



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SISTEMAS DINÁMICOS NO-LINEALES CON ESTRUCTURA VARIACIONAL

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
DAVID MEDINA HERNÁNDEZ

TUTOR O TUTORES PRINCIPALES
DR. PABLO PADILLA LONGORIA
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS

EN SU CASO, MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DR. HÉCTOR SÁNCHEZ MORGADO
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
DR. GILBERTO FLORES GALLEGOS
ENTIDAD DE ADSCRIPCIÓN INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN
MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS

MÉXICO, D. F., AGOSTO DE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sistemas Dinámicos No-lineales con Estructura Variacional

David Medina

Índice general

Índice de figuras	III
Índice de cuadros	V
Agradecimientos	VII
Capítulo 1. Introducción	1
1. Preliminares	1
2. Descripción general de la tesis	8
Capítulo 2. Resultados generales	11
1. Semigrupos de operadores	11
2. Conjuntos invariantes	12
3. Conjuntos absorbentes y atractores	14
Capítulo 3. Un enfoque geométrico de conjuntos invariantes	23
1. Introducción	23
2. El funcional de área y conjuntos invariantes	23
3. Método de descenso máximo	24
4. Ejemplo 1: órbitas heteroclínicas	25
5. Ejemplos 2 y 3: ciclos límite	28
Capítulo 4. Existencia y estructura del atractor	35
1. Introducción	35
2. Espacios de Sobolev en variedades Riemannianas	36
3. Desigualdades diferenciales	37
4. Existencia y estructura del atractor	37
Capítulo 5. Implementación numérica	41
1. Introducción	41
2. La ecuación en S^2	41
3. El método de Galerkin	42
Capítulo 6. Resultados numéricos y Conclusiones	45
1. El atractor en S^2	45
2. Discusión de los resultados	47
3. Conclusiones y trabajo futuro	47
Apéndice A. Existencia y Unicidad	57
Apéndice B. Unicidad retrógrada	59
Apéndice C. Código para la implementación del método de Galerkin	63

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de una superficie oval en \mathbb{R}^3 .	2
1.2. Soluciones bidimensionales de la ecuación de Cahn-Hilliard para un valor cercano a cero, un tiempo intermedio y un tiempo largo (obtenidas de [53]).	2
1.3. Onda difusiva para una ecuación de difusión, en la que $x_0 = 0.133$ y $\lambda = 0.73$.	4
1.4. Diferentes patrones obtenidos de la reacción-difusión del clorito yoduro malónico, (obtenidas de [37]).	5
3.1. Área generada por un flujo.	24
3.2. Una curva no rectificable que no es invariante.	25
3.3. Retrato fase del sistema (3.6).	26
3.4. Aproximaciones sucesivas a la separatriz en el sistema (3.6) mediante una curva que cumple $v(\pm\pi, 0) = 0$.	28
3.5. Aproximaciones sucesivas a la separatriz en el sistema (3.6) mediante una curva que no necesariamente cumple $v(\pm\pi, 0) = 0$.	29
3.6. Retrato fase de (3.13) - (3.14).	30
3.7. Aproximaciones al ciclo límite estable de (3.13) - (3.14).	31
3.8. Retrato fase de (3.18) - (3.19).	32
3.9. Aproximaciones al ciclo límite inestable de (3.18) - (3.19).	33
5.1. Coordenadas esféricas empleando longitud θ y latitud ϕ .	42
6.1. Comportamiento de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.4).	49
6.2. Comportamiento de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.6).	50
6.3. Comportamiento de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.8).	51
6.4. Comportamiento de $\mathbf{u}_2(t)$ para $t = 0$, 0.0055 y $t = 0.02$.	52
6.5. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.4).	53
6.6. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.6).	54
6.7. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.8).	55
6.8. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_2(t)$ para $t = 0$, 0.0055 y $t = 0.02$.	56

Índice de cuadros

1.	Valor de $ \nabla\tilde{A} $ para diversas iteraciones en la aproximación (con convergencia) a una órbita heteroclínica.	27
2.	Valor de $ \nabla\tilde{A} $ para diferentes iteraciones en la aproximación (sin convergencia) a una órbita heteroclínica.	27
3.	Valor de $ \nabla\tilde{A} $ para diferentes iteraciones en la aproximación a un ciclo límite estable.	30
4.	Valor de $ \nabla\tilde{A} $ para diferentes iteraciones en la aproximación a un ciclo límite inestable.	32

Agradecimientos

A mis papás **Cristina** y **David**, por guiarme con su ejemplo, su sabiduría ha sido de gran apoyo como profesionista.

A mi familia **Ana Luisa**, **Eduardo** y **Carolina** por su comprensión y apoyo para el logro de este objetivo, pero sobre todo por darle sentido a este proyecto.

A mis hermanos **Araceli** y **Oscar** por su compañía y entusiasmo para conmigo.

Al **M. C. Alfredo González**, Director General del Instituto Tecnológico Superior de Perote, por todas las facilidades y apoyo brindado para el desarrollo de la presente.

A todos mis compañeros del **Área Académica**, y en general a todo el personal del **Instituto Tecnológico Superior de Perote**, por permitirme ser su amigo. Es un privilegio trabajar con todos Ustedes.

A mi tutor el **Dr. Pablo Padilla Longoria** por brindarme su amistad, por la paciencia y sobre todo por guiarme en el camino adecuado.

A mi comité tutorial el **Dr. Héctor Sánchez Morgado** y **Dr. Gilberto Flores Gallegos** por sus consejos y observaciones pertinentes.

Al **Dr. Víctor F. Breña-Medina** por sus sugerencias para el enriquecimiento de este trabajo.

Introducción

1. Preliminares

El estudio cualitativo de sistemas dinámicos ha sido de fundamental importancia en la ciencia; por ejemplo, en el entendimiento del caos y de la turbulencia; éste último concepto es de interés en tecnologías sofisticadas (veáse [51]). En particular, las teorías y métodos que tienen estructura variacional son utilizados en el análisis de sistemas gradiente, que pueden ser extendidos a espacios de dimensión infinita, lo cual se logra mediante la utilización de la teoría de semigrupos de operadores (veáse por ejemplo [28, 45, 47, 51]). En el tipo de sistemas que tienen estructura variacional, se encuentran aquéllos que están asociados a ecuaciones diferenciales parciales de evolución. En este contexto, las soluciones de equilibrio de estos sistemas corresponden a puntos críticos de ciertos funcionales. De esta manera, el estudio y la caracterización de conjuntos límite es especialmente relevante; es decir, sistemas de este tipo suelen caracterizar propiedades físicas que están generalmente asociadas a un funcional de energía. Por lo tanto, a través de conjuntos límite se puede determinar el comportamiento de equilibrio de las soluciones de diversos tipos de ecuaciones. A lo largo del presente trabajo se abordarán estos temas con detalle.

En el presente proyecto se caracteriza el atractor de la ecuación parabólica asociada a,

$$(1.1) \quad -\epsilon^2 \Delta u + W'(u) = 0,$$

es decir,

$$(1.2) \quad u_t = \epsilon \Delta u - \frac{1}{\epsilon} W'(u),$$

en una superficie oval M . Una superficie oval es una superficie cerrada y compacta que encierra un conjunto estrictamente convexo en \mathbb{R}^3 , (veáse figura 1.1). Aquí u es la variable dependiente tal que $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ y el coeficiente de difusión es tal que $0 < \epsilon \ll 1$, Δ representa el operador de Laplace-Beltrami en M y $W(u)$ es un término no lineal especificado más adelante.

La ecuación (1.2) se origina en una amplia diversidad de contextos, entre los que se pueden mencionar sistemas en ciencia de materiales, superconductividad, dinámica de poblaciones y formación de patrones, por ejemplo.

En la ciencia de los materiales, la ecuación (1.2) se conoce como la ecuación de Cahn-Hilliard. Esta ecuación fue propuesta en 1958 para modelar algunos fenómenos de transición de fase en aleaciones binarias, por ejemplo, aleaciones de hierro y níquel. Este fenómeno es también conocido como separación espinodal. Si una mezcla de estos metales se inactiva por debajo de una temperatura crítica, el estado resultante es inestable, apareciendo al principio pequeñas regiones de estos materiales relativamente puros. A medida que el tiempo transcurre, estas regiones crecen.

En la figura 1.2 se puede observar un ejemplo de una solución numérica de la ecuación de Cahn-Hilliard en dos dimensiones espaciales. La condición inicial fue una perturbación del estado estacionario $u(x) = 0$; los colores azul y rojo representan los valores de $u(x)$ cercanos a -1 y 1 respectivamente. En la primera imagen se ve el compartamiento de u en un tiempo cercano a cero; la segunda para un tiempo intermedio y la última para un tiempo grande. En el límite, esto es cuando $t \rightarrow \infty$, la región que separa a las fases es un semicírculo (veáse [53]).

Una de las teorías más importantes de la superconductividad es la teoría de Ginzburg-Landau. La superconductividad

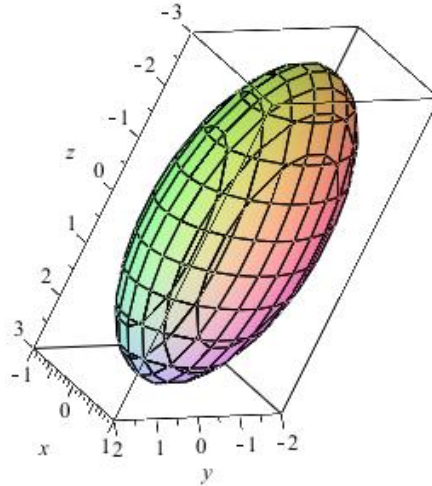


FIGURA 1.1. Ejemplo de una superficie oval en \mathbb{R}^3 .

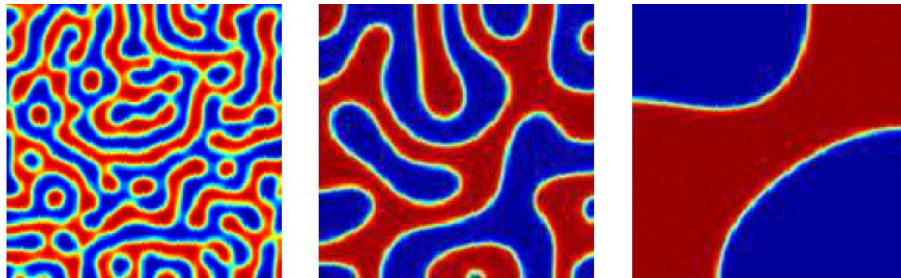


FIGURA 1.2. Soluciones bidimensionales de la ecuación de Cahn-Hilliard para un valor cercano a cero, un tiempo intermedio y un tiempo largo (obtenidas de [53]).

se refiere a la conducción de corriente eléctrica sin resistencia ni pérdida de energía.

La superconductividad fue descubierta en Leiden, Holanda, en 1911 por Hieke Kamerlingh Onnes. Con los desarrollos teóricos de van der Waals, Onnes pudo licuar hidrógeno y helio, lo que le permitió estudiar las propiedades eléctricas de los metales a temperaturas hasta entonces nunca estudiadas. En muestras de mercurio de alta pureza, encontró que la resistencia del mercurio disminuye abruptamente a cero cuando la muestra es enfriada hasta 4.2 grados Kelvin (K).

Los primeros resultados publicados por Onnes, mostraron una caída abrupta de la resistencia eléctrica con la temperatura. La naturaleza de esta caída, es un indicio de la existencia de una transición de fase. Un comportamiento similar se encontró en otros metales como el plomo y el estaño.

A partir de estos resultados experimentales, se desprende que para muchos materiales existe una temperatura crítica. Cuando esta temperatura es alcanzada, ocurre una transición de fase entre dos estados diferentes. En otras palabras, por encima de esta temperatura crítica, los materiales superconductores se encuentran en estado normal, es decir, presentan resistencia eléctrica. Por el contrario, debajo de esta temperatura crítica ocurre el fenómeno de superconductividad.

En 1950, Ginzburg y Landau propusieron una teoría fenomenológica. Esta teoría consiste en incorporar el formalismo de la teoría de Landau, la cual se refiere a las transiciones de fase de segundo orden. Además la estimación de la energía cinética asociada con las corrientes superconductoras fue ampliada; esto debido al uso de analogías con la descripción de las corrientes en mecánica cuántica.

La propuesta de Ginzburg-Landau para la energía libre de Helmholtz en la fase superconductora es (véase [52])

$$F_s = f_n + \int \left[\alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\Psi|^4 + \frac{1}{2m_s} \left| (-i\hbar\nabla - \frac{e_s}{c}\mathbf{A})\Psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}^2 \right] dV,$$

donde f_n es la energía libre de Helmholtz de la fase normal sin incluir la contribución debida al campo magnético, Ψ es el parámetro de orden de la fase superconductora. Este parámetro fue propuesto como una función de onda efectiva de los electrones superconductores.

Las ecuaciones de Maxwell (véase [1]) indican que el campo magnético está dado por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, donde \mathbf{A} es el potencial magnético. De esta manera F_s es una función de Ψ y \mathbf{A} , por lo que al calcular el extremal de F_s , es decir el punto crítico de este funcional, respecto Ψ y \mathbf{A} , se obtienen las ecuaciones de Ginzburg-Landau,

$$\begin{aligned} \alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{\hbar}{2m_s} \left(-i\nabla - \frac{e_s}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi &= 0, \\ \mathbf{J}_s = \frac{ie_s}{2m_s} [\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi] - \frac{e_s^2}{m_s c} |\Psi|^2 \mathbf{A} &= \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}, \end{aligned}$$

con la condición de frontera,

$$\mathbf{n} \cdot \left[\left(-i\nabla - \frac{e_s}{c}\mathbf{A} \right) \Psi \right] = 0.$$

Por otro lado, en el contexto de la dinámica de poblaciones, la ecuación de reacción-difusión para una componente de la forma

$$(1.3) \quad u_t = f(u) + D\Delta u,$$

donde $f(u) = u(1 - u)$, mejor conocida como la ecuación de Fisher-KPP (Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov) fue estudiada por Fisher en 1937 como una versión determinista de un modelo estocástico de la propagación de un gen favorable en una población. Esta ecuación puede verse también como una extensión natural del modelo de crecimiento logístico. En un contexto similar, otra situación en la que se encuentra esta ecuación es el estudio de la propagación y control de una población de insectos. Usualmente el término cinético toma la forma

$$f(u) = ru \left(1 - \frac{u}{q} \right) - \frac{u^2}{1 + u^2},$$

donde además del término logístico, se tiene un término asociado a un funcional de respuesta tipo Holling II (véase [23]).

La ecuación de Fisher-KPP tiene una solución del tipo onda viajera, esto es, una función de $x - ct$ donde x es la variable espacial, t la variable temporal y c es una constante llamada rapidez de propagación (véase [37] para más detalles de esta ecuación).

Si el término $f(u)$ de la ecuación (1.3) está ausente, obtenemos la denominada ecuación de difusión. El caso

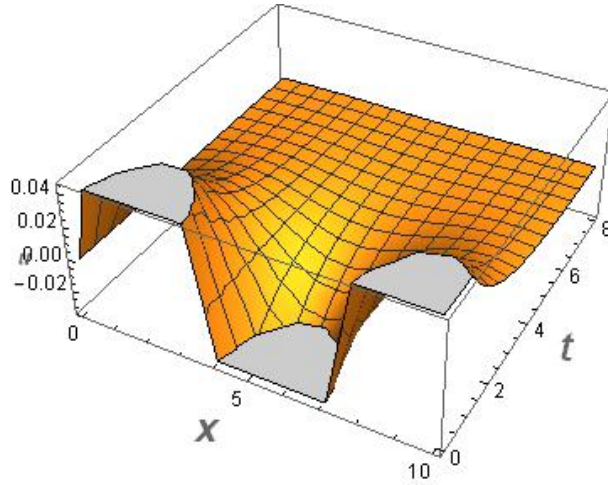


FIGURA 1.3. Onda difusiva para una ecuación de difusión, en la que $x_0 = 0.133$ y $\lambda = 0.73$.

unidimensional, se resuelve mediante el método de separación de variables, obteniendo una solución de la forma $u(x, t) = x_0 \exp(-\lambda t) \cos(\sqrt{\lambda}x)$ donde x_0 y λ son parámetros. La figura 1.3 muestra la solución a la ecuación de difusión con $x_0 = 0.133$ y $\lambda = 0.73$ y condiciones de frontera de cero flujo o Neumann homogénea.

La expresión (1.2) es un ejemplo de las denominadas ecuaciones de reacción-difusión, cuyo modelo sugiere un posible mecanismo para la generación de patrones en sistemas biológicos. La teoría básica de la morfogénesis, fue propuesta por Alan M. Turing en 1952 y actualmente representa un amplio campo de investigación. (véase [38] y las referencias ahí mencionadas para más detalles).

Turing sugirió que, bajo ciertas condiciones, algunas sustancias químicas, llamadas morfógenos, reaccionan y difunden de tal manera que ambas sustancias cambian de un estado de equilibrio a un estado fuera del equilibrio termodinámico. Cuando esto ocurre se dice que emerge un patrón, el cual consiste de regiones espaciales heterogéneas.

Por ejemplo, si consideramos el sistema con dos componentes de ecuaciones diferenciales parciales acopladas y no lineales, donde A y B son las concentraciones de dos sustancias químicas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= F(A, B) + D_A \Delta A, \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= G(A, B) + D_B \Delta B,\end{aligned}$$

indica que la razón de cambio instantánea de las concentraciones de A y B es directamente proporcional a la rapidez de difusión de cada sustancia y a la reacción entre ambas. Aquí D_A y D_B representan los coeficientes de difusión y las funciones no lineales F y G representan la cinética entre las concentraciones A y B . Turing propone que suponiendo la existencia de un estado estacionario y aislado (A_0, B_0) , conocido como *punto de equilibrio*, en ausencia de difusión, es decir si $D_A = D_B = 0$, entonces A y B tienden a un estado estacionario. Este punto es asintóticamente estable. Por el contrario, en presencia de difusión, si $D_A \neq D_B$, una distribución espacial heterogénea de las concentraciones de A y B emerge de tal manera que es temporalmente estable. A este cambio local topológico de la dinámica es conocido como *bifurcación de Turing*. En otras palabras, este fenómeno puede entenderse como un rompimiento de simetría y, como consecuencia, conduce a un patrón conformado básicamente por alguno de los siguientes escenarios: franjas, triángulos, exágonos, rombos y puntos (véase [17]).

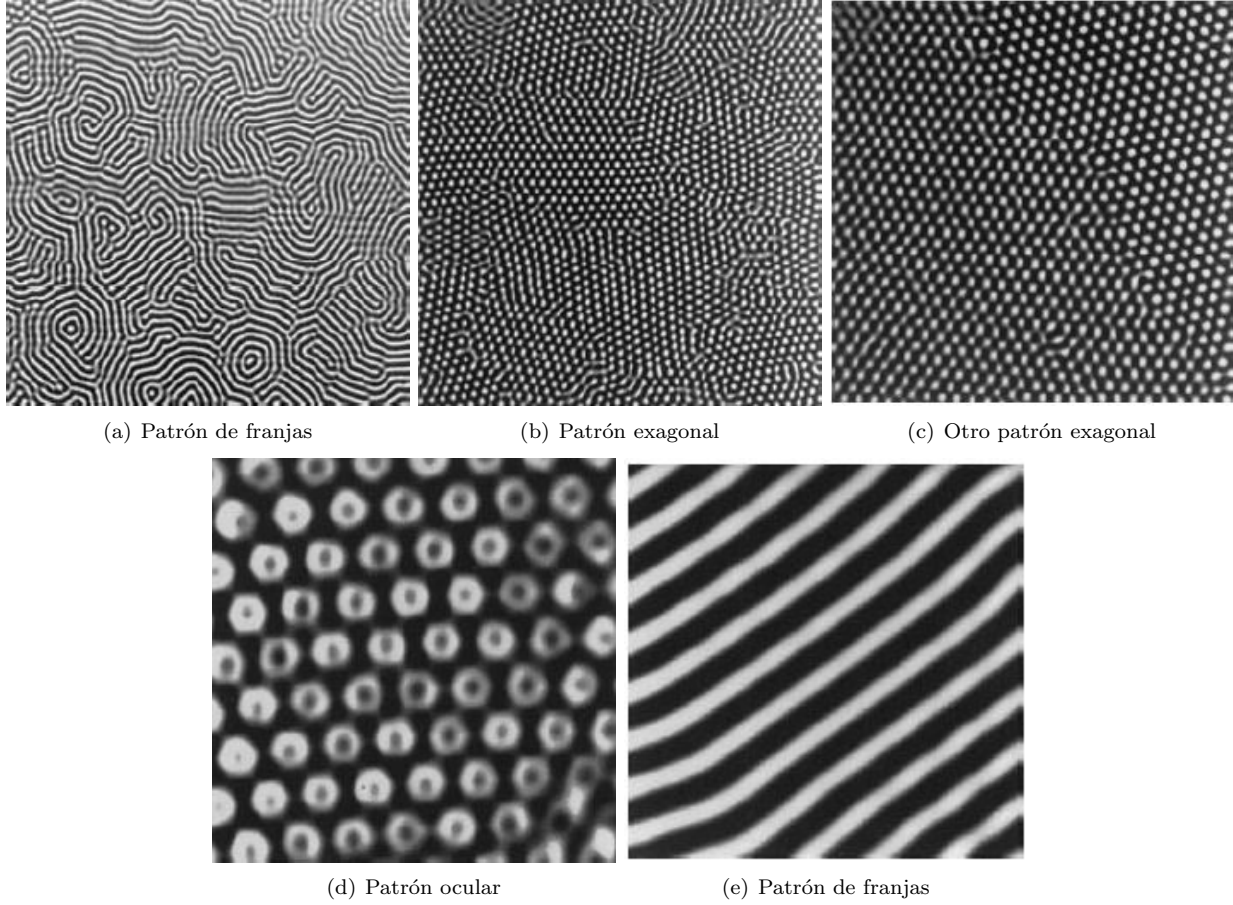


FIGURA 1.4. Diferentes patrones obtenidos de la reacción-difusión del clorito yoduro malónico, (obtenidas de [37]).

La figura 1.4 muestra patrones químicos obtenidos de un sistema de reacción difusión del clorito yoduro malónico, en la que el activador es el ácido malónico. Esta reacción es conocida como reacción CIMA (véase [35]).

Un caso que merece particular atención es cuando la función $W(u)$ tiene una estructura que refleja un potencial biestable. En particular la ecuación de Allen-Cahn pertenece a esta clase, que ha sido ampliamente estudiada tanto analíticamente como numéricamente (véase [24], [42] y referencias ahí contenidas).

Para la ecuación,

$$(1.4) \quad u_t - \Delta u + \epsilon^{-2}(u^3 - u) = 0,$$

similar a la que estudiamos aquí, en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, donde el funcional,

$$E_\epsilon[u] = \int_\Omega \left[\frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\epsilon^{-1}}{4} (u^2 - 1)^2 \right] dx,$$

es acotado para $t = 0$ y una condición de frontera del tipo Dirichlet,

$$u^\epsilon(x, t) = U^\epsilon(x, t) \quad x \in \partial\Omega,$$

en [7] se estudia que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, la solución $u(x, t)$ de (B.2) separa a Ω en dos regiones; una región en donde $u \approx 1$ y otra donde $u \approx -1$. La región en la que la función pasa de los valores cercanos a 1 a los valores cercanos a -1, llamada región de transición, se mueve con velocidad normal igual a la curvatura media. En otras palabras, la rapidez de cambio del vector normal a la superficie en un punto es igual a la suma de las curvaturas principales en ese punto; las curvaturas principales son el valor mínimo y máximo de la curvatura normal (curvatura de una sección normal) en ese punto (veáse [12, 15]).

En una superficie oval, el comportamiento de las soluciones no triviales de (1.1) es similar. Siguiendo los resultados encontrados en [24, 42], en [21] se establece que en el límite asintótico $\epsilon \rightarrow 0$, el mínimo distinto de cero de la correspondiente función de energía (con una restricción adecuada) tiene una capa de transición localizada en la geodésica cerrada de menor longitud en M . Este hecho es consecuencia del problema variacional que aquí se estudia, pues (1.1) es la ecuación de Euler-Lagrange del funcional

$$(1.5) \quad E_\epsilon(u) = \int_M \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u) \right),$$

en un espacio de funciones adecuado.

A continuación sentamos las bases para estudiar este problema.

Cuado $\epsilon \rightarrow 0$, las funciones con energía acotada uniformemente, es decir, $E_\epsilon(u) < E_0$, donde $E_0 > 0$, toman valores cercanos a ± 1 excepto en una región de transición estrecha. En virtud de las propiedades de este funcional, estudiado por di Giorgi (veáse [24, 42]), se muestra que la curva que determina la región de transición es una geodésica cerrada.

El resultado publicado por de Giorgi se prueba utilizando el Teorema 1.1, que proviene de la geometría diferencial y garantiza la existencia de una geodésica cerrada en una superficie difeomorfa a la esfera. Este teorema fue conjeturado por Poincaré (veáse [44]) y demostrado por Birkhoff. (veáse [4]).

TEOREMA 1.1. *Sea γ una curva cerrada en M , tal que bajo el mapeo de Gauss g , divide a la esfera unitaria en dos regiones con áreas iguales. Si además, entre todas las curvas que cumplen las condiciones anteriores, γ tiene la longitud mínima, entonces γ es una geodésica cerrada.*

Esto sugiere una restricción natural para el problema comprendido por (1.5) o (1.1), equivalentemente. La función u pertenece al espacio de funciones que satisfacen la condición

$$(1.6) \quad \int_{S^2} u(g^{-1}(y)) dy = 0,$$

donde g es el mapeo de Gauss.

Por otro lado, las soluciones de (1.1) corresponden a puntos estacionarios de

$$(1.7) \quad u_t = \epsilon \Delta u - \frac{1}{\epsilon} W'(u).$$

Para la ecuación de Allen-Cahn no homogénea en variedades Riemannianas, Du (veáse [13]), considera el problema

$$\epsilon^2 \Delta u + V(z)u(1 - u^2) = 0,$$

en una variedad Riemanniana \mathcal{M} suave, compacta de dimensión N , donde $\epsilon \ll 1$ y $V : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función positiva, suave en \mathcal{M} . Si \mathcal{K} es una subvariedad de dimensión $N - 1$ que divide a \mathcal{M} en dos conjuntos disjuntos \mathcal{M}_\pm y \mathcal{K} es estacionaria y no degenerada en relación al funcional $\int_{\mathcal{K}} V^{\frac{1}{2}}$, entonces existen dos soluciones $u_\epsilon^{(1)}$ y $u_\epsilon^{(2)}$ de tal manera que cuando $\epsilon \rightarrow 0$, $u_\epsilon^{(1)}$ se aproxima a -1 en \mathcal{M}_- y a 1 en \mathcal{M}_+ , mientras que la segunda solución lo hace de manera opuesta. Aquí la expresión no homogénea, se refiere al caso en el que $V(z) \not\equiv 1$.

La subvariedad \mathcal{K} es estacionaria en relación al funcional

$$L(f) = \int_{\mathcal{K}} V^{\frac{1}{2}} = \int_{\mathcal{K}} V^{\frac{1}{2}}(\tilde{y}, f) \sqrt{\det \tilde{g}(f)},$$

si su primera variación en $f = 0$ es igual a cero.

Por otro lado se dice que \mathcal{K} es no degenerada si la forma cuadrática de su segunda variación cumple que $L''(0)[h, h] \neq 0$ para toda $h \neq 0$.

En el caso no homogéneo,

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \Delta u + Vu(1 - u^2) &= 0, \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^N, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

Nakashima (véase [40]) demostró que una solución al problema anterior en \mathbb{R} con las características anteriormente mencionadas, tiene sus raíces cerca de los extremos del intervalo, donde yacen los mínimos y máximos locales de $V(z)$. En \mathbb{R}^2 , Du y Gui (véase [14]), demostraron que si Γ es estacionaria y no degenerada en relación a la longitud de arco, entonces existen dos soluciones como las ya mencionadas.

En variedades Riemmanianas, Pacard y Ritoré (véase [41]), suponen que \mathcal{K} es una subvariedad minimal y no degenerada de dimensión $N - 1$ y encajada en \mathcal{M} , entonces existe una solución u_ϵ de

$$\epsilon^2 \Delta u + u(1 - u^2) = 0,$$

con valores cercanos a ± 1 en \mathcal{M}_\pm y cuya curva de nivel correspondiente al valor 0, es una variedad suave ϵ -cercana a \mathcal{K} .

Por otro lado, Bai, Elliot, Gardiner, Spence y Stuart (véase [5]), consideran la ecuación de Cahn-Hilliard viscosa escrita en la forma

$$(1.8) \quad u_t = \Delta w, \quad x \in \Omega, t > 0,$$

$$(1.9) \quad \alpha u_t = \gamma \Delta u + f(u) + \beta w, \quad x \in \Omega, t > 0,$$

con condición inicial

$$(1.10) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Se establece una condición de Dirichlet

$$(1.11) \quad u = w = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0,$$

o una condición de Neumann

$$(1.12) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0,$$

donde n denota la normal exterior unitaria en Ω . En este último caso se impone una condición de conservación

$$(1.13) \quad \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u(x, 0) dx, \quad t > 0,$$

de tal forma que la ecuación (1.8) tiene una única solución w en términos de u_t , Ω es un dominio acotado de \mathbb{R}^d en la que $d = 1, 2, 3$, $\gamma \in (0, \infty)$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ y

$$(1.14) \quad f(s) = \sum_{j=1}^{2p-1} b_j s^j, \quad b_{2p-1} < 0.$$

A partir de los valores de α y β se distinguen los casos: (i) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, (ii) $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, (iii) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. En el caso (i) las ecuaciones (1.8) y (1.9) se reducen a la ecuación de Cahn-Hilliard; en el caso (ii) se obtiene la ecuación

de Allen-Cahn, mientras que el caso (iii) se refiere a la ecuación de Cahn-Hilliard viscosa.

Si se hace $\beta = 1 - \alpha$ y se considera $\alpha \in [0, 1]$, entonces α puede interpretarse como un *parámetro de continuación*, de la ecuación de Cahn-Hilliard ($\alpha = 0$) a la de Allen-Cahn ($\alpha = 1$), por lo que la ecuación viscosa puede interpretarse como una interpolación entre ellas para $\alpha \in (0, 1)$.

Los autores demuestran numéricamente, mediante el estudio de las propiedades de las órbitas heteroclínicas, que el atractor global \mathcal{A} de la ecuación viscosa de Cahn-Hilliard es *insensible* a los cambios en el parámetro α . De manera más precisa en Elliot y Stuart (véase [16]), se demuestra, mediante la teoría de semigrupos, la existencia del atractor global \mathcal{A}_α para cada $\alpha \in [0, 1]$ (Teorema 5.1) y la existencia de una constante $K > 0$ (Teorema 5.2), tal que para toda $\epsilon \in [0, 1]$, $d(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_\epsilon) \leq K\epsilon$, donde d es la distancia de Hausdorff.

En estos trabajos se demuestra (análiticamente y numéricamente) la existencia del atractor global para este tipo de ecuaciones y por tener una estructura gradiente el estudio del atractor se reduce al estudio de las órbitas heteroclínicas. Mediante la implementación del método de Galerkin se estudia la estructura del atractor para cada α así como la transición en las soluciones. Las técnicas empleadas en estos trabajos son las mismas para el caso en cuestión.

2. Descripción general de la tesis

El objetivo del presente trabajo de investigación es demostrar que el atractor de la ecuación parabólica (1.7) asociada a (1.1) puede caracterizarse en términos de funciones que poseen regiones de transición determinadas por geodésicas cerradas o arcos de geodésicas. En otras palabras, dada cualquier condición inicial, el semiflujo parabólico determinado por (1.7) se aproxima a una función con transiciones concentradas en geodésicas. Aquí consideramos el caso especial en el que $M = S^2$ y $W(u) = (1 - u^2)^2$. De esta manera nuestro objetivo se simplifica dado que toda superficie oval es difeomorfa a S^2 .

Estudiaremos el comportamiento de las soluciones de (1.7) sujeta a la restricción (1.6), que bajo todas las consideraciones expuestas en el párrafo anterior se transforma en

$$(1.15) \quad \int_{S^2} u = 0.$$

Caracterizaremos el atractor a través de varias etapas. La primera consiste en demostrar la existencia del atractor para la ecuación (1.7) sujeta a la restricción (1.15). Enseguida describimos la estructura de este atractor mediante una implementación numérica empleando el método de Galerkin.

De esta manera, el presente se divide en los siguientes capítulos. En el capítulo 2, denominado resultados generales describimos la notación y terminología referente a conjuntos invariantes, conjuntos absorbentes y atractores. El resultado principal de este capítulo es el Teorema 2.1, en el que se prueba la existencia de un atractor a través de la existencia de un conjunto absorbente.

En el capítulo 3, estudiamos la minimización de un funcional de área generada por una curva bajo la acción de un flujo definido por una ecuación diferencial autónoma. En el Teorema 3.1 describimos las condiciones para el cual este funcional tiene un mínimo que sea una curva invariante bajo el flujo definido por una ecuación diferencial autónoma. Mediante el uso del método de descenso máximo se estudian los casos de órbitas heteroclínicas y ciclos límites para ecuaciones concretas. De esta forma, mostramos que este método determina los tipos de órbitas de interés, con un criterio de convergencia apropiado. El mencionado Teorema se encuentra publicado en [36] y forma parte de un documento de maestría.

Una vez expuestos los resultados en los capítulos anteriores, en el capítulo 4 nos enfocamos en el estudio del atractor de la ecuación (1.7) sujeta a la restricción (1.15). El resultado que emana de este estudio es enunciado en la forma

del Teorema 4.3, utilizando espacios de Sobolev en variedades Riemannianas.

Debido a la geometría del dominio, escribimos la ecuación en coordenadas esféricas y aplicamos el método de Galerkin a la ecuación resultante. Como consecuencia encontramos las funciones que servirán como solución aproximada al problema en estudio. Esto se aborda en el capítulo 5.

En el capítulo 6 presentamos los resultados numéricos y las conclusiones correspondientes a ejemplos particulares. De esta manera, concluimos mostrando concordancia entre los resultados numéricos y analíticos de la estructura del atractor que aquí estudiamos. Incluimos además los puntos que pueden fortalecer este trabajo así como proyectos a futuro.

Las aportaciones del presente se encuentran entonces en dos rubros, el teorema 3.1 en el estudio de conjuntos invariantes mediante funcionales de área y en lo referente al atractor de la ecuación en estudio, mostramos la concordancia de los resultados numéricos y analíticos a través de una solución débil a nuestro problema.

Asimismo se incluyen tres anexos, éstos están divididos de la siguiente manera. En el anexo A, definiendo el semigrupo de operadores, hacemos un bosquejo de la existencia y unicidad de la solución del presente problema. La propiedad inyectiva de estos operadores se encuentra en el anexo B; esto permite obtener el Teorema 2.1, y en consecuencia, el Teorema 4.3. La implementación numérica en Mathematica y en Maple, además del análisis de las soluciones del método de Galerkin, se encuentran en el anexo C.

Resultados generales

1. Semigrupos de operadores

Para demostrar la existencia del atractor que se estudia en esta tesis, se necesitan los conceptos que en este capítulo desarrollamos. Se caracteriza a los conjuntos ω -límite, los conjuntos invariantes, atractores y conjuntos absorbentes. La notación y terminología utilizada en este capítulo referente a conjuntos ω -límite, α -límite, conjuntos invariantes, conjuntos absorbentes y atractores puede encontrarse en [51]. Mediante los argumentos en [45, 47] se demuestra la Proposición 2.1, el Lema 2.1 y finalmente el Teorema 2.1. Este Teorema permite obtener el resultado principal de este trabajo referente a la existencia del atractor, el cual se encuentra en el capítulo 4.

Se consideran sistemas dinámicos cuyos *estados* están descritos por elementos $u(t)$ de un espacio métrico H . En muchos casos, en particular para sistemas dinámicos asociados a ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias, el parámetro t (*variable tiempo*) varía continuamente en \mathbb{R} o en intervalos de \mathbb{R} . En algunos casos, t tomará sólo valores discretos, i. e., $t \in \mathbb{Z}$ o en algún subconjunto de \mathbb{Z} . Usualmente el espacio H será un espacio de Banach o de Hilbert.

Para $t \geq 0$, la evolución de un sistema dinámico está descrito por una familia de operadores $S(t)$, donde $t \geq 0$, que transforman H en sí mismo con las propiedades usuales de semigrupo

$$(2.1) \quad \begin{cases} S(t+s) = S(t) \cdot S(s) & \forall s, t \geq 0 \\ S(0) = I, \end{cases}$$

donde $I \in H$ es la identidad.

Si ϕ es el estado del sistema dinámico al tiempo s entonces $S(t)\phi$ representa el estado del sistema al tiempo $t+s$ y

$$(2.2) \quad \phi(t) = S(t)\phi(0)$$

$$(2.3) \quad \phi(t+s) = S(t)\phi(s) = S(s)\phi(t), \quad s, t \geq 0.$$

El semigrupo (2.1) estará determinado por la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) o una Ecuación Diferencial Parcial (EDP). En dimensión finita, los Teoremas de existencia y unicidad son suficientes para la existencia de los operadores $S(t)$. En el caso de dimensión infinita no hay Teoremas de existencia y unicidad lo suficientemente generales, por lo que la existencia de los operadores $S(t)$, así como sus propiedades es un paso preliminar en el estudio de un sistema dinámico dado.

La existencia y propiedades de estos operadores son fundamentales para los conceptos que aquí presentamos.

Supongamos que $S(t)$ es un operador no lineal continuo

$$(2.4) \quad S : H \rightarrow H, \quad \forall t \geq 0.$$

Si el operador S es inyectivo, entonces tiene la propiedad de *unicidad retrógrada*, esto es: cuando $S(t)$, $t > 0$ es uno a uno, se denota por $S(-t)$ el operador inverso que mapea $S(t)H$ sobre H . De este modo se obtiene una familia de operadores $S(t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Cabe aclarar que para $t < 0$ los operadores $S(t)$ no necesariamente están definidos en H .

A continuación se listan las siguientes definiciones (veáse [51]).

DEFINICIÓN 2.1. Para $u_0 \in H$ la *órbita* o *trayectoria* que empieza en u_0 es el conjunto $\bigcup_{t \geq 0} S(t)u_0$.

Una *órbita* o *trayectoria* que termina en u_0 es el conjunto $\bigcup_{t \geq 0} S(-t)^{-1}u_0$, cuando éste exista.

Para $u_0 \in H$ o para $\mathcal{A} \in H$, el *conjunto ω -límite* de $u_0 \in H$ (o $\mathcal{A} \subset H$) es

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0},$$

o

$$\omega(\mathcal{A}) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}}.$$

El conjunto α -límite de $u_0 \in H$ (o $\mathcal{A} \subset H$) es

$$\alpha(u_0) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}u_0},$$

o

$$\alpha(\mathcal{A}) = \bigcap_{s \leq 0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S(-t)^{-1}\mathcal{A}}.$$

Notemos que $\omega(\mathcal{A})$ no necesariamente es igual a $\bigcup_{x \in \mathcal{A}} \omega(x)$. Por ejemplo, para el sistema dinámico $\dot{x} = x - x^3$ y el intervalo $\mathcal{A} = [-2, 2]$ entonces el conjunto ω -límite es el intervalo $[-1, 1]$ mientras que $\bigcup_{x \in \mathcal{A}} \omega(x) = \{0, \pm 1\}$.

La siguiente Proposición caracteriza al conjunto ω límite en términos de una sucesión de elementos en un conjunto, la cual será ingrediente clave para la demostración del Teorema 2.1. Su demostración puede encontrarse en [47].

PROPOSICIÓN 2.1. $\phi \in \omega(\mathcal{A})$ si y sólo existe una sucesión de elementos $\phi_n \in \mathcal{A}$ y una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$(2.5) \quad S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De manera análoga, la caracterización del conjunto α -límite puede escribirse en los siguientes términos $\phi \in \alpha(\mathcal{A})$ si y sólo si existe una sucesión ψ_n que converge a ϕ en H y una sucesión $t_n \rightarrow \infty$, tal que $\phi_n = S(t_n)\psi_n \in \mathcal{A}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Una vez caracterizados los conjuntos límite, definimos una noción fundamental en los sistemas dinámicos.

DEFINICIÓN 2.2. Un *punto fijo* o un *punto estacionario* o un *punto de equilibrio* es un punto $u_0 \in H$ tal que

$$S(t)u_0 = u_0 \quad \forall t \geq 0.$$

A continuación haremos una descripción de los conjuntos invariantes.

2. Conjuntos invariantes

Una de las propiedades de un atractor es que es un conjunto invariante. Esta noción permite concluir que el conjunto ω -límite es un conjunto invariante (veáse Lema 2.1).

Se dice que un conjunto $X \subset H$ es *positivamente invariante* para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si

$$S(t)X \subset X \quad \forall t \geq 0.$$

Por otro lado, se dice que X es *negativamente invariante* para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si

$$S(t)X \supset X \quad \forall t \geq 0.$$

Cuando el conjunto es positivamente y negativamente invariante, se dice que es un *conjunto invariante*.

DEFINICIÓN 2.3. Un conjunto $X \subset H$ es un *conjunto invariante* para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si

$$S(t)X = X \quad \forall t \geq 0.$$

Algunos ejemplos de conjuntos invariantes son los siguientes

1. Un punto fijo o unión de puntos fijos.
2. Órbitas heteroclínicas.
3. Ciclos límite.

En el capítulo 3, los ejemplos 2 y 3 son esenciales como para la caracterización de las soluciones que en esta tesis estudiamos. A continuación se presenta una descripción de tales conjuntos.

Una *órbita heteroclínica* es una curva en el espacio fase, que une dos puntos de equilibrio, uno de ellos es el ω -límite y el otro el α -límite de la curva.

Un *ciclo límite* es una curva cerrada en el espacio fase tal que toda trayectoria se acerca a ella cuando t (o $-t$) tienden a infinito.

El siguiente Lema caracteriza al conjunto ω -límite como un conjunto invariante; este Lema permitirá concluir más adelante que un ω -límite conjunto será también un atractor.

LEMA 2.1. *Si para algún subconjunto $\mathcal{A} \in H$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ y para algún $t_0 \geq 0$, el conjunto $\bigcup_{t \geq 0} S(t)\mathcal{A}$ es relativamente compacto en H , entonces $\omega(\mathcal{A})$ es no vacío, compacto e invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que \mathcal{A} es no vacío, los conjuntos $\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}$ son no vacíos para cada $s \geq 0$. De modo que los conjuntos $\overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}}$ son conjuntos compactos no vacíos.

Si $s_1 \geq s_2$ entonces $\overline{\bigcup_{t \geq s_2} S(t)\mathcal{A}} \subset \overline{\bigcup_{t \geq s_1} S(t)\mathcal{A}}$, por lo que $\overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\mathcal{A}}$ es una familia de conjuntos compactos decreciente, por lo que su intersección, que es $\omega(\mathcal{A})$, es entonces un conjunto compacto no vacío.

Finalmente veamos que $S(t)\omega(\mathcal{A}) = \omega(\mathcal{A}) \quad \forall t > 0$. Esto se realizará empleando la caracterización del conjunto ω -límite, dada por (2.5).

Si $\psi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$, entonces $\psi = S(t)\phi$, con $\phi \in \omega(\mathcal{A})$.

Tomando en cuenta ϕ_n, t_n , de la proposición 2.1 y las propiedades de $S(t)$ en (2.1), obtenemos que

$$S(t)S(t_n)\phi_n = S(t + t_n)\phi_n \rightarrow S(t)\phi,$$

es decir, dado que $\psi = S(t)\psi$, entonces $\psi \in \omega(\mathcal{A})$.

Ahora, si $\phi \in \omega(\mathcal{A})$, para las sucesiones ϕ_n, t_n , si $t_n \geq t$, la sucesión $S(t_n - t)\phi_n$ es relativamente compacta en H , de modo que existe una subsucesión $t_{n_i} \rightarrow \infty$ y $\psi \in H$ tal que

$$S(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \rightarrow \psi, \quad t \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $\psi \in \omega(\mathcal{A})$ y, por la continuidad de los operadores $S(t)$

$$S(t_{n_i})\phi_{n_i} = S(t)S(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \rightarrow S(t)\phi = \psi,$$

cuando $n_i \rightarrow \infty$.

De esta manera, $\phi \in S(t)\omega(\mathcal{A})$, lo que demuestra que este conjunto es invariante. \square

La demostración es análoga si los conjuntos $S(t)^{-1}\mathcal{A}$, $t \geq 0$ son no vacíos y para algún $t_0 > 0$, $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)^{-1}\mathcal{A}$ es relativamente compacto. Bajo estas hipótesis, el conjunto $\alpha(\mathcal{A})$ es no vacío, compacto e invariante. Véase la demostración del Lema 2.1.

En el Lema 2.1, para probar la suposición principal, la cual dice que $\cup_{t \geq 0} S(t)\mathcal{A}$ es relativamente compacto, se puede utilizar el hecho de que si H es de dimensión finita, es también acotado. En otro caso, se verifica que este conjunto es acotado en un espacio W compactamente encajado en H . En efecto, si el conjunto es acotado en W entonces toda sucesión que se tome en ese conjunto es acotada. Es decir, existe una subsucesión convergente y por lo tanto, será relativamente compacto en H . Véase [18] para una definición de espacios compactamente encajados.

3. Conjuntos absorbentes y atractores

DEFINICIÓN 2.4. Un *atractor* es un conjunto $\mathcal{A} \in H$ que cumple las siguientes propiedades

1. \mathcal{A} es un conjunto invariante.
2. \mathcal{A} tiene una vecindad abierta \mathcal{U} tal que, para $u_0 \in \mathcal{U}$, $S(t)u_0$ converge a \mathcal{A} cuando $t \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que

$$\text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Donde,

$$\text{dist}(x, \mathcal{A}) \equiv \inf_{y \in \mathcal{A}} d(x, y),$$

y $d(x, y)$ denota la distancia de x y y en H .

Si \mathcal{A} es un atractor, el conjunto *más grande* (bajo la relación de inclusión) \mathcal{U} en la que existe una vecindad abierta \mathcal{V} tal que para $v_0 \in \mathcal{V}$, $\text{dist}(S(t)v_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ se denomina *cuenca de atracción* de \mathcal{A} . De manera alterna se dice que \mathcal{A} atrae los puntos de \mathcal{U} .

Además se dice que hay convergencia uniforme si para cada $\epsilon > 0$, existe t_ϵ tal que para $t \geq t_\epsilon$, $S(t)\mathcal{B}$ está incluido en \mathcal{U}_ϵ , esto es, una ϵ -vecindad de \mathcal{A} .

DEFINICIÓN 2.5. Se dice que \mathcal{A} *atrae uniformemente* a un conjunto $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ si

$$d(S(t)\mathcal{B}, \mathcal{A}) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Aquí $d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ es ahora la *semidistancia* de dos conjuntos

$$d(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \sup_{x \in \mathcal{B}_0} \inf_{y \in \mathcal{B}_1} d(x, y).$$

En dimensión infinita en donde se trabaja con diferentes topologías, se puede pensar en conjuntos \mathcal{A} que son atractores en el espacio W , $W \subset H$. esto significa que $\mathcal{A} \subset W$, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ y el inciso 2 de la definición 2.4 se satisface con la topología de W . Es decir, \mathcal{U} es abierto en W y la distancia en la definición 2.5 es la de W , el cual es espacio métrico.

Otra definición de atractor se encuentra en [47]. \mathcal{A} es un atractor si \mathcal{A} es el ω -límite de una de sus vecindades abiertas \mathcal{U}_0 . La cuenca de atracción de \mathcal{A} es la unión de conjuntos abiertos \mathcal{U}_0 tal que $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{A}$ y $\omega(\mathcal{U}_0) = \mathcal{A}$. Sin embargo, esta definición no es esencial aquí dado que nos concentraremos en los *atractores globales*.

DEFINICIÓN 2.6. $\mathcal{A} \in H$ es un *atractor global* (o *universal*) para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si \mathcal{A} es un atractor compacto que atrae los conjuntos acotados de H . Además, \mathcal{A} es una cuenca de atracción de H .

Este conjunto es necesariamente único. Tal conjunto es maximal para la relación de inclusión entre todos los atractores acotados; por esta razón también es llamado *atractor maximal*.

DEFINICIÓN 2.7. La idea de conjunto absorbente es un concepto que nos permite determinar la existencia de un atractor (véase 2.1), por lo que se define a continuación. Sea \mathcal{B} un subconjunto de H y \mathcal{U} un conjunto abierto que contiene a \mathcal{B} . Se dice que \mathcal{B} es *absorbente* en \mathcal{U} si la órbita de cualquier conjunto acotado de \mathcal{U} está contenido en \mathcal{B} después de un tiempo finito; el cual puede depender del conjunto mismo.

$$\begin{cases} \forall \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{U} & \mathcal{B}_0 \text{ acotado} \\ \exists t_1(\mathcal{B}_0) & \text{tal que } S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}, \forall t \geq t_1(\mathcal{B}_0) \end{cases}$$

En otras palabras, \mathcal{B} absorbe los conjuntos acotados de \mathcal{U} .

La existencia de un atractor global \mathcal{A} para el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ implica la existencia de un conjunto absorbente. En efecto, para $\epsilon > 0$, sea \mathcal{V}_ϵ la ϵ -vecindad de \mathcal{A} (i. e. la unión de bolas abiertas de radio ϵ centradas en elementos de \mathcal{A}). Entonces, para cualquier conjunto acotado \mathcal{B}_0 , $d(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ (pues \mathcal{A} es un atractor); así $d(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ para $t \geq t(\epsilon)$ y $S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{V}_\epsilon$. Esto muestra que \mathcal{V}_ϵ es un conjunto absorbente.

La existencia de un conjunto absorbente está relacionada con la propiedad de *disipación* del sistema dinámico; en el caso de EDOs se dice que el *semigrupo* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *disipa los conjuntos acotados (compactos o puntos)* si existe un conjunto \mathcal{B} que absorbe los conjuntos acotados (o compactos o puntos). Sin embargo, en el caso de dimensión infinita, para algunos sistemas, que en el sentido físico se consideran disipativos, la existencia de un conjunto absorbente no es conocida aún, por lo que no está claro que esta propiedad sea una definición concreta.

La existencia de un atractor puede probarse a partir de encontrar un conjunto absorbente. Para ello se requieren condiciones adicionales sobre el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, las cuales se describen a continuación.

1. Los operadores $S(t)$ son *uniformemente compactos* para t suficientemente grande. Esto significa que para cada conjunto acotado \mathcal{B} existe t_0 (que puede depender de \mathcal{B}) tal que

$$(2.6) \quad \bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$$

es relativamente compacto en H .

Por otra parte, si H es un espacio de Banach, se puede suponer que $S(t)$ es una perturbación de un operador uniformemente compacto por un operador (no necesariamente lineal) que a su vez, tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

2. En palabras más precisas, si H es un espacio de Banach y para cada t , $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, donde $S_1(\cdot)$ es uniformemente compacto para t suficientemente grande y $S_2(t)$ es un mapeo continuo de H en sí mismo, tal que se satisface que para cada conjunto acotado $C \subset H$,

$$(2.7) \quad r_c(t) = \sup_{\phi \in C} |S_2(t)\phi|_H \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Por supuesto, si H es un espacio de Banach, cualquier familia de operadores que satisface la primera condición, también satisface la segunda para $S_2 \equiv 0$.

TEOREMA 2.1. *Sea H un espacio métrico en el que los operadores satisfacen (2.1), (2.4) y alguna de las suposiciones (2.6), (2.7). Se supone además que también existe un conjunto abierto \mathcal{U} y un conjunto acotado \mathcal{B} tal que \mathcal{B} es absorbente en \mathcal{U} . Entonces, el conjunto ω -límite de \mathcal{B} , $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$, es un atractor compacto que atrae los conjuntos acotados de \mathcal{U} . Es el atractor maximal acotado en \mathcal{U} (para la relación de inclusión).*

Además, si H es un espacio de Banach, \mathcal{U} es convexo y el mapeo $t \mapsto S(t)u_0$ es continuo de \mathbb{R}^+ en H , para cada u_0 en H , entonces \mathcal{A} es además convexo.

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero el caso del inciso 1.

Dado que el conjunto $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ es relativamente compacto, el Lema 2.1 implica que $\omega(\mathcal{B})$ es un conjunto compacto no vacío e invariante. Para probar que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es un atractor en \mathcal{U} y que atrae los conjuntos acotados de la familia

\mathcal{U} , procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que para algún conjunto acotado \mathcal{B}_0 de \mathcal{U} , $\text{dist}(S(t)\mathcal{B}_0, \mathcal{A})$ no tiende a cero cuando $t \rightarrow \infty$.

Entonces existe $\delta > 0$ y una sucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$\text{dist}(S(t_n)\mathcal{B}_0, \mathcal{A}) \geq \delta > 0 \quad \forall n.$$

Para cada n existe $b_n \in \mathcal{B}_0$ que satisface

$$\text{dist}(S(t_n)b_n, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

Dado que \mathcal{B} es absorbente, $S(t_n)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ y así $S(t_n)b_n \in \mathcal{B}$ para n suficientemente grande, es decir, para $n \geq N$ con $N \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{S(t_n)b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es relativamente compacta, por lo tanto, posee al menos un punto límite β , esto es

$$\beta = \lim_{n_i \rightarrow \infty} S(t_{n_i})b_{n_i} = \lim_{n_i \rightarrow \infty} S(t_{n_i} - t_1)S(t_1)b_{n_i}.$$

Debido a que $S(t_1)b_n \in \mathcal{B}$, $\beta \in \mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$, lo cual contradice la suposición. Por lo que \mathcal{A} es un atractor.

Este atractor es maximal. En caso contrario, si $\mathcal{A}' \supset \mathcal{A}$ es un atractor acotado, entonces $\mathcal{A}' \subset \mathcal{B}$ ya que $S(t)\mathcal{A}' = \mathcal{A}'$ está incluido en \mathcal{B} para t suficientemente grande, debido a que \mathcal{B} es absorbente; en consecuencia $\omega(\mathcal{A}') = \mathcal{A}' \subset \omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$.

Finalmente, la conexidad de \mathcal{A} se sigue del Lema 2.3 y el Teorema queda demostrado. \square

En el Teorema 2.1, la suposición (2.7) puede ser reemplazada por la hipótesis de que para algún $t_1 > 0$, $S(t_1)$ es compacto. De forma adicional, en la prueba del Teorema 2.1, tenemos que $\cup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ es relativamente compacto en H cuando \mathcal{B} es un conjunto absorbente. Se define t_0 por $S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $\forall t \geq t_0$. Entonces, para $t \geq t_* = t_0 + t_1$, $S(t)\mathcal{B} = S(t_1)S(t - t_1)\mathcal{B}$ está incluido en $S(t_1)\mathcal{B}$ ya que $S(t - t_1)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, y así $\cup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ está en $S(t_1)\mathcal{B}$.

Con una ligera modificación en la prueba del Teorema 2.1, se puede suponer que \mathcal{U} es conexo.

PROPOSICIÓN 2.2. *Si ϕ_n es acotado y $t_n \rightarrow \infty$, entonces $S_2(t_n)\phi_n \rightarrow 0$ y $S_1(t_n)\phi_n$ es convergente si y sólo si $S(t_n)\phi_n$ converge.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $S_2(t)\phi_n$ está acotada por $r_c(t)$ en la que C es la sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$. De esta forma $S_2(t_n)$ tiende a 0 y

$$S(t_n)\phi_n = S_1(t_n)\phi_n + S_2(t_n)\phi_n$$

converge si y sólo si $S_1(t_n)\phi_n$ converge. \square

LEMA 2.2. *Si el semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisface alguna de las condiciones (2.6) y (2.7), entonces para todo conjunto acotado \mathcal{B}_0 de H , $\omega(\mathcal{B}_0)$ es no vacío, compacto e invariante.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que se satisface (2.6); el conjunto $\cup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}$ es relativamente compacto y el Lema 2.1 proporciona la conclusión.

Ahora supongamos que la condición (2.7) se satisface. Utilizando el resultado de la proposición 2.2 repetidamente y la caracterización del conjunto ω -límite, para mostrar que este conjunto para $S(t)$ (i. e., $\omega(\mathcal{B}_0)$) es igual al conjunto

$$\omega_1(\mathcal{B}_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0}.$$

En efecto, si $\phi \in \omega(\mathcal{B}_0)$, existe $\phi_n \in \mathcal{B}_0$ y una sucesión $t_n \rightarrow \infty$, tal que

$$S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi, \quad n \rightarrow \infty.$$

En consecuencia, $S_1(t_n)\phi_n$ también converge a ϕ cuando $n \rightarrow \infty$ y, por lo tanto $\phi \in \omega_1(\mathcal{B}_0)$. Análogamente, se prueba la otra inclusión, por lo que

$$\omega(\mathcal{B}_0) = \omega_1(\mathcal{B}_0).$$

Como en la demostración del Lema 2.1, el conjunto $\omega_1(\mathcal{B}_0)$ es no vacío y compacto, en virtud de que los conjuntos $\bigcup_{t \geq s} S_1(t)\mathcal{B}_0$ son no vacíos, cerrados y forman una sucesión decreciente y, por hipótesis también es compacto. De tal suerte que $\omega(\mathcal{B}_0)$ es no vacío y compacto.

Ahora probemos que $\omega(\mathcal{B}_0)$ es invariante para $S(t)$. La inclusión $S(t)\omega(\mathcal{B}_0) \subset \omega(\mathcal{B}_0) \forall t > 0$ se demuestra como en el Lema 2.1. Sea $\psi \in S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$. De modo que $\psi = S(t)\phi$, $\phi \in \omega(\mathcal{B}_0)$. Por lo tanto, existen sucesiones $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ tales que $S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi$. Esto implica que

$$S(t)S(t_n)\phi_n = S(t+t_n)\phi_n \rightarrow S(t)\phi = \psi,$$

lo que afirma que $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$.

Sólo falta demostrar la inclusión $\omega(\mathcal{B}_0) \subset S(t)\mathcal{B}_0$. Sea $\phi \in \omega(\mathcal{B}_0)$; entonces, existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{B}_0$ y $t_n \rightarrow \infty$ tal que

$$S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Para $t_n \geq t$, la sucesión $\{S(t_n - t)\phi_n\}_{n=1}^\infty$ es de la forma

$$S(t_n - t)\phi_n = S_1(t_n - t)\phi_n + S_2(t_n - t)\phi_n.$$

La sucesión $\{S_1(t_n - t)\phi_n\}_{n=1}^\infty$ forma un conjunto relativamente compacto en H y contiene una subsucesión convergente

$$S_1(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \rightarrow \psi$$

cuando $n_i \rightarrow \infty$. También, $S_2(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \rightarrow 0$ y así

$$S(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} \rightarrow \psi$$

cuando $n_i \rightarrow \infty$. Esto implica que $\psi \in \omega(\mathcal{B}_0)$ y

$$\phi = \lim_{n_i \rightarrow \infty} S(t)S(t_{n_i} - t)\phi_{n_i} = S(t)\psi,$$

el cual pertenece a $S(t)\omega(\mathcal{B}_0)$. □

Para la demostración de la conclusión del Teorema 2.1 referente a la suposición de convexidad de \mathcal{A} y a la conclusión de que \mathcal{A} es conexo, necesitamos los siguientes enunciados relativos a conjuntos convexos y conexos en espacios normados, (véase [25, 39, 50, 54]).

DEFINICIÓN 2.8. Un conjunto $C \in X$, donde X es un espacio normado, es *convexo* si para cualesquiera $x_1, x_2 \in C$, se tiene que $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

En otras palabras, un conjunto C es convexo si para cualesquiera $x_1, x_2 \in C$ se tiene que $\lambda x_1 + \mu x_2 \in C$ si $\lambda + \mu = 1$.

PROPOSICIÓN 2.3. Sea C un conjunto convexo en un espacio normado X . Entonces \overline{C} es un conjunto convexo.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x_1, x_2 \in \overline{C}$. Entonces existen sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ que convergen a x_1 y x_2 respectivamente.

Entonces para $\alpha \in [0, 1]$, se tiene que

$$\|[\alpha x_n + (1 - \alpha)x'_n] - [\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2]\| = \|\alpha(x_n - x_1) + (1 - \alpha)(x'_n - x_2)\| \leq \alpha\|x_n - x_1\| + (1 - \alpha)\|x'_n - x_2\|.$$

Pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|[\alpha x_n + (1 - \alpha)x'_n] - [\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2]\| = 0,$$

lo que muestra que $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \bar{C}$. Por lo tanto \bar{C} es un conjunto convexo. \square

DEFINICIÓN 2.9. Si C es un conjunto no vacío, entonces la *cubierta convexa*, denotada por $\text{conv } C$ es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a C y es el mínimo conjunto convexo que contiene a C .

Otra manera de caracterizar a este conjunto es que éste consiste de todas las *combinaciones convexas* de elementos de C , esto es,

$$\text{conv } C = \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, x_i \in C, \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

PROPOSICIÓN 2.4. Sean $x_i, i = 1, \dots, m$, puntos de un conjunto convexo $C \in X$ y $\alpha_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, m$, con $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$. Entonces $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \in A$.

DEMOSTRACIÓN. Se procede por inducción sobre m . Para $m = 1$ el resultado es verdadero.

Se supone ahora que el enunciado es válido para algún entero k . Sea

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1},$$

donde $x_i \in C, \forall i = 1, \dots, k+1$ y $\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = 1$.

Al menos uno de esos coeficientes es menor que uno, sin pérdida de generalidad, tomemos $\alpha_{k+1} < 1$. Se escribe

$$y = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i,$$

donde $\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - \alpha_{k+1} > 0$.

Por la hipótesis de inducción, $y \in C$. Puesto que C es convexo y contiene a los puntos y y x_{k+1} , la ecuación $x = y + \alpha_{k+1} x_{k+1}$ muestra que $x \in C$. Esto completa la prueba. \square

PROPOSICIÓN 2.5. Sea C un conjunto convexo en X . Entonces $\text{conv } A$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de C .

DEMOSTRACIÓN. Sea B el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos de C .

El hecho de que $B \subset \text{conv } C$ se sigue de la proposición 2.4 y $A \subset \text{conv } A$.

Se demuestra ahora que B es convexo. Si $x, y \in B$, entonces

$$x = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j, x_j, y_j \in C \forall i, j$$

$$y = \sum_{i=1}^p \beta_i y_i, \alpha_j, \beta_i \geq 0 \forall i, j.$$

con $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1, \sum_{i=1}^p \beta_i = 1$. Sean $\lambda, \mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$. Entonces

$$\lambda x + \mu y = \sum_{j=1}^m \lambda \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^p \mu \beta_i y_i.$$

Ahora bien

$$\lambda\alpha_1 + \cdots + \lambda\alpha_m + \mu\beta_1 + \cdots + \mu\beta_p = \lambda(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m) + \mu(\beta_1 + \cdots + \beta_p) = \lambda + \mu = 1.$$

Así $\lambda x + \mu y \in B$, de modo que B es convexo y puesto que $B \supset C$, se sigue que $B \supset \text{conv } C$. Así $B = \text{conv } C$. \square

Las siguientes definiciones de conexidad establecen las proposiciones y resultados necesarios para concluir esta propiedad del atractor del Teorema 2.1.

DEFINICIÓN 2.10. Una *separación (disconexión)* de un espacio métrico X es un par S, T de conjuntos abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X . El espacio X es *conexo* si no existe una separación de X .

DEFINICIÓN 2.11. Un *arco* en un espacio métrico X es el rango de una función $f : [0, 1] \rightarrow X$ continua en ese intervalo. A los puntos $f(0)$ y $f(1)$ se les llama *extremos del arco*; también se dice que dichos puntos están *unidos por un arco*.

DEFINICIÓN 2.12. Un conjunto A en un espacio métrico X es *arco-conexo* si para todo par de puntos $x, y \in A$ x y y están unidos por un arco *contenido* en A .

PROPOSICIÓN 2.6. *Sea F una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X . Si existe $A_0 \in F$ tal que para toda $A \in F$, $A \cap A_0 \neq \emptyset$, entonces $B = \bigcup_{A \in F} A$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean S y T conjuntos abiertos en X tales que

$$B = (S \cap B) \cup (T \cap B), \quad (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset.$$

Se toma un $A \in F$ arbitrario. Como $A \subset B$ se tiene que

$$A = (S \cap A) \cup (T \cap A), \quad (S \cap A) \cap (T \cap A) = \emptyset;$$

pero A es conexo y, por lo tanto, no admite disconexión, es decir $T \cap A = \emptyset$; análogamente para $S \cap A = \emptyset$. Esto implica que

$$A = S \cap A \quad (\text{o } A = T \cap A).$$

es decir,

$$A \subset S \quad (\text{o } A \subset T).$$

En particular, se supone que

$$A_0 \subset S.$$

Si para algún

$$A \in F \quad \text{con } A \subset T,$$

entonces

$$A \cap A_0 \subset (S \cap B) \cap (T \cap B) = \emptyset,$$

lo cual contradice la hipótesis. De manera que

$$\forall A \in F : A \subset S,$$

lo que implica que $B \subset S$, es decir $B = B \cap S$. Por tanto $B \cap T = \emptyset$ y B es conexo por no admitir disconexión. \square

A partir de la Proposición 2.6, obtenemos el siguiente Corolario.

COROLARIO 2.1. *Si F es una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X tal que*

$$\bigcap_{A \in F} A \neq \emptyset,$$

entonces $\bigcup_{A \in F} A$ es conexo.

PROPOSICIÓN 2.7. *En un espacio métrico, todo conjunto arco-conexo es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Esta Proposición es consecuencia de que un arco es un conjunto conexo.

Sea A un conjunto arco-conexo y sea $a \in A$. Para todo punto $x \in A$ existe un arco S_x de extremos a y x , donde $a, x \in S_x$, y con $S_x \subset A$.

Entonces

$$A = \bigcup_{x \in A} S_x.$$

Debido a que los conjuntos S_x son conexos y su intersección es no vacía, ya que a pertenece a todos ellos, el Corolario 2.1 implica que su unión, y consecuentemente el conjunto A , es conexo. \square

De todo lo anterior, se observa que todo conjunto convexo es arco-conexo y por lo tanto conexo. Esta observación será de utilidad cuando estudiemos el Lema 2.3.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si $f : A \subset X \rightarrow F$ es continua en el conjunto conexo A , entonces $f(A)$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Como la restricción de f al rango $Z = f(A)$ es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva $g : A \rightarrow Z$.

Sean S y T una separación de Z . Entonces $g^{-1}(S)$ y $g^{-1}(T)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es A . Además, $g^{-1}(S)$ y $g^{-1}(T)$ son abiertos en A , debido a la continuidad de g , y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de A , contradiciendo la hipótesis de que A es conexo. \square

LEMA 2.3. *Si \mathcal{U} es un conjunto convexo y $K \subset \mathcal{U}$ es un conjunto invariante que atrae conjuntos compactos, entonces K es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. La cerradura de la cubierta convexa, $\overline{\text{conv}K} = \mathcal{B}$ es un conjunto compacto, conexo e incluido en \mathcal{U} y así K atrae a \mathcal{B} . Si K no fuera conexo, se pueden encontrar dos conjuntos abiertos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ con $\mathcal{U}_1 \cap K \neq \emptyset, \mathcal{U}_2 \cap K \neq \emptyset, K \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$.

Puesto que $K \subset \mathcal{B}$, $K = S(t)K \subset S(t)\mathcal{B}$, pero \mathcal{B} es conexo y como $S(t)$ es continua $S(t)\mathcal{B}$ también es conexo. Así $\mathcal{U}_i \cap S(t)\mathcal{B} \neq \emptyset, i = 1, 2$ y $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ no puede cubrir a $S(t)\mathcal{B}$. De modo que para cada $t > 0$, existe $x_t \in S(t)\mathcal{B}$, tal que $x_t \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Tomando $t = n$ y se considera la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que es un conjunto relativamente compacto, debido a (2.6), mientras que para (2.7) segunda, se escribe $x_n = S(n)y_n, y_n \in \mathcal{B}$, es decir, $x_n = S_1(n)y_n + S_2(n)y_n$.

La sucesión $\{S_1(n)y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto relativamente compacto y la proposición 2.2 implica que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también lo es. Por tanto, K atrae a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y esta sucesión contiene una subsucesión (también denotada por x_n) la cual converge a un punto $x \in K$. Necesariamente $x \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ lo cual contradice el hecho de que K no es conexo. \square

Continuaremos con la demostración del Teorema 2.1.

DEMOSTRACIÓN. El lema 2.2 muestra que $\omega(\mathcal{B}) = \mathcal{A}$ es no vacío compacto e invariante.

El hecho de que \mathcal{A} atrae los conjuntos acotados se prueba por contradicción. La única diferencia se origina cuando se prueba que $S(t_n)b_n$ es relativamente compacto; sin embargo $S_1(t_n)b_n$ es relativamente compacto y la proposición 2.2, implica entonces que $S(t_n)b_n$ también lo es. Como anteriormente se hizo, se prueba que \mathcal{A} es maximal.

A partir del Lema 2.3 se concluye la conexidad del conjunto \mathcal{A} . \square

Se puede obtener una ligera generalización del Teorema 2.1 reemplazando la hipótesis (2.7) por la siguiente más débil.

El semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es *asintóticamente compacto*, i. e., para cada sucesión acotada $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en H y cada sucesión

$t_k \rightarrow \infty$,

$$(2.8) \quad \{S(t_k)x_k\}_k,$$

es relativamente compacto en H .

De esta manera (2.7) y (2.8) son equivalentes. La prueba del Teorema 2.1 se deduce de igual forma si se cambian las condiciones (2.6) o (2.7), por la condición (2.8). La demostración de que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es la misma en el caso de la hipótesis (2.6), al incluir una versión modificada del Lema 2.1, esto es porque las sucesiones $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ consideradas, son tales que $t_n \rightarrow \infty$. Observemos que el único cambio radica en probar que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ es no vacío, lo cual es verdadero debido a que $\omega(\phi) \neq \emptyset$, $\forall \phi \in \mathcal{B}$, esto como consecuencia de la condición (2.8). Similarmente se demuestra que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ atrae los conjuntos acotados $\mathcal{B}_0 \in H$, donde utilizamos el Lema 2.3 para mostrar que \mathcal{A} es conexo si \mathcal{U} es convexo.

Un enfoque geométrico de conjuntos invariantes

1. Introducción

En este capítulo tomamos en cuenta el área generada por una curva bajo la acción de un flujo definido por una ecuación diferencial autónoma. Aunque consideraremos \mathbb{R}^2 , el método aquí presentado puede generalizarse a espacios vectoriales de dimensiones superiores.

R. Smith establece en [48] una cota para la dimensión de Hausdorff de conjuntos ω -límite. Li y Muldowney [29, 33] extienden el criterio de Bendixson para la no existencia de soluciones periódicas, asimismo proporcionan resultados de estabilidad para algunos tipos de órbitas periódicas basados en funcionales de área.

El objetivo principal de este capítulo consiste en determinar conjuntos invariantes mediante un funcional que describa el área que genera una curva bajo un flujo. Dicho funcional se anula en curvas invariantes. Conversamente, si el ínfimo de este funcional se alcanza en una curva de longitud finita, entonces ésta curva es invariante (veáse Teorema 3.1 más adelante). Este principio variacional se utiliza para obtener una implementación numérica (en Maple) que dará una aproximación a esta curva, mediante el método de descenso rápido. Dicha implementación se hace para órbitas heteroclínicas y ciclos límite para corroborar la validez de este método.

2. El funcional de área y conjuntos invariantes

Para caracterizar conjuntos invariantes a través de un funcional de área se supone el caso en el que el grupo de operadores $S(t)$ descritos en la sección 1 del capítulo 2, es generado por la ecuación diferencial

$$(3.1) \quad \dot{x} = f(x),$$

donde f es un campo vectorial en \mathbb{R}^2 .

Dada una curva $\gamma(s)$ parametrizada por longitud de arco, $\gamma : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. El operador $S(t)$ aplicado a $\gamma(s)$ para algún valor fijo $t \in [0, T]$ representa la *curva desplazada* bajo el flujo generado por S al tiempo t . De manera análoga, si se considera $S(t)\gamma(s)$ para toda $t \in [0, T]$ se obtiene una banda en el plano fase, como se muestra en la figura 3.1 (a). Si x_0 y x_1 son puntos fijos de (3.1) y $\gamma(s)$ es una función continua que une esos puntos, con $\gamma(s_0) = x_0$ y $\gamma(s_1) = x_1$, entonces un *elemento de área* está dado por $|f(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)|$, veáse figura 3.1 (b).

Sea Γ el conjunto de estas curvas. En consecuencia el área, $A_t(\gamma(s))$ está dada por

$$(3.2) \quad A_t(\gamma(s)) = \int_{s_0}^{s_1} |f(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)| ds + o(t)$$

Si esta curva es invariante entonces $A_t(\gamma(s)) = 0$. El converso también es verdadero bajo suposiciones adicionales, que mencionamos más adelante.

Puesto que este funcional es acotado, una forma natural para estudiar conjuntos invariantes es minimizar el funcional A_t .

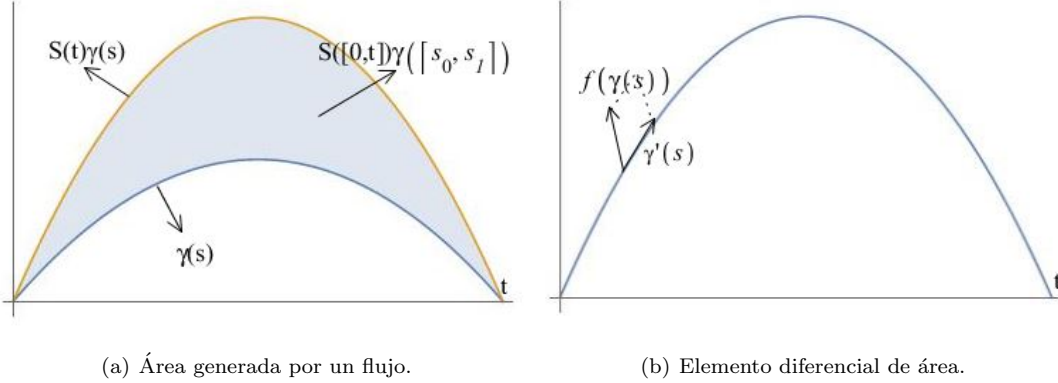


FIGURA 3.1. Área generada por un flujo.

Sea $A^*(\gamma) = \int_{s_0}^{s_1} |f \times \dot{\gamma}|$, para l fijo y $\Gamma_l = \{\gamma \in \Gamma \mid \text{longitud}(\gamma) \leq l\}$. Si el ínfimo del funcional de área es cero en Γ y es igual al ínfimo en Γ_l , entonces este ínfimo será una curva invariante, como se establece en el siguiente Teorema.

TEOREMA 3.1. (Medina-Padilla 2010, véase [36]). *Si existe un valor de la cota superior para la longitud de arco l tal que $\inf_{\Gamma} A = \inf_{\Gamma_l} A^*$ y si $\inf_{\Gamma} A^* = 0$, entonces $\inf_{\Gamma} A^*$ se alcanza para alguna curva γ^* que es invariante bajo el flujo generado por (3.1).*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, consideremos Γ_l el cual es acotado y equicontinuo. Sea γ_n una sucesión minimizante en Γ_l . Por el Teorema de Arzela - Ascoli existe una subsucesión γ_{n_j} tal que $\gamma_{n_j} \rightarrow \gamma^*$ uniformemente. Debido al Lema de Fatou (véase ([20])),

$$0 \leq \int_{s_0}^{s_1} |f(\gamma^*) \times \dot{\gamma}^*| = \int_{s_0}^{s_1} \liminf |f(\gamma_{n_j}) \times \dot{\gamma}_{n_j}| \leq \liminf \int_{s_0}^{s_1} |f(\gamma_{n_j}) \times \dot{\gamma}_{n_j}| \rightarrow 0.$$

Por lo tanto $|f(\gamma^*) \times \dot{\gamma}^*| = 0, \forall s \in [s_0, s_1]$. Esto implica que $\dot{\gamma}^*$ es paralelo a $f(\gamma^*)$ de tal forma que γ^* es invariante bajo el flujo generado por (3.1). \square

En general, la igualdad $\inf_{\Gamma} A = \inf_{\Gamma_l} A^*$ no siempre es verdadera, puesto que $\Gamma_l \subset \Gamma$. Esto sólo implica que $\inf_{\Gamma} A \leq \inf_{\Gamma_l} A^*$.

Si consideramos el plano fase mostrado en la figura 3.2, cualquier curva que una a los puntos x_1 y x_2 con longitud finita genera una región con área positiva. El ínfimo no puede alcanzarse en una curva de longitud finita, por lo que ésta no puede ser invariante. Ejemplos similares pueden construirse mediante el flujo irracional en el toro (véase la sección 16 de [3]).

3. Método de descenso máximo

El Teorema 3.1, garantiza que el ínfimo del funcional de área se alcanza en alguna curva. En esta sección se muestra cómo emplear el principio variacional descrito en la sección 2 para obtener una aproximación a una curva invariante γ .

Para la obtención de esta aproximación se usa el funcional

$$(3.3) \quad \tilde{A}(\gamma(s)) = \int_{s_0}^{s_1} |f(\gamma(s)) \times \dot{\gamma}(s)|^2 ds,$$

numéricamente más conveniente puesto que si \tilde{A} se anula en una curva, también así lo hace A_t .

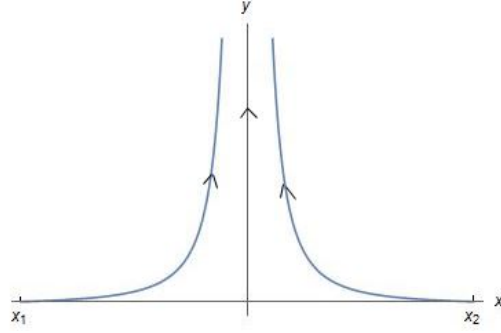


FIGURA 3.2. Una curva no rectificable que no es invariante.

Sea $(s, v(s))$ una aproximación a la curva invariante γ , la cual debe satisfacer la siguiente condición, dada una órbita heteroclínica que une los puntos $(a, 0)$ y $(b, 0)$, la aproximación $(s, v(s))$ ha de ser de tal manera que $v(a) = 0 = v(b)$. Para una expresión de $v(s)$ se calcula \tilde{A} , en la que los coeficientes de los términos en la expresión de $v(s)$ se consideran como las variables a encontrar. Para una elección de estos valores, se obtiene una curva parametrizada $(s, v(s))$. De esta manera encontramos la *mejor aproximación* a la curva invariante.

El método de descenso máximo (o método gradiente) es uno de los métodos de optimización más simples. Generalmente es utilizado en los problemas de minimización no restringida. Este método se basa en aproximaciones sucesivas cuya diferencia es igual a menos el gradiente de la función a minimizar, de tal forma que representa la dirección en la cual la función decrece más rápidamente.

Las aproximaciones sucesivas son entonces

$$(3.4) \quad x_{i+1} = x_i - \epsilon \nabla \tilde{A}(x_i),$$

donde x_i es la i -ésima iteración, ϵ es un valor fijo (pequeño $\epsilon \ll 1$) y $\nabla \tilde{A}(x_i)$ representa el gradiente del funcional de área evaluado en la i -ésima iteración. El término inicial x_0 se elige arbitrariamente, de aquí en adelante se denominará *condición inicial*. Para determinar la convergencia de (3.4), esto es, la condición necesaria para determinar que se ha encontrado el mínimo, se usa el siguiente criterio.

1. Se selecciona un parámetro $\delta > 0$.
2. Calcular $\mathbf{c} = \nabla f(x_i)$, donde f es la función a minimizar. Si $|\mathbf{c}| < \delta$ entonces x_i es la aproximación buscada, de lo contrario repetir el procedimiento.

Una descripción más detallada de este método puede encontrarse en [6, 43].

4. Ejemplo 1: órbitas heteroclínicas

Como primer ejemplo en el estudio de conjuntos invariantes de un flujo asociado a una ecuación diferencial ordinaria, consideremos el péndulo físico y sus correspondientes separatrices, esto es, las dos órbitas heteroclínicas que unen a los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$. Tomemos la ecuación diferencial ordinaria

$$(3.5) \quad \ddot{x} = -\sin x,$$

la cual es equivalente al sistema de EDO's de primer orden,

$$(3.6) \quad (\dot{x}, \dot{y}) = (y, -\sin x).$$

Notemos que (3.5) y (3.6) constituyen un sistema conservativo (véase por ejemplo [3]). Una primera integral, mejor conocida como energía total, está dada por la ecuación

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + U(x),$$

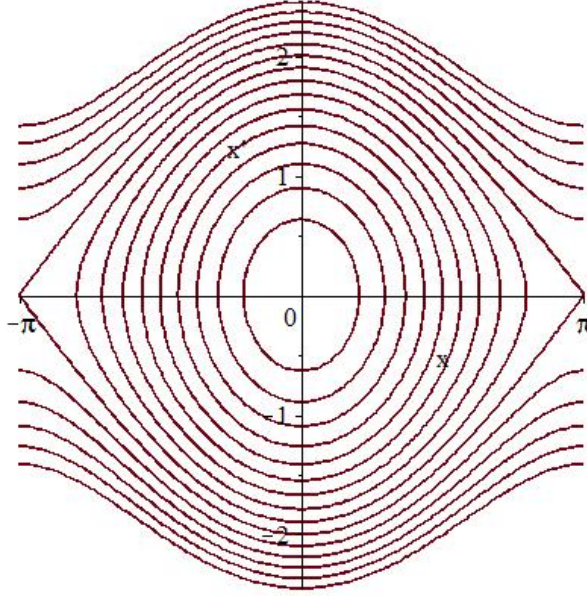


FIGURA 3.3. Retrato fase del sistema (3.6).

donde

$$U(x) = \int_0^x \sin \eta d\eta = 1 - \cos x.$$

Notemos que $\frac{dE}{dt} = 0$, es decir, la energía total asociada al sistema (3.6) se conserva. El retrato fase se muestra en la figura 3.3.

Al sustituir las coordenadas de los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ en $E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x)$, se obtiene que estos puntos satisfacen $E = 2$, por lo que la separatriz (curva que une a los dos puntos dados) pertenece al nivel de energía ya mencionado, y está dada por

$$(3.7) \quad \frac{1}{2}y^2 - \cos x - 1 = 0.$$

Primero consideremos $y > 0$ en (3.7), por lo que la parte superior de (3.7) se parametriza mediante

$$(3.8) \quad (s, \sqrt{2 \cos s + 2}), \quad -\pi \leq s \leq \pi.$$

Sea $(s, v(s))$ una aproximación a (3.8), la cual satisface $v(\pm\pi) = 0$. Una elección para $v(s)$ es

$$(3.9) \quad v(s) = -(s + \pi)(s - \pi) \sum_{i=0}^n a_i s^i.$$

Bajo esta suposición se calcula el funcional en (3.3). Dado que los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación (3.7) también corresponden a soluciones del sistema (3.6). En consecuencia, obtenemos que \tilde{A} está dado por

$$(3.10) \quad \tilde{A}(\gamma(s)) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin s + v(s)v'(s))^2 ds.$$

Los coeficientes a_i en (3.9) son determinados de tal manera que el funcional (3.10) sea mínimo.

Por la simetría de la separatriz, se toma $n = 2$ en (3.9) y utilizamos la *condición inicial* $(2.03, 0, -0.27)$, $\epsilon = 9 \times 10^{-6}$ y $\delta = 1.1 \times 10^{-3}$. Estos valores corresponden a una aproximación a los valores exactos de la expansión de Taylor de

la segunda coordenada en (3.8).

El cuadro 1 muestra el valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diversas iteraciones. En la iteración 2000, el valor de la norma del gradiente

Iteración	Norma
1	65441.73255
10	2362.35568
100	115.87497
500	4.22368
1000	0.25092
1100	0.144890
1200	0.08376
1500	0.01623
2000	0.00106

CUADRO 1. Valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diversas iteraciones en la aproximación (con convergencia) a una órbita heteroclínica.

del área es 1.055×10^{-3} , lo que muestra la convergencia de este método de acuerdo al criterio establecido en la sección 2.3. Estos resultados se muestran en la figura 3.5. Los cambios aparentes en las figuras se deben a la escala utilizada.

Por otro lado, si $v(s)$ está dada por la expresión

$$(3.11) \quad v(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k,$$

en la que no se cumple $v(\pm\pi) = 0$, con $n = 11$ y la condición inicial (aproximaciones a los valores de la expansión de Taylor de (3.7))

$$(3.12) \quad (2.03, 0, -0.27, 0, 6 \times 10^{-3}, 0, -5 \times 10^{-5}, 0, 1,95 \times 10^{-7}, 0, -6 \times 10^{-10})$$

donde $\epsilon = 3 \times 10^{-10}$.

El cuadro 2 muestra el valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diversas iteraciones.

Bajo estas consideraciones, se tiene que después de 2000 iteraciones el gradiente del funcional de área es 2.05×10^2 ,

Iteración	Norma
1	18746.07388
10	2356.11301
30	259.23968
100	211.62354
500	210.25162
1000	208.54603
1500	206.84985
2000	205.16202

CUADRO 2. Valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diferentes iteraciones en la aproximación (sin convergencia) a una órbita heteroclínica.

que es un valor muy grande en comparación con cualquier $\delta \ll 1$. Por lo tanto (3.11) no es una elección adecuada para aproximar la separatriz. La figura 3.5 muestra la aproximación a la separatriz en este caso.

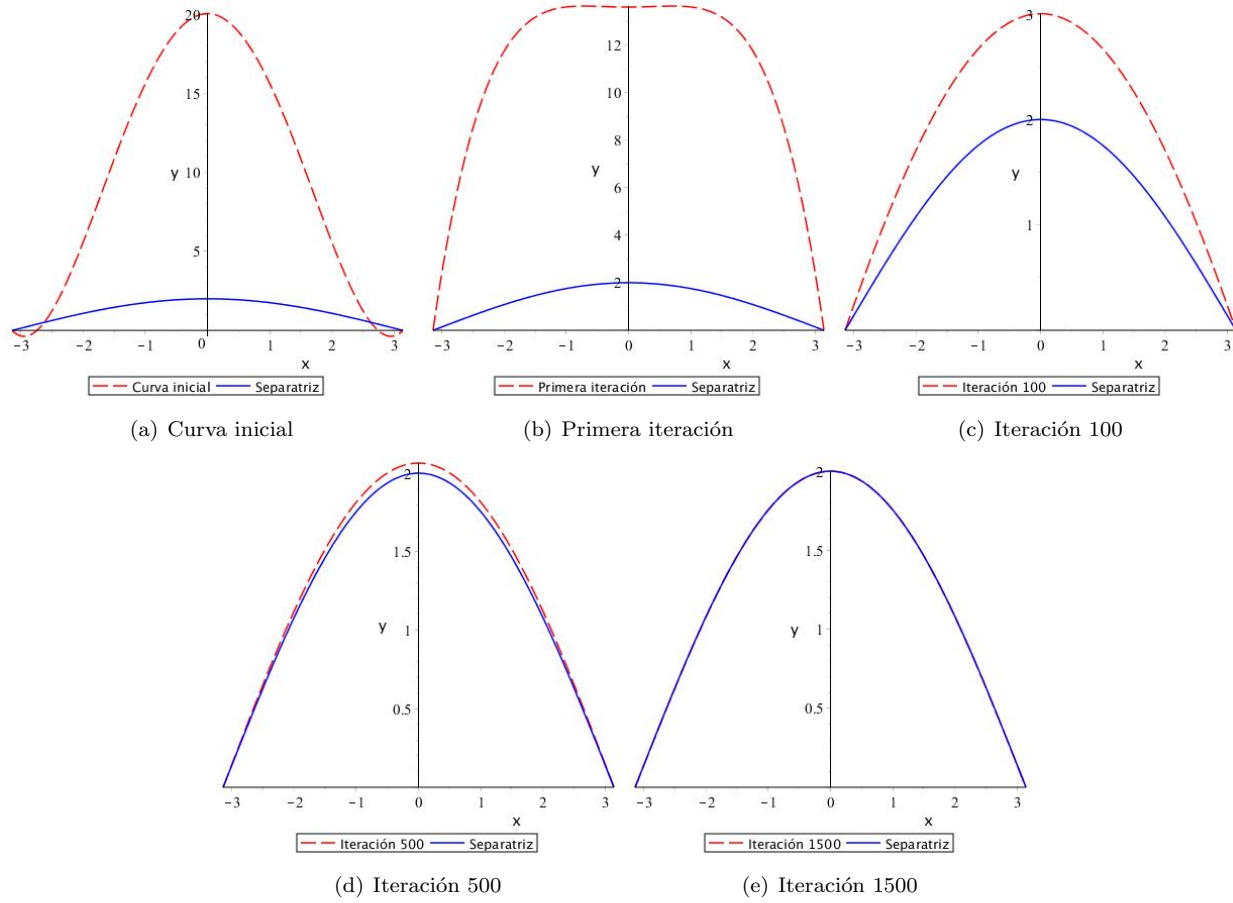


FIGURA 3.4. Aproximaciones sucesivas a la separatriz en el sistema (3.6) mediante una curva que cumple $v(\pm\pi, 0) = 0$.

5. Ejemplos 2 y 3: ciclos límite

En esta sección se extienden las ideas previas para estudiar ciclos límite. Al ser curvas cerradas, se consideran series truncadas de Fourier en lugar de polinomios para su aproximación.

Sea el sistema

$$(3.13) \quad \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2),$$

$$(3.14) \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Utilizando el cambio a coordenadas polares (r, θ) mediante las relaciones

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2, \\ -r^2\dot{\theta} &= x_2\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_2, \end{aligned}$$

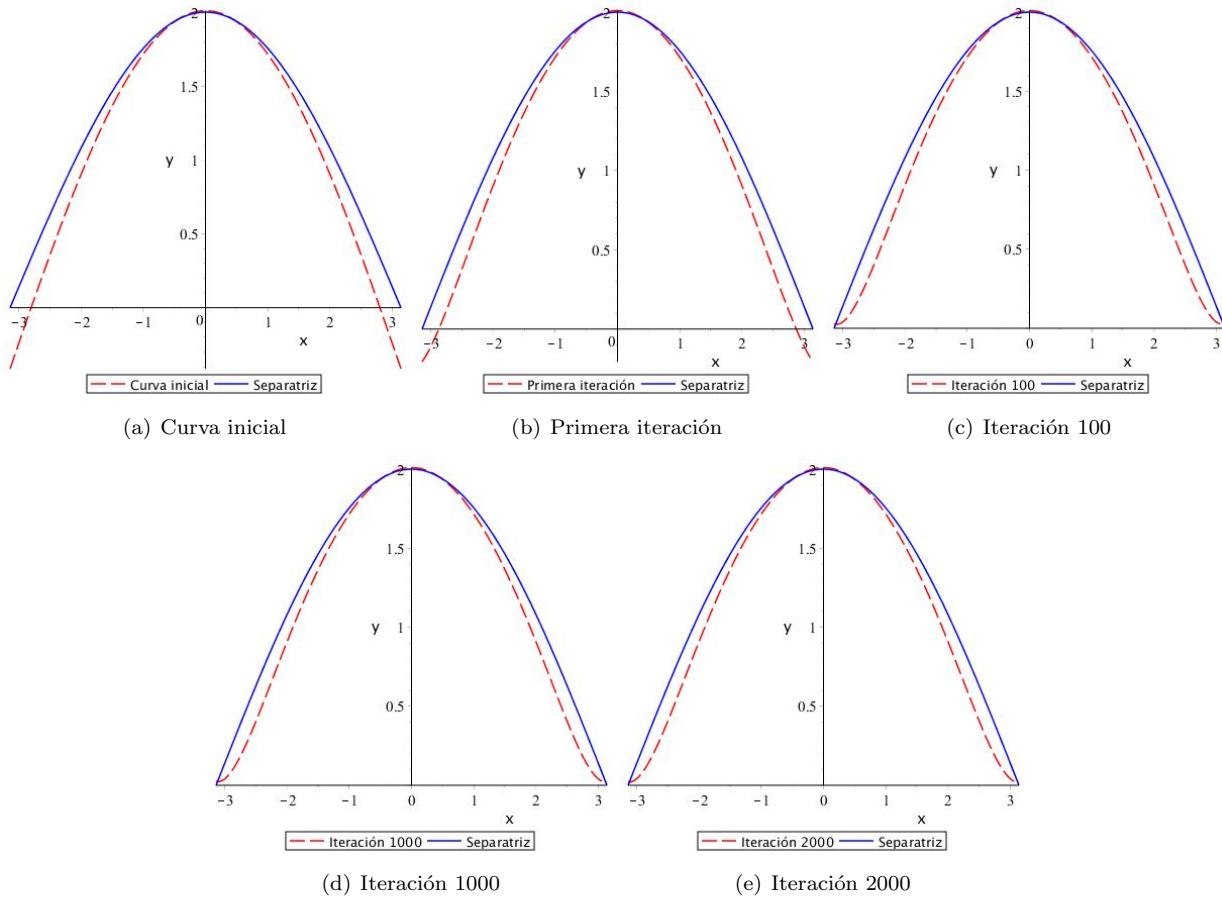


FIGURA 3.5. Aproximaciones sucesivas a la separatriz en el sistema (3.6) mediante una curva que no necesariamente cumple $v(\pm\pi, 0) = 0$.

el sistema (3.13) - (3.14) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

De la primera de estas relaciones se obtiene que $r(t) = \frac{1}{\sqrt{c \exp(-2t) + 1}}$, por lo que para cualquier condición inicial distinta de $r_0 = 0, 1$ y $t \rightarrow \infty$, tenemos que $r(t) \rightarrow 1$, lo que afirma que $r = 1$ o bien $x_1^2 + x_2^2 = 1$ es un ciclo límite estable (véase figura 3.6). Para caracterizar este ciclo límite minimizaremos el funcional \tilde{A} dado en (3.3), consideramos la parametrización usual

$$(3.15) \quad \gamma(s) = (\cos s, \sin s), \quad 0 \leq s < 2\pi.$$

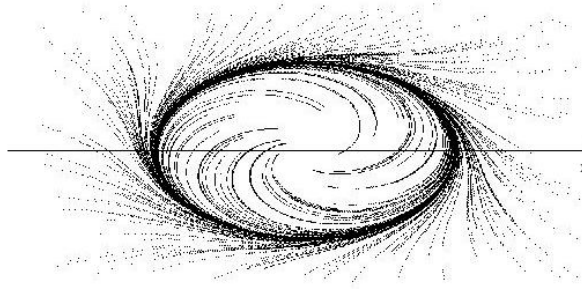


FIGURA 3.6. Retrato fase de (3.13) - (3.14).

Tomemos las expansiones de Fourier para u y v ,

$$(3.16) \quad u(s) = \sum_{k=0}^2 a_k \cos ks + \sum_{k=1}^2 b_k \sin ks,$$

$$(3.17) \quad v(s) = \sum_{k=0}^2 a'_k \cos ks + \sum_{k=1}^2 b'_k \sin ks.$$

Esto implica que \tilde{A} está dado por:

$$\tilde{A}(\gamma(s)) = \int_0^{2\pi} ((-v + u(1 - u^2 - v^2))v' - (u + v(1 - u^2 - v^2))u')^2 ds.$$

Se elige $\epsilon = 0.005$ y $\delta = 0.0006$. La condición inicial (con valores cercanos a los correspondientes en el ciclo límite) es

$$(0, 1.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.01, 1.3, 0.1).$$

El cuadro 3.3 muestra el valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diferentes iteraciones.

Al utilizar el método del descenso máximo, en la iteración 110, se tiene que $|\nabla \tilde{A}| < \delta$, por lo que existe convergencia

Iteración	Norma
1	60.37285
2	1.57890
10	0.94519
50	0.93634
70	0.11007
100	0.00216
110	0.00057

CUADRO 3. Valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diferentes iteraciones en la aproximación a un ciclo límite estable.

numérica a la curva invariante. Véase la figura 3.8.

Por otro lado, si se considera ahora,

$$(3.18) \quad \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2,$$

$$(3.19) \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)^2,$$

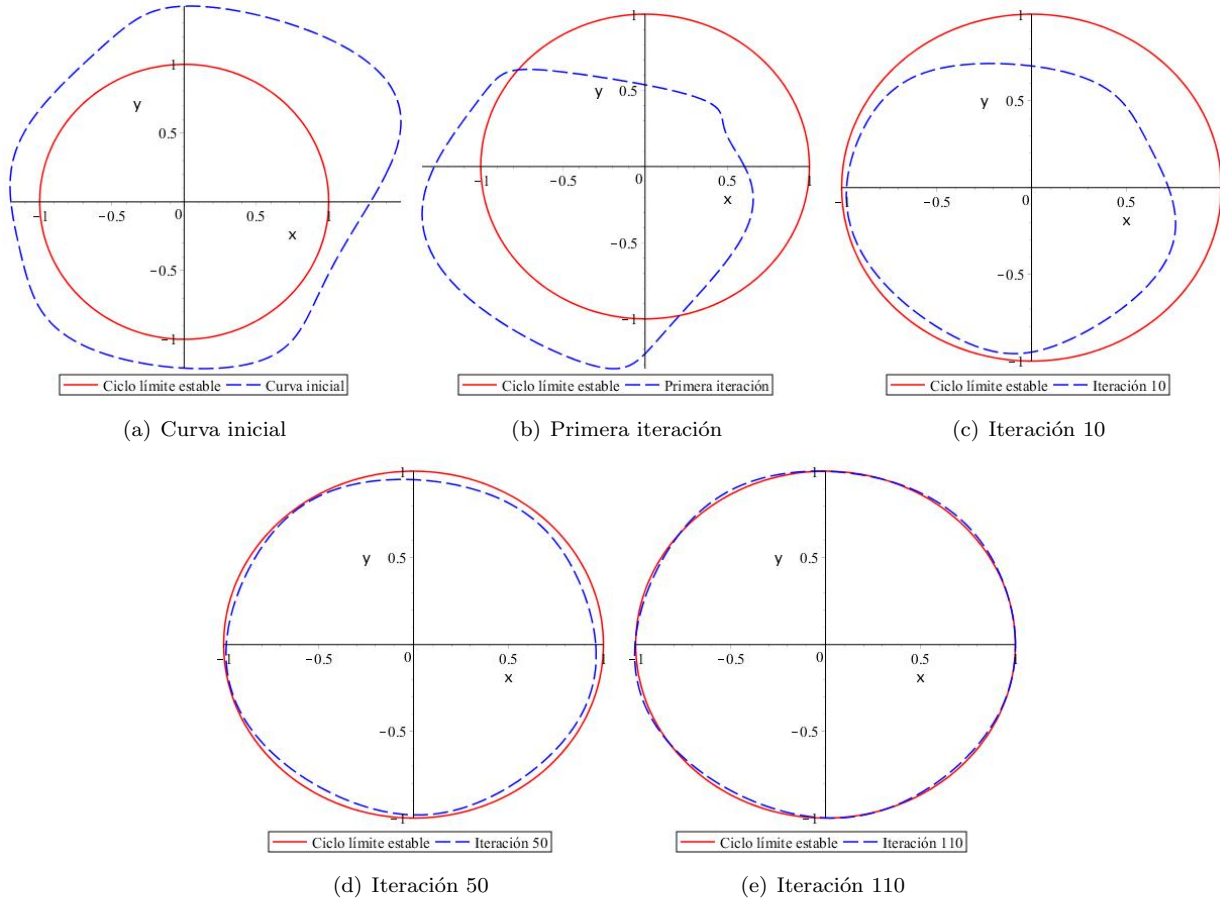


FIGURA 3.7. Aproximaciones al ciclo límite estable de (3.13) - (3.14).

entonces en coordenadas polares se reescribe

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r^2 - 1)^2, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

De la primera de estas ecuaciones se obtiene que las soluciones cuya condición inicial $r(0) = r_0$ dentro del círculo $r = 1$ son tales que $r(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$; mientras que fuera de este círculo son tales que $r(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo que $x_1^2 + x_2^2 = 1$ es un ciclo límite inestable. El retrato fase se muestra en la figura 3.8. Como antes se utiliza (3.16) y (3.17), $\epsilon = 0.005$, $\delta = 0.0055$ y la condición inicial (valores cercanos a los correctos en el ciclo límite inestable)

$$(0, 1.2, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.01, 1.1, 0.1).$$

El cuadro 4 muestra el valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diferentes iteraciones.

Al utilizar el método antes descrito se tiene que $|\nabla \tilde{A}| < \delta$, por lo que existe convergencia numérica al ciclo límite inestable. Véase figura 3.9.

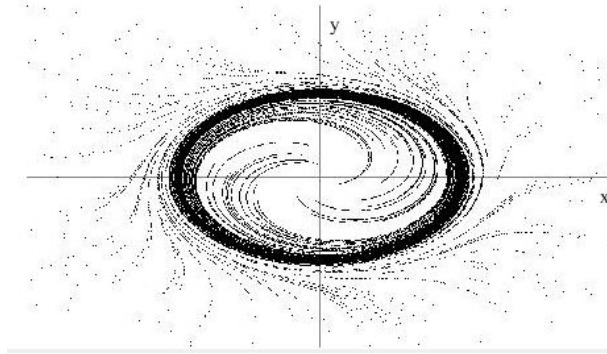


FIGURA 3.8. Retrato fase de (3.18) - (3.19).

Iteración	Norma
1	15.09362
10	1.18918
20	0.66110
50	0.13987
100	0.01578
200	0.00829
300	0.00663
400	0.00544

CUADRO 4. Valor de $|\nabla \tilde{A}|$ para diferentes iteraciones en la aproximación a un ciclo límite inestable.

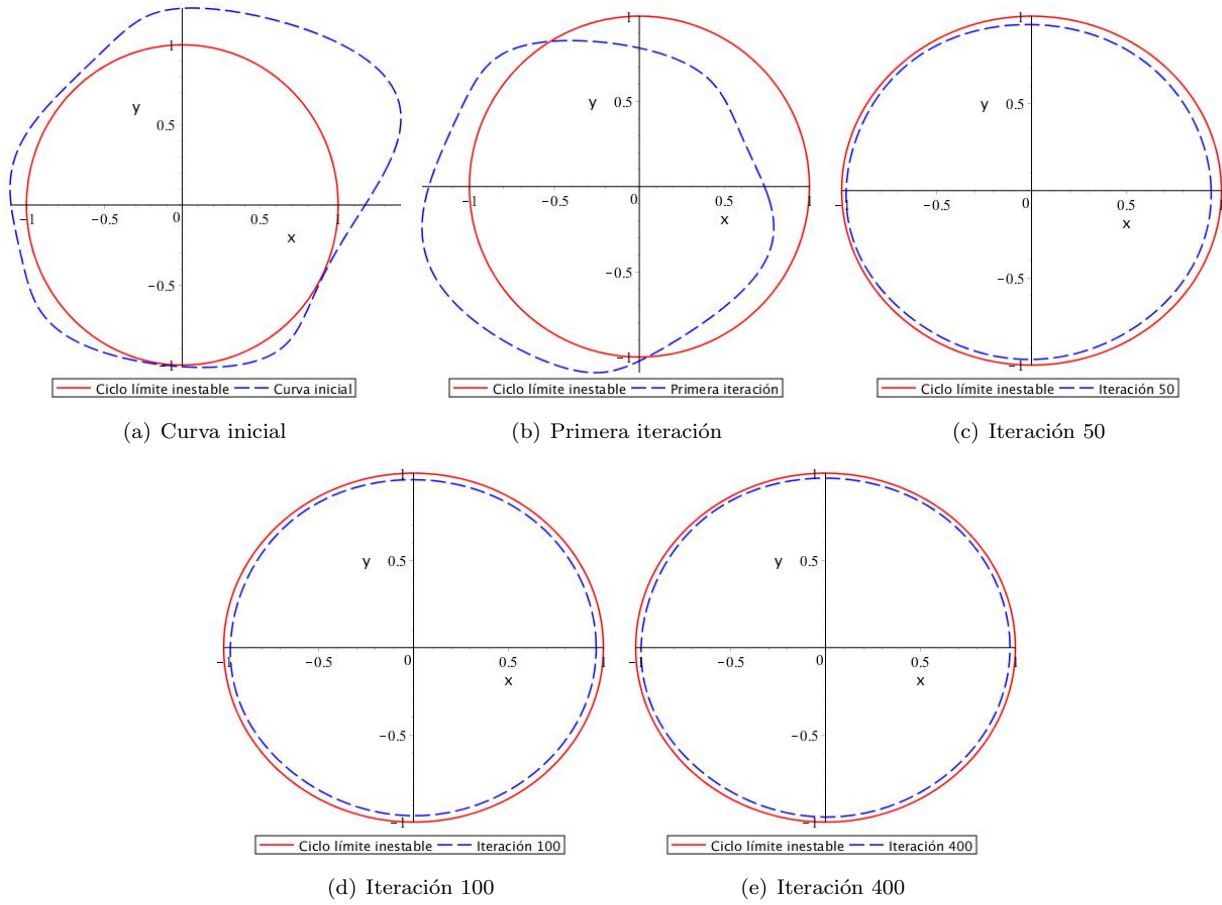


FIGURA 3.9. Aproximaciones al ciclo límite inestable de (3.18) - (3.19).

Existencia y estructura del atractor

1. Introducción

En este capítulo demostraremos la existencia del atractor global para la ecuación en estudio (veáse Teorema 4.3). Para ello la existencia de un funcional con determinadas características es clave.

Primero consideremos la definición siguiente.

DEFINICIÓN 4.1. Un funcional (de Lyapunov) del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ en un conjunto $\mathcal{F} \subset H$ es una función continua $F : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que,

1. Para toda $u_0 \in \mathcal{F}$, la función $t \rightarrow F(S(t)u_0)$ es decreciente.
2. Si $F(S(\tau)u_1) = F(u_1)$ para algún $\tau > 0$, entonces u_1 es un punto fijo del semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, es decir $S(t)u_1 = u_1, \forall t > 0$.

El Teorema siguiente ilustra la conexión entre un atractor global y las soluciones de equilibrio de un sistema dado. Esta conexión está caracterizada de tal manera que el funcional asociado tiene que ser un funcional de Lyapunov.

TEOREMA 4.1. *Sea dado un semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ con las propiedades (2.1) - (2.3). Si existe un funcional como en la definición 4.1, continuo en $\mathcal{F} \subset H$ y un atractor global $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Sea \mathcal{E} el conjunto de puntos fijos del semigrupo. Entonces,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_+(\mathcal{E}).$$

Más aún, si \mathcal{E} es discreto, \mathcal{A} es la unión de \mathcal{E} y de las trayectorias que unen puntos de \mathcal{E} y

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in \mathcal{E}} \mathcal{M}_+(z).$$

En este enunciado se debe recordar que $\mathcal{M}_+(X)$ es el conjunto (posiblemente vacío) de puntos u_* los cuales pertenecen a una órbita completa $\{u(t), t \in \mathbb{R}\}$ y tal que $d(u(t), X) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Los detalles pueden encontrarse en (Teorema 4.1 del capítulo 7 de [51], Teorema 10.13 de [45], Teorema 3.2 de [28], o teorema 72.1 de [47]). Aquí se expone un bosquejo del Teorema 4.1.

1. Primero se demuestra que si X es un conjunto compacto invariante, entonces $\mathcal{M}_+(X) \subset \mathcal{A}$. Con esto se concluye que $\mathcal{M}_+(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$, es decir $\mathcal{M}_+(z) \subset \mathcal{A}$ para toda $z \in \mathcal{E}$.
2. Se prueba que si existe un funcional de Lyapunov, sobre un conjunto absorbente positivamente invariante, entonces $\omega(u_0) \in \mathcal{E}$ para cada $u_0 \in H$. En particular, si H es conexo y \mathcal{E} es discreto, entonces $\omega(u_0) \in \mathcal{E}$.
3. Se utiliza el punto anterior al conjunto

$$\gamma = \bigcap_{s < 0} \overline{\{u(t) : t < s\}},$$

donde $u(t) = S(t)u_0, u_0 \in \mathcal{A}$. Esto implica que $\gamma \in \mathcal{E}$.

4. Finalmente, se observa que si los puntos fijos son discretos y γ es conexo, entonces $\gamma = z$ para algún $z \in \mathcal{E}$.

2. Espacios de Sobolev en variedades Riemannianas

La notación y terminología usada en esta sección, puede encontrarse en [2, 22].

Sea (M, g) una variedad diferenciable. Sea k un entero y $p \geq 1$ un número real. Sea

$$\mathcal{C}_k^p(M) = \left\{ u \in C^\infty(M) : \int_M |\nabla^j u|^p d\nu(g) < \infty, \forall j = 0, \dots, k \right\}.$$

Cuando M es compacta, se tiene que $\mathcal{C}_k^p(M) = C^\infty(M)$ para cualquier k y toda $p \geq 1$. Para $u \in \mathcal{C}_k^p(M)$, su p -norma está definida por,

$$\|u\|_{H_k^p} = \left(\sum_{j=0}^k \left(\int_M |\nabla^j u|^p d\nu(g) \right)^{1/p} \right).$$

De esta manera se define el espacio de Sobolev H_k^p como sigue.

DEFINICIÓN 4.2. Dada (M, g) una variedad diferenciable, k un entero y $p \geq 1$ un número real, el espacio de Sobolev H_k^p es la completación de \mathcal{C}_k^p con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H_k^p}$.

Estos espacios pueden considerarse subespacios de $L^p(M)$, donde la norma $\|\cdot\|_p$ está dada por,

$$\|u\|_p = \left(\int_M |u|^p d\nu(g) \right)^{1/p}.$$

DEFINICIÓN 4.3. Dados $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios vectoriales normados, siendo E un subespacio de F , se dice que la inclusión de E en F es compacta si cualquier subconjunto acotado de $(E, \|\cdot\|_E)$ es relativamente compacto en $(F, \|\cdot\|_F)$. Para denotar este hecho, se emplea la notación $E \subset\subset F$. También se dice que E está compactamente encajado en F .

Esto significa que cualquier sucesión acotada en $(E, \|\cdot\|_E)$ posee una subsucesión convergente en $(F, \|\cdot\|_F)$. Si la inclusión es compacta, también es continua en el sentido de que existe una $C > 0$ de tal manera que para toda $x \in E$, $\|x\|_F \leq C\|x\|_E$.

Uno de los resultados que se emplearán en la demostración de la existencia del atractor para la ecuación en consideración se enuncia a continuación.

TEOREMA 4.2. Sea (M, g) una variedad diferenciable compacta de dimensión $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces para cualesquiera números reales $1 \leq q < p$ y cualesquiera enteros $0 \leq m \leq p$, si $1/p = 1/q - (k - m)/n$, entonces $H_k^q(M) \subset\subset H_m^p(M)$. En particular, para toda $q \in [1, n)$, $H_1^q(M) \subset\subset L^p(M)$ donde $1/p = 1/q - 1/n$.

En [22] pueden ver los detalles de la prueba del Teorema 4.2; aquí solamente se presenta un bosquejo.

1. Primero se prueba que si (M, g) es una n -variedad Riemanniana completa, recordemos que toda variedad Riemanniana compacta, que puede cubrirse con un número finito de cartas, también es completa, como un espacio métrico. Este hecho se encuentra en el Teorema de Hopf - Rinow, (véase [2]). Si $H_1^q(M) \subset\subset L^{n/(n-1)}(M)$, entonces para cualesquiera números reales $1 \leq q < p$ y cualesquiera enteros $0 \leq m < k$ tal que $1/p = 1/q - (k - m)/n$, $H_k^q(M) \subset\subset H_m^p(M)$.
2. Se establece que si $q \in [1, n)$ y p tal que $1/p = 1/q - 1/n$, entonces para toda $u \in H_1^q(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq \frac{p(n-1)}{2n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q}.$$

Esta desigualdad es consecuencia del siguiente Lema: para $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (conjunto de funciones suaves de clase C^1 con soporte compacto en \mathbb{R}^n),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \right)^{\frac{1}{n}},$$

donde dx es el elemento de volumen (Lebesgue) de \mathbb{R}^n .

3. Debido al inciso 1, sólo basta con probar que $H_1^1(M) \subset\subset L^{n/(n-1)}(M)$ se satisface. Esto se realiza considerando el hecho de que M es compacta y se puede cubrir con un número finito de cartas. Se utiliza el punto 2 a cada elemento de las cartas, concluyendo de esta manera el resultado.

Como consecuencia de la primera parte del Teorema 4.2 se obtiene el siguiente Corolario.

COROLARIO 4.1. *Para toda $q \in [1, n)$, $H_1^n(M) \subset\subset H_1^q(M)$, de modo que $H_1^n(M) \subset\subset L^p(M)$ para toda $p \geq 1$.*

3. Desigualdades diferenciales

Tomando en cuenta los resultados expuestos en la sección 2, se sigue la existencia del atractor para la ecuación estudiada, como se enuncia en el Teorema 2.1. En su demostración será útil la siguiente desigualdad diferencial tipo Gronwall (veáse [51]).

LEMA 4.1. *Sea y una función absolutamente continua sobre $(0, \infty)$, tal que satisface la desigualdad*

$$y' + \gamma y^p \leq \delta,$$

con $p > 1$, $\gamma > 0$, $\delta \geq 0$. Entonces, para $t > 0$,

$$y(t) \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/p} + (\gamma(p-1)t)^{-1/(p-1)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $y(0) \leq (\gamma/\delta)^{1/p}$, entonces $y(t) \leq (\gamma/\delta)^{1/p}$, $\forall t \geq 0$. Si $y(t) > (\gamma/\delta)^{1/p}$, entonces existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $y(t) \geq (\gamma/\delta)^{1/p}$ para $0 \leq t \leq t_0$, y, $y(t) \leq (\gamma/\delta)^{1/p}$, para $t \geq t_0$.

Para $t \in [0, t_0]$ se escribe $z(t) = y(t) - (\gamma/\delta)^{1/p} \geq 0$ y dado que $(a+b)^p \geq a^p + b^p$ para $a, b \geq 0$, $p > 1$, se tiene que,

$$y^p = (z + (\gamma/\delta)^{1/p})^p \geq z^p + \gamma/\delta.$$

De esta manera obtenemos,

$$(4.1) \quad z' + \gamma z^p \leq y' + \gamma \left(y^p - \frac{\gamma}{\delta}\right) \leq 0.$$

Integrando (4.1), obtenemos

$$(4.2) \quad z(t)^{p-1} \leq \frac{1}{z_0^{1-p} + \gamma(p-1)t} \leq \frac{1}{\gamma(p-1)t}.$$

De esta forma, se concluye la demostración del Lema 4.1, debido a que la desigualdad (4.2) es válida para $t \in [0, t_0]$, y el resultado es verdadero para toda t . \square

4. Existencia y estructura del atractor

El resultado principal de la tesis, es el concerniente a la existencia del atractor para la ecuación (1.7),

$$u_t = \epsilon \Delta u - \frac{1}{\epsilon} W'(u),$$

sujeta a la restricción (1.15),

$$\int_{S^2} u = 0.$$

TEOREMA 4.3. *(Medina - Padilla 2010). El semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ asociado con (1.7) - (1.15) posee un atractor maximal que es acotado en $H_1^2(S^2)$ compacto y conexo en $L^2(S^2)$. Su cuenca de atracción es todo el espacio $L^2(S^2)$ y atrae conjuntos acotados de $L^2(S^2)$.*

DEMOSTRACIÓN. La existencia de la solución de la ecuación considerada es equivalente a encontrar el ínfimo de la siguiente expresión,

$$(4.3) \quad \inf E_\epsilon(u) = \inf \int_M \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\epsilon} W(u) \right)$$

para toda $u \in H_1^2(M)$, sujeta a la restricción,

$$(4.4) \quad G(u) = \int_M u(y) f(y) = 0,$$

donde $f(y)$ es el determinante del Jacobiano de la transformación de S^2 a M . Este determinante puede ser considerado positivo. Esto puede hacerse puesto que para una superficie oval el mapeo de Gauss es un difeomorfismo (veáse [12]), donde este factor es la curvatura Gaussiana en y .

Para $\epsilon > 0$ fijo, la existencia del mínimo es una consecuencia inmediata del hecho de que el funcional (4.3) satisface la condición de Palais-Smale (veáse [49]), está acotado por abajo, y en virtud de que la restricción define un espacio lineal cerrado.

Por otro lado, hay que observar que,

$$\frac{d}{dt} E_\epsilon(u) = -\epsilon \int_{S^2} u_t^2 \leq 0.$$

Esta última afirmación asegura la existencia global de las soluciones para toda $t > 0$. Esto es suficiente para definir el semiflujo asociado a la ecuación (1.7).

Otra manera de verificar la afirmación anterior, consiste en demostrar primero la existencia y unicidad de la solución de (1.7) - (1.15) sujeta a una condición inicial adecuada (veáse Teorema A.1); posteriormente se verifica la unicidad retrógrada, como se mencionó en el capítulo 2 (veáse apéndice B), lo que permite aplicar el Teorema 4.1 para la caracterización del atractor global.

Para la existencia del atractor global se procederá de la manera usual. Mostraremos que hay un conjunto absorbente en $L^2(S^2)$ y posteriormente, la compacidad del semigrupo de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, de acuerdo al Teorema 2.1 (veáse [45, 51]).

La ecuación de Euler-Lagrange asociada a (1.7) sujeta a la restricción (1.15) (para cada ϵ_i), introduce un multiplicador de Lagrange λ_i , quedando de la siguiente manera,

$$(4.5) \quad u_t - \epsilon_i \Delta u + \frac{4}{\epsilon_i} (u^3 - u) + \lambda_i f = 0.$$

Como se puede ver en [11], se demuestra que estos multiplicadores de Lagrange son acotados. Este hecho se empleará más adelante.

Para demostrar la existencia del conjunto absorbente en $L^2(S^2)$, se multiplica la ecuación (4.5) por u , se integra sobre S^2 y usando la fórmula de Green se obtiene que,

$$(4.6) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \epsilon_i \int_{S^2} |\nabla u|^2 + \int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} (u^4 - u^2) + \lambda_i f u \right) = 0,$$

donde $\|\cdot\|_{L^2}$ denota la norma en $L^2(S^2)$.

El Corolario 4.1 afirma que $H_1^2(S^2) \subset\subset L^2(S^2)$, por lo que existe una constante c_0 tal que $\|u\|_{L^2} \leq c_0 \|u\|_{H_1^2}$, de modo que existe una c_1 tal que,

$$(4.7) \quad \int_{S^2} |u|^2 \leq c_1 \int_{S^2} |\nabla u|^2.$$

Ahora bien, se requiere una estimación de la tercera integral en (4.6), para lo cual se emplea la desigualdad

$$-\lambda_i f u \leq \frac{1}{2} \lambda_i^2 f^2 + \frac{1}{2} u^2;$$

a partir de la desigualdad de Hölder, para una $C > 0$,

$$\int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} - \lambda_i f u \right) \leq \left(\frac{4}{\epsilon_i} + \frac{1}{2} \right) \int_{S^2} u^2 + \frac{1}{2} \lambda_i^2 \int_{S^2} f^2 \leq C \sqrt{\int_{S^2} u^4} + C,$$

por lo que existen $A, B > 0$ tales que,

$$\int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} (u^4 - u^2) + \lambda_i f u \right) \geq \frac{4}{\epsilon_i} \int_{S^2} u^4 - C \sqrt{\int_{S^2} u^4} + C = \frac{4}{\epsilon_i} \left(\sqrt{\int_{S^2} u^4} - A \right)^2 - B.$$

Debido a (4.6) y a la ecuación anterior se concluye que existe una $c'_1 > 0$ de manera que,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \epsilon_i \int_{S^2} |\nabla u|^2 + \int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} u^4 - c'_1 \right) \leq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \epsilon_i \int_{S^2} |\nabla u|^2 + \int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} (u^4 - u^2) + \lambda_i f u \right) = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \epsilon_i \int_{S^2} |\nabla u|^2 + \int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} u^4 - c'_1 \right) \leq 0.$$

Esto implica que,

$$(4.8) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \epsilon_i \int_{S^2} |\nabla u|^2 + \int_{S^2} \left(\frac{4}{\epsilon_i} u^4 \right) \leq 4\pi c'_1.$$

De acuerdo a (4.7) se concluye, a partir de (4.8), que existe una constante $c'_2 = 2(4\pi c'_1)$ tal que,

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{2\epsilon_i}{c_1^2} \|u\|_{L^2}^2 \leq c'_2.$$

Utilizando el Lema clásico de Gronwall se obtiene que,

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 \exp\left(-\frac{2\epsilon_i}{c_1^2} t\right) + \frac{c'_2 c_1^2}{2\epsilon_i} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\epsilon_i}{c_1^2} t\right)\right);$$

por tanto,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2} \leq \rho_0, \quad \rho_0^2 = \frac{c'_2 c_1^2}{2\epsilon_i}.$$

Esto quiere decir que existe un conjunto absorbente \mathcal{B}_0 en $L^2(S^2)$, toda bola de $L^2(S^2)$ centrada en 0 de radio $R > \rho_0$, puesto que si \mathcal{B} es un conjunto acotado de $L^2(S^2)$, incluido en una bola $B(0, R)$ de $L^2(S^2)$, entonces $S(t)\mathcal{B} \in B(0, \rho'_0)$ para $t \geq t_0(\mathcal{B}, \rho'_0)$, donde

$$t_0 = \frac{c_1^2}{2\epsilon_i} \ln\left(\frac{R^2}{(\rho'_0)^2 - \rho_0^2}\right).$$

Para probar la compacidad uniforme de los operadores, se procede empleando una demostración propuesta por B. Nicolaenko (véase [51]). Ahí se hace uso del conjunto absorbente en $L^2(S^2)$, el cual se probó en el párrafo anterior.

Por la desigualdad de Hölder tenemos que,

$$\int_{S^2} u^4 \geq \frac{1}{4\pi} \left(\int_{S^2} u^2 \right)^2.$$

De manera análoga a (4.8) se concluye que

$$y' + \gamma y^2 \leq \delta,$$

donde $y = \|u\|_{L^2}^2$, $\gamma = \frac{1}{\pi}$, $\delta = 8\pi c'_1$. El Lema 4.1 muestra que esta desigualdad implica que

$$(4.9) \quad y(t) \leq \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} + \frac{1}{\gamma t}, \quad \forall t > 0.$$

Sea ρ_2 un número mayor que $(\delta/\gamma)^{1/2}$ y

$$(4.10) \quad T_0 = \frac{1}{\gamma} \left(\rho_2^2 - \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{1/2} \right)^{-1}.$$

Las relaciones (4.9) y (4.10) muestran que, para todo conjunto \mathcal{B} de $L^2(S^2)$ acotado o no, $S(t)\mathcal{B}$ está incluido en una bola \mathcal{B}_2 centrada en 0 y de radio ρ_2 , si $t \geq T_0$. De esta manera la existencia de un conjunto absorbente en $H_1^2(S^2)$ queda demostrada. La compacidad uniforme de los operadores $S(t)$ radica en el hecho de que todo conjunto acotado \mathcal{B} está incluido en una bola $B(0, R)$ para toda $t \geq t_0$, la cual es acotada en $H_1^2(S^2)$ y relativamente compacto en $L^2(S^2)$ (ver corolario 4.1). La existencia del atractor global se sigue entonces del Teorema 2.1. \square

Implementación numérica

1. Introducción

Una vez demostrada la existencia del atractor global en el capítulo 4, se busca su caracterización empleando el método de Galerkin, el cual consiste en obtener un sistema de ecuaciones diferenciales (reducción a dimensión finita) como aproximación a la solución de la ecuación (1.7) sujeta a la restricción (1.15). Esta reducción a dimensión finita supone una solución en términos de funciones ortogonales y mediante el producto interno se obtiene dicha aproximación, como se puede ver en la sección 5.3.

Como se trabaja en S^2 se emplean los esféricos armónicos en la implementación de este método.

2. La ecuación en S^2

En esta sección se obtendrá una expresión para (1.7) mediante la elección de un sistema de coordenadas esféricas. Esto permitirá implementar un método numérico para poder caracterizar el atractor que se menciona en el Teorema 4.3.

Parametrizamos a la esfera de radio r en coordenadas esféricas $(r \cos \theta \cos \phi, r \sin \theta \cos \phi, r \sin \phi)$, donde $0 \leq \theta < 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ (véase figura 5.1).

El laplaciano en estas coordenadas está dado por,

$$(5.1) \quad \Delta u = \frac{1}{r^2 \cos \phi} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left((r^2 \cos \phi) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left((r^2 \cos \phi) \left(\frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left((r^2 \cos \phi) \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right) \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \frac{\tan \phi}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

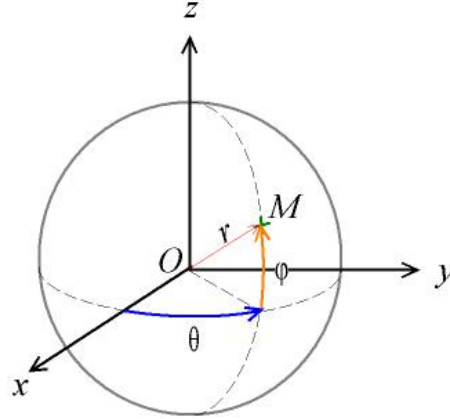
Haciendo $r = 1$ en (5.1) se obtiene el operador de Laplace-Beltrami en S^2 ,

$$(5.2) \quad \Delta u = \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \tan \phi \frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

De esta manera (1.7) se escribe como sigue,

$$(5.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \left(\frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} - \tan \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{4}{\epsilon} u(1 - u^2) = 0.$$

Ahora buscamos la implementación de un método numérico que trate de explicar la estructura del atractor. Una forma es *reducir* la ecuación (5.3), junto con una condición inicial adecuada, a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la siguiente sección implementaremos el método de Galerkin.

FIGURA 5.1. Coordenadas esféricas empleando longitud θ y latitud ϕ .

3. El método de Galerkin

La idea es obtener una reducción a dimensión finita de (5.3). Un método para obtenerla es emplear el método de Galerkin, para más detalles véase [18, 27].

De manera más precisa, la intención es encontrar una solución *débil* del problema de valor inicial,

$$(5.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \left(\frac{1}{\cos \phi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \phi^2} - \tan \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) - \frac{4}{\epsilon} u(1 - u^2) = 0 \quad \text{en } S^2 \times (0, T]$$

$$(5.5) \quad u(\theta, \phi) = g(\theta, \phi) \quad \text{en } S^2 \times \{t = 0\}.$$

Suponemos que existen funciones $w_k = w_k(\theta, \phi)$ con $k = 1, \dots, m$, suficientemente suaves. Además éstas constituyen una base ortogonal en $H_1^2(S^2)$ y una base ortonormal en $L^2(S^2)$. Por ejemplo, se toma w_k como las funciones propias del laplaciano en S^2 .

Fijamos un entero positivo m y consideramos la función \mathbf{u}_m dada por,

$$(5.6) \quad \mathbf{u}_m(t) = u(x, t) = \sum_{k=1}^m d_m^k(t) w_k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 1, \dots, m,$$

donde se espera que los coeficientes $d_m^k(t)$ satisfacen,

$$(5.7) \quad d_m^k(0) = (g, w_k)$$

y

$$(5.8) \quad (\mathbf{u}'_m(t), w_k) + B[\mathbf{u}_m(t), w_k; t] = (\mathbf{f}(t), w_k).$$

Aquí (\cdot, \cdot) denota el producto interno usual en $L^2(S^2)$, $' = \frac{d}{dt}$ y $B[\mathbf{u}_m, w_k; t]$ es la forma bilineal,

$$(5.9) \quad - \int_{S^2} \left(\epsilon \left(\frac{1}{\cos \phi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_m(t)}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_m(t)}{\partial \phi^2} - \tan \phi \frac{\partial \mathbf{u}_m(t)}{\partial \phi} \right) - \frac{4}{\epsilon} \mathbf{u}_m(t) \right) w_k.$$

Notemos además que,

$$(5.10) \quad \mathbf{f}(t) = -\frac{4}{\epsilon}(\mathbf{u}_m(t))^3.$$

La función \mathbf{u}_m de la forma (5.6) satisface la *proyección* (5.8) del problema (5.4) - (5.5) sobre el subespacio de dimensión finita generado por $\{w_k\}_{k=1}^m$.

Como consecuencia de la teoría sobre existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones diferenciales, se tiene el siguiente Teorema.

TEOREMA 5.1. *Para cada entero $m = 1, 2, \dots$, existe una única función \mathbf{u}_m de la forma (5.6) que satisface (5.7) y (5.8).*

Como consecuencia del Teorema 5.1, se eligen las funciones w_k que servirán para la implementación numérica del método de Galerkin para la ecuación (1.7).

Para ello utilizamos el método de separación de variables para la ecuación $\Delta u = 0$ en S^2 , suponemos que $u = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$; de esta forma obtenemos que

$$(5.11) \quad \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \tan \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \Theta'' \Phi - (\tan \phi) \Theta \Phi' + \Theta \Phi'' = 0,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \Theta'' \Phi = (\tan \phi) \Theta \Phi' - \Theta \Phi'',$$

$$\frac{1}{\cos^2 \phi} \Theta'' \Phi = \Theta [(\tan \phi) \Phi' - \Phi''],$$

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\frac{\cos^2 \phi [\Phi'' - (\tan \phi) \Phi']}{\Phi}.$$

Las soluciones correspondientes de (5.11) en Θ es una combinación lineal de las funciones seno y coseno. Mientras que la correspondiente a Φ con la sustitución $x = \sin \phi$ es una ecuación de Legendre en coordenadas polares. Utilizamos entonces el polinomio asociado de Legendre $P(k, l, x)$, el cual se define mediante la relación,

$$(5.12) \quad P(k, l, x) = \frac{(-1)^k}{l! \cdot 2^l} \cdot (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{k+l}}{dx^{k+l}} (x^2 - 1)^l,$$

en la que $k \geq 0$ y $l \leq k$. Una descripción más detallada de estos polinomios puede encontrarse en [1].

De este modo las funciones \mathbf{u}_m serán de la forma,

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{k=1}^m a_m^{k,l}(t) \sin(k\theta) P(k, l, \sin(\phi)) + b_m^{k,l}(t) \cos(k\theta) P(k, l, \sin(\phi)).$$

Resultados numéricos y Conclusiones

1. El atractor en S^2

En este capítulo obtenemos la proyección a dimensión finita del problema en estudio, como se hizo en el capítulo anterior. Se analizan algunas condiciones iniciales. Finalmente se discute otra proyección a fin a de encontrar un ejemplo de una condición inicial que con el tiempo se transforme en una geodésica.

De acuerdo a lo mencionado en la sección 5.3, y la condición (1.15) se eligen las funciones \mathbf{u}_m (véase 5.6) como

$$(6.1) \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{k=1}^m a_m^{k,l}(t) \sin(k\theta) P(k, l, \sin(\phi)) + b_m^{k,l}(t) \cos(k\theta) P(k, l, \sin(\phi)),$$

donde $P(k, l, \sin(\phi))$ es el polinomio asociado de Legendre de orden k y l , con $l \leq k$, como en (5.12).

Con $m = 1$ y $\epsilon = 0.001$, el método de Galerkin lleva al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} & 1110.33a_1^{1,0}(t)^3 + a_1^{1,0}(t)(-1973.92 + 1110.33a_1^{1,1}(t)^2 + 1110.33b_1^{1,0}(t)^2 + 370.11b_1^{1,1}(t)^2) + \\ & \quad 740.22a_1^{1,1}(t)b_1^{1,0}(t)b_1^{1,1}(t) + 4.9348 \frac{d}{dt} a_1^{1,0}(t) = 0, \\ & 1110.33a_1^{1,1}(t)^3 + a_1^{1,1}(t)(-1973.82 + 1110.33a_1^{1,1}(t)^2 + 370.11b_1^{1,0}(t)^2 + 1110.33b_1^{1,1}(t)^2) + \\ & \quad 740.22a_1^{1,0}(t)b_1^{1,0}(t)b_1^{1,1}(t) + 4.9348 \frac{d}{dt} a_1^{1,1}(t) = 0, \\ & 1110.33b_1^{1,0}(t)^3 + 1110.33a_1^{1,0}(t)^2 b_1^{1,0}(t) + 370.11a_1^{1,1}(t)^2 b_1^{1,0}(t) + 740.22a_1^{1,0}(t)a_1^{1,1}(t)b_1^{1,1}(t) + \\ & \quad b_1^{1,0}(t)(-1973.92 + 1110.33b_1^{1,1}(t)^2) + 4.9348 \frac{d}{dt} b_1^{1,0}(t) = 0, \\ & 1110.33b_1^{1,1}(t)^3 + b_1^{1,1}(t)(-1973.82 + 1110.33a_1^{1,0}(t)^2 + 1110.33b_1^{1,1}(t)^2) + 740.22a_1^{1,0}(t)a_1^{1,1}(t)b_1^{1,0}(t) + \\ & \quad 370.11a_1^{1,0}(t)^2 b_1^{1,1}(t) + 4.9348 \frac{d}{dt} b_1^{1,1}(t) = 0. \end{aligned}$$

Si se considera la condición inicial

$$(6.3) \quad a_1^{1,0}(0) = 0, a_1^{1,1}(0) = 1, b_1^{1,0}(0) = 0, b_1^{1,1}(0) = 0,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} & a_1^{1,0}(t) = 0, b_1^{1,0}(t) = 0, b_1^{1,1}(t) = 0, \\ & a_1^{1,1}(t) = \frac{65794}{\sqrt{2435101734 + 1893748702 \exp\left(-\frac{9869100}{12337}t\right)}}, \end{aligned}$$

por lo que

$$(6.4) \quad \mathbf{u}_1(t) = \frac{65794}{\sqrt{2435101734 + 1893748702 \exp\left(-\frac{9869100}{12337}t\right)}} \sin \theta P(1, 1, \sin \psi).$$

La figura 6.1 muestra el comportamiento de la solución para diferentes valores de t .

Si ahora la condición inicial es

$$(6.5) \quad a_1^{1,0}(0) = 0, a_1^{1,1}(0) = 0, b_1^{1,0}(0) = 0, b_1^{1,1}(0) = 2,$$

se obtiene

$$a_1^{1,0}(t) = 0, a_1^{1,1}(t) = 0, b_1^{1,0}(t) = 0, b_1^{1,1}(t) = \frac{4}{\sqrt{9 - 5 \exp(-8000t)}},$$

por lo que

$$(6.6) \quad \mathbf{u}_1(t) = \frac{4}{\sqrt{9 - 5 \exp(-8000t)}} \cos \theta P(1, 1, \sin \psi).$$

La figura 6.2 muestra el comportamiento de la solución para diferentes valores de t .

Si ahora, la condición inicial es

$$(6.7) \quad a_1^{1,0}(0) = 0, a_1^{1,1}(0) = 5, b_1^{1,0}(0) = 0, b_1^{1,1}(0) = 2,$$

se obtiene

$$a_1^{1,0}(t) = 0, a_1^{1,1}(t) = 1.2 + 3.8 \exp(-15441.31127t), b_1^{1,0}(t) = 0,$$

y

$$b_1^{1,1}(t) = 0.5 + 1.5 \exp(-17237.31702t),$$

por lo que

$$(6.8) \quad \mathbf{u}_1(t) = (1.2 + 3.8 \exp(-15441.31127t)) \sin \theta P(1, 1, \sin \psi) + (0.5 + 1.5 \exp(-17237.31702t)) \cos \theta P(1, 1, \sin \psi).$$

La figura 6.3 muestra el comportamiento de la solución para diferentes valores de t .

El último ejemplo muestra que mediante la elección de otra expansión en el método de Galerkin y una condición inicial, a medida de que transcurre el tiempo, la curva de transición se acerca cada vez más a una geodésica cerrada. Este ejemplo también muestra otra elección del valor de ϵ , mostrando así que similares comportamientos a los descritos aquí se presentan haciendo cambios en la expansión, en el número de términos de ésta o en el valor de ϵ .

Si en lugar de utilizar (6.1) se eligen las funciones \mathbf{u}_m como

$$(6.9) \quad \mathbf{u}_m(t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) \sin(k\theta) P(k, \sin(\phi)) + b_k(t) \cos \sin(k\theta) P(k, \sin(\phi)),$$

donde $P(k, \sin(\phi))$ es el polinomio de Legendre de grado k .

Con $m = 2$ y $\epsilon = 0.01$, la proyección del problema estudiado es,

$$(6.10) \quad \begin{aligned} 1110.33a_1(t)^3 + (-1973.92 + 1572.97a_2(t)^2 + 1110.33b_1(t)^2 + 1592.97b_2(t)^2) a_1(t) + 4.9348 \frac{d}{dt} a_1(t) &= 0, \\ 675.162a_2(t)^3 + (-1357.61 + 1572.97a_1(t)^2 + 1572.97b_1(t)^2 + 675.162b_2(t)^2) a_2(t) + 3.392628 \frac{d}{dt} a_2(t) &= 0, \\ 1110.33b_1(t)^3 + (-1973.92 + 1110.33a_1(t)^2 + 1572.97a_2(t)^2 + 1572.97b_2(t)^2) b_1(t) + 4.9348 \frac{d}{dt} b_1(t) &= 0, \\ 675.162b_2(t)^3 + (-1357.61 + 1572.97a_1(t)^2 + 675.162a_2(t)^2 + 1572.97b_1(t)^2) b_2(t) + 3.392628 \frac{d}{dt} b_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Si se considera la condición inicial

$$(6.11) \quad a_1(0) = -0.877583, a_2(0) = 0, b_1(0) = 0, b_2(0) = -0.479426,$$

entonces

$$(6.12) \quad \mathbf{u}_2(0) = -0.877583 \sin \theta P(1, \sin(\phi)) - 0.479426 \cos 2\theta P(2, \sin(\phi)).$$

Al resolver el sistema (6.10) con la condición inicial (6.11), obtenemos las siguientes expresiones de $\mathbf{u}_1(t)$ para $t = 0.0055$ y $t = 0.02$, dadas por

$$(6.13) \quad \mathbf{u}_2(0.0055) = -1.2858 \sin \theta P(1, \sin(\phi)) - 0.1449 \cos 2\theta P(2, \sin(\phi)),$$

$$(6.14) \quad \mathbf{u}_2(0.02) = -1.3333 \sin \theta P(1, \sin(\phi)).$$

La figura 6.4 muestra el comportamiento de esta solución en los tiempos ya mencionados.

Como puede apreciarse en (b), (d) y (f) de las figuras 6.1 y 6.3, la transición de los valores cercanos a -1 a los valores cercanos a 1 se encuentra en la curva con ecuación $\theta = \pi$, mientras que para el caso presentado en la figura 6.2 la transición se encuentra en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, mientras que en el último ejemplo la transición se encuentra en dos geodésicas, lo cual queda más claro con las figuras de la siguiente sección.

2. Discusión de los resultados

En las figuras 6.5 a 6.7 se presentan diferentes curvas de nivel para $\mathbf{u}_1(\theta, \psi, t)$ con diferentes valores de t , según (6.4). En todas las figuras la curva de nivel para el valor cero se muestra en color rojo. En el primer y tercer ejemplo presentados, la transición se encuentra en $\theta = \pi$ o bien $(-\cos \psi, 0, \sin \psi)$ un arco de geodésica. En el segundo caso la transición es $(0, \pm \cos \psi, \sin \psi)$, que también es una geodésica.

En la figura 6.8 (a) puede apreciarse que inicialmente la curva de nivel para el valor cero no es una recta, la cual al tiempo $t = 0.03$ corresponden a dos geodésicas.

A medida que el valor de t crece, se presenta prácticamente el mismo comportamiento presentado en las subgráficas (c) de estos ejemplos, lo que sugiere que el atractor puede aproximarse por funciones que poseen regiones de transición en arcos o curvas completas de una geodésica cerrada.

3. Conclusiones y trabajo futuro

En el presente estudiamos la existencia y estructura del atractor de una ecuación diferencial parcial no lineal en S^2 . Al estar definida en una variedad, el espacio de funciones solución pertenecen a un subespacio en la que se impone una restricción que contiene una integral. Mediante los resultados de espacios de Sobolev se demostró la existencia del atractor para esta restricción.

La estructura de estos conjuntos, se estudió mediante la implementación del método de Galerkin, empleando solamente una cantidad pequeña de términos, vemos que a medida que transcurre el tiempo, la transición se encuentra en una geodésica. Uno de los aspectos que mejorarían el resultado presentado, consiste en encontrar ejemplos en los cuales la transición corresponda a arcos de geodésicas. Una de las opciones a explorar requiere aumentar el número de términos de la expansión de Galerkin.

Al estudiar los atractores en S^2 no queda claro qué situaciones pueden encontrarse en una superficie oval, por lo que se buscará la caracterización exhaustiva del atractor en una superficie oval.

Para el estudio de conjuntos invariantes mediante un funcional de área, hay distintas opciones para desarrollar un trabajo a largo plazo, mismas que mencionamos a continuación. Establecimiento de un criterio similar al Teorema 1, del capítulo 3 para la existencia de una variedad invariante o una variedad inercial para EDO's autónomas. En el caso de ecuaciones no lineales de evolución representa un interés en campos de la física matemática o la mecánica (veáse [19]). En este sentido, también pueden ampliarse este resultado para la interpretación de ínfimos del funcional

de área propuesto y que no representan conjuntos invariantes.

Otra meta es encontrar condiciones necesarias y/o suficientes de las conclusiones establecidas por Bendixson así como una relación con los funcionales de área de Smith.

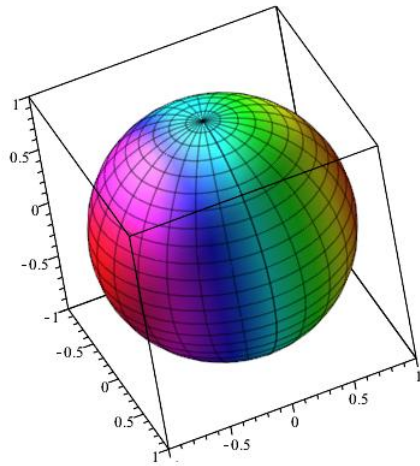
Otro de los aspectos que sería de interés es el estudio de órbitas heteroclínicas en \mathbb{R}^n cuya *amplitud* sea finita o infinita (inclusive), con funcionales similares a los estudiados aquí. Conjeturamos que a través de las propiedades variacionales y geométricas de dichos funcionales permitirán demostrar la existencia de conjuntos invariantes en estos espacios.

La hiperbolicidad de un conjunto de un sistema dinámico suave es una propiedad *sensitiva* a la órbita y al punto inicial, de lo cual se plantea la situación de obtener información a partir de una aproximación de una órbita. El lema de sombreado establece una conexión con la estabilidad estructural: las órbitas de perturbación de un sistema dinámico son ϵ -órbitas para el sistema original. De manera alternativa se dice que las primeras "somborean" a las segundas (véase [26]). El establecimiento de una relación de este lema con el funcional de área estudiado permitirá un criterio para la existencia de órbitas heteroclínicas a partir del conocimiento de una órbita *aproximada*.

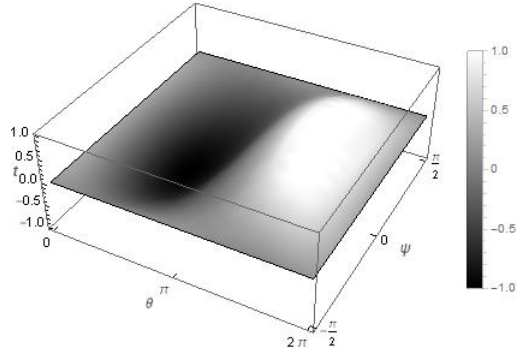
Este enfoque permitirá estudiar algunos problemas de la mecánica celeste, como las llamadas *coreografías*, entre las que se encuentran soluciones periódicas al problema de 3 cuerpos sujetos a una fuerza central (véase [10]).

En el caso de los atractores globales, una de las líneas futuras, consistirá es determinar la existencia del atractor global para la ecuación que aquí presentamos con alguna otra función potencial, como el potencial logarítmico y determinar si las técnicas aquí utilizadas pueden aplicarse a ecuaciones como las de Navier-Stokes o de Kuramoto (véase [51]).

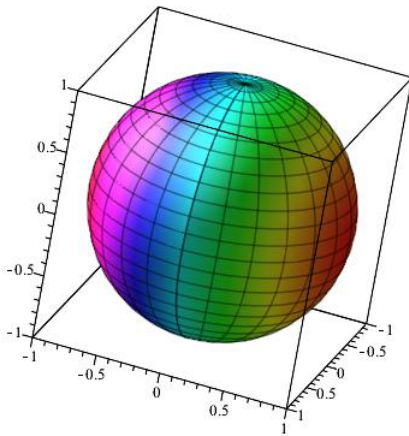
Los problemas no autónomos son aquellos en los que la no linealidad depende de forma directa del tiempo. En este caso, la solución depende de la condición inicial, de modo que el sistema dependerá de dos parámetros temporales. Para ello, la noción de *proceso biparamétrico* es una extensión a lo que se presenta en este trabajo (véase [46]). Entre los trabajos que han estudiado este campo y las aplicaciones a meteorología y teoría de oscilaciones se mencionan [8, 9]. En algunos de ellos el método de Galerkin sigue siendo empleado para la reducción a dimensión finita del problema en estudio.



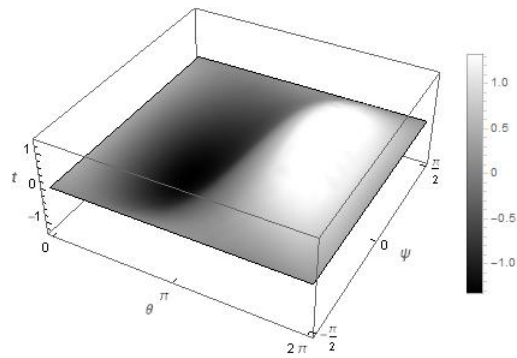
(a) Condición inicial en S^2 .



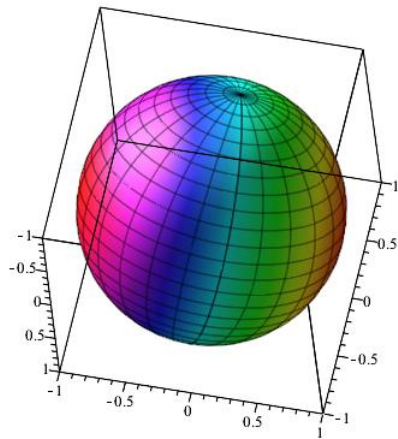
(b) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_1(0)$.



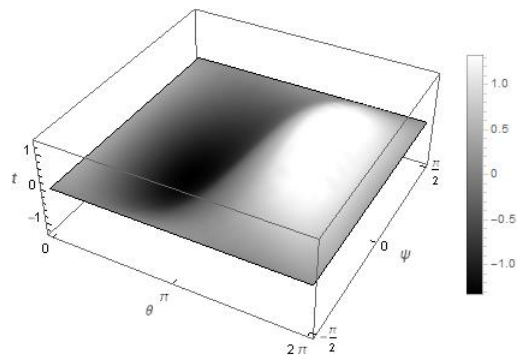
(c) $\mathbf{u}_1(0.0001)$ en S^2 .



(d) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_1(0.0001)$.



(e) $\mathbf{u}_1(1)$ en S^2 .



(f) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_1(1)$.

FIGURA 6.1. Comportamiento de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.4).

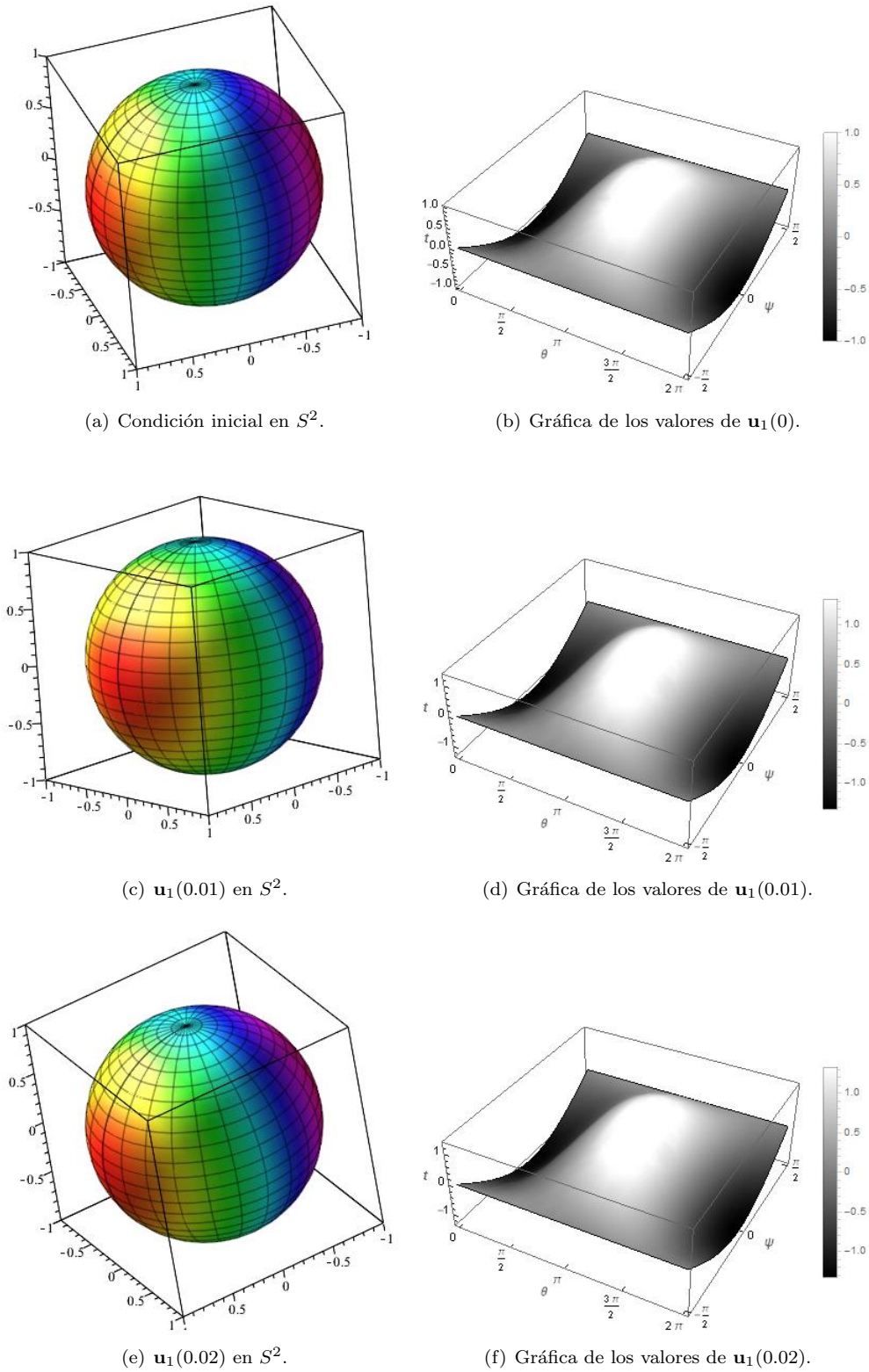
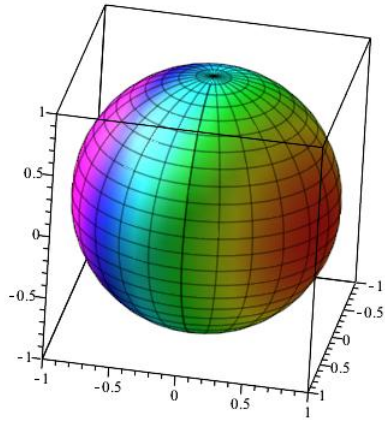
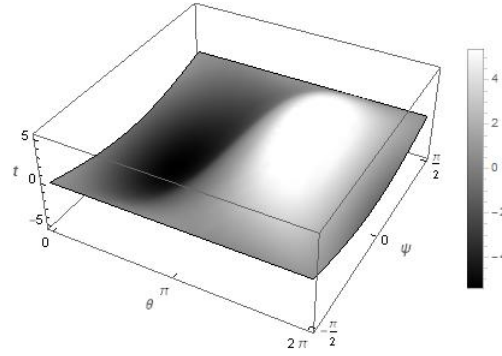


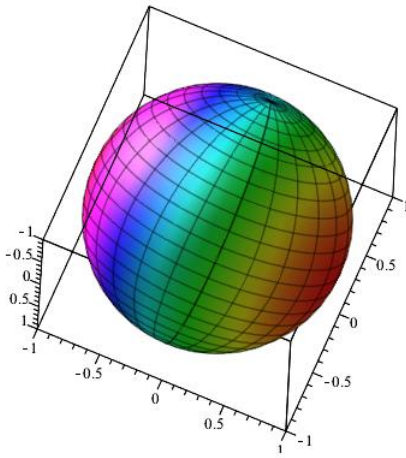
FIGURA 6.2. Comportamiento de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.6).



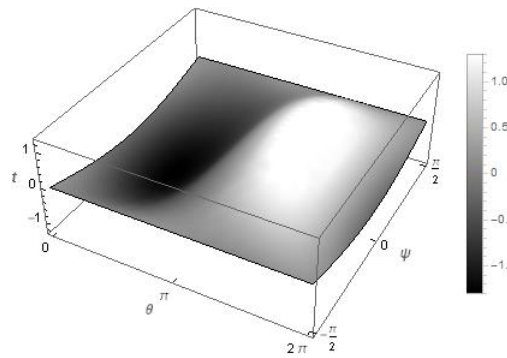
(a) Condición inicial en S^2 .



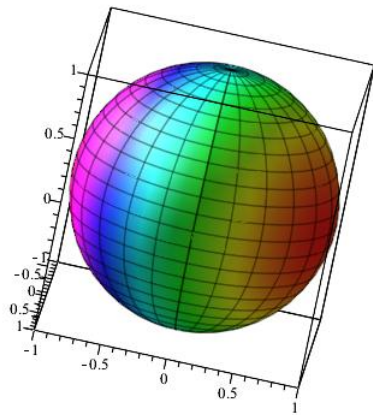
(b) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_1(0)$.



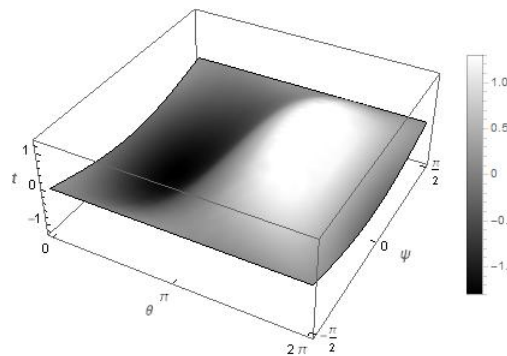
(c) $\mathbf{u}_1(0.01)$ en S^2 .



(d) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_1(0.01)$.

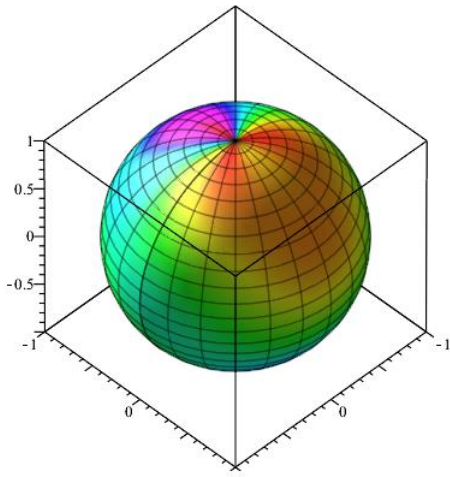
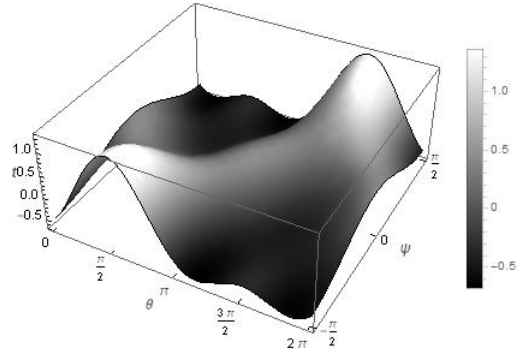
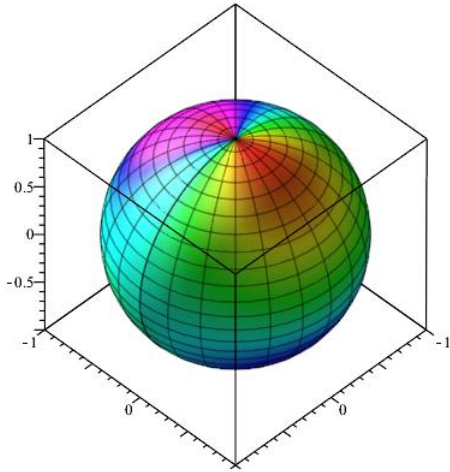
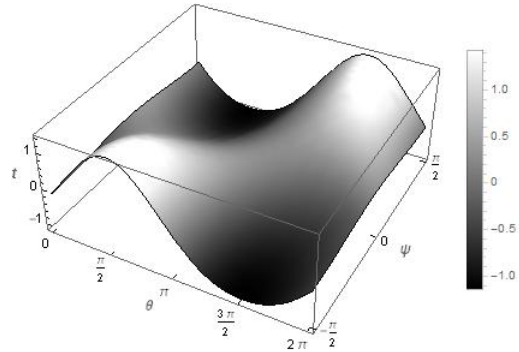
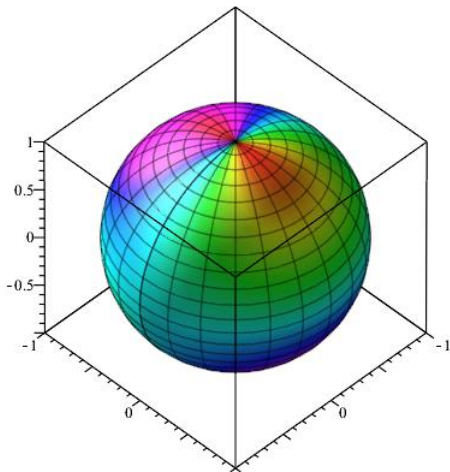
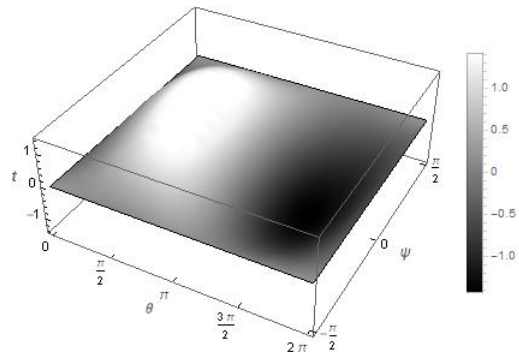


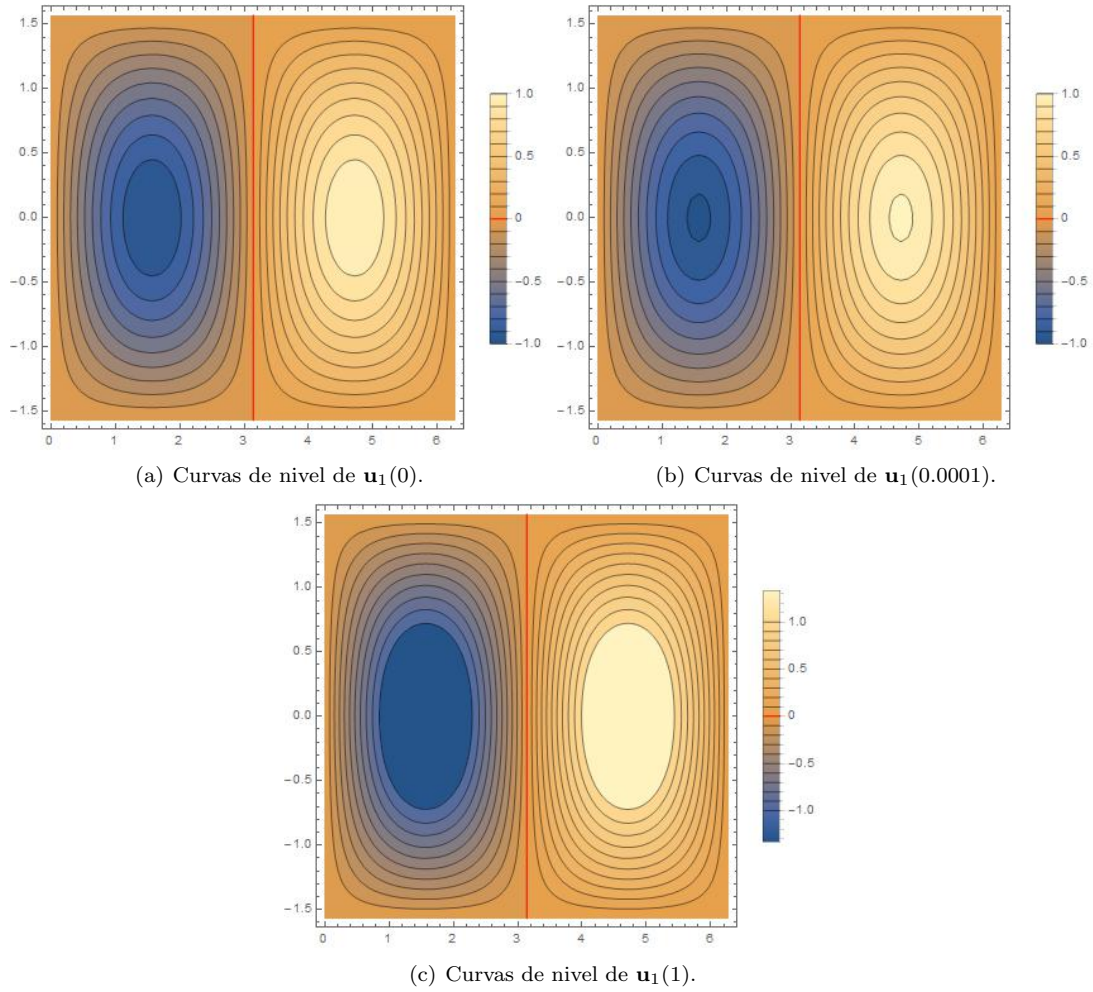
(e) $\mathbf{u}_1(0.05)$ en S^2 .



(f) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_1(0.05)$.

FIGURA 6.3. Comportamiento de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.8).

(a) Condición inicial en S^2 .(b) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_2(0)$.(c) $\mathbf{u}_2(0.0055)$ en S^2 (d) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_2(0.0055)$.(e) $\mathbf{u}_2(0.02)$ en S^2 (f) Gráfica de los valores de $\mathbf{u}_2(0.02)$.FIGURA 6.4. Comportamiento de $\mathbf{u}_2(t)$ para $t = 0, 0.0055$ y $t = 0.02$.

FIGURA 6.5. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.4).

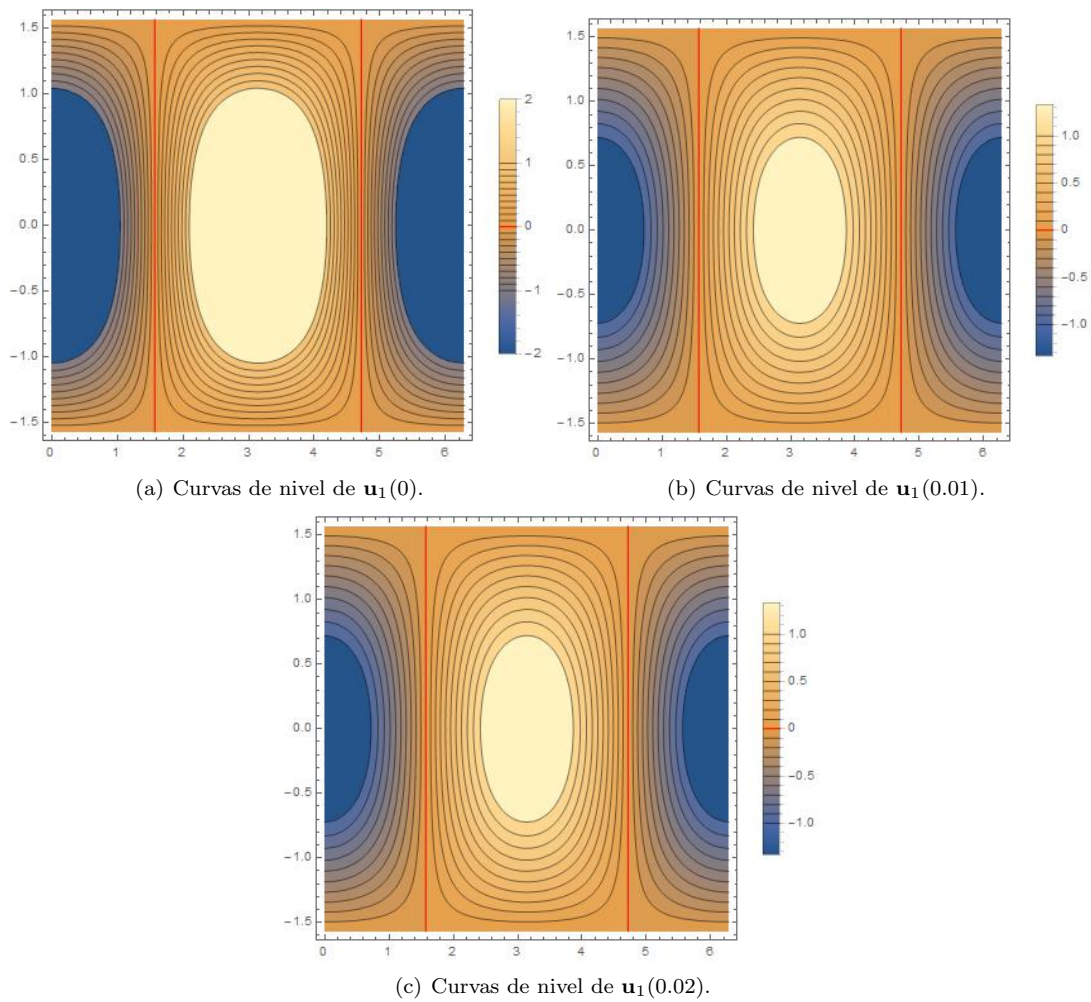
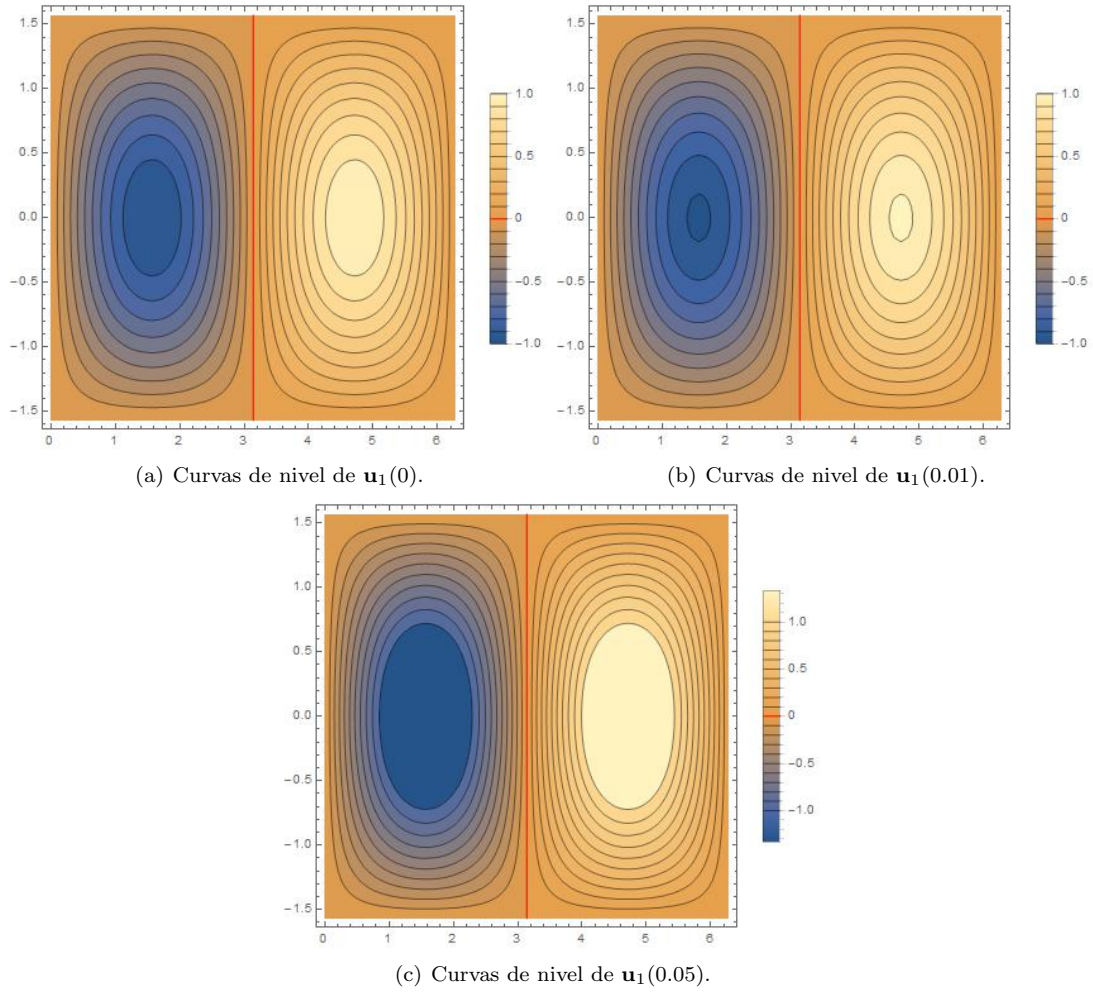
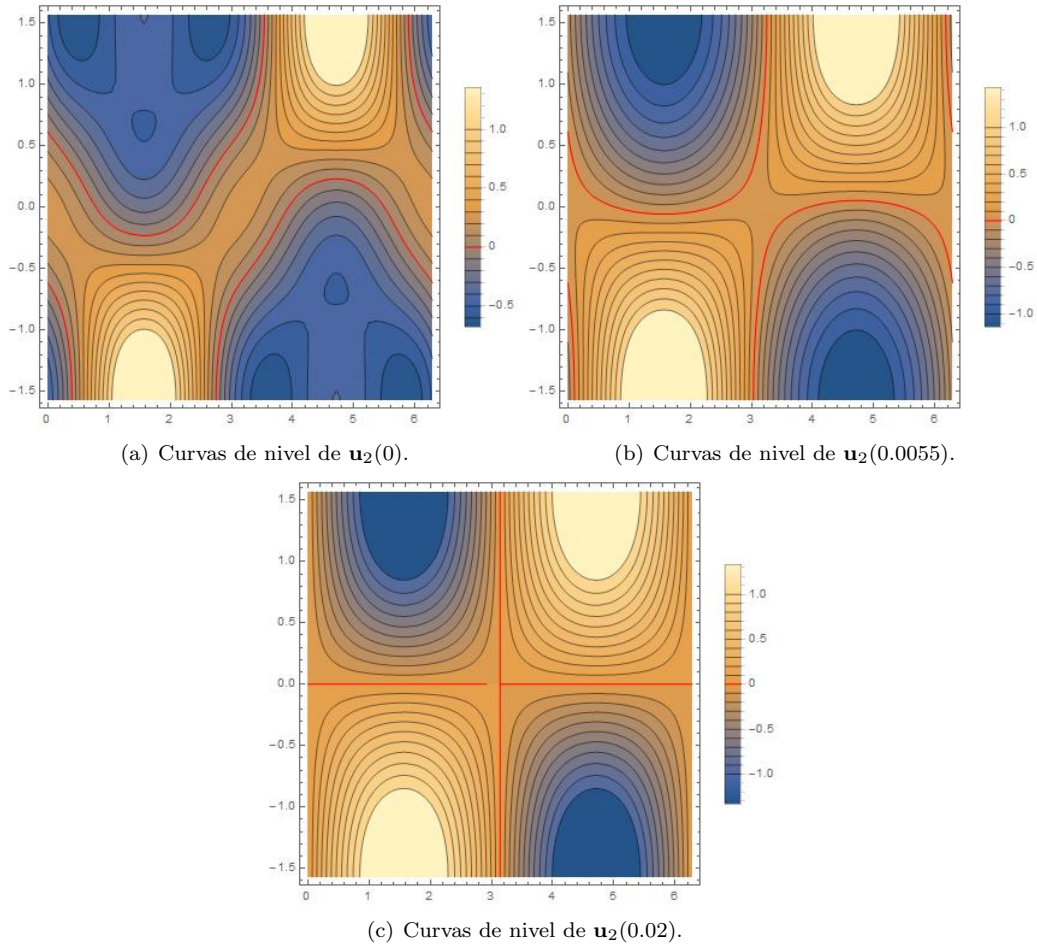


FIGURA 6.6. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.6).

FIGURA 6.7. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_1(t)$ para diferentes valores de t , según (6.8).

FIGURA 6.8. Curvas de nivel de $\mathbf{u}_2(t)$ para $t = 0, 0.0055$ y $t = 0.02$.

Existencia y Unicidad

Probaremos la existencia y unicidad de la solución de la ecuación (4.5),

$$u_t - \epsilon_i \Delta u + \frac{4}{\epsilon_i} (u^3 - u) + \lambda_i f = 0.$$

Como se mencionó en los capítulos 2 y 4 del presente, éste es un paso previo para la definición del semigrupo de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

TEOREMA A.1. *La ecuación (4.5) sujeta a la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ tiene una solución única para $t \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A el operador lineal asociado a la forma bilineal,

$$a(u, v) = \frac{4}{\epsilon_i} \int_{S^2} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Consideramos una base ortonormal de $L^2(S^2)$ que consiste de los vectores propios de A , i. e.,

$$Aw_j = \lambda_j w_j$$

y se emplea el método de Galerkin con esas funciones. Para cada m , se hace

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_j,$$

de tal manera que

$$(A.1) \quad \left(\frac{du_m}{dt}, w_j \right) + a(u_m, w_j) + (g(u_m), w_j) = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

y

$$(A.2) \quad u_m(0) = u_{0m},$$

donde u_{0m} es la proyección ortogonal en $L^2(S^2)$ de u_0 sobre el espacio generado por w_1, \dots, w_m . Como es sabido (\cdot, \cdot) denota el producto interno en $L^2(S^2)$.

La existencia de u_m en algún intervalo $[0, T_m)$ se sigue de la existencia de la solución para ecuaciones diferenciales ordinarias. El hecho de que $T_m = +\infty$ es consecuencia de ese resultado y de las siguientes estimaciones apriori.

Si multiplicamos (A.1) por g_{jm} y se suma para $j = 1, \dots, m$ se obtiene (4.5), en la que u se reemplaza por u_m . Siguiendo con los mismos cálculos, se concluye que para $T > 0$ arbitrario, u_m es acotada independientemente de m en $L^\infty(0, T; L^2(S^2))$, $L^2(0, T; H_1^2(S^2))$ y $L^4(0, T; L^4(S^2))$.

Por compacidad débil encontramos una subsucesión también denotada por u_m en $L^\infty(0, T; L^2(S^2)) \cap L^2(0, T; H_1^2(S^2)) \cap L^4(0, T; L^4(S^2))$ tal que $u_m \rightarrow u$ en $L^2(0, T; H_1^2(S^2)) \cap L^4(0, T; L^4(S^2))$ débilmente y $u_m \rightarrow u$ en $L^\infty(0, T; L^2(S^2))$ *-débilmente.

En el límite en (A.1) y (A.2) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(u, v) + a(u, v) + (g(u), v) = 0, \forall v \in H_1^2(S^2) \cap L^4(S^2).$$

La dificultad en este paso es mostrar que $g(u_m)$ converge a $g(u)$ en algún sentido, lo cual se obtiene de un resultado de compacidad encontrado en J. L. Lions (veáse [34]).

Así u satisface

$$\frac{du}{dt} + A(u) + g(u) = 0.$$

En consecuencia $u' = -A(u) - g(u)$ está en $L^2(0, T; H_1^{2'}) + L^2(0, T; L^{4/3}(S^2))$ y mostramos que u está en $\mathcal{C}([0, T], L^2(S^2))$. Así $u(0)$ tiene sentido y pasando al límite cuando $m \rightarrow \infty$, $u(0) = u_0$.

Mediante métodos estándar se prueba la unicidad y dependencia continua con respecto a u_0 . □

Unicidad retrógrada

El objetivo es obtener las condiciones para el cual la ecuación general de evolución,

$$(B.1) \quad \frac{du(t)}{dt} + N(u(t)) = 0,$$

tiene *unicidad hacia atrás*; esto es, dadas dos soluciones u, v de (B.1) que coincidan para algún t_1 ,

$$\frac{du}{dt} + N(u) = \frac{dv}{dt} + N(v) = 0, \quad t_1 - \epsilon < t < t_1,$$

y

$$u(t_1) = v(t_1),$$

se sigue que $u(t) = v(t)$ para todo $t < t_1$ en la cual u y v están definidas. Sea $S(t)$ el semigrupo asociado a (B.1),

$$s(t)u(s) = u(t + s), \quad \forall t > 0, \forall s \in \mathbb{R},$$

entonces para $0 < \tau < \epsilon$, nos preguntamos cuál es la condición para el cual $S(\tau)u(t_1 - \tau) = S(\tau)v(t_1 - \tau)$ implica $u(t_1 - \tau) = v(t_1 - \tau)$.

Ésta es exactamente la propiedad inyectiva de $S(\tau)$, y entonces la unicidad hacia atrás para todo tiempo es equivalente a la propiedad inyectiva de $S(t)$, $\forall t > 0$.

Queremos demostrar que el semigrupo asociado con la ecuación (1.2)

$$u_t = \epsilon \Delta u - \frac{1}{\epsilon} W'(u),$$

tiene unicidad hacia atrás, lo que nos permitirá hablar de conjuntos α -límite, de modo que los resultados presentados darán la caracterización del atractor. A continuación deduciremos la condición para la unicidad hacia atrás.

Sea H un espacio de Hilbert (con producto escalar (\cdot, \cdot) , norma $|\cdot|$), y sea A un operador lineal positivo autoadjunto no acotado en H con dominio $D(A) \subset H$. Denotamos por V el dominio $D(A^{1/2})$ de $A^{1/2}$ que está equipado con la norma,

$$\|v\| = |A^{1/2}v| = (Av, v)^{1/2}.$$

Consideramos una función

$$(B.2) \quad w \in L^\infty(0, T; V) \cup L^2(0, T, D(A)),$$

que satisface la relación

$$(B.3) \quad \frac{dw(t)}{dt} + Aw(t) = h(t, w(t)), \quad t \in (0, T).$$

Si suponemos que h es una función de $(0, T) \times V$ en H tal que para toda función w que satisface (B.2),

$$(B.4) \quad |h(t, w(t))| \leq k(t) \|w(t)\|,$$

para casi toda $t \in (0, T)$, $k \in L^2(0, T)$ y $t \rightarrow h(t, w(t))$ es una función medible de $(0, T)$ en H .

Sea $\Lambda = \Lambda(t)$ el cociente de normas,

$$(B.5) \quad \Lambda(t) = \frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2}.$$

Entonces

$$(B.6) \quad \Lambda' \leq 2k^2\Lambda,$$

y

$$(B.7) \quad \Lambda(t) \leq \Lambda(0) \exp\left(2 \int_0^t k^2(s) ds\right), \quad t \in (0, T).$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{(w', w)}{|w|^2} - \frac{\|w\|^2}{|w|^4} (w', w) = \frac{1}{|w|^2} (w', Aw - \Lambda w) = \frac{1}{\|w\|^2} (h - Aw, Aw - \Lambda w) = \\ &= \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} + \frac{1}{|w|^2} (Aw - \Lambda w, h) \leq \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{2|w|^2} + \frac{1}{2} \frac{|h|^2}{|w|^2} \leq \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{2|w|^2} + k^2\Lambda. \end{aligned}$$

Entonces

$$\Lambda' + \frac{|Aw - \Lambda w|^2}{|w|^2} \leq 2k^2\Lambda.$$

De esta última relación concluimos el resultado enunciado.

LEMA B.1. *Si una función w satisface las condiciones (B.1) a (B.4) y $w(\tau) = 0$ entonces $w(t) = 0$, $0 \leq t \leq T$.*

DEMOSTRACIÓN. Se procede por contradicción; si suponemos que $|w(t_0)| \neq 0$ para algún $t_0 \in (0, T)$. Por continuidad, $|w(t)| \neq 0$ en algún intervalo $(t_0, t_0 + \epsilon)$ y sea $t_1 \leq T$ el valor más grande para el cual $|w(t)| \neq 0$, $[t_0, t_1)$. Necesariamente $|w(t_1)| = 0$.

En $[t_0, t_1)$ la función $t \rightarrow \log |w(t)|$ está bien definida y

$$\frac{d}{dt} \log \frac{1}{|w|} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log |w|^2 = \frac{(w', w)}{|w|^2} = \frac{(h - Aw, w)}{|w|^2} = \Lambda - \frac{(h, w)}{|w|^2} \leq \Lambda + k\Lambda^{1/2}.$$

Así

$$\frac{d}{dt} \log \frac{1}{|w|} \leq 2\Lambda + k^2.$$

Entonces

$$\log \frac{1}{|w(t)|} \leq \log \frac{1}{|w(t_0)|} + \int_{t_0}^t (2\Lambda(s) + k^2(s)) ds \leq \log \frac{1}{|w(t_0)|} + \int_0^T (2\Lambda(s) + k^2(s)) ds.$$

Esta desigualdad muestra que $1/|w(t)|$ está acotada inferiormente cuando $t \rightarrow t_1^-$, lo que es una contradicción. \square

Al considerar una ecuación de la forma

$$\frac{du}{dt} + Au + G(u) = 0,$$

con $A, D(A), V, h$ como antes. Si hay otra solución v , sea $w = u - v$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av + G(v) &= 0, \\ \frac{dw}{dt} + Aw &= h, \quad h = G(v) - G(u). \end{aligned}$$

De este modo para demostrar la unicidad hacia atrás de la ecuación (1.2) es suficiente mostrar que si $u, v \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$,

$$(B.8) \quad |G(u) - G(v)| \leq k(t)|u - v|, \quad k \in L^2(0, T).$$

Esto se desprende de lo siguiente

$$g(u) = \frac{4}{\epsilon_i}(u^3 - u) + \lambda_i f,$$

y

$$g(v) = \frac{4}{\epsilon_i}(v^3 - v) + \lambda_i f,$$

de modo que,

$$g(u) - g(v) = \frac{4}{\epsilon_i} [(u^3 - u) - (v^3 - v)] = \frac{4}{\epsilon_i} [(u - v)(u^2 + v^2 + uv - 1)].$$

Utilizando la desigualdad

$$uv \leq \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2,$$

y de la desigualdad del triángulo, existe una constante c'_1 tal que

$$|u^2 + v^2 + uv - 1| \leq c'_1(1 + u^2 + v^2).$$

De este modo, por la desigualdad de Holder

$$\int_{S^2} |(u - v)(u^2 + v^2 + uv - 1)| \leq \left(\int_{S^2} |u - v|^2 \right)^{1/2} \left(\int_{S^2} |u^2 + v^2 + uv - 1|^2 \right)^{1/2},$$

de donde se desprende que existe una c_2 tal que

$$\int_{S^2} \left(\left(\frac{4}{\epsilon_i}(u^3 - u) + \lambda_i f \right) - \left(\frac{4}{\epsilon_i}(v^3 - v) + \lambda_i f \right) \right) \leq c_2 \left(\int_{S^2} |u - v|^2 \right)^{1/2} \left(1 + \int_{S^2} |u|^2 + \int_{S^2} |v|^2 \right)^{1/2}$$

que es equivalente a (B.7), lo que demuestra el hecho de que el semigrupo asociado a la ecuación (1.2) tiene unicidad retrógrada.

Código para la implementación del método de Galerkin

El siguiente código en *Mathematica* es la implementación del método de Galerkin, del que se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Junto con una condición inicial *Maple* las resuelve numéricamente.

En la primeras líneas del código definimos a la función $u(\psi, \theta, t)$ en la que mediante el comando *LegendreP* denota el polinomio de Legendre asociado como en (5.12). Recordemos que esta función u satisface la condición (1.15).

```
(* Implementacion del metodo de Galerkin, 7 de mayo de 2012 *)
(* Definicion de la funcion u*)
u[Theta_,Psi_,t_]:=a[1][t]*Sin[Theta]*LegendreP[1,0,Sin[Psi]]+
a[2][t]*Sin[Theta]*LegendreP[1,1,Sin[Psi]]+
b[1][t]*Cos[Theta]*LegendreP[1,0,Sin[Psi]]+
b[2][t]*Cos[Theta]*LegendreP[1,1,Sin[Psi]]
```

Obtenemos la derivada parcial con respecto a t de $u(\psi, \theta, t)$ y la nombramos m .

```
(*Derivada de u con respecto a t *)
m:=D[u[Theta,Psi,t],t]
```

Las siguientes líneas corresponden al operador de Laplace-Beltrami en S^2 de acuerdo a (5.2).

```
(* Operador de Laplace-Beltrami en la esfera *)
m1:=(1/Cos[Psi]^2)*D[u[Theta,Psi,t],Theta,Theta]-
Tan[Psi]*D[u[Theta,Psi,t],Psi]+D[u[Theta,Psi,t],Psi,Psi]
```

Establecemos el valor de ϵ y escribimos la ecuación (5.3).

```
(* Establecimiento del valor de epsilon *)
Epsilon=0.001
(* Ecuacion en estudio *)
l:=m-Epsilon*m1-(4/Epsilon)*u[Theta,Psi,t]*(1-u[Theta,Psi,t]^2)
```

La última parte de este código obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (6.2), de acuerdo a (5.9).

```
(* Primera ecuacion diferencial *)
Integrate[l*Sin[Theta]*LegendreP[1,0,Sin[Psi]],{Psi,-Pi/2,Pi/2},
{Theta,0,2*Pi}]
(* Segunda ecuacion diferencial *)
Integrate[l*Sin[Theta]*LegendreP[1,1,Sin[Psi]],{Psi,-Pi/2,Pi/2},
{Theta,0,2*Pi}]
(* Tercera ecuacion diferencial *)
Integrate[l*Cos[Theta]*LegendreP[1,0,Sin[Psi]],{Psi,-Pi/2,Pi/2},
{Theta,0,2*Pi}]
(* Cuarta ecuacion diferencial *)
Integrate[l*Cos[Theta]*LegendreP[1,1,Sin[Psi]],{Psi,-Pi/2,Pi/2},
{Theta,0,2*Pi}]
```

El siguiente código en *Maple* obtiene la solución gráfica del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias sujeta a una condición inicial, para posteriormente graficarla en S^2 .

```

# Solucion grafica del sistema de ecuaciones diferenciales en S^2
# Carga el package DEtools que contiene el comando a utilizar
with(DEtools):
#Definicion del sistema
sys:=[11103.3a[1](t)^3+a[1](t)*(-19739.2+11103.3a[2](t)^2+
11103.3b[1](t)^2+3701.1b[2](t)^2)+7402.2a[2](t)*b[1](t)*b[2](t)+
4.9348diff(a[1](t),t)=0,11103.3a[2](t)^3+11103.3a[1](t)^2+
a[1](t)*(7402.2b[1](t)*b[2](t))
+a[2](t)*(-19739.2+3701.1b[1](t)^2+11103.3b[2](t)^2)
+4.9348diff(a[2](t),t)=0,11103.3b[1](t)^3+11103.3a[1](t)^2*b[1](t)+
3701.1a[2](t)^2*b[1](t)+3701.1a[2](t)^2*b[1](t)+
7402.2a[1](t)*a[2](t)*b[2](t)+b[1](t)*(-19739.2+11103.3b[2](t)^2)+
4.93348diff(b[1](t),t)=0,7402.2a[1](t)*a[2](t)*b[1](t)+
b[2](t)*(-19739.2+3701.1a[1](t)^2+11103.3a[2](t)^2)+
11103.3b[1](t)^2*b[2](t)+11103.3b[2](t)^3+4.9348diff(b[2](t),t)=0]:
# Obtencion de la funcion a[1](t) para los valores de t entre 0 y 1,
sujeta a la condicion inicial a[1](0)=0,a[2](0)=5,
b[1](0)=0,b[2](0)=2, calculada en 2000 puntos del intervalo [0,1].
DEplot(sys,[a[1](t),a[2](t),b[1](t),b[2](t)],t=0..1,
[[a[1](0)=0,a[2](0)=5,b[1](0)=0,b[2](0)=2]],scene=[t,a[1](t)],
numpoints=2000)
# Obtencion de la funcion a[2](t)
DEplot(sys,[a[1](t),a[2](t),b[1](t),b[2](t)],t=0..1,
[[a[1](0)=0,a[2](0)=5,b[1](0)=0,b[2](0)=2]],scene=[t,2[1](t)],
numpoints=2000)
# Obtencion de la funcion b[1](t)
DEplot(sys,[a[1](t),a[2](t),b[1](t),b[2](t)],t=0..1,
[[a[1](0)=0,a[2](0)=5,b[1](0)=0,b[2](0)=2]],scene=[t,b[1](t)],
numpoints=2000)
# Obtencion de la funcion b[2](t)
DEplot(sys,[a[1](t),a[2](t),b[1](t),b[2](t)],t=0..1,
[[a[1](0)=0,a[2](0)=5,b[1](0)=0,b[2](0)=2]],scene=[t,b[2](t)],
numpoints=2000)
# Definicion del polinomio asociado de Legendre, mediante
el comando proc; el polinomio asociado de legendre se llamara con
la funcion legendrep;
legedrep:=proc(l,m,x)
(-1)^m/(l!*2^l)*diff((x^2-1)^l,x$(l+m))
end proc:
Definicion de la solucion al sistemas de ecuaciones diferenciales;
el comando subs sustituye la primera expresion en la segunda en
el lugar correspondiente a la variable x.
u:=(theta,psi,t)->(1.2+3.8exp(-15441.31127t)*sin(theta)*
subs(x=sin(psi),legendrep(1,1,x))+
(0.5+1.5exp(-17237.31702t)*cos(theta)*subs(x=sin(psi)
,legendrep(1,1,x)):
# Grafica de la esfera segun los valores iniciales de u
plot3d([cos(theta)*cos(psi),sin(theta)*cos(psi),sin(psi)]
,theta=0..2*Pi,psi=-Pi/2..Pi/2,color=u(theta,psi,0))

```

Bibliografía

- [1] Arfken George, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press Inc., 1985.
- [2] Aubin Thierry, *Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge - Ampère Equations*, Springer - Verlag, 1982.
- [3] Arnold V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Text in Mathematics, Springer - Verlag, 1989.
- [4] Berger M. S., Bombieri E., *On Poincaré's Isoperimetric Problem for Simple Closed Geodesics*, J. Functional An., 42 , 274 - 298 (1981).
- [5] Bai F., Elliot C. M., Gardiner A., Spence A., Stuart A. M., *The viscous Cahn-Hilliard equation. Part I: computations*, Nonlinearity, 8 (1995).
- [6] Bonnans J. F., et. al. *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*, Universitext, Springer-Verlag, 2006.
- [7] Bronsard Lia, Kohn Robert V., *Motion by Mean Curvature as the Singular Limit of Ginzburg-Landau Dynamics*, Journal of Differential Equations 90 no. 2, 211 - 237 (1991). Geometric Analysis, 13, 595-604 (2003).
- [8] Carvalho Alexander N., Lagna José A., Robinson James C., Suárez Antonio, *Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system*, Journal of Differential Equations 236, 570-603 (2007).
- [9] Cheban D. N., *Global attractors of non-autonomous dissipative dynamical systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
- [10] Chenciner Alain, Montgomery Richhard, *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses*, Annals of Mathematics, 152,881-900 (2000).
- [11] Del Río H., Garza C., Padilla P., *Geodesics, soap bubbles and pattern formation in Riemannian Surfaces*, J.
- [12] do Carmo Manfredo P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice - Hall, 1976.
- [13] Du Zhuoran, Lai Baishun, *Transition Layers for an Inhomogeneous Allen-Cahn equation in Riemannian Manifolds*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Volume 33, Number 4, 2013.
- [14] Du Z., Gui C., *Interior layers for an inhomogeneous Allen-Cahn equation*, J. Diff. Eqns., 249 (2010), 215-239.
- [15] Dubrovin M. A., Fomenko A. T., Novikov S. P., *Modern Geometry - Methods and Applications, Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields*, Graduate Text in Mathematics, Springer - Verlag, 1992.
- [16] Elliot C. M., Stuart A. M., *Viscous Cahn-Hilliard equation II: Analysis*, Journal of Differential Equations, 128, 387-414, 1996.
- [17] Dufiet V., Boissonade J., *Convictional and unconvictional Turing Patterns*, The Journal of Chemical Physics, 96,664 (1992).
- [18] Evans C. Lawrence, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, 2002.
- [19] Foias Ciprian, Sell George R., Temam Roger, *Inertial Manifolds for Nonlinear Evolutionary Equations*, Journal of Differential Equations, Vol. 73, 309-353 (1988).
- [20] Friedman Avner, *Foundations of Modern Analysis*, Dover Publications, 1982.
- [21] Garza-Hume C. E., Padilla P., *Closed geodesics on oval surfaces and pattern formation*, CAG, 11-2, 223 - 233 (2003).
- [22] Hebey Emmanuel, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, American Mathematical Society, 2000.
- [23] Holling C. S., *Some characteristics of symple types of predation and parasitism*, Canadian Entomologist, 91:385-398 (1959).
- [24] Hutchinson J. E., Tonewaga Y., *Convergence of phase interfaces in the van der Waals - Cahn - Hilliard theory*, Calc. var. 10, 49 - 84 (2000).
- [25] Iribarren T. Ignacio L., *Topología de espacios métricos*, Limusa, 1984.
- [26] Katok Anatole, Hasselblatt Boris, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1995.
- [27] Kythe K. Prem, Puri Pratap, Schferkotter R. Michael, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Mathematica*, Second Edition, Chapman and Hall, 2003.
- [28] Ladyzhenskaya Olga, *Attractors for semigroups and evolution equations*, Cambridge University Press, 1991.
- [29] Li Yi M. and Muldowney James S., *On R. A. Smith's autonomous convergence theorem*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, volume 25, number 1,365 - 381, 1995.
- [30] Li Yi M. and Muldowney James S., *On Bendixson's Criterion*, Journal of Differential Equations 106, 27-39, 1993.
- [31] Li Yi M. and Muldowney James S., *Evolution of surface functionals and differential equations*, Ordinary and Delay Differential Equations, Longman Scientific and Technical, 144 - 148, 1992.
- [32] Li Yi M. and Muldowney James S., *Lower bounds for the Hausdorff dimension of attractors*, Journal of Dynamics and Differential Equations 7, 455 - 467, 1995.
- [33] Li Yi M. and Muldowney James S., *Dynamics of differential equations on invariant manifolds*, Journal of Differential Equations 168, 295 - 320, 2000.

- [34] Lions J. L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, París, 1969.
- [35] Maini Phillip K., Painter Kevin J., Nguyen Phong Chau Helene, *Spatial pattern formation in chemical and biological systems*, J. Chem. Soc., Faraday, (93), 1997.
- [36] Medina H. David, Padilla L. Pablo, *A Geometric Approach to Invariant Sets of Dynamical Systems*, Electronic Journal of Differential Equations, Conf. (18), 2010.
- [37] Murray J. D., *Mathematical Biology: I. Introduction*, Springer, 2001.
- [38] Murray J. D., *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, 2003.
- [39] Munkres James R., *Topología*, Prentice Hall, 2002.
- [40] Nakashima K., *Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equations*, J. Diff. Eqns., 191 (2003), 234-276.
- [41] Pacard F., Ritoré M., *From constant mean curvature hypersurfaces to gradient theory of phase transitions*, J. Diff. Geom., 64(2003), 359-423.
- [42] Padilla P., Tonewaga Y., *On the convergence of stable phase transitions*, CPAM LI, 551- 579 (1998).
- [43] Peressini A. L., et. al., *The Mathematics of Nonlinear Programming*, Undergraduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.
- [44] Poincaré H., *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*, Trans. Amer. Math. Soc. 6, 237 - 274 (1905).
- [45] Robinson C. James, *Infinite - Dimensional Dynamical Systems, An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, Cambridge University Press, 2001.
- [46] Sell G. R., *Nonautonomous differential equations and dynamical systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 127, 241-283 (1967).
- [47] Sell G. R. and You Y., *Dynamics of Evolutionary equations*, Springer - Verlag, New York, Applied Mathematical Sciences, vol. 143, 2002.
- [48] Smith R. A., *Some Applications of Hausdorff dimension inequalities for ordinary differential equations*, Proy. Roy. Soc. Edinburg Sect. A 104, 235 - 259, 1986.
- [49] Struwe M., *Variational Methods*, Springer - Verlag, 1990.
- [50] Sun Wenyu, Yuan Ya-xiang, *Optimization Theory and Methods: Nonlinear Programming*, Springer Optimization and Its Applications, Springer - Verlag, 2006.
- [51] Temam R., *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, 1997.
- [52] Tinkham M., *Introduction to Superconductivity*, McGraw-Hill. 1996.
- [53] Threfethen N., *The PDE Coffee Table Book*, 2001.
- [54] Webster Roger, *Convexity*, Oxford University Press, 1994.