**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

# HIPERESPACIOS DE CONTINUOS NO MÉTRICOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
LUIS MIGUEL GARCÍA VELÁZQUEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. ALEJANDRO ILLANES MEJÍA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM
DR. FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS, UMSNH

MÉXICO, D. F., SEPTIEMBRE DE 2015.

# Hiperespacios de Continuos No Métricos

Luis Miguel García Velázquez

*Para Rodrigo.*

# Antes de comenzar

*Bitácora de navegación, 26:08:2015.*

Descubrí la vocación de curioso hace poco más de 20 años, concursando en la Olimpiada de Matemáticas, mientras los profesores nos entrenaban para asaltar problemas difíciles. Sin importar si el navío era de combinatoria, números o geometría, los aprendices apretábamos el cuchillo entre los dientes y saltábamos a cubierta tras del capitán, arrebatados, al abordaje del problema.

Uno de los profesores que más tiempo dedicó a nuestro entrenamiento fue Alejandro Illanes, quien desde aquel entonces ha sido un ejemplo y una inspiración para mí. Antes de comenzar este trabajo, quiero agradecerle su guía a lo largo de esta expedición, siempre motivándome a explorar y profundizar, a mantener el rumbo, a descubrir y conquistar.

Confieso que no me lo propuse desde una edad temprana, pero la verdad es que yo, de grande, quería ser aventurero. El derrotero que seguí hasta ahora -bastante accidentado, por cierto-, me ha dejado grandes amigos. Para celebrar la conclusión de este trabajo, este pirata quiere agradecerle a quienes lo ayudaron a soltar las amarras y lo acompañaron en sus correrías, mar adentro, a lo largo de esta travesía. Gracias a Abu, Aída, Clau (¡sobrina!), Collins, Daniela, Eugenia, Gasde, Gaby, Irving, Jana, Karla (¡Dorita!), Ivón, Isa, Leo, Malú, María (¡equipo!), Martha, Paty, Señora-chan, Ser-Feliz, Vero y Yaziel. Camaradas marineros: ha sido un verdadero honor formar parte de esta tripulación.

Hace un año, una sirena encerró a mi madre en la inmovilidad, aturdiéndola con su terrible canto de tormenta. Luchando para salir de su prisión, mamá me enseñó que la tempestad más fiera dura apenas un momento, cuando la voluntad persiste. Por todo lo que hemos conseguido juntos, muchas gracias, mamá.

Antes de terminar, quiero hacerle un agradecimiento muy especial a María Elena. De no ser por su oportuna intervención, esta aventura simplemente nunca hubiera sucedido. Hermanita, gracias por estar conmigo en todas las batallas.

El último agradecimiento en esta bitácora es para ti, Rodrigo, a quien dedico este trabajo. Me embarqué en esta expedición sin otra estrella que la de mi buena fortuna, y esa estrella me ha traído a ti. En tus manos tibias encontré mi puerto, y juntos, entrelazando dedos, tejimos un continente para los dos. Levantamos un arrecife de libros a la orilla de este cuerpo, nuestro cuerpo, para que el ímpetu de las olas reviente en canciones de Sigur Rós. En la costa, a la altura del pecho, las horas se desenredan en un delta de conversaciones interminables; sobre la arena, a la altura de los párpados, el cielo se constela con las memorias de Bullock, de Salgado, de Cartier-Bresson.

Tú, mi tierra firme, mi bandera, mi barro y mi espuma. Tú, el sendero de luz, el asombro que separa los labios de la niebla. Emprendí esta travesía sin otro faro que mi vocación de cursioso; siguiéndolo te descubrí, y al hallarte, me encontré. Te amo, Rodrigo.

# Contenido

# Presentación

Un *continuo de Hausdorff* es un espacio topológico Hausdorff compacto, conexo y no degenerado. Una herramienta importante para el estudio de las propiedades de los continuos es la teoría de los hiperespacios.

Los hiperespacios de un continuo $X$ son espacios cuyos elementos son subconjuntos especiales de $X$. Los más conocidos son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\},$$

$$F_n(x) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\} \text{ y}$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}.$$

A estos hiperespacios se les considera con la *topología de Vietoris*, que está dada por la base $\{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : n$ es un entero positivo y $U_i$ es abierto en $X$ para cada entero positivo $i \leq n\}$, donde $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{A \in 2^X | A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada número positivo $i \leq n\}$.

Cuando el espacio $X$ es metrizable se le llama *continuo métrico*; para este caso, los hiperespacios antes mencionados han sido estudiados ampliamente. Los libros *Hyperspaces of sets*, de S. B. Nadler, Jr [17] y *Hyperspaces: fundamentals and recent advances*, de A. Illanes y S. B. Nadler, Jr. [8], proporcionan una extensa fuente de información sobre los resultados y las referencias a los estudios hechos en este caso.

La teoría de hiperespacios ha sido una herramienta muy útil para el estudio de la teoría de los continuos métricos. Muchas propiedades topológicas de un continuo $X$ pueden ser establecidas en términos de las propiedades topológicas de $C(X)$, y viceversa. Con esta idea en mente, el objetivo de esta tesis es extender la teoría básica de los hiperespacios de continuos métricos al caso de los continuos de Hausdorff.

En el primer capítulo de este trabajo se presentan algunos ejemplos de continuos de Hausdorff, se introduce el concepto de hiperespacio y su topología y se prueba que $2^X$ y $C(X)$ son compactos. En el segundo capítulo de la tesis se desarrolla una herramienta de gran utilidad para el estudio de los hiperespacios: los arcos ordenados.

Otra herramienta muy importante para el estudio de los hiperespacios de continuos métricos son las funciones de Whitney; sin embargo, J. J. Charatonik y W. J. Charatonik observaron en [2] que los hiperespacios de continuos no metrizables no siempre admiten este tipo de funciones.

Un nivel de Whitney es la fibra de una función de Whitney, cuando ésta existe. En el caso métrico, A. Illanes caracterizó en [6] los niveles de Whitney sin utilizar las funciones de Whitney. Tomando esta caracterización como definición en el caso de los hiperespacios de continuos de Hausdorff, resulta que éstos siempre contienen al menos dos niveles: $F_1(X)$ y $\{X\}$; a esos niveles los llamamos *triviales*.

En el tercer capítulo se prueba que los niveles de Whitney en $C(X)$ son subcontinuos de éste y se presentan algunos resultados sobre ellos, mismos que se aplican para determinar si existen o no niveles no triviales en ejemplos concretos. La sección finaliza con algunos resultados sobre la existencia de funciones de Whitney y sobre algunas propiedades topológicas que comparte un continuo $X$ con sus niveles de Whitney.

El cuarto capítulo de la tesis presenta una prueba de que $C(X)$ es un espacio unicoherente, mientras que el siguiente capítulo presenta una aplicación de este resultado. Una *selección para* $C(X)$ es una función continua $s : C(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$; en el capítulo quinto investigamos las propiedades de los continuos de Hausdorff $X$ tales que existe una selección para $C(X)$.

El sexto capítulo de la tesis propone dos formas para estudiar la contractibilidad de $C(X)$ que extienden la teoría del caso de los hiperespacios de continuos métricos: *contractibilidad* y *contractibilidad de* $F_1(X)$ *por arcos ordenados*. En el capítulo se muestra un continuo de Hausdorff $X$ tal que $C(X)$ es contráctil pero $F_1(X)$ no es contráctil por arcos ordenados. Llegando a este punto, nos planteamos el problema de encontrar condiciones suficientes en un continuo de Hausdorff $X$ para que $F_1(X)$ sea contráctil por arcos ordenados en $C(X)$.

En el caso de los continuos métricos, ser homogéneo implica tener la propiedad de Kelley. Se sabe además que, si $X$ es un continuo métrico y tiene la propiedad de Kelley, entonces $C(X)$ es contráctil por arcos ordenados en $C(X)$. En [3] se presenta un continuo no metrizable que es homogéneo, pero no tiene la propiedad de Kelley; para construir ese ejemplo, en este mismo artículo se muestra un continuo no métrico que es homogéneo y sí tiene la propiedad de Kelley. Utilizando este ejemplo probamos que, a diferencia del caso métrico, ser homogéneo o tener la propiedad de Kelley no son de las condiciones suficientes para que $F_1(X)$ sea contráctil por arcos ordenados en $C(X)$.

Para finalizar el sexto capítulo, mostramos que ser hereditariamente indescomponible sí es una condición suficiente en un continuo de Hausdorff $X$ para que $F_1(X)$ sea contráctil por arcos ordenados en $C(X)$. Este resultado extiende el resultado correspondiente del caso métrico.

Finalmente, abordamos una última pregunta sobre las funciones de Whitney. En el caso de los continuos métricos, todos los arcos ordenados en $C(X)$ son homeomorfos a $[0, 1]$; durante la realización de este trabajo, el Dr. David Bellamy preguntó si esa condición sería suficiente -en el caso no métrico- para que un hiperespacio $C(X)$ admita una función de Whitney. En el último capítulo de la tesis, utilizamos uno de los ejemplos desarrollados en el capítulo anterior para responder esta pregunta de forma negativa. Con este resultado concluimos el presente trabajo.

# Capítulo 1

# Hiperespacios de Continuos de Hausdorff

Un *continuo de Hausdorff* es un espacio topológico Hausdorff, compacto, conexo y no degenerado. Para abreviar, otra forma de llamar a un continuo de Hausdorff será *continuo* $T_2$. Un *continuo métrico* es un continuo de Hausdorff que es metrizable.

Comenzaremos este capítulo dando algunas definiciones que nos permitirán presentar ejemplos de continuos de Hausdorff. Posteriormente nos enfocaremos a mostrar resultados básicos que serán utilizados a lo largo de la tesis.

Si $A$ es un subespacio de un espacio topológico $Z$, entonces $\mathrm{cl}_Z(A)$, $\mathrm{int}_Z(A)$ y $\mathrm{fr}_Z(A)$ denotan la *cerradura* de $A$ en $Z$, el *interior* de $A$ en $Z$ y la *frontera* de $A$ en $Z$, respectivamente.

**1.1 Definición.** Sea $X$ un conjunto con un orden parcial $\leq$. Decimos que el orden es *total* si dados $x$ y $y \in X$ se cumple que $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

**1.2 Definición.** Sea $X$ un conjunto con un orden total. Dados $a, b \in X$, definimos

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}, [a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in X : a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in X : a < x \leq b\},$$

$$(a, \rightarrow) = \{x \in X : a < x\} \text{ y } (\leftarrow, b) = \{x \in X : x < b\}.$$

**1.3 Definición.** Un *arco generalizado* es un espacio topológico, con más de un punto, $X$, con un orden total que satisface las siguientes propiedades:

(a) Cada subconjunto no vacío $A$ de $X$ tiene una mínima cota superior (denotada por $\sup(A)$) y una máxima cota inferior (denotada por $\inf(A)$).

(b) Dados $x, y \in X$ tales que $x < y$ existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

(c) La topología de $X$ es la inducida por el orden, es decir, aquella generada por la base

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a \text{ y } b \in X \text{ y } a < b\} \cup \{(a,\rightarrow) : a \in X\} \cup \{(\leftarrow, b) : b \in X\}.$$

Notemos que, por la condición (a), $\text{mín}(X)$ y $\text{máx}(X)$ están bien definidos; además, $X = [\text{mín}(X),\text{máx}(X)]$.

**1.4 Proposición.** *Un arco generalizado es un continuo de Hausdorff.*

*Demostración.* Sean $\alpha = \text{mín}(X)$ y $\beta = \text{máx}(X)$. Dado $x \in X$, notemos que $[\alpha, x) = (\leftarrow, x)$ y $(x, \beta] = (x, \rightarrow)$.

**Afirmación 1.** El espacio $X$ es Hausdorff.

Sean $a$ y $b$ elementos distintos de $X$. Supongamos que $a < b$, por (b) sabemos que existe $c \in X$ tal que $a < c < b$. Los abiertos $[\alpha, c) = (\leftarrow, c)$ y $(c, \beta] = (c, \rightarrow)$ cumplen que $a \in [\alpha, c)$, $b \in (c, \beta]$ y $[\alpha, c) \cap (c, \beta] = \emptyset$.

**Afirmación 2.** El espacio $X$ es compacto.

Si suponemos que $\alpha = \beta$, tenemos que $X = \{\alpha\}$ y, por tanto, $X$ es compacto. Analicemos el otro caso, es decir, cuando $\alpha < \beta$.

Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X$. Consideremos el conjunto

$$P = \{x \in X : \text{existe una subcubierta finita de } \mathcal{U} \text{ que cubre a } [\alpha, x]\}.$$

Como $\mathcal{U}$ es cubierta, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\alpha \in U$. Entonces $[\alpha, \alpha] \subset U$, de modo que $\alpha \in P$. Por tanto, $P \neq \emptyset$. Sea $b = \sup(P)$. Tomemos $V \in \mathcal{U}$ tal que $b \in V$, como $V$ es abierto existe un básico $W$ contenido en $V$ que contiene a $b$. Tomemos $c \in W$ tal que $\alpha < c < b$, como $b = \sup(P)$ y $c < b$, existe $d \in P$ tal que $c < d \leq b$. Como $d \in P$ existe una subcubierta finita $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ para el intervalo $[\alpha, d]$. Como $W$ es un intervalo y $c, b \in W$, tenemos que $[c, b] \subset W$. Por lo anterior, $[\alpha, b] = [\alpha, d] \cup [d, b] \subset (\bigcup_{Z \in \mathcal{U}'} Z) \cup W \subset (\bigcup_{Z \in \mathcal{U}'} Z) \cup V$, así que el conjunto $\mathcal{U}' \cup \{V\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ para el intervalo $[\alpha, b]$. Entonces $b \in P$. Si $b < \beta$, entonces podemos suponer que $\beta \notin W$. Como $W$ es un básico en $X$, $W$ es de la forma $(x_1, x_2)$ con $b < x_2 \leq \beta$. Por la propiedad 1.3(b), existe $e \in X$ tal que $b < e < x_2$. Notemos que $e \in W$ y, por lo tanto, $[\alpha, e] \subset (\bigcup_{Z \in \mathcal{U}'} Z) \cup W$ y entonces $e \in P$, lo cual contradice que $b$ es el supremo de $P$. Por tanto $b = \beta$ y $\beta \in P$. Con esto hemos probado que $[\alpha, \beta] = X$ es compacto.

**Afirmación 3.** El espacio $X$ es conexo.

Sea $U$ un subconjunto no vacío abierto y cerrado de $X$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\alpha \in U$. Mostraremos que $U = X$. Consideremos el conjunto

$$P = \{x \in X : [\alpha, x) \subset U\}.$$

Como $U$ es abierto y $\alpha \in U$ existe $a > \alpha$ tal que $[\alpha, a) \subset U$, así que $P \neq \emptyset$. Consideremos $b = \sup P$, tenemos que $b \geq a > \alpha$. Dado $x \in X$ tal que $x < b$, existe $c \in P$ tal que $x < c \leq b$, así que $x \in [\alpha, c) \subset U$. Por lo tanto, $[\alpha, b) \subset U$. Para cualquier vecindad básica $V$ de $b$, como $b > \alpha$, tenemos que $V \cap [\alpha, b) \neq \emptyset$, así que $V \cap U \neq \emptyset$. De lo anterior resulta que $b \in \mathrm{cl}_X(U) = U$. Como $U$ es un abierto existe un básico $W$ contenido en $U$ que contiene a $b$. Dado que $b > \alpha$ podemos suponer que $\alpha \notin W$. Así, tenemos dos posibilidades: $W = (x_1, x_2)$ con $x_1 < b < x_2$, o bien $W = (x_1, \beta]$ con $x_1 < b$. Observemos que no puede haber un elemento $d$ en $W$ que sea mayor que $b$, porque de lo contrario $[\alpha, d) = [\alpha, b) \cup [b, d) \subset U \cup W = U$ y entonces $d \in P$, contradiciendo que $b$ es el supremo de $P$. Si $W = (x_1, x_2)$ con $x_1 < b < x_2$, por la propiedad (b) de la Definición 1.3, existe $d \in X$ tal que $b < d < x_2$, pero entonces $d \in W$, lo cual es una contradicción. De esta forma, obtenemos que $W = (x_1, \beta]$ con $x_1 < b$. Si $b < \beta$, por la propiedad (b) de la Definición 1.3, existe $d \in X$ tal que $b < d < \beta$, pero entonces $d \in W$, lo cual es una contradicción. Lo anterior muestra que $b = \beta$ y, por tanto, $U = X$. Concluimos que $X$ es conexo. ■

Incluimos aquí un lema que nos será de utilidad para presentar un ejemplo de arco generalizado.

Diremos que un conjunto ordenado $X$ tiene la *propiedad del supremo* (resp., *ínfimo*) si todo subconjunto no vacío y acotado superiormente (resp., inferiormente) tiene una mínima (resp., máxima) cota superior (resp., inferior).

**1.5 Lema.** *Sea $X$ un conjunto totalmente ordenado que tiene la propiedad del supremo. Entonces $X$ tiene la propiedad del ínfimo.*

*Demostración.* Sea $P$ un subconjunto no vacío de $X$ que está acotado inferiormente. Sea $Q = \{x \in X : x \leq y \text{ para todo } y \in P\}$. Como $P$ está acotado inferiormente, $Q$ es no vacío. Dado que $P$ es no vacío podemos tomar un elemento $y \in P$. Por la definición de $Q$, $y$ es una cota superior para todos los elementos de $Q$. Puesto que $X$

tiene la propiedad del supremo, $Q$ tiene una mínima cota superior. Sea $q = \sup(Q)$. Probaremos que $q$ es el ínfimo de $P$.

1. Dado $y \in P$, por la definición de $Q$ tenemos que $y$ es cota superior de $Q$. Como $q$ es el supremo de $Q$, tenemos que $q \leq y$. Por lo tanto, $q$ es cota inferior de $P$.
2. Dada una cota inferior $x$ de $P$, tenemos que $x \in Q$. Como $q$ es el supremo de $Q$, en particular es una cota superior de $Q$, así que $x \leq q$. De esta forma, $q$ es mayor o igual que cualquier cota inferior de $P$.

Hemos probado que $q$ es la máxima cota inferior de $P$, así que $q = \inf(P)$. ■

A continuación presentaremos varios ejemplos de continuos de Hausdorff, que resultan interesantes para este trabajo porque no son metrizables.

## 1.1 El Cuadrado lexicográfico

**1.6 Ejemplo.** Sea $X$ el subconjunto $[0,1]\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$, a los elementos de $[0,1]\times[0,1]$ los denotaremos $]x,y[$ (donde $x, y \in [0,1]$). En $X$ se define el *orden lexicográfico* por $]x,y[\ \leq\ ]x',y'[$ si y sólo si $(x < x')$ o $(x = x'$ y $y \leq y')$. El *cuadrado lexicográfico* es el espacio $X$ con la topología dada por el orden lexicográfico. Probaremos que $X$ es un arco generalizado no metrizable.

**Afirmación 1.** Cada subconjunto no vacío de $X$ tiene una mínima cota superior.

Sean $P$ un subconjunto no vacío de $X$, $Q = \{r : \text{existe } s \in [0,1] \text{ tal que } ]r,s[\ \in P\}$ y $a = \sup(Q)$. Tenemos dos casos:

1. Si $a \notin Q$, entonces $a > r$ para todo $r \in Q$. Dado $]r,s[\ \in P$, como $r \in Q$, tenemos que $a > r$, así que el elemento $]a,0[$ es una cota superior para $P$. Para mostrar que $]a,0[$ es la mínima cota superior tomemos $]b,c[\in X$ tal que $]b,c[\ <\ ]a,0[$. Como $c \geq 0$, tenemos que $b < a$, así que existe un elemento $d \in Q$ tal que $b < d < a$ y, por tanto, existe un elemento $e \in [0,1]$ tal que $]d,e[\ \in P$. Se tiene que $]b,c[\ <\ ]d,e[\ <\ ]a,0[$, así que $]b,c[$ no es cota superior de $P$, por tanto $]a,0[$ es la mínima. Luego, $]a,0[$ es el supremo de $P$.

2. Si $a \in Q$, el conjunto $R = \{s : ]a, s[ \in P\}$ es no vacío. Sea $b = \sup(R)$. Dada $]c, d[ \in P$, como $c \in Q$, tenemos que $c \leq a$. Si $c < a$, entonces $]c, d[ < ]a, b[$. Si $c = a$, entonces $d \in R$ y $d \leq b$, por lo que $]c, d[ \leq ]a, b[$. En cualquier caso, $]c, d[ \leq ]a, b[$. Por tanto, $]a, b[$ es cota superior de $P$. Para ver que es la mínima, tomemos $]c, d[ < ]a, b[$. Si $c < a$, por la definición de $Q$, existe $]e, f[ \in P$ tal que $c < e \leq a$. Entonces $]c, d[$ no es cota superior de $P$. Si $c = a$, entonces $d < b$. Por la definición de $b$, existe $s \in R$ tal que $d < s \leq b$ y $]a, s[ \in P$. Entonces $]c, d[ < ]a, s[$ y $]c, d[$ no es cota superior de $P$. Por tanto $]a, b[$ es el supremo de $P$.

**Afirmación 2.** Cada subconjunto no vacío de $X$ tiene una máxima cota inferior.

Sea $P$ un conjunto no vacío de $X$. Como $]0, 0[$ es el elemento mínimo de $X$, $P$ está acotado inferiormente. Por la Afirmación 1 y el Lema 1.5, $P$ tiene una máxima cota inferior.

**Afirmación 3.** El orden de $X$ es total, es decir, si $x$ y $y \in X$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Consideremos dos elementos distintos $x = ]a, b[$ y $y = ]c, d[$ en $X$. Si $a \neq c$, podemos suponer que $a < c$, de donde resulta que $x < y$. Si $a = c$, entonces $b \neq d$, puesto que $x \neq y$. Como $b$ y $d$ son comparables en [0,1], entonces $x$ y $y$ son comparables en $X$.

**Afirmación 4.** Dados $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Consideremos dos elementos $x = ]a, b[$ y $y = ]c, d[$ en $X$ tales que $x < y$. Si $a < c$, entonces existe $e \in [0, 1]$ tal que $a < e < c$. El elemento $z = ]e, 0[$ cumple que $x < z < y$. Si $a = c$, entonces $b < d$. Luego, existe $e \in [0, 1]$ tal que $b < e < d$. El elemento $z = ]a, e[$ cumple que $x < z < y$.

Las afirmaciones 1, 2, 3 y 4 nos dicen que $X$ es un arco generalizado y, por tanto, un continuo de Hausdorff. La siguiente afirmación prueba que $X$ no es metrizable.

**Afirmación 5.** El espacio $X$ no es separable.

Para cada $t \in [0, 1]$ definimos $U_t$ como el intervalo abierto que tiene por extremos a los puntos $]t, 0[$ y $]t, 1[$. La familia $\mathcal{U} = \{U_t : t \in [0, 1]\}$ es una familia no numerable de abiertos ajenos entre sí, así que $X$ no puede contener un denso numerable.

## 1.2 La Línea Larga

**1.7 Ejemplo.** En este ejemplo trabajaremos con el primer ordinal no numerable $\Omega$, definiremos la línea larga $X$ y veremos que es un continuo de Hausdorff no metrizable. Denotemos por $R_\Omega$ al conjunto que representa a todos los ordinales menores que el ordinal $\Omega$, con la topología del orden. La *línea larga* está definida por

$$X = \big(R_\Omega \times [0,1)\big) \cup \big(\{\Omega\} \times \{0\}\big)$$

con la topología del orden lexicográfico, que se define en forma similar a la del cuadrado. Es decir, para ordenar dos elementos, primero se comparan sus primeras coordenadas, cuando éstas son iguales, se comparan las segundas. Probaremos que $X$ es un arco generalizado. Usaremos que $R_\Omega \cup \{\Omega\}$ tiene la propiedad del supremo y que los subconjuntos numerables de $R_\Omega$ están acotados superiormente.

**Afirmación 1.** Cada subconjunto no vacío de $X$ tiene una mínima cota superior.

Sean $P$ un subconjunto no vacío de $X$, $Q = \{r : \text{existe } s \in [0,1] \text{ tal que } ]r,s[ \, \in P\}$ y $a = \sup(Q)$. Tenemos dos casos:

1. Si $a \notin Q$, entonces $a > r$ para todo $r \in Q$. Dado $]r,s[ \, \in P$, como $r \in Q$, tenemos que $a > r$, así que el elemento $]a,0[$ es una cota superior para $P$. Para mostrar que $]a,0[$ es la mínima cota superior, tomemos $]b,c[ \, \in X$ tal que $]b,c[ \, < \, ]a,0[$. Como $c \geq 0$, tenemos que $b < a$, así que existe $d \in Q$ tal que $b < d < a$ y por tanto existe un elemento $e \in [0,1)$ tal que $]d,e[ \, \in P$. Se tiene que $]b,c[ \, < \, ]d,e[ \, < \, ]a,0[$, así que $]b,c[$ no es cota superior de $P$, por tanto $]a,0[$ es la mínima. Luego, $]a,0[$ es el supremo de $P$.

2. Si $a \in Q$, el conjunto $R = \{s : \, ]a,s[ \, \in P\}$ es no vacío. Sea $b = \sup(R)$. En el caso en que $b = 1$, tenemos que $a < \Omega$ y $]a,b[ \, \notin X$. Probaremos que, en ese caso, $]a+1,0[$ es el supremo de $P$. Dada $]c,d[ \, \in P$, como $c \in Q$, tenemos que $c \leq a$; así que $c < a+1$ y, por lo tanto, $]a+1,0[$ es cota superior de $P$. Para ver que es la mínima, tomemos $]c,d[ \, \in X$ tal que $]c,d[ \, < \, ]a+1,0[$. Dado que $c \leq a$, $d < 1$ y $1$ es el supremo de $R$, existe $e \in [d,1]$ tal que $]a,e[ \, \in P$ y $]c,d[ \, \leq \, ]a,e[ \, < \, ]a+1,0[$, así que $]c,d[$ no es cota superior de $P$. En el caso en que $b < 1$, dada $]c,d[ \, \in P$, como $c \in Q$, tenemos que $c \leq a$. Si $c < a$, entonces $]c,d[ \, < \, ]a,b[$. Si $c = a$, entonces $d \in R$ y $d \leq b$, por lo que $]c,d[ \, \leq \, ]a,b[$. En cualquier caso, $]c,d[ \, \leq \, ]a,b[$. Por tanto, $]a,b[$ es cota superior de $P$. Para ver que es la mínima, tomemos $]c,d[ \, < \, ]a,b[$. Si $c < a$, por la definición de $Q$,

existe $]e, f[\, \in P$ tal que $c < e \leq a$. Entonces $]c, d[$ no es cota superior de $P$. Si $c = a$, entonces $d < b$. Por la definición de $b$, existe $s \in R$ tal que $d < s \leq b$ y $]a, s[\, \in P$. Entonces $]c, d[\, < \,]a, s[$ y $]c, d[$ no es cota superior de $P$. Por tanto $]a, b[$ es el supremo de $P$.

**Afirmación 2.** Cada subconjunto no vacío de $X$ tiene una máxima cota inferior.

Sea $P$ un conjunto no vacío de $X$. Como $]0, 0[$ es el elemento mínimo de $X$, $P$ está acotado inferiormente. Por la Afirmación 1 y el Lema 1.5, $P$ tiene una máxima cota inferior.

**Afirmación 3.** El orden de $X$ es total, es decir, si $x$ y $y \in X$, entonces $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

Consideremos dos elementos distintos $x = \,]a, b[$ y $y = \,]c, d[$ en $X$. Si $a \neq c$, podemos suponer que $a < c$, de donde resulta que $x < y$. Si $a = c$, entonces $b \neq d$, puesto que $x \neq y$. Como $b$ y $d$ son comparables en [0,1], entonces $x$ y $y$ son comparables en $X$.

**Afirmación 4.** Dados $x, y \in X$ tales que $x < y$, existe $z \in X$ tal que $x < z < y$.

Consideremos dos elementos $x = \,]a, b[$ y $y = \,]c, d[$ en $X$ tales que $x < y$. Si $a < c$, como $b \in [0, 1)$, existe $e \in [0, 1)$ tal que $b < e$. El elemento $z = \,]a, e[$ cumple que $x < z < y$. Si $a = c$, como $x \neq y$, tenemos que $a \neq \Omega$ y que $b < d$. Luego, existe $e \in [0, 1)$ tal que $b < e < d$. El elemento $z = \,]a, e[$ cumple que $x < z < y$.

Las afirmaciones 1, 2, 3 y 4 nos dicen que $X$ es un arco generalizado y, por tanto, un continuo de Hausdorff. La siguiente afirmación prueba que $X$ no es metrizable.

**Afirmación 5.** $X$ no es primero numerable.

Supongamos que para el elemento $]\Omega, 0[$ existe una base local numerable. De hecho, en esta situación, existe una base local numerable $\mathcal{B}$ para el elemento $]\Omega, 0[$ tal que todos sus elementos son básicos de la topología de $X$ propiamente contenidos en $X$, es decir, que

$$\mathcal{B} = \{\big(a_n, ]\Omega, 0[\big] : n \in \mathbb{N} \text{ y } a_n < \,]\Omega, 0[ \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $a_n = ]\alpha_n, t_n[$ para algún $\alpha_n \in R_\Omega$ y $t_n \in [0, 1)$. Como en $R_\Omega$ todo conjunto numerable es acotado superiormente, existe $\beta \in R_\Omega$ tal que $\alpha_n + 1 \leq \beta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Luego, el abierto $\big(]\beta, 0[, ]\Omega, 0[\big]$ no contiene a ninguno de los elementos de la base $\mathcal{B}$. De esta forma llegamos a una contradicción y concluimos que $X$ no es primero numerable.

Un *subcontinuo* es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo de Hausdorff. La siguiente proposición nos presenta los subcontinuos de un arco generalizado.

**1.8 Proposición.** *Sea $X$ un arco generalizado. Los subcontinuos de $X$ son los intervalos de la forma $[x, y]$ con $x, y \in X$ y $x \leq y$.*

*Demostración.* Sean $\alpha =$mín$(X)$ y $\beta =$máx$(X)$.

($\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$, con $x \leq y$. Como $x \in [x, y]$, tenemos que $[x, y]$ es no vacío. El complemento de $[x, y]$ es $[\alpha, x) \cup (y, \beta]$, que es un abierto. Luego, $[x, y]$ es cerrado. Supongamos que $[x, y]$ es disconexo. Sean $P$ y $Q$ subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de $X$ tales que $[x, y] = P \cup Q$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{x, y\} \subset P$ o que $x \in P$ y $y \in Q$. Notemos que $[\alpha, x]$ y $[y, \beta]$ son cerrados. En el primer caso, $P \cup [\alpha, x] \cup [y, \beta]$ y $Q$ son dos cerrados de $X$ cuya unión es $X$ y son tales que $(P \cup [\alpha, x] \cup [y, \beta]) \cap Q = (P \cap Q) \cup ([\alpha, x] \cap Q) \cup ([y, \beta] \cap Q) = \emptyset$. En el segundo caso se tiene que $x \neq y$, de esta forma $P \cup [\alpha, x]$ y $Q \cup [y, \beta]$ son dos cerrados de $X$ cuya unión es $X$ y son tales que $(P \cup [\alpha, x]) \cap (Q \cup [y, \beta]) = (P \cap Q) \cup (P \cap [y, \beta]) \cup ([\alpha, x] \cap Q) \cup ([\alpha, x] \cap [y, \beta]) = \emptyset$. En ambos casos contradecimos la conexidad de $X$, así que podemos concluir que $[x, y]$ es conexo.

($\Rightarrow$) Sean $I$ un subcontinuo de $X$, $x = \inf(I)$ y $y = \sup(I)$. Como $I$ es cerrado, tenemos que $\{x, y\} \subset I$. Claramente $I \subset [x, y]$. Sea $z \in X$ tal que $x \leq z \leq y$. Supongamos que $z \notin I$. Consideremos los conjuntos $K = [\alpha, z] \cap I$ y $L = [z, \beta] \cap I$, que son cerrados en $I$. Tenemos que $x \in K$, $y \in L$, $K \cap L = \emptyset$ y $K \cup L = I$, así que $K$ y $L$ son una separación en cerrados de $I$, lo cual contradice la conexidad de $I$. Por lo tanto, $I = [x, y]$. ■

A continuación presentaremos más ejemplos de continuos de Hausdorff que no son metrizables, mostrando algunos de sus subcontinuos.

## 1.3 El Cuadrado de Alexandroff

**1.9 Notación.** Sea $X$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Dados $x$ y $y \in X$, denotaremos por $\overline{xy}$ al segmento de recta con extremos $x$ y $y$, si $x \neq y$ y denotaremos $\overline{xx} = \{x\}$.

**1.10 Definición.** Dados un número $\varepsilon > 0$ y $x \in [0,1]$ se define:

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in [0,1] : |x-y| < \varepsilon\}.$$

A este conjunto le llamaremos la bola de radio $\varepsilon$ centrada en $x$.

A lo largo de este trabajo, la topología del intervalo $[0,1]$ siempre se considerará con la base dada por el conjunto

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : 0 < \varepsilon < 1 \text{ y } x \in [0,1]\}.$$

**1.11 Ejemplo.** Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. Para $]a,b[\, \in X$ tal que $a \neq b$ tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < |b-a|$. Definimos

$$U_\varepsilon\big(]a,b[\big) = \{\ ]a,t[\, \in X : \varepsilon > |b-t|\}.$$

Observemos que cada $U_\varepsilon\big(]a,b[\big)$ es la intersección de $X$ con un segmento abierto de longitud $2\varepsilon$ con centro en $]a,b[$ y en posición vertical. Notemos que este intervalo no intersecta a la diagonal. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{U} = \{U_\varepsilon\big(]a,b[\big) : ]a,b[\, \in X,\ a \neq b \text{ y } 0 < \varepsilon < |b-a|\}.$$

Ahora, para un elemento de la forma $]a,a[\in X$, tomemos $\varepsilon$ positivo y $S$ un subconjunto finito de $[0,1]$ tal que $B_\varepsilon(a) \cap S = \emptyset$. Definamos

$$V_\varepsilon\big(]a,a[,S\big) = \{\ ]r,t[\, \in X : r \in [0,1] \setminus S \text{ y } |a-t| < \varepsilon\}.$$

Notemos que cada $V_\varepsilon\big(]a,a[,S\big)$ es una banda horizontal a la que se le ha quitado una cantidad finita de intervalos verticales. Definamos

$$\mathcal{V} = \{V_\varepsilon\big(]a,a[,S\big) : a \in [0,1], \varepsilon > 0 \text{ y } S \text{ un subconjunto finito de } [0,1] \text{ tal que } B_\varepsilon(a) \cap S = \emptyset\}.$$

El *cuadrado de Alexandroff* es el espacio $X$ con la topología dada por la base $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ (ver la Figura 1.1).

Definamos los conjuntos $\Delta = \{\ ]r,r[\ : r \in [0,1]\}$ (la diagonal de $X$) y, para $t \in [0,1]$, $L_t = \{\ ]t,s[\ : s \in [0,1]\}$ (las líneas verticales en $X$). Usaremos estos conjuntos para probar que $X$ es un continuo de Hausdorff. Para ello, primero probaremos dos afirmaciones.

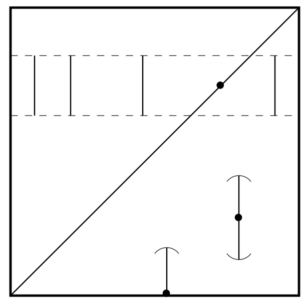

Figura 1.1: El Cuadrado de Alexandroff y los básicos de su topología.

**Afirmación 1.** El subespacio $\Delta$ es homeomorfo a [0,1].

Consideremos la función $f : \Delta \to [0,1]$ dada por $f\big(]r,r[\big) = r$. La función $f$ es claramente una biyección. Probaremos que $f$ es continua. Sean $]r_0, r_0[\in \Delta$ y $W$ un abierto básico de $[0,1]$ que contenga a $f\big(]r_0, r_0[\big)$. Podemos suponer que $W = B_\varepsilon(r_0)$, donde $\varepsilon > 0$. Definimos $Z_W = V_\varepsilon\big(]r_0, r_0[, \emptyset\big) \cap \Delta$. Observemos que $Z_W$ es una vecindad abierta de $]r_0, r_0[$ en $\Delta$. Probaremos que $f(Z_W) \subset W$. Sea $]r,r[\in Z$. Como $|r_0 - r| < \varepsilon$, tenemos que $|f\big(]r_0, r_0[\big) - f\big(]r,r[\big)| < \varepsilon$, así que $f\big(]r,r[\big) \in W$ y, por tanto, $f(Z_W) \subset W$.

Ahora probaremos que $f$ es abierta. Sea $U$ un subconjunto abierto de $\Delta$ y sea $f\big(]r_0, r_0[\big) \in f(U)$. Tomemos una vecindad abierta básica $Z$ de $]r_0, r_0[$ en $\Delta$, contenida en $U$. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $S$ un subconjunto finito de $[0,1]$ de forma que $Z = V_\varepsilon\big(]r_0, r_0[, S\big) \cap \Delta$. Definimos $W_Z = B_\varepsilon(r_0)$. Observemos que $W_Z$ es una vecindad básica de $f\big(]r_0, r_0[\big)$ en $[0,1]$. Probaremos que $W_Z \subset f(Z)$. Sea $x \in W_Z$. Como $|r_0 - x| < \varepsilon$, tenemos que $f^{-1}(x) = ]x, x[\in Z$ y, por tanto, podemos concluir que $W_Z \subset f(Z) \subset f(U)$. Así, $f(U)$ resulta un subconjunto abierto de $[0,1]$.

Como $f$ es una función biyectiva, continua y abierta, tenemos que $f$ es un homeomorfismo entre $\Delta$ y $[0,1]$.

**Afirmación 2.** Dado $t \in [0,1]$, el subespacio $L_t$ es homeomorfo a [0,1].

Consideremos la función $f : L_t \to [0,1]$ dada por $f\big(]t,s[\big) = s$. La función $f$ es claramente una biyección. Probaremos que $f$ es continua.

Sean $]t, s_0[\in L_t$ y $W$ un abierto básico de $f\big(]t, s_0[\big)$ en $[0,1]$. Podemos suponer que $W = B_\varepsilon(s_0)$, donde $\varepsilon > 0$. Hay dos posibilidades para $s_0$:

1. Si $s_0 = t$, definamos $Z_W = V_\varepsilon\big(]s_0, s_0[, \emptyset\big) \cap L_t$. Observemos que $Z_W$ es una vecindad abierta de $]s_0, s_0[$ en $L_t$. Probaremos que $f(Z_W) \subset W$. Sea $]t, s[\in Z_W$. Como $|s_0 - s| < \varepsilon$, tenemos que $|f\big(]s_0, s_0[\big) - f\big(]t, s[\big)| < \varepsilon$, así que $f\big(]t, s[\big) \in W$ y, por tanto, $f(Z_W) \subset W$.

2. Si $s_0 \neq t$, tomemos $\delta =$mín$\{\varepsilon, |s_0 - t|\}$ y definamos $Z_W = U_\delta\big(]t, s_0[\big)$. Observemos que el abierto $Z_W$ es una vecindad básica de $]t, s_0[$ en $X$. Probaremos que $f(Z_W) \subset W$. Sea $]t, s[\in Z_W$. Como $|s_0 - s| < \delta \leq \varepsilon$, tenemos que $|f\big(]t, s_0[\big) - f\big(]t, s[\big)| < \varepsilon$, así que $f\big(]t, s[\big) \in W$ y, por tanto, $f(Z_W) \subset W$.

Ahora, probaremos que $f$ es abierta. Sea $U$ un subconjunto abierto de $L_t$ y sea $f\big(]t, s_0[\big) \in f(U)$. Tomemos una vecindad abierta básica $Z$ de $]t, s_0[$ en $U$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $s_0 = t$, existen $\varepsilon > 0$ y $S \subset [0, 1]$ finito tales que $Z = V_\varepsilon(]t, t[, S) \cap L_t$. Definimos $W_Z = B_\varepsilon(t)$. Observemos que $W_Z$ es una vecindad básica de $f\big(]t, s_0[\big)$ en $[0, 1]$.

2. Si $s_0 \neq t$, existen $s_0 \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$ tal que $Z = U_\varepsilon\big(]t, s_0[\big)$. Definimos $W_Z = B_\varepsilon(s_0)$. Observemos que $W_Z$ es una vecindad básica de $f\big(]t, s_0[\big)$ en $[0, 1]$.

Probaremos que $W_Z \subset f(Z)$. Sea $x \in W_Z$. Como $|s_0 - x| < \varepsilon$, tenemos que $f^{-1}(x) = ]x, x[ \in Z$ y, por tanto, podemos concluir que $W_Z \subset f(Z) \subset f(U)$. Así, $f(U)$ resulta un subconjunto abierto de $[0, 1]$.

**Afirmación 3.** El espacio $X$ es de Hausdorff.

Dados dos elementos distintos $x$ y $y$ de $X$, tenemos tres posibilidades:

1. $x$ y $y \in \Delta$. Sean $a$ y $b \in [0, 1]$ tales que $x = ]a, a[$ y $y = ]b, b[$, como son elementos distintos tenemos que $a \neq b$. Tomemos $\varepsilon = \frac{|a-b|}{2}$. Los abiertos $V_\varepsilon(x, \emptyset)$ y $V_\varepsilon(y, \emptyset)$ son vecindades de $x$ y $y$, respectivamente, tales que $V_\varepsilon(x, \emptyset) \cap V_\varepsilon(y, \emptyset) = \emptyset$.

2. $x \in \Delta$ y $y \notin \Delta$. Sean $a, b$ y $c \in [0, 1]$ tales que $x =]a, a[$ y $y =]b, c[$. Sea $\varepsilon = \frac{|b-c|}{2}$. Tenemos dos casos:

   (i) Si $a \neq b$. Sea $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, |a - b|\}$. Notemos que $B_{\varepsilon'}(a) \cap \{b\} = \emptyset$. Los abiertos $V_{\varepsilon'}(x, \{b\})$ y $U_{\varepsilon'}(y)$ son vecindades de $x$ y $y$, respectivamente, tales que $V_{\varepsilon'}(x, \{b\}) \cap U_{\varepsilon'}(y) = \emptyset$.

(ii) Si $a = b$, los abiertos $V_\varepsilon(x, \emptyset)$ y $U_\varepsilon(y)$ son vecindades de $x$ y $y$, respectivamente, tales que $V_\varepsilon(x, \emptyset) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$.

3. $x, y \in X \setminus \Delta$. Sean $a, b, c$ y $d \in [0, 1]$ tales que $x = ]a, b[$ y $y = ]c, d[$. Si $a \neq c$, definimos $\varepsilon = \text{mín}\{|a-b|, |c- \ d|\}$. Si $a = c$, sea $\varepsilon = \text{mín}\{|a-b|, |c-d|, \frac{|b-d|}{2}\}$. En ambos casos, los abiertos $U_\varepsilon(x)$ y $U_\varepsilon(y)$ son vecindades de $x$ y $y$, respectivamente, tales que $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$.

**Afirmación 4.** El espacio $X$ es compacto.

Sea $\mathcal{O}$ una cubierta abierta de $X$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\mathcal{O}$ es una familia de básicos. Por la Afirmación 1 la diagonal $\Delta$ de $X$ es compacto, así que existe un subconjunto finito $\mathcal{O}_0$ de la cubierta original que cubre a $\Delta$. Cada elemento de $\mathcal{O}_0$ es de la forma $V_{\varepsilon_i}\big(]x_i, x_i[, S_i\big)$, donde $S_i$ es finito e $i \in \{1, \ldots, m\}$. Sea $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$. Luego $S$ es finito. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $t_1, \ldots, t_n \in X$ tales que $S = \{t_1, \ldots, t_n\}$. Consideremos un punto $]x, y[ \in X$ con $x \notin \{t_1, \ldots, t_n\}$. Como el punto $]y, y[ \in V_{\varepsilon_i}\big(]x_i, x_i[, S_i\big)$ para alguna $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que $|y - x_i| < \varepsilon_i$. Dado que $x \notin S_i$, tenemos que $]x, y[ \in V_{\varepsilon_i}\big(]x_i, x_i[, S_i\big)$. Esto prueba que $\mathcal{O}_0$ cubre a $X \setminus ((\{t_1\} \times [0, 1]) \cup \ldots \cup (\{t_n\} \times [0, 1]))$. La Afirmación 2 implica que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, el segmento $L_{t_i}$ es compacto y, por tanto, existe un subconjunto finito $\mathcal{O}_i$ de la cubierta original que cubre a $L_{t_i}$. La cubierta $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{O}_i$ es una subconjunto finito de $\mathcal{O}$ que cubre a $X$.

**Afirmación 5.** El espacio $X$ es conexo.

Por las afirmaciones 1 y 2 los segmentos $\Delta$ y $L_t$ con $t \in [0, 1]$ son conexos. Como $L_t \cap \Delta \neq \emptyset$ para toda $t$ y $X = \bigcup_{t \in [0,1]} (L_t \cup \Delta)$, tenemos que $X$ es conexo.

Hasta aquí hemos probado que $X$ es un continuo de Hausdorff. Los conjuntos de la forma $\{x\} \times [0, x)$, con $x > 0$, son una cantidad no numerable de abiertos ajenos entre sí y no vacíos, así que $X$ no es segundo numerable y, por tanto, no es metrizable.

En la siguientes tres proposiciones mostraremos algunos subcontinuos del cuadrado de Alexandroff.

**1.12 Proposición.** *Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. Dado $t \in [0, \frac{1}{2}]$ el subespacio*

$$A_t = \{ \ ]x, y[ \in X : 1 - 2t \leq y \leq x\}$$

*es un subcontinuo de $X$ (ver Figura 1.2).*

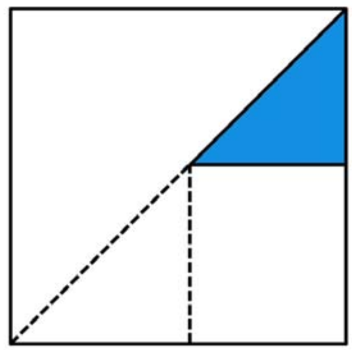

Figura 1.2: Un subcontinuo $A_t$ del cuadrado de Alexandroff, con $t \in [0, \frac{1}{2}]$.

*Demostración.* Sean $a, b$ y $c \in [0,1]$. Los segmentos $\overline{]a,b[\ ]a,c[}$ y $\overline{]a,a[\ ]c,c[}$ son conjuntos singulares o son homeomorfos a $[0,1]$ y, por tanto, conexos. Dados dos puntos $]a,b[$ y $]c,d[ \in A_t$, el conjunto $\overline{]a,b[\ ]a,a[} \cup \overline{]a,a[\ ]c,c[} \cup \overline{]c,c[\ ]c,d[}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ y está contenido en $A_t$. Luego, $A_t$ es arco conexo y, por tanto, conexo.

Claramente $A_t$ es cerrado. Por tanto $A_t$ es un subcontinuo de $X$. ∎

**1.13 Proposición.** *Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. Dado $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ el subespacio*

$$A_t = \{\ ]x,y[\ \in X : y \ \leq 2t-1\} \cup A_{\frac{1}{2}}$$

*es un subcontinuo de $X$ (ver Figura 1.3).*

*Demostración.* Dados dos puntos distintos $]a,b[$ y $]c,d[ \in A_t$, el conjunto $\overline{]a,b[\ ]a,a[} \cup \overline{]a,a[\ ]c,c[} \cup \overline{]c,c[\ ]c,d[}$ es homeomorfo a $[0,1]$ y está contenido en $A_t$. Luego, $A_t$ es arco conexo y, por tanto, conexo.

Claramente $A_t$ es cerrado y entonces es un subcontinuo de $X$. ∎

**1.14 Proposición.** *Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. Dado $]r,s[\ \in X$ tal que $r \leq s$, el subespacio*

$$B_{]r,s[} = \{\ ]x,y[\ \in X : r < x \leq y\} \cup \{\ ]r,y[\ \in X : r \leq y \leq s\}$$

*es un subcontinuo de $X$ (ver Figura 1.4).*

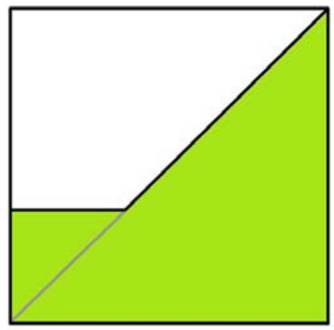

Figura 1.3: Un subcontinuo $A_t$ del cuadrado de Alexandroff, con $t \in (\frac{1}{2}, 1]$.

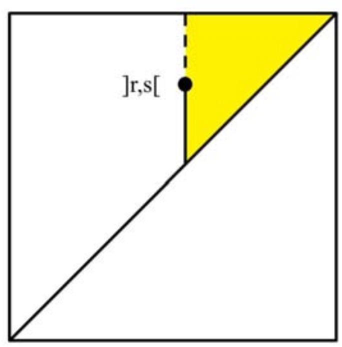


Figura 1.4: Un subcontinuo $B_{]r,s[}$ del cuadrado de Alexandroff.

*Demostración.* Sea $]r, s[\in X$ tal que $r \leq s$ y sean $]a, b[, ]c, d[\in B_{]r,s[}$, con $]a, b[ \neq ]c, d[$. El conjunto $\overline{]a, b[\ ]a, a[} \cup \overline{]a, a[\ ]c, c[} \cup \overline{]c, c[\ ]c, d[}$ es homeomorfo a $[0, 1]$ y está contenido en $B_{]r,s[}$. Luego, $B_{]r,s[}$ es arco conexo y, por tanto, conexo. Como en las proposiciones anteriores, es claro que $B_{]r,s[}$ es cerrado. ∎

## 1.4 El Espacio de Helly

Antes de presentar el siguiente ejemplo haremos una observación que nos resultará útil para construirlo.

**1.15 Observación.** Un producto arbitrario de continuos de Hausdorff es también un continuo de Hausdorff. Para convencerse de esto sólo es necesario recordar algunos resultados básicos de topología:

(i) Producto arbitrario de espacios Hausdorff es Hausdorff.

(ii) Producto arbitrario de compactos es compacto.

(iii) Producto arbitrario de conexos es conexo.

**1.16 Ejemplo.** Sea $I = [0,1]$. De acuerdo con la observación anterior, el espacio $I^I = \prod_{i\in[0,1]}[0,1]$ con la topología producto es un continuo de Hausdorff. Observemos que los elementos de $I^I$ son simplemente las funciones de $I$ en $I$. Dados $f, g \in I^I$, decimos que $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ para todo número $x \in [0,1]$; observemos que esto define un orden parcial. A continuación mostraremos algunos de los subcontinuos de $I^I$.

**1.17 Proposición.** *Dada una función creciente $f \in I^I$, el subespacio $L(f) = \{g \in I^I : g \leq f$ y $g$ es creciente$\}$ es un subcontinuo de $I^I$.*

1. *El subespacio $L(f)$ es cerrado en $I^I$.*

   Sea $g \in I^I \setminus L(f)$. Primero, supongamos que $g$ no es creciente. Sean $t_1, t_2 \in I$ tales que $t_1 < t_2$ y $g(t_2) < g(t_1)$. Consideremos $\varepsilon = \frac{g(t_1)-g(t_2)}{2}$. Definimos $U_{t_1} = (g(t_1) - \varepsilon, g(t_1) + \varepsilon) \cap I$ y $U_{t_2} = (g(t_2) - \varepsilon, g(t_2) + \varepsilon) \cap I$. El abierto $U = U_{t_1} \times U_{t_2} \times \prod_{i\in I\setminus\{t_1,t_2\}} I_i$ es una vecindad básica de $g$. Veamos que ninguna de las funciones en $U$ es creciente y, por tanto, $U \cap L(f) = \emptyset$. Dada $h \in U$, tenemos que $h(t_2) < g(t_2) + \varepsilon = \frac{g(t_1)+g(t_2)}{2} = g(t_1) - \varepsilon < h(t_1)$. Así, $h$ no es creciente, como queríamos.

   Ahora, supongamos que $g$ es creciente. Como $g \notin L(f)$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $g(t_0) > f(t_0)$. Consideremos $\varepsilon = \frac{g(t_0)-f(t_0)}{2}$. Definimos $U = (g(t_0) - \varepsilon, g(t_0) + \varepsilon) \cap I$. El abierto $U \times \prod_{i\in I\setminus\{t_0\}} I_i$ es una vecindad básica de $g$ en $I^I$ tal que $U \cap L(f) = \emptyset$, puesto que, dada $h \in U$, tenemos que $h(t_0) \geq g(t_0) - \varepsilon > f(t_0)$. Esto termina la prueba de que $L(f)$ es cerrado en $I^I$.

2. *El subespacio $L(f)$ es conexo.*

   Mostraremos que $L(f)$ es arco conexo. Sean $g$ y $h \in L(f)$. Mostraremos que la función $\alpha : [0,1] \to L(f)$ definida por $\alpha(x)(t) = (1-x)g(t) + x(h(t))$ es continua. Primero, probaremos que la función está bien definida:

(a) Dado $x \in [0,1]$ probaremos que $\alpha(x) \in I^I$ y $\alpha(x) \leq f$; para ello es suficiente notar que, para cualesquiera $x, t \in I$,

$$0 = (1-x)0 + x \cdot 0 \leq (1-x)g(t) + xh(t) \leq (1-x)f(t) + xf(t) = f(t),$$

así que $0 \leq \alpha(x)(t) \leq f(t)$.

(b) Probaremos que $\alpha(x)$ es creciente. Sean $s, t \in [0,1]$ tales que $s \leq t$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha(x)(t) - \alpha(x)(s) =& (1-x)g(t) + x(h(t)) - [(1-x)g(s) + x(h(s))] \\ =& (1-x)(g(t) - g(s)) + x(h(t) - h(s)) \geq 0\end{aligned}$$

(la última desigualdad es cierta porque $0 \leq x \leq 1$ y además $g$ y $h$ son crecientes).

Observemos que $\alpha(0) = g, \alpha(1) = h$. Consideremos $\pi_t : I^I \to [0,1]$ la proyección a la $t$-ésima coordenada. Fijando $t \in [0,1]$, tenemos que $\pi_t \circ \alpha = (1-x)g(t) + xh(t)$ es una función continua en la variable $x$, así que $\alpha$ es una función continua. De esta manera, $L(f)$ es conexo por trayectorias y, por tanto, conexo.

El siguiente ejemplo es un subcontinuo de $I^I$ que no es primero numerable. Con ello mostraremos que $I^I$ es un continuo de Hausdorff que no es metrizable.

**1.18 Ejemplo.** Sea $I = [0,1]$. El *Espacio de Helly* es el conjunto $X$ de todas las funciones crecientes de $I$ en $I$ con la topología dada como subespacio de $I^I$.

Si denotamos por 1 a la función constante $f(t) = 1$ en $I^I$, tenemos que $X = L(1)$; por lo tanto, $X$ es un continuo de Hausdorff. Observemos que, dada $f \in I^I$ creciente, el subcontinuo $L(f)$ de $I^I$ cumple que $L(f) \subset X$, así que también es un subcontinuo de $X$.

Probaremos que $X$ no es primero numerable y, por tanto, no es metrizable. Supongamos que $X$ es primero numerable y busquemos una contradicción. Consideremos el elemento $x \in X$ tal que todas sus coordenadas son iguales a cero (es decir, $x$ es la función constante cero). Supongamos que $X$ tiene una base numerable $\{\mathcal{U}_n | n \in \mathbb{N}\}$ para este elemento. Dado que la topología en $X$ es la de subespacio de $I^I$, cada $\mathcal{U}_n$ contiene un básico $\mathcal{B}_n = \left(\left(\prod_{i \in J_n} U_i\right) \times \left(\prod_{i \in I \setminus J_n} I_i\right)\right) \cap X$, donde $J_n \subset I$ es finito y cada $I_i$ es igual a $I$. El conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ es numerable, así que podemos tomar un índice $k \in I \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ y definir $\mathcal{V} = \left([0, \frac{1}{2})_k \times \prod_{i\in I\setminus\{k\}} I_i\right) \cap X$. Como $x \in \mathcal{V}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{V}$. Consideremos la proyección a la $k$-ésima coordenada $\pi_k : I^I \to [0,1]$. Por la elección de $k$, tenemos que $k \notin J_n$ y $\pi_k|_X(\mathcal{U}_n) \supset \pi_k|_X(\mathcal{B}_n) = [0,1]$. Dado que $\pi_k|_X(\mathcal{V}) = [0, \frac{1}{2})$ y $\pi_k|_X(\mathcal{U}_n) \subset \pi_k|_X(\mathcal{V})$, obtenemos que $[0,1] \subset [0, \frac{1}{2})$, lo cual es absurdo.

## 1.5 Hiperespacios

Un hiperespacio de un espacio topológico $X$ es una familia de subconjuntos de $X$ que tienen alguna característica especial. Los hiperespacios que estudiaremos en este trabajo son aquéllos que se construyen a partir de un continuo de Hausdorff.

Dado un continuo de Hausdorff $X$, los hiperespacios a los que nos referiremos son:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y } A \neq \emptyset\},$$
$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}$$

y, para un entero positivo $n$,

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más n elementos}\}.$$

A continuación definimos la topología para estos hiperespacios.

**1.19 Definición.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Consideremos una cantidad finita de abiertos $U_1, \ldots, U_n \in \tau$. Definimos

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

**1.20 Proposición.** *El conjunto*

$$\beta = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \mid n \in \mathbb{N} \textit{ y } U_i \in \tau \textit{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

*es base para una topología de $2^X$; ésta es llamada la topología de Vietoris.*

*Demostración.* Observamos que $2^X \in \beta$ porque $2^X = \langle X \rangle$. Por lo anterior tenemos que la unión de los elementos de $\beta$ es igual a $2^X$.

Ahora veremos que la intersección de dos elementos de $\beta$ pertenece a $\beta$. Sean $\mathcal{U}_1 = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\mathcal{U}_2 = \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ elementos en $\beta$. Sean $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Definimos

$$\mathcal{W} = \langle U_1 \cap V, \ldots, U_n \cap V, V_1 \cap U, \ldots, V_m \cap U \rangle.$$

Probaremos que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathcal{W}$.

Observemos que

$$(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cap V)) \cup (\bigcup_{j=1}^{m}(U \cap V_j)) = U \cap V.$$

Dado $A \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, tenemos que $A \subset U$ y $A \subset V$. Además, sabemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $A \cap V_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, de donde obtenemos que $A \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $A \cap (V_j \cap U) \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Así, resulta que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{W}$.

Dado $A \in \mathcal{W}$, sabemos que $A \subset U \cap V$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $A \cap (U_i \cap V) \neq \emptyset$, así que $A \cap U_i \neq \emptyset$. Análogamente, resulta que, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $A \cap V_j \neq \emptyset$. Así, resulta que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \supset \mathcal{W}$. De estar forma, hemos probado que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \mathcal{W}$, como queríamos.

Hemos probado que $\beta$ es cerrada bajo intersecciones finitas. Por tanto, $\beta$ es base para una topología de $2^X$. ■

El siguiente resultado nos dice que la topología que estamos definiendo para hiperespacios de continuos de Hausdorff es la misma que induce la métrica de Hausdorff en el caso de los hiperespacios de continuos métricos.

**1.21 Proposición.** *(ver [17, Teorema 0.13, p. 8]) Si $(X, d)$ es un continuo métrico, entonces la topología de Vietoris $\tau_V$ es equivalente a la topología $\tau_H$ generada por la métrica de Hausdorff en $2^X$.*

**1.22 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología de $X$. Sea $A \in 2^X$ y sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ una vecindad abierta básica de $A$ en $2^X$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es un abierto de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{B}$ tales que $A \in \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$.*

*Demostración.* Dado $x \in A$, definimos $W_x = \bigcap\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } x \in U_i\}$; como $W_x$ es una vecindad abierta de $x$, podemos elegir $V_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V_x \subset W_x$. El conjunto $\{V_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de $A$; como $A$ es compacto, existe una subcubierta $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$, donde $k \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$, así que podemos elegir $x_{k+i} \in A \cap U_i$. Notemos que $V_{x_{k+i}} \subset W_{x_{k+i}} \subset U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y que $\bigcup_{i=1}^{k+n} V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{k+n} W_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Probaremos que $\langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_{k+n}} \rangle$ es una vecindad de $A$ en $C(X)$. Dado que $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$ es cubierta de $A$, tenemos que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_i \subset \bigcup_{i=1}^{k+n} V_i$. Además, dado $i \in \{1, \ldots, k+n\}$, como $x_i \in A \cap V_{x_i}$, resulta que $A \cap V_{x_i} \neq \emptyset$. De esta forma, hemos probado que $A \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_{k+n}} \rangle$.

Ahora probaremos que $\langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_{k+n}} \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Sea $B \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_{k+n}} \rangle$. Tenemos que $B \subset \bigcup_{i=1}^{k+n} V_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Además, dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, el hecho de que $V_{x_{k+i}} \subset U_i$ implica que $B \cap U_i \supset B \cap V_{k+i} \neq \emptyset$. De esta forma, hemos probado que $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ para todo $B \in \langle V_{x_1}, \ldots, V_{x_{k+n}} \rangle$. ■

A partir de este momento todos los espacios $X$ que utilizaremos serán continuos de Hausdorff (a menos que se especifique que son de otra manera), y el hiperespacio $2^X$ será considerado con la topología de Vietoris. Así mismo, a los hiperespacios $C(X)$ y $F_n(X)$ (para toda $n \in \mathbb{N}$) los consideraremos con la topología de subespacios de $2^X$.

A continuación veremos que los hiperespacios $2^X$ y $C(X)$ son espacios Hausdorff y compactos (dos de las características de un continuo de Hausdorff).

**1.23 Proposición.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. El hiperespacio $2^X$ es un espacio topológico Hausdorff.*

*Demostración.* Sean $A$ y $B$ elementos distintos de $2^X$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe un elemento $a \in A \setminus B$. Como $X$ es normal (pues es compacto y Hausdorff) tenemos que existen dos conjuntos abiertos y ajenos $U$ y $V$ de $X$ tales que contienen a los cerrados $\{a\}$ y $B$, respectivamente. Notemos que el abierto $\langle V \rangle$ contiene al elemento $B$. Además $\langle X, U \rangle$ es el conjunto de todos los elementos de $2^X$ que intersectan a $U$, por lo que $A \in \langle X, U \rangle$. Como $U \cap V = \emptyset$, $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset$. Por tanto $2^X$ es Hausdorff. ■

Presentaremos algunos lemas que nos serán de utilidad para probar la compacidad de $2^X$.

**1.24 Lema de Alexander.** *(ver [10, p. 4]) Sea $\mathcal{S}$ una subbase para la topología de un espacio $X$. $X$ es compacto si y sólo si toda cubierta de $X$ formada por elementos de $\mathcal{S}$ tiene una subcubierta finita.*

**1.25 Lema.** *Sea $(X,\tau)$ un espacio topológico. La familia*

$$\mathcal{S} = \{\langle U\rangle \mid U \in \tau\} \cup \{\langle U, X\rangle \mid U \in \tau\}$$

*es una subbase para la topología de Vietoris en $2^X$.*

*Demostración.* Si $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ es un básico de la topología de Vietoris, entonces tenemos que

$$\langle\bigcup_{i=1}^{n} U_i\rangle \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\langle U_i, X\rangle\right) = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle.$$

Por tanto $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de Vietoris en $2^X$. ■

**1.26 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. El hiperespacio $2^X$ con la topología de Vietoris es compacto.*

*Demostración.* Consideremos la subbase $\mathcal{S}$ para la topología de Vietoris en $2^X$ definida en el Lema 1.25. De acuerdo con el Lema 1.24 es suficiente demostrar que, para cada cubierta de $2^X$ formada por elementos de $\mathcal{S}$, es posible encontrar una subcubierta finita. Sea

$$\mathfrak{C} = \{\langle U_\sigma\rangle \mid \sigma \in \Sigma\} \cup \{\langle V_\lambda, X\rangle \mid \lambda \in \Lambda\}$$

una cubierta de subbásicos de $2^X$. Consideremos el conjunto $A_0 = X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$. Para el caso en que $A_0$ es no vacío observamos que este conjunto es cerrado en $X$, así que pertenece a $2^X$. Como $\mathfrak{C}$ es cubierta tenemos que existe $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ que tiene al elemento $A_0$. Observamos que $\mathcal{C}$ tiene que ser de la forma $\mathcal{C} = \langle U_{\sigma_0}\rangle$ para algún $\sigma_0 \in \Sigma$ (porque $X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ no intersecta a ningún conjunto $V_\lambda$). Por lo tanto se tiene que $X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda \subset U_{\sigma_0}$, lo cual implica que $X = U_{\sigma_0} \bigcup \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda\right)$ y, como $X$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $X = V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_n} \cup U_{\sigma_0}$.

A continuación probaremos que $\langle U_{\sigma_0}\rangle \cup \langle V_{\lambda_1}, X\rangle \cup \ldots \cup \langle V_{\lambda_n}, X\rangle$ es cubierta de $2^X$. Sea $A$ un elemento en $2^X$. Si $A \cap V_{\lambda_{i_0}} \neq \emptyset$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $A \in \langle V_{\lambda_{i_0}}, X\rangle$. Si $A \cap V_{\lambda_i} = \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $A \subset X \setminus (V_{\lambda_1} \cup \cdots \cup V_{\lambda_n}) \subset U_{\sigma_0}$ y, por lo tanto, concluimos que $A \in \langle U_{\sigma_0}\rangle$. Esto prueba que $\langle U_{\sigma_0}\rangle \cup \langle V_{\lambda_1}, X\rangle \cup \ldots \cup \langle V_{\lambda_n}, X\rangle$ es una cubierta de $2^X$.

Para el caso en que $A_0 = \emptyset$, $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$, como $X$ es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $X = V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_m}$. Si $A \in 2^X$, como $A$ es no vacío tenemos que $A \cap V_{\lambda_i} \neq \emptyset$ para alguna $i \in \{1, \ldots, m\}$, así que en este caso $\langle V_{\lambda_1}, X\rangle \cup \ldots \cup \langle V_{\lambda_n}, X\rangle$ es cubierta de $2^X$. Por tanto, $2^X$ es compacto. ■

**1.27 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. El hiperespacio $C(X)$ es cerrado en $2^X$.*

*Demostración.* Probemos que el complemento de $C(X)$ es abierto. Sea $A \in 2^X \setminus C(X)$. Como $A$ no es conexo, existen subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos $K$ y $L$ de $X$ tales que $A = K \cup L$. Como $X$ es normal existen abiertos ajenos $U$ y $V$ que contienen a $K$ y $L$, respectivamente. De esta manera tenemos que $A \in \langle U, V\rangle$. Finalmente observemos que todo elemento de $\langle U, V\rangle$ es disconexo (porque $U$ y $V$ son ajenos), así que $\langle U, V\rangle \subset 2^X \setminus C(X)$. Por tanto, $2^X \setminus C(X)$ es abierto y $C(X)$ es cerrado. ∎

**1.28 Corolario.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. El hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

# Capítulo 2

# Arcos Ordenados

Sea $X$ un continuo de Hausdorff. En este capítulo mostraremos la existencia de arcos ordenados en $2^X$ y $C(X)$ y, como consecuencia de este resultado, veremos que $C(X)$ y $2^X$ son conexos. Empezaremos probando algunos resultados básicos que serán de utilidad.

**2.1 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $Y$ un elemento en el hiperespacio $2^X$. Los conjuntos*

*(i)* $\{C \in 2^X : C \subset Y\}$,
*(ii)* $\{C \in 2^X : C \cap Y \neq \emptyset\}$ *y*
*(iii)* $\{C \in 2^X : Y \subset C\}$

*son cerrados en $2^X$.*

*Demostración.* Probaremos que los complementos de estos conjuntos son abiertos.

(i) Notemos que $2^X \setminus \{C \in 2^X : C \subset Y\} = \{C \in 2^X : C \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset\} = \langle X, X \setminus Y \rangle$, el cual es un abierto de $2^X$.
(ii) Aquí observemos que $2^X \setminus \{C \in 2^X : C \cap Y \neq \emptyset\} = \{C \in 2^X : C \subset X \setminus Y\} = \langle X \setminus Y \rangle$, el cual es un abierto de $2^X$.
(iii) Sea $A \in 2^X \setminus \{C \in 2^X : Y \subset C\}$, y sea $y \in Y \setminus A$. Como $X$ es regular tenemos que existe un abierto $U$ que contiene al conjunto $A$ y que no contiene al elemento $y$. Observemos que $\langle U \rangle$ tiene a $A$. Dado $B \in \langle U \rangle$, tenemos que

$y \notin B$ y, por tanto, $Y \not\subset B$. Así, $\langle U\rangle \subset 2^X \setminus \{C \in 2^X : Y \subset C\}$. Esto muestra que $2^X \setminus \{C \in 2^X : Y \subset C\}$ es abierto en $2^X$. ■

**2.2 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Si $\mathcal{A} \subset 2^X$ es cerrado y no vacío, entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ es cerrado en $X$.*

*Demostración.* Probaremos que $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ es compacto (como $X$ es Hausdorff tendremos que $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ es cerrado en $X$). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Consideremos un elemento $A \in \mathcal{A}$; éste es compacto, así que existe una cantidad finita de abiertos $U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A \in \mathcal{U}$ tal que $A \in \langle U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A\rangle$. De esta manera tenemos que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \langle U_1^A, \ldots, U_{n_A}^A\rangle.$$

Como $\mathcal{A}$ es cerrado en $2^X$ también es compacto y, por lo tanto, existe una cantidad finita de elementos $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^{m} \langle U_1^{A_i}, \ldots, U_{n_{A_i}}^{A_i}\rangle.$$

A continuación probaremos que

$$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(U_1^{A_i} \cup \ldots \cup U_{n_{A_i}}^{A_i}\right).$$

Dado $x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Como $\bigcup_{i=1}^{m}\langle U_1^{A_i}, \ldots, U_{n_{A_i}}^{A_i}\rangle$ es una cubierta de $\mathcal{A}$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $A$ está en el abierto $\langle U_1^{A_j}, \ldots, U_{n_{A_j}}^{A_j}\rangle$. Finalmente, debemos notar que $x \in U_k^{A_j}$ para algún $k \in \{1, \ldots, n_{A_j}\}$. Hemos probado que $U_{A\in\mathcal{A}} A$ es compacto y, por tanto, también es cerrado en $X$. ■

**2.3 Definición.** Sea $X$ un espacio topológico y sea $p \in X$. La *casi componente $Q(p)$ de $p$ en $X$* es la intersección de todos los subconjuntos de $X$ abiertos y cerrados que contienen a $p$.

**2.4 Teorema.** *[5, Teorema 6.1.23, p. 357] Sea $X$ un espacio topológico Hausdorff y compacto y sea $p \in X$. La componente conexa de $p$ en $X$ coincide con la casi componente $Q(p)$ en $X$.*

**2.5 Lema.** *([5, Corolario 3.1.5, p. 124]) Sea $X$ un espacio compacto. Si $U \subset X$ es abierto y $\mathcal{Y}$ es una familia de cerrados de $X$ tal que $\bigcap_{Y\in\mathcal{Y}} Y \subset U$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{Y}$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \subset U$.*

**2.6 Lema.** *Sea $X$ un espacio topológico Hausdorff y compacto. Sea $K$ una componente de $X$ y sea $F$ un subconjunto cerrado de $X$ tal que $F \cap K = \emptyset$. Se tiene que existe un subconjunto abierto y cerrado $L$ de $X$ tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$.*

*Demostración.* Sea $p \in K$. Por el Teorema 2.4, $K$ es la casi componente de $p$ en X. Como $X \setminus F$ es abierto y $K \subset X \setminus F$, del Lema 2.5 se sigue que existen $n \in \mathbb{N}$ y $Y_1, \dots, Y_n$ abiertos y cerrados de $X$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} Y_i \subset X \setminus F$. Definimos $L = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$; observemos que $L$ es abierto y cerrado en $X$. Dado que $p \in L$ y $K$ es la casi componente de $p$ en $X$, tenemos que $K \subset L$. Así, $L$ es un abierto y cerrado de $X$ tal que $K \subset L$ y $L \cap F = \emptyset$. ■

**2.7 Teorema de los golpes en la frontera.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff, sea $U$ un abierto no vacío contenido propiamente en $X$ y sea $K$ una componente de $\mathrm{cl}_X(U)$. Entonces $K \cap \mathrm{fr}_X(U) \neq \emptyset$.*

*Demostración.* Supongamos que $K \cap \mathrm{fr}_X(U) = \emptyset$. Como $\mathrm{fr}_X(U) \neq \emptyset$ y $\mathrm{fr}_X(U)$ es cerrado en $\mathrm{cl}_X(U)$, el Lema 2.6 (aplicado al espacio $\mathrm{cl}_X(U)$) nos dice que existe un subconjunto abierto y cerrado $L$ de $\mathrm{cl}_X(U)$ tal que $K \subset L$ y $L \cap \mathrm{fr}_X(U) = \emptyset$. Entonces $L \neq \emptyset$ y $L \subset U$ (así que $L \neq X$). Como $\mathrm{cl}_X(U)$ es cerrado en $X$ también $L$ lo es. Como $L$ es abierto en $\mathrm{cl}_X(U)$ existe un abierto $W$ de $X$ tal que $W \cap \mathrm{cl}_X(U) = L$. Dado que $L \subset U$, entonces $W \cap U = L$ y $L$ es un abierto en $X$. Lo anterior contradice la conexidad de $X$ y así hemos demostrado que $K \cap \mathrm{fr}_X(U) \neq \emptyset$. ■

**2.8 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Si $A$ y $B$ son subcontinuos de $X$ tales que $A \subsetneq B$, entonces existe un subcontinuo $C$ de $X$ tal que $A \subsetneq C \subsetneq B$.*

*Demostración.* Sea $p \in B \setminus A$. Como $B$ es un espacio normal existe un abierto $U$ de $B$ tal que $A \subset U \subset \mathrm{cl}_B(U) \subset B \setminus \{p\}$. Tomemos la componente $C$ de $\mathrm{cl}_B(U)$ que contiene a $A$. Como las componentes son cerradas, $C$ es un subcontinuo de $B$ y, por tanto, un subcontinuo de $X$. Como $p \notin C$, tenemos que $C \neq B$. Ahora veremos que $C \neq A$. Consideremos $\mathrm{fr}_B(U)$. Como $U$ es abierto de $B$, tenemos que $U \cap \mathrm{fr}_B(U) = \emptyset$. Como $A \subset U$, tenemos que $A \cap \mathrm{fr}_B(U) = \emptyset$ y, como el Teorema 2.7 nos dice que $C \cap \mathrm{fr}_B(U) \neq \emptyset$, concluimos que $A \neq C$. ■

A continuación definiremos un cierto tipo de familias de cerrados en $2^X$ que utilizaremos para construir los arcos ordenados.

**2.9 Definición.** Sean $X$ un continuo de Hausdorff, $A$ y $B \in 2^X$. Un *encebollado* $\mathcal{E}$ de $A$ a $B$ es un subconjunto no vacío de $2^X$ que cumple:

(i) $A$ y $B \in \mathcal{E}$.

(ii) Para todo $E \in \mathcal{E}$ se cumple que $A \subset E \subset B$.

(iii) Si $E$ y $F \in \mathcal{E}$, entonces $E \subset F$ o $F \subset E$.

(iv) Si $E \in \mathcal{E}$, entonces cada componente de $E$ intersecta a $A$.

Notemos que si hay un encebollado $\mathcal{E}$ de $A$ a $B$, por $(i)$ y $(iv)$, tenemos que cada componente de $B$ intersecta a $A$.

**2.10 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in 2^X$ de forma que $A \subset B$. Si $\mathcal{E}$ es un encebollado maximal de $A$ a $B$ (i. e. un encebollado de $A$ a $B$ que no está contenido propiamente en ningún otro), entonces $\mathcal{E}$ es compacto.*

*Demostración.* Como $2^X$ es compacto bastará mostrar que $\mathcal{E}$ es cerrado en $2^X$. Sea $E$ un elemento de $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{E})$. Probaremos que $\mathcal{E} \cup \{E\}$ es un encebollado de $A$ a $B$ verificando que cumple todas las condiciones:

(i) Es claro que $\{A, B\} \subset \mathcal{E} \cup \{E\}$.

(ii) Por la definición de $\mathcal{E}$ y por el Lema 2.1 sabemos que los conjuntos $\{F \in 2^X \mid A \subset F\}$ y $\{F \in 2^X \mid F \subset B\}$ son cerrados, así que $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{E}) \subset \{F \in 2^X \mid A \subset F\}$ y $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{E}) \subset \{F \in 2^X \mid F \subset B\}$, de donde $A \subset E \subset B$.

(iii) Sea $G \in \mathcal{E}$. Por el Lema 2.1 y la condición 2.9(iii), tenemos que $\mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{E}) \subset \{F \in 2^X \mid G \subset F\} \cup \{F \in 2^X \mid F \subset G\}$, así que $G \subset E$ o bien $E \subset G$.

(iv) Supongamos que existe una componente $K$ de $E$ tal que $K \cap A = \emptyset$. Por el Lema 2.6 existen cerrados ajenos $P$ y $Q$ de $E$ tales que $A \subset P$, $K \subset Q$ y $E = P \cup Q$. Por la normalidad de $X$ podemos encontrar abiertos ajenos $U$ y $V$ en $X$ tales que $Q \subset U$ y $P \subset V$. Como $E \cap U \supset K$ y $E \cap V \supset A$, tenemos que $E \in \langle U, V \rangle$. Observemos que todos los elementos de $\langle U, V \rangle$ son disconexos. Como $E \in \mathrm{cl}_{2^X}(E)$, existe $F \in \mathcal{E} \cap \langle U, V \rangle$. Tomemos un elemento $p \in F \cap U$. Como $F$ está en el encebollado sabemos que la componente $C_p$ de $F$ que tiene a $p$ intersecta a $A$, esto implica que $C_p \cap V \neq \emptyset$. Además, $p \in C_p \cap U$ y $C_p \subset F \subset U \cup V$. Así, $C_p \in \langle U, V \rangle$, pero esto contradice la conexidad de $C_p$. Por tanto todas las componentes de $E$ intersectan a $A$.

Hemos mostrado que $\mathcal{E} \cup \{E\}$ es un encebollado de $A$ a $B$. Por la maximalidad de $\mathcal{E}$, tenemos que $E \in \mathcal{E}$, como queríamos. Por tanto $\mathcal{E}$ es cerrado y entonces también es compacto. ■

**2.11 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $C, D \in 2^X$ tales que $C \subsetneq D$ y cada componente de $D$ intersecta a $C$. Entonces existe $E \in 2^X$ tal que $C \subsetneq E \subsetneq D$ y cada componente de $E$ intersecta a $C$.*

*Demostración.* Elegimos $p \in D \setminus C$. Sea $F$ la componente de $D$ que tiene a $p$. Por hipótesis $F \cap C \neq \emptyset$. Elegimos $x \in F \cap C$. Sea $G = C \cup F$. Sea $U$ abierto en $G$ tal que $C \subset U$ y $p \notin \mathrm{cl}_G(U)$. Sea $L$ la componente de $\mathrm{cl}_G(U)$ que tiene a $x$. Por el Teorema 2.7, $L \cap \mathrm{fr}_G(U) \neq \emptyset$. Como $C \subset U$, tenemos que $L \setminus C \neq \emptyset$. Hacemos $E = C \cup L$. Entonces $C \subsetneq E$. Ya que $E \subset \mathrm{cl}_G(U)$, $p \notin E$, de manera que $D \setminus E \neq \emptyset$. Dado que $G \subset D$, tenemos que $E \subsetneq D$.

Para ver que cada componente de $E$ intersecta a $C$, tomemos $e \in E$ y $C_e$ su componente en $E$; si $e \in C$, es claro que $C_e \cap C \neq \emptyset$; si $e \in L$, entonces $C_e \supset L$ (pues $L$ es un conexo en $E$ que contiene a $e$). Luego, $x \in L \cap C \subset C_e \cap C$, así que $C_e \cap C \neq \emptyset$. ■

**2.12 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in 2^X$ tales que $A \subset B$. Si $\mathcal{E}$ es un encebollado maximal de $A$ a $B$, entonces $\mathcal{E}$ es conexo.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{E}$ no es conexo, es decir, que existen subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ de $2^X$ tales que $\mathcal{E} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $B \in \mathcal{L}$. Sea $C = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$. Probaremos que $C \in \mathcal{K}$. Por el Lema 2.2 sabemos que $C$ es cerrado. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ una vecindad de $C$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ elegimos $x_i \in C \cap U_i$ y $K_i \in \mathcal{K}$ tal que $x_i \in K_i$. Como $\mathcal{K}$ es un subconjunto de un encebollado tenemos que $\mathcal{K}$ está totalmente ordenado por la inclusión, así que existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_1, \ldots, x_n \in K_{i_0}$; lo anterior implica que $K_{i_0} \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además $K_{i_0} \subset C \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, así que $K_{i_0} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y, por tanto, $C \in \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. El conjunto $\mathcal{D} = \{L \in \mathcal{L} \mid C \subset L\}$ es no vacío pues $B \in \mathcal{L}$ y $C \subset B$. Definimos $D = \bigcap_{L \in \mathcal{D}} L$; notemos que $D$ es cerrado. Probaremos que $D \in \mathcal{L}$. Sea $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ una vecindad de $D$. Utilizando el Lema 2.5 sabemos que existen $L_1, \ldots, L_m \in \mathcal{D}$ tales que $\bigcap_{j=1}^m L_j \subset \bigcup_{l=1}^n V_l$; como $\mathcal{D}$ es un conjunto totalmente ordenado por la inclusión existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $L_{j_0} = \bigcap_{j=1}^m L_j$. Además $D \subset L_{j_0}$, así que $L_{j_0} \cap V_l \neq \emptyset$ para toda $l \in \{1, \ldots, n\}$ y, por lo tanto, $L_{j_0} \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \mathcal{L}$ y $D \in \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$. Hasta aquí sabemos que $C \subset D$ (por la definición de $\mathcal{D}$), $C \in \mathcal{K}$ y $D \in \mathcal{L}$; además, como $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ la contención debe ser propia. Notemos que, como $\{C, D\} \subset \mathcal{E}$, toda componente de $D$ intersecta a $C$, de manera que el Lema 2.11 nos dice que existe $E \in 2^X$ tal que $C \subsetneq E \subsetneq D$ y todas las componentes de $E$ intersectan a $C$. Veamos que $E \notin \mathcal{E}$. Supongamos que $E \in \mathcal{E} = \mathcal{K} \cup \mathcal{L}$. Como los elementos de $\mathcal{K}$ están contenidos en $C$, tenemos que $E \notin \mathcal{K}$, así que $E \in \mathcal{L}$, pero, por la definición de $D$, esto implica que $D \subset E$, lo cual contradice la elección de $E$. Por tanto $E \notin \mathcal{E}$. Veamos que $\mathcal{E} \cup \{E\}$ cumple todas las condiciones para ser un encebollado de $A$ a $B$:

(i) Como $\mathcal{E}$ es encebollado tenemos que $A, B \in \mathcal{E} \cup \{E\}$.

(ii) Como $A \subset C$ y $D \subset B$, tenemos que $A \subset E \subset B$.

(iii) Sea $F \in \mathcal{E}$. Si $F \subset C$, entonces $F \subset E$. Si $C \subsetneq F$, entonces $F \notin \mathcal{K}$, así que $F \in \mathcal{L}$, de modo que $D \subset F$, por la definición de $D$, de donde resulta que $E \subset F$.

(iv) Sea $Q$ una componente de $E$. Por la elección de $E$ podemos tomar un elemento $e \in Q \cap C$. La componente $C_e$ en $C$ intersecta a $A$, así que $Q \cap A \supset C_e \cap A \neq \emptyset$.

De esta manera hemos construido un encebollado que contiene propiamente a $\mathcal{E}$, lo cual contradice la maximalidad de $\mathcal{E}$. Esto demuestra que $\mathcal{E}$ es conexo. ∎

**2.13 Definición.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in 2^X$. Un *arco ordenado de $A$ a $B$* es un subespacio $\mathcal{A} \subset 2^X$ que cumple:

(a) $\mathcal{A}$ es compacto y conexo.

(b) Si $C$ y $D \in \mathcal{A}$, entonces $C \subset D$ o $D \subset C$.

(c) $A = \bigcap_{C \in \mathcal{A}} C$ y $B = \bigcup_{C \in \mathcal{A}} C$.

**2.14 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de $A$ a $B$, entonces $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$.*

*Demostración.* Sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ un abierto que contiene a $A$. Como $\bigcap_{C \in \mathcal{A}} C = A \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, el Lema 2.5 nos dice que podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ y $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{A}$ tales que $\bigcap_{j=1}^m C_j \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Sea $C = \bigcap_{j=1}^m C_j$. Como $A \subset C$ tenemos que $C \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, así que $C \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Dado que $\mathcal{A}$ está totalmente ordenado por la contención tenemos que $C \in \mathcal{A}$ y, por tanto, $C \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \mathcal{A}$ y $A \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

Tomemos un abierto $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ que contiene a $B$. Para cada índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $b_i \in B \cap V_i$; como $B = \bigcup_{C \in \mathcal{A}} C$, existe $C_i \in \mathcal{A}$ tal que $b_i \in C_i$. Definiendo $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$ tenemos que $C \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, $C \subset B \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$, así que $C \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$. Dado que $\mathcal{A}$ está totalmente ordenado por la contención tenemos que $C \in \mathcal{A}$ y, por tanto, $C \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \cap \mathcal{A}$ y $B \in \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$. ∎

**2.15 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces toda componente de $B$ intersecta a $A$ si y sólo si existe un arco ordenado de $A$ a $B$.*

*Demostración.*

($\Rightarrow$) Para probar este teorema utilizaremos el Lema de Zorn.

Consideremos el conjunto

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{E} \subset 2^X \mid \mathcal{E} \text{ es un encebollado de } A \text{ a } B\}$$

ordenado por la contención (es decir, $\mathcal{E} \leq \mathcal{F}$ si y sólo si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$). Como $\{A, B\}$ es un encebollado de $A$ a $B$, tenemos que $\mathbb{A} \neq \emptyset$.

Sea $\mathbb{C}$ una cadena no vacía en $\mathbb{A}$. Definamos $\mathcal{E}' = \bigcup_{\mathcal{E} \in \mathbb{C}} \mathcal{E}$. Probaremos que $\mathcal{E}' \in \mathbb{A}$ viendo que $\mathcal{E}'$ cumple las propiedades de un encebollado.

(i) Como la cadena es no vacía, existe un encebollado contenido en $\mathcal{E}'$ que contiene a $A$ y a $B$, de donde $\{A, B\} \subset \mathcal{E}'$.

(ii) Para cada $E \in \mathcal{E}'$ existe un encebollado en $\mathbb{C}$ que contiene a $E$, así que $A \subset E \subset B$.

(iii) Para $E$ y $F \in \mathcal{E}'$ existen encebollados $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F} \in \mathbb{C}$ que los contienen, respectivamente. Como $\mathbb{C}$ es una cadena podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. De esta manera tenemos que $E$ y $F$ son elementos de $\mathcal{F}$; como este último es un encebollado llegamos a que $E \subset F$ o bien $F \subset E$.

(iv) Cada $E \in \mathcal{E}'$ es elemento de un encebollado en $\mathbb{C}$, así que todas las componentes de $E$ intersectan a $A$.

Hasta aquí hemos probado que $\mathcal{E}'$ es un encebollado de $A$ a $B$ y, por lo tanto, es un elemento de $\mathbb{A}$. Como $\mathcal{E}'$ es un encebollado mayor o igual que todos los elementos de $\mathbb{C}$ (pues los contiene a todos), entonces $\mathcal{E}'$ es una cota superior de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{A}$. Esto demuestra que toda cadena en $\mathbb{A}$ tiene cota superior, así que $\mathbb{A}$ satisface las hipótesis del Lema de Zorn y, por lo tanto, existe un encebollado maximal $\mathcal{E}^*$ en $\mathbb{A}$.

Veamos que $\mathcal{E}^*$ cumple con las propiedades de un arco ordenado:

(a) Los Lemas 2.10 y 2.12 nos dicen que $\mathcal{E}^*$ es compacto y conexo.

(b) Puesto que $\mathcal{E}^*$ es un encebollado, para cualesquiera $E$ y $F \in \mathcal{E}^*$ tenemos que $E \subset F$ o $F \subset E$.

(c) Como $\mathcal{E}^*$ es un encebollado, para toda $C \in \mathcal{E}^*$ se tiene que $A \subset C \subset B$. Usando lo anterior y el hecho de que $A$ y $B \in \mathcal{E}^*$ tenemos que $A = \bigcap_{C \in \mathcal{E}^*} C$ y $B = \bigcup_{C \in \mathcal{E}^*} C$.

Lo anterior prueba que $\mathcal{E}^*$ es un arco ordenado de $A$ a $B$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existen un arco ordenado $\mathcal{A}$ de $A$ a $B$ y una componente $K$ de $B$ que no intersecta a $A$. El Lema 2.6 nos dice que existen subconjuntos cerrados y ajenos $M$ y $N$ de $B$ tales que $K \subset M$, $A \subset N$ y $M \cup N = B$. Sean

$$\mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \{C \in 2^X \mid C \cap M \neq \emptyset\} \text{ y}$$
$$\mathcal{N} = \mathcal{A} \cap \{C \in 2^X \mid C \subset N\}.$$

Ya que $\mathcal{A}$ es cerrado en $2^X$, por el Lema 2.1 tenemos que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son cerrados en $2^X$. Por el Lema 2.14 sabemos que $A$ y $B \in \mathcal{A}$; dado que $A \subset N$ tenemos que $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y, como $B \cap M \neq \emptyset$, tenemos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Dado $C \in \mathcal{A}$, sabemos que $C \subset B$. Como $B = M \cup N$, necesariamente $C \cap M \neq \emptyset$ o $C \subset N$, así que $C \in \mathcal{M}$ o $C \in \mathcal{N}$. Por lo anterior, $\mathcal{A} = \mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. Como $M \cap N = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \emptyset$; pero entonces $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ forman una separación en cerrados del subespacio conexo $\mathcal{A}$, lo cual no puede ser. Por tanto, toda componente de $B$ intersecta a $A$. ■

**2.16 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{U}$ un abierto básico de $2^X$ y sean $A, B$ y $C \in 2^X$. Si $A \subset B \subset C$ y $\{A, C\} \subset \mathcal{U}$, entonces $B \in \mathcal{U}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Como $A \in \mathcal{U}$, tenemos que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $A \subset B$, resulta que $B \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $C \in \mathcal{U}$, tenemos que $C \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Dado que $B \subset C$, concluimos que $B \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. ■

**2.17 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in 2^X$ y sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado de $A$ a $B$ en $2^X$. Dados $C$ y $D \in \mathcal{A}$, los conjuntos*

*(i)* $\{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E\}$,

*(ii)* $\{E \in \mathcal{A} : E \subsetneq D\}$ *y*

*(iii)* $\{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E \subsetneq D\}$

*son abiertos en $\mathcal{A}$.*

*Demostración.* (i) Como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, tenemos que $\mathcal{A} \setminus \{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E\} = \{E \in \mathcal{A} : E \subset C\}$. De acuerdo con el Lema 2.1(i) tenemos que $\{E \in 2^X : E \subset C\}$ es cerrado en $2^X$, así que $\{E \in \mathcal{A} : C \subset E\} = \mathcal{A} \cap \{E \in 2^X : E \subset C\}$ es cerrado en $\mathcal{A}$. Por lo anterior, $\{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E\}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$.

(ii) Como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, $\mathcal{A} \setminus \{E \in \mathcal{A} : E \subsetneq D\} = \{E \in \mathcal{A} : D \subset E\}$. De acuerdo con el Lema 2.1(iii), tenemos que $\{E \in 2^X : D \subset E\}$ es cerrado en $2^X$, así que $\{E \in \mathcal{A} : D \subset E\} = \mathcal{A} \cap \{E \in 2^X : D \subset E\}$ es cerrado en $\mathcal{A}$. Por lo anterior, $\{E \in \mathcal{A} : E \subsetneq D\}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$.

(iii) Sea $\mathcal{U} = \{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E \subsetneq D\}$. Como $\mathcal{U} = \{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E\} \cap \{E \in \mathcal{A} : E \subsetneq D\}$, por los incisos (i) y (ii) podemos concluir que $\mathcal{U}$ es un subconjunto abierto de $\mathcal{A}$.

■

**2.18 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de $A$ a $B$ en $2^X$, entonces el orden en $\mathcal{A}$ dado por la inclusión es un orden lineal y $\mathcal{A}$ tiene la topología inducida por dicho orden.*

*Demostración.* Sea $\tau$ la topología de $\mathcal{A}$ como subespacio de $2^X$ y sea $\sigma$ la topología de $\mathcal{A}$ inducida por el orden de la inclusión. Para probar que $\tau = \sigma$ mostraremos ambas contenciones.

($\sigma \subset \tau$) Por el Lema 2.17, dados $C$ y $D \in \mathcal{A}$, los conjuntos $(C, \rightarrow) = \{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E\}$, $(\leftarrow, D) = \{E \in \mathcal{A} : E \subsetneq D\}$ y $(C, D) = \{E \in \mathcal{A} : C \subsetneq E \subsetneq D\}$ son abiertos en $\tau$. Como $\{(C, \rightarrow) : C \in \mathcal{A}\} \cup \{(\leftarrow, D) : D \in \mathcal{A}\} \cup \{(C, D) : C, D \in \mathcal{A}\}$ es una base para $\sigma$, tenemos que $\sigma \subset \tau$.

($\tau \subset \sigma$) Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ abierto en $X$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Tomemos $C \in \mathcal{A} \cap \mathcal{U}$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

En el caso en que $C \subsetneq B$, vamos a encontrar $D \in \mathcal{U}$ tal que $C \subsetneq D$. Los conjuntos $\langle X \setminus C, X \rangle$ y $\langle U \rangle$ son abiertos en $2^X$. Dado $F \in \mathcal{A}$, como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, tenemos que $F \subset C$ (y por tanto $F \in \langle U \rangle$) o bien $C \subsetneq F$ (y entonces $F \in \langle X \setminus C, X \rangle$). Así, $\mathcal{A} \subset \langle X \setminus C, X \rangle \cup \langle U \rangle$. Por lo anterior, $\langle X \setminus C, X \rangle \cap \mathcal{A}$ y $\langle U \rangle \cap \mathcal{A}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{A}$ (con la topología $\tau$) tales que su unión es $\mathcal{A}$ y contienen a $B$ y a $C$, respectivamente. Por la conexidad de $\mathcal{A}$ podemos elegir un elemento $D \in \langle X \setminus C, X \rangle \cap \langle U \rangle \cap \mathcal{A}$. Notemos que $C \subsetneq D \subset U$.

En el caso en que $A \subsetneq C$, vamos a encontrar $E \in \mathcal{U}$ tal que $E \subsetneq C$. Sea $\mathcal{B} = \{F \in \mathcal{A} : F \subsetneq C\}$. Por el Lema 2.17(ii) tenemos que $\mathcal{B}$ es abierto en $\mathcal{A}$ (con la topología $\tau$). Consideremos $F \in \mathcal{A}$. Si $F \notin \mathcal{B}$, como $\mathcal{A}$ es arco ordenado, tenemos que $C \subset F$. Dado que $F \cap U_i \supset C \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y que $F \subset X$, tenemos que $F \in \langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle$. Por lo anterior, resulta que $\mathcal{B}$ y $\langle U_1, \ldots, U_n, X \rangle \cap \mathcal{A}$ son subconjuntos abiertos de $\mathcal{A}$ (con la topología $\tau$) cuya unión es $\mathcal{A}$ y que contienen a $A$ y a $C$, respectivamente. Por la conexidad de $\mathcal{A}$, podemos elegir un elemento $E \in \mathcal{B} \cap \langle U_1, \ldots U_n, X \rangle \cap \mathcal{A}$. Notemos que $E \subsetneq C$ y $E \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

A continuación daremos una vecindad $\mathcal{V}$ de $C$ en $(\mathcal{A}, \sigma)$ tal que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Consideraremos tres casos:

1. Si $C \notin \{A, B\}$, definimos $\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{A} : E \subsetneq F \subsetneq D\}$ donde $E$ y $D$ son los que encontramos antes. Observemos que $\mathcal{V} \in \sigma$. Dado $F \in \mathcal{V}$, tenemos que $F \cap U_i \supset E \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, además de que $F \subset D \subset U$. Así, resulta que $F \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Claramente $C \in \mathcal{V}$.

2. Si $C = A$, definimos $\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{A} : F \subsetneq D\}$. Observemos que $\mathcal{V} \in \sigma$. Dado $F \in \mathcal{V}$, tenemos que $F \cap U_i \supset A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $F \subset D \subset U$. Así, resulta que $F \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Claramente $C \in \mathcal{V}$.

3. Si $C = B$, definimos $\mathcal{V} = \{F \in \mathcal{A} : E \subsetneq F\}$. Observemos que $\mathcal{V} \in \sigma$. Dado $F \in \mathcal{V}$, tenemos que $F \cap U_i \supset E \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $F \subset B \subset U$. Así, resulta que $F \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Claramente $C \in \mathcal{V}$.

Hemos probado que $\mathcal{U} \in \sigma$, de donde podemos concluir que $\tau \subset \sigma$. Por tanto, $\tau = \sigma$. ■

**2.19 Lema.** *Sea $X$ un continuo totalmente ordenado que tiene la topología inducida por el orden. $X$ es un arco generalizado.*

*Demostración.* Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{[x, \rightarrow) : x \in X\}$. Ya que el orden en $X$ es total, dados $x_1, \ldots, x_n \in X$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i = \text{máx}(\{x_1, \ldots, x_n\})$, entonces $[x_i, \rightarrow) = [x_1, \rightarrow) \cap \ldots \cap [x_n, \rightarrow)$. Esto muestra que $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados no vacíos de $X$ con la propiedad de la intersección finita. Como $X$ es compacto, existe $x_0 \in \bigcap\{[x, \rightarrow) : x \in X\}$. De manera que $x \leq x_0$ para toda $x \in X$. Entonces $x_0$ es el máximo de $X$.

Veamos que todo conjunto no vacío de $X$ tiene una cota superior mínima. Sea $P$ un subconjunto no vacío de $X$. Sea $A = \{x \in X : x \text{ es cota superior de } P\}$. El conjunto $A$ no es vacío pues tiene a $x_0$. Si existe $s \in A \cap P$, entonces $s$ es cota superior de $P$ y $s \in P$. Esto último implica que $s \leq x$ para toda cota superior $x$ de $P$, así que $s = \sup(P)$, y ya terminamos en este caso. Supongamos entonces que $A \cap P = \emptyset$. De manera que $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$. Ya que $X$ es conexo, existe un punto $s_0 \in \text{fr}_X(A)$. Si $s_0 \notin A$, $s_0$ no es cota superior de $P$, de modo que existe $p \in P$ tal que $s_0 < p$. Como $(\leftarrow, p)$ no tiene cotas superiores de $P$, tenemos que $(\leftarrow, p)$ es una vecindad de $s_0$ sin puntos de $A$, esto es absurdo pues $s_0 \in \text{cl}_X(A)$. Esto prueba que $s_0 \in A$. Por tanto, $s_0$ es cota superior de $P$. Si $s_0$ no es el mínimo de $A$, existe $a \in A$ tal que $a < s_0$. Ya que $a$ es cota superior de $P$, todos los elementos de $(a, \rightarrow)$

también lo son, de manera que $(a, \rightarrow)$ es una vecindad de $s_0$ contenida en $A$, esto de nuevo contradice el hecho de que $s_0 \in \operatorname{fr}_X(A)$. Por tanto, $s_0$ es el supremo de $P$.

Por el Lema 1.5, todos los subconjuntos no vacíos de $X$ tienen ínfimo.

Ahora tomemos $x, y \in X$ tales que $x < y$. Como $(\leftarrow, x]$ y $[y, \rightarrow)$ son cerrados de $X$ ajenos y no vacíos, por la conexidad de $X$ tenemos que existe un elemento $z \in X \setminus \big((\leftarrow, x] \cup [y, \rightarrow)\big)$. De manera que $x < z < y$. Esto termina la prueba de que $X$ es un arco generalizado. ■

**2.20 Corolario.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in 2^X$ y sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado de $A$ a $B$ en $2^X$. Entonces $\mathcal{A}$ es un arco generalizado.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.18, tenemos que el orden en $\mathcal{A}$ dado por la inclusión es un orden lineal y $\mathcal{A}$ tiene la topología inducida por dicho orden. Para probar este corolario, es suficiente con aplicar el Lema 2.19. ■

**2.21 Notación.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Dado un arco ordenado $\mathcal{A}$ en $C(X)$ y elementos $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset B$, definimos $[A, B]_{\mathcal{A}} = \{C \in \mathcal{A} : A \subset C \subset B\}$.

**2.22 Corolario.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $C(X)$.*

1. *Los subcontinuos de $\mathcal{A}$ son los intervalos $[A, B]_{\mathcal{A}}$ con $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$.*

2. *Dados $A$ y $B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subsetneq B$, $[A, B]_{\mathcal{A}}$ es un arco ordenado de $A$ a $B$ en $C(X)$.*

*Demostración.*

1. Se sigue inmediatamente del Corolario 2.20 y de la Proposición 1.8.

2. Por el inciso (a), $[A, B]_{\mathcal{A}}$ es un subcontinuo de $C(X)$. Como $[A, B]_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, dados $C$ y $D \in [A, B]_{\mathcal{A}}$ se tiene que $C$ y $D$ son comparables por la inclusión. Por la definición de $[A, B]_{\mathcal{A}}$, $A = \bigcap\{C \in [A, B]_{\mathcal{A}}\}$ y $B = \bigcup\{C \in [A, B]_{\mathcal{A}}\}$.

■

**2.23 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in C(X)$ tales que $A \subsetneq B$. Entonces existe un arco ordenado de $A$ a $B$ en $C(X)$.*

*Demostración.* Por el Teorema 2.15, existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ de $A$ a $B$ en $2^X$. Sea $C \in \mathcal{A}$. Probaremos que $[A, C]_{\mathcal{A}}$ es un arco ordenado de $A$ a $C$, lo cual, de acuerdo con el Teorema 2.15, implicará que $C$ es conexo (pues $A \subset C$ y toda componente de $C$ intersecta a $A$, que es conexo).

(a) Por el Corolario 2.22, tenemos que $[A, C]_{\mathcal{A}}$ es un subcontinuo de $\mathcal{A}$.

(b) Como $[A, C]_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, para todo $D$ y $E \in [A, C]_{\mathcal{A}}$ se cumple que $D \subset E$ o $E \subset D$.

(c) Para toda $D \in [A, C]_{\mathcal{A}}$ se tiene que $A \subset D \subset C$; de acuerdo con esto y con el hecho de que $A$ y $C \in [A, C]_{\mathcal{A}}$, tenemos que $A = \bigcap\{D \in [A, C]_{\mathcal{A}}\}$ y $C = \bigcup\{D \in [A, C]_{\mathcal{A}}\}$.

■

**2.24 Corolario.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$ son conexos.*

*Demostración.* Sea $A \in 2^X$. Por el Teorema 2.15 sabemos que existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ de $A$ a $X$, como los arcos ordenados son conexos, concluimos que el hiperespacio $2^X$ es conexo. Similarmente, $C(X)$ es conexo. ■

En el capítulo anterior probamos que $C(X)$ y $2^X$ son espacios Hausdorff y compactos. El corolario anterior nos permite hacer la siguiente observación:

**2.25 Observación.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$ son continuos de Hausdorff.

Antes de terminar este capítulo, probaremos algunas propiedades de los arcos ordenados que nos serán útiles más adelante.

**2.26 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A, B$ y $C \in 2^X$ tales que $A \subset B \subset C$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de $A$ a $B$ y $\mathcal{B}$ es un arco ordenado de $B$ a $C$, entonces $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un arco ordenado de $A$ a $C$.*

*Demostración.* Veamos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ cumple las tres propiedades de la Definición 2.13.

(a) Como $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, tenemos que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un continuo.

(b) Sean $D, E \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Si $\{D, E\} \subset \mathcal{A}$ o $\{D, E\} \subset \mathcal{B}$, tenemos que $D \subset E$ o $E \subset D$ (pues $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos ordenados). Si no sucede lo anterior, podemos suponer, sin perder generalidad, que $D \in \mathcal{A}$ y $E \in \mathcal{B}$; en este caso tenemos que $D \subset B \subset E$.

(c) Tenemos que $\bigcap_{F\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} F = (\bigcap_{F\in\mathcal{A}} F) \cap (\bigcap_{F\in\mathcal{B}} F) = A \cap B = A$. Además, $\bigcup_{F\in\mathcal{A}\cup\mathcal{B}} F = (\bigcup_{F\in\mathcal{A}} F) \cup (\bigcup_{F\in\mathcal{B}} F) = B \cup C = C$.

■

**2.27 Definición.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Un *arco ordenado largo* es un arco ordenado que empieza en un conjunto de la forma $\{x\}$ $(x \in X)$ y que termina en $X$.

Observemos que, dado cualquier punto $x \in X$, existe un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$.

**2.28 Corolario.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A$ y $B \in C(X)$ tales que $A \subset B$. Existe un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$.*

*Demostración.* Sea $x \in A$. Por el Corolario 2.23 existe un arco ordenado $\mathcal{A}_1$ de $\{x\}$ a $A$, un arco ordenado $\mathcal{A}_2$ de $A$ a $B$ y un arco ordenado $\mathcal{A}_3$ de $B$ a $X$. Por el Lema 2.26, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$ es un arco ordenado largo que empieza en $\{x\}$. Por construcción, tenemos que $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$. ■

# Capítulo 3

# Niveles de Whitney

Dado un continuo de Hausdorff $X$, una *función de Whitney* es una función continua $\mu : C(X) \to [0,1]$ tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para cada $x \in X$ y $\mu(A) < \mu(B)$ cuando $A \subsetneq B$. En [2, Observación 3, p. 306] se muestra que hay continuos de Hausdorff para los cuales no existen funciones de Whitney. En el caso en que $X$ es metrizable, tales funciones sí existen, como se puede ver en [17, 0.50.1, p.19]. Los *niveles de Whitney* en $C(X)$ se definen como los subconjuntos de la forma $\mu^{-1}(t)$, donde $\mu$ es una función de Whitney y $t \in [0, \mu(X)]$. En [6], A. Illanes mostró que los niveles de Whitney se pueden definir, equivalentemente, sin recurrir a las funciones de Whitney. Esta definición de A. Illanes es la que adoptamos en este trabajo y es la que damos a continuación.

**3.1 Definición.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Un *nivel de Whitney en* $C(X)$ es un subconjunto compacto $\mathcal{W}$ de $C(X)$ que cumple que $\mathcal{W} = F_1(X)$ o $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$ y además satisface las siguientes dos condiciones:

(a) Si $A, B \in \mathcal{W}$ y $A \neq B$, entonces $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

(b) $\mathcal{W}$ intersecta cada arco ordenado largo en $C(X)$.

Observemos que $F_1(X)$ y $\{X\}$ son niveles de Whitney en $C(X)$; a éstos les llamamos *niveles triviales* de Whitney.

Uno de los hechos más importantes sobre niveles de Whitney para $C(X)$ es que son conexos y, por tanto, son subcontinuos del espacio $C(X)$. Para probar este resultado utilizaremos los siguientes lemas.

**3.2 Proposición.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Los niveles de Whitney en $C(X)$ son no vacíos.*

*Demostración.* Fijemos un punto $x \in X$. Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$. Dado que $\mathcal{W}$ satisface la condición (b) en la Definición 3.1, tenemos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, así que $\mathcal{W}$ no es vacío.

■

**3.3 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap C(X)$ un abierto básico de $C(X)$, donde $U_i$ es un abierto de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos que, si $A$ y $B$ están en $\mathcal{U}$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \cup B \in \mathcal{U}$.*

*Demostración.* Como $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cup B \in C(X)$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $U_i \cap (A \cup B) \supset U_i \cap A \neq \emptyset$. Además, como $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, resulta que $A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. ■

**3.4 Definición.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Dado un subconjunto cerrado $\mathcal{C}$ de $C(X)$, definimos

$$L(\mathcal{C}) = \{A \in C(X) : A \subset B \text{ para algún } B \in \mathcal{C}\}, \text{ y}$$
$$M(\mathcal{C}) = \{A \in C(X) : B \subset A \text{ para algún } B \in \mathcal{C}\}.$$

**3.5 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney en $C(X)$. Tenemos que:*

*(a)* $F_1(X) \subset L(\mathcal{W})$.

*(b)* $X \in M(\mathcal{W})$.

*(c)* $\mathcal{W} = L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$.

*(d)* $C(X) = L(\mathcal{W}) \cup M(\mathcal{W})$.

*(e)* *Si* $\mathcal{W} \neq F_1(X)$, *entonces* $F_1(X) \subset L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

*(f)* *Si* $\mathcal{W} \neq \{X\}$, *entonces* $X \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

*Demostración.* (a) Sean $x \in X$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$. Como $\mathcal{W}$ satisface (b) en la Definición 3.1, existe $B \in \mathcal{A} \cap \mathcal{W}$. Dado que $B \in \mathcal{A}$, tenemos que $\{x\} \subset B$, así que $\{x\} \in L(\mathcal{W})$.

(b) Por la Proposición 3.2 podemos tomar $B \in \mathcal{W}$. Como $B \subset X$, concluimos que $X \in M(\mathcal{W})$.

(c) Claramente $\mathcal{W} \subset L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$. Probaremos la otra contención. Sea $A \in L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$. Entonces existen $B$ y $C \in \mathcal{W}$ tales que $B \subset A \subset C$. Como $\mathcal{W}$ satisface (a) en la Definición 3.1, $B = C$ y, por lo tanto, $A \in \mathcal{W}$.

(d) Por definición $L(\mathcal{W}) \cup M(\mathcal{W}) \subset C(X)$. Probaremos la otra contención. Sea $A \in C(X)$. Por el Corolario 2.28 existe un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{W}$ satisface (b) en la Definición 3.1, podemos tomar un elemento $B \in \mathcal{W} \cap \mathcal{A}$. Dado que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado y $\{A, B\} \subset \mathcal{A}$, tenemos que $A$ y $B$ son comparables por la inclusión. En el caso de que $A \subset B$, tenemos que $A \in L(\mathcal{W})$. En el caso de que $B \subset A$, tenemos que $A \in M(\mathcal{W})$. Así, hemos probado que $C(X) = L(\mathcal{W}) \cup M(\mathcal{W})$.

(e) Como $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney, el hecho de que $\mathcal{W} \neq F_1(X)$ implica que $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$. Del inciso (a) se sigue inmediatamente que $F_1(X) \subset L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

(f) Si $\mathcal{W} \neq \{X\}$, como $\mathcal{W}$ es no vacío, existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $W \subsetneq X$. Dado que $\mathcal{W}$ cumple con (a) en la Definición 3.1, $X \notin \mathcal{W}$. Del inciso (b) se concluye que $X \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

■

**3.6 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$ y sea $\mathcal{W}$ un subconjunto cerrado de $C(X)$. Entonces los conjuntos $L(\mathcal{W})$ y $M(\mathcal{W})$ son cerrados en $C(X)$.*

*Demostración.* Primero probaremos que $L(\mathcal{W})$ es cerrado. Tomemos $A \in C(X) \setminus L(\mathcal{W})$. Para cada $B \in \mathcal{W}$, tenemos que $A \not\subset B$, de manera que existe $a_B \in A \setminus B$. Por la regularidad de $X$, existen abiertos $U_B$ y $V_B$ de $X$ tales que $a_B \in U_B$, $B \subset V_B$ y $U_B \cap V_B = \emptyset$. La familia $\{\langle V_B \rangle \cap C(X) : B \in \mathcal{W}\}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{W}$, el cual es compacto, por lo que existen $n \in \mathbb{N}$ y $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{W}$ tales que $\mathcal{W} \subset \langle V_{B_1} \rangle \cup \ldots \cup \langle V_{B_n} \rangle$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_{B_1}, \ldots, U_{B_n}, X \rangle \cap C(X)$. Ya que $A$ intersecta a cada $U_{B_i}$ ($a_{B_i} \in A \cap U_{B_i}$), tenemos que $A \in \mathcal{U}$. Aseguramos que $\mathcal{U} \cap L(\mathcal{W}) = \emptyset$. Sea $C \in L(\mathcal{W})$. Existe $B \in \mathcal{W}$ tal que $C \subset B$. Además, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $B \in \langle V_{B_i} \rangle$. Luego, $B \subset V_{B_i}$, así que $B \cap U_{B_i} = \emptyset$ y entonces $C \cap U_{B_i} = \emptyset$. Lo anterior prueba que $C \notin \mathcal{U}$. Por tanto, $A \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap L(\mathcal{W}) = \emptyset$, de donde podemos concluir que que $L(\mathcal{W})$ es cerrado.

Ahora probaremos que $M(\mathcal{W})$ es cerrado. Sea $A \in C(X) \setminus M(\mathcal{W})$. Para cada $B \in \mathcal{W}$, $B \not\subset A$, de manera que existe $b_B \in B \setminus A$. Por la regularidad de $X$, existen abiertos ajenos $U_B$ y $V_B$ en $X$ tales que $b_B \in U_B$ y $A \subset V_B$. La familia $\{\langle U_B, X \rangle \cap C(X) : B \in \mathcal{W}\}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{W}$, de modo que existen $n \in \mathbb{N}$ y $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{W}$ tales que $\mathcal{W} \subset \langle U_{B_1}, X \rangle \cup \ldots \cup \langle U_{B_n}, X \rangle$. Sea $V = V_{B_1} \cap \ldots \cap V_{B_n}$. Tenemos que $V$ es abierto en $X$ y $A \subset V$, Aseguramos que $\langle V \rangle \cap M(\mathcal{W}) = \emptyset$. Sea $C \in M(\mathcal{W})$. Existe $B \in \mathcal{W}$ tal que $B \subset C$; además existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $B \in \langle U_{B_i}, X \rangle$. De este modo, $\emptyset \neq B \cap U_{B_i} \subset C \cap U_{B_i}$. Luego, $C \not\subset V_{B_i}$ y $C \not\subset V$, por lo que $C \notin \langle V \rangle$. Hemos probado que $A \in \langle V \rangle \cap C(X)$ y que $\langle V \rangle \cap M(\mathcal{W}) = \emptyset$. Por tanto $M(\mathcal{W})$ es cerrado. ■

**3.7 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney. Tenemos que:*

*(a)* *Si $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $C(X)$ tal que $\mathcal{C} \cap L(\mathcal{W}) \neq \emptyset$ y $\mathcal{C} \cap M(\mathcal{W}) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$.*

*(b)* *Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de $A$ a $B$ en $C(X)$, $A \in L(\mathcal{W})$ y $B \in M(\mathcal{W})$, entonces existe $C \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \cap \mathcal{W} = \{C\}$. Más aún, para cada $D \in \mathcal{A} \cap L(\mathcal{W})$, $D \subset C$ y para cada $D \in \mathcal{A} \cap M(\mathcal{W})$, $C \subset D$.*

*Demostración.* (a) Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathcal{W} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Definimos $\mathcal{H} = L(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}$ y $\mathcal{K} = M(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}$, que resultan subconjuntos cerrados de $\mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = (L(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}) \cup (M(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C}) = (L(\mathcal{W}) \cup M(\mathcal{W})) \cap \mathcal{C} = C(X) \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}$. Por hipótesis, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son no vacíos. Como $L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$ (de acuerdo con el Lema 3.5(c)), tenemos que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{W} \cap \mathcal{C} = \emptyset$; de donde resulta que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ dan una separación en cerrados de $\mathcal{C}$, lo cual es una contradicción.

(b) De acuerdo con (a), podemos tomar un elemento $C \in \mathcal{W} \cap \mathcal{A}$. Como los elementos de $\mathcal{A}$ son comparables por la inclusión mientras que los elementos de $\mathcal{W}$ no lo son, resulta que $C$ es único.

A continuación probaremos que, si $D \in \mathcal{A} \cap L(\mathcal{W})$, entonces $D \subset C$. Como $C$ y $D \in \mathcal{A}$, $C$ y $D$ son comparables por la inclusión. Como $D \in L(\mathcal{W})$, existe $F \in \mathcal{W}$ tal que $D \subset F$. Supongamos que $C \subset D$, dado que $\{C, F\} \subset \mathcal{W}$ y $C \subset D \subset F$, tenemos que $C = F$ y, por tanto, $D = C$. Así, hemos probado que $D \subset C$, como queríamos.

A continuación probaremos que, si $D \in \mathcal{A} \cap M(\mathcal{W})$, entonces $C \subset D$. Como $C$ y $D \in \mathcal{A}$, $C$ y $D$ son comparables por la inclusión. Como $D \in M(\mathcal{W})$, existe $F \in \mathcal{W}$ tal que $F \subset D$. Supongamos que $D \subset C$, dado que $\{C, F\} \subset \mathcal{W}$ y $F \subset D \subset C$, tenemos que $C = F$ y, por tanto, $D = C$. Así, hemos probado que $C \subset D$, como queríamos.

■

**3.8 Observación.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Dado $A \in C(X)$, tenemos que $C(A) \subset C(X)$.

**3.9 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$ y sea $A \in C(X)$. Si $A \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$, entonces $\mathcal{W} \cap C(A)$ es un nivel de Whitney no trivial en $C(A)$.*

*Demostración.* Como $F_1(A) = C(A) \cap F_1(X)$, $(\mathcal{W} \cap C(A)) \cap F_1(A) \subset \mathcal{W} \cap F_1(X)$. Dado que $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$, tenemos que $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$, así que $(\mathcal{W} \cap C(A)) \cap F_1(A) = \emptyset$. Probemos que $\mathcal{W} \cap C(A)$ cumple (a) en la Definición 3.1. Sean $A, B \in \mathcal{W} \cap C(A)$. Como $A, B \in \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ cumple (a) en la Definición 3.1, tenemos que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$. Finalmente, probemos que $\mathcal{W}$ cumple con la condición (b) en la Definición 3.1. Sea $p \in A$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado largo en $C(A)$ que empieza en $\{p\}$. Notemos que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado de $\{p\}$ a $A$ en $C(X)$. Por el inciso (a) del Lema 3.5, tenemos que $\{p\} \in \mathcal{A} \cap L(\mathcal{W})$. Además, $A \in \mathcal{A} \cap M(\mathcal{W})$, así que el Lema 3.7(b) implica que existe $B \in \mathcal{W} \cap \mathcal{A}$. Notemos que $B \subset A$, así que $B \in (\mathcal{W} \cap C(A)) \cap \mathcal{A}$ Así, hemos visto que $\mathcal{W}$ cumple con la condición (b) en la Definición 3.1, como queríamos. ■

**3.10 Lema.** *Sean $X$ un continuo $T_2$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado largo en $C(X)$. Dado $\mathcal{C}$ un subconjunto cerrado de $C(X)$, se tiene que $L(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}$ y $M(\mathcal{C}) \cap \mathcal{A}$ son cerrados en $C(X)$.*

*Demostración.* Este lema es inmediato del Lema 3.6. ■

**3.11 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{W}$ un subespacio compacto y no vacío de $C(X)$ que cumple que $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$ y además satisface la condición (a) en la Definición 3.1. Entonces $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney si y sólo si satisface alguna de las siguientes dos condiciones:*

*(b') $\mathcal{W} = \{X\}$ o $\mathcal{W}$ separa $F_1(X)$ y $\{X\}$ en $C(X)$.*

*(b") Sea $\mathcal{Z} \subset C(X)$ tal que $\mathcal{Z} \cap F_1(X) = \emptyset$ y $\mathcal{Z}$ satisface la condición (a) en la Definición 3.1. Si $\mathcal{W} \subset \mathcal{Z}$, entonces $\mathcal{W} = \mathcal{Z}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney. Probaremos que $\mathcal{W}$ satisface (b'). Si $X \in \mathcal{W}$, como $\mathcal{W}$ satisface (a) en la Definición 3.1, $\mathcal{W} = \{X\}$ y $\mathcal{W}$ satisface (b'). Supongamos entonces que $X \notin \mathcal{W}$. En este caso, los incisos (c), (d), (e) y (f) del Lema 3.5 implican que $L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$ y $M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$ forman una separación de $C(X)$ que cumple que $F_1(X) \subset L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$ y $X \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{W}$ satisface (b') y probemos que $\mathcal{W}$ satisface (b"). Sea $\mathcal{Z} \subset C(X)$ tal que satisface las hipótesis de (b") incluyendo $\mathcal{W} \subset \mathcal{Z}$. Probaremos que $\mathcal{W} = \mathcal{Z}$. Si $\mathcal{W} = \{X\}$, entonces $X \in \mathcal{Z}$. Como $\mathcal{Z}$ satisface (a) en la Definición 3.1, en este caso podemos concluir que $\mathcal{Z} = \{X\} = \mathcal{W}$. Supongamos entonces que $\mathcal{W} \neq \{X\}$. Dado $A \in \mathcal{Z}$, por el Corolario 2.28, existe un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{A}$. Luego, $\mathcal{A} \cup F_1(X)$ es un subcontinuo de $C(X)$ que contiene a $X$ y a $F_1(X)$. Como $\mathcal{W}$ separa a $F_1(X)$ y a $X$ en $C(X)$, tenemos que existe $B \in (\mathcal{A} \cup F_1(X)) \cap \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$, resulta que $B \in \mathcal{A}$; de donde obtenemos que $A, B \in \mathcal{A}$ y, dado que $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, $A \subset B$ o $B \subset A$. Como $\mathcal{Z}$ satisface (a) en la Definición 3.1, tenemos que $A = B$ y $A \in \mathcal{W}$. Hemos probado que $\mathcal{W} = \mathcal{Z}$.

Finalmente probaremos que, si $\mathcal{W}$ satisface (b”), entonces $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney. Para ello es suficiente mostrar que $\mathcal{W}$ satisface la condición (b) en la Definición 3.1, es decir, tenemos que mostrar que $\mathcal{W}$ intersecta a todos los arcos ordenados largos en $C(X)$. Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado largo en $C(X)$, que empieza en $\{p\} \in F_1(X)$. Dado $A \in \mathcal{A} \setminus \{p\}$ tenemos que $(\mathcal{W} \cup \{A\}) \cap F_1(X) = \emptyset$. Como $\mathcal{W} \subset \mathcal{W} \cup \{A\}$ y $\mathcal{W}$ satisface (b”), tenemos que $A \in \mathcal{W}$ o $\mathcal{W} \cup \{A\}$ no satisface (a) en la Definición 3.1. En el caso en que $A \in \mathcal{W}$ para algún $A \in \mathcal{A} \setminus \{p\}$, ya hemos terminado.

Analicemos el caso en que, para cada $A \in \mathcal{A} \setminus \{p\}$, $\mathcal{W} \cup \{A\}$ no satisface (a) en la Definición 3.1, es decir, $W \cup \{A\}$ tiene dos elementos diferentes que son comparables con la inclusión. Dado $A \in \mathcal{A} \setminus \{p\}$, como $\mathcal{W}$ sí satisface (a) en la Definición 3.1, debe existir $B_A \in \mathcal{W}$ tal que $A \subset B_A$ o $B_A \subset A$. De esta forma, $\mathcal{A} \setminus \{p\} \subset L(\mathcal{W}) \cup M(\mathcal{W})$. Notemos que $X \in M(\mathcal{W})$.

Probaremos que $(\mathcal{A} \setminus \{p\}) \cap L(\mathcal{W}) \neq \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que $(\mathcal{A} \setminus \{p\}) \subset M(\mathcal{W})$. De acuerdo con el Lema 3.10, $M(\mathcal{W}) \cap \mathcal{A}$ es cerrado en $C(X)$, y como $\{p\} \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{A} \setminus \{p\})$, tenemos que $\{p\} \in M(\mathcal{W}) \cap \mathcal{A}$. Luego, existe $B \in \mathcal{W}$ tal que $B \subset \{p\}$. De lo anterior concluimos que $B = \{p\} \in F_1(X) \cap \mathcal{W}$, lo cual es una contradicción. Hemos probado que $(\mathcal{A} \setminus \{p\}) \cap L(\mathcal{W}) \neq \emptyset$. Notemos que $X \in (\mathcal{A} \setminus \{p\}) \cap M(\mathcal{W})$. De acuerdo con el Lema 3.10, los conjuntos $L(\mathcal{W}) \cap (\mathcal{A} \setminus \{p\})$ y $M(\mathcal{W}) \cap (\mathcal{A} \setminus \{p\})$ son cerrados en $\mathcal{A} \setminus \{p\}$; como ninguno de ellos es vacío y $\mathcal{A} \setminus \{p\}$ es conexo, tenemos que $(\mathcal{A} \setminus \{p\}) \cap L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W}) \neq \emptyset$. Probaremos que $\mathcal{W} = L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$ y con ello tendremos que $(\mathcal{A} \setminus \{p\}) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$; para ello, es suficiente probar que $\mathcal{W} \supset L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$. Sea $A \in L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$. Existen $B$ y $C \in \mathcal{W}$ tales que $B \subset A \subset C$. Como $\mathcal{W}$ satisface (a) en la Definición 3.1, $B = C$ y, por lo tanto, $A \in \mathcal{W}$. De esta forma, tenemos que $\mathcal{W} = L(\mathcal{W}) \cap M(\mathcal{W})$ y $\mathcal{A} \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. Por lo anterior, podemos concluir que $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney. ■

**3.12 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Definimos $u : 2^X \times 2^X \to 2^X$ como $u(A, B) = A \cup B$. La función $u$ es continua.*

*Demostración.* Sean $A, B \in 2^X$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ una vecindad abierta básica de $2^X$ tal que $A \cup B = u(A, B) \in \mathcal{U}$. Renombrando a los conjuntos $U_i$, si fuera necesario, podemos suponer que $A \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, A \cap U_m \neq \emptyset$, $A \cap U_{m+1} = \emptyset, \ldots, A \cap U_n = \emptyset$ y $A \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$, donde $1 \leq m \leq n$. Luego, $B \cap U_{m+1} \neq \emptyset, \ldots, B \cap U_n \neq \emptyset$.

Así que, también podemos suponer que existe $s \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $B \cap U_s \neq \emptyset$, $B \cap U_{s+1} \neq \emptyset, \ldots, B \cap U_m \neq \emptyset$ y $B \subset U_s \cup \ldots \cup U_m$.

Sean $\mathcal{V} = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$ y $\mathcal{W} = \langle U_s, \ldots, U_n \rangle$. Notemos que $A \in \mathcal{V}$ y $B \in \mathcal{W}$. Dado $(C, D) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$, tenemos que $C \cap U_1 \neq \emptyset, \ldots, C \cap U_m \neq \emptyset$, $C \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$, $D \cap U_s \neq \emptyset, \ldots, D \cap U_m \neq \emptyset$ y $D \subset U_s \cup \ldots \cup D_m$. De manera que $(C \cup D) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $C \cup D \subset U_1, \ldots, U_m$. Por tanto $C \cup D \in \mathcal{U}$. Hemos probado que $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ es una vecindad de $(A, B)$ en $2^X \times 2^X$ tal que $u(\mathcal{V} \times \mathcal{W}) \subset \mathcal{U}$. Por tanto, $u$ es continua. ■

**3.13 Definición.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $2^X$. Dado $C \in 2^X$, definimos la función $u_C : \mathcal{A} \to 2^X$ dada por $u_C(D) = C \cup D$ para cada $D \in \mathcal{A}$.

**3.14 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sean $A, B$ y $C \in C(X)$ y sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado de $A$ a $B$ en $C(X)$.*

*(a) La función $u_C$ es continua.*

*Si además $A \cap C \neq \emptyset$, entonces*

*(b) $u_C(\mathcal{A}) \subset C(X)$, y*

*(c) $u_C(\mathcal{A})$ es un arco ordenado de $A \cup C$ a $B \cup C$ en $C(X)$.*

*Demostración.* (a) Sea $i_C : \mathcal{A} \to 2^X \times 2^X$ la función definida por $i_C(D) = (C, D)$ para cada $D \in \mathcal{A}$. Como la función $i_C$ es continua y $u_C = u \circ i_C$, del Lema 3.12 se sigue que $u_C$ es una función continua.

(b) Para cada $D \in \mathcal{A}$, tenemos que $C \cap D \supset C \cap A \neq \emptyset$ y $\{C, D\} \subset C(X)$, así que $u_C(D) \in C(X)$.

(c) Por los incisos (a) y (b) sabemos que $u_C(\mathcal{A}) \in C(C(X))$. Sean $C \cup D$ y $C \cup E \in u_C(\mathcal{A})$, donde $D$ y $E \in \mathcal{A}$; como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, $D$ y $E$ son comparables por el orden de la inclusión, así que $C \cup D$ y $C \cup E$ también lo son. Finalmente, notemos que $\bigcap\{C \cup D : D \in \mathcal{A}\} = C \cup \left(\bigcap\{D : D \in \mathcal{A}\}\right) = C \cup A$ y $\bigcup\{C \cup D : D \in \mathcal{A}\} = C \cup \left(\bigcup\{D : D \in \mathcal{A}\}\right) = C \cup B$.

■

**3.15 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$ y sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney en $C(X)$. Sean $A$ y $B \in \mathcal{W}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Sea $p \in A \cap B$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ arcos ordenados en $C(X)$ de $\{p\}$ a $A$ y a $B$, respectivamente. Dado $C \in \mathcal{A}$, existen $D_1(C), D_2(C) \in \mathcal{B}$ tales que $u_C^{-1}(\mathcal{W}) = [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$ (se está utilizando la notación definida en 2.21; además, $u_C$ se define como en la Definición 3.13 para el arco $\mathcal{B}$).*

*Demostración.* Dado que $C \in \mathcal{A}$, tenemos que $\{p\} \in C$ y, por tanto, $u_C(\{p\}) = \{p\} \cup C = C$. Como $C \in \mathcal{A}$, $C \subset A$; además $A \in \mathcal{W}$, así que $u_C(\{p\}) = C \in L(\mathcal{W})$. Como $B \in \mathcal{W}$, tenemos que $u_C(B) = C \cup B \in M(\mathcal{W})$. Por el Lema 3.7(b), existe $D_C \in \mathcal{B}$ tal que $C \cup D_C = u_c(D_C) \in \mathcal{W}$. De acuerdo con el inciso (a), la función $u_C$ es continua, así que $\{D \in \mathcal{B} : C \cup D \in \mathcal{W}\} = u_C^{-1}(\mathcal{W})$ es cerrado en $\mathcal{B}$. Por el Teorema 2.18, $\mathcal{B}$ tiene la topología dada por el orden de la inclusión, y entonces $u_C^{-1}(\mathcal{W})$ tienen un elemento máximo y uno mínimo (con el orden de la inclusión). De esta forma, existen elementos $D_1(C), D_2(C) \in u_C^{-1}(\mathcal{W})$ tales que $u_C^{-1}(\mathcal{W}) \subset [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$. Dado $D \in [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$, tenemos que $C \cup D_1(C) \subset C \cup D \subset C \cup D_2(C)$. Como $\{C \cup D_1(C), C \cup D_2(C)\} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ cumple la propiedad (a) en la Definición 3.1, $C \cup D = C \cup D_2(C) \in u_C^{-1}(\mathcal{W})$ para cada $D \in [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$. Así, hemos probado que $u_C^{-1}(\mathcal{W}) = [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$. ■

**3.16 Lema del Balanceo.** *Sea $X$ un continuo $T_2$ (compare con [8, Ejercicio 16.18, p.133]). Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney en $C(X)$. Si $A$ y $B \in \mathcal{W}$ y $A \cap B \neq \emptyset$, entonces existe un subcontinuo $\mathcal{D}$ de $\mathcal{W}$ tal que $A$ y $B \in \mathcal{D}$.*

*Demostración.* En el caso en que $A = B$ tomamos $\mathcal{D} = \{A\}$. Supongamos entonces que $A \neq B$. Notemos que $A, B \notin F_1(X)$; como $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney y $\{A, B\} \subset \mathcal{W}$, tenemos que $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$. Tomemos un punto $p \in A \cap B$. Fijemos arcos ordenados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\{p\}$ a $A$ y $B$, respectivamente.

Dado $C \in \mathcal{A}$, consideremos al función $u_C : \mathcal{B} \to 2^X$. De acuerdo con el Lema 3.15, existen $D_1(C), D_2(C) \in \mathcal{B}$ tales que $\{D \in \mathcal{B} : C \cup D \in \mathcal{W}\} = u_C^{-1}(\mathcal{W}) = [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$.

Dado $D \in \mathcal{B}$, consideremos la función $u_D : \mathcal{A} \to 2^X$. El Lema 3.15 nos dice que existen elementos $E_1(D), E_2(D) \in \mathcal{A}$ tales que $\{C \in \mathcal{A} : C \cup D \in \mathcal{W}\} = u_D^{-1}(\mathcal{W}) = [E_1(D), E_2(D)]_{\mathcal{A}}$.

Definamos la función $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{W}$ dada por

$$\varphi(C) = C \cup D_1(C).$$

Tenemos que $\varphi(\{p\}) = \{p\} \cup D_1(\{p\}) = D_1(\{p\}) \subset B$. Como $D_1(\{p\})$, $B \in \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ cumple con la condición (a) en la Definición 3.1, resulta que $D_1(\{p\}) = B$. Así,

$\varphi(\{p\}) = B$. Por otro lado, $\varphi(A) = A \cup D_1(A)$. Como $\{A, A \cup D_1(A)\} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ cumple con la condición (a) en la Definición 3.1, tenemos que $A = A \cup D_1(A)$ y $\varphi(A) = A$. Por lo anterior, $A, B \in \varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{W}$.

Ahora probaremos que $\varphi$ es continua.

Tomemos $C \in \mathcal{A}$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap C(X)$ una vecindad abierta básica de $\varphi(C)$ en $C(X)$. Como $\varphi(C) = C \cup D_1(C) = C \cup D_2(C)$ y $D_1(C) \subset D_2(C)$, podemos suponer que:

$$\{i \in \{1, \ldots, n\} : C \cap U_i \neq \emptyset\} = \{1, \ldots, m\},$$
$$\{i \in \{1, \ldots, n\} : D_1(C) \cap U_i \neq \emptyset\} = \{r, \ldots, n\} \text{ y}$$
$$\{i \in \{1, \ldots, n\} : D_2(C) \cap U_i \neq \emptyset\} = \{s, \ldots, n\}.$$

Notemos que $s \leq r$, $\{1, \ldots, n\} = \{1, \ldots, m\} \cup \{r, \ldots, n\}$, $C \in \langle U_1, \ldots U_m \rangle \cap C(X)$, $D_1(C) \in \langle U_r, \ldots U_n \rangle \cap C(X)$ y $D_2(C) \in \langle U_s, \ldots U_n \rangle \cap C(X)$.

Por el Teorema 2.18, existen $J_1, J_2, J_3, J_4 \in \mathcal{B}$ y $K_1, K_2 \in \mathcal{A}$ tales que:

$$C \in \operatorname{int}_{\mathcal{A}}([K_1, K_2]_{\mathcal{A}}) \subset [K_1, K_2]_{\mathcal{A}} \subset \langle U_1, \ldots, U_m \rangle,$$

$$D_1(C) \in \operatorname{int}_{\mathcal{B}}([J_1, J_2]_{\mathcal{B}}) \subset [J_1, J_2]_{\mathcal{B}} \subset \langle U_r, \ldots, U_n \rangle \text{ y}$$
$$D_2(C) \in \operatorname{int}_{\mathcal{B}}([J_3, J_4]_{\mathcal{B}}) \subset [J_3, J_4]_{\mathcal{B}} \subset \langle U_s, \ldots, U_n \rangle.$$

**Afirmación 1.** Si $C \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathcal{B}$ son tales que $D \subsetneq D_1(C)$, entonces $C \subset E_1(D)$.

Supongamos, por el contrario, que $E_1(D) \subsetneq C$ (ambas pertenecen a $\mathcal{A}$). Tenemos que $E_1(D) \cup D \subset C \cup D_1(C)$. Como $\mathcal{W}$ cumple la propiedad (a) en la Definición 3.1, $E_1(D) \cup D = C \cup D_1(C)$. Como $E_1(D) \cup D \subset C \cup D \subset C \cup D_1(C)$, tenemos que $C \cup D = C \cup D_1(C)$. Así, resulta que $C \cup D \in \mathcal{W}$ y, por tanto, $D \in u_C^{-1}(\mathcal{W}) = [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$. De lo anterior obtenemos que $D_1(C) \subset D$, lo cual es una contradicción. De esta forma, hemos probado que $C \subset E_1(D)$, como queríamos.

**Afirmación 2.** Si $C \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathcal{B}$ son tales que $D_2(C) \subsetneq D$, entonces $E_2(D) \subset C$.

Supongamos, por el contrario, que $C \subsetneq E_2(D)$ (ambas pertenecen a $\mathcal{A}$). Tenemos que $C \cup D_2(C) \subset E_2(D) \cup D$. Como $\mathcal{W}$ cumple la propiedad (a) en la Definición 3.1, $E_2(D) \cup D = C \cup D_2(C)$. Como $C \cup D_2(C) \subset C \cup D \subset E_2(D) \cup D$, tenemos que $C \cup D = C \cup D_2(C)$. Así, resulta que $C \cup D \in \mathcal{W}$ y, por tanto, $D \in u_C^{-1}(\mathcal{W}) = [D_1(C), D_2(C)]_{\mathcal{B}}$.

De lo anterior obtenemos que $D \subset D_2(C)$, lo cual es una contradicción. De esta forma, hemos probado que $E_2(D) \subset C$, como queríamos.

Sean $F_1 = E_1(J_4) \cup K_1$ y $F_2 = E_2(J_1) \cap K_2$. Notemos que, como $\{E_1(J_4), K_1\} \subset \mathcal{A}$, tenemos que $F_1$ es el máximo de $\{E_1(J_1), K_1\}$. De modo que $F_1 \in \mathcal{A}$. Similarmente $F_2 \in \mathcal{A}$.

**Afirmación 3.** $F_1 \subset C \subset F_2$.

Como $K_1 \subset C \subset K_2$, verificar que $C \in [E_1(J_4), E_2(J_1)]_{\mathcal{A}}$ es suficiente para probar la afirmación. Veamos primero que $C \subset E_2(J_1)$. En el caso en que $J_1 = D_1(C)$, como $D_1(C) \in \text{int}_{\mathcal{B}}[J_1, J_2]_{\mathcal{B}}$, tenemos que $D_1(C)$ es un extremo del arco $[J_1, J_2]$ y a su vez pertenece al interior de este arco en el arco $\mathcal{B}$, esto sólo ocurre si $D_1(C)$ es un extremo de $\mathcal{B}$, de modo que $J_1 = \{p\}$ y, por definición, $E_2(J_1) = E_2(\{p\}) = A$. Luego, $C \subset E_2(J_1)$. En el caso en que $J_1 \subsetneq D_1(C)$, utilizando la Afirmación 1 obtenemos que $C \subset E_1(J_1) \subset E_2(J_1)$. Así, en cualquier caso $C \subset E_2(J_1)$.

Mostremos ahora que $E_1(J_4) \subset C$. En el caso en que $J_4 = D_2(C)$, como $D_2(C) \in \text{int}_{\mathcal{B}}[J_3, J_4]_{\mathcal{B}}$, tenemos que $J_4 = B$. Luego, $E_1(J_4) = E_1(B) = \{p\}$. Así, $E_1(J_4) \subset C$. En el caso en que $D_2(C) \subsetneq J_4$, utilizando la Afirmación 2 obtenemos que $E_1(J_4) \subset E_2(J_4) \subset C$. En cualquier caso $E_1(J_4) \subset C$. Podemos concluir que $F_1 \subset C \subset F_2$.

**Afirmación 4.** $C \in \text{int}_{\mathcal{A}}[F_1, F_2]_{\mathcal{A}}$.

Si tenemos que $F_1 \subsetneq C \subsetneq F_2$, ya hemos terminado.

Analicemos el caso en que $C = F_1$. Tenemos que $C = E_1(J_4)$ o $C = K_1$. Probemos que, en cualquier caso, $C = \{p\}$ y $\{p\} \subsetneq K_2$. En el caso en que $C = K_1$, como $C \in \text{int}_{\mathcal{A}}([K_1, K_2]_{\mathcal{A}})$, $C$ es el extremo inferior del arco $\mathcal{A}$, así que $C = \{p\} \subsetneq K_2$. En el caso en que $C = E_1(J_4)$, por la definición de $E_1(J_4)$, tenemos que $C \cup J_4 \in \mathcal{W}$; por la definición de $D_2(C)$, tenemos que $J_4 \subset D_2(C)$. Como $D_2(C) \in \text{int}_{\mathcal{B}}([J_3, J_4]_{\mathcal{B}})$, resulta que $J_4 = D_2(C)$, así que $J_4 \in \text{int}_{\mathcal{B}}\big([J_3, J_4]_{\mathcal{B}}\big)$, lo que implica que $J_4$ es el extremo superior de $\mathcal{B}$, así que $J_4 = B$. Así, tenemos que $C = E_1(J_4) = E_1(B) = \{p\}$. Luego, $\{p\} \in \text{int}_{\mathcal{A}}([K_1, K_2]_{\mathcal{A}})$, lo que implica que $\{p\} \subsetneq K_2$.

Veamos que $\{p\} \subsetneq F_2$. Supongamos, por el contrario, que $F_2 = \{p\}$. Como $F_2 = E_2(J_1) \cap K_2$, $\{p\} \subsetneq K_2$ y $\{K_2, E_2(J_1)\} \subset \mathcal{A}$, tenemos que $E_2(J_1) = \{p\}$. Luego, $J_1 = J_1 \cup \{p\} = J_1 \cup E_2(J_1) \in \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ cumple (a) en la Definición 3.1, $J_1 = B$. Esto contradice el hecho de que $\text{int}_{\mathcal{B}}([J_1, J_2]_{\mathcal{B}}) \neq \emptyset$. Así, concluimos que $\{p\} \subsetneq F_2$. Hemos probado que, si $C = F_1$, entonces $F_1 = C = \{p\} \subsetneq F_2$ y, por tanto, $C \in \text{int}_{\mathcal{A}}([F_1, F_2]_{\mathcal{A}})$.

Ahora veamos el caso en que $C = F_2$. En este caso $C = E_2(J_1)$ o $C = K_2$. Afirmamos que $C = A$ y $K_1 \subsetneq A$. En el caso en que $C = K_2$, como $C \in \text{int}_{\mathcal{A}}([K_1, K_2]_{\mathcal{A}})$, tenemos que $C$ es el extremo superior de $\mathcal{A}$, así que $C = A \supsetneq K_1$. En el caso en que $C = E_2(J_1)$, como $C \cup J_1 \in \mathcal{W}$, de la definición de $D_1(C)$ se sigue que $D_1(C) \subset J_1$. Como $D_1(C) \in \text{int}_{\mathcal{B}}([J_1, J_2]_{\mathcal{B}})$, resulta que $J_1 = D_1(C)$ y $J_1 = \{p\}$. Así, $C = E_2(J_1) = E_2(\{p\}) = A$. Luego, $A \in \text{int}_{\mathcal{A}}([K_1, K_2]_{\mathcal{A}})$, lo que implica que $K_1 \subsetneq A$.

Veamos que $F_1 \subsetneq A$. Supongamos, por el contrario, que $F_1 = A$. Como $F_1 = E_1(J_4) \cup K_1$, $K_1 \subsetneq A$ y $\{K_1, E_1(J_4)\} \subset \mathcal{A}$, tenemos que $E_1(J_4) = A$. Luego, $J_4 \cup C = J_4 \cup A = J_4 \cup E_1(J_4) \in \mathcal{W}$. De la definición de $D_2(C)$ se sigue que $D_2(C) \supset J_4$. Como $D_2(C) \in \text{int}_{\mathcal{B}}\big([J_3, J_4]_{\mathcal{B}}\big)$, $D_2(C) = J_4 = B$. Por lo anterior, $B \cup A = J_4 \cup A \in \mathcal{W}$. Así, tenemos que $B \cup A \supsetneq A$ y $\{A, B \cup A\} \in \mathcal{W}$, lo cual contradice la propiedad (a) en la Definición 3.1. Hemos probado que, si $C = F_2$, entonces $F_1 \subsetneq A = C = F_2$ y, por tanto, $C \in \text{int}_{\mathcal{A}}([F_1, F_2]_{\mathcal{A}})$. Esto completa la prueba de la Afirmación 4.

**Afirmación 5.** $\varphi(\text{int}_{\mathcal{A}}([F_1, F_2]_{\mathcal{A}})) \subset \mathcal{U}$.

Sea $F \in \text{int}_{\mathcal{A}}([F_1, F_2]_{\mathcal{A}})$. Como $K_1 \subset F_1 \subset F_2 \subset K_2$, $F \in \text{int}_{\mathcal{A}}([K_1, K_2]_{\mathcal{A}}) \subset \langle U_1, \ldots, U_m \rangle$. Como $J_4 \in \langle U_s, \ldots, U_n \rangle$ y $J_1 \in \langle U_r, \ldots, U_n \rangle$, tenemos que $\{F \cup J_1, F \cup J_4\} \subset \mathcal{U}$.

Afirmamos que $D_1(F) \subset J_4$. Supongamos que esto no ocurre, como $D_1(F), J_4 \in \mathcal{B}$, $J_4 \subsetneq D_1(F)$. Por la Afirmación 1, $E_1(J_4) \supset F$. De acuerdo con la definición de $F_1$ tenemos que $E_1(J_4) \subset F_1$, como $F_1 \subset F$, resulta que $E_1(J_4) = F$. De la definición de $E_1(J_4)$, se sigue que $J_4 \cup F \in \mathcal{W}$ y, por la definición de $D_1(F)$, $D_1(F) \subset J_4$. Esta contradicción prueba que $D_1(F) \subset J_4$.

Afirmamos que $J_1 \subset D_2(F)$. Supongamos, por el contrario, que $D_2(F) \subsetneq J_1$. De acuerdo con la Afirmación 2, $E_2(J_1) \subset F$. Por la definición de $F_2$ tenemos que $E_2(J_1) \supset F_2$, como $F_2 \supset F$, resulta que $E_2(J_1) = F$. De la definición de $E_2(J_1)$, se sigue que $J_1 \cup F \in \mathcal{W}$ y, por la definición de $D_2(F)$, $D_2(F) \supset J_1$. Esta contradicción prueba que $J_1 \subset D_2(F)$.

Hemos probado $D_1(F) \subset J_4$ y $J_1 \subset D_2(F)$, lo cual implica que $[J_1, J_4]_{\mathcal{B}} \cap [D_1(F), D_2(F)]_{\mathcal{B}} \neq \emptyset$. Tomemos $K \in [D_1(F), D_2(F)]_{\mathcal{B}} \cap [J_1, J_4]_{\mathcal{B}}$. Notemos que $F \cup K \in \mathcal{W}$. Luego, $\varphi(F) = F \cup K$. Como $F \cup J_1 \subset F \cup K \subset F \cup J_4$ y $\{F \cup J_1, F \cup J_4\} \subset \mathcal{U}$, por el Lema 2.16 podemos concluir que $\varphi(F) \in \mathcal{U}$. Esto completa la prueba de la Afirmación 5.

Al demostrar las afirmaciones 3, 4 y 5, hemos probado que $\varphi$ es continua, así que Im $\varphi$ es un subcontinuo de $\mathcal{W}$ tal que $\{A, B\} \subset \varphi(\mathcal{A})$ ■

Tomando $Y = \mathcal{A}$, en la prueba del Lema 3.16 vimos que:

**3.17 Observación.** Sea $X$ un continuo $T_2$. Si $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney en $C(X)$, dados $A$ y $B \in \mathcal{W}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$, existe un arco generalizado $Y = \mathcal{A}$ y una función continua $\varphi : Y \to \mathcal{W}$ tal que $\varphi(\text{mín}(Y)) = B$ y $\varphi(\text{máx}(Y)) = A$.

Presentamos a continuación un resultado de A. J. Ward que nos indica que, dadas las condiciones de la observación anterior, es posible encontrar $Y$ y $\varphi$ de manera que Im $\varphi$ sea un arco generalizado.

**3.18 Teorema.** *(ver [20, Teorema único, p. 879]) Sea $Y$ un arco generalizado y sea $X$ un espacio Hausdorff. Dada una función continua $\varphi : Y \to X$ existen un arco generalizado $Z$, un encaje $\psi : Z \to X$ y una función continua, monótona y suprayectiva $\alpha : Y \to Z$ tal que, si $[s, t]$ es un intervalo maximal en $Y$ donde $\alpha$ es constante, entonces $\varphi(s) = \varphi(t) = \psi \circ \alpha(s)$.*

**3.19 Lema.** *Sea $Y$ un arco generalizado y sea $X$ un espacio Hausdorff. Dada una función continua $\varphi : Y \to X$ existen un arco generalizado $Z$ y un encaje $\psi : Z \to X$ tal que $\psi(\text{mín}(Z)) = \varphi(\text{mín}(Y))$ y $\psi(\text{máx}(Z)) = \varphi(\text{mín}(Y))$.*

*Demostración.* El Teorema 3.18 nos dice que existen un arco generalizado $Z$, un encaje $\psi : Z \to X$ y una función continua, monótona y suprayectiva $\alpha : Y \to Z$ tal que, si $[s, t]$ es un intervalo maximal donde $\alpha$ es constante, entonces $\varphi(s) = \varphi(t) = \psi(\alpha(s)) = \psi(\alpha(t))$ (la última igualdad sucede porque $\alpha$ es constante en $[s, t]$).

Cualquier intervalo en $Y$ que contiene a $\text{mín}(Y)$ lo tiene en un extremo, así que, $\varphi(\text{mín}(Y)) = \psi(\alpha(\text{mín}(Y)))$. Por la misma razón, $\varphi(\text{máx}(Y)) = \psi(\alpha(\text{máx}(Y)))$. Como $\alpha$ es monótona y suprayectiva, entonces $\alpha(\text{mín}(Y)) = \text{mín}(Z)$ y $\alpha(\text{máx}(Y)) = \text{máx}(Z)$, así que $\psi(\text{mín}(Z)) = \psi(\alpha(\text{mín}(Y))) = \varphi(\text{mín}(Y))$ y también $\psi(\text{máx}(Z)) = \psi(\alpha(\text{máx}(Y))) = \varphi(\text{máx}(Y))$. ■

El siguiente resultado se sigue inmediatamente de la Observación 3.17 y del Lema 3.19.

**3.20 Corolario.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney en $C(X)$. Dados $A$ y $B \in \mathcal{W}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$, existen un arco generalizado $Z$ y un encaje $\psi : Z \to \mathcal{W}$ tal que $\psi(\text{mín}(Z)) = A$ y $\psi(\text{máx}(Z)) = B$.*

**3.21 Proposición.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Los niveles de Whitney en $C(X)$ son conexos.*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que existe un nivel de Whitney $\mathcal{W}$ que no es conexo; tenemos entonces que existen dos subconjuntos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ de $\mathcal{W}$ que son cerrados en $C(X)$, disjuntos y no vacíos tales que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{W}$. Para obtener una contradicción, probaremos que $H = \bigcup\{W : W \in \mathcal{H}\}$ y $K = \bigcup\{W : W \in \mathcal{K}\}$ forman una separación de $X$. De acuerdo con el Lema 2.2, los conjuntos $H$ y $K$ son cerrados en $X$ y no vacíos. Primero probemos que $X = H \cup K$; para ello es suficiente con probar que $X \subset H \cup K$. Tomemos $x \in X$ y $\mathcal{A}_x$ un arco ordenado largo que empieza en $\{x\}$. Como $\mathcal{W}$ satisface (b) en la Definición 3.1, existe $W_x \in \mathcal{A}_x \cap \mathcal{W}$. Como $x \in W_x$, tenemos que $x \in \bigcup\{W : W \in \mathcal{W}\}$. Dado que $\mathcal{W} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$, tenemos que $x \in H \cup K$ y, por tanto, $X \subset H \cup K$.

Ahora solamente nos queda probar que $H$ y $K$ son conjuntos disjuntos. Si $H \cap K \neq \emptyset$, entonces existen $W_1 \in \mathcal{H}$ y $W_2 \in \mathcal{K}$ tales que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Por el Lema 3.16 tenemos que existe un subespacio conexo $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ tal que $W_1 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{H}$ y $W_2 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{K}$, lo cual no puede ser pues $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ forman una separación de $\mathcal{W}$. Así, obtenemos que $H$ y $K$ son conjuntos disjuntos, como queríamos. Con ello podemos concluir que $H$ y $K$ forman una separación de $X$, lo cual contradice la conexidad de $X$. ■

**3.22 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$ y sean $A$ y $B \in \mathcal{W}$ tales que $A \cap B$ es conexo y no vacío y $A \neq B$. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ arcos ordenados de $A \cap B$ a $A$ y $B$, respectivamente. Tenemos que:*

*(a) Dado $C \in \mathcal{A}$, existe exactamente un elemento $D_C \in \mathcal{B}$ tal que $C \cup D_C \in \mathcal{W}$.*

*(b) Consideremos $\psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definida por $\psi(C) = D_C$. Si $C_1$ y $C_2 \in \mathcal{A}$ son tales que $C_1 \subsetneq C_2$, entonces $\psi(C_2) \subsetneq \psi(C_1)$.*

*(c) La función $\psi$ es un homeomorfismo.*

*Demostración.* (a) Dado $C \in \mathcal{A}$, por el Lema 3.14(b), el conjunto $\mathcal{C} = \{D \cup C : D \in \mathcal{B}\}$ es un arco ordenado de $C \in L(\mathcal{W})$ a $B \cup C \in M(\mathcal{W})$. Por el Lema 3.7(b), existe $D_C \in \mathcal{B}$ tal que $C \cup D_C \in \mathcal{W}$. Afirmamos que $D_C$ es único. Supongamos que existen $D$ y $E \in \mathcal{B}$ tales que $\{D \cup C, E \cup C\} \subset \mathcal{W}$. Podemos suponer que $D \subset E$. Como $D \cup C \subset E \cup C$ y $\mathcal{W}$ cumple (a) en el Definición 3.1, tenemos que $D \cup C = E \cup C$. Luego, $E \setminus D \subset C$. Dado que $\{E, D\} \subset \mathcal{B}$ y $C \in \mathcal{A}$, obtenemos $E \setminus D \subset B \cap C \subset B \cap A \subset D$. De esta forma, tenemos que $E \setminus D = \emptyset$. Así, concluimos que $E = D$.

(b) Supongamos, por el contrario, que $\psi(C_1) \subset \psi(C_2)$; como consecuencia de esto, tenemos que $C_1 \cup \psi(C_1) \subset C_2 \cup \psi(C_2)$. Tomemos $c \in C_2 \setminus C_1$. Claramente, $c \notin A \cap B$. Como $C_2 \cap \psi(C_1) \subset A \cap B$, $c \in C_2 \setminus \psi(C_1)$. Por lo anterior, $c \in C_2 \cup \psi(C_2)$ y $c \notin C_1 \cup \psi(C_1)$. Luego, $C_1 \cup \psi(C_1) \subsetneq C_2 \cup \psi(C_2)$. Esto último contradice el hecho de que $\mathcal{W}$ satisface la condición (a) en la Definición 3.1. De esta forma, hemos probado que $\psi(C_2) \subsetneq \psi(C_1)$, como queríamos.

(c) La propiedad (b) nos dice que $\psi$ es inyectiva. Dado que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ juegan papeles simétricos, por el inciso (a) sabemos que la función $\psi$ es suprayectiva. Por el Corolario 2.20, $\mathcal{B}$ es un arco generalizado. Del inciso (b), se sigue que $\psi$ es una función monótona y decreciente, como las topologías de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ están dadas por el orden (de la contención) concluimos que $\psi$ es continua. Puesto que $\mathcal{A}$ es compacto y $\mathcal{B}$ es Hausdorff, tenemos que $\psi$ es un homeomorfismo.

■

## 3.1 Algunos ejemplos

En esta sección estudiaremos algunos ejemplos; en cada caso trataremos de determinar si existen niveles de Whitney no triviales en el hiperespacio de sus subcontinuos. Cuando sea posible, trataremos de dar condiciones suficientes para garantizar que $C(X)$ admite niveles de Whitney no triviales.

### 3.1.1 Arcos Generalizados

**3.23 Lema.** *Sea $X$ un arco generalizado y sea $R$ el subespacio de $X \times X$ definido por $R = \{]x, y[ \in X \times X : x \leq y\}$. La función $g : R \to C(X)$ dada por $g\big(]x, y[\big) = [x, y]$ es un encaje.*

*Demostración.* Primero probaremos que $g$ es continua. Tomemos $]a, b[ \in R$ y $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap C(X)$ una vecindad abierta básica de $g\big(]a, b[\big)$ en $C(X)$ donde $U_i$ es un abierto básico de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sean $V_1$ y $W_1$ intervalos en $X$ tales que $a \in \mathrm{int}_X(V_1)$, $b \in \mathrm{int}_X(W_1)$, $V_1 \subset \bigcap\{U_i : a \in U_i\}$ y $W_1 \subset \bigcap\{U_i : b \in U_i\}$. Notemos que $V_1 \cap W_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

En el caso en que $a = b$, elegimos $V_1 = W_1$. En este caso tenemos que $a \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notemos que $]a, a[ \in (V_1 \times V_1) \cap R$. Dado $]x, y[ \in (V_1 \times V_1) \cap R$, como $V_1$ es convexo, tenemos que $[x,y] \subset V_1 \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$. Luego, $[x,y] \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $[x,y] \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. De esta forma, resulta que $g((V_1 \times V_1) \cap R) \subset \mathcal{U}$.

Ahora, supongamos que $a < b$. Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, tomemos $x_i \in U_i \cap [a,b]$. Podemos suponer que $a < x_i < b$. Sea $c = \min\{x_i \in X : i \in \{1,\ldots,n\}\}$ y $d = \max\{x_i \in X : i \in \{1,\ldots,n\}\}$. Los conjuntos $V_2 = V_1 \cap (\leftarrow, c)$ y $W_2 = W_1 \cap (d, \rightarrow)$ son vecindades abiertas de $a$ y $b$, respectivamente, en $X$. Notemos que $V_2$ y $W_2$ son intervalos y que $]a,b[\in (V_2 \times W_2) \cap R$. Sea $]x,y[\in (V_2 \times W_2) \cap R$. Sea $A$ (respectivamente, $B$) el intervalo cerrado de $X$ con puntos extremos $a$ y $x$ (respectivamente, $y$ y $b$). Como $\{a,x\} \subset V_2$, tenemos que $A \subset V_2$. Dado que $\{b,y\} \subset W_2$, resulta que $B \subset W_2$. Así,

$$[x,y] \subset A \cup [a,b] \cup B \subset V_2 \cup [a,b] \cup W_2 \subset V_1 \cup [a,b] \cup W_1 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Más aún, como $x < c \leq x_i \leq d < y$ para cada $i \in \{1\ldots,n\}$, tenemos que $x_i \in [x,y] \cap U_i$, así que $[x,y] \cap U_i \neq \emptyset$. De esta forma, resulta que $g((V_2 \times W_2) \cap R) \subset \mathcal{U}$.

Hemos probado que la función $g$ es continua. Claramente $g$ es inyectiva. Por tanto $g$ es un encaje de $R$ en $C(X)$. ■

**3.24 Definición.** Sea $X$ un arco generalizado. Dados $a, b, c$ y $d \in X$ tales que $c \leq a \leq b \leq d$, definimos

$$\mathcal{C}([a,b],[c,d]) = \{[a,x] : x \in [b,d]\} \cup \{[x,d] : x \in [c,a]\}.$$

**3.25 Lema.** *Sea $X$ un arco generalizado. Dados $a, b, c$ y $d \in X$ tales que $c \leq a \leq b \leq d$, el conjunto $\mathcal{C}([a,b],[c,d])$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $[a,b]$ a $[c,d]$.*

*Demostración.* Consideremos $R$ y $g$ como en el Lema 3.23.

**Afirmación 1.** El conjunto $\{[a,x] : x \in [b,d]\}$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $[a,b]$ a $[a,d]$.

Como $g$ es una función continua, tenemos que $\{[a,x] : x \in [b,d]\} = g(\{a\} \times [b,d])$ es un subcontinuo de $C(X)$. Sean $[a,w]$ y $[a,y] \in \{[a,x] : x \in [b,d]\}$. Como $X$ es un arco generalizado, tenemos que $w$ y $y$ son comparables, lo que implica que $[a,w]$ y $[a,y]$ son comparables por el orden de la inclusión. Finalmente, es claro que $[a,b] = \bigcap\{[a,x] : x \in [b,d]\}$ y $[a,d] = \bigcup\{[a,x] : x \in [b,d]\}$.

**Afirmación 2.** El conjunto $\{[x,d] : x \in [c,a]\}$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $[a,d]$ a $[c,d]$.

Como $g$ es una función continua, tenemos que $\{[x,d] : x \in [c,a]\} = g([c,a] \times \{d\})$ es un subcontinuo de $C(X)$. Sean $[w,d]$ y $[y,d] \in \{[x,d] : x \in [c,a]\}$. Como $X$ es un arco generalizado, tenemos que $w$ y $y$ son comparables, lo que implica que $[w,d]$ y $[y,d]$ son comparables por el orden de la inclusión. Finalmente, es claro que $[a,d] = \bigcap\{[x,d] : x \in [c,a]\}$ y $[c,d] = \bigcup\{[x,d] : x \in [c,a]\}$.

Dado que $\{[a,x] : x \in [b,d]\}$ es un arco ordenado de $[a,b]$ a $[a,d]$ y $\{[x,d] : x \in [c,a]\}$ es un arco ordenado de $[c,d]$ a $[a,d]$, utilizando el Lema 2.26, tenemos que $\mathcal{C}([a,b],[c,d])$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $[a,b]$ a $[c,d]$. ■

**3.26 Definición.** El *dual* de un arco generalizado $X$ es el espacio que resulta de considerar al conjunto $X$ con la topología inducida por el orden inverso.

**3.27 Observación.** Dado un arco generalizado, su topología siempre coincide con la topología de su dual.

**3.28 Definición.** Dos arcos generalizados son *isomorfos* si existe un homeomorfismo que preserva el orden entre ellos.

**3.29 Definición.** Dos arcos generalizados son *dualmente isomorfos* si uno de ellos es isomorfo al dual del otro.

**3.30 Observación.** En el Lema 3.25, si $a = c$, entonces $\mathcal{C}([a,b],[c,d])$ es isomorfo a $[b,d]$. Asimismo, si $b = d$, entonces $\mathcal{C}([a,b],[c,d])$ es dualmente isomorfo a $[c,a]$.

**3.31 Definición.** Dado un arco generalizado $X$, a los intervalos de la forma $[\text{mín}(X), x]$ $(x \in X)$ les llamaremos *segmentos iniciales* de $X$, mientras que a los intervalos de la forma $[x, \text{máx}(X)]$ $(x \in X)$ les llamaremos *segmentos terminales* de $X$. Estos segmentos se consideran como arcos generalizados con el orden que heredan de $X$.

**3.32 Teorema.** *Sea $X$ un arco generalizado. Si $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$, entonces:*

*(a) Existe un segmento inicial no degenerado $S$ y existe un segmento terminal $T$ tales que $|S \cap T| \leq 1$ y $S$ es isomorfo a $T$.*

*(b) $\mathcal{W}$ es un arco generalizado.*

*Demostración.* (a) Supongamos que $C(X)$ tiene un nivel de Whitney no trivial $\mathcal{W}$. Sean $m = \text{mín}(X)$ y $M = \text{máx}(X)$. Por el Lema 3.25, $\mathcal{C}(\{m\}, X)$ es un arco ordenado largo que empieza en $\{m\}$. De acuerdo con los incisos (a) y (b) del Lema 3.5, sabemos que $\{m\} \in F_1(X) \subset L(\mathcal{W})$ y $X \in M(\mathcal{W})$. Del inciso (b) del Lema 3.7 se sigue que existe un único $x_m \in X$ tal que $[m, x_m] \in \mathcal{W}$. De forma similar tenemos que $\mathcal{C}(\{M\}, X)$ es un arco ordenado que empieza en $M$. Por los incisos (a), (b) del Lema 3.5 y el inciso (b) del Lema 3.7, podemos concluir que existe un único $x_M \in X$ tal que $[x_M, M] \in \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial, necesariamente $m < x_m < M$ y $m < x_M < M$.

**Afirmación 1.** Si $[x, y] \in \mathcal{W}$, entonces $x \leq x_M$ y $y \geq x_m$.

Supongamos que $x \geq x_M$. En este caso, $[x, y] \subset [x_M, M]$. Como $\{[x, y], [x_M, M]\} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ cumple la propiedad (a) en la Definición 3.1, tenemos que $[x, y] = [x_M, M]$, así que $x = x_M$. Ahora supongamos que $y \leq x_m$. En este caso, $[x, y] \subset [m, x_m]$. Como $\{[x, y], [m, x_m]\} \subset \mathcal{W}$ y $\mathcal{W}$ cumple la propiedad (a) en la Definición 3.1, tenemos que $[x, y] = [m, x_m]$, así que $y = x_m$. Con esto hemos terminado de probar la Afirmación 1.

Dado $x \in [m, x_M]$, por el Lema 3.25 tenemos que $\mathcal{C}(\{x\}, [x, M])$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a $[x, M]$. Como $[x, M] \supset [x_M, M]$, tenemos que $[x, M] \in M(\mathcal{W})$; dado que, además, $\{x\} \in F_1(X) \subset L(\mathcal{W})$, del Lema 3.7(b) resulta que existe $y_x \in X$ tal que $\{[x, y_x]\} = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}(\{x\}, [x, M])$. Por la Afirmación 1, podemos concluir que $y_x \in [x_m, M]$.

Consideremos la función $f : [m, x_M] \to [x_m, M]$ dada por $f(x) = y_x$.

**Afirmación 2.** La función $f$ es monótona creciente.

Notemos que, como $\mathcal{W}$ cumple la propiedad (a) en la Definición 3.1, si $x, y \in [m, x_M]$ y $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$, así que $f$ es una función monótona creciente.

**Afirmación 3.** La función $f$ es un homeomorfismo.

Para ver que $f([m, x_M]) = [x_m, M]$, probemos que, dado $y \in [x_m, M]$, existe $x \in [m, x_M]$ tal que $y = f(x)$. Por el Lema 3.25 tenemos que $\mathcal{C}(\{y\}, [m, y])$ es un arco ordenado de $\{y\}$ a $[m, y]$. Como $[m, y] \supset [m, x_m]$, $[m, y] \in M(\mathcal{W})$; dado que, además, $\{y\} \in F_1(X) \subset L(\mathcal{W})$, el Lema 3.7(b) nos dice que existe $x \in X$ tal que $[x, y] \in \mathcal{W}$. Por la Afirmación 1, sabemos que $x \in [m, x_M]$. Luego, $y = f(x)$. Así, hemos probado que la función $f$ es suprayectiva. De acuerdo con la Afirmación 2, $f$ es también biyectiva y monótona. Como $[m, x_M]$ y $[x_m, M]$

son arcos generalizados, concluimos que $f$ es un homeomorfismo. Esto completa la prueba de la Afirmación 3.

Como resultado de las afirmaciones 2 y 3, concluimos que $f$ es un isomorfismo entre $[m, x_M]$ y $[x_m, M]$. Consideremos el conjunto $P = \{x \in [m, x_M] : x = f^i(m)$ para alguna $i \in \mathbb{N}\} = \{f(m), f^2(m), \ldots\} \cap [m, x_M]$, donde $f^i$ significa la composición de $f$, $i$ veces.

**Afirmación 4.** $P$ es finito.

Notemos que $m < f(m)$, aplicando $f$, que es creciente, tenemos que $f(m) < f(f(m)) = f^2(m)$. Procediendo de esta manera, se tiene que $m < f(m) < f^2(m) < f^3(m) < \ldots$. Supongamos que $P$ es infinito, entonces tenemos que $P = \{f^i(m) : i \in \mathbb{N}\}$. Sea $p = \sup(P)$; como $f^i(p) \in [m, x_M]$ para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_M$ es cota superior de $P$. De manera que $p \in [m, x_M]$. Por la definición de $P$ tenemos que $f(P) = P \setminus \{f(m)\}$; como además $f$ es creciente, obtenemos que $\sup(f(P)) = \sup(P) = p$. Por lo anterior, $f(p) = f(\sup(P)) = \sup(f(P)) = p$. De esta forma, resulta que $\{p\} = [p, f(p)] \in \mathcal{W}$, lo cual es una contradicción (pues, como $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial, $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$). Así, podemos concluir que $P$ es finito.

**Afirmación 5.** Existen $a, b \in X$ tales que $m < a \leq b < M$ y el intervalo $[m, a]$ es isomorfo al intervalo $[b, M]$.

Si $P$ es vacío, tenemos que $f(m) = x_m > x_M$; en este caso, tomando $a = x_M$ y $b = x_m$, la afirmación es cierta porque $f$ es un homeomorfismo. En el caso en que $P$ sea no vacío, sabemos que $m < f(m) < f^2(m) < \ldots$. Tomemos $p = \max(P)$. Sea $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p = f^{i_0}(m)$. Por la definición de $i_0$, $M \geq f^{i_0+1}(m) > x_M$. Consideremos dos casos:

(i) Si $f(p) < M$, definamos $b = f(p) = f^{i_0+1}(m)$ y $a = (f^{i_0+1})^{-1}(M)$ (es decir, $f^{i_0+1}(a) = M$). Como $a \in [m, x_M]$ y $b \in (x_M, M]$, tenemos que $a < b$. La función $\phi : [m, a] \to [b, M]$ definida por $\phi(x) = f^{i_0+1}(x)$ es un homeomorfismo entre $[m, a]$ y $[b, M]$. Como $b < M$, resulta que $[b, M]$ y $[m, a]$ son segmentos no triviales.

(ii) Si $f(p) = M$, tenemos que $f^{i_0+1}(m) = M$ y $f^{i_0}(m) = x_M$. Observemos que, como $f(m) = x_m$, si $i_0 = 1$ resulta que $x_m = x_M$; de otra forma se obtiene que $x_m < x_M$. Definamos $a = x_m$ y $b = x_M$; como acabamos de ver, $a \leq b$. La función $\phi : [m, a] \to [b, M]$ definida por $\phi(x) = f^{i_0}(x)$ es un homeomorfismo entre $[m, a]$ y $[b, M]$, que son segmentos no triviales (pues $m < x_m$ y $x_M < M$).

Con la prueba de la Afirmación 5 completamos la demostración del inciso (a).

(b) Sea $G = \{]x, f(x)[ \, : x \in [m, x_M]\}$. Recordemos que $[m, x_M]$ es un arco generalizado y $f$ es un homeomorfismo. Notemos que la función $x \to ]x, f(x)[$ es un homeomorfismo de $[m, x_M]$ en $G \subset X \times X$. Luego, $G$ es un arco generalizado. Consideremos la función $g$ que se definió en el Lema 3.23. Por la definición de $G$ tenemos que $g(G) \subset \mathcal{W}$. Por la Afirmación 1 y la definición de $f$, tenemos que $g(G) = \mathcal{W}$. La función $g$ es inyectiva, así que $g|_G$ es inyectiva. Dado que $g|_G$ es una función continua y biyectiva de un compacto en un Hausdorff, tenemos que $g|_G$ es un homeomorfismo. Así, hemos probado que $\mathcal{W}$ es un arco generalizado.

■

**3.33 Teorema.** *Sea $X$ un arco generalizado. El hiperespacio $C(X)$ tiene niveles de Whitney no triviales si y solamente si existe un segmento inicial no degenerado $S$ y un segmento terminal $T$ de forma que $|S \cap T| \leq 1$ y $S$ es isomorfo a $T$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Se probó en el inciso (a) del Teorema 3.32.

($\Leftarrow$) Supongamos que existen $a, b \in X$ tales que $\text{mín}(X) < a \leq b < \text{máx}(X)$ y un homeomorfismo $\phi : [\text{mín}(X), a] \to [b, \text{máx}(X)]$ que preserva el orden. Mostraremos que $\mathcal{W} = \{[x, \phi(x)] \in C(X) : x \in [\text{mín}(X), a]\}$ es un nivel de Whitney no trivial. Definimos

$$G = \{]x, \phi(x)[ \, \in X \times X : x \in [\text{mín}(X), a]\}.$$

La continuidad de $\phi$ implica que $G \in C(X \times X)$. Consideremos la función $g$ definida en el Lema 3.23. Como $\mathcal{W} = g(G)$, $\mathcal{W} \in C(C(X))$.

Como $a \leq b$, tenemos que $[\text{mín}(X), a) \cap (b, \text{máx}(X)] = \emptyset$ y, por tanto, $x < \phi(x)$ para cada $x \in [\text{mín}(X), a)$. Luego, $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$.

Para ver que $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney, mostraremos que $\mathcal{W}$ satisface (a) de la Definición 3.1 y (b") del Teorema 3.11.

1. Dados $x, y \in [\text{mín}(X), a]$ tales que $x < y$, como $\phi$ preserva el orden, tenemos que $\phi(x) < \phi(y)$, así que $[x, \phi(x)]$ y $[y, \phi(y)]$ no son comparables por la inclusión. Hemos probado que $\mathcal{W}$ satisface (a) de la Definición 3.1.

2. Sea $\mathcal{Z} \subset C(X)$ tal que $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{Z}$ y $\mathcal{Z} \cap F_1(X) = \emptyset$. Tomemos $[x,y] \in \mathcal{Z} \setminus \mathcal{W}$. Probaremos que $\mathcal{Z}$ no satisface la condición (a) de la Definición 3.1. Para mostrar esto, encontraremos dos elementos diferentes de $\mathcal{Z}$, comparables por la inclusión. Analizaremos tres casos. Si $x \in [\text{mín}(X), a]$, entonces $[x,y] \neq [x, \phi(x)]$, pero $[x,y]$ y $[x,\phi(x)]$ son comparables por la inclusión. Como $[x,\phi(x)] \in \mathcal{W}$, $\{[x,y],[x,\phi(x)]\} \subset \mathcal{Z}$. Si $y \in [b, \text{máx}(X)]$, entonces $[x,y] \neq [\phi^{-1}(y), y]$, pero $[x,y]$ y $[\phi^{-1}(y),y]$ son comparables por la inclusión. Como $[\phi^{-1}(y),y] \in \mathcal{W}$, tenemos que $\{[x,y],[\phi^{-1}(y),y]\} \subset \mathcal{Z}$. Finalmente, si $[x,y] \subset [a,b]$, entonces $[x,y] \subsetneq [\text{mín}(X), b] \in \mathcal{W}$. Como $[\text{mín}(X), b] = [\text{mín}(X), \phi(\text{mín}(X))] \in \mathcal{W}$, $\{[x,y],[\text{mín}(X),b]\} \subset \mathcal{Z}$. En cualquier caso, si $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{Z}$, entonces $\mathcal{Z}$ no satisface la condición (a) en la Definición 3.1. Por lo tanto, $\mathcal{W}$ satisface la condición (b”) del Teorema 3.11.

■

**3.34 Observación.** Sea $X$ un arco generalizado. Si $\phi$ es un homeomorfismo entre un segmento inicial no trivial $S$ y un segmento terminal $T$ de $X$, tales que $|S \cap T| \leq 1$ y $\phi$ preserva el orden, entonces $\mathcal{W} = \{[x,\phi(x)] : x \in S\}$ es un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$.

Estudiaremos ahora los niveles de Whitney en los hiperespacios de subcontinuos de tres ejemplos particulares de arcos generalizados.

**3.35 Lema.** *Si $S$ es un segmento inicial no trivial de la línea larga, $S$ es segundo numerable.*

*Demostración.* Como $S$ no es trivial, existe $]r_0, t_0[ \in X \setminus \{]0,0[, ]\Omega, 0[\}$ tal que $S = \big[]0,0[, ]r_0,t_0[\big]$. El conjunto $D = \{]r,q[ : r \in [0,r_0), q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \cup \{]r_0,q[ : q \in \mathbb{Q} \cap [0,t_0]\}$ es denso en $S$. Como $D$ es numerable, tenemos que el conjunto $\mathcal{B} = \{(d_1,d_2) : d_1 < d_2 \text{ y } d_1,d_2 \in D\} \cup \{\big[]0,0[, d\big) : d \in D\} \cup \{\big(d, ]r_0,t_0[\big] : d \in D\}$ es una base numerable para $S$. Por tanto, $S$ es un segundo numerable. ■

**3.36 Teorema.** *El hiperespacio de subcontinuos de la línea larga no tiene niveles de Whitney no triviales.*

*Demostración.* Sea $X$ la línea larga. Supongamos, por el contrario, que existe un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$. Por el Teorema 3.33 sabemos que existe un segmento inicial no trivial $S$ que es isomorfo a un segmento terminal $T$. Por el Lema 3.35, $S$ es metrizable. La demostración de la Afirmación 5 en el Ejemplo 1.7 nos dice que $T$ no es metrizable, lo cual contradice el hecho de que $S$ y $T$ sean isomorfos. Así, hemos probado que no hay niveles de Whitney no triviales en $C(X)$. ■

El próximo ejemplo que presentaremos será un arco generalizado donde todas las parejas de segmentos iniciales y terminales que son isomorfas, se intersectan en más de un punto. Para construirlo, utilizaremos el siguiente lema.

**3.37 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff. Sean $a_0, b_0$ y $c \in X$. Dados dos arcos generalizados $R$ y $S$ y dos encajes $\alpha : R \to X$ y $\beta : S \to X$ tales que $\alpha(\text{mín}(R)) = a_0$, $\alpha(\text{máx}(R)) = c = \beta(\text{mín}(S))$ y $\beta(\text{máx}(S)) = b_0$, tenemos que:*

*(i) Existe un arco generalizado $Z$ y un encaje $\varphi : Z \to X$ tal que $\varphi(\text{mín}(Z)) = a_0$ y $\varphi(\text{máx}(Z)) = b_0$.*

*(ii) Si $\alpha(R) \cap \beta(S) = \{c\}$ y $X = \alpha(R) \cup \beta(S)$, entonces $X$ es un arco generalizado.*

*Demostración.* (i) Sea $A = \alpha^{-1}(\beta(S)) \subset R$. Como $\alpha(\text{máx}(R)) \in \beta(S)$, tenemos que $A$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $R$. Luego, existe $a = \text{mín}(A)$. Sea $b \in S$ tal que $\alpha(a) = \beta(b)$. Definimos $m = \text{mín}(R)$ y $M = \text{máx}(S)$. Hacemos $Z = [m, a] \cup [b, M]$. Aquí vamos a hacer dos convenciones. Para empezar, suponemos que $R \cap S = \emptyset$ (de lo contrario, podemos trabajar con $R \times \{0\}$ y $S \times \{1\}$), la otra convención es que, en $Z$, identificamos el punto $a$ con el punto $b$, así suponemos que $a = b$.

Definimos el siguiente orden en $Z$. Dados $x, y \in Z$, escribimos $x \leq y$ si ocurre alguna de las siguientes condiciones:

(a) $x, y \in [m, a]$ y $x \leq y$ en el orden de $R$;

(b) $x, y \in [b, M]$ y $x \leq y$ en el orden de $S$;

(c) $x \in [m, a]$ y $y \in [b, M]$.

Se puede verificar muy fácilmente que este orden es un orden total para $Z$, de manera que a $Z$ le podemos dar la topología $\tau$ inducida por él. Como el orden de $Z$ extiende al de $[m, a]$, los intervalos en $Z$ intersectados con $[m, a]$ son los intervalos en $[m, a]$, así que la topología que $\tau$ induce en $[m, a]$ es la topología original que tiene $[m, a]$ como subconjunto de $R$. Por la Proposición 1.8, $[m, a]$ es un subcontinuo de $Z$. Similarmente, $[b, m]$ también es un subcontinuo de $Z$. Por tanto $Z$ es un continuo. Por el Lema 2.19, $Z$ es un arco generalizado.

Sea $\varphi : Z \to X$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha(x), & \text{si } x \in [m, a], \\ \\ \beta(x), & \text{si } x \in [b, M]. \end{cases}$$

Como $\alpha(a) = \beta(b)$, tenemos que $\varphi$ está bien definida y además es continua, porque su restricción a cada uno de los conjuntos $[m, a]$ y $[b, M]$ es continua. Claramente $\varphi(m) = \alpha(m) = a_0$ y $\varphi(M) = b_0$. Para completar la prueba de (i), nos falta ver que $\varphi$ es inyectiva. Sean $x, y \in Z$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Si $x, y \in [m, a]$, la inyectividad de $\alpha$ implica que $x = y$. Si $x, y \in [b, M]$, por la inyectividad de $\beta$ tenemos que $x = y$. Finalmente, si $x \in [m, a]$ y $y \in [b, M]$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ implica que $\alpha(x) = \beta(y)$. Por la definición de $a$, como $x \in \alpha^{-1}(\beta(S))$, tenemos que $x = a$. Luego, $\beta(y) = \varphi(y) = \varphi(x) = \alpha(x) = \alpha(a) = \beta(b)$. De modo que $\beta(y) = \beta(b)$. La inyectividad de $\beta$ implica que $y = b = a = x$ (en $Z$). Por tanto $\varphi$ es inyectiva.

(ii) Si $\alpha(R) \cap \beta(S) = \{c\}$, entonces $\alpha^{-1}(\beta(S)) = \{x \in R : \alpha(x) \in \beta(S)\} = \{x \in R : \alpha(x) = c\} = \{\text{máx}(R)\}$ (pues $\alpha$ es inyectiva). De modo que el punto $a = \text{mín}(\alpha^{-1}(\beta(s)))$ cumple que $a = \text{máx}(R)$. Sea $b \in S$ tal que $\alpha(a) = \beta(b)$. Como $\beta(b) = \alpha(a) = \alpha(\text{máx}(R)) = c = \beta(\text{mín}(S))$ y $\beta$ es inyectiva, $b = \text{mín}(S)$. Así, $\alpha(R) \cup \beta(S) = \alpha([m, a]) \cup \beta([b, M]) = \varphi(Z)$. De manera que $\varphi(Z) = X$. Por tanto, $\varphi : Z \to X$ es un homeomorfismo.

■

En el siguiente ejemplo construimos el arco generalizado $X$ que consiste en poner primero la línea larga $Y$ y después el intervalo $Z$ del cuadrado lexicográfico, donde $Z$ une a los puntos $]0, 1[$ y $]1, 0[$. Entonces identificamos al punto $\text{máx}(Y)$ con $\text{mín}(Z)$. En el primer párrafo formalizamos estas ideas.

**3.38 Ejemplo.** Sea $Y$ la línea larga y sea $Z$ el subcontinuo $\big[]0, 1[, ]1, 0[\big]$ del cuadrado lexicográfico. Definimos $X$ como el subespacio de $Y \times Z$ dado por $(Y \times \{\text{mín}(Z)\}) \cup (\{\text{máx}(Y)\} \times Z)$. Cada una de las funciones $\alpha : Y \to X$ y $\beta : Z \to X$ definidas por $\alpha(y) = ]y, \text{mín}(Z)[$ y $\beta(z) = ]\,\text{máx}(Y), z[$, es un encaje. Como $\alpha(Y) \cap \beta(Z) = ]\,\text{máx}(Y), \text{mín}(Z)[$ y $X = \alpha(Y) \cup \beta(Z)$, el Lema 3.37 nos dice que $X$ es un arco generalizado. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el orden de $X$ es tal que $Y$ y $Z$ son isomorfos a $\alpha(Y)$ y $\beta(Z)$, respectivamente.

Queremos mostrar que $C(X)$ no admite niveles de Whitney no triviales.

**Afirmación 1.** Sean $S$ un segmento inicial no trivial de $X$ y $T$ un segmento final de $X$. Si $S$ es isomorfo a $T$, entonces $]\,\text{máx}(Y), \text{mín}(Z)[\, \in S$.

Supongamos, por el contrario, que $]\,\text{máx}(Y), \text{mín}(Z)[\, \notin S$. Como $S$ no es trivial, existe $y_0 \in Y \setminus \{\text{mín}(Y), \text{máx}(Y)\}$ tal que $S = \alpha([\text{mín}(Y), y_0])$. Por el Lema 3.35 y el hecho de que $\alpha$ es un encaje, $S$ es segundo numerable. Como $T$ es no trivial, existe $z_0 \in Z \setminus \{\text{máx}(Z)\}$ tal que $\beta\big([z_0, \text{máx}(Z)]\big) \subset X$. El conjunto $\{\beta\big((]z,0[,]z,1[)\big) : z_0 < z < 1\}$ es una familia no numerable de abiertos disjuntos en $T$, así que $T$ no es segundo numerable. Lo anterior contradice el hecho de que $S$ y $T$ son isomorfos. De esta forma, podemos concluir que $]\,\text{máx}(Y), \text{mín}(Z)[\, \in S$.

**Afirmación 2.** Sean $S$ un segmento inicial no trivial de $X$ y $T$ un segmento final de $X$. Si $S$ es isomorfo a $T$, entonces $|S \cap T| > 1$.

Supongamos, por el contrario, que $|S \cap T| \leq 1$. Por la Afirmación 1, tenemos que $\alpha(Y) \subset S$. Por la Afirmación 5 del Ejemplo 1.7 y el hecho de que $\alpha$ es un encaje, tenemos que $S$ no es primero numerable. Como $S \supset \alpha\big([\min(Y), \max(Y)]\big)$ y $|S \cap T| \leq 1$, $T \subset \beta\big([\min(Z), \max(Z)]\big)$. Obtendremos una contradicción probando que $T$ es primero numerable. Dado $x \in T$, existe $]p,q[\, \in Z$ tal que $\beta\big(]p,q[\big) = x$. Tenemos cinco casos:

(a) Si $p = 0$, entonces $q = 1$ y el conjunto $\mathcal{B} = \{\big[]0,1[,]t,\frac{1}{2}[\big) : t \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$ es una base local numerable para $]1,0[$ en $Z$.

(b) Si $p = 1$, entonces $q = 0$ y el conjunto $\mathcal{B} = \{\big(]t,\frac{1}{2}[,]1,0[\big] : t \in \mathbb{Q} \cap (0,1)\}$ es una base local numerable para $]1,0[$ en $Z$.

(c) Si $0 < p < 1$ y $0 < q < 1$, el conjunto $\mathcal{B} = \{\big(]p,r[,]p,s[\big) : r,s \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ y $r < q < s\}$ es una base local numerable para $]p,q[$ en $Z$.

(d) Si $0 < p < 1$ y $q = 0$, el conjunto $\mathcal{B} = \{\big(]t,\frac{1}{2}[,]p,s[\big) : s$ y $t \in \mathbb{Q} \cap (0,p)\}$ es una base local numerable para $]p,q[$ en $Z$.

(e) Si $0 < p < 1$ y $q = 1$, el conjunto $\mathcal{B} = \{\big(]p,r[,]t,\frac{1}{2}[\big) : r$ y $t \in \mathbb{Q} \cap (p,1)\}$ es una base local numerable para $]p,q[$ en $Z$.

En cualquiera de los casos anteriores, como $\beta$ es un encaje, el conjunto $\{\beta(U) \cap T : U \in \mathcal{B}\}$ es una base local numerable para $x$ en $T$. De esta forma, concluimos que $T$ es primero numerable, lo cual contradice el hecho de que $S$ y $T$ son isomorfos. Con esto hemos completado la prueba de la Afirmación 2.

Como consecuencia directa de la Afirmación 2 y el Teorema 3.33, podemos concluir que el hiperespacio $C(X)$ no admite niveles de Whitney no triviales.

**3.39 Ejemplo.** Sea $X$ el cuadrado lexicográfico, construiremos un nivel de Whitney no trivial para $C(X)$. Sea $S = \big[]0,0[,]\frac{1}{3},1[\big]$ y $T = \big[]\frac{2}{3},0[,]1,1[\big]$. Notemos que

$S \cap T = \emptyset$. Consideremos la función $\phi : S \to T$ definida por $\phi([a,b]) = [a + \frac{2}{3}, b]$. La función $\phi$ es claramente monótona creciente y biyectiva; como $S$ y $T$ son arcos generalizados, tenemos que $\phi$ es un homeomorfismo.

Definimos

$$\mathcal{W} = \{\big[]p,r[,]q,r[\big] \in C(X) : q - p = \tfrac{2}{3}\}.$$

De acuerdo con la Observación 3.34, el conjunto $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$.

**3.40 Teorema.** *Sea $X$ el cuadrado lexicográfico y sea $A \in C(X) \setminus (F_1(X) \cup \{X\})$. Sean $a, b, c$ y $d \in X$ tales que $A = \big[]a,b[,]c,d[\big]$. Existe un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$ si y sólo si $a < c$ y $A$ satisface una de las siguientes condiciones:*

*(1)* $0 < b, d < 1$.

*(2)* $b = 0$ *y* $d = 0$.

*(3)* $b = 1$ *y* $d = 1$.

*(4)* $a = 0$, $b = 0$ *y* $d < 1$.

*(5)* $c = 1$, $d = 1$ *y* $b > 0$.

*Demostración.* ($\Leftarrow$) Supongamos que $a < c$ y $A$ satisface (1), (2), (3), (4) o (5). Elijamos $s, t \in [a, c]$ de acuerdo a las siguientes condiciones:

(a) Si $0 < a$ y $c < 1$, entonces $a < s < t < c$. Así que $0 < a < s$ y $t < c < 1$.

(b) Si $a = 0$ y $c < 1$, entonces $a < s < t = c$. Así que $0 = a$ y $t = c$.

(c) Si $a > 0$ y $c = 1$, entonces $a = s < t < c$. Así que $s = a$ y $c = 1$.

(d) Si $a = 0$ y $c = 1$, entonces $a = s$ y $t = c$. Así que $0 = a = s$ y $1 = c = t$.

Notemos que en los casos (a), (b) y (c) los intervalos $[0, s]$ y $[t, 1]$ son no degenerados. En el caso (d), ambos intervalos son degenerados. También observemos que en todos los casos $s < t$.

Sea $\phi_1 : [0, s] \to [t, 1]$ un homeomorfismo creciente tal que $\phi_1(0) = t, \phi_1(s) = 1$ y además $\phi_1(a) = c$.

Si $]a,b[\neq]0,0[$ y $]c,d[\neq]1,1[$, tenemos que se cumple (1), (2) o (3), así que es posible encontrar un homeomorfismo creciente $\phi_2:[0,1]\to[0,1]$ tal que $\phi_2(b)=d$. Si $]a,b[=]0,0[$, se sigue que $d<1$, así que podemos tomar un homeomorfismo creciente $\phi_2:[0,1]\to[d,1]$ tal que $\phi_2(0)=d$. Si $]c,d[=]1,1[$, entonces $0<b$, así que podemos tomar un homeomorfismo creciente $\phi_2:[0,b]\to[0,1]$ tal que $\phi_2(0)=0$. Observemos que $\phi_2(0)=d$ en todos los casos.

Sean $S=\big[]0,0[,]s,\phi_2^{-1}(1)[\big]$ y $T=\big[]t,\phi_2(0)[,]1,1[\big]$. Dado que $\phi_2$ es un homeomorfismo creciente, tenemos que $\phi_2^{-1}(1)>0$ y, por tanto, $S$ es un segmento inicial no trivial de $X$. Como $s<t, S\cap T=\emptyset$.

En todos los casos $\phi_1(0)=t$, $\phi_1(a)=c$, $\phi_1(s)=1$ y $\phi_2(b)=d$.

Consideremos $\phi:S\to T$ definida por

$$\phi(]x,y[)=\begin{cases}]\phi_1(a),\phi_2(y)[, & \text{si } x=a,\\ ]\phi_1(x),y[, & \text{si } x\neq a.\end{cases}$$

Veamos que $\phi$ es una función estrictamente creciente. Dados $]x_1,y_1[$ y $]x_2,y_2[\in S$ tales que $]x_1,y_1[<]x_2,y_2[$, tenemos dos posibilidades:

1. Si $x_1<x_2$, entonces, como $\phi_1$ preserva el orden, $\phi_1(x_1)<\phi_1(x_2)$ y, por tanto, $\phi(]x_1,y_1[)<\phi(]x_2,y_2[)$.
2. Si $x_1=x_2$, entonces $\phi_1(x_1)=\phi_1(x_2)$. Como $]x_1,y_1[\,<\,]x_2,y_2[$, se sigue que $y_1<y_2$. En el caso en que $x_1\neq a$, tenemos que $\phi(]x_1,y_1[)=]\phi_1(x_1),y_1[<]\phi_1(x_2),y_2[=\phi(]x_2,y_2[)$. En el caso en que $x_1=a$, como $\phi_2$ es una función que preserva el orden, resulta que $\phi(]x_1,y_1[)=]\phi_1(x_1),\phi_2(y_1)[<]\phi_1(x_2),\phi_2(y_2)[=\phi(]x_2,y_2[)$.

Veamos ahora que $\phi$ es suprayectiva. Dado $]x,y[\in T$, como $x\in[t,1]$ y $\phi_1$ es un homeomorfismo, existe $x'\in[0,s]$ tal que $\phi_1(x')=x$. En el caso en que $x'=a$, tenemos tres posibilidades:

1. Si $]a,b[\neq]0,0[$ y $]c,d[\neq]1,1[$, tenemos que, en este caso, $\phi_2$ es un homeomorfismo creciente de $[0,1]$ a $[0,1]$, así que existe $y'\in[0,1]$ tal que $\phi_2(y')=y$. Como $\phi_2^{-1}(1)=1$, se sigue que $S=\big[]0,0[,]s,1[\big]$. Luego, dado que $x'\in[0,s]$, resulta que $]x',y'[\ \in S$.

2. Si $]a,b[\ =\ ]0,0[$, entonces $x' = a = 0$ y $x = t$. Por la definición de $\phi_2$ para este caso, tenemos que $\phi_2(0) = d$, así que $T = \big[]t,d[,]1,1[\big]$. Como $]x,y[\ \in T$ y $x = t$, se sigue que, $y \in [d,1]$. Como $\phi_2$ es un homeomorfismo de $[0,1]$ a $[d,1]$, existe $y' \in [0,1]$ tal que $\phi_2(y') = y$. Dado que $\phi_2$ es creciente, resulta que $\phi_2^{-1}(1) = 1$ y, por tanto, $S = \big[]0,0[,]s,1[\big]$. Luego, dado que $x' = 0$ y $s \geq 0$, concluimos que $]x',y'[\ =\ ]0,y'[\ \in S$.

3. Si $]c,d[\ =\ ]1,1[$, entonces $x = \phi_1(x') = \phi_1(a) = c = 1$. Además, se tiene que $x' = \phi_1^{-1}(1) = s$. Dado que, en este caso, $\phi_2$ es un homeomorfismo de $[0,b]$ a $[0,1]$, existe $y' \in [0,b]$ tal que $\phi_2(y') = y$. Dado que $\phi_2$ es creciente, resulta que $\phi_2^{-1}(1) = b$ y, por tanto, $S = \big[]0,0[,]s,b[\big]$. Luego, dado que $x' = s$ y $s \geq 0$, concluimos que $]x',y'[\ =\ ]s,y'[\ \in S$.

En el caso en que $x' \neq a$, tenemos que $\phi(]x',y[) =]x,y[$. Así, hemos probado que $\phi$ es una función suprayectiva y estrictamente creciente; como $S$ y $T$ son arcos generalizados, $\phi$ es un homeomorfismo que preserva el orden.

Como $S$ es un segmento inicial no trivial de $X$ y $T$ es un segmento terminal de $T$ tales que $S \cap T = \emptyset$, por la Observación 3.34, resulta que $\mathcal{W} = \{[p,\phi(p)] : p \in S\}$ es un nivel de Whitney no trivial en $C(X)$. De la definición de $\phi$ se sigue que $\phi(]a,b[) = ]\phi_1(a),\phi_2(b)[$. Además, como $\phi_1(a) = c$ y $\phi_2(b) = d$, tenemos que $A = \big[]a,b[,]c,d[\big] = \big[]a,b[,]\phi_1(a),\phi_2(b)[\big] = \big[]a,b[,\phi(]a,b[)\big]$. De esta forma, $A \in \mathcal{W}$.

($\Rightarrow$) Supongamos que existe un nivel de Whitney no trivial $\mathcal{W}$ en $C(X)$ tal que $A \in \mathcal{W}$.

**Afirmación 1.** Si $b = 0$, entonces $d = 0$ o $a = 0$.

Supongamos que $d > 0$. Tomemos $t \in [0,1]$ tal que $0 < t < d$. Así, $\big[]a,0[,]c,t[\big] \subsetneq A \subset \big[]0,0[,]c,d[\big]$. El conjunto

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}\big(\big[]a,0[,]c,t[\big],\big[]0,0[,]c,t[\big]\big) \cup \mathcal{C}\big(\big[]0,0[,]c,t[\big],\big[]0,0[,]c,d[\big]\big)$$

es un arco ordenado de $\big[]a,0[,]c,t[\big] \in L(\mathcal{W})$ a $\big[]0,0[,]c,d[\big] \in M(\mathcal{W})$. Por el Lema 3.7(b), existe $B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$.

Sean $p$ y $q \in X$ tales que $B = [p,q]$. Notemos que $p \leq\ ]a,0[\ =\ ]a,b[$ y $]c,t[\ \leq q \leq\ ]c,d[$. Luego, $A \cap B = \big[]a,0[,q\big]$. Cuando $a > 0$, el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene como extremo a $[a,0]$ es $\big[]a,0[,]c,t[\big]$; dado que $A \supsetneq \big[]a,0[,]c,t[\big]$, tenemos que $\big[]a,0[,]c,t[\big] \notin \mathcal{W}$ y, por tanto, $B \neq \big[]a,0[,]c,t[\big]$. Luego, si $a \neq 0$ entonces $p \neq [a,0]$.

El conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{C}\big(\big[]a,0[,q\big],\big[]a,0[,]c,d[\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $A$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\big[q,]c,d[\big]$. Como $\big[q,]c,d[\big] \subset \big[]c,t[,]c,d[\big]$ y $\big[]c,t[,]c,d[\big]$ es isomorfo a $[t,d] \subset \mathbb{R}$, tenemos que $\mathcal{A}$ es separable. El conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{C}\big(\big[]a,0[,q\big],\big[p,q\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $B$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\big[p,]a,0[\big]$. Por el Teorema 3.22, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homeomorfos, lo que implica que $\mathcal{B}$ es separable. Como $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\big[p,]a,0[\big]$, tenemos que $\big[p,]a,0[\big]$ es separable; como ya hemos visto en otras ocasiones, si $p <]a,0[$ el intervalo $\big[p,]a,0[\big]$ no es separable. Luego, podemos concluir que $]a,0[ = p$ y, por el párrafo anterior, $a = 0$. La Afirmación 1 ha quedado demostrada.

**Afirmación 2.** Si $d = 1$, entonces $b = 1$ o $c = 1$.

Supongamos que $b < 1$. Tomemos $t \in [0,1]$ tal que $b < t < 1$. Así, $\big[]a,t[,]c,1[\big] \subsetneq A \subset \big[]a,b[,]1,1[\big]$. El conjunto

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}\big(\big[]a,t[,]c,1[\big],\big[]a,b[,]1,1[\big]\big)$$

es un arco ordenado de $\big[]a,t[,]c,1[\big] \in L(\mathcal{W})$ a $\big[]a,b[,]1,1[\big] \in M(\mathcal{W})$. Por el Lema 3.7(b), existe $B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$.

Sean $p$ y $q \in X$ tales que $B = [p,q]$. Notemos que $]a,b[ \; \leq p \leq \; ]a,t[$ y $]c,1[ \; \leq q$. Luego, $A \cap B = \big[p,]c,1[\big]$. Cuando $c < 1$, el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene como extremo a $[c,1]$ es $\big[]a,t[,]c,1[\big]$; dado que $A \supsetneq \big[]a,t[,]c,1[\big]$, tenemos que $\big[]a,t[,]c,1[\big] \notin \mathcal{W}$ y, por tanto, $B \neq \big[]a,t[,]c,1[\big]$. Luego, si $c \neq 1$ entonces $q \neq [c,1]$.

El conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{C}\big(\big[p,]c,1[\big],\big[]a,b[,]c,1[\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $A$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{A}$ es dualmente isomorfo a $\big[]a,b[,p\big]$. Como $\big[]a,b[,p\big] \subset \big[]a,b[,]a,t[\big]$, $\mathcal{A}$ es separable. El conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{C}\big(\big[p,]c,1[\big],\big[p,q\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $B$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\big[]c,1[,q\big]$. Por el Teorema 3.22, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homeomorfos. Como $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\big[]c,1[,q\big]$ tenemos que $\big[]c,1[,q\big]$ es separable; esto implica que $q$ no puede ser mayor que $]c,1[$. Por tanto $]c,1[c \; = q$ y, por el párrafo previo, concluimos que $c = 1$. La Afirmación 2 ha quedado demostrada.

**Afirmación 3.** Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $d < 1$.

Supongamos, por el contrario, que $d = 1$. Como $b = 0$, por la Afirmación 2, $c = 1$ y $A = \big[]0,0[,]1,1[\big] = X$. Como $A \in C(X) \setminus (F_1(X) \cup \{X\})$, hemos llegado a una contradicción.

**Afirmación 4.** Si $c = 1$ y $d = 1$, entonces $b > 0$.

Supongamos, por el contrario, que $b = 0$. Como $d = 1$, por la Afirmación 1, $a = 0$ y $A = \big[]0,0][1,1]\big] = X$. Como $A \in C(X) \setminus (F_1(X) \cup \{X\})$, hemos llegado a una contradicción.

**Afirmación 5.** $a < c$.

Supongamos, por el contrario, que $a = c$. Ya que $A = \big[]a,b[,]c,d[\big]$, tenemos que $A \subset \big[]a,0[,]a,1[\big]$. Sea $\mathcal{A} = \mathcal{C}\big(\big[]a,1[,]a,1[\big], \big[]a,0[,]a,1[\big]\big)$, un arco ordenado que va de $\{]a,1[\} \in L(\mathcal{W})$ a $\big[]a,0[,]a,1[\big] \in M(\mathcal{W})$. De acuerdo con el Lema 3.7(b), existe $t \in [0,1]$ tal que $\big[]a,t[,]a,1[\big] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$, tenemos que $t < 1$. Aplicando la Afirmación 2 al elemento $\big[]a,t[,]a,1[\big] \in \mathcal{W}$, $a = c = 1$.

Sea $\mathcal{B} = \mathcal{C}\big(\big[]1,0[,]1,0[\big], \big[]1,0[,]1,1[\big]\big)$, que va de $\{]1,0[\} \in L(\mathcal{W})$ a $\big[]1,0[,]1,1[\big] \in M(\mathcal{W})$. De acuerdo con el Lema 3.7(b), existe $s \in [0,1]$ tal que $\big[]1,0[,]1,s[\big] \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W} \cap F_1(X) = \emptyset$, $s > 0$. Lo anterior contradice a la Afirmación 1 aplicada a $\big[]1,0[,]1,s[\big]$, por lo que podemos concluir que $a < c$.

**Afirmación 6.** Si $b = 1$, entonces $d = 1$.

Supongamos, por el contrario, que $d < 1$. Por la Afirmación 5, $a < c$. Sea $t \in [0,1]$ tal que $a < t < c$. Como $]t,0[ \, > \, ]a,1[$, tenemos que $A \not\supseteq \big[]t,0[,]c,d[\big]$; además, dado que $d < 1$ y $b = 1$, se tiene que $A \subset \big[]a,1[,]c,1[\big]$. Así, el conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}\big(\big[]t,0[,]c,d[\big], \big[]a,1[,]c,1[\big]\big)$ es un arco ordenado de $\big[]t,0[,]c,d[\big] \in L(\mathcal{W})$ a $\big[]a,1[,]c,1[\big] \in M(\mathcal{W})$. Por el Lema 3.7(b), existe $B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Sean $p, q \in X$ tales que $B = [p,q]$. Como $B \subset \big[]a,1[,]c,1[\big], ]a,b[ \, = \, ]a,1[ \, \leq p < q \leq \, ]c,1[$.

Como $\big[]t,0[,]c,d[\big] \subsetneq A$ y $\mathcal{W}$ cumple con la condición (a) en la Definición 3.1, tenemos que $\big[]t,0[,]c,d[\big] \notin \mathcal{W}$ y, por tanto, $B \neq \big[]t,0[,]c,d[\big]$. Como $B \in \mathcal{C}$, se sigue que $q \in []c,d[,]c,1[]$. Dado que $d < 1$, el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene como extremo a $[c,d]$ es $\big[]t,0[,]c,d[\big]$; así que $B \neq \big[]t,0[,]c,d[\big]$ implica que $q > \, ]c,d[$. Entonces $]a,b[ \, \leq p$ y $]c,d[ \, < q$. Como $\{A,B\} \subset \mathcal{W}$, el hecho de que $\mathcal{W}$ cumpla con la condición (a) en la Definición 3.1 implica que $p > \, ]a,1[$. Así, $A \cap B = \big[p,]c,d[\big]$.

El conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{C}\big(\big[p,]c,d[\big], \big[]a,1[,]c,d[\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $A$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{A}$ es homeomorfo a $\big[]a,1[,p\big]$. Como $]a,1[ \, < p$, $\mathcal{A}$ no es separable. El conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{C}\big(\big[p,]c,d[\big], \big[p,q\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $B$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\big[]c,d[,q\big]$. Como $\big[]c,d[,q\big] \subset \big[]c,d[,]c,1[\big]$, $\mathcal{B}$ es separable. Aplicando el Teorema 3.22 concluimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homeomorfos, lo cual es una contradicción. De esta forma, hemos probado que $d = 1$, lo que prueba la Afirmación 6.

**Afirmación 7.** Si $d = 0$, entonces $b = 0$.

Supongamos, por el contrario, que $b > 0$. Por la Afirmación 5, $a < c$. Sea $t \in [0,1]$ tal que $a < t < c$. Como $b > 0$ y $d = 0$, se tiene $\big[]a,b[,]t,1[\big] \subset \big[]a,0[,]t,1[\big]$, así que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}\big(\big[]a,b[,]t,1[\big], \big[]a,0[,]t,1[\big]\big)$ es un arco ordenado de $\big[]a,b[,]t,1[\big]$ a $\big[]a,0[,]t,1[\big]$. Además, dado que $]t,1[ \, < \, ]c,0[$, tenemos que $\big[]a,b[,]c,0[\big] \supset \big[]a,b[,]t,1[\big]$, así que $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}\big(\big[]a,0[,]t,1[\big], \big[]a,0[,]c,0[\big]\big)$ es un arco ordenado de $\big[]a,0[,]t,1[\big]$ a $\big[]a,0[,]c,0[\big]$. Luego, del Lema 2.26 se sigue que el conjunto $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un arco ordenado de $\big[]a,b[,]t,1[\big] \in L(\mathcal{W})$ a $\big[]a,0[,]c,0[\big] \in M(\mathcal{W})$. Por el Lema 3.7(b), existe $B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. Sean $p, q \in X$ tales que $B = [p,q]$. Como $B \subset \big[]a,0[,]c,0[\big]$, $]a,0[ \, \leq p < q \leq \, ]c,0[$.

Como $\big[]a,b[,]t,1[\big] \subsetneq A$ y $\mathcal{W}$ cumple con la condición (a) en la Definición 3.1, tenemos que $\big[]a,b[,]t,1[\big] \notin \mathcal{W}$ y, por tanto, $B \neq \big[]a,b[,]t,1[\big]$. Como $B \in \mathcal{C}$, $p \in \big[]a,0[,]a,t[\big]$. Dado que $b > 0$, el único elemento de $\mathcal{C}$ que tiene como extremo a $[a,b]$ es $\big[]a,b[,]t,1[\big]$; así que $B \neq \big[]a,b[,]t,1[\big]$ implica que $p < \, ]a,b[$. Como $\{A,B\} \subset \mathcal{W}$, el hecho de que $\mathcal{W}$ cumpla con la condición (a) en la Definición 3.1 implica que $q < \, ]c,0[$. Así, $A \cap B = \big[]a,b[,q\big]$.

El conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{C}\big(\big[]a,b[,q\big], \big[]a,b[,]c,0[\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $A$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{A}$ es homeomorfo a $\big[q,]c,0[\big]$. Como $q < \, ]c,0[$, $\mathcal{A}$ no es separable. El conjunto $\mathcal{B} = \mathcal{C}\big(\big[]a,b[,q\big], \big[p,q\big]\big)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $B$. Por la Observación 3.30, $\mathcal{B}$ es homeomorfo a $\big[p,]a,b[\big]$. Como $\big[p,]a,b[\big] \subset \big[]a,0[,]a,b[\big]$, $\mathcal{B}$ es separable. Aplicando el Teorema 3.22 concluimos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homeomorfos, lo cual es una contradicción. De esta forma, hemos probado que $b = 0$, lo que prueba la Afirmación 7.

Por la Afirmación 5. tenemos que $a < c$. Consideremos todas las posibilidades para $b$ y $d$:

(a) Si $0 < b, d < 1$, entonces $A$ satisface la condición (1).

(b) Si $b = 0$, por las Afirmaciones 1 y 3, $A$ satisface la condición (2) o la condición (4).

(c) Si $b = 1$, por la Afirmación 6, $A$ safisface la condición (3).

(d) Si $d = 0$, por la Afirmación 7, $A$ satisface la condición (2).

(e) Si $d = 1$, por las Afirmaciones 2 y 4, $A$ satisface la condición (3) o la condición (5).

Así, hemos completado la demostración. ■

**3.41 Corolario.** *Sea $X$ el cuadrado lexicográfico y $\mathcal{N}$ la unión de todos los niveles de Whitney en $C(X)$. Entonces:*

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = \{ & \big[]a,0[,]c,0[\big] \in C(X) : 0 \leq a < c \leq 1\} \cup \\ \{ & \big[]a,1[,]c,1[\big] \in C(X) : 0 \leq a < c \leq 1\} \cup \\ \{ & \big[]0,0[,]c,d[\big] \in C(X) : 0 < c \text{ y } d < 1\} \cup \\ \{ & \big[]a,b[,]1,1[\big] \in C(X) : a < 1 \text{ y } 0 < b\} \cup \\ \{ & \big[]a,b[,]c,d[\big] \in C(X) : 0 < b,d < 1, 0 \leq a < c \leq 1\} \cup F_1(X) \cup \{X\}.\end{aligned}$$

El corolario anterior nos dice que no todos los elementos del hiperespacio de subcontinuos del cuadrado lexicográfico pertenecen a algún nivel de Whitney, a pesar de que este hiperespacio sí admite niveles de Whitney no triviales.

A continuación, probaremos algunas propiedades de la unión de todos los niveles de Whitney del hiperespacio de subcontinuos del cuadrado lexicográfico. Para ello necesitamos probar el siguiente lema.

**3.42 Lema.** *Sea $X$ el cuadrado lexicográfico. Sean $x$ y $y \in [0,1]$.*

*(a) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente en $[0,1]$ que cumple que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim_{n\to\infty}]x_n, y[ \; = \; ]x,0[$.*

*(b) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente en $[0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $\lim_{n\to\infty}]x_n, y[ \; = \; ]x,1[$.*

*(c) Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $[0,1]$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\lim_{n\to\infty}]x, y_n[ \; = \; ]x,y[$.*

*Demostración.* (a) Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente, $x > 0$. Sea $U$ una vecindad abierta básica de $]x,0[$, podemos suponer que $U = (]z,1[,p)$ con $z < x$ y $p > ]x,0[$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y converge a $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z < x_n < x$ para toda $n > n_0$. Claramente, $]x_n, y[ \; \in \big(]z,1[,p\big)$ para toda $n > n_0$.

(b) Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente decreciente, $x < 1$. Sea $U$ una vecindad abierta básica de $]x,1[$, podemos suponer que $U = (p, ]z,0[)$ con $z > x$ y $p < ]x,1[$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente decreciente y converge a $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z > x_n > x$ para toda $n > n_0$. Claramente, $]x_n, y[ \; \in \big(p, ]z,0[\big)$ para toda $n > n_0$.

(c) Sea $U$ una vecindad abierta básica de $]x, y[$. Como el orden que le induce $X$ al intervalo $\{x\}\times[0,1]$ es el mismo orden que le induce el intervalo $[0,1]$, entonces la topología inducida por $X$ a $\{x\}\times[0,1]$ es la misma que la que le induce el plano euclidiano. Como $U$ es un abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\{x\}\times\big(B_\delta(y)\cap[0,1]\big) \subset U$. Como $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in B_\delta(y)\cap[0,1]$ para toda $n > n_0$. Claramente, $]x, y_n[\, \in U$ para toda $n > n_0$.

■

**3.43 Proposición.** *Sea $X$ el cuadrado lexicográfico. Definamos los conjuntos:*

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = {} & \{\big[]0,0[,]c,d[\big] \in C(X) : 0 < d < 1 \ y\ c > 0\} \cup \\ & \{\big[]a,b[,]1,1[\big] \in C(X) : 0 < b < 1 \ y\ a < 1\} \cup \\ & \{\big[]a,b[,]c,d[\big] \in C(X) : a < c \ y\ \{b,d\}\cap\{0,1\} = \emptyset\} \cup \{X\} \quad y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & \{\big[]0,0[,]0,d[\big] \in C(X) : 0 < d < 1\} \cup \\ & \{\big[]1,b[,]1,1[\big] \in C(X) : 0 < b < 1\} \cup \\ & \{\big[]a,b[,]a,d[\big] \in C(X) : 0 < b < d < 1\}.\end{aligned}$$

*Entonces, la unión $\mathcal{N}$ de todos los niveles de Whitney en $C(X)$ satisface que:*

*(a)* $\operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N}) = \mathcal{M}$ *y*

*(b)* $\operatorname{cl}_{C(X)}(\mathcal{N}) = C(X)\setminus\mathcal{L}$.

*Demostración.* (a) Primero vamos a probar que $\mathcal{M} \subset \operatorname{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$. Por el Corolario 3.41, $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Sea $A = \big[]a,b[,]c,d[\big] \in \mathcal{M}$. Definimos los conjuntos $U_1 = \operatorname{int}_X\big(\big[]a,0[,]a,1[\big]\big)$, $U_2 = \operatorname{int}_X\big(\big[]a,b[,]c,d[\big]\big) = \operatorname{int}_X(A)$ y $U_3 = \operatorname{int}_X\big(\big[]c,0[,]c,1[\big]\big)$; notemos que $U_1, U_2$ y $U_3$ son abiertos en $X$. Como $A \in \mathcal{M}$, en el caso en que $b \in \{0,1\}$, se tiene que $]a,b[\, = \,]0,0[$. Luego, en cualquier caso, $]a,b[\, \in A\cap U_1$. Similarmente, $]c,d[\, \in A\cap U_3$; además, como $]a,b[\, < \,]c,d[$ tenemos que $\operatorname{int}_X(A)$ no es vacío, así que $A\cap U_2 \neq \emptyset$. Dado que $A = \{]a,b[\}\cup\operatorname{int}_X(A)\cup\{]c,d[\} \subset U_1\cup U_2\cup U_3$, resulta que $\langle U_1, U_2, U_3\rangle$ es una vecindad abierta de $A$.

Probaremos que $\langle U_1, U_2, U_3\rangle \subset \mathcal{M}$. Dado $\big[]x,y[,]z,w[\big] \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle$, como $a < c$, tenemos que $]x,y[\, \in U_1$ y $]z,w[\, \in U_3$. Así, obtenemos que $x = a$, $z = c$ y $x < z$. Tenemos varias posibilidades:

(a) Si $\{y,w\}\cap\{0,1\} = \emptyset$, entonces $\big[]x,y[,]z,w[\big] \in \mathcal{M}$.

(b) Si $y \in \{0, 1\}$, como $]x, y[\ \in U_1 = \mathrm{int}_X\left(\big[]a, 0[, ]a, 1[\big]\right)$ y $a < c \leq 1$ tenemos que $]x, y[\ = ]0, 0[$. Como $]z, w[\ \in U_3 = \mathrm{int}_X\left(\big[]c, 0[, ]c, 1[\big]\right)$ y $0 \leq a < c = z$, resulta que $0 < w < 1$ o $]z, w[\ = ]1, 1[$. De esta forma, $\big[]x, y[, ]z, w[\big] \in \mathcal{M}$.

(c) Si $0 < y < 1$ y $w \in \{0, 1\}$, como $]z, w[\ \in U_3 = \mathrm{int}_X\left(\big[]c, 0[, ]c, 1[\big]\right)$ y $0 \leq a < c$, se sigue que $]z, w[\ = ]1, 1[$. Finalmente, observemos que $x = a < c = 1$, así que $\big[]x, y[, ]z, w[\big] \in \mathcal{M}$.

De esta forma, podemos concluir que $\langle U_1, U_2, U_3\rangle \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Así, hemos probado que $\mathcal{M}$ es abierto. Por tanto, $\mathcal{M} \subset \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$

Ahora probaremos que $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M} \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(C(X) \setminus \mathcal{N}) = C(X) \setminus \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$. Sea $A = \big[]a, b[, ]c, d[\big]$ en $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$. Comparando la caracterización de $\mathcal{N}$ que aparece en el Corolario 3.41 y la definición de $\mathcal{M}$, resultan las siguientes posibilidades:

(i) Como $A \in \mathcal{N}$, si $b = 0$, tenemos que $d = 0$ o $a = 0$. Si $a = 0$ y $d > 0$, tenemos que se cumple $0 < c$ y $d < 1$, o bien se cumple $]c, d[\ = ]1, 1[$. En ambos casos, $\big[]0, 0[, ]c, d[\big] \in \mathcal{M}$, lo cual contradice la elección de $A$. Luego, quedan dos posibilidades cuando $d = 0$:

1. $A = \big[]a, 0[, ]c, 0[\big]$, con $a < c$. Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente que converge a $c$. De acuerdo con el inciso (a) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}\{\big[]a, 0[, ]c_n, 1[\big] \in C(X) : n \in \mathbb{N}\}$, que es un subconjunto de $C(X) \setminus \mathcal{N}$.
2. $A = \{]a, 0[\}$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente decreciente que converge a 0. De acuerdo con el inciso (b) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}\{\big[]a, b_{n+1}[, ]a, b_n[\big] \in C(X) : n \in \mathbb{N}\}$, que es un subconjunto de $C(X) \setminus \mathcal{N}$.

(ii) Como $A \in \mathcal{N}$, si $d = 1$, entonces $b = 1$ o $c = 1$. Si $c = 1$ y $b < 1$, tenemos que se cumple $a < 1$ y $0 < b$, o bien se cumple $]a, b[\ = ]0, 0[$. En ambos casos, $\big[]a, b[, ]1, 1[\big] \in \mathcal{M}$, lo cual contradice la elección de $A$. Luego, quedan dos posibilidades cuando $b = 1$:

1. $A = \big[]a, 1[, ]c, 1[\big]$, con $a < c$. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente decreciente que converge a $a$. De acuerdo con el inciso (b) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}\{\big[]a_n, 0[, ]c, 1[\big] \in C(X) : n \in \mathbb{N}\}$, que es un subconjunto de $C(X) \setminus \mathcal{N}$.
2. $A = \{]a, b[\}$, con $0 < b \leq 1$. Sea $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente que converge a $b$. De acuerdo con el inciso (a) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}\{\big[]a, b_n[, ]a, b_{n+1}[\big] \in C(X) : n \in \mathbb{N}\}$, que es un subconjunto de $C(X) \setminus \mathcal{N}$.

Hemos probado que $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M} \subset C(X) \setminus \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$. Como ya habíamos visto que $\mathcal{M} \subset \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$, podemos concluir que $\mathcal{M} = \mathrm{int}_{C(X)}(\mathcal{N})$.

(b) Primero probaremos que $C(X) \setminus \mathcal{L} \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$. Sea $A = \big[]a, b[, ]c, d[\big] \in C(X) \setminus \mathcal{L}$. Si $A \in F_1(X)$, entonces $A \in \mathcal{N}$. Veamos todas las posibilidades.

(i) $a < c$. Para cada $n \in N$ tomemos $b_n \in B_{\frac{1}{n}}(b)$ y $d_n \in B_{\frac{1}{n}}(d)$, tales que $0 < b_n, d_n < 1$. Por el Corolario 3.41, tenemos que $\big[]a, b_n[, ]c, d_n[\big] \in \mathcal{N}$. Por lo anterior y de acuerdo con el inciso (c) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$.

(ii) $a = c$. Como $A \notin \mathcal{L}$, tenemos que $b = 0$, $b = d$ o $d = 1$. Tenemos tres posibilidades:

1. Si $b = 0$, entonces $a > 0$. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente creciente que converge a $a$. Del Corolario 3.41 se sigue que $\big[]a_n, d[, ]a, d[\big] \in \mathcal{N}$. Notemos que esta sucesión converge a $\big[]a, 0[, ]a, d[\big] = A$. Por lo anterior y de acuerdo con el inciso (a) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$.
2. Si $d = 1$ y $b > 0$, entonces $a < 1$. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión estrictamente decreciente que converge a $a$. Por el Corolario 3.41, tenemos que $\big[]a, b[, ]a_n, b[\big] \in \mathcal{N}$. Notemos que esta sucesión converge a $\big[]a, b[, ]a, 1[\big] = A$. Por lo anterior y de acuerdo con el inciso (a) del Lema 3.42 y el Lema 3.23, $A \in \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$.
3. Si $b = d$, entonces $A \in F_1(X) \subset \mathcal{N}$.

Hemos probado que $C(X) \setminus \mathcal{L} \subset \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$.

Ahora vamos a probar que $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset C(X) \setminus \mathcal{L}$ mostrando que $\mathcal{L} \subset C(X) \setminus \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$. Sea $A = \big[]a, b[, ]a, d[\big] \in \mathcal{L}$. Dado que $b < d$, existe $t \in (0, 1)$ tal que $b < t < d$. Definimos los conjuntos $U_1 = \mathrm{int}_X\left(\big[]a, 0[, ]a, t[\big]\right)$, $U_2 = \mathrm{int}_X\left(\big[]a, b[, ]a, d[\big]\right)$ y $U_3 = \mathrm{int}_X\left(\big[]a, t[, ]a, 1[\big]\right)$. El conjunto $\langle U_1, U_2, U_3\rangle$ es una vecindad abierta de $A$. Probaremos que $\langle U_1, U_2, U_3\rangle \subset C(X) \setminus \mathcal{N}$.

Dado $\big[]x, y[, ]z, w[\big] \in \langle U_1, U_2, U_3\rangle$, por la definición de $\langle U_1, U_2, U_3\rangle$ tenemos que $x = z = a$, $]a, y[\, \in U_1$ y $]a, w[\, \in U_3$. Como $0 < t < 1$, resulta que $y < t < w$. Suponiendo que $\big[]a, y[, ]a, w[\big] \in \mathcal{N}$, por el Corolario 3.41 tendríamos que $\big[]a, y[, ]a, w[\big] \in F_1(X)$; así, obtendríamos que $y = w$, con lo cual llegaríamos una contradicción.

De esta forma, podemos concluir que $\langle U_1, U_2, U_3\rangle \subset C(X) \setminus \mathcal{N}$, de donde $A \notin \mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N})$, como queríamos. Por tanto $\mathrm{cl}_{C(X)}(\mathcal{N}) \subset C(X) \setminus \mathcal{L}$.

■

### 3.1.2 El espacio de Helly

En esta sección probaremos que el hiperespacio de subcontinuos del espacio de Helly no tiene niveles de Whitney no triviales. Para ello comenzaremos probando algunos lemas básicos que serán de utilidad para construir arcos ordenados en el hiperespacio de subcontinuos del espacio de Helly.

A lo largo de la presente sección, dadas dos funciones $f, g$ en el espacio de Helly, diremos que $f < g$ si $f \leq g$ y $f \neq g$.

**3.44 Definición.** Sea $X$ el espacio de Helly. Definimos la función $\pi_t : X \to [0,1]$ que a cada elemento $f$ de $X$ le asigna $f(t)$. Siendo $X$ un subespacio de $[0,1]^{[0,1]}$, la función $\pi_t$ es la proyección a la $t$-ésima coordenada.

**3.45 Lema.** *Sea $X$ el Espacio de Helly y sean $\{f_1, \ldots, f_n\} \in X$, donde $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que:*

*(a) La función $g : [0,1] \to [0,1]$ definida por $g(t) = \text{máx}\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ cumple que $g \in X$.*

*(b) La función $h : [0,1] \to [0,1]$ definida por $h(t) = \text{mín}\{f_1(t), \ldots, f_n(t)\}$ cumple que $h \in X$.*

*Demostración.* (a) Para ver que $g \in X$ es suficiente probar que $g$ es creciente. Sean $t_1$ y $t_2 \in [0,1]$ tales que $t_1 < t_2$. Por la definición de $g$, existe $i_0$ tal que $g(t_2) = f_{i_0}(t_2)$ y $f_i(t_2) \leq f_{i_0}(t_2)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $f_i \in X$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $f_i(t_1) \leq f_i(t_2)$ y, por lo tanto, $f_i(t_1) \leq f_{i_0}(t_2)$. Así, tenemos que $g(t_1) = \text{máx}\{f_1(t_1), \ldots, f_n(t_1)\} \leq f_{i_0}(t_2) = g(t_2)$. Por lo anterior, tenemos que $g$ es una función creciente.

(b) Para ver que $h \in X$ es suficiente probar que $h$ es creciente. Sean $t_1$ y $t_2 \in [0,1]$ tales que $t_1 < t_2$. Por la definición de $h$, existe $i_0$ tal que $h(t_1) = f_{i_0}(t_1)$ y $f_{i_0}(t_1) \leq f_i(t_1)$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $f_i \in X$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $f_i(t_1) \leq f_i(t_2)$ y, por lo tanto, $f_{i_0}(t_1) \leq f_i(t_2)$. Así, tenemos que $h(t_1) = f_{i_0}(t_1) \leq \text{mín}\{f_1(t_2), \ldots, f_n(t_2)\} = h(t_2)$. Por lo anterior, tenemos que $h$ es una función creciente

■

**3.46 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly. La función $L : X \to C(X)$, que a cada función $f$ en $X$ le asigna el subcontinuo $L(f) = \{g \in X : g \leq f\}$, es continua.*

*Demostración.* Por la Proposición 1.17, la función $L$ está bien definida. Sean $f \in X$ y $\mathcal{U}$ una vecindad abierta básica de $L(f)$ en $C(X)$; podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap C(X)$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es un abierto básico de $X$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Definimos los conjuntos

$$P = \{t \in [0,1] : \pi_t(U_i) \subsetneq [0,1] \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}\} \text{ y}$$

$$P' = \{t \in [0,1] : f(t) \notin \pi_t(U_i) \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Dado que $U_i$ es un abierto básico para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $P$ y $P'$ son finitos. Observemos que, si $f(t) \notin \pi_t(U_i)$, entonces $\pi_t(U_i) \neq [0,1]$; por lo anterior, $P' \subset P$.

Como $L(f) \in \mathcal{U}$, podemos elegir $f_i \in U_i \cap L(f)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $t \in P'$, definimos $s_t = \max\{f_i(t) : i \in \{1, \ldots, n\}\}$; como $f_i \in L(f)$ y $f_i(t) \neq f(t)$ (pues $f_i(t) = \pi_t(f_i) \in \pi_t(U_i)$ y $f(t) \notin \pi_t(U_i)$), tenemos que $s_t < f(t)$. Definimos $O_t = (s_t, 1]$, tenemos que $O_t$ es una vecindad abierta de $f(t)$.

Para cada $t \in P \setminus P'$, definimos $s_t = 0$ y definimos $O_t = [0,1]$.

Para cada $t \in P$, consideremos $V_t$ un intervalo abierto básico en $[0,1]$ tal que $f(t) \in V_t$ y

$$V_t \subset \bigcap \{\pi_t(U_i) : i \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } f(t) \in \pi_t(U_i)\}.$$

Definimos $W_t = V_t \cap O_t$, que es una vecindad abierta básica de $t$ en $[0,1]$.

El conjunto

$$W = \prod \{W_t : t \in P\} \times \prod \{[0,1]_t : t \notin P\}$$

es una vecindad abierta básica de $f$. Probaremos que $L(g) \in \mathcal{U}$ para toda $g \in W$.

**Afirmación 1.** Dada $g \in W$, $L(g) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Consideremos $h \in L(g)$ y $t \in [0,1]$. Definimos $h' : [0,1] \to [0,1]$ como $h'(t) = \min\{f(t), h(t)\}$. Como $h$ y $f$ son crecientes, el Lema 3.45 nos dice que $h'$ es creciente. Dado que $h'(t) \leq f(t)$ para toda $t \in [0,1]$, tenemos que $h' \in L(f)$; como $L(f) \in \mathcal{U}$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $h' \in U_{i_0}$. Veamos que $h \in U_{i_0}$.

Dada $t \in [0,1]$, tenemos tres posibilidades:

1. Si $h(t) = h'(t)$, como $h' \in U_{i_0}$, claramente $h(t) \in \pi_t(U_{i_0})$.

2. Si $h(t) > h'(t)$ y $\pi_t(U_{i_0}) = [0,1]$, tenemos que $h(t) \in \pi_t(U_{i_0})$.

3. Si $h(t) > h'(t)$ y $\pi_t(U_{i_0}) \subsetneq [0,1]$, entonces $t \in P$. Como $h'(t) = \text{mín}\{f(t), h(t)\}$, $h(t) > f(t)$ y $h'(t) = f(t)$. Dado que $h \in L(g)$, $h(t) \leq g(t)$. Como $f, g \in W$, tenemos que $\{f(t), g(t)\} \subset \pi_t(W) = W_t$ (pues $t \in P$); como $f(t) < h(t) \leq g(t)$, el hecho de que $W_t$ es un intervalo abierto en $[0,1]$ implica que $h(t) \in W_t$. Como $f(t) = h'(t)$ y $h' \in U_{i_0}$, tenemos que $f(t) \in \pi_t(U_{i_0})$ y, por lo tanto, $W_t \subset V_t \subset \pi_t(U_{i_0})$. Podemos concluir que, en este caso, $h(t) \in \pi_t(U_{i_0})$.

Con esto concluimos la prueba de la Afirmación 1.

**Afirmación 2**. Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $g \in W$, $L(g) \cap U_i \neq \emptyset$.

Definamos la función $g_i : [0,1] \to [0,1]$ por $g_i(t) = \text{mín}\{g(t), f_i(t)\}$ para cada $t \in [0,1]$. Como $g, f_i \in X$, el Lema 3.45 nos dice que $g_i \in X$. Por la definición de $g_i$, tenemos que $g_i \in L(g)$. Veamos que $g_i \in U_i$. Dado $t \in [0,1]$, tenemos tres posibilidades:

1. Si $t \notin P$, entonces $\pi_t(U_i) = [0,1]$ y $g_i(t) \in \pi_t(U_i)$.

2. Si $t \in P \setminus P'$, entonces $f(t) \in \pi_t(U_i)$, lo que implica que $W_t \subset V_t \subset \pi_t(U_i)$. Como $g \in W$ y $\pi_t(W) = W_t$, tenemos que $g(t) \in \pi_t(U_i)$. Además, $f_i \in U_i$, así que $\{f_i(t), g(t)\} \in \pi_t(U_i)$, de donde concluimos que $g_i \in \pi_t(U_i)$.

3. Si $t \in P'$, entonces $f(t) \notin \pi_t(U_i)$, lo que implica que $W_t \subset O_t = (s_t, 1]$ y $f_i(t) \leq s_t$. Como $g \in W$, entonces $g(t) \in \pi_t(W) = W_t$; así, resulta que $s_t < g(t)$ y, por tanto, $f_i(t) < g(t)$. Por la definición de $g_i$, obtenemos que $g_i(t) = f_i(t)$. Dado que $f_i \in U_i$, podemos concluir que $g_i(t) \in \pi_t(U_i)$.

Hemos probado que $g_i \in L(g) \cap U_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2.

Las Afirmaciones 1 y 2 implican que $L(g) \in \mathcal{U}$ para cada $g \in W$, lo que completa la demostración del lema. ■

**3.47 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly y sean $g_1, g_2 \in X$. La función $h : [0,1] \to [0,1]$ definida por la regla de asignación*

$$h(t) = \text{mín}\{g_1(t), g_2(t)\}$$

*cumple que $L(g_1) \cap L(g_2) = L(h)$.*

*Demostración.* Por el Lema 3.45(b), tenemos que $h \in X$. Dada $t \in [0,1]$ y $f \in X$, es claro que $f(t) \leq g_1(t)$ y $f(t) \leq g_2(t)$ si y solamente si $f(t) \leq h(t)$. Luego, $L(g_1) \cap L(g_2) = L(h)$. ■

**3.48 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly, sea $T$ un arco generalizado y sea $\varphi : T \to X$ una función continua que preserva el orden. Definimos $H : T \to C(X)$ como $H(t) = L(\varphi(t))$ para toda $t \in T$. La función $H$ es continua y preserva el orden.*

*Demostración.* Por el Lema 3.46 sabemos que la función $L$ es continua; como $\varphi$ es continua, entonces $H$ también lo es. Veamos que $H$ preserva el orden. Dadas $r, s \in X$ tales que $r < s$, tenemos que $\varphi(r) < \varphi(s)$, pues $\varphi$ preserva el orden. Luego, $H(r) = \{f \in X : f \leq \varphi(r)\} \subset \{f \in X : f \leq \varphi(s)\} = H(s)$. Así, podemos concluir que $H$ preserva el orden.

■

**3.49 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $T$ un arco generalizado. Dada una función continua $H : T \to C(X)$ que respeta el orden, tenemos que $H(T)$ es un arco ordenado de $H(\text{mín}(T))$ a $H(\text{máx}(T))$.*

*Demostración.* Veamos que $H(T)$ cumple con las condiciones de la Definición 2.13. Como la función $H$ es continua, $H(T)$ es un subcontinuo de $C(C(X))$. Dados dos elementos $A$ y $B$ en $H(T)$, existen dos elementos $t_A$ y $t_B \in T$ tales que $H(t_A) = A$ y $H(t_B) = B$. Como $\{t_A, t_B\} \subset T$, tenemos que $t_A$ y $t_B$ son comparables; dado que $H$ respeta el orden, podemos concluir que $A$ y $B$ son comparables. Finalmente, el hecho de que $H$ preserve el orden implica que, para cada $t \in T$, tenemos que $H(\text{mín}(T)) \subset H(t) \subset H(\text{máx}(T))$. Por lo anterior, como $\{\text{mín}(T), \text{máx}(T)\} \subset T$, $\bigcap\{H(t) : t \in T\} = H(\text{mín}(T))$ y $\bigcup\{H(t) : t \in T\} = H(\text{máx}(T))$. ■

A continuación, construiremos una familia de arcos ordenados metrizables en el hiperespacio de subcontinuos del espacio de Helly.

**3.50 Definición.** Sea $X$ el espacio de Helly. Definimos la función $\gamma : [0,1] \to X$ como aquella que a cada elemento $x \in [0,1]$ le asigna la función definida por $\gamma(x)(t) = x$ para cada $t \in [0,1]$. (Ver la Figura 3.1)

**3.51 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly. La función $\gamma : [0,1] \to X$ es una función continua y preserva el orden.*

*Demostración.* Primero probaremos que $\gamma$ es una función continua. Fijemos un elemento $x_0 \in [0,1]$ y consideremos $U$ una vecindad abierta básica de $\gamma(x_0)$ en $X$. Podemos suponer que

$$U = U_{t_1} \times \ldots \times U_{t_n} \times \prod\{[0,1]_t : t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_{t_i}$ es un abierto básico de $[0,1]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\varepsilon_i$ tal que $B_{\varepsilon_i}(x_0) \subset U_{t_i}$. Definimos $\varepsilon = \text{mín}\{\varepsilon_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Probaremos que $\gamma(B_\varepsilon(x_0)) \subset U$. Dado $x \in B_\varepsilon(x_0)$, tenemos que $|\gamma(x_0)(t) - \gamma(x)(t)| = |x_0 - x| < \varepsilon$ para toda $t \in [0,1]$; por lo anterior, $\gamma(x)(t_i) \in B_\varepsilon(x_0) \subset B_{\epsilon_i}(x_0) \subset U_{t_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, para cada $t \in [0,1]$ tal que $t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}$, $\gamma(x)(t) \in [0,1] = U_t$. Luego, $\gamma(x) \in U$. De esta forma, podemos concluir que $\gamma(B_\varepsilon(x_0)) \subset U$.

Veamos que $\gamma$ preserva el orden. Si tomamos $x, y \in [0,1]$ tales que $x < y$, por la definición de $\gamma$ tenemos que $\gamma(x)(t) = x < y = \gamma(y)(t)$ para toda $t \in [0,1]$. Por lo anterior, podemos concluir que $\gamma(x) < \gamma(y)$. ■

**3.52 Definición.** Sea $X$ el espacio de Helly. Definimos la función $\delta : [0,1] \to X$ como aquella que a cada elemento $x \in [0,1]$ le asigna la función

$$\delta(x)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1, \\ x, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

(Ver la Figura 3.1)

**3.53 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly. La función $\delta : [0,1] \to X$ es una función continua y preserva el orden.*

*Demostración.* Primero probaremos que $\delta$ es una función continua. Fijemos un elemento $x_0 \in [0,1]$ y consideremos una vecindad abierta básica $U$ de $\delta(x_0)$ en $X$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset \pi_1(U)$. Probaremos que $\delta(B_\varepsilon(x_0)) \subset U$. Dado $x \in B_\varepsilon(x_0)$, tenemos que $|\delta(x_0)(1) - \delta(x)(1)| = |x_0 - x| < \varepsilon$, así que $\delta(x)(1) \in \pi_1(U)$. Además, para $t \in [0,1)$ tenemos que $\delta(x)(t) = 0 = \delta(x)(t_0) \in \pi_t(U)$. Luego, $\delta(x) \in U$. De esta forma, podemos concluir que $\delta(B_\varepsilon(x_0)) \subset U$. Con esto hemos probado que la función $\delta$ es continua.

Veamos que $\delta$ preserva el orden. Si tomamos $x, y \in [0,1]$ tales que $x < y$, por la definición de $\delta$ tenemos que $\delta(x)(t) = 0 = \delta(y)(t)$ para cada $t \in [0,1)$ y que $\delta(x)(1) < \delta(y)(1)$, así que $\delta(x) < \delta(y)$. ■

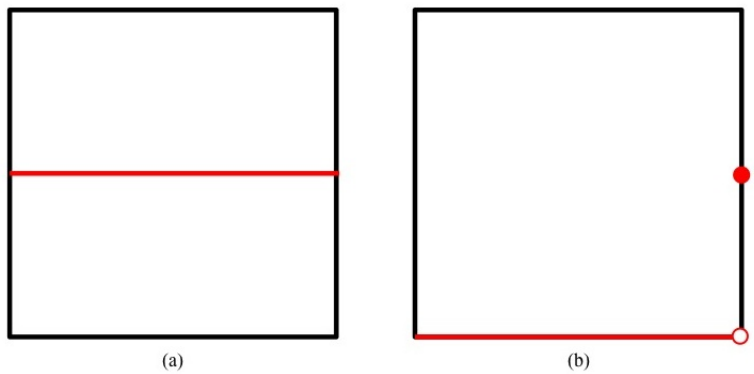


Figura 3.1: Se muestran las funciones $\gamma(\frac{1}{2})$ en (a) y $\delta(\frac{1}{2})$ en (b).

**3.54 Definición.** Sea $X$ el espacio de Helly. Sean $f, g \in X$ tales que $f < g$. Definimos la función $\alpha_{f,g} : [0,1] \to X$ que a cada elemento $x \in [0,1]$ le asigna la función

$$\alpha_{f,g}(x)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } x < f(t), \\ x, & \text{si } f(t) \leq x < g(t), \\ g(t), & \text{si } x \geq g(t). \end{cases}$$

(Ver la Figura 3.2)

**3.55 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly. Dadas $f, g \in X$ tales que $f < g$, la función $\alpha_{f,g}$ es continua.*

*Demostración.* Mostraremos primero que, dada $x \in [0,1]$, tenemos que $\alpha_{f,g}(x) \in X$; para ello probaremos que $\alpha_{f,g}(x)$ es una función creciente. Sean $t_1, t_2 \in [0,1]$ tales que $t_1 < t_2$. Hay tres casos para considerar:

1. $x < f(t_1)$. En este caso tenemos que $\alpha_{f,g}(t_1) = f(t_1)$. Como $f \in X$ y $t_1 < t_2$, se sigue que $x < f(t_1) \leq f(t_2)$. Puesto que $x < f(t_2)$, resulta que $\alpha_{f,g}(t_2) = f(t_2)$ y, por tanto, $\alpha_{f,g}(t_1) \leq \alpha_{f,g}(t_2)$.

2. $f(t_1) \leq x < g(t_1)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_1) = x$. Como $g \in X$ y $t_1 < t_2$, $x < g(t_1) \leq g(t_2)$. Como $x < g(t_2)$, tenemos únicamente dos posibilidades:

   (a) $f(t_2) \leq x < g(t_1)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_2) = x$, así que $\alpha_{f,g}(t_1) = \alpha_{f,g}(t_2)$.

   (b) $x < f(t_2)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_2) = f(t_2)$. Luego, tenemos que $\alpha_{f,g}(t_1) < \alpha_{f,g}(t_2)$.

3. $x \geq g(t_1)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_1) = g(t_1)$. Aquí hay tres posibilidades para considerar:

   (a) $x < f(t_2)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_2) = f(t_2)$. Como $g(t_1) \leq x$, se sigue que $\alpha_{f,g}(t_1) < \alpha_{f,g}(t_2)$.

   (b) $f(t_2) \leq x < g(t_2)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_2) = x$. Como $x \geq g(t_1)$, resulta que $\alpha_{f,g}(t_1) \leq \alpha_{f,g}(t_2)$.

   (c) $x \geq g(t_2)$. En este caso $\alpha_{f,g}(t_2) = g(t_2)$, como $g \in X$ y $t_1 < t_2$, tenemos que $g(t_1) \leq g(t_2)$. Luego, $\alpha_{f,g}(t_1) \leq \alpha_{f,g}(t_2)$.

Fijemos un elemento $x_0 \in [0,1]$ y consideremos una vecindad abierta básica $U$ de $\alpha_{f,g}(x_0)$ en $X$. Podemos suponer que

$$U = U_{t_1} \times \ldots \times U_{t_n} \times \prod\{[0,1]_t : t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_{t_i}$ es un abierto básico de $[0,1]$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos varias posibilidades:

(i) Si $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = g(t_i)$ y $x_0 > g(t_i)$, existe una vecindad abierta $V_{t_i}$ de $x_0$ tal que $x > g(t_i)$ para toda $x \in V_{t_i}$. Así, tenemos que, para cada $x \in V_{t_i}$, $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = g(t_i) \in U_{t_i}$.

(ii) Si $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = g(t_i)$, $x_0 = g(t_i)$ y $f(t_i) < g(t_i)$, existe una vecindad abierta $V_{t_i}$ de $x_0$ tal que $V_{t_i} \subset U_{t_i} \cap \big(f(t_i), 1\big]$. Dado $x \in V_{t_i}$, si $g(t_i) \geq x$, entonces $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = x \in U_{t_i}$; si $g(t_i) < x$, entonces $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = g(t_i) \in U_{t_i}$.

(iii) Si $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = x_0$ y $f(t_i) < x_0 < g(t_i)$ existe una vecindad abierta $V_{t_i}$ de $x_0$ tal que $V_{t_i} \subset U_{t_i} \cap \big(f(t_i), g(t_i)\big)$. Dada $x \in V_{t_i}$, tenemos que $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = x \in U_{t_i}$.

(iv) Si $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = x_0$ y $x_0 = f(t_i)$ y $f(t_i) < g(t_i)$, existe una vecindad abierta $V_{t_i}$ de $x_0$ tal que $V_{t_i} \subset U_{t_i} \cap \big[0, g(t_i)\big)$. Dado $x \in V_{t_i}$, si $f(t_i) \leq x$, entonces $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = x \in U_{t_i}$; si $f(t_i) > x$, entonces $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = f(t_i) \in U_{t_i}$.

(v) Si $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = x_0$ y $f(t_i) = x_0 = g(t_i)$, existe una vecindad abierta $V_{t_i}$ de $x_0$ tal que $V_{t_i} \subset U_{t_i}$. Dado $x \in V_{t_i}$, $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = x_0 \in U_{t_i}$.

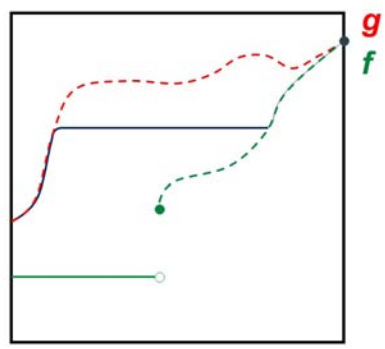


Figura 3.2: La función $\alpha_{f,g}(x)$.

(vi) Si $\alpha_{f,g}(x_0)(t_i) = f(t_i)$ y $f(t_i) > x_0$, existe una vecindad abierta $V_{t_i}$ de $x_0$ tal que $x < f(t_i)$ para toda $x \in V_{t_i}$. Dada $x \in V_{t_i}$, tenemos que $\alpha_{f,g}(x)(t_i) = f(t_i) \in U_{t_i}$.

Definimos $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{t_i}$. Probaremos que $\alpha_{f,g}(V) \subset U$. Dado $x \in V$, ya hemos visto que $\alpha_{f,g}(x)(t_i) \in U_{t_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, para cada $t \in [0,1]$ tal que $t \notin \{t_1, \ldots, t_n\}$, $\alpha_{f,g}(x)(t) \in [0,1] = \pi_t(U)$; luego, $\alpha_{f,g}(x) \in U$. De esta forma, podemos concluir que $\alpha_{f,g}(V) \subset U$. Con esto hemos probado que la función $\alpha_{f,g}$ es continua. ■

**3.56 Lema.** *Sea $X$ el espacio de Helly. Sean $f, g \in X$ tales que $f < g$ y sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $f(t_0) < g(t_0)$.*

*(a) La función $\alpha_{f,g}|_{[f(t_0),g(t_0)]} : [f(t_0), g(t_0)] \to X$ es un encaje que preserva el orden.*

*(b) El conjunto $L(\alpha_{f,g}([f(t_0), g(t_0)]))$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $L(\alpha_{f,g}(f(t_0)))$ a $L(\alpha_{f,g}(g(t_0)))$ y es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.*

*Demostración.* (a) Veamos que $\alpha_{f,g}|_{[f(t_0),g(t_0)]}$ preserva el orden. Sean $x_1$ y $x_2 \in [f(t_0), g(t_0)]$ tales que $x_1 < x_2$. Primero probaremos que $\alpha_{f,g}(x_1)(t) \leq \alpha_{f,g}(x_2)(t)$ para toda $t \in [0,1]$. Analizaremos las posibilidades para $\alpha_{f,g}(x_1)(t)$:

(i) Si $x_1 < f(t)$, entonces $\alpha_{f,g}(x_1)(t) = f(t)$. Por definición, $\alpha_{f,g}(x_2)(t) \in \{f(t), x_2, g(t)\}$. Si $\alpha_{f,g}(x_2)(t) \in \{f(t), g(t)\}$, como $f(t) \leq g(t)$, tenemos que $\alpha_{f,g}(x_1)(t) = f(t) \leq \alpha_{f,g}(x_2)(t)$. Si $f(t) \leq x_2 < g(t)$, entonces

$\alpha_{f,g}(x_2)(t) = x_2$, por la definición de $\alpha_{f,g}(x_2)(t)$ tenemos que $f(t) \leq x_2$, de donde $\alpha_{f,g}(x_1)(t) = f(t) \leq x_2 = \alpha_{f,g}(x_2)(t)$.

(ii) Si $f(t) \leq x_1 < g(t)$, entonces $\alpha_{f,g}(x_1)(t) = x_1$, así que $\alpha_{f,g}(x_2)(t) = \text{mín}(x_2, g(t))$. Luego, $\alpha_{f,g}(x_1)(t) \leq \alpha_{f,g}(x_2)(t)$.

(iii) Si $g(x_1) \leq x_1$, entonces $\alpha_{f,g}(x_1)(t) = g(t)$, así que $\alpha_{f,g}(x_2)(t) = g(t)$. Luego, $\alpha_{f,g}(x_1)(t) \leq \alpha_{f,g}(x_2)(t)$.

Veamos ahora que $\alpha_{f,g}(x_1)(t_0) < \alpha_{f,g}(x_2)(t_0)$. Sabemos que $x_1 < x_2 \leq g(t_0)$ (recordemos que $x_1, x_2 \in [f(t_0), g(t_0)]$), así que $\alpha_{f,g}(x_1)(t_0) = \text{máx}\{f(t_0), x_1\}$. Además, tenemos que $f(t_0) \leq x_1 < x_2$, de donde $\alpha_{f,g}(x_2)(t_0) = \text{mín}\{g(t_0), x_2\}$. Dado que $\text{máx}\{f(t_0), x_1\} < \text{mín}\{g(t_0), x_2\}$, $\alpha_{f,g}(x_1)(t_0) < \alpha_{f,g}(x_2)(t_0)$.

Hemos probado que la función $\alpha_{f,g}$ preserva el orden, lo cual implica que es inyectiva; además, el Lema 3.55 nos dice que es continua. Dado que $\alpha_{f,g}$ es una función de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, resulta ser un encaje.

(b) Aplicando el Lema 3.49 se obtiene que $L(\alpha_{f,g}([f(t_0), g(t_0)]))$ es un arco ordenado de $L(\alpha_{f,g}(f(t_0)))$ a $L(\alpha_{f,g}(g(t_0)))$; además, como $\alpha_{f,g}$ es un encaje, resulta que $L(\alpha_{f,g}([f(t_0), g(t_0)]))$ es homeomorfo al intervalo $[f(t_0), g(t_0)]$. Como $f(t_0) < g(t_0)$, $L(\alpha_{f,g}([f(t_0), g(t_0)]))$ es homeomorfo al invervalo $[0, 1]$.

■

A continuación construiremos una familia de arcos ordenados, no metrizables, en el hiperespacio de subcontinuos del espacio de Helly.

**3.57 Definición.** Sea $X$ el espacio de Helly. En el cuadrado lexicográfico, considere el intervalo $J = \big[]0,1[, ][1,1]\big]$. Sean $f$ y $g \in X$ tales que $f(1) = g(1)$ y $f(t) < g(t)$ para toda $t \in [0, 1)$. Definimos la función $\beta_{f,g} : J \to X$ como aquella que a cada elemento $]x, y[ \in J$ le asigna la función

$$\beta_{f,g}\big(]x,y[\big)(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t < 1 - x, \\ f(t) + y[(g(t) - f(t)], & \text{si } t = 1 - x, \\ g(t), & \text{si } t > 1 - x. \end{cases}$$

**3.58 Lema.** *En el cuadrado lexicográfico, sea $J$ el intervalo definido por $\big[]0,1[, ][1,1]\big]$. Cualquier segmento inicial no trivial de $J$ es no metrizable.*

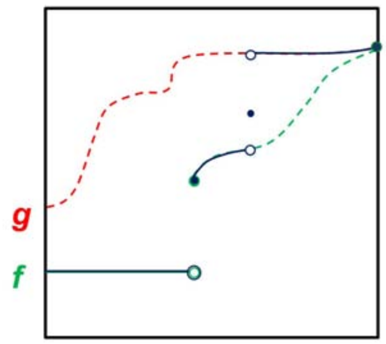


Figura 3.3: La función $\beta_{f,g}\big(]x,y[\big)$.

*Demostración.* Sea $S = \big[]0,1[,]x,y[\big]$ un segmento inicial no trivial de $J$; como $S$ es no trivial, $x > 0$. Dado que $\{\big(]t,0[,]t,1[\big) : 0 < t < x\}$ es una colección no numerable de abiertos disjuntos en $S$, tenemos que $S$ no es separable. Dado que todo espacio métrico compacto es separable, como $S$ es compacto, podemos concluir que $S$ no es metrizable. ■

**3.59 Lema.** *Sean $X$ el espacio de Helly. Sean $f$ y $g \in X$ tales que $f(1) = g(1)$ y $f(t) < g(t)$ para toda $t \in [0,1)$. Tenemos que:*

*(a) La función $\beta_{f,g}$ es un encaje que preserva el orden.*

*(b) Sea $L$ la función que definimos en el Lema 3.46, que a cada función $f$ en $X$ le asigna el subcontinuo $L(f) = \{g \in X : g \leq f\}$. Entonces $L(\beta_{f,g}(J))$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $L(f)$ a $L(g)$ y es homeomorfo al intervalo $J$.*

*Demostración.* (a) Fijemos un elemento $]x_0,y_0[\, \in J$ y consideremos una vecindad abierta básica $U$ de $\beta_{f,g}\big(]x_0,y_0[\big)$ en $X$. Podemos suponer que

$$U = U_{t_1} \times \ldots \times U_{t_n} \times \prod\{[0,1]_t : t \notin \{t_1,\ldots,t_n\}\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_{t_i}$ es un intervalo abierto en $[0,1]$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$. Definimos

$$k_0 = f(1-x_0) + y_0[g(1-x_0) - f(1-x_0)].$$

Como $\beta_{f,g}\big(]x_0,y_0[\big)(1-x_0) = k_0$, existe $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $B_\varepsilon(k_0) \subsetneq \pi_{1-x_0}(U)$. Notemos que, si $y \in B_\varepsilon(y_0)$,

$$|\beta_{f,g}\big(]x_0,y_0[\big)(1-x_0) - \beta_{f,g}(]x_0,y[)(1-x_0)| = |y_0 - y||g(1-x_0) - f(1-x_0)| < \varepsilon,$$

así que $\beta_{f,g}\big(]x_0, y[\big)(1-x_0) \in \pi_{1-x_0}(U)$. Vamos a definir una vecindad abierta $V$ de $]x_0, y_0[$ en $J$ tal que

$$V \cap (\{x_0\} \times [0,1]) \subset \{x_0\} \times B_\varepsilon(y_0)$$

y mostraremos que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) \in \pi_t(U)$ para cualesquiera $]x, y[ \in V$ y $t \in [0,1] \setminus \{1-x_0\}$; con ello habremos probado que $\beta_{f,g}(V) \subset U$.

Tenemos varias posibilidades:

(i) Si $y_0 \in (0,1)$, definimos $\varepsilon' = \text{mín}(\varepsilon, y_0, 1-y_0)$ y $V = \big(]x_0, y_0 - \varepsilon'[, ]x_0, y_0 + \varepsilon'[\big)$. Luego, $]x_0, y_0[ \in V$. Para cada $]x, y[ \in V$ y cada $t \in [0,1] \setminus \{1-x_0\}$, se cumple que $x = x_0$, así que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, y_0[\big)(t) \in \pi_t(U)$. Además, como $y \in B_\varepsilon(y_0)$, se cumple que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(1-x_0) \in \pi_{1-x_0}(U)$.

(ii) Si $y_0 = 0$, entonces $0 < x_0$. Sea $\delta \in (0, x_0)$ tal que $(B_\delta(1-x_0) \setminus \{1-x_0\}) \cap \{t_1, \ldots, t_n\} = \emptyset$. Definimos $V = \big(]x_0 - \delta, 1[, ]x_0, \varepsilon[\big)$, entonces $]x_0, y_0[ = ]x_0, 0[ \in V$. Sea $]x, y[ \in V$, entonces $x_0 - \delta < x \leq x_0$ y $1 - x_0 \leq 1 - x < 1 - x_0 + \delta$. Dada $t \in [0,1]$, consideremos cuatro posibilidades:

1. $t \in [0, 1-x_0)$. Como $1 - x \geq 1 - x_0$, se sigue que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = f(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, 0[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
2. $t \in [1-x_0+\delta, 1]$. Como $1-x < 1-x_0+\delta$, tenemos que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = g(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, 0[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
3. $t \in (1-x_0, 1-x_0+\delta)$. Como $(1-x_0, 1-x_0+\delta) \cap \{t_1, \ldots, t_m\} = \emptyset$, resulta que $\pi_t(U) = [0,1]$ y, por tanto, que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
4. $t = 1-x_0$. Aquí tenemos dos posibilidades. Si $x = x_0$, como $y \in B_\varepsilon(y_0)$, se cumple que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(1-x_0) \in \pi_{1-x_0}(U)$. Si $x < x_0$, entonces $1-x > 1-x_0$ y, por tanto, $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = f(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, 0[\big)(t) \in \pi_t(U)$.

(iii) Si $y_0 = 1$ y $x_0 \in (0,1)$, sea $\delta \in (0, 1-x_0)$ tal que $(B_\delta(1-x_0) \setminus \{1-x_0\}) \cap \{t_1, \ldots, t_n\} = \emptyset$. Definimos $V = \big(]x_0, 1-\varepsilon[, ]x_0+\delta, 0[\big)$, entonces $]x_0, y_0[ = ]x_0, 1[ \in V$. Sea $]x, y[ \in V$, entonces $x_0 \leq x < x_0 + \delta$ y $1 - x_0 \geq 1 - x > 1 - x_0 - \delta$. Dada $t \in [0,1]$, consideramos cuatro posibilidades:

1. $t \in [0, 1-x_0-\delta]$. Como $1-x > 1-x_0-\delta$, se sigue que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = f(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, 1[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
2. $t \in (1-x_0, 1]$. Como $1-x \leq 1-x_0$, tenemos que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = g(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, 1[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
3. $t \in (1-x_0-\delta, 1-x_0)$. Como $(1-x_0-\delta, 1-x_0) \cap \{t_1, \ldots, t_m\} = \emptyset$, resulta que $\pi_t(U) = [0,1]$ y, por tanto, que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) \in \pi_t(U)$.

4. $t = 1 - x_0$. Aquí tenemos dos posibilidades. Si $x = x_0$, como $y \in B_\varepsilon(1)$, se cumple que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(1-x_0) \in \pi_{1-x_0}(U)$. Si $x > x_0$, entonces $1-x < 1 - x_0$ y, por tanto, $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = g(t) = \beta_{f,g}\big(]x_0, 1[\big)(t) \in \pi_t(U)$.

(iv) Si $y_0 = 1$ y $x_0 = 0$, tenemos que $1 - x_0 = 1$. Sea $\delta \in (0, 1)$ tal que $[1-\delta, 1] \cap \{t_1, \ldots, t_n\} = \emptyset$. Definimos $V = \big[]0, 1[, ]\delta, 0[\big)$, entonces $]x_0, y_0[ = ]0, 1[ \in V$. Sea $]x, y[ \in V$, entonces $0 \leq x \leq \delta$. Dada $t \in [0, 1]$, consideramos tres posibilidades: :

1. $t \in [0, 1-\delta)$. Como $1-x > 1-\delta$, se cumple que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) = f(t) = \beta_{f,g}\big(]0, 1[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
2. $t \in [1 - \delta, 1)$. Como $[1 - \delta, 1) \cap \{t_1, \ldots, t_m\} = \emptyset$, tenemos que $\pi_t(U) = [0, 1]$ y, por tanto, se cumple que $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(t) \in \pi_t(U)$.
3. $t = 1$. En este caso, como $f(1) = g(1)$, $\beta_{f,g}\big(]x, y[\big)(1) = g(1) = \beta_{f,g}\big(]0, 1[\big)(t) \in \pi_t(U)$.

(v) Si $y_0 = 1$ y $x_0 = 1$, definimos $V = \big(]1, 1-\varepsilon[, ]1, 1[\big]$. Luego, $]x_0, y_0[ = ]1, 1[ \in V$. Sea $]x, y[ \in V$, entonces $x = 1$ y $y \in B_\varepsilon(1)$. Como $1 - x = 0$, para cada $t \in (0, 1]$, se cumple que $\beta_{f,g}\big(]1, y[\big)(t) = g(t) = \beta_{f,g}\big(]1, 1[\big)(t) \in \pi_t(U)$. Además, como $y \in B_\varepsilon(1)$, tenemos que $\beta_{f,g}\big(]1, y[\big)(0) \in \pi_0(U)$.

Con esto hemos probado que $\beta_{f,g}$ es una función continua.

Veamos que $\beta_{f,g}$ preserva el orden. Sean $]x_1, y_1[, ]x_2, y_2[ \in J$ tales que $]x_1, y_1[ < ]x_2, y_2[$. En el caso en que $x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2$, tenemos que $x_1 > 0$ y

$$\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 - x_1, \\ (g(t) - f(t))(y_2 - y_1), & \text{si } t = 1 - x_1, \\ 0, & \text{si } t > 1 - x_1. \end{cases}$$

Como $x_1 > 0$, $g(1-x_1) - f(1-x_1) > 0$. Dado que $y_2 - y_1 > 0$, resulta que, para toda $t \in [0, 1]$

$$\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) \geq 0.$$

Además,

$$\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(1 - x_1) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(1 - x_1) > 0.$$

Por lo tanto, $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big) > \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)$.

En el caso en que $x_1 < x_2$, tenemos que $x_2 > 0$. Dada $t \in [0, 1]$, hay cinco posibilidades que considerar:

(a) $t < 1 - x_2$. En este caso $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) = f(t) = \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t)$, así que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = 0$.

(b) $t = 1 - x_2$. En este caso $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) = f(t) + y_2[g(t) - f(t)]$, y $\beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = f(t)$, así que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = f(t) + y_2[g(t) - f(t)] - f(t) = y_2[g(t) - f(t)] \geq 0$.

(c) $1 - x_2 < t < 1 - x_1$. En este caso $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) = g(t)$, y además $\beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = f(t)$, así que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = g(t) - f(t) > 0$.

(d) $t = 1 - x_1$. En este caso $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) = g(t)$, y $\beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = f(t) + y_1[g(t) - f(t)]$, así que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = g(t) - f(t) - y_1[g(t) - f(t)] = [1 - y_1][g(t) - f(t)] \geq 0$.

(e) $t > 1 - x_1$. En este caso $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) = g(t) = \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t)$, así que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = 0$.

Definimos

$$k_1 = (1 - y_1)(g(1 - x_1) - f(1 - x_1)) \text{ y } k_2 = y_2(g(1 - x_2) - f(1 - x_2)).$$

En resumen, tenemos que

$$\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 - x_2, \\ k_2, & \text{si } t = 1 - x_2, \\ g(t) - f(t), & \text{si } 1 - x_2 < t < 1 - x_1, \\ k_1, & \text{si } t = 1 - x_1, \\ 0, & \text{si } t > 1 - x_1. \end{cases}$$

Como ya vimos, $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(t) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(t) \geq 0$.

Además, como $x_2 > x_1 \geq 0$, tenemos que existe $x_3 \in (x_1, x_2)$ tal que $x_3 > 0$. Como $1 - x_3 < 1$, $g(1 - x_3) > f(1 - x_3)$. Dado que $1 - x_3 > 1 - x_2$, se sigue que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(1 - x_3) = g(1 - x_3)$; además, como $1 - x_1 > 1 - x_3$, resulta que $\beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(1 - x_3) = f(1 - x_3)$. Por lo anterior,

$$\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big)(1 - x_3) - \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)(1 - x_3) = g(1 - x_3) - f(1 - x_3) > 0.$$

En este caso, también podemos concluir que $\beta_{f,g}\big(]x_2, y_2[\big) > \beta_{f,g}\big(]x_1, y_1[\big)$.

Hasta aquí hemos probado que la función $\beta_{f,g}$ es continua e inyectiva (pues preserva el orden). Dado que $\beta_{f,g}$ es una función de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, tenemos que es un encaje.

(b) Aplicando el Lema 3.49, $L(\beta_{f,g}([J]))$ es un arco ordenado de $L\big(\beta_{f,g}\big(]0,1[\big)\big) = L(f)$ a $L\big(\beta_{f,g}\big(]1,1[\big)\big) = L(g)$; además, como $\beta_{f,g}$ es un encaje, $L(\beta_{f,g}(J))$ es homeomorfo al intervalo $J$ que, por el Lema 3.58, no es metrizable.

■

En seguida probaremos que los únicos niveles de Whitney en el hiperespacio de subcontinuos del espacio de Helly son los triviales.

**3.60 Teorema.** *Sea $X$ el espacio de Helly. El hiperespacio $C(X)$ no tiene niveles de Whitney no triviales.*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que existe un nivel de Whitney no trivial $\mathcal{W}$ en $C(X)$. Obtendremos una contradicción al Teorema 3.22. Por el Lema 3.51 sabemos que la función $\gamma$ es continua y preserva el orden. Aplicando el Lema 3.49 tenemos que $L(\gamma([0,1]))$ es un arco ordenado de $L(\gamma(0)) = \{\gamma(0)\}$ a $L(\gamma(1)) = X$; es decir, es un arco ordenado largo.

Dado que $\mathcal{W}$ cumple con la condición (b) en la Definición 3.1, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $L(\gamma(x_0)) \in \mathcal{W} \cap L(\gamma([0,1]))$. Como $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial, tenemos que $0 < x_0 < 1$.

**Afirmación 1.** Existe $x_1 \in (x_0, 1)$ tal que $L(\delta(x_1)) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

Por el Lema 3.53 sabemos que la función $\delta$ es continua. Como $\gamma(x_0) \in L(\gamma(x_0)) \setminus L(\delta(x_0))$ y $L(\gamma(x_0)) \in \mathcal{W}$, tenemos que $L(\delta(x_0)) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ es cerrado en $C(X)$ y la función $L \circ \delta$ es continua, existe $\eta > 0$ tal que $(x_0 - \eta, x_0 + \eta) \subset (0,1)$ y $L(\delta(x)) \notin \mathcal{W}$ para ninguna $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$. Sea $x_1 \in (x_0, x_0 + \eta)$. Entonces $L(\delta([x_0, x_1]))$ es un subespacio conexo de $C(X) \setminus \mathcal{W} = (L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}) \cup (M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W})$, como estos uniendos dan una separación de $C(X) \setminus \mathcal{W}$ y $L(\delta(x_0)) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$, tenemos que $L(\delta([x_0, x_1])) \subset L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$. Por tanto, $L(\delta(x_1)) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

Definimos $f = \delta(x_1)$; acabamos de probar que $L(f) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$. Sea $g = \gamma(x_1)$. Observemos que $\gamma(x_0) < g$ y, por tanto, $L(g) \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$. Por otra parte, las funciones $f$ y $g$ cumplen que $f < g$. Consideremos la función $\alpha_{f,g}$ de la Definición 3.54.

**Afirmación 2.** Existe $x_2 \in (0, x_1)$ tal que $L(\alpha_{f,g}(x_2)) \in \mathcal{W}$.

Observemos que $f(0) = 0 < x_1 = g(0)$. Como $\alpha_{f,g}(0) = f$ y $\alpha_{f,g}(x_1) = g$, el

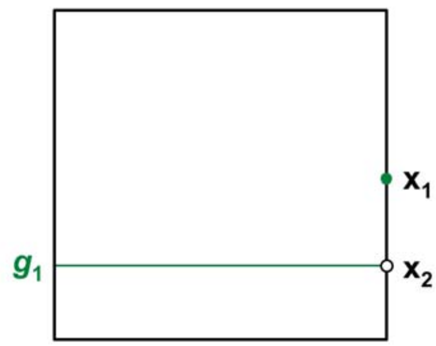


Figura 3.4: La función $g_1 = \alpha_{f,g}(x_2)$.

Lema 3.56 nos dice que $L(\alpha_{f,g}([0, x_1]))$ es un arco ordenado de $L(f)$ a $L(g)$. Como $L(f) \in L(\mathcal{W})\setminus\mathcal{W}$ y $L(g) \in M(\mathcal{W})\setminus\mathcal{W}$, el Lema 3.7(b) nos dice que existe $x_2 \in (0, x_1)$ tal que $L(\alpha_{f,g}(x_2)) \in \mathcal{W} \cap L(\alpha_{f,g}([0, x_1]))$.

Notemos que

$$\alpha_{f,g}(x_2) = \begin{cases} x_2, & \text{si } t < 1, \\ x_1, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Observemos que las funciones $f$ y $g$ cumplen que $f(1) = g(1) = x_1$ y $f(t) = 0 < x_1 = g(t)$ para toda $t \in [0, 1)$. Consideremos la función $\beta_{f,g}$ que está definida del subcontinuo del lexicográfico $J = \big[]0, 1[, ]1, 1[\big]$ a $X$.

**Afirmación 3.** Existe $]r_0, s_0[ \, \in \big(]0, 1[, ]1, 1[\big]$ tal que $L\big(\beta_{f,g}\big(]r_0, s_0[\big)\big) \in \mathcal{W}$ (en particular $r_0 > 0$).

Por el Lema 3.59 tenemos que $L(\beta_{f,g}(J))$ es un arco ordenado de $L(f)$ a $L(g)$. Dado que $L(f) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$ y $L(g) \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$, el Lema 3.7(b) nos dice que existe $]r_0, s_0[ \, \in \big(]0, 1[, ]1, 1[\big]$ tal que $L\big(\beta_{f,g}\big(]r_0, s_0[\big)\big) \in \mathcal{W} \cap L(\beta_{f,g}(J))$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 3.

Ya que $]r_0, s_0[ \, \neq \, ]0, 1[$, tenemos que $0 < r_0$, así que

$$\beta_{f,g}\big(]r_0, s_0[\big) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 - r_0, \\ s_0 x_1, & \text{si } t = 1 - r_0, \\ x_1, & \text{si } 1 - r_0 < t \leq 1. \end{cases}$$

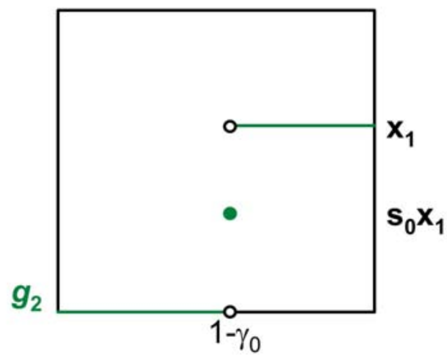


Figura 3.5: La función $g_2 = \beta_{f,g}\big(]r_0, s_0[\big)$.

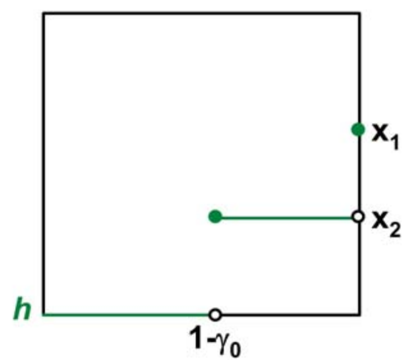


Figura 3.6: La función $h$.

Definimos $g_1 = \alpha_{f,g}(x_2)$, $g_2 = \beta_{f,g}\big(]r_0, s_0[\big)$ y $h : [0,1] \to [0,1]$ de la siguiente manera

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 - r_0, \\ \text{mín}(x_2, s_0 x_1), & \text{si } t = 1 - r_0, \\ x_2, & \text{si } 1 - r_0 < t < 1, \\ x_1, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

**Afirmación 4.** $L(g_1) \cap L(g_2) = L(h)$.

Observemos que $h(t) = \text{mín}\{g_1(t), g_2(t)\}$ y que $h < g_2$. Por el Lema 3.47 tenemos que $L(g_1) \cap L(g_2) = L(h)$.

**Afirmación 5.** En $C(X)$, existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ de $L(h)$ a $L(g_1)$ que es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Como $h \leq g_1$ y $h(0) = 0 < x_2 = g_1(0)$, tenemos que $h < g_1$. Consideremos la función $\alpha_{h,g_1}$. Dado que $\alpha_{h,g_1}(0) = h$ y $\alpha_{h,g_1}(x_2) = g_1$, el Lema 3.56 nos dice que $\mathcal{A} = L(\alpha_{h,g_1}([0,x_2]))$ es un arco ordenado de $L(h)$ a $L(g_1)$ que es homeomorfo al intervalo $[0,x_2]$. Como $x_2 > 0$, tenemos que $\mathcal{A}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

**Afirmación 6.** En $C(X)$, existe un arco ordenado de $L(h)$ a $L(g_2)$ que es no metrizable.

Primero encontraremos un arco ordenado $\mathcal{B}$ tal que $\{L(h), L(g_2)\} \subset \mathcal{B}$ y el arco ordenado $[L(h), L(g_2)]_{\mathcal{B}}$ es homeomorfo a $J$. Notemos que $h(1) = x_1 = \gamma(x_1)(t)$, $h \circ \gamma(x_1)(t) = h(x_1) \leq x_2 < x_1 \leq \gamma(x_1)(t)$ y $h(\gamma(x_1)) \leq x_2 < x_1 = \gamma(x_1)$ para toda $t \in [0,1)$. Consideremos la función $\beta_{h,\gamma(x_1)}$. Como $\beta_{h,\gamma(x_1)}(]0,1[) = h$ y $\beta_{h,\gamma(x_1)}(]1,1[) = \gamma(x_1)$, el Lema 3.59 nos dice que $\mathcal{B} = L(\beta_{h,\gamma(x_1)}(J))$ es un arco ordenado de $L(h)$ a $L(\gamma(x_1))$ que es homeomorfo al intervalo $J$.

Dado que $x_1 > x_2 \geq h(1-r_0)$, podemos definir

$$s_1 = \frac{s_0 x_1 - h(1-r_0)}{x_1 - h(1-r_0)}.$$

Como $0 \leq h(1-r_0) \leq s_0 x_1 < 1$, tenemos que $s_1 \in [0,1]$ y, además,

$$\beta_{h,\gamma(x_1)}(]r_0, s_1[) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 - r_0, \\ h(1-r_0) + s_1[x_1 - h(1-r_0)], & \text{si } t = 1 - r_0, \\ x_1, & \text{si } 1 - r_0 < t \leq 1; \end{cases}$$

como $h(1-r_0) + s_1[x_1 - h(1-r_0)] = s_0 x_1$, tenemos que $\beta_{h,\gamma(x_1)}(]r_0, s_1[) = g_2$, así que $L(g_2) \in \mathcal{B}$. Luego, $[L(h), L(g_2)]_{\mathcal{B}}$ es un arco ordenado de $L(h)$ a $L(g_2)$ que es homeomorfo a un segmento inicial no trivial de $J$ (pues $L(h) < L(g_2)$) y, de acuerdo con el Lema 3.58, es no metrizable. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 6.

Por las Afirmaciones 2 y 3 sabemos que $\{L(g_1), L(g_2)\} \in \mathcal{W}$. De acuerdo con la Afirmación 4, sabemos que $L(g_1) \cap L(g_2) = L(h)$. La Afirmación 5 nos dice que existe un arco ordenado de $L(h)$ a $L(g_1)$ que es metrizable, mientras que la Afirmación 6 nos dice que existe un arco ordenado de $L(h)$ a $L(g_2)$ que no es metrizable, lo que contradice el Teorema 3.22. Por lo anterior, podemos concluir que no existen niveles de Whitney no triviales en $C(X)$. ■

### 3.1.3 El cuadrado de Alexandroff

En esta sección probaremos que el hiperespacio de subcontinuos del cuadrado de Alexandroff no tiene niveles de Whitney no triviales. Para ello, comenzaremos construyendo un arco ordenado largo en el hiperespacio de subcontinuos del cuadrado de Alexandroff que sea metrizable.

**3.61 Definición.** Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. Definimos la función $F : [0,1] \to X$ como aquella que, a cada elemento $t \in [0,1]$, le asigna el subcontinuo $A_t$ según se definió en las Proposiciones 1.12 y 1.13.

**3.62 Lema.** *Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. El conjunto $F([0,1])$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{]1,1[\}$ y es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.*

*Demostración.* Primero probaremos que la función $F$ preserva el orden.

**Afirmación 1.** Dados $t_1$ y $t_2 \in [0,1]$ tales que $t_1 < t_2$, entonces $F(t_1) \subsetneq F(t_2)$.

Tenemos tres posibilidades:

1. Si $t_1 < t_2 \leq \frac{1}{2}$, como $1 - 2t_1 > 1 - 2t_2$, resulta que $A_{t_1} \subsetneq A_{t_2}$.
2. Si $t_1 < \frac{1}{2} < t_2$, entonces, por la definición de $A_{t_2}$, tenemos que $A_{\frac{1}{2}} \subsetneq A_{t_2}$. Además, $A_{\frac{1}{2}} = \{]x,y[ \in X : x \geq y\}$, así que $A_{t_1} \subsetneq A_{\frac{1}{2}}$.
3. Si $\frac{1}{2} \leq t_1 < t_2$, como $2t_2 - 1 > 2t_1 - 1$, resulta que $A_{t_1} \subsetneq A_{t_2}$.

Con esto hemos completado la prueba de la Afirmación 1.

Ahora probaremos que la función $F$ es continua. Fijemos un elemento $t_0 \in [0,1]$ y consideremos una vecindad abierta básica $\mathcal{U}$ de $F(t_0)$ en $C(X)$; podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap C(X)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es abierto básico para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vamos a encontrar una vecindad abierta básica $V$ de $t_0$ en $[0,1]$ tal que $F(V) \subset \mathcal{U}$.

Si $t_0 \leq \frac{1}{2}$, definimos

$$I_{t_0} = \{]x,y[ \in X : y = 1 - 2t_0 \text{ y } x \geq y\}.$$

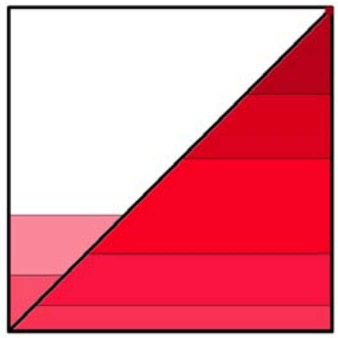

Figura 3.7: Algunos elementos del arco ordenado $F\big([0,1]\big)$.

Si $t_0 > \frac{1}{2}$, definimos

$$I_{t_0} = \{]x, y[\, \in X : y = 2t_0 - 1 \text{ y } x \leq y\}.$$

Consideremos el conjunto

$$P_\delta(t_0) = \{]x, y[\, \in X : \text{existe } ]x_0, y_0[\, \in I_{t_0} \text{ tal que } x \in B_\delta(x_0) \text{ y } y \in B_\delta(y_0)\}.$$

**Afirmación 2.** Existe $\delta > 0$ tal que $P_\delta(t_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y en el caso en que $t_0 < \frac{1}{2}$, $\delta < \frac{1}{2} - t_0$.

Sea $]y_0, y_0[$ en $I_{t_0} \cap \Delta$. Como $I_{t_0} \subset A_{t_0}$ y $A_{t_0} \in \mathcal{U}$, tenemos que $I_{t_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $]y_0, y_0[\, \in U_{i_0}$. Como $U_{i_0}$ es un abierto en $X$, tenemos que existe una vecindad abierta básica $V_\varepsilon\big(]y_0, y_0[, S\big)$ de $]y_0, y_0[$ que está contenida en $U_{i_0}$, donde $S$ es un subconjunto finito de $[0,1]$. Dado que $S$ es un conjunto finito y $y_0 \notin S$, existe $\delta_0 \in (0, \varepsilon)$ tal que $B_{\delta_0}(y_0) \cap S = \emptyset$. Notemos que

$$\big[B_{\delta_0}(y_0) \times B_{\delta_0}(y_0)\big] \cup \big[(I_{t_0} \setminus S) \times B_{\delta_0}(y_0)\big] \subset V_\varepsilon\big(]y_0, y_0[, S\big) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Supongamos que $S \cap I_{t_0} = \{t_1, \ldots, t_m\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $(t_j, y_0) \in A_{t_0}$, así que existe $i_j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(t_j, y_0) \subset U_{i_j}$. Sea $\delta_j > 0$ tal que $\{t_j\} \times B_{\delta_j}(y_0) \subset U_{i_j}$. Definimos $\delta = \text{mín}\{\delta_{i_j} : j \in \{1, \ldots, m\}\} \cup \{\delta_0\}$. Como $I_{t_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, tenemos que

$$S \times B_\delta(y_0) \subset V_\epsilon(]y_0, y_1[, S) \cup \bigcup \{U_{j_i} : j \in \{1, \ldots, m\}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Luego, $P_\delta(t_0) = \big[B_\delta(y_0) \times B_\delta(y_0)\big] \cup \big[I_{t_0} \times B_\delta(y_0)\big] \subset \big[B_{\delta_0}(y_0) \times B_{\delta_0}(y_0)\big] \cup \big[(I_{t_0} \setminus S) \times B_{\delta_0}(y_0)\big] \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. En el caso en que $t_0 < \frac{1}{2}$, modificamos $\delta$ para que $\delta < \frac{1}{2} - t_0$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2.

**Afirmación 3.** Si $t \in B_{\frac{\delta}{2}}(t_0)$, entonces $A_t \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

En el caso en que $t \leq t_0$, por la Afirmación 1 tenemos que $A_t \subset A_{t_0} \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. En el caso en que $t > t_0$, como $A_{t_0} \subset A_t$, lo que necesitamos probar es que $A_t \setminus A_{t_0} \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Vamos a probar que $A_t \setminus A_0 \subset P_\delta(t_0)$. Sean $]x, y[ \in A_t \setminus A_{t_0}$ y $]y_0, y_0[ \in I_{t_0} \cap \Delta$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $t_0 < \frac{1}{2}$, sabemos que $\delta < \frac{1}{2} - t_0$ y, por tanto, que $t < \frac{1}{2}$. Notemos que $y_0 = 1 - 2t_0$. Como $|t - t_0| < \frac{\delta}{2}$, $y \geq 1 - 2(t_0 + \frac{\delta}{2}) = 1 - 2t_0 - \delta = y_0 - \delta$; dado que $y < y_0$ (pues $]x, y[ \notin A_{t_0}$), resulta que $|y - y_0| < \delta$. En el caso en que $x \geq y_0$, tenemos que $]x, y_0[ \in I_{t_0}$; como $y \in B_\delta(y_0)$, $]x, y[ \in P_\delta(t_0)$. En el caso en que $x < y_0$, como $x \geq y \geq y_0 - \delta$ resulta que $|x - y_0| < \delta$, así que $]x, y[ \in B_\delta(y_0) \times B_\delta(y_0) \subset P_\delta(t_0)$.

2. Si $\frac{1}{2} \geq t_0$, entonces $y_0 = 2t_0 - 1$. Como $|t - t_0| < \frac{\delta}{2}$, $y \leq 2(t_0 + \frac{\delta}{2}) - 1 = 2t_0 - 1 + \delta = y_0 + \delta$; dado que $y > y_0$ (pues $]x, y[ \notin A_{t_0}$), se tiene que $|y - y_0| < \delta$. Si $x \leq y_0$, entonces $]x, y_0[ \in I_{t_0}$; como $y \in B_\delta(y_0)$, $]x, y[ \in P_\delta(t_0)$. Si $x > y_0$, entonces $x < y$ (pues $A_{\frac{1}{2}} \subset A_{t_0}$ y $]x, y[ \notin A_{t_0}$). Como $y \leq y_0 + \delta$, se sigue que $|x - y_0| < \delta$, así que $]x, y[ \in B_\delta(y_0) \times B_\delta(y_0) \subset P_\delta(t_0)$.

Hemos probado que $A_t \setminus A_0 \subset P_\delta(t_0)$. Por la elección de $\delta$, la Afirmación 2 implica que $A_t \setminus A_{t_0} \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, como queríamos probar. Con esto hemos completado la prueba de la Afirmación 3.

**Afirmación 4.** Si $t_0 > 0$, existe una vecindad abierta $W_{t_0}$ de $t_0$ en $[0, 1]$ tal que $A_t \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $t \in W_{t_0}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos $]x_i, y_i[ \in U_i \cap A_{t_0}$ de forma que $]x_i, y_i[ \notin I_{t_0}$. Vamos a encontrar $t_i \in [0, t_0)$ tal que $]x_i, y_i[ \in A_{t_i}$. Tenemos dos posibilidades:

1. En el caso en que $t_0 \leq \frac{1}{2}$, tenemos $x_i \geq y_i$. Al definir $t_i = \frac{1 - y_i}{2}$, resulta que $1 - 2t_i = y_i$, así que $]x_i, y_i[ \in A_{t_i}$. Como $]x_i, y_i[ \in A_{t_0} \setminus I_{t_0}$, se tiene $y_i > 1 - 2t_0$, de donde $t_i < \frac{1 - (1 - 2t_0)}{2} = t_0$.

2. En el caso en que $t_0 > \frac{1}{2}$, si $x_i \geq y_i$, entonces $]x_i, y_i[\, \in A_{\frac{1}{2}}$; definiendo $t_i = \frac{1}{2}$, tenemos que $t_i < t_0$. Si $x_i < y_i$, al definir $t_i = \frac{y_i+1}{2}$ resulta que $2t_i - 1 = y_i$, de donde $]x_i, y_i[\, \in A_{t_i}$. Como $]x_i, y_i[\, \in A_{t_0} \setminus I_{t_0}$, se sigue que $y_i < 2t_0 - 1$, así que $t_i < \frac{(2t_0-1)+1}{2} = t_0$.

Dado que $t_i < t_0$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la Afirmación 1, implica que $A_{t_i} \subset A_{t_0}$. Sea $t' = \text{máx}(\{t_1, \ldots, t_n\})$; como $t_i \in (0, t_0)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, resulta que $t' < t_0$. Definimos $W_{t_0} = (t', 1]$ Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $t \in W_{t_0}$, tenemos que $t_i \leq t' < t$; de acuerdo con la Afirmación 1, $A_{t_i} \subset A_t$, así que $]x_i, y_i[\, \in A_t \cap U_i$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 4.

**Afirmación 5.** Si $t_0 = 0$ y $V$ es una vecindad abierta de $t_0$ en $[0, 1]$, entonces $A_t \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $t \in V$.

Como $A_0 \in \mathcal{U}$, tenemos que $A_0 \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado $t \in V$, $A_0 \subset A_t$, así que $A_t \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lo anterior completa la prueba de la Afirmación 5.

Si $t_0 = 0$, definimos $V = B_{\frac{\delta}{2}}(0)$. De las Afirmaciones 3 y 5 se sigue que $F(V) \subset \mathcal{U}$. Si $t_0 > 0$, definimos $V = B_{\frac{\delta}{2}}(t_0) \cap W_{t_0}$. Como consecuencia de las Afirmaciones 3 y 4, tenemos que $F(V) \subset \mathcal{U}$. De esta forma, podemos concluir que la función $F$ es continua.

Hasta aquí hemos probado que la función $F$ es continua e inyectiva (pues preserva orden). Dado que $F$ es una función definida de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, tenemos que $F$ es un encaje.

Aplicando el Lema 3.49 obtenemos que $F([0, 1])$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $F(0) = \{]1, 1[\}$ a $F(1) = X$; es decir, un arco ordenado largo que empieza en $\{]1, 1[\}$; además, como $F$ es un encaje, $F([0, 1])$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

■

A continuación construiremos un arco ordenado largo no metrizable en el hiperespacio de subcontinuos del cuadrado de Alexandroff.

**3.63 Definición.** Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. En el cuadrado lexicográfico considere el intervalo $J = \big[]0, 1[, ]1, 1[\big]$. Definimos la función $G : J \to C(X)$ como aquella que, a cada elemento $]x, y[\, \in J$, le asigna el subcontinuo $B_{]1-x, 1-x+xy[}$ que se definió en la Proposición 1.14.

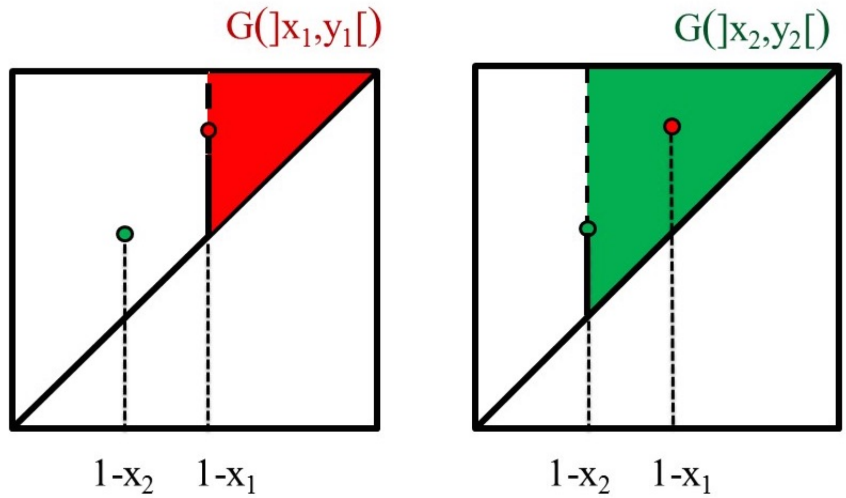


Figura 3.8: $G(]x_1, y_1[)$ y $G(]x_2, y_2[)$ cuando $x_1 < x_2$.

Observemos que, dado que $0 \leq 1 - x \leq 1 - x + xy \leq 1$, la función $G$ está bien definida. Además resulta continua, como podemos ver en el siguiente lema.

**3.64 Lema.** *Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. En el cuadrado lexicográfico, considere el intervalo $J = [\,]0, 1[, ]1, 1[\,]$. El conjunto $G(J)$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $]1, 1[$ a $\{]x, y[ \in X : x \leq y\}$ y es homeomorfo al intervalo $J$.*

*Demostración.* Primero argumentaremos que la función $G$ preserva el orden.

**Afirmación 1.** Dados $]x_1, y_1[$ y $]x_2, y_2[ \in J$ tales que $]x_1, y_1[ < ]x_2, y_2[$, se tiene que $G(]x_1, y_1[) \subsetneq G(]x_2, y_2[)$.

Tenemos dos posibilidades:

1. Si $x_1 < x_2$, entonces $1 - x_2 < 1 - x_1$. Por la definición de $G$ tenemos que $G(]x_1, y_1[) = B_{]1-x_1, 1-x_1+x_1y_1[}$ y $G(]x_2, y_2[) = B_{]1-x_2, 1-x_2+x_2y_2[}$. Esta situación debe ser semejante a la que se ilustra en la Figura 3.8, de donde es fácil convencerse de que $G(]x_1, y_1[) \subsetneq G(]x_2, y_2[)$.

2. Si $x_1 = x_2$, entonces $y_1 < y_2$. Luego, tenemos que $1 - x_1 + x_1y_1 < 1 - x_1 + x_1y_2$. Por la definición de $G$ tenemos que $G(]x_1, y_1[) = B_{]1-x_1, 1-x_1+x_1y_1[}$ y $G(]x_2, y_2[) = B_{]1-x_2, 1-x_2+x_2y_2[} = B_{]1-x_1, 1-x_1+x_1y_2[}$. Esta situación debe ser

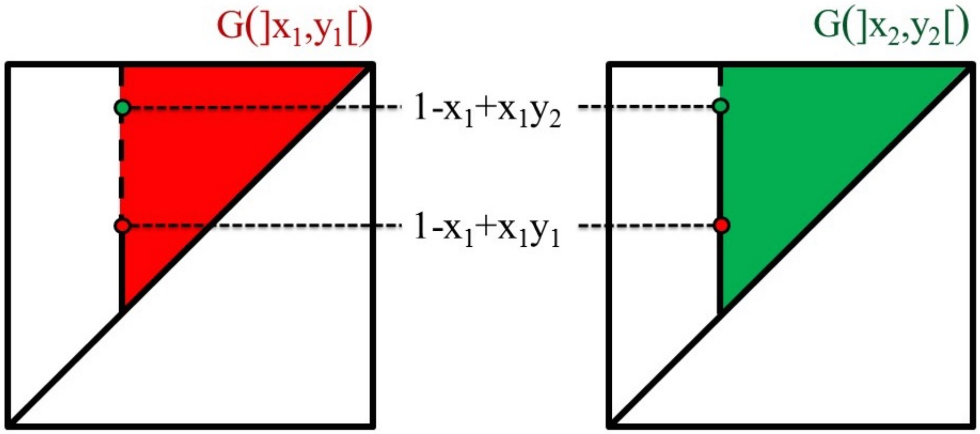


Figura 3.9: $G\big(]x_1, y_1[\big)$ y $G\big(]x_2, y_2[\big)$ cuando $x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2$.

semejante a la que se ilustra en la Figura 3.9, de donde es fácil convencerse de que $G\big(]x_1, y_1[\big) \subsetneq G\big(]x_2, y_2[\big)$.

Ahora probaremos que la función $G$ es continua. Fijemos un elemento $]x_0, y_0[ \in J$ y consideremos una vecindad abierta básica $\mathcal{U}$ de $G\big(]x_0, y_0[\big)$ en $C(X)$. Podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1 \ldots, U_m, U_{m+1}, \ldots, U_n\rangle \cap C(X)$ donde $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, $U_i$ es un abierto básico para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $U_i \cap \Delta \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $U_i \cap \Delta = \emptyset$ para cada $i \in \{m+1, \ldots, n\}$. Vamos a encontrar una vecindad abierta básica $V$ de $]x_0, y_0[$ en $J$ tal que $G(V) \subset \mathcal{U}$.

**Afirmación 2.** Si $y_0 < 1$, existe $y_1 \in (y_0, 1)$ tal que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ para todo $]x, y[ \in \big[]0, 1[, ]x_0, y_1[\big]$.

Encontraremos $y_1 \in (y_0, 1)$ tal que $G(]x_0, y_1[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Sean $r_0 = 1 - x_0$ y $s_0 = 1 - x_0 + x_0 y_0$. Como $]r_0, s_0[ \in G(]x_0, y_0[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, entonces $\{i \in \{1, \ldots, n\} : ]r_0, s_0[ \in U_i\} \neq \emptyset$. Además, como cada $U_i$ es un abierto básico de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\delta \in (0, 1 - y_0)$ tal que

$$\{r_0\} \times B_\delta\big(]r_0, s_0[\big) \subset \bigcap \{U_i : i \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } ]r_0, s_0[ \in U_i\}.$$

Definimos $y_1 = y_0 + \frac{\delta}{2}$. Sea $]r, s[ \in G(]x_0, y_1[)$. Dado que $]x_0, y_0[ < ]x_0, y_1[$, la Afirmación 1 nos dice que $G\big(]x_0, y_0[\big) \subset G\big(]x_0, y_1[\big)$. En el caso en que $]r, s[ \in$

$G(]x_0, y_0[)$, como $G(]x_0, y_0[) \in \mathcal{U}$, tenemos que $]r, s[ \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. En el caso de que $]r, s[ \notin G(]x_0, y_0[)$, resulta que $]r, s[ \in \{x_0\} \times B_\delta\big(]r, s[\big) \subset \bigcup\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}$ y $]r, s[ \in U_i\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Hemos probado que $G\big(]x_0, y_1[\big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por la Afirmación 1 podemos concluir que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ para todo $]x, y[ \in \big[]0, 1[, ]x_0, y_1[\big]$.

**Afirmación 3.** Si $y_0 = 1$, existe un elemento $]x_1, y_1[ \in \big(]x_0, y_0[, ]1, 1[\big]$ tal que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ para todo $]x, y[ \in \big[]0, 1[, ]x_1, y_1[\big]$.

Encontraremos $]x_1, y_1[ \in \big(]x_0, y_0[, ]1, 1[\big]$ tal que $G(]x_1, y_1[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Sean $r_0 = 1 - x_0$ y $s_0 = 1 - x_0 + x_0 y_0 = 1$ (pues $y_0 = 1$).

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, como $U_i$ es un abierto básico y $U_i \cap \Delta \neq \emptyset$, existen $\varepsilon_i > 0$, $r_i \in [0, 1]$ y $S_i \subset [0, 1] \setminus \{r_i\}$ tales que $U_i = V_{\varepsilon_i}(]r_i, r_i[, S_i)$, donde $S_i$ es un conjunto finito. Como $S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i$ es finito, existe $\delta > 0$ tal que $[r_0 - \delta, r_0) \cap S = \emptyset$. Podemos suponer que $\delta$ cumple que $[r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \subset \bigcap\{U_i : ]r_0, s_0[ \in U_i\}$. Notemos que $[r_0 - \delta, r_0 + \delta] \times [r_0 - \delta, r_0 + \delta] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$

Sean $x_1 = x_0 + \delta$ y $y_1 = 0$. Dado que $]x_0, y_0[ < ]x_1, y_1[$, como resultado de la Afirmación 1 tenemos que $G\big(]x_0, y_0[\big) \subset G\big(]x_1, y_1[\big)$. Tomemos $]r, s[ \in G(]x_1, y_1[)$. En el caso en que $]r, s[ \in G(]x_0, y_0[)$, como $G(]x_0, y_0[) \in \mathcal{U}$, resulta que $]r, s[ \in \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. En el caso en que $]r, s[ \notin G(]x_0, y_0[)$, entonces $r \in [1 - x_1, 1 - x_0) = [r_0 - \delta, r_0)$. Como $s \geq r$, $s \geq r_0 - \delta$. Tenemos dos posibilidades:

1. $s < r_0$. En este caso $|s - r_0| < \delta$, así que $]r, s[ \in [r_0 - \delta, r_0) \times [r_0 - \delta, r_0) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.
2. $s \geq r_0$. En este caso $]s, s[ \in G(]x_0, y_0[) \cap \Delta$, así que existe $i' \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $]s, s[ \in U_{i'}$. Como $r \in [r_0 - \delta, r_0) \subset [0, 1] \setminus S$, $r \notin S_{i'}$ y, por lo tanto, $]r, s[ \in U_{i'} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$.

Hemos probado que $G\big(]x_1, y_1[\big) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por la Afirmación 1 podemos concluir que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ para todo $]x, y[ \in \big[]0, 1[, ]x_0, y_1[\big]$.

**Afirmación 4.** Si $]x_0, y_0[ > ]0, 1[$, existe una vecindad abierta $W_{]x_0, y_0[}$ de $]x_0, y_0[$ en $J$ tal que $G\big(]x, y[\big) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $]x, y[ \in W_{]x_0, y_0[}$.

Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $G(]x_0, y_0[) \in \mathcal{U}$ podemos elegir $]r_i', s_i'[ \in U_i \cap G(]x_0, y_0[)$. En el caso en que $r_i' < 1$ y $]r_i', s_i'[ \neq ]1 - x_0, 1 - x_0 + x_0 y_0[$, definimos $r_i = r_i'$ y $s_i = s_i'$. En el caso en que $r_i' = 1$, como $]r_i', s_i'[ \in G(]x_0, y_0[)$ tenemos que $]r_i', s_i'[ = ]1, 1[$. Dado que $U_i$ es abierto, existe $\nu \in \mathbb{R}^+$ tal que $\nu < x_0$ y $[1-\nu, 1] \times [1-\nu, 1] \subset U_i$; en este caso definimos $r_i = r_i' - \nu$ y $s_i = 1$. Claramente $]r_i, s_i[ \in U_i$. Notemos que $r_i > 1 - x_0$, así que $]r_i, s_i[ \in G(]x_0, y_0[)$. En el caso en que $]r_i', s_i'[ = ]1-x_0, 1-x_0+x_0y_0[$, tenemos dos posibilidades:

1. Si $s_i' > r_i'$, como $U_i$ es abierto existe $\nu \in \mathbb{R}^+$ tal que $\nu < s_i' - r_i'$ y $\{r_i'\} \times [s_i' - \nu, s_i'] \subset U_i$. Notemos que, como $s_i' - \nu > s_i' - (s_i' - r_i') = r_i'$, entonces $\{r_i'\} \times [s_i' - \nu, s_i'] \subset G(]x_0, y_0[)$. En este caso definimos $r_i = r_i'$ y $s_i = s_i' - \nu$. Claramente, $]r_i, s_i[ \in U_i$.

2. Si $s_i' = r_i'$, como $U_i$ es abierto existe $\nu \in \mathbb{R}^+$ tal que $[r_i', r_i' + \nu] \times [r_i', r_i' + \nu] \subset U_i$. En este caso definimos $r_i = r_i' + \nu$ y $s_i = r_i' + \nu$. Claramente, $]r_i, s_i[ \in U_i$. Como $r_i > r_i' = 1 - x_0$ y $s_i = r_i$, $]r_i, s_i[ \in G(]x_0, y_0[)$.

De esta forma, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ hemos elegido $]r_i, s_i[ \in U_i \cap G(]x_0, y_0[)$ de manera que $r_i < 1$ y $]r_i, s_i[ \neq ]1-x_0, 1-x_0+x_0y_0[$. Notemos que, o $r_i > 1 - x_0$, o bien $r_i = 1 - x_0$ y $s_i < 1 - x_0 + x_0y_0$. Definimos $x_i = 1 - r_i$ y $y_i = \frac{s_i - r_i}{1 - r_i}$; como $1 - x_i = r_i$ y $1 - x_i + x_iy_i = 1 - (1 - r_i) + (1 - r_i)\left(\frac{s_i - r_i}{1 - r_i}\right) = s_i$, de acuerdo con la definición de $G$, tenemos que $]r_i, s_i[ \in G(]x_i, y_i[)$. Hay dos opciones para considerar:

1. Si $r_i > 1 - x_0$, entonces $x_i < 1 - (1 - x_0) = x_0$.

2. Si $r_i = 1 - x_0$, entonces $x_i = x_0$. Además, como $s_i < 1 - x_0 + x_0y_0$, tenemos que $y_i < \frac{1 - x_0 + x_0y_0 - (1 - x_0)}{1 - (1 - x_0)} = \frac{x_0y_0}{x_0} = y_0$.

Hemos visto que, en cualquier caso, $]x_i, y_i[ < ]x_0, y_0[$. Definimos $]x', y'[ = \max\{]x_i, y_i[ : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Notemos que $]x', y'[ < ]x_0, y_0[$. Hacemos $W_{]x_0, y_0[} = \big(]x', y'[, ]1, 1[\big]$. Dados $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $]x, y[ \in \big(]x', y'[, ]1, 1[\big]$, tenemos que, $]x_i, y_i[ \leq ]x, y[$; de acuerdo con la Afirmación 1, $G\big(]x', y'[\big) \subset G(]x_i, y_i[) \subset G(]x, y[) \subset G\big(]x_0, y_0[\big)$, así que $]r_i, s_i[ \in G\big(]x, y[\big) \cap U_i$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 4.

**Afirmación 5.** Si $]x_0, y_0[ = ]0, 1[$ y $V$ es una vecindad abierta de $]x_0, y_0[$ en $J$, entonces $G\big(]x, y[\big) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para cada $]x, y[ \in V$.

Como $G(]0, 1[) \in \mathcal{U}$, tenemos que $G(]0, 1[) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado $]x, y[ \in V$, $G(]x, y[) \supset G(]0, 1[)$, así que $G(]x, y[) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para definir la vecindad $V$ de $]x_0, y_0[$, tenemos que considerar tres casos:

1. Si $]x_0, y_0[ = ]0,1[$, elegimos $]x_1, y_1[$ como en la Afirmación 3 y definimos $V = \big[]0,1[, ]x_1, y_1[\big)$. Dado $]x, y[ \in V$, por la Afirmación 5 sabemos que $G\big(]x, y[\big) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, por la elección de $]x_1, y_1[$, de la Afirmación 3 se sigue que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así, en este caso podemos concluir que $G(V) \subset \mathcal{U}$.

2. Si $]x_0, y_0[ > ]0,1[$ y $y_0 = 1$, elegimos $]x_1, y_1[$ como en la Afirmación 3 y definimos $V = \big[]0,1[, ]x_1, y_1[\big) \cap W_{]x_0,y_0[}$. Dado $]x, y[ \in V$, por la Afirmación 4 sabemos que $G\big(]x, y[\big) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, por la elección de $]x_1, y_1[$, de la Afirmación 3 se sigue que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así, en este caso podemos concluir que $G(V) \subset \mathcal{U}$.

3. Si $]x_0, y_0[ > ]0,1[$ y $y_0 < 1$, elegimos $y_1$ como en la Afirmación 2 y definimos $V = \big[]0,1[, ]x_0, y_1[\big) \cap W_{]x_0,y_0[}$. Dado $]x, y[ \in V$, por la Afirmación 4 sabemos que $G\big(]x, y[\big) \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Además, por la elección de $y_1$, de la Afirmación 2 se sigue que $G(]x, y[) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así, en este caso podemos concluir que $G(V) \subset \mathcal{U}$.

De esta forma, podemos concluir que la función $G$ es continua.

Hasta aquí hemos probado que la función $G$ es continua e inyectiva (pues preserva orden). Dado que $G$ es una función de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, tenemos que $G$ es un encaje.

Aplicando el Lema 3.49 obtenemos que $G(J)$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $G\big(]0,1[\big) = \{]1,1[\}$ a $G(]1,1[)$; además, como $G$ es un encaje, $G(J)$ es homeomorfo al intervalo $J$ que, por el Lema 3.58, no es metrizable.

■

Enseguida probaremos que los únicos niveles de Whitney en el hiperespacio de subcontinuos del cuadrado de Alexandroff son los triviales.

**3.65 Teorema.** *Sea $X$ el cuadrado de Alexandroff. El hiperespacio $C(X)$ no tiene niveles de Whitney no triviales.*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que existe un nivel de Whitney no trivial $\mathcal{W}$ en $C(X)$. Obtendremos una contradicción al Teorema 3.22 encontrando dos subcontinuos distintos $A$ y $B$ de $X$ tales que $A \cap B \in C(X)$, y dos arcos ordenados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $C(X)$ de $A \cap B$ a $A$ y a $B$, respectivamente, tales que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ no son homeomorfos. Para encontrar dichos subcontinuos $A$ y $B$ nos auxiliaremos de dos arcos ordenados en $C(X)$, uno homeomorfo al intervalo $[0,1]$ y el otro no metrizable.

Por el Lema 3.62 tenemos que $F([0,1])$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{]1,1[\}$ y es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Como $\mathcal{W}$ cumple con la condición (b) en la Definición 3.1, se sigue que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $F(t_0) \in F([0,1]) \cap \mathcal{W}$; dado que $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial resulta que $t_0 \in (0,1)$.

En el cuadrado lexicográfico, sea $J = \big[]0,1[,]1,1[\big]$. Por el Lema 3.64, tenemos que $G(J)$ es un arco ordenado en $C(X)$ de $\{]1,1[\}$ a $G\big(]1,1[\big)$ que es homeomorfo a $J$. El arco ordenado $G(J)$ puede completarse a un arco ordenado largo $\mathcal{C}_0$; dado que $\mathcal{W}$ cumple con la condición (b) en la Definición 3.1, se sigue que existe $C \in \mathcal{W} \cap \mathcal{C}_0$. Como $\mathcal{W}$ es un nivel de Whitney no trivial, resulta que $\{]1,1[\} \subsetneq C$.

Por el Corolario 2.20, $\mathcal{C}_0$ es un arco generalizado, así que $C_0$ cumple con la condición (b) en la Definición 1.3 y, por tanto, existe $]x_0, y_0[ \in J$ tal que $\{]1,1[\} \subsetneq G\big(]x_0, y_0[\big) \subsetneq C$. Sea $t' = \text{mín}(\{2t_0, 2-2t_0\})$; como $t_0 \in (0,1)$, $t' > 0$. Como $\mathcal{C}_0$ cumple con la condición (b) en la Definición 1.3, podemos suponer que $]x_0, y_0[ < ]t', 0[$. Notemos que $]0,1[ < ]x_0, y_0[ < ]1,1[$. Dado que $G(]x_0, y_0[) \subsetneq C$ y $C \in \mathcal{W}$, $G\big(]x_0, y_0[\big) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$.

El arco ordenado
$$\mathcal{C}_1 = \big[G\big(]0,1[\big), G\big(]x_0, y_0[\big)\big]_{G(J)}$$
es un segmento inicial no trivial del arco $G(J)$; así que es homeomorfo a un segmento inicial no trivial del intervalo $J$ (pues $G$ es un encaje y $]0,1[ < ]x_0, y_0[$). Dado que $\{]0,1[\} \in G\big(]x_0, y_0[\big)$, de acuerdo con los Lemas 3.12 y 3.14 podemos definir la función
$$u_{G(]x_0,y_0[)} : [F(0), F(t_0)]_{F([0,1])} \to C(X)$$
y obtener que
$$\mathcal{C}_2 = u_{G(]x_0,y_0[)}([F(0), F(t_0)]_{F([0,1])})$$
es un arco ordenado de $G\big(]x_0, y_0[\big)$ a $F(t_0) \cup G\big(]x_0, y_0[\big)$. Como $G\big(]x_0, y_0[\big) \in L(\mathcal{W})$ y $F(t_0) \cup G\big(]x_0, y_0[\big) \in M(\mathcal{W})$ (pues $F(t_0) \in \mathcal{W}$), el Lema 3.7(b) nos dice que existe $t_1 \in [0, t_0]$ tal que $F(t_1) \cup G\big(]x_0, y_0[\big) \in \mathcal{W} \cap \mathcal{C}_2$.

Como $G\big(]x_0, y_0[\big) \in L(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$, tenemos que
$$G\big(]x_0, y_0[\big) \neq F(t_1) \cup G\big(]x_0, y_0[\big)$$
y, por tanto, $t_0 > 0$. Veamos ahora que $t_1 < t_0$. Para ello necesitaremos la siguiente afirmación.

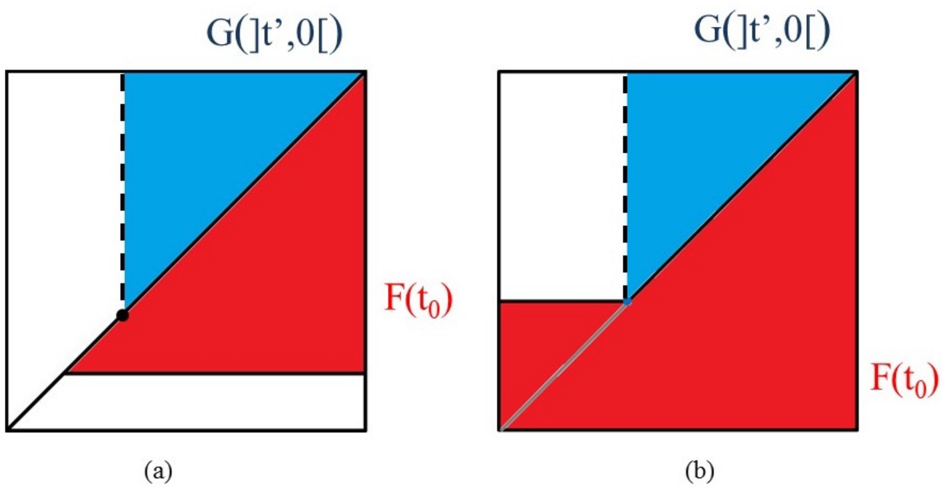


Figura 3.10: Se muestran $G\big(]t',0[\big)$ y $F(t_0)$ cuando (a) $t_0 \leq \frac{1}{2}$ y (b) $t_0 > \frac{1}{2}$.

**Afirmación 1** $G\big(]x_0,y_0[\big) \setminus \Delta \subset X \setminus F(t_0)$.

Dado que la función $G$ preserva el orden, tenemos que $G\big(]x_0,y_0[\big) \subset G\big(]t',0[\big)$. Para probar la afirmación es suficiente demostrar que $G\big(]t',0[\big) \setminus \Delta \subset X \setminus F(t_0)$. Tenemos dos posibilidades para analizar (ver Figura 3.10):

1. Si $t_0 \leq \frac{1}{2}$, entonces $t' = 2t_0$, $1-t' \geq 0$ y

$$\begin{aligned} G\big(]t',0[\big) \setminus \Delta &= \{]x,y[ \in X : 1-t' \leq x \leq y \leq 1\} \setminus \Delta \\ &= \{]x,y[\, \in X : 1-t' \leq x < y \leq 1\} \\ &\subset \{]x,y[\, \in X : 0 \leq x < y \leq 1\} = X \setminus A_{\frac{1}{2}} \subset X \setminus A_{t_0}. \end{aligned}$$

2. Si $t_0 > \frac{1}{2}$, entonces $2-2t_0 < 1 < 2t_0$, así que $t' = 2-2t_0$, $1-t' = 2t_0-1$ y

$$\{]1-t_0, y[\, \in G\big(]t_0,0[\big)\} \cap \Delta = \{]1-t_0, 1-t_0[\}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} G\big(]t', 0[\big) \setminus \Delta &= (\{]x, y[\, \in X : 1 - t' < x \leq y \leq 1\} \cup \\ &\qquad \{]1 - t_0, 1 - t_0[\}) \setminus \Delta \\ &= \{]x, y[\, \in X : 1 - t' < x < y \leq 1\} \\ &= \{]x, y[\, \in X : 2t_0 - 1 < x < y \leq 1\} \subset X \setminus A_{t_0}. \end{aligned}$$

Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

Como $]x_0, y_0[\, > \,]0, 1[$, sabemos que $G\big(]x_0, y_0[\big) \setminus \Delta \neq \emptyset$. Luego, de la Afirmación 1 se sigue que $G(]x_0, y_0[) \setminus F(t_0) \neq \emptyset$, así que $F(t_0) \cup G(]x_0, y_0[) \supsetneq F(t_0)$. Dado que $F(t_0) \in \mathcal{W}$, tenemos que $F(t_0) \cup G\big(]x_0, y_0[\big) \neq F(t_1) \cup G\big(]x_0, y_0[\big)$ (pues $\mathcal{W}$ cumple con la condición (a) de la Definición 3.1), así que $t_1 < t_0$.

Definimos $A = F(t_0)$ y $B = F(t_1) \cup G\big(]x_0, y_0[\big)$. Sea $\Delta' = F(t_0) \cap G\big(]x_0, y_0[\big)$; a continuación probaremos que $\Delta' \in C(X)$. Por la Afirmación 1, $\Delta' \subset \Delta$. En el caso en que $t_0 < \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\Delta' = \{]x, x[\, \in \Delta : \text{mín}(\{1 - x_0, 1 - 2t_0\}) \leq x \leq 1\},$$

y en el caso en que $t_0 \leq \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\Delta' = \{]x, x[\, \in \Delta : 1 - x_0 \leq x \leq 1\};$$

luego, en ambos casos $\Delta' \in C(X)$.

Ahora probaremos que $A \cap B \in C(X)$. Dado que $t_1 < t_0$, tenemos que $F(t_0) \supset F(t_1)$ y, por tanto, $A \cap B = F(t_0) \cap \big(F(t_1) \cup G\big(]x_0, y_0[\big)\big) = \big(F(t_0) \cap F(t_1)\big) \cup \big(F(t_0) \cap G\big(]x_0, y_0[\big)\big) = F(t_1) \cup \Delta'$. Como $\{F(t_1), \Delta'\} \subset C(X)$ y $]1, 1[\, \in F(t_1) \cap \Delta'$, resulta que $A \cap B \in C(X)$, como queríamos probar.

A continuación, encontraremos un arco ordenado de $A \cap B$ a $A$ en $C(X)$ que es metrizable. Dado que $]1, 1[\, \in A \cap B$, la función

$$u_{A \cap B} : [F(t_1), F(t_0)]_{F([0,1])} \to C(X)$$

está bien definida. El Lema 3.15 implica que

$$\mathcal{A} = u_{A \cap B}([F(t_1), F(t_0)]_{F([0,1])})$$

es un arco ordenado de $A \cap B$ a $A$. Como $u_{A \cap B}$ es una función continua y además $[F(t_1), F(t_0)]_{F([0,1])}$ es metrizable, tenemos que $\mathcal{A}$ es metrizable.

A continuación, encontraremos un arco ordenado de $A \cap B$ a $B$ en $C(X)$ que no es metrizable. Como $]1, 1[\, \in A \cap B$, la función $u_{A\cap B} : \mathcal{C}_1 \to C(X)$ está bien definida. De acuerdo con el Lema 3.12, $u_{A\cap B}$ es un función continua y, como $\mathcal{C}_1$ es compacto y $C(X)$ es un espacio Hausdorff, es una función cerrada. Probaremos que $u_{A\cap B}|_{\mathcal{C}_1}$ es un encaje; para ello es suficiente verificar la siguiente afirmación.

**Afirmación 2.** La función $u_{A\cap B}|_{\mathcal{C}_1}$ es inyectiva.

Sean $G\big(]x_1, y_1[\big)$ y $G\big(]x_2, y_2[\big) \in \mathcal{C}_1$ tales que $G\big(]x_1, y_1[\big) \neq G\big(]x_2, y_2[\big)$; como $\mathcal{C}_1$ es un arco ordenado, podemos suponer que $G\big(]x_1, y_1[\big) \subsetneq G\big(]x_2, y_2[\big)$. Dado que $\mathcal{C}_1$ es un arco ordenado de $G\big(]0, 1[\big)$ a $G\big(]x_0, y_0[\big)$, tenemos que $G\big(]x_2, y_2[\big) \subset G\big(]x_0, y_0[\big)$. Puesto que $G$ respeta el orden y $]x_1, y_1[$ y $]x_2, y_2[$ son comparables (pues el orden en $J$ es total), resulta que $]x_1, y_1[\, < \,]x_2, y_2[$. Sea $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$. Hay dos posibilidades para considerar. Si $x_3 = x_1$, entonces $x_1 = x_2$, de donde $y_1 < y_2$. Definimos $y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$. Como $0 \leq y_1 < y_2$, se sigue que $y_3 > 0$. Si $x_3 > x_1$, definimos $y_3 = 1$. Sean $r_0 = 1-x_3$ y $s_0 = 1 - x_3 + x_3 y_3$. Dado que, en cualquier caso $]x_1, y_1[\, < \,]x_3, y_3[\, < ]x_2, y_2[$, resulta que, por la definición de $G$, $]r_0, s_0[\, \in G\big(]x_2, y_2[\big) \setminus G\big(]x_1, y_1[\big)$.

Probaremos que $]r_0, s_0[\, \notin \Delta'$. Consideraremos dos casos:

1. Si $x_3 = x_1$, entonces $x_1 = x_2$. Como $\{]x_1, y_1[, ]x_2, y_2[\} \subset J$ y $]x_1, y_1[<]x_2, y_2[$, tenemos que $x_1 \neq 0$. Así, $x_3 > 0$. Además, como $y_3 > 0$, resulta que $x_3 y_3 > 0$, de donde $r_0 = 1 - x_3 < 1 - x_3 + x_3 y_3 = s_0$.
2. Si $x_3 > x_1$, entonces $x_3 > 0$ y $y_3 = 1$. Luego, tenemos que $x_3 y_3 > 0$ y, por tanto, $r_0 = 1 - x_3 < 1 - x_3 + x_3 y_3 = s_0$.

Aplicando la Afirmación 1 y el hecho de que $A \cap B \subset F(t_0)$, obtenemos que

$$]r_0, s_0[\, \in G(]x_2, y_2[) \setminus \Delta' \subset G(]x_0, y_0[) \setminus \Delta' \subset X \setminus F(t_0) \subset X \setminus (A \cap B).$$

Así, podemos concluir que $]r_0, s_0[\, \notin A \cap B$ y, por tanto, $G\big(]x_1, y_1[\big) \cup (A \cap B) \subsetneq G\big(]x_2, y_2[\big) \cup (A \cap B)$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2.

El Lema 3.14 implica que $\mathcal{B} = u_{A\cap B}(\mathcal{C}_1)$ es un arco ordenado de $A \cap B$ a $B$. Acabamos de probar que $u_{A\cap B}|_{\mathcal{C}_1}$ es un encaje, así que $\mathcal{B} = u_{A\cap B}(\mathcal{C}_1)$ es homeomorfo a un segmento inicial no trivial de $J$ y, por el Lema 3.58, $\mathcal{B}$ es no metrizable. Hemos llegado a una contradicción del Teorema 3.22. De esta forma, hemos probado que $C(X)$ no admite niveles de Whitney no triviales.

■

## 3.2 Funciones de Whitney

**3.66 Definición.** Sea $T$ un arco generalizado. Dado un hiperespacio $H(X)$ de un continuo de Hausdorff $X$, una *función de Whitney para* $H(X)$ es una función continua $\mu : H(X) \to T$ que satisface las siguientes condiciones:

(i) $\mu(\{x\}) = \text{mín}(T)$ para todo $x \in X$ y

(ii) $\mu(A) < \mu(B)$ cuando $A \subsetneq B$.

El siguiente teorema fue probado por J. J. Charatonik y W. J. Charatonik en [2].

**3.67 Teorema.** *(ver [2, Teorema 1, p. 305]). Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo de Hausdorff $X$:*

*(a) $X$ es metrizable,*

*(b) existe una función de Whitney para $2^X$, y*

*(c) existe una función de Whitney para $F_2(X)$.*

En el caso en que $X$ es un continuo métrico, siempre es posible definir funciones de Whitney para $C(X)$ que tienen como imagen al intervalo $[0, 1]$. En [2, p. 306] se presenta un ejemplo de un continuo no metrizable tal que existe una función de Whitney para $C(X)$ que tiene como imagen al intervalo [0,1].

**3.68 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $\{x, y\} \in F_2(X)$, con $x$ y $y$ no necesariamente distintos. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_2(X)$ una vecindad básica de $\{x, y\}$ en $F_2(X)$, donde $U_i$ es un abierto de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Existen vecindades $U$ y $V$ de $x$ y $y$ en $X$, respectivamente, tales que $\langle U, V\rangle \cap F_2(X) \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap F_2(X)$.*

*Demostración.* Definimos $U = \bigcap\{U_i : x \in U_i \text{ e } i \in \{1, \ldots, n\}\}$ y $V = \bigcap\{U_i : y \in U_i \text{ e } i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Sea $A \in \langle U, V\rangle \cap F_2(X)$. Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $\{x, y\} \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, tenemos que $x \in U_i$ o $y \in U_i$. Por lo anterior, $U \subset U_i$ o $V \subset U_i$, lo que implica que $A \cap U_i \neq \emptyset$. Finalmente, $A \subset U \cup V = \bigcap\{U_i : x \in U_i \text{ e } i \in \{1, \ldots, n\}\} \cup \bigcap\{U_i : \text{y} \in U_i \text{ e } i \in \{1, \ldots, n\}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por tanto $A \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. ■

**3.69 Teorema.** *Si $X$ es un arco generalizado no metrizable, entonces no existen funciones de Whitney para $C(X)$.*

*Demostración.* Consideremos $R$ y $g$ como en el Lema 3.23. La función $h : R \to F_2(X)$ definida por $h(]x,y[) = \{x,y\}$ es claramente biyectiva; probaremos que $h$ es un homeomorfismo. Sea $]x,y[\in R$ y sea $\mathcal{U}$ un abierto de $F_2(X)$ tal que $\{x,y\} \in \mathcal{U}$. Por el Lema 3.68, podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U,V\rangle \cap F_2(X)$, donde $U$ y $V$ son abiertos de $X$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Para probar que $h$ es continua mostremos que $h\big((U\times V)\cap R\big) \subset \langle U,V\rangle \cap F_2(X)$. Sea $]z,w[\, \in (U\times V)\cap R$. Como $z \in U$ y $w \in V$, se sigue que $\{z,w\}\cap U \neq \emptyset$, $\{z,w\}\cap V \neq \emptyset$ y $\{z,w\} \subset U\cup V$, así que $\{z,w\} \in \langle U,V\rangle \cap F_2(X)$, como queríamos. Como $h$ es una función continua y biyectiva de un espacio compacto en un Hausdorff, tenemos que $h$ es un homeomorfismo.

De acuerdo con el Lema 3.23, la función $j = g\circ h^{-1}$ es un encaje de $F_2(X)$ en $C(X)$. Observemos que $j(\{x,y\}) = [\text{mín}\{x,y\}, \text{máx}\{x,y\}]$.

**Afirmación 1.** Si $A,B \in F_2(X)$ cumplen que $A \subsetneq B$, entonces $j(A) \subsetneq j(B)$.

Dados $A,B \in F_2(X)$ tales que $A \subsetneq B$, necesariamente $|A| = 1$ y $|B| = 2$. Por la definición de $j$, tenemos que $j(A) = A$, mientras que $j(B)$ es un subcontinuo de $X$ que tiene a $B$ como el conjunto de sus extremos. Así, $j(A) = A \subsetneq B \subset j(B)$. Con esto queda demostrada la Afirmación 1.

Supongamos que existen un arco generalizado $T$ y una función $\mu : C(X) \to T$ tal que $\mu$ es una función de Whitney para $C(X)$. Definimos $\mu' = \mu\circ j$. La función $\mu'$ es claramente continua. Probaremos que $\mu'$ es una función de Whitney para $F_2(X)$ mostrando que cumple con las condiciones (a) y (b) de la Definición 3.66.

(a) Dado $x \in X$, tenemos que $\mu'(\{x\}) = \mu(j(\{x\})) = \mu(\{x\}) = \text{mín}(T)$.

(b) Si $A,B \in F_2(X)$ son tales que $A \subsetneq B$, por la Afirmación 1 sabemos que $j(A) \subsetneq j(B)$. Finalmente, como $\mu$ es una función de Whitney, tenemos que $\mu'(A) = \mu(j(A)) < \mu(j(B)) = \mu'(B)$.

Hemos probado que $\mu'$ es una función de Whitney para $F_2(X)$, aplicando el Teorema 3.67 obtenemos que $X$ es metrizable, lo cual es una contradicción. ■

A continuación daremos condiciones bajo las cuales es posible definir una función de Whitney para $C(X)$.

**3.70 Teorema.** *Si $\mathfrak{W}$ es una partición de $C(X)$ en niveles de Whitney, existe una función de Whitney cuyas fibras son los elementos de $\mathfrak{W}$.*

*Demostración.* Fijemos un punto $x \in X$. Por el Teorema 2.28, existe un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$. Dado $B \in C(X)$, como $\mathfrak{W}$ es una partición de $C(X)$, existe $\mathcal{W}_B \in \mathfrak{W}$ tal que $B \in \mathcal{W}_B$. De acuerdo con (a) y (b) en el Lema 3.5, $\{x\} \in L(\mathcal{W}_B)$ y $X \in M(\mathcal{W}_B)$. Luego, según el Lema 3.7(b), existe $A_B \in C(X)$ tal que $\{A_B\} = \mathcal{W}_B \cap \mathcal{A}$.

Por el Corolario 2.20, $\mathcal{A}$ es un arco generalizado. Definamos la función $\mu : C(X) \to \mathcal{A}$ dada por $\mu(A) = A_B$. Vamos a probar que $\mu$ es una función de Whitney para $C(X)$.

**Afirmación 1.** Para cada $y \in X$, $\mu(\{y\}) = \text{mín}(\mathcal{A})$.

Dado $y \in X$, como $\mathcal{W}_{\{y\}}$ es un nivel de Whitney que contiene un elemento de $F_1(X)$ (el elemento $\{y\}$), tenemos que $\mathcal{W}_{\{y\}} = F_1(X)$. Así, $\{A_{\{y\}}\} = F_1(X) \cap \mathcal{A}$ y $A_{\{y\}} = \{x\} = \text{mín}(A)$.

**Afirmación 2.** Si $C, D \in C(X)$ y $C \subsetneq D$, entonces $\mu(C) < \mu(D)$.

Como $\mathcal{A}$ es un arco ordenado, $\mu(C)$ y $\mu(D)$ son comparables por el orden de la inclusión. Para probar la Afirmación 2 es suficiente con mostrar que $\mu(C) \subsetneq \mu(D)$. Supongamos, por el contrario, que $\mu(D) \subset \mu(C)$; obtendremos una contradicción probando que $\mathcal{W}_C$ es disconexo. Como $\mathcal{W}_C$ y $\mathcal{W}_D$ son niveles de Whitney, tenemos que $\mathcal{L} = L(\mathcal{W}_D) \cap \mathcal{W}_C$ y $\mathcal{M} = M(\mathcal{W}_D) \cap \mathcal{W}_C$ son cerrados en $C(X)$. Por lo anterior, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son subconjuntos cerrados de $\mathcal{W}_C$. Dado que $C \subset D$, $C \in \mathcal{W}_C$ y $D \in \mathcal{W}_D$, se sigue que $C \in \mathcal{L}$. Como $\mu(D) \subset \mu(C)$, $\mu(C) \in \mathcal{W}_C$ y $\mu(D) \in \mathcal{W}_D$, resulta que $\mu(C) \in \mathcal{M}$. De acuerdo con el Lema 3.5(d), $C(X) = M(\mathcal{W}_D) \cup L(\mathcal{W}_D)$. Luego, $\mathcal{M} \cup \mathcal{L} = \mathcal{W}_C \cap C(X) = \mathcal{W}_C$. Usando el Lema 3.5(c), obtenemos que $M(\mathcal{W}_D) \cap L(\mathcal{W}_D) = \mathcal{W}_D$. En consecuencia, $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \mathcal{W}_C \cap \mathcal{W}_D$. Si suponemos que $\mathcal{W}_C \cap \mathcal{W}_D \neq \emptyset$, como $\mathfrak{W}$ es una partición resulta que $\mathcal{W}_C = \mathcal{W}_D$, de donde $C$ y $D \in \mathcal{W}_C$; dado que $C \subsetneq D$ y $\mathcal{W}_C$ cumple con la condición (b) en la Definición 3.1, obtenemos una contradicción. Así, podemos concluir que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} = \emptyset$. De este modo hemos obtenido que $\mathcal{W}_C$ es disconexo. Esta contradicción completa la prueba de la Afirmación 2.

**Afirmación 3.** La función $\mu$ es continua.

De acuerdo con el Corolario 2.20 y la Definición 1.3, el conjunto

$$\{(\leftarrow, A) : A \in \mathcal{A}\} \cup \{(A, \rightarrow) : A \in \mathcal{A}\} \cup \{(A, B) : A, B \in \mathcal{A}\}$$

es una base para la topología de $\mathcal{A}$. Tomemos $A \in \mathcal{A}$. Ya que $A \in \mathcal{W}_A \cap \mathcal{A}$, se sigue que $\mathcal{W}_A \cap \mathcal{A} = \{A\}$. Dada $D \in \mathcal{W}_A$, tenemos que $\mathcal{W}_D = \mathcal{W}_A$, así que

$\mu(D) = A$. Probemos primero que $\mu^{-1}((\leftarrow, A))$ es un subconjunto abierto de $C(X)$. Como $M(\mathcal{W}_A)$ es cerrado en $C(X)$, bastará con que probemos que $\mu^{-1}\big((\leftarrow, A)\big) = C(X) \setminus M(\mathcal{W}_A)$.

Sea $C \in M(\mathcal{W}_A)$, entonces existe $D \in \mathcal{W}_A$ tal que $D \subset C$. Si $D = C$, entonces $\mu(C) = \mu(D) = A$ y $C \notin \mu^{-1}\big((\leftarrow, A)\big)$. Si $D \subsetneq C$, por la Afirmación 2 tenemos que $\mu(C) > \mu(D) = A$. Hemos probado que $M(\mathcal{W}_A) \subset C(X) \setminus \mu^{-1}\big((\leftarrow, A)\big)$. Por tanto

$$\mu^{-1}((\leftarrow, A)) \subset C(X) \setminus M(\mathcal{W}_A).$$

Por la definición de $L(\mathcal{W}_A)$, si $C \in L(\mathcal{W}_A) \setminus \mathcal{W}_A$, existe $D \in \mathcal{W}_A$ tal que $C \subset D$, pero $C \neq D$ (pues $C \notin \mathcal{W}_A$). Como $C \subsetneq D$, por la Afirmación 2 tenemos que $\mu(C) < \mu(D) = A$. Luego, podemos concluir que

$$\mu^{-1}((\leftarrow, A)) \supset L(\mathcal{W}_A) \setminus \mathcal{W}_A.$$

Se sigue de (c) y (d) en el Lema 3.5 que $C(X) \setminus M(\mathcal{W}_A) = L(\mathcal{W}_A) \setminus \mathcal{W}_A$. De aquí que $\mu^{-1}\big((\leftarrow, A)\big) = C(X) \setminus M(\mathcal{W}_A)$. Por tanto $\mu^{-1}\big((\leftarrow, A)\big)$ es abierto en $C(X)$.

Ahora probemos que $\mu^{-1}((A, \rightarrow))$ es un subconjunto abierto de $C(X)$. Bastará con que probemos que $\mu^{-1}\big((A, \rightarrow)\big) = C(X) \setminus L(\mathcal{W}_A)$. Sea $C \in L(\mathcal{W}_A)$, entonces existe $D \in \mathcal{W}_A$ tal que $C \subset D$. Si $D = C$, entonces $\mu(C) = \mu(D) = A$ y $C \notin \mu^{-1}\big((A, \rightarrow)\big)$. Si $C \subsetneq D$, por la Afirmación 2 tenemos que $\mu(C) < \mu(D) = A$ y $C \notin \mu^{-1}\big((A, \rightarrow)\big)$. Luego, podemos concluir que

$$\mu^{-1}((A, \rightarrow)) \subset C(X) \setminus L(\mathcal{W}_A).$$

Por la definición de $M(\mathcal{W}_A)$, si $C \in M(\mathcal{W}_A) \setminus \mathcal{W}_A$, existe $D \in \mathcal{W}_A$ tal que $D \subset C$, pero $C \neq D$ (pues $C \notin \mathcal{W}_A$). Como $D \subsetneq C$, por la Afirmación 2 tenemos que $\mu(C) > \mu(D) = A$. Luego, podemos concluir que

$$\mu^{-1}((A, \rightarrow)) \supset M(\mathcal{W}_A) \setminus \mathcal{W}_A.$$

Se sigue de (c) y (d) en el Lema 3.5 que $C(X) \setminus L(\mathcal{W}_A) = M(\mathcal{W}_A) \setminus \mathcal{W}_A$. Así, como $\mathcal{W}_A$ es un nivel de Whitney, $\mu^{-1}((A, \rightarrow)) = C(X) \setminus L(\mathcal{W}_A)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$.

Finalmente probemos que, dados $A$ y $B \in \mathcal{A}$, el conjunto $\mu^{-1}\big((A, B)\big)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$. Puesto que $(A, B) = (A, \rightarrow) \cap (\leftarrow, B)$, tenemos que

$\mu^{-1}\big((A,B)\big) = \mu^{-1}\big((A,\rightarrow)\big) \cap \mu^{-1}\big((\leftarrow,B)\big)$. Así, $\mu^{-1}\big((A,B)\big)$ es un subconjunto abierto de $C(X)$.

■

## 3.3 Propiedades de Whitney

Una de las preguntas más estudiadas en los hiperespacios es: ¿Qué tipo de propiedades topológicas comparte un continuo $X$ con sus niveles de Whitney? Ese será el planteamiento que exploraremos en la siguiente sección.

**3.71 Definición.** Sea $P$ una propiedad topológica. Decimos que $P$ es una *propiedad de Whitney* si para cada continuo $X$ con la propiedad $P$ y para todo nivel de Whitney $\mathcal{W}$ de $C(X)$ se tiene que $\mathcal{W}$ tiene la propiedad $P$.

Hasta ahora hemos probado que las propiedades de ser conexo y ser un arco generalizado son propiedades de Whitney. Enseguida probaremos otra propiedad de Whitney básica.

**3.72 Definición.** Un continuo de Hausdorff es *conexo por arcos generalizados* si, dados dos elementos $a, b \in X$, existe un subcontinuo $Y$ de $X$ tal que $Y$ es un arco generalizado y tiene como puntos extremos a $a$ y a $b$.

**3.73 Proposición.** *Si $X$ es conexo por arcos generalizados, entonces todo nivel de Whitney para $C(X)$ también lo es.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{W}$ un nivel de Whitney para $C(X)$. Dados elementos distintos $A$ y $B$ de $\mathcal{W}$, queremos encontrar un arco generalizado dentro $\mathcal{W}$ que tenga por extremos a $A$ y $B$. Si $A \cap B \neq \emptyset$, el Corolario 3.20 nos garantiza que existe tal arco generalizado. Para el caso en que $A \cap B = \emptyset$, tomemos $a \in A$ y $b \in B$. Como $X$ es conexo por arcos generalizados, existe un arco generalizado $T \subset X$ que tiene por extremos a $a$ y $b$. Como $T \in C(X)$, de acuerdo con el Lema 3.5(d), $T \in L(\mathcal{W})$ o $T \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$. Consideremos ambos casos:

(i) Si $T \in L(\mathcal{W})$, existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $T \subset W$. Dado que $a \in W \cap A$ y $b \in W \cap B$, por el Corolario 3.20 existen dos arcos generalizados $Z_1$ y $Z_2$ y dos encajes $\psi_1 : Z_1 \to \mathcal{W}$ y $\psi_2 : Z_2 \to \mathcal{W}$ tales que $\psi_1(\text{mín}(Z_1)) = A$, $\psi_1(\text{máx}(Z_1)) = W = \psi_2(\text{mín}(Z_2))$ y $\psi_2(\text{máx}(Z_2)) = B$. Por el Lema 3.37, tenemos que existen un arco generalizado $Z$ y un encaje $\psi : Z \to \mathcal{W}$ tal que $\psi(\text{mín}(Z)) = A$ y $\psi(\text{máx}(Z)) = B$.

(ii) Si $T \in M(\mathcal{W}) \setminus \mathcal{W}$, aplicando el Lema 3.7(b) obtenemos elementos $W_a$ y $W_b \in \mathcal{W}$ tales que $\{a\} \subset W_a \subset T$ y $\{b\} \subset W_b \subset T$. Claramente, $\{W_a, W_b\} \subset \mathcal{W} \cap C(T)$. Como $T \notin \mathcal{W}$, de acuerdo con el Lema 3.9, $\mathcal{W} \cap C(T)$ es un nivel de Whitney no trivial para $C(T)$. El Teorema 3.32 nos dice que $\mathcal{W} \cap C(T)$ es un arco generalizado. Así, podemos suponer que existe un arco generalizado $Z_0$ y un encaje $\psi_0 : Z_0 \to \mathcal{W}$ tal que $\psi_0(\text{mín}(Z_0)) = W_a$ y $\psi_0(\text{máx}(Z_0)) = W_b$.

Como $\{A, W_a\} \subset \mathcal{W}$ y $a \in A \cap W_a$, el Corolario 3.20 nos dice que existen un arco generalizado $Z_1$ y un encaje $\psi_1 : Z_1 \to \mathcal{W}$ tal que $\psi_1(\text{mín}(Z_1)) = A$ y $\psi_1(\text{máx}(Z_1)) = W_a$. Aplicando el Lema 3.37 a los arcos generalizados $Z_1, Z_0$ y a los encajes $\psi_1$ y $\psi_0$, obtenemos que existen un arco generalizado $Z_2$ y un encaje $\psi_2 : Z_2 \to \mathcal{W}$ tal que $\psi_2(\text{mín}(Z_2)) = A$ y $\psi_2(\text{máx}(Z_2)) = W_b$.

Como $\{W_b, B\} \subset \mathcal{W}$ y $b \in W_b \cap B$, de acuerdo con el Corolario 3.20 existen un arco generalizado $Z_3$ y un encaje $\psi_3 : Z_3 \to \mathcal{W}$ tal que $\psi_3(\text{mín}(Z_3)) = W_b$ y $\psi_3(\text{máx}(Z_3)) = B$. Aplicando el Lema 3.37 a los arcos generalizados $Z_2, Z_3$ y a los encajes $\psi_2$ y $\psi_3$, obtenemos que existen un arco generalizado $Z$ y un encaje $\psi : Z \to \mathcal{W}$ tal que $\psi(\text{mín}(Z)) = A$ y $\psi(\text{máx}(Z)) = B$.

■

# Capítulo 4

# Unicoherencia de $C(X)$

Decimos que un espacio topológico conexo $X$ es *unicoherente* si, siempre que $X = A \cup B$ donde $A$ y $B$ son subconjuntos cerrados y conexos de $X$, se tiene que $A \cap B$ es conexo.

En [16, Teorema 3], S. B. Nadler, Jr. probó que, dado un continuo métrico $X$, los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$ tienen la *propiedad b)* -ver Definición 4.5-; usando este resultado obtuvo como corolario que, en el caso métrico, los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$ son unicoherentes (ver [17, Corolario 1.176, p. 137]).

En 2007, J. G. Anaya presentó en su tesis doctoral una prueba diferente de que los hiperespacios $C(X)$ y $2^X$, dado cualquier continuo métrico $X$, tienen la *propiedad b)* (ver [1, Teorema 2.2.2, p. 35]); las ideas de esa prueba sirvieron como punto de partida para el presente capítulo, donde probaremos que el hiperespacio $C(X)$ es unicoherente para cualquier continuo de Hausdorff $X$.

Comenzaremos presentando algunos lemas que serán necesarios para completar la prueba.

**4.1 Lema.** *(ver [4, Teorema 9.4, p. 83]) Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos y sea $\{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una cubierta de $X$ donde todos los $A_\alpha$ son abiertos. Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, sea $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ una función continua tal que $f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}$ para cada $]\alpha, \beta[ \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Se tiene que existe una única función continua $f : X \to Y$ tal que $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$.*

**4.2 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $A$ un subconjunto cerrado de $X$. Dado $n \in \mathbb{N}$ y dada una cubierta $\{C_i \subset X : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ de $A$ por cerrados, si*

*$\{O_i \subset X : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una cubierta abierta de $A$ que cumple que $C_i \subset O_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces existe una cubierta abierta $\{U_i \subset X : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ de $A$ tal que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ y $C_i \subset U_i \subset O_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

*Demostración.* Tomemos $i \in \{1, \ldots, n\}$. El conjunto $K_i = \bigcup\{C_j : C_i \cap C_j = \emptyset\}$ es cerrado. Como $C_i \cap K_i = \emptyset$ y $X$ es normal, existen dos subconjuntos abiertos $V_i$ y $W_i$ de $X$ tales que $C_i \subset V_i$, $K_i \subset W_i$ y $V_i \cap W_i = \emptyset$. Definimos $U_i = V_i \cap (\bigcap\{W_j : C_i \subset W_j\}) \cap O_i$. Observemos que $C_i \subset U_i \subset O_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$; de la primera contención resulta que $\{U_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una cubierta abierta de $A$ (pues $C_i$ era una cubierta de $A$). Sean $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$. Si $C_{i_1} \cap C_{i_2} = \emptyset$, entonces $C_{i_2} \subset K_{i_1} \subset W_{i_1}$, de donde $U_{i_2} \subset \bigcap\{W_j : C_{i_2} \subset W_j\} \subset W_{i_1}$. Como además $U_{i_1} \subset V_{i_1}$, tenemos que $U_{i_1} \cap U_{i_2} \subset V_{i_1} \cap W_{i_1} = \emptyset$. De esta forma, se obtiene que si $U_{i_1} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$, entonces $C_{i_1} \cap C_{i_2} \neq \emptyset$. ■

De acuerdo con el Lema 2.1(iii), el conjunto $M\big(\{\{x\}\}\big) = \{A \in C(X) : \{x\} \subset A\}$ es cerrado en $C(X)$. Para referirnos a él escribiremos solamente $M(x)$.

**4.3 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $x \in X$. Se tiene que:*

*(a) Si $A$ y $B \in C(X)$ son tales que $A \in M(x)$ y $A \subset B$, entonces para cualquier arco ordenado $\mathcal{A}$ de $A$ a $B$ se cumple que $\mathcal{A} \subset M(x)$.*

*(b) $M(x) = \bigcup\{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A}$ es un arco ordenado largo que empieza en $\{x\}\}$.*

*Demostración.* (a) Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado de $A$ a $B$. Para cualquier $C \in \mathcal{A}$, tenemos que $x \in A \subset C$, así que $C \in M(x)$. Por lo anterior, $\mathcal{A} \subset M(x)$.

(b) Definamos

$$\mathcal{D} = \bigcup\{\mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es un arco ordenado largo que empieza en } \{x\}\}.$$

Dado un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ que empieza en $\{x\}$, por el inciso $(a)$ tenemos que $\mathcal{A} \subset M(x)$ y, por tanto, $M(x) \supset \mathcal{D}$. Por otra parte, dado $A \in M(x)$, el Corolario 2.28 nos dice que existe un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ que empieza en $\{x\}$ tal que $A \in \mathcal{A}$, de donde $M(x) \subset \mathcal{D}$.

■

Sea $S^1$ la circunferencia de radio uno centrada en el origen del plano complejo, como subespacio topológico. La función exp denotará la función continua $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ definida por $\exp(t) := \cos(2\pi t) + i\,\mathrm{sen}(2\pi t) = e^{2\pi i t}$.

**4.4 Definición.** Sea $X$ un espacio topológico conexo y sea $f : X \to S^1$ una función continua. Decimos que $f$ tiene un *levantamiento* si existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $\exp \circ h = f$; en este caso diremos que $h$ es un *levantamiento de $f$*.

**4.5 Definición.** Un espacio topológico conexo $X$ tiene la *propiedad b)* si toda función continua $f : X \to S^1$ tiene un levantamiento.

El siguiente resultado establece una relación entre ser unicoherente y tener la propiedad b).

**4.6 Teorema.** *(ver [22, Teorema 7.3]) Sea $X$ un espacio topológico conexo y normal. Si $X$ tiene la propiedad b), entonces $X$ es unicoherente.*

**4.7 Lema.** *Sea $Z$ un espacio topológico conexo y sea $f : Z \to S^1$ una función continua. Dados dos levantamientos $h_1$ y $h_2 : Z \to \mathbb{R}$ de $f$, si existe $z_0 \in Z$ tal que $h_1(z_0) = h_2(z_0)$, entonces $h_1 = h_2$.*

*Demostración.* Dado $z \in Z$, tenemos que $exp \circ h_1(z) = e^{2\pi i h_1(z)}$ y $exp \circ h_2(z) = e^{2\pi i h_2(z)}$; como $h_1$ y $h_2$ son levantamientos de $f$, entonces $e^{2\pi i h_1(z)} = f(z) = e^{2\pi i h_2(z)}$. De esta forma, para cada $z \in Z$ tenemos que $\frac{e^{2\pi i h_1(z)}}{e^{2\pi i h_2(z)}} = 1$, de donde $e^{2\pi i (h_1 - h_2)(z)} = 1$ y $[h_1 - h_2](z) \in \mathbb{Z}$. Luego, $[h_1 - h_2](Z) \subset \mathbb{Z}$. Como $Z$ es conexo, $[h_1 - h_2](Z)$ es un conjunto de un solo punto; es decir, $h_1 - h_2$ es constante. Dado que $[h_1 - h_2](z_0) = 0$, tenemos que $h_1 = h_2$. ■

**4.8 Lema.** *Sea $Z$ un arco generalizado y $\mathcal{U}$ una cubierta de $Z$ tal que todos los elementos de $\mathcal{U}$ son abiertos básicos de $Z$. Se tiene que existen $n \in \mathbb{N}$ y una subcubierta $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de $Z$ tal que $\text{mín}(Z) \in U_1$, $\text{máx}(Z) \in U_n$ y, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.*

*Demostración.* Como $Z$ es conexo, existe una cadena $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $\text{mín}(Z) \in U_1$, $\text{máx}(Z) \in U_n$ y, por ser cadena, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$ (ver [5, 6.3.1, p. 372]). Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U_i$ es conexo porque si $x, y \in U_i$ con $x \leq y$, entonces $[x, y]$ es un subcontinuo de $Z$ que contiene a $\{x, y\}$ y está contenido en $U_i$. Por tanto $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ es un subconjunto conexo de $Z$ que tiene a $\text{mín}(Z)$ y a $\text{máx}(Z)$. Si existe $z \in Z \setminus U$, $(\leftarrow, z) \cap U$ y $(z, \rightarrow) \cap U$ constituye una separación de $U$, lo cual es absurdo. Esto muestra que $Z = U$ y que $\{U_1, \ldots, U_n\}$ es cubierta de $Z$. ■

**4.9 Lema.** *Sean $Z$ un arco generalizado, $f : Z \to S^1$ una función continua, $M = \text{máx}(Z)$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(M)$. Existe un levantamiento $g$ de $f$ tal que $g(M) = t_0$.*

*Demostración.* Por la continuidad de $f$, dado $x \in Z$ existe una vecindad abierta básica $U_x$ de $x$ en $Z$ tal que $\text{diám}(f(U_x)) < \frac{1}{4}$. Por el Lema 4.8, existen $n \in \mathbb{N}$ y una subcubierta $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ de $\{U_x : x \in \mathbb{Z}\}$ tal que $M \in U_1$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$.

**Afirmación 1.** Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, dado $x_i \in U_i$ y dado $s_i \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(s_i) = f(x_i)$, existe un levantamiento $h_i$ de $f|_{U_i}$ tal que $h(x_i) = s_i$.

Como $\text{diám}\, f(U_i) < \frac{1}{4}$ existe $z \in S^1$ tal que $z \notin f(U_i)$. Observemos que $s_i \notin \exp^{-1}(z)$, ya que $\exp^{-1}(z)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que resulta de trasladar a $z$, existe $r \in \exp^{-1}(z)$ tal que $r < s_i < r + 1$. Notemos que la función $\exp|_{(r,r+1)}$ es un homeomorfismo en su imagen. Por lo anterior, la función $[\exp|_{(r,r+1)}]^{-1}$ está bien definida y es continua. Definimos $h_i : U_i \to \mathbb{R}$ por $h_i = [\exp|_{(r,r+1)}]^{-1} \circ f|_{U_i}$. Claramente $h_i$ es un levantamiento de $f|_{U_i}$. Además, $h_i(x_i) = [\exp|_{(r,r+1)}]^{-1}(f(x_i)) = s_i$ pues $\exp(s_i) = f(x_i)$, $s_i \in (r, r + 1)$ y $\exp|_{(r,r+1)}$ es una función inyectiva. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

De acuerdo con la Afirmación 1 existe un levantamiento $h_1$ de $f|_{U_1}$ tal que $h_1(M) = t_0$. Sea $x_1 \in U_1 \cap U_2$, por la afirmación anterior existe un levantamiento $h_2$ de $f|_{U_2}$ tal que $h_2(x_1) = h_1(x_1)$. Como $I_1 = U_1 \cap U_2$ es conexo, tenemos que $h_1|_{I_1}$ y $h_2|_{I_1}$ son dos levantamientos de $f|_{I_1}$ tales que $h_1|_{I_1}(x_1) = h_2|_{I_2}(x_1)$, así que, de acuerdo con el Lema 4.7, resulta que $h_1|_{I_1} = h_2|_{I_2}$. Por el Lema 4.1, la función $g_1 : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{R}$, definida por $g_1(x) := h_i(x)$ cuando $x \in U_i$, es continua. Por lo tanto, $g_1$ es un levantamiento de $f|_{U_1 \cup U_2}$ que satisface que $g_1(M) = t_0$.

Observemos que $U_1 \cup \ldots \cup U_i$ siempre es un intervalo abierto de $Z$, para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Repetimos el argumento de forma recursiva para $k < n - 1$, si $g_k : U_1 \cup \ldots \cup U_{k+1}$ es un levantamiento de $f|_{U_1 \cup \ldots \cup U_{k+1}}$ tal que $g_k(M) = t_0$ y elegimos un levantamiento $h_{k+2}$ de $f|_{U_{k+2}}$ que coincida en un punto de $(U_1 \cup \cdots \cup U_{k+1}) \cap U_{k+2}$ con $g_{k+2}$, la función $g_{k+1} : U_1 \cup \ldots \cup U_{k+2}$, definida como $g_{k+1}(x) := g_k(x)$ si $x \in U_1 \cup \ldots \cup U_k$ y $g_{k+1}(x) = h_{k+2}(x)$ si $x \in U_{k+2}$, es un levantamiento de $f|_{U_1 \cup \ldots \cup U_{k+2}}$ que satisface que $g_{k+1}(M) = t_0$. Como $U_1 \cup \ldots \cup U_n = Z$, tenemos que $g_{n-1}$ es un levantamiento de $f$ que satisface que $g_{n-1}(M) = t_0$, como queríamos. ■

**4.10 Lema.** *Sean $S$ y $T$ dos arcos generalizados. Definimos $M_S = \text{máx}(S)$ y $M_T = \text{máx}(T)$. Sea $f : S \times T \to S^1$ una función continua y sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(M_S, M_T)$. Tenemos que existe un levantamiento $g$ de $f$ tal que $g(M_S, M_T) = t_0$.*

*Demostración.* Por el Lema 4.9 tenemos que existe un levantamiento $h$ de $f|_{\{M_S\}\times T}$ tal que $h(M_S, M_T) = t_0$. Dada $y \in T$, ya tenemos definida $h(M_S, y) \in \mathbb{R}$ que cumple que $\exp(h(M_S, y)) = f(M_S, y)$. De manera que podemos aplicar el Lema 4.9 al arco generalizado $S \times \{y\}$ y obtener que existe un levantamiento $h_y : S \times \{y\} \to \mathbb{R}$ de $f|_{S\times\{y\}}$ tal que $h_y(M_S, y) = h(M_S, y)$. Definimos $g : S \times T \to \mathbb{R}$ por $g(x, y) = h_y(x, y)$.

Notemos que $\exp(g(x, y)) = \exp(h_y(x, y)) = f(x, y)$, así que $\exp \circ g = f$. Además $g(M_S, M_T) = h_{M_T}(M_S, M_T) = h(M_S, M_T) = t_0$. Así que $g(M_S, M_T) = t_0$. De esta forma, si conseguimos probar que $g$ es continua tendremos que $g$ es el levantamiento buscado de $f$.

Sea $(x, y) \in S \times T$ y veamos que $g$ es continua en $(x, y)$. Para cada $u \in S$, sean $U_u$ y $V_u$ intervalos que sean vecindades abiertas de $u$ y $y$, respectivamente en $S$ y $T$, tales que $\text{diám}(f(U_u \times V_u)) < \frac{1}{4}$.

Por el Lema 4.8 existen $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n \in \{U_u : u \in S\}$ tales que $S = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, $U_i = U_{u_i}$ para alguna $u_i \in S$, $M_S \in U_1$ y $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. Sea $V = V_{u_1} \cap \ldots \cap V_{u_n}$. Se tiene que $V$ es una vecindad abierta de $y$ en $T$. Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, como $\text{diám}(f(U_i \times V)) < \frac{1}{4}$, se sigue que $f(U_i \times V) \subsetneq S^1$. Procediendo como en la prueba de la Afirmación 1 del Lema 4.9 (en el que se aprovecha que conocemos el comportamiento geométrico de la función exp), tenemos que $f|_{U_i\times V}$ se puede levantar; vamos a escoger un levantamiento $h_i : U_i \times V \to \mathbb{R}$ de $f|_{U_i\times V}$, inductivamente.

Como $M_S \in U_1$, $(M_S, y) \in U_1 \times V$, así que podemos definir $h_1 : U_1 \times V \to \mathbb{R}$ que cumpla $h_1(M_S, y) = h(M_S, y) = h_y(M_S, y)$. Veamos que $h_1 = g|_{U_1\times V}$. Para empezar, como $V$ es una intersección de intervalos, $V$ también es un intervalo y, por tanto, es conexo. De modo que $\{M_S\} \times V$ es un subconjunto conexo de $U_1 \times V$ y de $\{M_S\} \times T$. Así, resulta que $h_1|_{\{M_S\}\times V}$ y $h|_{\{M_S\}\times V}$ son levantamientos de $f|_{\{M_S\}\times V}$ que coinciden en el punto $(M_S, y)$ y, por tanto, $h_1|_{\{M_S\}\times V} = h|_{\{M_S\}\times V}$. Dada $v \in V$, tenemos que $h_1(M_S, v) = h(M_S, v) = h_v(M_S, v)$. Notemos que $U_1 \times \{v\}$ es un subconjunto conexo de $U_1 \times V$ y de $S \times \{v\}$, entonces $h_1|_{U_1\times\{v\}}$ y $h_v|_{U_1\times\{v\}}$ son levantamientos de $f|_{U_1\times\{v\}}$ tales que $h_1(M_S, v) = h_v(M_S, v)$. Por tanto $h_1|_{U_1\times\{v\}} = h_v|_{U_1\times\{v\}} = g|_{U_1\times\{v\}}$ (por la definición de $g$). Como esto se vale para cada $v \in V$, concluimos que $h_1 = g|_{U_1\times V}$.

Inductivamente, supongamos que hemos definido $h_1, \ldots, h_i$ de tal manera que $i < n$ y $h_i = g|_{U_i\times V}$. Vamos a definir $h_{i+1}$. Elegimos un punto $p \in U_i \cap U_{i+1}$. Ya tenemos definido $h_i(p, y)$ y es igual a $g(p, y)$, de forma que podemos elegir el levantamiento

$h_{i+1} : U_{i+1} \times V \to \mathbb{R}$ de $f|_{U_{i+1}\times V}$ que cumpla $h_{i+1}(p, y) = g(p, y) = h_i(p, y)$. El conjunto $\{p\}\times V$ es un subconjunto conexo de $U_{i+1}\times V$ y de $U_i\times V$. Así que $h_{i+1}|_{\{p\}\times V}$ y $h_i|_{\{p\}\times V}$ son levantamientos de $f|_{\{p\}\times V}$ que coinciden en el punto $(p, y)$ y, por tanto, son iguales. Luego, para toda $v \in V$, $h_{i+1}(p, v) = h_i(p, v) = g(p, v) = h_v(p, v)$. Dado $v \in V$, $U_{i+1} \times \{v\}$ es un subconjunto conexo de $U_{i+1} \times V$ y de $S \times \{v\}$, de donde $h_{i+1}|_{U_{i+1}\times\{v\}}$ y $h_v|_{U_{i+1}\times\{v\}}$ son levantamientos de $f|_{U_{i+1}\times\{v\}}$ que coinciden en $(p, v)$ y, por tanto, son iguales. Luego, $h_{i+1}|_{U_{i+1}\times\{v\}} = h_v|_{U_{i+1}\times\{v\}} = g|_{U_{i+1}\times\{v\}}$ y como esto ocurre para toda $v \in V$, concluimos que $h_{i+1} = g|_{U_{i+1}\times V}$. Esto termina la inducción.

Por tanto, hemos seleccionado levantamientos $h_i : U_i \times V \to \mathbb{R}$ de $f|_{U_i\times V}$ tales que $h_i = g|_{U_i\times V}$. Como $h_i$ es continua y $U_i \times V$ es abierto. concluimos que $g|_{U_i\times V}$ es continua para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Esto prueba que $g$ es continua en $S \times V$. En particular, $g$ es continua en $(x, y)$. Por tanto, $g$ es continua. ■

**4.11 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff, sea $f : C(X) \to S^1$ una función continua y sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(X)$. Dado $A \in C(X)$, consideremos dos arcos ordenados $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $A$ a $X$ en $C(X)$. Si $h_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ y $h_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ son levantamientos de $f|_{\mathcal{A}}$ y $f|_{\mathcal{B}}$, respectivamente, tales que $h_{\mathcal{A}}(X) = t_0 = h_{\mathcal{B}}(X)$, entonces $h_{\mathcal{A}}(A) = h_{\mathcal{B}}(A)$.*

*Demostración.* Definimos la función $g : \mathcal{A}\times\mathcal{B} \to S^1$ de acuerdo a la regla $g(C, D) = f(C \cup D)$. Notemos que la función $g$ está bien definida pues, dados $C \in \mathcal{A}$ y $D \in \mathcal{B}$ tenemos que $A \subset C \cup D$, así que $C \cup D \in C(X)$. Sea $u$ la función unión definida en el Lema 3.12, como $g = f \circ [u|_{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}]$ y las funciones $f$ y $u$ son continuas, la función $g$ es también continua. Por el Lema 4.10 existe un levantamiento $j$ de $g$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tal que $j(X, X) = t_0$.

**Afirmación 1.** $j(\mathcal{A} \times \{X\}) = \{t_0\} = j(\{X\} \times \mathcal{B})$.

Si $C \in \mathcal{A}$, entonces $g(C, X) = f(X) = t_0$. Como $j$ es continua, tenemos que $j(\mathcal{A}\times\{X\})$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ tal que $\exp(j(\mathcal{A}\times\{X\})) = \{t_0\}$, así que $j(\mathcal{A} \times \{X\})$ es un conjunto de un solo punto y $j|_{\mathcal{A}\times\{X\}}$ es la función constante $t_0$. Análogamente, $j|_{\{X\}\times\mathcal{B}}$ es la función constante $t_0$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

Consideremos la función continua $j|_{\mathcal{A}\times\{A\}} : \mathcal{A} \times \{A\} \to \mathbb{R}$. Como $(X, A) \in \{X\} \times \mathcal{B}$, tenemos que $j|_{\mathcal{A}\times\{A\}}(X, A) = t_0$. Similarmente, $j|_{\{A\}\times\mathcal{B}}(A, X) = t_0$. Sea $k_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \{A\} \to \mathbb{R}$ la función dada por la regla de asignación $k_{\mathcal{A}}(C, A) = h_{\mathcal{A}}(C)$. Como $\exp(k_{\mathcal{A}}(C, A)) = \exp(h_{\mathcal{A}}(C)) = f(C) = g(C, A)$ tenemos que $k_{\mathcal{A}}$ es un levantamiento de $g|_{\mathcal{A}\times\{A\}}$ tal que $k_{\mathcal{A}}(X, A) = h_{\mathcal{A}}(X) = t_0$. Como $j|_{\mathcal{A}\times\{A\}}$ es un levantamiento de $g|_{\mathcal{A}\times\{A\}}$ tal que $j|_{\mathcal{A}\times\{A\}}(X, A) = t_0$, del Lema 4.7 se sigue que $k_{\mathcal{A}} =$

$j|_{\mathcal{A}\times\{A\}}$. Análogamente la función $k_{\mathcal{B}} : \{A\} \times \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ dada por la regla de asignación $k_{\mathcal{B}}(A, C) = h_{\mathcal{B}}(C)$ satisface $k_{\mathcal{B}} = j|_{\{A\}\times\mathcal{B}}$.

Así, $h_{\mathcal{A}}(A) = k_{\mathcal{A}}(A, A) = j|_{\mathcal{A}\times\{A\}}(A, A) = j|_{\{A\}\times\mathcal{B}}(A, A) = k_{\mathcal{B}}(A, A) = h_{\mathcal{B}}(A)$. ■

**4.12 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $x \in X$. $M(x)$ tiene la propiedad b).*

*Demostración.* Sea $f : M(x) \to S^1$ una función continua. Elegimos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(X)$. Dado $A \in M(x)$, consideremos un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ que empieza en $\{x\}$; el Lema 4.3(b) implica que $\mathcal{A} \subset M(x)$. Por el Lema 4.9 existe un levantamiento $h_{\mathcal{A}}$ de $f|_{\mathcal{A}}$ tal que $h_{\mathcal{A}}(X) = t_0$. Definimos la función $h : M(x) \to S^1$ con la regla $h(A) = h_{\mathcal{A}}(A)$; por el Lema 4.11 sabemos que la función $h$ no depende de la elección de $\mathcal{A}$. Probaremos que la función $h$ es continua.

Sean $A_0 \in M(x)$ y $U$ una vecindad abierta básica de $h(A_0)$ en $\mathbb{R}$ tal que diám$(U) <$ 1. La función exp es abierta, así que $\exp(U)$ es un abierto contenido propiamente en $S^1$. Por la continuidad de $f$ existe una vecindad abierta básica $\mathcal{U}$ de $A_0$ en $C(X)$ que satisface que $f(\mathcal{U}) \subset \exp(U)$. Para cada $A \in \mathcal{U} \cap M(x)$ tenemos que $x \in A_0 \cap A$, así que $A_0 \cup A \in M(x)$ y, usando el Lema 3.3, resulta que $A_0 \cup A \in \mathcal{U}$. De esta forma, $A_0 \cup A \in \mathcal{U} \cap M(x)$. Consideremos arcos ordenados largos $\mathcal{A}_{A_0}$ y $\mathcal{A}_A$ que empiezan en $\{x\}$ tales que $\{A_0, A_0 \cup A\} \subset \mathcal{A}_{A_0}$ y $\{A, A_0 \cup A\} \subset \mathcal{A}_A$. Como $A_0$ y $A \in M(x)$, del Lema 4.3(a) se sigue que $\mathcal{A}_{A_0} \subset M(x)$ y $\mathcal{A}_A \subset M(x)$.

Consideremos los conjuntos $\mathcal{B}_{A_0} = [A_0, A_0 \cup A]_{\mathcal{A}_{A_0}}$ y $\mathcal{B}_A = [A, A_0 \cup A]_{\mathcal{A}_A}$ que, de acuerdo al Corolario 2.22(b), son arcos ordenados. Por el Lema 4.9, existe un levantamiento $h_{\mathcal{B}_{A_0}}$ de $f|_{\mathcal{B}_{A_0}}$ tal que $h_{\mathcal{B}_{A_0}}(A_0) = h(A_0)$. Por la definición de $h$ y el Lema 4.11, tenemos que $h|_{\mathcal{B}_{A_0}} = h_{\mathcal{B}_{A_0}}$; como $h_{\mathcal{B}_{A_0}}$ es una función continua, $h(\mathcal{B}_{A_0})$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Análogamente $h(\mathcal{B}_A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Como $A_0, A$ y $A_0 \cup A \in \mathcal{U}$, del Lema 2.16 se sigue que $\mathcal{B}_{A_0} \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{B}_A \subset \mathcal{U}$. Como $h|_{\mathcal{B}_{A_0}}$ es un levantamiento de $f|_{\mathcal{B}_{A_0}}$ tenemos que $h(\mathcal{B}_{A_0}) \subset \exp^{-1}(\exp(U))$. Análogamente $h(\mathcal{B}_A) \subset \exp^{-1}(\exp(U))$. Como $h(A_0 \cup A) \in h(\mathcal{B}_{A_0}) \cap h(\mathcal{B}_A)$, $h(\mathcal{B}_{A_0}) \cup h(\mathcal{B}_A)$ es un subconjunto conexo de $\exp^{-1}(\exp(U))$, que es la unión de una cantidad numerable de intervalos con diámetro menor que 1 ajenos dos a dos, y cada uno de ellos es un trasladado de $U$, así que cada uno de ellos es una componente de $\exp^{-1}(\exp(U))$. En particular, $U$ es una componente de $\exp^{-1}(\exp(U))$. Ya que $h(\mathcal{B}_{A_0}) \cup h(\mathcal{B}_A)$ es conexo y $h(A_0) \in U \cap (h(\mathcal{B}_{A_0}) \cup h(\mathcal{B}_A))$ podemos concluir que $h(\mathcal{B}_{A_0}) \cup h(\mathcal{B}_A) \subset U$ y, en particular, $h(A) \in U$. Así, hemos probado que $h(\mathcal{U} \cap M(x)) \subset U$, así que la función $h$ es continua.

Por la definición de $h$, tenemos que $\exp \circ h(A) = f(A)$ para toda $A \in M(x)$, así que $h$ es un levantamiento de $f$ en $M(x)$. ■

**4.13 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $f : C(X) \to S^1$ una función continua. Dado $A \in C(X)$, y dados $x, y \in A$, si $h_x : M(x) \to S^1$ es un levantamiento de $f|_{M(x)}$, $h_y : M(y) \to S^1$ es un levantamiento de $f|_{M(y)}$ y se cumple que $h_x(X) = h_y(X)$, entonces $h_x(A) = h_y(A)$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado de $A$ a $X$. Como $A \in M(x) \cap M(y)$ tenemos que $\mathcal{A} \subset M(x) \cap M(y)$, pues todo $B \in \mathcal{A}$ cumple que $A \subset B$ y entonces $\{x, y\} \subset B$. Así, $h_x|_{\mathcal{A}}$ y $h_y|_{\mathcal{A}}$ son levantamientos de $f|_{\mathcal{A}}$ tales que $h_x|_{\mathcal{A}}(X) = h_y|_{\mathcal{A}}(X)$, por el Lema 4.7 tenemos que $h_x|_{\mathcal{A}} = h_y|_{\mathcal{A}}$, de donde $h_x(A) = h_y(A)$. ■

**4.14 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Sea $U$ un subconjunto de $X$. Definimos $I(U) = \{C \in C(X) : C \cap \mathrm{cl}_X(U) \neq \emptyset\}$. Se tiene que:*

*(a)* $I(U) = \bigcup\{M(x) : x \in \mathrm{cl}_X(U)\}$, *y además*

*(b)* $I(U)$ *es cerrado en* $C(X)$.

*Demostración.* (a) Sea $C \in C(X)$. Supongamos que $C \in I(U)$, entonces $C \cap \mathrm{cl}_X(U) \neq \emptyset$. Tomemos $y \in C \cap \mathrm{cl}_X(U)$, tenemos que $y \in \mathrm{cl}_X(U)$ y $C \in M(y)$, así que $C \in \bigcup\{M(x) : x \in \mathrm{cl}_X(U)\}$ y, por tanto, $I(U) \subset \bigcup\{M(x) : x \in \mathrm{cl}_X(U)\}$. Supongamos ahora que existe $y \in \mathrm{cl}_X(U)$ tal que $C \in M(y)$. Tenemos que $y \in C \cap \mathrm{cl}_X(U)$. De esta forma $C \cap \mathrm{cl}_X(U) \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $C \in I(U)$. Así, obtenemos que $I(U) \supset \bigcup\{M(x) : x \in \mathrm{cl}_X(U)\}$, lo que completa la prueba.

(b) Por el Lema 2.1(ii) sabemos que $\{C \in 2^X : \mathrm{cl}_X(U) \cap C \neq \emptyset\}$ es un conjunto cerrado en $2^X$. Como $I(U) = \{C \in 2^X : \mathrm{cl}_X(U) \cap C \neq \emptyset\} \cap C(X)$, tenemos que $I(U)$ es cerrado en $C(X)$.

■

**4.15 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $x \in X$. Dado un abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$ tal que $M(x) \subset \mathcal{U}$, existe un subconjunto abierto $U$ de $X$ tal que $x \in U$ e $I(U) \subset \mathcal{U}$.*

*Demostración.* Vamos a proceder por contradicción. Supongamos que, dada cualquier vecindad abierta $U$ de $x$ en $X$, existen $y_U \in \mathrm{cl}_X(U)$ y $A_{y_U} \in M(y_U)$ tales que $A \notin \mathcal{U}$. El conjunto $I(U)$ cumple que

$$I(U) \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset \tag{4.1}$$

(pues $A_{y_X} \in I(U) \setminus \mathcal{U}$). El Lema 4.14 nos dice que $I(U)$ es cerrado en $C(X)$, así que $I(U) \setminus \mathcal{U}$ es compacto.

**Afirmación 1.** Dados subconjuntos abiertos $U_1$ y $U_2$ de X tales que $U_1 \subset U_2$, se tiene que $I(U_1) \setminus \mathcal{U} \subset I(U_2) \setminus \mathcal{U}$.

Como $\mathrm{cl}_X(U_1) \subset \mathrm{cl}_X(U_2)$, tenemos que $I(U_1) \subset I(U_2)$ y, por lo tanto, $I(U_1) \setminus \mathcal{U} \subset I(U_2) \setminus \mathcal{U}$.

**Afirmación 2.** La familia de conjuntos $\mathfrak{I} = \{I(U) \setminus \mathcal{U} : U$ es abierto de X y $x \in U\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $U_1, \ldots, U_n$ abiertos de $X$ tales que $x \in U_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$; como $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ es una vecindad abierta de $x$, por (4.1) tenemos que $I(U_1 \cap \ldots \cap U_n) \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$. Por la Afirmación 1 resulta que $I(U_1 \cap \ldots \cap U_n) \setminus \mathcal{U} \subset [I(U_1) \setminus \mathcal{U}] \cap \ldots \cap [I(U_n) \setminus \mathcal{U}]$, de donde podemos concluir que $[I(U_1) \setminus \mathcal{U}] \cap \ldots \cap [I(U_n) \setminus \mathcal{U}] \neq \emptyset$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2.

Por la Afirmación 2 y la compacidad de $C(X)$, existe un subcontinuo $B$ de $X$ tal que $B \in \bigcap \mathfrak{I}$. A partir de aquí tenemos dos posibilidades. Si $x \in B$, entonces $B \in M(x) \subset \mathcal{U}$, lo cual contradice que $B \in \bigcap \mathfrak{I}$ . Si $x \notin B$, entonces existe una vecindad abierta $V$ de $x$ en $X$ tal que $\mathrm{cl}_X(V) \cap B = \emptyset$ (puesto que $X$ es regular). Como $B \in \bigcap \mathfrak{I}$, tenemos que $B \in I(V) \setminus \mathcal{U}$ y, por lo tanto, $B \cap \mathrm{cl}_X(V) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción. ■

**4.16 Lema.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff y sea $f$ una función continua de $X$ a $S^1$. Sea $A$ un subconjunto cerrado de $X$, si $h : A \to \mathbb{R}$ es un levantamiento de $f|_A$, entonces existe un subconjunto abierto $O$ de $X$ tal que $A \subset O$ y existe un levantamiento $g$ de $f|_O$ tal que $g|_A = h$.*

*Demostración.* Dado $x \in A$, sea $U_x = (h(x) - \frac{1}{8}, h(x) + \frac{1}{8})$. Notemos que $\exp(U_x)$ es abierto en $S^1$ y que $\exp|_{U_x} : U_x \to \exp(U_x)$ es un homeomorfismo. Sea $C_x = h^{-1}([h(x) - \frac{1}{18}, h(x) + \frac{1}{18}]) \subset A$. Entonces $C_x$ es cerrado en $X$ y $x \in \mathrm{int}_A(C_x)$. Dada $y \in C_x$, $h(y) \in U_x$, así que $f(y) = \exp(h(y)) \subset \exp(U_x)$. Lo anterior muestra que $C_x \subset f^{-1}(\exp(U_x))$.

Consideremos la cubierta abierta de $A$ dada por $\{\mathrm{int}_A(C_x) : x \in A\}$, por la compacidad de $A$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in A$ de forma que $\{\mathrm{int}_A(C_{x_1}), \ldots, \mathrm{int}_A(C_{x_n})\}$ es una cubierta de $A$. Notemos que el conjunto $\{C_{x_1}, \ldots, C_{x_n}\}$ es una cubierta de $A$ de conjuntos cerrados (en $X$) y que, además, $\{f^{-1}(\exp(U_{x_1})), \ldots, f^{-1}(\exp(U_{x_n}))\}$ es una cubierta abierta (en $X$) de $A$ tal que $C_{x_i} \subset f^{-1}(\exp(U_{x_i}))$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Por el Lema 4.2 existe una cubierta abierta (en $X$) $\{W_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ de $A$ tal que si $W_i \cap W_j \neq \emptyset$, entonces $C_{x_i} \cap C_{x_j} \neq \emptyset$ y $x_i \in C_{x_i} \subset W_i \subset f^{-1}(\exp(U_{x_i}))$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos la función $h_i : W_i \to \mathbb{R}$ como $h_i(x) := [\exp|_{U_{x_i}}]^{-1} f(x)$. Notemos que si $u \in \mathcal{W}_i$, entonces $h_i(u) \in U_{x_i}$, razón por la cual $d(h_i(u), h(x_i)) < \frac{1}{8}$. Utilizaremos el Lema 4.1 para obtener una función $g$ que extiende a todas las funciones $h_i$. Ya sabemos que $\{W_i : i \in \{1, \ldots, n\}\}$ es una cubierta abierta de $A$. Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, la función $h_i$ es continua puesto que $[\exp|_{U_{x_i}}]^{-1}$ y $f$ lo son. Para poder utilizar el Lema 4.1 nos hace falta verificar que, dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $W_i \cap W_j \neq \emptyset$, se tiene que $h_i|_{W_i \cap Wj} = h_j|_{W_i \cap Wj}$.

**Afirmación 1.** Dados $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $x \in W_i \cap A$, se tiene que $h_i(x) = h(x)$. En particular, $h_i(x_i) = h(x_i)$.

Tenemos dos posiblidades para $x$:

1. Si $x \in C_{x_i}$, entonces

$$h_i(x) = [\exp|_{U_{x_i}}]^{-1}(f(x)) = [\exp|_{U_{x_i}}]^{-1}(\exp(h(x))).$$

   Como $h(C_{x_i}) \subset U_{x_i}$, tenemos que $h(x) \in U_{x_i}$ y, por lo tanto, $h_i(x) = h(x)$.

2. Si $x \in W_i \setminus C_{x_i}$, entonces existe $x_j$ tal que $x \in C_{x_j} \subset W_j$. Como $x \in W_i \cap W_j$ entonces $C_{x_i} \cap C_{x_j} \neq \emptyset$. Tomemos $y \in C_{x_i} \cap C_{x_j}$. Como diám$(h(C_a)) < \frac{1}{8}$ para toda $a \in A$, tenemos que $d(h(x), h(x_i)) \leq d(h(x), h(y)) + d(h(y), h(x_i)) < \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$. De aquí $h(x) \in B_{\frac{1}{4}}(h(x_i))$ y por lo tanto $h_i(x) = h(x)$.

Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

Ahora tomemos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $W_i \cap W_j \neq \emptyset$. Sea $x \in W_i \cap W_j$. Dadas $k \in \{1, \ldots, n\}$ y $u \in W_k$, como ya vimos que $d(h_k(u), h_k(x_k)) < \frac{1}{8}$, por la Afirmación 1, tenemos que $d(h_i(x_i), h_j(x_j)) = d(h(x_i), h(x_j))$. Como $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ resulta que $C_{x_i} \cap C_{x_j} \neq \emptyset$, así que existe $y \in C_{x_i} \cap C_{x_j}$. De esta forma, $d(h(x_i), h(x_j)) \leq d(h(x_i), h(y)) + d(h(y), h(x_j)) \leq \frac{1}{18} + \frac{1}{18} < \frac{1}{8}$ (puesto que $h(C_{x_i}) \subset [h(x_i) - \frac{1}{18}, h(x_i) + \frac{1}{18}]$). Así, por la Afirmación 1, podemos concluir que $d(h_i(x), h_j(x)) \leq d(h_i(x), h_i(x_i)) + d(h_i(x_i), h_j(x_j)) + d(h_j(x_j), h_j(x)) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$.

Hemos probado que $d(h_i(x), h_j(x)) < 1$. Además sabemos que $\exp(h_i(x)) = f(x) = \exp(h_j(x))$. De modo que $\exp(h_i(x)) = \exp(h_j(x))$. Lo anterior implica que la diferencia entre $h_i(x)$ y $h_j(x)$ es un entero y como $d(h_i(x), h_j(x)) < 1$, concluimos que $h_i(x) = h_j(x)$.

El conjunto $O = \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ es un abierto en $X$. Del Lema 4.1 se sigue que existe una función continua $g : O \to \mathbb{R}$ que extiende a todas las funciones $h_i$. Como $\exp \circ h_i = f$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $h_i$ es un levantamiento de $f|_{W_i}$; así, el hecho de que $g$ es continua implica que $g$ es un levantamiento de $f|_O$. Como $g$ extiende a cada $h_i$ y $A \subset O$, por la Afirmación 1 podemos concluir que $g|_A = h$. ■

**4.17 Teorema.** *Si $X$ es un continuo de Hausdorff, entonces $C(X)$ tiene la propiedad b).*

*Demostración.* Sea $f : C(X) \to S^1$ una función continua. Probaremos que existe un levantamiento de $f$. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp(t_0) = f(X)$. Por el Lema 4.12, dado $x \in X$ existe un levantamiento $h_x : M(x) \to S^1$ de $f|_{M(x)}$ tal que $h_x(X) = t_0$. Para cada $A \in C(X)$ elegimos un elemento $x_A \in A$ y definimos $h(A) = h_{x_A}(A)$. Por el Lema 4.13 tenemos que el valor de $h(A)$ no depende de la elección de $x_A$, así que la función $h$ está bien definida. Probaremos que la función $h$ es continua.

Sea $A \in C(X)$ y sea $O$ una vecindad abierta de $h(A)$ en $\mathbb{R}$.

Por el Lema 4.16, existe un abierto $\mathcal{O}_{x_A}$ en $C(X)$ tal que $M(x_A) \subset \mathcal{O}_{x_A}$ y existe un levantamiento $g_{x_A}$ de $f|_{\mathcal{O}_{x_A}}$ tal que $g_{x_A}|_{M(x_A)} = h_{x_A} = h|_{M(x_A)}$. Adicionalmente, por el Lema 4.15 existe una vecindad abierta $U_{x_A}$ de $x_A$ en $X$ tal que $I(U_{x_A}) \subset \mathcal{O}_{x_A}$. Dado $B \in I(U_{x_A})$, existe $x_B \in \mathrm{cl}_X(U_{x_A})$ tal que $B \in M(x_B)$. Notemos que $M(x_B) \subset I(U_{x_A})$. Sea $\mathcal{A}$ un arco ordenado de $B$ a $X$. Dado que $\mathcal{A} \subset M(x_B) \subset I(U_{x_A})$, se sigue que $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{x_A}$. Aplicando el Lema 4.7, obtenemos que $g_{x_A}|_{\mathcal{A}}(B) = h_{x_B}(B) = h|_{\mathcal{A}}(B)$. Así, podemos concluir que $g_{x_A}|_{I(U_{x_A})} = h|_{I(U_{x_A})}$.

El abierto $\mathcal{U} = \langle U_{x_A}, X\rangle$ es una vecindad de $A$ en $C(X)$. Dado $B \in \mathcal{U}$, como $B \cap U_{x_A} \neq \emptyset$, existe $x_B \in B \cap U_{x_A}$. Como $B \in M(x_B)$, de acuerdo con el Lema 4.14(a), tenemos que $B \in I(U_{x_A})$, así que $g_{x_A}(B) = h(B)$. Por lo anterior, resulta que $h|_{\mathcal{U}} = g_{x_A}|_{\mathcal{U}}$. Dado que $g_{x_A}$ es una función continua, tenemos que existe una vecindad abierta $\mathcal{V}$ de $A$ en $\mathcal{U}$ tal que $g_{x_A}(\mathcal{V}) \subset O$; es decir, tal que $h(\mathcal{V}) \subset O$. Como $\mathcal{V}$ es un abierto de $C(X)$, podemos concluir que la función $h$ es continua. ■

El siguiente resultado se sigue inmediatamente del Teorema 4.6.

**4.18 Corolario.** *Si $X$ es un continuo de Hausdorff, entonces $C(X)$ es unicoherente.*

# Capítulo 5

# Selecciones

Una *selección para* $C(X)$ es una función continua $s : C(X) \to X$ tal que $s(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$. En el caso de los continuos métricos, se sabe que los únicos continuos que admiten una selección de este tipo son los llamados *dendroides*. En el presente capítulo extenderemos este resultado a los continuos de Hausdorff.

Para la siguiente definición es necesario recordar la definición de unicoherencia (ver el inicio del Capítulo 4).

**5.1 Definición.** Un continuo de Hausdorff es *hereditariamente unicoherente* si cada uno de sus subcontinuos es unicoherente.

**5.2 Definición.** Un continuo de Hausdorff es un *dendroide* si es hereditariamente unicoherente y conexo por arcos generalizados.

**5.3 Lema.** *Si $s$ es una selección para $C(X)$, la función $s|_{F_1(X)}$ es un homeomorfismo entre $F_1(X)$ y $X$.*

*Demostración.* Como $s$ es una selección, para cada $\{x\} \in F_1(X)$ tenemos que $s(\{x\}) = x$. Claramente, $s|_{F_1(X)}$ es un biyección entre $F_1(X)$ y $X$. Como $s|_{F_1(X)}$ es una función continua definida de un compacto a un espacio Hausdorff, $s|_{F_1(X)}$ es un homeomorfismo. ■

**5.4 Corolario.** *Si existe una selección para $C(X)$, existe una retracción de $C(X)$ a $F_1(X)$.*

*Demostración.* Sea $s : C(X) \to X$ una selección. Probaremos que la función $[s|_{F_1(X)}]^{-1} \circ s : C(X) \to F_1(X)$ es una retracción. Como $s|_{F_1(X)}$ y $s$ son continuas,

$[s|_{F_1(X)}]^{-1} \circ s$ es una función continua. Finalmente, observemos que $[s|_{F_1(X)}]^{-1} \circ s(\{x\}) = \{x\}$. ■

El siguiente resultado de M. M. McWaters y J. H. Reed nos será de gran utilidad para la prueba del teorema principal de este capítulo.

**5.5 Lema.** *(ver [14, Teorema 2.3, p. 558]) Sea $X$ un continuo de Hausdorff localmente conexo y unicoherente. Dada una retracción $r$ de $X$, resulta que $r(X)$ es unicoherente.*

**5.6 Definición.** Un continuo de Hausdorff $Z$ es un *círculo generalizado* si existe un arco generalizado $T$ y una función continua y suprayectiva $p : T \to Z$ tal que $p\big(\text{mín}(T)\big) = p\big(\text{máx}(T)\big)$, $p|_{(\text{mín}(T),\text{máx}(T))}$ es inyectiva y $p\big(\big(\text{mín}(T), \text{máx}(T)\big)\big) \cap p\big(\{\text{mín}(T), \text{máx}(T)\}\big) = \emptyset$.

Observemos que, de acuerdo a la definición anterior, $Z$ es un cociente de $T$ con la topología inducida por $p$. Además, la función $p|_{(\text{mín}(T),\text{máx}(T))}$ es un encaje.

**5.7 Lema.** *Dado $Z$ un círculo generalizado, $Z$ no es unicoherente.*

*Demostración.* Dado que $Z$ es un círculo generalizado, existen un arco generalizado $T$ y una función continua y suprayectiva $p : T \to X$ tal que $p\big(\text{mín}(T)\big) = p\big(\text{máx}(T)\big)$ y $p|_{(\text{mín}(T),\text{máx}(T))}$ es inyectiva. Como $T$ cumple con la condición (b) en la Definición 1.3, existe $t \in T$ tal que $\text{mín}(T) < t < \text{máx}(T)$. Definimos $A = p\big(\big[\text{mín}(T), t\big]\big)$ y $B = p\big(\big[t, \text{máx}(T)\big]\big)$; como $p$ es continua y $\{[\text{mín}(T), t], [t, \text{máx}(T)]\} \subset C(T)$, $A$ y $B \in C(Z)$. Puesto que $p$ es suprayectiva, tenemos que $Z = A \cup B$. Dado que $t \in \big(\text{mín}(T), \text{máx}(T)\big)$, que la función $p|_{(\text{mín}(T),\text{máx}(T))}$ es inyectiva y que además $p\big(\big(\text{mín}(T), \text{máx}(T)\big)\big) \cap p\big(\{\text{mín}(T), \text{máx}(T)\}\big) = \emptyset$, resulta que el conjunto $A \cap B = \{p\big(\text{mín}(T)\big), p(t)\}$, que es disconexo. ■

**5.8 Lema.** *(ver [4, 3.5, p. 123]) Sea $Z$ un círculo generalizado. Entonces $Z$ es localmente conexo.*

**5.9 Lema.** *(ver [13, 10]) Sea $X$ un continuo $T_2$. Si $X$ es localmente conexo, entonces $C(X)$ es localmente conexo.*

**5.10 Corolario.** *Si $Z$ es un círculo generalizado, entonces no existe una selección para $C(Z)$.*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que existe una selección para $C(Z)$. Por el Corolario 5.4, sabemos que existe una retracción de $C(Z)$ a $F_1(Z)$. El Lema 5.8 nos dice que $Z$ es localmente conexo; de acuerdo con el Lema 5.9, resulta que $C(Z)$ es localmente conexo. Por el Corolario 4.18, $C(Z)$ es unicoherente, así que se sigue de los Lemas 5.5 y 5.3 que $Z$ es unicoherente. Esta última afirmación contradice al Lema 5.7. ■

**5.11 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Si existe una selección para $C(X)$, entonces $X$ es conexo por arcos generalizados.*

*Demostración.* Dados $x$ y $y \in X$, por el Corolario 2.28, en $C(X)$ existen arcos ordenados largos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ que empiezan en $\{x\}$ y en $\{y\}$, respectivamente. De acuerdo con el el Corolario 2.20 $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son arcos generalizados. Considerando $\mathcal{A}$ con el orden de la inclusión y $\mathcal{B}$ con el orden inverso, tenemos que $\text{mín}(\mathcal{A}) = \{x\}$, $\text{máx}(\mathcal{A}) = X = \text{mín}(\mathcal{B})$ y $\text{máx}(\mathcal{B}) = \{y\}$, aplicando el Lema 3.37, existe un arco generalizado $T$ y un encaje $\varphi : T \to C(X)$ tal que $\varphi(\text{mín}(T)) = \{x\}$ y $\varphi(\text{máx}(T)) = \{y\}$. Como $s$ es una selección, $s \circ \varphi$ es una función continua de $T$ a $X$ tal que $s(\varphi(\text{mín}(T))) = x$ y $s(\varphi(\text{máx}(T))) = y$. De acuerdo con el Lema 3.19, existe un arco generalizado $T'$ y un encaje $\varphi' : T' \to X$ tal que $\varphi'(\text{mín}(T')) = x$ y $\varphi'(\text{máx}(T')) = y$. De esta forma, hemos probado que $X$ es conexo por arcos generalizados. ■

**5.12 Teorema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Si existe una selección para $C(X)$, entonces $X$ es un dendroide.*

*Demostración.* De acuerdo con el Lema 5.11, $X$ es conexo por arcos generalizados. Probaremos que $X$ es hereditariamente unicoherente. Supongamos, por el contrario, que existe un subcontinuo $C \in C(X)$ que no es unicoherente. Sean $A$ y $B \in C(X)$ tales que $A \cup B = C$ y $A \cap B$ es disconexo. Sean $H$ y $K$ subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de $X$ tales que $H \cup K = A \cap B$. Tomemos $p \in H$ y $q \in K$. Como $s(C(A)) \subset A$, tenemos que $s|_{C(A)}$ es una selección para $C(A)$, el Lema 5.11 implica que $A$ es conexo por arcos generalizados. Como $p \neq q$, existe $S \in C(A)$ tal que $S$ es un arco generalizado y tiene como puntos extremos a $p$ y a $q$. Análogamente, existe $T \in C(B)$ tal que $T$ es un arco generalizado y tiene como puntos extremos a $p$ y a $q$.

Podemos suponer que $p = \text{mín}(S)$. Dado que $A \cap B$ es disconexo, se sigue que $S \not\subset A \cap B$, pues $S$ es conexo y cumple que $H \cap S \neq \emptyset$ y $K \cap S \neq \emptyset$. Por lo anterior, dado que $S \subset A$, resulta que $S \setminus B \neq \emptyset$. Sea $s_0 \in S \setminus B$. Tenemos que $p < s_0 < q$. Definimos

$$p' = \text{máx}(\{x \in [p, s_0]_S \cap T\}) \text{ y } q' = \text{mín}(\{x \in [s_0, q]_S \cap T\}).$$

Como $T \cap [p, s_0]_S$ y $T \cap [s_0, q]_S$ son subconjuntos cerrados de $S$, resulta que $p' \in [p, s_0]_S \cap T$ y $q' \in [s_0, q]_S \cap T$. Dado que $s_0 \notin B$, $s_0 \notin T$ y, por tanto, $p' < s_0 < q'$. Además, $\{p', q'\} \subset S \cap T$.

Definimos $S'$ como el intevalo en $S$ que tiene como extremos a $p'$ y $q'$, y $T'$ como el intervalo en $T$ que tiene como extremos a $q'$ y $p'$. Por la elección de $p'$ y $q'$, tenemos que $S' \cap T' = \{p', q'\}$. Consideremos el producto $S' \times T'$, la función $\alpha : S' \to S' \times T'$ definida por $\alpha(x) = ]x, q'[$ y $\beta : T' \to S' \times T'$ definida por $\beta(y) = ]q', y[$. De acuerdo con el Lema 3.37, $R = \alpha(S') \cup \beta(T')$ es un arco generalizado.

Consideremos las proyecciones $\pi_{S'}$ y $\pi_{T'}$ de $S' \times T'$ a $S'$ y a $T'$, respectivamente.

La función $\psi : R \to S' \cup T'$ definida por:

$$\psi\big(]x, y[\big) = \begin{cases} x, & \text{si } y = q', \\ \\ y, & \text{si } x = q'. \end{cases}$$

es continua. Veamos que es suprayectiva. Dado $r \in S' \cup T'$, si $r \in S'$, entonces $]r, q'[\in R$ y $\psi(]r, q'[) = r$; si $r \in T'$, entonces $]q', r[\in R$ y $\psi(]q', r[) = r$. Ahora veamos que $\psi \circ \varphi|_{(\text{mín}(R), \text{máx}(R))}$ es inyectiva. Dados $]x_1, y_1[$ y $]x_2, y_2[\ \in (\text{mín}(R), \text{máx}(R))$ tales que $\psi(]x_1, y_1[) = \psi(]x_2, y_2[)$, tenemos cuatro posibilidades:

1. Si $x_1 = x_2 = q'$, entonces $y_1 = y_2$.
2. Si $y_1 = y_2 = q'$, entonces $x_1 = x_2$.
3. Si $x_1 = y_2 = q'$, entonces $y_1 = x_2$ y $x_2 \in S' \cap T'$; como $y_1 \neq p' \neq x_2$, tenemos que $\{x_2, y_1\} = \{q'\}$.
4. Si $x_2 = y_1 = q'$, entonces $y_2 = x_1$ y $x_1 \in S' \cap T'$; como $y_2 \neq p' \neq x_1$, tenemos que $\{x_2, y_1\} = \{q'\}$.

Observemos que, dado $]x, y[\ \in R$ tal que $\psi(]x, y[) = p'$, por la definición de $\psi$ tenemos que $]x, y[\ = \ ]p', q'[\ = \text{mín}(R)$ o bien $]x, y[\ = \ ]q', p'[\ = \text{máx}(R)$; luego, resulta que

$$\psi\big(\big(\text{mín}(R), \text{máx}(R)\big)\big) \cap \psi\big(\{\text{mín}(R), \text{máx}(R)\}\big) = \emptyset.$$

De esta forma, tenemos que $\psi$ es una función continua y suprayectiva de $R$ a $S' \cup T'$ tal que $\psi(\text{mín}(R)) = p' = \psi(\text{máx}(R))$, $\psi|_{(\text{mín}(R), \text{máx}(R))}$ es inyectiva y

$\psi\big(\big(\,\text{mín}(R), \text{máx}(R)\big)\big) \cap \psi\big(\{\text{mín}(R), \text{máx}(R)\}\big) = \emptyset$. Por lo anterior, $S' \cup T'$ es un círculo generalizado.

Finalmente, observemos que la función $s|_{S'\cup T'}$ es una selección para el hiperespacio $C(S' \cup T')$, pero esto contradice el Corolario 5.10. De esta forma, hemos probado que $C(X)$ debe ser hereditariamente unicoherente, como queríamos.

$\blacksquare$

# Capítulo 6

# Contractibilidad en $C(X)$

## 6.1 Contractibilidad

**6.1 Definición.** Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Dos funciones $f, g : X \to Y$ son *homotópicas* si existen un arco generalizado $T$ y una función continua $h : X \times T \to Y$ tales que, para cada $x \in X$, $h\big(x, \text{mín}(T)\big) = f(x)$ y $h\big(x, \text{máx}(T)\big) = g(x)$.

**6.2 Definición.** Si $X$ es subespacio de $Y$, decimos que $X$ es *contráctil* en $Y$ si existe una función constante $r : X \to Y$ que es homotópica a la inclusión $e : X \to Y$.

J. K. Kelley obtuvo el siguiente resultado en 1942, sobre la contractibilidad de hiperespacios de continuos métricos.

**6.3 Teorema.** *(ver [9, Teorema 3.1]) Sea $X$ un continuo métrico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$F_1(X)$ es contráctil en $2^X$.*
2. *$2^X$ es contráctil (en sí mismo).*
3. *$C(X)$ es contráctil (en sí mismo).*

En 1977, D. G. Paulowich generalizó este resultado a los hiperespacios de continuos de Hausdorff; enunciamos aquí su teorema.

**6.4 Definición.** Sea $X$ un continuo de Hausdorff. Decimos que el hiperespacio $C(X)$ es *contráctil con una homotopía que preserva el orden* si existe un arco generalizado $T$ y una función $h : C(X) \times T \to C(X)$ que satisface las siguientes condiciones:

(a) Para cada $C \in C(X)$, se tiene que $h(C, \text{mín}(T)) = C$, $h(C, \text{máx}(T)) = X$.

(b) Dados $C, D \in C(X)$ tales que $C \subset D$ y $s, t \in T$ tales que $s \leq t$, tenemos que $h(C, s) \subset h(D, t)$.

**6.5 Teorema.** *(ver [18, Teorema 4, p. 44]) Sea $X$ un continuo de Hausdorff. Los siguientes tres enunciados son equivalentes:*

*(a) $F_1(X)$ es contráctil en $2^X$.*

*(b) $2^X$ es contráctil (en sí mismo, con una homotopía que preserva el orden).*

*(c) $C(X)$ es contráctil (en sí mismo, con una homotopía que preserva el orden).*

Con el siguiente resultado presentamos una familia de continuos de Hausdorff cuyos hiperespacios de subcontinuos son contráctiles.

**6.6 Teorema.** *Sea $X$ un arco generalizado. El hiperespacio $C(X)$ es contráctil, con una homotopía que preserva el orden.*

*Demostración.* Sea $X'$ el dual de $X$. Consideremos el espacio $X \times X'$. La función $\alpha : X \to X \times X'$ definida por $\alpha(x) = ]x, \text{mín}(X')[ = ]x, \text{máx}(X)[$ es un encaje. Similarmente, la función $\beta : X' \to X \times X$ definida por $\beta(x) = ]\,\text{máx}(X), x[$ también es un encaje. Como $\alpha(X) \cap \beta(X) = \{]\,\text{máx}(X), \text{máx}(X)[\}$, por el Lema 3.37 tenemos que $T = \alpha(X) \cup \beta(X')$ es un arco generalizado.

Consideremos la función $e_1 : X \times T \to X$ definida por

$$e_1\big(x, ]y, z[\big) = \begin{cases} x, & \text{si } z \in [x, \text{máx}(X)] \text{ y} \\ z, & \text{si } z \in [\text{mín}(X), x]. \end{cases}$$

Notemos que, cuando $z = x$, con ambas definiciones resulta $e_1(x, ]y, z[) = x$. Por tanto $e_1$ está bien definida. Ya que $e_1$ está definida en dos cerrados de $X \times T$ y en ambos es continua (pues en ambos casos $e_1$ es la restricción de una proyección), concluimos que $e_1$ es continua.

Consideremos ahora la función $e_2 : X \times T \to X$ definida por

$$e_2\big(x, ]y, z[\big) = \begin{cases} x, & \text{si } y \in [\text{mín}(X), x] \text{ y} \\ y, & \text{si } y \in [x, \text{máx}(X)]. \end{cases}$$

.

Al igual que $e_1$, $e_2$ está bien definida y es continua.

Consideremos la función $g$ definida en el Lema 3.23. Observemos que, dado $\big]x, ]y, z[\big[ \in X \times T$, tenemos que $e_1(x, ]y, z[) \leq x \leq e_2(x, ]y, z[)$. Luego, la función $h : X \times T \to C(X)$ definida por

$$h(x, ]y, z[) = g(e_1(x, ]y, z[), e_2(x, ]y, z[)) = [e_1(x, ]y, z[), e_2(x, ]y, z[)]$$

es continua.

Para ver que $h$ es una homotopía, calculemos los valores apropiados.

$$\begin{aligned} h(x, \text{mín}(T)) &= g(e_1(x, ]\,\text{mín}(X), \text{mín}(X')[), e_2(x, ]\,\text{mín}(X), \text{mín}(X')[)) \\ &= g(e_1(x, ]\,\text{mín}(X), \text{máx}(X)[), e_2(x, ]\,\text{mín}(X), \text{máx}(X)[)) = \{x\} \text{ y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x, \text{máx}(T)) &= g(e_1(x, ]\,\text{máx}(X), \text{máx}(X')[), e_2(x, ]\,\text{máx}(X), \text{máx}(X')[)) \\ &= g(e_1(x, ]\,\text{máx}(X), \text{mín}(X)[), e_2(x, ]\,\text{máx}(X), \text{mín}(X)[)) = X. \end{aligned}$$

■

**6.7 Definición.** Decimos que un subespacio $\mathcal{C} \subset C(X)$ es *contráctil por arcos ordenados* en $C(X)$ si existe una función continua de $F : \mathcal{C} \to C(C(X))$ que a cada elemento $A \in \mathcal{C}$ le asigna un arco ordenado que empieza en $A$ y termina en $X$.

**6.8 Lema.** *Sean $X$ un continuo $T_2$, $\mathcal{A}$ un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$ y $\{\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n\}$ una cubierta abierta de $\mathcal{A}$ formada por abiertos básicos de $C(X)$. Se tiene que existen $m \in \mathbb{N}$ y un conjunto $\{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m\}$ de abiertos básicos de $C(X)$ tales que $\mathcal{A} \subset \bigcup_{j=1}^m \mathcal{V}_j \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, $\{x\} \in \mathcal{V}_1$, $X \in \mathcal{V}_m$ y $(\mathcal{V}_i \cap \mathcal{A}) \cap (\mathcal{V}_j \cap \mathcal{A}) \neq \emptyset$ si y solamente si $|i - j| \leq 1$.*

*Demostración.* Como $\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$, dado $A \in \mathcal{A}$, existe una vecindad abierta básica $\mathcal{V}_A$ de $A$ en $C(X)$ tal que $\mathcal{V}_A \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$. Notemos que $\mathcal{A} = \bigcup\{\mathcal{V}_A \cap \mathcal{A} : A \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup\{\mathcal{V}_A : A \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_i$.

Por el Lema 2.16, tenemos que $\mathcal{V}_A \cap \mathcal{A}$ es un intervalo convexo para toda $A \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es un arco generalizado y $\{\mathcal{V}_A \cap \mathcal{A} : A \in \mathcal{A}\}$ es una cubierta de $\mathcal{A}$ tal que todos sus elementos son abiertos básicos de $\mathcal{A}$, por el Lema 4.8 existen $m \in \mathbb{N}$ y una subcubierta $\{\mathcal{V}_{A_1} \cap \mathcal{A}, \ldots, \mathcal{V}_{A_m} \cap \mathcal{A}\}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{V}_{A_1}$, $X \in \mathcal{V}_{A_m}$ y $(\mathcal{V}_{A_i} \cap \mathcal{A}) \cap (\mathcal{V}_{A_j} \cap \mathcal{A}) \neq \emptyset$ si y solamente si $|i - j| \leq 1$.

Finalmente, observemos que $\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_{A_j} \subset \bigcup\{\mathcal{V}_A : A \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$. ■

**6.9 Lema.** *Sea $X$ un continuo $T_2$. Dadas $x \in X$ y $\mathcal{U}$ una vecindad abierta de $\{x\}$ en $2^X$, existe una vecindad abierta $U$ de $x$ en $X$ tal que $\{x\} \in \langle U \rangle \subset \mathcal{U}$.*

*Demostración.* Podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es un abierto de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\{x\} \in \mathcal{U}$, tenemos que $x \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Dado $A \in \langle U \rangle$, se sigue que $A \subset U \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$; además, $A \cap U_i \supset A \cap U = A$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. ■

**6.10 Corolario.** *Sea $X$ un continuo de Hausdorff. Si $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$, entonces $F_1(X)$ es contráctil por arcos ordenados en $C(X)$.*

*Demostración.* Como $F_1(X)$ es contráctil en $C(X)$ existen un arco generalizado $T$ y una homotopía $h : F_1(X) \times T \to C(X)$ que preserva el orden. Para cada $x \in X$, como $\{x\} \times T$ es homeomorfo a $T$, tenemos que $\{x\} \times T$ es un arco generalizado; dado que la función $h|_{\{x\}\times T}$ es continua y preserva el orden, del Lema 3.49 se sigue que $h(\{x\} \times T)$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$.

Consideremos la función $H : F_1(X) \to C(C(X))$ definida por $H(\{x\}) = h(\{x\} \times T)$. Probaremos que la función $H$ es continua. Sean $\{x_0\} \in F_1(X)$ y $\mathfrak{U}$ una vecindad abierta básica de $H(\{x_0\})$ en $C(C(X))$. Podemos suponer que $\mathfrak{U} = \langle \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \rangle$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}_i$ es un abierto básico de $C(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Lema 6.8 sabemos que existe una cubierta finita $\{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m\}$ de $H(\{x_0\})$, formada por abiertos básicos de $C(X)$, que cumple que $\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, $\{x_0\} \in \mathcal{V}_1$, $X \in \mathcal{V}_m$ y

$$(\mathcal{V}_i \cap H(\{x_0\})) \cap (\mathcal{V}_j \cap H(\{x_0\})) \neq \emptyset$$

si y solamente si $|i - j| \leq 1$.

**Afirmación 1.** Para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, $H(\{x_0\}) \cap (\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_{i+1}) \neq \emptyset$.

Supongamos, por el contrario, que existe $i_0 \in \{1, \ldots, m-1\}$ tal que $H(\{x_0\}) \cap (\mathcal{V}_{i_0} \cap \mathcal{V}_{i_0+1}) = \emptyset$. Tenemos que $\bigcup_{i=1}^{i_0} \mathcal{V}_i$ y $\bigcup_{i=i_0+1}^{m} \mathcal{V}_i$ forman una separación en abiertos de $H(\{x_0\})$, que es conexo, lo cual es una contradicción. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

Definimos $t_0 = \text{mín}(T)$, $t_m = \text{máx}(T)$ y, para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, elegimos $t_i \in T$ tal que $h(x_0, t_i) \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_{i+1}$ Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, elegimos $t_{m+i} \in T$ tal que $h(x_0, t_{m+i}) \in H(\{x_0\}) \cap \mathcal{U}_i$ y tomamos una vecindad abierta $\mathcal{V}_{m+i}$ de $h(\{x_0\}, t_{m+i})$ contenida en $\mathcal{U}_i$. Dada $i \in \{1, \ldots, m+n\}$, como $h$ es una función continua, existe una vecindad abierta básica $\mathcal{W}_i \times V_i$ de $(\{x_0\}, t_i)$ en $C(X) \times T$ tal que $h(\mathcal{W}_i \times V_i) \subset \mathcal{V}_i$. Por el Lema 6.9, podemos suponer que $\mathcal{W}_i = \langle W_i \rangle$, donde $W_i$ es un abierto de $X$. Sea $W = \bigcap_{i=1}^{m+n} W_i$; notemos que $x_0 \in W$. Probaremos que $H(\langle W \rangle \cap F_1(X)) \subset \mathfrak{U}$.

Sea $x \in W$. Como $(\{x\}, t_{m+1}) \in \mathcal{W}_i \times V_i$, tenemos que $h(\{x\}, t_{m+i}) \in \mathcal{V}_{m+i} \subset \mathcal{U}_i$, así que $h(\{x\}, t_{m+i}) \in H(\{x\}) \cap \mathcal{U}_i$. Por otro lado, dado $h(\{x\}, t) \in H(\{x\})$, como $T$ es un arco generalizado, $t$ es comparable con todos los elementos de $\{t_0, \ldots, t_{m-1}\}$. Sea $i_0 = \text{máx}\{i \in \{0, \ldots, m-1\} : t_i \leq t\}$, entonces $t \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$.

Por la elección de $t_{i_0}$ y $t_{i_0+1}$, tenemos que $\{h(\{x\}, t_{i_0}), h(\{x\}, t_{i_0+1})\} \subset \mathcal{V}_{i_0+1}$; como $h(\{x\}, t_{i_0}) \subset h(\{x\}, t) \subset h(\{x\}, t_{i_0+1})$ (pues $h$ preserva el orden), el Lema 2.16 implica que $h(\{x\}, t) \in \mathcal{V}_{i_0+1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$. De esta forma, hemos demostrado que $H(\{x\}) \in \mathfrak{U}$. ■

**6.11 Proposición.** *Si $X$ es un continuo métrico, entonces $C(X)$ es contráctil si y solamente si $F_1(X)$ es contráctil por arcos ordenados en $C(X)$.*

*Demostración.* Por el Corolario 6.10 sabemos que, si $C(X)$ es contráctil, entonces $F_1(X)$ es contráctil por arcos ordenados en $C(X)$. Probaremos la otra implicación.

Sea $F : F_1(X) \to C(C(X))$ una función continua tal que a cada elemento $\{x\} \in F_1(X)$ le asigna un arco ordenado largo $\mathcal{A}_x$ en $C(X)$, que empieza en $\{x\}$. Dado $x \in X$, por el Teorema 2.20 sabemos que $\mathcal{A}_x$ es un arco generalizado, como $\mathcal{A} \subset C(X)$ y $C(X)$ es un espacio métrico, tenemos que $\mathcal{A}_x$ es métrico y homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Como $X$ es un continuo métrico sabemos que existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0, 1]$. Podemos suponer que $\mu(X) = 1$.

Consideremos la función $G : F_1(X) \times [0, 1] \to C(X)$ que define $G(\{x\}, t)$ igual al único elemento en $\mu^{-1}(t) \cap F(\{x\})$. Como $\mu^{-1}(t)$ es un nivel de Whitney en $C(X)$ y $F(\{x\})$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$, el Lema 3.7(b) nos dice que la función $G$ está bien definida. Como $\mu$ es una función de Whitney, tenemos que $G(\{x\}, 0) = \{x\}$ y $G(\{x\}, 1) = X$. Veamos que la función $G$ es continua.

Sean $(\{x_0\}, t_0) \in F_1(X) \times [0, 1]$ y sea $\{(\{x_n\}, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $F_1(X) \times [0, 1]$ tal que $\text{lím}(\{x_n\}, t_n) = (\{x_0\}, t_0)$. Tenemos que $\text{lím}\{x_n\} = \{x_0\}$ y $\text{lím}\, t_n = t_0$. La continuidad de $F$ implica que $\text{lím}\, \mathcal{A}_{x_n} = \mathcal{A}_x$. Por la compacidad de $C(X)$, podemos suponer que $\lim G(\{x_n\}, t_n) = A$ para alguna $A \in C(X)$. Probaremos que $G(\{x_0\}, t_0) = A$ y con esto habremos probado que $G$ es continua en $(\{x_0\}, t_0)$ (ver [7][6.1]). Como $G(\{x_n\}, t_n) \in \mathcal{A}_{x_n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A \in \mathcal{A}_x$ (ver [7][4.5]). Además, $\mu(G(\{x_n\}, t_n)) = t_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La continuidad de $\mu$ implica que $\mu(A) = t_0$. Lo anterior muestra que $G(\{x_0\}, t_0) = A$. Por tanto $G$ es continua. ■

Mostraremos que el regreso del Corolario 6.10 es falso. Para ello, introduciremos un ejemplo.

**6.12 Definición.** Sea $X$ la línea larga. La *circunferencia larga* es el espacio $Z$ que se obtiene al identificar los extremos de $X$.

En [18, Teorema 5, p. 45], Paulowich demostró que $C(Z)$ no es contráctil. En este trabajo mostaremos que $Z$ es contráctil por arcos ordenados. Para ello será necesario introducir algunos lemas.

**6.13 Lema.** *Sean $X$ y $Y$ espacios compactos de Hausdorff y sea $f : X \to Y$ una función continua. La función $f^* : 2^X \to 2^Y$ definida por $f^*(A) = f(A)$ (la imagen de $A$ bajo $f$) es continua.*

*Demostración.* Probaremos que, dado un abierto básico $\mathcal{U}$ de $2^Y$, $[f^*]^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $2^X$. Podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es un abierto de $Y$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Lo que vamos a probar es que $[f^*]^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle) = \langle f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n) \rangle$.

($\subset$) Dado $A \in [f^*]^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle)$, se sigue que $f^*(A) \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $A \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$. Además, $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y, por tanto, $A \subset f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i)$. Así, podemos concluir que $A \in \langle f^{-1}(U_1) \ldots, f^{-1}(U_n) \rangle$.

($\supset$) Sea $A \in \langle f^{-1}(U_1) \ldots, f^{-1}(U_n) \rangle$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $A \cap f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$ y, por lo tanto, $f(A) \cap U_i \neq \emptyset$. Además, $A \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ y, por tanto, $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Así, $f(A) \in \langle U_1 \ldots, U_n \rangle$. Podemos concluir que $A \in [f^*]^{-1}(\langle U_1, \ldots, U_n \rangle)$. ■

**6.14 Lema.** *Sean $X$ y $Y$ continuos de Hausdorff, $f : X \to Y$ una función continua y $\mathcal{A}$ un arco ordenado en $C(X)$ de $A$ a $B$. Se tiene que $f^*(\mathcal{A}) = \{f(D) : D \in \mathcal{A}\}$ es un arco ordenado en $C(Y)$ de $f(A)$ a $f(B)$.*

*Demostración.* Como $f^*$ es continua, $\mathcal{A}$ es compacto y conexo y $f^*(\mathcal{A})$ es la imagen de $\mathcal{A}$ bajo $f^*$, tenemos que $f^*( calA)$ es compacto y conexo. Dados $D, E \in \mathcal{A}$, tenemos que $D \subset E$ o $E \subset D$, así que $f(D) \subset f(E)$ o $f(E) \subset f(D)$. Por tanto los elementos de $f^*(\mathcal{A})$ son comparables por la inclusión. Dado $D \in \mathcal{A}$, tenemos que $A \subset D$, así que $f(A) \subset f(D)$. Por tanto $f(A) = \bigcap\{f(D) : D \in \mathcal{A}\} = \bigcap\{E : E \in f^*(\mathcal{A})\}$. Similarmente $f(B) = \bigcup\{E : E \in f^*(\mathcal{A})\}$. ■

**6.15 Lema.** *Sea $X$ un arco generalizado con máximo $M$. Dada $x \in X$, sea $\mathcal{A}_x = \{[x, y] \in C(X) : y \in [x, M]\}$. Entonces $\mathcal{A}_x$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a $[x, M]$ y la función $F : X \to C(C(X))$ dada por $F(x) = \mathcal{A}_x$ es continua.*

*Demostración.* Sea $R = \{]x, y[ \in X \times X : x \leq y\}$. Como la función $g : R \to C(X)$ dada por $g(x, y) = [x, y]$ es continua, por el Lema 6.13 tenemos que la función inducida $g^* : 2^R \to 2^{C(X)}$ también es continua. Observemos que Im $g^*|_{C(R)} \subset C(C(X))$ y $C(R) \subset C(X \times Y)$.

Consideremos la función $h : X \to C(R)$ dada por $h(x) = \{x\} \times [x, M]$. Veamos que $h$ es continua. Sean $x \in X$ y $\mathcal{W}$ un abierto en $C(X \times Y)$ tales que $h(x) \in \mathcal{W}$. Se tiene que existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $U_1, \ldots, U_n$ y $V_1, \ldots, V_n$ en $X$ tales que $\{x\} \times [x, M] = h(x) \in \langle U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n\rangle \subset \mathcal{W}$. Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe un punto $]x, y_i[ \in (\{x\} \times [x, M]) \cap (U_i \times V_i)$, así que $x \in U_i$ y $y_i \in V_i$ y, por tanto, $[x, M] \cap V_i \neq \emptyset$. Además, $\{x\} \times [x, M] \subset (U_1 \times V_1) \cup \ldots \cup (U_n \times V_n)$ implica que $[x, M] \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$. Luego, $g(x, M) = [x, M] \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle$. Ya que $g$ es continua, existen abiertos $P$ y $Q$ en $X$ tales que $x \in P$, $M \in Q$ y $g(R \cap (P \times Q)) \subset \langle V_1, \ldots, V_n\rangle$. Sea $U = P \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n$. As'i, $U$ es abierto en $X$ y $x \in U$.

Aseguramos que $h(U) \subset \mathcal{W}$. Sea $y \in U$. Como $]y, M[ \in (P \times Q) \cap R$, tenemos que $[y, M] = g(y) \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle$, así que $[y, M] \subset V_1 \cup \ldots \cup V_m$ y $[y, M] \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto $\{y\} \times [y, M] \subset \left(\bigcap_{i=1}^n U_i\right) \times \left(\bigcup_{i=1}^n V_i\right) \subset (U_1 \times V_1) \cup \ldots \cup (U_n \times V_n)$. Dada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $z_i \in [y, M] \cap V_i$, de manera que $]y, z_i[ \in (U_i \times V_i) \cap (\{y\} \times [y, M])$. Lo anterior prueba que $h(y) = \{y\} \times [y, M] \in \langle U_i \times V_1, \ldots, U_n \times V_n\rangle \subset \mathcal{W}$. Por tanto, $h$ es continua.

Dada $x \in X$, $g^*(h(x)) = g^*(\{x\} \times [x, M]) = \{g(x, y) \in C(X) : y \in [x, M]\} = \{[x, y] \in C(X) : y \in [x, M]\} = F(x)$. Por tanto, $F$ es continua. ■

**6.16 Lema.** *Sea $X$ un arco generalizado con máximo $M$. La función $f : X \to C(X)$ dada por $f(x) = [x, M]$ es continua.*

*Demostración.* Sea $R$ el subespacio de $X \times X$ definido por $\{]x, y[ \in X \times X : x \leq y\}$. Consideremos la función $e : X \to R$ dada por $e(x) = ]x, M[$. Probaremos que

$e$ es continua. Tomemos $x \in X$ y $(U \times V) \cap R$ una vecindad abierta básica de $e(x) = ]x, M[$ en $R$, donde $U$ y $V$ son intervalos abiertos de $X$, $x \in U$ y $M \in V$. Luego, $e(U) = U \times \{M\} \subset (U \times V) \cap R$; así que $e$ es una función continua. Sea $g : R \to C(X)$ la función definida por $g(]x, y[) = [x, y]$; de acuerdo con el Lema 3.23, la función $g$ es continua. Dado que $f = g \circ e$, podemos concluir que $f$ es una función continua. ■

**6.17 Definición.** Sea $X$ un arco generalizado. Al espacio $Z$ que se obtiene al identificar los extremos de $X$ le llamaremos *circunferencia generalizada.*

**6.18 Teorema.** *Sea $Z$ una circunferencia generalizada. El hiperespacio $C(Z)$ es contráctil por arcos ordenados.*

*Demostración.* Como $Z$ es una circunferencia generalizada, existen un arco generalizado no trivial $T$ y una función continua y suprayectiva $p : T \to Z$ tal que $p(m) = p(M)$ ($m = \text{mín}(T)$ y $M = \text{máx}(T)$), $p|_{(m,M)} : (m, M) \to Z$ es inyectiva y $p(m, M) \cap p(\{m, M\}) = \emptyset$.

Sea $g : T \to 2^{2^Z}$ dada por $g(x) = \{p([x, y]) \in 2^Z : y \in [x, M]\} \cup \{p([x, M]) \cup p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\}$. Veamos que $g$ se puede poner como composición de funciones continuas. Consideremos la función $F : T \to C(C(T))$ definida como en el Lema 6.15 y la función $f : T \to C(T)$ definida como en el Lema 6.16; sabemos que tanto $F$ como $f$ son funciones continuas. Sea $u : 2^{2^Z} \times 2^{2^Z} \to 2^{2^Z}$ dada por $u(A, B) = A \cup B$. Por el Lema 3.12, $u$ es continua. Tenemos que

$$g(x) = u([p^*]^*(F(x)), u([p^*]^*(f^*(\{x\})), [p^*]^*(F(m)))).$$

Por el Lema 6.13, las funciones $f^*$ y $[p^*]^*$ son continuas; por tanto, $g$ es una función continua.

Calculemos $g(M)$ y $g(M)$.

$$\begin{aligned} g(m) &= \{p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\} \cup \{p([m, M]) \cup p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\} \\ &= \{p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\} \cup \{Z\} \\ &= \{p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\}. \end{aligned}$$

$$g(M) = \{p(\{M\})\} \cup \{p(\{M\}) \cup p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\}.$$

Ya que $p(\{M\}) = \{p(m)\} = \{p([m, m])\}$, concluimos que $g(M) = \{p([m, y]) \in 2^Z : y \in [m, M]\} = g(m)$.

Por el Teorema de la Trasgresión (ver [4, Teorema 3.2, p. 123]), existe una función continua $G : Z \to 2^{2^Z}$ que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[dl, "G"] \\ 2^{2^Z} & \end{tikzcd}$$

Dada $x \in T$, $\{[x,y] \in 2^T : y \in [x,M]\}$ es un arco ordenado de $\{x\}$ a $[x,M]$, por lo que $\{p([x,y]) \in 2^X : y \in [x,M]\}$ es un arco ordenado de $\{p(x)\}$ a $p([x,M])$. Similarmente, $\{p([x,M]) \cup p([m,y]) \in 2^Z : y \in [m,M]\}$ es un arco ordenado de $p([x,M]) \cup p(\{m\}) = p([x,M])$ a $p([x,M]) \cup p([m,M]) = Z$. Como el punto final del primer arco es el punto inicial del segundo, concluimos que $g(x)$ es un arco ordenado de $\{p(x)\}$ a $Z$.

Dada $z \in Z$, como $p$ es suprayectiva, existe $x \in T$ tal que $p(x) = z$. Luego, $G(z) = G(p(x)) = g(x)$. De manera que $G(z)$ es un arco ordenado de $\{p(x)\} = \{z\}$ a $Z$. ■

## 6.2 Propiedades relacionadas

Un problema que se ha trabajado bastante en la teoría de los continuos métricos es el encontrar condiciones suficientes en $X$ para que $C(X)$ sea contráctil. En esta sección discutiremos este problema, pero en el caso de los continuos de Hausdorff. A la luz de los resultados de la sección anterior, otro problema interesante es el de encontrar condiciones suficientes en $X$ para que $F_1(X)$ sea contráctil en $C(X)$ por arcos ordenados.

En el caso métrico se sabe que la conexidad local implica que el hiperespacio $C(X)$ es contráctil, (ver [17, Corolario 16.18, p. 420]); sin embargo, este resultado no se extiende al caso de los continuos de Hausdorff. Un contraejemplo es la circunferencia larga que, al ser una circunferencia generalizada, es un espacio localmente conexo (de acuerdo con el Lema 5.8). Como ya habíamos mencionado, la circunferencia generalizada es un continuo de Hausdorff tal que su hiperespacio de subcontinuos no es contráctil.

Otras propiedades que resultan suficientes, en continuos métricos, para que $C(X)$

sea contráctil son la *homogeneidad* y la *propiedad de Kelley*, mismas que definimos a continuación.

**6.19 Definición.** Un continuo $X$ es *homogéneo* si, para cualesquiera dos puntos $x$ y $y \in X$, existe un homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

**6.20 Definición.** Un continuo de Hausdorff $X$ tiene la *propiedad de Kelley en el punto* $p \in X$ si para cada subcontinuo $K$ de $X$ tal que $p \in K$ y para cada vecindad abierta $\mathcal{V}$ de $K$ en $C(X)$ hay una vecindad $V$ de $p$ en $X$ tal que si $q \in V$ entonces existe un subcontinuo $L$ de $X$ con $q \in L \in \mathcal{V}$.

**6.21 Definición.** Un continuo de Hausdorff $X$ tiene la *propiedad de Kelley* si tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.

J. L. Kelley probó (en 1942) que, si $X$ es un continuo métrico y tiene la propiedad de Kelley, entonces $C(X)$ es contráctil (ver [9, Teorema 3.3]). En 1977, R. W. Wardle probó que si $X$ es un continuo métrico homogéneo, entonces $X$ tiene la propiedad de Kelley (ver [21, Teorema 2.7]); como consecuencia de este resultado tenemos que $C(X)$ es contráctil.

En 1999, W. J. Charatonik mostró en [3] que, en el caso de los continuos de Hausdorff, el ser homogéneo no implica el tener la propiedad de Kelley. Para ello mostró el ejemplo de un continuo $X$ (la *circunferencia de circunferencias*) tal que el continuo $X \times X$ es un continuo homogéneo, pero no tiene la propiedad de Kelley.

A continuación presentaremos este ejemplo. Posteriormente, lo utilizaremos para mostrar que, en el caso de los continuos de Hausdorff, que $X$ sea homogéneo o tenga la propiedad de Kelley no son condiciones suficientes para que $C(X)$ sea contráctil.

**6.22 Ejemplo.** Denotaremos por $\overline{\mathbb{R}}$ a la compactación $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de los números reales con residuo un punto. Sea $S^1$ la circunferencia unitaria de números complejos. Ambos, $\overline{\mathbb{R}}$ y $S^1$ son curvas cerradas simples, pero el distinguirlas de esta manera nos facilitará la construcción del ejemplo.

Dado $z_0 \in S^1$ y dado $t \in \mathbb{R}^+$, definimos

$$U(z_0, t) = \{z \in S^1 : z = z_0 \exp(2\pi i s) \text{ y } s \in (-t, t)\}.$$

Notemos que $U(z_0, t)$ es una vecindad abierta de $z_0$ en $S^1$ con la topología usual.

Denotaremos por $]x,z[$ a los puntos de $\overline{\mathbb{R}} \times S^1$. Dado $]x_0,z_0[\ \in \overline{\mathbb{R}} \times S^1$ y dado $t \in \mathbb{R}^+$, definimos

$$A(x_0,z_0,t) = \{x_0\} \times U(z_0,t),$$

si $x_0 \in \mathbb{R}$, y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, definimos

$$\begin{aligned} B(x_0,z_0,t,\epsilon) = \{]x,z[\ \in \mathbb{R}\times S^1 : x \in (x_0-\epsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\epsilon) \\ \text{y } \exp\big(\frac{2\pi i}{x-x_0}\big) \in U(z_0,t)\}. \end{aligned}$$

Para una interpretación geométrica de $B(x_0,z_0,t,\epsilon)$ vea más adelante. Similarmente, si $x_0=\infty$, dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ definimos

$$\begin{aligned} B(x_0,z_0,t,\epsilon) = \{]x,z[\ \in \mathbb{R}\times S^1 : x \in (-\infty,-\epsilon)\cup(\epsilon,\infty) \\ \text{y } \exp(2\pi i x) \in U(z_0,t)\}. \end{aligned}$$

Así, dados $]x_0,z_0[\ \in \overline{\mathbb{R}} \times S^1$ y dados $t$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, definimos

$$N(x_0,z_0,t,\epsilon) = A(x_0,z_0,t) \cup B(x_0,z_0,t,\epsilon).$$

Notemos que, en cualquier caso, $B(x_0,z_0,t,\varepsilon)\cap(\{x_0\}\times S^1) = \emptyset$. Así $N(x_0,z_0,t,\varepsilon)\cap(\{x_0\}\times S^1) = A(x_0,z_0,t)$.

La *circunferencia de circunferencias* es el conjunto $\overline{\mathbb{R}} \times S$ con la topología dada por la base de vecindades

$$\{N(x,z,t,\epsilon) : ]x,z[\ \in \overline{\mathbb{R}} \times S \text{ y } t,\epsilon \in \mathbb{R}^+\}.$$

A continuación, daremos una breve descripción geométrica de estas vecindades. Dado el punto $]x,z[\ \in \overline{\mathbb{R}}\times S$, la vecindad $N(x,z,t,\epsilon)$ contiene un arco de la circunferencia $\{x\}\times S^1$ que está centrado en $]x,z[$, no incluye a sus extremos y tiene un radio proporcional a $t$. Además, la vecindad está formada por dos sucesiones de bandas circulares -una a cada lado- que convergen de forma simétrica a la circunferencia $\{x\} \times S^1$. La anchura de todas las bandas que integran la sucesión es proporcional al valor de $t$. Cabe destacar que todo el abierto está contenido en un tubo centrado en $\{x\} \times S^1$, cuya longitud está delimitada por $\epsilon$.

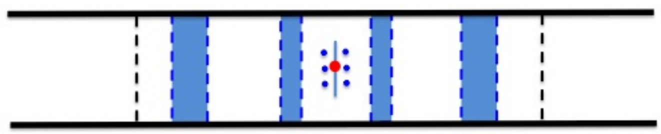

Figura 6.1: La circunferencia de circunferencias y un básico de su topología.

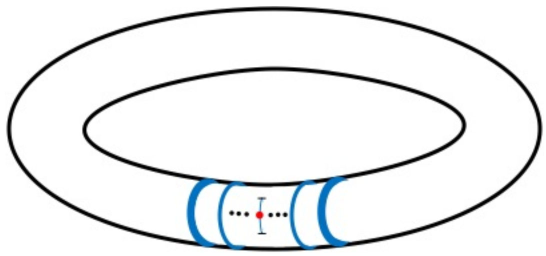

Figura 6.2: La circunferencia de circunferencias y un básico de su topología.

**6.23 Proposición.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. $X$ es un espacio Hausdorff.*

*Demostración.* Dados $]x, z[$ y $]x', z'[ \in X$ tales que $]x, z[ \neq ]x', z'[$, tenemos tres posibilidades:

1. Si $x \neq x'$ y $x, x' \in \mathbb{R}$, entonces sea $\epsilon = \frac{|x-x'|}{2}$. Tenemos que
$$\begin{aligned} N(x, z, 1, \epsilon) \cap N(x', z', 1, \epsilon) \subset & \\ & [(x-\epsilon, x+\epsilon) \times S^1] \cap [(x'-\epsilon, x'+\epsilon) \times S^1] \\ = & [(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (x'-\epsilon, x'+\epsilon)] \times S^1 = \emptyset. \end{aligned}$$

2. Si $x \neq x'$ y $\{x, x'\} \cap \{\infty\} \neq \emptyset$, entonces podemos suponer que $x = \infty$ y $x' \in \mathbb{R}$. Elegimos $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x'| < \epsilon$ y definimos $\epsilon' = \epsilon - |x'|$. Se tiene que
$$\begin{aligned} N(x, z, 1, \epsilon) \cap N(x', z', 1, \epsilon') \subset & \\ & \big[[(-\epsilon, \infty) \cup \{\infty\} \cup (\infty, \epsilon)] \times S^1\big] \cap [(x'-\epsilon', x'+\epsilon') \times S^1] \\ \subset & \big[[(-\epsilon, \infty) \cup \{\infty\} \cup (\infty, \epsilon)] \times S^1\big] \cap [(\epsilon, -\epsilon) \times S^1] \\ = & \big[[(-\epsilon, \infty) \cup \{\infty\} \cup (\infty, \epsilon)] \cap (\epsilon, -\epsilon)\big] \times S^1 = \emptyset. \end{aligned}$$

3. Si $x = x'$, entonces $z \neq z'$. Como $S^1$ es un espacio $T_2$, existen $t, t' \in \mathbb{R}^+$ tales que $U(z,t) \cap U(z',t') = \emptyset$. Probaremos que $N(x,z,t,1) \cap N(x,z',t',1) = \emptyset$. De la definición de $N(x,z,t,1)$ y $N(x,z',t',1)$ se sigue que

$$\begin{aligned} &N(x,z,t,1) \cap N(x,z',t',1) = \\ &\qquad =[A(x,z,t) \cap A(x,z',t')] \cup [B(x,z,t,1) \cap B(x,z',t',1)]. \end{aligned}$$

Veamos primero que $A(x,z,t) \cap A(x,z',t') = \emptyset$. Tenemos que $A(x,z,t) \cap A(x,z',t') = [\{x\} \times U(z,t)] \cap [\{x\} \times U(z',t')] = \{x\} \times [U(z,t) \cap U(z',t')]$; dado que $U(z,t) \cap U(z',t') = \emptyset$, se deduce que $A(x,z,t) \cap A(x,z',t') = \emptyset$. Probaremos ahora que $B(x,z,t,1) \cap B(x,z',t',1) = \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que existe $]y,w[\, \in X$ tal que $]y,w[\, \in B(x,z,t,1) \cap B(x,z',t',1)$. Tenemos dos posibilidades:

   (i) Si $x \neq \infty$, por la definición de $B(x,z,t,1)$ y $B(x,z',t',1)$, resulta que $\exp(\frac{2\pi i}{y-x}) \in U(z,t) \cap U(z',t)$. Dado que $U(z,t) \cap U(z',t') = \emptyset$, hemos llegado a una contradicción.

   (ii) Si $x = \infty$, por la definición de $B(x,z,t,1)$ y $B(x,z',t',1)$, resulta que $\exp(2\pi i y) \in U(z,t) \cap U(z',t)$. Dado que $U(z,t) \cap U(z',t') = \emptyset$, hemos llegado a una contradicción.

   Así, hemos probado que $N(x,z,t,1) \cap N(x',z',t',1) = \emptyset$, como queríamos.

■

**6.24 Lema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. Dado $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, la función $\rho_{x_0} : \{x_0\} \times S^1 \to S^1$, dada por $\rho_{x_0}\big(]x_0, z[\big) = z$, es un homeomorfismo.*

*Demostración.* La función $\rho_{x_0}$ es claramente biyectiva. Dados $z_0 \in S^1$ y $t, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, como $B(x_0,z_0,t,\varepsilon) \cap (\{x_0\} \times S^1) = \emptyset$, tenemos que $N(x_0,z_0,t,\varepsilon) \cap (\{x_0\} \times S^1) = A(x_0,z_0,t) = \{x_0\} \times U(z_0,t)$. De manera que $N(x_0,z_0,t,1)$ es una vecindad abierta de $]x_0,z_0[$ tal que

$$\rho_{x_0}\big(N(x_0,z_0,t,\varepsilon) \cap (\{x_0\} \times S^1)\big) = U(z_0,t)$$

$$\text{y } \rho_{x_0}^{-1}\big(U(z_0,t)\big) = N(x_0,z_0,t,\varepsilon) \cap (\{x_0\} \times S^1).$$

Esto muestra que $\rho_{x_0}$ es abierta y continua. ■

**6.25 Definición.** Dados dos espacios topológicos $X, Y$, decimos que una función $f : X \to Y$ es *monótona* si es continua, suprayectiva y $f^{-1}(y) \in C(X)$ para toda $y \in Y$.

**6.26 Lema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. La función $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $\rho\big(]x, z[\big) = x$ es monótona.*

*Demostración.* Veamos que $\rho$ es una función continua. Sea $]x_0, z_0[\, \in X$ y sea $U$ una vecindad básica de $x_0$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $x_0 \neq \infty$, podemos suponer que $U = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.
2. Si $x_0 = \infty$, podemos suponer que $U = (\varepsilon, \infty) \cup \{\infty\} \cup (-\infty, -\varepsilon)$, donde $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.

En ambos casos, tenemos que $N(x_0, z_0, 1, \epsilon)$ es una vecindad abierta básica de $]x_0, z_0[$ tal que $\rho\big(N(x_0, z_0, 1, \epsilon)\big) \subset U$.

Para ver que $\rho$ es una función monótona, es suficiente con observar que, dado $x \in \overline{\mathbb{R}}$, el Lema 6.24 implica que $\rho^{-1}(x) = \{x\} \times S^1$ es homeomorfo a $S^1$ y entonces $\rho^{-1}(x)$ es conexo. ■

**6.27 Notación.** Dado $x \in \mathbb{R}$ y dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, definimos $D_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\}$.

**6.28 Notación.** Dado $\delta \in \mathbb{R}^+$, definimos $D_\delta(\infty) = \{y \in \mathbb{R} : |y| > \delta\} \cup \{\infty\}$.

Notemos que $D_\delta(x)$ es abierto en $\overline{\mathbb{R}}$ para cualesquiera $x \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$.

**6.29 Lema.** *Sean $X$ la circunferencia de circunferencias, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ y $U$ un abierto de $X$ tal que $\{x_0\} \times S^1 \subset U$. Tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $D_\delta(x_0) \times S^1 \subset U$.*

*Demostración.* Para cada $z \in S^1$, elegimos $t_z, \varepsilon_z > 0$ tales que $N(x_0, z, t_z, \varepsilon_z) \subset U$. Luego, $\{U(z, t_z) : z \in S^1\}$ es una cubierta abierta de $S^1$, así que existen $n \in \mathbb{N}$ y $z_1, \ldots, z_n \in S^1$ tales que $S^1 \subset U(z_1, t_{z_1}) \cup \ldots \cup U(z_n, t_{z_n})$. Escribiremos $t_i = t_{z_i}$ y $\varepsilon_i = \varepsilon_{z_i}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $x_0 \neq \infty$, definimos $\delta = \text{mín}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Por hipótesis $\{x_0\} \times S^1 \subset U$. Tomemos $]x, z[\, \in D_\delta(x_0) \times S^1$, con $x \neq x_0$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\exp\left(\frac{2\pi i}{x - x_0}\right) \in U(z_j, t_j)$. Así, $]x, z[\, \in B(x_0, z_j, t_j, \varepsilon_j) \subset U$. Esto prueba que $D_\delta(x_0) \times S^1 \subset U$.

2. Si $x_0 = \infty$, definimos $\delta = \text{máx}\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Por hipótesis $\{\infty\} \times S^1 \subset U$. Tomemos $]x, z[ \in D_\delta(\infty) \times S^1$, con $x \neq \infty$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\exp\big(2\pi i x\big) \in U(z_j, t_j)$. Luego, $]x, z[ \in B(\infty, z_j, t_j, \varepsilon_j) \subset U$. Esto prueba que $D_\delta(\infty) \times S^1 \subset U$.

■

**6.30 Proposición.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. $X$ es compacto.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{O}$ una cubierta abierta de $X$. Dada $x \in X$, como $\{x\} \times S^1$ es compacto, existe una cubierta finita $\mathcal{O}_x$ de $\{x\} \times S^1$ tal que $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$.

Por el Lema 6.29, existe $\delta_x > 0$ tal que $D_{\delta_x}(x) \times S^1 \subset \bigcup \mathcal{O}_x$. Luego, el conjunto $\{D_{\delta_x}(x) : x \in \overline{\mathbb{R}}\}$ es una cubierta abierta de $\overline{\mathbb{R}}$, que es compacto, así que, existe una subcubierta $\{D_{\delta_{x_1}}(x_1), \ldots, D_{\delta_{x_n}}(x_n)\}$ de $\overline{R}$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $\mathcal{O}' = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{O}_{x_j}$ es una cubierta abierta de $X$. Sea $]x, z[ \in X$, como $\{D_{\delta_{x_1}}(x_1), \ldots, D_{\delta_{x_n}}(x_n)\}$ es una cubierta de $\overline{\mathbb{R}}$, existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in D_{\delta_{x_{j_0}}}(x_{j_0})$. Finalmente,

$$]x, z[ \in D_{\delta_{j_0}}(x_{j_0}) \times S^1 \subset \bigcup \mathcal{O}_{x_{j_0}} \subset \bigcup \mathcal{O}'.$$

■

**6.31 Lema.** *(ver [5, Teorema 6.1.29, p. 358]) Si $f : X \to Y$ es una función monótona, cerrada y suprayectiva, dado un subconjunto conexo $C$ de $Y$, se tiene que $f^{-1}(C)$ es conexo.*

**6.32 Proposición.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. $X$ es conexo.*

*Demostración.* Sea $\rho$ la función monótona del Lema 6.24. Dado que es suprayectiva y es cerrada (porque está definida de un espacio compacto a un espacio Hausdorff), por el Lema 6.31 sabemos que $X$ es conexo. ■

Hemos probado que la circunferencia de circunferencias es un continuo de Hausdorff. A continuación mostraremos algunos de sus subcontinuos.

**6.33 Proposición.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. Dado $s \in [0, \frac{1}{2}]$, el conjunto*

$$A_s = \mathrm{cl}_X(A(0, 1, s))$$

*es un subcontinuo de $X$.*

*Demostración.* Sea $\rho_0$ el homeomorfismo del Lema 6.26. Para cualquier $s \in [0, \frac{1}{2}]$, tenemos que $A_s = \mathrm{cl}_X(\rho_0^{-1}(U(1,s)))$, así que $A_s = \rho_0^{-1}(\mathrm{cl}_{S^1}(U(1,s)))$. Dado que $\mathrm{cl}_{S^1}(U(1,s)) \in C(S^1)$, obtenemos que $A_s \in C(X)$. ■

**6.34 Definición.** Definimos la función $d : \left(\frac{1}{2}, 1\right) \to \mathbb{R}^+$ por la regla de asignación $d(s) = \frac{2s-1}{2-2s}$.

Observemos que la función $d$ es continua y suprayectiva.

**6.35 Proposición.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. Dada $s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, el conjunto $T_s = [-d(s), d(s)] \times S^1$ es un subcontinuo de $X$.*

*Demostración.* Para cada $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ tenemos que $T_s = \rho^{-1}([-d(s), d(s)])$; como $\rho$ es continua y $[-d(s), d(s)]$ es cerrado en $\overline{\mathbb{R}}$, $T_s$ es cerrado en $X$. De acuerdo con el Lema 6.24 tenemos que $\rho$ es una función monótona; como $[-d(s), d(s)] \in C(\overline{\mathbb{R}})$ y $\rho$ es una función cerrada y suprayectiva, el Lema 6.31 implica que $T_s \in C(X)$. ■

En [3, Corolario 4.7, p. 215], W. J. Charatonik probó que la circunferencia de circunferencias es un continuo homogéneo; en ese mismo artículo probó que el producto de dos circunferencias de circunferencias es un continuo homogéneo que no tiene la propiedad de Kelley.

A continuación, probaremos que la circunferencia de circunferencias sí tiene la propiedad de Kelley.

**6.36 Lema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias y sea $C \in C(X)$. Dado $]x, z[ \in C$, si $C \not\subset \{x\} \times S^1$, entonces $\{x\} \times S^1 \subset C$.*

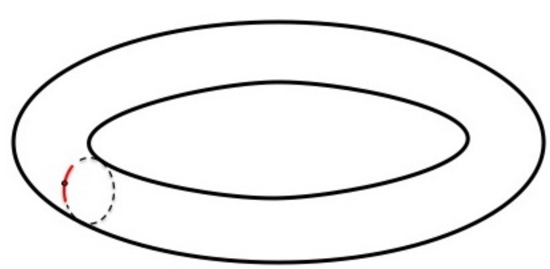

Figura 6.3: Un subcontinuo $A_s$ de la circunferencia de circunferencias con $s \in (0, \frac{1}{2})$.

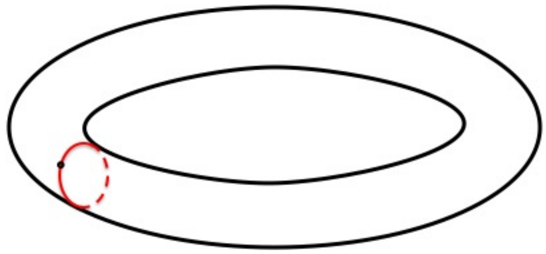

Figura 6.4: El subcontinuo $\{x\} \times S^1$ de la circunferencia de circunferencias, con $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

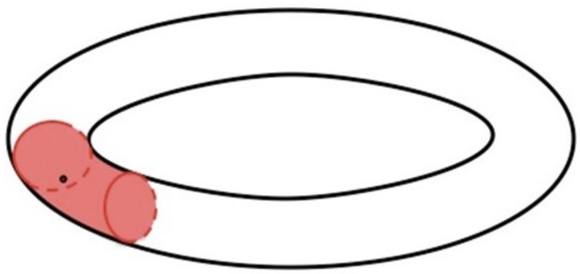

Figura 6.5: Un subcontinuo $T_s$ de la circunferencia de circunferencias, con $t \in (\frac{1}{2}, 1)$.

*Demostración.* Como $X$ es homogéneo, podemos suponer que $]x, z[ = ]0, 1[$. Si $\{0\} \times S^1 \not\subset C$, existe $z' \in S^1$ tal que $]0, z'[ \notin C$. Como $C$ es cerrado, existen $t$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que $]0, z'[\in N(0, z', t, \epsilon) \subsetneq X \setminus C$. Supongamos que $C \setminus [\{0\} \times S^1] \neq \emptyset$; entonces podemos elegir un punto $]u, v[ \in C \setminus [\{0\} \times S^1]$. Notemos que $u \neq 0$. Sean $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $u \notin (-\delta_1, \delta_1) \cap (-\delta_2, \delta_2)$, $\exp\left(\frac{2\pi i}{\delta_1}\right) = z'$ y $\exp\left(\frac{2\pi i}{-\delta_2}\right) = z'$. Luego, para toda $z \in S^1$, resulta que $\{]\delta_1, z[, ] - \delta_2, z[\} \subset N(0, z', t, \epsilon)$. De manera que $[(\{\delta_1\} \times S^1) \cup (\{-\delta_2\} \times S^1)] \cap C = \emptyset$.

Consideremos la función $\rho : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida en el Lema 6.26. La continuidad de $\rho$ implica que $\rho^{-1}((-\delta_2, \delta_1)) = (-\delta_2, \delta_1) \times S^1$ es abierto en $X$ y $\rho^{-1}([-\delta_2, \delta_1]) = [-\delta_2, \delta_1]$ es cerrado en $X$. Dado que $\rho^{-1}(\{\delta_1, -\delta_2\} \times S^1)$ no intersecta a $C$, el conjunto $K = \rho^{-1}((-\delta_2, \delta_1)) \cap C$ es abierto y cerrado en $C$. Puesto que $]0, z'[\in K \cap C$, tenemos que $C \subset K$. Esto es absurdo pues $]u, v[ \notin K$.

De esta forma, podemos concluir que si $C \not\subset \{x\} \times S^1$, entonces $\{x\} \times S^1 \subset C$. ∎

**6.37 Lema.** *Sean $X$ la circunferencia de circunferencias y $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Dado $A \in C(X)$*

*tal que $A \subsetneq \{x\} \times S^1$, y dadas una vecindad abierta básica $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap C(X)$ de $A \in C(X)$ y $z_0 \in S^1$ tales que $]x, z_0[ \notin A$, se tiene que existen $m \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_m \in \rho_x(A)$ ($\rho_x$ es la función del Lema 6.24) y $t_1, \ldots, t_m, \epsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que:*

*(a) El abierto $\mathcal{V} = \langle N(x, z_1, t_1, \epsilon), \ldots, N(x, z_m, t_m, \epsilon) \rangle \cap C(X)$ es una vecindad abierta de $A$ contenida en $\mathcal{U}$.*

*(b) Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $N(x, z_j, t_j, \epsilon) \subset \bigcap \{U_k : k \in \{1, \ldots, n\}$ y $]x, z_j[ \in U_k\}$ y $]x, z_0[ \notin N(x, z_j, t_j, \epsilon)$.*

*(c) Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe $j_k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $]x, z_{j_k}[ \in U_k$.*

*Demostración.* Dado $]x, z[ \in A$, existen $t_z$ y $\epsilon_z \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$N(x, z, t_z, \epsilon_z) \subset \bigcap \{U_k : k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } ]x, z[ \in U_k\} \setminus \{]x, z_0[\}.$$

El conjunto $\{N(x, z, t_z, \epsilon_z) : ]x, z[ \in A\}$ es una cubierta abierta de $A$, como $A$ es compacto, podemos tomar una subcubierta abierta

$$\{N(x, z_1, t_{z_1}, \epsilon_{z_1}), \ldots, N(x, z_l, t_{z_l}, \epsilon_{z_l})\}$$

de $A$ tal que $l \in \mathbb{N}$. Como $A \in \mathcal{U}$, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, podemos elegir $z_{l+k} \in S^1$ tal que $]x, z_{l+k}[ \in A \cap U_k$. Definimos $\epsilon = \text{mín}(\{\epsilon_{z_1}, \ldots, \epsilon_{z_l}\})$ y $m = l+n$. Notemos que, dado $j \in \{1, \ldots, l\}$, tenemos que $\epsilon \leq \epsilon_{z_j}$, así que $N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon) \subset N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j})$. Probaremos que

$$\mathcal{V} = \langle N(x, z_1, t_{z_1}, \epsilon), \ldots, N(x, z_m, t_{z_m}, \epsilon) \rangle \cap C(X)$$

cumple con las condiciones (a), (b) y (c).

(a) Primero probaremos que $A \in \mathcal{V}$. Como $A \subset \{x\} \times S^1$ y $\{N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) : j \in \{1, \ldots, l\}\}$ es una cubierta abierta de $A$, tenemos que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{l} \left[ N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) \cap (\{x\} \times S^1) \right].$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, recordemos que $N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) \cap (\{x\} \times S^1) = A(x, z_j, t_{z_j}) = N(z, z_j, t_{z_j}, \epsilon) \cap (\{x\} \times S^1)$, de donde podemos concluir que

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^{l} \left[ N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) \cap (\{x\} \times S^1) \right] &= \bigcup_{j=1}^{l} \left[ N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon) \cap (\{x\} \times S^1) \right] \\ &\subset \bigcup_{j=1}^{m} N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon). \end{aligned}$$

Así, hemos probado que $A \subset \bigcup_{j=1}^{m} N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon)$.

Además, como $]x, z_j[ \in A \cap N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) = A \cap A(x, z_j, t_{z_j}) = A \cap N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon)$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, se sigue que $A \in \mathcal{V}$.

Ahora probaremos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Sea $B \in \mathcal{V}$. Dada $j \in \{1, \ldots, l+m\}$, como $]x, z_j[ \in A \in \mathcal{U}$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $z_j \in U_k$, así que $N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon) \subset N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) \subset U_k$. Luego, $B \subset \bigcup_{j=1}^{m} N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Por otro lado, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, como $z_{l+k} \in U_k$, $B \cap U_k \supset B \cap N(x, z_{l+k}, t_{l+k}, \epsilon) \neq \emptyset$. Así, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$.

(b) Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, se cumple que

$$N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon) \subset N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j}) \subset \bigcap \{U_k : k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } ]x, z_j[ \in U_k\}.$$

Finalmente, como $]x, z_0[ \notin N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon_{z_j})$, $]x, z_0[ \notin N(x, z_j, t_{z_j}, \epsilon)$.

(c) Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $j_k = l + k$ cumple que $j_k \in \{1, \ldots, m\}$ y $]x, z_{j_k}[ \in U_k$.

■

**6.38 Teorema.** *La circunferencia de circunferencias tiene la propiedad de Kelley.*

*Demostración.* Dado que $X$ es un continuo homogéneo, es suficiente probar que $X$ tiene la propiedad de Kelley en $]0, 1[$. Sea $C \in C(X)$ tal que $]0, 1[ \in C$ y sea $\mathcal{U}$ una vecindad básica de $C$ en $C(X)$. Podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_k$ es abierto en $X$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

De acuerdo con el Lema 6.36, tenemos dos posibilidades:

1. $C \subsetneq \{0\} \times S^1$. En este caso podemos elegir $z_0 \in S^1$ tal que $]0, z_0[ \notin C$. Sean $t \in (0, \frac{1}{2})$ y $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$N(0, 1, t, \epsilon) \subset \bigcap \{U_k : k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } ]0, 1[ \in U_k\}.$$

Como $X$ es un espacio $T_2$, podemos suponer que $]0, z_0[ \notin N(0, 1, t, \epsilon)$.

Por el Lema 6.37, existen $m \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_m \in \rho_0(C)$ y $t_1, \ldots, t_m, \epsilon' \in \mathbb{R}^+$ tales que el abierto $\mathcal{V} = \langle N(0, z_1, t_1, \epsilon'), \ldots, N(0, z_m, t_m, \epsilon') \rangle \cap C(X)$ es una vecindad abierta de $C$ en $\mathcal{U}$ tal que:

(I) Para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, $N(0, z_j, t_j, \epsilon') \subset \bigcap\{U_k : k \in \{1, \ldots, n\}$ y $]0, z_j[ \in U_k\}$ y $]0, z_0[ \notin N(0, z_j, t_j, \epsilon')$.

(II) Dada $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe $j_k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $]0, z_{j_k}[ \in U_k$.

Sea $\epsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\epsilon_0 < \text{mín}(\epsilon, \epsilon')$ y sea $z_0 = \exp(\frac{2\pi i}{\epsilon_0})$. Probaremos que, para cada $]x, z[ \in N(0, 1, t, \epsilon_0)$, existe $B \in C(X)$ tal que $]x, z[ \in B \in \mathcal{U}$. Dado $]x, z[ \in N(0, 1, t, \epsilon_0)$, tenemos dos posibilidades.

(a) Si $]x, z[ \in A(0, 1, t)$, elegimos $t' \in (0, t)$ tal que

$$z \in U(1, t') \subset \text{cl}_{S^1}(U(1, t')) \subset U(1, t).$$

Como $\rho_0$ es un homeomorfismo y $\text{cl}_{S^1}(U(1, t')) \in C(S^1)$, entonces

$$\rho_0^{-1}(\text{cl}_{S^1}(U(1, t'))) \in C(X).$$

Definimos $B = \rho_0^{-1}(\text{cl}_{S^1}(U(1, t'))) \cup C$; dado que $]0, 1[ \in \text{cl}_{S^1}(U(1, t')) \cap C$, $B \in C(X)$. Luego, $B \subset \rho_0^{-1}(U(1, t)) \cup C = A(0, 1, t) \cup C \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$. Además, $B \cap U_k \supset C \cap U_k \neq \emptyset$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Podemos concluir que $B \in \mathcal{U}$.

(b) Si $]x, z[ \in B(0, 1, t, \epsilon_0)$, consideremos la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to S^1$ definida por $f(y) = \exp\left(\frac{2\pi i}{y}\right)$. Como $]x, z[ \in B(0, 1, t, \epsilon_0)$, se sigue que $\exp\left(\frac{2\pi i}{x}\right) \in U(1, t)$. Elegimos $t' \in (0, t)$ tal que $\exp\left(\frac{2\pi i}{x}\right) \in U(1, t') \subset \text{cl}_{S^1}(U(1, t')) \subset U(1, t)$. Definimos $A = \rho_0^{-1}(\text{cl}_{S^1}(U(1, t'))) \cup C$. Sea $K$ la componente conexa de $f^{-1}(\rho_0(A))$ que contiene a $x$. Definimos $B = \rho^{-1}(K) = K \times S^1$; resulta que $]x, z[ \in B$. Como $\rho$ es una función monótona de $X$ a $\overline{\mathbb{R}}$ y $K \in C(\overline{\mathbb{R}})$, por el Lema 6.31 podemos concluir que $B \in C(X)$.

Ahora probaremos que $B \in \mathcal{U}$. Mostraremos primero que $B \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$. Dado $x' \in K$, tenemos que $f(x') \in \text{cl}_{S^1}(U(1, t')) \cup \rho(C)$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $f(x') \in \text{cl}_{S^1}(U(1, t')) \subset U(1, t)$, como $x' < \epsilon_0$, se sigue que $\{x'\} \times S^1 \subset N(0, 1, t, \epsilon_0) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$.
2. Si $f(x') \in \rho_0(C)$, como $\{N(0, z_1, t_1, \epsilon'), \ldots, N(0, z_m, t_m, \epsilon')\}$ es una cubierta abierta de $C$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(x') \in \rho_0(N(0, z_j, t_j, \epsilon')) = U(z_j, t_j)$. Como $x' < \epsilon_0 < \epsilon'$, tenemos que $\{x'\} \times S_1 \subset N(0, z_j, t_j, \epsilon')$. Además, dado que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, resulta que $\{x'\} \times S_1 \subset \bigcup_{j=1}^m N(0, z_j, t_j, \epsilon') \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$.

Hemos probado que $\rho^{-1}(x') \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ para toda $x' \in K$, así que $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Ahora veremos que, dada $k \in \{1, \ldots, n\}$, $B \cap U_k \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{V}$ cumple con la condición (II), dada $k \in \{1, \ldots, m\}$, existe $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $]0, z_{j_0}[\, \in U_k$. Dado que $f(\epsilon_0) = z_0$ y $K \subset (0, \epsilon_0)$, existe $y \in (0, \epsilon_0)$ tal que $f(y) = z_0$ y $K \subsetneq [y, y+1]$; de forma que $f(K) = \rho_0(A)$. Luego, existe $x_k \in K$ tal que $f(x_k) = z_{j_0}$, así que $f(x_k) \in U(z_{j_0}, t_{j_0})$. Como $x_k \in (0, \epsilon_0)$ y $\epsilon < \epsilon'$ y $]x_k, 1[\, \in N(0, z_{j_0}, t_{j_0}, \epsilon')$, dado que $\mathcal{V}$ cumple con la condición (I), obtenemos que

$$]x_k, 1[\, \in \bigcap \{U_l : l \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } ]0, z_{j_0}[\in U_l\} \subset U_k.$$

Luego, dado que $]x_k, 1[\in \rho^{-1}(K) = B$, tenemos que $]x_k, 1[\, \in U_k \cap B$. De esta forma, podemos concluir que $B \in \mathcal{U}$.

2. $\{0\} \times S^1 \subset C$. Como $C \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$, por el Lema 6.29 existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $D_\delta(0) \times S^1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$. Por la suprayectividad de la función $d$, existe $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que $d(s) \in (0, \delta)$. Definimos $T_s \in C(X)$ como en la Proposición 6.35 y $B = C \cup T_s$. Como $]0, 1[\, \in T_s \cap C$, $B \in C(X)$.

   Probaremos que $B \in \mathcal{U}$. Dado que $T_s \subset D_\delta(0) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ y $C \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j$, tenemos que $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ y que $B \cap U_j \subset C \cap U_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, así que $B \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Por otra parte, $U = N(0, 1, 1, d(s)) = (-d(s), d(s)) \times S^1$ es una vecindad abierta de $]0, 1[$ en $X$ que cumple que $U \subset T_s \subset B$. Luego, para cada $]x, z[\, \in U$, se cumple que $]x, z[\, \in B \in \mathcal{U}$.

■

**6.39 Lema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias y $\mathcal{A}_x$ un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$. Se tiene que $\{x\} \times S^1 \in \mathcal{A}_x$.*

*Demostración.* Definimos $\mathcal{L} = \mathcal{A}_x \cap \{A \in C(X) : A \subset \{x\} \times S^1\}$ y $\mathcal{M} = \mathcal{A}_x \cap \{A \in C(X) : A \supset \{x\} \times S^1\}$. Por el Lema 6.36 sabemos que $\mathcal{A}_x = \mathcal{M} \cup \mathcal{L}$. De acuerdo con el Lema 2.1, los conjuntos $\{A \in C(X) : A \subset \{x\} \times S^1\}$ y $\{A \in C(X) : A \supset \{x\} \times S^1\}$ son cerrados en $C(X)$, lo que implica que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son cerrados en $\mathcal{A}_x$. Además, $\{x\} \in \mathcal{L}$ y $X \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{A}_x$ es conexo, tenemos que $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ es no vacío. Como $\mathcal{L} \cap \mathcal{M} \subset \{\{x\} \times S^1\}$, resulta que $\{\{x\} \times S^1\} = \mathcal{L} \cap \mathcal{M} \subset \mathcal{A}_x$. ■

**6.40 Teorema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. El hiperespacio $F_1(X)$ no es contráctil en $C(X)$.*

*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que $F_1(X)$ sí es contráctil en $C(X)$, entonces existen un arco generalizado $T$ y una homotopía $H : C(X)\times T \to C(X)$ que preserva el orden. Dado $]x,z[ \in X$, como $H$ respeta el orden, $H(\{]x,z[\}, \text{mín}(T)) = \{]x,z[\}$ y $H(\{]x,z[\}, \text{máx}(T)) = X$, el Lema 3.49 implica que $H(\{]x,z[\}, T)$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $]x,z[$. Por el Lema 6.39, para todo $]x,z[ \in X$ el conjunto $\{r \in T : H(]x,z[,r) = \{]x,z[\} \times S^1\}$ no es vacío. Sea $r_{]x,z[} = \text{mín}\{r \in T : H(]x,z[,t) = \{]x,z[\} \times S^1\}$.

**Afirmación 1.** Existe una vecindad básica $U$ de $]x,z[$ tal que, dados $y \in \rho(U) \setminus \{x\}$ y $w \in S^1$, $\rho(H(]y,w[, r_{]x,z[})) \supsetneq \{y\}$ ($\rho$ es la función definida en el Lema 6.26).

Definimos $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$ y $V_j = N(x, z_j, \frac{1}{4}, 1)$ para cada $j \in \{1,2,3,4\}$. Notemos que $\bigcap_{j=1}^{4} A(x, z_j, \frac{1}{4}) = \emptyset$. Como $\langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$ es una vecindad abierta de $\{x\} \times S^1 = H(]x,z[, r_{]x,z[})$ en $C(X)$, por la continuidad de $H$ tenemos que existe una vecindad abierta básica $U$ de $]x,z[$ en $X$ tal que $H(U \times \{r_{]x,z[}\}) \subset \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$.

Dadas $y \in U \setminus \{x\}$ y $w \in S^1$, por el Lema 6.39 sabemos que $H(]y,w[, r_{]x,z[})$ y $\{y\} \times S^1$ son comparables. Como $\bigcap_{j=1}^{4} U(z_j, \frac{1}{4}) = \emptyset$, existe $j_0 \in \{1,2,3,4\}$ tal que $\exp\left(\frac{2\pi i}{y-x}\right) \notin U(z_{j_0}, \frac{1}{4})$. Luego, para toda $v \in S^1$, tenemos que $]y,v[ \notin B(x, z_{j_0}, \frac{1}{4}, 1)$. De modo que $(\{y\} \times S^1) \cap N(x, z_{j_0}, \frac{1}{4}, 1) = \emptyset$ y $(\{y\} \times S^1) \cap V_{j_0} = \emptyset$. Si suponemos que $H(]y,w[, r_{]x,z[}) \subset \{y\} \times S^1$, entonces $H(]y,w[, r_{]x,z[}) \cap V_{j_0} = \emptyset$. Así que $H(]y,w[, r_{]x,z[}) \notin \langle V_1, V_2, V_3, V_4\rangle$, lo cual es una contradicción. De esta forma, resulta que $\{y\} \times S^1 \subsetneq H(]y,w[, r_{]x,z[})$ y, por lo tanto, $\rho(H(]y,w[, r_{]x,z[})) \supsetneq \{y\}$.

Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

**Afirmación 2.** Si $V$ es una vecindad básica de $]x,z[$, entonces existen $x' \in \rho(V)$ y $\delta \in \mathbb{R}^+$ tales que $x \notin D_\delta(x')$ y $\rho(H(]y,w[, r_{]x,z[})) \supsetneq \{y\}$ para cualesquiera $y \in \text{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_\delta(x'))$ y $w \in S^1$.

Por la Afirmación 1, dada una vecindad básica $V$ de $]x,z[$ existe una vecindad básica $U$ de $]x,z[$ contenida en $V$ tal que, dados $y \in \rho(U) \setminus \{x\}$ y $w \in S^1$ $\rho(H(]y,w[, r_{]x,z[})) \supsetneq \{y\}$. Elegimos $x' \in \rho(U) \setminus \{x\}$. Como $U$ es una vecindad abierta básica de $]x,z[$ en $X$ y $x \neq x'$, $\{x'\} \times S^1 \subset U$. El Lema 6.29 nos dice que existe $\delta \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $D_\delta(x') \times S^1 \subset U$. Como $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio normal, podemos suponer que $\text{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_\delta(x')) \times S^1 \subset U$ y que $x \notin \text{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_\delta(x'))$. Luego, tenemos que $\rho(H(]y,w[, r_{]x,z[})) \supsetneq \{y\}$ para cada $y \in D_\delta(x')$ y $w \in S^1$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2.

Elegimos $x_0 = 0$. Sea $\mathcal{U}_0$ una vecindad básica de $H\big(]x_0,1[,r_{]x_0,1[}\big)$. Como la función $H$ es continua, existe una vecindad básica $U_0 \times V_0$ de $]x_0,1[$ tal que $H(U_0 \times V_0) \subset \mathcal{U}_0$. Podemos suponer que $\infty \notin U_0$. Por la Afirmación 2, existen $x_1 \in U_0$ y $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_0 \notin D_{\delta_1}(x_1)$ y $\rho(H(]y,w[,r_{]x_0,1[})) \supsetneq \{y\}$ para toda $]y,w[\in \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_1}(x_1)) \times S^1$. Por el Lema 6.39, $\{x_1\} \times S^1$ y $H(]x_1,1[,r_{]x_0,1[})$ son comparables, así que $\{x_1\} \times S^1 \subsetneq H(]x_1,1[,r_{]x_0,1[})$. Como $H$ respeta el orden, $r_{]x_1,1[} < r_{]x_0,1[}$.

Ahora tomamos una vecindad básica $\mathcal{U}_1$ de $H\big(]x_1,1[,r_{]x_1,1[}\big)$. Como la función $H$ es continua, existe una vecindad básica $U_1 \times V_1$ de $]x_1,1[$ tal que $H(U_1 \times V_1) \subset \mathcal{U}_1$ y $\infty \notin U_1$. Podemos suponer que $U_1 \subset D_{\delta_1}(x_1)$. Por la Afirmación 2, existen $x_2 \in U_1$ y $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $x_1 \notin D_{\delta_2}(x_2)$ y $\rho(H(]y,w[,r_{]x_1,1[})) \supsetneq \{y\}$ para toda $]y,w[\in \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_2}(x_2)) \times S^1$. Podemos suponer que $\delta_2 < \frac{1}{2}$ y, como $x_2 \in \rho(U_1) \subset D_{\delta_1}(x_1)$, también podemos suponer que $\delta_2$ cumple que $\mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_2}(x_2)) \subsetneq \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_1}(x_1))$ Como $H$ respeta el orden y $\{x_2\} \times S^1 \subsetneq H(]x_2,1[,r_{]x_1,1[})$, entonces $r_{]x_2,1[} < r_{]x_1,1[}$.

Siguiendo este proceso, de forma inductiva podemos construir una sucesión $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ tal que, para toda $j \in \mathbb{N}$, se cumple lo siguiente: $r_{]x_j,1[} < r_{]x_{j-1},1[}$, $\mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_j}(x_j)) \subsetneq \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_{j-1}}(x_{j-1}))$, $\delta_j \in (0,\frac{1}{n})$, $\infty \notin \rho(D_{\delta_j}(x_j))$ y además para toda $]y,w[\,\in \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_j}(x_j)) \times S^1$, $\{y\} \subsetneq H(]y,w[,r_{]x_{j-1},1[})$. En particular, tenemos que se cumple que $\rho(H(]x_j,1[,r_{]x_{j-1},1[})) \supsetneq \{x_j\}$ para toda $]y,z[\in D_{\delta_j}(x_j) \times S^1$. Como $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio compacto y $\mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_{j+1}}(x_{j+1})) \subset \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_j}(x_j))$ podemos elegir $y_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_j}(x_j))$.

**Afirmación 3.** $y_0$ es un punto de acumulación del conjunto $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ tal que $y_0 \notin \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$.

Dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tenemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_j < \frac{1}{j_0} < \epsilon$ para toda $j \geq j_0$. En particular, $y_0 \in \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_{j_0}}(x_{j_0}))$, así que $|y_0 - x_{j_0}| \leq \delta_{j_0}$ y, por lo tanto, $x_{j_0} \in D_\epsilon(y_0)$. Luego, podemos concluir que $y_0 \in \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(\{x_j : j \in \mathbb{N}\})$. Notemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_j \notin \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_{j+1}}(x_{j+1}))$, así que $x_j \notin \bigcap_{j=1}^{\infty} \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_j}(x_j))$ y, por tanto, $x_j \neq y_0$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 3.

Como $\{y_0\} \times S^1$ es compacto, podemos elegir un punto $w_0$ de acumulación del conjunto $\{\exp\left(\frac{2\pi i x}{x-x_j}\right) : j \in \mathbb{N}\}$. La sucesión $\{r_{]x_j,1[} : j \in \mathbb{N}\}$ es decreciente. Como $T$ es un arco generalizado, podemos tomar $s = \inf\{r_{]x_j,1[} : j \in \mathbb{N}\}$. La sucesión $\{r_{]x_j,1[} : j \in \mathbb{N}\}$ es estrictamente creciente, así que $s < r_{]x_j,1[}$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

**Afirmación 4.** $s \geq r_{]y_0,w_0[}$.

Dado $j \in \mathbb{N}$, como $y_0 \in \mathrm{cl}_{\overline{\mathbb{R}}}(D_{\delta_j}(x_j))$, tenemos que $\rho(H(]y_0,w_0[,r_{]x_j,1[})) \supsetneq \{y_0\}$. De esta forma, el Lema 6.36 implica que $H(]y_0,w_0[,r_{]x_j,1[}) \supsetneq \{y_0\} \times S^1$. Como $H$

preserva el orden y $r_{]x_j,1[}$ y $r_{]y_0,w_0[}$ son comparables (pues el orden en $T$ es total), el hecho de que $H(]y_0,w_0[,r_{]x_j,1][}) \supsetneq H(]y_0,w_0[,r_{]y_0,w_0[})$, implica que $r_{]x_j,1[} > r_{]y_0,w_0[}$, así que $r_{]y_0,w_0[}$ es cota inferior para el conjunto $\{r_{]x_j,1[} : j \in \mathbb{N}\}$. Como $s$ es el ínfimo, tenemos que $s \geq r_{]y_0,w_0[}$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 4.

Por la Afirmación 1, existe una vecindad básica $U$ de $]y_0,w_0[$ en $X$ tal que, dados $y \in \rho(U) \setminus \{x\}$ y $w \in S^1$, $\rho(H(]y,w[,r_{]y_0,w_0[})) \supsetneq \{y\}$. Como $y_0$ es punto de acumulación del conjunto $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, tenemos que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{j_0} \in \rho(U)$. Así $\{x_{j_0}\} \subsetneq \rho(H(]x_{j_0},1[,r_{]y_0,w_0[}))$. Sabemos que $x_{j_0} \neq y_0$; como $U$ es una vecindad básica de $]y_0,w_0[$, se sigue que $]x_{j_0},1[ \in \{x_{j_0}\} \times S^1 \subset U$. Como $H(]x_{j_0},1[,r_{]x_{j_0},1[}) = \{x_{j_0}\} \times S^1$, $r_{]y_0,w_0[} \leq s < r_{]x_{j_0},1[}$ y $H$ preserva el orden, el Lema 6.36 nos dice que $H(]x_{j_0},1[,s) \subset \{x_{j_0}\} \times S^1$ y, por tanto, $\{x_{j_0}\} \subsetneq \rho(H(]x_{j_0},1[,r_{]y_0,w_0[})) \subset \rho(H(]x_{j_0},1[,s) = \{x_{j_0}\}$. Esta contradicción termina la prueba de que $C(X)$ no es contráctil. ■

Otra propiedad relacionada con la contractibilidad de hiperespacios es la de ser *hereditariamente indescomponible*, misma que definimos a continuación.

**6.41 Definición.** Un continuo de Hausdorff es *hereditariamente indescomponible* si, dados $A, B \in C(X)$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$, se tiene que $A \subset B$ o $B \subset A$.

En el caso de los continuos métricos se sabe que si $X$ es hereditariamente indescomponible entonces tiene la propiedad de Kelley (ver [17, Teorema 16.27, p. 425]), lo cual resulta una condición suficiente para que $C(X)$ sea contráctil.

En el caso de los continuos de Hausdorff, queda abierta la pregunta de determinar si ésta es una condición suficiente para que $C(X)$ sea contráctil. Por otra parte, el hecho de que $X$ sea un continuo de Hausdorff hereditariamente indescomponible sí es una condición suficiente para que $C(X)$ sea contráctil por arcos ordenados, como mostraremos a continuación.

**6.42 Lema.** *Si $X$ es un continuo de Hausdorff hereditariamente indescomponible y $x \in X$, entonces existe un único arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$.*

*Demostración.* Por el Corolario 2.23 sabemos que existe un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$.

**Afirmación 1.** Dado $C \in C(X)$ tal que $x \in C$, se tiene que $C \in \mathcal{A}$.

Definimos $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} : A \subset C\} = \mathcal{A} \cap C(C)$ que, por el Lema 2.1(a), es un subconjunto cerrado propio de $\mathcal{A}$. Por el Teorema 2.20, tenemos que $\mathcal{A}$ es un arco generalizado. Como $\{x\} \subset C$, $\mathcal{C} \neq \emptyset$; además, $X$ es cota superior de $\mathcal{C}$. Sea $A_0 = \sup(\mathcal{C})$; como $\mathcal{C}$ es cerrado en $\mathcal{A}$, se sigue que $A_0 \subset C$.

Probaremos que $A_0 = C$. Supongamos, por el contrario, que $A_0 \subsetneq C$. Tomemos $x_0 \in C \setminus A_0$. Como $\langle X \setminus \{x_0\}\rangle \cap \mathcal{A}$ es un abierto de $\mathcal{A}$ que contiene a $A_0$ y $A_0 \subsetneq X$, existe un elemento $A_1 \in \mathcal{A}$ tal que $A_0 \subsetneq A_1$ y $A_1 \in \langle X \setminus \{x_0\}\rangle$. Como $A_0 \subsetneq A_1$ y $A_0$ es el supremo de $\mathcal{C}$, tenemos que $A_1 \not\subset C$. Además, el hecho de que $x_0 \notin A_1$ implica que $C \not\subset A_1$. Por otra parte, como $X$ es hereditariamente indescomponible, $\{A_1, C\} \subset C(X)$ y $A_1 \cap C \neq \emptyset$ (pues $A_0 \subset A_1 \cap C$), tenemos que $A_1 \subset C$ o $C \subset A_1$, lo cual es una contradicción. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

Utilizando la Afirmación 1 obtenemos que, si $\mathcal{B}$ es un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$, se tiene que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ (y viceversa). De esta forma podemos concluir que, en $C(X)$, los arcos ordenados largos que empiezan en $\{x\}$ son únicos. ■

**6.43 Teorema.** *Si $X$ es hereditariamente indescomponible, entonces $X$ tiene la propiedad de Kelley.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ no tiene la propiedad de Kelley; es decir, que existen $x \in X$, $A \in C(X)$ y una vecindad básica $\mathcal{U}$ de $A$ en $C(X)$ tal que $x \in A \in \mathcal{U}$ y, para cada subconjunto abierto $V$ de $X$ tal que $x \in V$, existe un punto $y \in V$ para el cual no hay un elemento $B \in C(X)$ con la propiedad de que $y \in B \in \mathcal{U}$. Podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap C(X)$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es abierto de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

**Afirmación 1.** $A \subsetneq X$.

Si $A = X$ y $V = X$, sea $y$ un punto cualquiera de $V$. Sea $B = X$, entonces $y \in B \in \mathcal{U}$, contrario a lo que estamos suponiendo. Esto prueba la Afirmación 1.

Como $C(X)$ es un espacio normal, existe abierto propio $W$ de $X$ tal que $A \subset W \subset \mathrm{cl}_X(W) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Sea $\mathcal{V} = \{V \subset X : V$ es abierto y $x \in V \subset W\}$. Para cada $V \in \mathcal{V}$, elegimos un punto $y_V \in V$ para el cual no existe un elemento $B \in C(X)$ con la propiedad de que $y \in B \in \mathcal{U}$. Llamamos $K_V$ a la componente de $\mathrm{cl}_X(W)$ que contiene a $y_V$. Como $K_V \in C(X)$ y $y_V \in K_V$, tenemos que $K_V \notin \mathcal{U}$. Luego, el hecho de que $K_V \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ implica que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $K_V \cap U_i = \emptyset$.

Definimos $E = \{y_V \in X : V \in \mathcal{V}\}$; observemos que $x \in \mathrm{cl}_X(E)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sean $\mathcal{V}_i = \{V \in \mathcal{V} : K_V \cap U_i = \emptyset\}$ y $E_i = \{y_V \in E : V \in \mathcal{V}_i\}$. Como $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in \mathrm{cl}_X(E_{i_0})$.

Dado $O \in \mathcal{V}$, como $x \in \mathrm{cl}_X(E_{i_0})$ y $x \in O$, tenemos que $O \cap E_{i_0} \neq \emptyset$.

Para cada $O \in \mathcal{V}$, definimos

$$F_O = \mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{K_V \in \mathcal{V}_{i_0} : y_V \in O \cap E_{i_0}\}\right).$$

Probaremos que $x \in F_O$. Sea $U$ una vecindad abierta de $x$. Como $x \in \mathrm{cl}_X(E_{i_0})$, existe $y_V \in E_{i_0} \cap [U \cap O]$. Luego, $y_V \in U \cap F_O$ y, por lo tanto, $x \in F_O$. De esta forma, tenemos que $F_O$ es compacto no vacío de $X$. Sea $F = \bigcap\{F_O : O \in \mathcal{V}\}$ y sea $Q$ la componente de $F$ que contiene a $x$. Notemos que $Q \in C(X)$.

Probaremos que $\mathrm{fr}_X(W) \cap Q \neq \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que $\mathrm{fr}_X(W) \cap Q = \emptyset$. Por el Lema 2.6, existe un subconjunto abierto y cerrado $L$ de $F$ tal que $Q \subset L$ y $L \cap \mathrm{fr}_X(W) = \emptyset$. Como $F$ es cerrado de $X$, tenemos que $L$ y $(F \setminus L) \cup \mathrm{fr}_X(W)$ son cerrados de $X$, así que existen subconjuntos abiertos $R$ y $S$ de $X$ tales que $L \subset R$, $(F \setminus L) \cup \mathrm{fr}_X(W) \subset S$ y $R \cap S = \emptyset$. Como $F \subset R \cup S$, existen $k \in \mathbb{N}$ y elementos $O_1, \ldots, O_k \in \mathcal{V}$ de $X$ tales que $F \subset \bigcap_{i=1}^{k} F_{O_i} \subset R \cup S$. Sea $O_0 = \bigcap_{i=1}^{k} O_i$. Luego, $O_0$ es un abierto de $X$ tal que $x \in O_0 \subset W$. Por la definición de $F_O$ tenemos que $F_{O_0} \subset \bigcap_{i=1}^{k} F_{O_i}$, así que $F_{O_0} \subset R \cup S$. Como $x \in R \cap O_0$ y $x \in \mathrm{cl}_X(E_{i_0})$, existe $V \in \mathcal{V}_{i_0}$ tal que $y_V \in R \cap O_0 \cap K_V$ y, por tanto, $K_V \subset F_{O_0} \subset R \cup S$. Como $K_V$ es conexo y $K_V \cap R \neq \emptyset$, $K_V \subset R$. De esta forma, $\mathrm{fr}_X(W) \cap K_V \subset \mathrm{fr}_X(W) \cap R = \emptyset$, lo cual contradice el Teorema 2.7. Así, hemos probado que $\mathrm{fr}_X(W) \cap Q \neq \emptyset$.

Como $Q \in C(X)$, $x \in Q \cap A$ y $X$ es hereditariamente indescomponible, tenemos que $Q \subset A$ o $A \subset Q$. Como $\mathrm{fr}_X(W) \cap Q \neq \emptyset$ y $\mathrm{fr}_X(W) \cap A = \emptyset$, tenemos que $A \subset Q$. Como $A \cap U_{i_0} \neq \emptyset$, podemos elegir $y \in A \cap U_{i_0} \subset Q \cap U_{i_0} \subset F \cap U_{i_0}$. Luego, $y \in U_{i_0} \cap F_W$, así que existe $V \in \mathcal{V}_{i_0}$ tal que $U_{i_0} \cap K_V \neq \emptyset$. Esto contradice la definición de $\mathcal{V}_{i_0}$ y completa la prueba del teorema. ■

**6.44 Teorema.** *Si $X$ es un continuo de Hausdorff hereditariamente indescomponible, entonces $F_1(X)$ es contráctil por arcos ordenados en $C(X)$.*

*Demostración.* Como $X$ es hereditariamente indescomponible, de acuerdo con el Lema 6.42, dado $x \in X$ existe un único arco ordenado largo $\mathcal{A}_x$ en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$. Consideremos la función $H : F_1(X) \to C(C(X))$ definida por $H(\{x\}) = \mathcal{A}_x$. Probaremos que $H$ es continua.

Sean $\{x_0\} \in F_1(X)$ y $\mathfrak{U}$ una vecindad abierta básica de $\mathcal{A}_{x_0}$ en $C(C(X))$. Podemos suponer que $\mathfrak{U} = \langle \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \rangle$ donde $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}_i$ es un abierto básico de $C(X)$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

**Afirmación 1.** Existe una vecindad abierta $U$ de $x_0$ tal que $H(\{x\}) \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para cada $x \in U$.

Dado $i \in \{1 \ldots, n\}$, como $H(\{x_0\}) \in \mathfrak{U}$ existe $A \in H(\{x_0\}) \cap \mathcal{U}_i$. Como $X$ tiene la propiedad de Kelley, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe una vecindad abierta $U_i$ de $x_0$ tal que para cada $x \in U_i$, existe $B \in C(X)$ tal que $x \in B \in \mathcal{U}_i$. Dado que $y \in B$, por el Corolario 2.28, existe un arco ordenado en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$ y contiene a $B$. Como $H(\{x\})$ es el único arco ordenado largo que empieza en $\{x\}$, entonces $B \in H(\{x\})$. Así, podemos concluir que $H(\{x\}) \cap \mathcal{U}_i \neq \emptyset$. Definimos $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

**Afirmación 2.** Existe una vecindad abierta básica $V$ de $x_0$ tal que $H(\{x\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$ para toda $x \in V$.

Por el Lema 6.8 sabemos que existe una cubierta finita $\{\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_m\}$ de $H(\{x_0\})$, formada por abiertos básicos de $C(X)$, que cumple que $\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{V}_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, $\{x_0\} \in \mathcal{V}_1$, $X \in \mathcal{V}_m$ y

$$(\mathcal{V}_i \cap H(\{x_0\})) \cap (\mathcal{V}_j \cap H(\{x_0\})) \neq \emptyset$$

si y solamente si $|i - j| \leq 1$.

De acuerdo con el Teorema 6.43, $X$ tiene la propiedad de Kelley. Dado $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, elegimos $C_j \in H(\{x_0\}) \cap \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1}$. Como $x_0 \in C_j$ y $C_j \in \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1}$, existe una vecindad abierta $V_j$ de $x_0$ en $X$ tal que si $x \in V_j$, entonces existe $B \in C(X)$ tal que $x \in B \in \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1}$. Como $\mathcal{V}_1$ es una vecindad abierta de $\{x_0\}$, elegimos una vecindad abierta $V_0$ de $x_0$ en $X$ tal que $\langle V_0 \rangle \subset \mathcal{V}_1$. Sea $V = \bigcap_{j=0}^{m-1} V_i$. Probaremos que $H(\{x\}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ para toda $x \in V$.

Sea $x \in V$. Para cada $j \in \{1, \ldots, m-1\}$, como $x \in V_j$, tenemos que existe $B_j \in C(X)$ tal que $x \in B_j \in \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}_{j+1}$. Definimos $B_0 = \{x\}$ y $B_m = X$; observemos que $B_0 \in \langle V_0 \rangle \subset \mathcal{V}_1$ y $B_m \in \mathcal{V}_m$. Como $x \in B_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, el Corolario 2.28 nos dice que existe un arco ordenado largo que empieza en $\{x\}$ y contiene a $B_j$; como $H(\{x\})$ es el único arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$, tenemos que $B_j \in H(\{x\})$ para cada $j \in \{0, \ldots, m\}$.

Dado $B \in H(\{x\})$, como $H(\{z\})$ cumple con la condición (b) en la Definición 2.13, $B$ es comparable con todos los elementos de $\{B_0, \ldots, B_{m-1}\}$. Sea $j_0 = \text{máx}\{j \in \{0, \ldots, m-1\} : B_k \subset B\}$. Luego, $B \in [B_{j_0-1}, B_{j_0}]_{H(\{x\})}$. Por la elección de $B_{j_0-1}$ y $B_{j_0}$, sabemos que $\{B_{j_0-1}, B_{j_0}\} \subset \mathcal{V}_{j_0}$; de acuerdo con el Lema 2.16, tenemos que $B \in \mathcal{V}_{j_0} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 2.

El abierto $U \cap V$ es una vecindad de $x_0$. Por las afirmaciones 1 y 2, podemos concluir que $H(\langle U \cap V \rangle \cap F_1(X)) \subset \mathcal{U}$. $\blacksquare$

# Capítulo 7

# Un comentario sobre la circunferencia de circunferencias

En el caso de los continuos métricos, como veremos en el Lema 7.2, todos los arcos ordenados en $C(X)$ son homeomorfos al intervalo $[0,1]$. Una pregunta natural es si ésta resulta una condición suficiente para que el hiperespacio admita una función de Whitney; es decir, si dado un continuo de Hausdorff $X$ tal que todos los arcos ordenados en $C(X)$ son homeomorfos al intervalo $[0,1]$, se tiene que $C(X)$ necesariamente admite una función de Whitney.

En este capítulo utilizaremos a la circunferencia de circunferencias para responder la pregunta anterior de forma negativa.

**7.1 Lema.** *Sean $X$ un continuo $T_2$ y $\mu : C(X) \to T$ una función de Whitney para $C(X)$. Si $\mathcal{A}$ es un arco ordenado largo en $C(X)$, entonces $\mu|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to [\min(T), \mu(X)]$ es un encaje.*

*Demostración.* Veamos que la función $\mu|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva. Dados $A$ y $B \in \mathcal{A}$ tales que $A \neq B$, como $\mathcal{A}$ cumple con la condición (b) de la Definición 2.13, $A$ y $B$ son comparables. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subsetneq B$; como $\mu$ es función de Whitney, tenemos que $\mu(A) < \mu(B)$, así que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es inyectiva. Como $\mu|_{\mathcal{A}}$ es una función continua y biyectiva de un espacio compacto en un espacio $T_2$, podemos concluir que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un encaje. ■

**7.2 Lema.** *Sea $X$ un continuo métrico. Todo arco ordenado largo en $C(X)$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.*

*Demostración.* Dado $x \in X$, consideremos un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ que empieza en $\{x\}$. Sea $\mu : C(X) \to [0,1]$ una función de Whitney. Podemos suponer que $\mu(X) = 1$. Como $\mu(\{x\}) = 0$, $\mu$ es continua y $\mathcal{A}$ es conexo, tenemos que $\mu(\mathcal{A}) = [0,1]$. Como $\operatorname{Im} \mu|_{\mathcal{A}} = [0,1]$, el Lema 7.1 implica que $\mu|_{\mathcal{A}}$ es un homeomorfismo. ■

**7.3 Teorema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. Todo arco ordenado largo en $C(X)$ es homeomorfo al intervalo* $[0,1]$.

*Demostración.* Dado $]x,z[ \, \in X$, consideremos un arco ordenado largo $\mathcal{A}$ en $C(X)$ que empieza en $\{]x,z[\}$. Por el Lema 6.39, $\{x\} \times S^1 \in \mathcal{A}$; dado que $\mathcal{A}$ cumple con la condición (b) en la Definición 2.13, tenemos que $\mathcal{A} = [\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}} \cup [\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$.

**Afirmación 1.** $[\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Probaremos que $[\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a un arco ordenado de $C(S^1)$. Por el Lema 6.26 sabemos que $\rho_x : \{x\} \times S^1 \to S^1$ es un homeomorfismo. El Lema 6.13 nos dice que $\rho_x^* : C(\{x\} \times S^1) \to C(S^1)$ es una función continua. Dado $A \in [\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$, como $[\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$ cumple con la condición (c) en la Definición 2.13, $A \subset \{x\} \times S^1$, así que $[\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}} \subset C(\{x\} \times S^1)$.

Ahora vamos a mostrar que $\rho_x^*|_{[\{]x,z[\},\{x\}\times S^1]_{\mathcal{A}}}$ es un encaje. Dados $A$ y $B \in [\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$ tales que $A \neq B$, como $\mathcal{A}$ cumple con la condición (b) de la Definición 2.13, $A$ y $B$ son comparables. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subsetneq B$; luego, como $\rho_x$ es un homeomorfismo, tenemos que $\rho_x^*(A) = \rho_x(A) \subsetneq \rho_x(B) = \rho_x^*(B)$, así que $\rho_x^*$ preserva el orden. Dado que la función $\rho_x^*|_{[\{]x,z[\},\{x\}\times S^1]_{\mathcal{A}}}$ es continua y preserva el orden, podemos concluir que es un encaje.

De acuerdo con el Teorema 2.20, $[\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$ es un arco generalizado; aplicando el Lema 3.49, tenemos que $\rho_x^*([\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}})$ es un arco ordenado en $C(S^1)$. Finalmente, como $\rho_x^*|_{[\{]x,z[\},\{x\}\times S^1]_{\mathcal{A}}}$ es un encaje, del Lema 7.2 se sigue que $[\{]x,z[\}, \{x\} \times S^1]_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 1.

La siguiente afirmación será de utilidad para probar que $[\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ es metrizable.

**Afirmacion 2.** Dado $A \in [\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$, se tiene que $A = \rho^{-1}(\rho(A))$.

Para cada $A \in C(X)$, tenemos que $A \subset \rho(A) \times S^1 = \rho^{-1}(\rho(A))$. Dado $A \in [\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$, como $[\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ cumple con la condición (c) en la Definición 2.13, se tiene que $\{x\} \times S^1 \subset A$. Luego, dado $y \in \rho(A)$, tenemos dos posibilidades:

1. Si $y = x$, entonces $\{y\} \times S^1 \subset A$.
2. Si $y \neq x$, entonces $A \not\subset \{y\} \times S^1$ (pues $]x, 1[ \, \in A \setminus (\{y\} \times S^1)$). Luego, el Lema 6.36 nos dice que $\{y\} \times S^1 \subset A$.

Finalmente, podemos concluir que $\rho(A) \times S^1 \subset A$ y, por tanto, $A = \rho^{-1}(\rho(A))$. Lo anterior completa la prueba de la Afirmación 2.

**Afirmacion 3.** $[\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

Probaremos que $[\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo a un arco ordenado de $C(S^1)$. Por el Lema 6.26 sabemos que $\rho : X \to S^1$ es una función continua. El Lema 6.13 nos dice que $\rho_x^* : C(X) \to C(S^1)$ es una función continua.

Ahora vamos a mostrar que $\rho^*|_{[\{x\}\times S^1, X]_{\mathcal{A}}}$ es un encaje. Dados $A$ y $B \in [\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ tales que $A \neq B$, como $\mathcal{A}$ cumple con la condición (b) de la Definición 2.13, $A$ y $B$ son comparables. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $A \subsetneq B$. Por la definición de $\rho^*$, tenemos que $\rho^*(A) = \rho(A) \subset \rho(B) = \rho^*(B)$. Si suponemos que $\rho(A) = \rho(B)$, la Afirmación 2 implica que $A = \rho^{-1}(\rho(A)) = \rho^{-1}(\rho(B)) = B$, lo cual contradice nuestro supuesto de que $A \subsetneq B$. De esta forma, hemos probado que $\rho^*|_{[\{x\}\times S^1, X]_{\mathcal{A}}}$ preserva el orden. Dado que la función $\rho^*|_{[\{x\}\times S^1, X]_{\mathcal{A}}}$ es continua y preserva el orden, podemos concluir que es un encaje.

De acuerdo con el Teorema 2.20, $[\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ es un arco generalizado; aplicando el Lema 3.49, tenemos que $\rho_x^*([\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}})$ es un arco ordenado en $C(X)$. Finalmente, como $\rho^*$ es un encaje, del Lema 7.2 se sigue que $[\{x\} \times S^1, X]_{\mathcal{A}}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Con esto completamos la prueba de la Afirmación 3.

Dado que $\mathcal{A}$ es la unión de dos subespacios homeomorfos al intervalo $[0, 1]$ que se intersectan solamente en uno de sus puntos extremos, podemos concluir que $\mathcal{A}$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. ∎

**7.4 Teorema.** *Sea $X$ la circunferencia de circunferencias. Entonces $C(X)$ no admite una función de Whitney.*

*Demostración.* Procederemos por contradicción. Supongamos que existen un arco generalizado $T$ y una función de Whitney $\mu : C(X) \to T$ para $C(X)$. Sean $p \in X$ y $\mathcal{A}$ un arco ordenado largo en $C(X)$ que empieza en $\{p\}$. Como $\mu$ es una función de

Whitney, tenemos que $\operatorname{Im}\mu = [\mu(\{p\}), \mu(X)] = \mu(\mathcal{A})$. Por el Teorema 7.3 sabemos que $\mathcal{A}$ es homeomorfo a $[0,1]$, del Lema 7.1 se sigue que $\mu(\mathcal{A})$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$. Por lo anterior, podemos suponer que $T = [0,1]$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$\mathcal{S}_n = \{\rho^{-1}(x) \in \mu^{-1}\big([\frac{1}{n}, 1]\big) : x \in \overline{\mathbb{R}}\} = \{\{x\} \times S^1 : \mu(\{x\} \times S^1) \geq \frac{1}{n} \text{ y } x \in \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Probaremos que $\mathcal{S}_n$ es un conjunto finito para cada $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos, por el contario, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{S}_{n_0}$ es infinito. Como $\rho^{-1}(x) \neq \rho^{-1}(y)$ implica que $x \neq y$, el conjunto $S = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \rho^{-1}(x) \in \mathcal{S}_{n_0}\}$ es infinito. Como $X$ es compacto y $S \times \{1\}$ es un subconjunto infinito de $X$, podemos elegir $]x_0, z_0[\, \in X$ tal que $]x_0, z_0[$ es un punto de acumulación de $S \times \{1\}$. Como $\mu$ es una función de Whitney, tenemos que $\mu(\{]x_0, z_0[\}) = 0$. Luego, $C(X) \setminus \mu^{-1}([\frac{1}{n}, 1])$ es un abierto de $C(X)$ que contiene a $\{]x_0, z_0[\}$.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad abierta básica de $\{]x_0, z_0[\}$ en $C(X) \setminus \mu^{-1}([\frac{1}{n}, 1])$, podemos suponer que $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle \cap C(X)$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $U_i$ es un abierto básico de $X$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Para llegar a una contradicción, probaremos que $\mathcal{U} \cap \mu^{-1}\big([\frac{1}{n}, 1]\big) \neq \emptyset$.

Como $\{]x_0, z_0[\} \in \mathcal{U}$, tenemos que $]x_0, z_0[\, \in U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, así que podemos tomar una vecindad básica $V$ de $]x_0, z_0[$ contenida en $\bigcap_{i=1}^n U_i$. Tenemos dos posibilidades:

1. Si $z_0 \neq 1$, podemos suponer que $V \subset C(X) \setminus \{]x_0, 1[\}$. Como $]x_0, z_0[$ es punto límite de $S \times \{1\}$, podemos tomar $x' \in S$ tal que $]x', 1[\, \in (S \times \{1\}) \cap V$. Como $]x_0, 1[\, \notin V$, $x' \neq x_0$.

2. Si $z_0 = 1$, como $]x_0, z_0[$ es punto de acumulación de $S \times \{1\}$, podemos tomar $x' \in S$ tal que $x' \neq x_0$ y $]x', 1[\in (S \times \{1\}) \cap V$.

Dado que $V$ es un abierto básico y $x' \neq x_0$, tenemos que $\rho^{-1}(x') \subset V$, así que $\rho^{-1}(x') \subset \bigcap_{i=1}^m U_i$. Luego, $\rho^{-1}(x') \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ y $\rho^{-1}(x') \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, así que $\rho^{-1}(x') \in \mathcal{U}$. Como $x' \in S$, resulta que $\rho^{-1}(x') \in \mathcal{S}_{n_0}$ y entonces $\mu(\rho^{-1}(x')) \in \big[\frac{1}{n_0}, 1\big]$. Por lo anterior, $\mathcal{U} \cap \mu^{-1}\big(\big[\frac{1}{n_0}, 1\big]\big) \neq \emptyset$, lo cual contradice la elección de $\mathcal{U}$. De esta forma, podemos concluir que $\mathcal{S}_n$ es finito para cada $n \in \mathbb{N}$, como queríamos demostrar.

Como $\mu$ es una función de Whitney, para cada $x \in \overline{\mathbb{R}}$, tenemos que $\mu(\rho^{-1}(x)) > \mu(\{]x, 1[\}) = 0$, así que $\mu(\rho^{-1}(x)) > \frac{1}{n}$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Luego, resulta que $\overline{\mathbb{R}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ y, por tanto, $|\overline{\mathbb{R}}| = |\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{S}_n| \leq |\mathbb{N}|$, lo cual es una contradicción. De esta forma, podemos concluir que el hiperespacio $C(X)$ no admite ninguna función de Whitney. ■

# Bibliografía


[1] J. G. Anaya, *Agujeros en hiperespacios*, Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.

[2] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Whitney maps–a non-metric case*, Colloq. Math. **83** (2000), 305–307.

[3] W. J. Charatonik, *A homogeneous continuum without the property of Kelley*, Topology Appl. **96** (1999), 209–216.

[4] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[5] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1988.

[6] A. Illanes, *The space of Whitney levels*, Topology Appl. **40** (1991), 157–164.

[7] ———, *Hiperespacios de continuos*, vol. 28, Aportaciones Mat. Textos. Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[8] A. Illanes y S. B. Nadler Jr, *Hyperspaces: Fundamentals and recent advances*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 216, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1999.

[9] J. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), 22–36.

[10] K. Kuratowski, *Topology*, vol. II, Acad. Press, 1968.

[11] I. Lončar, *D-continuum $X$ admits a Whitney map for $C(X)$ if and only if it is metrizable*, Glas. Mat. Ser. **40(60)** (2005), 333–337.

[12] ———, *Elusive examples of non-metrizable continua which admit a Whitney map*, Georgian. Math. J. **14-4** (2007), 711–719.

[13] W. Makuchowski, *On local connectedness in hyperspaces*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **47** (1999), 119–126.

[14] M. M. McWaters y J. H. Reed, *Retractions and quasi-monotone mappings of unicoherent spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **33-2** (1972), 557–561.

[15] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, 2000.

[16] S. B. Nadler, Jr, *Inverse limits and multicoherence*, Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1970), 411–414.

[17] ______, *Hyperspaces of sets: A text with research questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 49, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1978.

[18] D. G. Paulowich, *Weak contractibility and hyperspaces*, Fund. Math. **94** (1977), 41–47.

[19] L. A. Steen y J. A. Seebach Jr, *Counterexamples in topology*, Dover Publications, Inc., 1978.

[20] A. J. Ward, *Notes on general topology II. A generalization of arc-connectedness*, Proc. Camb. Phil. Soc. **61** (1965), 879–880.

[21] R. W. Wardle, *On a property of j. l. kelley*, Houston J. Math. **3** (1977), 291–299.

[22] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, AMS Colloquium Publications **28** (1942), Providence, R. I.