



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS Y DENDRITAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR (A) EN CIENCIAS

PRESENTA:
M. en C. PAULA IVON VIDAL ESCOBAR

TUTOR:
Dra. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:
Dr. ANGEL TAMARIZ MASCARUA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
Dr. MICHAEL HRUSAK
CENTRO DE CIENCIAS MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE DE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

LÍMITES INVERSOS GENERALIZADOS Y DENDRITAS

Paula Ivon Vidal Escobar

Septiembre 2015

Índice general

Introducción	III
1. Preliminares	1
1.1. Teoría de continuos	2
1.1.1. Propiedades de continuos arco conexos	4
1.1.2. Propiedades de triodos simples	7
1.1.3. Propiedades de continuos localmente conexos	12
1.2. Límites inversos generalizados	22
2. Conjuntos de coincidencias	29
2.1. Propiedades de los conjuntos de coincidencias	31
2.2. Subcontinuos de los conjuntos de coincidencias	46
3. Conjuntos de coincidencias y límites inversos	65
3.1. Encajes	65
3.2. Subcontinuos del límite inverso	69
4. Límites inversos y continuos arco conexos	93
4.1. Límites inversos y continuos uncoherentes.	93
4.2. Puntos de ramificación del límite inverso	98
4.3. Puntos de ramificación del límite inverso	108
4.4. Arcos en el límites inversos y en G_k	112
5. Resultados importantes	115
5.1. Cuando el límite inverso es una dendrita	115
5.2. Cuando el límite inverso es un arco	116
5.3. El número de puntos de ramificación es finito	120

6. Límites inversos y la función corrimiento	123
6.1. Propiedades de M	125
6.2. Propiedades de la función corrimiento	134
7. Propiedades de M	151
7.1. Propiedades de M	152
7.2. Algunos puntos de ramificación de M	174
7.3. Algunos puntos de orden al menos dos de M	189
8. Caracterización	197
8.1. Orden de los puntos de ramificación del límite inverso	200
8.2. Arcos y puntos de ramificación del límite inverso	235
8.3. Carazterización	241
Bibliografía.....	243

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

En el año 2003 Williams S. Mahavier introdujo en [12] el concepto de límite inverso de un subconjunto cerrado M de $[0, 1]^2$, como sigue:

$$\varprojlim M = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in [0, 1]^\infty : \text{para cada } i \in \mathbb{N}, (x_{i+1}, x_i) \in M\}.$$

En [4] T. Ingram y W. S. Mahavier probaron que estos límites inversos son compactos, y en [6] dieron ejemplos de que éstos no necesariamente son conexos. De hecho es un problema abierto en esta área es dar condiciones necesarias y suficientes para que el límite inverso sea conexo.

Un problema muy estudiado en esta área es: **¿Qué continuos se pueden obtener como límite inverso de un subconjunto cerrado del cuadrado unitario?**

Algunas respuestas parciales a esta pregunta son las siguientes:

- En 2011 Alejandro Illanes probó en [2] que la circunferencia **NO** puede ser obtenida de esta manera.
- En 2012 Van Nall probó en [17] y [18] que la única gráfica finita que puede ser obtenida de esta manera es un arco.
- En 2013 Van Nall probó en [19] que el cuadrado unitario **NO** puede ser obtenido de esta manera.

Lo natural después de estudiar las gráficas finitas, es estudiar qué tipo de dendritas se pueden obtener de esta manera. Recordemos que una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

- En 2013 Iztok Banick et. al. en [7] probaron que la dendrita universal de Wazewski puede ser obtenida de esta manera.
- En 2013 Iztok Banick y Verónica Martínez de la Vega prueban en [8] que la dendrita universal D_3 puede ser obtenida de esta manera.

En este trabajo estudiamos qué tipo de dendritas se pueden obtener como límite inverso de un subconjunto cerrado del cuadrado unitario. Además estudiamos que propiedades podemos saber del conjunto cerrado si suponemos que el límite inverso es una dendrita.

Lo primero que probamos (Capítulos 2,3,4,5) es que si $\varprojlim M$ es una dendrita, entonces M es una dendrita. En particular probamos que si $\varprojlim M$ es un arco, entonces M es un arco.

Para probar estos resultados, desarrollamos una técnica nueva en esta área, a la cual llamamos "Conjuntos de Coincidencias". Esta técnica generaliza el "Teorema de los alpinistas" ("Mountaing Climbing Theorem"), que es la herramienta principal utilizada en [2], [17] [18].

En los capítulos 6, 7 y 8, nos concentramos en estudiar si el $\varprojlim M$ puede ser una dendrita con un número finito de puntos de ramificación ($|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$).

Estudiamos la dinámica de la función corrimiento σ en $\varprojlim M$. La función $\sigma : \varprojlim M \rightarrow \varprojlim M$ está definida como sigue: $\sigma((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_3, \dots)$.

Esta función se utilizó como una herramienta en [17], [18], [7], [8], para el estudio de estos límites inversos.

Probamos que en el caso específico en que $\varprojlim M$ es una dendrita con un número finito de puntos de ramificación, se tiene que $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación, y que el periodo de un punto $x \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ bajo σ es a lo más 2.

Probamos que si un punto $x \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ es de la forma (a, b, a, b, \dots) , entonces el punto (a, b) o (b, a) tiene orden al menos dos en M . En el caso en que $0 < a \leq b < 1$, probamos que el punto (a, b) o (b, a) es un punto de ramificación de M .

Por último concluimos que una dendrita D con $|\mathcal{R}(D)| < \infty$ es límite inverso de un subconjunto cerrado M de $[0, 1]^2$ si y sólo si existe un arco $B \subset D$, tal que $\mathcal{R}(D) \subset B$ y para cada punto $x \in \mathcal{R}(D)$, se cumple que $ord(x) = \infty$.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recordaremos algunas definiciones básicas de teoría de continuos y de límites inversos generalizados. Daremos también algunos resultados que nos serán de gran utilidad en los próximos capítulos. Además estableceremos la notación que ocuparemos a lo largo de este trabajo.

Comenzaremos con notación. Dados X un espacio topológico e Y un subconjunto de X . Denotaremos a

- el *interior* de Y en X como $Int_X(Y)$,
- la *cerradura* de Y en X como \overline{Y}^X ,
- la *frontera* de Y en X como $Fr_X(Y)$.

Cuando no quepa lugar a confusión sobre el espacio en el que estamos trabajando omitiremos el subíndice.

El símbolo \mathbb{N} y \mathbb{R} denotarán al conjunto de los números enteros positivos y de los números reales respectivamente. Si Y es un subconjunto de \mathbb{R} , (de \mathbb{N}), cuando tenga sentido, denotaremos a

- el *ínfimo* de Y como $\inf Y$,
- el *supremo* de Y como $\sup Y$,
- el *mínimo* de Y como $\min Y$,
- el *máximo* de Y como $\max Y$.

Dados dos puntos $a, b \in [0, 1]$, cuando no tengamos conocimiento de que $a < b$ o $b < a$, denotaremos por \overline{ab} al intervalo con puntos extremos a y b .

1.1. Teoría de continuos

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo con más de un punto. Un *subcontinuo* es un subconjunto de un espacio topológico que es un continuo.

Un *arco* es un continuo homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Dado un arco A y un homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow A$, los puntos $h(0)$ y $h(1)$ son llamados *puntos extremos de A* .

Un *triodo simple* es un continuo, que es la unión de tres arcos que se intersectan sólo por uno de sus puntos extremos.

Una *curva cerrada simple* es un continuo homeomorfo a la circunferencia S^1 .

Dado un continuo X , decimos que:

- X es *arco conexo*, si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, existe un arco con puntos extremos x e y .
- X es *unicoherente* si para cualesquiera dos subcontinuos A y B de X , tales que $X = A \cup B$, entonces $A \cap B$ es conexo.
- Si X tiene una propiedad P , decimos que es *hereditariamente P* , si cualquier subcontinuo propio de X tiene la propiedad P .
- X es un *dendroide*, si X es hereditariamente unicoherente y arco conexo.
- Dado $p \in X$, decimos que X es *localmente conexo en p* , si dado un subconjunto abierto U de X , tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto conexo V de X , tal que $p \in V$ y $V \subset U$. Si X es localmente conexo en todos sus puntos, entonces decimos que X es *localmente conexo*.
- Dado $p \in X$, decimos que X es *conexo en pequeño en p* , si dada una vecindad U de X , tal que $p \in U$, existe una vecindad conexa V de X , tal que $p \in V$ y $V \subset U$.
- X es una *dendrita*, si X es un dendroide localmente conexo, equivalentemente X es una dendrita, si X es localmente conexo sin curvas cerradas simples.

A partir de un continuo X se pueden definir otros continuos, como por ejemplo 2^X , que es el conjunto de subconjuntos cerrados de X y $C(X)$, que es el conjunto de subcontinuos de X . Estos continuos están dotados con la

topología inducida por la métrica de Hausdorff ([3], Definition 2.1).

Dados X un continuo y A un subcontinuo de X , decimos que A es un *continuo de convergencia* de X , si existe una sucesión de subcontinuos $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de X , tales que $A = \lim_{i \rightarrow \infty} A_i$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $A \cap A_i = \emptyset$.

Se sabe que una dendrita no contiene continuos de convergencia.

Dados un continuo X , $n \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ y $p \in X$, decimos que p es un *punto de orden n* , $ord_X(p) = n$, si existen n arcos, $A_1, A_2, \dots, A_n \subset X$, tales que para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, p es punto extremo de A_i y si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \{p\}$.

Distinguiremos a los puntos de un continuo X según su orden, de la siguiente forma:

- $\mathcal{E}(X) = \{p \in X : ord_X(p) = 1\}$
- $\mathcal{O}(X) = \{p \in X : ord_X(p) = 2\}$
- $\mathcal{R}(X) = \{p \in X : ord_X(p) \geq 3\}$

A los puntos de orden 1 se les llama *puntos extremos (terminales)*, a los de orden 2 se les llama *puntos ordinarios* y a los de orden mayor se les llama *puntos de ramificación*.

A lo largo del trabajo estaremos utilizando las siguientes proyecciones.
Dado $i \in \mathbb{N}$,

- $\pi_i : [0, 1]^{\infty} \rightarrow [0, 1]$ definida como $\pi_i((x_1, x_2, \dots)) = x_i$,
- $\sigma : [0, 1]^{\infty} \rightarrow [0, 1]^{\infty}$ definida como $\sigma((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_3, \dots)$.

Dados $i, k, n \in \mathbb{N}$, con $i \leq k \leq n$, $n \geq 3$

- $\pi_i : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida como $\pi_i((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_i$,
- $\pi_{i,k} : [0, 1]^{\infty} \rightarrow [0, 1]$, definida como $\pi_{i,k}((x_1, x_2, \dots)) = (x_i, \dots, x_k)$,
- $\pi_{i,k} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida como $\pi_{i,k}((x_1, \dots, x_n)) = (x_i, \dots, x_k)$,
- $\pi_{2,1} : [0, 1]^{\infty} \rightarrow [0, 1]$, definida como $\pi_{2,1}((x_1, x_2, \dots)) = (x_2, x_1)$,
- $\pi_{2,1} : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida como $\pi_{2,1}((x_1, x_2, \dots, x_n)) = (x_2, x_1)$.

En particular dado $i \in \{1, 2\}$

- $\varrho_i : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definida como $\varrho_i((x_1, x_2)) = x_i$.

1.1.1. Propiedades de continuos arco conexos

Los siguientes resultados sobre arco conexidad, los estaremos utilizando en los siguientes capítulos.

Teorema 1.1.1. Sean $J \subset \mathbb{N}$, finito o numerable, y puntos $u, v \in [0, 1]$ con $u < v$. Supongamos que existen $i \in J$ y un arco $\mathbf{B} \subset \prod_{j \in J} [0, 1]$, tales que $[u, v] \subset \pi_i(\mathbf{B})$. Entonces existe un arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ con extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_i(\mathbf{A}) = [u, v]$,
- (2) $\pi_i(\mathbf{p}) = u$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = v$,
- (3) $\pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$.

Demostración.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \prod_{j \in J} [0, 1]$, los puntos extremos de \mathbf{B} . Como \mathbf{B} es un arco existe $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{B}$ un homeomorfismo, tal que $\mathbf{h}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{h}(1) = \mathbf{y}$.

Como $u, v \in \pi_i(\mathbf{B}) = \mathbf{h}([0, 1])$, existen puntos $a, b \in [0, 1]$, tales que $\pi_i \circ \mathbf{h}(a) = u$ y $\pi_i \circ \mathbf{h}(b) = v$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a < b$, definimos

$$r = \min\{x \in [a, b] : \pi_i \circ \mathbf{h}(x) = v\} \text{ y } s = \max\{x \in [a, r] : \pi_i \circ \mathbf{h}(x) = u\}.$$

Definamos $\mathbf{p} = \mathbf{h}(r)$, $\mathbf{q} = \mathbf{h}(s)$ y $\mathbf{A} = \mathbf{h}([r, s])$. Por definición \mathbf{A} es un arco contenido en \mathbf{B} . Veamos que \mathbf{A} satisface la propiedades (1)-(3) del lema. (Figura 1.1)

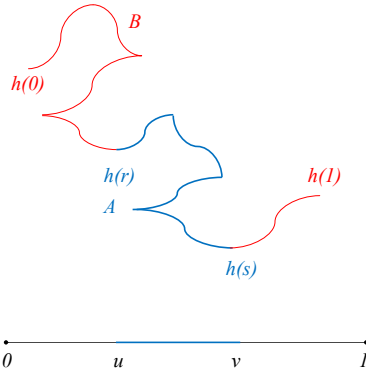


Figura 1.1:

$$(2) \pi_i(\mathbf{p}) = u \text{ y } \pi_i(\mathbf{q}) = v.$$

Como $\mathbf{p} = \mathbf{h}(r)$, $\mathbf{q} = \mathbf{h}(s)$, se sigue de la definición de r y s que $\pi_i(\mathbf{p}) = \pi_i(\mathbf{h}(r)) = u$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = \pi_i(\mathbf{h}(s)) = v$. Por tanto se cumple (2).

$$(1) \pi_i(\mathbf{A}) = [u, v].$$

Como $u, v \in \pi_i(\mathbf{A})$, y $\pi_i(\mathbf{A})$ es conexo, entonces $[u, v] \subset \pi_i(\mathbf{A})$. Veamos que $\pi_i(\mathbf{A}) \subset [u, v]$. Supongamos por el contrario que $\pi_i(\mathbf{A}) \not\subset [u, v]$.

Como $\pi_i(\mathbf{A}) \not\subset [u, v]$, existen un punto $w \in \pi_i(\mathbf{A}) - [u, v]$ y un punto $t \in (r, s)$ tales que $\pi_i(\mathbf{h}(t)) = w$. Si $w < u$, entonces existe un punto $t' \in (t, s)$, tal que $\pi_i(\mathbf{h}(t')) = u$, como $t' > t > r$ tenemos una contradicción a la definición de r . De manera similar si $w > v$ obtenemos una contradicción a la definición de s . Por tanto $\pi_i(\mathbf{A}) \subset [u, v]$.

De las contenciones anteriores concluimos que $\pi_i(\mathbf{A}) = [u, v]$ y (1) queda probado.

$$(3) \pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v).$$

Supongamos que $u \in \pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\})$, entonces existe $t \in (r, s)$ tal que $\pi_i(\mathbf{h}(t)) = u$, lo cual contradice la definición de r . De manera similar, si suponemos que $v \in \pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\})$. Por tanto $\pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$ y (3) queda probado. ■

Corolario 1.1.2. Sean $J \subset \mathbb{N}$, finito o numerable, y puntos $u, v \in [0, 1]$ con $u < v$. Supongamos que existe $\mathbf{X} \subset \prod_{j \in J} [0, 1]$ arco conexo, tal que para cada $j \in J$, $\pi_j(\mathbf{X}) = [0, 1]$. Entonces dado $i \in J$, existe un arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ con puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_i(\mathbf{A}) = [u, v]$,
- (2) $\pi_i(\mathbf{p}) = u$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = v$,
- (3) $\pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$.

Demostración.

Sea $i \in J$, por hipótesis $\pi_i(\mathbf{X}) = [0, 1]$, por lo que existen puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, tales que $\pi_i(\mathbf{x}) = 0$ e $\pi_i(\mathbf{y}) = 1$.

Como \mathbf{X} es arco conexo, existe un arco $\mathbf{B} \subset \mathbf{X}$ con puntos extremos \mathbf{x} e \mathbf{y} . Como $0, 1 \in \pi_i(\mathbf{B}) \subset [0, 1]$, y $\pi_i(\mathbf{B})$ es conexo, entonces $\pi_i(\mathbf{B}) = [0, 1]$, entonces $[u, v] \subset \pi_i(\mathbf{B})$.

De lo anterior se satisfacen la hipótesis del Teorema 1.1.1, por tanto existe una arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ con extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades

$$(1) \pi_i(\mathbf{A}) = [u, v],$$

$$(2) \pi_i(\mathbf{p}) = u \text{ y } \pi_i(\mathbf{q}) = v,$$

$$(3) \pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v).$$

Así el corolario queda demostrado. \blacksquare

De manera similar al Teorema 1.1.1 se prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.1.3. Sean $J \subset \mathbb{N}$, finito o numerable, y puntos $u, v \in [0, 1]$ con $u < v$. Supongamos que existen $i \in J$ y un arco $\mathbf{B} \subset \prod_{j \in J} [0, 1]$ con un punto extremo \mathbf{x} , tal que $\pi_i(\mathbf{x}) = u$, $\overline{uv} \subset \pi_i(\mathbf{B})$ y $\pi_i(\mathbf{B}) \subset [0, u]$ o $\pi_i(\mathbf{B}) \subset [u, 1]$.

Entonces existe un arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ con un punto extremo \mathbf{x} , tal que $\pi_i(\mathbf{A}) = \overline{uv}$.

Observación 1.1.4. Dados un arco $C \subset [0, 1]^2$ y punto $(x, y) \in C$, tal que (x, y) no es punto extremo de C . Supongamos que existen arcos $C_1, C_2 \subset C$, tales que $C = C_1 \cup C_2$ y $C_1 \cap C_2 = \{(x, y)\}$.

Entonces dada $k \in \{1, 2\}$ se cumplen las siguientes propiedades:

$$(1) \text{ Si } \varrho_1(C_k) = \{x\}, \text{ entonces } \varrho_2(C_k) \neq \{y\}.$$

$$(2) \text{ Si } \varrho_2(C_k) = \{y\}, \text{ entonces } \varrho_1(C_k) \neq \{x\}.$$

Demostración.

Haremos la prueba del inciso (1), la prueba del inciso (2) se hace de manera similar.

$$(1) \text{ Si } \varrho_1(C_k) = \{x\}, \text{ entonces } \varrho_2(C_k) \neq \{y\}.$$

Supongamos $k = 1$. Supongamos por el contrario que $\varrho_2(C_1) = \{y\}$.

Como $\varrho_1(C_1) = \{x\}$ y $\varrho_2(C_1) = \{y\}$, entonces $C_1 = \{(x, y)\}$.

Por lo que $C = C_1 \cup C_2 = \{(x, y)\} \cup C_2 = C_2$, entonces C es un arco con un extremo (x, y) , lo cual contradice que (x, y) no es punto extremo de C .

La contradicción nace de suponer que $\varrho_2(C_1) = \{y\}$. Por tanto $\varrho_2(C_1) \neq \{y\}$.

Si $k = 2$ la prueba se hace de manera similar. \blacksquare

Lema 1.1.5. Dados puntos $a, b, r \in [0, 1]$ tales que $a < b$ y $r > 0$, y arcos $A, B \subset [0, 1]^2$ que cumplen las siguientes propiedades:

$$(a) \text{ Los extremos de } A \text{ son los puntos } (0, 0) \text{ y } (r, a),$$

$$(b) \text{ Los extremos de } B \text{ son los puntos } (0, 0) \text{ y } (r, b),$$

$$(c) A - \{(r, a)\} \subset [0, r] \times [0, 1]$$

$$(d) B - \{(r, b)\} \subset [0, r] \times [0, 1]$$

$$(e) A \cap B = \{(0, 0)\}.$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) Dado un punto $(x, y) \in A$ con $x > 0$, existe un punto $w \in [0, 1]$ tal que $y < w$ y el punto $(x, w) \in B$.

(2) Dado un punto $(x, y) \in A$ con $x > 0$, existe un punto $z \in [0, 1]$ tal que $z < x$ y el punto $(z, y) \in B$.

(3) Dado un punto $(z_0, w_0) \in B$ con $(z_0, w_0) \neq (0, 0)$, existe un punto $y_0 \in [0, 1]$ tal que $y_0 < w_0$ y el punto $(z_0, y_0) \in A$.

El Lema 1.1.5 se ilustra en la Figura 1.2.

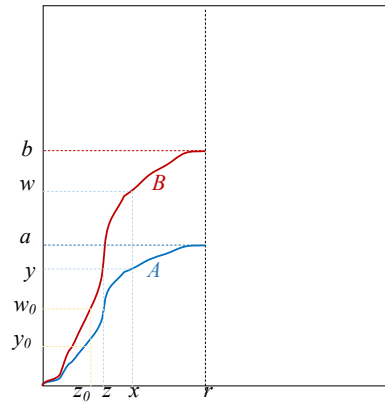


Figura 1.2:

1.1.2. Propiedades de triodos simples

Los siguientes resultados sobre triodos simples nos permitirán probar resultados importantes en los siguientes capítulos.

Lema 1.1.6. Sean X un continuo, $A, B \subset X$ arcos y $x, y, z \in X$ puntos, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) A tiene puntos extremos x e y ,
- (b) B tiene puntos extremos x y z ,
- (c) $A \cap B$ es no degenerado,
- (d) $z \notin A$,
- (e) $y \notin B$.

Entonces $A \cup B$ contiene un triodo simple.

Demostración.

Puesto que A y B son arcos, existen $f : [0, 1] \rightarrow A$ y $g : [0, 1] \rightarrow B$ homeomorfismos, tales que cumplen siguientes propiedades:

- (i) $f(0) = x = g(0)$,
- (ii) $f(1) = y$
- (iii) $g(1) = z$

Como $A \cap B$ es un conjunto cerrado de A y B , respectivamente, tenemos que $g^{-1}(A \cap B)$ es un subconjunto cerrado del intervalo $[0, 1]$.

Definamos $v = \sup g^{-1}(A \cap B)$. Como $g^{-1}(A \cap B)$ es un subconjunto compacto del intervalo $[0, 1]$, tenemos que v está bien definido y $v \in g^{-1}(A \cap B)$. Además como f es un homeomorfismo tenemos que $f^{-1}(g(v))$ es un punto, sea $u = f^{-1}(g(v))$.

Dado que $z \notin A$ y $y \notin B$, tenemos que $u, v < 1$. (Figura 1.3)

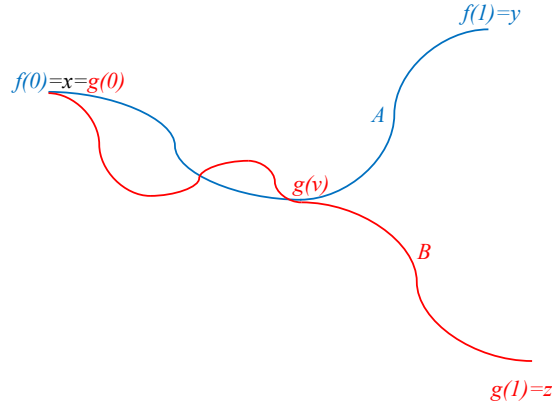


Figura 1.3:

Consideremos el triodo simple $T = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$. Probaremos que $f([0, 1]) \cup g([v, 1])$ es homeomorfo a T .

Definamos $\alpha : [-1, 0] \rightarrow [0, u]$, $\beta : [0, 1] \rightarrow [u, 1]$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow [v, 1]$ como siguen:

- $\alpha(t) = u(t + 1)$, para cada $t \in [-1, 0]$,
- $\beta(t) = (1 - u)t + u$, para cada $t \in [0, 1]$,
- $\gamma(t) = (1 - v)t + v$, para cada $t \in [0, 1]$.

Notemos que α , β y γ son funciones continuas y biyectivas.

Definamos $h : T \rightarrow f([0, 1]) \cup g([v, 1])$ como sigue

$$h(r, s) = \begin{cases} f(\alpha(r)) & \text{si } s = 0, r \in [-1, 0] \\ f(\beta(r)) & \text{si } s = 0, r \in [0, 1] \\ g(\gamma(s)) & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Afirmación 1 h está bien definida.

Prueba.

Sea (r, s) un punto en T , por definición de h si $r \neq 0$ o $s \neq 0$, entonces $h(r, s)$ tiene asignado un único valor.

En el caso en que $r = 0$ y $s = 0$, tenemos de la definición de h que

$$(i) \quad h(0, 0) = f(u(0 + 1)) = f(u) = g(v)$$

$$(ii) \quad h(0, 0) = f((1 - u)0 + u) = f(u) = g(v)$$

$$(iii) \quad h(0, 0) = f((1 - v)0 + v) = g(v)$$

De (i), (ii) y (iii) tenemos que $h(0, 0)$ tiene asignado un único valor.

En cualquier caso cada punto $(r, s) \in T$ tiene asignado un único valor bajo h , por tanto la función h está bien definida. \square

Afirmación 2 h es continua.

Prueba.

Notemos que $[-1, 1] \times \{0\}$ y $\{0\} \times [0, 1]$ son subconjuntos cerrados de T cuya unión es T y $h|_{[-1, 1] \times \{0\}} = f$ y $h|_{\{0\} \times [0, 1]} = g|_{[v, 1]}$ son funciones continuas, de lo anterior tenemos que las hipótesis de ([16], Theorem 7.6) se satisfacen, por tanto h es una función continua. \square

Puesto que f y g son homeomorfismos y α , β y γ son funciones biyectivas, tenemos que h es una función biyectiva.

Concluimos que h es un homeomorfismo. Por tanto $f([0, 1]) \cup g([v, 1])$ es homeomorfo a T .

Concluimos que $A \cup B$ contiene un triodo simple. \blacksquare

Corolario 1.1.7. Sean X un continuo, $x \in X$ y $A, B \subset X$ arcos, tales que x es punto extremo de A y B , $A \cap B \neq \{x\}$, $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Entonces $A \cup B$ contiene un triodo simple o una curva cerrada simple.

Observación 1.1.8. Dado $T \subset [0, 1]^2$ un triodo simple, entonces las imágenes $\varrho_1(T)$ y $\varrho_2(T)$ son no degeneradas.

Demostración.

Probaremos que $\varrho_1(T)$ es no degenerada, la prueba de que $\varrho_2(T)$ es no degenerada se hace de manera similar.

Como $T \subset [0, 1]^2$ es un triodo simple, existen arcos L_1, L_2 y L_3 contenidos en $[0, 1]^2$ y un punto $(a, b) \in T$ que satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, (a, b) es punto extremo del arco L_i ,
- (ii) para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, con $i \neq j$, $L_i \cap L_j = \{(a, b)\}$.

Definimos

$$u = \text{mín } \varrho_1(L_1 \cup L_2 \cup L_3) \quad v = \text{máx } \varrho_1(L_1 \cup L_2 \cup L_3).$$

Como $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ es un subcontinuo de M y ϱ_1 es una función continua tenemos que $\varrho_1(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ es un subconjunto compacto de $[0, 1]$. Por tanto u y v están bien definidos.

Probaremos que $u < v$.

Supongamos por el contrario que $u = v$. Como $(a, b) \in L_1 \cup L_2 \cup L_3$, tenemos que $a \in \varrho_1(L_1 \cup L_2 \cup L_3)$. Por lo que $u = a = v$.

Entonces para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, $\varrho_1(L_i) = \{a\}$, por tanto el arco $L_i \subset \{a\} \times [0, 1]$.

Además por la propiedad (i), tenemos que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, el punto (a, b) es punto extremo del arco L_i . Por lo que el arco $L_i \subset \{a\} \times [0, b]$ o $L_i \subset \{a\} \times [b, 1]$ y $(a, b) \in L_i$.

De lo anterior existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, tales que $L_i \cup L_j \subset \{a\} \times [0, b]$ o $L_i \cup L_j \subset \{a\} \times [b, 1]$ y $(a, b) \in L_i \cap L_j$. Entonces $L_i \subset L_j$ o $L_j \subset L_i$, esto contradice la propiedad (ii). La contradicción nace de suponer que $u = v$.

Por tanto $u < v$, concluimos que $\varrho_1(T)$ es no degenerada. ■

Teorema 1.1.9. Sean $J \subset \mathbb{N}$, finito o numerable, y puntos $u, v \in [0, 1]$ con $u < v$. Supongamos que existen $i \in J$ y un triodo simple $\mathbf{T} \subset \prod_{i \in J} [0, 1]$ con vértice \mathbf{v}_0 , tales que cumple las siguientes propiedades:

- (a) $\pi_i(\mathbf{T}) = [u, v]$,
- (b) $\pi_i(\mathbf{v}_0) > u$, $(\pi_i(\mathbf{v}_0) < v)$.

Entonces existen funciones continuas e inyectivas $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{T}$ tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (1) $f(t) = g(t)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
- (2) $f((\frac{1}{2}, 1]) \cap g((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$.
- (3) $f_i, g_i : [0, 1] \rightarrow [u, v]$, (donde $f_i = \pi_i \circ f$ y $g_i = \pi_i \circ g$)
- (4) $f_i(0) = u = g_i(0)$.

Demostración.

Por definición de triodo simple existen arcos L_1 , L_2 y L_3 contenidos en \mathbf{T} que satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, el punto \mathbf{v}_0 es punto extremo del arco L_i ,
- (ii) para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, con $i \neq j$, $L_i \cap L_j = \{\mathbf{v}_0\}$,
- (iii) $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \mathbf{T}$

Como $u \in \pi_i(\mathbf{T})$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L_1 \cap \pi_i^{-1}(u) \neq \emptyset$. Por lo que existe un punto $\mathbf{y} \in L_1$, tal que $\pi_i(\mathbf{y}) = u$.

Definimos $L_0 \subset L_1$ el arco con puntos extremos \mathbf{v}_0 e \mathbf{y} . También definimos $L = L_0 \cup L_2$ y $J = L_0 \cup L_3$. Notemos que L y J son arcos y $L \cap J = L_0$. Por lo que existen funciones continuas e inyectivas $f : [0, 1] \rightarrow L$, $g : [0, 1] \rightarrow J$, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (iii) $f(0) = \mathbf{y} = g(0)$,
- (iv) $f(\frac{1}{2}) = \mathbf{v}_0 = g(\frac{1}{2})$,
- (v) para cada punto $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(t) = g(t)$.
- (vi) $f((\frac{1}{2}, 1]) \cap g((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$. (Figura 1.4)

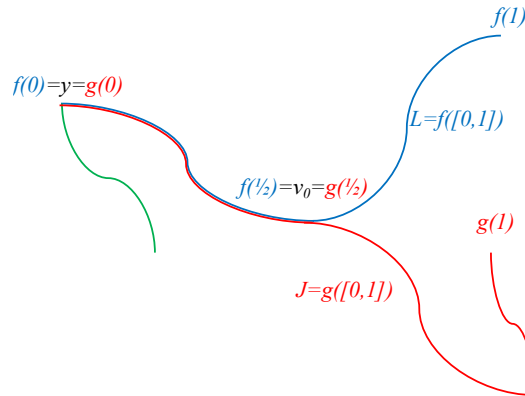


Figura 1.4:

Notenemos que $f_i, g_i : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ son funciones continuas, tales que $f_i(0) = \varrho_i(f(0)) = \pi_i(\mathbf{y}) = u$ y $g_i(0) = \varrho_i(g(0)) = \pi_i(\mathbf{y}) = u$.

Por tanto f y g así definidas satisfacen las propiedades (1)-(4) y teorema queda demostrado. ■

1.1.3. Propiedades de continuos localmente conexos

Observación 1.1.10. Sean X un subcontinuo de $[0, 1]^2$ y un punto $t \in [0, 1]$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) Si $\varrho_1(X) \cap [0, t) \neq \emptyset$ y $\varrho_1(X) \cap (t, 1] \neq \emptyset$, entonces $\varrho_1(X) \cap \{t\} \neq \emptyset$.
- (2) Si $\varrho_2(X) \cap [0, t) \neq \emptyset$ y $\varrho_2(X) \cap (t, 1] \neq \emptyset$, entonces $\varrho_2(X) \cap \{t\} \neq \emptyset$.

Dado un continuo X y conjuntos $U, V \subset X$ no vacíos, decimos que U y V son una separación de X , ($X = U|V$), si $X = U \cup V$, $\bar{U} \cap V = \emptyset$ y $U \cap \bar{V} = \emptyset$. Además si A, B y C son subconjuntos no vacíos de X , decimos que C separa a A y a B en X , si existen conjuntos no vacíos $U, V \subset X$, tales que $X - C = U|V$, $A \subset U$ y $B \subset V$.

Lema 1.1.11. Sea X un subconjunto cerrado y no vacío de $[0, 1]^2$, dados $A, B \subset X$ cerrados, no vacíos con las siguientes propiedades:

- (a) $A \subset (\{0\} \times [0, 1]) \cap X$,
- (b) $B \subset (\{1\} \times [0, 1]) \cap X$.

Si $r_0 = \text{mín}(\varrho_2(A))$, $r_1 = \text{máx}(\varrho_2(A))$, $s_0 = \text{mín}(\varrho_2(B))$, $s_1 = \text{máx}(\varrho_2(B))$.

- (c) $(\{0\} \times [r_0, r_1]) \cap X = A$,
- (d) $(\{1\} \times [s_0, s_1]) \cap X = B$,
- (e) ninguna componente conexa de X interseca tanto a A como a B .

Entonces existe un subcontinuo U_0 de $[0, 1]^2$ tal que cumple las siguientes propiedades:

- (1) U_0 separa a A y B ,
- (2) $U_0 \cap X = \emptyset$,

Si además definimos $\Lambda = (\{0\} \times [r_1, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [s_1, 1])$ y $\Gamma = (\{0\} \times [0, r_0]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, s_0])$, entonces U_0 también cumple las siguientes propiedades:

- (3) $U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}) \neq \emptyset$ y
- (4) $U_0 \cap (\Gamma - \{(0, r_0), (1, s_0)\}) \neq \emptyset$.

En la Figura 1.5 se ilustra el Lema 1.1.11.

Demostración.

Definamos $A' = \{0\} \times [r_0, r_1]$, $B' = \{1\} \times [s_0, s_1]$ y $E = X \cup A' \cup B'$.

De (a) y (b) tenemos que $A \subset (\{0\} \times [0, 1]) \cap X$ y $B \subset (\{1\} \times [0, 1]) \cap X$, respectivamente, por lo que $A \subset A'$ y $B \subset B'$, además como X es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$ y los conjuntos A' y B' son subconjuntos cerrados de $[0, 1]^2$, obtenemos que E es un subconjunto cerrado y por tanto compacto de $[0, 1]^2$.

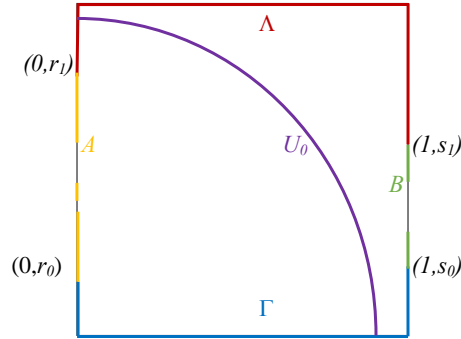


Figura 1.5: Lema1.1.11

Como A' y B' son subconjuntos cerrados ajenos de E y estamos suponiendo que ninguna componente conexa de X interseca a A y a B simultáneamente, entonces ninguna componente conexa de X interseca a A' y a B' simultáneamente.

De lo contrario existe D una componente de X que interseca tanto a A' como a B' , entonces existen puntos $(0, r) \in A' \cap D$ y $(0, s) \in B' \cap D$. Como $(0, r) \in A' \cap D \subset A' \cap X \subset (\{0\} \times [r_0, r_1]) \cap X$ y por (c) $(\{0\} \times [r_0, r_1]) \cap X = A$, entonces $(0, r) \in A$; de manera simialr $(1, s) \in B$. Por tanto D es una componente de X que interseca simultáneamente a A y a B , lo cual contradice (e). Por tanto ninguna componente conexa de X interseca tanto a A' como a B' .

Entonces por el lema del cable cortado [13, Theorem 5.2, p. 72] existen subconjuntos cerrados H y K de E , tales que $E = H \cup K$, $H \cap K = \emptyset$, $A' \subset H$ y $B' \subset K$.

Como E es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$ y H y K son subconjuntos cerrados ajenos de E , tenemos que existen subconjuntos abiertos ajenos U y V de $[0, 1]^2$ tales que $U \cap V = \emptyset$, $H \subset U$ y $K \subset V$.

Notemos que $Fr(U)$ separa a H y K en $[0, 1]^2$, pues $H \subset U$ y $K \subset [0, 1]^2 - \bar{U}$, además $Fr(U) \cap E = \emptyset$. Entonces de [11, §57, III, Theorem 2, p. 438], tenemos que existe un subcontinuo $U_0 \subset Fr(U)$, tal que U_0 separa a A' y B' en $[0, 1]^2$. Notenemos que U_0 es un subcontinuo de $[0, 1]^2$, pues $Fr(U)$ es un subconjunto compacto de $[0, 1]^2$ y U_0 es un subcontinuo de $Fr(U)$.

Probaremos que U_0 satisface las propiedades (1)-(4) del teorema.

(1) U_0 separa a A y B .

Como U_0 separa a A' y B' , $A \subset A'$ y $B \subset B'$, tenemos que en particular U_0 separa a A y B , con lo cual el inciso (1) queda demostrado.

(2) $U_0 \cap X = \emptyset$.

Como $U_0 \subset Fr(U)$ y la $Fr(U)$ separa a H y K , entonces $U_0 \cap H = \emptyset$ y $U_0 \cap K = \emptyset$, además $X = H \cup K$ por lo que $U_0 \cap X = \emptyset$, así el inciso (2) queda demostrado.

Recordemos que por definición

$$\Lambda = (\{0\} \times [r_1, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [s_1, 1])$$

y

$$\Gamma = (\{0\} \times [0, r_0]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, s_0])$$

Notemos que Λ y Γ son arcos con puntos extremos $(0, r_0)$, $(0, r_1)$ y $(1, s_0)$, $(1, s_1)$, respectivamente.

(3) $U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}) \neq \emptyset$.

Como Λ es un arco que intersecta tanto a A' como a B' únicamente en sus puntos extremos y U_0 separa a A' y a B' en $[0, 1]^2$, entonces por el lema del cable cortado [13, Theorem 5.2, p. 72] se cumple que $U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}) \neq \emptyset$, por tanto el inciso (3) queda probado.

La prueba del inciso (4) se hace de forma similar a la prueba del inciso (3). ■

Lema 1.1.12. Sean X un continuo, $p \in X$ y U un conjunto abierto de X , tales que $p \in U$. Supongamos que X no es conexo en pequeño en el punto p . Entonces existen p_1, p_2, \dots puntos de U y C, C_1, C_2, \dots componentes de U tales que cumplen la siguientes propiedades:

- (1) $p \in C$,
- (2) para cada $i \in \mathbb{N}$, $p_i \in C_i$,
- (3) para todo $i \in \mathbb{N}$, $C \cap C_i = \emptyset$,
- (4) para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \emptyset$,
- (5) la sucesión de puntos $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge al punto p .

En la Figura 1.6 se ilustra el Lema 1.1.12.

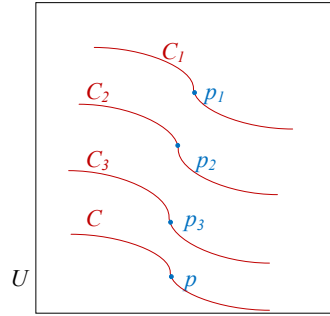


Figura 1.6: Lema1.1.12

Demostración.

Como el continuo X no es conexo en pequeño en el punto p tenemos que:

(i) para toda vecindad V de p contenida en U , V no es conexa.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $Cl(B_\varepsilon(p)) \subset U$. Sea C la componente de U que contiene a p (de la definición de C se cumple (1)). Como C es un conjunto conexo que contiene a p por la propiedad (i) tenemos que $p \notin Int(C)$, por tanto $B_\varepsilon(p) \not\subset C$.

Construiremos inductivamente una sucesión de números naturales $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tales que $n_1 < n_2 < \dots$ y las sucesiones de puntos $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y componentes $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cumplan las propiedades (2)-(5).

Para $i = 1$, sea $n_1 > \frac{1}{\varepsilon}$ un número natural, tal que $Cl(B_{\frac{1}{n_1}}(p)) \subset U$.

Por la propiedad (i), tenemos que $B_{\frac{1}{n_1}}(p) \not\subset C$, por lo que existe un punto $p_1 \in (B_{\frac{1}{n_1}}(p) - C)$. Como $B_{\frac{1}{n_1}}(p) \subset B_\varepsilon(p) \subset U$, tenemos que el punto $p_1 \in U$.

Sea C_1 la componente de $U - C$ que contiene al punto p_1 , notemos que para $i = 1$ se cumplen las propiedades (3), $C \cap C_1 = \emptyset$ y (2), $p_1 \in C_1$, además se cumple que $d(p, p_1) < \frac{1}{n_1}$.

Supongamos que hemos construido un conjunto finito $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ de números naturales, un conjunto finito $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ de puntos y un conjunto finito $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de componentes de U que cumplen las propiedades (2)-(5) y que además se cumple que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $d(p, p_i) < \frac{1}{n_i}$.

Tenemos que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ la componente C_j es un con-

junto cerrado de U , entonces $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ es un conjunto cerrado de U , como U es un conjunto abierto de X , entonces $U - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k)$ es un conjunto abierto de X , por lo que existe un número natural $n_{k+1} > n_k$, tal que $Cl(B_{\frac{1}{n_{k+1}}}(p)) \subset (U - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k))$.

Por la propiedad (i) $B_{\frac{1}{n_{k+1}}}(p) \not\subset C$, por lo que existe un punto $p_{k+1} \in (B_{\frac{1}{n_{k+1}}}(p) - C)$. Como $B_{\frac{1}{n_{k+1}}}(p) \subset B_\varepsilon(p) \subset U$, tenemos que el punto $p_{k+1} \in U$.

Sea C_{k+1} la componente de $U - (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k)$ que contiene al punto p_{k+1} , notemos que para $i = k + 1$ se cumple la propiedad (3), $C \cap C_{k+1} = \emptyset$ y (2) $p_{k+1} \in C_{k+1}$, además se cumple que $d(p, p_{k+1}) < \frac{1}{n_{k+1}}$.

Por construcción $C_{k+1} \cap (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k) = \emptyset$, y por hipótesis de inducción para $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ por lo que se cumple la propiedad (4), para $i, j \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$, si $i \neq j$ entonces $C_i \cap C_j = \emptyset$.

Hemos contruido sucesiones que satisfacen la propiedades (2)-(4).

La propiedad (5), $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$, es consecuencia de que $d(p, p_{k+1}) < \frac{1}{n_{k+1}}$. ■

El siguiente teorema aparece en [15, (iii), p.342]. A continuación presentamos una prueba diferente de este teorema.

Teorema 1.1.13. [15, (iii), p.342] Sean V_1 y V_2 subconjuntos densos del intervalo $[0, 1]$ y E un subconjunto compacto de $[0, 1]^2$, tales que para cada punto $\alpha \in V_1$ y para cada punto $\beta \in V_2$ se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) El conjunto $(\{\alpha\} \times [0, 1]) \cap E$ tiene un número finito de componentes.
 - (b) El conjunto $([0, 1] \times \{\beta\}) \cap E$ tiene un número finito de componentes.
- Entonces cada componente de E es localmente conexa.

Demostración.

Sea A una componente de X . Si A es una componente degenerada el resultado es inmediato.

Supongamos que A es una componente no degenerada y que A no es localmente conexa, entonces por [[13], Definition 8.1, pag. 119] existe un punto $p \in A$, tal que A no es conexa en pequeño en el punto p .

Sea U un conjunto abierto de A , tal que $p \in U$, por el Lema 1.1.12 tenemos que existen puntos $p_1, p_2, \dots \in U$ y C, C_1, C_2, \dots componentes de U , tales que cumplen la siguientes propiedades:

- (1) $p \in C$,
- (2) para cada $i \in \mathbb{N}$, $p_i \in C_i$,

- (3) para todo $i \in \mathbb{N}$, $C \cap C_i = \emptyset$,
- (4) para todo $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$, $C_i \cap C_j = \emptyset$,
- (5) la sucesión de puntos $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge al punto p .

Sea V un conjunto abierto de A tal que $p \in V \subset Cl_A(V) \subset U$.

Por la propiedad (5) existe un número $N \in \mathbb{N}$, tal que el punto $p_n \in V$ para todo $n > N$.

Definamos E_n la componente de $C_n \cap Cl_A(V)$ que contiene a p_n , para todo $n > N$.

Por [[13], Theorem 5.4, pag. 73] tenemos que $E_n \cap Fr_A(V) \neq \emptyset$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \cap A \subset V$. Como V_1 y V_2 son conjuntos densos del intervalo $[0, 1]$, entonces existen números $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$, tales que $(\alpha_1, \alpha_2) \times (\beta_1, \beta_2) \subset B_\varepsilon(p)$, y que cumplan lo siguiente:

- Si $\varrho_1(p) = 0$, $\alpha_2 \in V_1$, $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_1 = 0$.
- Si $0 < \varrho_1(p) < 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1$ y $\alpha_1 < \varrho_1(p) < \alpha_2$.
- Si $\varrho_1(p) = 1$, $\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_1 < 1$ y $\alpha_2 = 1$.
- Si $\varrho_2(p) = 0$, $\beta_2 \in V_2$, $\beta_2 > 0$ y $\beta_1 = 0$.
- Si $0 < \varrho_2(p) < 1$, $\beta_1, \beta_2 \in V_2$ y $\beta_1 < \varrho_2(p) < \beta_2$.
- Si $\varrho_2(p) = 1$, $\beta_1 \in V_2$, $\beta_1 < 1$ y $\beta_2 = 1$.

Definamos $W = (\alpha_1, \alpha_2) \times (\beta_1, \beta_2)$ (Figura 1.7). Notemos que el punto $p \in W$. Continuaremos la prueba para el Caso en que $\varrho_1(p), \varrho_2(p) \in (0, 1)$. La prueba de los otros casos se hace de manera similar.

Afirmación 1 Existe un número $M \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > M$, $E_n \cap Fr_{[0,1]^2}(W) \neq \emptyset$.

Prueba.

Por la propiedad (5) existe un número $M \in \mathbb{N}$, tal que $M > N$ y para todo $n > M$, el punto $p_n \in W$. Como el punto $p_n \in E_n$, tenemos que para todo $n > M$, el punto $p_n \in E_n \cap W$, por lo que

- (i) para todo $n > M$, $E_n \cap W \neq \emptyset$.

Por otro lado como $(W \cap A) \subset V \subset Cl_A(V)$ y $E_n \cap Fr_A(V) \neq \emptyset$, entonces

- (ii) para todo $n > M$, $E_n \cap ([0, 1]^2 - W) \neq \emptyset$.

De (i) y (ii), tenemos que para todo $n > M$, $E_n \cap Fr_{[0,1]^2}(W) \neq \emptyset$. \square

Afirmación 2 $Fr_{[0,1]^2}(W) \cap A$ tiene un número finito de componentes.

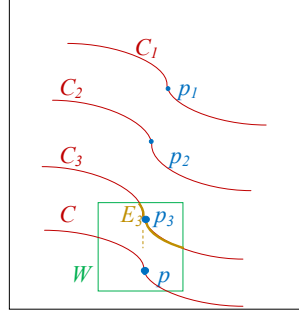


Figura 1.7:

Prueba.

Tenemos que $Fr_{[0,1]^2}(W) = (\{\alpha_1\} \times [0, 1]) \cup (\{\alpha_2\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{\beta_1\}) \cup ([0, 1] \times \{\beta_2\})$.

Además de la hipótesis (a) tenemos que para cada punto $\alpha \in V_1$ el conjunto $(\{\alpha\} \times [0, 1]) \cap E$ tiene un número finito de componentes. Como $\alpha_1, \alpha_2 \in V_1$, por hipótesis los conjuntos $(\{\alpha_1\} \times [0, 1]) \cap E$, $(\{\alpha_2\} \times [0, 1]) \cap E$, tienen un número finito de componentes, respectivamente.

De manera similar usando la hipótesis (b) obtenemos que los conjuntos $([0, 1] \times \{\beta_1\}) \cap E$, $([0, 1] \times \{\beta_2\}) \cap E$ tienen un número finito de componentes, respectivamente.

Como los intervalos $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\beta_1, \beta_2]$ son conexos y A es un subconjunto conexo de E , obtenemos que los conjuntos $(\{\alpha_1\} \times [\beta_1, \beta_2]) \cap A$, $(\{\alpha_2\} \times [\beta_1, \beta_2]) \cap A$, $([\alpha_1, \alpha_2] \times \{\beta_1\}) \cap A$ y $([\alpha_1, \alpha_2] \times \{\beta_2\}) \cap A$ tienen un número finito de componentes, respectivamente.

Concluimos que $Fr_{[0,1]^2}(U) \cap A$ tiene un número finito de componentes. \square

Recordemos que por la Afirmación 1 para todo número natural $n > M$, se cumple que $E_n \cap Fr_{[0,1]^2}(W) \neq \emptyset$, además por definición $E_n \subset V \subset A$, por lo que $(E_n \cap Fr_{[0,1]^2}(W)) \subset (E_n \cap Fr_{[0,1]^2}(W) \cap A)$, por tanto para todo $n > M$, $E_n \cap (Fr_{[0,1]^2}(W) \cap A) \neq \emptyset$.

Por otro lado de la Afirmación 2, tenemos que $Fr_{[0,1]^2}(U) \cap A$ tiene un número finito de componentes, entonces existen números naturales $n_1, n_2 > M$ y B una componente de $Fr_{[0,1]^2}(W) \cap A$ tales que $E_{n_1} \cap B \neq \emptyset$ y $E_{n_2} \cap B \neq \emptyset$.

Como E_{n_1} y E_{n_2} son componentes de V y B es un conjunto conexo de $(Fr_{[0,1]^2}(W) \cap A) \subset V$ tenemos que $B \subset E_{n_1}$ y $B \subset E_{n_2}$.

Recordemos que por definición $E_{n_1} \subset C_{n_1}$ y $E_{n_2} \subset C_{n_2}$, por lo que $B \subset C_{n_1} \cap C_{n_2}$, lo anterior contradice la propiedad (3).

Por tanto A es una componente localmente conexa y el teorema queda demostrado. ■

Corolario 1.1.14. Sea E un subconjunto compacto de $[0, 1]^2$. Si para cada punto $x \in [0, 1]$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (a) El conjunto $(\{x\} \times [0, 1]) \cap E$ tiene un número finito de componentes.
 - (b) El conjunto $([0, 1] \times \{x\}) \cap E$ tiene un número finito de componentes.
- Entonces cada componente de E es localmente conexa.

Demostración.

Considerando $V_1 = V_2 = [0, 1]$ el resultado es inmediato del Teorema 1.1.13. ■

Lema 1.1.15. Sean $B \subset [0, 1]$ un conjunto totalmente desconexo, $n \in \mathbb{N}$ y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas en $[0, 1] - B$. Supongamos que $M = Graf(\beta_1) \cup Graf(\beta_2) \cup \dots \cup Graf(\beta_n) \cup (B \times [0, 1])$. (Figura 1.8)

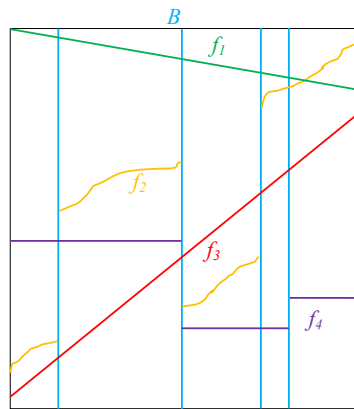


Figura 1.8: Lema1.1.11

Entonces dada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ una función continua e inyectiva, para cada $t \in [0, 1]$ se satisface que $\alpha_1^{-1}(t)$ ($\alpha_1 = \varrho_1 \circ \alpha$) tiene a lo mas $2n$ componentes.

Demostración.

Sea $t \in [0, 1]$

Caso 1 $t \notin \varrho_1(\alpha[0, 1])$.

Tenemos que $\alpha_1^{-1}(t) = \emptyset$. Por tanto $\alpha_1^{-1}(t)$ no tiene componentes.

Caso 2 $t \in \varrho_1(\alpha[0, 1])$.

Caso 2.1 $t \in (\varrho_1(\alpha[0, 1]) - B)$.

Sea $r \in \alpha_1^{-1}(t)$, tenemos que $\varrho_1(\alpha(r)) = t$, como $t \notin B$ y $\alpha(r) \in M$, de la definición de M , tenemos que existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $\alpha(r) \in \text{Graf}(\beta_i)$. De lo anterior obtenemos que $\alpha(r) = (t, \beta_i(t))$, por lo que

$$\alpha_1^{-1}(t) = \{r \in [0, 1] : \alpha(r) = (t, \beta_i(t)), \text{ para alguna } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Como para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, β_i es función y α es una función inyectiva tenemos que $|\alpha_1^{-1}(t)| \leq n$. Por tanto $\alpha_1^{-1}(t)$ tiene a lo más n componentes.

Caso 2.2 $t \in (\varrho_1(\alpha[0, 1]) \cap B)$.

Notemos que, si $\alpha([0, 1]) \subset \{t\} \times [0, 1]$, entonces $\alpha_1^{-1}(t) = [0, 1]$ y por tanto $\alpha_1^{-1}(t)$ tiene una componente.

Supongamos que $\alpha([0, 1]) \not\subset \{t\} \times [0, 1]$ y que $\alpha_1^{-1}(t)$ tiene al menos $2n+1$ componentes.

Sean $C_1, C_2, \dots, C_{2n+1}$ componentes de $\alpha_1^{-1}(t)$. Como las componentes son conjuntos cerrados de $\alpha_1^{-1}(t)$ y $\alpha_1^{-1}(t)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]$, tenemos que C_i es un subconjunto cerrado del intervalo $[0, 1]$, por lo que existen puntos $a_1, b_1, a_2, \dots, b_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n+1} \in [0, 1]$ tales que $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_{2n+1} \leq b_{2n+1}$ y $C_i = [a_i, b_i]$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, 2n+1\}$.

Afirmación 1 Para cada $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ se cumple que $\alpha[b_i, a_{i+1}] \not\subset \{t\} \times [0, 1]$.

Prueba.

Sea $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$, supongamos por el contrario que $\alpha[b_i, a_{i+1}] \subset \{t\} \times [0, 1]$, entonces el intervalo $[b_i, a_{i+1}] \subset \alpha_1^{-1}(t)$.

Puesto que los intervalos $[a_i, b_i], [a_{i+1}, b_{i+1}] \subset \alpha_1^{-1}(t)$, entonces el intervalo $[a_i, b_{i+1}] \subset \alpha_1^{-1}(t)$.

Como $b_i < a_{i+1}$ tenemos que $C_i \not\subset [a_i, b_{i+1}]$. Lo anterior contradice que C_i es componente de $\alpha_1^{-1}(t)$. Como i fue arbitrario concluimos que la Afirmación 1 es cierta. \square

Definamos $J = \{i \in \{1, 2, \dots, 2n\} : \varrho_1(\alpha([b_i, a_{i+1}])) \cap [0, t) \neq \emptyset\}$ y $K = \{i \in \{1, 2, \dots, 2n\} : \varrho_1(\alpha([b_i, a_{i+1}])) \cap (t, 1] \neq \emptyset\}$. Como $\alpha([0, 1]) \not\subset \{t\} \times [0, 1]$

entonces alguno de los conjuntos J o K es no vacío

Afirmación 2

(2.a) Si $J \neq \emptyset$, entonces existe un punto $y \in [0, t] - B$ tal que para cada $i \in J$, $|\alpha([b_i, a_{i+1}]) \cap (\{y\} \times [0, 1])| \geq 2$.

(2.b) Si $K \neq \emptyset$, entonces existe un punto $z \in (t, 1] - B$ tal que para cada $i \in K$, $|\alpha([b_i, a_{i+1}]) \cap (\{z\} \times [0, 1])| \geq 2$.

Prueba.

Haremos la prueba del inciso (2.a), la prueba del inciso (2.b) se hace de manera similar.

Definamos para cada $i \in J$, $y_i = \min(\varrho_1(\alpha([b_i, a_{i+1}])))$, como la función α es continua y el intervalo $[b_i, a_{i+1}]$ es compacto el punto y_i está bien definido. Además por la definición de J , tenemos que $\varrho_1(\alpha([b_i, a_{i+1}]) \cap [0, t]) \neq \emptyset$, por lo que $y_i < t$.

Definamos $y' = \max\{y_i : i \in J\}$, como J es un conjunto finito el punto y' está bien definido, como para cada $i \in J$, tenemos que $y_i < t$. Entonces $y' < t$.

Como el conjunto B es totalmente desconexo, y $[y', t]$ es un conjunto conexo no degenerado existe un punto $y \in (y', t) - B$. Como $y_i \leq y'$ para cada $i \in J$, tenemos que $y \in \varrho_1(\alpha([b_i, a_{i+1}]))$ para cada $i \in J$.

Sea $r_i \in [b_i, a_{i+1}]$ tal que $\varrho_1(\alpha(r_i)) = y'$. Como el intervalo $[b_i, r_i]$ es conexo y $[y', t] \subset \varrho_1(\alpha([b_i, r_i]))$, entonces existe punto $u_i \in [b_i, r_i]$, tal que $\varrho_1(\alpha(u_i)) = y$. De manera similar existe un punto $v_i \in [r_i, a_{i+1}]$, tal que $\varrho_1(\alpha(v_i)) = y$, por tanto $|\alpha([b_i, a_{i+1}]) \cap (\{y\} \times [0, 1])| \geq 2$ para cada $i \in J$.

Hemos probado el inciso (2.a). El inciso (2.b) se prueba de manera similar, por tanto la Afirmación 2 se cumple. \square

Sean $y, z \in [0, 1] - B$ como en la Afirmación 2, es decir, para cada $i \in J$ se cumple que $|\alpha([b_i, a_{i+1}]) \cap (\{y\} \times [0, 1])| \geq 2$ y para cada $i \in K$ se cumple que $|\alpha([b_i, a_{i+1}]) \cap (\{z\} \times [0, 1])| \geq 2$. (Alguno de los dos puntos puede no existir, consideramos el que exista.)

De lo anterior tenemos que para cada $i \in J$ se cumple que $|\alpha_1^{-1}(y) \cap [b_i, a_{i+1}]| \geq 2$ y para cada $i \in K$ se cumple que $|\alpha_1^{-1}(z) \cap [b_i, a_{i+1}]| \geq 2$

Como $|J \cup K| = 2n$ de lo anterior tenemos que

(i) $|\alpha^{-1}(y) \cup \alpha^{-1}(z)| \geq 4n$.

Por otro lado por el Caso 2.1 $|\alpha^{-1}(y)| \leq n$ y $|\alpha^{-1}(z)| \leq n$, por lo que

(ii) $|\alpha^{-1}(y) \cup \alpha^{-1}(z)| \leq 2n$.

De (i) y (ii) tenemos una contradicción. La contradicción nace de suponer que $\alpha_1^{-1}(t)$ tiene $2n + 1$ componentes. Por tanto $\alpha_1^{-1}(t)$ tiene a lo más $2n$ componentes. \blacksquare

1.2. Límites inversos generalizados

En el año 2003 Williams S. Mahavier introduce el concepto de límite inverso de un subconjunto cerrado del cuadrado unitario. En esta sección recordaremos esta definición, así como algunos ejemplos y propiedades de éste. Comenzaremos con algunas definiciones y notación.

Al producto numerable del intervalo $[0,1]$, se le conoce como el *cubo de Hilbert*, denotaremos a este espacio como $[0,1]^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} [0,1]$. Representaremos a un elemento de $[0,1]^\infty$, como (x_1, x_2, \dots) , con $x_i \in [0,1]$, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Consideraremos a $[0,1]^\infty$ con la métrica

$$d((x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}$$

para cualesquiera $(x_1, x_2, x_3, \dots), (y_1, y_2, y_3, \dots) \in [0,1]^\infty$.

Dado M un subconjunto cerrado de $[0,1]^2$, para el cual $\varrho_1(M) = [0,1] = \varrho_2(M)$, se definió el *límite inverso de M* como el siguiente conjunto:

$$\varprojlim M = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) \in [0,1]^\infty : \text{para cada } i \in \mathbb{N}, (x_{i+1}, x_i) \in M\}.$$

Además para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$G_k = \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in [0,1]^{k+1} : \text{para } 1 \leq i \leq k, (x_{i+1}, x_i) \in M\}.$$

Denotaremos a un punto $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in \varprojlim M$ por \mathbf{x} y a un punto $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in G_k$ por \mathbf{x} . A los subconjuntos de $\varprojlim M$ y G_k los denotaremos con el mismo tipo de letra que a los puntos de estos conjuntos.

Notemos que este concepto generaliza a los límites inversos usuales (con funciones univaluadas), pues dada una función continua $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, si definimos $M = \{(x, y) \in [0,1] : y = f(x)\}$, entonces $\varprojlim M = \varprojlim \{f, [0,1]\}$.

A lo largo del trabajo utilizaremos la siguiente notación para funciones. Sean $j, k \in \mathbb{N}$ y funciones $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^\infty$, $\mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^k$, $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, definimos $f_j(t) = \pi_j(\mathbf{f}(t))$, $g_j(t) = \pi_j(\mathbf{g}(t))$, $h_j = \varrho_j(h(t))$. Entonces las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y h son de la forma $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots)$, $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_k(t))$ y $h(t) = (h_1(t), h_2(t))$.

Las siguientes observaciones las estaremos utilizando en capítulos posteriores.

Observación 1.2.1. Dado M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, $\vartheta : M \rightarrow G_1$, dada por $\vartheta((x, y)) = (y, x)$, para cada $(x, y) \in M$, es un homeomorfismo entre G_1 y M .

Observación 1.2.2. Dado M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función $\pi_{1,k+1} : \varprojlim M \rightarrow G_k$ es una $\frac{1}{2^k}$ -función.

Demostración.

Sea $\mathbf{z} \in \varprojlim M$, veremos que $diam(\pi_{1,k}^{-1}(\pi_{1,k}(\mathbf{z}))) < \frac{1}{2^k}$. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \pi_{1,k}^{-1}(\pi_{1,k}(\mathbf{z}))$, notemos que \mathbf{u} y \mathbf{v} son de la forma $(z_1, \dots, z_{k+1}, u_{k+2}, u_{k+3}, \dots)$ y $(z_1, \dots, z_{k+1}, v_{k+2}, v_{k+3}, \dots)$, respectivamente.

Por lo cual, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|u_i - v_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{|z_i - z_i|}{2^i} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{|u_i - v_i|}{2^i} \\ &\leq \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

Como esto pasa para cualesquiera puntos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \pi_{1,k}^{-1}(\pi_{1,k}(\mathbf{z}))$, concluimos que $diam(\pi_{1,k}^{-1}(\pi_{1,k}(\mathbf{z}))) < \frac{1}{2^k}$. Por tanto $\pi_{1,k+1} : \varprojlim M \rightarrow G_k$ es una $\frac{1}{2^k}$ -función. ■

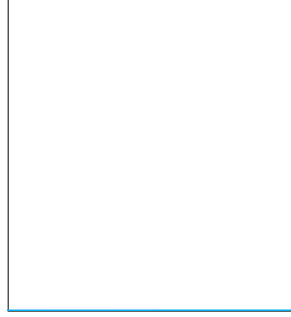
A continuación daremos algunos ejemplos de estos límites inversos.

Ejemplo 1.2.3. [[5], Example 1.2, pag 5] Sea $M = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ (Figura 1.9), $\varprojlim M$ es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Ejemplo 1.2.4 ([5], Example 2.2, pag 18). Sea $M = \{(x, 0) \in [0, 1]^2 : x \in [0, 1]\} \cup \{(1, y) \in [0, 1]^2 : y \in [0, 1]\}$. (Figura 1.10), [5, Example 2.2] es homomorfo a un arco.

A partir de este momento M denotará a un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$ tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$.

Observación 1.2.5. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Se cumple que $\sigma|_{\varprojlim M}$ es una función suprayectiva de $\varprojlim M$ sobre $\varprojlim M$.

Figura 1.9: M

Demostración.

De la definición $\varprojlim M$ dado un punto $(x_1, x_2, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que el punto (x_2, x_3, \dots) , satisface que para cada $i > 1$ el punto $(x_{i+1}, x_i) \in M$, por lo que el punto $(x_2, x_3, \dots) \in \varprojlim M$, entonces $\sigma((x_1, x_2, \dots)) \in \varprojlim M$.

Veamos ahora que $\sigma|_{\varprojlim M}$ es una función suprayectiva de $\varprojlim M$ sobre $\varprojlim M$.

Sea (x_1, x_2, \dots) un punto en $\varprojlim M$, como $x_1 \in [0, 1]$ y $\varrho_1(M) = [0, 1]$, existe un punto $x_0 \in [0, 1]$, tal que $(x_1, x_0) \in M$.

De la definición de $\varprojlim M$ tenemos que el punto (x_0, x_1, x_2, \dots) pertenece a $\varprojlim M$.

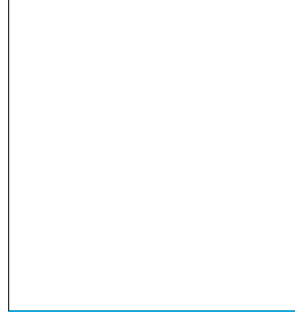
Como $\sigma((x_0, x_1, x_2, \dots)) = (x_1, x_2, \dots)$ se cumple que $\sigma|_{\varprojlim M}$ es una función suprayectiva $\varprojlim M$ sobre $\varprojlim M$. ■

Teorema 1.2.6. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $u \in [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe \mathbf{X} un subcontinuo de G_k tal que $\varrho_{k+1}(\mathbf{X}) = \{u\}$ y que $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \varprojlim M : \pi_1(\mathbf{x}) = u\} \neq \emptyset$.

Entonces para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = \{(z, x_2, x_3, \dots) \in [0, 1]^\infty : z \in \mathbf{X}\}$ es un subcontinuo del $\varprojlim M$ homeomorfo a \mathbf{X} que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}$,
- (2) $\sigma^k(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x}\}$.

Demostración.

Figura 1.10: M

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, veamos que $\mathbf{A}_{\mathbf{x}} \subset \varprojlim M$. Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{A}_{\mathbf{x}}$, probaremos que para cada $i \in \mathbb{N}$, el punto $(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) \in M$.

Notemos primero que por definición de $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$, existe un punto $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, tal que el punto \mathbf{y} es de la forma $(\mathbf{z}, x_2, x_3, \dots)$.

- Sea $1 \leq i \leq k$.

Como $\mathbf{z} \in \mathbf{X} \subset G_k$ por definición de G_k , para $1 \leq i \leq k$ el punto

$$(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) = (\varrho_{i+1}(\mathbf{z}), \varrho_i(\mathbf{z})) \in M.$$

- Sea $i = k + 1$.

Como $\varrho_{k+1}(\mathbf{X}) = \{u\}$, entonces $\varrho_{k+1}(\mathbf{z}) = u$. Además $\pi_1(\mathbf{x}) = u$, por lo que

$$(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) = (\pi_2(\mathbf{x}), \pi_{k+1}(\mathbf{z})) = (x_2, u) = (x_2, x_1).$$

Además como $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, por definición de $\varprojlim M$ el punto $(x_2, x_1) \in M$. Por tanto el punto $(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) \in M$.

- Sea $i \geq k + 2$.

Como $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, por la definición de $\varprojlim M$, tenemos que el punto

$$(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) = (\pi_{i-k+1}(\mathbf{x}), \pi_{i-k}(\mathbf{x})) \in M.$$

Por tanto para cada $i \in \mathbb{N}$, $(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) \in M$. Se sigue de la definición de $\varprojlim M$ que el punto $\mathbf{y} \in \varprojlim M$. Por tanto $\mathbf{A}_{\mathbf{x}} \subset \varprojlim M$

Por otro lado la función $\pi_{1,k+1}|_{\mathbf{A}_{\mathbf{x}}} : \mathbf{A}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{X}$ es un homeomorfismo. Por tanto $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ es un subcontinuo homeomorfo a \mathbf{X} contenido en $\varprojlim M$.

Veamos que $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ satisface las propiedades del teorema.

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{A}_{\mathbf{x}}$, por definición de $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ existe un punto $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$, tal que el punto \mathbf{y} es de la forma $(\mathbf{z}, x_2, x_3, \dots)$. Entonces $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{z} \in \mathbf{X}$ y $\sigma^k(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$, por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) \subset \mathbf{X}$ y $\sigma^k(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) \subset \{\mathbf{x}\}$.

Además para cada $\mathbf{z} \in \mathbf{x}$, el punto $\mathbf{y} = (\mathbf{z}, x_2, x_3, \dots) \in \mathbf{A}_{\mathbf{x}}$, entonces $\mathbf{z} \in \pi_{1,k+1}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}})$ y $\mathbf{x} \in \sigma^k(\mathbf{A}_{\mathbf{x}})$. Por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) = \mathbf{X}$ y $\sigma^k(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x}\}$

Con esto terminamos la prueba del teorema. ■

Corolario 1.2.7. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $u \in [0, 1]$. Supongamos que existe X un subcontinuo de M tal que $\varrho_1(X) = \{u\}$ y que $\mathbf{B} = \{\mathbf{x} \in \varprojlim M : \pi_1(\mathbf{x}) = u\} \neq \emptyset$.

Entonces para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{x}} = \{(z_2, z_1, x_2, x_3, \dots) \in [0, 1]^\infty : (z_1, z_2) \in X\}$ es un subcontinuo del $\varprojlim M$ homeomorfo a X que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) = X$,
- (2) $\sigma(\mathbf{A}_{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{x}\}$.

Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 , entonces las hipótesis del Teorema 1.2.6 se satisfacen, por tanto el corolario es cierto. ■

Teorema 1.2.8. Sean $M \subset [0, 1]^2$ un conjunto cerrado y $u, v, t_0 \in [0, 1]$, tales que $\{t_0\} \times [0, 1] \subset M$. Entonces para cada $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{x}) = t_0$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) los conjuntos $\mathbf{A} = \{(t, \mathbf{x}) \in [0, 1]^\infty : t \in [u, v]\}$ y $\mathbf{B} = \{(t, \pi_{1,k}(\mathbf{x})) \in [0, 1]^{k+1} : t \in [u, v]\}$ son arcos en $\varprojlim M$ y G_{k+1} , respectivamente.

(2) Existe un homeomorfismo $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$, tal que $\pi_{1,k+1} \circ \mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{B}$ es un homeomorfismo, h_1 es una función inyectiva, $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$.

Demostración.

Tenemos que el conjunto $X = \{t_0, t\} \in [0, 1]^2 : t \in [u, v]\} \subset M$ es un subcontinuo de M , que satisface que $\varrho_1(X) = \{t_0\}$. Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, entonces $\{\mathbf{x} \in \varprojlim M : \pi_1(\mathbf{x}) = u\} \neq \emptyset$, por lo que se cumplen la hipótesis del Corolario 1.2.7.

Entonces por el Corolario 1.2.7, tenemos que el conjunto \mathbf{A} es un subcontinuo de $\varprojlim M$ homeomorfo a X . Por tanto \mathbf{A} es un arco.

Definamos $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ dada por $h(t) = ((v - u)t + u, \mathbf{x})$, de la definición de h tenemos que h es una función continua. Además la función $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$, definida como $h_1(t) = (v - u)t + u$ para cada $t \in [0, 1]$ es una función biyectiva.

Notemos que por definición la función \mathbf{h} cumple con el inciso (2) pues $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ es una función continua y biyectiva, tal que $\pi_{1,k+1} \circ \mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{B}$ es una función continua y biyectiva, h_1 es una función inyectiva, $h_1(0) = (v - u)0 + u = u$ y $h_1(1) = (v - u)1 + u = v$.

Por tanto el inciso (2) queda demostrado. Además como $\pi_{1,k+1} \circ \mathbf{h}$ es una función continua e biyectiva, concluimos que \mathbf{B} es un arco. Así el teorema queda demostrado. \blacksquare

Capítulo 2

Conjuntos de coincidencias

En esta sección introducimos los *Conjuntos de coincidencias*, los cuales son una herramienta de gran utilidad para el estudio de límites inversos generalizados. Los conjuntos de coincidencias son una generalización del "Teorema de los alpinistas" ("Mountain Climbing Theorem" [9]), el cual fue utilizado en [17], [18], [2] como una herramienta en la investigación de estos límites inversos.

Definición 2.0.9. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas, definimos el conjunto de puntos de coincidencias de las funciones f y h como sigue:

$$E(f, h) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : f(x) = h(y)\}.$$

A continuación veremos algunos ejemplos de conjuntos de coincidencias para familiarizarnos con la definición.

Ejemplo 2.0.10. Sean $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidas para todo $x \in [0, 1]$, como siguen:

- $f(x) = \frac{x}{2}$,
- $h(x) = \frac{3}{4}$.
- $g(x) = 1 - x$,

(En la Figura 2.1 se muestran las gráficas de las funciones f , g y h .)

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) $E(f, h) = \emptyset$,
- (2) $E(g, f) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = 2(1 - x), x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ y
- (3) $E(g, h) = \{(\frac{1}{4}, y) \in [0, 1]^2 : y \in [0, 1]\}$.

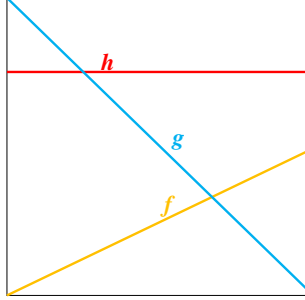


Figura 2.1: Ejemplo 2.0.10

Demostración.

(1) $E(f, h) = \emptyset$.

De la definición de la función f , tenemos que para todo $x \in [0, 1]$, $f(x) \leq \frac{1}{2}$ y de la definición de la función h , tenemos que para todo $y \in [0, 1]$, $h(y) = \frac{3}{4}$. Entonces para cualesquiera $x, y \in [0, 1]$, tenemos que $f(x) \neq h(y)$.

Se sigue de la definición de $E(f, h)$ que $E(f, h) = \emptyset$.

(2) $E(g, f) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = 2(1 - x), x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$.

Sea $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = 2(1 - x), x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$.

Dado un punto $(x, y) \in E(g, f)$, tenemos que $g(x) = f(y)$, por definición de las funciones g y f , tenemos que $1 - x = \frac{y}{2}$, de donde $y = 2(1 - x)$, como $y \in [0, 1]$, entonces $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Por tanto $E(g, f) \subset A$.

Por otro lado, dado un punto $(x, y) \in A$, tenemos que $y = 2(1 - x)$, entonces $1 - x = \frac{y}{2}$, de la definición de las funciones g y f , tenemos que $g(x) = f(y)$, entonces el punto $(x, y) \in E(g, f)$. Por tanto $A \subset E(g, f)$.

De las contenciones anteriores concluimos que $E(g, f) = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = 2(1 - x), x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$. (En la Figura 2.2 (a) se ilustra $E(g, f)$)

(3) $E(g, h) = \{(\frac{1}{4}, y) \in [0, 1]^2 : y \in [0, 1]\}$.

Sea $B = \{(\frac{1}{4}, y) \in [0, 1]^2 : y \in [0, 1]\}$.

Sea $(x, y) \in B$, de la definición de la función h , tenemos que $h(y) = \frac{3}{4}$, además de la definición de la función g , tenemos que $g(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$, por lo que $g(\frac{1}{4}) = h(y)$, entonces el punto $(x, y) \in E(g, h)$. Por tanto $B \subset E(g, h)$.

Por otro parte, dado $(x, y) \in E(g, h)$, tenemos que $g(x) = h(y)$, por lo que $1 - x = \frac{3}{4}$, de donde $x = \frac{1}{4}$, así el punto $(x, y) = (\frac{1}{4}, y) \in B$, por tanto $E(g, h) \subset B$.

De las contenciones anteriores, concluimos que $E(g, h) = \{(\frac{1}{4}, y) \in [0, 1]^2 : y \in [0, 1]\}$. (En la Figura 2.2 (b) se ilustra $E(g, h)$) ■

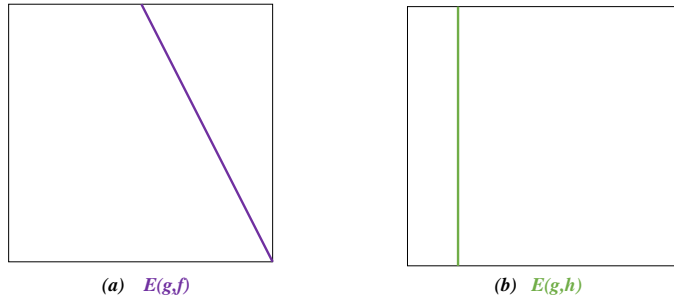


Figura 2.2: Ejemplo 2.0.10

2.1. Propiedades de los conjuntos de coincidencias

En esta sección daremos propiedades de los conjuntos de coincidencias, las cuales estaremos utilizando a lo largo del trabajo.

La siguiente observación nos da propiedades básicas de estos conjuntos.

Observación 2.1.1. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, entonces $E(f, h)$ tiene las siguientes propiedades:

- (1) $E(f, h)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$,
- (2) Si f es una función suprayectiva, entonces $E(f, h) \neq \emptyset$,
- (3) Si h es una función suprayectiva, entonces $E(f, h) \neq \emptyset$.

Demostración.

- (1) $E(f, h)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$.

Sea $\varphi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi((x, y)) = f(x) - h(x)$. Entonces φ es una función continua y $\varphi^{-1}(0) = E(f, h)$. Por tanto $E(f, h)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$.

- (2) Si f es una función suprayectiva, entonces $E(f, h) \neq \emptyset$.

Como f es una función suprayectiva, para cada punto $h(t) \in h([0, 1]) \subset [u, v] = f([0, 1])$ existe un punto $r \in [0, 1]$, tal que $f(r) = h(t)$. De la definición de $E(f, h)$, el punto $(r, t) \in E(f, h)$. Por tanto $E(f, h) \neq \emptyset$.

- (3) Si h es una función suprayectiva, entonces $E(f, h) \neq \emptyset$.

Como h es una función suprayectiva, para cada punto $f(t) \in f([0, 1]) \subset [u, v] = h([0, 1])$ existe un punto $s \in [0, 1]$, tal que $f(t) = h(s)$. De la definición de $E(f, h)$, el punto $(t, s) \in E(f, h)$. Por tanto $E(f, h) \neq \emptyset$. ■

Los siguientes teoremas nos dan información sobre las proyecciones (en $[0, 1]$), de las componentes de los conjuntos de coincidencias. El Teorema 2.1.6 aparece en [15], en este trabajo damos una demostración detallada de este teorema y dos generalizaciones del mismo Teorema 2.1.2 y Teorema 2.1.4. En la prueba de estos teoremas utilizamos el Lema 1.1.11.

Teorema 2.1.2. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, tales que $h(0) = u$ y $h(1) = v$. Entonces existe una componente E_0 de $E(f, h)$, tal que $E_0 \cap (\{0\} \times [0, 1]) \neq \emptyset \neq E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1])$. Como se ilustra en la Figura 2.3.

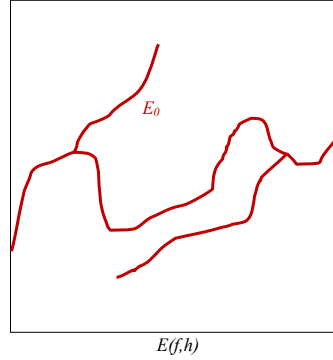


Figura 2.3: Teorema 2.1.2

Demostración.

Definamos $A = (\{0\} \times [0, 1]) \cap E(f, h)$, $B = (\{1\} \times [0, 1]) \cap E(f, h)$,

$$r_0 = \min\{r \in [0, 1] : (0, r) \in A\} = \min(\varrho_2(A))$$

$$r_1 = \max\{r \in [0, 1] : (0, r) \in A\} = \max(\varrho_2(A))$$

$$s_0 = \min\{s \in [0, 1] : (1, s) \in B\} = \min(\varrho_2(B)) \text{ y}$$

$$s_1 = \max\{s \in [0, 1] : (1, s) \in B\} = \max(\varrho_2(B)).$$

Como A y B son conjuntos cerrados y no vacíos de $E(f, h)$ tenemos que los puntos r_0, r_1, s_0 y s_1 están bien definidos.

Además definamos

$$\Lambda = (\{0\} \times [r_1, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [s_1, 1])$$

y

$$\Gamma = (\{0\} \times [0, r_0]) \cup ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, s_0]).$$

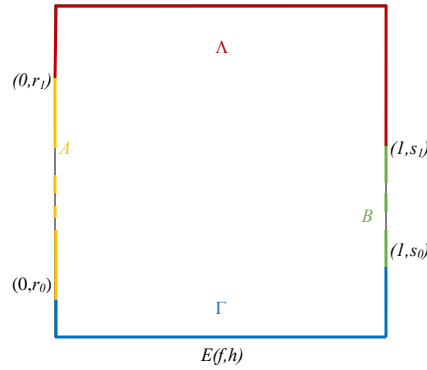


Figura 2.4:

Supongamos por el contrario que para toda componente C de $E(f, h)$ que intersecciona a $A \cup B$, se cumple alguna de las siguientes dos propiedades:

- (i) Si $C \cap A \neq \emptyset$, entonces $C \cap B = \emptyset$.
- (ii) Si $C \cap B \neq \emptyset$, entonces $C \cap A = \emptyset$.

De la Observación 2.1.1, (1), tenemos que $E(f, h)$ es un conjunto cerrado de $[0, 1]^2$, y por definición A y B son subconjuntos cerrados de $E(f, h)$ que satisfacen las propiedades del Lema 1.1.11, por tanto existe un subcontinuo U_0 de $[0, 1]^2$, tal que cumple las siguientes propiedades:

- (1) U_0 separa a A y B ,
- (2) $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$,
- (3) $U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}) \neq \emptyset$ y
- (4) $U_0 \cap (\Gamma - \{(0, r_0), (1, s_0)\}) \neq \emptyset$.

Afirmación 1

(1.a) Si $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}))$, entonces $f(x) < h(y)$.

(1.b) Si $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, s_0), (1, s_0)\}))$, entonces $h(w) < f(z)$.

Prueba.

Como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$ entonces $f(x) \neq h(y)$ y $f(z) \neq h(w)$.

(1.a) Si $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}))$, entonces $f(x) < h(y)$.

Observemos que para todo punto $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}))$, tenemos que $x \in \{0, 1\}$ o $y = 1$, por lo que estos casos son los que probaremos.

Caso 1. $y = 1$.

Tenemos que $h(y) = h(1)$ y por hipótesis $h(1) = v$, por lo que $h(y) = v$, además de la definición de la función f , tenemos que $f([0, 1]) \subset [u, v]$, por lo que $f(x) \leq v$. Por tanto $f(x) \leq h(y)$, como $f(x) \neq h(y)$ concluimos que $f(x) < h(y)$.

Para los casos $x \in \{0, 1\}$, supongamos por el contrario que $f(x) \geq h(y)$. De la definición de la función f , tenemos que $f(x) \leq v$ y por hipótesis $h(1) = v$, entonces $f(x) \in [h(y), h(1)]$. Como h es una función continua y el intervalo $[y, 1]$ es conexo, tenemos que $f(x) \in [h(y), h(1)] \subset h([y, 1])$. Por lo que $f(x) \in h([y, 1])$.

Caso 2. $x = 0$.

Como $f(x) = f(0) \in h([y, 1])$, existe un punto $r \in [y, 1]$ tal que $h(r) = f(0)$, por tanto el punto $(0, r) \in E(f, h)$.

Por otra parte, tenemos que el punto $(0, r_1) \in E(f, h)$ y el punto $(0, y) \in U_0 \cap \Lambda$. Como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$, entonces $(0, y) \neq (0, r_1)$. Por tanto el punto $(0, y) \in (\{0\} \times (r_1, 1])$, de donde $y > r_1$.

Como $r \in [y, 1]$ y $y > r_1$, entonces $r > r_1$. Hemos probado que el punto $(0, r) \in E(f, h)$ y $r > r_1$, lo anterior contradice la definición de r_1 . Por tanto $f(x) < h(y)$.

Caso 3. $x = 1$.

Como $f(x) = f(1) \in h([y, 1])$, existe un punto $s \in [y, 1]$ tal que $h(s) = f(1)$, por tanto el punto $(1, s) \in E(f, h)$.

Por otro lado tenemos que el punto $(1, s_1) \in E(f, h)$ y el punto $(1, y) \in U_0 \cap \Lambda$. Como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$, entonces $(1, y) \neq (1, s_1)$. Por tanto el punto $(1, y) \in (\{1\} \times (s_1, 1])$, de donde $y > s_1$.

Como $s \in [y, 1]$ y $y > s_1$, entonces $s > s_1$. Hemos probado que el punto $(1, s) \in E(f, h)$ y $s > s_1$, lo cual contradice la definición de s_1 . Por tanto

$f(x) < h(y)$.

En cualquier caso probamos que $f(x) < h(y)$, por tanto (1.a) queda probado.

(1.b) Si $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, s_0), (1, s_0)\}))$, entonces $h(w) < f(z)$.

Observemos que para todo punto $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, s_0), (1, s_0)\}))$, tenemos que $z \in \{0, 1\}$ o $w = 0$, así que estos casos son los que probaremos.

Caso 1. $w = 0$.

Tenemos que $h(0) = h(w)$ y por hipótesis $h(0) = u$, por lo que $h(w) = u$, además de la definición de la función f , tenemos que $f([0, 1]) \subset [u, v]$, por lo que $u \leq f(z)$. Por tanto $h(w) \leq f(z)$, como $h(w) \neq f(z)$ concluimos que $h(w) < f(z)$.

Para los casos $z \in \{0, 1\}$ supongamos por el contrario que $f(z) < h(w)$. De la definición de la función f tenemos que $f(z) \geq u$ y por hipótesis $u = h(0)$, por lo que $f(z) \in [h(0), h(w)]$. Como h es una función continua y el intervalo $[0, w]$ es conexo, tenemos que $f(z) \in [h(0), h(w)] \subset h([0, w])$, por lo que $f(z) \in h([0, w])$.

Caso 2. $z = 0$.

Como $f(z) = f(0) \in h([0, w])$, existe un punto $r \in [0, w]$, tal que $h(r) = f(0)$, por tanto el punto $(0, r) \in E(f, h)$.

Por otro lado tenemos que el punto $(0, r_0) \in E(f, h)$ y el punto $(0, w) \in U_0 \cap \Gamma$. Como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$, entonces $(0, w) \neq (0, r_0)$. Por tanto el punto $(0, w) \in (\{0\} \times [0, r_0))$, de donde $w < r_0$.

Como $r \in [0, w]$ y $w < r_0$, entonces $r < r_0$. Hemos probado que el punto $(0, r) \in E(f, h)$ y $r < r_0$, lo anterior contradice la definición de r_0 . Por tanto $h(w) < f(z)$.

Caso 3. $z = 1$.

Como $f(z) = f(1) \in h([0, w])$, existe un punto $s \in [0, w]$, tal que $h(s) = f(1)$, por tanto el punto $(z, s) \in E(f, h)$.

Por otro lado tenemos que el punto $(1, s_0) \in E(f, h)$ y el punto $(1, w) \in U_0 \cap \Gamma$. Como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$, entonces $(1, w) \neq (1, s_0)$. Por tanto el punto $(1, w) \in (\{1\} \times [0, s_0))$ de donde $w < s_0$.

Como $s \in [0, w]$ y $w < s_0$, entonces $s < s_0$. Hemos probado que el punto $(1, s) \in E(f, h)$ y $s < s_0$, lo anterior contradice la definición de s_0 . Por tanto

$$h(w) < f(z).$$

En cualquier caso probamos que $h(w) < f(z)$, por tanto (1.b) queda probado. \square

Definamos ahora $F = \{(x, y) \in U_0 : f(x) < h(y)\}$ y $G = \{(x, y) \in U_0 : f(x) > h(y)\}$. Para terminar la prueba probaremos que los conjuntos F y G forman una separación de U_0 , lo cual contradice el hecho de que U_0 es un continuo.

Afirmación 2

(2.a) F y G son conjuntos abiertos no vacíos de U_0 ,

(2.b) $U_0 = F \cup G$.

Prueba.

(2.a) F y G son conjuntos abiertos no vacíos de U_0 ,

De la Afirmación 1, se sigue que que F y G son conjuntos no vacíos.

Probaremos que F es un conjunto abierto de U_0 , la prueba de que G es un conjunto abierto de U_0 se hace de manera similar.

Sea $(x, y) \in F$, entonces $f(x) < h(y)$, por lo que $f(x) \neq h(y)$, por lo que existen conjuntos abiertos conexos \mathcal{U} y \mathcal{V} de $[u, v]$ tales que $f(x) \in \mathcal{U}$ y $h(y) \in \mathcal{V}$, notemos que para cualesquiera $z \in \mathcal{U}$ y $w \in \mathcal{V}$, tenemos que $z < w$.

Definamos $W = (f^{-1}(\mathcal{U}) \times h^{-1}(\mathcal{V})) \cap U_0$, como f y h son funciones continuas, tenemos que W es un conjunto abierto de U_0 .

Además de la definición de W , tenemos que el punto $(x, y) \in W$.

Veamos que $W \subset F$. Dado un punto $(x', y') \in W$, tenemos que $f(x') \in \mathcal{U}$ y $h(y') \in \mathcal{V}$, por lo que $f(x') < h(y')$, de donde $(x', y') \in F$. Por tanto $W \subset F$. Concluimos que F es un conjunto abierto de U_0 .

(2.b) $U_0 = F \cup G$.

Sea $(x, y) \in U_0$, como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$, tenemos que el punto $(x, y) \notin E(f, h)$. Por tanto $f(x) \neq h(y)$, se sigue de la definición de F y G que $(x, y) \in F$ o $(x, y) \in G$. Por tanto $(x, y) \in F \cup G$. Concluimos que $U_0 \subset F \cup G$.

Por otro lado como $F \subset U_0$ y $G \subset U_0$, tenemos que $F \cup G \subset U_0$.

Tenemos de las contenciones anteriores que $U_0 = F \cup G$. \square

De la Afirmación 2 concluimos que F y G forman una separación de U_0 , lo cual contradice que U_0 es un conjunto conexo. Esta contradicción nace de suponer que toda componente C de $E(f, h)$ que interseca a $A \cup B$ cumple alguna de las siguientes propiedades:

- (i) Si $C \cap A \neq \emptyset$ entonces $C \cap B = \emptyset$.
- (ii) Si $C \cap B \neq \emptyset$ entonces $C \cap A = \emptyset$.

Por tanto existe una componente E_0 de $E(f, h)$ tal que $E_0 \cap (\{0\} \times [0, 1]) \neq \emptyset \neq E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1])$. ■

Corolario 2.1.3. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, tales que $h(0) = u$ y $h(1) = v$. Entonces existe una componente E_0 de $E(f, h)$, tal que $\varrho_1(E_0) = [0, 1]$.

No todas las componentes de un conjunto de coincidencias con las hipótesis del teorema, cumplen que su primera proyección es suprarectiva. Como se ilustra en la Figura 2.5.

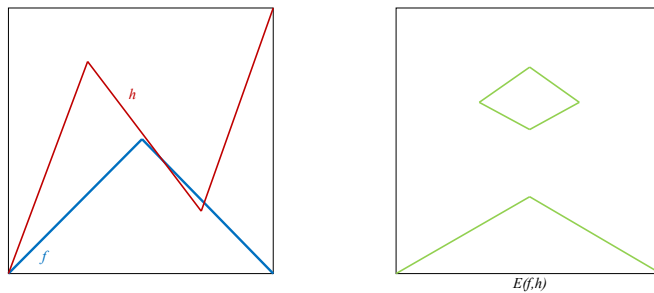


Figura 2.5: Ejemplo 2.0.10

La prueba de los Teoremas 2.1.4 y 2.1.6 es muy parecida a la prueba del Teorema 2.1.2, por lo que omiteremos algunos detalles que ya hicimos en la prueba del Teorema 2.1.2. En estos teoremas centraremos nuestra atención en la componente del punto $(0, 0)$ en $E(f, h)$ (cuando el punto $(0, 0) \in E(f, h)$).

Teorema 2.1.4. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, tales que $f(0) = u = h(0)$ y $h(1) = v$. Si E_0 es la componente de $E(f, h)$ que contiene al punto $(0, 0)$, entonces $E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$. Como se ilustra en la Figura 2.6.

Demostración.

Definamos $A = \{(0, 0)\}$, $B = (\{1\} \times [0, 1]) \cap E(f, h)$.

$$s_0 = \text{mín}\{s \in [0, 1] : (1, s) \in B\} = \text{mín}(\varrho_2(B)) \text{ y}$$

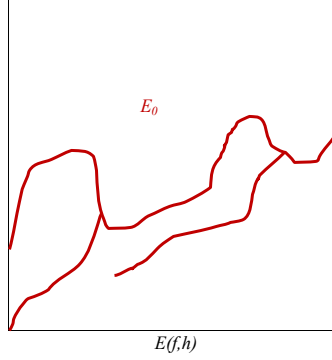


Figura 2.6: Teorema 2.1.4

$$s_1 = \text{máx}\{s \in [0, 1] : (1, s) \in B\} = \text{máx}(\varrho_2(B)).$$

Como A y B son conjuntos cerrados y no vacíos de $E(f, h)$, tenemos que los puntos s_0 y s_1 están bien definidos.

Además definamos

$$\Lambda = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [s_1, 1])$$

y

$$\Gamma = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, s_0]).$$

Supongamos por el contrario que E_0 no interseca a B .

De la Observación 2.1.1, (1), tenemos que $E(f, h)$ es un conjunto cerrado de $[0, 1]^2$, y por definición A y B son subconjuntos cerrados de $E(f, h)$ que satisfacen las propiedades del Lema 1.1.11, por tanto existe un subcontinuo U_0 de $[0, 1]^2$, tal que cumple las siguientes propiedades:

- (1) U_0 separa a A y B ,
- (2) $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$,
- (3) $U_0 \cap (\Lambda - \{(0, 0), (1, s_1)\}) \neq \emptyset$ y
- (4) $U_0 \cap (\Gamma - \{(0, 0), (1, s_0)\}) \neq \emptyset$.

Afirmación 1

(1.a) Si $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, 0), (1, s_1)\}))$, entonces $f(x) < h(y)$.

(1.b) Si $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, 0), (1, s_0)\}))$, entonces $h(w) < f(z)$.

Prueba.

Como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$ entonces $f(x) \neq h(y)$ y $f(z) \neq h(w)$.

(1.a) Si $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, 0), (1, s_1)\}))$, entonces $f(x) < h(y)$.

Observemos que para todo punto $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}))$, tenemos que $x \in \{0, 1\}$ o $y = 1$, así que estos casos son los que probaremos.

Caso 1. $y = 1$.

Tenemos que $h(y) = h(1)$ y $h(1) = v$, por lo que $h(y) = v$, además $f(x) \in [u, v]$, por tanto $f(x) \leq h(y)$, como $f(x) \neq h(y)$ concluimos que $f(x) < h(y)$.

Caso 2. $x = 0$.

Tenemos que $f(x) = f(0)$ y $f(0) = u$, por lo que $h(x) = u$, además $h(y) \in [u, v]$, por tanto $h(y) \geq f(x)$, como $f(x) \neq h(y)$ concluimos que $f(x) < h(y)$.

Caso 3. $x = 1$.

Supongamos por el contrario que $f(x) \geq h(y)$. Por hipótesis $h(1) = v$, por lo que $f(x) \in h([y, 1])$.

Como $f(x) = f(1) \in h([y, 1])$, existe un punto $s \in [y, 1]$ tal que $h(s) = f(1)$, por tanto el punto $(1, s) \in E(f, h)$.

Como en el Teorema 2.1.2 tenemos que $s > s_1$, lo cual contradice la definición de s_1 . Por tanto $f(x) < h(y)$.

En cualquier caso probamos que $f(x) < h(y)$, por tanto (1.a) queda probado.

(1.b) Si $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, 0), (1, s_0)\}))$, entonces $h(w) < f(z)$.

Observemos que para todo punto $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, s_0), (1, s_0)\}))$, tenemos que $w = 0$ o $z = 1$, por lo que estos casos son los que probaremos.

Caso 1. $w = 0$.

Tenemos que $h(0) = h(w)$ y $h(0) = u$, por lo que $h(w) = u$, además $u \leq f(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, por tanto $h(w) \leq f(z)$, como $h(w) \neq f(z)$ concluimos que $h(w) < f(z)$.

Caso 2. $z = 1$.

Supongamos por el contrario que $f(z) < h(w)$, de la hipótesis (a) tenemos que $u = h(0)$, por lo que $f(z) \in h([0, w])$.

Como $f(z) = f(1) \in h([0, w])$, existe un punto $s \in [0, w]$ tal que $h(s) = f(z)$, por tanto el punto $(1, s) \in E(f, h)$.

Como en el Teorema 2.1.2 tenemos que $s < s_0$, lo anterior contradice la definición de s_0 . Por tanto $h(w) < f(z)$.

En cualquier caso probamos que $h(w) < f(z)$, por tanto (1.b) queda probado. \square

Definamos ahora $F = \{(x, y) \in U_0 : f(x) < h(y)\}$ y $G = \{(x, y) \in U_0 : f(x) > h(y)\}$. Como en el Teorema 2.1.2 tenemos que F y G forman una separación de U_0 , lo cual contradice que U_0 es un conjunto conexo. Esta contradicción nace de suponer que $E_0 \cap B = \emptyset$.

Por tanto $E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$. \blacksquare

Corolario 2.1.5. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, tales que $f(0) = u = h(0)$ y $h(1) = v$. Si E_0 es la componente de $E(f, h)$ que contiene al punto $(0, 0)$, entonces $\rho_1(E_0) = [0, 1]$.

Teorema 2.1.6. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, tales que $f(0) = u = h(0)$ y $f(1) = v = h(1)$. Si E_0 es la componente de $E(f, h)$ que contiene al punto $(0, 0)$, entonces E_0 contiene al punto $(1, 1)$. Como se ilustra en la Figura 2.7.

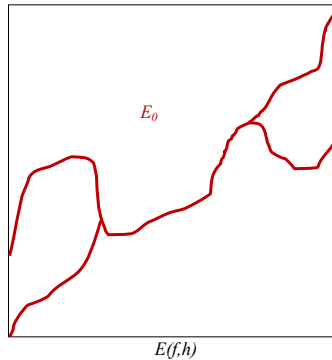


Figura 2.7: Teorema 2.1.6

Demostración.

Definamos $A = \{(0, 0)\}$ y $B = \{(1, 1)\}$, $\Lambda = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ y $\Gamma = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])$.

Supongamos por el contrario que $(1, 1) \notin E_0$.

De la Observación 2.1.1, (1) tenemos que $E(f, h)$ es un conjunto cerrado de $[0, 1]^2$, y por definición A y B son subconjuntos cerrados de $E(f, h)$ que satisfacen las propiedades del Lema 1.1.11, por tanto existe un subcontinuo U_0 de $[0, 1]^2$, tal que cumple las siguientes propiedades:

- (1) U_0 separa a A y B ,
- (2) $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$,
- (3) $U_0 \cap (\Lambda - \{(0, 0), (1, 1)\}) \neq \emptyset$ y
- (4) $U_0 \cap (\Gamma - \{(0, 0), (1, 1)\}) \neq \emptyset$.

Afirmación 1

(1.a) Si $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, 0), (1, 1)\}))$, entonces $f(x) < h(y)$.

(1.b) Si $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, 0), (1, 1)\}))$, entonces $h(w) < f(z)$.

Prueba.

Notemos que como $U_0 \cap E(f, h) = \emptyset$ entonces $f(x) \neq h(y)$ y $f(z) \neq h(w)$.

(1.a) Si $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, 0), (1, 1)\}))$, entonces $f(x) < h(y)$.

Observemos que para todo punto $(x, y) \in (U_0 \cap (\Lambda - \{(0, r_1), (1, s_1)\}))$, tenemos que $x = 0$ o $y = 1$, por lo que estos casos son los que probaremos.

Caso 1. $y = 1$.

Tenemos que $h(y) = h(1)$ y $h(1) = v$, por lo que $h(y) = v$, además $f(x) \in [u, v]$, por tanto $f(x) \leq h(y)$, como $f(x) \neq h(y)$ concluimos que $f(x) < h(y)$.

Caso 2. $x = 0$.

Tenemos que $f(x) = f(0)$ y $f(0) = u$, por lo que $h(x) = u$, además $h(y) \in [u, v]$, por tanto $h(y) \geq f(x)$, como $f(x) \neq h(y)$ concluimos que $f(x) < h(y)$.

En cualquier caso probamos que $f(x) < h(y)$, por tanto (1.a) queda probado.

(1.b) Si $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, 0), (1, 1)\}))$, entonces $h(w) < f(z)$.

Observemos que para todo punto $(z, w) \in (U_0 \cap (\Gamma - \{(0, s_0), (1, s_0)\}))$, tenemos que $w = 0$ o $z = 1$, así que estos casos son los que probaremos.

Caso 1. $w = 0$.

Tenemos que $h(0) = h(w)$ y $h(0) = u$, por lo que $h(w) = u$, además $f(z) \in [u, v]$, por tanto $h(w) \leq f(z)$, como $h(w) \neq f(z)$ concluimos que $h(w) < f(z)$.

Caso 2. $z = 1$.

Tenemos que $f(z) = f(1)$ y $f(1) = v$, por lo que $f(z) = v$, además $h(w) \in [u, v]$, por tanto $h(w) \leq f(z)$, como $h(w) \neq f(z)$ concluimos que $h(w) < f(z)$.

En cualquier caso probamos que $h(w) < f(z)$, por tanto (1.b) queda probado. \square

Definamos ahora $F = \{(x, y) \in U_0 : f(x) < h(y)\}$ y $G = \{(x, y) \in U_0 : f(x) > h(y)\}$. Como en el Teorema 2.1.2 tenemos que F y G forman una separación de U_0 , lo cual contradice que U_0 es un conjunto conexo. Esta contradicción nace de suponer que el punto $(1, 1) \notin E_0$.

Por tanto el punto $(1, 1) \in E_0$. ■

Corolario 2.1.7. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ funciones continuas, tales que $f(0) = u = h(0)$ y $f(1) = v = h(1)$. Si E_0 es la componente de $E(f, h)$ que contiene al punto $(0, 0)$, entonces $\rho_1(E_0) = [0, 1] = \rho_2(E_0)$.

El siguiente teorema nos da condiciones sobre las funciones f y h para obtener que las componentes del conjunto de coincidencias $E(f, h)$ sean arco conexas.

Teorema 2.1.8. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas, tales que para cada $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(t)$ y $h^{-1}(t)$ tienen un número finito de componentes. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) Las componentes $E(f, h)$ son localmente conexas.
- (2) Las componentes $E(f, h)$ son arco conexas.

Demostración.

(1) Recordemos que por la (Observación 2.1.1, (1)), el conjunto $E(f, h)$ es un conjunto cerrado de $[0, 1]^2$ y por tanto compacto de $[0, 1]^2$.

Probaremos que las hipótesis del Corolario 1.1.14 se satisfacen. Sea x un punto del intervalo $[0, 1]$.

(a) El conjunto $(\{x\} \times [0, 1]) \cap E(f, h)$ tiene un número finito de componentes.

Notemos que

$$\begin{aligned} (\{x\} \times [0, 1]) \cap E(f, h) &= \{(x, t) \in \{x\} \times [0, 1] : f(x) = h(t)\} \\ &\approx \{t \in [0, 1] : h(t) = f(x)\} = h^{-1}(f(x)). \end{aligned}$$

Por hipótesis $h^{-1}(f(x))$ tiene un número finito de componentes. Por tanto $(\{x\} \times [0, 1]) \cap E(f, h)$ tiene un número finito de componentes.

(b) El conjunto $([0, 1] \times \{x\}) \cap E(f, h)$ tiene un número finito de componentes.

Notemos que

$$\begin{aligned} ([0, 1] \times \{x\}) \cap E(f, h) &= \{(t, x) \in [0, 1] \times \{x\} : f(t) = h(x)\} \\ &\approx \{t \in [0, 1] : f(t) = h(x)\} = f^{-1}(h(x)). \end{aligned}$$

Por hipótesis $f^{-1}(h(x))$ tiene un número finito de componentes. Por tanto $([0, 1] \times \{x\}) \cap E(f, h)$ tiene un número finito de componentes.

De los incisos (a) y (b) tenemos que las hipótesis del Corolario 1.1.14 se satisfacen. Por tanto las componentes $E(f, h)$ son localmente conexas.

(2) Sea A una componente de $E(f, h)$, por el inciso (1), A es localmente conexas, como las componentes de $E(h, h)$ son continuos, tenemos que A es un continuo localmente conexo. Por [[13], Theorem 8.23, pag. 130] A es un continuo arco conexo. ■

El siguiente lema es una herramienta para probar, bajo condiciones especiales, que los conjuntos de coincidencias contienen 2 celdas.

Lema 2.1.9. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas con las siguientes propiedades

- (a) $f(0) = h(0)$,
- (b) existen puntos $a, b, r \in [0, 1]$ y arcos $A, B \subset E(f, h)$ que cumplen las hipótesis del Lema 1.1.5,
- (c) existe un punto x en el intervalo $(0, r)$ tal que $f(x) \neq f(0)$.

Entonces existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en $[0, 1]$ tales que cumplen las siguientes propiedades para cada $n \in \mathbb{N}$:

- (1) $x_1 = x$,
- (2) $0 < x_{n+1} < x_n$,
- (3) $0 < y_{n+1} < y_n$,
- (4) el punto $(x_n, y_n) \in B$,
- (5) el punto $(x_n, y_{n+1}) \in A$,
- (6) $h(y_n) = f(x_n) = h(y_{n+1})$.

Demostración.

Construiremos inductivamente a los elementos de las sucesiones.

Como los puntos $(0,0), (r,b) \in B$ y el punto x pertenece al intervalo $(0,r)$, tenemos que $\rho_1(B) \cap [0,x] \neq \emptyset$ y $\rho_1(B) \cap (x,r] \neq \emptyset$, además como $\varrho_1(B)$ es conexo, tenemos que $\rho_1(B) \cap \{x\} \neq \emptyset$, por lo que existe un punto en B , cuya primera coordenada es x , llamemos a este punto (x,y) . Veamos que $y > 0$.

Supongamos por el contrario que $y = 0$, como el punto $(x,y) \in B \subset E(f,h)$, tenemos que $f(x) = h(y) = h(0)$ y por hipótesis $f(0) = h(0)$, entonces $f(x) = f(0)$ lo cual contradice que $f(x) \neq f(0)$. Por tanto $y > 0$.

Definamos el punto $(x_1, y_1) = (x, y)$, de esta definición se cumplen las propiedades (1) y (4) para $n=1$, además $y_1 > 0$.

Como el punto $y_1 > 0$, el punto $(x_1, y_1) \in B - \{(0,0)\}$, por el Lema 1.1.5,(3) existe un punto $y_2 \in [0, y_1]$ tal que el punto $(x_1, y_2) \in A$, de manera que la propiedad (5) se cumple para $n = 1$.

Como los puntos $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in A \cup B \subset E(f,h)$ entonces $f(x_1) = h(y_1)$ y $f(x_1) = h(y_2)$, de manera que la propiedad (6) se cumple para $n = 1$.

Veamos que $y_2 > 0$. Supongamos por el contrario que $y_2 = 0$. De la propiedad (6) para $n = 1$ y la definición del punto (x_1, y_1) , tenemos que $f(x) = f(x_1) = h(y_2) = h(0)$ y por hipótesis $f(0) = h(0)$, por tanto $f(x) = f(0)$, lo cual contradice que $f(x) \neq f(0)$. Por tanto $y_2 > 0$.

Como $y_2 > 0$ y $y_2 < y_1$, tenemos que la propiedad (3) se cumple para $n = 1$.

Dado que el punto $x_1 \in (0,r)$ y el punto $(x_1, y_2) \in A$ por el Lema 1.1.5,(2), existe un punto $x_2 \in [0, x_1]$ tal que el punto $(x_2, y_2) \in B$. Veamos que $x_2 > 0$.

Supongamos por el contrario que $x_2 = 0$, como el punto $(x_2, y_2) \in B \subset E(f,h)$ entonces $f(0) = f(x_2) = h(y_2)$ además de la propiedad (6) para $n = 1$ y la definición del punto (x_1, y_1) tenemos que $f(x) = f(x_1) = h(y_2)$. Por lo que $f(x) = f(0)$, lo cual contradice que $f(x) \neq f(0)$. Por tanto $x_2 > 0$.

Como $x_2 > 0$ y $x_2 < x_1$, tenemos que la propiedad (2) se cumple para $n = 1$.

De lo anterior hemos construido

- puntos $x_1, x_2 \in [0, 1]$,
- puntos $y_1, y_2 \in [0, 1]$,

que satisfacen las propiedades (1)-(6) para $n = 1$ y el punto $(x_2, y_2) \in B$.

Supongamos que hemos construido

- puntos $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1} \in [0, 1]$,
- puntos $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1} \in [0, 1]$,

para los cuales se satisfacen las propiedades (1)-(6) para $n = k$ y el punto $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in B$. (En la Figura 2.8 se ilustra el proceso de inducción)

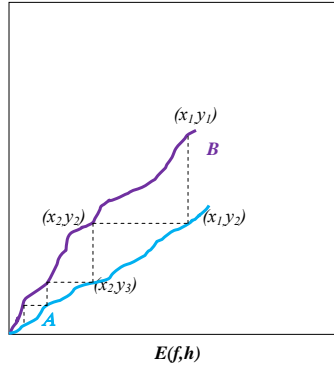


Figura 2.8:

Como el punto $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in B$ se cumple la propiedad (4) para $n = k + 1$.

Como el punto $y_{k+1} > 0$, el punto $(x_{k+1}, y_{k+1}) \in B - \{(0, 0)\}$, por el Lema 1.1.5,(3), existe un punto $y_{k+2} \in [0, y_{k+1}]$, tal que el punto $(x_{k+1}, y_{k+2}) \in A$, de manera que la propiedad (5) se cumple para $n = k + 1$.

Veamos que $y_{k+2} > 0$. Supongamos por el contrario que $y_{k+2} = 0$ de la propiedad (6) para $n \in \{1, \dots, k\}$ y la definición del punto (x_1, y_1) tenemos que

$$f(x) = f(x_1) = f(y_2) = f(x_2) = \dots = f(x_{k+1}).$$

Además como el punto $(x_{k+1}, y_{k+2}) \in A \subset E(f, h)$, entonces

$$f(x_{k+1}) = h(y_{k+2}) = h(0).$$

De estas dos igualdades obtenemos que $f(x) = h(0)$ y por hipótesis $f(0) = h(0)$, por tanto $f(x) = f(0)$, lo cual contradice que $f(x) \neq f(0)$. Por tanto $y_{k+2} > 0$. Como $y_{k+2} > 0$ y $y_{k+2} < y_{k+1}$, tenemos que la propiedad (3) se cumple para $n = k + 1$.

Como los puntos $(x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+1}, y_{k+2}) \in A \cup B \subset E(f, h)$, entonces $f(x_{k+1}) = h(y_{k+1})$ y $f(x_{k+1}) = h(y_{k+2})$, por lo que la propiedad (6) se cumple para $n = k + 1$.

Además como el punto $x_{k+1} \in (0, r)$ y el punto $(x_{k+1}, y_{k+2}) \in A$, por el Lema 1.1.5,(2) existe un punto $x_{k+2} \in [0, x_{k+1}]$, tal que el punto $(x_{k+2}, y_{k+2}) \in B$. Veamos que $x_{k+2} > 0$.

Supongamos por el contrario que $x_{k+2} = 0$. Como el punto $(x_{k+2}, y_{k+2}) \in B \subset E(f, h)$ entonces

$$f(0) = f(x_{k+2}) = h(y_{k+2}).$$

Además de la propiedad (6) para $n \in \{1, \dots, k+1\}$ y la definición del punto (x_1, y_1) , tenemos que

$$f(x) = f(x_1) = f(y_2) = f(x_2) = \dots = f(x_{k+1}) = h(y_{k+2}).$$

De estas dos igualdades obtenemos que $f(x) = h(y_{k+2}) = f(x_{k+2}) = f(0)$, por tanto $f(x) = f(0)$, lo cual contradice que $f(x) \neq f(0)$. Por tanto $x_{k+2} > 0$. Como $x_{k+2} > 0$ y $x_{k+2} < x_{k+1}$, tenemos que la propiedad (2) se cumple para $n = k+1$.

Hemos construido

- puntos $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2} \in [0, 1]$,
- puntos $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}, y_{k+2} \in [0, 1]$,

para los que se satisfacen las propiedades (1)-(6) para $n = k+1$ y el punto $(x_{k+2}, y_{k+2}) \in B$. Con esto terminamos el proceso de inducción.

De manera que existen sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en $[0, 1]$, que se satisfacen las propiedades (1)-(6). ■

2.2. Subcontinuos de los conjuntos de coincidencias

En esta sección daremos condiciones sobre las funciones del conjunto de coincidencias y sobre el conjunto de coincidencias, para encontrar ciertos subcontinuos, como: 2 celdas, circunferencias y triodos simples.

El siguiente teorema nos da condiciones sobre las funciones del conjunto de coincidencias para saber si este contiene una 2-celda.

Teorema 2.2.1. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas. Supongamos que existen puntos $r_1, r_2, s_1, s_2 \in [0, 1]$ con $r_1 < r_2$ y $s_1 < s_2$ tales que $f([r_1, r_2]) = \{a\} = h([s_1, s_2])$. Entonces $E(f, h)$ contiene una 2-celda.

Demostración.

Como $r_1 < r_2$ y $s_1 < s_2$, tenemos que $[r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$ es una 2-celda.

Probaremos que $[r_1, r_2] \times [s_1, s_2] \subset E(f, h)$.

Sea $(r, s) \in [r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$, entonces $r \in [r_1, r_2]$ y $s \in [s_1, s_2]$, recordemos que por hipótesis $f([r_1, r_2]) = \{a\} = h([s_1, s_2])$, entonces $f(r) = a = h(s)$, por tanto el punto $(r, s) \in E(f, h)$.

Concluimos que $[r_1, r_2] \times [s_1, s_2] \subset E(f, h)$, así el teorema queda demostrado. ■

El siguiente teorema nos da condiciones sobre el conjunto de coincidencias para saber si este contiene una 2-celda.

Teorema 2.2.2. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas. Supongamos que existe un arco $C \subset E(f, h)$, tal que el punto $(0, 0) \in C$ y $(0, 0)$ no es punto extremo de C , entonces $E(f, h)$ contiene una 2-celda.

Demostración.

Como el punto $(0, 0)$ no es punto extremo del arco $C \subset E(f, h)$, existen arcos $C_1, C_2 \subset C$ tales que $C_1 \cup C_2 = C$ y $C_1 \cap C_2 = \{(0, 0)\}$. Vamos a analizar los siguientes casos: (En la Figura 2.9 se ilustran los casos que vamos a analizar)

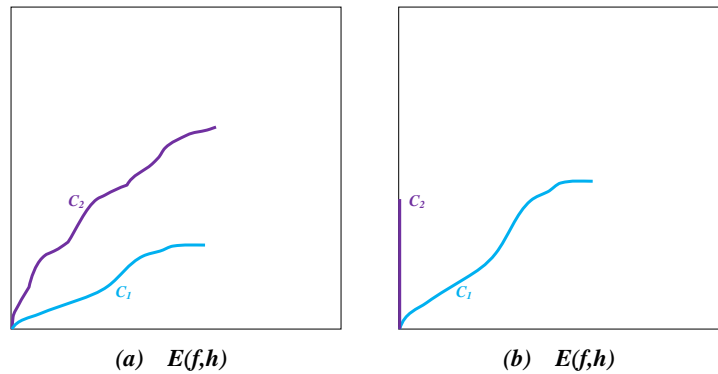


Figura 2.9: (a) Caso 1 (b) Caso 2

Caso 1. $\rho_1(C_1) \neq \{0\} \neq \rho_1(C_2)$.

Sea $r > 0$, tal que $r \in \rho_1(C_1) \cap \rho_1(C_2)$. Sin pérdida de generalidad existen puntos $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha < \beta$ tales que $(r, \alpha) \in C_1$, $(r, \beta) \in C_2$.

Entonces existen arcos $A \subset C_1$ y $B \subset C_2$ y puntos $a, b \in [0, 1]$, $a < b$, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) Los extremos de A son los puntos $(0, 0)$ y (r, a) ,
- (b) Los extremos de B son los puntos $(0, 0)$ y (r, b) ,
- (c) $A - \{(r, a)\} \subset [0, r] \times [0, 1]$,
- (d) $B - \{(r, b)\} \subset [0, r] \times [0, 1]$.
- (e) $A \cap B = \{(0, 0)\}$, (pues $A \cap B \subset C_1 \cap C_2 = \{(0, 0)\}$).

Por tanto los arcos A y B satisfacen las hipótesis del Lema 1.1.5.

Probaremos que la 2-celda $[0, r] \times [0, b] \subset E(f, h)$.

Afirmación 1. $f([0, r]) = \{f(0)\}$.

Prueba.

- Si $x = 0$, entonces $f(x) = f(0)$.
- Sea x un punto en el intervalo $(0, r)$. Probaremos que $f(x) = f(0)$.

Supongamos por el contrario que $f(x) \neq f(0)$.

Tenemos que $a, b, r \in [0, 1]$ y los arcos $A, B \subset E(f, g)$ satisfacen las hipótesis del Lema 1.1.5. Además las funciones f y h satisfacen que $f(0) = h(0)$, pues $(0, 0) \in E(f, h)$, por lo que las hipótesis del Lema 2.1.9 se satisfacen.

Por tanto existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos en $[0, 1]$ que cumplen las siguientes propiedades para cada $n \in \mathbb{N}$:

- (i) $x_1 = x$,
- (ii) $0 < x_{n+1} < x_n$,
- (iii) $0 < y_{n+1} < y_n$,
- (iv) el punto $(x_n, y_n) \in B$,
- (v) el punto $(x_n, y_{n+1}) \in A$,
- (vi) $h(y_n) = f(x_n) = h(y_{n+1})$.

De las propiedades (ii) y (iii) tenemos que las sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones monotonas decrecientes y acotadas por 0. Se sigue de [14, Theorem 3.14, p. 55] que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes en el compacto $[0, 1]$. Por tanto existen puntos $z, w \in [0, 1]$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = w.$$

2.2. SUBCONTINUOS DE LOS CONJUNTOS DE COINCIDENCIAS 49

Por la propiedad (iv), tenemos que la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión contenida en B . Además por [14, Theorem 3.4 (a), p. 50], tenemos que $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (z, w).$$

Como B es un conjunto compacto, tenemos que el punto $(z, w) \in B$.

De la misma manera, por la propiedad (v), tenemos que la sucesión $\{(x_n, y_{n+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_{n+1}) = (z, w)$ y el punto $(z, w) \in A$.

Tenemos entonces que el punto $(z, w) \in A \cap B = \{(0, 0)\}$, por lo que el punto $(z, w) = (0, 0)$. De lo anterior $z = 0$, $w = 0$.

De la continuidad de f , se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(z) = f(0).$$

Por otro lado de la propiedad (vi), para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = h(y_{n+1}) = f(x_{n+1})$. De estas dos igualdades, tenemos que $f(x_n) = f(x_{n+1})$. Entonces $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la sucesión constante $\{f(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Por la propiedad (i), tenemos que $x_1 = x$, entonces $f(x) = f(x_1) = f(0)$, lo cual es una contradicción. La contradicción nace de suponer que $f(x) \neq f(0)$. Por tanto $f(x) = f(0)$.

Hemos probado que para cada punto x en el intervalo $(0, r)$, $f(x) = f(0)$.

- Si $x = r$. Como f es una función continua y para cada $x \in [0, r)$, $f(x) = f(0)$, entonces $f(r) = f(0)$.

Hemos probado que para cada $x \in [0, r]$, $f(x) = f(0)$.

Por tanto $f([0, r]) = \{f(0)\}$ y la Afirmación 1 queda probada. \square

Afirmación 2. $h([0, b]) = \{f(0)\}$.

Prueba.

Recordemos primero que los puntos $(0, 0)$ y (r, b) son los extremos del arco $B \subset E(f, h)$.

Probaremos que, para cada $y \in [0, b]$, $h(y) = f(0)$.

- Si $y = 0$, entonces $h(y) = h(0) = f(0)$.

- Si $y = b$, como el punto $(r, b) \in B \subset E(f, h)$, tenemos que $h(b) = f(r)$. Además por la Afirmación 1, tenemos que $f(r) = f(0)$. De las igualdades anteriores $h(b) = f(0)$.
- Si y pertenece al intervalo $(0, b)$.

Como los puntos $(0, 0), (r, b) \in B$ y $y \in (0, b)$, tenemos que $\rho_2(B) \cap [0, y] \neq \emptyset$ y $\rho_2(B) \cap (y, r] \neq \emptyset$, como $\rho_2(B)$ es conexo, entonces $\rho_2(B) \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por tanto $([0, r] \times \{y\}) \cap B \neq \emptyset$.

Sea (z, y) un punto en $([0, r] \times \{y\}) \cap B$, como el punto $(z, y) \in B \subset E(f, h)$, entonces $f(z) = h(y)$. Como $z \in [0, r]$ por la Afirmación 1, tenemos que $f(z) = f(0)$, por tanto $h(y) = f(0)$.

Hemos probado que $h([0, b]) = \{f(0)\}$ y terminamos la prueba de la Afirmación 2. \square

De las Afirmaciones 1 y 2, tenemos que $f([0, r]) = \{f(0)\} = h([0, b])$, por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1. Por tanto la 2-celda $[0, r] \times [0, b] \subset E(f, h)$.

Hemos probado que $E(f, h)$ contiene una 2-celda, con esto terminamos la prueba del Caso 1.

Caso 2. $\rho_1(C_1) = \{0\}$ o $\rho_1(C_2) = \{0\}$.

Probaremos el caso en que $\rho_1(C_1) = \{0\}$, el caso en que $\rho_1(C_2) = \{0\}$ se hace de manera similar.

Por la Observación 1.1.8, (1), tenemos que $\rho_2(C_1) \neq \{0\}$.

Sea $A \subset C_2$ un arco con un extremo $(0, 0)$, tal que $\rho_2(A) \subset \rho_2(C_1)$.

Analizaremos los siguientes casos. (En la Figura 3.2 se ilustran los casos que vamos a analizar)

Caso 2.1. $\rho_2(A) = \{0\}$.

Por la Observación 1.1.4, (2), tenemos que $\rho_1(A) \neq \{0\}$, además como $\rho_2(C_1) \neq \{0\}$, tenemos que $\rho_1(A) \times \rho_2(C_1)$ es una 2-celda. Veamos que $\rho_1(A) \times \rho_2(C_1) \subset E(f, h)$.

Sea (x, y) un punto en $\rho_1(A) \times \rho_2(C_1)$. Como $x \in \rho_1(A)$ y $\rho_2(A) = \{0\}$, tenemos que el punto $(x, 0) \in A$, además como $y \in \rho_2(C_1)$ y $\rho_1(C_1) = \{0\}$ tenemos que $(0, y) \in C_1$.

Como los puntos $(x, 0), (0, y) \in (A \cup C_1) \subset E(f, h)$, tenemos que $f(x) = h(0)$ y $f(0) = h(y)$. Además como el punto $(0, 0) \in E(f, h)$, tenemos que $f(0) = h(0)$, de las igualdades anteriores, obtenemos que $f(x) = h(y)$, por tanto el punto $(x, y) \in E(f, h)$.

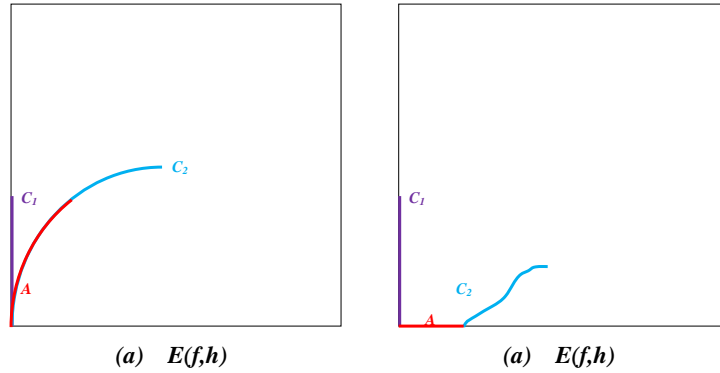


Figura 2.10: (a) Caso 2.1 (b) Caso 2.2

Hemos probado que cualquier punto de $\rho_1(A) \times \rho_2(C_1)$, pertenece a $E(f, h)$.

Concluimos que la 2-celda $\rho_1(A) \times \rho_2(C_1) \subset E(f, h)$, con esto terminamos la prueba del Caso 2.1.

Caso 2.2. $\rho_2(A) \neq \{0\}$.

Veamos que $\rho_1(A)$ es no degenerado. Como $\rho_1(C_1) = \{0\}$ y $C_1 \cap C_2 = \{(0, 0)\}$, entonces $C_2 \cap (\{0\} \times [0, 1]) = \{(0, 0)\}$. Como $A \subset C_2$, entonces $A \cap (\{0\} \times [0, 1]) = \{(0, 0)\}$. Como A es no degenerado entonces $A \cap (0, 1]^2 \neq \emptyset$. Por tanto $\rho_1(A) \neq \{0\}$.

Como $\rho_2(A) \neq \{0\} \neq \rho_1(A)$, tenemos que $\rho_1(A) \times \rho_2(A)$ es una 2-celda. Veamos que $\rho_1(A) \times \rho_2(A) \subset E(f, h)$

Sea (x, y) un punto en $\rho_1(A) \times \rho_2(A)$. Como $x \in \rho_1(A)$ existe un punto $y_1 \in [0, 1]$, tal que el punto $(x, y_1) \in A$.

Además por definición del arco A , tenemos que $\rho_2(A) \subset \rho_2(C_1)$, entonces los puntos $y, y_1 \in \rho_2(C_1)$. Como $\rho_1(C_1) = \{0\}$, tenemos que los puntos $(0, y), (0, y_1) \in C_1$.

Como los puntos $(x, y_1), (0, y), (0, y_1) \in (A \cup C_1) \subset E(f, h)$, tenemos que $f(x) = h(y_1)$, $f(0) = h(y)$ y $f(0) = h(y_1)$, entonces $f(x) = h(y_1) = h(y)$, por lo que $f(x) = h(y)$, por tanto el punto $(x, y) \in E(f, h)$.

Hemos probado que cualquier punto de $\rho_1(A) \times \rho_2(A)$, pertenece a $E(f, h)$.

Concluimos que la 2-celda $\rho_1(A) \times \rho_2(A) \subset E(f, h)$, con esto terminamos la prueba del Caso 2.2.

Hemos probado que en cualquier caso que $E(f, h)$ contiene una 2-celda.

Con esto hemos probado el Caso 2.

Con los Casos 1 y 2 terminamos la prueba del teorema. ■

A continuación definiremos subconjuntos especiales de los conjuntos de coincidencias, los cuales aparecerán en el desarrollo del trabajo.

Definición 2.2.3. Sean $a, b \in [0, 1]$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas, definimos

- $E_1(f, h, a, b) = \{(x, y) \in E(f, h) : x \geq a, y \geq b\}$,
- $E_2(f, h, a, b) = \{(x, y) \in E(f, h) : x \leq a, y \geq b\}$,
- $E_3(f, h, a, b) = \{(x, y) \in E(f, h) : x \leq a, y \leq b\}$,
- $E_4(f, h, a, b) = \{(x, y) \in E(f, h) : x \geq a, y \leq b\}$.

Notemos que los conjuntos dados en la Definición 2.2.3 son subconjuntos cerrados del conjunto de coincidencias de las funciones f y h , notemos también que estos conjuntos pueden llegar a ser vacíos.

Observación 2.2.4. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas. Supongamos que $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ son funciones continuas e inyectivas. Entonces $\varphi : E(f \circ \alpha, h \circ \beta) \rightarrow E(f, h)$ dada por $\varphi((r, s)) = (\alpha(r), \beta(s))$ es un encaje.

Demostración.

Probaremos que φ está bien definida y es una función continua e inyectiva.

Sea $(r, s) \in E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$, entonces $f \circ \alpha(r) = h \circ \beta(s)$, entonces $(\alpha(r), \beta(s)) \in E(f, h)$, por tanto $\varphi((r, s)) \in E(f, h)$. Concluimos que φ está bien definida.

Como α y β son funciones continuas, tenemos que φ es una función continua.

Veamos que φ es una función inyectiva. Sean $(r, s), (r', s')$ puntos de $E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$, tales que $\varphi((r, s)) = \varphi((r', s'))$. Veremos que el punto $(r, s) = (r', s')$.

Por definición de φ obtenemos que $(\alpha(r), \beta(s)) = (\alpha(r'), \beta(s'))$, de donde $\alpha(x) = \alpha(r')$ y $\beta(s) = \beta(s')$. Como α y β son funciones inyectivas tenemos que $r = r'$ y $s = s'$. Por tanto el punto $(r, s) = (r', s')$.

Hemos probado que φ es una función inyectiva.

Como φ es una función continua e inyectiva, φ es un encaje. ■

El siguiente teorema nos da condiciones sobre el conjunto de coincidencias para saber si este contiene un 2 celda.

Teorema 2.2.5. Sean $a, b \in [0, 1]$ y $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas. Si existen $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y un arco $C \subset E_i(f, h, a, b)$ tal que el punto $(a, b) \in C$ y (a, b) no es punto extremo de C entonces $E(f, h)$ contiene una 2-celda.

Demostración.

Vamos a analizar el caso en que $i = 1$, los casos en que $i \in \{2, 3, 4\}$ se hacen de manera similar.

Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow [a, 1]$ como $\alpha(t) = (1 - a)t + a$ y $\beta : [0, 1] \rightarrow [b, 1]$ como $\beta(t) = (1 - b)t + b$.

Definamos $\varphi : E(f \circ \alpha, h \circ \beta) \rightarrow E(f, h)$ dada por $\varphi((x, y)) = (\alpha(x), \beta(y))$, como α y β son funciones continuas, tenemos de la Observación 2.2.4 que φ es un encaje.

Para probar que $E(f, h)$ contiene una 2 celda E , basta probar que $E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$ contiene una 2 celda B , pues $E = \varphi(B)$ es una dos celda contenida en $E(f, h)$. Para lo anterior probaremos que se satisfacen la hipótesis del Teorema 2.2.2.

Afirmación 1. El punto $(0, 0) \in E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$.

Prueba.

Tenemos que $(f \circ \alpha)(0) = f(\alpha(0)) = f((1 - a)0 + a) = f(a)$ y $(h \circ \beta)(0) = h(\beta(0)) = h((1 - b)0 + b) = h(b)$. Además como el punto $(a, b) \in E(f, h)$, tenemos que $f(a) = h(b)$, entonces $f \circ \alpha(0) = h \circ \beta(0)$, por tanto el punto $(0, 0) \in E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$. Hemos probado la Afirmación 1. \square

Afirmación 2. Existe un arco $C' \subset E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$ tal que el punto $(0, 0)$ no es punto extremo de C' .

Prueba.

Por hipótesis existe un arco $C \subset E_1(f, h, a, b)$, tal que el punto (a, b) no es punto extremo de C . Veamos que $C \subset \varphi(E(f \circ \alpha, h \circ \beta))$.

Sea $(x, y) \in C$, como $C \subset E_1(f, h, a, b)$, tenemos que $x \in [a, 1] = \alpha([0, 1])$ y $y \in [b, 1] = \beta([0, 1])$, por lo que existen puntos $r, s \in [0, 1]$, tales que $\alpha(r) = x$ y $\beta(s) = y$.

Además como el punto $(x, y) \in C \subset E(f, h)$, tenemos que $f(x) = h(y)$.

De la definición de r y s , tenemos que

$$(f \circ \alpha)(r) = f(\alpha(r)) = f(x) = h(y) = h(\beta(s)) = (h \circ \beta)(s),$$

por tanto el punto $(r, s) \in E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$. Notemos que $\varphi(r, s) = (\alpha(r), \beta(s)) = (x, y)$. Por tanto el punto $(x, y) \in \varphi(E(f \circ \alpha, h \circ \beta))$. Hemos probado que $C \subset \varphi(E(f \circ \alpha, h \circ \beta))$.

Sea $C' = \varphi^{-1}(C)$, como φ es un encaje tenemos que $C' \subset E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$ es un arco. Además como el punto (a, b) no es punto extremo de C y $\{(0, 0)\} = \varphi^{-1}((a, b))$, tenemos que el punto $(0, 0)$ no es punto extremo de C' .

Hemos probado la Afirmación 2. \square

De las Afirmaciones 1 y 2 tenemos que existe un arco $C' \subset E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$ tal que el punto $(0, 0) \in C'$ y $(0, 0)$ no es punto extremo de C' , por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.2. Por tanto tenemos que $E(f \circ \alpha, h \circ \beta)$ contiene una 2-celda B .

Definamos $E = \varphi(B)$, dado que φ es un encaje tenemos que E es una 2-celda, por tanto $E(f, h)$ contiene una 2-celda E .

Hemos terminado la prueba del caso $i = 1$, la prueba de los casos en que $i \in \{2, 3, 4\}$ se hacen de manera similar, definiendo α y β que depende de $E_i(f, h, a, b)$. \blacksquare

En el siguiente teorema daremos condiciones sobre las funciones del conjunto de coincidencias para probar que este contiene una curva cerrada simple.

Lema 2.2.6. Sean $f, h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas. Supongamos que existen puntos $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3 \in [0, 1]$ con $r_1 < r_2 < r_3$ y $s_1 < s_2 < s_3$ tales que $f[r_1, r_3] = h[s_1, s_3]$, $f(r_1) = h(s_2) = f(r_3)$, $h(s_1) = f(r_2) = h(s_3)$, $f(r_1) = \max(f[r_1, r_3])$, $f(r_2) = \min(f[r_1, r_3])$.

Si las componentes de $E(f, h)$ son arco conexas, entonces $E(f, h)$ contiene una curva cerrada simple.

Demostración.

Por definición de $f(r_1)$ y de $f(r_2)$, obtenemos que $f(r_1) \geq f(r_2)$, por lo que analizaremos los siguientes casos:

Caso 1 $f(r_2) < f(r_1)$.

Vamos a probar que existen arcos $A_1, A_2, A_3, A_4 \subset E(f, h)$ tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ es una curva cerrada simple como se muestran en la Figura 2.12.

Definamos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que para cada $t \in [0, 1]$

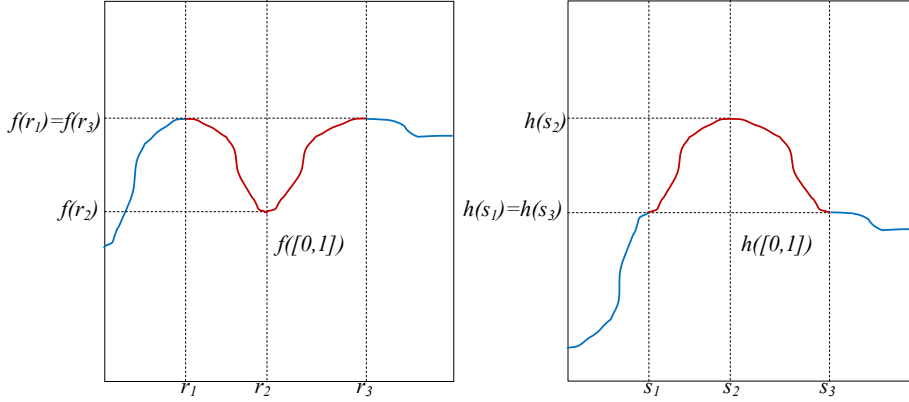


Figura 2.11:

- $\alpha_1(t) = (r_1 - r_2)t + r_2,$
- $\alpha_2(t) = (r_3 - r_2)t + r_2,$
- $\beta_1(t) = (s_2 - s_1)t + s_1,$
- $\beta_2(t) = (s_2 - s_3)t + s_3.$

Como f , h , α_1 , α_2 , β_1 y β_2 son funciones continuas, entonces $f \circ \alpha_1$, $f \circ \alpha_2$, $h \circ \beta_1$ y $h \circ \beta_2$, son funciones continuas.

Notemos que

- $\alpha_1([0, 1]) = [r_1, r_2], \alpha_1(0) = r_2, \alpha_1(1) = r_1,$
- $\alpha_2([0, 1]) = [r_2, r_3], \alpha_2(0) = r_2, \alpha_2(1) = r_3,$
- $\beta_1([0, 1]) = [s_1, s_2], \beta_1(0) = s_1, \beta_1(1) = s_2,$
- $\beta_2([0, 1]) = [s_2, s_3], \beta_2(0) = s_3, \beta_2(1) = s_2.$

Afirmación 1. Dados $i, j \in 1, 2$, si $E_{i,j}$ es la componente de $E(f \circ \alpha_i, h \circ \beta_j)$ que contiene al punto $(0, 0)$ entonces $E_{i,j}$ contiene al punto $(1, 1)$.

Prueba.

Haremos la prueba para cuando $i = 1, j = 2$ la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

Veremos que las hipótesis del Teorema 2.1.6 se satisfacen para las funciones $f \circ \alpha_1$ y $h \circ \beta_2$ y para los puntos $f(r_2), f(r_1) \in [0, 1]$.

Veamos que $f \circ \alpha_1, h \circ \beta_2 : [0, 1] \rightarrow [f(r_2), f(r_1)]$.

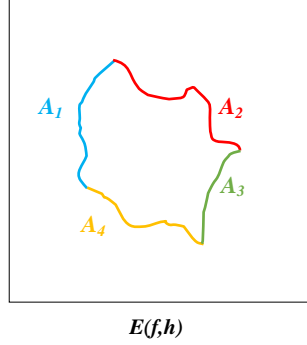


Figura 2.12:

Tenemos que $f \circ \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow f[r_1, r_2]$ y $h \circ \beta_2 : [0, 1] \rightarrow h[s_2, s_3]$, además por hipótesis $f[r_1, r_3] = h[s_1, s_3]$, $f(r_1) = h(s_2) = f(r_3)$, $h(s_1) = f(r_2) = h(s_3)$, $f(r_1) = \max(f[r_1, r_3])$, $f(r_2) = \min(f[r_1, r_3])$, por lo que $f[r_1, r_2] = h[s_2, s_3] = [f(r_2), f(r_1)]$. De lo anterior tenemos que $f \circ \alpha_1, h \circ \beta_2 : [0, 1] \rightarrow [f(r_2), f(r_1)]$.

Veamos que $(f \circ \alpha_1)(0) = f(r_2) = (h \circ \beta_2)(0)$ y $(f \circ \alpha_1)(1) = f(r_1) = (h \circ \beta_2)(1)$.

Tenemos que $(f \circ \alpha_1)(0) = f(\alpha_1(0)) = f(r_2)$ y $(h \circ \beta_2)(0) = h(\beta_2(0)) = h(s_3)$, por hipótesis, tenemos que $f(r_2) = h(s_3)$, por tanto $(f \circ \alpha_1)(0) = f(r_2) = (h \circ \beta_2)(0)$.

Por otro lado tenemos que $(f \circ \alpha_1)(1) = f(\alpha_1(1)) = f(r_1)$ y $(h \circ \beta_2)(1) = h(\beta_2(1)) = h(s_2)$, por hipótesis, tenemos que $f(r_1) = h(s_2)$, por tanto $(f \circ \alpha_1)(1) = f(r_1) = (h \circ \beta_2)(1)$.

Hemos probado que las hipótesis del Teorema 2.1.6 se satisfacen, por tanto si $E_{1,2}$ es la componente de $E(f \circ \alpha_1, h \circ \beta_2)$ que contiene al punto $(0, 0)$, entonces $E_{1,2}$ contiene al punto $(1, 1)$. \square

Dados $i, j \in \{1, 2\}$, definamos $\varphi_{i,j} : E(f \circ \alpha_i, h \circ \beta_j) \rightarrow E(f, h)$ dada por $\varphi_{i,j}(r, s) = (\alpha_i(r), \beta_j(s))$, como α_i y β_j son funciones continuas e inyectivas por la Observación 2.2.4, tenemos que $\varphi_{i,j}$ es un encaje.

Por hipótesis las componentes de $E(f, h)$ son arco conexas y como $\varphi_{i,j}$ es un encaje tenemos que las componentes de $E(f \circ \alpha_i, h \circ \beta_j)$ son arco conexas. Por tanto $E_{i,j}$ es arco conexa.

Sea $B_{i,j} \subset E_{i,j}$ un arco con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Definamos $A_{i,j} = \varphi_{i,j}(B_{i,j})$, $p_{i,j} = \varphi_{i,j}((0, 0))$ y $q_{i,j} = \varphi_{i,j}((1, 1))$.

Veamos que los arcos $A_{i,j}$ satisfacen la siguiente Afirmación.

Afirmación 2 Dados $i, j \in \{1, 2\}$, con $i \neq j$, se cumplen las siguientes propiedades :

- (1) $A_{i,i} \cap A_{j,j} = \emptyset$,
- (2) $A_{i,j} \cap A_{j,i} = \emptyset$,
- (3) $p_{i,i} = p_{j,i}$,
- (4) $q_{i,i} = q_{i,j}$.

Prueba.

Haremos la prueba del inciso (1), la prueba del inciso (2) se hace de manera similar.

- (1) $A_{i,i} \cap A_{j,j} = \emptyset$.

Supongamos $i = 1, j = 2$. Supongamos por el contrario que $A_{1,1} \cap A_{2,2} \neq \emptyset$.

Sea $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{2,2}$, por definición $A_{1,1} = \varphi_{1,1}(B_{1,1})$ y $A_{2,2} = \varphi_{2,2}(B_{2,2})$, entonces existen puntos $(r', s') \in B_{1,1}$ y $(r'', s'') \in B_{2,2}$ tales que $\varphi_{1,1}((r', s')) = (r, s) = \varphi_{2,2}((r'', s''))$.

De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{2,2}$ tenemos que $(r, s) = (\alpha_1(r'), \beta_1(s')) \in [r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$ y $(r, s) = (\alpha_2(r''), \beta_2(s'')) \in [r_2, r_3] \times [s_2, s_3]$, entonces $(r, s) = (r_2, s_2)$.

Como $(r, s) = (r_2, s_2) \in A_{1,1} \cap A_{2,2} \subset E(f, h)$, tenemos que $f(r_2) = h(s_2)$ y por hipótesis $h(s_2) = f(r_1)$, entonces $f(r_2) = f(r_1)$ lo cual contradice la hipótesis del Caso 1.

La contradicción nace de suponer que $A_{1,1} \cap A_{2,2} \neq \emptyset$. Por tanto $A_{1,1} \cap A_{2,2} = \emptyset$. De manera similar se prueba que $A_{1,2} \cap A_{2,1} = \emptyset$.

- (3) $p_{i,i} = p_{j,i}$,

Haremos la prueba para cuando $i = 1, j = 2$, la prueba para cuando $i = 2$ y $j = 1$ se hace de manera similar.

Por definición $p_{1,1} = \varphi_{1,1}((0, 0))$ y $p_{2,1} = \varphi_{2,1}((0, 0))$. De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{2,1}$ tenemos que $p_{1,1} = \varphi_{1,1}((0, 0)) = (\alpha_1(0), \beta_1(0)) = (r_2, s_1)$ y $p_{2,1} = \varphi_{2,1}((0, 0)) = (\alpha_2(0), \beta_1(0)) = (r_2, s_1)$. Por tanto $p_{1,1} = (r_2, s_1) = p_{2,1}$.

De manera similar obtenemos que $p_{2,2} = (r_2, s_3) = p_{1,2}$.

- (4) $q_{i,i} = q_{i,j}$.

Haremos la prueba para cuando $i = 1, j = 2$, la prueba para cuando $i = 2$ y $j = 1$ se hace de manera similar.

Por definición $q_{1,1} = \varphi_{1,1}((1, 1))$ y $q_{1,2} = \varphi_{1,2}((1, 1))$. De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{1,2}$ tenemos que $q_{1,1} = \varphi_{1,1}((1, 1)) = (\alpha_1(1), \beta_1(1)) = (r_1, s_2)$ y $q_{2,1} = \varphi_{2,1}((1, 1)) = (\alpha_1(1), \beta_2(1)) = (r_1, s_2)$. Por tanto $q_{1,1} = (r_1, s_2) = q_{2,1}$.

De maner similar obtenemos que $q_{2,2} = (r_3, s_2) = p_{2,1}$. \square

Afirmación 3

(1) Si $(r, s) \in A_{i,i} \cap A_{i,j}$, entonces $s = s_2$.

(2) Si $(r, s) \in A_{i,i} \cap A_{j,i}$, entonces $r = r_2$.

Prueba.

Haremos la prueba para cuando $i = 1, j = 2$, la prueba para cuando $i = 2, j = 1$ se hace de manera similar.

Si $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{1,2}$, por definición $A_{1,1} = \varphi_{1,1}(B_{1,1})$ y $A_{1,2} = \varphi_{1,2}(B_{1,2})$, entonces existen puntos $(r', s') \in B_{1,1}$ y $(r'', s'') \in B_{1,2}$, tales que

$$\varphi_{1,1}((r', s')) = (r, s) = \varphi_{1,2}((r'', s'')).$$

De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{1,2}$ tenemos que $(r, s) = (\alpha_1(r'), \beta_1(s')) \in [r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$ y $(r, s) = (\alpha_1(r''), \beta_2(s'')) \in [r_1, r_2] \times [s_2, s_3]$, de donde $s = s_2$.

De manera similar si $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{2,1}$ entonces $r = r_2$. Así la Afirmación 3 queda probada. \square

De la Afirmación 3 y la definición de los arcos $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$, tenemos que

- $A_{1,1} \cap A_{1,2} \subset \{(r, s) \in E(f, h) : r \in [r_1, r_2] \text{ y } s = s_2\}$,
- $A_{2,2} \cap A_{2,1} \subset \{(r, s) \in E(f, h) : r \in [r_2, r_3] \text{ y } s = s_2\}$,
- $A_{1,1} \cap A_{2,1} \subset \{(r, s) \in E(f, h) : r = r_2 \text{ y } s \in [s_1, s_2]\}$,
- $A_{2,2} \cap A_{1,2} \subset \{(r, s) \in E(f, h) : r = r_2 \text{ y } s \in [s_2, s_3]\}$.

Definamos

- $a_1 = \text{máx}\{r \in [r_1, r_2] : (r, s_2) \in A_{1,1} \cap A_{1,2}\} = \text{máx}\varrho_1(A_{1,1} \cap A_{1,2})$,
- $a_2 = \text{mín}\{r \in [r_2, r_3] : (r, s_2) \in A_{2,2} \cap A_{2,1}\} = \text{mín}\varrho_1(A_{2,2} \cap A_{2,1})$,
- $b_1 = \text{máx}\{s \in [s_1, s_2] : (r_2, s) \in A_{1,1} \cap A_{2,1}\} = \text{máx}\varrho_2(A_{1,1} \cap A_{2,1})$,
- $b_2 = \text{mín}\{r \in [s_2, s_3] : (r_2, s) \in A_{2,2} \cap A_{1,2}\} = \text{mín}\varrho_2(A_{2,2} \cap A_{1,2})$.

Los puntos a_1, a_2, b_1 y b_2 están bien definidos, pues los conjuntos $A_{i,i} \cap A_{i,j}$ y $A_{i,i} \cap A_{j,i}$ son subconjuntos cerrados de $E(f, h)$ y por tal de $[0, 1]^2$.

Notemos que $a_1 < r_2 < a_2$ y $b_1 < s_2 < b_2$, pues de lo contrario $a_i = r_2$ o $b_i = s_2$, entonces el punto $(r_2, s_2) \in E(f, h)$, por lo que $f(r_2) = h(s_2)$, además por hipótesis $h(s_2) = f(r_1)$, entonces $f(r_2) = f(r_1)$ lo cual contradice la hipótesis del Caso 1.

Definamos

- $A_1 \subset A_{1,1}$ el arco con puntos extremos (a_1, s_2) y (b_1, r_2) ,
- $A_2 \subset A_{2,1}$ el arco con puntos extremos (b_1, r_2) y (a_2, s_2) ,
- $A_3 \subset A_{2,2}$ el arco con puntos extremos (a_2, s_2) y (b_2, r_2)
- $A_4 \subset A_{1,2}$ el arco con puntos extremos (b_2, r_2) y (a_1, s_2) .

Tenemos que los arcos A_i satisfacen las siguientes propiedades.

- (1) $A_1 \cap A_3 = \emptyset$,
- (2) $A_2 \cap A_4 = \emptyset$,
- (3) $A_1 \cap A_2 = \{(b_1, r_2)\}$,
- (4) $A_1 \cap A_4 = \{(a_1, s_2)\}$,
- (5) $A_3 \cap A_2 = \{(a_2, s_2)\}$,
- (6) $A_3 \cap A_4 = \{(b_2, r_2)\}$.

De las propiedades (1)-(6) concluimos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ una curva cerrada simple.

Por tanto Caso 1 queda probado.

Caso 2. $f(r_1) = f(r_2)$

Por hipótesis $f(r_1) = \text{máx}(f[r_1, r_3])$, $f(r_2) = \text{mín}(f[r_1, r_3])$ y $f[r_1, r_3] = h[s_1, s_3]$, por lo que $f[r_1, r_3] = \{f(r_1)\} = h[s_1, s_3]$, por tanto se satisfacen la hipótesis del Teorema 2.2.1, por tanto la 2-celda $[r_1, r_3] \times [s_1, s_3] \subset E[f, h]$, concluimos que $E[f, h]$ contiene una curva cerrada simple.

De los casos 1 y 2 el teorema queda demostrado. ■

En el siguiente teorema daremos condiciones sobre las funciones del conjunto de coincidencias para probar que este contiene un triodo simple.

Lema 2.2.7. Dados puntos $u, v \in [0, 1]$ con $u \leq v$ y funciones continuas $f, h : [0, 1] \rightarrow [u, v]$. Supongamos que existen puntos $r_1, r_2, r_3, s_1, s_2, s_3 \in [0, 1]$ con $r_1 < r_2 < r_3$ y $s_1 < s_2 < s_3$, tales que $f[r_1, r_3] = h[s_1, s_3]$,

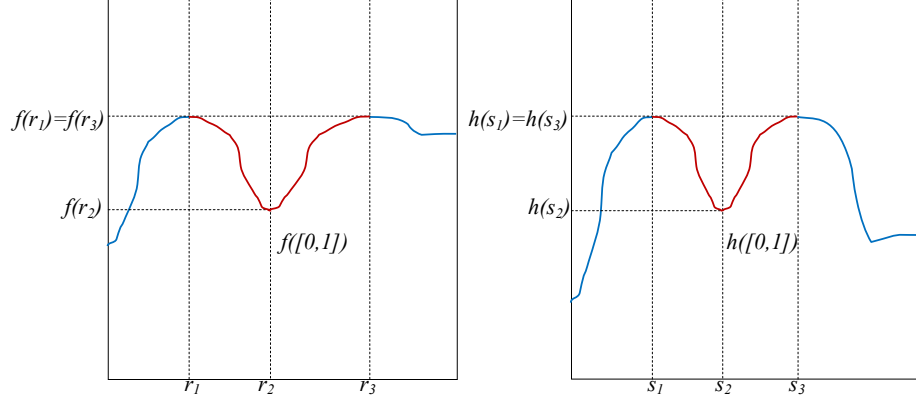


Figura 2.13:

$f(r_1) = f(r_3) = h(s_1) = h(s_3)$, $f(r_2) = h(s_2)$, $f(r_1) = \max(f[r_1, r_3])$,
 $f(r_2) = \min(f[r_1, r_3])$.

Si las componentes de $E(f, h)$ son arco conexas, entonces $E(f, h)$ contiene un triodo simple con vértice (r_2, s_2) .

Demostración.

Por definición de $f(r_1)$ y de $f(r_2)$, obtenemos que $f(r_1) \geq f(r_2)$, por lo que analizaremos los siguientes casos:

Caso 1 $f(r_2) < f(r_1)$

Vamos a probar que existen arcos $A_1, A_2, A_3 \subset E(f, h)$ tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo simple como se muestra en la Figura 2.14.

Definamos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que para cada $t \in [0, 1]$

- $\alpha_1(t) = (r_1 - r_2)t + r_2$, ▪ $\beta_1(t) = (s_1 - s_2)t + s_2$.
- $\alpha_2(t) = (r_3 - r_2)t + r_2$, ▪ $\beta_2(t) = (s_3 - s_2)t + s_2$.

Notemos que para cada $i \in \{1, 2\}$, α_i y β_i son funciones continuas e inyectivas, por lo que $f \circ \alpha_1$, $f \circ \alpha_2$, $h \circ \beta_1$ y $h \circ \beta_2$ son funciones continuas.

Notemos también que

- $\alpha_1([0, 1]) = [r_1, r_2]$, $\alpha_1(0) = r_2$, $\alpha_1(1) = r_1$,
- $\alpha_2([0, 1]) = [r_2, r_3]$, $\alpha_2(0) = r_2$, $\alpha_2(1) = r_3$,

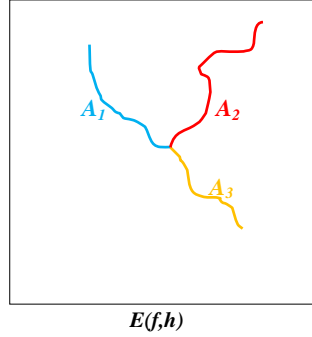


Figura 2.14:

- $\beta_1([0, 1]) = [s_1, s_2]$, $\beta_1(0) = s_2$, $\beta_1(1) = s_1$,
- $\beta_2([0, 1]) = [s_2, s_3]$, $\beta_1(0) = s_2$, $\beta_1(1) = s_3$,

Afirmación 1. Dados $i, j \in 1, 2$, si $E_{i,j}$ es la componente de $E(f \circ \alpha_i, h \circ \beta_j)$ que contiene al punto $(0, 0)$ entonces $E_{i,j}$ contiene al punto $(1, 1)$.

Prueba.

Haremos la prueba para cuando $i = 1 = j$ la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

Veremos que las hipótesis del Teorema 2.1.6 se satisfacen para las funciones $f \circ \alpha_1$ y $h \circ \beta_1$ y para los puntos $f(r_2), f(r_1) \in [0, 1]$.

Veamos que $f \circ \alpha_1, h \circ \beta_2 : [0, 1] \rightarrow [f(r_2), f(r_1)]$.

Tenemos que $f \circ \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow [f(r_1), r_2]$ y $h \circ \beta_1 : [0, 1] \rightarrow h[s_1, s_2]$, además por hipótesis $f[r_1, r_3] = h[s_1, s_3]$, $f(r_1) = h(s_2) = f(r_3)$, $h(s_1) = f(r_2) = h(s_3)$, $f(r_1) = \max(f[r_1, r_3])$, $f(r_2) = \min(f[r_1, r_3])$, por lo que $f[r_1, r_2] = h[s_1, s_2] = [f(r_2), f(r_1)]$. De lo anterior, tenemos que $f \circ \alpha_1, h \circ \beta_1 : [0, 1] \rightarrow [f(r_2), f(r_1)]$.

Veamos que $(f \circ \alpha_1)(0) = f(r_2) = (h \circ \beta_1)(0)$ y $(f \circ \alpha_1)(1) = f(r_1) = (h \circ \beta_1)(1)$.

Tenemos que $(f \circ \alpha_1)(0) = f(\alpha_1(0)) = f(r_2)$ y $(h \circ \beta_1)(0) = h(\beta_1(0)) = h(s_2)$. Por hipótesis, tenemos que $f(r_2) = h(s_2)$, por tanto $(f \circ \alpha_1)(0) = f(r_2) = (h \circ \beta_2)(0)$.

Por otro lado, tenemos que $(f \circ \alpha_1)(1) = f(\alpha_1(1)) = f(r_1)$ y $(h \circ \beta_1)(1) = h(\beta_1(1)) = h(s_1)$. Por hipótesis tenemos que $f(r_1) = h(s_1)$, por tanto $(f \circ \alpha_1)(1) = f(r_1) = (h \circ \beta_2)(1)$.

Hemos probado que las hipótesis del Teorema 2.1.6 se satisfacen, por tanto si $E_{1,1}$ es la componente de $E(f \circ \alpha_1, h \circ \beta_2)$ que contiene al punto $(0, 0)$ entonces $E_{1,1}$ contiene al punto $(1, 1)$. \square

Dados $i, j \in \{1, 2\}$, definamos $\varphi_{i,j} : E(f \circ \alpha_i, h \circ \beta_j) \rightarrow E(f, h)$ dada por $\varphi_{i,j}(r, s) = (\alpha_i(r), \beta_j(s))$, como α_i y β_j son funciones continuas e inyectivas por la (Observación 2.2.4), tenemos que $\varphi_{i,j}$ es un encaje.

Por hipótesis las componentes de $E(f, h)$ son arco conexas y como $\varphi_{i,j}$ es un encaje tenemos que las componentes de $E(f \circ \alpha_i, h \circ \beta_j)$ son arco conexas. Por tanto $E_{i,j}$ es arco conexa.

Sea $B_{i,j} \subset E_{i,j}$ un arco con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Definamos $A_{i,j} = \varphi_{i,j}(B_{i,j})$, $p_{i,j} = \varphi_{i,j}((0, 0))$ y $q_{i,j} = \varphi_{i,j}((1, 1))$.

Veamos que los arcos $A_{i,j}$ satisfacen la siguiente Afirmación.

Afirmación 2 Dados $i, j \in \{1, 2\}$, si $i \neq j$, entonces se cumplen las siguientes propiedades :

- (1) $p_{i,i} = p_{j,i}$,
- (2) $q_{i,i} \neq q_{i,j}$,
- (3) $A_{i,i} \cap A_{j,j} = \{p_{i,i}\}$,
- (4) $A_{i,j} \cap A_{j,i} = \{p_{i,j}\}$.

Prueba.

- (1) $p_{i,i} = p_{j,i}$.

Haremos la prueba para cuando $i = 1, j = 2$, la prueba para cuando $i = 2$ y $j = 1$ se hace de manera similar.

Por definición $p_{1,1} = \varphi_{1,1}((0, 0))$ y $p_{2,1} = \varphi_{2,1}((0, 0))$. De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{2,1}$ tenemos que $p_{1,1} = \varphi_{1,1}((0, 0)) = (\alpha_1(0), \beta_1(0)) = (r_2, s_2)$ y $p_{2,1} = \varphi_{2,1}((0, 0)) = (\alpha_2(0), \beta_1(0)) = (r_2, s_2)$. Por tanto $p_{1,1} = (r_2, s_2) = p_{2,1}$.

De maner similar obtenemos que $p_{2,2} = (r_2, s_2) = p_{1,2}$.

- (2) $q_{i,i} \neq q_{i,j}$.

Haremos la prueba para cuando $i = 1, j = 2$, la prueba para cuando $i = 2$ y $j = 1$ se hace de manera similar.

Por definición $q_{1,1} = \varphi_{1,1}((1, 1))$ y $q_{1,2} = \varphi_{1,2}((1, 1))$. De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{1,2}$ tenemos que $q_{1,1} = \varphi_{1,1}((1, 1)) = (\alpha_1(1), \beta_1(1)) = (r_1, s_1)$ y $q_{2,1} = \varphi_{2,1}((1, 1)) = (\alpha_1(1), \beta_2(1)) = (r_1, s_3)$. Por tanto $q_{1,1} = (r_1, s_1) \neq (r_1, s_3) = q_{2,1}$.

- (3) $A_{i,i} \cap A_{j,j} = \{p_{i,i}\}$.

Supongamos $i = 1, j = 2$.

2.2. SUBCONTINUOS DE LOS CONJUNTOS DE COINCIDENCIAS 63

Sea $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{2,2}$ Sea $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{2,2}$, por definición $A_{1,1} = \varphi_{1,1}(B_{1,1})$ y $A_{2,2} = \varphi_{2,2}(B_{2,2})$, entonces existen puntos $(r', s') \in B_{1,1}$ y $(r'', s'') \in B_{2,2}$ tales que $\varphi_{1,1}((r', s')) = (r, s) = \varphi_{2,2}((r'', s''))$.

De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{2,2}$ tenemos que $(r, s) = (\alpha_1(r'), \beta_1(s')) \in [r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$ y $(r, s) = (\alpha_2(r''), \beta_2(s'')) \in [r_2, r_3] \times [s_2, s_3]$, entonces $(r, s) = (r_2, s_2)$.

La prueba del inciso (4) se hace de manera similar a la prueba del inciso (3).

Afirmación 3 Si $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{1,2}$, entonces $s = s_2$.

Prueba.

Sea $(r, s) \in A_{1,1} \cap A_{1,2}$, por definición $A_{1,1} = \varphi_{1,1}(B_{1,1})$ y $A_{1,2} = \varphi_{1,2}(B_{1,2})$, entonces existen puntos $(r', s') \in B_{1,1}$ y $(r'', s'') \in B_{1,2}$ tales que $\varphi_{1,1}((r', s')) = (r, s) = \varphi_{1,2}((r'', s''))$.

De la definición de $\varphi_{1,1}$ y $\varphi_{2,2}$ tenemos que $(r, s) = (\alpha_1(r'), \beta_1(s')) \in [r_1, r_2] \times [s_1, s_2]$ y $(r, s) = (\alpha_1(r''), \beta_2(s'')) \in [r_1, r_2] \times [s_2, s_3]$, entonces $s = s_2$. \square

De la Afirmación 3, tenemos que $A_{1,1} \cap A_{1,2} \subset \{(r, s) \in E(f, h) : r \in [r_1, r_2] \text{ y } s = s_2\}$.

Definamos $a = \min\{r \in [r_1, r_2] : (r, s_2) \in A_{1,1} \cap A_{1,2}\} = \min \rho_1(A_{1,1} \cap A_{1,2})$, como $A_{1,1} \cap A_{1,2}$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tenemos que a esta bien definido.

Notemos que $a > r_1$, pues si $a = r_1$, entonces el punto $(r_1, s_2) \in E(f, h)$ de donde $f(r_1) = h(s_2)$, por hipótesis $f(r_2) = h(s_2)$, entonces $f(r_2) = f(r_1)$, lo cual contradice la hipótesis del Caso 1.

Definamos $A_1 \subset A_{1,1}$ el arco con puntos extremos (a, s_2) , $p_{1,1}$, $A_2 \subset A_{1,1}$ el arco con puntos extremos (a, s_2) , $q_{1,1}$ y $A_3 \subset A_{1,2}$ el arco con puntos extremos (a, s_2) y $q_{1,2}$, notemos que los arcos A_1, A_2, A_3 , satisfacen que

$$(1) A_i \cap A_j = \{(a, s_2)\}$$

Por tanto $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un triodo simple.

Por tanto Caso 1 queda probado.

Caso 2. $f(r_1) = f(r_2)$

Recordemos que por hipótesis $f(r_1) = \max(f[r_1, r_3])$, $f(r_2) = \min(f[r_1, r_3])$ y $f[r_1, r_3] = h[s_1, s_3]$, por lo que $f[r_1, r_3] = \{f(r_1)\} = h[s_1, s_3]$, por tanto se satisfacen la hipótesis del Teorema 2.2.1, por tanto la 2-celda $[r_1, r_3] \times [s_1, s_3] \subset E[f, h]$, concluimos que $E[f, h]$ contiene un triodo simple.

De los Casos 1 y 2 el teorema queda demostrado.



Capítulo 3

Relación entre los conjuntos de coincidencias y los límites inversos

Recordemos que M denota un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$.

Es este capítulo damos la relación que existe entre los conjuntos de coincidencias y $\varprojlim M$, los conjuntos G_k y M , lo cual que nos permitira obtener información de $\varprojlim M$, los conjuntos G_k y M .

3.1. Encajes

Es esta sección relacionaremos los conjuntos de coincidencias con $\varprojlim M$, los conjuntos G_k y M . Definimos bajo condiciones especiales encajes de los conjuntos de coincidencias a $\varprojlim M$ y los conjuntos G_k .

Estos encajes nos serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo.

Recordemos que dado $j \in \mathbb{N}$ y funciones $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^j$, $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^\infty$, entonces $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_j)$ y $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots)$. Además dados $i, k, n \in \mathbb{N}$, con $i \leq j$ y $k \leq i$ $\mathbf{f}_1^i = (f_1, f_2, \dots, f_i)$, $\mathbf{f}_k^i = (f_k, f_{k+1}, \dots, f_i)$ $\mathbf{h}_1^n = (h_1, h_2, \dots, h_n)$

Lema 3.1.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $k, l \in \mathbb{N}$ y $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow G_k$, $\mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow G_l$, $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas. Dados $i \leq k + 1$, $j \leq l + 1$, $n \in \mathbb{N}$, tales que $E(f_i, g_j) \neq \emptyset \neq E(f_i, h_n)$. Definimos

- $\varphi : E(f_i, g_j) \rightarrow G_{i+l-j},$
- $\phi : E(f_i, g_j) \rightarrow G_{j+k-i},$
- $\chi : E(f_i, h_n) \rightarrow \varprojlim M,$
- $\psi : E(f_i, h_n) \rightarrow G_{n+k-i},$

como siguen:

- para cada punto $(x, y) \in E(f_i, g_j),$
 $\varphi((x, y)) = (f_1(x), \dots, f_i(x), g_{j+1}(y), \dots, g_{l+1}(y)),$
- para cada punto $(x, y) \in E(f_i, h_n),$
 $\chi((x, y)) = (f_1(x), \dots, f_i(x), h_{n+1}(y), h_{n+2}(y), \dots),$
- para cada punto $(x, y) \in E(f_i, g_j),$
 $\phi((x, y)) = (g_1(x), \dots, g_j(x), f_{i+1}(y), \dots, f_{k+1}(y)),$
- para cada punto $(x, y) \in E(f_i, h_n),$
 $\psi((x, y)) = (h_1(x), \dots, h_n(x), f_{i+1}(y), \dots, f_{k+1}(y)).$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) $\varphi, \chi, \phi, \psi,$ están bien definidas y son continuas.
- (2) Si $\mathbf{f}_1^i : [0, 1] \rightarrow G_{i-1}$ y $\mathbf{g}_j^{l+1} : [0, 1] \rightarrow G_{l-j},$ son funciones inyectivas, entonces φ es un encaje.
- (3) Si $\mathbf{f}_1^i : [0, 1] \rightarrow G_{i-1}$ y $\mathbf{h}_n^\infty : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ son funciones inyectivas, entonces χ es un encaje.
- (4) Si $\mathbf{g}_1^j : [0, 1] \rightarrow G_{j-1}$ y $\mathbf{f}_i^{k+1} : [0, 1] \rightarrow G_{k-i}$ son funciones inyectivas, entonces ϕ es un encaje.
- (5) Si $\mathbf{h}_1^n : [0, 1] \rightarrow G_{n-1}$ y $\mathbf{f}_i^{k+1} : [0, 1] \rightarrow G_{k-i},$ son funciones inyectivas, entonces ψ es un encaje.

Demostración.

- (1) $\varphi, \chi, \phi, \psi,$ están bien definidas y son continuas.

Probaremos que φ está bien definida y es continua, que $\chi, \phi, \psi,$ estan bien definidas y son continuas, se prueba de manera similar.

Primero probaremos que φ está bien definida, para lo cual veremos que dado un punto $(x, y) \in E(f_i, g_j), \varphi((x, y)) \in G_{i+l-j}.$ Para lo cual probaremos que para cada $r \in \{1, 2, \dots, i+l-1\},$ el punto $(\pi_{r+1}(\varphi((x, y))), \pi_r(\varphi(x, y))) \in M.$

- Sea $1 \leq r \leq i-1.$

Por hipótesis, $\mathbf{f}([0, 1]) \subset G_k.$ Entonces por definición de φ y de $G_k,$ tenemos que el punto

$$(\pi_{r+1}(\varphi((x, y))), \pi_r(\varphi((x, y)))) = (f_{r+1}(x), f_r(x)) \in M.$$

- Sea $r = i$.

Como el punto $(x, y) \in E(f_i, g_j)$, tenemos que $f_i(x) = g_j(y)$, de esta igualdad y por definición de φ , tenemos que el punto

$$\begin{aligned} (\pi_{r+1}(\varphi((x, y))), \pi_r(\varphi((x, y)))) &= (\pi_{i+1}(\varphi((x, y))), \pi_i(\varphi((x, y)))) \\ &= (g_{j+1}(y), f_i(x)) = (f_{i+1}(x), f_i(x)). \end{aligned}$$

Además por hipótesis $\mathbf{f}([0, 1]) \subset G_k$, entonces el punto $(f_{i+1}(x), f_i(x)) \in M$. Por tanto el punto $(\pi_{i+1}(\varphi((x, y))), \pi_i(\varphi((x, y)))) \in M$.

- Sea $i + 1 \leq r \leq i + l - j$.

Por hipótesis $\mathbf{g}([0, 1]) \subset G_l$. Entonces por la definición de φ y de G_l tenemos que el punto

$$(\pi_{r+1}(\varphi((x, y))), \pi_r(\varphi((x, y)))) = (g_{j+r-i+1}(y), g_{j+r-i}(y)) \in M.$$

Así para cada $r \in \{1, 2, \dots, i + l - 1\}$, $(\pi_{r+1}(\varphi((x, y))), \pi_r(\varphi((x, y)))) \in M$. Por tanto la función φ está bien definida.

Veamos que φ es una función continua.

Para $r \geq i$, $\pi_r(\varphi) = f_r$ y para $i + 1 \leq r \leq i + l - j + 1$, $\pi_r(\varphi) = g_{j+r-i}$, como f_r, g_{j+r-i} son funciones continuas, concluimos que φ es una función continua.

(2) Si $f_1^i : [0, 1] \rightarrow G_{i-1}$ y $g_j^{l+1} : [0, 1] \rightarrow G_{l-j}$, son funciones inyectivas, entonces φ , es un encaje.

Por (1), tenemos que φ es un función continua, por lo que resta probar que φ es un función inyectiva.

Sean $(x, y), (x', y') \in E(f_i, g_j)$ puntos que satisfacen $\varphi((x, y)) = \varphi((x', y'))$, probaremos que el punto $(x, y) = (x', y')$.

Como $\varphi((x, y)) = \varphi((x', y'))$, tenemos que

$$\begin{aligned} &(f_1(x), \dots, f_i(x), g_{j+1}(y), \dots, g_{l+1}(y)) \\ &= (f_1(x'), \dots, f_i(x'), g_{j+1}(y'), \dots, g_{l+1}(y')). \end{aligned}$$

De esta igualdad, tenemos que para cada $1 \leq r \leq i$ $f_r(x) = f_r(x')$ y para cada $j \leq r \leq l + 1$, $g_r(x) = g_r(y')$.

Por lo que $f_1^i(x) = f_1^i(x')$ y $g_j^{l+1}(y) = g_j^{l+1}(y')$, recordemos, que por hipótesis f_1^i y g_j^{l+1} son funciones inyectivas, por lo que $x = x'$ y $y = y'$, por tanto el punto $(x, y) = (x', y')$. Concluimos φ es una función inyectiva.

Hemos probado que φ es una función continua e inyectiva. Por tanto φ es un encaje.

La prueba de los incisos (3), (4) y (5) se hacen de manera similar a la prueba del inciso (2). ■

Los siguientes corolarios, son casos particulares del Teorema 3.1.1, los cuales estaremos utilizando a lo largo del trabajo.

Corolario 3.1.2. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $k, l \in \mathbb{N}$, $f : [0, 1] \rightarrow M$, $g : [0, 1] \rightarrow G_l$ y $h : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas, tales que $E(f_1, g_1) \neq \emptyset \neq E(f_1, h_1)$, $E(g_{l+1}, f_1) \neq \emptyset \neq E(f_2, h_k)$. Definimos

- $\varphi : E(f_1, g_1) \rightarrow G_{l+1}$,
- $\phi : E(f_2, g_{l+1}) \rightarrow G_{l+1}$,
- $\chi : E(f_1, h_1) \rightarrow \varprojlim M$,
- $\psi : E(f_2, h_k) \rightarrow G_k$,

como siguen:

- para cada punto $(x, y) \in E(f_1, g_1)$,
 $\varphi((x, y)) = (f_2(x), f_1(x), g_2(y), \dots, g_{l+1}(y))$,
- para cada punto $(x, y) \in E(f_1, h_1)$,
 $\chi((x, y)) = (f_2(x), f_1(x), h_2(y), h_3(y), \dots)$,
- para cada punto $(x, y) \in E(f_2, g_{l+1})$,
 $\phi((x, y)) = (g_1(x), \dots, g_{l+1}(x), f_1(y))$,
- para cada punto $(x, y) \in E(f_2, h_k)$,
 $\psi((x, y)) = (h_1(x), \dots, h_k(x), f_1(y))$.

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) φ , χ , ϕ y ψ , están bien definidas y son continuas.
- (2) Si f y g son funciones inyectivas, entonces φ , es un encaje.
- (3) Si f y h son funciones inyectivas, entonces χ , es un encaje.
- (4) Si g y f son funciones inyectivas, entonces ϕ , es un encaje.
- (5) Si $h_1^k : [0, 1] \rightarrow G_{k-1}$ y f son funciones inyectivas, entonces ψ es un encaje.

Demostración.

Recordemos que $\vartheta : M \rightarrow G_1$, dada por $\vartheta((x, y)) = (y, x)$ es un homeomorfismo. Consideremos $\vartheta \circ f : [0, 1] \rightarrow G_1$, de la definición de ϑ tenemos que $\vartheta \circ f = (f_2, f_1)$ y que $\vartheta \circ f$ es una función continua.

Aplicando el Teorema 3.1.1 a las funciones $\vartheta \circ f : [0, 1] \rightarrow G_1$, $g : [0, 1] \rightarrow G_l$, y $h : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, tomando

- en la definición de φ en Teorema 3.1.1, $i = 2, j = 1$,
- en la definición de χ en Teorema 3.1.1, $i = 2, n = 1$,
- en la definición de ϕ en Teorema 3.1.1, $j = l + 1, i = 1$,
- en la definición de ψ en Teorema 3.1.1, $n = k, i = 1$.

Por tanto el corolario se sigue del Teorema 3.1.1. ■

Corolario 3.1.3. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $k \in \mathbb{N}$, $f : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $h : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas, tales que $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset$. Si definimos $\varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$, para cada punto $(x, y) \in E(f_{k+1}, h_1)$, como

$$\varphi((x, y)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), f_{k+1}(x), h_2(y), h_3(y), \dots).$$

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) φ está bien definida.
- (2) Si f y h son funciones inyectivas, entonces φ es un encaje.

Demostración.

La prueba se sigue del Teorema 3.1.1, para el caso en que $i = k$ y $n = 1$. ■

3.2. Conjuntos de coincidencias y subcontinuos del límite inverso

Es esta sección utilizaremos los encajes dados en la Sección 3.1, para obtener triodos simples, circunferencias y arcos en $\varprojlim M$ y en los conjuntos G_k , los cuales utilizaremos en capítulos posteriores.

Teorema 3.2.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v, r, s \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas e inyectivas, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbf{f}(r) \notin \mathbf{g}([0, 1])$, $\mathbf{g}(s) \notin \mathbf{f}([0, 1])$
- (b) $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (c) h_1 es suprayectiva,
- (d) $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_{k+1}, h_1)$.

Entonces las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos propios de $\varprojlim M$.

Demostración.

Como $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_{k+1}, h_1)$, podemos definir

$$\blacksquare \varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M, \quad \blacksquare \psi : E(g_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$$

como siguen:

- para cada punto $(x, y) \in E(f_{k+1}, h_1)$,
 $\varphi((x, y)) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), f_{k+1}(x), h_2(y), h_3(y), \dots)$,
- para cada punto $(x, y) \in E(g_{k+1}, h_1)$,
 $\psi((x, y)) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x), g_{k+1}(x), h_2(y), h_3(y), \dots)$.

Como f , g y h son funciones continuas e inyectivas, estas satisfacen las hipótesis del Corolario 3.1.3, por tanto φ y ψ son encajes. De lo anterior, concluimos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos de $\varprojlim M$.

Probaremos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos propios de $\varprojlim M$, la prueba de que las componentes de $E(g_{k+1}, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos propios de $\varprojlim M$ se hace de manera similar.

Sea A componente de $E(f_{k+1}, h_1)$, probaremos que $\varphi(A) \neq \varprojlim M$.

Probaremos que existe un punto $a \in [0, 1]$, tal que el punto $(s, a) \in E(g_{k+1}, h_1)$ y $\psi((s, a)) \notin \varphi(A)$.

Como la función $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ es suprayectiva y $g_{k+1}(s) \in [u, v]$, existe un punto $a \in [0, 1]$, tal que $h_1(a) = g_{k+1}(s)$, por lo que el punto $(s, a) \in E(g_{k+1}, h_1)$. Veamos que $\psi((s, a)) \notin \varphi(A)$.

Supongamos por el contrario que $\psi((s, a)) \in \varphi(A) \subset \varphi(E(f_{k+1}, h_1))$, entonces existe un punto $(r', s') \in A$, tal que $\varphi((r', s')) = \psi((s, a))$, por lo que

$$(f_1(r'), \dots, f_{k+1}(r'), h_2(s'), h_3(s'), \dots) = (g_1(s), \dots, g_{k+1}(s), h_2(a), h_3(a), \dots),$$

de donde $\mathbf{f}(r') = \mathbf{g}(s)$, lo cual contradice que $\mathbf{g}(s) \notin \mathbf{f}([0, 1])$. La contradicción nace de suponer que $\psi((s, a)) \in \varphi(E(f_{k+1}, h_1))$. Por tanto $\psi((s, a)) \notin \varphi(A)$.

Por tanto, $\varphi(A)$ es un subcontinuo propio de $\varprojlim M$. ■

Observación 3.2.2. En la prueba del Teorema 3.2.1, probamos que dado un punto $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$, tal que $f(r) \notin g([0, 1])$, entonces $\varphi((r, s)) \notin \psi(E(g_{k+1}, h_1))$.

Corolario 3.2.3. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v, r, s \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas e inyectivas, tales que cumplen las siguientes propiedades

- (a) $f(r) \notin g([0, 1])$ y $g(s) \notin f([0, 1])$
- (b) $f_1, g_1, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$
- (c) h_1 es suprayectiva,
- (d) $E(f_1, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_1, h_1)$

Entonces las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos propios de $\varprojlim M$.

Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 entonces las hipótesis del Teorema 3.2.1 se satisfacen, por tanto el corolario es cierto. ■

El siguiente teorema es una herramienta para obtener triodos simples en $\varprojlim M$ y en los conjuntos G_k , la cual utilizaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 3.2.4. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas e inyectivas, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
- (b) $\mathbf{f}((\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathbf{g}((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$,
- (c) $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (d) $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0)$,
- (e) $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$,
- (f) las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ son arco conexas,
- (g) las componentes de $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas,
- (h) $\dim(\varprojlim M) = 1$.

Entonces $\varprojlim M$ contiene un triodo simple \mathbf{T} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{1, k+1}(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$,
- (2) $\sigma^k(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

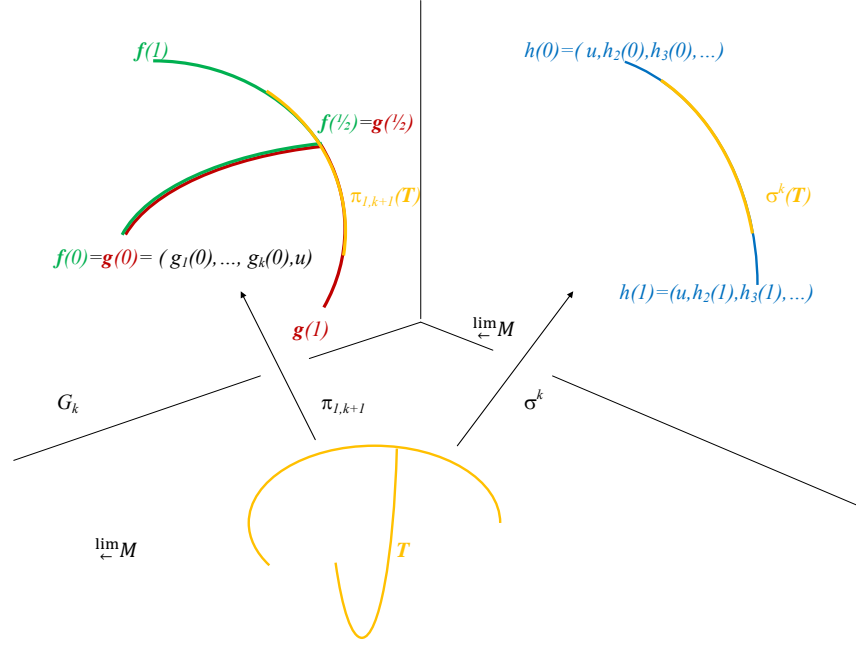


Figura 3.1:

Demostración.

Para la prueba de este teorema utilizaremos los conjuntos de coincidencias de las funciones f_{k+1} , h_1 y g_{k+1} , h_1 . Analizaremos los casos, en los que estos conjuntos tienen o no tienen puntos de ramificación.

De (d) y (e), tenemos que $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0) = h_1(0)$, por lo que el punto $(0, 0) \in E(f_{k+1}, h_1)$ y $(0, 0) \in E(g_{k+1}, h_1)$, entonces $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_{k+1}, h_1)$, así podemos definir

$$\blacksquare \varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M, \quad \blacksquare \psi : E(g_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$$

como siguen:

- para cada punto $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$,
 $\varphi((r, s)) = (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)$,
- para cada punto $(r, s) \in E(g_{k+1}, h_1)$,
 $\psi((r, s)) = (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)$.

Como f , g y h son funciones continuas e inyectivas, entonces se satisfacen las hipótesis del corolario 3.1.3, por tanto tenemos que φ y ψ son encajes.

Recordemos que $\mathcal{R}(X)$ denota el conjunto de puntos de ramificación del conjunto X . Analizaremos los siguientes casos.

Caso 1. $\mathcal{R}(E(f_{k+1}, h_1)) \neq \emptyset$ o $\mathcal{R}(E(g_{k+1}, h_1)) \neq \emptyset$.

Haremos la prueba del caso $\mathcal{R}(E(f_{k+1}, h_1)) \neq \emptyset$. La prueba del caso $\mathcal{R}(E(g_{k+1}, h_1)) \neq \emptyset$, se hace de manera similar.

Sea $(a, b) \in \mathcal{R}(E(f_{k+1}, h_1)) \neq \emptyset$, como (a, b) es punto de ramificación de $E(f_{k+1}, h_1)$, existe $T \subset E(f_{k+1}, h_1)$ un triodo simple con vértice (a, b) .

Como φ es un encaje, tenemos que T es homeomorfo a $\varphi(T)$, por tanto $\underline{\text{lim}} M$ contiene un triodo simple. Veamos que $\mathbf{T} = \varphi(T)$ satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$, como $\mathbf{T} = \varphi(T)$, existe un punto $(r, s) \in T \subset E(f_{k+1}, h_1)$ tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) &= \pi_{1,k+1}(\varphi((r, s))) = \pi_{1,k+1}((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), \dots)) \\ &= (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r)) = \mathbf{f}(r). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \sigma^k(\mathbf{x}) &= \sigma^k(\varphi((r, s))) \\ &= \sigma^k((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (f_{k+1}(r), h_2(s), h_2(s), \dots) = (h_1(s), h_2(s), h_2(s), \dots) = \mathbf{h}(s) \end{aligned}$$

por lo que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}([0, 1])$ y $\sigma^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}([0, 1])$.

Concluimos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\sigma^k(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Por tanto el Caso 1 queda probado.

Caso 2. $\mathcal{R}(E(f_{k+1}, h_1)) = \emptyset$ y $\mathcal{R}(E(g_{k+1}, h_1)) = \emptyset$.

Definamos E_0 la componente de $E(f_{k+1}, h_1)$ que contiene al punto $(0, 0)$ y F_0 la componente de $E(g_{k+1}, h_1)$ que contiene al punto $(0, 0)$.

Notemos que las hipótesis del Lema 2.1.4 se satisfacen para las funciones f_{k+1} , h_1 y g_{k+1} , h_1 , pues $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ son funciones continuas, tales que $f_{k+1}(0) = u = h_1(0) = g_{k+1}$ y $h_1(1) = v$. Por tanto $E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1]) \neq \emptyset \neq F_0 \cap (\{1\} \times [0, 1])$.

Como $E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1]) \neq \emptyset \neq F_0 \cap (\{1\} \times [0, 1])$, existen puntos $(1, c) \in E_0$ y $(1, d) \in F_0$.

Además por las hipótesis (f) y (g) tenemos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas. Por tanto E_0 y F_0 son arco conexas. Entonces existen arcos $E \subset E_0$ y $F \subset F_0$, con puntos extremos $(0, 0)$, $(1, c)$ y $(0, 0)$ y $(1, d)$.

Sean $C \subset E \cap ([0, \frac{1}{2}] \times [0, 1])$ y $D \subset F \cap ([0, \frac{1}{2}] \times [0, 1])$ arcos con puntos

extremos $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, a)$ y $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, b)$, tales que $C = \{(\frac{1}{2}, a)\}$, $D = \{(\frac{1}{2}, b)\} \subset [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$. (Figura 3.2)

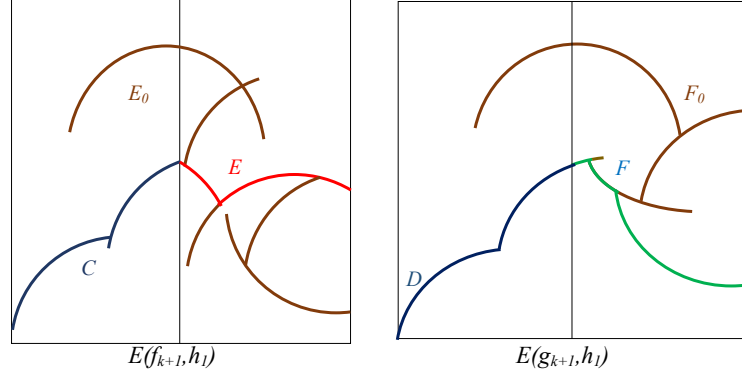


Figura 3.2:

Afirmación 1.

- (1.a) $C \cup D \subset E_0 \cap F_0$.
- (1.b) $C \cap D$ es no degenerado.

Prueba.

- (1.a) $C \cup D \subset E_0 \cap F_0$.

De la definición de C , tenemos que $C \subset E \subset E_0$. Veamos que $D \subset E_0$.

Sea $(r, s) \in D$, tenemos por definición de D que el punto $(r, s) \in F \subset E(g_{k+1}, h_1)$, por lo que $g_{k+1}(r) = h_1(s)$. Como $r \in [0, \frac{1}{2}]$, de la hipótesis (a) tenemos que $f(r) = g(r)$, por lo que $f_{k+1}(r) = g_{k+1}(r)$, entonces $f_{k+1}(r) = h_1(s)$, así el punto $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$. Por tanto $D \subset E(f_{k+1}, h_1)$.

Como D es un conjunto conexo de $E(f_{k+1}, h_1)$, que contiene al punto $(0, 0)$, tenemos que $D \subset E_0$. Por tanto $C \cup D \subset E_0$.

De manera similar $C \cup D \subset F_0$. Por tanto $C \cup D \subset E_0 \cap F_0$ y (1.a) queda probado.

- (1.b) $C \cap D$ es no degenerado.

Spongamos por el contrario que $C \cap D$ es degenerado. Como $(0, 0) \in C \cap D$, obtenemos que $C \cap D = \{(0, 0)\}$. De lo anterior, tenemos que $C \cup D \subset E(f_{k+1}, h_1)$ es un arco, tal que el punto $(0, 0) \in C \cup D$ y $(0, 0)$ no es punto extremo de $C \cup D$. Por lo que se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.2. Por tanto $E(f_{k+1}, h_1)$ contiene una 2-celda.

Como φ es un encaje, entonces $\varprojlim M$ contiene una 2-celda. Esto contradice la hipótesis (h), $\dim(\varprojlim M) = 1$, la contradicción nace de suponer que $C \cap D$ es degenerado.

Por tanto $C \cap D$ es no degenerado y el inciso (1.b) queda probado. \square

Como $\varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$, $\psi : E(g_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$ son encajes y $E \subset E(f_{k+1}, h_1)$, $F \subset E(g_{k+1}, h_1)$ son arcos, tenemos que $\varphi(E)$ y $\psi(F)$ son arcos contenidos en $\varprojlim M$.

Afirmación 2 Los arcos $\varphi(E), \psi(F) \subset \varprojlim M$ satisfacen las siguientes propiedades:

- (2.a) $\varphi(E)$ tiene puntos extremos $\varphi((0, 0))$ y $\varphi((1, c))$,
- (2.b) $\psi(F)$ tiene puntos extremos $\psi((0, 0))$ y $\psi((1, d))$,
- (2.c) $\varphi(E) \cap \psi(F)$ es no degenerado,
- (2.d) $\psi((1, d)) \notin \varphi(E)$,
- (2.e) $\varphi((1, c)) \notin \psi(F)$.

(Figura 3.3)

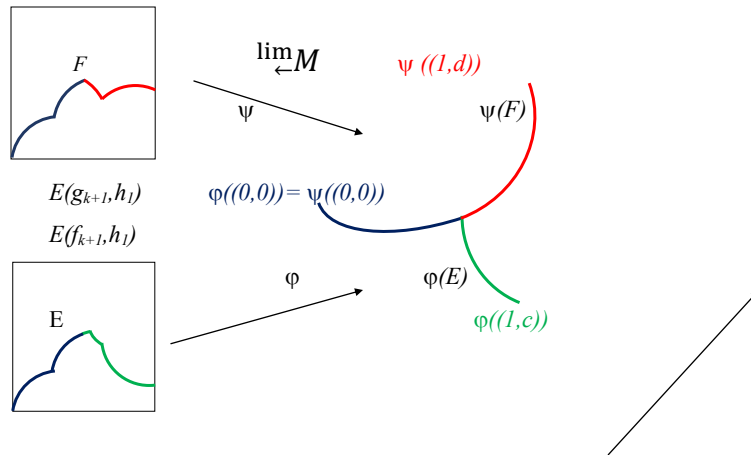


Figura 3.3:

Prueba.

- (2.a) $\varphi(E)$ tiene puntos extremos $\varphi((0, 0))$ y $\varphi((1, c))$.

Como E es un arco con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, c)$, y φ es un encaje, tenemos que $\varphi(E)$ es un arco con puntos extremos $\varphi((0, 0))$ y $\varphi((1, c))$.

- (2.b) $\psi(F)$ tiene puntos extremos $\psi((0, 0))$ y $\psi((1, d))$.

Como F es un arco con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, d)$, y ψ es un encaje, tenemos que $\psi(F)$ es un arco con puntos extremos $\psi((0, 0))$ y $\psi((1, d))$.

Veamos que $\varphi((0, 0)) = \psi((0, 0))$.

Tenemos que

$$\varphi((0, 0)) = (f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$$

y

$$\psi((0, 0)) = (g_1(0), \dots, g_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots),$$

además de la hipótesis (a), tenemos que $\mathbf{f}(0) = \mathbf{g}(0)$, entonces $\varphi((0, 0)) = \psi((0, 0))$.

(2.c) $\varphi(E) \cap \psi(F)$ es no degenerado.

Probaremos que $\varphi(C \cap D) \subset \varphi(E) \cap \psi(F)$.

De la Afirmación 1, tenemos que $C \cup D \subset E_0 \cap F_0$ y $C \cap D$ es no degenerado.

Como $C \subset E$ y $D \subset F$, entonces $(C \cap D) \subset E$ y $(C \cap D) \subset F$. Por tanto $\varphi(C \cap D) \subset \varphi(E)$ y $\psi(C \cap D) \subset \psi(F)$.

Veamos que $\varphi(C \cap D) = \psi(C \cap D)$. Dado un punto $(r, s) \in C \cap D$ tenemos por definición de la función φ que

$$\varphi((r, s)) = (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)$$

y por definición de la función ψ que

$$\psi((r, s)) = (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots).$$

Como $C \cap D \subset [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$, entonces $r \in [0, \frac{1}{2}]$, por la hipótesis (a), tenemos que $\mathbf{f}(r) = \mathbf{g}(r)$ entonces

$$(f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots) = (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots).$$

Por tanto $\varphi((r, s)) = \psi((r, s))$. Concluimos que $\varphi(C \cap D) = \psi(C \cap D)$.

Por tanto $\varphi(C \cap D) \subset \varphi(E) \cap \psi(F)$. Como $C \cap D$ es no degenerado, entonces $\varphi(C \cap D)$ es no degenerado, por tanto $\varphi(E) \cap \psi(F)$ es no degenerado.

(2.d) $\psi((1, d)) \notin \varphi(E)$,

Notemos que las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} , satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.1, además como $\mathbf{g}(1) \notin \mathbf{f}([0, 1])$, por la Observación 3.2.2, tenemos que $\psi((1, d)) \notin \varphi(E)$.

(2.e) $\varphi((1, c)) \notin \psi(F)$.

Como las funciones f , g y h , satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.1, además como $f(1) \notin g([0, 1])$, entonces por la Observación 3.2.2 el punto $\varphi((1, c)) \notin \psi(F)$. \square

Por la Afirmación 2, los arcos $\varphi(E), \psi(F) \subset G_{k+1}$ satisfacen la hipótesis del Lema 1.1.6. Por tanto $\varphi(E) \cup \psi(F) \subset \varprojlim M$ contiene un triodo simple.

Sea $\mathbf{T} \subset \varphi(E) \cup \psi(F)$ un triodo simple, veamos que \mathbf{T} satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$, como $\mathbf{T} \subset \varphi(E) \cup \psi(F)$, existe un punto $(r, s) \in E \cup F$ tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$ o $\mathbf{x} = \psi((r, s))$.

Si $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) &= \pi_{1,k+1}(\varphi((r, s))) = \pi_{1,k+1}((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r)) = \mathbf{f}(r). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \sigma^k(\mathbf{x}) &= \sigma^k(\varphi((r, s))) \\ &= \sigma^k((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s) \dots) = (h_1(s), h_2(s), h_3(s), \dots) = \mathbf{h}(s). \end{aligned}$$

Por otro lado si $\mathbf{x} = \psi((r, s))$, tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) &= \pi_{1,k+1}(\psi((r, s))) = \pi_{1,k+1}((g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r)) = \mathbf{g}(r). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \sigma^k(\mathbf{x}) &= \sigma^k(\psi((r, s))) \\ &= \sigma^k((g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s) \dots) = (h_1(s), h_2(s), h_3(s), \dots) = \mathbf{h}(s). \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\sigma^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}([0, 1])$.

Por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\sigma^k(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

De los Casos 1 y 2 tenemos que $\varprojlim M$ contiene un triodo simple con las propiedades deseadas, así el teorema queda demostrado. \blacksquare

Observación 3.2.5. En la prueba del Teorema 3.2.4, utilizamos esencialmente las propiedades de los conjuntos de coincidencias dadas en el Capítulo 2, las cuales, dependen de las funciones sobre las que se estén tomando los conjuntos de coincidencias (en este caso f_{k+1} , g_{k+1} , h_1). Por lo cual, cambiando los contradominios de las funciones f y g a M o $\varprojlim M$ y de la

función \mathbf{h} a G_k o M , y usando los Corolarios 3.1.2 y 3.1.3, obtenemos triodos simples en los conjuntos G_{k+1} y $\varprojlim M$, respectivamente, con propiedades similares a las del Teorema 3.2.4. Por esta razón los siguientes teoremas los estableceremos como corolarios al Teorema 3.2.4.

Estos teoremas los estaremos utilizando en los siguientes capítulos.

Corolario 3.2.6. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $k \in \mathbb{N}$, $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow G_k$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones f , g y \mathbf{h} satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.4,
- Las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(g) del Teorema 3.2.4.

Si $\dim(G_{k+1}) = 1$. Entonces G_{k+1} contiene un triodo simple \mathbf{T} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}) \subset (f([0, 1]) \cup g([0, 1]))$,
- (2) $\pi_{2,k+2}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Demostración.

Definamos

$$\blacksquare \varphi : E(f_1, h_1) \rightarrow G_{k+1}, \quad \blacksquare \psi : E(g_1, h_1) \rightarrow G_{k+1},$$

como siguen:

- para cada $(r, s) \in E(f_1, h_1)$, $\varphi((r, s)) = (f_2(r), f_1(r), h_2(s), \dots, h_{k+1}(s))$,
- para cada $(r, s) \in E(g_1, h_1)$, $\psi((r, s)) = (g_2(r), g_1(r), h_2(s), \dots, h_{k+1}(s))$.

Como en la prueba del Teorema 3.2.4, existe un triodo simple $\mathbf{T} \subset \varphi(E(f_1, h_1)) \cup \psi(E(g_1, h_1))$. Veamos que \mathbf{T} satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$, como $\mathbf{T} \subset \varphi(E(f_1, h_1)) \cup \psi(E(g_1, h_1))$, existe un punto $(r, s) \in E(f_1, h_1) \cup E(g_1, h_1)$, tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$ o $\mathbf{x} = \psi((r, s))$.

Si $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$, tenemos que

$$\pi_{2,1}(\mathbf{x}) = f(r) \text{ y } \pi_{2,k+2}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(s),$$

por otro lado si $\mathbf{x} = \psi((r, s))$, tenemos que

$$\pi_{2,1}(\mathbf{x}) = g(r) \text{ y } \pi_{2,k+2}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(s).$$

De lo anterior concluimos que $\pi_{2,1}(\mathbf{x}) \in (f([0, 1]) \cup g([0, 1]))$ y $\pi_{2,k+2}(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}([0, 1])$.

Por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{T}) \subset (f([0,1]) \cup g([0,1]))$ y $\pi_{2,k+2}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0,1])$. Así el corolario queda demostrado. ■

Corolario 3.2.7. Sean $M \subset [0,1]^2$, puntos $u, v \in [0,1]$, $u < v$, $f, g : [0,1] \rightarrow M$ y $\mathbf{h} : [0,1] \rightarrow \varprojlim M$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones f , g y \mathbf{h} satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.4,
- Las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(g) del Teorema 3.2.4

Si $\dim(\varprojlim M) = 1$, entonces $\varprojlim M$ contiene un triodo simple \mathbf{T} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}) \subset (f([0,1]) \cup g([0,1]))$,
- (2) $\sigma(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0,1])$.

Corolario 3.2.8. Sean $M \subset [0,1]^2$, puntos $u, v \in [0,1]$, $u < v$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0,1] \rightarrow \varprojlim M$ y $\mathbf{h} : [0,1] \rightarrow G_k$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.4,
- Las funciones f_1 , g_1 y h_{k+1} cumplen las hipótesis (c)-(g) del Teorema 3.2.4.

Si $\dim(\varprojlim M) = 1$, entonces $\varprojlim M$ contiene un triodo simple \mathbf{T} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\sigma^k(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0,1]) \cup \mathbf{g}([0,1]))$,
- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0,1])$.

Demostración.

Definamos

$$\blacksquare \varphi : E(f_1, h_{k+1}) \rightarrow \varprojlim M, \quad \blacksquare \psi : E(g_1, h_{k+1}) \rightarrow \varprojlim M,$$

como siguen:

- para cada $(r, s) \in E(f_1, h_{k+1})$,
 $\varphi((r, s)) = (h_1(s), \dots, h_{k+1}(s), f_2(r), f_3(r), \dots)$,
- para cada $(r, s) \in E(g_1, h_{k+1})$,
 $\psi((r, s)) = (h_1(s), \dots, h_{k+1}(s), g_2(r), g_3(r), \dots)$.

Como en la prueba del Teorema 3.2.4, existe un triodo simple $\mathbf{T} \subset \varphi(E(f_1, h_{k+1})) \cup \psi(E(g_1, h_{k+1}))$. Veamos que \mathbf{T} satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$, como $\mathbf{T} \subset \varphi(E(f_1, h_{k+1})) \cup \psi(E(g_1, h_{k+1}))$, existe un punto $(r, s) \in E(f_1, h_{k+1}) \cup E(g_1, h_{k+1})$, tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$ o $\mathbf{x} = \psi((r, s))$.

Si $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$, tenemos que

$$\sigma^k(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(r) \text{ y } \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(s),$$

por otro lado si $\mathbf{x} = \psi((r, s))$, tenemos que

$$\sigma^k(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(r) \text{ y } \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(s).$$

De lo anterior concluimos que $\sigma^k(\mathbf{x}) \in (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\pi_{k+1}(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}([0, 1])$.

Por tanto $\sigma^k(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$. Así el corolario queda demostrado. ■

Corolario 3.2.9. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ y $h : [0, 1] \rightarrow M$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y h satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.4,
- Las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(g) del Teorema 3.2.4.

Si $\dim(\varprojlim M) = 1$, entonces $\varprojlim M$ contiene un triodo simple \mathbf{T} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\sigma(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}) \subset h([0, 1])$.

Demostración.

Definamos

$$\blacksquare \varphi : E(f_1, h_1) \rightarrow \varprojlim M, \quad \blacksquare \psi : E(g_1, h_1) \rightarrow \varprojlim M,$$

como siguen:

- para cada $(r, s) \in E(f_1, h_1)$, $\varphi((r, s)) = (h_2(s), h_1(s), f_2(r), f_3(r) \dots)$,
- para cada $(r, s) \in E(g_1, h_1)$, $\psi((r, s)) = (h_2(s), h_1(s), g_2(r), g_3(r) \dots)$.

Como en la prueba del Teorema 3.2.4, existe un triodo simple $\mathbf{T} \subset \varphi(E(f_1, h_1)) \cup \psi(E(g_1, h_1))$. Veamos que \mathbf{T} satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$, como $\mathbf{T} \subset \varphi(E(f_1, h_1)) \cup \psi(E(g_1, h_1))$, existe un punto $(r, s) \in E(f_1, h_1) \cup E(g_1, h_1)$, tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$ o $\mathbf{x} = \psi((r, s))$.

Si $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$, tenemos que

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(r) \text{ y } \pi_{2,1}(\mathbf{x}) = h(s),$$

por otro lado si $\mathbf{x} = \psi((r, s))$, tenemos que

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(r) \text{ y } \pi_{2,1}(\mathbf{x}) = h(s).$$

De lo anterior concluimos que $\sigma(\mathbf{x}) \in (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\pi_{2,1}(\mathbf{x}) \in h([0, 1])$.

Por tanto $\sigma(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\pi_{2,1}(\mathbf{T}) \subset h([0, 1])$. Así el corolario queda demostrado. ■

Corolario 3.2.10. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $h : [0, 1] \rightarrow M$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones f, g y h satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.4,
- Las funciones f_1, g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(g) del Teorema 3.2.4.

Si $\dim(G_{k+1}) = 1$, entonces G_{k+1} contiene un triodo simple \mathbf{T} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,k+2}(\mathbf{T}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}) \subset h([0, 1])$.

El siguiente teorema es una herramienta para obtener continuos no uncoherentes (curvas cerradas simples) en $\varprojlim M$ y los conjuntos G_k , la cual utilizaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 3.2.11. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $k \in \mathbb{N}$, $f, g : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas e inyectivas, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) $\mathbf{f}(0) = \mathbf{g}(0)$ y $\mathbf{f}(1) = \mathbf{g}(1)$,
- (b) $\mathbf{f}((0, 1)) \cap \mathbf{g}((0, 1)) = \emptyset$,
- (c) $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (d) $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0) = h_1(0)$, $f_{k+1}(1) = v = g_{k+1}(1) = h_1(1)$ y $h_1((0, 1)) \subset (u, v)$.

Entonces $\varprojlim M$ contiene un subcontinuo no uncoherente \mathbf{S} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{S}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$,
- (2) $\sigma^k(\mathbf{S}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.
- (3) Si además las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas, entonces $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple \mathbf{S} . (Figura 3.4)

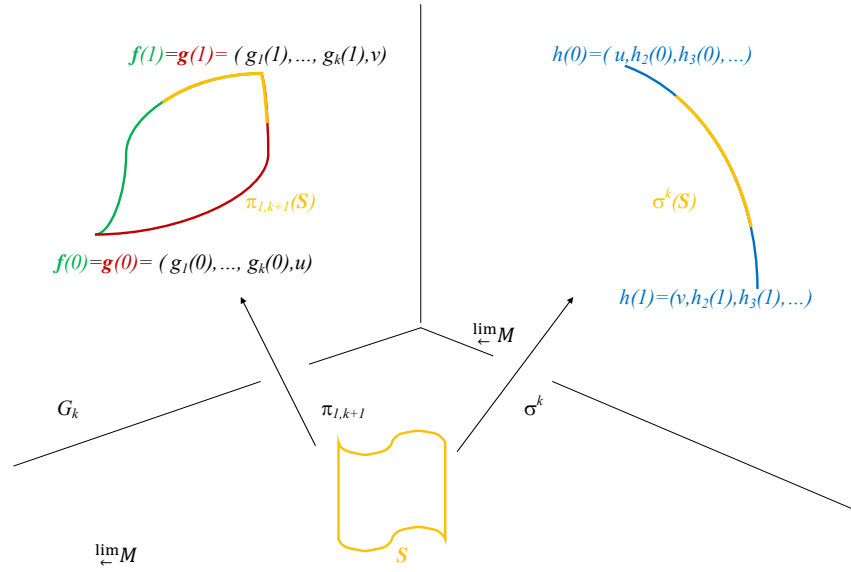


Figura 3.4:

Demostración.

Primero probaremos que $\varprojlim M$ contiene un subcontinuo no unicoherente \mathbf{S} , que satisface las propiedades (1) y (2). Para lo cual probaremos que existen subcontinuos $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tales que $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ es un continuo y que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ no es conexo. Para esta prueba utilizaremos los conjuntos de coincidencias de las funciones f_{k+1}, h_1 y g_{k+1}, h_1 .

De la hipótesis (d), tenemos que $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0) = h_1(0)$ y $f_{k+1}(1) = v = g_{k+1}(1) = h_1(1)$, por cual, los puntos $(0, 0), (1, 1) \in E(f_{k+1}, h_1)$ y $(0, 0), (1, 1) \in E(g_{k+1}, h_1)$, entonces $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_{k+1}, h_1)$. Así podemos definir

$$\begin{aligned} \blacksquare \varphi : E(f_{k+1}, h_1) &\rightarrow \varprojlim M, & \blacksquare \psi : E(g_{k+1}, h_1) &\rightarrow \varprojlim M, \end{aligned}$$

como siguen:

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{ para cada } (r, s) \in E(f_{k+1}, h_1), \\ \varphi((r, s)) &= (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots), \end{aligned}$$

- para cada $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$,
 $\psi((r, s)) = (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)$.

Como f, g y h son funciones continuas e inyectivas, entonces se satisfacen las hipótesis del Corolario 3.1.3, por tanto tenemos que φ y ψ son encajes.

Definamos E_0 la componente de $E(f_{k+1}, h_1)$ que contiene al punto $(0, 0)$ y F_0 la componente de $E(g_{k+1}, h_1)$ que contiene al punto $(0, 0)$.

Notemos que las hipótesis del Lema 2.1.6 se satisfacen para las funciones f_{k+1}, h_1 y g_{k+1}, h_1 , pues de las hipótesis (c) y (d), tenemos que $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ son funciones continuas, tales que $f_{k+1}(0) = u = h_1(0) = g_{k+1}(0)$ y $f_{k+1}(1) = v = h_1(1) = g_{k+1}(1)$, por tanto $(1, 1) \in E_0$ y $(1, 1) \in F_0$.

Definamos $\mathbf{A} = \varphi(E_0)$ y $\mathbf{B} = \psi(F_0)$, como φ y ψ son encajes, tenemos que \mathbf{A} y \mathbf{B} son subcontinuos de $\varprojlim M$.

Para probar que $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ Figura 3.5 es un continuo y que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ no es conexo, probaremos que se cumple la siguiente afirmación.

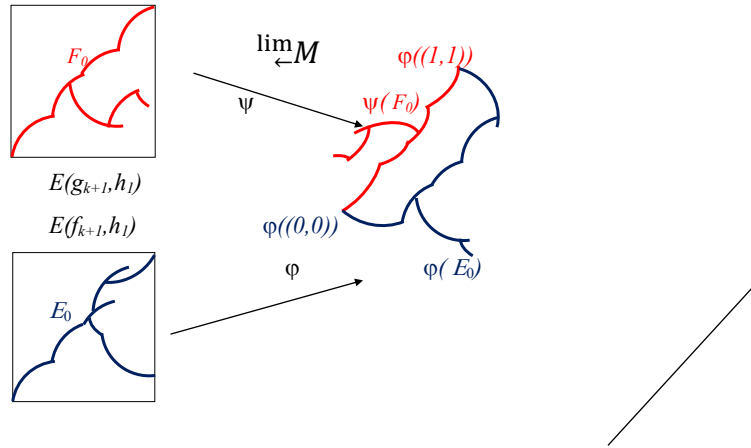


Figura 3.5:

Afirmación 1 $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\varphi(0, 0), \varphi(1, 1)\}$.

Prueba.

Probaremos primero que $\{\varphi(0, 0), \varphi(1, 1)\} \subset \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

De la definición de φ, ψ y la hipótesis (d) tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi((0, 0)) &= (f_1(0), f_2(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots) = \\ &= (g_1(0), g_2(0), \dots, g_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots) = \psi((0, 0))\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\varphi((1, 1)) &= (f_1(1), f_2(1), \dots, f_{k+1}(1), h_2(1), h_3(1), \dots) = \\ &= (g_1(1), g_2(1), \dots, g_{k+1}(1), h_2(1), h_3(1), \dots) = \psi((1, 1))\end{aligned}$$

Por tanto $\{\varphi((0, 0)), \varphi((1, 1))\} \subset \varphi(E_0) \cap \psi(F_0) = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$

Veamos ahora que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \subset \{\varphi(0, 0), \varphi(1, 1)\}$.

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, como $\mathbf{y} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varphi(E_0) \cap \psi(F_0)$, entonces existen puntos $(r, s) \in E_0$ y $(r', s') \in F_0$, tales que $\varphi(r, s) = \mathbf{y} = \psi(r', s')$. Entonces

$$(f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots) = (g_1(r'), \dots, g_{k+1}(r'), h_2(s'), h_3(s'), \dots).$$

De lo anterior, tenemos que $f(r) = g(r')$ y $h(s) = h(s')$.

Como $f(r) \in f([0, 1]) \cap g([0, 1])$, y por las hipótesis (a) y (b), tenemos que $f([0, 1]) \cap g([0, 1]) = \{f(0), f(1)\}$, entonces $f(r) \in \{f(0), f(1)\}$. Entonces $f(r) = f(0)$ o $f(r) = f(1)$.

Afirmación 1.1

(1a) Si $f(r) = f(0)$, entonces el punto $(r, s) = (0, 0)$ e $\mathbf{y} = \varphi((0, 0))$.

(1b) Si $f(r) = f(1)$, entonces el punto $(r, s) = (1, 1)$ e $\mathbf{y} = \varphi((1, 1))$.

Prueba.

Probaremos el inciso (1a), el inciso (1b) se prueba de manera similar.

Como f es una función inyectiva, tenemos que $r = 0$.

Además, $f_{k+1}(0) = u$, como el punto $(r, s) = (0, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$, tenemos que $f_{k+1}(0) = h_1(s)$, entonces $h_1(s) = u$.

Por la hipótesis (d), tenemos que para cada punto $t \in (0, 1)$, el punto $h_1(t) \in (u, v)$, entonces $s \in \{0, 1\}$.

De la hipótesis (d), $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$, como $u < v$, entonces $s = 0$.

Probamos que $r = 0$ y $s = 0$ por tanto $(r, s) = (0, 0)$ e $\mathbf{y} = \varphi((r, s)) = \varphi((0, 0))$.

De manera similar, probamos que si $f(r) = f(1)$, entonces el punto $(r, s) = (1, 1)$ e $\mathbf{y} = \varphi((r, s)) = \varphi((1, 1))$.

Hemos probado que $\mathbf{y} \in \{\varphi(0, 0), \varphi(1, 1)\}$.

Por tanto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\varphi(0, 0), \varphi(1, 1)\}$. \square

De la Afirmación 1, tenemos que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \emptyset$, por tanto $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ es un continuo, además $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ no es conexo, por tanto $\mathbf{S} \subset \varprojlim M$ es un subcontinuo no unicoherente.

Veamos que \mathbf{S} satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$, como $\mathbf{S} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \varphi(E_0) \cup \psi(F_0)$, existe un punto $(r, s) \in E_0 \cup F_0$, tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$ o $\mathbf{x} = \psi((r, s))$.

Si $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) &= \pi_{1,k+1}(\varphi((r, s))) = \pi_{1,k+1}((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r)) = \mathbf{f}(r).\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}\sigma^k(\mathbf{x}) &= \sigma^k(\varphi((r, s))) \\ &= \sigma^k((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s) \dots) = (h_1(s), h_2(s), h_3(s), \dots) = \mathbf{h}(s).\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\mathbf{x} = \psi((r, s))$, tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) &= \pi_{1,k+1}(\psi((r, s))) = \pi_{1,k+1}((g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r)) = \mathbf{g}(r).\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}\sigma^k(\mathbf{x}) &= \sigma^k(\psi((r, s))) \\ &= \sigma^k((g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\ &= (g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s) \dots) = (h_1(s), h_2(s), h_3(s), \dots) = \mathbf{h}(s).\end{aligned}$$

De lo anterior concluimos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\sigma^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}([0, 1])$.

Por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{S}) \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ y $\sigma^k(\mathbf{S}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Ahora probaremos el inciso (3).

(3) Si además las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas, entonces $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple \mathbf{S} .

Por las hipótesis, tenemos que E_0 y F_0 son arco conexas, recordemos que $(0, 0), (1, 1) \in E_0$ y $(0, 0), (1, 1) \in F_0$, por lo que existen arcos $E \subset E_0$ y $F \subset F_0$ con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Definamos $\mathbf{S} = \varphi(E) \cup \psi(F)$ Figura 3.6, como φ , y ψ son encajes, tenemos que $\varphi(E)$ y $\psi(F)$ son arcos con puntos extremos $\varphi((0, 0)), \varphi((1, 1))$.

De la Afirmación 1 $\varphi(E_0) \cap \psi(F_0) = \{\varphi((0, 0)), \varphi((1, 1))\}$, como $\varphi((0, 0)), \varphi((1, 1)) \in \varphi(E) \cap \psi(F)$ y $\varphi(E) \cap \psi(F) \subset \varphi(E_0) \cap \psi(F_0)$, entonces $\varphi(E) \cap \psi(F) = \{\varphi((0, 0)), \varphi((1, 1))\}$.

De lo anterior concluimos que \mathbf{S} es una curva cerrada simple.

Así el teorema queda demostrado. ■

Observación 3.2.12. Como en el Teorema 3.2.4, podemos cambiar los contradominios de las funciones f y g a M o $\varprojlim M$ y de la función \mathbf{h} a G_k o

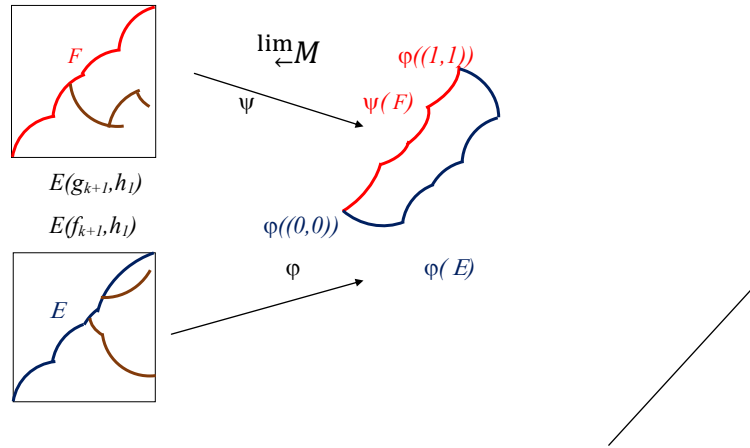


Figura 3.6:

M , para obtener continuos no unicoherentes o curvas cerradas simples en los conjuntos G_{k+1} y $\varprojlim M$, con propiedades similares a las del Teorema 3.2.11.

Por esta razón los siguientes teoremas los estableceremos como corolarios al Teorema 3.2.11.

Corolario 3.2.13. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $k \in \mathbb{N}$, $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow G_k$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones f , g y h satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.11.
- Las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(d) ((c)-(f)) del Teorema 3.2.11.

Entonces G_{k+1} contiene un subcontinuo no unicoherente S , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(S) \subset (f([0, 1]) \cup g([0, 1]))$,
- (2) $\pi_{2,k+2}(S) \subset h([0, 1])$,

(3) Si además las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son arco conexas, entonces S es una curva cerrada simple.

Corolario 3.2.14. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $u < v$, $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ funciones continuas e inyectivas, tales que:

- Las funciones f , g y h satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.11,
- Las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(d) ((c)-(f)) del Teorema 3.2.11.

Entonces $\varprojlim M$ contiene un subcontinuo no unicoherente \mathbf{S} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(\mathbf{S}) \subset (f([0, 1]) \cup g([0, 1]))$,
- (2) $\sigma(\mathbf{S}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$,
- (3) Si además las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son arco conexas, entonces \mathbf{S} es una curva cerrada simple.

El siguiente teorema es una herramienta para obtener arcos en $\varprojlim M$ y los conjuntos G_k , la cual utilizaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 3.2.15. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas e inyectivas, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (a) $f_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (b) $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$.
- (c) las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ son arco conexas.

Entonces $\varprojlim M$ contiene un arco \mathbf{A} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{A}) = \mathbf{f}([0, 1])$,
- (2) $\sigma^k(\mathbf{A}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.
- (3) Si además $f_{k+1}(0) = u$, entonces un punto extremo de \mathbf{A} es $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$.
- (4) Si además $f_{k+1}(0) = u$ y $f_{k+1}(1) = v$, entonces los puntos extremos de \mathbf{A} son $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$ y $(f_1(1), \dots, f_{k+1}(1), h_2(1), \dots)$, además se cumple que $\sigma^k(\mathbf{A}) = \mathbf{h}([0, 1])$. (Figura 3.7)

Demostración.

Para la prueba de este teorema utilizaremos el conjunto de coincidencias de las funciones f_{k+1} y h_1 .

De la hipótesis (b), tenemos que $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$, entonces $u, v \in h_1([0, 1])$, como $h_1([0, 1])$ es conexo, tenemos que $h_1([0, 1]) = [u, v]$, así h_1 es una función suprayectiva, por tanto de la Observación 2.1.1,(2), tenemos que $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset$. Entonces podemos definir $\varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$, para cada $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$, como sigue:

$$\varphi((r, s)) = (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots).$$

Como \mathbf{f} y \mathbf{h} son funciones continuas e inyectivas, tenemos que satisfacen las hipótesis del Corolario 3.1.3, por tanto φ es un encaje.

Notemos que las hipótesis del Lema 2.1.2 se satisfacen para las funciones f_{k+1} y h_1 , pues de las hipótesis (a) y (b), tenemos que $f_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$

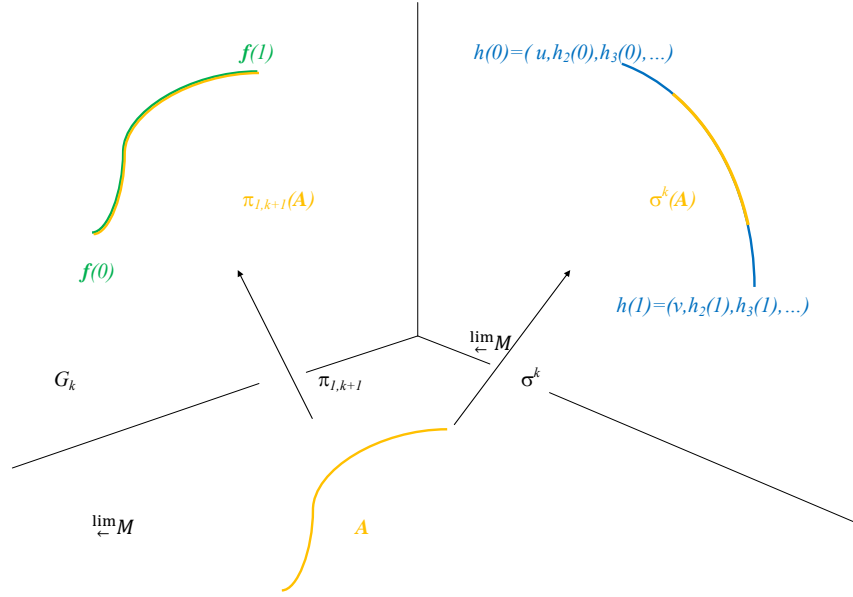


Figura 3.7:

son funciones continuas, tales que $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$, por tanto existe una componente E_0 de $E(f_{k+1}, h_1)$, tal que $(E_0 \cap (\{0\} \times [0, 1])) \neq \emptyset \neq (E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1]))$.

Sean $(0, a) \in E_0 \cap (\{0\} \times [0, 1])$ y $(1, b) \in E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1])$. Por la hipótesis (c), tenemos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ son arco conexas, por lo que E_0 es arco conexas, entonces existe un arco $E \subset E_0$ con puntos extremos $(0, a)$ y $(1, b)$.

Definamos $\mathbf{A} = \varphi(E)$, Figura 3.8 como φ es un encaje, tenemos que \mathbf{A} es un arco con puntos extremos $\varphi((0, a))$ y $\varphi((1, b))$. Veamos que \mathbf{A} satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, como $\mathbf{A} = \varphi(E)$, existe un punto $(r, s) \in E$, tal que $\mathbf{x} = \varphi((r, s))$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) &= \pi_{1,k+1}(\varphi((r, s))) = \pi_{1,k+1}((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), \dots)) \\ &= (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r)) = \mathbf{f}(r) \end{aligned}$$

por lo que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathbf{f}([0, 1])$.

Y

$$\sigma^k(\mathbf{x}) = \sigma^k(\varphi((r, s)))$$

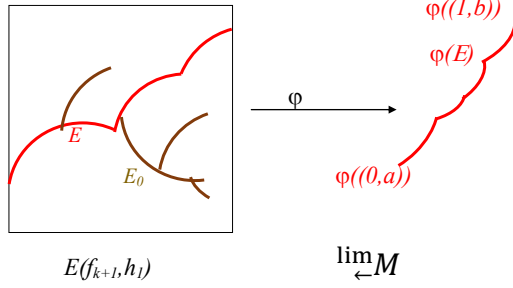
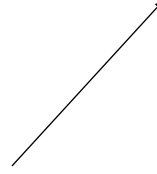


Figura 3.8:



$$\begin{aligned}
 &= \sigma^k((f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)) \\
 &= (f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots) = (h_1(s), h_2(s), h_3(s), \dots) = \mathbf{h}(s)
 \end{aligned}$$

por lo que $\sigma^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{h}([0, 1])$.

De lo anterior concluimos que $\pi_{1,k}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{f}([0, 1])$ y $\sigma^k(\mathbf{A}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Veamos que $\mathbf{f}([0, 1]) \subset \pi_{1,k}(\mathbf{A})$, notemos que,

- si $\mathbf{x} = \varphi((0, a))$, entonces $\pi_{1,k}(\varphi((0, a))) = \mathbf{f}(0)$,
- si $\mathbf{x} = \varphi((1, b))$, entonces $\pi_{1,k}(\varphi((1, b))) = \mathbf{f}(1)$.

Como $\pi_{1,k}(\mathbf{A})$ es un conjunto conexo, $\mathbf{f}(0), \mathbf{f}(1) \in \pi_{1,k}(\mathbf{A})$ y f es una función continua e inyectiva, entonces $\mathbf{f}([0, 1]) \subset \pi_{1,k}(\mathbf{A})$.

Como $\pi_{1,k}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{f}([0, 1])$ y $\mathbf{f}([0, 1]) \subset \pi_{1,k}(\mathbf{A})$, concluimos que $\pi_{1,k}(\mathbf{A}) = \mathbf{f}([0, 1])$.

Probaremos ahora el inciso (3).

(3) Si además $f_{k+1}(0) = u$, entonces un punto extremo de \mathbf{A} es $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$.

Como $f_{k+1}(0) = u$ y por hipótesis $h_1(0) = u$, entonces $f_{k+1}(0) = h_1(0)$, por tanto el punto $(0, 0) \in E(f_{k+1}, h_1)$.

Sea E_0 la componente de $E(f_{k+1}, h_1)$ que contiene al punto $(0, 0)$, notemos que las hipótesis del Lema 2.1.4 se satisfacen para las funciones f_{k+1} y h_1 , pues $f_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ son funciones continuas, tales que $f_{k+1}(0) = u = h_1(0)$ y $h_1(1) = v$, por tanto $E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1]) \neq \emptyset$. Sea $(1, b) \in E_0 \cap (\{1\} \times [0, 1])$.

Además por la hipótesis (c), tenemos que E_0 es arco conexa, por lo que existe un arco $E \subset E_0$ con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, b)$.

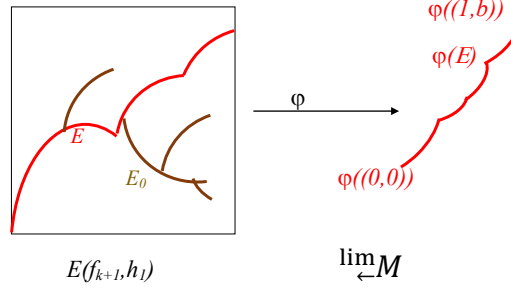


Figura 3.9:

Definamos $\mathbf{A} = \varphi(E)$, Figura 3.9 como φ es un encaje, tenemos que $\varphi(A)$ es un arco con puntos extremos $\varphi((0, 0))$ y $\varphi((1, b))$.

Como

- $\varphi((0, 0)) = (f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$

tenemos que se cumple la propiedad (3) de teorema. Notemos que las propiedades (1) y (2) del teorema se siguen de la definición del arco \mathbf{A} .

Probaremos ahora el inciso (4).

(4) Si además $f_{k+1}(0) = u$ y $f_{k+1}(1) = v$, entonces los puntos extremos de \mathbf{A} son $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$ y $(f_1(1), \dots, f_{k+1}(1), h_2(1), \dots)$, además se cumple que $\sigma^k(\mathbf{A}) = \mathbf{h}([0, 1])$.

Como $f_{k+1}(0) = u$, $f_{k+1}(1) = v$ y por hipótesis $h_1(0) = u$, $h_1(1) = v$, entonces $f_{k+1}(0) = h_1(0)$ y $f_{k+1}(1) = h_1(1)$, por tanto los puntos $(0, 0)$, $(1, 1) \in E(f_{k+1}, h_1)$.

Sea E_0 la componente de $E(f_{k+1}, h_1)$ que contiene al punto $(0, 0)$, notemos que las hipótesis del Lema 2.1.6 se satisfacen para las funciones f_{k+1} y h_1 , pues de las hipótesis, tenemos que $f_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ son funciones continuas, tales que $f_{k+1}(0) = u = h_1(0)$ y $f_{k+1}(1) = v = h_1(1)$, por tanto el punto $(1, 1) \in E_0$.

Además por la hipótesis (c), tenemos que E_0 es arco conexa, por lo que existe un arco $E \subset E_0$ con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

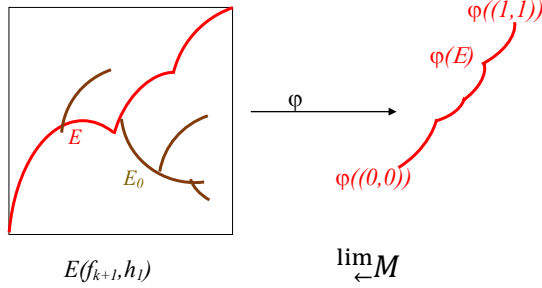


Figura 3.10:

Definamos $\mathbf{A} = \varphi(E)$, Figura 3.10 como φ es un encaje, tenemos que $\varphi(A)$ es un arco con puntos extremos $\varphi((0, 0))$ y $\varphi((1, 1))$.

Como

- $\varphi((0, 0)) = (f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$ y
- $\varphi((1, 1)) = (f_1(1), \dots, f_{k+1}(1), h_2(1), h_3(1), \dots)$.

Notemos que las propiedades (1) y (2) del teorema se siguen de la definición del arco \mathbf{A} . Veamos que $\mathbf{h}([0, 1]) = \sigma^k(\mathbf{A})$.

Por definición de φ

- si $\mathbf{x} = \varphi((0, 0))$, entonces $\sigma^k(\varphi((0, 0))) = \mathbf{h}(0)$,
- si $\mathbf{x} = \varphi((1, 1))$, entonces $\sigma^k(\varphi((1, 1))) = \mathbf{h}(1)$.

Como $\sigma^k(\mathbf{A})$ es un conjunto conexo, $\mathbf{h}(0), \mathbf{h}(1) \in \sigma^k(\mathbf{A})$ y \mathbf{h} es una función inyectiva, entonces $\mathbf{h}([0, 1]) \subset \sigma^k(\mathbf{A})$.

Como $\sigma^k(\mathbf{A}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$ y $\mathbf{h}([0, 1]) \subset \sigma^k(\mathbf{A})$, concluimos que $\sigma^k(\mathbf{A}) = \mathbf{h}([0, 1])$.

Con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Observación 3.2.16. Como en el Teorema 3.2.4, podemos cambiar los contradominios de las funciones f y g a M o $\varprojlim M$ y de la función \mathbf{h} a G_k o M , para obtener arcos en los conjuntos G_{k+1} y $\varprojlim M$, con propiedades similares a las del Teoremas 3.2.15.

Corolario 3.2.17. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, $f : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow G_k$ funciones continuas e inyectivas, tales que las funciones f_1 , y h_1 cumplen las hipótesis (a)-(c) del Teorema 3.2.15. Entonces G_{k+1} contiene un arco \mathbf{A} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = f([0, 1])$
- (2) $\pi_{2,k+2}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.
- (3) Si además $f_1(0) = u$, entonces un punto extremo de \mathbf{A} es $(f_2(0), f_1(0), h_2(0), h_3(0), \dots, h_{k+1}(0))$.
- (4) Si además $f_1(0) = u$ y $f_1(1) = v$, entonces los puntos extremos de \mathbf{A} son $(f_2(0), f_1(0), h_2(0), \dots, h_{k+1}(0))$ y $(f_2(1), f_1(1), h_2(1), \dots, h_{k+1}(1))$, además se cumple que $\pi_{2,k+2}(\mathbf{A}) = \mathbf{h}([0, 1])$.

Corolario 3.2.18. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $k \in \mathbb{N}$, $f : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow G_k$ funciones continuas e inyectivas, tales que las funciones f_2 , g_2 y h_{k+1} cumplen las hipótesis (a)-(c) del Teorema 3.2.15. Entonces G_{k+1} contiene un arco \mathbf{A} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{k+1,k+2}(\mathbf{A}) = f([0, 1])$,
- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{A}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.
- (3) Si además $f_1(0) = u$, entonces un punto extremo de \mathbf{A} es $(f_2(0), f_1(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$.
- (4) Si además $f_2(0) = u$ y $f_2(1) = v$, entonces los puntos extremos de \mathbf{A} son $(h_1(0), h_2(0), \dots, h_{k+1}(0), f_2(0))$ y $(h_1(1), h_2(1), \dots, h_{k+1}(1), f_2(1))$, además se cumple que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{A}) = \mathbf{h}([0, 1])$.

Corolario 3.2.19. Sean $M \subset [0, 1]^2$, puntos $u, v \in [0, 1]$, $f : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ funciones continuas e inyectivas, tales que las funciones f_1 , y h_1 cumplen las hipótesis (a)-(c) del Teorema 3.2.15. Entonces $\varprojlim M$ contiene un arco \mathbf{A} , que satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = f([0, 1])$
- (2) $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbf{h}([0, 1])$.
- (3) Si además $f_1(0) = u$, entonces un punto extremo de \mathbf{A} es $(f_2(0), f_1(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$.
- (4) Si además $f_1(0) = u$ y $f_1(1) = v$, entonces los puntos extremos de \mathbf{A} son $(f_2(0), f_1(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$ y $(f_2(1), f_1(1), h_2(1), h_3(1), \dots)$ además se cumple que $\sigma(\mathbf{A}) = \mathbf{h}([0, 1])$.

Capítulo 4

Limites inversos y continuos arco conexos

En este capítulo daremos condiciones sobre M , los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$, y $\varprojlim M$ para obtener curvas cerradas simples y puntos de ramificación en $\varprojlim M$ y en los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$.

Recordemos que M denota un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$.

4.1. Límites inversos y continuos unicoherentes.

En esta sección daremos condiciones sobre M , los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$, y $\varprojlim M$ para obtener subcontinuos no unicoherentes (curvas cerradas simples) de $\varprojlim M$ y de los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.1.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que G_k contiene una curva cerrada simple y $\varprojlim M$ es arco conexo. Entonces $\varprojlim M$, contiene un subcontinuo no unicoherente. Si además $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo, entonces $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple.

Demostración.

Supongamos $\mathbf{S} \subset G_k$ una curva cerrada simple.

Sean $u, v \in [0, 1]$, $u \leq v$, tales que $\pi_{k+1}(\mathbf{S}) = [u, v]$. Notemos que si $k \geq 2$, entonces $\pi_{k+1}(\mathbf{S})$ puede ser degenerada, por lo que analizaremos los siguientes casos:

Caso 1 $u = v$.

Como $u = v$, tenemos que $\pi_{k+1}(\mathbf{S}) = \{u\}$, además como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, entonces $\{\mathbf{x} \in \varprojlim M : \pi_1(\mathbf{x}) = u\} \neq \emptyset$, por lo que se cumplen la hipótesis del Teorema 1.2.6. Por tanto $\varprojlim M$ contiene un subcontinuo homeomorfo a \mathbf{S} . Con esto terminamos la prueba del Caso 1.

Caso 2 $u < v$.

Probaremos que se satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.11.

Sean \mathbf{x} e \mathbf{y} puntos en \mathbf{S} , tales que $x_{k+1} = u$ y $y_{k+1} = v$. Como $u < v$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

Sean $\mathbf{L}, \mathbf{J} \subset \mathbf{S}$ los arcos que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{L} \cup \mathbf{J} = \mathbf{S}$,
- (ii) $\mathbf{L} \cap \mathbf{J} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

Como \mathbf{L} y \mathbf{J} son arcos, existen funciones continuas y biyectivas $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{L}$, $\mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{J}$, que cumplen la siguientes propiedades:

- (iii) $\mathbf{f}(0) = \mathbf{x} = \mathbf{g}(0)$,
- (iv) $\mathbf{f}(1) = \mathbf{y} = \mathbf{g}(1)$.

Por hipótesis, tenemos que $\varprojlim M$ es arco conexo, además como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i(\varprojlim M) = [0, 1]$, por lo que $\varprojlim M$ satisface la hipótesis del Corolario 1.1.2, por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} que cumple las siguientes propiedades:

- (v) $\pi_1(\mathbf{A}) = [u, v]$,
- (vi) $\pi_1(\mathbf{p}) = u$ y $\pi_1(\mathbf{q}) = v$,
- (vii) $\pi_1(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$.

Como \mathbf{A} es un arco, existe una función continua e inyectiva $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$, que cumple las siguientes propiedades:

- (viii) $\mathbf{h}(0) = \mathbf{p}$,
- (ix) $\mathbf{h}(1) = \mathbf{q}$.

Por la propiedad (vii) y la definición de la función \mathbf{h} , tenemos que

- (x) para cada punto $t \in (0, 1)$, se cumple $h_1(t) \in (u, v)$. (Figura 4.1)

Veamos que se satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.11.

Estamos suponiendo que $u < v$, y por definición tenemos que $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ son funciones continuas e inyectivas, veamos que las funciones cumplen hipótesis (a)-(d) del Teorema 3.2.11.

- (a) $\mathbf{f}(0) = \mathbf{g}(0)$ y $\mathbf{f}(1) = \mathbf{g}(1)$.

De (iii) y (iv), tenemos que $\mathbf{f}(0) = \mathbf{x} = \mathbf{g}(0)$ y $\mathbf{f}(1) = \mathbf{y} = \mathbf{g}(1)$.

- (b) $\mathbf{f}((0, 1)) \cap \mathbf{g}((0, 1)) = \emptyset$.

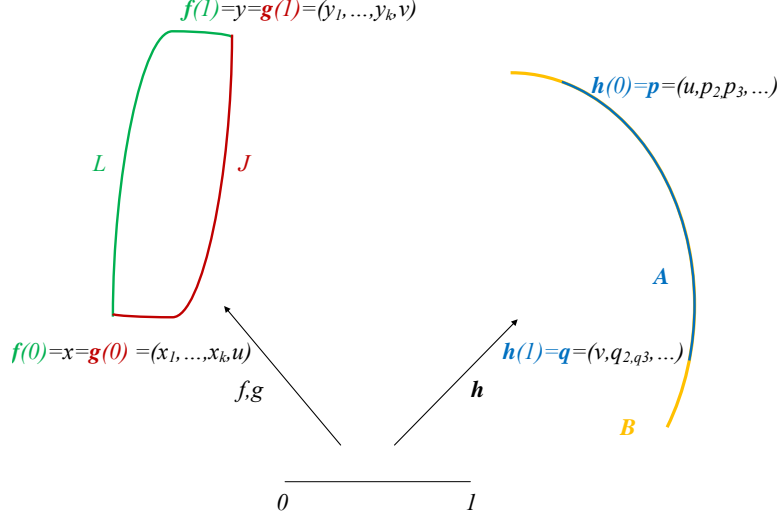


Figura 4.1:

De (ii), tenemos que $L \cap J = \{x, y\}$, y como $f([0, 1]) = J$ y $g([0, 1]) = L$, entonces $f([0, 1]) \cap g([0, 1]) = \{f(0), g(0)\}$, por tanto $f((0, 1)) \cap g((0, 1)) = \emptyset$.

(c) $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$.

Como $f([0, 1]) = J$, $g([0, 1]) = L$, $h([0, 1]) = A$ y $\varrho_{k+1}(S) = [u, v] = \pi_1(A)$, entonces $f_{k+1}([0, 1]) = g_{k+1}([0, 1]) = h_1([0, 1]) = [u, v]$.

(d) $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0) = h_1(0)$, $f_{k+1}(1) = v = g_{k+1}(1) = h_1(1)$ y $h_1((0, 1)) \subset (u, v)$.

De (iii) y (viii), tenemos que $f(0) = x = g(0)$ y $h(0) = p$, como $x_{k+1} = u$ y $\pi_1(p) = u$, entonces $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0) = h_1(0)$.

De (iv) y (ix), tenemos que $f(1) = y = g(1)$ y $h(1) = q$, como $y_{k+1} = v$ y $\pi_1(q) = v$, entonces $f_{k+1}(1) = v = g_{k+1}(1) = h_1(1)$.

Además de (x), para cada punto $t \in (0, 1)$, se cumple $\pi_1(h(t)) \in (u, v)$, por tanto $h_1((0, 1)) \subset (u, v)$.

Concluimos que se satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.11. Por tanto $\varprojlim M$ contiene un subcontinuo no unicoherente.

Para la segunda parte del teorema probaremos que las componentes de

$E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas.

De (d), tenemos que $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0) = h_1(0)$, $f_{k+1}(1) = v = g_{k+1}(1) = h_1(1)$, por lo que, los puntos $(0, 0), (1, 1) \in E(f_{k+1}, h_1)$ y $(0, 0), (1, 1) \in E(g_{k+1}, h_1)$, entonces $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_{k+1}, h_1)$. Así podemos definir

$$\blacksquare \varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M, \quad \blacksquare \psi : E(g_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M,$$

como siguen:

- para cada $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$,
 $\varphi((r, s)) = (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)$,
- para cada $(x, y) \in E(g_{k+1}, h_1)$,
 $\psi((r, s)) = (g_1(r), \dots, g_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots)$.

Como \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} son funciones continuas e inyectivas, entonces se satisfacen las hipótesis del Corolario 3.1.3, por tanto tenemos que φ y ψ son encajes.

Por tanto las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos de $\varprojlim M$, como $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo, concluimos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas.

Por tanto se satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.11,(3). Concluimos que $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple. ■

Corolario 4.1.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si M contiene una curva cerrada simple y $\varprojlim M$ es arco conexo, entonces $\varprojlim M$, contiene un subcontinuo no unicoherente. Si además $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo, entonces $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple.

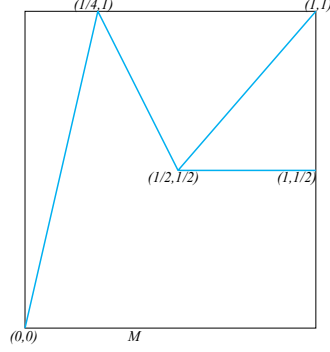
Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 , tenemos que G_1 contiene una curva cerrada simple. Por tanto por el Teorema 4.1.1, tenemos que $\varprojlim M$, contiene un subcontinuo no unicoherente. ■

El siguiente, es un ejemplo de un subconjunto cerrado $M \subset [0, 1]^2$ que no contiene curvas cerradas simples y $\varprojlim M$ contiene curvas cerradas simples.

Ejemplo 4.1.3. Sea

$$M = \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : y = 4x, x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : y = \frac{3}{2} - 2x, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \right\} \cup \left\{ (x, y) \in [0, 1]^2 : y \in \left\{x, \frac{1}{2}\right\}, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$$

Figura 4.2: M

Demostración.

Veremos que $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple, para lo cual definamos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left\{ \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, t, \frac{t}{4}, \frac{t}{4^2}, \dots \right) \in [0, 1]^\infty : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}, \\ \mathbf{A}_2 &= \left\{ \mathbf{x} = \left(t, t, \frac{t}{4}, \frac{t}{4^2}, \dots \right) \in [0, 1]^\infty : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}, \\ \mathbf{A}_3 &= \left\{ \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, t, \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2 \cdot 4}, \frac{1-t}{2 \cdot 4^2}, \dots \right) \in [0, 1]^\infty : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\} \text{ y} \\ \mathbf{A}_4 &= \left\{ \mathbf{x} = \left(t, t, \frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{8}, \frac{1-t}{16}, \dots \right) \in [0, 1]^\infty : t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Se sigue de la definición de $\varprojlim M$ que \mathbf{A}_i está contenido en $\varprojlim M$, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Es claro que, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, el conjunto \mathbf{A}_i es un arco. Veamos que

- (i) $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_4 = \emptyset$,
- (ii) $\mathbf{A}_2 \cap \mathbf{A}_3 = \emptyset$.

Probaremos (i), (ii) se prueba de manera similar, para esto procederemos por contradicción, supongamos que existe $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_4$, se sigue de la definición de \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_4 que $x_1 = \frac{1}{2}$, entonces $x_2 = \frac{1}{2}$ como $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_1$, obtenemos que $x_3 = \frac{1}{8}$ y como $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_4$, obtenemos que $x_3 = \frac{1}{2}$, tenemos entonces que $\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción, por tanto $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_4 = \emptyset$. Veamos ahora que $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_3$ es sólo un singular, el cual es extremo de ambos arcos. Tenemos que los extremos de \mathbf{A}_1 son $\mathbf{a}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 4^2}, \frac{1}{2 \cdot 4^3}, \dots \right)$ y $\mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots \right)$ los extremos de \mathbf{A}_2 son $\mathbf{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 4^2}, \frac{1}{2 \cdot 4^3}, \dots \right)$ y $\mathbf{b}_2 = \left(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots \right)$ los extremos de \mathbf{A}_3 son $\mathbf{a}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 4^2}, \frac{1}{2 \cdot 4^3}, \dots \right)$ y $\mathbf{b}_3 = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots \right)$ los extremos de \mathbf{A}_4 son $\mathbf{a}_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 4}, \frac{1}{2 \cdot 4^2}, \frac{1}{2 \cdot 4^3}, \dots \right)$ y $\mathbf{b}_4 = \left(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \dots \right)$, notemos

que, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_4$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_4$. Veamos entonces que:

- (iii) $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \{\mathbf{a}_1\}$,
- (iv) $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_3 = \{\mathbf{b}_1\}$,
- (v) $\mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_2 = \{\mathbf{b}_4\}$,
- (vi) $\mathbf{A}_4 \cap \mathbf{A}_3 = \{\mathbf{a}_4\}$.

Probaremos (iii), el resto se prueba de manera similar. Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$, se sigue de la definición de \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 que $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y para cada $n \geq 3$, $x_n = \frac{1}{2 \cdot 4^{n-2}}$, por tanto $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1$.

Definamos $\mathbf{C} = \mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 \cup \mathbf{A}_3 \cup \mathbf{A}_4$ se sigue de (i)-(vi) que \mathbf{C} es una curva cerrada simple contenida en $\varprojlim M$. ■

4.2. Puntos de ramificación de M en el límite inverso

En esta sección daremos condiciones suficientes sobre M , los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$, y $\varprojlim M$ para obtener puntos de ramificación en el $\varprojlim M$ y de los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.2.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$ y $\dim(\varprojlim M) = 1$. Supongamos que existe un punto $t_0 \in [0, 1]$, tal que $\{t_0\} \times [0, 1] \subset M$, y que cada función continua e inyectiva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, satisface que: para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha^{-1}(t)$ tiene un número finito de componentes. Entonces $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(G_k) \neq \emptyset$.

Demostración.

Como G_1 es homeomorfo a M , y $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{R}(G_1) \neq \emptyset$. Supongamos $k \geq 2$.

Probaremos que las hipótesis de los Corolarios 3.2.6, 3.2.7 se satisfacen.

Como $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$, tenemos que M contiene un triodo simple T . Sea \mathbf{v}_0 el vértice de T , por la Observación 1.1.8, tenemos que $\varrho_1(T)$ es un intervalo no degenerado. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u < v$, tales que $\varrho_1(T) = [u, v]$. Haremos la prueba del caso $\varrho_1(\mathbf{v}_0) > u$, la prueba del caso $\varrho_1(\mathbf{v}_0) < v$ se hace de manera similar.

Como $\varrho_1(T) = [u, v]$ y $\varrho_1(\mathbf{v}_0) > u$ por el Teorema 1.1.9, tenemos que existen funciones continuas e inyectivas $f, g : [0, 1] \rightarrow T \subset M$, tales que

- (i) $f(t) = g(t)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
- (ii) $f((\frac{1}{2}, 1]) \cap g((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$,
- (iii) $f_1, g_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,

(iv) $f_1(0) = u = g_1(0)$.

Además por hipótesis, tenemos que existe un punto $t_0 \in [0, 1]$, tal que $\{t_0\} \times [0, 1] \subset M$. Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, entonces existe un punto $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{x}) = t_0$. Definamos $\mathbf{A} = \{(t, \mathbf{x}) \in [0, 1]^\infty : t \in [u, v]\}$ y $\mathbf{B} = \{(t, \pi_{1,k-1}(\mathbf{x})) \in [0, 1]^k : t \in [u, v]\}$.

Por el Lema 1.2.8, tenemos que los conjuntos $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ y $\mathbf{B} \subset G_{k-1}$ son arcos, y existe una función continua y biyectiva $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ con las siguientes propiedades:

- (v) $\pi_{1,k} \circ \mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{B}$ es una función continua y biyectiva,
- (vi) h_1 es una función inyectiva,
- (vii) $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$.

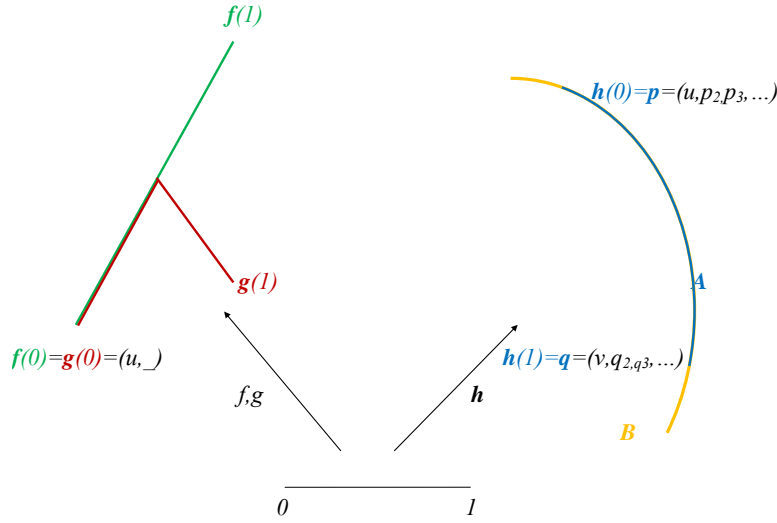


Figura 4.3:

Notemos que las funciones f , g y \mathbf{h} (Figura 4.3) ($\pi_{1,k} \circ \mathbf{h}$) satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Corolario 3.2.7, (Corolario 3.2.6) y que las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(e) del Corolario 3.2.7 (Corolario 3.2.6).

Nos falta probar que las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son ar-

co conexas. Para lo cual probaremos que la hipótesis del Teorema 2.1.8 se satisfacen.

Por hipótesis cada función continua e inyectiva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, satisface que para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha^{-1}(t)$ tiene un número finito de componentes. Como $f, g : [0, 1] \rightarrow M$ son funciones continuas e inyectivas, tenemos que para cada $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(t)$ y $g^{-1}(t)$ tienen un número finito de componentes.

Además como $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ es una función inyectiva, tenemos que para cada $t \in [0, 1]$, $h_1^{-1}(t)$ es un punto o el conjunto vacío.

De lo anterior tenemos que las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen que la preimagen de un punto tiene un número finito de componentes, por lo que las hipótesis del Teorema 2.1.8 se cumplen para las funciones f_1 , h_1 y para las funciones g_1 , h_1 . Por tanto las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son arco conexas. Concluimos que las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (f)-(g) del Corolario 3.2.7 (Corolario 3.2.6).

Hemos probado que las hipótesis del Corolario 3.2.7, (Corolario 3.2.6), se satisfacen. Por tanto $\varprojlim M$, (G_k) , contiene un triodo simple. Concluimos que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(G_k) \neq \emptyset$. ■

Teorema 4.2.2. Sean $B \subset [0, 1]$ un conjunto cerrado, $n \in \mathbb{N}$ y $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ funciones continuas en $[0, 1] - B$. Supongamos que

$$M = \text{Graf}(\beta_1) \cup \text{Graf}(\beta_2) \cup \dots \cup \text{Graf}(\beta_n) \cup (B \times [0, 1]),$$

satisface que $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$ y $\dim(\varprojlim M) = 1$. (Figura 4.4) Entonces $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(G_k) \neq \emptyset$.

Demostración.

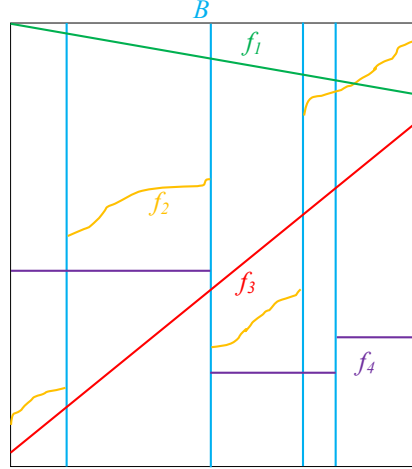
Veremos que las hipótesis del Teorema 4.2.1 se cumplen. Probaremos primero que dada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ una función continua e inyectiva, para cada $t \in [0, 1]$ se satisface que $\alpha^{-1}(t)$ tiene a lo mas $2n$ componentes. Para ésto probaremos que se satisfacen las hipótesis del Lema 1.1.15.

Afirmación 1. B es un conjunto totalmente desconexo.

Prueba.

Supongamos por el contrario que existe A una componente no degenerada de B .

Sean $a, b \in [0, 1]$, tales que $A = [a, b]$. Como $A \times [0, 1] \subset M$, tenemos que $(\{a\} \times [a, b]) \cup ([a, b] \times \{a\}) \subset M$, por ([10], Example 134) tenemos que $\varprojlim M$ tiene dimensión infinita.

Figura 4.4: M

Lo anterior contradice que $\dim(\varprojlim M) = 1$. Por tanto B es un conjunto totalmente desconexo y la Afirmación 1 queda demostrada. \square

De la Afirmación 1 y la definición de M tenemos que las hipótesis del Lema 1.1.15 se satisfacen. Por tanto dada $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ una función continua e inyectiva, para cada $t \in [0, 1]$ se satisface que $\alpha^{-1}(t)$ tiene a lo mas $2n$ componentes.

Veamos que las hipótesis del Teorema 4.2.1 se cumplen.

Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$ y $\dim(\varprojlim M) = 1$.

De la definición de M , tenemos que existe un punto $t_0 \in [0, 1]$, tal que $t_0 \times [0, 1] \subset M$. Además probamos que cada función continua e inyectiva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, satisface que para cada $t \in [0, 1]$, $\alpha^{-1}(t)$ tiene un número finito de componentes.

Por tanto las hipótesis del Teorema 4.2.1 se satisfacen.

Concluimos que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(G_k) \neq \emptyset$. \blacksquare

Teorema 4.2.3. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $t_0 \in [0, 1]$ tales que $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$, $\dim(\varprojlim M) = 1$ y $\{t_0\} \times [0, 1] \subset M$. Supongamos que existe $T \subset M$ un triodo simple, que es unión finita de gráficas de funciones continuas. Entonces

$\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(G_k) \neq \emptyset$.

Demostración.

Como G_1 es homeomorfo a M y M contiene un triodo simple, entonces G_1 contiene un triodo simple, así $\mathcal{R}(G_1) \neq \emptyset$. Supongamos $k \geq 2$.

Probaremos que las hipótesis de los Corolarios 3.2.6, 3.2.7 se satisfacen.

Como T es unión de gráficas de funciones continuas, existen puntos $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 \in [0, 1]$, con $a_i < b_i$ y funciones continuas $\alpha_i : [a_i, b_i] \rightarrow [0, 1]$ tales que $T' = \text{Graf}(\alpha_1) \cup \text{Graf}(\alpha_2) \cup \text{Graf}(\alpha_3) \subset T$ es un triodo simple.

Sea v_0 el vértice de T' por la Observación 1.1.8, tenemos que $\varrho_1(T')$ es un intervalo no degenerado. Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u < v$, tales que $\varrho_1(T') = [u, v]$. Haremos la prueba del caso $\varrho_1(v_0) > u$, la prueba del caso $\varrho_1(v_0) < v$ se hace de manera similar.

Como $\varrho_1(T') = [u, v]$ y $\varrho_1(v_0) > u$ por el Teorema 1.1.9, existen funciones continuas e inyectivas $f, g : [0, 1] \rightarrow T'$, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $f(t) = g(t)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
- (ii) $f((\frac{1}{2}, 1]) \cap g((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$,
- (iii) $f_1, g_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (iv) $f_1(0) = u = g_1(0)$.

Además por hipótesis, tenemos que existe un punto $t_0 \in [0, 1]$, tal que $\{t_0\} \times [0, 1] \subset M$. Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, entonces existe un punto $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{x}) = t_0$. Definamos $\mathbf{A} = \{(t, \mathbf{x}) \in [0, 1]^\infty : t \in [u, v]\}$ y $\mathbf{B} = \{(t, \pi_{1,k-1}(\mathbf{x})) \in [0, 1]^k : t \in [u, v]\}$.

Por el Lema 1.2.8, (1), (2) tenemos que los conjuntos $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ y $\mathbf{B} \subset G_{k-1}$ son arcos, además, existe una función continua y biyectiva $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ con las siguientes propiedades:

- (v) $\pi_{1,k} \circ \mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{B}$ es una función continua y biyectiva.
- (vi) h_1 es una función inyectiva,
- (vii) $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$.

Notemos que las funciones f, g y \mathbf{h} ($\pi_{1,k} \circ \mathbf{h}$) satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Corolario 3.2.7, (Corolario 3.2.6) y que las funciones f_1, g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(e) del Corolario 3.2.7 (Corolario 3.2.6).

Nos falta probar que las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son arco conexas. Para lo cual probaremos que se satisfacen la hipótesis del Teorema 2.1.8.

Afirmación 1

(i) $|f_1^{-1}(t)| \leq 3$

(ii) $|g_1^{-1}(t)| \leq 3$

Prueba.

Probaremos el inciso (i) el inciso (ii) se prueba de forma similar.

Sea $t \in [0, 1]$

Caso 1 $t \notin \varrho_1(f[0, 1])$.

Tenemos que $f_1^{-1}(t) = \emptyset$. Por tanto la Afirmación 1 es cierta.

Caso 2 $t \in \varrho_1(f[0, 1])$.

Sea $r \in f_1^{-1}(t)$, tenemos que $\varrho_1(f(r)) = t$. Como $T' = \text{Graf}(\alpha_1) \cup \text{Graf}(\alpha_2) \cup \text{Graf}(\alpha_3)$, existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $f(r) \in \text{Graf}(\alpha_i)$. De lo anterior obtenemos que $f(r) = (t, \alpha_i(t))$, por lo que

$$f_1^{-1}(t) = \{r \in [0, 1] : f(r) = (t, \alpha_i(t)), \text{ para alguna } i \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Como para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, α_i es función y f es una función inyectiva tenemos que $|f_1^{-1}(t)| \leq 3$. Por lo que la Afirmación 1 se cumple. \square

De la Afirmación 1 concluimos que para cada punto $t \in [0, 1]$, $f_1^{-1}(t)$ y $g_1^{-1}(t)$ tienen un número finito de componentes.

Además como $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ es una función inyectiva, tenemos que para cada $t \in [0, 1]$, $h_1^{-1}(t)$ es un punto o el conjunto vacío.

De lo anterior tenemos que las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen que la preimagen de un punto tiene un número finito de componentes, por lo que las hipótesis del Teorema 2.1.8 se cumplen para las funciones f_1 , h_1 y para las funciones g_1 , h_1 . Por tanto las componentes de $E(f_1, h_1)$ y $E(g_1, h_1)$ son arco conexas, por tanto las funciones f_1 , g_1 y h_1 cumplen las hipótesis (f)-(g) del Corolario 3.2.7 (Corolario 3.2.6).

Hemos probado que las hipótesis del Corolario 3.2.7, (Corolario 3.2.6), se satisfacen. Por tanto $\varprojlim M, (G_k)$, contiene un triodo simple. Concluimos que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(G_k) \neq \emptyset$. \blacksquare

Teorema 4.2.4. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $k \in \mathbb{N}$, los subcontinuos propios del $\varprojlim M$, son arco conexos. Supongamos que existen un triodo simple $\mathbf{T} \subset G_k$, con vértice \mathbf{v}_0 y un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}) = \pi_{k+1}(\mathbf{T})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$, con vértice \mathbf{v}_ε , con las siguientes propiedades:

(1) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,

- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,
 (3) $d(\pi_{1,k+1}(\mathbf{v}_\varepsilon), \mathbf{v}_0) < \varepsilon$.

Demostración.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\mathbf{R} \subset \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbf{v}_0)} \cap \mathbf{T}$ un triodo simple. Sean $u, v \in [0, 1]$ tales que $\pi_{k+1}(\mathbf{R}) = [u, v]$.

Notemos que si $k = 1$, como G_1 es homeomorfo a M , entonces por la Observación 1.1.8, $\varrho_1(\mathbf{R})$ y $\varrho_2(\mathbf{R})$, son no degeneradas, por lo que $u < v$ y si $k \geq 2$ se puede dar el caso en que $u = v$. Por lo que vamos analizar los siguientes casos.

Caso 1 $u = v$, $k \geq 2$.

Como $u = v$, tenemos que $\pi_{k+1}(\mathbf{R}) = \{u\}$, por otro lado de la hipótesis (c), tenemos que $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ es un arco tal que $\pi_1(\mathbf{B}) = \pi_{k+1}(\mathbf{R})$, entonces existe un punto $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$, tal que $\pi_1(\mathbf{x}) = u$, por lo que $\{\mathbf{y} \in \varprojlim M : \pi_1(\mathbf{y}) = u\} \neq \emptyset$, de lo anterior tenemos que se cumplen la hipótesis del Teorema 1.2.6. Por tanto para el punto \mathbf{x} se cumple que

$$\mathbf{T}' = \{(\mathbf{z}, x_2, x_3, \dots) \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} \in \mathbf{R}\}.$$

es un subcontinuo del $\varprojlim M$ homeomorfo a \mathbf{T} que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') = \mathbf{R}$,
 (ii) $\sigma^k(\mathbf{T}') = \{\mathbf{x}\}$.

Por tanto se satisface

- (1) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
 (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,

Como \mathbf{T}' es homeomorfo a \mathbf{T} , tenemos de la definición de \mathbf{T}' que $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathbf{v}_0, x_2, x_3, \dots)$, por lo que

- (3) $d(\pi_{1,k+1}(\mathbf{v}_\varepsilon), \mathbf{v}_0) = 0 < \varepsilon$.

Con esto terminamos la prueba del Caso 1.

Caso 2 $u < v$.

Probaremos que la se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.4.

Haremos la prueba del caso $\pi_{k+1}(\mathbf{v}_0) > u$, la prueba del caso $\pi_{k+1}(\mathbf{v}_0) < v$ se hace de manera similar.

Como $\pi_{k+1}(\mathbf{R}) = [u, v]$ y $\pi_{k+1}(\mathbf{v}_0) > u$ por el Teorema 1.1.9 se cumple que, existen funciones continuas e inyectivas $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
 (ii) $\mathbf{f}((\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathbf{g}((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$,

- (iii) $f_{k+1}, g_{k+1} : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (iv) $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0)$.

Además por hipótesis existe $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ un arco, tal que $\pi_{k+1}(R) \subset \pi_1(\mathbf{B})$. Entonces por el Lema 1.1.1 existe un arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ con puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades:

- (v) $\pi_1(\mathbf{A}) = [u, v]$,
- (vi) $\pi_1(\mathbf{p}) = u$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = v$,
- (vii) $\pi_1(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$,

Como \mathbf{A} es un arco existe una función continua e inyectiva $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$, tal que

- (viii) $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (ix) $h_1(0) = u$,
- (x) $h_1(1) = v$.

Notemos que las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.4, y que las funciones f_{k+1} , g_{k+1} y h_1 cumplen las hipótesis (c)-(e) del Teorema 3.2.4.

Nos falta probar que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas. Para lo cual probaremos la siguiente Afirmación.

Afirmación 1 Las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son homeomorfos a subcontinuos propios de $\varprojlim M$.

Prueba.

Basta ver que las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} , satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.1. Tenemos que \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} son funciones continuas e inyectivas, veamos que se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) existen puntos $r, s \in [0, 1]$ tales que $\mathbf{f}(r) \notin \mathbf{g}([0, 1])$ y $\mathbf{g}(s) \notin \mathbf{f}([0, 1])$.

De (ii), $\mathbf{f}((\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathbf{g}((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$, entonces para cualesquiera puntos $r, s \in (\frac{1}{2}, 1]$ se satisface (a).

- (b) $f_{k+1}, g_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$.

De (iii) $f_{k+1}, g_{k+1} : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ y (viii) $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$

- (c) h_1 es suprayectiva.

De (ix) $h_1(0) = u$ y (x) $h_1(1) = v$, como $[0, 1]$ es conexo, entonces $h_1([0, 1]) = [u, v]$.

- (d) $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset \neq E(g_{k+1}, h_1)$.

De (iv) $f_{k+1}(0) = u = g_{k+1}(0)$ y (ix) $h_1(0) = u$, entonces $(0, 0) \in E(f_{k+1}, h_1)$ y $(0, 0) \in E(g_{k+1}, h_1)$.

De lo anterior, tenemos que se satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.1.

Las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son homeomorfas a subcontinuos propios de $\varprojlim M$. \square

Como los subcontinuos propios de $\varprojlim M$ son arco conexos y se cumple la Afirmación 1, concluimos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ y $E(g_{k+1}, h_1)$ son arco conexas.

Hemos probado que las hipótesis del Teorema 3.2.4 se satisfacen, por tanto $\varprojlim M$ contiene un triodo simple \mathbf{T}' , tal que satisface las siguientes propiedades:

- (xi) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$
- (xii) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Veamos que \mathbf{T}' satisface las propiedades (1), (2) y (3) del teorema.

- (1) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$.

Por la propiedad (xii) tenemos que $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{h}([0, 1])$ y $\mathbf{h}([0, 1]) = \mathbf{A}$, como $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, concluimos que $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$.

- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$.

Por la propiedad (xi) tenemos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$, como $(\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1])) \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{T}$ concluimos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$.

- (3) $d(\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}_\varepsilon), \mathbf{v}_0) < \varepsilon$.

Por la propiedad (xi) tenemos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$, como $(\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1])) \subset \mathbf{R} \subset \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbf{v}_0)} \cap \mathbf{T}$, entonces $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}_\varepsilon) \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbf{v}_0)} \cap \mathbf{T}$. Por tanto $d(\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}_\varepsilon), \mathbf{v}_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Por tanto el teorema queda demostrado. \blacksquare

Corolario 4.2.5. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\dim(\varprojlim M) = 1$ y los subcontinuos propios del $\varprojlim M$, son arco conexos. Supongamos que existen un triodo simple $T \subset M$, con vértice v_0 y un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}) = \varrho_1(T)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$, con vértice \mathbf{v}_ε , con las siguientes propiedades:

- (1) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset T$,
- (3) $d(\pi_{2,1}(\mathbf{v}_\varepsilon), v_0) < \varepsilon$.

Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 , entonces las hipótesis del Teorema 4.2.4 se satisfacen. Por tanto $\varprojlim M$ contiene un triodo simple que satisface las propiedades deseadas. \blacksquare

Corolario 4.2.6. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\dim(G_{k+1}) = 1$ y los subcontinuos propios del G_k , son arco conexos. Supongamos que existen un triodo simple $T \subset M$, con vértice v_0 y un arco $\mathbf{B} \subset G_k$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}) = \varrho_1(\mathbf{T})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset G_{k+1}$, con vértice v_ε , con las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,k+2}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset T$,
- (3) $d(\pi_{2,1}(v_\varepsilon), v_0) < \varepsilon$.

Demostración.

La prueba de este corolario se hace de manera similar a la prueba del Teorema 4.2.4. ■

Corolario 4.2.7. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que los subcontinuos propios del $\varprojlim M$ son arco conexos y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen un triodo simple $T \subset G_k$ con vértice v_0 y un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}) = \pi_{k+1}(T)$. Entonces existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$, con vértice \mathbf{y} , que cumple las siguientes propiedades:

- (1) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset T$ y
- (3) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) = v_0$.

Demostración.

Como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, tenemos que $|\pi_{1,k+1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))| < \infty$, por lo que existe un número $\varepsilon > 0$ tal que,

- (i) $B_\varepsilon(v_0) \cap (\pi_{1,k+1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))) \subset \{v_0\}$.

Notemos que se satisfacen la hipótesis de Teorema 4.2.4, por tanto existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$, con vértice \mathbf{y} , con las siguientes propiedades:

- (ii) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
- (iii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset T$,
- (iv) $d(\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}), v_0) < \varepsilon$.

De la propiedad (iv) y la propiedad (i), obtenemos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) \in B_\varepsilon(v_0) \cap (\pi_{1,k+1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))) \subset \{v_0\}$. Por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) = v_0$.

Así el corolario queda demostrado. ■

Corolario 4.2.8. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que los subcontinuos propios del $\varprojlim M$ son arco conexos y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen un triodo simple $T \subset M$ con vértice v_0 y un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ tal que $\pi_1(\mathbf{B}) =$

$\varrho_1(T)$. Entonces existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con vértice \mathbf{y} con las siguientes propiedades:

- (1) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset T$ y
- (3) $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) = v_0$.

Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 , entonces las hipótesis del Teorema 4.2.7 se satisfacen. Por tanto $\varprojlim M$ contiene un triodo simple que satisface las propiedades deseadas. ■

Corolario 4.2.9. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\dim(G_{k+1}) = 1$ y los subcontinuos propios del G_k son arco conexos y $|\mathcal{R}(G_k)| < \infty$. Supongamos que existen un triodo simple $T \subset M$, con vértice v_0 y un arco $B \subset G_k$, tal que $\pi_1(B) = \varrho_1(T)$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset G_{k+1}$, con vértice \mathbf{y} , con las siguientes propiedades:

- (1) $\pi_{2,k+2}(\mathbf{T}') \subset B$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset T$,
- (3) $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) = v_0$.

4.3. Puntos de ramificación del límite inverso en el límite inverso

En esta sección daremos condiciones suficientes sobre M , los conjuntos G_k , $k \in \mathbb{N}$, y $\varprojlim M$ para obtener puntos de ramificación en el $\varprojlim M$.

Teorema 4.3.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que los subcontinuos propios del $\varprojlim M$ son arco conexos. Supongamos que existen un triodo simple $\mathbf{T} \subset \varprojlim M$ y un arco $B \subset G_k$ tal que $\pi_1(\mathbf{T}) = \pi_{k+1}(B)$. Entonces existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (1) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,
- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset B$.

Demostración.

Sean $u, v \in [0, 1]$ tales que $\pi_1(\mathbf{T}) = [u, v]$. Vamos analizar los siguientes casos.

Caso 1 $u = v$.

De la hipótesis (c), tenemos que $B \subset G_k$ es un arco tal que $\pi_1(\mathbf{T}) = \{u\} = \rho_{k+1}(B)$. Sea $\mathbf{x} \in B$, tenemos que $\pi_1(\mathbf{x}) = u$.
 Definamos

$$\mathbf{T}' = \{(\mathbf{x}, z_2, z_3, \dots) \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} \in \mathbf{T}\}.$$

Probaremos que \mathbf{T}' es un triodo simple contenido en $\varprojlim M$. Veamos primero que $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$.

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{T}'$, probaremos que para cada $i \in \mathbb{N}$, el punto $(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) \in M$. Por definición de \mathbf{T}' existe un punto $\mathbf{z} \in \mathbf{T} \subset \varprojlim M$, tal que el punto \mathbf{y} es de la forma $(\mathbf{x}, z_2, z_3, \dots)$.

Veamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, el punto $(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) \in M$.

- Sea $1 \leq i \leq k$.

Como $\mathbf{x} \in B \subset G_k$, por definición de G_k , para $1 \leq i \leq k$ el punto

$$(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) = (\varrho_{i+1}(\mathbf{x}), \varrho_i(\mathbf{x})) \in M$$

- Sea $i = k + 1$.

Como $\pi_1(\mathbf{T}) = \{u\}$, entonces $\pi_1(\mathbf{z}) = u$. Además $\varrho_{k+1}(\mathbf{x}) = u$ por lo que

$$(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) = (\pi_2(\mathbf{z}), \varrho_{k+1}(\mathbf{x})) = (z_2, u) = (z_2, z_1).$$

Además como $\mathbf{z} \in \varprojlim M$, por definición de $\varprojlim M$ el punto $(z_2, z_1) \in M$. Por tanto el punto $(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) \in M$.

- Sea $i \geq k + 2$.

Como $\mathbf{z} \in \varprojlim M$, por definición de $\varprojlim M$ el punto

$$(\pi_{i+1}(\mathbf{y}), \pi_i(\mathbf{y})) = (\pi_{i-k}(\mathbf{z}), \pi_{i-k-1}(\mathbf{z})) \in M.$$

Por tanto el punto $\mathbf{y} \in \varprojlim M$. Por tanto $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$

Por otro lado la función $\sigma^k|_{\mathbf{T}'} : \mathbf{T}' \rightarrow \mathbf{T}$ es un homeomorfismo. Por tanto \mathbf{T}' es un triodo simple.

Veamos que \mathbf{T}' satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{T}'$, por definición de \mathbf{T}' existe un punto $\mathbf{z} \in \mathbf{T}$, tal que el punto \mathbf{y} es de la forma $(\mathbf{x}, z_2, z_3, \dots)$. Entonces

- (1) $\sigma^k(\mathbf{y}) = \mathbf{z} \in \mathbf{T}$, por tanto $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,

(2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \in \mathbf{B}$, por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$.

Con esto terminamos la prueba del Caso 1.

Caso 2 $u < v$.

Probaremos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.2.8. Sea \mathbf{v}_0 el vértice de \mathbf{T} . Haremos la prueba del caso $\pi_1(\mathbf{v}_0) > u$, la prueba del caso $\pi_1(\mathbf{v}_0) < v$ se hace de manera similar.

Como $\pi_1(\mathbf{T}) = [u, v]$ y $\pi_1(\mathbf{v}_0) > u$ por el Teorema 1.1.9 se cumple que, existen funciones continuas e inyectivas $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{T}$, tales que cumplen las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$, para cada $t \in [0, \frac{1}{2}]$,
- (ii) $\mathbf{f}([\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathbf{g}([\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$,
- (iii) $f_1, g_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (iv) $f_1(0) = u = g_1(0)$.

Además por hipótesis existe $\mathbf{B} \subset G_k$ un arco tal que $\pi_1(\mathbf{T}) = \pi_{k+1}(\mathbf{B})$. Entonces por el Lema 1.1.1 existe un arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ con extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades:

- (v) $\varrho_{k+1}(\mathbf{A}) = [u, v]$,
- (vi) $\varrho_{k+1}(\mathbf{p}) = u$ y $\varrho_{k+1}(\mathbf{q}) = v$,
- (vii) $\varrho_{k+1}(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$.

Como \mathbf{A} es un arco existe una función continua e inyectiva $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ tal que

- (viii) $h_{k+1} : [0, 1] \rightarrow [u, v]$,
- (ix) $h_{k+1}(0) = u$,
- (x) $h_{k+1}(1) = v$.

Notemos que las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} satisfacen las hipótesis (a)-(b) del Teorema 3.2.8, y que las funciones f_1 , g_1 y h_{k+1} cumplen las hipótesis (c)-(e) del Teorema 3.2.8.

Nos falta probar que las componentes de $E(f_1, h_{k+1})$ y $E(g_1, h_{k+1})$ son arco conexas. Para lo cual probaremos la siguiente Afirmación.

Afirmación 1 Las componentes de $E(f_1, h_{k+1})$ y $E(g_1, h_{k+1})$ son homeomorfos a subcontinuos propios de $\varprojlim M$.

Prueba.

Basta ver que las funciones \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} , satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.1. Tenemos que \mathbf{f} , \mathbf{g} y \mathbf{h} son funciones continuas e inyectivas, veamos que se cumplen las siguientes propiedades:

- (a) existen puntos $r, s \in [0, 1]$ tales que $\mathbf{f}(r) \notin \mathbf{g}([0, 1])$ y $\mathbf{g}(s) \notin \mathbf{f}([0, 1])$.

De (ii), $\mathbf{f}((\frac{1}{2}, 1]) \cap \mathbf{g}((\frac{1}{2}, 1]) = \emptyset$, entonces para cualesquiera puntos $r, s \in (\frac{1}{2}, 1]$ se satisface (a).

(b) $f_1, g_1, h_{k+1} : [0, 1] \rightarrow [u, v]$.

De (iii) $f_1, g_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$ y (viii) $h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v]$

(c) h_1 es suprayectiva.

De (ix) $h_{k+1}(0) = u$ y (x) $h_{k+1}(1) = v$, como $[0, 1]$ es conexo, entonces $h_{k+1}([0, 1]) = [u, v]$.

(d) $E(f_1, h_{k+1}) \neq \emptyset \neq E(g_1, h_{k+1})$.

De (iv) $f_1(0) = u = g_1(0)$ y (ix) $h_{k+1}(0) = u$, entonces $(0, 0) \in E(f_1, h_{k+1})$ y $(0, 0) \in E(g_1, h_{k+1})$.

De lo anterior, tenemos que se satisfacen la hipótesis de Teorema 3.2.1.

Las componentes de $E(f_1, h_{k+1})$ y $E(g_1, h_{k+1})$ son homeomorfas a subcontinuos propios de $\varprojlim M$. \square

Hemos probado que las hipótesis del Teorema 3.2.8 se satisfacen, por tanto $\varprojlim M$ contiene un triodo simple \mathbf{T}' , tal que satisface las siguientes propiedades:

(iv) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$

(v) $\pi_{1, k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Veamos que \mathbf{T}' satisface las propiedades (1) y (2) del teorema.

(1) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$.

Por la propiedad (iv), tenemos que $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset (\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1]))$ como $(\mathbf{f}([0, 1]) \cup \mathbf{g}([0, 1])) \subset \mathbf{T}$, concluimos que $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$.

(2) $\pi_{1, k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$.

Por la propiedad (v), tenemos que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{h}([0, 1])$, como $\mathbf{h}([0, 1]) = \mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ concluimos que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$.

Por tanto el teorema queda demostrado. \blacksquare

Corolario 4.3.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\dim(\varprojlim M) = 1$ y los subcontinuos propios del $\varprojlim M$ son arco conexos. Supongamos que existen un triodo simple $\mathbf{T} \subset \varprojlim M$ y un arco $B \subset M$ tal que $\pi_1(\mathbf{T}) = \varrho_1(B)$. Entonces existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

(1) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,

(2) $\pi_{2, 1}(\mathbf{T}') \subset B$.

Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 tenemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.1. Por tanto $\varprojlim M$ contiene un triodo simple que satisface las propiedades deseadas. \blacksquare

4.4. Arcos en el límites inversos y en los conjuntos

$$G_k$$

En esta sección daremos herramientas que nos permitan construir arcos en el $\varprojlim M$ y en los conjuntos G_k , con propiedades especiales.

Teorema 4.4.1. Sean M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$ y $k \in \mathbb{N}$, tales que $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo. Supongamos que existen arcos $\mathbf{A} \subset G_k$ y $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tales que:

$$(a) \pi_{k+1}(\mathbf{A}) = [u, v] = \pi_1(\mathbf{B}).$$

$$(b) \mathbf{B} \text{ tiene puntos extremos } \mathbf{p} \text{ y } \mathbf{q} \text{ tales que } p_1 = u \text{ y } q_1 = v.$$

Entonces existe un arco $\mathbf{B}' \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

$$(1) \sigma^k(\mathbf{B}') \subset \mathbf{B},$$

$$(2) \pi_{1,k+1}(\mathbf{B}') = \mathbf{A},$$

(3) Si además \mathbf{A} , tiene un punto extremo \mathbf{a} , tal que $a_{k+1} = u$, entonces $(a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$ es un punto extremo de \mathbf{B} ,

(4) Si además \mathbf{A} , tiene puntos extremos \mathbf{a} y \mathbf{b} , tales que $a_{k+1} = u$ y $b_{k+1} = v$, entonces \mathbf{B}' tiene puntos extremos $(a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$, $(b_1, \dots, b_{k+1}, q_2, q_3, \dots)$ y $\sigma^k(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$.

Demostración.

Veremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.15.

Probaremos primero los incisos (1) y (2).

Como $\mathbf{A} \subset G_k$ y $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ son arcos, tales que $\pi_{k+1}(\mathbf{A}) = [u, v] = \pi_1(\mathbf{B})$. Entonces existen $\mathbf{f} : [0, 1] \rightarrow G_k$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$, funciones continuas e inyectivas, tales que $\mathbf{f}([0, 1]) = \mathbf{A}$ y $\mathbf{h}([0, 1]) = \mathbf{B}$.

Como $\pi_{k+1}(\mathbf{A}) = [u, v] = \pi_1(\mathbf{B})$ y \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} tales que $p_1 = u$ y $q_1 = v$, podemos suponer que las funciones \mathbf{f} y \mathbf{h} cumplen las siguientes propiedades:

$$(i) f_{k+1}, h_1 : [0, 1] \rightarrow [u, v],$$

$$(ii) h_1(0) = u \text{ y } h_1(1) = v.$$

Como $h_1(0) = u$ y $h_1(1) = v$, entonces $h_1([0, 1]) = [u, v]$, así h_1 es una función suprayectiva, por tanto de la Observación 2.1.1.(2), tenemos que $E(f_{k+1}, h_1) \neq \emptyset$. Entonces podemos definir $\varphi : E(f_{k+1}, h_1) \rightarrow \varprojlim M$, para cada punto $(r, s) \in E(f_{k+1}, h_1)$ como sigue:

$$\varphi((r, s)) = (f_1(r), \dots, f_{k+1}(r), h_2(s), h_3(s), \dots).$$

Como f , y h son funciones continuas e inyectivas, tenemos que satisfacen las hipótesis del Corolario 3.1.3, por tanto φ es un encaje.

Como φ es un encaje, tenemos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ son homeomorfismos a subcontinuos de $\varprojlim M$, como $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo, tenemos que las componentes de $E(f_{k+1}, h_1)$ son arco conexas.

De lo anterior las hipótesis del Teorema 3.2.15 se cumplen. Por tanto existe un arco $\mathbf{B}' \subset \varprojlim M$, que satisface las siguientes propiedades:

- (iii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{B}') = \mathbf{f}([0, 1])$,
- (iv) $\sigma^k(\mathbf{B}') \subset \mathbf{h}([0, 1])$.

Veamos que \mathbf{B}' satisface la propiedades del teorema.

De (iv) $\sigma^k(\mathbf{B}') \subset \mathbf{h}([0, 1])$, como $\mathbf{h}([0, 1]) = \mathbf{B}$, tenemos que $\sigma^k(\mathbf{B}') \subset \mathbf{B}$.

De (iii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{B}') = \mathbf{f}([0, 1])$, como $\mathbf{f}([0, 1]) = \mathbf{A}$, tenemos que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{B}') = \mathbf{A}$.

Así los incisos (1) y (2) quedan demostrados.

Probaremos ahora el inciso (3).

(3) Si además \mathbf{A} , tiene un punto extremo \mathbf{a} , tal que $a_{k+1} = u$, entonces $(a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$ es un punto extremo de \mathbf{B} .

Como el arco \mathbf{A} tiene un punto extremo \mathbf{a} tal que $a_1 = u$, podemos suponer que la función \mathbf{f} cumplen que $f_{k+1}(0) = u$. Por tanto se cumple la hipótesis del Teorema 3.2.15,(3). Por tanto un punto extremo de \mathbf{B}' es $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$.

Como $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots) = (a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$, el inciso (3) queda demostrado.

Probaremos ahora el inciso (4).

(4) Si además \mathbf{A} , tiene puntos extremos \mathbf{a} y \mathbf{b} , tales que $a_{k+1} = u$ y $b_{k+1} = v$, entonces \mathbf{B}' tiene puntos extremos $(a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$, $(b_1, \dots, b_{k+1}, q_2, q_3, \dots)$ y $\sigma^k(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$.

Como \mathbf{A} tiene un puntos extremos \mathbf{a} y \mathbf{b} , tales que $a_{k+1} = u$ y $b_{k+1} = v$, podemos suponer que las función \mathbf{f} cumple que $f_{k+1}(0) = u$ y $f_{k+1}(1) = v$. Por tanto se cumple la hipótesis del Teorema 3.2.15,(4).

Por tanto \mathbf{B}' tiene puntos extremos $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots)$, $(f_1(1), \dots, f_{k+1}(1), h_2(1), h_3(1), \dots)$ y $\sigma^k(\mathbf{B}') = \mathbf{h}([0, 1])$.

Como $(f_1(0), \dots, f_{k+1}(0), h_2(0), h_3(0), \dots) = (a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$ y $(f_1(1), \dots, f_{k+1}(1), h_2(1), h_3(1), \dots) = (b_1, \dots, b_{k+1}, q_2, q_3, \dots)$, tenemos que \mathbf{B}' tiene puntos extremos $(a_1, \dots, a_{k+1}, p_2, p_3, \dots)$ y $(b_1, \dots, b_{k+1}, q_2, q_3, \dots)$.

Además como $\sigma^k(\mathbf{B}') = \mathbf{h}([0, 1])$ y $\mathbf{h}([0, 1]) = \mathbf{B}$, tenemos que $\sigma^k(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$. Así el inciso (4) queda demostrado.

Por tanto el teorema queda demostrado. ■

Corolario 4.4.2. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $u, v \in [0, 1]$, $u \leq v$, tal que $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo. Supongamos que existen arcos $A \subset M$ y $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ tales que:

(a) $\varrho_1(A) = [u, v] = \pi_1(\mathbf{B})$.

(b) \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} tales que $p_1 = u$ y $q_1 = v$.

Entonces existe un arco $\mathbf{B}' \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

(1) $\sigma(\mathbf{B}') \subset \mathbf{B}$,

(2) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}') = A$.

(3) Si además A , tiene un punto extremo a , tal que $a_1 = u$, entonces $(a_2, a_1, p_2, p_3, \dots)$ es un punto extremo de \mathbf{B} .

(4) Si además A , tiene puntos extremos a y b , tales que $a_1 = u$ y $b_1 = v$, entonces \mathbf{B}' tiene puntos extremos $(a_2, a_1, p_2, p_3, \dots)$, $(b_2, b_1, q_2, q_3, \dots)$, y $\sigma(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$.

Corolario 4.4.3. Sean M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, $u, v \in [0, 1]$, $u \leq v$, y $k \in \mathbb{N}$, tales que G_k es hereditariamente arco conexo. Supongamos que existen arcos $A \subset M$ y $\mathbf{B} \subset G_k$ tales que:

(a) $\varrho_1(A) = [u, v] = \pi_1(\mathbf{B})$.

(b) \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} tales que $p_1 = u$ y $q_1 = v$.

Entonces existe un arco $\mathbf{B}' \subset G_{k+1}$ con las siguientes propiedades:

(1) $\pi_{2,k+2}(\mathbf{B}') \subset \mathbf{B}$,

(2) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}') = A$,

(3) Si además A , tiene un punto extremo a , tal que $a_1 = u$, entonces $(a_2, a_1, p_2, p_3, \dots, p_{k+1})$ es un punto extremo de \mathbf{B}' .

(4) Si además A , tiene puntos extremos a y b , tales que $a_1 = u$ y $b_1 = v$, entonces \mathbf{B}' tiene puntos extremos $(a_2, a_1, p_2, \dots, p_{k+1})$, $(b_2, b_1, q_2, \dots, q_{k+1})$ y $\pi_{2,k+2}(\mathbf{B}') = \mathbf{B}$.

Capítulo 5

Resultados importantes

En este capítulo probaremos que si $\varprojlim M$ es una dendrita (arco), entonces M es una dendrita (arco) y para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es una dendrita (arco). Además probaremos bajo condiciones especiales que la función $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación.

Recordemos que M denota un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$.

5.1. Cuando el límite inverso es una dendrita

En esta sección probaremos que si $\varprojlim M$ es una dendrita, entonces M es una dendrita y para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es una dendrita.

Teorema 5.1.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es una dendrita, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es una dendrita.

Demostración.

Sea $k \in \mathbb{N}$, sabemos que $\pi_{1,k+1} : \varprojlim M \rightarrow G_k$ es una función continua y suprayectiva. Como $\varprojlim M$ es un continuo localmente conexo y $\pi_{1,k+1}(\varprojlim M) = G_k$, por Por [[16], 27G-4, pag. 203] tenemos que G_k es un continuo localmente conexo.

Veamos que G_k no contiene curvas cerradas simples.

Supongamos por el contrario que G_k contiene una curva cerrada simple. Entonces las hipótesis del Teorema 4.1.1 se cumplen, pues $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo y G_k contiene una curva cerrada simple.

Por tanto $\varprojlim M$ contiene una curva cerrada simple. Lo cual contradice que $\varprojlim M$ es una dendrita.

Por tanto G_k es un continuo localmente conexo sin curvas cerradas simples. Concluimos que G_k es una dendrita. ■

Corolario 5.1.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$, si $\varprojlim M$ es una dendrita, entonces M es un dendrita.

Demostración.

Como M es homeomorfo a G_1 entonces las hipótesis del Teorema 5.1.1 se satisfacen, por tanto el corolario es cierto. ■

El regreso del Corolario 5.1.2 no es cierto, en la Figura 5.1 se da un ejemplo.

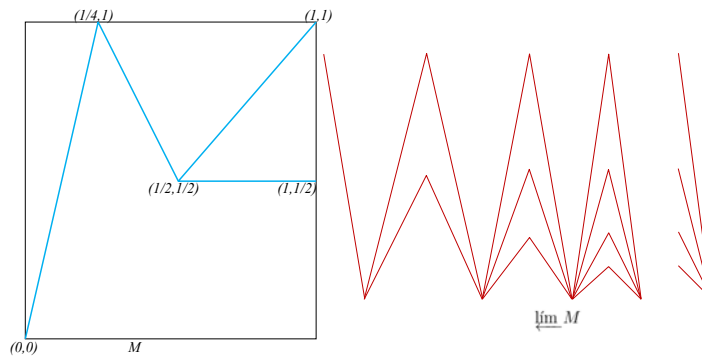


Figura 5.1:

5.2. Cuando el límite inverso es un arco

En esta sección probaremos que si $\varprojlim M$ es un arco, entonces M es un arco y para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es un arco.

Teorema 5.2.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo de dimensión 1 y $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$.

Demostración.

Como $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, tenemos que los subcontinuos propios de $\varprojlim M$ son arco conexos y $\dim(\varprojlim M) = 1$. Además por hipótesis $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$.

De lo anterior tenemos que se cumplen las hipótesis del Corolario 4.2.5, por tanto $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$. ■

El regreso del Teorema 5.2.1 no es cierto, en la Figura 5.2 se da un ejemplo.

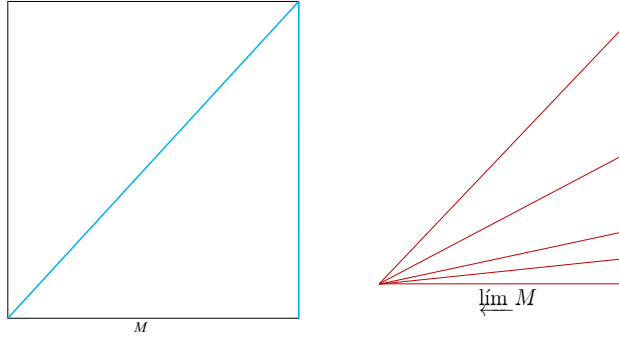


Figura 5.2:

Corolario 5.2.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es un dendroide y $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$.

Demostración.

Como $\varprojlim M$ es un dendroide tenemos que $\varprojlim M$ es hereditariamente arco conexo y $\dim(\varprojlim M) = 1$. Además por hipótesis $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$.

De lo anterior tenemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.2.1, por tanto $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$. ■

Corolario 5.2.3. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es una dendrita y $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$.

Demostración.

Como $\varprojlim M$ es una dendrita, en particular es un dendroide. Además por hipótesis $\mathcal{R}(M) \neq \emptyset$.

De lo anterior tenemos que se cumplen las hipótesis del Corolario 5.2.2, por tanto $\mathcal{R}(\varprojlim M) \neq \emptyset$. ■

Si M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$ tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo de dimensión 1, el siguiente teorema nos da una cota sobre $|\mathcal{R}(M)|$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, sobre $|\mathcal{R}(G_k)|$.

Teorema 5.2.4. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces

- (1) $|\mathcal{R}(M)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$,
- (2) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{R}(G_k)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$.

Demostración.

- (1) $|\mathcal{R}(M)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$,

Supongamos por el contrario que $|\mathcal{R}(M)| > |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = n$.

Como $|\mathcal{R}(M)| > |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$, existen $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ puntos de ramificación de M .

Definamos $\varepsilon = \frac{\min\{d(x_i, x_j) : i, j \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}, i \neq j\}}{2}$. Por el Teorema 4.2.8 en $\varprojlim M$, existe un triodo simple \mathbf{T}_i con vértice \mathbf{x}_i tal que $\pi_{2,1}(\mathbf{x}_i) = x_i$.

Notemos que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}\} \subset \mathcal{R}(\varprojlim M)$, como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = n$, entonces existen $j, k \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ tales que $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_k$, entonces $x_j = \pi_{2,1}(\mathbf{x}_j) = \pi_{2,1}(\mathbf{x}_k) = x_k$, por lo que $d(x_j, x_k) = 0 < 2\varepsilon$.

Lo anterior contradice la definición de ε . Por tanto $|\mathcal{R}(M)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$

La prueba del inciso (2) se hace de manera similar. ■

En el Teorema 5.2.4 no necesariamente se da la igualdad, en la Figura 5.3 se da un ejemplo.

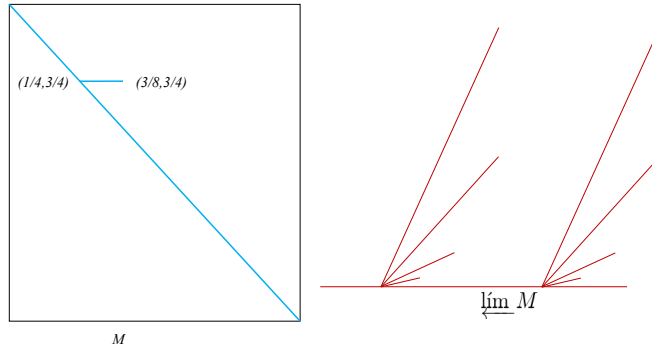


Figura 5.3:

Corolario 5.2.5. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es un dendroide con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces

- (1) $|\mathcal{R}(M)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$,
- (2) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{R}(G_k)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$.

Corolario 5.2.6. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces

- (1) $|\mathcal{R}(M)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$,
- (2) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{R}(G_k)| \leq |\mathcal{R}(\varprojlim M)|$.

A continuación probaremos que si $\varprojlim M$ es un arco, entonces M es un arco y para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es un arco.

Corolario 5.2.7. Sea $M \subset [0, 1]^2$. Si $\varprojlim M$ es homeomorfo a un arco. Entonces M es un arco y para cada $k \in \mathbb{N}$, G_k es homeomorfo a un arco.

Demostración.

Como un arco en particular es una dendrita, del Teorema 5.1.1 Corolario 5.1.2, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k(M)$ es una dendrita.

Además como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = 0$, por el Corolario 5.2.6, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k(M)$ no tiene puntos de ramificación.

Por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k(M)$ es una dendrita sin puntos de ramificación. Concluimos para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k(M)$ es un arco. ■

El regreso del Teorema 5.2.7 no es cierto, en la Figura 5.4 se da un ejemplo.

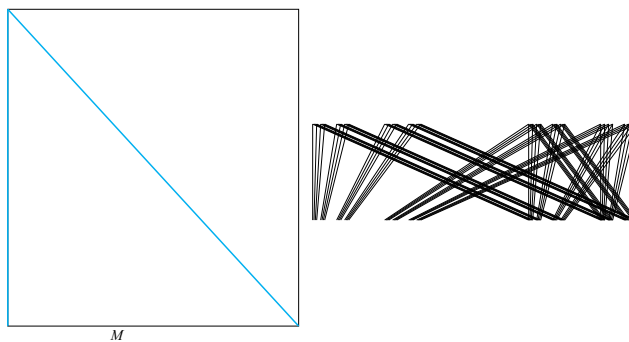


Figura 5.4:

5.3. Cuando el límite inverso tiene un número finito de puntos de ramificación

En esta sección probaremos que si $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces la función corrimiento restringida a $\mathcal{R}(\varprojlim M)$ es una permutación.

Teorema 5.3.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces dado un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ existe un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tal que $\sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Demostración.

Sea $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$. Como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, entonces $|\sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M))| < \infty$ y $|\mathcal{R}(\varprojlim M) \cup \sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M))| < \infty$. Por lo que existe \mathbf{U} conjunto abierto de $\varprojlim M$, tal que $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ y $(\mathcal{R}(\varprojlim M) \cup \sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M)) - \{\mathbf{x}\}) \cap \mathbf{U} = \emptyset$

Como $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ y \mathbf{x} es punto de ramificación, existe un triodo simple $\mathbf{T} \subset \mathbf{U}$ con vértice \mathbf{x} , tal que cumple las siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{T} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$,
- (ii) $\mathbf{T} \cap \sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M)) \subset \{\mathbf{x}\}$.

Sean $u, v \in [0, 1]$, tales que $\pi_1(\mathbf{T}) = [u, v]$, como M es un conjunto arco conexo, tal que $\varrho_1(M) = \varrho_2(M) = [0, 1]$ por el Corolario 1.1.2 existe un arco $B \subset M$, tal que $\varrho_1(B) = [u, v]$.

Notemos que el triodo simple $\mathbf{T} \subset \varprojlim M$ y el arco $B \subset M$ satisfacen las hipótesis del Corolario 4.3.2, por tanto existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iii) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,
- (iv) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset B$.

Sea \mathbf{y} el vértice de \mathbf{T}' . De la propiedad (iii) tenemos que $\sigma(\mathbf{y}) \in \mathbf{T}$ y por la propiedad (ii) tenemos que $\sigma(\mathbf{y}) \in \{\mathbf{x}\}$. Por tanto $\sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Con esto terminamos la prueba del teorema. ■

A continuación probaremos que si $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, entonces $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)} : \mathcal{R}(\varprojlim M) \rightarrow \mathcal{R}(\varprojlim M)$.

Corolario 5.3.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces $\sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \mathcal{R}(\varprojlim M)$.

Demostración.

Supongamos que $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = n$, notemos que $|\sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M))| \leq n$.

Afirmación 1 Dado un conjunto $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k\} \subset \mathcal{R}(\varprojlim M)$, (con $\mathbf{x}^i \neq \mathbf{x}^j$ si $i \neq j$), existen puntos $\{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^k\} \subset \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\sigma(\mathbf{y}^i) = \mathbf{x}^i$, $\mathbf{y}^i \neq \mathbf{y}^j$, si $i \neq j$.

Prueba.

Procederemos por inducción sobre k .

Si $k = 1$, por el Teorema 5.3.1, tenemos que dado un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, existe un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tal que $\sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$.

Supongamos que el resultado se cumple para $k = n - 1$.

Veamos que el resultado se cumple para $k = n$.

Por hipótesis de inducción para $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^{n-1}\} \subset \mathcal{R}(\varprojlim M)$ existe $\{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^{n-1}\} \subset \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $\sigma(\mathbf{y}^i) = \mathbf{x}^i$ y $\mathbf{y}^i \neq \mathbf{y}^j$, si $i \neq j$.

Además por el Teorema 5.3.1, tenemos que dado el punto \mathbf{x}^n , existe un punto $\mathbf{y}^n \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ tal que $\sigma(\mathbf{y}^n) = \mathbf{x}^n$.

Notemos que como σ es una función tenemos $\mathbf{y}^n \neq \mathbf{y}^i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Con esto terminamos la prueba de la Afirmación 1. \square

Por la Afirmación 1 tenemos que si $\mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n\}$ existe $\{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n\} \subset \mathcal{R}(\varprojlim M)$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sigma(\mathbf{y}^i) = \mathbf{x}^i$ y $\mathbf{y}^i \neq \mathbf{y}^j$, si $i \neq j$. Como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = n$ concluimos que

$$\mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n\} = \{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^n\} = \sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M)).$$

Por tanto $\sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \mathcal{R}(\varprojlim M)$. \blacksquare

Corolario 5.3.3. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación.

Demostración.

Por el Corolario 5.3.2 tenemos que $\sigma(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \mathcal{R}(\varprojlim M)$, por tanto $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)} : \mathcal{R}(\varprojlim M) \rightarrow \mathcal{R}(\varprojlim M)$ es una función suprayectiva.

Como $\mathcal{R}(\varprojlim M)$ es un conjunto finito y $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una función suprayectiva tenemos que $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una biyección, así podemos concluir que $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación. \blacksquare

Corolario 5.3.4. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un dendroide con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación.

Demostración.

Como un dendroide es un continuo hereditariamente arco conexo, tenemos que se satisfacen la hipótesis del Corolario 5.3.3, por tanto $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación. ■

Corolario 5.3.5. Sea $M \subset [0, 1]^2$ tal que $\varprojlim M$ es una dendrita y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Entonces $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación.

Demostración.

Como una dendrita es un dendroide localmente conexo tenemos que se satisfacen la hipótesis del Corolario 5.3.4, por tanto $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación. ■

Capítulo 6

Límites inversos y la función corrimiento

Recordemos que M denota un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$. Además en el Capítulo 5 probamos que, si $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, entonces $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación por lo que dado un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ podemos definir el *periodo de \mathbf{x} bajo σ* como el menor entero positivo n tal que $\sigma^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Notemos que dado un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ de periodo n bajo σ , se cumple que $(x_1, \dots, x_n) = (x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = (x_{2n+1}, \dots, x_{3n})$, en general para cada $k \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_n) = (x_{kn+1}, \dots, x_{(k+1)n})$, por lo cual \mathbf{x} es de la forma $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots)$.

Las siguientes observaciones las estaremos utilizando en lo que resta de este trabajo.

Observación 6.0.6. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ es un punto de periodo n bajo σ . Entonces cada punto $\mathbf{y} \in \{\sigma(\mathbf{x}), \dots, \sigma^n(\mathbf{x})\}$, cumple las siguientes propiedades.

- (1) $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$,
- (2) el periodo de \mathbf{y} bajo σ es n .

Demostración.

Como $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, por el Corolario 5.3.5, tenemos que $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación. Como

$\mathbf{x} \in \mathcal{R}(M)$, entonces los puntos $\sigma(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x}), \dots, \sigma^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, son puntos de ramificación de $\varprojlim M$. Por tanto $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, así (1) queda probado.

Probaremos ahora (2). Como $\mathbf{y} \in \{\sigma(\mathbf{x}), \dots, \sigma^n(\mathbf{x})\}$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$, tal que $\mathbf{y} = \sigma^i(\mathbf{x})$. Notemos que:

- si $i = n$, entonces $\sigma^n(\mathbf{y}) = \sigma^n(\sigma^n(\mathbf{x})) = \sigma^n(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$,
- si $1 < i < n$, entonces $\sigma^n(\mathbf{y}) = \sigma^n(\sigma^i(\mathbf{x})) = \sigma^i(\sigma^n(\mathbf{x})) = \sigma^i(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

De lo anterior $\sigma^n(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$, por cual el periodo de \mathbf{y} bajo σ es a lo más n . Veamos el periodo de \mathbf{y} bajo σ es n .

Si $n = 1$, entonces el periodo de \mathbf{y} bajo σ es n .

Si $n > 1$, supongamos por el contrario que existe $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tal que el periodo de \mathbf{y} bajo σ es k . Sea $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tal que $j+k = n$.

Tenemos que $\sigma^k(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ y $\sigma^{k+j}(\mathbf{y}) = \sigma^n(\mathbf{y}) = \sigma^j(\mathbf{y})$. Como $\mathbf{y} = \sigma^i(\mathbf{x})$, entonces $\sigma^n(\sigma^i(\mathbf{x})) = \sigma^j(\sigma^i(\mathbf{x}))$, entonces $\sigma^i(\sigma^n(\mathbf{x})) = \sigma^i(\sigma^j(\mathbf{x}))$, como σ es una permutación, entonces $\sigma^n(\mathbf{x}) = \sigma^j(\mathbf{x})$, por tanto $\sigma^j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, como el periodo de \mathbf{x} bajo σ es n , entonces $j \geq n$, lo cual contradice que $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, la contradicción nace de suponer que el periodo de \mathbf{y} bajo σ es k , con $k < n$. Por tanto el orden de \mathbf{y} bajo σ es n , así (2) queda probado. ■

Observación 6.0.7. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ de periodo n bajo σ , entonces para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, el punto $(x_{i+1}, x_i) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$.

Demostración.

Por la Observación 6.0.6, tenemos que los puntos $\sigma(\mathbf{x}), \sigma^2(\mathbf{x}), \dots, \sigma^n(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$.

Además como \mathbf{x} es de periodo n bajo σ , tenemos que

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots),$$

por lo que $\sigma(\mathbf{x}) = (x_2, x_3, \dots, x_n, \mathbf{x})$, en general para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma^{i-1}(\mathbf{x}) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } \pi_{2,1}(\sigma^{i-1}(\mathbf{x})) &= \pi_{2,1}((x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})) \\ &= (x_{i+1}, x_i) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)). \end{aligned}$$

Por tanto la observación queda demostrada. ■

6.1. Propiedades de M

En esta sección probaremos varias propiedades del conjunto cerrado M , cuando $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo (dendrita) y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$.

Teorema 6.1.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente arco conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen un arco $L \subset M$ y un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ de periodo n bajo σ . Entonces para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $x_{i+1} \in \text{Int}_{[0,1]}(\varrho_1(L))$, el punto $(x_{i+1}, x_i) \in L$. (Figura 6.1)

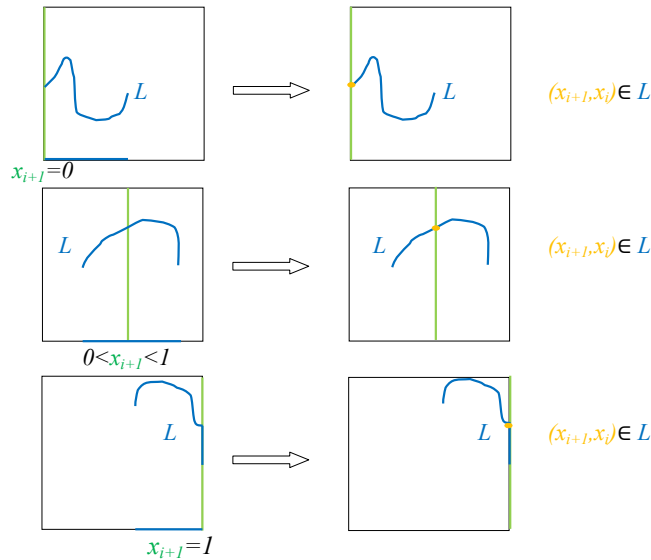


Figura 6.1:

Demostración.

Como $x_{i+1} \in \text{Int}_{[0,1]}(\varrho_1(L))$ existe un número $\varepsilon > 0$, tal que $((x_{i+1} - \varepsilon, x_{i+1} + \varepsilon) \cap [0, 1]) \subset \varrho_1(L)$.

Por la Observación 6.0.6, el punto $\sigma^i(\mathbf{x}) = (x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n, \mathbf{x}) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$.

Como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$ existe un conjunto abierto \mathbf{U} de $\varprojlim M$, tal que $\sigma^i(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}$ y $\mathbf{U} \cap (\mathcal{R}(\varprojlim M) - \{\sigma^i(\mathbf{x})\}) = \emptyset$.

Como $\sigma^i(\mathbf{x}) \in \mathbf{U}$ es punto de ramificación, entonces existe $\mathbf{T} \subset \mathbf{U} \subset \varprojlim M$ un triodo simple con vértice $\sigma^i(\mathbf{x})$, con las siguientes propiedades:

- (i) $\pi_1(\mathbf{T}) \subset (x_{i+1} - \varepsilon, x_{i+1} + \varepsilon) \cap [0, 1]$,
- (ii) $\mathbf{T} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma^i(\mathbf{x})\}$.

Como $\pi_1(\mathbf{T}) \subset \varrho_1(L)$, por el Teorema 1.1.1 existe un arco $B \subset L$, tal que $\pi_1(\mathbf{T}) = \varrho_1(B)$.

Notemos que el triodo simple $\mathbf{T} \subset \varprojlim M$ y el arco $B \subset M$ satisfacen las hipótesis del Corolario 4.3.2, por lo que existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iii) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,
- (iv) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset B$.

Sea \mathbf{y} el vértice de \mathbf{T}' , como $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación tenemos que $\sigma(\mathbf{y})$ es un punto de ramificación de $\varprojlim M$, entonces de (iii) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$ y de (ii) obtenemos $\sigma(\mathbf{y}) \in \mathbf{T} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma^i(\mathbf{x})\}$.

Como la función $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una función inyectiva y

$$\sigma((x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n, \mathbf{x})) = (x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n, \mathbf{x}),$$

tenemos que el punto $\mathbf{y} = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n, \mathbf{x})$.

De la propiedad (iv) tenemos que el punto $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) \in B$ y por definición el arco $B \subset L$, concluimos que $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) = (x_{i+1}, x_i) \in L$, con esto terminamos la prueba del teorema. ■

Para probar el resultado similar al Teorema 6.1.1, con los arcos que cruzan verticalmente $[0, 1] \times \{x_i\}$ necesitamos el siguiente resultado.

Teorema 6.1.2. Sea M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente localmente conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, entonces existe un número $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$ es punto de ramificación de G_k .

Demostración.

Como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, existe un número $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$.

Como $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente localmente conexo, existe un subcontinuo $\mathbf{E} \subset \varprojlim M$, con la siguientes propiedades:

- (i) $\mathbf{E} \subset B_\varepsilon(\mathbf{x})$,
- (ii) $\mathbf{x} \in \text{Int}(\mathbf{E})$ y
- (iii) $\text{diam}(\mathbf{E}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Supongamos por el contrario que para cada número $N \in \mathbb{N}$, existe un número $K_N \in \mathbb{N}$, tal que $K_N \geq N$ y $\pi_{1, K_N+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{R}(G_{K_N})$.

Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $N_1 > K_N$ y $\frac{1}{2^{N_1}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Afirmación 1 Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N_1$, se cumple que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{E})$ es un arco.

Prueba.

Supongamos por el contrario que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{E})$ no es un arco, entonces existe un triodo simple $\mathbf{T} \subset \pi_{1, k+1}(\mathbf{E})$.

Sean $\mathbf{v}_0 \in \pi_{1, k+1}(\mathbf{E})$ el vértice de \mathbf{T} y $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$, tal que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_0$.

Por el Teorema 1.1.1 existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}) = \pi_{k+1}(\mathbf{T})$.

Notemos que el triodo simple $\mathbf{T} \subset G_k$ y el arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ satisfacen las hipótesis del Corolario 4.2.7, por tanto existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con vértice \mathbf{w} que satisface las siguientes propiedades:

- (iv) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}$,
- (v) $\pi_{1, k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$ y
- (vi) $\pi_{1, k+1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}_0$.

Veamos que $d(\mathbf{x}, \mathbf{w}) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{w}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - w_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{|x_i - w_i|}{2^i} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{|x_i - w_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{k+1} \frac{|x_i - v_i|}{2^i} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{|x_i - w_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - v_i|}{2^i} + \sum_{i=k+2}^{\infty} \frac{|x_i - w_i|}{2^i} \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

como $\mathbf{v} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(\mathbf{x})$ y $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(\mathbf{x}, \mathbf{w}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por tanto $d(\mathbf{x}, \mathbf{w}) < \varepsilon$, entonces $\mathbf{w} \in B_{\varepsilon}(\mathbf{x})$.

Del inciso (iii) tenemos que $B_{\varepsilon}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$ y como $\mathbf{w} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{w}$, por tanto $\pi_{1, k+1}(\mathbf{x}) = \pi_{1, k+1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}_0$, así $\pi_{1, k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(\pi_{1, k+1}(\mathbf{E})) \subset \mathcal{R}(G_{n_k})$, lo cual contradice que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{R}(G_k)$.

La contradicción nace de suponer que $\pi_{1, k+1}(\mathbf{E})$ no es un arco. Por tanto $\pi_{1, k+1}(\mathbf{E})$ es un arco y la Afirmación 1 queda probada. \square

Por la Observación 1.2.2 para cada número $k > N_1$ la función $\pi_{1, k+1} : \varprojlim M \rightarrow G_k$ es una $\frac{1}{2^k}$ -función, y de la Afirmación 1 para cada número $k \geq N_1$, $\pi_{1, k}(\mathbf{E})$ es un arco, entonces $\pi_{1, k+1}|_{\mathbf{E}}$ es una $\frac{1}{2^k}$ -función

sobre un arco, por lo cual \mathbf{E} es tipo arco.

Como \mathbf{E} es un subcontinuo de $\varprojlim M$, tenemos que \mathbf{E} es hereditariamente localmente conexo y hereditariamente arco conexo, además como \mathbf{E} es tipo arco, tenemos de [13, Corollary 12.6, p. 233], que \mathbf{E} es un arco.

Lo anterior contradice que el punto $\mathbf{x} \in \text{Int}(\mathbf{E})$, pues \mathbf{x} es punto de ramificación y \mathbf{E} no contiene puntos de ramificación. La contradicción nace de suponer que para cada número $N \in \mathbb{N}$, existe un número $K_N \in \mathbb{N}$, tal que $K_N \geq N$ y $\pi_{1, K_N+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{R}(G_{K_N})$.

Por tanto existe un número $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $\pi_{1, k+1}(\mathbf{x})$ es punto de ramificación de G_k . ■

Teorema 6.1.3. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es un continuo hereditariamente localmente conexo, con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen un arco $L \subset M$ y un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ de periodo n bajo σ . Entonces para cada número $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tal que $x_i \in \text{Int}_{[0,1]}(\varrho_2(L))$, $(x_{i+1}, x_i) \in L$. (Figura 6.2)

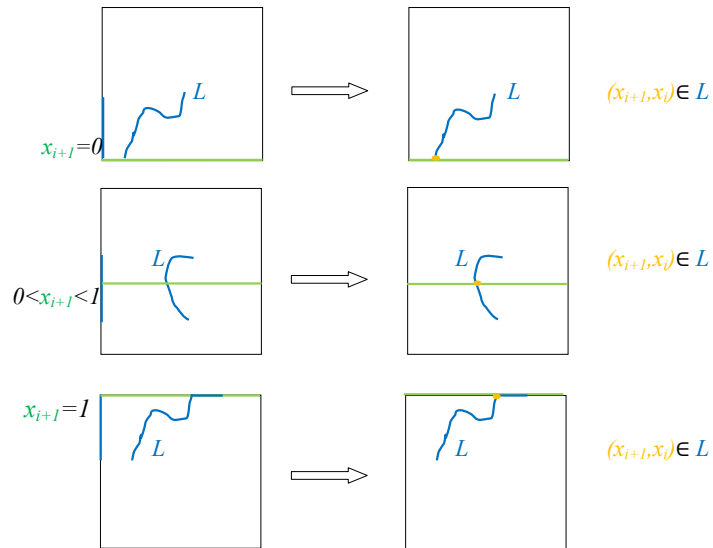


Figura 6.2:

Demostración.

Supongamos por el contrario que el punto $(x_{i+1}, x_i) \notin L$.

Como $x_i \in \text{Int}_{[0,1]}(\varrho_2(L))$ existe un número $\varepsilon > 0$, tal que $((x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap [0, 1]) \subset \varrho_2(L)$.

Por otro lado como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, por la Observación 6.0.6 tenemos que $\mathbf{y} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})$ es un punto de ramificación de $\varprojlim M$ de periodo n bajo σ .

Notemos que se satisfacen la hipótesis del Teorema 6.1.2 para el punto \mathbf{y} , por tanto existe un número $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})$ es punto de ramificación de G_k .

Sea $k \in \mathbb{N}$, $k > N$ y múltiplo de n , como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, obtenemos que $|\pi_{1,k+1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))| < \infty$ y $|\mathcal{R}(G_k)| < \infty$, por lo que existe un abierto $U \subset G_k$ tal que satisface las siguientes propiedades:

- (i) $U \cap \mathcal{R}(G_k) = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})\}$,
- (ii) $U \cap \pi_{1,k+1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})\}$,
- (iii) $\pi_{k+1}(U) \subset (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap [0, 1]$.

Como $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) \in \mathcal{R}(G_k)$ existe un triodo simple $T \subset U$ con vértice $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})$, tal que T satisface las siguientes propiedades:

- (iv) $T \cap \mathcal{R}(G_k) = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})\}$,
- (v) $T \cap \pi_{1,k+1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})\}$,
- (vi) $\pi_{k+1}(T) \subset (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap [0, 1]$.

Afirmación 1 Existe un arco $\mathbf{B}' \subset \varprojlim M$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}') = \pi_{k+1}(T)$ y $\pi_{2,1}(\mathbf{B}') \subset L$.

Prueba.

Sean $u, v \in [0, 1]$, con $u \leq v$, tales que $\varrho_1(L) = [u, v]$. Por el Corolario 1.1.2 existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$, tal que cumple las siguientes propiedades:

- (iv) $\pi_1(\mathbf{A}') = [u, v]$,
- (v) $\pi_1(\mathbf{p}) = u$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = v$,
- (vi) $\pi_1(\mathbf{A}' - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (u, v)$.

Notemos que los arcos $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ y $L \subset M$ satisfacen la hipótesis del Teorema 3.2.19, por tanto existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ que tiene las siguientes propiedades:

- (vii) $\sigma(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$,
- (viii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = L$,
- (ix) $\pi_1(\mathbf{B}) = \varrho_2(L)$,

y por el Teorema 1.1.1 existe un arco $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}') = \pi_{k+1}(T)$.

Además por la propiedad (viii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = L$ y como $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{B}') \subset L$. Así la Afirmación 1 queda demostrada. \square

Notemos que el triodo simple $\mathbf{T} \subset G_k$ y el arco $\mathbf{B}' \subset \varprojlim M$, dado por la Afirmación 1, satisfacen las hipótesis del Corolario 4.2.7, por lo que existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$ con vértice \mathbf{z}^k que satisface las siguientes propiedades:

- (x) $\sigma^k(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}'$,
- (xi) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{T}') \subset \mathbf{T}$,
- (xii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{z}^k) = \pi_{1,k+1}(\mathbf{y})$.

De la propiedad (xii) obtenemos que $\mathbf{z}^k = (x_i, \dots, x_i, z_{nk+2}, z_{nk_j+3}, \dots)$, además de la propiedad (x) tenemos que $\sigma^k(\mathbf{z}^j) = (x_i, z_{k+2}, z_{k+3}, \dots) \in \mathbf{B}'$.

Como $\pi_{2,1}(\mathbf{B}') \subset L$, entonces $\pi_{2,1}((x_i, z_{k+2}, z_{k+3}, \dots)) = (z_{k+2}, x_i) \in L$.

Recordemos que estamos suponiendo que el punto $(x_{i+1}, x_i) \notin L$, por lo que $(x_{i+1}, x_i) \neq (z_{k+2}, x_i)$, de donde $z_{k+2} \neq x_{i+1}$.

Tenemos entonces que para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > N$ y múltiplo de n existe un punto de ramificación \mathbf{z}^k tal que satisface las siguientes propiedades:

- (xiii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{z}^k) = \pi_{1,k+1}(\mathbf{y})$
- (xiv) $z_{k+2} \neq x_{i+1}$.

Afirmación 2 Dados $l, k \in \mathbb{N}$, $k > l > N$ y múltiplos de n , se cumple que $\mathbf{z}^l \neq \mathbf{z}^k$.

Prueba.

Supongamos por el contrario que $\mathbf{z}^l = \mathbf{z}^k$.

Como $\mathbf{z}^l = \mathbf{z}^k$, entonces $\pi_{1,l+1}(\mathbf{z}^l) = \pi_{1,k+1}(\mathbf{z}^j)$ y por la propiedad (xiii), $\pi_{1,k+1}(\mathbf{z}^k) = \pi_{1,k+1}(\mathbf{y}) = (x_i, \dots, x_n, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, x_1, \dots, x_i, \dots)$. Como $l < j$, entonces $z_{l+2} = x_{i+1}$, lo cual contradice la propiedad (xiv). Por tanto $\mathbf{z}^l \neq \mathbf{z}^k$. \square

De la Afirmación 2 concluimos que $\varprojlim M$ contiene una infinidad de puntos de ramificación. Esto contradice que $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. La contradicción nace de suponer que el punto $(x_{i+1}, x_i) \notin L$. Por tanto el punto $(x_{i+1}, x_i) \in L$ y el teorema queda demostrado. \blacksquare

Observación 6.1.4. Dados $x, y, a, b, c, d \in [0, 1]$, con $a < x < c$ y $b < y < d$. Supongamos que $L \subset [0, 1]^2$ es un arco con puntos extremos (a, b) y (c, d) , entonces $x \in \text{Int}(\varrho_1(L))$ e $y \in \text{Int}(\varrho_2(L))$.

Demostración.

Haremos la prueba de que $x \in \text{Int}(\varrho_1(L))$, la prueba de que $y \in \text{Int}(\varrho_2(L))$ se hace de manera similar.

Como $a, c \in \varrho_1(L)$ y $\varrho_1(L)$ es conexo, entonces $[a, c] \subset \varrho_1(J)$, como $a < x < c$, entonces $x \in (a, c) \subset \text{Int}(\varrho_1(L))$

De manera similar $y \in \text{Int}(\varrho_2(L))$. ■

En los siguientes resultados probamos que los arcos en M con puntos extremos, proyecciones de puntos de ramificación de $\varprojlim M$ están "bien" determinados en M .

Teorema 6.1.5. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos distintos $(a, b), (c, d) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$. Entonces el arco $L \subset M$ con puntos extremos (a, b) y (c, d) es un subconjunto de $\overline{ac} \times \overline{bd}$.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $L \not\subset \overline{ac} \times \overline{bd}$, entonces existe un punto $(r, s) \in L - \overline{ac} \times \overline{bd}$.

Como el punto $(r, s) \notin \overline{ac} \times \overline{bd}$, tenemos los siguientes casos $r < a, c$, $r > a, c$, $s < b, d$, $s > b, d$.

Haremos la prueba del caso $r < a, c$, la prueba de los otros casos se hace de manera similar.

Para este caso veremos los siguientes subcasos.

Caso 1 $a < c$.

Sea $J \subset L - \{(a, b)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y (c, d) . Como $r < a < c$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_1(J))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in J$, lo cual contradice que $J \subset L - \{(a, b)\}$.

Caso 2 $a = c$.

Caso 1.2.1 $a = 1$.

Sea $K_1 \subset L - \{(1, b)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y (c, d) . Como $r < 1$, tenemos que $1 \in \text{Int}(\varrho_1(K_1))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(1, b) \in K_1$, lo cual contradice que $K_1 \subset L - \{(1, b)\}$.

Caso 2.2 $a < 1$.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1]$, existe un punto $e \in [0, 1]$, tal que el punto $(1, e) \in M$. Sea $K_2 \subset M$ el arco con puntos extremos (r, s) y $(1, e)$. Notemos que

$\{(a, b), (c, d)\} \not\subseteq K_2$, de lo contrario existe un arco $K \subset K_2 - \{(r, s)\}$ con puntos extremos $(a, b), (c, d)$, lo cual contradice que M es únicamente arco conexo.

Sin pérdida de generalidad supongamos que el punto $(a, b) \notin K_2$. Como $r < a < 1$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_1(K_2))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in K_2$, lo cual contradice que $(a, b) \notin K_2$.

Caso 3 $c < a$.

Sea $J \subset L - \{(c, d)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y (a, b) . Como $r < c < a$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $c \in \text{Int}(\varrho_1(J))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(c, d) \in J$, lo cual contradice que $J \subset L - \{(c, d)\}$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción, la contradicción nace de suponer que $r < a, c$, de manera similar para los casos $r > a, c, s < b, d, s > b, d$ obtenemos una contradicción. Por tanto $L \subset \overline{ac} \times \overline{bd}$. ■

Corolario 6.1.6. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos distintos $(a, b), (c, d) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$. Entonces el arco $L \subset M$ con puntos extremos (a, b) y (c, d) cumple que $\varrho_1(L) = \overline{ac}$ y $\varrho_2(L) = \overline{bd}$.

Demostración.

Por el Teorema 6.1.5, tenemos que $L \subset \overline{ac} \times \overline{bd}$, por lo que

$$-\varrho_1(L) \subset \overline{ac},$$

$$-\varrho_2(L) \subset \overline{bd}.$$

Como L tiene puntos extremos (a, b) y (c, d) , entonces $a, c \in \varrho_1(L)$ y $b, d \in \varrho_2(L)$, además como L es un arco $\varrho_1(L)$ y $\varrho_2(L)$, son subconjuntos conexos de $[0, 1]$, tenemos que $\varrho_1(L) = \overline{ac}$ y $\varrho_2(L) = \overline{bd}$. Así el Corolario queda probado. ■

Teorema 6.1.7. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que los puntos $(a, b), (c, d) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$. Entonces para cualesquiera puntos $(x, y), (z, w) \in (\overline{ac} \times \overline{bd} \cap M)$, tales que $a \neq x, z \neq c$ y $b \neq y, w \neq d$, el arco $L \subset M$ con puntos extremos $(x, y), (z, w)$ es un subconjunto de $\overline{ab} \times \overline{cd}$.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $L \not\subset \overline{ac} \times \overline{bd}$, entonces existe un punto $(r, s) \in L - \overline{ac} \times \overline{bd}$.

Como el punto $(r, s) \notin \overline{ac} \times \overline{bd}$, tenemos los siguientes casos $r < a, c$, $r > a, c$, $s < b, d$, $s > b, d$.

Haremos la prueba del caso $r < a, c$, la prueba de los otros casos se hace de manera similar.

Para este caso veremos los siguientes subcasos.

Caso 1 $a < c$.

Sea $J \subset L - \{(a, b)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y (c, d) . Como $r < a < c$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_1(J))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in J$, lo cual contradice que $J \subset L - \{(a, b)\}$.

Caso 2 $c < a$.

Sea $K \subset L - \{(c, d)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y (a, b) . Como $r < c < a$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $c \in \text{Int}(\varrho_1(K))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(c, d) \in K$, lo cual contradice que $K \subset L - \{(c, d)\}$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. La contradicción nace de suponer que $r < a, c$, de manera similar para los casos $r > a, c$, $s < b, d$, $s > b, d$. obtenemos una contradicción. Por tanto $L \subset \overline{ac} \times \overline{bd}$. ■

La siguiente definición la estaremos utilizando en lo que resta del trabajo.

Definición 6.1.8. Dados $a, b \in [0, 1]$ con $a \leq b$ definimos

- $M_1(a, b) = \{(x, y) \in M : x \geq a, y \geq b\} = ([a, 1] \times [b, 1]) \cap M$,
- $M_2(a, b) = \{(x, y) \in M : x \leq a, y \geq b\} = ([0, a] \times [b, 1]) \cap M$,
- $M_3(a, b) = \{(x, y) \in M : x \leq a, y \leq b\} = ([0, a] \times [0, b]) \cap M$,
- $M_4(a, b) = \{(x, y) \in M : x \geq a, y \leq b\} = ([a, 1] \times [0, b]) \cap M$.

Teorema 6.1.9. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que el un punto $(a, b) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) para cada punto $(c, d) \in M_i(a, b)$, tal que $a \neq c$ y $b \neq d$, el arco $L \subset M$ con puntos extremos (a, b) , (c, d) , es un subconjunto de $M_i(x, y)$,

(2) para cualesquiera puntos $(c, d), (z, w) \in M_i(a, b)$, tales que $c \neq a \neq z$ y $d \neq b \neq w$, el arco $L \subset M$ con puntos extremos $(c, d), (z, w)$, es un subconjunto de $M_i(a, b)$.

Demostración.

(1) Para cada punto $(c, d) \in M_i(a, b)$, tal que $a \neq c$ y $b \neq d$, el arco $L \subset M$ con puntos extremos $(a, b), (c, d)$, es un subconjunto de $M_i(x, y)$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $i = 1$. Entonces $c > a$, $d > b$. Supongamos por el contrario que $L \not\subset M_i(a, b)$, entonces existe un punto $(r, s) \in L - M_i(a, b)$.

Como el punto $(r, s) \notin M_i(a, b)$, tenemos los siguientes casos $r < a$ o $s < b$.

Haremos la prueba del caso $r < a$, la prueba del otro caso se hace de manera similar.

Sea $J \subset L - \{(a, b)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y (c, d) . Como $r < a < c$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_1(J))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in J$, lo cual contradice que $J \subset L - \{(a, b)\}$.

De manera similar para el caso $s < b$ obtenemos una contradicción. Por tanto $L \subset M_i(a, b)$.

(2) Para cualesquiera puntos $(c, d), (z, w) \in M_i(x, y)$, tales que $c \neq a \neq z$ y $d \neq b \neq w$, el arco $L \subset M$ con puntos extremos $(c, d), (z, w)$, es un subconjunto de $M_i(x, y)$.

Como $(c, d), (z, w) \in M_i(x, y)$, son tales que $c \neq a \neq z$ y $d \neq b \neq w$, por (1) los arcos $J, K \subset M$ con puntos extremos $(a, b), (c, d)$ y $(a, b), (z, w)$ son subconjuntos de $M_i(a, b)$.

Como $(c, d), (z, w) \in J \cup K$, y $J \cup K$ es una dendrita entonces el arco L con puntos extremos $(c, d), (z, w)$, es un subconjunto de $J \cup K$ y por tanto de $M_i(x, y)$. ■

6.2. Propiedades de la función corrimiento

En esta sección probaremos que los puntos de ramificación de $\varprojlim M$ tienen periodo a lo más dos bajo σ .

Lema 6.2.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Dados dos puntos $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$ y dos puntos $n, m \in \mathbb{N}$,

$m > 1$, tales que \mathbf{z} tiene periodo n bajo σ , \mathbf{w} tiene periodo m bajo σ y $\pi_1(\mathbf{z}) = \pi_1(\mathbf{w})$.

Entonces existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ que satisfacen la siguientes propiedades:

- (1) $\sigma^{nm}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z}\}$,
- (2) $\pi_1(\mathbf{A}) = \{\pi_1(\mathbf{z})\} = \pi_{mn+1}(\mathbf{A})$,
- (3) \mathbf{A} tiene puntos extremos \mathbf{z} y $(\pi_{1,nm}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$.

Demostración.

Para $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$ definamos $r_k, i_k, j_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como siguen $k = r_k(\bmod n)$, $k = i_k(\bmod m)$ y $j_k = \lceil \frac{k}{m} \rceil$.

Vamos a construir recursivamente arcos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{mn}$, tales que para $k \in \{1, 2, \dots, mn\}$, el arco \mathbf{A}_k satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\pi_1(\mathbf{A}_k) = \overline{z_{n-r_k+1}w_{m-r_k+1}}$,
- (b) \mathbf{A}_k tiene puntos extremos $\pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z})$ y $(\pi_{m-i_k+1, m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$,
- (c) Si $k = 1$, $\sigma(\mathbf{A}_1) = \{\mathbf{z}\}$ y si $2 \leq k \leq mn + 1$, $\sigma(\mathbf{A}_k) = \mathbf{A}_{k-1}$.

Como $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n, z_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos el punto $(z_1, z_n) \in M$, de igual manera como $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n, w_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que el punto $(w_1, w_m) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_1 con puntos extremos (z_1, z_n) y (w_1, w_m) .

Por la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos $(z_1, z_n), (w_1, w_m) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_1 , por tanto

- (i) $\varrho_1(L_1) = \overline{z_1 w_1}$,
- (ii) $\varrho_2(L_1) = \overline{z_n w_m}$.

Como $z_1 = w_1$, tenemos que $\varrho_1(L_1) = \{z_1\}$ y el conjunto $\{\mathbf{a} \in \varprojlim M : \pi_1(\mathbf{a}) = z_1\} \neq \emptyset$, por lo que se cumplen la hipótesis del Corolario 1.2.7. Por tanto el conjunto

$$A_1 = \{(t, \mathbf{z}) \in [0, 1]^\infty : t \in \varrho_2(L_1)\}$$

es un subcontinuo de $\varprojlim M$ homeomorfo a L_1 y que satisface la siguientes propiedades:

- (iii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_1) = L_1$,
- (iv) $\sigma(\mathbf{A}_1) = \{\mathbf{z}\}$.

Notemos que \mathbf{A}_1 es un arco con puntos extremos (z_n, \mathbf{z}) y (w_m, \mathbf{z}) .

Veamos que el arco \mathbf{A}_1 satisface las propiedades (a)-(c).

Como $k = 1$ y $m > 1$, tenemos que $r_k \in \{0, 1\}$, $i_k = 1$ y $j_k = 0$, por lo que $m - i_k + 1 = 1$ y $m(j_k + 1) = m$ y

-si $r_k = 0$, entonces $n = 1$ y $n - r_n + 1 = 2$,

-si $r_k = 1$, entonces $n > 1$, $n - r_n + 1 = n$

Por lo que $(\pi_{m-i_k+1, m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z}) = (\pi_m(\mathbf{w}), \mathbf{z}) = (w_m, \mathbf{z})$ y

-si $r_k = 0$, entonces $\pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z}) = \pi_{2, \infty}(\mathbf{z}) = (z_2, \mathbf{z}) = (z_1, \mathbf{z}) = (z_n, \mathbf{z})$,

pues $n = 1$,

-si $r_k = 1$, entonces $\pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z}) = \pi_{n, \infty}(\mathbf{z}) = (z_n, \mathbf{z})$,

en cualquier caso $\pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z}) = (z_n, \mathbf{z})$.

Del inciso (iii) tenemos que $\pi_1(\mathbf{A}_1) = \varrho_2(L_1)$ y del inciso (ii) tenemos que $\varrho_2(L_1) = \overline{z_n w_n}$. Por tanto $\pi_1(\mathbf{A}_1) = \overline{z_n w_n}$ como $z_n = z_{n-r_k+1}$ y $w_m = w_{m-i_k+1}$, se cumple la propiedad (a) para el arco \mathbf{A}_1 .

Como \mathbf{A}_1 es un arco con puntos extremos (z_n, \mathbf{z}) y (w_m, \mathbf{z}) $(z_n, \mathbf{z}) = \pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z})$ y $(w_m, \mathbf{z}) = (\pi_{m-i_k+1, m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$, entonces se satisface la propiedad (b) para el arco \mathbf{A}_1 .

Y por el inciso (iv) tenemos que se cumple la propiedad (c) para el arco \mathbf{A}_1 .

Vamos a construir ahora el arco \mathbf{A}_2 , como los puntos $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos (z_n, z_{n-1}) $(w_m, w_{m-1}) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_2 con puntos extremos (z_n, z_{n-1}) y (w_m, w_{m-1}) .

Por la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos $(z_n, z_{n-1}), (w_m, w_{m-1}) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_2 , por tanto

(v) $\varrho_1(L_2) = \overline{z_n w_m}$,

(vi) $\varrho_2(L_2) = \overline{z_{n-1} w_{m-1}}$.

Notemos que los arcos \mathbf{A}_1 y L_2 satisfacen la hipótesis del Teorema 3.2.19,(4), pues

-los puntos extremos del arco \mathbf{A}_1 son (z_n, \mathbf{z}) y (w_m, \mathbf{z}) ,

-los puntos extremos del arco L_2 son (z_n, z_{n-1}) y (w_m, w_{m-1}) .

Además de los incisos (v) y la propiedad (a) para el arco \mathbf{A}_1 obtenemos que $\varrho_1(L_2) = \pi_1(\mathbf{A}_1) = \overline{z_n w_m}$.

Por tanto por el Teorema 3.2.19,(4) existe un arco $\mathbf{A}_2 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

(vii) Los puntos extremos de \mathbf{A}_2 son $(z_{n-1}, z_n, \mathbf{z})$ y $(w_{m-1}, w_m, \mathbf{z})$,

(viii) $\sigma(\mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_1$,

(ix) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_2) = L_2$,

Veamos que el arco \mathbf{A}_2 satisface las propiedades (a)-(c).

Como $k = 2$ y $m > 1$, tenemos que $r_k, i_k \in \{0, 2\}$ y $j_k \in \{0, 1\}$, más aún

-si $r_k = 0$, entonces $n = 2$ y $n - r_k + 1 = n + 1$

-si $r_k = 2$, entonces $n > 2$ y $n - r_k + 1 = n - 1$

- si $i_k = 0$, entonces $m = 2$, $j_k = 1$, $m - i_k + 1 = m + 1$ y $m(j_k + 1) = 2m$,
 - si $i_k = 2$, entonces $m > 2$, $j_k = 0$, $m - i_k + 1 = m - 1$ $m(j_k + 1) = m$,
- por lo que
- si $r_k = 0$, entonces $z_{n-r_k+1} = z_{n+1} = z_{n-1}$ pues $n = 2$ y
 - si $r_k = 2$, entonces $z_{n-r_k+1} = z_n - 1$,
 - si $i_k = 0$, entonces $w_{m-i_k+1} = w_{m+1} = w_{m-1}$, pues $m = 2$ y $w_{m(j_k+1)} = w_{2m} = w_m$ pues \mathbf{w} tiene periodo m ,
 - si $i_k = 2$, entonces $w_{m-i_k+1} = w_{m+1} = w_{m-1}$ y $w_{m(j_k+1)} = w_m$,
- En cualquier caso tenemos que
- $z_{n-r_k+1} = z_{n-1}$,
 - $w_{m-i_k+1} = w_{m-1}$
 - $(z_{n-1}, z_n, \mathbf{z}) = \pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z})$,
 - $(w_{m-1}, w_m, \mathbf{z}) = (\pi_{m-i_k+1, m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$,

Del inciso (ix), tenemos que $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_2) = L_2$, por lo que $\pi_1(A) = \varrho_2(L_2)$ y del inciso (vi) tenemos que $\varrho_2(L_2) = \overline{z_{n-1}w_{m-1}}$. Por tanto $\pi_1(\mathbf{A}_2) = \overline{z_{n-1}w_{m-1}}$, como $z_{n-1} = z_{n-r_k+1}$ y $w_{m-1} = w_{m-i_k+1}$, se cumple la propiedad (a) para el arco A_2 .

Del inciso (vii), los puntos extremos de \mathbf{A}_2 son $(z_{n-1}, z_n, \mathbf{z})$ y $(w_{m-1}, w_m, \mathbf{z})$, como $(z_{n-1}, z_n, \mathbf{z}) = \pi_{n-r_k+1, \infty}(\mathbf{z})$ y $(w_{m-1}, w_m, \mathbf{z}) = (\pi_{m-i_k+1, m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$, entonces se satisface la propiedad (b) para el arco \mathbf{A}_2 .

Del inciso (viii), tenemos que $\sigma(\mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_1$, así que se satisface la propiedad (c) para el arco \mathbf{A}_2 .

Supongamos que hemos contruido arcos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_{mn-1}$, que satisfacen la propiedades deseadas.

En particular el arco \mathbf{A}_{mn-1} satisface

- (a) $\pi_1(A_{mn-1}) = \overline{z_2w_2}$,
- (b) A_{mn-1} tiene puntos extremos $(\pi_{2, \infty}(\mathbf{z}))$ y $(\pi_{2, nm}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$
- (c) $\sigma(\mathbf{A}_{mn-1}) = \mathbf{A}_{mn-2}$.

Pues como $k = mn - 1$ y $m > 1$, tenemos que $r_k \in \{0, n - 1\}$, $i_k = m - 1$ y $j_k = n - 1$, por lo que $m - i_k + 1 = 2$ y $m(j_k + 1) = mn$ y

- si $r_k = 0$, entonces $n = 1$ y $n - r_n + 1 = 2$,
- si $r_k = n - 1$, entonces $n > 1$, $n - r_n + 1 = 2$.

En cualquier caso tenemos que

- $z_{n-r_k+1} = z_2$,
- $w_{m-i_k+1} = w_2$
- $(\pi_{m-i_k+1, m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z}) = (\pi_{2, mn}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$

$$-\pi_{n-r_k+1,\infty}(\mathbf{z}) = \pi_{2,\infty}(\mathbf{z}).$$

Vamos a construir ahora el arco \mathbf{A}_{mn} , como los puntos $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos (z_2, z_1) $(w_2, w_1) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_3 con puntos extremos (z_2, z_1) y (w_2, w_1) .

Como $(z_2, z_1), (w_2, w_1) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, tenemos que se satisfacen las hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_3 , por tanto

$$(xi) \varrho_1(L_3) = \overline{z_2 w_2},$$

$$(xii) \varrho_2(L_3) = \overline{z_1 w_1}.$$

Notemos que los arcos \mathbf{A}_{mn-1} y L_3 satisfacen la hipótesis del Teorema 3.2.19, (4), pues

-los puntos extremos del arco \mathbf{A}_1 son $(\pi_{2,\infty}(\mathbf{z}))$ y $(\pi_{2,mn-1}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$,

-los puntos extremos del arco L_3 son (z_2, z_1) y (w_2, w_1) .

Además de los incisos (xi) y la propiedad (a) para el arco \mathbf{A}_{mn-1} obtenemos que $\varrho_1(L_3) = \pi_1(\mathbf{A}_{mn-1}) = \overline{z_2 w_2}$.

Por tanto por el Teorema 3.2.19,(4) existe un arco $\mathbf{A}_{mn} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

(xiii) Los puntos extremos de \mathbf{A}_{mn} son (\mathbf{z}) y $(\pi_{1,mn}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$,

(xiv) $\sigma(\mathbf{A}_{mn}) = \mathbf{A}_{mn-1}$,

(xv) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_{mn}) = L_3$,

Veamos que el arco \mathbf{A}_{mn} satisface las propiedades (a)-(c).

Como $k = mn$ tenemos que $r_k = 0 = i_k$ y $j_k = n$, por lo que $n - r_k + 1 = n + 1$, $m - i_k + 1 = m + 1$ y $m(j_k + 1) = m(n + 1)$.

Entonces

$-\pi_{n-r_k+1,\infty}(\mathbf{z}) = \pi_{n+1,\infty}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$, pues \mathbf{z} tiene orden n y

$-(\pi_{m-i_k+1,m(j_k+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z}) = (\pi_{m+1,m(n+1)}(\mathbf{w}), \mathbf{z}) = (\pi_{1,mn}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$, pues \mathbf{w} tiene orden m , por lo que se satisface la propiedad (b) para el arco \mathbf{A}_{mn} .

Del inciso (xv) tenemos que $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_{mn}) = L_3$, por lo que $\pi_1(\mathbf{A}_{mn}) = \varrho_2(L_3)$ y del inciso (xii) tenemos que $\varrho_2(L_3) = \overline{z_1 w_1}$. Por tanto $\pi_1(\mathbf{A}_{mn}) = \overline{z_1 w_1}$ como $z_1 = z_{n+1} = z_{n-r_k+1}$ y $w_1 = w_{m+1} = w_{m-i_k+1}$, se cumple la propiedad (a) para el arco \mathbf{A}_{mn} .

Del inciso (xiv), tenemos que $\sigma(\mathbf{A}_{mn}) = \mathbf{A}_{mn-1}$, así se satisface la propiedad (c) para el arco \mathbf{A}_{mn} .

Definamos $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{mn}$, veamos que el arco \mathbf{A} , satisface las propiedades (1)-(3) del Teorema. Recordemos que

$$(1) \sigma^{nm}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z}\},$$

$$(2) \pi_1(\mathbf{A}) = \{\pi_1(\mathbf{z})\} = \pi_{mn+1}(\mathbf{A}),$$

(3) \mathbf{A} tiene puntos extremos \mathbf{z} y $(\pi_{1,mn}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$.

La propiedad (3) es la propiedad (c) del arco \mathbf{A}_{mn} .

Para cada $2 \leq k \leq mn + 1$, tenemos que $\sigma(\mathbf{A}_k) = \mathbf{A}_{k-1}$ y $\sigma(\mathbf{A}_1) = \{\mathbf{z}\}$, concluimos que $\sigma^{nm}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z}\}$, así se satisface la propiedad (1).

De lo anterior obtenemos que $\pi_{mn+1}(\mathbf{A}) = \{\pi_1(\mathbf{z})\} = \{z_1\}$. Recordemos que $\pi_1(\mathbf{A}_{mn}) = \overline{z_1 w_1}$ y $z_1 = w_1$, entonces $\pi_1(\mathbf{A}_{mn}) = \{z_1\}$, por lo que se satisface la propiedad (2).

Con esto terminamos la prueba del lema. ■

Teorema 6.2.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tales que $\pi_1(\mathbf{z}) = \pi_1(\mathbf{w})$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{w}$.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$. Vamos a contruir un continuo de convergencia en $\varprojlim M$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, tales que

- (i) n es el periodo de \mathbf{z} bajo σ ,
- (ii) m es el periodo de \mathbf{w} bajo σ .

Como $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$, entonces $n > 1$ o $m > 1$. De lo contrario $\mathbf{z} = (z_1, z_1, \dots)$ y $\mathbf{w} = (w_1, w_1, \dots)$, como $z_1 = w_1$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{w}$, lo cual contradice $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$. Haremos la prueba para el caso en que $m > 1$.

Notemos que se satisfacen las hipotesis del Lema 6.2.1 para los puntos \mathbf{z} y \mathbf{w} , por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ que satisface las siguientes propiedades:

- (iii) $\sigma^{nm+1}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z}\}$,
- (iv) $\pi_1(\mathbf{A}) = \{\pi_1(\mathbf{z})\} = \pi_{mn+1}(\mathbf{A})$,
- (v) \mathbf{A} tiene puntos extremos \mathbf{z} y $(\pi_{1,mn}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$.

Como \mathbf{A} es un arco existe una función continua y biyectiva $\mathbf{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$, tal que

- (vi) $\mathbf{f}(0) = \mathbf{z}$
- (vii) $\mathbf{f}(1) = (\pi_{1,mn}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$.

Notemos que la función \mathbf{f} tiene también las siguientes propiedades:

(viii) $f_1([0, 1]) = \{\pi_1(\mathbf{z})\} = \{z_1\} = f_{mn+1}([0, 1])$, pues por (iv) tenemos que $\pi_1(\mathbf{A}) = \{\pi_1(\mathbf{z})\} = \pi_{mn+1}(\mathbf{A})$.

- (ix) $\mathbf{f}_{nm+1}^\infty([0, 1]) = \{\mathbf{z}\}$, pues por (iii) tenemos que $\sigma^{nm}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z}\}$.

Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{g}^k: [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ y $\mathbf{g}: [0, 1] \rightarrow \varprojlim M$ como siguen, para cada $t \in [0, 1]$

- $\mathbf{g}^k(t) = (\underbrace{\pi_{1,nm}(\mathbf{f}(t)), \dots, \pi_{1,nm}(\mathbf{f}(t))}_k, \mathbf{f}(t))$
- $\mathbf{g}(t) = (\pi_{1,nm}(\mathbf{f}(t)), \pi_{1,nm}(\mathbf{f}(t)), \dots)$

Del insiso (ix) y (x) tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, las funciones \mathbf{g}^k y \mathbf{g} están bien definidas. Además como \mathbf{f} es una función continua, para todo $i \in \mathbb{N}$, f_i es una función continua, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, las funciones \mathbf{g}^k es continua y la función \mathbf{g} es continua.

Afirmación 1 Si existen puntos $r, s \in [0, 1]$, tales que $\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(r)) = \pi_{1,mn}(\mathbf{f}(s))$, entonces $\mathbf{f}(r) = \mathbf{f}(s)$ y $r = s$.

Prueba.

De (ix), tenemos que $\mathbf{f}_{nm+1}^\infty([0, 1]) = \{\mathbf{z}\}$, entonces $\mathbf{f}(r) = (\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(r)), \mathbf{z})$ y $\mathbf{f}(s) = (\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(s)), \mathbf{z})$, como $\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(r)) = \pi_{1,mn}(\mathbf{f}(s))$, entonces $\mathbf{f}(r) = \mathbf{f}(s)$, como \mathbf{f} es una función inyectiva, $r = s$. \square

Afirmación 2

- (2.a) La función $\pi_{1,mn}(\mathbf{f})$ es inyectiva.
- (2.b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función \mathbf{g}^k es inyectiva.
- (2.c) La función \mathbf{g} es inyectiva.

Prueba.

(2.a) La función $\pi_{1,mn}(\mathbf{f})$ es inyectiva.

Sean $r, s \in [0, 1]$ tales que $\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(r)) = \pi_{1,mn}(\mathbf{f}(s))$, por la Afirmación 1 tenemos que $\mathbf{f}(r) = \mathbf{f}(s)$ y $r = s$, por tanto $\pi_{1,mn}(\mathbf{f})$ es una función inyectiva.

(2.b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, la función \mathbf{g}^k es inyectiva.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $r, s \in [0, 1]$ tales que $\mathbf{g}^k(r) = \mathbf{g}^k(s)$, en particular $\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(r)) = \pi_{1,mn}(\mathbf{f}(s))$, por (2.a) la función $\pi_{1,mn}(\mathbf{f})$ inyectiva, entonces $r = s$, por tanto \mathbf{g}^k es una función inyectiva.

De manera similar se prueba (2.c). \square

Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{B}_k = \mathbf{g}^k([0, 1])$, y $\mathbf{B} = \mathbf{g}([0, 1])$ como la funciones \mathbf{g}^k y \mathbf{g} son continuas e inyectivas, tenemos que \mathbf{B}_k y \mathbf{B} , son homeomorfos a un arco. Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, el arco \mathbf{B}_k tiene puntos extremos \mathbf{z} , $(\pi_{1,mnk}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$, y que el arco \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{z} , \mathbf{w} . (Figura 6.3)

Afirmación 3

- (3.a) Si $l, j \in \mathbb{N}$, con $l \neq j$, entonces $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_j = \{\mathbf{z}\}$,
- (3.b) Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{B}_j \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{z}\}$.

Prueba.

Haremos la prueba del inciso (3.a), la prueba del inciso (3.b) se hace de manera similar.

Para $k \in \mathbb{N}$, el arco B_k tiene puntos extremos \mathbf{z} y $(\pi_{1,mnk}(\mathbf{w}), \mathbf{z})$ por lo que $\{\mathbf{z}\} \subset \mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_j$.

Veamos la otra contención, sin pérdida de generalidad supongamos que $j < l$.

Sea $\mathbf{a} \in (\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_j)$. Como $\mathbf{a} \in \mathbf{B}_l$ y $\mathbf{a} \in \mathbf{B}_j$, tenemos que existen puntos $r, s \in [0, 1]$ tales que $\mathbf{g}^l(r) = \mathbf{a} = \mathbf{g}^j(s)$, por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^l(r) &= (\underbrace{\pi_{1,nm}(\mathbf{f}(r)), \dots, \pi_{1,nm}(\mathbf{f}(r))}_l, \mathbf{f}(r)) \\ &= (\underbrace{\pi_{1,nm}(\mathbf{f}(s)), \dots, \pi_{1,nm}(\mathbf{f}(s))}_j, \mathbf{f}(s)) = \mathbf{g}^j(s) \end{aligned}$$

De lo anterior $\pi_{1,mn}(\mathbf{f}(r)) = \pi_{1,mn}(\mathbf{f}(s))$, entonces por la Afirmación (1), $\mathbf{f}(r) = \mathbf{f}(s)$ y $r = s$.

Como $j < l$ entonces $(\underbrace{\pi_{1,nm}(\mathbf{f}(r)), \dots, \pi_{1,nm}(\mathbf{f}(r))}_{l-j}, \mathbf{f}(r)) = \mathbf{f}(r)$

Entonces $\pi_{1,nm}(\mathbf{f}(r)) = \pi_{mn+1,2mn}(\mathbf{f}(r)) = (z_1, \dots, z_n)$, pues por (ix) tenemos que $\mathbf{f}_{nm+1}^\infty([0, 1]) = \{\mathbf{z}\}$.

Por tanto $\mathbf{g}^l(r) = \mathbf{z}$, y $\mathbf{g}^j(r) = \mathbf{z}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{z}$, por tanto $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_j \subset \{\mathbf{z}\}$.
Concluimos que $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_j = \{(z_n, \mathbf{z})\}$. \square

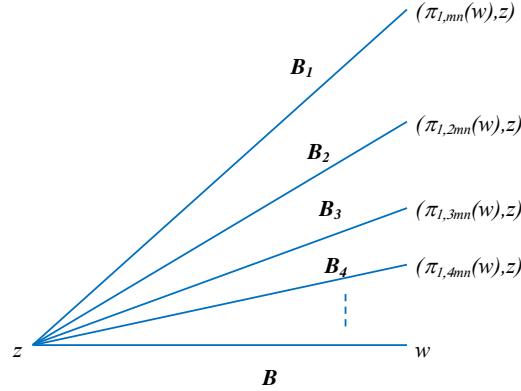


Figura 6.3:

Definamos $\mathbf{C}_k = \mathbf{g}^k([\frac{1}{4}, 1])$ y $\mathbf{C} = \mathbf{g}([\frac{1}{4}, 1])$. Probaremos que \mathbf{C} es un continuo de convergencia en $\varprojlim M$.

Como las funciones \mathbf{g}^k y \mathbf{g} son continuas e inyectivas, tenemos que \mathbf{C}_k y \mathbf{C} son no degenerados.

Además de la definición de las funciones \mathbf{g}^k y \mathbf{g} , tenemos que para cada punto $t \in [0, 1]$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{g}_k(t) = \mathbf{g}(t)$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{C}_k = \mathbf{C}$.

De la Afirmación 3, tenemos que si $l, j \in \mathbb{N}$, con $l \neq j$, entonces $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_j = \{\mathbf{z}\}$, como $\{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{g}^j(0)\} = \{\mathbf{g}^l(0)\}$ y $\mathbf{g}^j, \mathbf{g}^l$ son funciones inyectivas, entonces si $l, j \in \mathbb{N}$, con $l \neq j$, entonces $\mathbf{g}^j([\frac{1}{4}, 1]) \cap \mathbf{g}^l([\frac{1}{4}, 1]) = \mathbf{C}_l \cap \mathbf{C}_j = \emptyset$.

Además de la Afirmación 3, tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{B}_j \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{z}\}$, como $\{\mathbf{z}\} = \{\mathbf{g}^j(0)\} = \{\mathbf{g}(0)\}$ y \mathbf{g}^j, \mathbf{g} son funciones inyectivas, entonces para cada $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{g}^j([\frac{1}{4}, 1]) \cap \mathbf{g}([\frac{1}{4}, 1]) = \mathbf{C}_j \cap \mathbf{C} = \emptyset$.

De lo anterior concluimos que \mathbf{C} es un continuo de convergencia en $\varprojlim M$, lo cual contradice que $\varprojlim M$ es una dendrita. La contradicción nace de suponer que $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$.

Por tanto $\mathbf{z} = \mathbf{w}$ y el teorema queda demostrado. ■

Corolario 6.2.3. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $j \in \mathbb{N}$, tales que $\pi_j(\mathbf{z}) = \pi_j(\mathbf{w})$, entonces $\mathbf{z} = \mathbf{w}$.

Demostración.

Si $j = 1$, el resultado es inmediato del Teorema 6.2.2.

Si $j > 1$, definamos $\mathbf{x} = \sigma^{j-1}(\mathbf{z})$ e $\mathbf{y} = \sigma^{j-1}(\mathbf{w})$, por la Observación 6.0.6, tenemos que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$.

Por hipótesis $\pi_j(\mathbf{z}) = \pi_j(\mathbf{w})$, entonces $\pi_1(\mathbf{x}) = \pi_1(\mathbf{z}) = \pi_1(\mathbf{w}) = \pi_1(\mathbf{y})$. Por tanto por el Teorema 6.2.2 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, tal que n es el orden de \mathbf{x} bajo σ , entonces \mathbf{x} es de la forma $(x_1, \dots, x_n, x_1 \dots, x_n, x_1 \dots)$.

Como $\mathbf{x} = \sigma^{j-1}(\mathbf{z})$ y $\mathbf{y} = \sigma^{j-1}(\mathbf{w})$, entonces por la Obsevación 6.0.6, tenemos que \mathbf{z} y \mathbf{w} son puntos de orden n bajo σ . Por lo que

- $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-j}, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1 \dots)$,
- $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{n-j}, x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1 \dots)$.

Entonces $(z_1, \dots, z_{n-j}) = (x_{n-j+1}, \dots, x_n) = (w_1, \dots, w_{n-j})$.

Por tanto $\mathbf{z} = \mathbf{w}$. ■

Corolario 6.2.4. Sea M como en ???. Dado un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, de periodo n bajo σ , entonces para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) $(\{x_{i+1}\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(x_{i+1}, x_i)\},$
(2) $([0, 1] \times \{x_i\}) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(x_{i+1}, x_i)\}.$

Demostración.

Haremos la prueba del inciso (1), la prueba del inciso (2) se hace de manera similar.

Veamos que $\{(x_{i+1}, x_i)\} \subset (\{x_{i+1}\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)).$

Como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ por la Observación 6.0.7, $(x_{i+1}, x_i) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)),$ por tanto $\{(x_{i+1}, x_i)\} \subset \{x_{i+1}\} \times [0, 1] \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)).$

Veamos ahora que $(\{x_{i+1}\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) \subset \{(x_{i+1}, x_i)\}.$

Sea $(x_{i+1}, z_1) \in ((\{x_{i+1}\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))),$ entonces existe un punto $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ de la forma $(z_1, x_{i+1}, z_3, z_4, \dots),$ notemos que $\pi_2((x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})) = \pi_2(\mathbf{z}),$ entonces por el Corolario 6.2.3, tenemos que $\mathbf{z} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x}),$ por tanto $(x_{i+1}, z_1) = (x_{i+1}, x_i).$ Por tanto $\{x_{i+1}\} \times [0, 1] \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) \subset \{(x_{i+1}, x_i)\}.$

Concluimos que $\{x_{i+1}\} \times [0, 1] \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(x_{i+1}, x_i)\}.$ ■

Corolario 6.2.5. Sea $M \subset [0, 1]^2,$ tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty.$ Supongamos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ de periodo n bajo $\sigma, n > 1.$ Entonces para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$ con $i \neq j,$ se cumple que $\pi_i(\mathbf{x}) \neq \pi_j(\mathbf{x}).$

Demostración.

Supongamos por el contrario que existen $i, j \in \{1, 2, \dots, n\},$ con $i \neq j,$ tales que $\pi_i(\mathbf{x}) = \pi_j(\mathbf{x}).$

Por la Observación 6.0.6, tenemos que los puntos $\mathbf{y} = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})$ y $\mathbf{z} = (x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})$ son puntos de ramificación de $\varprojlim M$ de orden n bajo $\sigma.$

Como $\pi_1(\mathbf{y}) = \pi_1(\mathbf{z}),$ por el Teorema 6.2.2 tenemos que $\mathbf{y} = \mathbf{z}.$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $i < j,$ definamos $m = j - i,$ notemos que $0 < m < n.$

Tenemos que

$$\sigma^m(\mathbf{y}) = \sigma^{j-i}((x_i, x_{i+1}, \dots, x_n, \mathbf{x})) = (x_j, x_{j+1}, \dots, x_n, \mathbf{x}) = \mathbf{z} = \mathbf{y}.$$

Por tanto el periodo de \mathbf{y} bajo σ es menor igual que $m,$ lo cual contradice que el periodo de \mathbf{y} bajo σ es $n.$

La contradicción nace de suponer que $\pi_i(\mathbf{x}) = \pi_j(\mathbf{x}).$ Por tanto $\pi_i(\mathbf{x}) \neq \pi_j(\mathbf{x}).$ ■

Lema 6.2.6. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Dado un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, de periodo n bajo σ , con $n > 2$, tal que $y_1 = \min\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces para cada $i \in \{3, 4, \dots, n\}$, con i impar, se cumple que

- (1) $y_{i-2} < y_i < y_{i-1}$.
- Si además $i + 1 \neq n$, entonces
- (2) $y_i < y_{i+1} < y_{i-1}$.
- (Figura 6.4)

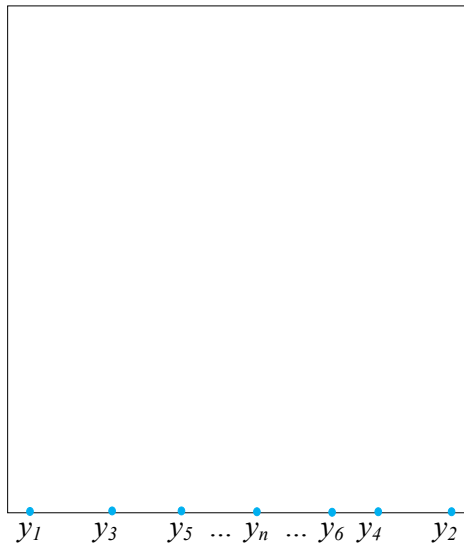


Figura 6.4:

Demostración.

Como \mathbf{y} tiene periodo n bajo σ , $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots, y_n, y_1, \dots)$

Notemos que por el Corolario 6.2.5, tenemos que si $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $i \neq j$ entonces $\pi_i(\mathbf{y}) \neq \pi_j(\mathbf{y})$.

Haremos la demostración por inducción hasta n .

Si $i = 3$, demostraremos que

- (1) $y_1 < y_3 < y_2$.

Por hipótesis tenemos $y_1 = \min\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$, además si $i \neq j$, $y_i \neq y_j$,

entonces $y_1 < y_3$. Veamos que $y_3 < y_2$.

Caso 1 $y_2 < y_n$.

Como $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos $(y_2, y_1), (y_1, y_n) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_1 con puntos extremos (y_2, y_1) y (y_1, y_n) .

Por la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos $(y_2, y_1), (y_1, y_n) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_1 , por tanto

- (i) $\varrho_1(L_1) = [y_1, y_2]$,
- (ii) $\varrho_2(L_1) = [y_1, y_n]$.

Como $y_1 < y_2 < y_n$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $y_2 \in \text{Int}(\varrho_2(L_1))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(y_3, y_2) \in L_1$.

Entonces $y_3 \in \varrho_1(L_1)$, por (i) $\varrho_1(L_1) = [y_1, y_2]$, así el punto $y_3 \in [y_1, y_2]$, además si $i \neq j$, $y_i \neq y_j$, por tanto $y_1 < y_3 < y_2$.

Caso 2 $y_n < y_2$.

Si $n = 3$, como para $i \neq j$, $y_i \neq y_j$ tenemos que $y_3 < y_2$, además $y_1 < y_3$, por tanto $y_1 < y_2 < y_3$.

Si $n > 3$, supongamos por el contrario que $y_3 > y_2$.

Como $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos $(y_2, y_1), (y_3, y_2) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_2 con puntos extremos (y_2, y_1) y (y_3, y_2) .

Por la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos $(y_2, y_1), (y_3, y_2) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_2 , por tanto

- (iii) $\varrho_1(L_2) = [y_2, y_3]$,
- (iv) $\varrho_2(L_2) = [y_1, y_2]$.

Como $y_1 < y_n < y_2$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $y_n \in \text{Int}(\varrho_2(L_2))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(y_1, y_n) \in L_2$.

Entonces $y_1 \in \varrho_1(L_2)$, por (iii) $\varrho_1(L_2) = [y_2, y_3]$, así el punto $y_1 \in [y_2, y_3]$, lo cual contradice que $y_1 < y_2$, la contradicción nace de suponer que $y_2 < y_3$, por tanto $y_2 > y_3$.

Además $y_1 < y_3$, por tanto $y_1 < y_3 < y_2$.

En cualquier caso concluimos que se cumple la propiedad (1).

Si $n \geq 4$ veamos que se cumple la propiedad (2) para $n = 4$.

(2) $y_3 < y_4 < y_2$.

Recordemos que L_2 es el arco en M con puntos extremos (y_2, y_1) y (y_3, y_2) .

Como $y_1 < y_3 < y_2$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $y_3 \in \text{Int}(\varrho_2(L_2))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(y_4, y_3) \in L_2$.

Entonces $y_4 \in \varrho_1(L_2)$, por (iii) $\varrho_1(L_2) = [y_2, y_3]$, así el punto $y_4 \in [y_2, y_3]$, además si $i \neq j$, $y_i \neq y_j$, por tanto $y_3 < y_4 < y_2$.

Supongamos que el resultado se cumple para $5 \leq i \leq n - 3$, con n par.

Si $i = n - 1$, demostraremos la propiedad (1)

(1) $y_{n-3} < y_{n-1} < y_{n-2}$.

Por hipótesis de inducción $y_{n-4} < y_{n-3} < y_{n-2}$.

Como $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos (y_{n-3}, y_{n-4}) , $(y_{n-2}, y_{n-3}) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_3 con puntos extremos (y_{n-3}, y_{n-4}) y (y_{n-2}, y_{n-3}) .

Por la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos (y_{n-3}, y_{n-4}) , $(y_{n-2}, y_{n-3}) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_3 , por tanto

(v) $\varrho_1(L_3) = [y_{n-3}, y_{n-2}]$,

(vi) $\varrho_2(L_3) = [y_{n-4}, y_{n-3}]$.

Como $y_{n-4} < y_{n-2} < y_{n-3}$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $y_{n-2} \in \text{Int}(\varrho_2(L_3))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(y_{n-1}, y_{n-2}) \in L_3$.

Entonces $y_{n-1} \in \varrho_1(L_3)$, por (v) $\varrho_1(L_3) = [y_{n-3}, y_{n-2}]$, así el punto $y_{n-1} \in [y_{n-3}, y_{n-2}]$, además si $i \neq j$, $y_i \neq y_j$, por tanto $y_{n-3} < y_{n-1} < y_{n-2}$.

Demostraremos ahora que se cumple la propiedad (2).

(2) $y_{n-1} < y_n < y_{n-2}$.

Como $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos (y_{n-2}, y_{n-3}) , $(y_{n-1}, y_{n-2}) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L_4 con puntos extremos (y_{n-2}, y_{n-3}) y (y_{n-1}, y_{n-2}) .

De la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos (y_{n-2}, y_{n-3}) , $(y_{n-1}, y_{n-2}) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_4 , por tanto

(vii) $\varrho_1(L_4) = [y_{n-1}, y_{n-2}]$,

(viii) $\varrho_2(L_4) = [y_{n-3}, y_{n-2}]$.

Como $y_{n-3} < y_{n-1} < y_{n-2}$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $y_{n-1} \in$

$Int(\varrho_2(L_4))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(y_n, y_{n-1}) \in L_4$.

Entonces $y_n \in \varrho_1(L_4)$, por (vii) $\varrho_1(L_4) = [y_{n-1}, y_{n-2}]$, así el punto $y_n \in [y_{n-1}, y_{n-2}]$, además si $i \neq j$, $y_i \neq y_j$, por tanto $y_{n-1} < y_n < y_{n-2}$.

Con esto terminamos la prueba del lema. \blacksquare

Observación 6.2.7. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Dado un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, de periodo n bajo σ , con $n > 2$, tal que $y_1 = \min\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces para cada $k \in \{3, 4, \dots, n\}$, se cumple que $y_1 < y_k < y_2$

Demostración.

Procederemos por inducción sobre k .

Si $k = 3$, por el Teorema 6.2.6, tenemos que $y_1 < y_3 < y_2$.

Supongamos que para $k \in \{4, \dots, n-1\}$ se cumple que $y_1 < y_k < y_2$.

Veamos que $y_1 < y_n < y_2$.

Por el Teorema 6.2.6 tenemos que $y_{n-2} < y_n < y_{n-1}$ y por hipótesis de inducción $y_{n-1} < y_2$, por tanto $y_1 < y_n < y_2$.

Así la observación queda probada. \blacksquare

Teorema 6.2.8. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Si $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, entonces el periodo de \mathbf{x} bajo σ es a lo más 2.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $n \geq 3$.

Como \mathbf{x} , es un punto de ramificación de $\varprojlim M$ de periodo n bajo σ , tenemos que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n, x_1 \dots)$. Además por el Corolario 6.2.5, tenemos que si $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, con $i \neq j$, entonces $\pi_i(\mathbf{x}) \neq \pi_j(\mathbf{x})$.

Sea $x_k = \min\{x_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$, definamos

$$\mathbf{y} = \sigma^{k-1}(\mathbf{x}) = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_n, \mathbf{x}),$$

como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, por la Observación 6.0.6, tenemos $\mathbf{y} = \sigma^{k-1}(\mathbf{x})$, es un punto de ramificación de $\varprojlim M$ de periodo n bajo σ . Renombremos las coordenadas de \mathbf{y} como $(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots, y_n, y_1 \dots)$.

Como $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_1, \dots) \in \varprojlim M$, tenemos que los puntos $(y_2, y_1), (y_1, y_n) \in M$. Como M es dendrita existe un único arco L con puntos extremos (y_2, y_1) y (y_1, y_n) .

Por la Observación 6.0.7, tenemos que los puntos $(y_2, y_1), (y_1, y_n) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L , por tanto

- (i) $\varrho_1(L) = [y_1, y_2]$,
- (ii) $\varrho_2(L) = [y_1, y_n]$.

Por la Observación 6.2.7, para $k = 3$ tenemos que $y_1 < y_3 < y_2$, entonces por la Observación 6.1.4 $y_3 \in \text{Int}(\varrho_1(L))$, con lo cual se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1 para el punto (y_3, y_2) y el arco L , por tanto el punto $(y_3, y_2) \in L$.

Entonces $y_2 \in \varrho_2(L)$, por (ii) $\varrho_2(L) = [y_1, y_n]$, así el punto $y_2 \in [y_1, y_n]$ y como para $i \neq j$ $y_i \neq y_j$, tenemos que $y_2 < y_n$.

Por otra lado, por la Observación 6.2.7, tenemos que $y_1 < y_n < y_2$. lo cual contradice que $y_2 < y_n$. La contradicción nace de suponer que $n > 2$.

Por tanto el periodo de \mathbf{x} bajo σ , es menor o igual a 2. ■

Teorema 6.2.9. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Si $\mathcal{R}(\varprojlim M)$ tiene dos puntos fijos bajo σ entonces cada elemento de $\mathcal{R}(\varprojlim M)$ es un punto fijo bajo σ .

Demostración.

Si $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = 2$ hemos terminado.

Si $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| > 2$, procederemos por contradicción, supongamos que existe un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tal que $\sigma(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$. Por el Teorema 6.2.8, tenemos que el periodo de \mathbf{x} bajo σ es 2, por lo que existen puntos $a, b \in [0, 1]$, con $a < b$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$.

Además por hipótesis existen puntos $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ tales que $\sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ y $\sigma(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$, por lo que existen puntos $c, d \in [0, 1]$, con $c < d$, tales que $\mathbf{y} = (c, c, c, \dots)$ y $\mathbf{z} = (d, d, d, \dots)$.

Por el Corolario 6.2.4, tenemos que

$$-(\{a\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(a, b)\} = ([0, 1] \times \{b\}) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)).$$

$$-(\{c\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(c, c)\} = ([0, 1] \times \{c\}) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)).$$

$$-(\{d\} \times [0, 1]) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(d, d)\} = ([0, 1] \times \{d\}) \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)).$$

Por tanto $c \neq a \neq d$ y $c \neq b \neq d$.

Analizaremos los siguientes casos:

Caso 1 $a < c$.

Analizaremos los siguientes subcasos:

Caso 1.1 $b < c$

Sea $L_1 \subset M$ el arco con puntos extremos (a, b) y (c, c) , como los puntos $(a, b), (c, c) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_1 , por tanto tenemos que:

(i) $\varrho_1(L_1) = [a, c]$ y

(ii) $\varrho_2(L_1) = [b, c]$.

Como $a < b < c$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $b \in \text{Int}(\varrho_1(L_1))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(b, a) \in L_1$.

Entonces $a \in \varrho_2(L_1)$, por (ii) $\varrho_2(L_1) = [b, c]$, así el punto $a \in [b, c]$, lo cual es una contradicción, pues $a < b$.

Caso 1.2 $b > c$. Sea $L_2 \subset M$ el arco con puntos extremos (a, b) y (d, d) , como los puntos $(a, b), (d, d) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_2 , por tanto tenemos que:

(iii) $\varrho_1(L_2) = [a, d]$ y

(iv) $\varrho_2(L_2) = [b, d]$.

Como $a < c < d$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $c \in \text{Int}(\varrho_1(L_2))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(c, c) \in L_2$.

Entonces $c \in \varrho_2(L_2)$, por (iv) $\varrho_2(L_2) = [b, d]$, así el punto $c \in [b, d]$, lo cual es una contradicción, pues $c < b$.

Caso 2 $c < a < d$.

Analizaremos los siguientes subcasos:

Caso 2.1 $b < d$

Sea $L_3 \subset M$ el arco con puntos extremos (a, b) y (c, c) , como los puntos $(a, b), (c, c) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_3 , por tanto tenemos que:

(v) $\varrho_1(L_3) = [c, a]$ y

(vi) $\varrho_2(L_3) = [c, b]$.

Como $c < a < b$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_2(L_3))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(b, a) \in L_3$.

Entonces $b \in \varrho_1(L_3)$, por (v) $\varrho_1(L_3) = [c, a]$, así el punto $b \in [c, a]$, lo cual es una contradicción, pues $a < b$.

Caso 2.2 $b > d$.

Como $c < d < b$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $d \in \text{Int}(\varrho_2(L_3))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(d, d) \in L_3$.

Entonces $d \in \varrho_1(L_3)$, por (v) $\varrho_1(L_3) = [c, a]$, así el punto $d \in [c, a]$, lo cual es una contradicción, pues $a < d$.

Caso 3 $d < a$.

Sea $L_4 \subset M$ el arco con puntos extremos (a, b) y (d, d) , como los puntos $(a, b), (d, d) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6 para el arco L_4 , por tanto tenemos que:

$$(v) \varrho_1(L_4) = [d, a] \text{ y}$$

$$(vi) \varrho_2(L_4) = [d, b].$$

Como $d < a < b$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_2(L_4))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(b, a) \in L_4$.

Entonces $b \in \varrho_1(L_4)$, por (v) $\varrho_1(L_4) = [d, a]$, así el punto $b \in [d, a]$, lo cual es una contradicción, pues $b > a$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción, la contradicción nace de suponer que existe un punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ tal que $\sigma(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$. Por tanto para todo punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, se cumple que $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. ■

Corolario 6.2.10. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Si $\mathcal{R}(\varprojlim M)$ tiene un punto de periodo 2 bajo σ , entonces $\mathcal{R}(\varprojlim M)$ tiene a lo más un punto fijo bajo σ .

Capítulo 7

Propiedades de M cuando su límite inverso es una dendrita con un número finito de puntos de ramificación

Recordemos que M denota un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$. En el Capítulo 4 probamos que, si $\varprojlim M$ es una dendrita, entonces M es una dendrita. En el capítulo 5 probamos que, si $\varprojlim M$ es una dendrita con un número finito de puntos de ramificación, entonces $\sigma|_{\mathcal{R}(\varprojlim M)}$ es una permutación; y en el Capítulo 6 probamos que los puntos de ramificación de $\varprojlim M$ tiene periodo 1 o 2 bajo σ .

Por lo que dado un punto $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, existen puntos $a, b \in [0, 1]$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. En este capítulo probaremos que los puntos $(a, b), (b, a) \in M$ tienen al menos orden 2, es decir no son puntos extremos de M . Como se muestra en el ejemplo de la la Figura 5.3.

En particular para el caso en que $0 < a, b < 1$, probaremos que (a, b) o (b, a) son puntos de ramificación de M . Probaremos este resultado procediendo por contradicción, es decir, suponiendo que $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$. Por esta razón destinamos la primera sección de este capítulo la destinamos a probar propiedades de M , $\varprojlim M$ y de los conjuntos G_k , suponiendo que $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$.

7.1. Propiedades de M , cuando puntos de ramificación de límite inverso, no implican puntos de ramificación en M

Es esta sección consideraremos puntos $a, b \in [0, 1]$, tales que $0 < a, b < 1$ y $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots) \in \varprojlim M$; daremos propiedades de M , cuando los puntos $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$.

Comenzaremos dando resultados que nos permiten acotar M .

Teorema 7.1.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$, con $0 \leq a < b \leq 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Entonces $M \subset ([0, b] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$, como se ilustra en la Figura 7.1.

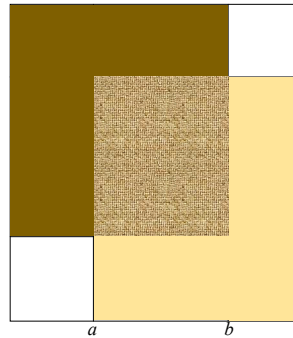


Figura 7.1: Teorema 7.1.1

Demostración.

Primero veamos que $M \cap ([0, b] \times [a, 1]) \neq \emptyset$ y $M \cap ([a, 1] \times [0, b]) \neq \emptyset$.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existen puntos $c, d \in [0, 1]$, tales que $(c, 0), (0, d) \in M$.

Probaremos que $c \geq a$. Supongamos por el contrario que $c < a$, como $(c, 0), (b, a) \in M$ y M es una dendrita existe un único arco $A \subset M$ con puntos extremos $(c, 0)$ y (b, a) .

Como $c < a < b$, por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_1(A))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in A$. Además como $c < a$ y $0 < b$ se satisfacen la hipótesis del Teorema

6.1.9, para el arco A , por tanto $A \subset M_3(b, a) = ([0, b] \times [0, a]) \cap M$, entonces $\varrho_2(A) \subset [0, a]$, como $b \in \varrho_2(A)$, entonces $b \leq a$, lo cual contradice que $a < b$. La contradicción nace de suponer que $c < a$, por tanto $c \geq a$.

De manera similar se prueba que $d \geq a$. Por tanto $(d, 0) \in M \cap ([0, b] \times [a, 1]) \neq \emptyset$ $(0, c) \in M \cap ([a, 1] \times [0, b]) \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $M \subset ([0, b] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$. Supongamos por el contrario que $M \not\subset ([0, b] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$. Entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

- (i) $M \cap ([0, a] \times [0, a]) \neq \emptyset$,
- (ii) $M \cap ((b, 1] \times (b, 1]) \neq \emptyset$.

Haremos la prueba para cuando sucede la afirmación (i), la prueba para cuando sucede la afirmación (ii) se hace de manera similar.

Como $M \cap ([0, a] \times [0, a]) \neq \emptyset$, entonces $a > 0$.

Consideremos puntos $(u, v) \in M \cap ([0, b] \times (a, 1])$ y $(r, s) \in [0, a] \times [0, a]$.

Como $(u, v), (r, s) \in M$ y M es una dendrita, existe un único arco $L \subset M$ con puntos extremos (u, v) y (r, s) . Analizaremos los siguientes casos:

Caso 1. $u < a$.

Como $s < a < v$ por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_2(L))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(b, a) \in L$.

Sean $J, K \subset L$ los arcos con puntos extremos $(u, v), (b, a)$ y $(r, s), (b, a)$. Notemos que $J \cap K = \{(b, a)\}$ y $J \cup K = L$.

Como $u < a < b$ por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_1(J))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in J$.

Además como $r < a < b$ por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_1(K))$, entonces se satisfacen hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in K$.

De lo anterior $(a, b) \in J \cap K = \{(b, a)\}$. Por tanto $(a, b) = (b, a)$, de donde $a = b$, lo cual contradice que $a < b$.

Caso 2. $u > a$.

Como $r < a < u$, por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_1(L))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, b) \in L$.

Sea $J \subset L$ el arco con puntos extremos (r, s) y (a, b) .

Como $s < a < b$ por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_2(J))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(b, a) \in J$.

Por otro lado como $(r, s) \in M_3(a, b) = ([0, a] \times [0, b]) \cap M$, y J es un arco con puntos extremos (r, s) , (a, b) y $r \neq a$, $s \neq b$, se cumplen las hipótesis del Teorema 6.1.9, por tanto $J \subset M_3(a, b)$, entonces $\varrho_1(J) \subset [0, a]$, lo cual contradice que el punto $(b, a) \in J$ pues $b > a$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. La contradicción nace se suponer que se cumple afirmación (i). De manera similar si suponemos que se cumple la afirmación (ii) obtenemos una contradicción.

Por tanto $M \subset ([0, b] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$. ■

Teorema 7.1.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$, con $0 < a < b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$. Entonces $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$, como se ilustra en la Figura 7.2.

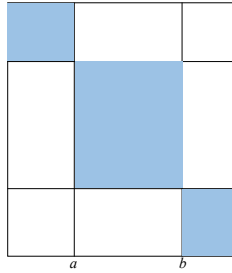


Figura 7.2: Teorema 7.1.2

Demostración.

Notemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 7.1.1, por lo que $M \subset ([0, b] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$.

Supongamos por el contrario que $M \not\subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$, entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

- (i) $M \cap ((a, b) \times (b, 1]) \neq \emptyset$,
- (ii) $M \cap ((a, b) \times [0, a]) \neq \emptyset$,

(iii) $M \cap ([0, a] \times (a, b)) \neq \emptyset$,

(iv) $M \cap ((b, 1] \times (a, b)) \neq \emptyset$.

Haremos la prueba de cuando sucede la afirmación (i), la prueba para cuando suceden las afirmaciones (ii), (iii), (iv) se hace de manera similar.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existen puntos $(u, 0), (r, 1) \in M$, como $M \subset ([0, b] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$, entonces $u \geq a, r \leq b$. Además como $M \cap ((a, b) \times (b, 1]) \neq \emptyset$, existe un punto $(z, w) \in M \cap (a, b) \times (b, 1]$.

Como M es un dendrita existen arcos únicos, $L, J \subset M$, con puntos extremos $(u, 0), (z, w)$ y $(z, w), (r, 1)$.

Como $0 < b < w$ por la Observación 6.1.4, tenemos que $b \in \text{Int}(\varrho_2(L))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(a, b) \in L$.

Además como $w < b < 1$ por la Observación 6.1.4, tenemos que $b \in \text{Int}(\varrho_2(J))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(a, b) \in J$.

Sea $K \subset M$ el arco con puntos extremos (a, b) y (z, w) .

Afirmación 1. $L \cap J = K$.

Prueba.

Puesto que $(z, w), (a, b) \in L \cap J$ y $L \cap J$ es una dendrita, tenemos que $K \subset L \cap J$.

Supongamos que la otra contención no se satisface, entonces existe un punto $(c, d) \in (L \cap J) - K$.

Sean $L', J' \subset M$, los arcos con puntos extremos $(u, 0), (c, d)$ y $(r, 1), (c, d)$, respectivamente. Notemos que $L' \subset L - K, J' \subset J - K$ y $L' \cup J'$ es el arco con puntos extremos $(u, 0)$ y $(r, 1)$.

Como $0 < b < 1$, por la Observación 6.1.4, tenemos que $b \in \text{Int}(\varrho_2(L' \cup J'))$. Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(a, b) \in L' \cup J'$.

Lo anterior contradice que $L' \cup J' \subset (L \cup J) - K$, pues el punto $(a, b) \in K$.

Por tanto $L \cap J = K$. \square

Definamos los siguientes arcos, $A \subset L$ el arco con puntos extremos $(u, v), (a, b)$, $B \subset J$ el arco con puntos extremos $(r, s), (a, b)$.

De manera similar a la Afirmación 1 se prueba que que $A \cap K = \{(a, b)\} = B \cap K$, por tanto $A \cup B \cup K$ es un triodo simple con vértice el punto (a, b) , lo cual contradice que el punto $(a, b) \notin \mathcal{R}(M)$.

La contradicción nace de suponer que se cumple afirmación (i). De manera similar si suponemos que se cumple alguna de las afirmaciones (ii), (iii) o (iv) obtenemos una contradicción.

Por tanto $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$. ■

Teorema 7.1.3. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$, con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Si $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$, entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

- (1) $M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$,
 - (2) $M \subset ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$,
- como se ilustra en la Figura 7.3.

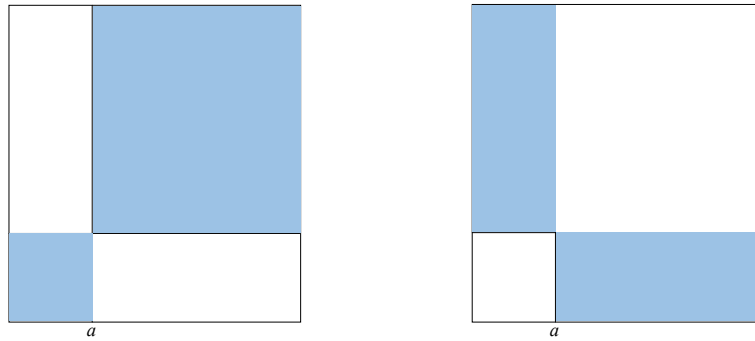


Figura 7.3: Teorema 7.1.3

Demostración.

Supongamos por el contrario que las afirmaciones (1) y (2) no se cumplen.

Sea $(u, v) \in M$, sin pérdida de generalidad supongamos $(u, v) \in [0, a]^2$. Como (1) no se cumple, existe un punto $(r, s) \in M \cap ([0, a] \times (a, 1])$ o $(r, s) \in M \cap ((a, 1] \times [0, a])$. Haremos la prueba para el caso en que el punto $(r, s) \in M \cap ([0, a] \times (a, 1])$, el otro caso la prueba se hace de manera similar.

Además como $\varrho_1(M) = [0, 1]$, existe un punto $z \in [0, 1]$, tal que $(1, z) \in M$. Consideremos los siguientes arcos en M :

- L el arco con puntos extremos (u, v) y (a, a) ,
- J el arco con puntos extremos (r, s) y (a, a) ,
- K el arco con puntos extremos $(1, z)$ y (a, a) .

Afirmación 1

(1a) $L \cap J = \{(a, a)\}$,

(1b) $L \cap K = \{(a, a)\}$,

(1c) $K \cap J = \{(a, a)\}$,

Prueba.

Probaremos el inciso (1a), de manera similar se prueban los incisos (1b) y (1c).

Puesto que $(a, a) \in L \cap J$, resta probar que $L \cap J \subset \{(a, a)\}$.

Supongamos que la contención no se satisface, es decir que existe un punto $(c, d) \in (L \cap J) - \{(a, a)\}$.

Sean $L', J' \subset M$, los arcos con puntos extremos (u, v) , (c, d) y (r, s) , (c, d) , respectivamente. Notemos que $L' \subset L - \{(a, a)\}$, $J' \subset J - \{(a, a)\}$ y $L' \cup J'$ es el arco con puntos extremos (u, v) y (r, s)

Como $u < a < r$, por la Observación 6.1.4, tenemos que $a \in \text{Int}(\varrho_2(L' \cup J'))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.1, por tanto el punto $(a, a) \in L' \cup J'$.

Lo anterior contradice que $L' \cup J' \subset (L \cup J) - \{(a, a)\}$,

Por tanto $L \cap J = \{(a, a)\}$. \square

De la Afirmación 1, tenemos que $L \cup J \cup K$ es un triodo simple con vértice el punto (a, a) , lo cual contradice que $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$.

De manera similar, si consideramos el un punto $(u, v) \in M \cap [0, a) \times (a, 1]$ o $(u, v) \in M \cap (a, 1] \times [0, a)$ o $(u, v) \in M \cap (a, 1]^2$, obtenemos una contradicción.

La contradicción nace de suponer que no se cumplen las propiedades (1) y (2). Por tanto M cumple alguna de éstas propiedades. \blacksquare

Teorema 7.1.4. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

(a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$, con $0 < a, b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$,

(b) la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.

Entonces $([0, 1] \times \{a\}) \cap M = \{(b, a)\}$ y $([0, 1] \times \{b\}) \cap M = \{(a, b)\}$.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $([0, 1] \times \{a\}) \cap M \neq \{(b, a)\}$ o $([0, 1] \times \{b\}) \cap M \neq \{(a, b)\}$.

Haremos la prueba para el caso en que $([0, 1] \times \{a\}) \cap M \neq \{(b, a)\}$, la prueba en el caso en que $([0, 1] \times \{b\}) \cap M \neq \{(a, b)\}$ se hace de manera similar.

Sea $c \in [0, 1] - \{b\}$, tal que el punto $(c, a) \in M$. Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$ existe un punto $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ tal que $\pi_1(\mathbf{y}) = c$.

Por otro lado como la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, existe un punto $d \in [0, 1]$, $d \neq b$, tal que $\{a\} \times \overline{db} \subset M$.

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{A}_n = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} = (t, \pi_{1,2n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}), \text{ con } t \in \overline{db}\}$$

y definamos también

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} = (t, \mathbf{x}), \text{ con } t \in \overline{db}\}$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathbf{A}_n es un arco con puntos extremos $\mathbf{b}_n = (b, \pi_{1,2n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y})$, $\mathbf{d}_n = (d, \pi_{1,2n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y})$ y \mathbf{A} es un arco con puntos extremos $\mathbf{b} = (b, \mathbf{x})$ y $\mathbf{d} = (d, \mathbf{x})$. (Figura 7.4)

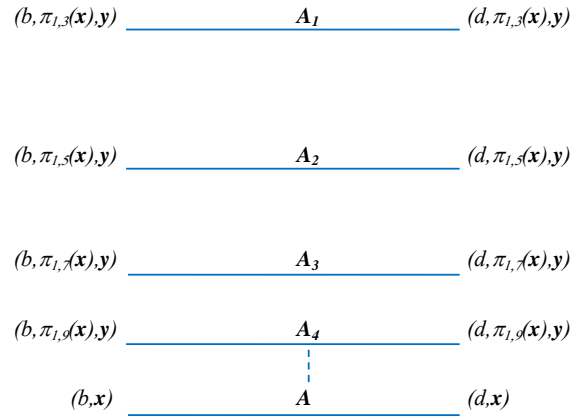


Figura 7.4:

Afirmación 1 \mathbf{A} es un continuo de convergencia de $\varprojlim M$.

Prueba.

Como $a \neq d$, para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathbf{A}_n es no degenerado y \mathbf{A} es no degenerado.

Veamos ahora que las siguientes afirmaciones son ciertas.

- (i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_n = \emptyset$,
- (ii) para $n, m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, $\mathbf{A}_n \cap \mathbf{A}_m = \emptyset$,

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{A}$.

(i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_n = \emptyset$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, supongamos por el contrario que $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_n \neq \emptyset$, sea $\mathbf{z} \in \mathbf{A} \cap \mathbf{A}_n$, entonces existen $r, s \in \overline{db}$ tales que $\mathbf{z} = (r, \pi_{1,2n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (s, \mathbf{x})$.

Entonces $\pi_{2(n+1)}(\mathbf{z}) = c = b$, lo cual contradice que $c \in [0, 1] - \{b\}$, por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}_n = \emptyset$.

De manera similar se prueba (ii). Probaremos ahora (iii).

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n = \mathbf{A}$.

Claramente $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente. Sea $\mathbf{C} \in \mathcal{C}(\varprojlim M)$ el límite de la sucesión $\{\mathbf{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Probaremos que el arco $\mathbf{A} = \mathbf{C}$.

Como $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{b}$ y $\mathbf{d}_n \rightarrow \mathbf{d}$, tenemos que los puntos $\mathbf{b}, \mathbf{d} \in \mathbf{C}$, como $\varprojlim M$ es una dendrita concluimos que el arco $\mathbf{A} \subset \mathbf{C}$.

Veamos ahora la otra contención, sea $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$, entonces existe $r \in \overline{db}$, tal que $\mathbf{p} = (r, \mathbf{x})$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el punto $\mathbf{p}_n = (r, \pi_{1,2n+1}(\mathbf{x}), \mathbf{y})$, de la definición $\mathbf{p}_n \in \mathbf{A}_n$. Como $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{p}$, de [1, Problema 4.4, pag 70], tenemos que $\mathbf{p} \in \mathbf{A}$, por tanto $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}$. Concluimos que $\mathbf{C} = \mathbf{A}$.

De las propiedades (i),(ii) y (iii) concluimos que \mathbf{A} es un continuo de convergencia de $\varprojlim M$. \square

La Afirmación 1 contradice que $\varprojlim M$ es una dendrita. La contradicción nace de suponer que $([0, 1] \times \{a\}) \cap M \neq \{(b, a)\}$, de manera similar si $([0, 1] \times \{b\}) \cap M \neq \{(a, b)\}$ obtenemos una contradicción.

Por tanto $([0, 1] \times \{a\}) \cap M = \{(b, a)\}$ y $([0, 1] \times \{b\}) \cap M = \{(a, b)\}$. \blacksquare

Corolario 7.1.5. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

(a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$, con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$,

(b) la componente de (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.

Entonces $([0, 1] \times \{a\}) \cap M = \{(a, a)\}$.

Demostración.

Caso particular del Teorema 7.1.4 cuando $a = b$. \blacksquare

Recordemos que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$G_k = \{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \in [0, 1]^{k+1} : \text{para } 1 \leq i \leq k, (x_{i+1}, x_i) \in M\},$$

la siguiente definición es una herramienta que estaremos utilizando a lo largo de esta sección.

Definición 7.1.6. Sean $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a < b < 1$ y $M \subset [0, 1]^2$, tal que $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b] \times [a, b]) \cup ([b, 1] \times [0, a])$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} G_k^+ &= \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [b, 1] \text{ si } i \text{ es impar,} \\ &\quad (y_{i+1}, y_i) \in [b, 1] \times [0, a] \text{ si } i \text{ es par, } 1 \leq i \leq k\}, \\ G_k^* &= \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [a, b]^2, 1 \leq i \leq k\}, \\ G_k^- &= \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [b, 1] \text{ si } i \text{ es par,} \\ &\quad (y_{i+1}, y_i) \in [b, 1] \times [0, a] \text{ si } i \text{ es impar, } 1 \leq i \leq k\}. \end{aligned}$$

Teorema 7.1.7. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

- (a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$, con $0 < a < b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$.
- (b) la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k = G_k^+ \cup G_k^* \cup G_k^-$, con G_k^+ , G_k^* y G_k^- como en la Definición 7.1.6.

Demostración.

Por la definición de G_k^+ , G_k^* , G_k^- , tenemos que $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$.

Si $k = 1$, como $G_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (y, x) \in M\}$ y $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$, entonces $G_1 \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$, así $G_1 \subset G_1^+ \cup G_1^* \cup G_1^-$, y como G_1^+ , G_1^* , $G_1^- \subset G_1$, entonces $G_1^+ \cup G_1^* \cup G_1^- = G_1$.

Supongamos que $k > 1$. Por definición, tenemos que G_k^+ , G_k^* , $G_k^- \subset G_k$, entonces $G_k^+ \cup G_k^* \cup G_k^- \subset G_k$.

Para la otra contención probaremos la siguiente Afirmación. .

Afirmación 1 Dado un punto $y \in G_k$ e $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$,

- (i) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [b, 1]$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [b, 1] \times [0, a]$,
- (ii) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [a, b]^2$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [a, b] \times [a, b]$,
- (iii) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [b, 1] \times [0, a]$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [0, a] \times [b, 1]$.

Prueba.

Haremos la prueba de (i), la prueba de (ii) y (iii) se hace de manera similar.

(i) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [b, 1]$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [b, 1] \times [0, a]$.

Como $y_{i+1} \in [0, a]$ y $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$, tenemos que $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in ([0, 1] \times \{a\}) \cup ([b, 1] \times [0, a])$.

Además como la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada se satisfacen las hipótesis del Teorema 7.1.4, por tanto $([0, 1] \times \{a\}) \cap M = \{(b, a)\}$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [b, 1] \times [0, a]$.

Por tanto la Afirmación 1 se satisface. \square

Sea $y \in G_k$, por definición de G_k , el punto $(y_2, y_1) \in M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$ y de la Afirmación 1 tenemos que

- si $(y_2, y_1) \in [0, a] \times [b, 1]$, entonces $y \in G_k^+$,

- si $(y_2, y_1) \in [a, b] \times [a, b]$, entonces $y \in G_k^*$,

- si $(y_2, y_1) \in [b, 1] \times [0, a]$, entonces $y \in G_k^-$.

De de lo anterior $y \in G_k \subset G_k^+ \cup G_k^* \cup G_k^-$.

Por tanto $G_k = G_k^+ \cup G_k^* \cup G_k^-$. \blacksquare

Corolario 7.1.8. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

(a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a < b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$,

(b) la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) $G_k^+ \cap G_k^* = \{\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))\}$,

(2) $G_k^- \cap G_k^* = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}$,

(3) G_k^+, G_k^* y G_k^- son dendritas.

(G_k^+, G_k^* y G_k^- como en la Definición 7.1.6).

Demostración.

(1) $G_k^+ \cap G_k^* = \pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))$.

Como $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$, entonces $\sigma(\mathbf{x}) = (b, a, b, a, b, a, \dots)$, entonces $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})) \in G_k^+$ y $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})) \in G_k^*$, por tanto $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})) \in G_k^+ \cap G_k^*$.

Probaremos ahora que $G_k^+ \cap G_k^- \subset \{\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))\}$. Sea $y \in G_k^+ \cap G_k^-$, como $y \in G_k^+$, por definición de G_k^+ tenemos que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

- si i es impar el punto $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [b, 1]$,

- si i es par el punto $(y_{i+1}, y_i) \in [b, 1] \times [0, a]$.

por lo que si i es impar $b \leq y_i \leq 1$ y si i es par $0 \leq y_i \leq a$.

Además como $y \in G_k^*$, por definición de G_k^* tenemos para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, el punto $(y_{i+1}, y_i) \in [a, b] \times [a, b]$, por lo que para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $a \leq y_i \leq b$.

Entonces

- si i es impar $b \leq y_i \leq 1$ y $a \leq y_i \leq b$,

- si i es par $0 \leq y_i \leq a$ y $a \leq y_i \leq b$.

Concluimos que si i es impar $y_i = b$ y si i es par $y_i = a$, por tanto $y = \pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))$. Por tanto $G_k^+ \cap G_k^* = \{\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))\}$.

De manera similar se prueba (2)

(3) G_k^+ , G_k^* y G_k^- son dendritas.

Por el Teorema 7.1.7 tenemos que $G_k = G_k^+ \cup G_k^* \cup G_k^-$, además de (1), $G_k^+ \cap G_k^* = \{\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))\}$, y como $G_k^+ \cap G_k^- = \emptyset$, entonces $G_k - \{\pi_{n+1}(\sigma(\mathbf{x}))\} = (G_k^+ - \{\pi_{n+1}(\sigma(\mathbf{x}))\}) \cup ((G_k^* \cup G_k^-) - \{\pi_{n+1}(\sigma(\mathbf{x}))\})$

Por tanto de [13, Proposición 6.3], tenemos que G_k^+ y $G_k^* \cup G_k^-$ son continuos, como G_k^+ y $G_k^* \cup G_k^-$ son subcontinuos de G_k y G_k es una dendrita, concluimos que G_k^+ y $G_k^* \cup G_k^-$ son dendritas.

Además de (2), $G_k^- \cap G_k^* = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}$, entonces $(G_k^* \cup G_k^-) - \{\pi_{k+1}(\mathbf{x})\} = (G_k^* - \{\pi_{k+1}(\mathbf{x})\}) \cup (G_k^- - \{\pi_{k+1}(\mathbf{x})\})$

Por tanto de [13, Proposición 6.3], tenemos que G_k^* y G_k^- son continuos, como G_k^* y G_k^- son subcontinuos de $G_k^* \cup G_k^-$ y $G_k^* \cup G_k^-$ es una dendrita, concluimos que G_k^* y G_k^- son dendritas.

Por tanto G_k^+ , G_k^* y G_k^- son dendritas. ■

Definición 7.1.9. Sean $a \in [0, 1]$, $0 < a < 1$ y $M \subset [0, 1]^2$, tal que $M \subset ([0, a]^2 \cup [a, 1]^2)$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$G_k^+ = \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [0, a]^2\},$$

$$G_k^- = \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [a, 1]^2\}.$$

Teorema 7.1.10. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

(a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$, con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$,

(b) la componente de (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k = G_k^+ \cup G_k^-$, con G_k^+ y G_k^- como en la Definición 7.1.9.

Demostración.

Por la definición de G_k^+ y G_k^- , tenemos que $M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$.

Si $k = 1$, como $G_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (y, x) \in M\}$ y $M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$, entonces $G_1 \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$, así $G_1 \subset G_1^+ \cup G_1^-$, y como $G_1^+, G_1^- \subset G_1$, entonces $G_1^+ \cup G_1^- = G_1$.

Supongamos que $k > 1$. Por definición tenemos que $G_k^+, G_k^- \subset G_k$, por tal $G_k^+ \cup G_k^- \subset G_k$.

Para la otra contención probaremos la siguiente Afirmación. .

Afirmación 1 Dado un punto $y \in G_k$ e $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$,

- (i) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a]^2$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [0, a]^2$,
- (ii) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [a, 1]^2$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [a, 1]^2$.

Prueba.

Haremos la prueba de (i), la prueba de (ii) se hace de manera similar.

- (i) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a]^2$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [0, a]^2$.

Como $y_{i+1} \in [0, a]$ y $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$, tenemos que $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in ([0, 1] \times \{a\}) \cup ([0, a]^2)$.

Además la componente de (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, por lo que se satisfacen la hipótesis del Corolario 7.1.5, por lo que $([0, 1] \times \{a\}) \cap M = \{(a, a)\}$, por tanto $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [0, a]^2$.

Por tanto la Afirmación 1 es cierta. \square

Sea $y \in G_k$, por definición de G_k , el punto $(y_2, y_1) \in M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$ y de la Afirmación 1 tenemos que

- si $(y_2, y_1) \in [0, a]^2$, entonces $y \in G_k^+$,
 - si $(y_2, y_1) \in [a, 1]^2$, entonces $y \in G_k^-$,
- entonces el punto $y \in G_k^+ \cup G_k^-$.

Por tanto $G_k = G_k^+ \cup G_k^-$. ■

Definición 7.1.11. Sean $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$ y $M \subset [0, 1]^2$, tal que $M \subset ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$G_k^+ = \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [a, 1], \text{ si } i \text{ es impar} \\ (y_{i+1}, y_i) \in [a, 1] \times [0, a] \text{ si } i \text{ es par } \},$$

$$G_k^- = \{y \in G_k : (y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [a, 1], \text{ si } i \text{ es par} \\ (y_{i+1}, y_i) \in [a, 1] \times [0, a] \text{ si } i \text{ es impar } \}.$$

Teorema 7.1.12. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

- (a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$,
- (b) la componente de (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.
- Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $G_k = G_k^+ \cup G_k^-$, con G_k^+ y G_k^- como en la Definición 7.1.11.

Demostración.

Por la definición de G_k^+ y G_k^- , tenemos que $M \subset ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$.

Si $k = 1$, como $G_1 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : (y, x) \in M\}$ y $M \subset ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$, entonces $G_1 \subset ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$, así $G_1 \subset G_1^+ \cup G_1^-$, y como $G_1^+, G_1^- \subset G_1$, entonces $G_1^+ \cup G_1^- = G_1$.

Por definición tenemos que $G_k^+, G_k^- \subset G_k$, por tal $G_k^+ \cup G_k^- \subset G_k$.
Para la otra contención probaremos la siguiente Afirmación. .

Afirmación 1 Dado un punto $\mathbf{y} \in G_k$ e $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$,

- (i) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [a, 1]$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [a, 1] \times [0, a]$,
- (ii) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [a, 1] \times [0, a]$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [0, 1] \times [a, 1]$.

Prueba.

Haremos la prueba de (i), la prueba de (ii) se hace de manera similar.

- (i) Si $(y_{i+1}, y_i) \in [0, a] \times [a, 1]$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [a, 1] \times [0, a]$.

Como $y_{i+1} \in [0, a]$ y $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in M \subset ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$, tenemos que $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in ([0, 1] \times \{a\}) \cup ([a, 1] \times [0, a])$.

Además la componente de (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, por lo que se satisfacen las hipótesis del Corolario 7.1.5, por tanto $([0, 1] \times \{a\}) \cap M = \{(a, a)\}$, entonces $(y_{i+2}, y_{i+1}) \in [a, 1] \times [0, a]$.

Por tanto la Afirmación 1 se satisface. \square

Sea $\mathbf{y} \in G_k$, por definición de G_k , el punto $(y_2, y_1) \in M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$ y de la Afirmación 1 tenemos que

- si $(y_2, y_1) \in [0, a] \times [a, 1]$, entonces $\mathbf{y} \in G_k^+$,
 - si $(y_2, y_1) \in [a, 1] \times [0, a]$, entonces $\mathbf{y} \in G_k^-$,
- entonces el punto $\mathbf{y} \in G_k^+ \cup G_k^-$.

Por tanto $G_k = G_k^+ \cup G_k^-$. \blacksquare

Corolario 7.1.13. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que:

(a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varinjlim M)$ y $a \in [0, 1]$, con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$,

(b) la componente de (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada.

Sean $k \in \mathbb{N}$, G_k^+ y G_k^- como en la Definición 7.1.9, (Definición 7.1.11).

Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones

- (1) $G_k^+ \cap G_k^- = \{\pi_{k+1}(\mathbf{x})\}$.
- (2) G_k^+ y G_k^- son dendritas.

Demostración.

- (1) $G_k^+ \cap G_k^- = \pi_{k+1}(\mathbf{x})$.

Como $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$, entonces $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in G_k^+$ y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in G_k^-$, por tanto $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in G_k^+ \cap G_k^-$.

Probaremos que $G_k^+ \cap G_k^- \subset \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}$. Sea $\mathbf{y} \in G_k^+ \cap G_k^-$.

Caso 1 G_k^+ y G_k^- como en la Definición 7.1.9.

Como $\mathbf{y} \in G_k^+$, tenemos para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $y_i \leq a$ y como $\mathbf{y} \in G_k^-$ tenemos para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $y_i \geq a$. Por tanto para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $y_i = a$. Por tanto $\mathbf{y} = \pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$.

Caso 2 G_k^+ y G_k^- como en Definición 7.1.11.

Como $\mathbf{y} \in G_k^+$, tenemos para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

- si i es impar, entonces $y_i \geq a$,
- si i es par, entonces $y_i \leq a$.

Además como $\mathbf{y} \in G_k^-$ tenemos para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

- si i es impar, entonces $y_i \leq a$,
- si i es par, entonces $y_i \geq a$.

Por tanto para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $y_i = a$. Por tanto $\mathbf{y} = \pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$.

De Caso 1 y Caso 2 concluimos que $G_k^+ \cap G_k^- \subset \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}$. Por tanto $G_k^+ \cap G_k^- = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}$.

- (2) G_k^+ y G_k^- son dendritas.

Del inciso (1) tenemos que

$$G_k - \{\pi_{n+1}(\mathbf{x})\} = (G_k^+ - \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}) \cup (G_k^- - \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\})$$

Por tanto de [13, Proposición 6.3], tenemos que $(G_k^+ - \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}) \cup \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\} = G_k^+$ y $(G_k^- - \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}) \cup \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\} = G_k^-$ son continuos, como G_k^+ y G_k^- son subcontinuos de G_k y G_k es una dendrita, concluimos que G_k^+ y G_k^- son dendritas. ■

Teorema 7.1.14. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que: (a) existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$, con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$,

(b) la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ y de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ son no degeneradas.

Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

- (1) $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})) \in \mathcal{E}(G_k^+)$,
- (2) $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})), \pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(G_k^*)$,
- (3) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(G_k^-)$,

con G_k^+ , G_k^* y G_k^- como en la Definición 7.1.6 o 7.1.9 o 7.1.11, según corresponda.

Demostración.

Si $k = 1$, como G_1 es homeomorfo a M y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$, entonces $\pi_{1,2}(\mathbf{x}) = (a, b), \pi_{1,2}(\sigma(\mathbf{x})) = (b, a) \notin \mathcal{R}(G_1)$. Por tanto $\pi_{1,2}(\sigma(\mathbf{x})) \in \mathcal{E}(G_1^+)$, $\pi_{1,2}(\sigma(\mathbf{x})), \pi_{1,2}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(G_1^*)$ y $\pi_{1,2}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(G_1^-)$.

Si $k \geq 2$. Supongamos por el contrario que existe $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$, tal que se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

- (i) $\pi_{1,j+1}(\sigma(\mathbf{x})) \notin \mathcal{E}(G_j^+)$,
- (ii) $\pi_{1,j+1}(\sigma(\mathbf{x})) \notin \mathcal{E}(G_j^*)$,
- (iii) $\pi_{1,j+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{E}(G_j^*)$,
- (iv) $\pi_{1,j+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{E}(G_j^-)$.

Haremos la prueba para cuando se da la afirmación (iv) la prueba para cuando se da alguna de las afirmaciones (i)-(iii) se hace de manera similar.

Sea $m = \min\{j \in \mathbb{N} : \pi_{1,j+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{E}(G_j^-)\}$, como estamos suponiendo que $\{j \in \mathbb{N} : j \geq 2 \text{ y } \pi_{1,j+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{E}(G_j^-)\} \neq \emptyset$, tenemos que m está bien definido y $m \geq 2$.

La prueba de este teorema es larga, probaremos que G_m contiene una dos celda, lo cual contradice que G_m es una dendrita. Para ésto probaremos que existen funciones continuas e inyectivas $f : [0, 1] \rightarrow G_{m-1}$ y $h : [0, 1] \rightarrow M$, tales que $E(f_m, h_2)$ contiene una dos celda.

Afirmación 1 Dados un punto $y \in G_m$ e $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

- (i) si $\pi_i(y) = a$, entonces $\pi_{i+1}(y) = b$,
- (ii) si $\pi_i(y) = b$, entonces $\pi_{i+1}(y) = a$.

Prueba.

Veremos la prueba del inciso (i), la prueba del inciso (ii) se hace de manera similar.

Por definición de G_m tenemos que el punto $(y_{i+1}, y_i) = (y_{i+1}, a) \in M$, además como la componente de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, por el Teorema 7.1.4, tenemos que $M \cap ([0, 1] \times \{a\}) = \{(b, a)\}$, por lo que $(y_{i+1}, a) = (b, a)$, por tanto $\pi_{i+1}(\mathbf{y}) = b$.

De manera simila si $\pi_i(\mathbf{y}) = b$, entonces $\pi_{i+1}(\mathbf{y}) = a$. \square

Definamos los siguientes conjuntos, U abierto conexo de $\{(x, y) \in M : (y, x) \in G_1^-\}$, U' abierto conexo de $\{(x, y) \in M : (y, x) \in G_1^+\}$, V abierto conexo de G_{m-1}^- y W abierto conexo de G_m^- tales que cumplan las siguientes propiedades:

- (i) $(b, a) \in U$, $(a, b) \in U'$
- (ii) $\pi_{1,m}(\mathbf{x}) \in V$,
- (iii) $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x}) \in W$,
- (iv) $(U \cup U') \cap \mathcal{R}(M) = \emptyset$,
- (v) $V \cap \mathcal{R}(G_{m-1}) = \emptyset$,
- (vi) $W \cap \mathcal{R}(G_m) \subset \{\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})\}$,
- (vii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $\pi_{i+1,i}(V) \subset U$ o $\pi_{i+1,i}(V) \subset U'$,
- (viii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\pi_{i+1,i}(W) \subset U$ o $\pi_{i+1,i}(W) \subset U'$,
- (ix) $\pi_{1,m}(W) \subset V$.

Notemos que \bar{U} y \bar{U}' son arcos con un punto extremo (b, a) y (a, b) , respectivamente, \bar{V} es un un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$ y existen arcos $A_1, A_2 \subset W$ con un punto extremo $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$, tales que

- (x) $A_1 \cap A_2 = \{\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})\}$.

Afirmación 2 Para cada $i \in \{1, 2\}$, $\pi_{1,m}(A_i)$ es no degenerada.

Prueba.

Supongamos por el contrario que $\pi_{1,m}(A_i)$ es degenerada, como $\pi_{1,m}(\mathbf{x}) \in \pi_{1,m}(A_i)$, tenemos que $\pi_{1,m}(A_i) = \{\pi_{1,m}(\mathbf{x})\}$, además por la Afirmación 1, tenemos que para $\mathbf{y} \in A_i$

- si $y_m = a$, entonces $y_{m+1} = b$,
- si $y_m = b$ entonces $y_{m+1} = a$,

en cualquier caso concluimos que $\mathbf{y} = \pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$, como \mathbf{y} es un punto arbitrario, tenemos que $A_i = \{\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})\}$, lo cual contradice que A_i es un arco. \square

Por el inciso (ix), tenemos que $\pi_{1,m}(W) \subset V$, por lo que $\pi_{1,m}(A_i) \subset V \subset \bar{V}$ y por la Afirmación 2 para cada $i \in \{1, 2\}$, $\pi_{1,m}(A_i)$ es no degenerado. Como V

es un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$, obtenemos que $\pi_{1,m}(\mathbf{A}_1) \cap \pi_{1,m}(\mathbf{A}_2)$ es un arco no degenerado con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$.

Definamos $\mathbf{A} = \pi_{1,m}(\mathbf{A}_1) \cap \pi_{1,m}(\mathbf{A}_2)$.

Afirmación 3 $\pi_m(\mathbf{A})$ es no degenerada.

Prueba.

Supongamos por el contrario que $\pi_m(\mathbf{A})$ es degenerada, como $a \in \pi_m(\mathbf{A})$ o $b \in \pi_m(\mathbf{A})$, tenemos que $\pi_m(\mathbf{A}) = \{a\}$ o $\pi_m(\mathbf{A}) = \{b\}$. Haremos la prueba del caso en que $\pi_m(\mathbf{A}) = \{a\}$, la prueba del caso en que $\pi_m(\mathbf{A}) = \{b\}$ se hace de manera similar.

Notemos que dado un punto $y \in \mathbf{A}$, por definición de \mathbf{A} , para cada $i \in \{1, 2\}$ existe un punto $\mathbf{z}_i \in \mathbf{A}_i$ tal que $\pi_{1,m}(\mathbf{z}_i) = y$, además como $\pi_m(y) = a$ por la Afirmación 1, tenemos que $\pi_{m+1}(\mathbf{z}_i) = b$, por lo que $\mathbf{z}_1 = (y, b) = \mathbf{z}_2$, así $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$.

Como \mathbf{A} es un arco y lo anterior ocurre para cada punto de \mathbf{A} , concluimos que $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$ es no degenerado. Lo anterior contradice el inciso (x), $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \{\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})\}$, la contradicción nace de suponer que $\pi_m(\mathbf{A}) = \{a\}$.

De manera similar si $\pi_m(\mathbf{A}) = \{b\}$ obtenemos una contradicción. Por tanto $\pi_m(\mathbf{A})$ es no degenerada. \square

Definamos para cada $i \in \{1, 2\}$, $J_i = (\pi_{m+1}, \pi_m)(\mathbf{A}_i)$.

Afirmación 4 Para cada $i \in \{1, 2\}$ se cumple que $\pi_m(\mathbf{A}) \subset \varrho_2(J_i)$.

Prueba.

Sea $t \in \pi_m(\mathbf{A})$, existe un punto $y \in \mathbf{A}$, tal que $\pi_m(y) = t$, por definición de \mathbf{A} existe un punto $\mathbf{z}_i \in \mathbf{A}_i$, tal que $\pi_{1,m}(\mathbf{z}_i) = y$, entonces $\pi_m(\mathbf{z}_i) = t$, por tanto $t = \varrho_2(\pi_{m+1}, \pi_m)(\mathbf{z}_i) \in \varrho_2(J_i)$. Concluimos que $\pi_m(\mathbf{A}) \subset \varrho_2(J_i)$. \square

Afirmación 5 $J_1 \cap J_2$ es un arco con un extremo (a, b) o (b, a) .

Prueba.

De la Afirmación 3, $\pi_m(\mathbf{A})$ es no degenerado y de la Afirmación 5, $\pi_m(\mathbf{A}) \subset \varrho_2(J_i)$, por lo que J_i es no degenerado.

Además por el inciso (viii) $\pi_{m+1,m}(\mathbf{W}) \subset U$ o $\pi_{m+1,m}(\mathbf{W}) \subset U'$. Por lo que $J_1, J_2 \subset U$ o $J_1, J_2 \subset U'$.

Supongamos que $J_1, J_2 \subset U$, como \bar{U} es un arco con un punto extremo (b, a) y $(b, a) = \pi_{m+1,m}(\mathbf{x}_i) \in \pi_{m+1,m}(\mathbf{A}_i)$, tenemos que J_1 y J_2 son arcos con un punto extremo (b, a) . Como $J_1 \cap J_2$ es no degenerado, concluimos que $J_1 \cap J_2$ es un arco con un punto extremo (b, a) .

De manera similar si $J_1, J_2 \subset U'$, $J_1 \cap J_2$ es un arco con un punto extremo (a, b) . \square

Vamos a suponer que $J_1 \cap J_2$ es un arco con un extremo (b, a) , el caso en $J_1 \cap J_2$ es un arco con un punto extremo (a, b) se prueba de manera similar.

Como $J_1 \cap J_2$ es un arco con un extremo (b, a) , entonces $(b, a) \in J_i = \pi_{m+1,m}(\mathbf{A}_i)$, por lo que $a \in \pi_m(\mathbf{A}_i) \subset \pi_m(G_m^-)$, por definición de G_m

- si m es impar entonces $\pi_m(G_m^-) \subset [0, a]$,
- si m es par entonces $\pi_m(G_m^-) \subset [b, 1]$.

Concluimos entonces que m es par.

Como m es par $\pi_m(\mathbf{x}) = b$, como $\pi_m(\mathbf{x}) \in \pi_m(\mathbf{A})$ entonces $b \in \pi_m(\mathbf{A})$.

Por la Afirmación 3 $\pi_m(\mathbf{A})$ es no degenerada, por lo que existe un punto $c \in [0, 1] - \{b\}$, tal que $\pi_m(\mathbf{A}) = \overline{cb}$.

Por la Afirmación 4 para cada $i \in \{1, 2\}$, $\pi_m(\mathbf{A}) \subset \varrho_2(J_i)$. Entonces $\pi_m(\mathbf{A}) \subset \varrho_2(J_1 \cap J_2)$. Como $J_1 \cap J_2$ es un arco con un extremo (b, a) , y $\varrho_2(J_1 \cap J_2) \subset \varrho_2(U) \subset [0, a]$, por el Teorema 1.1.3 tenemos que existe un arco $J \subset J_1 \cap J_2$ con puntos extremos (b, a) y (d, c) , tal que $\varrho_2(J) = \overline{cb}$.

Definamos para cada $i \in \{1, 2\}$, $\mathbf{B}_i \subset (\pi_{m+1}, \pi_m)^{-1}(J) \cap \mathbf{A}_i$ la componente del punto $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$.

Afirmación 6 Para cada $i \in \{1, 2\}$, \mathbf{B}_i es un arco.

Prueba.

Notemos que $J - \{(d, c)\}$ es un conjunto abierto que contiene al punto (b, a) , y que $(\pi_{m+1}, \pi_m)^{-1}(J - \{(d, c)\}) \cap \mathbf{A}_i$ es un conjunto abierto de \mathbf{A}_i que contiene al punto $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$, además la componente \mathbf{B}'_i de

$$\overline{(\pi_{m+1}, \pi_m)^{-1}(J - \{(d, c)\}) \cap \mathbf{A}_i}$$

que contiene al punto $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$ satisface que

$$\mathbf{B}'_i \cap Fr_{\mathbf{A}_i}(\overline{(\pi_{m+1}, \pi_m)^{-1}(J - \{(d, c)\}) \cap \mathbf{A}_i}) \neq \emptyset$$

, por lo que \mathbf{B}'_i es no degenerada.

Como $\mathbf{B}'_i \subset \overline{(\pi_{m+1}, \pi_m)^{-1}(J - \{(d, c)\}) \cap \mathbf{A}_i} \subset (\pi_{m+1}, \pi_m)^{-1}(J) \cap \mathbf{A}_i$ y \mathbf{B}'_i es un conexo que contiene al punto $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$ tenemos que $\mathbf{B}'_i \subset \mathbf{B}_i$ concluimos que \mathbf{B}_i es no degenerado. Como \mathbf{A}_i es un arco y $\mathbf{B}_i \subset \mathbf{A}_i$, entonces \mathbf{B}_i es un arco. \square

De manera similar a la Afirmación 2, se prueba que para cada $i \in \{1, 2\}$, $\pi_{1,m}(\mathbf{B}_i)$ es no degenerada.

Definamos $B = \pi_{1,m}(B_1) \cap \pi_{1,m}(B_2)$.

Afirmación 7 B es un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$.

Prueba.

Como $\pi_{1,m}(B_i)$ es un arco y como $\pi_{1,m}(\mathbf{x}) \in \pi_{1,m}(B_i)$ tenemos que $\pi_{1,m}(B_i)$ es un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$.

Por otro lado del inciso (viii), $\pi_{1,m}(W) \subset V$, por lo que $\pi_{1,m}(B_1), \pi_{1,m}(B_2) \subset V \subset \bar{V}$ y \bar{V} es un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$.

Concluimos que $\pi_{1,m}(B_1) \cap \pi_{1,m}(B_2)$ es un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$. \square

Como J es un arco con puntos extremos (b, a) , (d, c) y B es un arco con un punto extremo $\pi_{1,m}(\mathbf{x})$ y $\varrho_2(J) = \bar{cb} = \pi_m(\mathbf{B})$, existen funciones continuas y biyectivas $f : [0, 1] \rightarrow B$ y $h : [0, 1] \rightarrow J$, con las siguientes propiedades

$$(xi) \quad f(0) = \pi_{1,m}(\mathbf{x}),$$

$$(xii) \quad h(0) = (b, a),$$

$$(xiii) \quad h(1) = (d, c),$$

Como $f_m(0) = h_2(0)$, el punto $(0, 0) \in E(f_m, h_2)$, entonces $E(f_m, h_2) \neq \emptyset$, por lo que podemos definir $\varphi : E(f_m, h_2) \rightarrow G_m$ para cada punto $(r, s) \in E(f_m, h_2)$ como sigue:

$$\varphi((r, s)) = (f_1(r), f_2(r), \dots, f_k(r), h_1(s))$$

Como f y h son funciones continuas e inyectivas, tenemos que se cumplen las hipótesis del Corolario 3.1.2, por tanto φ es un encaje.

Definamos C_i la componente de $\pi_{1,m}^{-1}(B) \cap B_i$ que contiene al punto $\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})$. De manera similar a la Afirmación 6 obtenemos que C_i es un arco.

Afirmación 8 Para cada $i \in \{1, 2\}$, $C_i \subset \varphi(E(f_m, h_2))$.

Prueba.

Sea $y \in C_i$ por definición $\pi_{1,m}(y) \in B$ y $(\pi_{m+1}, \pi_m)(y) \in J$, por lo que existen puntos $r, s \in [0, 1]$, tales que $f(r) = \pi_{1,m}(y)$ y $h(s) = (\pi_{m+1}, \pi_m)(y)$, notemos que $f_m(r) = \pi_m(y) = h_2(s)$, por tanto el punto $(r, s) \in E(f_m, h_2)$ y $\varphi(r, s) = (f_1(r), f_2(r), \dots, f_m(r), h_1(s)) = (\pi_{1,m}(y), \pi_{m+1}(y)) = y$.

Por tanto $C_i \subset \varphi(E(f_m, h_2))$. \square

Definamos $E_i = \varphi^{-1}(C_i)$, como φ es un encaje obtenemos que E_i es un arco, además $E_1 \cap E_2 = \varphi^{-1}(C_1) \cap \varphi^{-1}(C_2) = \varphi^{-1}(C_1 \cap C_2) = \varphi^{-1}(\pi_{1,m+1}(\mathbf{x})) = \{(0, 0)\}$.

Entonces $E_1 \cup E_2$ es un arco contenido en $E(f_m, h_2)$, tal que $(0, 0) \in E_1 \cup E_2$ y $(0, 0)$ no es punto extremo de $E_1 \cup E_2$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 2.2.2, por tanto $E(f_m, h_2)$ contiene una dos celda. Como φ es un encaje concluimos que G_m contiene una dos celda lo cual contradice que G_m es una dendrita, la contradicción nace de suponer que existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $\pi_{1,j+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{E}(G_j^+)$. De manera similar si se da alguna de las afirmaciones (i)-(iii) obtenemos una contradicción.

Por tanto el teorema queda demostrado. \blacksquare

Teorema 7.1.15. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $a \leq b$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$. Entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

- (1) La componente de $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ que contiene al punto (a, b) es degenerada.
- (2) La componente de $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ que contiene al punto (b, a) es degenerada.

Demostración.

Procederemos por contradicción, supongamos que la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, b) es no degenerada y que la componente de $\{b\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (b, a) es no degenerada.

Entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 7.1.14, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})) \in \mathcal{E}(G_k^+)$, $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x})), \pi_{1,n+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(G_k^*)$, $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{E}(G_k^-)$, donde G_k^+ , G_k^* y G_k^- como en la Definición 7.1.6 (o 7.1.9, 7.1.11, según corresponda).

Notemos que también se satisfacen la hipótesis del Teorema 7.1.8 (o 7.1.10, o 7.1.12, según corresponda) por lo que $G_n = G_n^+ \cup G_n^* \cup G_n^-$, $G_n^+ \cap G_n^* = \pi_{1,n+1}(\sigma(\mathbf{x}))$, $G_n^- \cap G_n^* = \pi_{1,n+1}(\mathbf{x})$, $(G_n^+ \cap G_n^- = \pi_{1,n+1}(\mathbf{x}))$ G_n^+ , G_n^* y G_n^- son dendritas.

De lo anterior concluimos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\pi_{1,n+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}(G_n)$.

Por otro lado como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y se cumplen la hipótesis del Teorema 6.1.2, para el punto \mathbf{x} , por tanto existe un número $N \in \mathbb{N}$, tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$, $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$ es punto de ramificación de G_k , lo cual contradice que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{O}(G_k)$.

La contradicción nace de suponer que la componente de $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ que contiene al punto (a, b) es no degenerada y la componente de $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ que contiene al punto (b, a) es no degenerada.

Por tanto el teorema queda demostrado. \blacksquare

Corolario 7.1.16. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $(a, a) \notin \mathcal{R}(M)$. Entonces la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, a) es degenerada.

Demostración.

Caso particular del Teorema 7.1.15, cuando $a = b$. ■

Teorema 7.1.17. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$. Entonces existen $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, funciones continuas e inyectivas $f : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow G_{k-1}$ y un conjunto abierto $\mathbb{W} \subset G_k$, con las siguientes propiedades:

(1) $f(0) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(1) \in [a, 1] \times [b, 1]$ o $f(1) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(0) \in [a, 1] \times [b, 1]$,

(2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(G_k)$,

(3) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathbb{W} \subset \varphi(E(f_1, h_1))$.

Donde $\varphi : E(f_1, h_1) \rightarrow G_k$, es el encaje definido en el Corolario 3.1.2.

Demostración.

Como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y se cumplen la hipótesis del Teorema 6.1.2, para el punto \mathbf{x} , por tanto existe un número $k \in \mathbb{N}$, tal que para cada $r \in \mathbb{N}$, $r \geq N$, $\pi_{1,r+1}(\mathbf{x})$ es punto de ramificación de G_k

Como $(b, a) \notin \mathcal{R}(M)$, entonces $(a, b) \notin \mathcal{R}(G_1)$, por tanto $k > 1$.

Definamos los siguientes conjuntos, U abierto conexo de $\{(x, y) \in M : (y, x) \in G_1^-\}$, U' abierto conexo de $\{(x, y) \in M : (y, x) \in G_1^+\}$, \mathbb{V} abierto conexo de G_{k-1}^+ y \mathbb{W} abierto conexo de G_k^+ tales que cumplan las siguientes propiedades:

(i) $(b, a) \in U$, $(a, b) \in U'$

(ii) $\pi_{1,k}(\mathbf{x}) \in \mathbb{V}$,

(iii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathbb{W}$,

(iv) $(U \cup U') \cap \mathcal{R}(M) = \emptyset$,

(v) $\mathbb{V} \cap \mathcal{R}(G_{k-1}) = \emptyset$,

(vi) $\mathbb{W} \cap \mathcal{R}(G_k) = \{\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})\}$,

(vii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $\pi_{i+1,i}(\mathbb{V}) \subset U$ o $\pi_{i+1,i}(\mathbb{V}) \subset U'$,

(viii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\pi_{i+1,i}(\mathbb{W}) \subset U$ o $\pi_{i+1,i}(\mathbb{W}) \subset U'$,

(ix) $\pi_{2,k+1}(\overline{\mathbb{W}}) \subset \mathbb{V}$.

$$(x) \pi_{2,1}(\bar{W}) \subset U.$$

Como $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$, tenemos que \bar{U} y \bar{U}' son arcos con un punto extremo (b, a) y (a, b) , respectivamente, además como $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{R}(G_{k-1})$, \bar{V} es un un arco con un punto extremo $\pi_{1,k}(\mathbf{x})$. Además de (iii) se cumple (2).

Afirmación 1 \bar{W} tiene las siguientes propiedades:

(1a) $\pi_{2,k+1}(\bar{W})$ es no degenerado.

(1b) $\pi_{2,1}(\bar{W})$ es no degenerado.

Prueba.

(1a) $\pi_{2,k+1}(\bar{W})$ es no degenerado.

Supongamos por el contrario $\pi_{2,k+1}(\bar{W})$ es degenerado, como $\pi_{2,k+1}(\mathbf{x}) \in \pi_{2,k+1}(\bar{W})$, entonces $\pi_{2,k+1}(\bar{W}) = \{\pi_{2,k+1}(\mathbf{x})\}$, entonces cada punto de $\mathbf{z} \in \bar{W}$ es de la forma $(z_1, \pi_{2,k+1}(\mathbf{x}))$, entonces \bar{W} es homeomorfo $\pi_1(\bar{W})$, por tanto \bar{W} es homeomorfo a un arco, lo cual contradice que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \text{int}(\bar{W})$, pues $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(G_k)$.

(1b) $\pi_{2,1}(\bar{W})$ es no degenerado.

Supongamos por el contrario que $\pi_{2,1}(\bar{W})$ es degenerado, como $(b, a) \in \pi_{2,k+1}(\bar{W})$, entonces $\pi_{2,k+1}(\bar{W}) = \{(b, a)\}$, entonces cada punto de $\mathbf{z} \in \bar{W}$ es de la forma (b, y) , con $y \in V$, entonces \bar{W} es homeomorfo a un subcontinuo de \bar{V} , como \bar{V} es un arco, concluimos que \bar{W} es homeomorfo a un arco, lo cual contradice que $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \text{int}(\bar{W})$, pues $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(G_k)$. \square

Definamos $A = \pi_{2,k+1}(\bar{W})$ y $L = \pi_{2,1}(\bar{W})$, de la Afirmación 1 tenemos que A y L son no generados, como $A \subset \bar{V}$, $L \subset \bar{U}$ y \bar{V} , \bar{U} son arcos, entonces A y L son arcos.

Además como \bar{U} es un arco con un punto extremo (b, a) y \bar{V} es un un arco con un punto extremo $\pi_{1,k}(\mathbf{x})$, entonces A y L son arcos con un punto extremo (b, a) y $\pi_{1,k}(\mathbf{x})$, respectivamente.

Por otro lado como $(b, a), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$ y $(b, a) \in \text{int}(L)$, entonces L es un arco con un extremo en $M_2(b, a) = ([0, b] \times [a, 1]) \cap M$ y otro extremo en $M_4(b, a) = ([b, 1] \times [0, a]) \cap M$ o L es un arco con un extremo en $M_1(b, a) = ([b, 1] \times [a, 1]) \cap M$ y otro extremo en $M_3(b, a) = ([0, b] \times [0, a]) \cap M$.

Afirmación 2 $\pi_1(A) = \varrho_1(L)$.

Prueba.

Probaremos que $\varrho_1(L) \subset \pi_1(A)$. Sea $t \in \varrho_1(L)$, entonces existe un punto $p \in L$, tal que $\varrho_1(p) = t$, como $L = \pi_{2,1}(\bar{W})$ existe un punto $q \in \bar{W}$ tal que

$\pi_{2,1}(\mathbf{q}) = (q_2, q_1) = p$, como $\mathbf{A} = \pi_{2,k+1}(\mathbf{W})$, entonces $(q_2, \dots, q_{k+1}) \in A$, como $q_2 = \varrho_1(p) = t$, entonces $t \in \pi_1(\mathbf{A})$, por tanto $\varrho_1(L) \subset \pi_1(\mathbf{A})$.

De manera similar $\pi_1(\mathbf{A}) \subset \varrho_1(L)$. Por tanto $\pi_1(\mathbf{A}) = \varrho_1(L)$. \square

Como \mathbf{A} y L son arcos con un punto extremo (b, a) y $\pi_{1,k}(\mathbf{x})$, respectivamente, existen funciones continuas e inyectivas $f : [0, 1] \rightarrow L$ y $\mathbf{h} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}$ tales que $f(0) = (b, a)$ y $\mathbf{h}(0) = \pi_{1,k}(\mathbf{x})$.

Notemos que $f(0) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(1) \in [a, 1] \times [b, 1]$ o $f(1) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(0) \in [a, 1] \times [b, 1]$, pues L es un arco con un extremo en $M_2(b, a)$ y otro extremo en $M_4(b, a)$ o L es un arco con un extremo en $M_1(b, a)$ y otro extremo en $M_3(b, a)$. Por ta to se cumple (1).

De la Afirmación 1 tenemos que $\varrho_1(\mathbf{A}) = \varrho_1(L)$, entonces $E(f_1, h_1) \neq \emptyset$. por lo que podemos definir $\varphi : E(f_1, h_1) \rightarrow G_k$, para cada $(r, s) \in E(f_1, h_1)$ como sigue:

$$\varphi((r, s)) = (f_2(r), f_1(r), h_2(s), \dots, h_{k+1}(s)).$$

Como f y \mathbf{h} son funciones continuas e inyectivas, tenemos que se cumplen las hipótesis del Corolario 3.1.2, por tanto φ es un encaje.

Veamos que $\mathbf{W} \subset \varphi(E(f_1, h_1))$. Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$, por definición de \mathbf{A} y L tenemos que $(z_2, \dots, z_{k+1}) \in \mathbf{A}$ y $(z_2, z_1) \in L$, como $f([0, 1]) = L$ y $\mathbf{h}([0, 1]) = \mathbf{A}$, existen puntos $r, s \in [0, 1]$, tales que $f(r) = (z_2, z_1)$ y $\mathbf{h}(s) = (z_2, \dots, z_{k+1})$, de donde $f_1(r) = z_2 = h_1(s)$, entonces el punto $(r, s) \in E(f_1, h_1)$, por tanto $\mathbf{z} \in \varphi(E(f_1, h_1))$, concluimos que $\mathbf{W} \subset \varphi(E(f_1, h_1))$. Por tanto se cumple (3).

Por tanto el teorema queda demostrado. \blacksquare

7.2. Puntos de ramificación del límite inverso, implican puntos de ramificación en M

En esta sección probaremos que dado un punto $\mathbf{x} \in \varprojlim M$ de la forma $(a, b, a, b, a, b, \dots)$, con $0 < a, b < 1$, entonces $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Comenzaremos con un par de onservaciones que nos ayudarán a la demostración de este resultado.

Observación 7.2.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$ y $f : [0, 1] \rightarrow M$ una función continua e inyectiva . Supongamos que existen puntos $a, b, r_0 \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que

$$(a) \quad M \subset ([0, a] \times [0, b]) \cup ([a, 1] \times [b, 1]) \text{ o } M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b]),$$

- (b) $f(r_0) = (a, b)$,
 (c) $f(0) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(1) \in [a, 1] \times [b, 1]$ o $f(1) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(0) \in [a, 1] \times [b, 1]$.

Entonces la función f_1 cumple alguna de las siguientes propiedades:

- (1) $f_1([0, r_0]) \subset [0, a]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [a, 1]$,
 (2) $f_1([0, r_0]) \subset [a, 1]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [0, a]$.

Demostración.

Vamos a probar la siguiente Afirmación.

Afirmación 1.

- (1.a) Si $f_1(0) \in [0, a]$, entonces $f([0, r_0]) \subset [0, a]$;
 (1.b) Si $f_1(1) \in [0, a]$, entonces $f([r_0, 1]) \subset [0, a]$;

Prueba.

Haremos la prueba del inciso (1.a), la prueba de (1.b) se hace de manera similar.

Supongamos por el contrario que existe un punto $t \in [0, r_0]$, tal que $f_1(t) > a$, como $f(0), f(r_0) \in [0, a]$ entonces $0 < t < r_0$.

Como $[0, t]$ es un conjunto conexo, la función f es continua, (a, b) es un punto de corte de M , $f(0) \in [0, a] \times [0, b]$, $f(t) \in [a, 1] \times [b, 1]$, entonces existe un punto $r \in [0, t]$, tal que $f(r) = (a, b)$.

Entonces $f(r) = (a, b) = f(r_0)$, como f es una función inyectiva $r = r_0$, lo cual es una contradicción pues $r < t < r_0$. \square

De la Afirmación 1, concluimos que la función f_1 cumple alguna de las propiedades (1)-(4). \blacksquare

Observación 7.2.2. Dados una dendrita $X \subset [0, 1]^2$ y un punto $(r_0, s_0) \in X$. Supongamos que existe un arco $A \subset X$ con un punto extremo (r_0, s_0) , tal que cualquier arco $A' \subset A$ con un punto extremo (r_0, s_0) satisface que, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $A' \not\subset M_i(r_0, s_0)$. Entonces se cumple alguna de las siguientes afirmaciones:

(1) Existe una sucesión de puntos $\{(r_n, s_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que $r_n \neq r_m$, si $n \neq m$ y el arco $B_n \subset A$ con puntos extremos $(r_n, s_0), (r_{n+1}, s_0)$ cumple que $\varrho_2(B_n) \cap [0, s_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_2(B_n) \cap (s_0, 1] \neq \emptyset$.

(2) Existe una sucesión de puntos $\{(r_0, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que $s_n \neq s_m$, si $n \neq m$ y el arco $C_n \subset A$ con puntos extremos $(r_0, s_n), (r_0, s_{n+1})$ cumple que $\varrho_1(C_n) \cap [0, r_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_1(C_n) \cap (r_0, 1] \neq \emptyset$.

Como se ilustra en la Figura 7.5

Demostración.

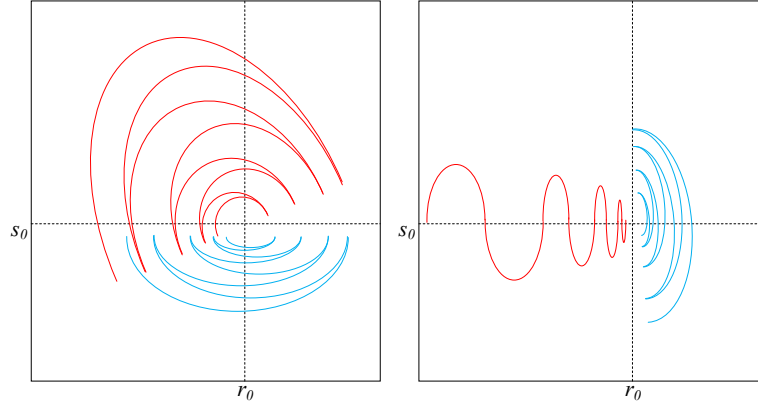


Figura 7.5:

Supongamos que (1) no se cumple, probaremos que se cumple (2).

Como (1) no se cumple, tenemos que para cada sucesión de puntos $\{(r_n, s_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, el arco $B_n \subset A$ con puntos extremos (r_n, s_0) , (r_{n+1}, s_0) cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varrho_2(B_n) \subset [0, s_0]$ o para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varrho_2(B_n) \subset [s_0, 1]$.

Definamos $D_0 \subset A$ el arco con punto extremos (r_1, s_0) y (r_0, s_0) . Por definición $D_0 \subset A$, y por hipótesis, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $D_0 \not\subset M_i(r_0, s_0)$, entonces existe un punto $(r_0, s_1) \in D_0$.

Definamos $D_1 \subset D_0$ el arco con punto extremos (r_0, s_1) y (r_0, s_0) . Por definición $D_1 \subset A$, y por hipótesis, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $D_1 \not\subset M_i(r_0, s_0)$, entonces existe un punto $(r_0, s_2) \in D_1 - \{(r_0, s_1)\}$, tal que el arco $C_1 \subset D_1$ con puntos extremos (r_0, s_1) y (r_0, s_2) cumple que $\varrho_1(C_1) \cap [0, r_0) \neq \emptyset$ y $\varrho_1(C_1) \cap (r_0, 1] \neq \emptyset$.

Siguiendo inductivamente con este proceso existe una sucesión de puntos $\{(r_0, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in A$, tales que los arcos $C_n \subset D_n \subset A$ con puntos extremos (r_0, s_n) , (r_0, s_{n+1}) cumplen que $\varrho_1(C_n) \cap [0, r_0) \neq \emptyset$ y $\varrho_1(C_n) \cap (r_0, 1] \neq \emptyset$.

De lo anterior el arco A cumple (2).

De manera similar, si suponemos que (2) no se cumple, obtenemos que se cumple (1). ■

La siguiente definición nos simplificara notación en los siguientes teore-

mas de esta sección.

Definición 7.2.3. Dado un punto $(r_0, s_0) \in E(f, h)$ y un arco $A \subset E(f, h)$ con un punto extremo (r_0, s_0) decimos que

- A es Tipo 1 si existe un arco $A' \subset A$, tal que $A' \subset E_1(r_0, s_0, f, h)$,
- A es Tipo 2 si existe un arco $A' \subset A$, tal que $A' \subset E_2(r_0, s_0, f, h)$,
- A es Tipo 3 si existe un arco $A' \subset A$, tal que $A' \subset E_3(r_0, s_0, f, h)$,
- A es Tipo 4 si existe un arco $A' \subset A$, tal que $A' \subset E_4(r_0, s_0, f, h)$,
- A es Tipo 5 si existe una sucesión de puntos $\{(r_n, s_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que $r_n < r_0$, $r_n \neq r_m$, si $n \neq m$ y el arco $B_n \subset A$ con puntos extremos (r_n, s_0) , (r_{n+1}, s_0) cumple que $\varrho_2(B_n) \cap [0, s_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_2(B_n) \cap (s_0, 1] \neq \emptyset$.
- A es Tipo 6 si existe una sucesión de puntos $\{(r_n, s_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que $r_n > r_0$, $r_n \neq r_m$, si $n \neq m$ y el arco $B_n \subset A$ con puntos extremos (r_n, s_0) , (r_{n+1}, s_0) cumple que $\varrho_2(B_n) \cap [0, s_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_2(B_n) \cap (s_0, 1] \neq \emptyset$.
- A es Tipo 7 si existe una sucesión de puntos $\{(r_0, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que, $s_n < s_0$, $s_n \neq s_m$, si $n \neq m$ y el arco $C_n \subset A$ con puntos extremos (r_0, s_n) , (r_0, s_{n+1}) cumple que $\varrho_1(C_n) \cap [0, r_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_1(C_n) \cap (r_0, 1] \neq \emptyset$.
- A es Tipo 8 si existe una sucesión de puntos $\{(r_0, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que, $s_n > s_0$, $s_n \neq s_m$, si $n \neq m$ y el arco $C_n \subset A$ con puntos extremos (r_0, s_n) , (r_0, s_{n+1}) cumple que $\varrho_1(C_n) \cap [0, r_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_1(C_n) \cap (r_0, 1] \neq \emptyset$.

Los tipos de arcos se ilustran en la Figura 7.6

Teorema 7.2.4. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tal que G_k es una dendrita y $f : [0, 1] \rightarrow M$, $h : [0, 1] \rightarrow G_{k-1}$ funciones continuas e inyectivas. Supongamos que:

(a) existen puntos $a, b \in [0, 1]$, tales que $M \subset ([0, a] \times [0, b]) \cup ([a, 1] \times [b, 1])$ o $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$,

(b) existe un punto $(r_0, s_0) \in E(f_1, h_1)$, tal que f satisface las hipótesis de la Observación 7.2.1.

Sea $A \subset E(f_1, h_1)$ un arco con un punto extremo (r_0, s_0) , entonces A no es del Tipo 5 o Tipo 6.

Demostración.

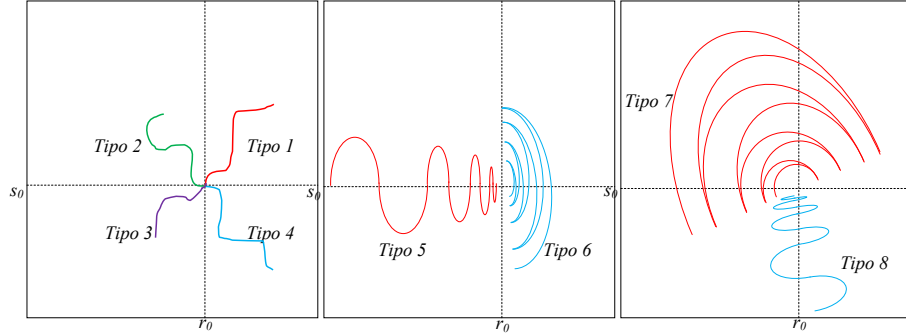


Figura 7.6:

Como $M \subset ([0, a] \times [0, b]) \cup ([a, 1] \times [b, 1])$, y $f_1(r_0) = (a, b)$, tenemos que se cumplen las hipótesis del Observación 7.2.1. Por tanto la función f_1 cumple alguna de las siguientes propiedades:

- (i) $f_1([0, r_0]) \subset [0, a]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [a, 1]$,
- (ii) $f_1([0, r_0]) \subset [a, 1]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [0, a]$.

Vamos a hacer la prueba para cuando la función f_1 cumple la propiedad (i), la prueba de cuando la función f_1 cumple la propiedad (ii) se hace de manera similar. (Figura 7.11)

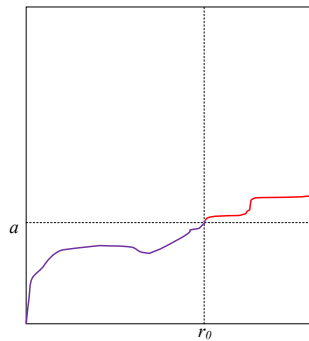


Figura 7.7: $f_1([0, 1])$

Supongamos por el contrario que A es del Tipo 5 o Tipo 6. Haremos la prueba para cuando A es del Tipo 5, la prueba para cuando A Tipo 6 se hace

de forma similar.

Como A es del Tipo 5 existe una sucesión de puntos $\{(r_n, s_0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tales que $r_n < r_0$, $r_n \neq r_m$, si $n \neq m$ y el arco B_n con puntos extremos (r_n, s_0) , (r_{n+1}, s_0) , cumple que $\varrho_2(B_n) \cap [0, s_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_2(B_n) \cap (s_0, 1] \neq \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n < r_{n+1} < r_0$. Como $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y acotada por r_0 , por [14, Theorem 3.14, p. 55], tenemos que $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en el compacto $[0, 1]$. Por tanto existe un punto $r \in [0, 1]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$.

Como f_1 es una función continua tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(r_n) = f_1(r)$ y como para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_1(r_n) = h_1(s_0) = f_1(r_0) = a$, entonces $f_1(r) = a$. Además por hipótesis $f([0, r_0]) \subset [0, a]$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $f([r_n, r_{n+1}]) \subset [0, a]$.

Definamos $C_n \subset B_n \cap E_2(f_1, h_1, r_0, s_0)$ el arco con un punto extremo (r_n, s_0) y $D_n \subset B_n \cap E_3(f_1, h_1, r_0, s_0)$ el arco con un punto extremo (r_{n+1}, s_0) . definamos también $u_n = \min(\varrho_2(D_n))$, $v_n = \max(\varrho_2(C_n))$. Como $\varrho_2(B_n) \cap [0, s_0] \neq \emptyset$ y $\varrho_2(B_n) \cap (s_0, 1] \neq \emptyset$, entonces $u_n < s_0 < v_n$. (Figura 7.10)

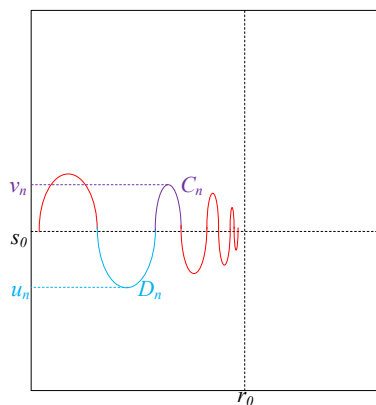


Figura 7.8:

Definamos $d_n = \min(h_1([u_n, s_0]))$ y $c_n = \min(h_1([s_0, v_n]))$. Veamos que $0 \leq c_n, d_n \leq a$.

Probaremos que $c_n \leq a$, de manera similar se prueba que $d_n \leq a$.

Dado $s \in [s_0, v_n]$, existe $r \in [0, r_0]$ tal que el punto $(r, s) \in C_n \subset B_n \subset E(f_1, h_1)$, entonces $f_1(r) = h_1(s)$, como $r \in [0, r_0]$ y por hipótesis $f_1([0, r_0]) \subset [0, a]$, entonces $h_1(s) \in [0, a]$. Por tanto $h_1([u_n, v_n]) \subset [0, a]$. Por tanto $0 \leq c_n \leq a$. De manera similar se prueba que $d_n \leq a$.

Analizaremos los siguientes casos:

Casos 1 Existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_N = a$ o $d_N = a$.

Probaremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1. Haremos la prueba para cuando $c_N = a$, la prueba para cuando $d_N = a$ se hace de manera similar. Por definición $c_N = \min(h_1([u_N, s_0]))$ y como $h_1([u_N, s_0]) \subset [0, b]$, entonces $h_1([u_N, s_0]) = \{a\}$. (Figura 7.11)

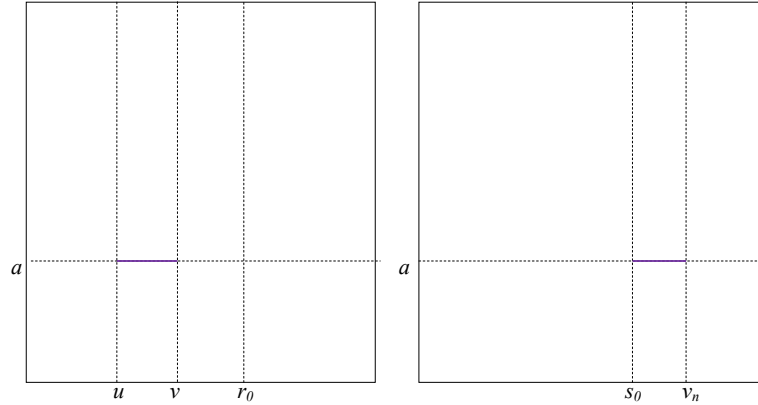


Figura 7.9:

Notemos que $\varrho_1(C_N)$ es no degenerado. Supogamos $\varrho_1(C_N) = [u, v]$, entonces $f_1([u, v]) = \{a\}$. Entonces $f_1([u, v]) = \{a\} = h_1([u_n, s_0])$, por lo que se satisfacen la hipótesis del Teorema 2.2.1, por tanto $E(f_1, h_1)$ contiene una dos celda, como φ es un encaje, entonces G_k contiene una dos celda, lo cual contradice que G_k es una dendrita.

Casos 2 Para todo $n \in \mathbb{N}$, $c_n, d_n < b$.

Probaremos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.7.

Como $f(r_n) \rightarrow b$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $f_1[r_n, r_{n+1}] \geq c_N, d_N$, para cada $n \geq N$. Sea $e_N = \min(f_1([r_N, r_{N+1}]))$.

Como $e_N = \min(f_1([r_N, r_{N+1}]))$ y $f_1(r_N) = b = f_1(r_{N+1})$ existe un punto $r \in (r_N, r_{N+1})$, tal que $f_1(r) = e_N$. (Figura 7.10)

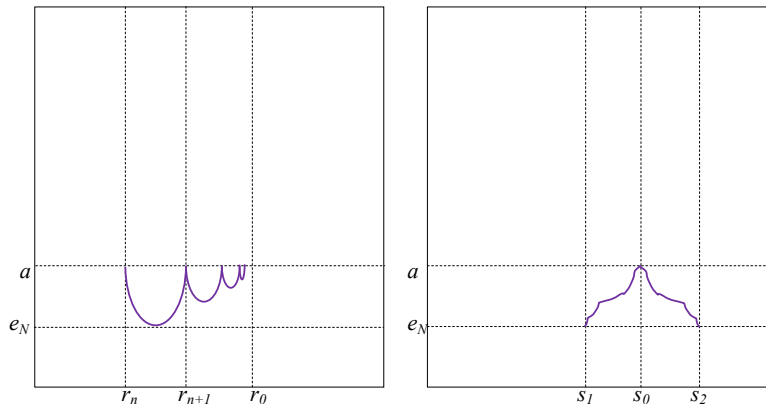


Figura 7.10:

Además como $f_1[r_N, r_{N+1}] \geq c_N, d_N$, entonces $e_N \geq c_N, d_N$, por lo que existen puntos $s_1, s_2 \in [0, 1]$, con $s_1 < s_0 < s_2$, tales que $h(s_1) = e_N = h(s_2)$ y $e_N = \min(h_1([s_1, s_2]))$, además $h_1(s_0) = a$.

De lo anterior se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.7, por tanto $E(f_1, h_1)$ contiene una curva cerrada simple, como φ es un encaje, entonces G_k contiene una curva cerrada simple, lo cual contradice que G_k es una dendrita.

En cualquier caso obtenemos una contradicción, la contradicción nace de suponer que A es del Tipo 5. De manera similar si A es del Tipo 6 obtenemos una contradicción.

Por tanto A no es del Tipo 5 y Tipo 6. ■

Teorema 7.2.5. Sean $M \subset [0, 1]^2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, tal que G_k es una dendrita y $f : [0, 1] \rightarrow M$, $h : [0, 1] \rightarrow G_{k-1}$ funciones continuas e inyectivas. Supongamos que:

(a) existen puntos $a, b \in [0, 1]$, $0 < a, b < 1$ tales que $M \subset ([0, a] \times [0, b]) \cup ([a, 1] \times [b, 1])$ o $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$

(b) la componente de $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ que contiene al punto (a, b) es degenerada

(c) existe un punto $(r_0, s_0) \in E(f_1, h_1)$, tal que f satisface las hipótesis de la Observación 7.2.1.

Entonces no existen dos arcos $A, B \subset E(f_1, h_1)$ con un punto extremo (r_0, s_0) del Tipo 7 o del Tipo 8.

Demostración.

Como $M \subset ([0, a] \times [0, b]) \cup ([a, 1] \times [b, 1])$, y $f_1(r_0) = (a, b)$, tenemos que se cumplen las hipótesis del Observación 7.2.1. Por tanto la función f_1 cumple alguna de las siguientes propiedades:

- (i) $f_1([0, r_0]) \subset [0, a]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [a, 1]$,
- (ii) $f_1([0, r_0]) \subset [a, 1]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [0, a]$.

Vamos a hacer la prueba para cuando la función f_1 cumple la propiedad (i), la prueba de cuando la función f_1 cumple la propiedad (ii) se hace de manera similar. (Figura 7.11)

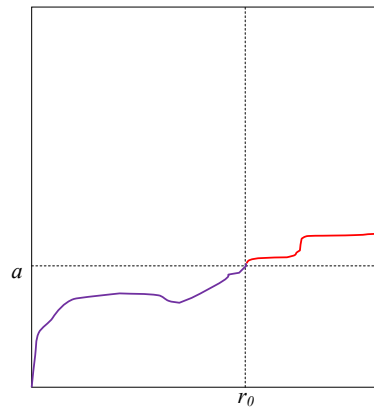


Figura 7.11: $f_1([0, 1])$

Supongamos por el contrario que existen dos arcos $A, B \subset E(f_1, h_1)$ con un punto extremo (r_0, s_0) del Tipo 7 o del Tipo 8.

Haremos la prueba para cuando los arcos A y B son del Tipo 7, la prueba para cuando los arcos A y B son del Tipo 8 se hace de manera similar.

Por definición de arco del tipo 7, tenemos que para $k \in \{1, 2\}$, $\varrho_k(A)$ y $\varrho_k(B)$ son no singulares.

Sea $s \in \varrho_2(A) \cap \varrho_2(B)$, tal que existen $r_a < r_0 < r_b$, $(r_a, s) \in A$ y $(r_b, s) \in B$.

Sean $A' \subset A$ y $B' \subset B$ los arcos con puntos extremos (r_a, s) , (r_0, s_0) y (r_b, s) , (r_0, s_0)

Como A' y B' son arcos existen funciones continuas e inyectivas $\alpha : [0, 1] \rightarrow A'$ y $\beta : [0, 1] \rightarrow B'$, tales que $\alpha(0) = (r_0, s_0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = (r_a, s)$, $\beta(1) = (r_b, s)$.

Definamos $t_a = \max\{t \in [0, 1] : \alpha_1(t) = r_0\}$ y $t_b = \max\{t \in [0, 1] : \beta_1(t) = r_0\}$. Supongamos sin perdida de generalidad que $\varrho_2(\alpha(t_a)) < \varrho_2(\beta(t_b))$.

(Figura 7.12)

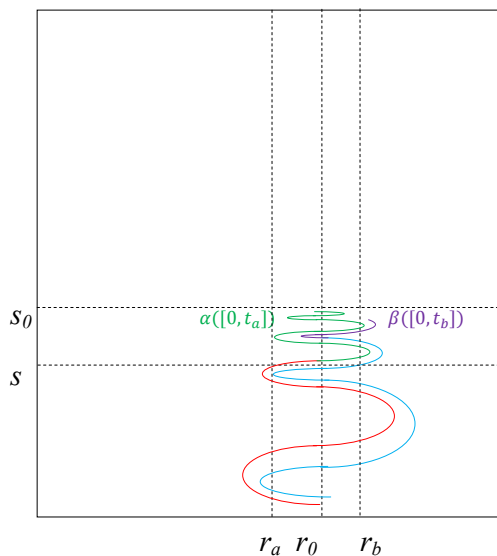


Figura 7.12: $f_1([0, 1])$

Analizaremos los siguientes subcasos.

Caso 1 $\varrho_2(\alpha([t_a, 1])) \neq \{s\}$

Notemos que para cada $t \in [t_a, 1]$, $\alpha_1(t) \leq r_0$, entonces $f_1(\alpha_1(t)) \leq a$ y para cada $t \in [t_b, 1]$, $\beta_1(t) \geq r_0$, entonces $f_1(\beta_1(t)) \geq a$.

Veamos que $f_1([r_a, r_0]) = \{a\}$.

Sea $r \in [r_a, r_0]$, si $r \in [r_a, r_0]$, existe un $t' \in [0, 1]$, tal que $(r, t') \in \alpha([t_a, 1])$, como $\varrho_2(\alpha(t_a)) < \varrho_2(\beta(t_b))$ existe un $r' \in [0, 1]$, tal que $(r', t') \in$

$\beta([t_b, 1])$, entonces $f_1(r) = h_1(t') = f_1(r')$, $f_1(r) \geq a \geq f_1(r')$, por tanto $f(r) = a$. Concluimos que $f_1([r_a, r_0]) = \{a\}$.

Veamos que $h_1([s, \alpha_2(t_a)]) = \{a\}$.

Sea $t \in [s, \alpha_2(t_a)]$, existe un punto $r \in [0, 1]$, tal que $(r, t) \in \alpha([t_a, 1])$, entonces $f_1(r) = h_1(t)$ como $f_1(r) = a$, entonces $h_1(t) = a$. Concluimos que $h_1([s, \alpha_2(t_a)]) = \{a\}$.

De lo anterior se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1, por tanto $E(f_1, h_1)$ contiene una dos celda. Como φ es un encaje G_k contiene una dos celda, lo cual contradice que G_k es una dendrita.

Caso 2 $\varrho_2(\alpha([t_l, 1])) = \{s\}$

Tenemos entonces que $[r_l, r_0] \times \{s\} \subset E(f_1, h_1)$ y que $f_1[r_l, r_0] = h_1(s) = f_1(r_0) = a$, entonces la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, b) es no degenerada, lo cual contradice nuestra hipótesis.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. La contradicción nace de suponer que los arcos A y B son del Tipo 7. De manera similar si A y B son del Tipo 8 obtenemos una contradicción.

Así el teorema queda demostrado. ■

A continuación probaremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.2.6. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Entonces $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$.

Como $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$, se cumplen las hipótesis del Teorema 7.1.15, por tanto la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, b) es degenerada o la componente de $\{b\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (b, a) es degenerada.

Vamos a hacer el caso en que la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, b) es degenerada, el caso en que la componente de $\{b\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (b, a) es degenerada se prueba de manera similar.

Notemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 7.1.17, por tanto existen $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, funciones continuas e inyectivas $f : [0, 1] \rightarrow M$ y $h : [0, 1] \rightarrow G_{k-1}$ y un conjunto abierto $W \subset G_k$,

con las siguientes propiedades:

- (1) $f(0) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(1) \in [a, 1] \times [b, 1]$ o $f(1) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(0) \in [a, 1] \times [b, 1]$,
- (2) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(G_k)$,
- (3) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathbb{W} \subset \varphi(E(f_1, h_1))$.

Donde $\varphi : E(f_1, h_1) \rightarrow G_k$, es el encaje definido en el Corolario 3.1.2.

Como φ es un encaje y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(G_k)$, existe un punto $(r_0, s_0) \in \mathcal{R}(E(f_1, h_1))$, tal que $\varphi(r_0, s_0) = \pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$.

Como $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$ se cumplen las hipótesis de Teorema 7.1.2 y Teorema 7.1.3, por tanto $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$ o $M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$. Continuaremos la prueba suponiendo que $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a])$, la prueba de cuando $M \subset ([0, a]^2) \cup ([a, 1]^2)$ se hace de manera similar.

Como $M \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, b]^2) \cup ([b, 1] \times [0, a]) \subset ([0, a] \times [b, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, b])$, $f(0) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(1) \in [a, 1] \times [b, 1]$ o $f(1) \in [0, a] \times [0, b]$ y $f(0) \in [a, 1] \times [b, 1]$ y $f_1(r_0) = (b, a)$, tenemos que se cumplen las hipótesis del Observación 7.2.1. Por tanto la función f_1 cumple alguna de las siguientes propiedades:

- (i) $f_1([0, r_0]) \subset [0, a]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [a, 1]$,
- (ii) $f_1([0, r_0]) \subset [a, 1]$ y $f_1([r_0, 1]) \subset [0, a]$.

Vamos a hacer la prueba para cuando la función f_1 cumple la propiedad (i), la prueba de cuando la función f_1 cumple la propiedad (ii) se hace de manera similar.

Como $(r_0, s_0) \in \mathcal{R}(E(f_1, h_1))$, existen arcos $A_1, A_2, A_3 \subset E(f_1, h_1)$, tales que para cada $i, j \in \{1, 2, 3\}$, (r_0, s_0) es punto extremo de A_i y si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \{(r_0, s_0)\}$.

Por el Teorema 7.2.4, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, A_i no es del Tipo 5 o Tipo 6.

Afirmación 1 No existen $i \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $j, l \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq l$, tales que los arcos A_j y A_l sean del Tipo i .

Prueba.

Supongamos por el contrario que existen $i \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ y $j, l \in \{1, 2, 3\}$, $j \neq l$, tales que los arcos A_j y A_l sean del Tipo i .

Vamos a analizar los siguientes casos:

Caso 1 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Como los arcos A_j y A_l son del Tipo i , se cumple $A_j, A_l \subset E_i(f_1, h_1, r_0, s_0)$. Además como A_j y A_l son arcos con un punto extremo (r_0, s_0) , tenemos que $A_j \cup A_l \subset E_i(f_1, h_1, r_0, s_0)$ es un arco, tal que el punto (r_0, s_0) no es punto extremo de $A_j \cup A_l$.

De lo anterior se satisfacen la hipótesis del Teorema 2.2.5. Por tanto $E(f_1, h_1)$ contiene una dos celda. Como φ es un encaje G_k contiene una dos celda, lo cual contradice que G_k es una dendrita.

Caso 2 $i \in \{7, 8\}$.

Este caso no se puede dar por el Teorema 7.2.5.

Por tanto la Afirmación 1 es cierta. \square

De las Afirmación 1 y el hecho de que para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, A_i no es del Tipo 5 o Tipo 6, tenemos que para cada $j, k \in \{1, 2, 3\}$, con $j \neq k$; existen $i, l \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $i \neq l$, tales que A_j es del Tipo i , A_k es del Tipo l .

Notemos que existen $j, k \in \{1, 2, 3\}$, tales que $\varrho_2(A_j), \varrho_2(A_k) \subset [0, s_0]$ o $\varrho_2(A_j), \varrho_2(A_k) \subset [s_0, 1]$ y $\varrho_1(A_j) \cap [0, r_0] \neq \emptyset$, $\varrho_1(A_k) \cap [r_0, 1] \neq \emptyset$.

Vamos a suponer sin pérdida de generalidad que $\varrho_2(A_j), \varrho_2(A_k) \subset [0, s_0]$. Vamos a analizar los siguientes casos.

Caso 1 A_j es del Tipo 3 y A_k es del Tipo 4.

Notemos que $\varrho_2(A_j) \neq \{s_0\} \neq \varrho_2(A_k)$, de lo contrario la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, b) es no degenerada, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Sea $s_k = \min(\varrho_2(A_j) \cap \varrho_2(A_k))$. (Figura 7.13)

Sea $B_j \subset A_j$ y $B_k \subset A_k$ arcos con un punto extremo (r_0, s_0) , tales que $\varrho_2(B_j) = [s_k, s_0] = \varrho_2(B_k)$.

Como $B_j \cap B_k = \{(r_0, s_0)\}$, tenemos que $\varrho_1(B_j) \neq \{r_0\}$ o $\varrho_1(B_k) \neq \{r_0\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\varrho_1(B_j) \neq \{r_0\}$.

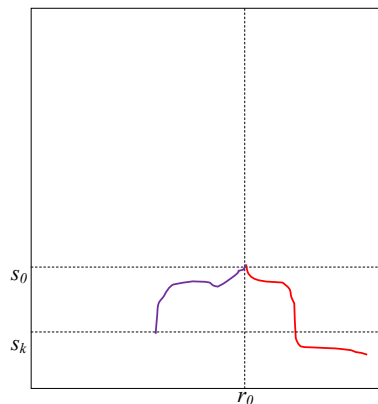
Veamos que $f_1(\varrho_1(B_j)) = \{a\}$.

Sea $r \in \varrho_1(B_j)$, entonces existe un punto $t' \in [0, 1]$, tal que $(r, t') \in B_j$, como $\varrho_2(B_j) = \varrho_2(B_k)$ existe un $r' \in [0, 1]$, tal que $(r', t') \in B_k$, entonces $f_1(r) = h_1(t') = f_1(r')$.

Como $f_1(r) \geq a \geq f_1(r')$, entonces $f_1(r) = a$. Concluimos que $f_1(\varrho_1(B_j)) = \{a\}$.

Veamos que $h_1(\varrho_2(B_j)) = \{a\}$.

Sea $t \in \varrho_2(B_j)$, existe un punto $r \in [0, 1]$, tal que $(r, t) \in B_j$, entonces $f_1(r) = h_1(t)$, como $f_1(r) = a$, entonces $h_1(t) = a$. Concluimos que

Figura 7.13: $f_1([0, 1])$

$$h_1(\varrho_2(B_j)) = \{a\}.$$

De lo anterior se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1, por tanto $E(f_1, h_1)$ contiene una dos celda. Como φ es un encaje G_k contiene una dos celda, lo cual contradice que G_k es una dendrita.

Caso 2 A_j es del Tipo 3 y A_k es del Tipo 7.

Notemos que $\varrho_2(A_j) \neq \{s_0\}$, de lo contrario la componente de $\{a\} \times [0, 1]$ que contiene al punto (a, b) es no degenerada, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Sea $B_k \subset A_k$ un arco tal que $\varrho_2(B_k) \subset \varrho_2(A_l)$

Sea $(r_k, s) \in B_k$ tal que $r_k > r_0$ y (r_k, s) no es punto extremo de B_k .

Como B_k es un arco existe una función continua e inyectiva $\beta : [0, 1] \rightarrow A_k$, tal que $\beta(0) = (r_0, s_0)$ y $\beta(\frac{1}{2}) = (r_k, s)$.

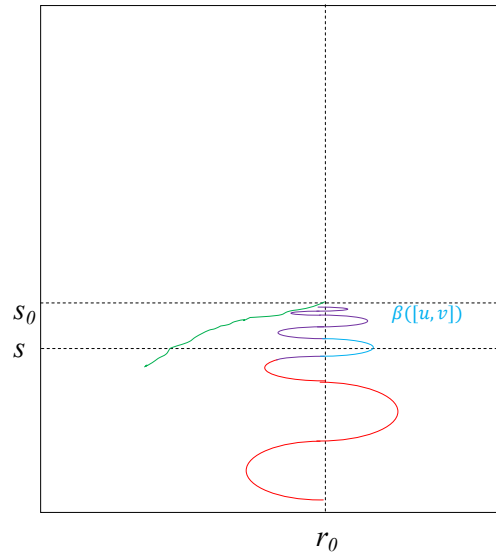
Definamos $u = \max\{t \in [0, \frac{1}{2}] : \beta_1(t) = r_0\}$ y $v = \min\{t \in [\frac{1}{2}, 1] : \beta_1(t) = r_0\}$. (Figura 7.14)

Veamos que $f_1(\beta_1([u, v])) = \{a\}$.

Sea $r \in \beta_1([u, v])$, entonces existe un punto $t' \in [0, 1]$, tal que $(r, t') \in \beta([u, v])$, como $\beta_2([u, v]) \subset \varrho_2(B_k) \subset \varrho_2(A_l)$ existe un $r' \in [0, 1]$, tal que $(r', t') \in B_l$, entonces $f_1(r) = h_1(t') = f_1(r')$.

Como $f_1(r) \geq a \geq f_1(r')$, entonces $f_1(r) = b$. Concluimos que $f_1(\beta_1([u, v])) = \{a\}$.

Veamos que $h_1(\beta_2([u, v])) = \{a\}$.

Figura 7.14: $f_1([0, 1])$

Sea $t \in \beta_2([u, v])$, existe un punto $r \in [0, 1]$, tal que $(r, t) \in \beta([u, v])$, entonces $f_1(r) = h_1(t)$ como $f_1(r) = a$, entonces $h_1(t) = a$. Concluimos que $h_1(\beta_2([u, v])) = \{a\}$.

De lo anterior se cumplen las hipótesis del Teorema 2.2.1, por tanto $E(f_1, h_1)$ contiene una dos celda. Como φ es un encaje G_k contiene una dos celda, lo cual contradice que G_k es una dendrita.

Caso 3 A_j es del Tipo 4 y A_k es del Tipo 7.

La prueba se hace de manera similar al Caso 2.

En cualquier caso obtenemos una contradicción concluimos entonces que no existe un triodo simple con vértice (r_0, s_0) , lo cual contradice que (r_0, s_0) es punto de ramificación de $E(f_1, h_1)$.

La contradicción nace se suponer que $(a, b), (b, a) \notin \mathcal{R}(M)$. Por tanto $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$, así el teorema queda demostrado. ■

Corolario 7.2.7. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con

$|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Entonces $(a, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Demostración.

Caso particular del Teorema 7.2.6, cuando $a = b$. ■

Corolario 7.2.8. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \varprojlim M$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$ tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, \dots)$. Entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, si y sólo si $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Demostración.

Si $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, por el Teorema 7.2.8, tenemos que $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Si $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$, supongamos sin pérdida de generalidad que $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$, por el Corolario triodofinitoM, tenemos que existe $\mathbf{y} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tal que $\pi_2, 1(\mathbf{y}) = (a, b)$, entonces $\mathbf{y} = (b, a, b, a, b, a)$. Por la Observación 6.0.6 $\sigma(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$. ■

Corolario 7.2.9. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \varprojlim M$ y $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Entonces $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ si y sólo si $(a, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Demostración.

Caso particular del Corolario 7.2.8, cuando $a = b$. ■

7.3. Puntos de ramificación del límite inverso, implican puntos de orden al menos dos en M

En esta sección probaremos que dado un punto $\mathbf{x} \in \varprojlim M$ de la forma $(a, b, a, b, a, b, \dots)$, con $a \in [0, 1]$ y $b \in \{0, 1\}$, entonces (a, b) o (b, a) tienen orden al menos dos.

Este resultado está dividido en varios teoremas dependiendo de si $a = b$, $a \neq b$ o $0 < a < 1$.

Teorema 7.3.1. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in \{0, 1\}$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Entonces (a, a) tiene orden al menos dos.

Demostración.

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1 $a = 0$.

Definamos $\beta : M \rightarrow [\frac{1}{4}, 1]^2$, para cada $(r, s) \in M$ como sigue $\beta(r, s) = (\frac{3}{4}r + \frac{1}{2}, \frac{3}{4}r + \frac{1}{2})$, tenemos que β es una función continua y biyectiva, por tanto un homeomorfismo.

Definamos $M' = \{(t, t) \in [0, \frac{1}{4}]^2 : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cup \beta(M)$. (Figura 7.15)

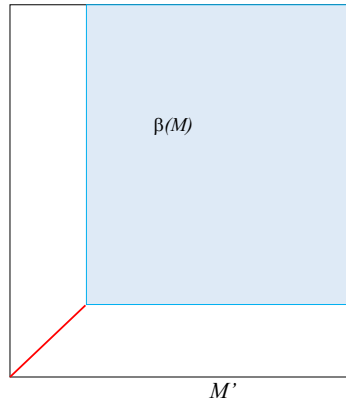


Figura 7.15: M'

Como M es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$ y β es un homeomorfismo $\beta(M)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, además $\{(t, t) \in [0, \frac{1}{4}]^2 : t \in [0, \frac{1}{4}]\}$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, por tanto M' es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$.

Afirmación 1 $\varprojlim M'$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M')| < \infty$.

Prueba.

Definamos $\mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in \varprojlim M' : y_1 = y_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}, y_1 \in [0, \frac{1}{4}]\}$. Notemos que $\mathbf{A} \subset \varprojlim M'$ es un arco con puntos extremos $(0, 0, \dots)$ y $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$.

Veamos que

$$\varprojlim M' = \mathbf{A} \cup \varprojlim \beta(M).$$

Como $\mathbf{A} \subset \varprojlim M'$ y $\beta(M) \subset \varprojlim M'$, tenemos que $\mathbf{A} \cup \varprojlim \beta(M) \subset \varprojlim M'$.

Veamos ahora la otra contención. Sea $\mathbf{z} \in \varprojlim M'$, por definición para cada $i \in \mathbb{N}$, $(z_{i+1}, z_i) \in M'$. Como $M' = \{(t, t) \in [0, \frac{1}{4}]^2 : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cup \beta(M)$ y $\{(t, t) \in [0, \frac{1}{4}]^2 : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cap \beta(M) = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, $(z_{i+1}, z_i) \in \{(t, t) \in [0, \frac{1}{4}]^2 : t \in [0, \frac{1}{4}]\}$ o para cada $i \in \mathbb{N}$, $(z_{i+1}, z_i) \in \beta(M)$, por tanto $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$ o $\mathbf{z} \in \varprojlim \beta(M)$.

Por tanto $\varprojlim M' = \mathbf{A} \cup \varprojlim \beta(M)$.

Como $\mathbf{A} \cap \varprojlim \beta(M) = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots)\}$, \mathbf{A} es un arco y $\varprojlim \beta(M)$ es homeomorfo a $\varprojlim M$ (una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$), concluimos que $\varprojlim M'$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M')| < \infty$. \square

Como $(0, 0, \dots) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, y $\beta((0, 0)) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, entonces $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \dots) \in \mathcal{R}(\varprojlim M')$.

Por el Teorema 7.2.7, tenemos que el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in \mathcal{R}(M')$. Como $M' = \{(t, t) \in [0, \frac{1}{4}]^2 : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cup \beta(M)$, tenemos que el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ tiene orden al menos dos en $\beta(M)$, como β es un homeomorfismo y $\beta((0, 0)) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ concluimos que $(0, 0)$ tiene orden al menos dos en M .

Así el caso 1 queda probado.

Caso 2 $a = 1$.

La prueba de este caso se hace de manera similar a la prueba del Caso 1, definiendo $\beta : M \rightarrow [0, \frac{3}{4}]^2$, para cada $(r, s) \in M$ como $\beta(r, s) = (\frac{3}{4}r, \frac{3}{4}s)$, y $M' = \{(t, t) \in [\frac{3}{4}, 1]^2 : t \in [\frac{3}{4}, 1]\} \cup \beta(M)$. (Figura 7.16)

De los Casos 1 y 2 concluimos que (a, a) tiene orden al menos dos, así el teorema queda demostrado. \blacksquare

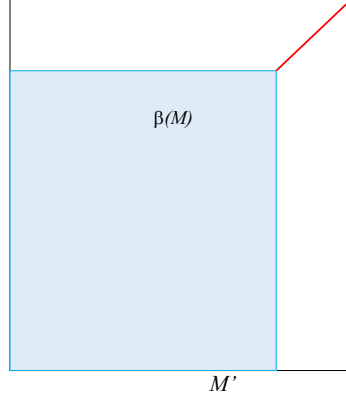
Teorema 7.3.2. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in \{0, 1\}$, $a \neq b$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, \dots)$. Entonces (a, b) o (b, a) tienen orden al menos dos.

Demostración.

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1 $a = 0$ y $b = 1$.

Definamos $\beta : M \rightarrow [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^2$, para cada $(r, s) \in M$ como sigue $\beta(r, s) = (\frac{1}{2}r + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}s + \frac{1}{4})$, tenemos que β es una función continua y biyectiva, por tanto un homeomorfismo.

Figura 7.16: M'

Definamos $M' = \{(t, 1-t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1] : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cup \{(t, 1-t) \in [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}] : t \in [\frac{3}{4}, 1]\} \cup \beta(M)$. (Figura 7.17)

Como M es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$ y β es un homeomorfismo $\beta(M)$ es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, además $\{(t, 1-t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1] : t \in [0, \frac{1}{4}]\}$ y $\{(t, 1-t) \in [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}] : t \in [\frac{3}{4}, 1]\}$ son subconjuntos cerrados de $[0, 1]^2$, tenemos que M' es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$.

Afirmación 1 $\varprojlim M'$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M')| < \infty$.

Prueba

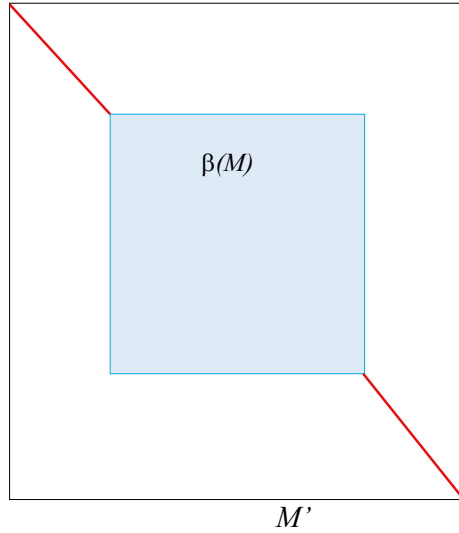
Definamos $\mathbf{A} = \{\mathbf{y} \in \varprojlim M' : y_1 \in [0, \frac{1}{4}]\}$ y $\mathbf{B} = \{\mathbf{y} \in \varprojlim M' : y_1 \in [\frac{3}{4}, 1]\}$. Notemos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \varprojlim M'$ son arcos con puntos extremos $(0, 1, 0, 1, \dots)$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots)$ y $(1, 1, 0, 1, \dots)$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$ respectivamente.

Veamos que

$$\varprojlim M' = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \varprojlim \beta(M).$$

Como $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \varprojlim M'$ y $\beta(M) \subset \varprojlim M'$, tenemos que $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \varprojlim \beta(M) \subset \varprojlim M'$.

Veamos ahora la otra contención. Sea $\mathbf{z} \in \varprojlim M'$, por definición para cada $i \in \mathbb{N}$, $(z_{i+1}, z_i) \in M'$. Como $M' = \{(t, 1-t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1] : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cup \{(t, 1-t) \in [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}] : t \in [\frac{3}{4}, 1]\} \cup \beta(M)$. y $\{(t, 1-t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1] : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cap \beta(M) = \{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})\}$, $\{(t, 1-t) \in [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}] : t \in$

Figura 7.17: $f_1([0, 1])$

$$[\frac{3}{4}, 1] \cap \beta(M) = \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})\}, \{(t, 1-t) \in [0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1] : t \in [0, \frac{1}{4}]\} \cap \{(t, 1-t) \in [\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}] : t \in [\frac{3}{4}, 1]\} = \emptyset.$$

Por tanto $\mathbf{z} \in \mathbf{A}$ o $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$ o $\mathbf{z} \in \varprojlim \beta(M)$

Por tanto $\varprojlim M' = \mathbf{A} \cup \varprojlim \beta(M) \cup \mathbf{B}$.

Como $\mathbf{A} \cap \varprojlim \beta(M) = \{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots)\}$, $\mathbf{B} \cap \varprojlim \beta(M) = \{(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots)\}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, \mathbf{A}, \mathbf{B} son una arcos y $\varprojlim \beta(M)$ es homeomorfo a $\varprojlim M$ (una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$), concluimos que $\varprojlim M'$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M')| < \infty$. \square

Como $(0, 1, 0, 1, \dots) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, y $\beta((0, 1)) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, entonces $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \dots) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$

Por el Teorema 7.2.6, tenemos que el punto $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \in \mathcal{R}(M')$ o $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \in \mathcal{R}(M')$. Entonces el punto $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ tiene orden al menos dos en $\beta(M)$ o el punto $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ tiene orden al menos dos en $\beta(M)$; como β es un homeomorfismo y $\beta((0, 1)) = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $\beta((1, 0)) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ concluimos que el punto $(0, 1)$ o el punto $(1, 0)$ tienen orden al menos dos en M .

Así el caso 1 queda probado.

Caso 2 $a = 1$ y $b = 0$.

Como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, por la Observación 6.0.6 $\sigma(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, como $\sigma(\mathbf{x})$ es de la forma (b, a, b, a, b, \dots) y $b = 0$, $a = 1$, concluimos del caso 1 que $(0, 1)$ o $(1, 0)$ tienen orden al menos dos.

De los Casos 1 y 2 concluimos que $(0, 1)$ o $(1, 0)$ tienen orden al menos dos, así el teorema queda demostrado. \blacksquare

Teorema 7.3.3. Sea $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que existen puntos $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$, $0 < a < 1$, $b \in \{0, 1\}$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, \dots)$. Entonces (a, b) o (b, a) tienen orden al menos dos.

Demostración.

Consideremos los siguientes casos:

Caso 1 $b = 0$.

Como los puntos $(0, a), (a, 0) \in M$, tenemos que existe un único arco $L \subset M$ con puntos extremos $(0, a)$ y $(a, 0)$, como los puntos $(0, a), (a, 0) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, entonces se satisfacen la hipótesis del Corolario 6.1.6, por tanto $L \subset [0, a]^2$.

Además como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$ existen puntos $c, d \in [0, 1]$ tales que $(c, 1), (1, d) \in M$. Por el Teorema 7.1.1, tenemos que $M \subset ([0, a] \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times [0, a])$, entonces $c, d \in [0, a]$.

Como los puntos $(0, a), (c, 1), (a, 0), (d, 1) \in M$, tenemos que existen arcos únicos $J, K \subset M$ con puntos extremos $(0, a), (c, 1)$ y $(a, 0), (d, 1)$, como los puntos $(0, a), (a, 0) \in \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M))$, $(c, 1) \in M_1(0, a)$ y $(1, d) \in M_1(a, 0)$, entonces se satisfacen la hipótesis del Teorema 6.1.9, por tanto $J \subset M_1(0, a) = ([0, 1] \times [a, 1]) \cap M$ y $K \subset M_1(a, 0) = ([a, 1] \times [0, 1]) \cap M$.

Afirmación 1

(1.a) $L \cap J = \{(0, a)\}$,

(1.b) $L \cap K = \{(a, 0)\}$.

Haremos la prueba de (1.a), la prueba de (1.b) se hace de manera similar.

Como $(0, a)$ es un punto extremo de los arcos L y J , tenemos que $\{(0, a)\} \subset L \cap J$.

Para la otra contención, supongamos que existe un punto $(r, s) \in L \cap J$, tal que $(r, s) \neq (0, a)$.

Sean $L' \subset L - \{(0, a)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y $(c, 1)$ y $J' \subset J - \{(0, a)\}$ el arco con puntos extremos (r, s) y $(0, a)$. Entonces $L' \cup J'$ contiene un arco A con puntos extremos $(c, 1)$ y $(a, 0)$. Como $0 < a < 1$, tenemos de la Observación 6.1.4 que $a \in \text{Int}(\varrho_2(A))$, entonces se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.3, por tanto el punto $(0, a) \in A$, lo cual contradice que $A \subset L' \cup J' \subset (L \cup J) - \{(0, a)\}$.

La contradicción nace de suponer existe un punto $(r, s) \in L \cap J$, tal que $(r, s) \neq (0, a)$. Por tanto $L \cap J = \{(0, a)\}$.

De la Afirmación 1 concluimos $L \cup J$ y $J \cup K$ son arcos y que los puntos $(0, a)$ y $(a, 0)$ no son puntos extremos de los arcos $L \cup J$ y $J \cup K$, respectivamente.

Por tanto $(a, 0)$ y $(0, a)$ tienen orden al menos dos.

Caso 2 $b = 1$.

La prueba se hace de manera similar al prueba del Caso 1.

De los Casos 1 y 2 concluimos que (a, b) y (b, a) tienen orden al menos dos, así el teorema queda demostrado. ■

Capítulo 8

Dendritas con un número finito de puntos de ramificación que son límites inversos de subconjuntos cerrados del cuadrado unitario

Recordemos que M denota un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$. En este capítulo probaremos $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$ si y sólo si existe un arco en $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{A}$ y cada punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ cumple que $ord(\mathbf{x}) = \infty$.

Los siguientes lemas los estaremos utilizando en lo que resta del capítulo, para probar algunos resultados.

Lema 8.0.4. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Entonces cada arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con un punto extremo \mathbf{x} , cumple que $\pi_1(\mathbf{A}) \subset [0, a]$ o $\pi_1(\mathbf{A}) \subset [a, 1]$.

Demostración.

Si $a = 0$ o $a = 1$, el resultado es inmediato.

Supongamos que $0 < a < 1$ y que por el contrario que existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con un punto extremo \mathbf{x} , tal que $\pi_1(\mathbf{A}) \cap [0, a] \neq \emptyset$ y $\pi_1(\mathbf{A}) \cap [a, 1] \neq \emptyset$,

entonces existen puntos $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{A}$, tales que $y_1 < a < z_1$. Sea $\mathbf{B} \subset (\mathbf{A} - \{\mathbf{x}\})$ el arco con puntos extremos \mathbf{y} y \mathbf{z} . Notemos que $a \in \text{Int}(\pi_1(\mathbf{B}))$.

Como $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ por el Teorema 7.2.6, $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ o $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$. Por lo que analizaremos los siguientes casos.

Caso 1 $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$.

Como $a \in \text{Int}(\pi_1(\mathbf{B}))$ y $(a, b) \in \mathcal{R}(M)$ existe un triodo simple $T \subset M$ con vértice (a, b) , tal que $\varrho_1(T) \subset \pi_1(\mathbf{B})$.

Por el Teorema 1.1.1, existe un arco $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ tal que $\pi_1(\mathbf{B}') = \pi_{nk_i+1}(T)$.

Notemos que el arco \mathbf{B}' y el triodo T satisfacen las hipótesis del Corolario 7.2, por tanto existe un triodo simple $\mathbf{T}' \subset \varprojlim M$, con vértice \mathbf{w} , que cumple las siguientes propiedades:

- (i) $\sigma(\mathbf{T}') \subset \mathbf{B}'$,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{T}') \subset T$ y
- (iii) $\pi_{2,1}(\mathbf{w}) = (a, b)$.

Por (iii), tenemos que $\pi_1(\mathbf{w}) = a = \pi_1(\mathbf{x})$, por tanto por el Teorema 6.2.2, tenemos que $\mathbf{w} = \sigma(\mathbf{x})$.

Por (i) $\sigma(\mathbf{w}) \in \mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$, entonces $\sigma(\sigma(\mathbf{x})) \in \mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$, como $\sigma(\sigma(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ lo cual contradice que $\mathbf{B} \subset (\mathbf{A} - \{\mathbf{x}\})$.

Caso 2 $(b, a) \in \mathcal{R}(M)$.

Notemos que existe $J \subset M$ tal que $\varrho_1(J) = \pi_1(\mathbf{B})$ y $b \in \text{Int}(\varrho_2(J))$. Por el Teorema 4.4.2, existe un arco $\mathbf{C} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iv) $\sigma(\mathbf{C}) \subset \mathbf{B}$,
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}) = J$.

Entonces $b \in \text{Int}(\pi_1(\mathbf{C}))$, continuando de manera similar al Caso 1 obtenemos que $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$ lo cual contradice que $\mathbf{B} \subset (\mathbf{A} - \{\mathbf{x}\})$.

En cualquier caso obtenemos una contradicción. Por tanto cada arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con un punto extremo \mathbf{x} , cumple que $\pi_1(\mathbf{A}) \subset [0, a]$ o $\pi_1(\mathbf{A}) \subset [a, 1]$. ■

Lema 8.0.5. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que $L \subset M$ es un arco con puntos extremos (a, b) y (c, d) , tal que $L \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(a, b)\}$; entonces existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (1) \mathbf{A} tiene puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y} = (c, d, y_3, y_4, \dots)$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$,

$$(3) \mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\underline{\lim} M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}.$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $c < a$. Sea $\mathbf{y} \in \underline{\lim} M$, tal que $\pi_1(\mathbf{z}) = 0$, consideremos $\mathbf{B} \subset \underline{\lim} M$ el arco con punto extremos \mathbf{x} y \mathbf{z} . Por el Lema 8.0.4 tenemos que $\pi_1(\mathbf{B}) \subset [0, a]$ o $\pi_1(\mathbf{B}) \subset [a, 1]$, como $0, a \in \pi_1(\mathbf{B})$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}) = [0, a]$.

Por el Teorema 1.1.3, existe un arco $\mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ con un extremo \mathbf{x} , tal que $\pi_1(\mathbf{B}') = \varrho_1(J)$ y por el Teorema 4.4.2, existe un arco $\mathbf{A}' \subset \underline{\lim} M$ con las siguientes propiedades:

(i) \mathbf{A}' tiene un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$

(ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}') = L$.

Sea $\mathbf{y} \in \mathbf{A}'$ con las siguientes propiedades

(iii) $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) = (c, d)$

(iv) para cada punto \mathbf{w} en el arco \mathbf{A} con puntos extremos \mathbf{x} y \mathbf{y} , $\pi_{2,1}(\mathbf{w}) \neq (c, d)$.

De la elección de del arco \mathbf{A} se cumplen las propiedades (1) y (2). La propiedad (3) se sigue de que $L \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\underline{\lim} M)) = \{(a, b)\}$. ■

Lema 8.0.6. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\underline{\lim} M$ es una dendrita y $|\mathcal{R}(\underline{\lim} M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\underline{\lim} M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Dados arcos

(a) $L, K \subset M$ con un punto extremo (a, b) , tales que $L \cap K = \{(a, b)\}$,

(b) $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \underline{\lim} M$ con un punto extremo \mathbf{x} , tales que $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathcal{R}(\underline{\lim} M) = \{\mathbf{x}\}$.

Si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\pi_{n+1,n}(\mathbf{A}) = L$, $\pi_{n+1,n}(\mathbf{B}) = K$ $\pi_{n+1,n}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\} \neq \pi_{n+1,n}(\mathbf{B})$; entonces $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x}\}$.

Demostración.

Supongamos por el contrario que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \{\mathbf{x}\}$. Veremos que se cumplen la hipótesis del Corolario 1.1.6 para obtener una contradicción.

Por hipótesis tenemos que \mathbf{A} y \mathbf{B} tienen un punto extremo \mathbf{x} , y estamos suponiendo que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \{\mathbf{x}\}$.

Nos falta ver que se cumple $\mathbf{A} \subsetneq \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$.

Por hipótesis $\pi_{n+1,n}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\} \neq \pi_{n+1,n}(\mathbf{B})$, entonces existen puntos $\mathbf{y} \in \mathbf{A}$ y $\mathbf{z} \in \mathbf{B}$ tales que $\pi_{n+1,n}(\mathbf{y}) \neq (a, b) \neq \pi_{n+1,n}(\mathbf{z})$.

Probaremos que $\mathbf{y} \notin \mathbf{B}$ y $\mathbf{z} \notin \mathbf{A}$. Como $\pi_{n+1,n}(\mathbf{y}) \neq (a, b)$, $\pi_{n+1,n}(\mathbf{B}) = K$ y $L \cap K = \{(a, b)\}$, entonces $\pi_{n+1,n}(\mathbf{y}) \notin \pi_{n+1,n}(\mathbf{B})$, por tanto $\mathbf{y} \notin \mathbf{B}$ de manera similar $\mathbf{z} \notin \mathbf{A}$.

Hemos probado que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1.6, por tanto $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ contiene un triodo simple o una curva cerrada simple.

Como $\varprojlim M$ es una dendrita, se cumple que $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ contiene un triodo simple, entonces existe $\mathbf{w} \in \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{x}$, punto de ramificación, lo cual contradice que $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$.

La contradicción nace de suponer que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \{\mathbf{x}\}$. Por tanto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x}\}$ y el lema queda probado. ■

8.1. Orden de los puntos de ramificación del límite inverso

En esta sección probaremos que si M es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, entonces cada punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ cumple que $ord(\mathbf{x}) = \infty$.

Teorema 8.1.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $[(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{b\})] \cap M$ y del punto (b, a) en $[(\{b\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{a\})] \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existen $i \in \{1, 3\}$ y arcos

(a) $L \subset M_i(a, b)$ con extremos (a, b) y (c, d) , tal que $L \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(a, b)\}$,

(b) $J \subset M_j(b, a)$ con un extremo (b, a) , tal que $J \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(b, a)\}$ y con $j = i - 1$,

(c) $K \subset M_k(a, b)$ con un extremo (a, b) , tal que $K \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(a, b)\}$, $K \cap L = \{(a, b)\}$ y con $k \in \{i - 2(\text{mod } 4), i + 1(\text{mod } 4)\}$ (Figura 8.1),

(d) $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ y (d, c, y_3, y_4, \dots) , tal que $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$ y $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Entonces existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

(1) \mathbf{B} tiene puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ e \mathbf{y} , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y})$,

(2) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) \subset K$,

(3) $\sigma^2(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$,

(4) $\mathbf{B} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$,

(5) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Demostración.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 201

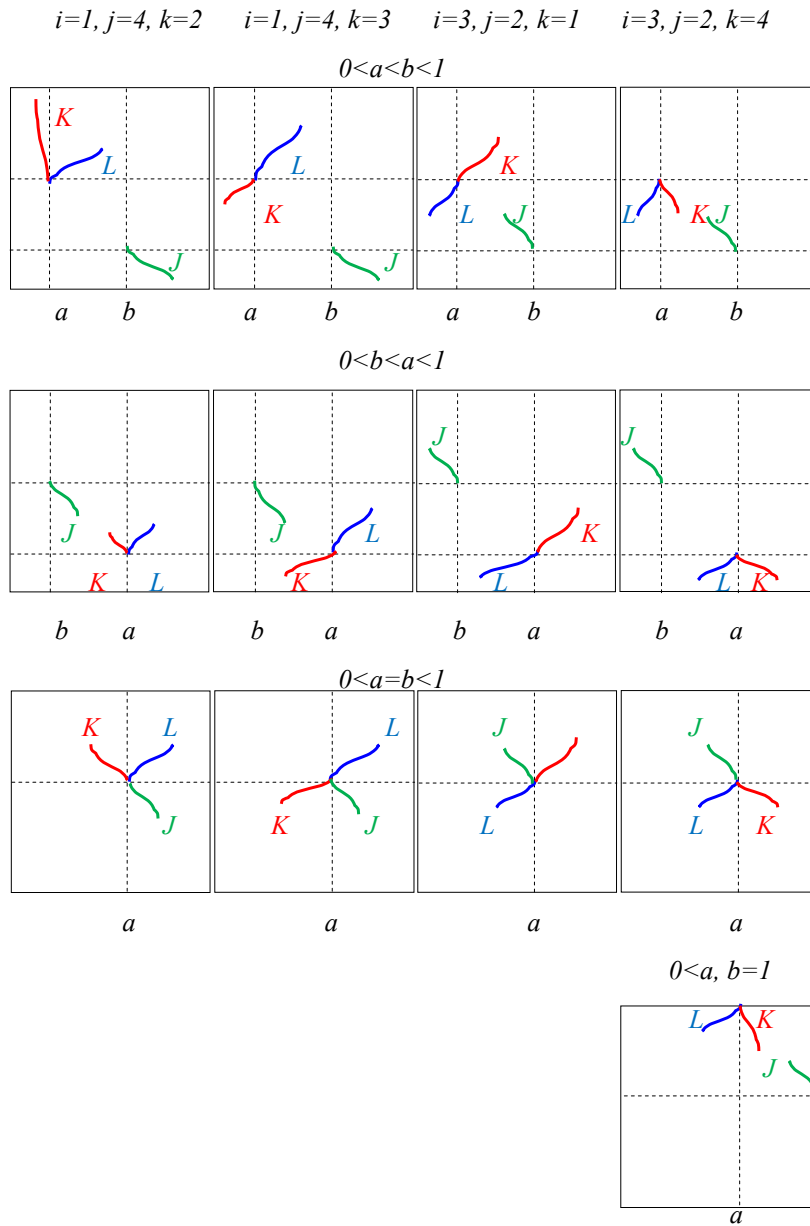


Figura 8.1:

Haremos la prueba para el caso en que $a < b$, $i = 1$, $j = i - 1 \pmod{4} = 4 \pmod{4}$, $k = i + 1 \pmod{4} = 2 \pmod{4}$ la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

Notemos que $b < 1$, pues el arco $L \subset M_1(a, b)$ y la componente del punto (a, b) en $[(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{b\})] \cap M$ es degenerada.

Afirmación 1 $\varrho_2(L) \cap \varrho_1(J)$ es no degenerada.

Prueba.

Por hipótesis la componente del punto (a, b) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ son degeneradas, entonces $L \subsetneq ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y $J \subsetneq (\{b\} \times [0, 1]) \cap M$, por lo que $\varrho_2(L) \neq \{b\} \neq \varrho_1(J)$.

Además como $L \subset M_1(a, b) = ([a, 1] \times [b, 1]) \cap M$, entonces $\varrho_2(L) \subset [b, 1]$ y como $J \subset M_4(b, a) = ([b, 1] \times [0, a]) \cap M$, entonces $\varrho_1(J) \subset [b, 1]$.

Por tanto $\varrho_2(L) \cap \varrho_1(J)$ es no degenerada. \square

Sea $c \in (b, 1]$, tal que $\varrho_2(L) \cap \varrho_1(J) = [b, c]$. Como $[b, c] \subset \varrho_1(J) \subset [b, 1]$, por el Teorema 1.1.3 existe $J' \subset J$ un arco con puntos extremos (b, a) y (c, e) , tal que $\varrho_1(J') = [b, c]$.

Además por hipótesis $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\varrho_2(L) = \pi_1(\mathbf{A})$, de donde $[b, c] \subset \pi_1(\mathbf{A}) \subset [b, 1]$, entonces por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$ con puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ y $\mathbf{w} = (c, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{A}') = [b, c]$.

Notemos que los arcos J' y \mathbf{A}' cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2,(4), por tanto existe un arco $\mathbf{C} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{C} tiene puntos extremos $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y (e, \mathbf{w}) ,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}) = J'$,
- (iii) $\sigma(\mathbf{C}) = \mathbf{A}'$.

Afirmación 2 $\varrho_1(K) \cap \pi_1(\mathbf{C})$ es no degenerada.

Prueba.

Por hipótesis la componente del punto (b, a) en $([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada, por lo que $J' \subsetneq [0, 1] \times \{a\}$, entonces $\varrho_2(J') \neq \{a\}$, y por (ii) obtenemos que $\pi_{2,1}(\mathbf{C}) = J'$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}) = \varrho_2(J') \subset [0, a]$ es no degenerada.

Además por hipótesis la componente del punto (a, b) en $\{a\} \times ([0, 1]) \cap M$ es degenerada, entonces $K \subsetneq \{a\} \times [0, 1]$, entonces $\varrho_1(K) \neq \{a\}$. Además como $K \subset M_2(a, b)$, entonces $\varrho_1(K) \subset [0, a]$.

Concluimos que $\varrho_1(K) \cap \pi_1(\mathbf{C})$ es no degenerada. \square

Sea $d \in [0, a)$, tal que $\varrho_1(K) \cap \pi_1(\mathbf{C}) = [d, a] \subset [0, a]$. Como $[d, a] \subset$

$\varrho_1(K)$, por el Teorema 1.1.3 existe $K' \subset K$ un arco con puntos extremos (a, b) y (d, t) , tal que $\varrho_1(K') = [d, a]$.

Además como $[d, a] \subset \pi_1(\mathbf{C})$, por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{C}' \subset \mathbf{C}$ con extremo \mathbf{x} y $\mathbf{z} = (d, z_2, z_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{C}') = [d, a] \subset [0, a]$.

Notemos que los arcos K' y \mathbf{C}' cumplen las hipótesis del Teorema 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades

- (iv) \mathbf{B} tiene puntos extremos (b, \mathbf{x}) e $\mathbf{y} = (t, \mathbf{z})$,
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = K'$,
- (vi) $\sigma(\mathbf{B}) = \mathbf{C}'$.

Veamos que el arco \mathbf{B} cumple las propiedades (1)-(5) del Teorema.

Por (iv), tenemos que \mathbf{B} tiene puntos extremos $(b, \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$ e \mathbf{y} , entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) = (d, t)$, y como $(d, t) \neq (a, b)$ se cumple la propiedad (1).

Como $K' \subset K$ y por (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = K'$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) \subset K$, por tanto que se cumple la propiedad (2).

Además como $\mathbf{C}' \subset \mathbf{C}$, entonces por (vi) $\sigma(\mathbf{B}) \subset \mathbf{C}$ y por (iii) $\sigma(\mathbf{C}) = \mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$, por tanto $\sigma^2(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$, por tanto se cumple la propiedad (3).

De (3), tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$ y por hipótesis $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$, por tanto $\mathbf{B} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$ y (4) queda probado.

Probaremos finalmente que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\sigma(\mathbf{x})\}$, para esto probaremos que se cumplen las hipótesis del Lema 8.0.6.

Por hipótesis tenemos que L es un arco con puntos extremos (a, b) y (c, d) y por construcción $K' \subset K$ es un arco con extremos (a, b) y (d, t) , además por hipótesis $K \cap L = \{(a, b)\}$, entonces $K' \cap L = \{(a, b)\}$; por tanto se cumple la hipótesis (a).

Por hipótesis $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ es un arco con extremos $\sigma(\mathbf{x})$ y (d, c, y_3, y_4, \dots) , tal que $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$ y por construcción \mathbf{B} es un arco con puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ e $\mathbf{y} = (t, d, z_2, z_3, \dots)$, y por (4) $\mathbf{B} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$; por tanto se cumple (b).

Además por hipótesis $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, $\pi_{2,1}((d, c, y_3, y_4, \dots)) = (c, d)$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$ y por construcción $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = K'$ y $\pi_{2,1}((t, d, z_2, z_3, \dots)) = (d, t)$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$.

De lo anterior se cumplen la hipótesis del Lema 8.0.6; por tanto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\sigma(\mathbf{x})\}$ y (5) queda probado. ■

Observación 8.1.2. De manera similar obtenemos el mismo resultado para cuando $i \in \{1, 3\}$, $j = i$, $k \in \{i, i + 3(\text{mod } 4)\}$ (Figura 8.2); $i \in \{2, 4\}$, $j = i + 2(\text{mod } 4)$, $k \in \{i, i + 1(\text{mod } 4)\}$ (Figura 8.3); $i \in \{2, 4\}$, $j = i - 1(\text{mod } 4)$, $k \in \{i - 1(\text{mod } 4), i + 2(\text{mod } 4)\}$ (Figura 8.4).

Teorema 8.1.3. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, a) en $[(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{a\})] \cap M$ es degenerada. Supongamos también que existen $i \in \{1, 3\}$ y

(a) un arco $L \subset M_i(a, a)$ con puntos extremos (a, a) y (u, v) , tal que $L \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(a, a)\}$

(b) con $j \in \{i, i+3(\text{mod } 4)\}$, un arco $J \subset M_j(a, a)$ con un punto extremo (a, a) , tal que $J \cap \pi_{2,1}(\mathcal{R}(\varprojlim M)) = \{(a, a)\}$ y $L \cap J = \{(a, a)\}$,

(c) un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con puntos extremos \mathbf{x} y (v, u, y_3, y_4, \dots) , tal que $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$ y $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$.

Entonces existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (1) \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{x} e \mathbf{y} , con $(a, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y})$,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) \subset J$ (Figura 8.5),
- (3) $\sigma(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$,
- (4) $\mathbf{B} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$,
- (5) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x}\}$.

Demostración.

Haremos la prueba para el caso en que $i = 1$, $j = i + 3(\text{mod } 4) = 4(\text{mod } 4)$, la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

Notemos que $a < 1$, pues el arco $L \subset M_1(a, a) = ([a, 1] \times [a, 1]) \cap M$ y la componente del punto (a, a) en $[(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{a\})] \cap M$ es degenerada.

Afirmación 1 $\varrho_2(L) \cap \varrho_1(J)$ es no degenerada.

Prueba.

Por hipótesis L es un arco con un punto extremo (a, a) y la componente del punto (a, a) en $[(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{a\})] \cap M$ es degenerada, entonces $L \not\subseteq [0, 1] \times \{a\}$, por lo que $\varrho_2(L) \neq \{a\}$.

Y por hipótesis J es un arco con un punto extremo (a, a) y la componente del punto (a, a) en $[(\{a\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{a\})] \cap M$ es degenerada, entonces $J \not\subseteq \{a\} \times [0, 1]$, por lo que $\varrho_1(J) \neq \{a\}$.

Además como $L \subset M_1(a, a)$, entonces $\varrho_2(L) \subset [a, 1]$ y como $J \subset M_4(a, a)$, entonces $\varrho_1(J) \subset [a, 1]$.

De lo anterior $\varrho_2(L) \cap \varrho_1(J)$ es no degenerada. \square

Sea $d \in [a, 1]$, tal que $\varrho_2(L) \cap \varrho_1(J) = [a, d]$. Como $[a, d] \subset \varrho_1(J) \subset [a, 1]$, por el Teorema 1.1.3 existe $J' \subset J$ un arco con puntos extremos (a, a) y (d, c) , tal que $\varrho_1(J') = [a, d]$.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 205

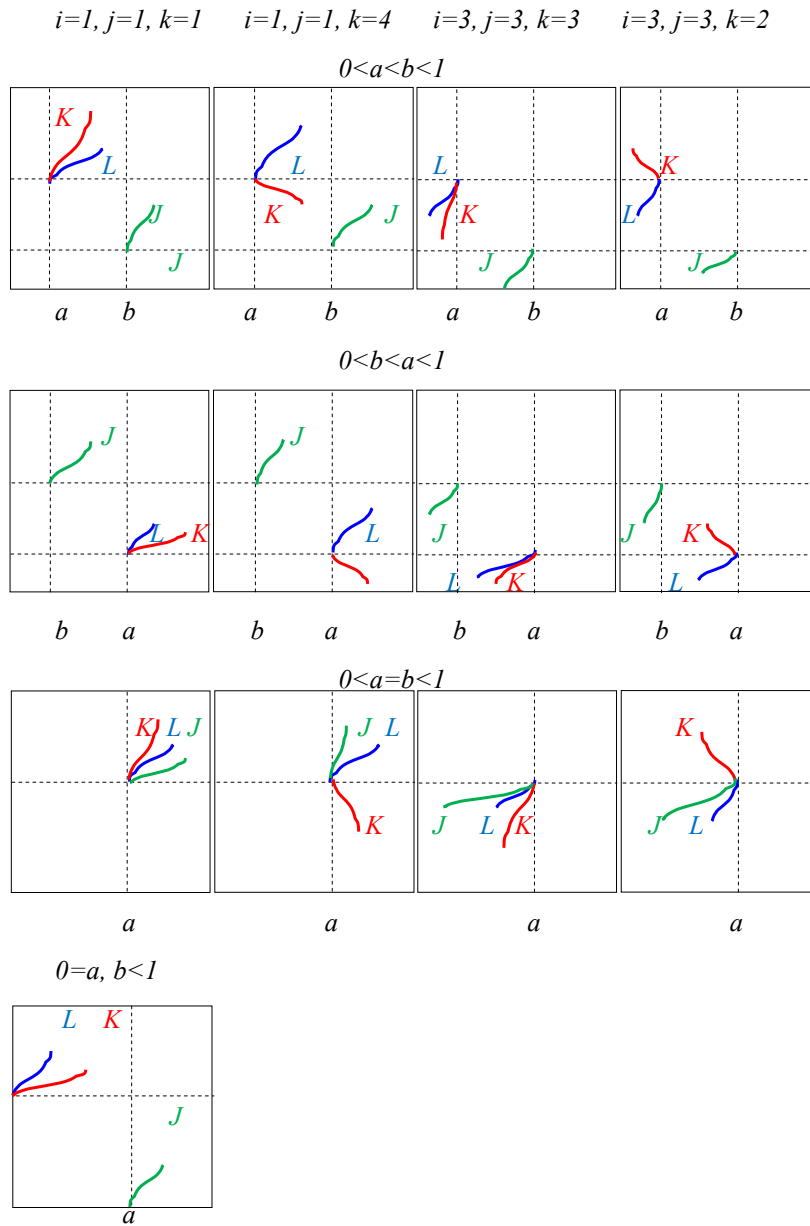


Figura 8.2:

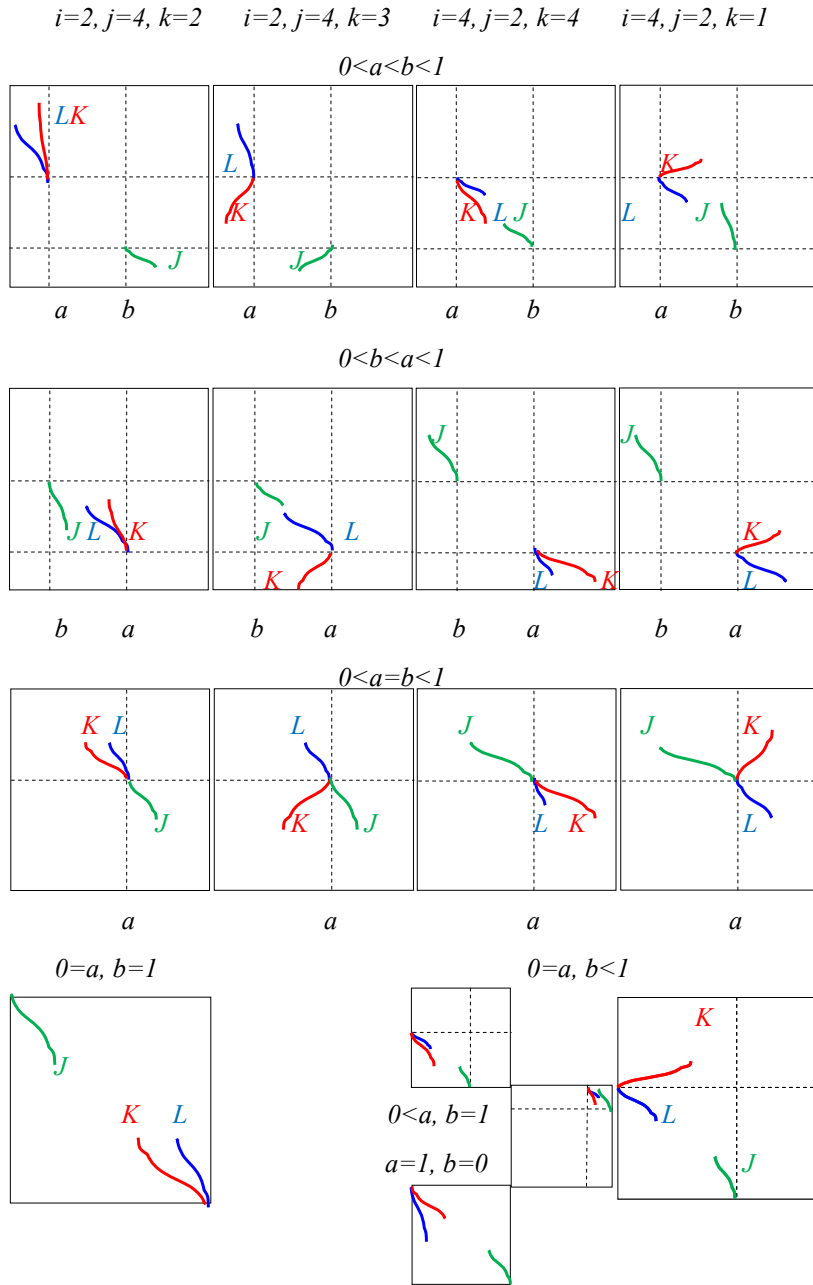


Figura 8.3:

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 207

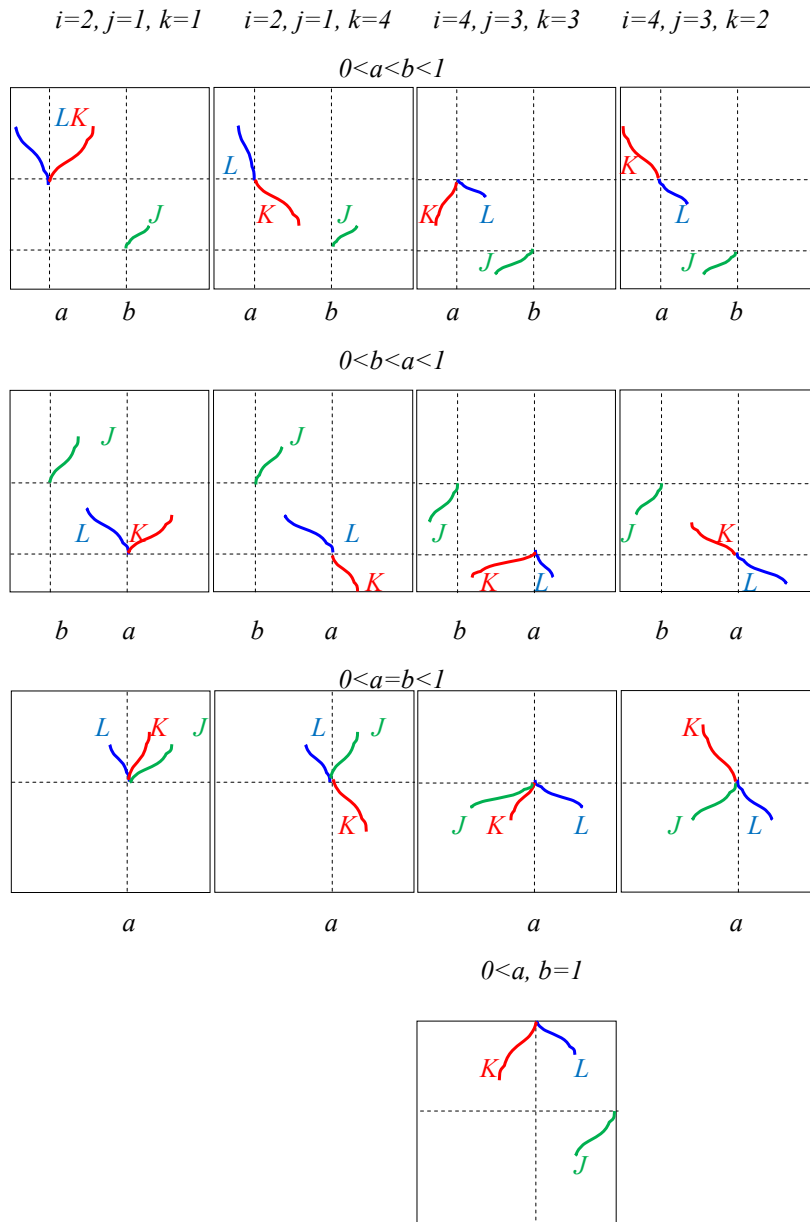


Figura 8.4:

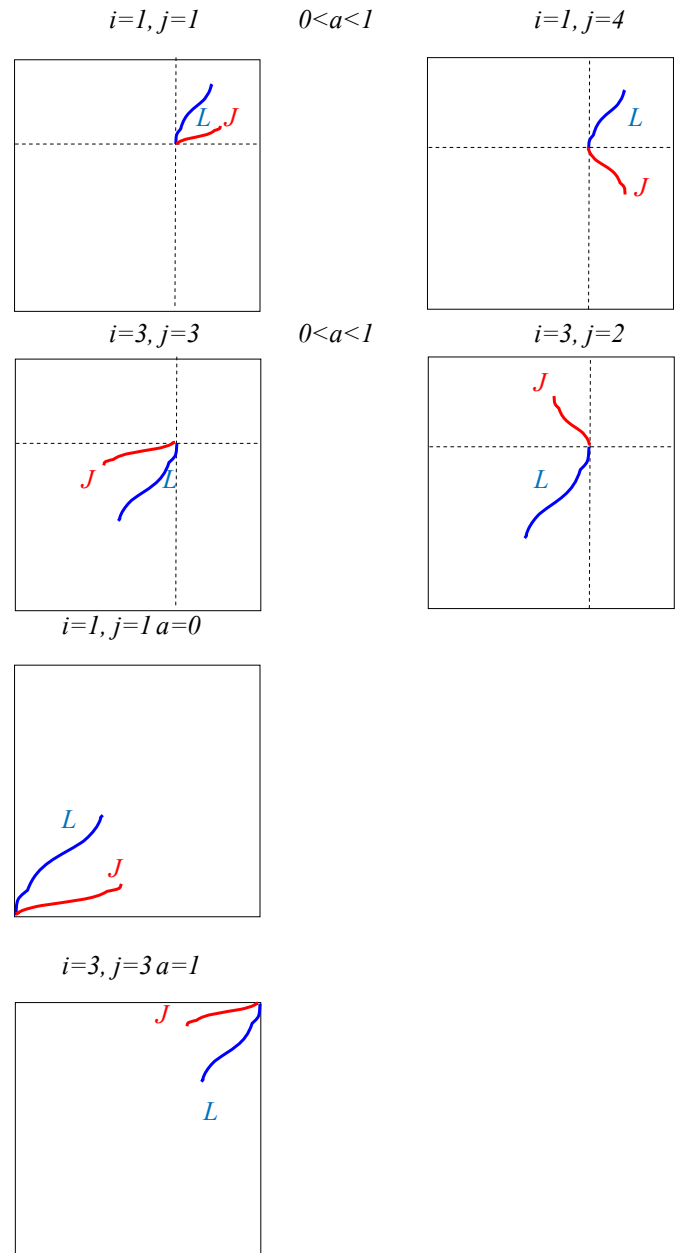


Figura 8.5:

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 209

Además por hipótesis $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\varrho_2(L) = \pi_1(\mathbf{A})$, entonces $[a, d] \subset \pi_1(A) \subset [a, 1]$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$ con puntos extremos \mathbf{x} y $\mathbf{w} = (b, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{A}') = [a, d]$.

Notemos que los arcos J' y \mathbf{A}' cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{B} tiene puntos extremos $(a, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ e $(c, \mathbf{w}) = \mathbf{y}$,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = J'$,
- (iii) $\sigma(\mathbf{B}) = \mathbf{A}'$.

Veamos que el arco \mathbf{B} cumple las propiedades (1)-(5) del teorema.

Por (i), tenemos que \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{x} e $\mathbf{y} = (c, b, w_2, w_3, \dots)$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{y}) = (d, c)$, y como $(d, c) \neq (a, a)$ se cumple la propiedad (1).

Como $J' \subset J$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = J'$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) \subset J$, por tanto que se cumple la propiedad (2).

Además como $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$, entonces por (iii) $\sigma(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$, entonces $\sigma(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$, por tanto se cumple la propiedad (3).

De (3), tenemos que $\sigma(\mathbf{B}) \subset \mathbf{A}$ y por hipótesis $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$, por tanto $\mathbf{B} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$ y (4) queda probado.

Probaremos finalmente que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x}\}$, para esto probaremos que se cumplen las hipótesis del Lema 8.0.6.

Por hipótesis tenemos que L es un arco con puntos extremos (a, a) y (u, v) y por construcción $J' \subset J$ es un arco con extremos (a, a) y (d, c) , además por hipótesis $L \cap J = \{(a, a)\}$, entonces $L \cap J = \{(a, a)\}$; por tanto se cumple la hipótesis (a).

Por hipótesis $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ es un arco con puntos extremos de la forma \mathbf{x} y (v, u, y_3, y_4, \dots) , tal que $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$ y por construcción \mathbf{B} es un arco con puntos extremos \mathbf{x} e $\mathbf{y} = (c, d, w_2, w_3, \dots)$, y por (4) $\mathbf{B} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$; por tanto se cumple (b).

Por hipótesis $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, $\pi_{2,1}((v, u, y_3, y_4, \dots)) = (u, v)$, de donde $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \neq \{(a, a)\}$ y por construcción $\pi_{2,1}(\mathbf{B}) = K'$ y $\pi_{2,1}((c, d, w_2, w_3, \dots)) = (d, c)$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \neq \{(a, a)\}$.

De lo anterior se cumplen la hipótesis del Lema 8.0.6; por tanto $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{\mathbf{x}\}$ y (5) queda probado. ■

Observación 8.1.4. De manera similar obtenemos el mismo resultado para cuando $i \in \{2, 4\}$ y $j \in \{i - 1, i + 2(\text{mod } 4)\}$ (Figura 8.6).

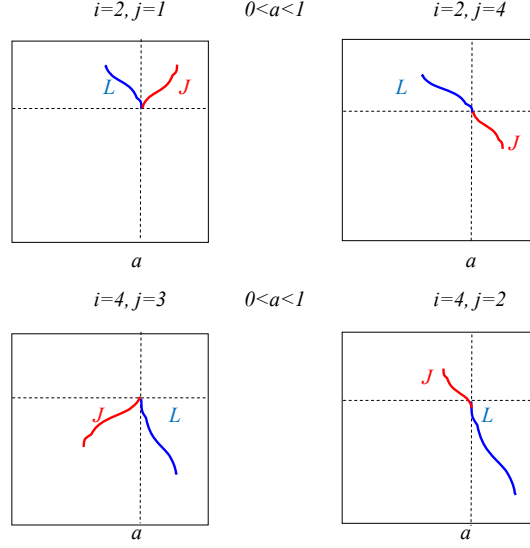


Figura 8.6:

Lema 8.1.5. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita y $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$, tal que $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \neq \{(b, a)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) Si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{A}) \neq \{(b, a)\}$,
- (2) Si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$.

Demostración.

Si $k = 3$, probaremos que $\pi_{4,3}(\mathbf{A}) \neq \{(b, a)\}$.

Supongamos por el contrario que $\pi_{4,3}(\mathbf{A}) = \{(b, a)\}$, entonces $\pi_3(\mathbf{A}) = \{b\}$, como $\pi_{3,2}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$, entonces $\pi_2(\mathbf{A}) \neq \{b\}$, entonces la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, lo cual contradice que la componente de (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 211

Por tanto $\pi_{4,3}(\mathbf{A}) \neq \{(b, a)\}$.

Si $k = 4$, probaremos que $\pi_{5,4}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$.

Supongamos por el contrario que $\pi_{5,4}(\mathbf{A}) = \{(a, b)\}$, entonces $\pi_4(\mathbf{A}) = \{b\}$, como $\pi_{4,3}(\mathbf{A}) \neq \{(b, a)\}$, entonces $\pi_5(\mathbf{A}) \neq \{a\}$, entonces la componente de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, lo cual contradice que la componente de (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada. Por tanto $\pi_{5,4}(\mathbf{A}) \neq \{(a, b)\}$.

Siguiendo por inducción sobre k , obtenemos que el arco \mathbf{A} cumple las propiedades (1) y (2). ■

Corolario 8.1.6. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada. Supongamos también que existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$, tal que $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \neq \{(a, a)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{A})$. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$, $\pi_{k,k-1}(\mathbf{A}) \neq \{(a, a)\}$.

Demostración.

Caso particular del Lema 8.1.5 cuando $a = b$. ■

Teorema 8.1.7. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada. Supongamos también que existen $j \in \{1, 3\}$ y arcos $J \subset M_j(a, a)$ y $L \subset M_i(a, a)$, con $i \in \{j, j+1\}$, tales que (a, a) es punto extremo de L y J , $L \cap J = \{(a, a)\}$ (Figura 8.7). Entonces existe una sucesión de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, con las siguientes propiedades, para cada $k, m \in \mathbb{N}$:

- (1) \mathbf{B}_k tiene un punto extremo \mathbf{x} ,
- (2) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_k) \subset J$,
- (3) Si $k = 1$, $\sigma(\mathbf{B}_k) \subset \mathbf{A}$ y si $k > 1$, $\sigma(\mathbf{B}_k) \subset \mathbf{B}_{k-1}$,
- (4) para cada $l \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, $\pi_{l,l+1}(\mathbf{B}_k) \neq \{(a, a)\}$,
- (5) Si $k \neq m$, $\mathbf{B}_k \cap \mathbf{B}_m = \{\mathbf{x}\}$.

Demostración.

Haremos la prueba para el caso en que $j = 1$ e $i = 2$, la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

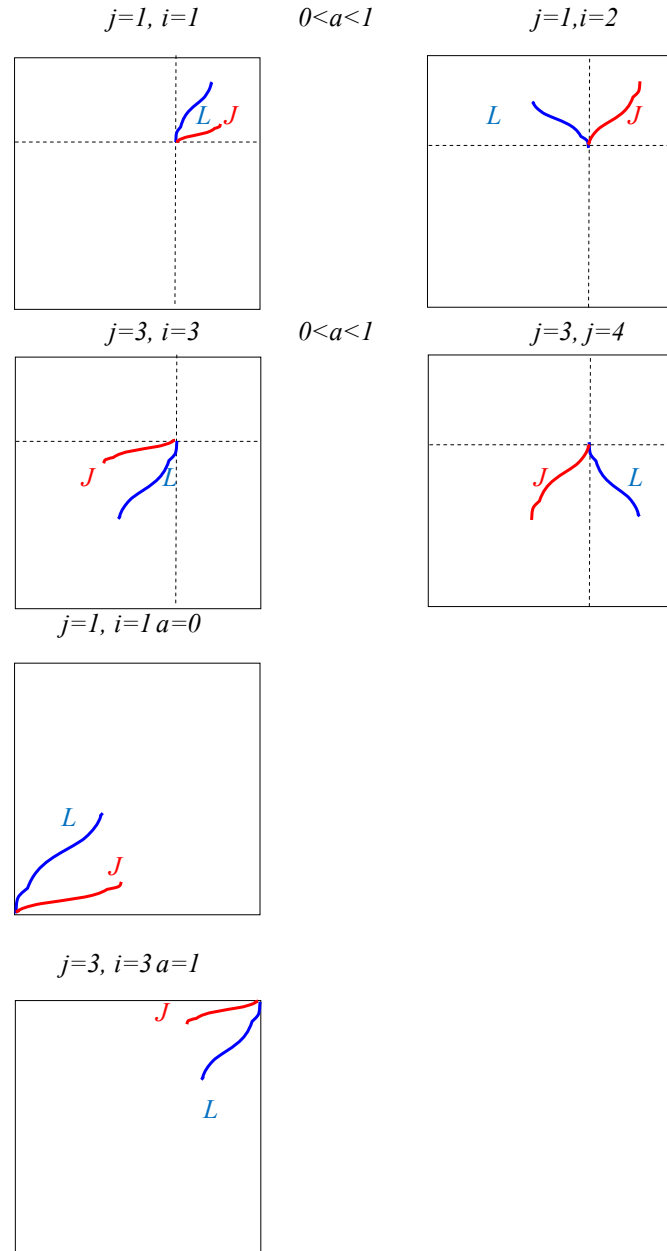


Figura 8.7:

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 213

Notemos que $a < 1$, pues los arcos $J \subset M_1(a, a)$, $L \subset M_2(a, a)$ y la componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada.

Notemos que se satisfacen las hipótesis del Lema 8.0.6, por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A} tiene un punto extremo \mathbf{x} ,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$,
- (iii) $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$.

Construiremos por inducción sobre k la sucesión de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, que satisfagan las propiedades (1)-(5).

Para $k = 1$, notemos que los arcos $L, J \subset M$ y $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ satisfacen las hipótesis del Teorema 8.1.3, por tanto existe un arco $\mathbf{B}_1 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iv) \mathbf{B}_1 tiene puntos extremos \mathbf{x} e \mathbf{y}^1 , con $(a, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$,
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset J$,
- (vi) $\sigma(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$,
- (vii) $\mathbf{B}_1 \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$,
- (viii) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1 = \{\mathbf{x}\}$.

Veamos que se cumplen las propiedades (1)-(4) para $k = 1$.

Por (iv) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo \mathbf{x} , por lo que se cumple (1) para $k = 1$.

De (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset J$, por lo que se cumple (2) para $k = 1$.

De (vi) $\sigma(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$, por lo que se cumple (3) para $k = 1$.

De (iv) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^1 , con $(a, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_1) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_1) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \neq \{(a, a)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_1) \neq \{(a, a, \cdot)\}$, así que se cumple (4) para $k = 1$.

Para $k = 2$, definamos $J_1 = \pi_{2,1}(\mathbf{B}_1)$, como $(a, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$, entonces $\pi_2(\mathbf{y}^1) \neq a$, así que J_1 es no degenerado y $\varrho_1(J_1) \subset [a, 1]$ es no degenerado.

Sea $b_1 \in (a, 1]$, tal que $\varrho_1(J_1) = [a, b_1]$. Como $[a, b_1] \subset \varrho_1(J_1) \subset [a, 1]$, por el Teorema 1.1.3 existe $J'_1 \subset J_1$ un arco con extremos (a, a) y (b_1, c_1) , tal que $\varrho_1(J'_1) = [a, b_1]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) = J_1$, entonces $\varrho_2(J_1) = \pi_1(\mathbf{B}_1)$, de donde $[a, b_1] \subset \pi_1(\mathbf{B}_1) \subset [a, 1]$, entonces por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1$ con extremo \mathbf{x} y $\mathbf{w}^1 = (b_1, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}'_1) = [a, b_1]$.

Notemos que los arcos J'_1 y \mathbf{B}'_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B}_2 \subset \underline{\text{lim}} M$ con las siguientes propiedades:

- (ix) \mathbf{B}_2 tiene puntos extremos $(a, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(c_1, \mathbf{w}^1) = \mathbf{y}^2$,
- (x) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = J'_1$,
- (xi) $\sigma(\mathbf{B}_2) = \mathbf{B}'_1$.

Veamos que el arco \mathbf{B}_2 cumple las propiedades (1)-(5).

De la propiedad (ix) \mathbf{B}_2 tiene un punto extremo $(a, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (1) para $k = 2$.

De la propiedad (x) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = J'_1$ y como $J'_1 \subset J_1 \subset J$, entonces se cumple (2) para $k = 2$.

De la propiedad (xi) $\sigma(\mathbf{B}_2) = \mathbf{B}'_1$ y como $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1$, entonces $\sigma(\mathbf{B}_2) \subset \mathbf{B}_1$ así que se cumple (3) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (4) para $k = 2$. De (ix) \mathbf{B}_2 tiene un punto extremo \mathbf{y}^2 , con $(a, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^2)$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_2) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_2) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) \neq \{(a, a)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_2) \neq \{(a, a)\}$. Entonces se cumplen la hipótesis del Corolario 8.1.6, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_2) \neq \{(a, a)\}$. Por tanto se cumple (4) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (5). De la propiedad (3), para $k = 1$ tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (3), para $k = 2$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_2) \subset \mathbf{B}_1$ y por la propiedad (2), para $k = 2$ $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) \subset J$, entonces $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_1) \subset J$.

Además de la propiedad (4), para $k = 2$, $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_1) \neq \{(a, a)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_2)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \{\mathbf{x}\}$ y se cumple la propiedad (5) para $k = 2$.

Supongamos que hemos construido arcos $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$ que satisfacen las propiedades (1)-(5).

Construiremos el arco \mathbf{B}_{n+1} . Definamos $J_n = \pi_{2,1}(\mathbf{B}_n)$, de la propiedad (4) para el arco \mathbf{B}_n , tenemos que $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_n) \neq \{(a, a)\}$, y por hipótesis la componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada, entonces $J_n \not\subset \{a\} \times [0, 1]$, por tanto $\{a\} \neq \varrho_1(J_n) \subset [a, 1]$.

Sea $b_n \in (a, 1]$, tal que $\varrho_1(J_n) = [a, b_n]$. Como $[a, b_n] \subset \varrho_1(J_n)$, por el Teorema 1.1.3 existe $J'_1 \subset J_1$ un arco con extremos (a, a) y (b_n, c_n) , tal que $\varrho_1(J'_1) = [a, b_n]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_n) = J_n$ entonces $\varrho_1(J_1) = \pi_1(\mathbf{B}_n)$, entonces $[a, b_1] \subset \pi_1(\mathbf{B}_n)$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{B}'_n \subset \mathbf{B}_n$ con extremo \mathbf{x} y $\mathbf{w}^n = (b_n, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}'_n) = [a, b_n]$.

Notemos que los arcos J'_n y \mathbf{B}'_n cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B}_{n+1} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (xii) \mathbf{B}_{n+1} tiene puntos extremos $(a, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(c_n, \mathbf{w}^n) = \mathbf{y}^n$,
- (xiii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) = J'_n$,
- (xiv) $\sigma(\mathbf{B}_{n+1}) = \mathbf{B}'_n$.

Veamos que el arco \mathbf{B}_{n+1} cumple las propiedades (1)-(5).

De la propiedad (xii) \mathbf{B}_{n+1} tiene un punto extremo $(a, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (1) para $k = n + 1$.

De la propiedad (xiii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) = J'_n$ y como $J'_{n+1} \subset J_{n+1} \subset J$, entonces se cumple (2) para $k = n + 1$.

La propiedad (xiv) $\sigma(\mathbf{B}_{n+1}) = \mathbf{B}'_n$ y como $\mathbf{B}'_n \subset \mathbf{B}_n$, entonces $\sigma(\mathbf{B}_{n+1}) \subset \mathbf{B}_n$, por tanto se cumple (3) para $k = n + 1$.

Veamos que se cumple (4) para $k = n + 1$. De (xii) \mathbf{B}_{n+1} tiene un punto extremo \mathbf{y}^{n+1} , con $(a, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^{n+1})$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{(a, a)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{(a, a)\}$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.6, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{(a, a)\}$. Por tanto se cumple (4) para $k = n + 1$.

Veamos que se cumple (5). Por hipótesis de inducción tenemos que para $l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, si $l \neq m$, entonces $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_m = \{\mathbf{x}\}$, por lo que falta probar que para cada $m \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_m = \{\mathbf{x}\}$

De la propiedad (3), para $k = 1$ tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (3), para $i = m$ tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_m) \subset \mathbf{B}_{m-1}$ y por la propiedad (2), para $k = m$ $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{m-1}) \subset J$, entonces $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_m) \subset J$.

Además de la propiedad (4), para $k = m$, $\pi_{3,2}(\mathbf{B}_m) \neq \{(a, a)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_1)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_m = \{\mathbf{x}\}$ y se cumple la propiedad (5) para $k = n + 1$.

Concluimos que existe la sucesión de arcos $\{\mathbf{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, con las propiedades deseadas. ■

Corolario 8.1.8. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a \in [0, 1]$ con $0 < a < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada. Supongamos también que

existen $j \in \{1, 3\}$ y arcos $J \subset M_j(a, a)$ y $L \subset M_i(a, a)$, con $i \in \{j, j + 1\}$, tales que (a, a) es punto extremo de L y J , $L \cap J = \{(a, a)\}$ (Figura 8.7). Entonces $ord(\mathbf{x}) = \infty$

Teorema 8.1.9. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existen arcos $L \subset M_i(a, b)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $K \subset M_2(a, b)$, y $J \subset M_4(b, a)$, tales que (a, b) es punto extremo de L , K y (b, a) es punto extremo de J , $L \cap K = \{(a, b)\}$ (Figura 8.8). Entonces existen sucesiones de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, y $\{\mathbf{C}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades para cada $k, m \in \mathbb{N}$:

- (1) \mathbf{B}_k tiene un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$,
- (2) \mathbf{C}_k tiene un punto extremo \mathbf{x} ,
- (3) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_k) \subset K$,
- (4) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_k) \subset J$,
- (5) Si $k = 1$, $\sigma^2(\mathbf{B}_k) \subset \mathbf{A}$, y si $k > 1$, $\sigma(\mathbf{B}_k) \subset \mathbf{C}_{k-1}$,
- (6) Si $k = 1$, $\sigma(\mathbf{C}_k) \subset \mathbf{B}_1$ y si $k > 1$, $\sigma(\mathbf{C}_k) \subset \mathbf{B}_k$,
- (7) para cada $l \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$, $\pi_{l,l+1}(\mathbf{B}_k) \neq \{(a, b)\}$, si l es impar $\{(b, a)\} \neq \pi_{l,l+1}(\mathbf{B}_k)$, si l es par
- (8) para cada $l \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$, $\pi_{l,l+1}(\mathbf{C}_k) \neq \{(a, b)\}$, si l es par $\{(b, a)\} \neq \pi_{l,l+1}(\mathbf{C}_k)$, si l es impar
- (9) Si $k \neq m$, $\mathbf{B}_k \cap \mathbf{B}_m = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.
- (10) Si $k \neq m$, $\mathbf{C}_k \cap \mathbf{C}_m = \{\mathbf{x}\}$.

Demostración.

Haremos la prueba para el caso en que $i = 1$, la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

Notemos que $b < 1$, pues los arcos $J \subset M_1(a, b)$, $L \subset M_2(a, b)$ y la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada.

Notemos que se satisfacen las hipótesis del Lema 8.0.6, por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A} tiene un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$,
- (iii) $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{(b, \mathbf{x})\}$.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 217

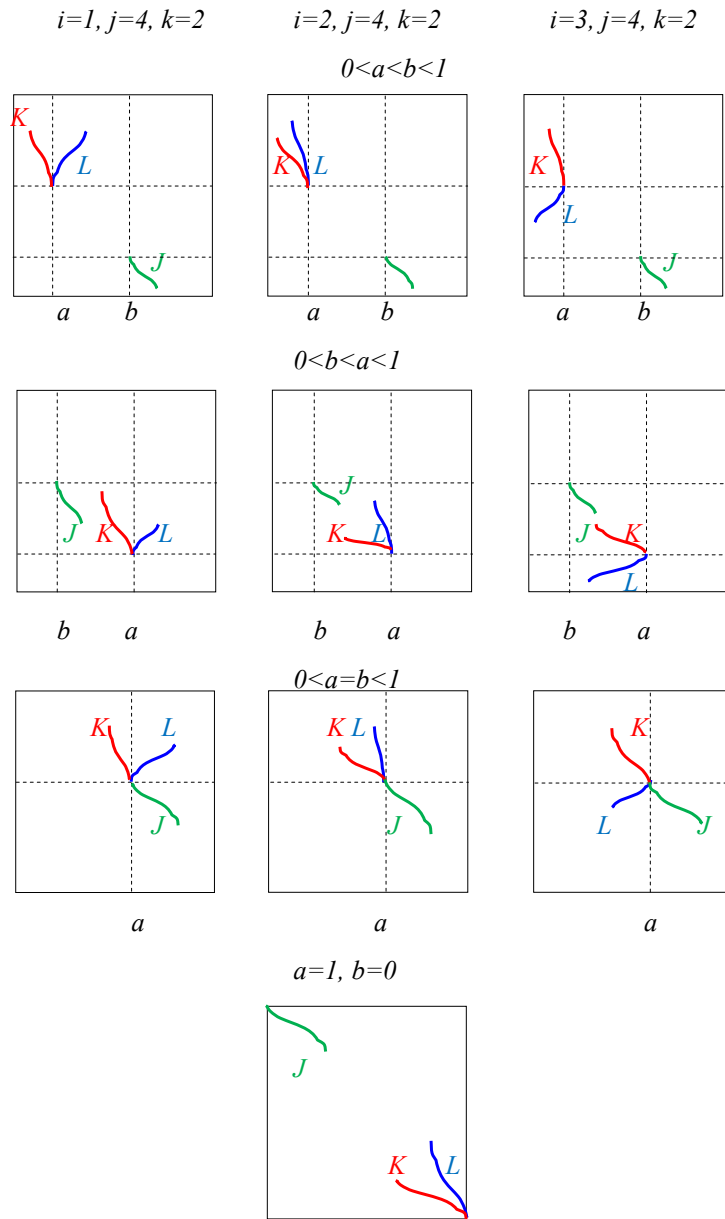


Figura 8.8:

Costruiremos inductivamente las sucesiones de arcos $\{\mathbf{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, y $\{\mathbf{C}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$ con las propiedades (1)-(10).

Para $k = 1$, notemos que los arcos $L, J, K \subset M$ y $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ satisfacen las hipótesis del Teorema 8.1.1, por tanto existe un arco $\mathbf{B}_1 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iv) \mathbf{B}_1 tiene puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ e \mathbf{y}^1 , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$,
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset K$,
- (vi) $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$,
- (vii) $\mathbf{B}_1 \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$,
- (viii) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1 = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Definamos $K_1 = \pi_{2,1}(\mathbf{B}_1)$, como $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$, entonces $\pi_1(\mathbf{y}^1) \neq a$, entonces K_1 es no degenerado y $\varrho_2(K_1) \subset [b, 1]$ es no degenerado.

Sea $c_1 \in (b, 1]$, tal que $\varrho_1(K_1) = [b, c_1]$. Como la componente del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada, $J \not\subset \{b\} \times [0, 1]$, entonces $\varrho_1(J) \neq \{b\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $[b, c_1] \subset \varrho_1(J)$. Como $[b, c_1] \subset \varrho_1(J)$, por el Teorema 1.1.3 existe $J' \subset J$ un arco con extremos (b, a) y (c_1, d_1) , tal que $\varrho_1(J') = [b, c_1]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) = K_1$ entonces $\varrho_2(K_1) = \pi_1(\mathbf{B}_1)$, entonces $[b, c_1] \subset \pi_1(\mathbf{B}_1)$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1$ con extremo (b, \mathbf{x}) y $\mathbf{w}^1 = (c_1, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}'_1) = [b, c_1]$.

Notemos que los arcos J'_1 y \mathbf{B}'_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{C}_1 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (ix) \mathbf{C}_1 tiene puntos extremos $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(c_1, \mathbf{z}^1) = \mathbf{w}^1$ con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{w}^1)$,
- (x) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J'$,
- (xi) $\sigma(\mathbf{C}_1) = \mathbf{B}'_1$.

Veamos que los arcos \mathbf{B}_1 y \mathbf{C}_1 cumplen las propiedades (1)-(8) para $k = 1$.

Por (iv) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo (b, \mathbf{x}) , por lo que se cumple (1) para $k = 1$.

De la propiedad (ix) \mathbf{C}_1 tiene un punto extremo $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (2) para $k = 1$.

De (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset K$, por lo que se cumple (3) para $k = 1$.

De la propiedad (x) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J'$ y como $J' \subset J$, entonces se cumple (4) para $k = 1$.

De (vi) $\sigma(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$, por lo que se cumple (5) para $k = 1$.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 219

De la propiedad (xi) $\sigma(\mathbf{C}_1) = \mathbf{B}'_1$ y como $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1$, entonces $\sigma(\mathbf{C}_1) \subset \mathbf{B}_1$ así que se cumple (6) para $k = 1$.

De (iv) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^1 , con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_1) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_1) \neq \{b\}$, por tanto $\{(b, a)\} \neq \pi_{2,1}(\mathbf{B}_1)$ y $\{(a, b)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_1)$, así que se cumple (7) para $k = 1$.

De (ix) \mathbf{C}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^2 , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^2)$, entonces $\pi_1(\mathbf{C}_1) \neq \{b\}$ y $\pi_2(\mathbf{C}_1) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) \neq \{(a, b)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{C}_1) \neq \{(b, a)\}$. Por tanto se cumple (8) para $k = 1$.

Para $k = 2$, definamos $J_1 = \pi_{2,1}(\mathbf{C}_1)$, como $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^2)$, entonces $\pi_2(\mathbf{y}^2) \neq a$, entonces J_1 es no degenerado y $\varrho_1(J_1) \subset [0, a]$ es no degenerado.

Sea $c_2 \in [0, a)$, tal que $\varrho_1(J_1) = [c_2, a]$. Como la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada, $K \not\subset \{a\} \times [0, 1]$, entonces $\varrho_1(K) \neq \{a\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $[c_2, a] \subset \varrho_1(K)$. Como $[c_2, a] \subset \varrho_1(K) \subset [0, a]$, por el Teorema 1.1.3 existe $K_2 \subset K$ un arco con extremos (a, b) y (c_2, d_2) , tal que $\varrho_1(K_2) = [c_2, a]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J_1$ entonces $\varrho_2(J_1) = \pi_1(\mathbf{C}_1)$, entonces $[c_2, a] \subset \pi_1(\mathbf{C}_1) \subset [0, a]$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{C}'_1 \subset \mathbf{C}_1$ con extremo \mathbf{x} y $\mathbf{w}^2 = (c_2, w_2, w_3, \dots)$, tales que $\pi_1(\mathbf{C}'_1) = [c_2, a]$.

Notemos que los arcos K_1 y \mathbf{C}'_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B}_2 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (xii) \mathbf{B}_2 tiene puntos extremos (b, \mathbf{x}) y $(c_2, \mathbf{w}^2) = \mathbf{y}^2$, con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^2)$
- (xiii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = K_2$,
- (xiv) $\sigma(\mathbf{B}_2) = \mathbf{C}'_1$.

De manera similar a la construcción de \mathbf{C}_1 existe un arco $\mathbf{C}_2 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (xv) \mathbf{C}_2 tiene puntos extremos $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(c_3, \mathbf{w}^3) = \mathbf{z}^2$, con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{z}^2)$
- (xvi) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_2) = J_2$,
- (xvii) $\sigma(\mathbf{C}_2) = \mathbf{B}'_2$.

Veamos que los arcos \mathbf{B}_2 y \mathbf{C}_2 cumplen las propiedades (1)-(10).

Por (xii) \mathbf{B}_2 tiene un punto extremo (b, \mathbf{x}) , por lo que se cumple (1) para $k = 2$.

De la propiedad (xv) \mathbf{C}_2 tiene un punto extremo $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (2) para $k = 2$.

De (xiii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = K_2$, y $K_2 \subset K$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) \subset K_2$ por lo que se cumple (3) para $k = 2$.

De la propiedad (xvi) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J_2$ y como $J_2 \subset J$, entonces se cumple (4) para $k = 2$.

De (xiv) $\sigma(\mathbf{B}_2) = \mathbf{C}'_1$, y $\mathbf{C}'_1 \subset \mathbf{C}_1$ por lo que se cumple (5) para $k = 2$.

De la propiedad (xvii) $\sigma(\mathbf{C}_2) = \mathbf{B}'_2$ y como $\mathbf{B}'_2 \subset \mathbf{B}_2$, entonces $\sigma(\mathbf{C}_2) \subset \mathbf{B}_2$ así que se cumple (6) para $k = 2$.

De (xii) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^3 , con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^3)$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_2) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_2) \neq \{b\}$, por tanto $\{(b, a)\} \neq \pi_{2,1}(\mathbf{B}_2)$ y $\{(a, b)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_2)$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.5, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_2) \neq \{(a, b)\}$ y si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_2) \neq \{(b, a)\}$. Por tanto se cumple (7) para $k = 2$.

De (ix) \mathbf{C}_2 tiene un punto extremo \mathbf{y}^4 , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^4)$, entonces $\pi_1(\mathbf{C}_2) \neq \{b\}$ y $\pi_2(\mathbf{C}_2) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_2) \neq \{(a, b)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{C}_2) \neq \{(b, a)\}$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.5, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{C}_2) \neq \{(b, a)\}$ y si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{C}_2) \neq \{(a, b)\}$. Por tanto se cumple (8) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (9). De la propiedad (5), para $k = 1$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (5), para $k = 2$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_2) \subset \mathbf{C}_1$ y por la propiedad (6), para $k = 1$ $\sigma(\mathbf{C}_1) \subset \mathbf{B}_1$, y por la propiedad (3) para $k = 1$, $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset K$, entonces $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_2) \subset K$.

Además de la propiedad (7), para $k = 2$, $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \neq \{(b, a)\} \neq \pi_{4,3}(\mathbf{B}_2)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \{\sigma(\mathbf{x})\}$ y se cumple la propiedad (9) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (10). De la propiedad (6) para $k = 1$ tenemos que $\sigma(\mathbf{C}_1) \subset \mathbf{B}_1$, de la propiedad (5), para $k = 1$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{5,4}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (6) para $k = 2$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{C}_2) \subset 2\mathbf{B}_1$, de la propiedad (5), para $k = 2$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_2) \subset \mathbf{B}_1$ y por la propiedad (3), para $k = 2$ $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) \subset K$, entonces $\pi_{5,4}(\mathbf{B}_1) \subset K$.

Además de la propiedad (8), para $k = 2$, $\pi_{5,4}(\mathbf{C}_1) \neq \{(b, a)\} \neq \pi_{5,4}(\mathbf{C}_2)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2 = \{\mathbf{x}\}$ y se cumple la propiedad (10) para $k = 2$.

Supongamos que hemos contruido arcos $\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n$, que satisfacen la propiedades (1)-(10).

Para $k = n + 1$, definamos $J_n = \pi_{2,1}(\mathbf{C}_n)$, como $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^n)$, entonces $\pi_2(\mathbf{y}^n) \neq a$, entonces J_n es no degenerado y $\varrho_1(J_1) \subset [0, a]$ es no

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 221

degenerado.

Sea $c_{2(n+1)} \in [0, a)$, tal que $\varrho_1(J_n) = [c_{2(n+1)}, a]$. Como la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada, $K \subsetneq \{a\} \times [0, 1]$, entonces $\varrho_1(K) \neq \{a\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $[c_{2(n+1)}, a] \subset \varrho_1(K)$. Como $[c_{2(n+1)}, a] \subset \varrho_1(K) \subset [0, a]$, por el Teorema 1.1.3 existe $K_{n+1} \subset K$ un arco con extremos (a, b) y $(c_{2(n+1)}, d_{2(n+1)})$, tal que $\varrho_1(K_{n+1}) = [c_{2(n+1)}, a]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_n) = J_n$ entonces $\varrho_2(J_n) = \pi_1(\mathbf{C}_n)$, entonces $[c_{2(n+1)}, a] \subset \pi_1(\mathbf{C}_n) \subset [0, a]$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{C}'_n \subset \mathbf{C}_n$ con extremo \mathbf{x} y $\mathbf{w}^2 = (c_{2(n+1)}, w_2, w_3, \dots)$, tales que $\pi_1(\mathbf{C}'_n) = [c_{2(n+1)}, a]$.

Notemos que los arcos K_n y \mathbf{C}'_n cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B}_{n+1} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (xviii) \mathbf{B}_{n+1} tiene puntos extremos (b, \mathbf{x}) y $(c_{2(n+1)}, \mathbf{w}^{2(n+1)}) = \mathbf{y}^{n+1}$,
- (xix) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) = K_{n+1}$,
- (xx) $\sigma(\mathbf{B}_{n+1}) = \mathbf{C}'_n$.

Definamos $K_{n+1} = \pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1})$, como $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^{n+1})$, $\pi_1(\mathbf{y}^{n+1}) \neq a$, entonces K_{n+1} es no degenerado y $\varrho_2(K_{n+1}) \subset [b, 1]$ es no degenerado.

Sea $c_{2(n+1)+1} \in (b, 1]$, tal que $\varrho_1(K_{n+1}) = [b, c_{2(n+1)+1}]$. Como la componente del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada, $J \subsetneq \{b\} \times [0, 1]$, entonces $\varrho_1(J) \neq \{b\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que $[b, c_{2(n+1)+1}] \subset \varrho_1(J)$. Como $[b, c_{2(n+1)+1}] \subset \varrho_1(J) \subset [b, 1]$, por el Teorema 1.1.3 existe $J_{n+1} \subset J$ un arco con extremos (b, a) y $(c_{2(n+1)+1}, d_{2(n+1)+1})$, tal que $\varrho_1(J_{n+1}) = [b, c_{2(n+1)+1}]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) = K_{n+1}$ entonces $\varrho_2(K_{n+1}) = \pi_1(\mathbf{B}_{n+1})$, entonces $[b, c_{2(n+1)+1}] \subset \pi_1(\mathbf{B}_{n+1}) \subset [b, 1]$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{B}'_{n+1} \subset \mathbf{B}_{n+1}$ con extremo (b, \mathbf{x}) y $\mathbf{w}^{2(n+1)+1}$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}'_{n+1}) = [b, c_{2(n+1)+1}]$.

Notemos que los arcos J'_{n+1} y \mathbf{B}'_{n+1} cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{C}_{n+1} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (xxi) \mathbf{C}_{n+1} tiene puntos extremos $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(c_1, \mathbf{w}^{2(n+1)+1}) = \mathbf{z}^{n+1}$, con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{z}^{n+1})$,
- (xxii) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_{n+1}) = J'_{n+1}$,
- (xxiii) $\sigma(\mathbf{C}_{n+1}) = \mathbf{B}'_{n+1}$.

Veamos que los arcos \mathbf{B}_{n+1} y \mathbf{C}_{n+1} cumplen las propiedades (1)-(10).

Por (xviii) \mathbf{B}_{n+1} tiene un punto extremo $(b, \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$, por lo que se cumple (1) para $k = n + 1$.

De la propiedad (xxi) \mathbf{C}_{n+1} tiene un punto extremo $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (2) para $k = n + 1$.

De (xix) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) = K_{n+1}$, y $K_{n+1} \subset K$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) \subset K$ por lo que se cumple (3) para $k = n + 1$.

De la propiedad (xxii) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_{n+1}) = J'_{n+1}$ y como $J'_{n+1} \subset J$, entonces se cumple (4) para $k = n + 1$.

De (xx) $\sigma(\mathbf{B}_{n+1}) = \mathbf{C}'_n$, y $\mathbf{C}'_n \subset \mathbf{C}_n$ por lo que se cumple (5) para $k = n + 1$.

De la propiedad (xxiii) $\sigma(\mathbf{C}_{n+1}) = \mathbf{B}'_{n+1}$ y como $\mathbf{B}'_{n+1} \subset \mathbf{B}_{n+1}$, entonces $\sigma(\mathbf{C}_{n+1}) \subset \mathbf{B}_{n+1}$ así que se cumple (6) para $k = 2$.

De (xviii) \mathbf{B}_{n+1} tiene un punto extremo \mathbf{y}^{n+1} , con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^{n+1})$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{b\}$, por tanto $\{(b, a)\} \neq \pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1})$ y $\{(a, b)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_{n+1})$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.5, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{(a, b)\}$ y si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_{n+1}) \neq \{(b, a)\}$. Por tanto se cumple (7) para $k = n + 1$.

De (xxi) \mathbf{C}_{n+1} tiene un punto extremo \mathbf{z}^{n+1} , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{z}^{n+1})$, entonces $\pi_1(\mathbf{C}_{n+1}) \neq \{b\}$ y $\pi_2(\mathbf{C}_{n+1}) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_{n+1}) \neq \{(a, b)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{C}_{n+1}) \neq \{(b, a)\}$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.5, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{C}_{n+1}) \neq \{(b, a)\}$ y si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{C}_{n+1}) \neq \{(a, b)\}$. Por tanto se cumple (8) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (9). Por hipótesis de inducción tenemos que para $l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, si $l \neq m$ entonces $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_m = \{\mathbf{x}\}$, por lo que falta probar que para cada $m \in \{2, \dots, n + 1\}$, $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_m = \{\mathbf{x}\}$.

De la propiedad (5), para $k = 1$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (5) para $k = m$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_m) \subset \mathbf{C}_{m-1}$ y de la propiedad (6) para $k = m - 1$, tenemos que $\sigma(\mathbf{C}_{m-1}) \subset \mathbf{B}_{m-1}$ y por la propiedad (3), para $k = m - 1$ $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{m-1}) \subset K$, entonces $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_m) \subset K$.

Además de la propiedad (7), para $k = m$, $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \neq \{(b, a)\} \neq \pi_{4,3}(\mathbf{B}_m)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_m = \{\sigma(\mathbf{x})\}$ y se cumple la propiedad (9) para $k = n + 1$.

Veamos que se cumple (10). Por hipótesis de inducción tenemos que para $l, m \in \{1, 2, \dots, n\}$, si $l \neq m$ entonces $\mathbf{C}_l \cap \mathbf{C}_m = \{\mathbf{x}\}$, por lo que falta probar que para cada $m \in \{2, \dots, n + 1\}$, $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_m = \{\mathbf{x}\}$.

De la propiedad (6) para $k = 1$ tenemos que $\sigma(\mathbf{C}_1) \subset \mathbf{B}_1$, de la propiedad (5), para $k = 1$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 223

$\pi_{5,4}(\mathbf{C}_1) \subset L$.

De la propiedad (6) para $k = m$ tenemos que $\sigma(\mathbf{C}_m) \subset \mathbf{B}_m$, de la propiedad (5), para $k = m$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_m) \subset \mathbf{B}_{m-1}$, de la propiedad (6) para $k = m - 1$ tenemos que $\sigma(\mathbf{C}_{m-1}) \subset \mathbf{B}_{m-1}$ por la propiedad (3), para $k = m - 1$ $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{m-1}) \subset K$, entonces $\pi_{5,4}(\mathbf{C}_m) \subset K$.

Además de la propiedad (8), para $k = m$, $\pi_{5,4}(\mathbf{C}_1) \neq \{(b, a)\} \neq \pi_{5,4}(\mathbf{C}_m)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_m = \{\mathbf{x}\}$ y se cumple la propiedad (10) para $k = 2$.

Por tanto existen las sucesiones de arcos deseadas. ■

Corolario 8.1.10. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existen arcos $L \subset M_i(a, b)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $K \subset M_2(a, b)$, y $J \subset M_4(b, a)$, tales que (a, b) es punto extremo de L , K y (b, a) es punto extremo de J , $L \cap K = \{(a, b)\}$. Entonces $ord(\mathbf{x}) = \infty = ord(\sigma(\mathbf{x}))$.

De manera similar a Teorema 8.1.9 se prueba el siguiente teorema.

Teorema 8.1.11. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existen arcos $L \subset M_i(b, a)$, $i \in \{2, 3, 4\}$, $K \subset M_4(a, b)$ y $J \subset M_2(a, b)$, tales que (a, b) $((b, a))$ es punto extremo de L , K y (a, b) es punto extremo de J , $L \cap K = \{(a, b)\}$ (Figura 8.9). Entonces existen sucesiones de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, y $\{\mathbf{C}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, que cumplan las propiedades (1)-(10) de 8.1.9.

Corolario 8.1.12. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existen arcos $L \subset M_i(b, a)$, $i \in \{2, 3, 4\}$, $K \subset M_4(a, b)$ y $J \subset M_2(a, b)$, tales que (a, b) $((b, a))$ es punto extremo de L , K y (a, b) es punto extremo de J , $L \cap K = \{(a, b)\}$ (Figura 8.9). Entonces $ord(\mathbf{x}) = \infty = ord(\sigma(\mathbf{x}))$.

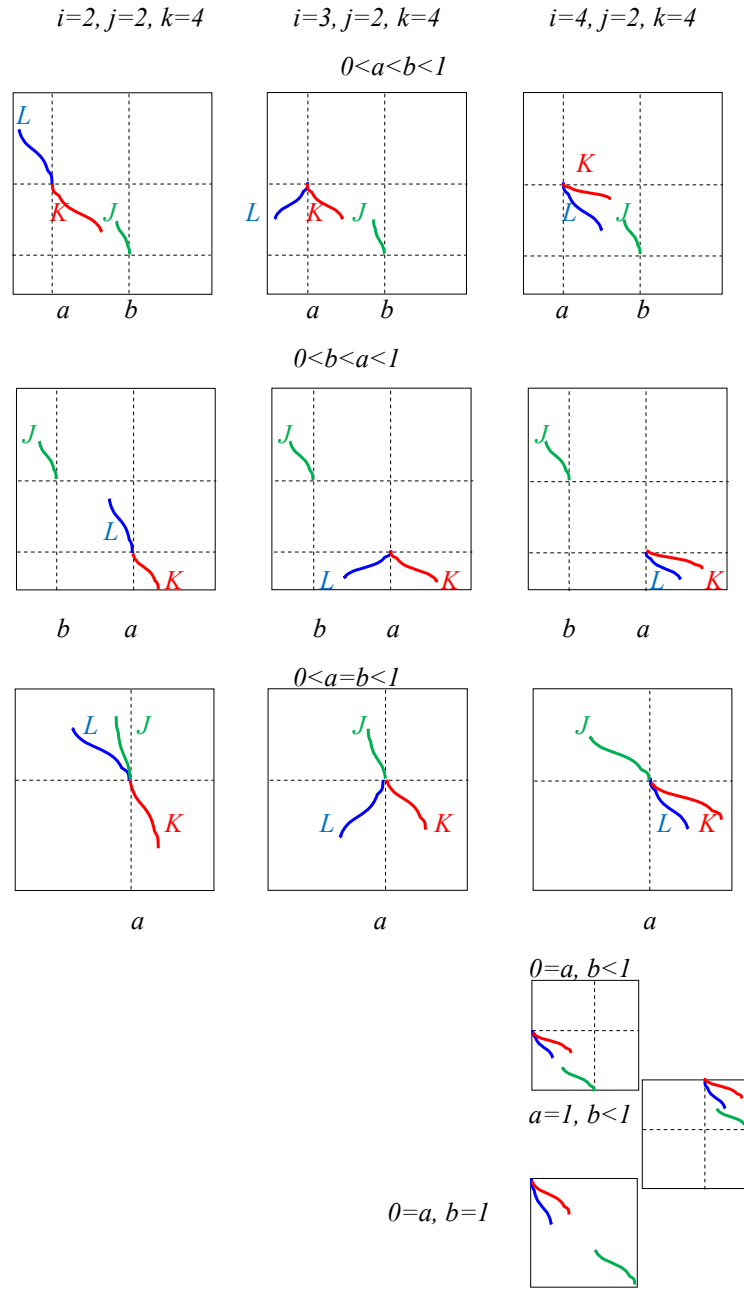


Figura 8.9:

Teorema 8.1.13. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existe $i \in \{1, 3\}$ y arcos $L \subset M_i(a, b)$, $K \subset M_i(b, a)$, tales que (a, b) es punto extremo de L y (b, a) es punto extremo de K (Figura 8.10). Entonces existen sucesiones de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, y $\{\mathbf{C}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, que cumplan las propiedades (1)-(10) de 8.1.9.

Demostración.

Haremos la prueba para el caso en que $i = 1$, la prueba en cualquier otro caso se hace de manera similar.

Notemos que $b < 1$, pues los arcos $L \subset M_1(a, b)$, $K \subset M_1(b, a)$ y la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada.

Notemos que se satisfacen las hipótesis del Lema 8.0.6, por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A} tiene un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$,
- (iii) $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{(b, \mathbf{x})\}$.

Definamos $J \subset M$ el arco con puntos extremos (a, b) y (b, a) .

Para $k = 1$, notemos que los arcos $L, J, K \subset M$ y $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ satisfacen las hipótesis del Teorema 8.1.1, por tanto existe un arco $\mathbf{B}_1 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iv) \mathbf{B}_1 tiene puntos extremos (b, \mathbf{x}) e \mathbf{y} , con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y})$,
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset K$,
- (vi) $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$,
- (vii) $\mathbf{B}_1 \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{(b, \mathbf{x})\}$,
- (viii) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1 = \{(b, \mathbf{x})\}$.

Definamos $K_1 = \pi_{2,1}(\mathbf{B}_1)$, como $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$, entonces $\pi_1(\mathbf{y}^1) \neq a$, entonces K_1 es no degenerado y $\varrho_2(K_1) \subset [a, b]$ es no degenerado.

Sea $c_1 \in (a, b]$, tal que $\varrho_1(K_1) = [a, c_1]$. Como $\varrho_1(J) = [a, b]$, entonces $[a, c_1] \subset \varrho_1(J)$. Como $[a, c_1] \subset \varrho_1(J) \subset [a, 1]$, por el Teorema 1.1.3 existe $J' \subset J$ un arco con extremos (b, a) y (c_1, d_1) , tal que $\varrho_1(J') = [a, c_1]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) = K_1$ entonces $\varrho_2(K_1) = \pi_1(\mathbf{B}_1)$, entonces $[b, c_1] \subset \pi_1(\mathbf{B}_1) \subset [a, 1]$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1$

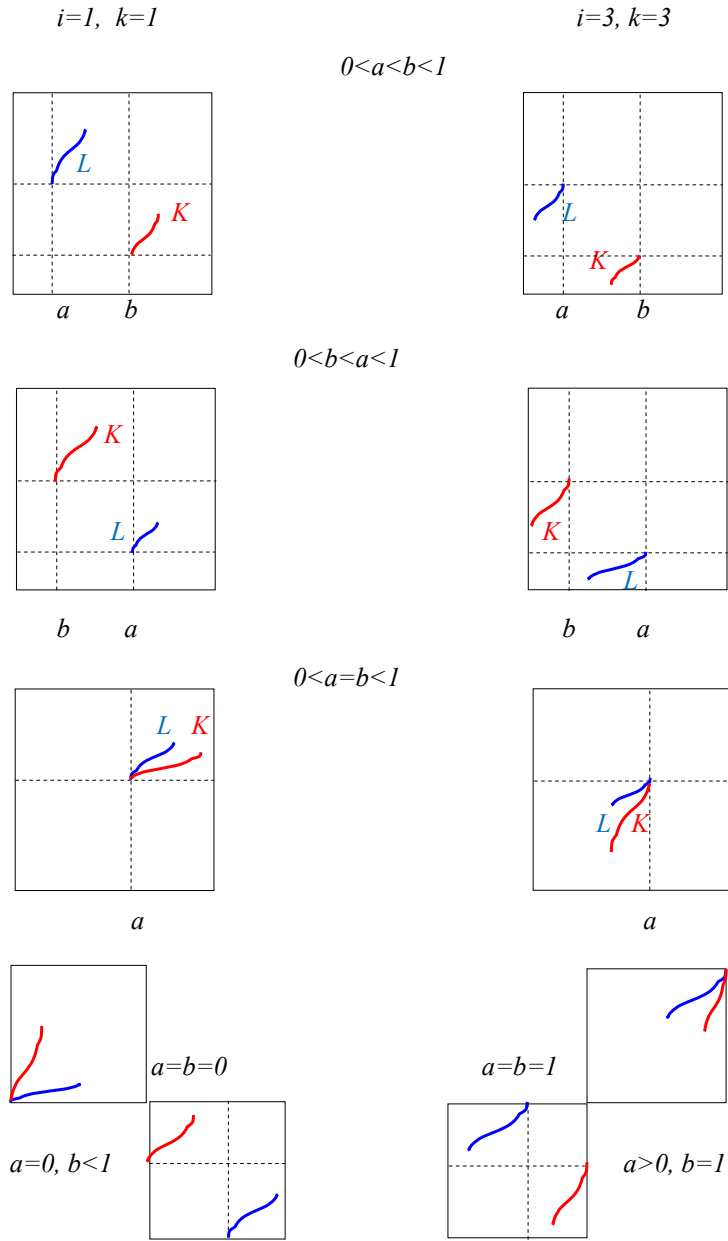


Figura 8.10:

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 227

con extremo (b, \mathbf{x}) y $\mathbf{w}^1 = (c_1, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{B}'_1) = [b, c_1]$.

Notemos que los arcos J'_1 y \mathbf{B}'_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{C}_1 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (ix) \mathbf{C}_1 tiene puntos extremos $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(c_1, \mathbf{w}^1) = \mathbf{y}^2$,
- (x) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J'$,
- (xi) $\sigma(\mathbf{C}_1) = \mathbf{B}'_1$.

Veamos que los arcos \mathbf{B}_1 y \mathbf{C}_1 cumplen las propiedades (1)-(8) para $k = 1$.

Por (iv) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo $(b, \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$, por lo que se cumple (1) para $k = 1$.

De la propiedad (ix) \mathbf{C}_1 tiene un punto extremo $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (2) para $k = 1$.

De (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) \subset K$, por lo que se cumple (3) para $k = 1$.

De la propiedad (x) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J'$ y como $J' \subset J$, entonces se cumple (4) para $k = 1$.

De (vi) $\sigma(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$, por lo que se cumple (5) para $k = 1$.

De la propiedad (xi) $\sigma(\mathbf{C}_1) = \mathbf{B}'_1$ y como $\mathbf{B}'_1 \subset \mathbf{B}_1$, entonces $\sigma(\mathbf{C}_1) \subset \mathbf{B}_1$ así que se cumple (6) para $k = 1$.

De (iv) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^1 , con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^1)$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_1) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_1) \neq \{b\}$, por tanto $\{(b, a)\} \neq \pi_{2,1}(\mathbf{B}_1)$ y $\{(a, b)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_1)$, así que se cumple (7) para $k = 1$.

De (ix) \mathbf{C}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^2 , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^2)$, entonces $\pi_1(\mathbf{C}_1) \neq \{b\}$ y $\pi_2(\mathbf{C}_1) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) \neq \{(a, b)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{C}_1) \neq \{(b, a)\}$ así se cumple (8) para $k = 1$.

Para $k = 2$, definamos $J_1 = \pi_{2,1}(\mathbf{C}_1)$, como $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^2)$, entonces $\pi_2(\mathbf{y}^2) \neq a$, entonces J_1 es no degenerado y $\varrho_1(J_1) \subset [a, b]$ es no degenerado.

Sea $c_2 \in (a, b]$, tal que $\varrho_1(J_1) = [a, c_2]$. Como $\varrho_1(J) = [a, b]$, $[a, c_2] \subset \varrho_1(J)$. Como $[a, c_2] \subset \varrho_1(J) \subset [a, 1]$, por el Teorema 1.1.3 existe $J_2 \subset J$ un arco con extremos (a, b) y (c_2, d_2) , tal que $\varrho_1(J_2) = [c_2, a]$.

Además por definición $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J_1$ entonces $\varrho_2(J_1) = \pi_1(\mathbf{C}_1)$, entonces $[a, c_2] \subset \pi_1(\mathbf{C}_1) \subset [a, 1]$ por el Teorema 1.1.3 existe un arco $\mathbf{C}'_1 \subset \mathbf{C}_1$ con extremo \mathbf{x} y $\mathbf{w}^2 = (c_2, w_2, w_3, \dots)$, tal que $\pi_1(\mathbf{C}'_1) = [c_2, a]$.

Notemos que los arcos J_2 y \mathbf{C}'_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B}_2 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (xii) \mathbf{B}_2 tiene puntos extremos (b, \mathbf{x}) y $(c_1, \mathbf{w}^2) = \mathbf{y}^3$,

$$(xii) \pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = K_2,$$

$$(xiv) \sigma(\mathbf{B}_2) = \mathbf{C}'_1.$$

De manera similar a la construcción de \mathbf{C}_1 existe un arco $\mathbf{C}_2 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

$$(xv) \mathbf{C}_2 \text{ tiene puntos extremos } (a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \text{ y } (c_1, \mathbf{w}^3) = \mathbf{y}^4,$$

$$(xvi) \pi_{2,1}(\mathbf{C}_2) = J_2,$$

$$(xvii) \sigma(\mathbf{C}_2) = \mathbf{B}'_2.$$

Veamos que los arcos \mathbf{B}_2 y \mathbf{C}_2 cumplen las propiedades (1)-(10).

Por (xii) \mathbf{B}_2 tiene un punto extremo (b, \mathbf{x}) , por lo que se cumple (1) para $k = 2$.

De la propiedad (xv) \mathbf{C}_2 tiene un punto extremo $(a, b, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que se cumple (2) para $k = 2$.

De (xiii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = K_2$, y $K_2 \subset K$, entonces $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) \subset K_2$ por lo que se cumple (3) para $k = 2$.

De la propiedad (xvi) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = J_2$ y como $J_2 \subset J$, entonces se cumple (4) para $k = 2$.

De (xiv) $\sigma(\mathbf{B}_2) = \mathbf{C}'_1$, y $\mathbf{C}'_1 \subset \mathbf{C}_1$ por lo que se cumple (5) para $k = 2$.

De la propiedad (xvii) $\sigma(\mathbf{C}_2) = \mathbf{B}'_2$ y como $\mathbf{B}'_2 \subset \mathbf{B}_2$, entonces $\sigma(\mathbf{C}_2) \subset \mathbf{B}_2$ así que se cumple (6) para $k = 2$.

De (xii) \mathbf{B}_1 tiene un punto extremo \mathbf{y}^3 , con $(b, a) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^3)$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_2) \neq \{a\}$ y $\pi_2(\mathbf{B}_2) \neq \{b\}$, por tanto $\{(b, a)\} \neq \pi_{2,1}(\mathbf{B}_2)$ y $\{(a, b)\} \neq \pi_{3,2}(\mathbf{B}_2)$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.5, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_2) \neq \{(a, b)\}$ y si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{B}_2) \neq \{(b, a)\}$. Por tanto se cumple (7) para $k = 2$.

De (ix) \mathbf{C}_2 tiene un punto extremo \mathbf{y}^4 , con $(a, b) \neq \pi_{2,1}(\mathbf{y}^4)$, entonces $\pi_1(\mathbf{C}_2) \neq \{b\}$ y $\pi_2(\mathbf{C}_2) \neq \{a\}$, por tanto $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_2) \neq \{(a, b)\}$ y $\pi_{3,2}(\mathbf{C}_2) \neq \{(b, a)\}$. Entonces se cumplen la hipótesis del Lema 8.1.5, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, se cumple que si k es par $\pi_{k+1,k}(\mathbf{C}_2) \neq \{(a, b)\}$ y si k es impar $\pi_{k+1,k}(\mathbf{C}_2) \neq \{(b, a)\}$. Por tanto se cumple (8) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (9). De la propiedad (5), para $k = 1$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (5), para $k = 2$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_2) \subset \mathbf{B}_1$ y por la propiedad (3), para $k = 2$ $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) \subset K$, entonces $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \subset K$.

Además de la propiedad (4), para $k = 2$, $\pi_{4,3}(\mathbf{B}_1) \neq \{(b, a)\} \neq \pi_{4,3}(\mathbf{B}_2)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2 = \{(b, \mathbf{x})\}$ y se cumple la propiedad (9) para $k = 2$.

Veamos que se cumple (10). De la propiedad (6) para $k = 1$ tenemos que $\sigma(\mathbf{C}_1) \subset \mathbf{B}_1$, de la propiedad (5), para $k = 1$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{B}_1) \subset \mathbf{A}$ y

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 229

por (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$, entonces $\pi_{5,4}(\mathbf{B}_1) \subset L$.

De la propiedad (6) para $k = 2$ tenemos que $\sigma^2(\mathbf{C}_2) \subset 2\mathbf{B}_1$, de la propiedad (5), para $k = 2$, tenemos que $\sigma(\mathbf{B}_2) \subset \mathbf{B}_1$ y por la propiedad (3), para $k = 2$ $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) \subset K$, entonces $\pi_{5,4}(\mathbf{B}_1) \subset K$.

Además de la propiedad (7), para $k = 2$, $\pi_{5,4}(\mathbf{C}_1) \neq \{(b, a)\} \neq \pi_{5,4}(\mathbf{C}_2)$ por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema 8.0.6. Por tanto $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2 = \{\mathbf{x}\}$ y se cumple la propiedad (j) para $k = 2$.

Siguiendo inductivamente contruimos los arcos deseados. ■

Corolario 8.1.14. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas. Supongamos también que existe $i \in \{1, 3\}$ y arcos $L \subset M_i(a, b)$, $K \subset M_i(b, a)$, tales que (a, b) es punto extremo de L y (b, a) es punto extremo de K (Figura 8.10). Entonces $ord(\mathbf{x}) = \infty = ord(\sigma(\mathbf{x}))$.

Teorema 8.1.15. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ o del punto (b, a) en $([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es no degenerada. Entonces existen sucesiones de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, y $\{\mathbf{C}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, con las siguientes propiedades:

- (1) \mathbf{B}_i tiene un punto extremo \mathbf{x} ,
- (2) \mathbf{C}_i tiene un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$,
- (3) Si $k \neq l$, $\mathbf{B}_k \cap \mathbf{B}_l = \{\mathbf{x}\}$.
- (4) Si $k \neq l$, $\mathbf{C}_k \cap \mathbf{C}_l = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Demostración.

Haremos la prueba para el caso en que la componente del punto (a, b) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada, la prueba para el caso en que la componente del punto (b, a) en $([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada se hace de manera similar.

Como la componente del punto (a, b) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es degenerada existe un punto $c \in [0, 1]$, tal que $\overline{ac} \times \{b\} \subset M$.

Sea $L = \overline{ac} \times \{b\}$, notemos que se satisfacen las hipótesis del Lema 8.0.6, por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) los puntos extremos de \mathbf{A} son de la forma \mathbf{x} e $(c, b, y_3, y_4, \dots) = \mathbf{y}$,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}) = L$,

(iii) $\mathbf{A} \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$.

Definamos para cada $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i \subset \varprojlim M$ como siguen:

$$\mathbf{B}_i = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} = (\pi_{2i}(\mathbf{x}), \mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathbf{A}\}$$

$$\mathbf{C}_i = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} = (\pi_{2i-1}(\sigma(\mathbf{x})), \mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathbf{A}\}.$$

Notemos que la funciones $\sigma^{2i} : \mathbf{B}_i \rightarrow \mathbf{A}$ y $\sigma^{2i-1} : \mathbf{C}_i \rightarrow \mathbf{A}$, son homeomorfismos, por tanto \mathbf{B}_i y \mathbf{C}_i son arcos.

Probaremos las propiedades (1) y (3) para cada $i \in \mathbb{N}$, las propiedades (2) y (4) para cada $i \in \mathbb{N}$, se prueban de manera similar.

De la definición de \mathbf{B}_i , tenemos que los puntos extremos de \mathbf{B}_i , son $(\pi_{2i}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ y $(\pi_{2i}(\mathbf{x}), \mathbf{y})$, por tanto \mathbf{B}_i tiene un punto extremo \mathbf{x} y se cumple (1).

Veamos que si $k \neq l$, $\mathbf{B}_k \cap \mathbf{B}_l = \{\mathbf{x}\}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $k < l$

Supongamos por el contrario que $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_k \neq \{\mathbf{x}\}$. Veremos que se cumplen la hipótesis del Corolario 1.1.6 para obtener una contradicción.

Por (1) \mathbf{B}_l y \mathbf{B}_k tienen un punto extremo \mathbf{x} y estamos suponiendo que $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \{\mathbf{x}\}$.

Nos falta ver que se cumple $\mathbf{B}_l \subsetneq \mathbf{B}_k$ y $\mathbf{B}_k \subsetneq \mathbf{B}_l$.

Probaremos que $(\pi_{2l}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \notin \mathbf{B}_k$ y $(\pi_{2k}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \notin \mathbf{B}_l$.

Como $\pi_{2k+1}(\pi_{2k}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = c \neq a$ y $\pi_{2k+1}(\mathbf{B}_l) = a$, entonces $(\pi_{2k}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \notin \mathbf{B}_l$.

Si $(\pi_{2l}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \in \mathbf{B}_k$, como $\mathbf{x} \in \mathbf{B}_k$ y $\varprojlim M$ es una dendrita, entonces $\mathbf{B}_l \subset \mathbf{B}_k$, entonces existe un arco $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}$ y $j \in \mathbb{N}$, tales que $\pi_{1,j}(\mathbf{A}') = \{\pi_{1,j}(\mathbf{x})\}$ y $\pi_{j+1}(\mathbf{A}') \neq \{\pi_{j+1}(\mathbf{x})\}$.

Entonces

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} = (z_1, \pi_{j,2j}(\mathbf{x}), \mathbf{w}), \mathbf{w} \in \mathbf{A}, z_1 \in \pi_{j+1}(\mathbf{A}')\}$$

es una dos celda contenida en $\varprojlim M$. Lo cual contradice que $\dim(\varprojlim M) = 1$, por tanto $(\pi_{2l}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \notin \mathbf{B}_k$.

Hemos probado que se satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1.6, por tanto $\mathbf{B}_l \cup \mathbf{B}_k$ contiene un triodo simple o una curva cerrada simple, como $\varprojlim M$ es una dendrita $\mathbf{B}_l \cup \mathbf{B}_k$ contiene un triodo simple, entonces existe $\mathbf{w} \in \mathbf{B}_l \cup \mathbf{B}_k$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{x}$, punto de ramificación.

Como $\pi_1(\mathbf{w}) = \pi(\mathbf{x})$, por el Teorema 6.2.2, tenemos que $\mathbf{w} = \mathbf{x}$ lo cual contradice que $\mathbf{w} \neq \mathbf{x}$.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 231

La contradicción nace de suponer que $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_k \neq \{\mathbf{x}\}$. Por tanto $\mathbf{B}_l \cap \mathbf{B}_k \neq \{\mathbf{x}\}$ y (3) queda probado. ■

Corolario 8.1.16. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ o del punto (b, a) en $([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es no degenerada. Entonces el $ord(\mathbf{x}) = \infty = ord(\sigma(\mathbf{x}))$.

Teorema 8.1.17. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b \dots)$. Supongamos la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada. Entonces existen sucesiones de arcos $\{\mathbf{B}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, y $\{\mathbf{C}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \varprojlim M$, con las siguientes propiedades:

- (1) \mathbf{B}_i tiene un punto extremo \mathbf{x} ,
- (2) \mathbf{C}_i tiene un punto extremo $\sigma(\mathbf{x})$,
- (3) Si $k \neq l$, $\mathbf{B}_k \cap \mathbf{B}_l = \{\mathbf{x}\}$.
- (4) Si $k \neq l$, $\mathbf{C}_k \cap \mathbf{C}_l = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Demostración.

Haremos la prueba para el caso en que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es degenerada, la prueba para el caso en que la componente del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es degenerada se hace de manera similar.

Como la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es degenerada existe un punto $c \in [0, 1]$, tal que $\{a\} \times \overline{bc} \subset M$.

Definamos $\mathbf{C}_1 = \{\mathbf{z} \in [0, 1]^\infty : \mathbf{z} = (t, \mathbf{x}), t \in \overline{bc}\}$

Por definición \mathbf{C}_1 es un arco con puntos extremos $(b, \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$ y (c, \mathbf{x}) , por lo que se cumple (3) para $k = 1$.

Además $\pi_1(\mathbf{C}_1) = \overline{bc}$, como M es una dendrita tal que $\varrho_1(M) = [0, 1]$ y $(b, a) \in M$, existe un arco J_1 con puntos extremos (b, a) y (c, d_1) tal que $\varrho_1(J) = \overline{bc}$.

Notemos que los arcos J_1 y \mathbf{C}_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{B}_1 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{B}_1 tiene puntos extremos $(a, \sigma(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ y $(d_1, c, \mathbf{x}) = \mathbf{y}^1$,
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) = J_1$,
- (iii) $\sigma(\mathbf{B}_1) = \mathbf{C}_1$.

Como J_1 tiene un punto extremo (b, a) , entonces existe un punto $c_2 \in [0, 1] - \{b\}$, tal que $\varrho_2(J_1) = \overline{a, c_1}$ y como $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_1) = J_1$, entonces $\pi_1(\mathbf{B}_1) = \overline{a, c_1}$.

como M es una dendrita tal que $\varrho_1(M) = [0, 1]$ y $(a, b) \in M$, existe un arco J_2 con puntos extremos (a, b) y (c_2, d_2) tal que $\varrho_1(J) = \overline{ac_2}$ y $J_2 \cap (\{a\} \times \overline{bc}) = \{(a, b)\}$.

Notemos que los arcos J_2 y \mathbf{B}_1 cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.2, (4), por tanto existe un arco $\mathbf{C}_2 \subset \varprojlim M$ con las siguientes propiedades:

- (iv) \mathbf{C}_2 tiene puntos extremos $(b, \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$ y \mathbf{y}^2 ,
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_2) = J_2$,
- (vi) $\sigma(\mathbf{C}_2) = \mathbf{B}_1$.

Veamos que $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2 = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(\mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2) \cap \mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Como $\sigma(\mathbf{x})$ es punto extremo de \mathbf{C}_1 y de \mathbf{C}_2 , y $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) = (\{a\} \times \overline{bc})$, $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_2) = J_2$, $J_2 \cap (\{a\} \times \overline{bc}) = \{(a, b)\}$ y $\pi_{2,1}(\mathbf{C}_1) \neq \{(a, b)\} \neq \pi_{2,1}(\mathbf{C}_2)$; entonces $\mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2 = \{\sigma(\mathbf{x})\}$.

Siguiendo con este proceso, construimos los arcos deseados. ■

Corolario 8.1.18. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Supongamos que la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada. Entonces el $\text{ord}(\mathbf{x}) = \infty = \text{ord}(\sigma(\mathbf{x}))$.

Teorema 8.1.19. Sean M un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, $a \in [0, 1]$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, tales que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$. Entonces el $\text{ord}(\mathbf{x}) = \infty$.

Demostración.

Vamos a hacer la prueba para el caso en que $a < 1$, la prueba en el caso en que $a > 0$ se hace de manera similar. Analizaremos los siguientes casos.

Caso 1 La componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es degenerada.

Por los Teoremas 7.2.6 y 7.3.1 tenemos que el $\text{ord}_M((a, a)) \geq 2$.

Vamos analizar los siguientes subcasos.

8.1. ORDEN DE LOS PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 233

Caso 1.1. Existen $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y arcos $L, J \subset M_i(a, a)$, tales que $L \cap J = \{(a, a)\}$.

- Si $i \in \{1, 3\}$, el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.
- Si $i \in \{2, 4\}$, vamos a hacer la prueba para el caso en que $i = 2$, la prueba en el caso $i = 4$ se hace de manera similar.

Como $L, J \subset M_2(a, a)$, entonces $a > 0$.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existen puntos $(1, b), (c, 0) \in M$. Sean $J_1, J_2 \subset M$, los arcos con puntos extremos $(1, b), (a, a)$ y $(a, a), (c, 0)$, respectivamente.

- Si $J_1 \subset M_1(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.
- Si $J_1 \subset M_4(a, a)$ o $J_2 \subset M_4(a, a)$ el resultado inmediato del Corolario 8.1.12.
- Si $J_2 \subset M_3(a, a)$ y $J_1 \subset M_1(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.
- Si $J_2 \subset M_3(a, a)$ y $J_1 \subset M_4(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

Caso 1.2. Existen $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$ y arcos $L \subset M_i(a, a)$, $J \subset M_j(a, a)$, tales que $L \cap J = \{(a, a)\}$.

Tenemos los siguientes subcasos:

Caso 1.2.1 $j = i + 1(\text{mod}4)$.

- Si $i \in \{1, 3\}$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.
- Si $i \in \{2, 4\}$. Vamos a hacer el caso en que $i = 2$ el caso en que $i = 4$ se hace de manera similar.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existe un punto $(1, b) \in M$. Sean $J_1 \subset M$, los arcos con puntos extremos $(1, b), (a, a)$.

- * Si $J_1 \subset M_1(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.10.
- * Si $J_1 \subset M_4(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.

el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.

Si $j = i + 2(\text{mod}4)$ el resultado se sigue del Teorema 8.1.10

De los Casos 1.1 y 1.2 terminamos la prueba del Caso 1.

Caso 1.2.2 $j = i + 2(\text{mod}4)$.

- Si $i \in 1, 3$ Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existe un punto $(c, 0) \in M$. Sean $J_1 \subset M$, el arco con puntos extremos $(c, 0), (a, a)$.

- * Si $J_1 \subset M_3(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.
- * Si $J_1 \subset M_4(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.10.

- Si $i \in 2, 4$ Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existe un punto $(c, 1) \in M$. Sean $J_1 \subset M$, el arco con puntos extremos $(c, 1), (a, a)$.

* Si $J_1 \subset M_2(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.10.

* Si $J_1 \subset M_1(a, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.8.

Caso 2 La componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o la componente del punto (a, a) en $([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es no degenerada.

- Si la componente del punto (a, a) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, el resultado es inmediato del Corolario 8.1.16.

- Si la componente del punto (a, a) en $([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ es no degenerada el resultado es inmediato del Corolario 8.1.18. ■

Teorema 8.1.20. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $0 < a \leq b < 1$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$. Entonces el $ord(\mathbf{x}) = \infty = ord((b, \mathbf{x}))$.

Demostración. Vamos a hacer la prueba para el caso en que $b < 1$, la prueba en que $a > 0$ se hace de manera similar. Analizaremos los siguientes casos.

Caso 1 La componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ y la componente del punto (b, a) en $(\{b\} \times [0, 1]) \cap M \cup ([0, 1] \times \{a\}) \cap M$ son degeneradas.

Por los Teoremas 7.2.6 y 7.3.2 tenemos que el $ord_M((a, b)), ord_M((b, a)) \geq 2$.

Vamos a analizar los siguientes subcasos.

Caso 1.1. Existen $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y arcos $L, J \subset M_i(a, b)$, tales que $L \cap J = \{(a, b)\}$.

Si $i = \{2, 4\}$ el resultado es inmediato de del Corolario 8.1.12.

Si $i = \{1, 3\}$. Vamos a hacer la prueba para el caso en que $i = 1$, la prueba para el caso en que $i = 3$ se hace de manera similar.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existen puntos $(0, b), (1, c) \in M$. Sean $J_1, J_2 \subset M$, los arcos con puntos extremos $(0, b), (a, b)$ y $(b, a), (1, c)$, respectivamente.

- Si $J_1 \subset M_1(a, b)$ y $J_2 \subset M_4(b, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.10.

- Si $J_1 \subset M_1(a, b)$ y $J_2 \subset M_1(b, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.14.

- Si $J_1 \subset M_3(a, b)$ y $J_2 \subset M_4(b, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

8.2. ARCOS Y PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 235

- Si $J_1 \subset M_3(a, b)$ y $J_2 \subset M_1(b, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

Caso 1.2. Existen $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$ y arcos $L \subset M_i(a, b)$, $J \subset M_j(a, b)$, tales que $L \cap J = \{(a, b)\}$.

Tenemos los siguientes subcasos:

Caso 1.2.1 $j = i + 1 \pmod{4}$.

-Si $i \in \{1, 2, 3\}$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

-Si $i \in \{4\}$.

Como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existe un punto $(1, c) \in M$. Sea $J_1 \subset M$, el arco con puntos extremos $(1, c)$, (b, a) .

* Si $J_1 \subset M_1(b, a)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.14.

* Si $J_1 \subset M_4(a, a)$; como $\varrho_1(M) = [0, 1] = \varrho_2(M)$, existe un punto $(0, d) \in M$. Sea $J_2 \subset M$, el arco con puntos extremos $(0, d)$, (a, b) .

+ Si $J_2 \subset M_2(a, b)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

+ Si $J_2 \subset M_3(a, b)$ el resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

Caso 1.2.2 $j = i + 2 \pmod{4}$.

El resultado es inmediato del Corolario 8.1.12.

Caso 2 La componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ o la componente del punto (a, a) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es no degenerada.

- Si la componente del punto (a, b) en $(\{a\} \times [0, 1]) \cap M$ es no degenerada, el resultado es inmediato del Corolario 8.1.16.

- Si la componente del punto (a, b) en $([0, 1] \times \{b\}) \cap M$ es no degenerada el resultado es inmediato del Corolario 8.1.18. ■

8.2. Arcos que contienen a los puntos de ramificación del límite inverso

En esta sección probaremos que si M es un subconjunto cerrado de $[0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, entonces existe un arco en $\varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{A}$.

Teorema 8.2.1. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $a < b$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $\mathbf{z} = (b, b, b, \dots)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un arco $A_k \subset G_k$, con las siguientes propiedades:

- (1) \mathbf{A}_k tiene puntos extremos $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$ y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{z})$
 (2) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, $\pi_i(\mathbf{A}_k) = [a, b]$.

Demostración.

Definamos $L \subset M$ el arco con puntos extremos (a, a) y (b, b) . Por el Teorema 6.1.5 $L \subset [a, b] \times [a, b]$.

Probaremos la existencia de los arcos por inducción sobre k .

Para $k = 1$. Definamos $\mathbf{A}_1 = \{(r, s) \in G_1 : (s, r) \in L\}$ por el Teorema 1.2.1, \mathbf{A}_1 es un arco con puntos extremos (a, a) y (b, b) , por tanto se cumple la propiedad (1), además como L tiene puntos extremos (a, a) y (b, b) . Por el Teorema 6.1.6 $\varrho_1(L) = [a, b] = \varrho_2(L)$, entonces $\pi_1(\mathbf{A}_1) = [a, b] = \pi_2(\mathbf{A}_1)$. Por tanto se cumple la propiedad (2).

Para $k = 2$. Notemos que los arcos L y \mathbf{A}_1 satisfacen las hipótesis del Corolario 4.4.3. Por tanto existe un arco $\mathbf{A}_2 \subset G_2$ con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A}_2 tiene puntos extremos (a, a, a) y (b, b, b)
 (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_2) = L$,
 (iii) $\pi_{1,2}(\mathbf{A}_2) = \mathbf{A}_1$.

De (i) se cumple la propiedad (1) para $k = 2$.

De (ii), tenemos que $\pi_1(\mathbf{A}_2) = \varrho_2(L) = [a, b]$, y de (iii) tenemos que $\pi_2(\mathbf{A}_2) = \pi_1(\mathbf{A}_1) = [a, b]$ y $\pi_3(\mathbf{A}_2) = \pi_2(\mathbf{A}_1) = [a, b]$. Por tanto se cumple la propiedad (2) para $k = 2$.

Supongamos que hemos construido arcos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ que cumplen las propiedades (1)-(3).

Construiremos ahora el arco \mathbf{A}_{n+1} . Notemos que los arcos L y \mathbf{A}_n satisfacen las hipótesis del Corolario 4.4.3. Por tanto existe un arco $\mathbf{A}_{n+1} \subset G_{n+1}$ con las siguientes propiedades:

- (iv) \mathbf{A}_{n+1} tiene puntos extremos $(a, \pi_{1,n+1}(\mathbf{x}))$ y $(b, \pi_{1,n+1}(\mathbf{z}))$
 (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_{n+1}) = L$,
 (vi) $\pi_{1,n+1}(\mathbf{A}_{n+1}) = \mathbf{A}_n$.

De (iv) se cumple la propiedad (1) para $k = n + 1$.

De (v), tenemos que $\pi_1(\mathbf{A}_{n+1}) = \varrho_2(L) = [a, b]$, y de (vi) tenemos que para cada $i \in \{2, \dots, n+2\}$ $\pi_i(\mathbf{A}_{n+1}) = \pi_{i-1}(\mathbf{A}_n) = [a, b]$, por tanto se cumple la propiedad (2) para $k = n + 1$.

Por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un arco $\mathbf{A}_k \subset G_k$, con las propiedades (1)-(3). ■

Teorema 8.2.2. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{xz} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b \in [0, 1]$ con $a < b$, tales que $\mathbf{x} = (a, a, a, \dots)$ y $\mathbf{z} = (b, b, b, \dots)$. Entonces el arco \mathbf{B} con puntos extremos \mathbf{x} y \mathbf{z} , cumple que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i(\mathbf{B}) = [a, b]$.

Demostración.

Notemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 8.2.1, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un arco $\mathbf{A}_k \subset G_k$, con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A}_k tiene puntos extremos $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$ y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})$
- (ii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, $\pi_i(\mathbf{A}_k) = [a, b]$,
- (iii) para $k > 1$, $\pi_{1,k}(\mathbf{A}_k) = \mathbf{A}_{k-1}$.

Además se satisfacen la hipótesis del Teorema 1.1.1 por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades

- (iv) $\pi_i(\mathbf{A}) = [a, b]$,
- (v) $\pi_i(\mathbf{p}) = a$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = b$,
- (vi) $\pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (a, b)$.

Notemos que los arcos \mathbf{A} y \mathbf{A}_k satisfacen las hipótesis del Teorema 4.4.1, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un arco \mathbf{B}_k con las siguientes propiedades:

- (vii) \mathbf{B}_k tiene puntos extremos $(\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, $(\pi_{1,k+1}(\mathbf{z}, \mathbf{q}))$
- (viii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{B}_k) = \mathbf{A}_k$,
- (ix) $\sigma^k(\mathbf{B}_k) = \mathbf{B}_{k-1}$.

Definamos $\mathbf{B} = \lim \mathbf{B}_k$, de la propiedad (vii) tenemos que el arco \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{x} e \mathbf{y} y de las propiedad (viii) y (ii) tenemos que cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i(\mathbf{B}) = [a, b]$, por tanto el teorema queda demostrado. ■

Teorema 8.2.3. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$. Supongamos que todos sus puntos de ramificación son fijos bajo σ . Entonces existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{B}$.

Demostración.

Si $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| \leq 2$ el resultado es inmediato.

Supongamos que $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = n > 2$.

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$, tales que $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 1$, y para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbf{x}^i = (a_i, a_i, a_i, \dots) \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$

Definamos para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, \mathbf{B}_i el arco con puntos extremos \mathbf{x}^{i-1} , \mathbf{x}^i .

Por el Teorema 8.2.2, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\pi_i(\mathbf{B}_i) = [a_{i-1}, a_i]$, entonces para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, $\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_{i+1} = \{\mathbf{x}^i\}$ y si $|i - j| > 1$, $\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_{i+1} = \emptyset$.

Por tanto $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 \cup \mathbf{B}_3 \cup \dots \cup \mathbf{B}_n$ es un arco, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{B}$, y el teorema queda demostrado. ■

Teorema 8.2.4. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{xz} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b, c, d \in [0, 1]$ con $c < a \leq b < d$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $\mathbf{z} = (c, d, c, d, \dots)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k \subset G_k$, con las siguientes propiedades:

- (1) \mathbf{A}_k tiene puntos extremos $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))$ y $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{z}))$,
- (2) \mathbf{B}_k tiene puntos extremos $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$ y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{z})$,
- (3) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, si i es par $\pi_i(\mathbf{A}_k) = [c, a]$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{A}_k) = [b, d]$
- (4) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, si i es par $\pi_i(\mathbf{B}_k) = [b, d]$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{B}_k) = [c, a]$,
- (5) para $k > 1$, $\pi_{1,k}(\mathbf{A}_k) = \mathbf{B}_{k-1}$,
- (6) para $k > 1$, $\pi_{1,k}(\mathbf{B}_k) = \mathbf{A}_{k-1}$

Demostración.

Definamos $L, J \subset M$ los arcos con puntos extremos (a, b) , (c, d) y (b, a) , (d, c) . Por el Teorema 6.1.5, tenemos que $L \subset [c, a] \times [b, d]$ y $L \subset [b, d] \times [c, a]$

Probaremos el teorema, procediendo por inducción sobre k .

Para $k = 1$, definamos $\mathbf{A}_1 = \{(r, s) \in G_1 : (s, r) \in L\}$ y $\mathbf{B}_1 = \{(r, s) \in G_1 : (s, r) \in J\}$ por el Teorema 1.2.1, tenemos que \mathbf{A}_1 y \mathbf{B}_1 son arcos con puntos extremos (b, a) , (d, c) y (a, b) , (c, d) , por tanto se cumple la propiedad (1) y (2), además como L y J tienen puntos extremos (a, b) , (c, d) y (b, a) , (d, c) . Por el Teorema 6.1.6, tenemos que $\varrho_1(L) = [a, c] = \varrho_2(J)$, y $\varrho_2(L) = [d, b] = \varrho_1(J)$, entonces $\pi_1(\mathbf{A}_1) = [d, b] = \pi_2(\mathbf{B}_1)$ y $\pi_1(\mathbf{B}_1) = [c, a] = \pi_2(\mathbf{A}_1)$. Por tanto se cumplen las propiedades (3) y (4).

Para $k = 2$. Notemos que los arcos L, \mathbf{B}_1 y J, \mathbf{A}_1 satisfacen las hipótesis del Corolario 4.4.3. Por tanto existen arcos \mathbf{A}_2 y \mathbf{B}_2 con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A}_2 tiene puntos extremos (b, a, b) y (d, c, d)
- (ii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_2) = L$,
- (iii) $\pi_{1,2}(\mathbf{A}_2) = \mathbf{B}_1$,
- (iv) \mathbf{B}_2 tiene puntos extremos (a, b, a) y (b, c, b)
- (v) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_2) = J$,
- (vi) $\pi_{1,2}(\mathbf{B}_2) = \mathbf{A}_1$.

De (i) y (iv) se cumplen las propiedades (1) y (2) para $k = 2$.

8.2. ARCOS Y PUNTOS DE RAMIFICACIÓN DEL LÍMITE INVERSO 239

De (ii), tenemos que $\pi_1(\mathbf{A}_2) = \varrho_2(L) = [b, d]$, y de (iii) tenemos que $\pi_2(\mathbf{A}_2) = \pi_1(\mathbf{B}_1) = [c, a]$ y $\pi_3(\mathbf{A}_2) = \pi_2(\mathbf{B}_1) = [b, d]$. Por tanto se cumple la propiedad (3) para $k = 2$.

De (v), tenemos que $\pi_1(\mathbf{B}_2) = \varrho_2(J) = [c, a]$, y de (iii) tenemos que $\pi_2(\mathbf{B}_2) = \pi_1(\mathbf{A}_1) = [b, d]$ y $\pi_3(\mathbf{B}_2) = \pi_2(\mathbf{A}_1) = [c, a]$. Por tanto se cumple la propiedad (4) para $k = 2$.

De (iii) y (vi) se cumple las propiedades (5) y (6) para $k = 2$.

Supongamos que hemos contruido arcos $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ y $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n$ que cumplen las propiedades (1)-(6).

Costruiremos ahora los arcos \mathbf{A}_{n+1} y \mathbf{B}_{n+1} . Haremos el caso en que n es par, el caso en que n es impar se hace de manera similar. Notemos que los arcos L, \mathbf{B}_n y J, \mathbf{A}_n satisfacen las hipótesis del Corolario 4.4.3. Por tanto existen arcos \mathbf{A}_{n+1} y \mathbf{B}_{n+1} con las siguientes propiedades:

- (vii) \mathbf{A}_{n+1} tiene puntos extremos $(b, \pi_{n+1}(\mathbf{x}))$ y $(d, \pi_{n+1}(\mathbf{z}))$
- (viii) $\pi_{2,1}(\mathbf{A}_{n+1}) = L$,
- (ix) $\pi_{1,n+1}(\mathbf{A}_{n+1}) = \mathbf{B}_n$,
- (x) \mathbf{B}_{n+1} tiene puntos extremos $(a, \pi_{n+1}(\sigma(\mathbf{x})))$ y $(c, \pi_{n+1}(\sigma(\mathbf{z})))$
- (xi) $\pi_{2,1}(\mathbf{B}_{n+1}) = J$,
- (xii) $\pi_{1,n+1}(\mathbf{B}_{n+1}) = \mathbf{A}_n$.

De (vii) y (x) se cumple la propiedad (1) y (2) para $k = n + 1$.

De (vii), tenemos que $\pi_1(\mathbf{A}_{n+1}) = \varrho_2(L) = [b, d]$, y de (viii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$, si i es par $\pi_{i+1}(\mathbf{B}_{n+1}) = \pi_i(\mathbf{B}_n) = [b, d]$, si i es impar $\pi_{i+1}(\mathbf{B}_{n+1}) = \pi_i(\mathbf{B}_n) = [c, a]$, por tanto se cumple la propiedad (3) para $k = n + 1$. De manera similar se cumple la propiedad (4)

De (ix) y (xii) se cumple las propiedades (5) y (6) para $k = n + 1$.

Si n es impar se utilizan los arcos J, \mathbf{B}_n y L, \mathbf{A}_n para contruir los arcos \mathbf{A}_{n+1} y \mathbf{B}_{n+1} .

Por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existen arcos $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k \subset G_k$, con las propiedades (1)-(6). ■

Teorema 8.2.5. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$; $\mathbf{xz} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ y $a, b, c, d \in [0, 1]$ con $c < a \leq b < d$, tales que $\mathbf{x} = (a, b, a, b, a, b, \dots)$ y $\mathbf{z} = (c, d, c, d, \dots)$. Entonces

(1) el arco \mathbf{B} con puntos extremos \mathbf{x} y \mathbf{z} cumple que, para cada $i \in \mathbb{N}$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{B}) = [c, a]$, y si i es par $\pi_i(\mathbf{B}) = [d, b]$.

(2) el arco \mathbf{D} con puntos extremos $\sigma(\mathbf{x})$ y $\sigma(\mathbf{z})$ cumple que, para cada $i \in \mathbb{N}$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{D}) = [d, b]$, y si i es par $\pi_i(\mathbf{D}) = [c, a]$.

Demostración.

Haremos la prueba de (1), la prueba de (2) se hace de manera similar. Notemos que se satisfacen las hipótesis del Teorema 8.2.4, por tanto para cada $k \in \mathbb{N}$ existen arcos con las siguientes propiedades:

- (i) \mathbf{A}_k tiene puntos extremos $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{x}))$ y $\pi_{1,k+1}(\sigma(\mathbf{y}))$,
- (ii) \mathbf{B}_k tiene puntos extremos $\pi_{1,k+1}(\mathbf{x})$ y $\pi_{1,k+1}(\mathbf{y})$,
- (iii) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, si i es par $\pi_i(\mathbf{A}_k) = [c, a]$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{A}_k) = [b, d]$
- (iv) para cada $i \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, si i es par $\pi_i(\mathbf{B}_k) = [b, d]$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{B}_k) = [c, a]$,
- (v) para $k > 1$, $\pi_{1,k}(\mathbf{A}_k) = \mathbf{B}_{k-1}$,
- (vi) para $k > 1$, $\pi_{1,k}(\mathbf{B}_k) = \mathbf{A}_{k-1}$.

Además se satisfacen la hipótesis del Teorema 1.1.1 por tanto existe un arco $\mathbf{A} \subset \varprojlim M$ con puntos extremos \mathbf{p} y \mathbf{q} , tal que cumple las siguientes propiedades

- (iv) $\pi_i(\mathbf{A}) = [c, a]$,
- (v) $\pi_i(\mathbf{p}) = a$ y $\pi_i(\mathbf{q}) = c$,
- (vi) $\pi_i(\mathbf{A} - \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}) = (c, a)$.

Notemos que si k es impar los arcos \mathbf{A} y \mathbf{B}_k satisfacen las hipótesis del Teorema 4.4.1 por tanto existe un arco \mathbf{B}_k con las siguientes propiedades.

- (vii) \mathbf{B}_k tiene puntos extremos $(\pi_{1,k+1}(\mathbf{x}, \mathbf{p}))$, $(\pi_{1,k+1}(\mathbf{z}, \mathbf{q}))$
- (viii) $\pi_{1,k+1}(\mathbf{B}_k) = \mathbf{A}_k$.
- (ix) $\sigma^k(\mathbf{B}_k) = \mathbf{A}$.

Definamos $\mathbf{B} = \lim \mathbf{B}_k$, de la propiedad (vii) tenemos que el arco \mathbf{B} tiene puntos extremos \mathbf{x} e \mathbf{z} y de la propiedad (viii) y (iii), tenemos que para cada $i \in \mathbb{N}$, si i es impar $\pi_i(\mathbf{B}) = [c, a]$, y si i es par $\pi_i(\mathbf{B}) = [d, b]$ y (1) queda demostrado.

De manera similar se prueba (2). ■

Teorema 8.2.6. Sean $M \subset [0, 1]^2$, tal que $\varprojlim M$ es una dendrita con $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| < \infty$, tal que tiene un punto de orden 2 bajo σ , entonces existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{B}$.

Demostración.

Si $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| \leq 2$ el resultado es inmediato.

Supongamos que $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = n > 2$.

Existen puntos $a_1, a_2, \dots, a_{[n]}, b_1, b_2, \dots, b_{[n]} \in [0, 1]$, tales que $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{[n]} \leq b_{[n]} < \dots < b_2 < b_1 \leq 1$, y par cada $i \in \{1, 2, \dots, [n]\}$, $\mathbf{x}^i, \mathbf{z}^i \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$ con $\mathbf{x}^i = (a_i, b_i, a_i, b_i, a_i, \dots)$ y $\mathbf{z}^i = (b_i, a_i, b_i, a_i, b_i, \dots)$

Definamos para cada $i \in \{2, 3, \dots, [n]\}$, \mathbf{B}_i el arco con puntos extremos $\mathbf{x}^{i-1}, \mathbf{x}^i$ y \mathbf{D}_i el arco con puntos extremos $\mathbf{z}^{i-1}, \mathbf{z}^i$

Por el Teorema 8.2.5, tenemos que para cada $i \in \{2, 3, \dots, [n]\}$, $\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_{i+1} = \{\mathbf{x}^i\}$ y si $|i - j| > 1$, entonces $\mathbf{B}_i \cap \mathbf{B}_{i+1} = \emptyset$, $\mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}_{i+1} = \{\mathbf{z}^i\}$ y si $|i - j| > 1$, entonces $\mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}_{i+1} = \emptyset$.

Por tanto $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 \cup \mathbf{B}_3 \cup \dots \cup \mathbf{B}_{[n]} \cup \mathbf{D}_{[n]} \cup \dots \cup \mathbf{D}_3 \cup \mathbf{D}_2$ es un arco, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{B}$. ■

8.3. Carazterización de las dendritas con un número finito de puntos de ramificación que son límites inversos de subconjuntos cerrados del cuadrado unitario

Es esta sección damos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 8.3.1. Una dendrita D con $|\mathcal{R}(D)| < \infty$ es límite inverso de un subconjunto cerrado M de $[0, 1]^2$ si y sólo si existe un arco $B \subset D$, tal que $\mathcal{R}(D) \subset B$ y para cada punto $x \in \mathcal{R}(D)$, $ord(x) = \infty$.

Demostración.

Supongamos que D es una dendrita que es límite inverso de un subconjunto cerrado M de $[0, 1]^2$. ($D = \varprojlim M$)

Si $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = 1$, entonces existe un punto $\mathbf{x} \in \varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) = \{\mathbf{x}\}$ y por el Teorema 6.2.8, tenemos que el orden de \mathbf{x} bajo σ es a lo mas 2, como $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = 1$, entonces el orden de \mathbf{x} bajo σ es 1. Por el Teorema 8.1.19, tenemos que $ord(\mathbf{x}) = \infty$. Por tanto si $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| = 1$, la primera implicación del teorema queda demostrada.

Supongamos que $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| > 1$, analizaremos los siguientes casos:

Caso 1 Todos los puntos de ramificación de $\varprojlim M$ son fijos bajo σ .

Por el Teorema 8.1.19, tenemos que para cada punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, cumple que $ord(\mathbf{x}) = \infty$ y por el Teorema 8.2.3, tenemos que existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{B}$.

Caso 2 Existe un punto de ramificación de $\varprojlim M$ que no es fijo bajo σ .

Por el Teorema 8.1.20, tenemos que para cada punto $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\varprojlim M)$, cumple que $ord(\mathbf{x}) = \infty$ y por el Teorema 8.2.6, tenemos que existe un arco $\mathbf{B} \subset \varprojlim M$, tal que $\mathcal{R}(\varprojlim M) \subset \mathbf{B}$.

De los Casos 1 y 2 la primera implicación del teorema queda demostrada para cuando $|\mathcal{R}(\varprojlim M)| > 1$.

Supongamos que D es una dendrita con $|\mathcal{R}(D)| = n$, tal que para cada punto $x \in \mathcal{R}(D)$, $ord(x) = \infty$ y que existe un arco $B \subset D$, $\mathcal{R}(D) \subset B$.

Se sabe que si M es el conjunto cerrado que aparece a la izquierda de la Figura 8.11, entonces $\varprojlim M$ es el continuo de la parte derecha de la Figura 8.11

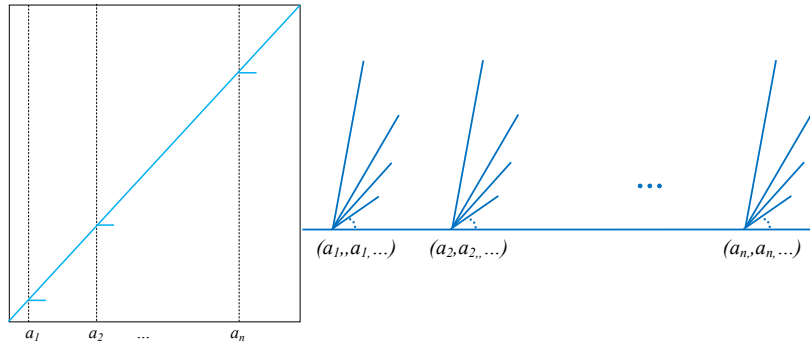


Figura 8.11:

Por tanto D es límite inverso de un subconjunto cerrado M de $[0, 1]^2$. ■

Bibliografía

- [1] A. Illanes, *Hiperespacios de Continuos*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.
- [2] A. Illanes, *A circle is not the generalized inverse limit of $[0, 1]^2$* , Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 2987-2993.
- [3] A. Illanes and S. B. Nadler, *Hyperspaces, Fundamentals and Recent Advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.
- [4] W. T. Ingram and W. S. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math. 32 (2006), No. 1, 119-130 (electronic).
- [5] W. T. Ingram, *An Introduction to Inverse Limits with Set-valued Functions*, Springer, New York, 2012.
- [6] W. T. Ingram, *Concerning nonconnected inverse limits with upper semi-continuous set-valued functions*, Topology Proc. 40 (2012), 203-214.
- [7] Iztok Banic, Matevz Crepnjak, Matej Merhar, Uros Milutinovic, Tina Sovic, *Wazewski's universal dendrite as an inverse limit with one set-valued bonding function*. Glas. Mat. Ser. III 48(68) (2013), no. 1, 137-165.
- [8] Iztok Banic and Verónica Martínez-de-la Vega, *Universal dendrite d_3 as a generalized inverse limit*, Houston J. Math Vol41(2), 319-326.
- [9] J. P. Huneke, *Mountain Climbing*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 383-391.

- [10] W. T. Ingram, William S. Mahavier, *Inberse Limits From Continua to Chaos*, Springer, Develpments in Mathematics, New York, 2012.
- [11] K. Kuratowski, *Topology, vol. 2*, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa, 1968.
- [12] W. S. Mahavier, *Inverse limits with subsets of $[0, 1] \times [0, 1]$* , Topology Appl. 141 (2004) 225-231.
- [13] S. B. Nadler Jr, *Continuum Theory: an Introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
- [14] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill Book, Inc., Singapur, 1976.
- [15] R. Sikorski and K. Zarankiewicz, *On the uniformization of functions (I)*, Fund. Math. 41 (1955), 339-344.
- [16] Stephen Willard, *General Topology*, Dover Publications, Inc., New York, 2004.
- [17] V. Nall *Finite graphs that are inverse limits with a set valued funtion on $[0, 1]$* , Topology Appl. 158 (2011) 1226-1233.
- [18] V. Nall *The only finite graph that is an inverse limit with a set valued function on $[0, 1]$ is an arc*, Topology Appl. 141 (2004) 225-231.
- [19] V. Nall *More continua which are not the inverse limit with a closed subset of a unit square*, to appear Houston Journal of Math (2013)