arcos libres. Entonces X es $\frac{1}{3}$-homogénea si y sólo si existe $n \in \big(\mathbb{N} - \{1, 2\}\big) \cup \{\omega\}$ tal que X es homeomorfa a la dendrita D_n.*

Demostración. Supongamos que X es una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea sin arcos libres. Luego, existe $n \in \{3, 4, \ldots, \omega\}$ tal que $R(X) = R_n(X)$ y, así, X cumple 1) del Teorema 3.52. Ya que X no tiene arcos libres, todo arco en X contiene un punto de ramificación de X. Por consiguiente, X cumple 2) del Teorema 3.52. Por lo tanto, X es homeomorfa a D_n. Como, además, la dendrita D_n es $\frac{1}{3}$-homogénea, se cumple el resultado. $\square$

Dendritas con arcos libres

Ahora construiremos una dendrita P, que tiene arcos libres y cuyos puntos de ramificacíon son de orden ω. Más adelante probaremos que P también es $\frac{1}{3}$-homogénea.

Sean p cualquier punto en el plano $\mathbb{R}^2$ y $\{p_n\}_n$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$ que converge a p, de manera que cualesquiera dos elementos de dicha sucesión y p no son colineales. Definimos $P_1 = \bigcup\{pp_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces P_1 es homeomorfo a F_ω. Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ sea p_{nm} un punto en $\mathbb{R}^2 - \{P_1\}$ tal que la sucesión $\{p_{nm}\}_m$ converge a p_n y, nuevamente, dicha sucesión y p no contiene tres puntos colinales. Observemos que, en cada p_n estamos pegando una copia de F_ω que sólo intersecta a P_1 en p_n. Elijamos dichas copias ajenas dos a dos. Luego, el continuo $P_2 = P_1 \bigcup \{p_n p_{nm} \colon m \in \mathbb{N}\}$ es una dendrita. Siguiendo este proceso, podemos construir una sucesión de dendritas en el plano, $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tales que $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots$ de manera que la cerradura de su unión también es una dendrita. Finalmente definimos:

$$P = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\bigcup \{P_n \colon n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, denotemos por $p_{k_1,\ldots,k_{m-1},k_m}$ al elemento de $E(P_m)$ tal que $p_{k_1,\ldots,k_{m-1}} \in pp_{k_1,\ldots,k_{m-1},k_m}$. Notemos que:

$$R(P) = \left\{p_{k_1,\ldots,k_m} \colon m, k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}\right\} = R_\omega(P) \ \text{ y } \ \bigcup_m P_m = O(P) \cup R(P).$$

Además, si $k_1, k_2, k_3, \ldots$ es una sucesión de números naturales, se cumple que:

$$pp_{k_1} \subset pp_{k_1,k_2} \subset pp_{k_1,k_2,k_3} \subset \cdots .$$

Entonces, por el Teorema 1.27, $\mathrm{Cl}_X(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} pp_{k_m})$ está contenido en un arco. Aún más, no es difícil observar que $\{p_{k_1,\ldots,k_m}\}_m$ converge a un punto $p_{k_1,k_2,k_3,\ldots}$, el cual es extremo de X. Por último es importante notar que:

$$E(P) = \{p_{k_1,k_2,k_3,\ldots} \colon k_i \in \mathbb{N}, \text{ para cada } i \in \mathbb{N}\}.$$

El resto de esta sección está dedicado a probar que la dendrita P es la única dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea con más de un punto de ramificación, con arcos libres y cuyo conjunto de puntos extremos no es cerrado. Esto completará nuestra clasificación. Para ello, demostraremos algunos resultados, tomando en cuenta que las dendritas en esta sección tienen más de un punto de ramificación.

Recordemos que la dendrita W se construye de la siguiente manera: tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y $b_n = (\frac{1}{n}, 0)$. Sean $a = (0,0)$ y $c = (-1, 0)$. Definimos:

$$W_0 = ab_1 \cup \bigcup \{a_n b_n \colon n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad W = ca \cup W_0.$$

A W se le conoce como "la dendrita W con vértice a y base $ca \cup ab_1$". A W_0 se le llama "la dendrita W_0 con vértice a y base ab_1".

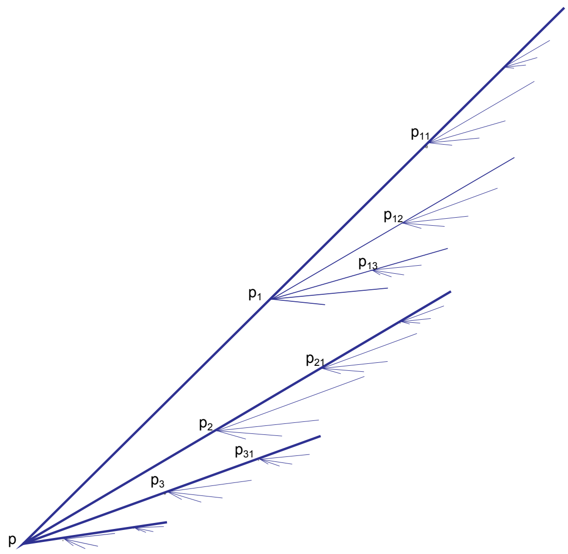


Figura 3.7: Dendrita P

Teorema 3.56. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $|R(X)| > 1$ y $E(X)$ no es cerrado. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si X no contiene una copia de W, entonces $R(X) = R_\omega(X)$;*

2) *si X contiene una copia de W, entonces cada punto de ramificación es vértice de una copia de W.*

Demostración. Sea n es el orden de cada punto de $R(X)$. Para probar 1) supongamos que X no contiene copias de W y que $R(X) = R_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$. En el Teorema 3.50 probamos que $R(X) \subset \mathrm{Cl}_X(E(X)$. Luego, cada punto de $R(X)$ es de acumulación de $E(X)$ y, por la parte 2) del Corolario 1.40, todo punto de $R(X)$ es el vértice de una copia de W. Como X no contiene copias de W, concluimos que $n \notin \mathbb{N}$. Por lo tanto, $n = \omega$. Esto prueba 1).

No es dificil ver que, si X no contiene arcos libres, $x \in R(X)$ y C es una componente de $X - \{x\}$, entonces x es límite de una sucesión en $R(X) \cap C$. Así que, por la parte 1) del Corolario 1.40, x es el vértice de una copia de W. Como $R(X)$ es una órbita, se cumple 2). Supongamos entonces que X contiene un arco libre. Por el Lema 3.39, $O(X)$ es abierto. Sea Y una copia de W en X. Denotemos por x al vértice de Y. Luego:

$$\mathrm{Cl}_X(R(X)) \cap O(X) = \emptyset.$$

Por otro lado, x es el vértice de Y, con lo que $x \in \mathrm{Cl}_X(R(Y))$. Ya que $R(Y) \subset R(X)$, $x \in \mathrm{Cl}_X(R(X))$ y, esto implica que, $x \notin O(X)$. Como, además, $\mathrm{ord}_X(x) \geq \mathrm{ord}_Y(x) = 2$, x tampoco es elemento de $E(X)$. Por consiguiente, $x \in R(X)$. Tomando en cuenta que $R(X)$ es una órbita de X, concluimos que todo punto de $R(X)$ es vértice de una copia de W. Esto prueba 2). $\square$

En [5, Teorema 4.5, pág. 9] se prueba el siguiente teorema, que caracteriza a la dendrita P.

Teorema 3.57. *Una dendrita X es homeomorfa a la dendrita P si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) *X no contiene copias de W;*

2) *$E(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(R(X)\big)$;*

3) *$R(X) = R_\omega(X)$.*

Corolario 3.58. *Sea X es una dendrita $\frac{1}{3}$ homogénea tal que $E(X)$ no es cerrado y $|R(X)| \geq 1$. Si X no contiene copias de W, entonces X es homeomorfa a la dendrita P.*

Demostración. Por la parte 1) del Teorema 3.56, $R(X) = R_\omega(X)$ y, por el Teorema 3.50, $E(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(R(X)\big)$. Del Teorema 3.57, se sigue que X es homeomorfo a la dendrita P. $\square$

En la prueba dada en [5] del Teorema 3.57 se demuestra, aunque no se enuncia, el siguiente resultado.

Teorema 3.59. *Sea X una dendrita tal que X no contiene copias de W, $E(X) \subset \mathrm{Cl}_X R(X)$ y $R(X) = R_\omega(X)$. Si $a \in R(X)$, y $\{a_i\}_i$ es la sucesión en $R(X)$ tal que $\{aa_i\}_i$ son todos los arcos internos que tienen al punto a, entonces existe un homeomorfismo $h\colon X \to P$ tal que $h(p) = a$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $h(pp_i) = aa_i$.*

Corolario 3.60. *$O(P)$ y $R(P)$ son órbitas de P.*

Demostración. Por el Teorema 3.59, p se puede mandar, bajo un homeomorfismo, a cualquier punto de $R(P)$. Luego, $R(P) \subset \mathrm{Orb}_P(p)$. Ahora veamos que los puntos de $O(P)$ están en la misma órbita. Sea $x \in O(P)$. Entonces existen $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$x \in p_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p_{k_1,\ldots,k_m}.$$

Fijemos x_0 en (pp_1). Nuevamente, aplicando el Teorema 3.59, obtenemos un homeomorfismo $h\colon P \to P$ tal que $h(pp_1) = p_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p_{k_1,\ldots,k_m}$. Por consiguiente, $\{x_0, h^{-1}(x)\} \subset (pp_1)$.

Tomemos otro homeomorfismo $f\colon pp_1 \to pp_1$ tal que $f(x_0) = h^{-1}(x)$ y $f(p) = p$. Extendamos f a una función $F\colon P \to P$ de manera que F es la identidad en el cerrado $P - (pp_1)$. Puesto que $f(p) = p$ y $f(p_1) = p_1$, F está bien definida y, como $1|_{P-(pp_1)}$ y f son homeomorfismos, F es también un homeomorfismo. Por lo tanto, $h \circ F$ es un homeomorfismo de P en P tal que $h \circ F(x_0) = x$. Esto prueba que $O(P) \subset \mathrm{Orb}_P x_0$. Como el orden de un punto es invariante bajo homeomorfismos (parte 1) del Teorema 1.5), $O(P) = \mathrm{Orb}_P(x_0)$ y $R(P) = \mathrm{Orb}_P(p)$. $\square$

Lema 3.61. *Sean $\{r_m\}_m$ y $\{s_m\}_m$ dos sucesiones en $\mathbb{N}$. Entonces existe un homeomorfismo $h\colon P \to P$ tal que $h(p_{r_1,r_2,\ldots}) = p_{s_1,s_2,\ldots}$.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\lambda_m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una permutación tal que:

$$\lambda_m(r_m) = s_m.$$

Con ayuda de las permutaciones λ_m, definiremos el homeomorfismo h. Para cada $k \in \mathbb{N}$, hagamos $h(pp_k) = pp_{\lambda_1(k)}$ de tal manera que $h|_{pp_k}$ es un homeomorfismo lineal que fija a p y $h(p_k) = p_{\lambda_1(k)}$. Notemos que $h|_{P_1}$ es un homeomorfismo de P_1 en sí mismo tal que $h(p_{r_1}) = p_{s_1}$.

Ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, hagamos:

$$(p_{k_1,\ldots,k_m}) = p_{\lambda_1(k_1),\ldots,\lambda_m(k_m)} \quad \text{y}$$
$$h|_{p_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p_{k_1,\ldots,k_m}} \colon p_{k_1,\ldots,k_{m-1}} p_{k_1,\ldots,k_m} \to p_{\lambda_1(k_1),\ldots,\lambda_{m-1}(k_{m-1})} p_{\lambda_1(k_1),\ldots,\lambda_m(k_m)}$$

un homeomorfismo lineal. Hemos definido h en $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n = R(P) \cup O(P)$. Como $O(P)$ es la unión de los conjuntos abiertos $(p_{k_1,\ldots,k_m} p_{k_1,\ldots,k_{m+1}})$, $h|_{O(P)}$ está bien definida y es continua.

Notemos que, para cada sucesión de naturales $\{k_m\}_m$, se cumple lo siguiente:

$$h|_{p_{k_1,\ldots,k_{m-1}}p_{k_1,\ldots,k_m}}(p_{k_1,\ldots,k_m}) = p_{\lambda_1(k_1),\ldots,\lambda_m(k_m)} = h|_{p_{k_1,\ldots,k_m}p_{k_1,\ldots,k_{m+1}}}(p_{k_1,\ldots,k_m})$$

y los arcos $\{p_{k_1,\ldots,k_m}p_{k_1,\ldots,k_{m+1}}\}_m$ convergen a $\{p_{k_1,\ldots,k_m}\}$. Esto implica que $h|_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n}$ está bien definida y que también es continua en cada punto de $R(P)$. Ahora, ya que para cada $m \in \mathbb{N}$, λ_m es biyectiva y $h|_{p_{k_1,\ldots,k_{m-1}}p_{k_1,\ldots,k_m}}$ es homeomorfismo, entonces $h|_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n}$ resulta biyectiva. En consecuencia, $h|_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n}$ es una función continua y biyectiva de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P_n$ en sí mismo tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$, se cumple que:

$$h(p_{r_1,r_2,\ldots,r_m}) = p_{s_1,s_2,\ldots,s_m}.$$

Definamos ahora h en $E(P)$. Para cada sucesión $\{k_m\}_m$ de números naturales, hagamos:

$$h(p_{k_1,k_2,\ldots}) = p_{\lambda_1(k_1),\lambda_2(k_2),\ldots}.$$

Como para cada $m \in \mathbb{N}$, λ_m está bien definida y es biyectiva, $h|_{E(P)}$ está bien definida y es biyectiva. Para probar que h es un homeomorfismo, sólo resta verificar que h es continua en cada punto de $E(P)$.

Sean $\{k_m\}_m$ una sucesión de naturales y, para cada $m \in \mathbb{N}$, $C(k_1,\ldots,k_m)$ la componente de $P - \{p_{k_1,\ldots,k_m}\}$ que tiene a $p_{k_1,\ldots,k_{m+1}}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Como P es localmente conexo y $P - \{p_{k_1,\ldots,k_m}\}$ es abierto en P, $C(k_1,\ldots,k_m)$ es abierto en P. Luego, por el Teorema 1.30, $\{C(k_1,\ldots,k_m)\}_m$ es una sucesión nula y, así, $\{\mathrm{Cl}_P(C(k_1,\ldots,k_m))\}_m$ es, también, una sucesión nula.

Por la parte 1) del Teorema 1.10, se cumple lo siguiente:

$$\mathrm{Cl}_P(C(k_1,\ldots,k_m)) = C(k_1,\ldots,k_m) \cup \{p_{k_1,\ldots,k_m}\}.$$

Además, por construcción, $\lim\limits_{m\to\infty} p_{k_1,\ldots,k_m} = p_{k_1,k_2,k_3,\ldots}$. Se sigue que:

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{Cl}_P(C(k_1,\ldots,k_m)) = \{p_{k_1,k_2,\ldots}\}.$$

Entonces, para cada subconjunto abierto U en P que tiene a $p_{k_1,k_2,\ldots}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $C(k_1,\ldots,k_m) \subset U$, para cada $m > M$. Esto prueba que, $\{C(k_1,\ldots,k_m)\}_m$ es una base local del punto $p_{k_1,k_2,\ldots}$.

De manera similar a como lo hicimos en la prueba del Lema 3.45, se prueba que $h^{-1}(C(k_1,\ldots,k_m)) = C\big(\lambda^{-1}(k_1),\ldots,\lambda^{-1}(k_m)\big)$. Esto indica que la preimagen de un elemento de la base local del punto $p_{k_1,k_2,k_3,\ldots}$ es un abierto en P. Luego, h es continua en $p_{k_1,k_2,k_3,\ldots}$. En consecuencia, h es continua en cada punto de $E(P)$. Por lo tanto, $h\colon P \to P$ es un homeomorfismo. Además:

$$h(p^n_{r_1,r_2,\ldots}) = p^n_{\lambda_1(r_1),\lambda_2(r_2),\ldots} = p_{s_1,s_2,s_3,\ldots}.$$

Esto concluye la prueba del lema. □

Teorema 3.62. *La dendrita P es $\frac{1}{3}$-homogénea, tiene arcos libres y $E(P)$ no es cerrado.*

Demostración. Para probar que P es $\frac{1}{3}$-homogénea, por el Corolario 3.60, sólo falta verificar que $E(P)$ es una órbita de P. Por el Lema 3.61, $E(P)$ está contenido en una órbita de P. Ya que la imagen de un punto extremo, bajo un homeomorfismo, es también un punto extremo (inciso 3) del Teorema 1.5), entonces $E(P)$ es una órbita de P. Por lo tanto, P es $\frac{1}{3}$-homogénea.

Sabemos que P no es homeomorfa a ninguna Dendrita de Gehman G^n pues, por ejemplo, $R(P) = R_\omega(P)$ y $R(G^n) = R_n(G^n)$, para alguna $n \in \mathbb{N}$ $\big($Teoremas 3.42 y 3.57 parte 3)$\big)$.

Ya que P es $\frac{1}{3}$-homogénea, por el Teorema 3.46, $E(P)$ no es cerrado en P. Aún mas, de la construcción que dimos de la dendrita P, podemos ver que, si $p_{k_1,\ldots,k_m} \in R(X)$, entonces toda sucesión $\{p_{k_1,\ldots,k_m,l_1^i,l_2^i,\ldots}\}_i$ de puntos distintos en $E(P)$, contiene una subsucesión convergente a $p_{k_1,\ldots,k_m}$. Ahora, ya que P no contiene una copia de W, entonces P no es la dendrita universal D_ω. Así que, por el Teorema 3.55, P tiene arcos libres. □

Más adelante probaremos que P es la única dendrita que tiene las características del Teorema 3.62. A continuación presentamos algunos resultados que ayudarán a probar tal caracterización.

Sean X una dendrita y $y \in X$ fijo. Daremos un orden parcial en X con respecto al punto y de la siguiente manera: dados $a, b \in X$, decimos que a es ***menor o igual que*** b ***con respecto a*** y, y escribimos $a \leq_y b$, si $a \in yb$. Si $a \leq_y b$, pero $a \neq b$, decimos que a es ***menor que*** b ***con respecto a*** y, y escribimos $a <_y b$.

Lema 3.63. *Si X es una dendrita y $a, e, y \in X$, con $a \neq y$, entonces los órdenes $\leq_y$ y $\leq_a$ coinciden en $ae \cap ye$.*

Demostración. Sean $p, q \in ae \cap ye$. Queremos probar que $p \leq_y q$ si y sólo si $p \leq_a q$. Supongamos primero que $p \leq_y q$. Esto significa que $p \in yq$. Como $q \in ae$, ae es la unión disjunta de aq y $(qe]$. Luego, si $p \notin aq$, entonces $p \in (qe]$. Ahora, ya que también $q \in ae$, ye es unión disjunta de yq y $(qe]$. Esto es una contradicción, pues $p \in yq$ y $p \in (qe]$. Por lo tanto, $p \in aq$ y $p \leq_a q$. Similarmente se prueba que, si $p \leq_a q$, entonces $p \leq_y q$. □

Definición 3.64. *Sean X una dendrita y $y \in X$ fijo. Dados $a, b \in X$, con $a <_y b$, decimos que ab es* ***un arco del tipo*** 1_y*, si para cada $c \in [ab)$, existe $d \in X$ tal que $a \leq_y c <_y d \leq_y b$ y cd es libre. Decimos que ab es* ***un arco del tipo*** 2_y *si para cada $c \in [ab)$, ocurre que cb no es del tipo 1_y.*

Lema 3.65. *Sean X una dendrita y $y \in X$ fijo. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Un arco no puede ser a la vez del tipo 1_y y del tipo 2_y; más aún, todo arco contenido en un arco del tipo 1_y es, también, un arco del tipo 1_y;*

2) *si ab es un arco del tipo 2_y, entonces para cada $a \leq_y p <_y b$, pb es un arco del tipo 2_y;*

3) *si $i \in \{1, 2\}$, $a \in X$ y, u y v son dos puntos de X tales que $u \in av \cap yv$, entonces uv es un arco tipo i_y si y sólo si uv es un arco del tipo i_a;*

4) *si $i \in \{1, 2\}$, $f \in \mathcal{H}(X)$, $a = f(y)$ y uv es un arco tipo i_y, entonces $f(uv)$ es un arco del tipo i_a.*

Demostración. Para probar 1), supongamos que ab es un arco del tipo 1_y, con $a <_y b$. Sean uv un arco contenido en ab, con $u <_y v$, y $c \in [uv)$. Luego, $c \in [uv) \subset [ab)$ y, como ab es un arco del tipo 1_y, existe $d \in X$ tal que:

a) $a \leq_y c <_y d \leq_y b$ y cd es un arco libre.

Notemos que, si $d \in uv$, uv cumple la definición de ser del tipo 1_y. Supongamos entonces que $d \notin uv$. Así, $d \in ab - uv$. Como $c \in [uv) \subset [ab)$, con $u \leq_y v$ y $a \leq_y b$, entonces:

$$a \leq_y u \leq_y c <_y v \leq_y b.$$

Por consiguiente, $d \in ab - uv = [au) \cup (vb]$ y $[au) \subset [ac)$. Por a), $d \notin [ac)$, con lo que $d \in (vb]$. De lo anterior concluimos que nuestros puntos están ordenados como sigue:

$$a \leq_y u \leq_y c <_y v <_y d \leq_y b.$$

Luego, $cv \subset cd$ y, como cd es un arco libre, cv es un arco libre. Esto prueba que uv es un arco del tipo 1_y. Por lo tanto, cada arco contenido en un arco del tipo 1_y es, nuevamente, un arco del tipo 1_y. Ya que, por definición, los arcos del tipo 2_y contienen arcos que no son del tipo 1_y, concluimos que los arcos del tipo 2_y no son del tipo 1_y. Esto prueba 1).

Ahora probemos 2). Supongamos que ab es un arco tipo 2_y, con $a <_y b$, y que $p \in ab$. Tomemos $c \in [pb) \subset [ab)$. Por definición de arco del tipo 2_y, cb no es un arco del tipo 1_y. Luego, pb cumple la definición de ser del tipo 2_y. Esto prueba 2).

De la Definición 3.64 y de la Observación 3.63 obtenemos 3).

Para probar 4), sean $f \in \mathcal{H}(X)$ y $a = f(y)$. Notemos que, para dos puntos $p, q \in X$, se cumple que $p \in yq$ si y sólo si $f(p) \in f(y)f(q) = af(q)$. Luego:

b) $p \leq_y q$ si y sólo si $f(p) \leq_a f(q)$.

Primero, supongamos que uv es un arco del tipo 1_y, con $u <_y v$. Queremos mostrar que $f(uv)$ es un arco del tipo 1_a. Sea $c \in f([uv))$. Como f es homeomorfismo, $f^{-1}(c) \in [uv)$ y, así, existe $d \in X$ tal que:

$$u \leq_y f^{-1}(c) <_y d \leq_y v \;\text{ y }\; f^{-1}(c)d \text{ es libre.}$$

Por b), se cumple lo siguiente:

$$f(u) \leq_a c <_a f(d) \leq_a f(v) \quad \text{y} \quad cf(d) \;\text{ es un arco libre.}$$

Esto prueba que $f(uv)$ es un arco del tipo 1_a, como queríamos.

Ahora, supongamos que uv es un arco del tipo 2_y. Queremos ver que $f(uv)$ es un arco del tipo 2_a. Para esto, tomemos $c \in \big[f(u)f(v)\big)$. Supongamos que $cf(v)$ es un arco del tipo 1_a. Como f^{-1} es un homeomorfismo, ya probamos que, $f^{-1}\big(cf(v)\big) = f^{-1}(c)v$ es del tipo 1_y. Pero $f^{-1}(c)v \subset uv$. Ya que esto contradice 2), $cf(v)$ no es un arco del del tipo 1_a. Esto muestra que $f(uv) = f(u)f(v)$ es un arco del tipo 2_a y concluimos la prueba de 4). $\square$

Teorema 3.66. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $E(X)$ no es cerrado y tal que X contiene una copia de W. Si $y \in R(X)$, entonces para cada $a \in R(X)$, existe $e \in E(X)$ tal que ae es un arco del tipo 2_y.*

Demostración. Sea $y \in R(X)$. Para simplificar la notación, ya que hemos fijado y y durante esta prueba no utilizaremos otro orden para X, escribiremos $\leq$, $<$, tipo 1 y tipo 2, en lugar de $\leq_y$, $<_y$, tipo 1_y y tipo 2_y, respectivamente.

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ tal que $R(X) = R_n(X)$. Si X es homeomorfo a D_n, X no tiene arcos libres, por lo que todo arco en X es un arco del tipo 2. Luego, se cumple el teorema. Supongamos, entonces, que X no es homeomorfo a D_n. Probaremos que se cumple la siguiente afirmación:

1) Todo punto de ramificación es el vértice de una copia de W_0 y un punto final de algún arco interno.

En efecto, como X no es homeomorfo a D_n, X contiene un arco libre y, por el Lema 3.49, X contiene arcos internos. Como $R(X)$ es una órbita de X, todo punto de $R(X)$ es punto final de un arco interno. Además, por la parte 4) del Teorema 3.56, todo punto de $R(X)$ es el vértice de una copia de W_0. Esto prueba 1). Para continuar la demostración, primero probemos lo siguiente:

2) Si $a \in R(X)$, existen $c, d \in R(X)$ tales que $a \leq c < d$ y cd no es un arco del tipo 1.

Sea $a \in R(X)$. Por 1), podemos tomar una copia A de W_0, con vértice a, y $b \in R(X)$ tal que ab es un arco interno. Como $y \in R(X)$, $a, y \notin (ab)$. Se sigue de la parte 3) del Teorema 1.36, que:

$$ba \subset ya \quad \text{o bien} \quad ya \cap ab = \{a\}.$$

Supongamos primero que $ba \subset ya$; es decir, $y \leq b < a$. Como ba es un arco libre en X y todo arco en A que tiene al vértice a no es libre, $A \cap ab = \{a\}$. Luego:

$$ya \cap A = (yb \cup ba) \cap A = (yb \cap A) \cup (ba \cap A) = (yb \cap A) \cup \{a\}.$$

Observemos que, $yb \cap A$ y $\{a\}$ son ajenos, pues $b < a$. Como, además, $yb \cap A$ y $\{a\}$ son cerrados y, por la parte 4) del Teorema 1.19, $ya \cap A$ es conexo , necesariamente ocurre que $yb \cap A = \emptyset$; es decir:

(∗) $ya \cap A = \{a\}$.

Sea $d \in R(A)$. Ya que A es una copia de W_0 en X, a es límite de puntos de $R(A) \cap ad \subset R(X) \cap ad$, por lo que ad no es un arco del tipo 1. De (∗), deducimos que $a \in yd$ y, como $a \notin R(A)$, $a \neq d$. Esto implica que $a < d$. En este caso, tomando $c = a$, se cumple 2). Si $ya \cap ab = \{a\}$, entonces $a \leq b$ y existe copia B de W_0 con vértice b. De manera similar, podemos probar que, $yb \cap A = \{b\}$ y que tomando $d \in R(B)$ y $c = b$ se cumple 2). Ahora probemos lo siguiente:

3) Si $a \in R(X)$, entonces existe $a < x$ tal que ax es un arco del tipo 2.

Sea $a \in R(X)$. Por 2), existen $x_1, y_1 \in R(X)$ tales que $a \leq x_1 < y_1$ y x_1y_1 no es un arco del tipo 1. Como también $y_1 \in R(X)$, aplicando nuevamente 2), encontramos $x_2, y_2 \in R(X)$ tales que $y_1 \leq x_2 < y_2$ y x_2y_2 no es un arco del tipo 1. Repitiendo este proceso, inductivamente, construimos dos sucesiones $\{x_m\}_m$, y $\{y_m\}_m$ de $R(X)$, con las siguientes propiedades:

a) $a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < y_2 \leq \cdots$;

b) x_my_m no es un arco del tipo 1, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Hagamos $X_1 = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} ax_m$. Por el Teorema 1.27, existe $x \in X$ de manera que $X_1 = ax$ o bien $X_1 = [ax)$. Observemos que $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x$. Veamos que ax es un arco del tipo 2. Tomemos $p \in [ax)$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p \in ax_m$. Por consiguiente, $p \leq x_m < y_m < x$. Ya que x_my_m no es un arco del tipo 1, por la parte 1) del Lema 3.65, px no es un arco del tipo 1. Por lo tanto, ax es un arco del tipo 2. Esto prueba 3).

Ahora probemos el teorema. Tomemos $a \in R(X)$ y consideremos la familia $\mathfrak{A}$ formada de la siguiente manera:

$$\mathfrak{A} = \{ax \subset X \colon ax \text{ es un arco del tipo } 2\}.$$

Por 3), $\mathfrak{A}$ es no vacía. Supongamos que $\mathfrak{D}$ es una cadena en $\mathfrak{A}$. Esto significa que $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$ y que si $av_1, av_2 \in \mathfrak{D}$, entonces $av_1 \subset av_2$ o bien $av_2 \subset av_1$. Definamos:

$$V = \bigcup \mathfrak{D}.$$

Por el Teorema 1.27, existe $z \in X$ tal que $V = [az)$, o bien $V = az$. Veamos que az es una cota superior de $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{A}$. Sea $ax \in \mathfrak{D}$. Entonces $ax \subset V \subset az$. Sólo falta probar que $az \in \mathfrak{A}$. Tomemos $p \in [az)$ y veamos que pz no es un arco del tipo 1. Como $p \in V$, existe $ax \in \mathfrak{D}$ tal que $p \in ax$. Ya que ax es un arco del tipo 2, por la parte 2) del Lema 3.65, px es un arco del tipo 2. Como $px \subset pz$, el inciso 1) del Lema 3.65 indica que pz no es un arco del tipo 1, como queríamos. Así, $az \in \mathfrak{A}$. Esto prueba que az es una cota superior de $\mathfrak{D}$ y, por el Lema de Zorn ([26, Teorema 2.1 (2), pág. 32]), $\mathfrak{A}$ tiene un elemento maximal, digamos ae.

Para terminar la prueba sólo resta ver que $e \in E(X)$. Tomemos una sucesión $\{c_i\}_i$ de elementos de ae convergente a e. Como ae es un arco del tipo 2, para cada $i \in \mathbb{N}$, c_ie no es un arco del tipo 1. Esto significa que, en particular, ningún c_ie es libre. Luego, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe $d_i \in R(X)$ tal que $c_i < d_i < e$. Ya que $\lim_{i\to\infty} c_i = e$, $\lim_{i\to\infty} d_i = e$. Por consiguiente:

$$e \in \mathrm{Cl}_X(R(X)).$$

Ahora, como X contiene arcos libres, por el Lema 3.39, $O(X)$ es abierto. Entonces $O(X) \cap \mathrm{Cl}_X(R(X)) = \emptyset$ y, así, $e \notin O(X)$. Si $e \in R(X)$, por 3), podemos tomar $e < x$ tal que ex es un arco del tipo 2. Ya que $ex \subset ax$, lo anterior también indica que $ax \in \mathfrak{A}$, contradiciendo la maximalidad de ae. Por lo tanto, $e \in E(X)$. □

Teorema 3.67. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $E(X)$ no es cerrado. Si $y \in R(X)$ es punto final de dos arcos internos, entonces existe $e \in E(X)$ tal que ye es un arco del tipo 1_y.*

Demostración. Supongamos que $y \in R(X)$ es un punto final de dos arcos internos. Ya que y es fijo, escribiremos $\leq$, $<$, tipo 1 y tipo 2 en lugar de $\leq_y$, tipo 1_y y tipo 2_y, respectivamente. Notemos que $|R(X)| > 1$, pues los puntos finales de un arco interno son dos puntos de $R(X)$; además, como $R(X)$ es una órbita de X, todo punto de ramificación de X es punto final de dos arcos internos.

Consideremos la familia $\mathfrak{C}$ formada de la siguiente manera:

$$\mathfrak{C} = \{yw\colon \text{ si } p \in yw,\ \ pw \text{ es un arco del tipo } 1\}.$$

Por hipótesis, y es punto final de un arco libre, digamos yy_1. Por el Lema 3.49, podemos suponer que $y_1 \in R(X)$, por lo que, para cada $p \in yy_1$,

py_1 es un arco del tipo 1. Luego, $yy_1 \in \mathfrak{C}$; es decir, $\mathfrak{C} \neq \emptyset$. Supongamos ahora que $\mathfrak{D}$ es una cadena en $\mathfrak{C}$. Definamos:

$$V = \bigcup \mathfrak{D}.$$

El Teorema 1.27 indica que existe $z \in X$ tal que $V = [yz)$ o $V = yz$. Veamos que yz es una cota superior de $\mathfrak{D}$. Notemos que si $yw \in \mathfrak{D}$, entonces $yw \subset V \subset yz$. Sólo falta verificar que $yz \in \mathfrak{C}$. Sea $p \in [yz)$. Como $p \in V$, existe $yb \in \mathfrak{D}$ tal que $p \in yb \subset yz$. Ya que $p \in yb \in \mathfrak{C}$, pb es un arco del tipo 1. Por la definición de tipo 1 aplicada a $a = c = p$, existe $p < d \leq b$ tal que pd es libre. Como $p < d \leq b \leq z$, yz es un arco del tipo 1. Esto prueba que $yz \in \mathfrak{C}$.

Hemos probado que yz es una cota superior de $\mathfrak{D}$ y, por el lema de Zorn ([26, Teorema 2.1 (2), pág. 32]), $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal ye.

Veriquemos que $e \in E(X)$. Si $e \in R(X)$, por hipótesis, e es punto final de dos arcos libres cuya intersección es $\{e\}$. Ahora, si $x \in O(X)$, por la parte 1) del Teorema 1.38, existen $u, v \in X$ tales que uv es un arco libre y $x \in (uv)$. En ambos casos existe $v \in X$ tal que ev es un arco libre no degenerado y $ye \cap ev = \{e\}$. Luego, $yv = ye \cup ev$ es un arco del tipo 1. Pero esto contradice la maximalidad de ye. Por lo tanto, $e \in E(X)$. □

La teoría construida en esta última parte se ha desarrollado para resolver el caso de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas con más de un punto de ramificación, cuyo conjunto de puntos extremos no es cerrado y tales que cada punto de ramificación está en más de un arco interno. Dicha teoría se aplicará en el siguiente teorema para mostrar que una dendrita con las características que acabamos de describir es homeomorfa a la dendrita P. Más adelante se probará que, de hecho, no hay ningún otro caso posible aparte de éste y los que ya hemos analizado.

Teorema 3.68. *Sea X una dendrita $\frac{1}{3}$-homogénea tal que $E(X)$ no es cerrado. Si algún punto de $R(X)$ es un punto final de al menos dos arcos internos, entonces X no contiene copias de W; aún más, X es homeomorfo a la dendrita P.*

Demostración. Supongamos que $y \in R(X)$ es un punto final de al menos dos arcos internos y que X contiene una copia de W. Por los Teoremas 3.67

y 3.66, existen $e, e' \in E(X)$ de manera que ye es un arco del tipo 1_y y ye' es un arco del tipo 2_y. Ya que $E(X)$ es una órbita de X, podemos tomar un homeomorfismo $h\colon X \to X$ tal que $h(e') = e$. Hagamos:

$$a = h(y).$$

Por el inciso 4) del Lema 3.65, ae es un arco del tipo 2_a. Luego, por la parte 2) del Lema 3.65, $A = ye \cap ae$ es un arco del tipo 2_a y, así, por la parte 3) del mismo lema, A también es un arco tipo 2_y.

Por otro lado, como $A \subset ye$ y ye es un arco del tipo 1_y, por la parte 1) del Lema 3.65, A es un arco del tipo 1_y. Esto contradice el hecho de que un arco no puede ser a la vez de ambos tipos (inciso 1) del Lema 3.65). Por lo tanto, X no contiene copias de W. Aplicando el Corolario 3.58, obtenemos que, X es homeomorfo a la dendrita P. □

Dado que las dendritas universales D_n ya están caracterizadas como las dendritas sin arcos libres tales que todos sus puntos de ramificación son de orden n, para la clasificación de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas sólo falta analizar el caso cuando X es tal que $E(X)$ no es cerrado, $|R(X)| > 1$, X contiene un arco libre y ningún punto de ramificación es punto final de dos arcos internos. El siguiente teorema ayudará a probar que dicho caso no se puede dar.

Teorema 3.69. *No existe una dendrita X con las siguientes características:*

1) $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = \mathrm{Cl}_X(R(X)) = E(X) \cup R(X)$;

2) *si $x \in R(X)$, entonces existe un único $y \in R(X)$ tal que xy es un arco interno.*

Demostración. Supongamos X es una dendrita que cumple 1) y 2). Primero veamos que X no contiene arcos externos. Para esto, supongamos por el contrario, que ea es un arco externo con $e \in E(X)$. Por el Teorema 1.37, sabemos que $[ea)$ es abierto, pero $[ea) \cap R(X) = \emptyset$. Esto contradice 1), pues e es punto de $\mathrm{Cl}_X(R(X))$. Por lo tanto, X no contiene arcos externos.

Por 1), $O(X) = X - \big(E(X) \cup R(X)\big)$ es un subconjunto abierto de X y, por la parte 3) del Teorema 1.38, cada elemento de $O(X)$ pertenece a algún arco interno de X. Además, por hipótesis, cada punto de ramificación está en exactamente un arco interno. Como los arcos internos no tiene puntos de $E(X)$, se cumple la siguiente igualdad:

$$X - E(X) = \bigcup\{ab : ab \text{ es un arco interno en } X\}.$$

Por 2), cualesquiera dos arcos internos son ajenos. Como $R(X)$ es a lo más numerable (1.23), tenemos a lo más una cantidad numerable de arcos internos. Además, la parte 9) del Teorema 1.23 dice que $X - E(X)$ es conexo y se cumple lo siguiente:

$$X - E(X) \text{ es un subconjunto conexo de } X \text{ y es una unión a lo más numerable de arcos internos ajenos dos a dos.}$$

En [38, Teorema 8, pág. 266] se prueba que los subespacios conexos de un continuo hereditariamente localmente conexo del plano son σ-conexos, esto significa que no se pueden poner como una unión numerable de conjuntos no vacíos y mutuamente separados. Como esto contradice lo que acabamos de encontrar, concluimos que una dendrita con tales características no existe. □

Teorema 3.70. *Sea X una dendrita con arcos libres tal que $|R(X)| > 1$ y tal que $E(X)$ no es cerrado. Entonces X es $\frac{1}{3}$-homogénea si y sólo si X es homeomorfa a la dendrita P.*

Demostración. El Teorema 3.62 indica que la dendrita P es $\frac{1}{3}$-homogénea, tiene arcos libres y $E(P)$ no es cerrado. Para probar la otra implicación, supongamos que X es una dendrita con arcos libres, con más de un punto de ramificación y que $E(X)$ no es cerrado. Como X contiene arcos libres, por el Lema 3.49, X contiene arcos internos. Ya que $R(X)$ es una órbita de X, entonces todo punto de ramificación de X es punto final de algún arco interno. Ahora, por el Corolario 3.51, $\mathrm{Cl}_X\big(R(X)\big) = \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ y, por el Lema 3.39, $O(X)$ es abierto. Esto implica que $O(X) \cap \mathrm{Cl}_X\big(R(X)\big) = \emptyset$. Por lo tanto:

$$\mathrm{Cl}_X(R(X)) = \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = R(X) \cup E(X).$$

Luego, el Teorema 3.69, indica que no es posible que cada punto de ramificación sea punto final de exactamente un arco interno. Así que, existe $x \in R(X)$ tal que x es punto final de dos arcos internos distintos. Entonces, por el Teorema 3.68, obtenemos que X es homeomorfa a la dendrita P. □

Finalmente la caracterización de las dendritas $\frac{1}{3}$-homogéneas es la siguiente.

Teorema 3.71. *Sea X una dendrita. Entonces X $\frac{1}{3}$-homogénea si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:*

1) *Existe $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ tal que X es un n-odo simple;*

2) *X es F_ω;*

3) *X es la dendrita P;*

4) *Existe $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ tal que X es la dendrita de Gehman G^n;*

5) *Existe $n \in (\mathbb{N} - \{1, 2\}) \cup \{\omega\}$ tal que X es la dendrita universal D_n.*

Demostración. Supongamos que X es una dendrita $\frac{1}{3}-$ homogénea y que $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ es tal que $R(X) = R_n(X)$. El Corolario 3.18 indica que $R(X)$ es finito si y sólo si se cumple 1) o 2) ($|R(X)| = 1$). Si $|R(X)| > 1$, por el Teorema 3.48, $E(X)$ es cerrado si y sólo si X es la dendrita de Gehman G^n; es decir, $|R(X)| > 1$ y $E(X)$ es cerrado si y sólo si se cumple 4). El Teorema 3.55 prueba que X es la dendrita D_n si y sólo si X no tiene arcos libres. Por último, el Teorema 3.70 dice que $E(X)$ no es cerrado y tiene arcos libres si y sólo si X es homeomorfo a la dendrita P. $\square$

Capítulo 4

Abanicos

4.1. Introducción

Empezamos este capítulo con las definiciones y propiedades generales que se utilizarán en el mismo. La primera sección está dedicada a los abanicos suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos y $\frac{1}{4}$-homogéneos. Un abanico suave que será importante, ya que todos los demás se encajan en él, es el abanico de Cantor, el cual se define como el cono sobre el conjunto de Cantor. Parte de los resultados están encaminados a probar el Teorema 4.33, que indica que, salvo homeomorfismos, sólo existen los siguientes abanicos suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos: un n-odo simple, para alguna $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, la dendrita F_ω, el abanico de Cantor, el abanico de Lelek o el abanico F_{C_ω}, que construiremos más adelante.

Sobre los abanicos suaves $\frac{1}{4}$-homogéneos, el Teorema 4.34 indica que si X es un abanico $\frac{1}{4}$-homogéneo, entonces el vértice y el conjunto de puntos extremos de X son, cada uno, una órbita de X y el conjunto de los puntos ordinarios contiene dos órbitas de X. El Teorema 4.35 indica algunas propiedades que cumplen tales abanicos.

Sobre los abanicos no suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos, el Teorema 4.40 indica dos propiedades que cumple el conjunto de puntos extremos de tales abanicos, una dice que $E(X)$ es denso en X, y la otra es una condición acerca de la "suavidad en el vértice con respecto de cada punto extremo".

4.2. Dendroides y Abanicos

Empecemos la teoría de este capítulo con algunas definiciones. En continuo X es ***unicoherente*** si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X tales que $X = A \cup B$, sucede que $A \cap B$ es conexo. Como ya definimos, en la Sección 1.6, un continuo X es ***hereditariamente unicoherente***, si la intersección de cualesquiera dos subcontinuos de X es conexa. Equivalentemente, X es hereditariamente unicoherente si cada subcontinuo de X es unicoherente.

Definición 4.1. *Un **dendroide** es un continuo arcoconexo y hereditariamente unicoherente.*

En [47, Teorema 10.35, pág. 180] se prueba que un continuo localmente conexo X es una dendrita si y sólo si X es hereditariamente unicoherente. En [47, Teorema 8.23, pág. 130] se prueba que los continuos localmente conexos son arcoconexos. Por lo tanto, un continuo localmente conexo es un dendroide si y sólo si es una dendrita.

Para un estudio, en español, de las propiedades más fundamentales de los dendroides, se pueden consultar las Tesis de Licenciatura [45] y [29]. En el Lema 4.4 de [45] se prueba, por ejemplo, que si X es un dendroide y $a, b \in X$ son tales que $a \neq b$, entonces existe un único arco en X que tiene a los puntos a y b. Denotaremos dicho arco por ab y, como hicimos en el caso de las dendritas, si $a = b$ convenimos que $ab = \{a\}$ y, si $a \neq b$, definimos:

$$(ab) = ab - \{a, b\}, \quad [ab) = ab - \{b\} \quad \text{y} \quad (ab] = ab - \{a\}.$$

En el Lema 4.5 de [45] se prueba que los subcontinuos de un dendroide son arcoconexos y, como también son hereditariamente unicoherentes, resulta que los subcontinuos de un dendroide son dendroides. En el Lema 4.16 de [45] se prueba que si X es un dendroide, B es un subcontinuo de X y $a \in X$, entonces existe un único punto $b \in B$ tal que $ab \cap B = \{b\}$ y, además, b tiene la propiedad de que $b \in ay$, para todo $y \in B$. Informalmente hablando, dicho resultado es la versión para dendroides de lo que indicamos como la función primer punto en dendritas: b es la primera vez en que recorriendo el dendroide con un arco, empezando en a, tocamos a B.

Sea X un dendroide. Un arco A en X se llama un ***arco maximal en X*** si A no está contenido propiamente en ningún otro arco en X. En el

Teorema 4.19 de [45] se prueba que si X es un dendroide, entonces para toda sucesión creciente $\{a_n b_n\}_n$ de arcos en X, existe un arco ab en X tal que $a_n b_n \subset ab$, para cada $n \in \mathbb{N}$. También se prueba, en el mismo teorema, que todo arco en X está contenido en un arco maximal en X. Por lo tanto, siempre podemos hablar de arcos maximales en un dendroide.

Para un espacio topológico X, un punto $p \in X$ y un número cardinal β, en la Definición 1.1, indicamos lo que significa que p tenga orden β en X, lo que denotamos con el símbolo $\text{ord}_X(p) = \beta$. A continuación indicamos una forma diferente de calcular el orden de un punto en un dendroide.

Definición 4.2. *Sean p un punto en un dendroide X y β un número cardinal tal que $\beta \in \{1, 2, \ldots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}\} \cup \{\omega\}$. Si $p \neq \omega$, decimos que p **tiene orden** β **en el sentido clásico**, y escribimos $\text{Ord}_X(p) = \beta$, si existen exactamente β arcos en X tales que p es un punto final de cada uno de estos arcos y, además, p es el único punto común de cada dos de ellos. Como caso especial, $\text{Ord}_X(p) = \omega$ tiene el mismo significado que $\text{ord}_X(p) = \omega$.*

Si cambiamos, en la definición anterior, la palabra "exactamente" por "a lo más" o bien por "al menos", obtenemos las definiciones de $\text{Ord}_X(p) \leq \beta$ y $\text{Ord}_X(p) \geq \beta$, respectivamente.

Dado un dendroide X, consideramos los siguientes conjuntos:

$$E_c(X) = \{x \in X : \text{Ord}_X(x) = 1\}, \quad O_c(X) = \{x \in X : \text{Ord}_X(x) = 2\}$$

y

$$R_c(X) = \{x \in X : \text{Ord}_X(x) \geq 3\}.$$

Llamamos a $E_c(X), O_c(X)$ y $R_c(X)$ el conjunto de ***puntos extremos***, de ***puntos ordinarios*** y de ***puntos ramificación*** de X ***en el sentido clásico***, respectivamente.

En general, estas dos nociones de orden que hemos presentado en este trabajo no son equivalentes, como vemos en el siguiente ejemplo. Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, los puntos $a = (0,0), b = (1,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $b_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$. Entonces:

$$X = ab \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} ab_n \right)$$

es un dendroide tal que $a \in R_c(X) \cap R(X)$, $b \in E_c(X) - E(X)$, $(ab) \subset O_c(X) - O(X)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $(ab_n) \in O_c(X) \cap O(X)$ y $b_n \in E_c(X) \cap E(X)$.

Ahora supongamos que X es un dendroide y que xy es un arco maximal en X. En el Lema 4.24 de [45] se prueba que $x, y \in E_c(X)$. Por consiguiente $E_c(X)$ siempre es no vacío y, de hecho, $|E_c(X)| \geq 2$. En [37, Teorema 2.1, pág. 302], se prueba que $E_c(X)$ no contiene subcontinuos propios y no degenerados. En el Lema 4.25 de [45] se prueba que:

$$X = \bigcup_{e \in E_c(X)} xe, \quad \text{para cada } x \in X. \tag{4.2.1}$$

En el siguiente resultado se muestran otras propiedades de los dendroides.

Teorema 4.3. *Sean X un dendroide y $x \in X$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *Si A es un subcontinuo de X y $x \in A$, entonces $\mathrm{Ord}_A(x) \leq \mathrm{Ord}_X(x)$;*

2) *si Y es un dendroide y $f\colon X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $\mathrm{Ord}_Y(f(x)) = \mathrm{Ord}_X(x)$;*

3) *si Y y f son como en 2), entonces $f(E_c(X)) = E_c(Y)$, $f(O_c(X)) = O_c(Y)$ y $f(R_c(X)) = R_c(Y)$.*

Demostración. Para probar 1), notemos que si $\mathrm{Ord}_A(x) = \beta$, entonces existen exactamente β arcos en A que tienen a x, como punto final, y que dos a dos se intersectan sólo en x. Como $A \subset X$, estos β arcos de A también son arcos en X. Luego, existen al menos β arcos en X que tienen a x como punto final y se intersectan dos a dos sólo en x. Esto prueba 1).

Para probar 2), supongamos que f es un homeomorfismo entre los dendroides X y Y. Sea $\mathcal{A}$ una familia de arcos que tienen a x como punto final, que se intersectan dos a dos únicamente en el punto x y tal que $|\mathcal{A}| = \mathrm{Ord}_X(x)$. Hagamos $\mathcal{B} = \{f(A) \colon A \in \mathcal{A}\}$. Como f es un homeomorfismo, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$. Notemos que, si A y $A' \in \mathcal{A}$, entonces $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A') = \{f(x)\}$. Se sigue que $\mathcal{B}$ es una familia de arcos que se intersectan dos a dos únicamente en $f(x)$ y tienen, todos ellos, como punto final a $f(x)$. Luego:

$$\mathrm{Ord}_Y(f(x)) \geq |\mathcal{B}| = |\mathcal{A}| = \mathrm{Ord}_X(x).$$

Como también $f^{-1}\colon Y \to X$ es un homeomorfismo, que manda $f(x)$ en x, aplicando el mismo razonamiento, obtenemos que $\mathrm{Ord}_X(x) \geq \mathrm{Ord}_Y(f(x))$. Esto prueba 2).

Observemos que 2) dice que el orden de un punto es invariante bajo homeomorfismos. Ya que los conjuntos de puntos de ramificación, de puntos ordinarios y de puntos extremos están definidos por el orden de sus elementos, entonces se obtiene 3). $\square$

Como las dendritas son dendroides, es importante mencionar que estas dos nociones de orden de un punto, $\mathrm{ord}_X(p)$ y $\mathrm{Ord}_X(p)$, coinciden en el caso de las dendritas (ver [60, (1.1)(iv), pág. 88], [47, Teorema 10.13, pág. 170] y [60, (2.6), pág. 92]). Así que, los puntos en el arco también tienen orden en el sentido clásico menor o igual a 2 y, de hecho, se cumple el siguiente resultado.

Proposición 4.4. *Un dendroide X es un arco si y sólo si* $\mathrm{Ord}_X(x) \leq 2$, *para cada $x \in X$.*

Demostración. Como ya mencionamos, en un arco, cada punto tiene orden, en el sentido clásico, menor o igual a 2. Ahora supongamos que X es un dendroide que no es un arco. Sean $a, b \in E_c(X)$ tales que ab es un arco maximal en X. Como $ab \subsetneq X$, existe $c \in X - ab$. Tomemos $d \in ab$ tal que $cd \cap ab = \{d\}$ y, para cada $y \in ab$, resulta que $d \in cy$. Por la maximalidad de ab, sucede que $d \in (ab)$. Además $\mathrm{Ord}_X(d) \geq 3$. Con esto hemos probado que un dendroide que no es un arco posee un punto de ramificación en el sentido clásico. Esto concluye la prueba. $\square$

Para un dendroide X, denotamos por $\eta_{O_c(X)}$ al número de órbitas de X contenidas en $O_c(X)$ (es decir, $\eta_{O_c(X)}$ es la cardinalidad de la familia de las órbitas de X que están contenidas en $O_c(X)$). De manera similar $\eta_{E_c(X)}$ y $\eta_{R_c(X)}$ representan el número de órbitas de X contenidas en $E_c(X)$ y en $R_c(X)$, respectivamente.

El objeto de estudio de este capítulo son los dendroides llamados abanicos, que definimos a continuación. En específico estamos interesados en los abanicos que tienen exactamente tres o cuatro órbitas.

Definición 4.5. *Un **abanico** es un dendroide con exactamente un punto de ramificación en el sentido clásico, al cual llamaremos el **vértice** del abanico.*

Para lo que resta de este capítulo utilizaremos sólo la definición de orden en un punto en el sentido clásico, por lo que diremos simplemente orden en vez de "orden en el sentido clásico". También nos referiremos a $E_c(X), O_c(X)$ y $R_c(X)$ simplemente por $E(X), O(X)$ y $R(X)$. De manera similar, utilizaremos $\eta_{E(X)}$, $\eta_{O(X)}$ y $\eta_{E(X)}$ en lugar de $\eta_{E_c(X)}$, $\eta_{O_c(X)}$, y $\eta_{R_c(X)}$, respectivamente. Notemos que, si X es un abanico con vértice t, entonces $\eta_{R(X)} = 1$ y, como $E(X) \neq \emptyset$, $\eta_{E(X)} \geq 1$. Además, por (4.2.1),

$$X = \bigcup_{e \in E(X)} te. \tag{4.2.2}$$

A continuación enunciamos una serie de resultados generales en torno a los abanicos. Recordemos que un subconjunto A de un espacio topológico X, es un ***conjunto*** G_δ ***en*** X si A se puede escribir como una intersección numerable de subconjuntos abiertos de X.

Teorema 4.6. *Sea X un abanico con vértice t. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *$E(X)$ es no vacío y G_δ en X;*

2) *$O(X)$ es denso en X;*

3) *si A es un subcontinuo de X, entonces A es un arco o bien $t \in A$;*

4) $\eta_{O(X)} \geq \eta_{E(X)}$.

Demostración. Ya indicamos que $E(X) \neq \emptyset$. En [37, Teorema 7.5, pág. 311] se prueba que $E(X)$ es un conjunto G_δ en X. Para ver que $O(X)$ es denso, por (4.2.2) y el hecho de que t es el único punto de ramificación de X, es fácil notar que:

$$O(X) = \bigcup_{e \in E(X)} (te).$$

Luego, se cumplen las siguientes igualdades:

$$X = \bigcup_{e \in E(X)} te = \bigcup_{e \in E(X)} \mathrm{Cl}_X\left((te)\right) \subset \mathrm{Cl}_X\left(\bigcup_{e \in E(X)} (te)\right) = \mathrm{Cl}_X\left(O(X)\right).$$

Esto prueba 2). Para ver 3), sea A un subcontinuo de X. Entonces A es un dendroide. Si $t \notin A$, como t es el único punto de ramificación de X, para cada

$a \in A$, se cumple que $\mathrm{Ord}_X(a) \leq 2$. Luego, por el Teorema 4.3, $\mathrm{Ord}_A(a) \leq 2$ y, por la Proposición 4.4, A es un arco. Esto prueba 3).

Ahora probemos 4). Para cada $a \in O(X)$, denotaremos por e_a al único punto extremo de X tal que $a \in te_a$. Notemos que, si $x \in O(X)$ y $y \in \mathrm{Orb}_X(x)$, entonces $y \in O(X)$ y existe $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(x) = y$. Como $y = h(x) \in h(te_x) = th(e_x)$ y $h(e_x) \in E(X)$, ocurre que $h(e_x) = e_y$ y, así, $e_y \in \mathrm{Orb}_X(e_x)$. Luego, podemos definir una función f de la familia de las órbitas de X contenidas $O(X)$ a la familia de las órbitas de X contenidas en $E(X)$, como sigue: para cada $x \in O(X)$, asignamos a la órbita $\mathrm{Orb}_X(x)$, la órbita:

$$f(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_X(e_x).$$

Para ver que f es suprayectiva tomemos $e \in E(X)$. Notemos que, para cada $x \in (te)$, ocurre que $e = e_x$, por lo que $f(\mathrm{Orb}_X(x)) = \mathrm{Orb}_X(e_x)$. Por lo tanto, f es suprayectiva. Esto prueba que $\eta_{O(X)} \geq \eta_{E(X)}$. □

Corolario 4.7. *Sea X un abanico con vértice t. Entonces $\eta_{E(X)}, \eta_{O(X)}$ son positivos y $\eta_X = \eta_{E(X)} + \eta_{O(X)} + 1 \geq 3$.*

Corolario 4.8. *Sea X un abanico con vértice t. Si $O(X)$ es una órbita de X, entonces $E(X)$ es una órbita de X y X es $\frac{1}{3}$-homogéneo.*

Demostración. Si $O(X)$ es una órbita de X, entonces $\eta_{O(X)} = 1$. Luego, usando la parte 4) del Teorema 4.6, $1 \leq \eta_{E(X)} \leq \eta_{O(X)} = 1$, de donde $\eta_{E(X)} = 1$. Esto implica que $E(X)$ es una órbita de X. Como t es el único punto de ramificación de X, $R(X) = \{t\}$ es una órbita de X. Esto prueba que X es $\frac{1}{3}$-homogéneo. □

Como ya hicimos ver, un dendroide es localmente conexo si y sólo si es una dendrita. Como las únicas dendritas con un punto de ramificación son los n-odos (para $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$) y la dendrita F_ω, las cuales son $\frac{1}{3}$-homogéneos (Corolario 3.18), para clasificar los abanicos $\frac{1}{3}$-homogéneos, estamos interesados en aquellos que no son localmente conexos. Para éstos, será útil la notación que introduciremos un poco más adelante.

Recordemos que un continuo X es ***conexo en pequeño*** en el punto $x \in X$ si para cada abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto conexo G tal que $x \in \mathrm{Int}_X(G) \subset G \subset U$. Como ya indicamos si X es localmente conexo en un punto $p \in X$, entonces X es conexo en pequeño en p y, además, un continuo es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos (ver [47, Definición 8.1 (iii), pág. 120]).

Si X es un continuo, denotaremos por $L(X)$ al ***conjunto de puntos de conexidad local de*** X y, por $\text{cik}(X)$ al ***conjunto de puntos de conexidad en pequeño de*** X, es decir:

$$\begin{array}{rcl} L(X) & = & \{x \in X \colon X \text{ es localmente conexo en } x\} \\ \text{cik}(X) & = & \{x \in X \colon X \text{ es conexo en pequeño en } x\}. \end{array}$$

Como ya indicamos, $L(X) \subset \text{cik}(X)$. En los siguientes resultados, utilizaremos los conjuntos anteriores, para mostrar propiedades de los abanicos.

Proposición 4.9. *Sea X un abanico con vértice t. Si $O(X) \subset \text{cik}(X)$ entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos que $O(X) \subset \text{cik}(X)$ y que X no es localmente conexo. Luego, X no es conexo en pequeño en alguno de sus puntos y, por [47, Corolario 5.13, pág. 78], existe un subcontinuo no degenerado K de X tal que $K \subset X - \text{cik}(X)$. Como $O(X) \subset \text{cik}(X)$, ocurre que:

$$K \subset X - O(X) = E(X) \cup \{t\}.$$

Ya que $E(X)$ no contiene subcontinuos propios y no degenerados ([37, Teorema 2.1, pág. 302]), $K \not\subset E(X)$. Por lo tanto, $t \in K$ y $K \cap E(X) \neq \emptyset$. Tomemos $e \in K \cap E(X)$. Como $t, e \in K$ y K es arcoconexo, sucede que $te \subset K$. Esto implica que $(te) \subset K \cap O(X)$, así que $K \cap O(X) \neq \emptyset$, lo cual no puede suceder. De esta manera se prueba que X es localmente conexo. $\square$

Corolario 4.10. *Sea X un abanico con vértice t. Si $O(X) \subset L(X)$ entonces X es localmente conexo.*

En el siguiente resultado vemos que si X es un abanico con vértice t, X no es localmente conexo y $O(X)$ es una órbita de X, entonces X no es localmente conexo en ninguno de sus puntos, o bien X solamente es localmente conexo en t.

Teorema 4.11. *Sea X un abanico no localmente conexo con vértice t. Si $O(X)$ es una órbita de X, entonces $L(X) \subset \{t\}$.*

Demostración. Supongamos que $O(X)$ es una órbita de X. Por el Corolario 4.10, $O(X) \cap [X - L(X)] \neq \emptyset$. Como $O(X)$ es una órbita de X y la conexidad local se preserva bajo homeomorfismos, X no es localmente conexo en ningún punto de $O(X)$. Luego:

$$L(X) \subset X - O(X) = E(X) \cup \{t\}.$$

Para terminar la prueba, basta verificar que $E(X) \cap L(X) = \emptyset$. Supongamos que existe $e \in E(X) \cap L(X)$. Como $e \in X - \{t\}$, usando la conexidad local de X en e y la regularidad del espacio, podemos encontrar un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $e \in U$ y $\mathrm{Cl}_X(U) \subset X - \{t\}$. Como $O(X)$ es denso en X, $O(X) \cap U \neq \emptyset$. Por la parte 3) del Teorema 4.6, $\mathrm{Cl}_X(U)$ es un arco y, así, existe $p \in (te)$ tal que $U = (pe]$ y $\mathrm{Cl}_X(U) = pe$.

Notemos que $(pe) \subset O(X)$. Sean $x \in (pe)$ y V un abierto en X tal que $x \in V$. Entonces $U \cap V$ es un abierto en U tal que $x \in U \cap V$. Sea C la componente de $U \cap V$ que tiene a x. En vista de que U es localmente conexo, C es abierto en U y, como U es abierto en X, C es abierto en X. Esto prueba que X es localmente conexo en x, por lo que $\emptyset \neq (pe) \subset O(X) \cap L(X)$. Esta es una contradicción y, por consiguiente, $E(X) \cap L(X) = \emptyset$. De esta manera, $L(X) \subset \{t\}$. $\square$

4.3. Abanicos Suaves

Empezamos esta sección introduciendo a los dendroides suaves. La prueba del Teorema 4.13 se puede consultar en [23, Corolario 10, pág. 309].

Definición 4.12. *Un dendroide X es* ***suave en el punto*** *$p \in X$ si para cada $a \in X$ y cada sucesión $\{a_n\}_n$ que converge a a, la sucesión de arcos $\{pa_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, al arco pa. Decimos que X es* ***suave*** *si X es suave en alguno de sus puntos.*

Recordemos que una función es monótona si la preimagen de cada punto es un conjunto conexo.

Teorema 4.13. *Sean X y Y dos dendroides. Si X es suave y $f\colon X \to Y$ es una función continua, monótona y suprayectiva, entonces Y es un dendroide suave.*

En la presente sección estudiaremos la clase de abanicos que se indican en la siguiente definición.

Definición 4.14. *Un abanico X con vértice t es **suave** si para cada $a \in X$ y cada sucesión $\{a_n\}_n$ que converge al punto a, la sucesión de arcos $\{ta_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, al arco ta.*

En [23, Corolarios 2 y 3, pág. 298] se prueba que si X es un abanico, las dos definiciones de suavidad coinciden. Es decir, con la Definición 4.12, un abanico X es suave si y sólo si X es suave en su vértice.

A continuación presentamos la construcción, en $\mathbb{R}^2$, de un abanico suave F_C que contiene una copia de cada abanico suave (Teorema 4.17). A F_C se le llama el *abanico de Cantor*. Denotemos por C al conjunto de Cantor estándar que se construye en el intervalo $[0,1]$, "quitando el tercio medio". Sea F_C el cono sobre el conjunto de Cantor o, de manera equivalente, el espacio cociente:

$$F_C = (C \times [0,1])/(C \times \{0\}).$$

Los puntos de F_C tienen la forma $\langle c, s\rangle$, donde $c \in C$ y $s \in [0,1]$. Convenimos en que, para cada $c \in C$, $\langle c, 0\rangle$ es el vértice de F_C y, para simplificar, dicho vértice será denotado por t. Dados $A \subset C$ y $B \subset [0,1]$, el símbolo $A \times B$ denotará el subconjunto $(A \times B)/(A \times \{0\})$ de F_C.

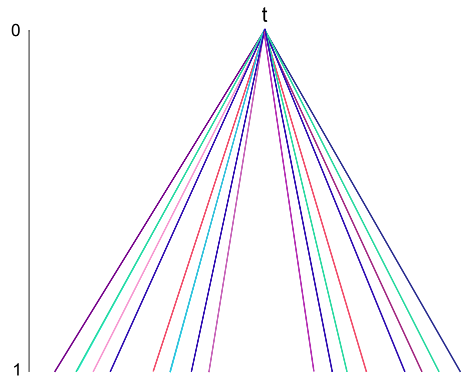


Figura 4.1: El abanico de Cantor

Dados $m \in \mathbb{N}$ y $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \{0,2\}^m$, definimos $I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ como el siguiente subintervalo de $[0,1]$:

$$I_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \left[\frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \cdots + \frac{k_m}{(3)^m}, \frac{k_1}{3} + \frac{k_2}{3^2} + \cdots + \frac{k_{m-1}}{(3)^{m-1}} + \frac{k_m+1}{(3)^m}\right].$$

Entonces:

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad I_2 = \left[\frac{2}{3}, 1\right], \quad I_{0,0} = \left[0, \frac{1}{3^2}\right], \quad I_{0,2} = \left[\frac{2}{3^2}, \quad \frac{1}{3}\right],$$

$$I_{2,0} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right], \qquad I_{2,2} = \left[\frac{8}{3^2}, 1\right],$$

etc., los cuales son los respectivos intervalos, ajenos dos a dos, que utilizamos para la construcción de C. Se puede probar que, para cada $m \in \mathbb{N}$, los 2^m elementos de la familia:

$$\{I_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \colon (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \{0,2\}^m\}$$

son ajenos dos a dos. También, para cada sucesión $\{k_m\}_m$ de elementos de $\{0,2\}$, la sucesión de intervalos $\{I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}\}_m$ es decreciente y la intersección $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ consta de exactamente un punto, el cual denotemos por $c_{k_1,k_2,\ldots}$. Por definición:

$$C = \{c_{k_1,k_2,\ldots} \colon k_m \in \{0,2\}, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $c_{k_1,k_2,\ldots} \in C$, definimos $e_{k_1,k_2,\ldots} = \langle c_{k_1,k_2,\cdots}, 1\rangle$. Luego, el conjunto de puntos extremos del abanico de Cantor, queda determinado como sigue:

$$E(F_C) = \{e_{k_1,k_2,\ldots} \colon k_m \in \{0,2\}, \text{ para cada } m \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \{0,2\}^m$, definimos:

$$C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = C \cap I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$$

y

$$F_{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}} = (C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \times [0,1])/(C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \times \{0\}).$$

Como, para cada $m \in \mathbb{N}$, los elementos de la familia:

$$\{I_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \colon (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \{0,2\}^m\}$$

son ajenos dos a dos y $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \subset I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, para cada $(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in \{0,2\}^m$, sucede que los 2^m elementos de la familia:

$$\{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \colon (k_1,k_2,\ldots,k_m) \in \{0,2\}^m\}$$

también son ajenos dos a dos. Sea $c = c_{k_1,k_2,\ldots} \in C$. Como la sucesión de intervalos $\{I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}\}_m$ es decreciente y $\{c\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, tenemos que $\{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}\}_m$ es una sucesión decreciente tal que $\{c\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$. Entonces, en la métrica de Hausdorff, $\{I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}\}_m$ y $\{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}\}_m$ convergen a $\{c\}$.

Notemos que $F_{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}}$ es el abanico contenido en F_C cuyo conjunto de puntos extremos queda determinado como sigue:

$$E(F_{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}}) = \{e_{k_1,k_2,\ldots,k_m,\ldots} \in E(F_C) \colon c_{k_1,k_2,\ldots,k_m,\ldots} \in C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}\}.$$

De manera natural, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in \{0,2\}^m$, podemos identificar a $E(F_{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}})$ con el producto cartesiano $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \times \{1\}$. Notemos también que:

$$C = C_0 \cup C_2, \qquad C = C_{0,0} \cup C_{0,2} \cup C_{2,0} \cup C_{2,2}$$

y, en general, para cada $m \in \mathbb{N}$, C se puede escribir con la unión de los siguientes 2^m conjuntos ajenos dos a dos:

$$C = \bigcup\{C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} \colon (k_1,k_2,\ldots,k_m) \in \{0,2\}^m\}. \tag{4.3.1}$$

Para cada sucesión $\{k_m\}_m$ de elementos de $\{0,2\}$ y toda $m \in \mathbb{N}$, definimos $t_m = k_m + 2 (\operatorname{mod} 4)$. Dada $(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in \{0,2\}^m$, como $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = C \cap I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ y, además, $I_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ es un subintervalo cerrado de $[0,1]$, sucede que $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ es cerrado en C. Además, por (4.3.1), $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ se obtiene removiendo los $(2)^{m-1}$ uniendos que son distintos de $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, es decir:

$$\begin{aligned} C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = C - \bigcup\{C_{r_1,r_2,\ldots,r_m} \colon (r_1,r_2,\ldots,r_m) \in \{0,2\}^m \\ \text{y } (r_1,r_2,\ldots,r_m) \neq (k_1,k_2,\ldots,k_m)\}. \end{aligned}$$

De esta manera obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.15. *Para toda $m \in \mathbb{N}$ y cada $(k_1,k_2,\ldots,k_m) \in \{0,2\}^m$, el conjunto $C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ es abierto y cerrado en C.*

En el siguiente resultado mostramos una manera de aproximarnos a cualquier elemento c de C, por subconjuntos de $C - \{c\}$.

Teorema 4.16. *Sea* $c = c_{k_1,k_2,\ldots} \in C$ *y, para cada* $m \in \mathbb{N}$*, hagamos* $t_m = k_m + 2 (\mathrm{mod}\, 4)$. *Definimos* $C(1) = C_{t_1}$ *y, para cada* $m \in \mathbb{N} - \{1\}$:

$$C(m) = C_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1},t_m}.$$

Entonces $\{C(m)\}_m$ *es una sucesión de subconjuntos abiertos y cerrados de* C*, ajenos dos a dos, cuya unión es* $C - \{c\}$ *y que convergen, en la métrica de Hausdorff, a* $\{c\}$.

Demostración. Por el Lema 4.15, $\{C(m)\}_m$ es una sucesión de subconjuntos abiertos y cerrados de C. Si $k_1 = 0$, entonces $c \in C_0$ y $C(1) = C_2$, mientras que, si $k_1 = 2$, sucede que $c \in C_2$ y $C(1) = C_0$. Por tanto, $C_{k_1} \cap C(1) = \emptyset$. Además, para cada $m \in \mathbb{N} - \{1\}$:

$$C(m) \cap C(1) = C_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1},t_m} \cap C(1) \subset C_{k_1} \cap C(1) = \emptyset.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 < m < n$. Entonces $C(n) = C_{k_1,k_2,\ldots,k_m,k_{m+1},\ldots,k_{n-1},t_n} \subset C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, por lo que:

$$C(n) \cap C(m) \subset C_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1},k_m} \cap C_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1},t_m} = \emptyset.$$

Además, para cada $m \in \mathbb{N}$, $c \in C_{k_1,k_2,\ldots,k_m}$, así que $c \notin C_{k_1,\ldots,k_{m-1},tm}$. Esto prueba que $\{C(m)\}_m$ es una sucesión de subconjuntos abiertos y cerrados de C, ajenos dos a dos, y todos ellos contenidos en $C - \{c\}$. Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N} - \{1\}$, ocurre que $C(m) \subset C_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}}$ y, además:

$$\{c\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \bigcap_{m \in \mathbb{N} - \{1\}} C_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-1}}.$$

Así que, en la métrica de Hausdorff, $\lim\limits_{m \to \infty} C(m) = \{c\}$. Para terminar la prueba, resta verificar que $C - \{c\} \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C(m)$. Sea $d \in C - \{c\}$. Entonces existe una sucesión $\{s_m\}_m$ de elementos de $\{0, 2\}$ tal que $d = c_{s_1,s_2,\ldots}$, y, para alguna $n \in \mathbb{N}$, $s_n \neq k_n$. Sea $l = \min\{i \in \mathbb{N} \colon s_i \neq k_i\}$. Por las respectivas definiciones de l y de t_l, $(s_1, s_2, \ldots, s_{l-1}, s_l) = (k_1, k_2, \ldots, k_{l-1}, t_l)$. Luego, $d \in C_{k_1,k_2,\ldots,k_{l-1},t_l} = C(l)$. Por lo tanto, $C - \{c\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C(m)$. $\square$

El siguiente resultado caracteriza a los abanicos suaves. Una prueba se puede consultar en [15], [16, Teorema 9, pág. 27], [27, Corolario 4, pág. 9] y [20, Proposición 4, pág. 165].

Teorema 4.17. *Un abanico es suave si y sólo si se puede encajar en F_C.*

En vista del Teorema 4.17, si X es un abanico suave, en adelante supondremos que $X \subset F_C$. Notemos que el vértice del abanico X será también t, el vértice de F_c. Consideraremos las siguientes funciones:

- $\pi\colon F_C \to I$ la proyección al intervalo I ($\pi(\langle c, s\rangle) = s$, para cada $\langle c, s\rangle \in F_c$ y $\pi(t) = (\langle c, 0\rangle) = 0$);
- $\rho\colon F_C - \{t\} \to C$ definida para cada $\langle c, s\rangle \in F_C - \{t\}$ por $\rho(\langle c, s\rangle) = c$.

Observemos que ρ se puede obtener tomando la retracción natural de $F_C - \{t\}$ en $C \times \{1\}$ y haciendo la composición de tal retracción con la primera proyección. Luego, ρ es continua.

Supongamos que X es un abanico suave y que A es un subconjunto conexo y no vacío de $E(X)$. Por la continuidad de ρ, sucede que $\rho(A)$ es un subconjunto conexo y no vacío de C. Luego, existe $c \in C$ tal que $\rho(A) = \{c\}$. Por la definición de ρ, tenemos que $A \subset (t\langle c, 1\rangle]$ y, como $A \subset E(X)$, A es degenerado. Es decir, se cumple la siguiente observación.

Observación 4.18. *Si X es un abanico suave, entonces $E(X)$ es totalmente disconexo.*

Ahora, para un abanico suave no localmente conexo, consideraremos el caso en que $E(X)$ es una órbita de X.

Lema 4.19. *Sea X un abanico suave tal que $X \neq L(X)$. Si $E(X)$ es una órbita de X, entonces $O(X) \cap \mathrm{Cl}_X(E(X)) \neq \emptyset$ o bien, cada $x \in E(X)$ es punto de acumulación de $E(X)$.*

Demostración. Sea t el vértice de X. Se sigue de la Proposición 4.9, que existe $x \in O(X)$ tal que X no es conexo en pequeño en x. Denotemos por e al único punto en $E(X)$ tal que $x \in te$. Por [47, Teorema 5.12, pág. 76], existe un continuo de convergencia K en X que tiene al punto x (ver Definición 1.29). Luego, existe una sucesión $\{A_n\}_n$ de subcontinuos de X que converge, en la métrica de Hausdorff, a K y $A_n \cap K = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Notemos que si $t \in A_n$, para una infinidad de índices n, entonces $t \in \lim\limits_{n\to\infty} A_n = K$. Esto es una contradicción, pues $A_n \cap K = \emptyset$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que ninguna A_n tiene a t. Entonces, por la parte 3) del Teorema 4.6, cada A_n es un arco en X que no tiene al vértice t de X.

Como $x \in K$, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in A_n$ tal que la sucesión $\{x_n\}_n$ converge a x. También, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $e_n \in E(X)$ de manera que $x_n \in A_n \subset (te_n]$. Por la compacidad del espacio, podemos suponer, sin perdida de generalidad, que la sucesión $\{e_n\}_n$ converge a un elemento e_0 de X. Como X es suave, la sucesión de arcos $\{te_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, al arco te_0. Luego, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in (te_0]$. Puesto que e es el único punto extremo de X tal que $x \in te$, $e_0 \in (te]$. Por lo tanto:

$$K = \lim_{n\to\infty} A_n \subset te_0 \subset te.$$

Es decir, K es un arco que tiene a x y, por ser un continuo de convergencia, es no degenerado. Observemos que, como la sucesión de arcos $\{A_n\}_n$ converge a K y sus elementos son ajenos con K, para cada $m \in \mathbb{N}$, sólo un número finito de elementos de $\{A_n\}_n$ están contenidos en el arco te_m. Por tanto, podemos suponer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es el único elemento de la sucesión $\{A_m\}_m$ que está contenido en el arco te_n. Se sigue que, si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces $e_n \neq e_m$.

Si $e = e_0$, entonces $e \in E(X)$, es límite de una sucesión de puntos extremos distintos dos a dos; es decir x es punto de acumulación de $E(X)$ y como $E(X)$ es una órbita, cada punto de $E(X)$ es un punto de acumulación de $E(X)$. Si $e \neq e_0$, entonces $e_0 \in (te)$, por lo que $e_0 \in O(X) \cap \mathrm{Cl}_X(E(X))$. $\square$

Teorema 4.20. *Sea X un abanico suave, con vértice t, tal que $X \neq L(X)$. Si $E(X)$ es una órbita de X y $\mathrm{Cl}_X(E(X)) = E(X) \cup \{t\}$, entonces $\mathrm{Cl}_X(E(X))$ es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Primero probemos que $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ es totalmente disconexo. Supongamos que A un subconjunto conexo y no degenerado de $E(X) \cup \{t\}$. Como $E(X)$ es totalmente disconexo, existe $e \in E(X)$ tal que $t, e \in A$. Puesto que A es arco conexo, $te \subset A$. Esto implica que $(te) \subset A \cap O(X)$, así que $A \cap O(X) \neq \emptyset$. Esto es una contradicción, pues $A \subset E(X) \cup \{t\}$ y $(E(X) \cup \{t\}) \cap O(X) = \emptyset$. Por tanto, $\mathrm{Cl}_X(E(X))$ es totalmente disconexo.

Veamos que $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ es perfecto. Puesto que X no es localmente conexo, por el Lema 4.19, todo punto de $E(X)$ es un punto de acumulación $E(X)$.

Como además $\mathrm{Cl}_X(E)$ es compacto, se cumple que $\mathrm{Cl}_X(E(X))$ es perfecto. Luego, por el Teorema 3.41, concluimos que $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ es un conjunto de Cantor. $\square$

4.3.1. Abanicos $\frac{1}{3}$-homogéneos

En esta sección presentamos la clasificación de los abanicos $\frac{1}{3}$-homogéneos. Recordemos que $I = [0,1]$.

Teorema 4.21. *El abanico de Cantor es $\frac{1}{3}$-homogéneo.*

Demostración. Primero, probaremos que $O(F_C)$ es una órbita de F_C. Sean $x, y \in O(F_C)$. Entonces existen $c, d \in C$, y $r, s \in I - \{0,1\}$ tales que $x = \langle c, r\rangle$ y $y = \langle d, s\rangle$. Es conocido que C es homogéneo, de hecho, para cada $m \in \mathbb{N}$, C es m-homogéneo ([8, pág. 73]). Como, además, el intervalo $(0,1)$ es una órbita de I, podemos tomar dos homeomorfismos $g\colon I \to I$ y $f\colon C \to C$ tales que $g(0) = 0$, $g(r) = s$ y $f(c) = d$. Definamos una función $h\colon F_C \to F_C$ por $h\big(\langle a, u\rangle\big) = \langle f(a), g(u)\rangle$, para cada $\langle a, u\rangle \in F_C - \{t\}$ y $h(t) = t$. Como g y f son homemorfismos, por [26, 5.2, pág. 127], se cumple que h es un homeomorfismo. Además:

$$h(x) = h\big(\langle c, r\rangle\big) = \langle f(c), g(r)\rangle = \langle d, s\rangle = y.$$

Esto prueba que $O(F_C)$ es una órbita de F_C y, por el Corolario 4.8, F_C es $\frac{1}{3}$-homogéneo. $\square$

A partir del abanico de Cantor construiremos un abanico $F_{C_\omega} \subset F_C$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, hagamos:

$$F_i = \bigcup \left\{ t\left\langle c, \frac{1}{2^{i-1}} \right\rangle : c \in C \cap \left[\frac{(3)^{i-1} - 1}{(3)^{i-1}}, \frac{(3)^i - 2}{(3)^i} \right] \right\}.$$

Es decir, $\{F_i\}_i$ es una sucesión de abanicos homeomorfos al abanico de Cantor que, en la métrica de Hausdorff, convergen a $\{t\}$ y dos a dos se intersectan sólo en el punto t (ver Figura 4.2). Finalmente definimos:

$$F_{C_\omega} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i.$$

Por construcción, F_{C_ω} es un abanico suave con vértice t, pues $F_{C_\omega} \subset F_C$. Notemos que:

$$\mathrm{Cl}_{F_{C_\omega}}(E(F_{C_\omega})) = E(F_{C_\omega}) \cup \{t\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [E(F_i) \cup \{t\}]$$

$$\text{y} \quad O(F_{C_\omega}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [O(F_i)].$$

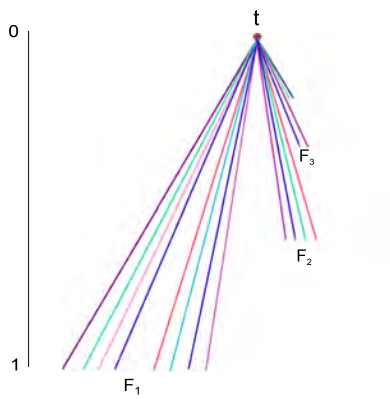


Figura 4.2: El abanico F_{C_ω}

Teorema 4.22. *El abanico suave F_{C_ω} es $\frac{1}{3}$-homogéneo.*

Demostración. Primero probaremos que $O(F_{C_\omega})$ es una órbita de F_{C_ω}. Sean $x, y \in O(F_{C_\omega})$, entonces existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $x \in O(F_i)$ y $y \in O(F_j)$. Los abanicos F_i y F_j son homeomorfos, pues ambos son homeomorfos al abanico de Cantor. Sea $f\colon F_i \to F_j$ un homeomorfismo. Notemos que $f(t) = t$ y $\{f(x), y\} \subset O(F_j)$. En el Teorema 4.21 probamos que $O(F_j)$ es una órbita de F_j, así que podemos tomar un homeomorfismo $g\colon F_j \to F_j$ tal que $g(f(x)) = y$. Definamos $h\colon F_{C_\omega} \to F_{C_\omega}$ de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} g\big(f(x)\big), & \text{si } x \in F_i; \\ f^{-1}(x), & \text{si } x \in F_j; \\ x, & \text{si } x \in F_k \text{ y } k \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

Como $\left\{F_i, F_j, \bigcup_{k \notin \{i,j\}} F_k\right\}$ es una familia finita de cerrados en F_{C_ω}, cuya intersección es $\{t\}$, y las funciones f, g y $1_{\bigcup_{k \neq i,j} F_k}$ son homeomorfismos que coinciden en t, sucede que h está bien definida y es un homeomorfismo tal que:

$$h(x) = g(f(x)) = y.$$

Esto prueba que $O(F_{C_\omega})$ es una órbita de F_{C_ω} y, por el Corolario 4.8, F_{C_ω} es $\frac{1}{3}$-homogéneo. $\square$

Un abanico suave que será importante para nuestro estudio lo construyó A. Lelek en 1961 en [37, S. 9. pág. 314], como un ejemplo de un dendroide cuyo conjunto de puntos extremos es denso y 1-dimensional. Tal abanico es conocido como el *abanico de Lelek*, al que denotaremos por L, y está caracterizado en el siguiente teorema, cuya prueba puede consultarse en [24, Corolario, pág. 33].

Teorema 4.23. *Sea X un abanico suave. Entonces $E(X)$ es denso en X si y sólo si X es homeomorfo al abanico de Lelek.*

A continuación mostramos una construcción del abanico de Lelek. Para esto primero presentaremos un dendroide llamado *"the Hairy Arc"* o *el Arco Peludo*. Esta última construcción es tomada de [1].

El Arco Peludo H será construido como la intersección de una sucesión $\{T_n\}_n$, de subconjuntos de I^2 que contienen a $I \times \{0\}$. Cada T_n será una unión finita de rectángulos $R(n,j)$ con lados paralelos a los ejes x y y, de manera que dos de tales rectángulos se intersectan en, a lo más, una de sus caras verticales. En cada rectángulo $R(n,j)$ seleccionaremos $2n+1$ rectángulos $R(n,j,k)$. T_{n+1} será la unión de todos estos rectángulos $R(n,j,k)$, los cuales serán renombrados por $R(n+1,j)$. El Arco Peludo es $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ (ver Figura 4.1).

Primero hagamos $T_1 = I^2$. Dividimos la base $I \times \{0\}$ de T_1 en tres intervalos de igual longitud I_1, I_2, I_3, etiquetados de izquierda a derecha. En cada intervalo I_j, para $j = 1, 2, 3$, construimos un rectángulo $R(2,j)$, de manera que las alturas de $R(2,1), R(2,2)$ y $R(2,3)$ son $\frac{1}{2}$, 1 y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Hagamos:

$$T_2 = \bigcup_{j=1}^{3} R(2,j).$$

Ahora supongamos que hemos construido T_n como una unión finita de rectángulos $R(n,j)$ cuyas bases $B(n,j)$, forman una partición del intervalo $[0,1]$, en subintervalos de igual longitud. Para cada j, sea $h(n,j)$ la altura del rectángulo $R(n,j)$. Dividimos ahora cada intervalo $B(n,j)$ en $(2n+1)$ intervalos de igual longitud, etiquetados por $I(n,j,k)$, $k = 1,\ldots,2n+1$, de izquierda a derecha. En cada intervalo $I(n,j,k)$, construimos un rectángulo $R(n,j,k)$ de altura $\frac{n+1-|n+1-k|}{n+1} \cdot h(n,j)$ y hacemos $T_{n+1} = \bigcup R(n,j,k)$. Definimos:

$$H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T_n.$$

Como $\{T_n\}_n$ es una sucesión decreciente de continuos, H es un continuo. Llamaremos al conjunto $B = I \times \{0\}$, ***la base de*** H. En [1, Teorema 3.11] se indica que H es un dendroide suave tal que la cerradura de cada componente de $H - B$ es un arco, al que llamaremos ***un pelo de*** H.

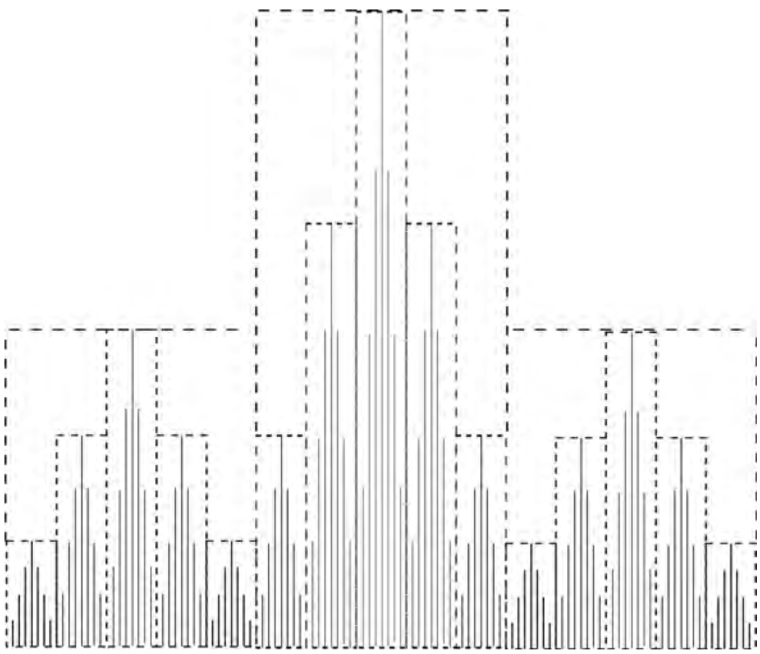


Figura 4.3: El Arco Peludo H

A cualquier punto en B le llamamos ***punto base***, si p es un punto base que no pertece a ningún pelo de H le llamamos ***punto base sin pelo*** y, si pq es un pelo de H con $p \in B$, decimos que p es el ***punto base del pelo*** pq y q es el ***punto terminal del pelo*** pq. No es difícil ver que $E(H)$ es el conjunto de los puntos terminales de los pelos de H y $R(H)$ es el conjunto de los puntos que son base de algún pelo.

En [1, Corolario 2.5, pág. 905] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.24. *$E(H)$ es denso en H y $E(H) \cup B$ es conexo.*

Corolario 4.25. *H/B es homeomorfo al abanico de Lelek L.*

Demostración. Sean $X = H/B$ y q la función cociente de H a X. Entonces q identifica la base B en un punto x_0 de X, y $q|_{H-B}$ es un homeomorfismo de $H - B$ en $X - \{x_0\}$. Luego, q es monótona y, por el Teorema 4.13, X es un dendroide suave. Ya que $R(X) \subset B$, tenemos que $q(R(X)) = \{x_0\}$. De esto se sigue que x_0 es el único punto de ramificación de X. Por lo tanto, X es un abanico suave.

Como $q|_{H-B}$ es un homeomorfismo y $E(H) \subset H - B$, se sigue que $q(E(H)) = E(X)$. Ya que $E(H)$ es denso en H (Teorema 4.24), $E(X)$ es denso en X. Del Teorema 4.23, se sigue que X es homeomorfo a L. $\square$

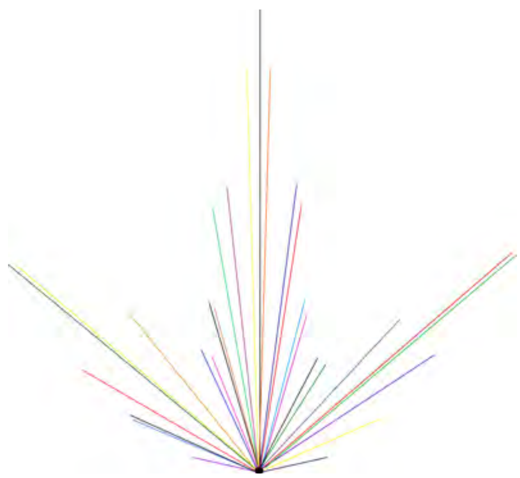


Figura 4.4: El Abanico de Lelek

En [2, Corolario 1.5, pág. 285] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 4.26. *Hay exactamente cinco tipos de puntos bajo homeomorfismo en H, los cuales se describen a continuación:*

1) *puntos extremos de la base B;*

2) *puntos extremos de los pelos;*

3) *puntos base sin pelo;*

4) *puntos base de algún pelo;*

5) *puntos en el interior relativo de algún pelo.*

Como una consecuencia del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.27. *El abanico de Lelek es $\frac{1}{3}$-homogéneo.*

Demostración. Por el Corolario 4.25, basta probar que $X = H/B$ es $\frac{1}{3}$-homogéneo. Sea x_0 el vértice de X. Notemos que B está formado por las tres órbitas descritas en 1), 3) y 4) del Teorema 4.26. Entonces, bajo el cociente H/B, dichas órbitas se identifican en la órbita $\{x_0\}$ de X. Ya que $X - \{x_0\}$ y $H - B$ son homeomorfos y la imagen, bajo el cociente, de las órbitas descritas en 2) y 5) son $O(X)$ y $E(X)$, respectivamente, se tiene que $O(X)$ y $E(X)$ también son órbitas de X. Esto prueba que X y, por tanto también L, son $\frac{1}{3}$-homogéneos. $\square$

Por los Teoremas 4.21, 4.22, 4.27 y el Corolario 3.18, el abanico de Cantor, el abanico de Lelek, F_{C_ω}, F_ω y los n-odos, son $\frac{1}{3}$-homogéneos. Lo que resta de la sección está dedicado a probar que éstos son los únicos abanicos $\frac{1}{3}$-homogéneos. La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [19, Teorema 1 (2), pág.74].

Teorema 4.28. *Sea X un abanico suave. Entonces $E(X)$ es cerrado si y sólo si existe un encaje h, de X en F_C, tal que $h(E(X)) \subset E(F_C)$.*

Teorema 4.29. *Sea X un abanico suave tal que $E(X)$ es una órbita de X. Si $E(X)$ es cerrado, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que X es un n-odo simple o bien, X es homeomorfo al abanico de Cantor.*

Demostración. Supongamos que X no es un n-odo simple. Entonces $E(X)$ es infinito. Tomemos una sucesión $\{e_m\}_m$ de puntos de $E(X)$ distintos dos a dos. Por la compacidad del espacio, podemos suponer que $\{e_m\}_m$ converge a un punto, digamos e. Como $E(X)$ es cerrado, se cumple que $e \in E(X)$. Por lo tanto, $e \in E(X)$ es un punto de acumulación de $E(X)$ y, ya que $E(X)$ es una órbita de X, $E(X)$ coincide con el conjunto de sus puntos de acumulación. Por la Observación 4.18, $E(X)$ es totalmente disconexo. Puesto que $E(X)$ es cerrado, es compacto y, por el Teorema 3.41, $E(X)$ es un conjunto de Cantor.

Además, del Teorema 4.28, podemos suponer que $X \subset F_C$ de manera que $E(X) \subset E(F_C) = C \times \{1\}$. Se sigue que $E(X) = C_X \times \{1\}$, donde C_X es un conjunto de Cantor contenido en C. Luego, $X = (C_X \times I)/(C_X \times \{0\})$. Por lo tanto, X es homeomorfo a F_C. $\square$

De los Teoremas 4.21 y 4.29 obtenemos la siguiente caracterización del abanico de Cantor.

Corolario 4.30. *Un abanico suave X es homeomorfo al abanico de Cantor si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) *X no es localmente conexo;*

2) *$E(X)$ es cerrado en X y, además, es una órbita de X;*

Ahora trabajaremos con los abanicos no localmente conexos, cuyo conjunto de puntos extremos no es cerrado.

Teorema 4.31. *Un abanico suave X es homeomorfo a F_{C_ω} si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1) *X no es localmente conexo;*

2) *$E(X)$ es una órbita de X;*

3) $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = E(X) \cup \{t\}$, *donde t es el vértice de X.*

Demostración. Por construcción, es claro que F_{C_ω} cumple 1) y 3) (ver pág. 152). Además, el Teorema 4.22 indica que F_{C_ω} es $\frac{1}{3}$-homogéneo, por lo que cumple 2).

Ahora, supongamos que X es un abanico suave que satisface 1), 2) y 3). Como consecuencia del Teorema 4.20, $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ es un conjunto de Cantor. Luego, por el Teorema 4.16, existe una sucesión $\{E_i\}_i$ de subconjuntos abiertos y cerrados de $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$, ajenos dos a dos y tales que:

$$E(X) = \mathrm{Cl}_X\left(E(X)\right) - \{t\} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} E_i = \{t\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos:

$$X(i) = \bigcup_{e\in E_i} te.$$

Sea $i \in \mathbb{N}$, queremos ver que $X(i)$ es homeomorfo a F_C. Es claro que $X(i)$ es conexo. Para probar que $X(i)$ es cerrado en X, consideremos una sucesión $\{x_n\}_n$ de elementos de $X(i)$, convergente a un punto $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por e_n al único punto de E_i tal que $x_n \in te_n$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{e_n\}_n$ converge y denotemos por e a su límite.

Puesto que X es suave, $\{te_n\}_n$ converge al arco te. Esto implica que $x \in te$ y, como E_i es cerrado en X, $e \in E_i$. Por la definición de $X(i)$, $te \subset X(i)$, así que $x \in X(i)$. Por lo tanto, $X(i)$ es cerrado en X. Luego, $X(i)$ es un subcontinuo de X; es decir, $X(i)$ es un abanico. Observemos que $E(X(i)) = E_i$ es cerrado en $X(i)$ y, por el Teorema 4.29, $X(i)$ es homeomorfo al abanico de Cantor.

Sean $x \in X$ y $e \in E(X)$ tal que $x \in te$. Luego, existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $e \in E_i$, por lo que $x \in X(i)$. Hemos probado que:

$$X = \bigcup X(i).$$

Como, además, $\{E_i\}_i$ converge a $\{t\}$ y X es suave, la sucesión de los abanicos $\{X(i)\}_i$, también converge a $\{t\}$. Es decir, X es la unión de una sucesión de abanicos de Cantor que, dos a dos, se intersectan únicamente en el vértice t de X y que convergen a $\{t\}$. Por lo tanto, X es homeomorfo a F_{C_ω}. □

Corolario 4.32. *Sea X un abanico suave y no localmente conexo tal que $E(X)$ no es cerrado ni es denso en X. Entonces X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si X es homeomorfo al abanico F_{C_ω}*

Demostración. Por los Teoremas 4.22 y 4.31, F_{C_ω} cumple las condiciones del corolario.

Ahora supongamos que X es un abanico suave, no localmente conexo y $\frac{1}{3}$-homogéneo tal que $E(X)$ no es cerrado ni denso en X.

Supongamos que $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \cap O(X) \neq \emptyset$. Como $E(X)$ y $O(X)$ son dos órbitas de X, por la parte 2) del Teorema 1.14, tenemos que $O(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$. Luego:

$$X = \mathrm{Cl}_X(O(X)) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big).$$

Esto contradice que $E(X)$ no es denso en X. En consecuencia, $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \cap O(X) = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \subset E(X) \cup \{t\}$ y, como $E(X)$ no es cerrado:

$$\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = E(X) \cup \{t\}.$$

Por lo tanto, X cumple las hipótesis del Teorema 4.31. Esto implica que X es homeomorfo al abanico F_{C_ω}. $\square$

Finalmente la caracterización de los abanicos suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.33. *Un abanico suave X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:*

1) *Existe $n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$ tal que X es un n-odo simple;*

2) *X es homeomorfo a F_ω;*

3) *X es homeomorfo al abanico de Cantor;*

4) *X es homeomorfo al abanico de Lelek;*

5) *X es homeomorfo a F_{C_ω}.*

Demostración. Si X es localmente conexo entonces, X es una dendrita y, por el Corolario 3.18, se cumple que X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si ocurre 1) o 2). Supongamos entonces que X no es localmente conexo. Si $E(X)$ es cerrado en X, por el Corolario 4.30, tenemos que X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si X es homeomorfo al abanico de Cantor; es decir, se cumple 3). Si $E(X)$ es denso en X, por los Teoremas 4.23 y 4.27, tenemos que X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si X es homeomorfo al abanico de Lelek; es decir, se cumple 4). Finalmente, si $E(X)$ no es cerrado ni denso en X, el Corolario 4.32 indica que X es $\frac{1}{3}$-homogéneo si y sólo si X es homeomorfo a F_{C_ω}. $\square$

4.3.2. Abanicos $\frac{1}{4}$-homogéneos

En esta sección estudiamos a los abanicos suaves $\frac{1}{4}$-homogéneos y, aunque no presentaremos su clasificación, encontramos algunas propiedades que cumplen dichos abanicos. Para un abanico suave X, definimos:

$$T(X) = O(X) \cap \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big).$$

Notemos que, en general, $T(X)$ puede ser vacío, como es el caso del abanico de Cantor, pero también puede ser todo $O(X)$, como en caso del abanico de Lelek. Sin embargo, como veremos en el siguiente teorema, en los abanicos $\frac{1}{4}$-homogéneos, $T(X)$ es un subconjunto propio y no vacío de $O(X)$ y, de hecho, será importante para nuestro estudio, como lo muestra el siguiente resultado que describe las órbitas de X.

Teorema 4.34. *Sea X un abanico suave $\frac{1}{4}$-homogéneo, con vértice t. Entonces $T(X)$ y $O(X) - T(X)$ son no vacíos y, junto con $\{t\}$ y $E(X)$, son las cuatro órbitas de X.*

Demostración. Por la parte 4) del Teorema 4.6, sabemos que $\eta_{O(X)} \geq \eta_{E(X)}$. Ya que X es $\frac{1}{4}$-homogéneo y $\{t\}$ es una órbita de X, se cumple que:

$$\eta_{E(X)} = 1 \quad \text{y} \quad \eta_{O(X)} = 2.$$

Supongamos que $E(X)$ es cerrado en X. Por el Teorema 4.29, X es un n-odo simple o X es homeomorfo al abanico de Cantor, los cuales son $\frac{1}{3}$-homogeneos (Teorema 4.21 y Observación 3.40). Pero esto contradice que X tiene cuatro órbitas. Luego, $E(X)$ no es cerrado en X. Además, por la parte 3) del Teorema 4.31, $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \neq E(X) \cup \{t\}$. Por lo tanto:

$$T(X) = O(X) \cap \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) \neq \emptyset.$$

Ya que el abanico de Lelek también es $\frac{1}{3}$-homogéneo, X no es homeomorfo al abanico de Lelek, por lo que $E(X)$ no es denso en X. Esto implica que

$O(X) \not\subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$. Por lo tanto, $O(X) - T(X) = O(X) - \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$ es no vacío. Luego, $\{t\}$, $E(X)$, $T(X)$ y $O(X) - T(X)$ son subconjuntos no vacíos de X, ajenos dos a dos, y su unión es X.

Notemos que, si $h \in \mathcal{H}(X)$, de la parte 3) del Teorema 4.3 se sigue que $h(t) = t$ y $h(E(X)) = E(X)$. Además:

$$h\big(T(X)\big) = h\big(O(X)\big) \cap \mathrm{Cl}_X\big(h(E(X))\big) = O(X) \cap \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = T(X)$$

y

$$h\big(O(X) - T(X)\big) = h(O(X)) - h\big(T(X)\big) = O(X) - T(X).$$

Esto implica que, los conjuntos mencionados son las cuatro órbitas de X. $\square$

Concluimos esta sección con el siguiente resultado que proporciona algunas propiedades que cumplen las cuatro órbitas de un abanico suave $\frac{1}{4}$-homogéneo.

Teorema 4.35. *Sea X un abanico suave $\frac{1}{4}$-homogéneo, con vértice t. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) *si $e \in E(X)$, entonces $\{t, e\} \subset \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$;*
2) $\mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) = E(X) \cup \{t\} \cup T(X)$;
3) $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ *es un conjunto de Cantor;*
4) $O(X) - T(X)$ *es abierto y denso en X.*

Demostración. Por el Teorema 4.34, las cuatro órbitas de X son los conjuntos no vacíos: $E(X)$, $T(X)$, $O(X) - T(X)$ y $\{t\}$, donde t es el vértice de X. Antes de iniciar la prueba de este teorema, primero mostraremos tres afirmaciones.

a) Si $e \in E(X)$, entonces $T(X) \cap (te) \neq \emptyset$ y $\big(O(X) - T(X)\big) \cap (te) \neq \emptyset$.

Sea $e \in E(X)$. Supongamos que $T(X) \cap (te) = \emptyset$. Puesto que $E(X)$ es una órbita de X, para cada $d \in E(X)$, se cumple que $T(X) \cap (td) = \emptyset$. Como $t \notin T(X)$, se sigue que $T(X)$ es vacío, lo cual contradice que es una órbita. Luego, podemos concluir que $T(X) \cap (te) \neq \emptyset$. De manera similar, si $\big(O(X) - T(X)\big) \cap (te) \neq \emptyset$, para cada $d \in E(X)$, $\big(O(X) - T(X) \cap (td)\big) = \emptyset$, lo que implica que $O(X) - T(X)$ es vacío. Esto es una contradicción y, así, $O(X) - T(X) \cap (te) \neq \emptyset$. Esto prueba a).

Notemos que si $\big(O(X) - T(X)\big) \cap \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) \neq \emptyset$, entonces, por la parte 2) del Teorema 1.14, se cumple que $O(X) - T(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$. Como, por definición, $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) \subset \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$, se tiene que $O(X) - T(X) \subset O(X) \cap \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big) = T(X)$. Ya que esto es una contradicción, hemos probado la siguiente igualdad:

b) $\big(O(X) - T(X)\big) \cap \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) = \emptyset$.

Ahora, probaremos la siguiente afirmación:

c) Si $e \in E(X)$, entonces no existe $x \in X - \{e\}$ tal que $xe \cap T(X) = \{x\}$.

Supongamos, por el contrario, que $e \in E(X)$ y $x \in X - \{e\}$ son tales que $xe \cap T(X) = \{x\}$. Veamos que x es el único punto de $T(X) \cap te$. Supongamos que $y \in T(X) \cap te$. Como $T(X)$ es una órbita de X, podemos tomar $f \in \mathcal{H}(X)$ tal que $f(x) = y$. Notemos que $f(e)$ es el elemento de $E(X)$ tal que $f(x) \in tf(e)$; es decir, $f(e) = e$. Luego, $\{y\} = f\big(xe \cap T(X)\big) = ye \cap T(X)$.

Como $x, y \in te$, entonces $te = ty \cup ye = tx \cup xe$. Esto implica que $x \in ye$ o bien $y \in xe$. Puesto que $xe \cap T(X) = \{x\}$ y $ye \cap T(X) = \{y\}$, en los dos casos se cumple que $y = x$. Por lo tanto, x es el único punto de $T(X) \cap te$. Se sigue que $(tx) \cup (xe)$ es un subconjunto de la órbita $O(X) - T(X)$. Sean $a \in (tx)$, $b \in (xe)$ y $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) = b$. Notemos que, como $h(a) \in te$, $h(e) = e$, por lo que $h(x) \in te \cap T(X)$. Luego, $h(x) = x$ y $h(tx) = tx$. Esto contradice el hecho de que $h(a) \in (xe)$. Por lo tanto, se cumple c). Un argumento similar muestra que:

d) No existe $x \in X - \{t\}$ tal que $tx \cap T(X) = \{x\}$.

Ahora probaremos 1). Como X es suave consideraremos que $X \subset F_C$ y denotaremos por π a la proyección de F_C al intervalo I (ver pág. 150). Supongamos, por el contrario, que existe $e \in E(X)$ tal que $e \notin \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$.

Como $\mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$ es un subconjunto compacto de te, existe $x \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$ tal que $\pi(x) \geq \pi(a)$, para cada $a \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$. Notemos que, si $a \in (xe]$, entonces $\pi(x) < \pi(a)$, por lo que $a \notin T(X)$. Luego, $(xe] \cap T(X) = \emptyset$ y, por a), $x \neq t$. Puesto que $x \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$, por hipótesis, $x \neq e$. Así que, $x \in (te) \subset O(X)$, lo que implica que $x \in T(X)$. Se sigue que $xe \cap T(X) = \{x\}$. Como esto contradice c), tenemos que $e \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$.

Ahora, si $t \notin \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$, existe $x \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$ tal que $\pi(x) \leq \pi(a)$, para cada $a \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$. Luego, $[tx) \cap T(X) = \emptyset$. Aplicando a) y el hecho de que $t \notin \mathrm{Cl}_X(T(X))$, se cumple que $t \neq x \neq e$. Entonces, $x \in (te) \subset O(X)$, lo que implica que $x \in T(X)$. Se sigue que $tx \cap T(X) = \{x\}$. Como esto contradice d), concluimos que $e \in \mathrm{Cl}_X\big(T(X) \cap te\big)$. Esto termina la prueba de 1).

Notemos que:

$$O(X) - T(X) = \big(X - (E(X) \cup \{t\})\big) - T(X) = X - \big(E(X) \cup \{t\} \cup T(X)\big).$$

Por 1), tenemos que $\{t\} \cup E(X) \subset \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ y, por b), se cumple que:

$$\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) \subset X - \big(O(X) - T(X)\big) = \{t\} \cup E(X) \cup T(X).$$

Por lo tanto, $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) = \{t\} \cup T(X) \cup E(X)$. Esto implica que $\mathrm{Cl}_X(E(X)) \subset \mathrm{Cl}_X(T(X))$ y, por definición, $T(X) \subset \mathrm{Cl}_X(E(X))$. Luego, $\mathrm{Cl}_X(T(X)) = \mathrm{Cl}_X(E(X))$, lo que concluye la prueba de 2).

Ahora probemos 3). Supongamos que existe una componente no degenerada A de $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$. Luego, A es un subcontinuo no degenerado de X. Supongamos que $t \notin A$. Por la parte 3) del Teorema 4.6, A es un arco y, por 2), existen $a, b \in T(X) \cup E(X)$ y $e \in E(X)$ de modo que $A = ab \subset (te]$. Luego:

$$(ab) \subset (T(X) \cup E(X)) \cap (te) \subset T(X).$$

Ya que $T(X)$ es una órbita de X, para $x \in (ab)$, podemos tomar $h \in \mathcal{H}(X)$ tal que $h(a) = x$. Se sigue de 2) y el hecho de que $T(X)$, $E(X)$ y $\{t\}$ son órbitas de X, que $h\big(\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)\big) = \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$. Así que, $h(A)$ es la componente de $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ que tiene a $h(a) = x$; es decir, $h(A) = A$. Por lo tanto $h(ab) = ab$, $h(a) = x$ y $x \in (ab)$. Como lo anterior es una contradicción, concluimos que $t \in A$.

Como todas las componentes de $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ tienen al punto t, tenemos que $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ es conexo. Luego, $\mathrm{Cl}_X(T(X))$ es un subcontinuo de X, por lo que es arcoconexo y, como contiene a $E(X) \cup \{t\}$, sucede que $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big) = X$. Esto contradice que $O(X) - T(X)$ es no vacío (Teorema 4.34) y se sigue que las componentes de $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ son degeneradas. Por lo tanto $\mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big)$ es totalmente disconexo y compacto. Por 2), cada punto de $E(X) \cup \{t\}$ es límite de elementos de $T(X)$. Como $T(X) \subset \mathrm{Cl}_X(E(X))$, cada punto de $T(X)$ es límite de elementos de $E(X)$. Luego, cada punto de $T(X)$ también es límite de elementos de $T(X)$. Esto prueba $\mathrm{Cl}_X(T(X))$ es un conjunto de Cantor.

Para probar 4), notemos que:

$$O(X) - T(X) = X - \big(E(X) \cup \{t\} \cup T(X)\big) = X - \mathrm{Cl}_X\big(T(X)\big).$$

Luego, $O(X) - T(X)$ es abierto en X. Ya que $\mathrm{Cl}_X(T(X))$ es un conjunto de Cantor, $\mathrm{Cl}_X(T(X))$ es denso en ninguna parte; es decir, $X - \mathrm{Cl}_X(T(X))$ es denso en X. Por lo tanto, $O(X) - T(X)$ es denso en X.

□

4.4. Abanicos no Suaves

En esta sección presentamos algunos resultados de los abanicos no suaves, en particular, de los abanicos no suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos. El Teorema 4.40 indica que el conjunto de puntos extremos de un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo es denso. Actualmente estamos trabajando sobre la construcción de un ejemplo de un abanico con esas características, mediante la modificación de cada paso de la construcción del abanico de Lelek. Ya que ese trabajo aún no está concluido, sólo hemos presentado aquí las propiedades obtenidas hasta al momento que deberían cumplir dichos abanicos.

En esta sección trabajamos con abanicos no suaves, sin embargo, necesitamos medir, de cierta manera, el "grado de no suavidad". A continuación introducimos algunas definiciones que ayudarán a tal propósito.

Definición 4.36. *Sean X un dendroide y $p \in X$. Decimos que X* **es suave en** p **con respecto de** a*, si para cada sucesión $\{a_n\}_n$ tal que $a_n \to a$, se cumple que $pa_n \to pa$.*

Definimos también el siguiente conjunto:

$$S(p) = \{a \in X : X \text{ es suave en } p \text{ con respecto de } a\}.$$

A continuación presentamos algunos resultados para $S(p)$. El Lema 4.37 indica que, en el caso particular de un abanico con vértice t, si un punto $a \in S(t)$, entonces toda su órbita está contenida en $S(t)$, lo cual ayudará a diferenciar las órbitas de dicho abanico.

Lema 4.37. *Sea X un dendroide. Si $a \in S(p)$ y $h \in \mathcal{H}(X)$, entonces $h(a) \in S(h(p))$.*

Demostración. Sean $a \in S(p)$ y $h \in \mathcal{H}(X)$. Notemos que, si $\{b_n\}_n$ es una sucesión en X que converge a $h(a)$, entonces $\{h^{-1}(b_n)\}_n$ es una sucesión en X que converge a a y, como $a \in S(p)$, entonces la sucesión de arcos $\{ph^{-1}(b_n)\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, al arco pa. Aplicando nuevamente h tenemos que $\{h(p)b_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, al arco $h(p)h(a)$. Luego, $h(a) \in S\big(h(p)\big)$. $\square$

El siguiente lema es un caso particular del resultado probado en [22, Corolario 10, pág. 124].

Lema 4.38. *Si X es un dendroide y $p \in X$, entonces $S(p)$ es un subconjunto G_δ y denso en X.*

De la definición de abanico suave es fácil notar que un abanico X, con vértice t, es suave si y sólo si $S(t) = X$; es decir, si X es suave en el vértice respecto a cualquier punto de X. Si X no es suave en t con respecto de ningún punto, entonces $S(t) = \emptyset$. Los siguientes dos resultados serán útiles para probar el Teorema 4.40, el cual describe el conjunto $S(t)$ de un abanico no suave y $\frac{1}{3}$-homogéneo.

Lema 4.39. *Sea X un abanico con vértice t. Si X es $\frac{1}{3}$-homogéneo y $S(t) \cap O(X) \neq \emptyset$, entonces $X = S(t)$.*

Demostración. Puesto que $O(X) \cap S(t) \neq \emptyset$ y $O(X)$ es una órbita de X, por el Lema 4.37:

$$O(X) \subset S(t).$$

Veamos que $E(X) \subset S(t)$. Supongamos que $e \in E(X)$ y que $\{e_n\}_n$ es una sucesión de elementos de X que converge a e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} te_n \neq te$. Hagamos $Y = \lim\limits_{n\to\infty} te_n$. Entonces, Y es un subcontinuo de X, por lo que es arcoconexo y, ya que $t, e \in Y$, se cumple que $te \subsetneq Y$. Tomemos $b \in Y - te$ y $e_b \in E(X)$ tal que $b \in te_b$. Notemos que, si $e \in te_b$, entonces $b \in Y \cap (ee_b]$ y $(ee_b) \subset$

$O(X) - te$; si $e \notin te_b$, entonces $(tb) \subset [O(X) - te] \cap Y$. En cualquier caso, podemos tomar un elemento en $Y \cap [O(X) - te]$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que b es tal elemento y tomemos $a \in (te)$. Como $a, b \in Y$, existen sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ tales que:

$$a_n, b_n \in te_n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \in te \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b \notin te.$$

Luego, $a, b \in S(t)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $c_n \in \{a_n, b_n\}$ tal que $a_n, b_n \in tc_n$. Observemos que c_n es el último punto, entre a_n y b_n, en el recorrido de t a e_n. Sea $c = \lim_{n\to\infty} c_n$. Notemos que $c \in \{a, b\}$, por lo que $c \in S(t)$ y, así, tc_n converge, en la métrica de Hausdorff, a tc. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n, b_n \in tc_n$, sucede que $a, b \in \lim_{n\to\infty} tc_n = tc$. Esto contradice el hecho de que $a \in te$ y $b \notin te$. Por lo tanto, $Y = te$, lo que indica que $e \in S(t)$. Hemos probado que:

$$E(X) \subset S(t).$$

Ahora veamos que $t \in S(t)$. Supongamos que $\{t_n\}_n$ es una sucesión que converge a t y que $Z = \lim_{n\to\infty} tt_n \neq \{t\}$. Tomemos $x \in Z - \{t\}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in tt_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Como ya probamos que $X - \{t\} \subset S(t)$, en particular, $x \in S(t)$. Por tanto, $\{tx_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, a tx.

Sea $y \in (tx)$. Ya que $tx \subset \lim_{n\to\infty} x_n t_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in x_n t_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Como $y \in S(t)$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} ty_n = ty$ y, como $x_n \in ty_n$, $x \in \lim_{n\to\infty} ty_n = ty$. Esto contradice que $y \in (tx)$. Por lo tanto, $\{tt_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, a $\{t\}$, lo que indica que $t \in S(t)$. Hemos probado que $X = S(t)$; es decir, X es suave. □

Finalmente concluimos esta sección, y el capítulo, con los siguientes dos resultados que indican algunas propiedades que cumplen los abanicos no suaves $\frac{1}{3}$-homogéneos.

Teorema 4.40. *Sea X un abanico no suave $\frac{1}{3}$-homogéneo, con vértice t. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $E(X) \subset S(t) \subset E(X) \cup \{t\}$;

2) *$E(X)$ es denso en X.*

Demostración. Como X no es suave, entonces $X \neq S(t)$ y, por el Lema 4.39, $O(X) \cap S(t) = \emptyset$. Luego, $S(t) \subset X - O(X) = E(X) \cup \{t\}$. El Lema 4.38 indica que $S(t)$ es denso en X, por lo que $S(t) \not\subset \{t\}$. Se sigue que $S(t) \cap E(X) \neq \emptyset$ y, por el Lema 4.37 y el hecho de que $E(X)$ es una órbita de X, se cumple que $E(X) \subset S(t)$. Esto concluye la prueba de 1).

Por el Lema 4.38, sabemos que $\mathrm{Cl}_X\big(S(t)\big) = X$ y, por 1), tenemos que $E(X) = S(t) - \{t\}$. Luego $X = \mathrm{Cl}_X\big(S(t)\big) = \mathrm{Cl}_X\big(S(t) - \{t\}\big) = \mathrm{Cl}_X\big(E(X)\big)$. Esto prueba 2). □

Proposición 4.41. *Sea X un abanico no suave con vértice t. Si $e \in E(X)$ y $\{x_n\}_n$ es una sucesión convergente a un punto $x \in te$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} tx_n \not\subset te$, entonces $t \notin S(t)$. Si, además, X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, entonces $S(t) = E(X)$.*

Demostración. Tomemos $y \in \lim\limits_{n\to\infty} tx_n - te$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in tx_n$ tal que $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{y_n x_n\}_n$ converge, en la métrica de Hausdorff, y hagamos $Y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n x_n$. Notemos que Y es un subcontinuo de X y, por la arcoconexidad de Y, $yx \subset Y$. Como $y \notin te$ y $x \in te$, sucede que $t \in yx$ y, en consecuencia, $t \in Y$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n \in y_n x_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Observemos que, para cada n, se cumple que $tx_n = ty_n \cup y_n x_n$, y $t_n \in y_n x_n$; es decir, $y_n \in tt_n$. Por lo tanto, $y \in \lim\limits_{n\to\infty} tt_n$, pero $y \neq t$. Esto prueba que $t \notin S(t)$. Si, además, X es $\frac{1}{3}$-homogéneo, de la parte 1) del Teorema 4.40, se sigue que $S(t) = E(X)$. □

Capítulo 5

Continuos de Elsa

5.1. Definiciones y Algunos Resultados Previos

En este breve capítulo estudiaremos los continuos que se definen a continuación.

Definición 5.1. *Un* ***continuo de Elsa*** *es una compactación métrica del rayo $J = (0, 1]$ con residuo un arco. Si E es un continuo de Elsa diremos simplemente que E es un E-**continuo**.*

Como veremos más adelante, un E-continuo tiene al menos cuatro órbitas (Lema 5.2). Nuestro objetivo es probar que en una clase específica de E-continuos, los que están separados (Definición 5.9), el único elemento $\frac{1}{4}$-homogéneo es el continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ (pág. 172).

Sea E un E-continuo. Entonces $J(E)$ denotará **al rayo cuya compactación es** E; es decir, $J(E)$ es la copia del rayo $J = (0, 1]$ encajada de manera densa en E. E^* denotará al **residuo de la compactación** E; es decir, $E^* = E - J(E)$. En general, para cada $A \subset E$, A^* denotará el conjunto $\mathrm{Cl}_E(A) - A$.

Dados $p, q \in J(E)$ o bien $p, q \in E^*$, pq denotará **el arco** contenido en $J(E)$ o en E^* **que une** p y q; (pq) será **el interior variedad del arco** pq; es decir, $(pq) = pq - \{p, q\}$. Por último, $d(p, q)$ denotará el **diámetro del arco** pq.

Lema 5.2. *Si E es un E-continuo y p_0 es el punto inicial del rayo $J(E)$, entonces E tiene al menos cuatro órbitas y estas son, las órbitas de E contenidas en E^* más las dos órbitas $J(E) - \{p_0\}$ y $\{p_0\}$.*

Demostración. Sean $h\colon E \to E$ un homeomorfismo y p, q los extremos del arco E^*. Notemos que $J(E)$ es exactamente el conjunto de puntos de conexidad local de E. Sabemos que E^* es el complemento de $J(E)$, por lo que $h(J(E)) = J(E)$ y $h(pq) = pq$. Entonces, $h|_{pq}\colon pq \to pq$ y $h|_{J(E)}\colon J(E) \to J(E)$ son homeomorfismos. Esto implica que, $h(\{p,q\}) = \{p,q\}$, $h\big((pq)\big) = (pq)$, $h(p_0) = p_0$ y $h\big(J(E) - \{p_0\}\big) = J(E) - \{p_0\}$. Luego, E tiene al menos cuatro órbitas, dos de ellas contenidas en E^*. No es difícil ver que $J(E) - \{p_0\}$ y $\{p_0\}$ son las dos órbitas de E contenidas en el rayo $J(E)$. $\square$

Definición 5.3. *Sea E un E-continuo. Definimos **el tipo de** E como el conjunto, $T(E)$, de puntos $p \in E^*$ para los cuales existen una sucesión $\{p_iq_i\}_i$ de arcos contenidos en $J(E)$ que convergen, en la métrica de Hausdorff, a un arco del cual p es un punto final y*

$$\lim_{i\to\infty} p_i = \lim_{i\to\infty} q_i \neq p.$$

La Figura 5.1 ejemplifica la Definición 5.3. Más adelante en el Teorema 5.8 probamos que, para un E-continuo E, los dos extremos del arco E^* pertenecen a $T(E)$ y que, además, el único E-continuo cuyo tipo tiene exactamente dos elementos, es el continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$.

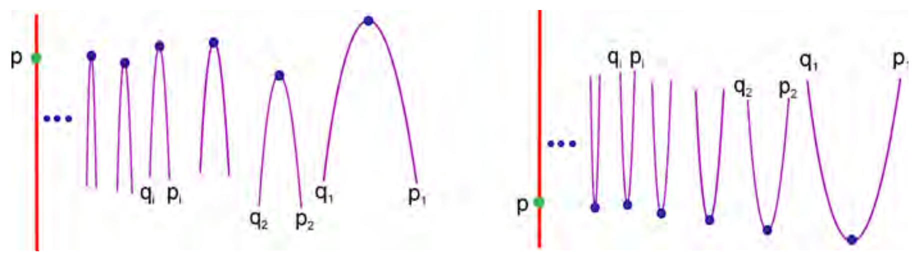


Figura 5.1

En [7, Teorema 2.2, pág. 226] se enuncia el siguiente resultado, cuya prueba se sigue de la Definición 5.3.

Teorema 5.4. *Si E es un E-continuo, entonces $T(E)$ es un invariante topológico.*

El Teorema 5.5 proporciona un encaje que será de utilidad para nuestro estudio. Dicho teorema fué probado por M. M. Awartani en [7, Teorema 2.3, pág. 226]. Recordemos que I denota el intervalo $[0, 1]$.

Teorema 5.5. *Si E es un E-continuo, entonces E puede ser encajado en I^2 como la cerradura de la gráfica de una función $f: (0, 1] \to I$ que satisface las siguientes condiciones:*

1) *Existe una sucesión $V(E)$ de puntos en $J(E)$ tal que cada punto de $V(E)$ es un mínimo local estricto o un máximo local estricto de f. Más aún, f es lineal entre cada dos puntos consecutivos de $V(E)$;*

2) $\big(V(E)\big)^* = T(E)$.

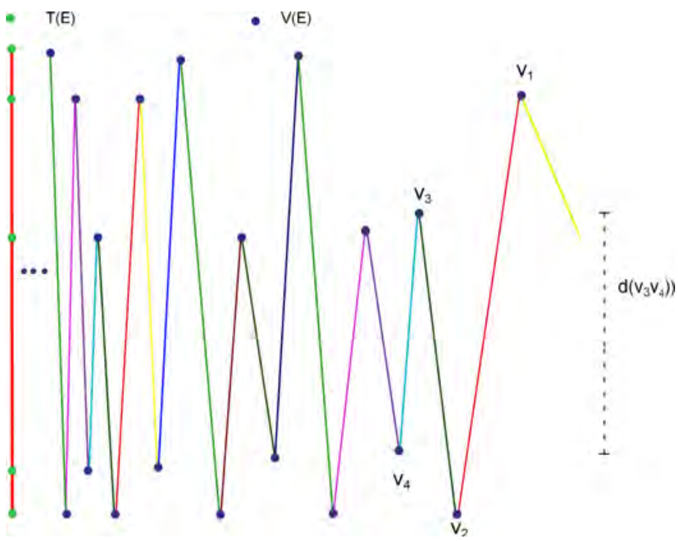


Figura 5.2: E-continuo encajado en $\mathbb{R}^2$ como en el Teorema 5.5

En adelante E denotará un E-continuo encajado el plano como en el Teorema 5.5. Entonces, nuestros E-continuos son tales que:

$J(E)$ es la gráfica de la función f descrita en el Teorema 5.5 y $E^* = \{0\} \times I$.

Denotaremos por π_1 y π_2, a la primera y segunda proyecciones de E en I, respectivamente. Notemos que los elementos de $J(E)$ están ordenados linealmente, naturalmente, por el orden en su primera coordenada, y los elemenos de E^* están ordenados linealmente por el orden en su segunda coordenada. El siguiente lema se puede consultar en [6, Lema 2.4, pág. 206].

Lema 5.6. *Sean E_1 y E_2 dos E-continuos que son la cerradura de las gráficas de las funciones $f, g\colon (0,1] \to I$, respectivamente. Si $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - g(x)| = 0$, entonces la función $h\colon E_1 \to E_2$, definida por:*

1) $h|_{E_1^*} = 1_{E_1^*}$;

2) $h\big((x, f(x))\big) = (x, g(x))$,

es un homeomorfismo.

5.2. E-continuos Separados $\frac{1}{4}$-homogéneos

Recordemos que el continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$, al que denotaremos por S_1, es la cerradura de la gráfica de la función sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ o equivalentemente:

$$S_1 = \Big(\{0\} \times [-1,1]\Big) \cup \left\{\left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x \in (0,1]\right\}.$$

A continuación presentamos dos resultados, el primero proporciona un encaje del continuo sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ y el segundo caracteriza a este E-continuo en términos del tipo.

Lema 5.7. *Existe un encaje S del continuo* sen $\left(\frac{1}{x}\right)$ *en I^2, como en el Teorema 5.5, tal que $V(S)$ es la unión de dos sucesiones: la sucesión $\{x_n\}_n$ cuyos elementos tienen segunda coordenada igual a 0, y la sucesión $\{y_n\}_n$ cuyos elementos tienen segunda coordenada igual a 1. Además $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = (0,1)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} < x_n < y_n$.*

Demostración. Notemos que la gráfica de la función sen$(\frac{1}{x})$ tiene como mínimos a una sucesión $\{u_n\}_n$ de puntos en $J(S_1)$, cuya segunda coordenada es -1 y que convergen a $(0,-1)$, y tiene como máximos a una sucesión $\{v_n\}_n$

de puntos en $J(S_1)$ cuya segunda coordenada es 1 y que converge a $(0,1)$, de manera que:

$$v_{n+1} < u_n < v_n.$$

Sea h un encaje de S_1, dado por el Teorema 5.5 y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $h(u_n) = x_n$ y $h(v_n) = y_n$. Como h es un homeomorfismo, entonces $h\big((0,1)\big)$ y $h\big((0,-1)\big)$ son los dos puntos extremos del arco E^*. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $h\big((0,0)\big) = (0,0)$ y $h\big((0,1)\big) = (0,1)$. Luego, se cumple lo siguiente:

$$(0,0) = h\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) = \lim x_n, \quad (0,1) = h\left(\lim_{n\to\infty} u_n\right) = \lim y_n$$
$$\text{y} \quad y_{n+1} < x_n < y_n.$$

Entonces, podemos suponer que $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ son, de hecho, sucesiones de mínimos y máximos, respectivamente, y que el encaje h se puede conseguir tal que los elementos de x_n y y_n tienen segunda coordenada 0 y 1 respectivamente. $\square$

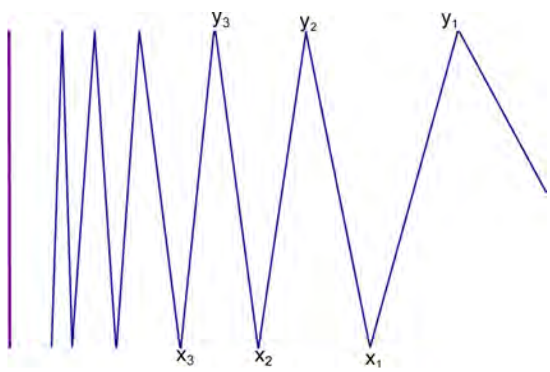


Figura 5.3: Encaje de S_1 en I^2

Teorema 5.8. *Sea E un E-continuo. Entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subset T(E)$ y $T(E) = \{(0,0),(0,1)\}$ si y sólo si E es homeomorfo a S_1.*

Demostración. La parte 2) del Teorema 5.5 indica que $T(E) = (V(E))^*$ y, por definición, $V(E)$ es la unión de dos sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$, la primera de mínimos locales y la segunda de máximos locales en el arco $J(E)$. Notemos que dos elementos son consecutivos en $V(E)$ si y sólo si uno es máximo y el mínimo. Sin pérdida de generalidad supongamos que:

$$b_{n+1} < a_n < b_n. \tag{5.2.1}$$

Para ver que $(0,0) \in (V(E))^*$, basta probar que alguna subsucesión de $\{a_n\}_n$ converge a $(0,0)$. En efecto, como $(0,0)$ es elemento del residuo E^*, existe una sucesión $\{c_m\}_m$, de elementos de $J(E)$, que converge a $(0,0)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, elegimos a_{n_m} como el elemento de la sucesión $\{a_n\}_n$ tal que $c_m \in vw$, donde v y w son elementos consecutivos de la sucesión $V(E)$ y $a_{n_m} \in \{v,w\}$. Notemos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, sucede que $\pi_2(c_m) \geq \pi_2(a_{n_m})$ y, como $\{c_m\}_m$ converge a $(0,0)$, entonces:

$$0 = \lim_{m\to\infty} \pi_2(c_m) \geq \lim_{m\to\infty} \pi_2(a_{n_m}).$$

Luego, la subsucesión de los mínimos $\{a_{n_m}\}_m$, también converge a $(0,0)$. Utilizando un argumento similar podemos encontrar una subsucesión de $\{b_m\}_m$ que converge a $(0,1)$. Por lo tanto $\{(0,0)(0,1)\} \subset (V(E))^* = T(E)$.

Ahora supongamos que $T(E) = \{(0,0),(0,1)\}$. Notemos que, por la parte 2) del Teorema 5.5, $V(E)$ sólo se acumula en $(0,0)$ y en $(0,1)$, pero puede ocurrir que alguna subsucesión de $\{a_n\}_n$ se acumule en $(0,1)$ y que alguna subsucesión de $\{b_n\}_n$ se acumule en $(0,0)$. Construiremos un encaje de E tal que la sucesión de mínimos locales converja a $(0,0)$ y la de máximos locales a $(0,1)$. Sean $\{b_{n_m}\}_m$ la subsucesión de todos los elementos de $\{b_n\}_n$ tales que:

$$\pi_2(b_{n_m}) \geq \tfrac{1}{2} \text{ y } B = \{b_n \colon b_n < \tfrac{1}{2}\}.$$

Notemos que, $\{b_{n_m}\}_m$ converge a $(0,1)$, los elementos de B forman una sucesión que converge a $(0,0)$ y la unión de las dos sucesiones es $\{b_n\}_n$. Notemos también que, para cada m, b_{n_m} y a_{n_m} son consecutivos en $V(E)$ y también lo son $a_{n_{m+1}-1}$ y $b_{n_{m+1}}$. Además, si $n_{m+1} - n_m > 1$, $a_{n_m}a_{n_{m+1}-1}$ es un arco contenido en $J(E)$, cuyos máximos locales están en B. Luego, $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}a_{n_{m+1}-1} = \{(0,0)\}$. Para cada m tal que $n_{m+1} - n_m > 1$, sustituyamos el arco $a_{n_m}a_{n_{m+1}-1}$ de $J(E)$, por el segmento de línea recta de R^2 que une a_{n_m} y $a_{n_{m+1}-1}$. Con esto, los únicos máximos locales del nuevo segmento $b_m b_{m+1}$ son b_{n_m} y $b_{n_{m+1}}$, cuya segunda coordenada es, al menos, $\frac{1}{2}$. Llamemos a esta compactación E_1.

Como $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n_m}a_{n_{m+1}-1} = \{(0,0)\}$, por el Lema 5.6, sucede que E_1 y E son homeomofos. Además, podemos suponer que E_1 es como en el Teorema 5.5. Observemos que $\{b_{n_m}\}_m$ es la sucesión de máximos locales de $J(E_1)$ y $\lim\limits_{m\to\infty} b_{n_m} = \{(0,1)\}$. Luego, también podemos suponer que $\pi_2(b_m) = 1$. Utilizando argumentos similares se construye una compactación E_2, como en el Teorema 5.5, que es homeomorfa a E_1 y tal que la sucesión de mínimos en $V(E_2)$ converge a $(0,0)$ y sus elemenos tienen segunda coordenada igual a 0.

Supongamos entonces que E es tal que $\{a_n\}_n$ converge a $(0,0)$, $\{b_n\}_n$ converge a $(0,1)$, y que, para cada n, cada $\pi_2(a_n) = 0$ y $\pi_2(b_n) = 1$. Probaremos que E es homeomorfo a S, el encaje de S_1 en I^2 indicado en el Lema 5.7. Tomemos las dos sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ de $V(S)$, como en el Lema 5.7. Ya que los residuos S^* y E^* son el intervalo $\{0\}\times I$, podemos construir una función h de S en E de manera que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumplan las siguientes condiciones:

a) $h|_{S^*}\colon S^* \to E^*$ es la identidad;

b) $h(x_n) = a_n$ y $h(y_n) = b_n$;

c) $h|_{x_ny_n}$ y $h|_{y_{n+1}x_n}$ son homeomorfismos lineales de x_ny_n en a_nb_n y de $y_{n+1}x_n$ en $b_{n+1}a_n$, respectivamente.

Notemos que $\mathcal{U} = \{x_ny_m\colon n \in \mathbb{N} \text{ y } m = n, n+1\}$ es una cubierta localmente finita de cerrados de $J(S)$. Como la función h está definida en cada elemento de $\mathcal{U}$, necesitamos ver que h se "pega" correctamente, es decir que si dos elementos de $\mathcal{U}$ se intersectan, entonces las definiciones de h coinciden en dicha intersección. Para esto tomemos un elemento de $A \in \mathcal{U}$. Supongamos $A = x_ny_n \in \mathcal{U}$, el otro caso se hace de manera similar. Si x_ky_l es otro elemento de $\mathcal{U}$, entonces:

$$x_ny_n \cap x_ky_l \neq \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad x_k = x_n,\ y_l = y_{n+1} \text{ y } x_ny_n \cap x_ky_l = \{x_n\}$$
$$\text{o bien,} \quad x_k = x_{n-1},\ y_l = y_n \text{ y } x_ny_n \cap x_ky_l = \{y_n\}.$$

Además, por b) y c), se cumplen las siguientes igualades:

$$h|_{x_ny_n}(x_n) = a_n = h|_{y_{n+1}x_n}(x_n) \quad \text{y} \quad h|_{x_{n-1}y_n}(y_n) = b_n = h|_{x_ny_n}(y_n).$$

Luego, $h|_{J(S)}$ está bien definida y, por b) y c), es un homeomorfismo de $J(S)$ en $J(E)$. Para ver que h es un homeomofismo, por a), sólo hace falta probar que h es continua en cada punto de $S^* = \{0\}\times I$. No es difícil ver que:

d) Las sucesiones $\{x_n y_n\}_n$, $\{x_n y_{n+1}\}_n$, $\{a_n b_n\}_n$ y $\{a_n b_{n+1}\}_n$ convergen al residuo $\{0\} \times I = S^* = E^*$.

Para ver que h es continua en S^* tomemos una sucesión $\{s_n\}_n$ de puntos de S convergente a un punto $s \in S^*$. Queremos probar que la sucesión $\{h(s_n)\}_n$ converge a $h(s) = s$. En efecto, por a), podemos suponer que $\{s_n\}_n$ es una sucesión de puntos de $J(S)$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta de $J(S)$ y sus elementos convergen a $\{0\} \times I$, también podemos suponer que, para cada $n \in \mathbb{N}$, ocurre que $s_n \in x_n y_n$ o bien $s_n \in x_n y_{n+1}$. Entonces, por c), $\pi_2\big(h(s_n)\big) = \pi_2(s_n)$ y, $h(s_n) \in a_n b_n$ o bien $h(s_n) \in a_n b_{n+1}$. De esto y la continuidad de π_2, se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty} h(s_n) \in S^* \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \pi_2\big(h(s_n)\big) = \lim \pi_2(s_n) = \pi_2(s).$$

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} h(s_n) = s$; es decir, h es continua en s. Por lo tanto, h es continua en cada punto de S^*. Concluimos que h homeomorfismo de S en E.

Ahora, supongamos que E es homeomorfo a S_1. Del Lema 5.7, podemos notar que $\big(V(S_1)\big)^* = \{(0,0),(0,1)\}$. Luego $T(S_1) = \{(0,0),(0,1)\}$. Ya que $T(S_1)$ es un invariante topológico y estamos considerando $E^* = \{0\} \times I$, también se cumple que $T(E) = \{(0,0),(0,1)\}$. Esto concluye la prueba del teorema. □

Definición 5.9. *Sea E un E-continuo. A la sucesión $V(E)$ le llamaremos* ***la sucesión de vértices de*** *E. Diremos que E es* ***separado****, si la sucesión:*

$$\{d(v,w)\colon v \text{ y } w \text{ son elementos consecutivos de } V(E)\}$$

está acotada inferiormente por un número mayor que 0.

No es difícil notar que S_1 es un E-continuo separado (ver Figura 5.3). En la Figura 5.4 mostramos un ejemplo de un E-continuo, E, que contiene dos sucesiones $\{u_i\}_i$ y $\{v_i\}_i$ de elementos $V(E)$ tales que, para cada i, u_i y v_i son elementos consecutivos de $V(E)$ y la sucesión de los diámetros $\{d(u_i v_i)\}_i$ converge a 0. Luego, E es un E-continuo no separado.

Sea X un conjunto con un orden parcial $<$. Decimos que una función $h\colon X \to X$ **preserva el orden** siempre que, para cada par de puntos $a, b \in$

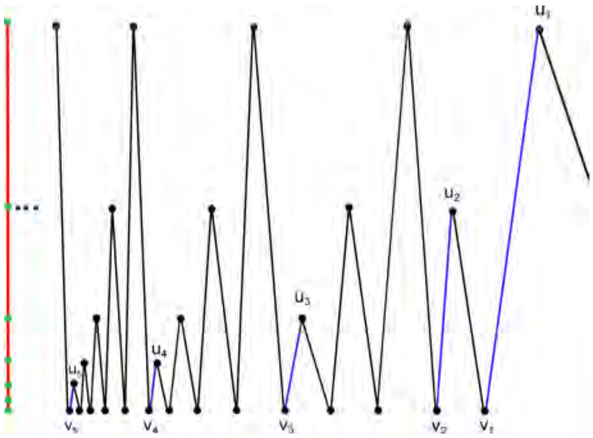


Figura 5.4: Un E-continuo no separado

X, si $a \leq b$, entonces se cumple que $h(a) \leq h(b)$. Decimos que h **invierte el orden** si, para cada par de puntos $a, b \in X$, $a \leq b$ implica que $h(a) > h(b)$.

Es un ejercicio de análisis matemático probar que toda función continua e inyectiva de un intervalo en sí mismo es creciente o decreciente o, en nuestros términos, preserva el orden o lo invierte. Esto lo podemos aplicar al arco $E^* = \{0\} \times I$, con el orden usual en su segunda coordenada. La prueba del siguiente resultado se puede consultar en [7, Teorema 3.1, pág. 230].

Teorema 5.10. *Sea E un E-continuo separado con tipo $T(E) = E^*$. Si h es un homeomorfismo de E en sí mismo tal que $h|_{E^*}$ preserva el orden, entonces $h|_{E^*}$ es la identidad.*

Teorema 5.11. *Sea E un E-continuo separado. Si E es $\frac{1}{4}$-homogéneo, entonces E es homeomorfo a S_1.*

Demostración. Supongamos que E es $\frac{1}{4}$-homogéneo y que no es homeomorfo a S_1. Denotemos por p_0 al punto inicial del rayo $J(E)$. El Lema 5.2 indica que, las órbitas de E son: $\{(0,0),(0,1)\}$ y $[\{0\} \times (0,1)]$, contenidas en E^*, y $J(E) - \{p_0\}$ y $\{p_0\}$, contenidas en $J(E)$. Ya que E no es homeomorfo a S_1, se sigue del Teorema 5.8 que $T(E) \cap [\{0\} \times (0,1)] \neq \emptyset$. Del Teorema 5.4 y el hecho de que $[\{0\} \times (0,1)]$ es una órbita, se cumple que $\{0\} \times (0,1) \subset T(E)$. Por lo tanto:

$$T(E) = \{0\} \times I = E^*.$$

Tomemos tres puntos x, y, z en la órbita $\{0\} \times (0,1)$, así como dos homeomorfismos h_1 y h_2 de E en E tales que:

$$h_1(x) = y \quad \text{y} \quad h_2(y) = z.$$

Luego, h_1 y h_2 no son la identidad en E^*. Entonces, el Teorema 5.10 indica que $h_1|_{E^*}$ y $h_2|_{E^*}$ no preservan el orden. Como cada homeomorfismo en el intervalo preserva el orden o lo invierte, debe ocurrir que $h_1|_{E^*}$ y $h_2|_{E^*}$ invierten el orden en E^*. Veamos que el homeomorfismo $h_2 \circ h_1$ preserva el orden en E^*. Tomemos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 \leq x_2$. Como $h_1|_{E^*}$ invierte el orden, $h_1(x_1) > h_1(x_2)$. Ahora, como también $h_2|_{E^*}$ invierte el orden, ocurre que $h_2\big(h_1(x_1)\big) < h_2\big(h_1(x_2)\big)$. Esto prueba que $h_2 \circ h_1$ preserva el orden en E^*.

Nuevamente, usando el Teorema 5.10, obtenemos que $h_2 \circ h_1$ es la identidad en I. Esto implica que $z = h_2(h_1(x)) = x$. Ya que esto contradice la elección de los puntos x, y, z, concluimos que E es homeomorfo a S. $\square$

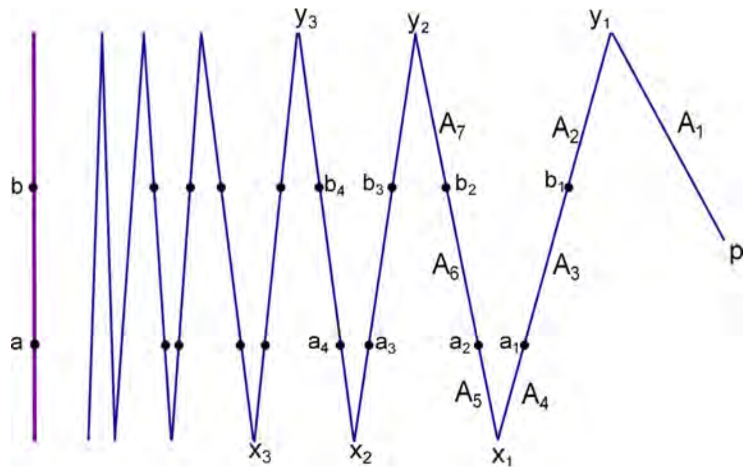


Figura 5.5

Teorema 5.12. *S_1 es $\frac{1}{4}$-homogéneo.*

Demostración. Tomaremos S, el encaje de S_1 en I^2 indicado en el Lema 5.7, así como las sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ en $V(S)$, también del mismo lema. Sea

p el punto inicial del rayo $J(S)$. Primero probaremos que $\{0\} \times (0,1)$ es una órbita de S. Sean $a, b \in \{0\} \times (0,1)$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a < b$. Tomemos dos sucesiones $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ como en la Figura 5.5; es decir, dos sucesiones de puntos en $J(S)$ tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente:

$$\pi_2(a_n) = a, \;\; \pi_2(b_n) = b, \;\; a_{2n-1}b_{2n-1} \in y_n x_n \;\; \text{y} \;\; a_{2n}, b_{2n} \in x_n y_{n+1}.$$

Definamos h en $J(S)$. Para esto, denotemos por $\mathcal{U}$ a la familia de los arcos A en $J(S)$ tales que $A = py_1$ o bien, existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que A es uno de los siguientes conjuntos:

$$y_n b_{2n-1}, \;\; b_n a_n, \;\; a_{2n-1}x_n, \;\; y_{n+1}b_{2n}, \;\; a_{2n}x_n.$$

Luego, podemos etiquetar los elementos de manera que $\mathcal{U} = \{A_i \colon i \in \mathbb{N}\}$, donde $A_1 = py_1$ y para cada $i \geq 2$ $|A_i \cap A_{i+1}| = 1$ (ver Figura 5.5). Notemos que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\mathcal{U}$ es una cubierta de $J(S)$.

b) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ y dicha intersección consta de sólo un punto, el cual es extremo de los arcos A_i y A_j.

c) $\lim\limits_{i\to\infty} A_{1+6i} = \lim\limits_{i\to\infty} A_{2+6i} = [b,1]$, $\lim\limits_{i\to\infty} A_{4+6i} = \lim\limits_{i\to\infty} A_{5+6i} = [0,a]$ y $\lim\limits_{i\to\infty} A_{3i} = ab$.

Hagamos $h(p) = p$, $h(y_1) = x_1$ y $h(A_1) = \big([p, y_1]\big) = [p, x_1]$ de manera que $h|_{A_1}$ es un homeomorfismo. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, hagamos:

$$h(y_n) = x_n, \;\; h(x_n) = y_{n+1}, \;\; h(b_n) = a_{n+1} \;\; \text{y} \;\; h(a_n) = b_{n+1}. \tag{5.2.2}$$

Con esto hemos definido h en A_1 y en los puntos extremos de los elementos de $\mathcal{U}$. Para cada $n \geq 2$, definamos h en A_n según como lo indican sus extremos en (5.2.2):

$$h(A_n) = A_{n+3}, \text{ de manera que } h|_{A_n} \text{ es un homeomorfimo lineal.} \tag{5.2.3}$$

Puesto que h está definida en cada elemento de $\mathcal{U}$, entonces hemos definido h en $J(S)$. Por (5.2.2) y (5.2.3), tenemos que h está bien definida en la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathcal{U}$. Ya que $\mathcal{U}$ es una cubierta localmente finita de $J(S)$, por [26, Teorema 9.4, pág. 83], se cumple que $h|_{J(S)}$ es un homeomorfismo de $J(S)$ en sí mismo.

Ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0,0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, por las ecuación (5.2.2) y (5.2.3), resulta natural definir h en S^* de la siguiente manera:

d) $h\big((0,1)\big) = (0,0)$, $h(a) = b$, $h(b) = a$, $h\big(b(1,0)\big) = (0,0)a$, $h(ab) = ab$ y $h\big((0,0)a\big) = b(0,1)$, de manera que h restringido a cada uno de los arcos $b(0,1)$, ab y $(0,0)a$ es un homeomorfismo lineal.

Para probar que h es un homeomofismo sólo resta ver que h es continua en cada punto de S^*. Sean $z_0 \in S^*$ y $\{z_i\}_i$ una sucesión que converge a z_0. Haremos la prueba suponiendo que $z_0 \in b(0,1)$ pues el caso en que $z_0 \in (0,0)a$ es similar y, el caso en que $z_0 \in ab$, usa los mismos argumentos, pero es más sencillo. Si la sucesión $\{z_i\}_i$ tiene una infinidad de elementos en S^* terminamos, pues $h|_{S^*}$ es un homeomorfismo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\{z_i\}_i \subset J(S)$ y que, para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $z_i \in A_{1+6i} \cup A_{2+6i}$.

De la compacidad de S, podemos suponer que $\{h(z_i)\}_i$ converge y, por c), $\lim\limits_{i\to\infty} h(z_i) \in S^*$. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\pi_2(z_i) = s_i$. Notemos que, por (5.2.3), para cada i sucede que:

$$\pi_2\big[h\big(z_i\big)\big] = \tfrac{a}{1-b} \cdot (1 - s_i).$$

Puesto que $s_0 = \lim\limits_{i\to\infty} s_i$, entonces $\frac{a}{1-b} \cdot (1 - s_0) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a}{1-b} \cdot (1 - s_i)$. Como π_2 es continua, $\pi_2\big(\lim\limits_{i\to\infty} h(z_i)\big) = \frac{a}{1-b} \cdot (1 - s_0)$, por lo que:

$$\lim_{i\to\infty} h(z_i) = \left(0, \frac{a}{1-b} \cdot (1 - s_0)\right) = z_0.$$

Esto prueba que h es continua en s. Por lo tanto, h es continua en cada punto de S^* y, así, h es un homeomorfismo. Hemos probado que $b \in \mathrm{Orb}_S(a)$ y $(0,1) \in \mathrm{Orb}_S\big((0,0)\big)$. Como elegimos a y b de manera arbitraria en S^*, se sigue que $S^* - \{0,1\}$ y $\{0,1\}$ son todas las órbitas de S contenidas en S^*. Luego, por el Lema 5.2, S es $\frac{1}{4}$-homogéneo. $\square$

De los Teoremas 5.11 y 5.12 obtenemos el siguiente resultado que caracteriza los E-continuos separados $\frac{1}{4}$-homogéneos.

Teorema 5.13. *Si E es un E-continuo separado, entonces E es $\frac{1}{4}$-homogéneo si y sólo si E es homeomorfo a S.*

Bibliografía

[1] J. M. Aarts y L. G. Oversteegen, *The geometry of Julia sets*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 338, 2 (1993), 897–918.

[2] J. M. Aarts y L. G. Oversteegen, *The homeomorphism group of the hairy arc*, Compositio Mathematica, Tome 96, 3 (1995), 283–292.

[3] R. D. Anderson, *A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity*, Ann. of Math., Vol. 67, 2 (1958), 313–324.

[4] R. D. Anderson, *One dimensional continuos curves and a homogeneity theorem*, Ann. of Math., Vol. 68, 1 (1958), 1–16.

[5] D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. Pellicer-Covarrubias y L. Simón, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology and its Applications, Vol. 115, 1 (2001), 1–17.

[6] M. M. Awartani, *Compactifications of the ray with the closed arc as remainder*, Topology Proc., Vol. 9 (1984), 201–215.

[7] M. M. Awartani, *The Fixed Remainder Property for self homeomorphisms of Elsa continua*, Topology Proc., Vol. 11 (1986), 225–238.

[8] M. Bestvina, *Characterizing k-dimensional universal Menger compacta*, Memoirs Amer. Math. Soc., Vol. 71, 380 (1988).

[9] J. Bobok, P. Pyrih y B. Vejnar, *Half-homogeneous chainable continua with end points*, Topology and its Applications, Vol. 160, 9 (2013), 1066–1073.

[10] J. P. Boroński, *On indecomposable $\frac{1}{2}$-homogeneous circle-like continua*, Topology and its Applications, Vol. 160, 1 (2013), 59– 62.

[11] J. P. Boroński, Gary Gruenhage y George Kozlowski, $\frac{1}{k}$-*homogeneous long solenoids*, http://arxiv.org/pdf/1412.8508.pdf.

[12] J. P. Boroński, *On the number of orbits of the homeomorphism group of solenoidal spaces*, Topology and its Applications Vol. 182 (2015), 98–106.

[13] M. Brown, *Weak n-homogeneity implies weak $(n-1)$-homogeneity*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 10, 4 (1959), 644–647.

[14] C. E. Burges, *Some theorems on n-homogeneous continua*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 5, 1 (1954), 136–143.

[15] J. H. Carruth, *A note on partially ordered compacta*, Pacific J. Math., Vol. 24, 2 (1968), 229–231.

[16] J. J. Charatonik, *On fans*, Dissertationes Mathematicae, Vol. 54, PWN, Warsawa 1967.

[17] J. J. Charatonik, *On decompositions of continua*, Fund. Math., Vol. 79 (1973), 113–130.

[18] J. J. Charatonik, *Homeomorphisms of universal dendrites*, Rediconti Dil Circolo Matematico Di Palermolo, Serie II, Tomo 44, 3 (1994), 457–468.

[19] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Fans with the Property of Kelley*, Topology and its Applications, Vol. 29, 1 (1988), 73–78.

[20] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Images of the Cantor fan*, Topology and its Applications, Vol. 33, 2 (1989), 163–172.

[21] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 22 (1998), 227–253.

[22] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Smoothness and the property of Kelley*, Comment Math., Vol. 41, 1 (2000), 123–132.

[23] J. J. Charatonik y C. Eberhart, *On smooth dendroids*, Fund. Math., Vol. 67 (1970), 297–322.

[24] W. J. Charatonik, *The Lelek fan is unique*, Houston Journal of Math., Vol. 14, 1 (1989), 27–34.

[25] W. J. Charatonik y A. Dilks, *On self homeomorphic spaces*, Topology and its Applications, Vol. 55, 3 (1994), 215–238.

[26] J. Dugundji, *Topology*, 2nd ed., BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1998.

[27] C. Eberhart, *A note on smooth fans*, Colloq. Math., Vol. 20 (1969), 89–90.

[28] M. K. Fort, Jr., *Homogeneity of infinite products of manifolds with Boundary*, Pacific J. Math., Vol. 12, 3 (1962), 879–884.

[29] A. Guzmán Tristán, *Dendroides y la Propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2002.

[30] L. Hoehn y L. G. Oversteegen, *A complete classification of homogeneous plane continua*, http://arxiv.org/pdf/1409.6324v1.pdf.

[31] W. Hurewicz y H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., USA, 1948.

[32] R. Jiménez-Hernández, P. Minc y P. Pellicer-Covarrubias, *A family of circle-like, $\frac{1}{n}$-homogeneous, indecomposable continua*, Topology and its Applications, Vol. 160, 7 (2013), 930–936.

[33] J. L. Kelley, *The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fund. Math., Vol. 37 (1950), 75–76.

[34] J. Kennedy Phelps, *A condition under which 2-homogeneity and representability are the same in continua*, Fund. Math., Vol. 121 (1984), 89–98.

[35] J. Krasinkiewicz, *On homeomorphisms of the Sierpiński curve*, Comment. Math., Vol. 12 (1969), 255–257.

[36] K. Kuratowski, Topology, Vol. 2, Academic Press/PWN, New-York/London/Warsawa, 1968.

[37] A. Lelek, *On plane dendroids and their end points in the classical sense*, Fund. Math. Vol. 49, (1961), 301–319.

[38] A. Lelek, *Ensembles σ- connexes et le théoreme de Gehman*, Fund. Math., Vol. 47 (1959), 265–276.

[39] W. Lewis, *The classification of homogeneous continua*, Soochow J. of Math., Vol. 18, 1 (1992), 85–121.

[40] Ma. de Jesús López, P. Pellicer-Covarrubias y A. Santiago-Santos, $\frac{1}{2}$-*Homogeneous suspensions*, Topology and its Applications, Vol. 157, 2 (2010), 482–493.

[41] S. Macías, *Una Introducción a los Continuos Homogéneos*, Revista Integración, Universidad Industrial de Santander, Vol. 29, 2 (2011), 108–112.

[42] S. Macías y P. Pellicer-Covarrubias, $\frac{1}{2}$-*homogeneous hyperspace suspensions*, Colloq. Math., Vol. 128 (2012), 109–132.

[43] S. Macías y P. Pellicer-Covarrubias, $\frac{1}{2}$-*homogeneous n-fold hyperspace suspensions*, Topology and its Applications, Vol. 180 (2015), 142–160.

[44] J. Margalef Roig, E. Outerelo Domínguez y Pinilla Fernando, *Topología II*, Editorial Alhambra, Madrid 1979.

[45] V. Martínez de la Vega y Mansilla, *El Hiperespacio de Continuos con la Topología Producto*, Tesis de Licenciatura, Facultand de Ciencias, UNAM, 1998.

[46] J. C. Mayer, Lex G. Oversteegen y E. D. Tymchatyn, *The Menger curve characterization and extension of homeomorphisms of non-locally separating closed subsets*, Dissertationes Mathematicae, Vol. 252, PWN, Warsawa 1986.

[47] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[48] S. B. Nadler, Jr., *Continua whose cone and hyperspace are the same*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 230 (1977), 321–345.

[49] S. B. Nadler, Jr. y P. Pellicer-Covarrubias, *Hyperspaces with exactly two orbits*, Glasnik Matematički, Vol. 41, 61 (2006), 141–157.

[50] S. B. Nadler, Jr. y P. Pellicer-Covarrubias, *Cones that are* $\frac{1}{2}$-*homogeneous*, Houston J. Math., Vol. 33, 1 (2007), 229–247.

[51] S. B. Nadler, Jr., P. Pellicer-Covarrubias e I. Puga, *$\frac{1}{2}$-homogeneous continua with cut points*, Topology and its Applications, Vol. 154, 10 (2007), 2154–2166.

[52] V. Neumann-Lara, P. Pellicer-Covarrubias e I. Puga, *On $\frac{1}{2}$-homogeneous continua*, Topology and its Applications, Vol. 153, 14 (2006), 2518–2527.

[53] Y. Pacheco Juárez, *Propiedades del Producto de Espacios topológicos*, Tesis de Licenciatura, Puebla, Pue. BUAP 2009.

[54] H. Patkowska, *On $\frac{1}{2}$-homogeneous ANR-spaces*, Fund. Math., Vol. 132 (1989), 25–58.

[55] P. Pellicer-Covarrubias, *$\frac{1}{2}$-homogeneity in Symmetric Products*, Topology and its Applications, Vol. 155, 15 (2008), 1650–1660.

[56] P. Pellicer-Covarrubias, Roberto Pichardo-Mendoza y A. Santiago-Santos, *$\frac{1}{2}$-homogeneity of nth suspensions*, Topology and its Applications, Vol. 161 (2014), 58–72.

[57] P. Pellicer-Covarrubias y Alicia Santiago-Santos, *Degree of homogeneity on cones*, Topology and its Applications, Vol. 175 (2014), 49–64.

[58] W. Sierpiński, *Sur une propiété topologique des ensembles dénombrables denses en soi*, Fund. Math., Vol. 1 (1920), 11–16.

[59] G. S. Ungar, *On all kinds of homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 212 (1975), 393–400.

[60] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 28, Providence, RI, 1942, reprinted with correction in 1971.

[61] Gail. S. Young, Jr., *A generalization of Moore's theorem on simple triods*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 50 (1944), 714.

Índice alfabético