UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL ESPECTRO DEL OPERADOR DE CESÀRO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

DAVID CUEVAS ESTRADA

TUTORA:
DRA. CARMEN MARTÍNEZ ADAME ISAIS

2015

1. Datos del alumno
Cuevas
Estrada
David
55 34 60 05 46
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
308066618

2. Datos del tutor
Dra
Carmen
Martínez Adame
Isais

3. Datos del sinodal 1
M en C
Angel Manuel
Carrillo
Hoyo

4. Datos del sinodal 2
Dr
Francisco Javier
Torres
Ayala

5. Datos del sinodal 3
Dr
Luis Octavio
Silva
Pereyra

6. Datos del sinodal 4
M en C
Pavel
Ramos
Martínez

7. Datos del trabajo escrito
El espectro del operador de Cesàro
142 p
2015

A mi madre Gloria,

A mi padre Gerardo,

y a mis hermanos Gerardo y Jorge.

Agradecimientos.

Quisiera desde estas líneas dejar constancia de mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido, de alguna u otra manera, a que pudiera realizar el trabajo que aquí se expone.

A mi madre, Gloria Estrada Gloria, el mayor ejemplo de vida. Este trabajo se realizó pensando en ti Mamá, estoy infinitamente agradecido por la atención que me diste, tus palabras son el más grande tesoro que me queda. Gracias por estar conmigo desde el inicio y hasta ahora, la primera escala del viaje. Por enseñarme que el amor y la firmeza sí pueden ir de la mano. Gracias por haberme llevado tan alto.

A mis tíos, Oscar Cuevas De la Rosa y María del Refugio Gispert Castañeda, sin ustedes nada hubiera sido posible. Son un ejemplo de humildad y generosidad. Les estaré siempre agradecido por arroparme como a un hijo. La culminación de este trabajo es una de las formas que tengo para agradecerles todo lo que han hecho por mí.

AGRADECIMIENTOS

A mi padre, Gerardo Cuevas De la Rosa, ejemplo de lucha. Me enseñaste que las cosas no siempre salen como uno las planea. Gracias a lo cual tengo claro la clase de persona que quiero ser.

A mi asesora, Dra. Carmen Martínez Adame Isais, por confiar en mí, por su profesionalismo y el tiempo dedicado. Su contribución a este trabajo ha sido crucial, le estoy eternamente agradecido por sus consejos.

A mis hermanos Gerardo Emmanuel Cuevas Estrada y Jorge Alberto Cuevas Estrada. Gerardo, por tu apoyo sincero y cariño incondicional, eres la persona más especial que conozco. Jorge, ahora eres mi guía, gracias por tus palabras de aliento, son las que me llevaron a que este trabajo culminara. Son lo más importante que tengo en la vida.

A mis primos, Sonia Cuevas Gispert, Rodrigo Cuevas Gispert y Laura Cuevas Lomas, quienes estuvieron conmigo en todo momento. Sonia, la figura que me enseñó a luchar por las cosas que queremos, gracias por tus consejos llenos de objetividad y madurez. Rodrigo, mi tercer hermano, por compartir tu vida conmigo y por lidiar con mis problemas. Laura, por decir las cosas como son, aunque a veces resulten difíciles de escuchar. Muchas gracias a los tres por abrirme sus puertas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

El estudio de la convergencia y divergencia de series siempre ha sido de interés para el Análisis Matemático. En particular un problema que empezó a cobrar importancia hacia 1880 fue el de asignar una “suma”a una serie divergente. Una manera de hacer esto fue la propuesta por Ernesto Cesàro, profesor de la Universidad de Nápoles, en 1890 en [4]. Se considera una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se define la sumabilidad de Cesàro de la siguiente manera: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es Cesàro sumable, con suma $A \in \mathbb{R}$, si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_1 + a_2 + \cdots + a_k = A$. Es fácil ver que cualquier serie convergente es Cesàro sumable, pero también existen series divergentes que son Cesàro sumables. Un ejemplo de esto es la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ con $a_n = (-1)^{n+1}$.

Por otro lado, otro tema que ha sido de gran interés para el Análisis Matemático es la teoría de operadores que tuvo un gran auge a principios del siglo XX. En particular, el siguiente trabajo, se centra en la teoría espectral de operadores.

La redacción de la tesis se ha estructurado en tres partes que resumimos a continuación.

En la primer parte (capítulo 2) se presentan los resultados esenciales referentes al espectro de un operador.

Es donde damos conceptos como conjunto y operador resolvente. Hacemos una división del espectro en espectro puntual, residual y continuo, y aclaramos en qué consiste cada uno. Los resultados más relevantes de esta primera parte, corresponden a los teoremas 2.48, 2.53 y 2.56. Dichos teoremas nos aseguran que el espectro es compacto y no vacío, lo cual usaremos en repetidas ocasiones a lo largo de la tesis. Sin embargo, contiene resultados que no están vinculados directamente con nuestro objetivo, tales como los incluidos en la secciones 2.7 y 2.8, pero que resultan importantes para la teoría espectral.

Hemos escogido un operador en particular, llamado el Operador de Cesàro C, el cual transforma una sucesión de números complejos $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ en su sucesión de promedios; por definición

$$(Cx)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Preguntas como ¿Es cierto que si $x \in c_0$, entonces $Cx \in c_0$? Si es cierto, ¿el operador lineal C es acotado? Si C es acotado, ¿ cuál es su espectro?, surgen naturalmente. Esto nos lleva a la segunda parte de la tesis (capítulo 3), en la cual definimos los espacios de sucesiones c, c_0 y ℓ_p y demostramos algunas de sus propiedades. Posteriormente, en la sección 3.1 representaremos a un operador por medio de un matriz infinita y desarrollamos las condiciones para que una matriz defina operadores acotados en c_0, ℓ_1 y ℓ_∞.

Finalmente, la parte central de la tesis se encuentra en la tercera parte (capítulo 4).

Con ayuda de los resultados del capítulo 3, demostramos que $C \in B(c_0)$ y que $\sigma(C) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$. Un resultado crucial para el argumento es la prueba de Raabe (lema 4.10) y el lema 4.13. Para el caso donde el operador de Cesàro está definido en ℓ_p con $1 < p < \infty$, los resultados del capítulo 3 no nos ayudan, lo cual nos lleva a buscar un método diferente.

Tratamos por separado el caso $p = 2$ pues ℓ_2 es un espacio de Hilbert y los resultados referentes a dichos espacios son de gran utilidad. Hacemos uso de la prueba de Schur para demostrar que C es acotado en ℓ_2 y la clave para determinar el espectro de C es la identidad $(I-C)(I-C^*) = I-D$, donde D es diagonal. Deducimos que $\|C - I\| = 1$ y concluimos que $\sigma(C) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$.

Para el caso general donde $p \neq 2$, nos resulta imposible seguir la línea que seguimos para ℓ_2 y c_0, pues los resultados ya estudiados no son de utilidad para argumentar que $C \in B(\ell_p)$ cuando $p \neq 2$. Resulta fácilmente de la desigualdad de Hardy, 4.18, que $C \in B(\ell_p)$ y que $\|C\| \leq \frac{p}{p-1}$. Con el propósito de demostrar que cada punto de $\{\lambda : |\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}\}$ es un valor propio de C^*

donde q es el conjugado de p hacemos una ligera modificación al lema 4.13. La parte más complicada es la contención $\sigma(C) \subseteq \{\lambda : |\lambda - \frac{q}{2}| \leq \frac{q}{2}\}$ para establecer $\sigma(C) = \{\lambda : |\lambda - \frac{q}{2}| \leq \frac{q}{2}\}$. Una prueba es dada en [12] y depende de una igualdad en [8]. Está basada en estimar la serie de Neumann del operador resolvente $(C - \lambda I)^{-1}$ para cada $|\lambda| > \|C\|_p$. Una prueba alterna usando técnicas del álgebra de Banach se da en [13]. Una prueba más se presenta en [16] usando los métodos de matrices de Hausdorff generalizadas y depende de que dichos operadores son acotados en ℓ_p. Sin embargo, nosotros damos un método más directo basado en [5].

Capítulo 2

Preliminares.

A lo largo del siguiente trabajo X denotará un espacio vectorial normado no trivial. El campo de escalares puede ser real o complejo, a menos que se especifique de otro modo. Dado un operador lineal T con dominio y rango en X, consideraremos operadores de la forma $\lambda I - T$, donde λ es un escalar y I es el operador identidad en X. Por comodidad, escribiremos $\lambda - T$ o T_λ en lugar de $\lambda I - T$.

2.1. Espacios normados y de Banach

En este capítulo X y Y denotarán espacios vectoriales sobre el campo K de los números reales o de los números complejos. Todos los resultados de esta sección, se pueden encontrar en [14].

Definición 2.1 *Sea X un espacio vectorial. Una **norma** en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*
Para cualesquiera $x, y \in X$ y cualquier escalar λ, se tiene
(1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
*A la pareja $(X, \|\cdot\|)$ se le llama **espacio normado**.*

Asociada a toda norma tenemos una **métrica o distancia**, $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = \|x - y\|$.

Definición 2.2 *Un espacio normado es llamado un **espacio de Banach** si es completo con respecto a la métrica inducida por la norma.*

Teorema 2.3 *Un espacio normado X es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente en X es convergente.*

Definición 2.4 *Sea X un espacio vectorial. Un **funcional lineal** es una función $f : X \to K$ que satisface*
(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in X$.
(2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ $\forall x \in X, \lambda \in K$.

Teorema 2.5 *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(1) T es continuo.

(2) T es continuo en 0.
(3) T es uniformemente continuo.
(4) T es acotado, es decir, $\exists M > 0$ tal que $\|Tx\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$.

Si X y Y son espacios normados, $B(X,Y)$ denotará al espacio de los operadores lineales y acotados de X en Y; $B(X,X)$ se denotará como $B(X)$. El espacio $B(X,Y)$ es, por sí mismo, un espacio vectorial con las definiciones usuales de suma y multiplicación escalar de funciones. Más aún, asignándole a cada $T \in B(X,Y)$ el número $\|T\| := \sup\{\|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$, el espacio $B(X,Y)$ se vuelve un espacio normado.

Teorema 2.6 *La función $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ dada por $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$ es una norma en $B(X,Y)$. Además, con esta norma, $B(X,Y)$ es un espacio de Banach si y sólo si Y es de Banach.*

Proposición 2.7 *Sean X, Y espacios vectoriales y $T \in B(X,Y)$. Entonces*

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Proposición 2.8 *Bajo las hipótesis del Teorema 2.5, si $Y = \mathbb{R}$ o $Y = \mathbb{C}$ entonces las cuatro condiciones son equivalentes a que $N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ es cerrado.*

A continuación enunciaremos el Teorema de Hahn-Banach y algunos de sus corolarios, los cuales nos serán útiles a lo largo del trabajo.

Teorema 2.9 (Hahn-Banach) *Sea X un espacio vectorial y $p : X \to \mathbb{R}$ una función que satisface:*
(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in X$ y $\forall \lambda > 0$,
(2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in X$.
Sea M un subespacio de X y $f : M \to \mathbb{R}$ una función lineal tal que

$$f(x) \leq p(x)\ \forall x \in M.$$

Bajo estas condiciones, existe un funcional lineal $x^* \in X^*$ definido en todo X que extiende a f, es decir, tal que $f = x^*$ en M y $x^*(x) \leq p(x)$ para toda $x \in X$.

En los siguientes corolarios X denotará un espacio vectorial normado.

Corolario 2.10 *Para toda $x_0 \in X$ existe un funcional $f_0 \in X^*$ tal que*

$$\|f_0\| = 1 \text{ y } f_0(x_0) = \|x_0\|.$$

Corolario 2.11 *Para toda $x \in X$ tenemos*

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Corolario 2.12 *Sea M un subespacio de X y $x_1 \in X$ tal que $d(x_1, M) = \text{ínf}\{\|x_1 - m\| : m \in M\} > 0$. Entonces existe $F \in X^*$ tal que $F(x) = 0$ para toda $x \in M$, $F(x_1) = d(x_1, M)$ y $\|F\| = 1$.*

Finalmente, enunciaremos el teorema de Banach-Steinhaus, el cual usaremos en la sección 3.1.

Teorema 2.13 *Sea* Γ *una familia de operadores lineales acotados de un espacio de Banach* X *en un espacio normado* Y*. Si* $\sup\{\|Tx\| : T \in \Gamma\}$ *es finito para cada* x*, entonces* $\sup\{\|T\| : T \in \Gamma\}$ *es finito.*

2.2. Espacios duales y operadores adjuntos.

En el caso especial de que Y sea el campo de escalares, al espacio $B(X, Y)$ lo denotaremos como X^* y nos referiremos a él como el espacio dual de X. A los elementos de X^* se les llamará funcionales lineales. Dado que el campo escalar es completo, la norma definida anteriormente, hace de X^* un espacio de Banach. Al espacio dual X^{**} de X^* se le llama el segundo dual de X, el cual es, nuevamente, un espacio de Banach. A la función $J : X \to X^{**}$ dada por $J(x)f = f(x)$ $\forall x \in X$ y $\forall f \in X^*$, se le conoce como la inmersión natural de X en X^{**} y es fácil demostrar que J es una isometría inyectiva. En el caso en el que J es, además, suprayectiva el espacio de Banach X se dice reflexivo. Es posible demostrar que un espacio de Banach X es reflexivo si y sólo si su dual X^* es reflexivo.

Un espacio métrico X que no es completo puede extenderse para formar un espacio de Banach $\widehat{X}$ en el cual X es denso. El espacio $\widehat{X}$, llamado la compleción de X, es esencialmente único, en el sentido de que cualquier otro espacio de Banach que contiene a X como subespacio denso debe ser isométricamente isomorfo a $\widehat{X}$.

Una manera de construir $\widehat{X}$ es obtener primero la compleción de X como espacio métrico. Con esto es posible extender de X a $\widehat{X}$ las definiciones de suma vectorial, multiplicación escalar y la norma de un vector de modo que $\widehat{X}$ se vuelve un espacio de Banach.

Otra manera de construir $\widehat{X}$ es usando la inmersión natural J de X en X^{**}. Dado que X^{**} es completo, entonces $\overline{J(X)}$ es, por sí mismo, un espacio de Banach. Para formar $\widehat{X}$, le añadimos a X los elementos de $\overline{J(X)} \setminus J(X)$; ahora le damos a $\widehat{X}$ la estructura de espacio vectorial y la norma de $\overline{J(X)}$. Dado que J es una isometría inyectiva, X y $J(X)$ son isométricamente isomorfos, de donde X es denso en $\widehat{X}$.

A cada $T \in B(X,Y)$ le asociaremos un operador que llamaremos su **adjunto**. Éste será un operador $T^* \in B(Y^*, X^*)$. Veamos el siguiente Teorema que define al operador adjunto de forma única. Estos resultados se pueden encontrar en [18].

Teorema 2.14 *Supongamos que X y Y son espacios normados. A cada $T \in B(X,Y)$ le corresponde un único $T^* \in B(Y^*, X^*)$ que satisface*

$$y^*Tx = T^*y^*x \tag{2.1}$$

para toda $x \in X$ y toda $y^* \in Y^*$. Más aún, T^* satisface

$$\|T^*\| = \|T\|. \tag{2.2}$$

Demostración: Si $y^* \in Y^*$ y $T \in B(X,Y)$, definamos $T^*y^* = y^* \circ T$. Siendo la composición de dos operadores lineales y continuos, $T^*y^* \in X^*$ y claramente se cumple (2.1). El hecho de que (2.1) se cumple para toda $x \in X$, determina T^*y^* de manera única.

Si $y_1^* \in Y^*$ y $y_2^* \in Y^*$, entonces

$$\begin{aligned} T^*(y_1^* + y_2^*)x &= (y_1^* + y_2^*)Tx \\ &= (y_1^*)Tx + (y_2^*)Tx \\ &= T^*y_1^*x + T^*y_2^*x \\ &= (T^*y_1^* + T^*y_2^*)x \end{aligned}$$

para cada $x \in X$, así que $T^*(y_1^* + y_2^*) = T^*y_1^* + T^*y_2^*$. Análogamente $T^*(\alpha y^*) = \alpha T^*y^*$. Por lo que $T^* : Y^* \to X^*$ es lineal. Finalmente,

$$\|T^*y^*x\| = \|y^*Tx\| \leq \|y^*\|\|T\|\|x\|,$$

de donde $\|T^*y\| \leq \|T\|\|y^*\|$ y, por tanto, $\|T^*\| \leq \|T\|$. Del Corolario 2.11 se sigue que $\|y\| = \sup\limits_{\substack{y^* \in Y^* \\ \|y^*\| \leq 1}} \|y^*(y)\|$ y como también tenemos que $\|y^*Tx\| \leq \|T^*\|\|y^*\|\|x\|$, concluimos que $\|Tx\| \leq \|T^*\|\|x\|$. Lo que concluye el teorema. $\square$

Cuando $T : D(T) \subseteq X \to Y$ es densa mente definido, es decir $\overline{D(T)} = X$, su operador adjunto se define de igual manera con la diferencia de que $D(T^*) = \{y^* \in Y^* : y^* \circ T \text{ es continua en } D(T)\}$.

En los teoremas siguientes $R(T)$ denotará al rango de T.

Definición 2.15 *Sea X un espacio de Banach, M un subespacio de X y N un subespacio de X^*. Definimos el*

anulador *$M^{\perp}$ de M como:*

$$M^{\perp} = \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$$

*y el **preanulador** $^{\perp}N$ de N como:*

$$^{\perp}N = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in N\} .$$

Teorema 2.16 *Sean X, Y espacios vectoriales normados, M un subespacio de X y $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ un funcional lineal acotado densamente definido. Bajo estas hipótesis,*

$$(a)^{\perp}(M^{\perp}) = \overline{M}, (b) N(T^*) = R(T)^{\perp}, (c)^{\perp}N(T^*) = \overline{R(T)}.$$

Demostración: Si $x \in M$, entonces $f(x) = 0$ para toda $f \in M^{\perp}$, así que $x \in^{\perp} (M^{\perp})$. Como $^{\perp}(M^{\perp})$ es cerrado (pues si $x_k \to x$ y $x_k \in^{\perp} (M^{\perp})$, entonces $f(x_k) \to f(x)$ para toda $f \in M^{\perp}$, pero $f(x_k) = 0$ para toda k. Se sigue que $f(x) = 0$) y $M \subseteq^{\perp} (M^{\perp})$ se sigue que debe contener a $\overline{M}$. Si $x \notin \overline{M}$, del Corolario 2.12, encontramos una $f \in X^*$ con $f|_M = 0$ pero $f(x) \neq 0$. En consecuencia $x \notin^{\perp} (M^{\perp})$, y (a) está probado.

Ahora,

$$\begin{aligned} f \in N(T^*) &\Leftrightarrow T^*(f) = 0 \Leftrightarrow T^* f(x) = 0 \ \forall x \in D(T) \\ &\Leftrightarrow f(Tx) = 0 \ \forall x \in D(T) \Leftrightarrow f \in R(T)^{\perp}, \end{aligned}$$

con lo cual se prueba (b). Finalmente, de (b) y (a) se sigue (c). □

Teorema 2.17 *Con las hipótesis del Teorema 2.16, se tiene*

(1) $\overline{R(T)} = Y \Longleftrightarrow (T^*)^{-1}$*existe.*

(2) $R(T^*) = X^* \Longleftrightarrow T^{-1}$*existe y es continua.*

Demostración: Del Teorema 2.16 se sigue que $\overline{R(T)} = Y \Leftrightarrow^{\perp} N(T^*) = Y \Leftrightarrow N(T^*) = 0 \Leftrightarrow (T^*)^{-1}$ existe, lo que prueba (1).

Ahora, observemos que si existe $m > 0$ tal que

$$m\|x\| \leq \|Tx\|$$

para toda $x \in D(T)$, entonces T^{-1} existe y es continuo. Pues T sería inyectivo (por lo que existe T^{-1}) y, además, $\|T^{-1}\| \leq 1/m$. Por lo que si T no tiene inverso continuo, entonces podemos encontrar una sucesión u_n en $D(T)$ tal que $u_n \neq 0$ y $\|Tu_n\|/\|u_n\| \to 0$. En consecuencia, $T(u_n/\|u_n\|) \to 0$, por lo que podemos asumir que $\|u_n\| = 1$. Definiendo una sucesión x_n como

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{u_n}{\|Tu_n\|^{1/2}} & \text{si } Tu_n \neq 0 \\ nu_n & \text{si } Tu_n = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

vemos que $\|x_n\| \to \infty$ y $Tx_n \to 0$. Supongamos que $R(T^*) = X^*$ pero T no tiene inverso continuo. Escogiendo la sucesión x_n en (2.3), tenemos que $T^*y^*x_n = y^*Tx_n \to 0$ para cada $y^* \in Y^*$. Como $R(T^*) = X^*$, esto implica que $x^*(x_n) \to 0$ para toda $x^* \in X^*$. Pero, entonces, el principio de acotación uniforme implica que la sucesión de normas $\|x_n\|$ es acotada, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que T tiene inverso continuo. Si $x^* \in X^*$ es fijo, entonces $y \to x^*(T^{-1}y)$ es un funcional lineal y continuo en $R(T)$. Por el teorema de Hahn-Banach, dicho funcional puede extenderse a todo Y. Esto es, existe $y^* \in Y^*$ tal que $y^*(y) = x^*(T^{-1}y)$ para todo $y \in R(T)$, lo que implica que $y^*(Tx) = x^*(x)$ para todo $x \in D(T)$. Por lo tanto, $y^* \in D(T^*)$ y $T^*(y^*) = x^*$. De donde se concluye que $R(T^*) = X^*$, lo cual termina la demostración de (2).$\square$

En general, para subconjuntos de un espacio normado, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.18 *Sea X un espacio normado, K un subconjunto de X y L un subconjunto de X^*. Definimos la* ***polar*** *K^0 de K como:*

$$K^0 = \{f \in X^* : |f(x)| \leq 1 \ \forall x \in K\}$$

y la ***prepolar*** *${}^0L$ de L como:*

$${}^0L = \{x \in X : |f(x)| \leq 1 \ \forall f \in L\}.$$

Es fácil ver que para subespacios de un espacio de Banach, las definiciones 2.18 coinciden con las de anulador y preanulador como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.19 *Sea X un espacio de Banach. Si M y N son subespacios de X y X^* respectivamente, entonces $M^\perp = M^0$ y ${}^\perp N = {}^0 N$.*

Demostración: Es claro que $M^\perp \subseteq M^0$ y ${}^\perp N \subseteq {}^0 N$. Además, si $f \in M^0$, entonces para toda λ tenemos que

$|f(\lambda x)| \leq 1$ (pues $\lambda x \in M$), por lo que $|\lambda||f(x)| \leq 1$ para toda λ. Concluimos que $f(x) = 0$ para toda x, es decir, $f \in M^{\perp}$. Análogamente, dado que $\lambda f \in N$ se sigue que si $x \in^{0} N$, entonces $x \in^{\perp} N$. $\square$

Para terminar esta sección, presentaremos el concepto de proyección.

Definición 2.20 *Sean X un espacio vectorial y $P : X \to X$. P es llamado* ***proyección*** *(de X) si $P^2 = P$.*

Se sigue fácilmente de la definición que si P es una proyección en X, entonces $I - P$ también es una proyección en X.

A lo largo de la tesis, $\oplus$ denotará la suma directa entre espacios.

Teorema 2.21 *Sea X un espacio vectorial. Si $P : X \to X$ es una proyección, entonces se cumple:*
(1) $R(P) = \{x \in X : x = Px\}$
(2) $N(P) = R(I - P)$
(3) $N(I - P) = R(P)$
(4) $X = R(P) \oplus N(P)$.

Demostración Si $x \in R(P)$, entonces $x = Py$ para alguna $y \in X$. De donde $Px = P^2y = Py = x$, por lo que $R(P) \subseteq \{x \in X : x = Px\}$. Inversamente, si $x = Px$ entonces $x \in R(P)$, lo que prueba (1). Para probar (2) observamos que como $I - P$ también es proyección, entonces, por (1) tenemos que

$$\begin{aligned} x \in R(I-P) &\Leftrightarrow x = (I-P)x \Leftrightarrow x = x - Px \\ &\Leftrightarrow Px = 0 \Leftrightarrow x \in N(P). \end{aligned}$$

Habiendo probado (2), concluimos que $N(I-P) = R(I-(I-P)) = R(P)$ lo cual prueba (3). Finalmente, es claro que $X = R(P)+N(P)$ pues toda $x \in X$ se puede escribir como $x = Px + (x - Px) \in R(P) + N(P)$ y si $X \in R(P) \cap N(P)$, por (1) tenemos que $x = Px = 0$, lo que concluye la demostración. $\square$

El recíproco de la propiedad (4) también es cierto como lo demuestra el siguiente Teorema.

Teorema 2.22 *Sean X un espacio vectorial y M_1, M_2 subespacios de X tales que $X = M_1 \oplus M_2$. Esta suma directa define a una proyección en X llamada la proyección de X en M_1 a lo largo de M_2*

Demostración: Toda $x \in X$ se puede escribir de manera única como $x = x_1+x_2$ con $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$. Si definimos P como $Px = x_1$ es claro que $R(P) = M_1, N(P) = M_2$ y $P^2 = P$. $\square$

Concluimos la sección con un teorema que nos será útil al hablar del espectro de un operador compacto en la sección 2.8.

Teorema 2.23 *Sea X un espacio vectorial normado y M un subespacio de X de dimensión finita. Entonces existe una proyección continua de X en M.*

Demostración Sea $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de M y sea M_i el espacio (*n-1 dimensional*) generado por

$$\{x_1, ..., x_{i-1}, x_i, ..., x_n\}.$$

Entonces M_i es cerrado por ser finito dimensional. Del Corolario 2.12 existe $x_i^* \in X^*$ tal que $x_i^*(x_i) = 1$ y $x_i^*(x) = 0$ para toda $x \in M$. Fácilmente se ve que el operador

$$Px = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i$$

es una proyección continua de X en M. $\square$

2.3. Espacios de Hilbert.

En esta sección presentamos los resultados esenciales referentes a espacios de Hilbert. La información está basada en [17].

Definición 2.24 *Un espacio vectorial complejo H es llamado un **espacio con producto interior** si existe una función $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ tal que para cualesquiera $x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$,*
a)$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
b) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
c)$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
d)$\langle x, x\rangle \geq 0$.
e)$\langle x, x\rangle = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Si $\langle x, y\rangle = 0$, diremos que x es ortogonal a y, y usaremos la notación $x \perp y$. Para $E, F \subseteq H$, usaremos $E \perp F$ para decir que $x \perp y$ para todo $x \in E$ y $y \in F$. Finalmente, $E^{\perp} = \{y \in H : y \perp x, \text{para todo } x \in H\}$.

El siguiente Teorema muestra que todo espacio con producto interior, induce un espacio normado definiendo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{2.4}$$

Teorema 2.25 *Si $x, y \in H$ donde H es un espacio con producto interior, entonces:*

$a)|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$

$(Desigualdad\ de\ Cauchy - Schwarz)$

$b)\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

$(Desigualdad\ del\ tri\acute{a}ngulo)$

$c)\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$

$(Identidad\ del\ paralelogramo)$

$d)\|y\| \leq \|\lambda x + y\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *si y solo si* $x \perp y$.

$e)\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$ *si H es real,*

$\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right)$

si H es complejo.

$(Identidad\ de\ polarizaci\acute{o}n)$.

Demostración: Para $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda x + y\|^2 &= \langle \lambda x + y, \lambda x + y\rangle \\ &= \langle \lambda x, \lambda x\rangle + \langle \lambda x, y\rangle + \langle y, \lambda x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + \overline{\lambda}\langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|\lambda\|^2\|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle x, y\rangle) + \|y\|^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Entonces (d) se cumple si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $x = 0$, (a) y (c) son claramente ciertas. Si $x \neq 0$, tomando $\lambda = -\overline{\langle x, y\rangle}/\|x\|^2$, (2.5) se vuelve

$$0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = \|y\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|x\|^2}, \tag{2.6}$$

lo cual prueba (a) y muestra que (d) es falsa cuando $\langle x, y\rangle \neq 0$. Para (b) observamos que de la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

(c) se sigue inmediatamente de la igualdad en (2.5). Finalmente, si H es real, entonces

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle \\ &+ \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle - \langle y, y\rangle = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle \\ &4\langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Si H es complejo, entonces

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \\ &\quad = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle + \\ &\quad i\langle x+iy, x+iy\rangle - i\langle x-iy, x-iy\rangle \\ &\quad = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle + i\langle x, x\rangle + i\langle x, iy\rangle \\ &\quad + i\langle iy, x\rangle + i\langle iy, iy\rangle - i\langle x, x\rangle + i\langle x, iy\rangle \\ &\quad + i\langle iy, x\rangle - i\langle iy, iy\rangle = 2\langle x, y\rangle + 2\langle y, x\rangle \\ &\quad + 2\langle x, y\rangle - 2\langle y, x\rangle = 4\langle x, y\rangle,\end{aligned}$$

lo cual finaliza la prueba. $\square$

Definición 2.26 *H es llamado un* ***espacio de Hilbert*** *si es completo con respecto a la distancia inducida por el producto interior en* (2.4)*.*

A continuación veremos algunos teoremas básicos referente a espacios de Hilbert.

Teorema 2.27 *Todo subconjunto cerrado y convexo $E \subseteq H$ contiene un único x de norma mínima.*

Demostración: Sea $d = \inf\{\|x\| : x \in E\}$ y escojamos $x_n \in E$ tales que $x_n \to d$. Como $\dfrac{1}{2}(x_n + x_m) \in E$, $\|x_n + x_m\|^2 \geq 4d^2$. Si x, y se reemplazan por x_n y x_m en la identidad del paralelogramo , el lado derecho tiene a $4d^2$. Entonces la identidad del paralelogramo implica que x_n es de Cauchy, por lo que converge a algún $x \in H$ con $\|x\| = d$. Lo cual prueba la existencia.

Finalmente, si $y \in E$ y $\|y\| = d$, la sucesión

$$(x, y, x, y, ...)$$

debe converger como acabamos de ver. De donde $x = y$. $\square$

Teorema 2.28 *Sea H un espacio de Hilbert. Si M es un subespacio cerrado de H, entonces*

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Demostración: Si $E \subseteq H$, la linealidad de $\langle x, y\rangle$ como función de x muestra que $E^{\perp}$ es un subespacio de H, y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que $E^{\perp}$ es cerrado.

Si $x \in M$ y $x \in M^{\perp}$, entonces $\langle x, x\rangle = 0$; de donde $x = 0$. Por lo que $M \cap M^{\perp} = 0$.

Si $x \in H$, aplicando el Teorema 2.27 al conjunto $x - M$ concluimos que existe $x_1 \in M$ que minimiza $\|x - x_1\|$. Haciendo $x_2 = x - x_1$ vemos que $\|x_2\| \leq \|x_2 + y\|$ para toda $y \in M$. Entonces $x_2 \in M^{\perp}$ por el inciso (d) del Teorema 2.25. Como $x = x_1 + x_2$, hemos probado que $H = M + M^{\perp}$. □

Teorema 2.29 *Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio de H. Entones se tiene que*

$$\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}.$$

Demostración: Si $x \in \overline{M}^{\perp}$, entonces $\langle y, x\rangle = 0$ para toda $y \in \overline{M}$. Por lo que $\langle y, x\rangle = 0$ para toda $y \in M$, es decir $\overline{M}^{\perp} \subseteq M^{\perp}$. Ahora tomemos $x \in M^{\perp}$. Si $y \in \overline{M}$, entonces existe una sucesión $(y_n) \subseteq M$ que converge a y y tenemos por la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$\langle y, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle y_n, x\rangle = 0,$$

es decir, $x \in \overline{M}^{\perp}$. □

Teorema 2.30 (Fréchet-Riesz) *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces a cada $f \in H^*$ le corresponde un único $y \in H$ tal que $\|f\| = \|y\|$ y*

$$f(x) = \langle x, y\rangle \tag{2.7}$$

para todo $x \in H$.

Demostración: Si $f = 0$ basta con tomar $y = 0$. Si $f \neq 0$, entonces $M = \{x \in H : f(x) = 0\}$ es un subespacio cerrado de H (pues f es continuo); de donde $H = M \oplus M^{\perp}$ por el Teorema 2.28. Como $M \neq H$, existe un $z \neq 0$ en $M^{\perp}$. Multiplicando z por un escalar conveniente podemos asumir que $f(z) = 1$. Entonces $x - f(x)z \in M$ para $x \in H$. Como $z \in M^{\perp}$ esto implica que $\langle x, z\rangle = f(x)\langle z, z\rangle$. Haciendo $y = z/\|z\|^2$ obtenemos $\langle x, y\rangle = f(x)$ para toda $x \in H$. En particular para $x_0 = y/\|y\|$, tenemos

$$\|f\| \geq |f(x_0)| = |\langle x_0, y\rangle| = \|y\|. \tag{2.8}$$

Además de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se sigue que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, y\rangle| \leq \|y\|, \tag{2.9}$$

de donde $\|f\| = \|y\|$. Finalmente, si $f(x) = \langle x, y_1\rangle$ para toda x, tomando $x = y - y_1$ obtenemos $\|y - y_1\|^2 = 0$. Por lo que $y = y_1$. □

Consideremos un espacio de Hilbert H. Si $T \in B(H)$, habíamos definido T^* de tal manera que $T^* \in B(H^*)$. Sin embargo, por el Teorema de Representación de Fréchet-Riesz, es posible identificar H^* con H. De esta manera, podemos decir que $T^* \in B(H)$.

Es decir, si $T \in B(H)$, para toda $f \in H^*$ existe un único $y \in H$ tal que

$$f(Tx) = \langle Tx, y \rangle. \tag{2.10}$$

Por otro lado $T^* f \in H^*$, entonces existe un único $z \in H$ tal que

$$T^* f(x) = \langle x, z \rangle. \tag{2.11}$$

Estas dos correspondencias dadas por el Teorema de Fréchet-Riesz, nos permiten asociar $T^* f$ con z, de donde

$$\begin{aligned} \langle x, T^* y \rangle &= \langle x, T^* f \rangle = \langle x, z \rangle \\ &= T^* f(x) = f(Tx) = \langle Tx, y \rangle. \end{aligned} \tag{2.12}$$

La única diferencia es que en espacios de Hilbert, la aplicación $T \to T^*$ será, ahora, conjugado lineal en lugar de lineal; es decir, se cumple que $(T+S)^* = T^* + S^*$ y $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ para toda $\alpha \in \mathbb{C}$. Lo anterior, forzará a dar una versión del Teorema 2.50 especial para espacios de Hilbert.

De hecho, la igualdad anterior define al operador adjunto de forma única como lo muestra el siguiente teorema y el siguiente corolario.

Teorema 2.31 *Si $T \in B(H)$ donde H es un espacio de Hilbert complejo y si $\langle Tx, x \rangle = 0$ para toda $x \in H$, entonces $T = 0$.*

Demostración: Como $\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$, concluimos que

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0 \quad (x \in H, y \in H). \tag{2.13}$$

Si reemplazamos y por iy en (2.13) el resultado es

$$-i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle = 0 \quad (x \in H, y \in H). \tag{2.14}$$

Multiplicando (2.14) por i y sumándola a (2.13) obtenemos

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \qquad (x \in H, y \in H). \tag{2.15}$$

Tomando $y = Tx$ en (2.15) concluimos que $\|Tx\|^2 = 0$, de donde $Tx = 0$ para toda $x \in H$. □

Corolario 2.32 *Si $T, S \in B(H)$ y*

$$\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$$

para todo $x \in H$, entonces $S = T$.

Demostración: Basta con aplicar el Teorema 2.31 a $T - S$. □

Teorema 2.33 *Si $T \in B(H)$, entonces*

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2.$$

Demostración: De la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, T^*Tx \rangle \leq \|T^*T\| \|x\|^2,$$

entonces

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2, \tag{2.16}$$

pues $\|T\| = \|T^*\|$. Reemplazando T por T^* obtenemos $\|TT^*\| = \|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2$, lo cual finaliza la prueba. $\square$

A continuación discutiremos algunas propiedades de los operadores autoadjuntos, normales y unitarios.

Definición 2.34 *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $T \in B(H)$ es llamado* ***autoadjunto*** *(o hermitiano) si $T^* = T$.*

Observamos, entonces, que T es autoadjunto si y solo si $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para cualesquiera $x, y \in H$. Además, si S y T son dos operadores autoadjuntos que conmutan, entonces ST también es autoadjunto, pues

$$\langle STx, y \rangle = \langle Tx, Sy \rangle = \langle x, TSy \rangle = \langle x, STy \rangle$$

En particular, si T es autoadjunto, también lo es T^n para $n \geq 1$. También notamos que si T es autoadjunto, entonces por el Teorema 2.33,

$$\begin{aligned} &\|T^2\| = \|T^*T\| = \|T\|^2, \\ &|T^4\| = \|(T^2)^*T^2\| = \|T^2\|^2 = \|T\|^4, \end{aligned}$$

etc. Entonces $\|T^{2^k}\| = \|T\|^{2^k}$.

Como $\overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ para un operador autoadjunto, entonces para T autoadjunto, $\langle Tx, x\rangle$ es real para toda $x \in H$. Esta propiedad nos permite definir a los operadores positivos.

Definición 2.35 *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador autoadjunto T es llamado **positivo** si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$.*

Notamos que para $T \in B(H)$, el operador T^*T es autoadjunto y positivo, pues

$$(T^*T)^* = T^*(T^*)^* = T^*T,$$
$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0.$$

Reemplazando T por T^* vemos que TT^* también es un operador autoadjunto y positivo.

Teorema 2.36 *Sea H un espacio de Hilbert complejo. Entonces todo operador $T \in B(H)$ tiene una representación de la forma $T = T_1 + iT_2$, donde T_1 y T_2 son autoadjuntos, y esta representación es única.*

Demostración: Escribamos

$$T_1 = \frac{1}{2}(T + T^*) \text{ y } T_2 = -\frac{1}{2}(T - T^*).$$

Entonces T_1 y T_2 son autoadjuntos y $T = T_1 + iT_2$. La unicidad se sigue de que si U_1 y U_2 son autoadjuntos y $U_1 + iU_2 = 0$, entonces $U_2 = 0$ y $U_1 = 0$.

Definición 2.37 *Dado un espacio de Hilbert H, un operador $T \in B(H)$ se denomina **normal** si $TT^* = T^*T$ y **unitario** si T es invertible y su inversa es T^*.*

En los siguientes Teoremas se caracteriza a los operadores normales y unitarios.

Teorema 2.38 *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$.*
a) T es normal si y solo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para toda $x \in H$.
b) Si T es normal entonces $\|T^n\| = \|T\|^n$ para toda $n \geq 1$ y

$$Nu(T) = Nu(T^*) = R(T^*)^\perp = R(T)^\perp.$$

Demostración: a) Claramente,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle \\ &= \langle T^*Tx, x \rangle - \langle TT^*x, x \rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Del Teorema 2.31 sabemos que $T^*T - TT^* = 0$ si y solo si $\langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle = 0$ para toda $x \in H$, de donde se sigue a).

b) Si T es normal, entonces, por a), tenemos que $Nu(T) = Nu(T^*)$. Por lo que del Teorema 2.16,

$$R(T)^\perp = Nu(T^*) = Nu(T) = R(T^*)^\perp.$$

Más aún, como T^*T es autoadjunto,

$$\|T\|^{2n} = \|T^*T\|^n = \|(T^*T)^n\|,$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}\|T\|^{2n} = \|(T^*T)^n\| &\leq \|(T^*)^n\|\|T^n\| \\ &\leq \|T\|^n\|T^n\| \leq \|T\|^{2n},\end{aligned}$$

lo que implica que $\|T^n\| = \|T\|^n$. □

Teorema 2.39 *Sea H un espacio de Hilbert y $U \in B(H)$ tal que $R(U) = H$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) U es unitario;
b) U es una isometría: $\|Ux\| = \|x\|$ para toda $x \in H$;
c) U preserva el producto interior: $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para toda $x, y \in H$.

Demostración: De la identidad de polarización

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2,$$

tenemos que U es una isometría si y solo si U preserva el producto interior.

Si U es unitario, entonces

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Inversamente, si $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para cualesquiera $x, y \in H$, entonces $\langle U^*Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle$, por lo que $U^*U = I$. Como $R(U) = H$ y U es una isometría, entonces es invertible. Por lo que $U^* = U^{-1}$. □

Concluimos la sección dando la definición de operador hiponormal.

Definición 2.40 *Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $T \in B(H)$ es llamado **hiponormal** si $T^*T - TT^*$ es positivo.*

2.4. El operador resolvente y su adjunto.

A partir de esta sección, y hasta terminar el capítulo, la información está basada en [18], a menos que se especifique lo contrario.

Definición 2.41 *Sean X un espacio vectorial y $T : X \to X$ un operador lineal.* ***El conjunto resolvente de T****, denotado por $\rho(T)$, es el conjunto de escalares λ tales que $\overline{R(\lambda I - T)} = X$ y $\lambda - T$ tiene inverso continuo. Si $\lambda \in \rho(T)$ al operador $(\lambda - T)^{-1}$ se le llama el* ***operador resolvente*** *y usualmente se denota como R_λ.* ***El espectro de T*** *es el conjunto $\sigma(T)$ de escalares que no pertenecen a $\rho(T)$.*

El siguiente teorema, nos ayudará a averiguar qué sucede con el operador resolvente cuando consideramos espacios vectoriales y operadores particulares.

Teorema 2.42 *Sean X, Y espacios vectoriales normados con Y completo y $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Si T es continuo y cerrado, entonces $D(T)$ es cerrado en X.*

Demostración : Si $x \in \overline{D(T)}$, existe una sucesión x_k en $D(T)$ tal que x_k converge a x. Como T es continuo, tenemos que

$$\|Tx_k - Tx_j\| \leq \|T\|\|x_k - x_j\| \ \ \forall k, j$$

de donde Tx_k es de Cauchy en Y. Como Y es completo concluimos que existe $y \in Y$ tal que $Tx_k \longrightarrow y$. Finalmente, como T es cerrado, tenemos que $x \in D(T)$ y $y = Tx$. $\square$

Corolario 2.43 *Si X es completo, $T : D(T) \subseteq X \longrightarrow X$ es cerrado y $\lambda \in \rho(T)$ entonces $R_\lambda \in B(X)$.*

Demostración: Sea $\lambda \in \rho(T)$ y supongamos que $y_k \in R(\lambda - T)$ es tal que $y_k \to y$ y $R_\lambda y_k \to x$, entonces existe $x_k \in D(T)$ tal que $y_k = (\lambda - T)x_k$. Por lo que $x_k \to x$ y $(\lambda - T)x_k \to y$, de donde concluimos que $Tx_k \to \lambda x - y$. Por otro lado, como T es cerrado, tenemos que $x \in D(T)$ y $Tx = \lambda x - y$, es decir, $x = R_\lambda y$. Así, R_λ es cerrado y, además, $R(\lambda - T)$ es denso en X. Dado que el dominio de R_λ es $R(\lambda - T)$, del Teorema 2.42 se sigue que $R(\lambda - T) = X$. Es decir, $R_\lambda \in B(X)$. $\square$

Nuestro primer resultado importante es que el conjunto resolvente es abierto. Cuando X es completo y $T \in B(X)$, ésto es una consecuencia de los siguientes dos teoremas.

Teorema 2.44 *Si X es completo, $T \in B(X)$ y $\|T\| < 1$ entonces $(I - T)$ es invertible y $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Más aún, $(I - T)^{-1}$ es continuo y*

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Demostración: Como $\|T\| < 1$, obtenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$, es decir, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ es absolutamente convergente. Pero como X es Banach, entonces también es convergente. Notamos que si $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$, entonces

$$(I-T)S = (I-T) + (T-T^2) + (T^2-T^3) + ... = I$$

y, análogamente, $S(I-T) = I$.De estas dos observaciones concluimos que

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Finalmente, $\|(I-T)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n \leq \frac{1}{1-\|T\|}$. □

Teorema 2.45 *Supongamos que X es completo, que S y $T \in B(X)$, que T tiene inverso en $B(X)$ y que $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Entonces S tiene inverso en $B(X)$ y*

$$\|S^{-1} - T^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2\|S-T\|}{1-\|T^{-1}\|\|S-T\|}.$$

Demostración: Dado que $\|T^{-1}(T-S)\| \leq \|T^{-1}\|\|T - S\| < 1$, del Teorema 2.44 se sigue que $I - T^{-1}(T-S)$ tiene inverso continuo y

$$(T^{-1}S)^{-1} = (I - T^{-1}(T-S))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}[T^{-1}(T-S)]^n.$$

Además,

$$\|(T^{-1}S)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|T^{-1}(T-S)\|} \leq \frac{1}{1-\|T^{-1}\|\|T-S\|}.$$

Como $S = T(T^{-1}S)$, entonces S tiene inverso continuo (a saber, $(T^{-1}S)^{-1}T^{-1}$) y $\|S^{-1}\| \leq \|(T^{-1}S)^{-1}\|\|T^{-1}\| \leq \dfrac{\|T^{-1}\|}{1-\|T^{-1}\|\|(T-S)\|}$. Por tanto

$$\|S^{-1}-T^{-1}\| = \|T^{-1}(T-S)S^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|^2\|S-T\|}{1-\|T^{-1}\|\|S-T\|}.$$

□

Corolario 2.46 *Si X es completo y $T \in B(X)$, $\rho(T)$ es abierto.*

Demostración: Si $\mu \in \rho(T)$ se tiene que T_μ tiene inverso en $B(X)$, y sabemos (del Teorema 2.45) que si T_λ está suficientemente cerca de T_μ entonces también T_λ tiene inverso en $B(X)$, es decir $\lambda \in \rho(T)$. Pero

$$T_\mu x - T_\lambda x = (\mu - \lambda)x \tag{2.17}$$

para $x \in D(T)$. Por lo tanto, $\|T_\mu - T_\lambda\| = |\mu - \lambda|$ y $\lambda \in \rho(T)$ cuando λ está suficientemente cerca de μ. □

Para la prueba del caso general necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.47 *Sea μ un escalar tal que T_μ tiene inverso continuo, $T_\mu^{-1} : R(T_\mu) \to X$ y sea $M(\mu) = \|T_\mu^{-1}\|$. Entonces T_λ tiene inverso continuo si $|\lambda-\mu| < \dfrac{1}{M(\mu)}$. Más aún, $\overline{R(T_\lambda)}$ no es un subconjunto propio de $\overline{R(T_\mu)}$.*

Demostración: Si $x \in D(T)$, entonces $\|x\| = \|T_\mu^{-1} T_\mu x\| \leq \|T_\mu^{-1}\| \|T_\mu x\|$. Así que, $\|T_\mu x\| \geq \dfrac{1}{M(\mu)} \|x\|$. De la ecuación (2.17), se sigue que

$$\begin{aligned} \|T_\lambda x\| = \|T_\mu x - (\mu - \lambda)x\| &\geq \|T_\mu x\| - |\lambda - \mu| \|x\| \\ &\geq \left(\frac{1}{M(\mu)} - |\lambda - \mu| \right) \|x\|. \end{aligned} \tag{2.18}$$

De donde se concluye que si $\dfrac{1}{M(\mu)} - |\lambda - \mu| > 0$, entonces T_λ es inyectivo y, por tanto, tiene inverso. Además $\|T_\lambda^{-1}\| \leq \dfrac{1}{k}$ donde $k = \dfrac{1}{M(\mu)} - |\lambda - \mu|$. Es decir, T_λ tiene inverso continuo. Para probar que $\overline{R(T_\lambda)}$ no es un subconjunto propio de $\overline{R(T_\mu)}$, supongamos que no es así. Dado que $|\lambda - \mu| M(\mu) < 1$, escogemos θ tal que $|\lambda - \mu| M(\mu) < \theta < 1$. Del lema de Riesz se sigue que existe $y_0 \in \overline{R(T_\mu)}$ tal que $\|y_0\| = 1$ y $\|y - y_0\| \geq \theta$ si $y \in \overline{R(T_\lambda)}$. Tomando una sucesión y_n en $R(T_\mu)$ tal que $y_n \to y$ y definiendo $x_n = T_\mu^{-1} y_n$, se tiene que $T_\lambda x_n \in R(T_\lambda)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \theta \leq \|T_\lambda x_n - y_0\| &\leq \|y_0 - T_\mu x_n\| + \|T_\mu x_n - T_\lambda x_n\| \\ &= \|y_0 - y_n\| + |\mu - \lambda| \|x_n\| \\ &\leq \|y_0 - y_n\| + |\mu - \lambda| M(\mu) \|y_n\|. \end{aligned}$$

Haciendo tender $n \to \infty$ obtenemos $\theta \leq |\mu - \lambda| M(\mu)$, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 2.48 *El conjunto resolvente $\rho(T)$ es abierto y, en consecuencia, el espectro $\sigma(T)$ es cerrado.*

Demostración: Si $\mu \in \rho(T)$, entonces T_μ^{-1} existe, es continuo y $\overline{R(T_\mu)} = X$. Sea $M(\mu)$ como en el lema anterior. Se sigue que dada $\lambda \in B_r(\mu)$ donde $r = \dfrac{1}{M(\mu)}$, T_λ^{-1} existe y es continuo. Además, $\overline{R(T_\lambda)}$ no es un subconjunto propio de $\overline{R(T_\mu)} = X$, es decir, $\overline{R(T_\lambda)} = X$. Por lo que $B_r(\mu) \subseteq \rho(T)$. □

El siguiente resultado es, también, de vital importancia. Establece que cuando T es cerrado y X es un espacio de Banach complejo, el operador resolvente se puede ver como una serie potencias, lo que nos ayudará más adelante para demostrar que el espectro de un operador es no vacío cuando el espacio vectorial es complejo.

En el Corolario 2.43 se demostró que si X es completo y T es cerrado, el rango de $\lambda - T$ es todo X cuando $\lambda \in \rho(T)$. En el siguiente teorema asumimos esto directamente dado que es lo único que se necesita.

Teorema 2.49 *Supongamos que T es tal que $R(T_\lambda) = X$ cuando $\lambda \in \rho(T)$. Entonces, si λ, $\mu \in \rho(T)$, R_λ y R_μ satisfacen*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \text{ (la ecuación del resolvente)} \tag{2.19}$$

$$R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda. \tag{2.20}$$

Si $\mu \in \rho(T)$ y $|\mu - \lambda| \|R_\mu\| < 1$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R_\mu^{n+1}, \tag{2.21}$$

donde la serie converge con la métrica de $B(X)$.

Demostración: Si λ y $\mu \in \rho(T)$, entonces $R(T_\mu) = X$. Por lo que dada $y \in X$, $y = T_\mu x$ para algún $x \in D(T)$, de donde $R_\mu y = T_\mu^{-1} y = x$. De la ecuación 2.17 se sigue que

$$y - T_\lambda R_\mu y = (\mu - \lambda)x.$$

Aplicando R_λ a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$R_\lambda y - R_\mu y = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu y.$$

Lo que prueba (2.19). Dado que λ y μ juegan papeles simétricos, podemos demostrar análogamente que

$$R_\mu y - R_\lambda y = (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda y.$$

Sumando estas dos igualdades obtenemos $0 = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu y + (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda y$. De donde concluimos que $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, por lo que (2.20) es válida.

Del Lema 2.47 se sigue que si $\mu \in \rho(T)$ y $|\mu - \lambda| \|R_\mu\| < 1$, entonces $\lambda \in \rho(T)$. Para probar (2.21) demostremos por inducción que

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{n} (\mu - \lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} R_\mu^{n+1} R_\lambda. \quad (2.22)$$

De (2.19) y (2.20) tenemos que $R_\lambda = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu + R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda + R_\mu$, lo que prueba (2.22) para $n = 0$.

Supongamos que

$$R_\lambda = \sum_{k=0}^{n} (\mu - \lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu - \lambda)^{n+1} R_\mu^{n+1} R_\lambda,$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{n+1}(\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu-\lambda)^{n+2} R_\mu^{n+2} R_\lambda =$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu-\lambda)^{n+1} R_\mu^{n+2} + (\mu-\lambda)^{n+2} R_\mu^{n+2} R_\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu-\lambda)^{n+1}[R_\mu^{n+2} + (\mu-\lambda) R_\mu^{n+2} R_\lambda]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu-\lambda)^{n+1} R_\mu^{n+1}[R_\mu + (\mu-\lambda) R_\mu R_\lambda]$$

De la base de inducción se sigue que

$$\sum_{k=0}^{n}(\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu-\lambda)^{n+1} R_\mu^{n+1}[R_\mu + (\mu-\lambda) R_\mu R_\lambda]$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\mu-\lambda)^k R_\mu^{k+1} + (\mu-\lambda)^{n+1} R_\mu^{n+1} R_\lambda = R_\lambda,$$

lo que prueba (2.22) por inducción.

Ahora, dado que

$$|\mu-\lambda|^{n+1}\|R_\mu^{n+1} R_\lambda\| \leq |\mu-\lambda|^{n+1}\|R_\mu\|^{n+1}\|\|R_\lambda\|$$

y que $|\mu-\lambda|\|R_\mu\| < 1$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |\mu-\lambda|^{n+1}\|R_\mu^{n+1} R_\lambda\| = 0,$$

lo cual junto con (2.22) prueba (2.21). $\square$

Ahora supongamos que T es densamente definido. El adjunto de $\lambda - T$ es $\lambda I_{X^*} - T^*$, que denotaremos simplemente como $\lambda - T^*$. Como T^* es cerrado y X^* es completo, si $\lambda \in \rho(T^*)$, del Corolario 2.43 se sigue que $R(\lambda - T^*) = X^*$ y $(\lambda - T^*)^{-1}$ existe. Inversamente, del teorema del mapeo inverso, tenemos que si $R(\lambda - T^*) = X^*$ y $(\lambda - T^*)^{-1}$ existe, entonces $(\lambda - T^*)^{-1}$ es continua, es decir, $\lambda \in \rho(T^*)$. Por lo que $\lambda \in \rho(T^*)$ si y sólo si $R(\lambda - T^*) = X^*$ y $(\lambda - T^*)^{-1}$ existe.

Con el Teorema 2.17, resulta fácil demostrar que T y T^* tienen el mismo conjunto resolvente.

Teorema 2.50 *Si $\overline{D(T)} = X$, entonces T y T^* tienen el mismo conjunto resolvente (y, por tanto, el mismo espectro). Si $\lambda \in \rho(T)$ el adjunto de $(\lambda - T)^{-1}$ es $(\lambda - T^*)^{-1}$.*

Demostración: Del Teorema 2.17 se sigue que $\overline{R(\lambda - T)} = X$ y $(\lambda - T)^{-1}$ existe y es continuo si y sólo si $(\lambda - T^*)^{-1}$ existe y $R(\lambda - T^*) = X^*$, por lo que $\rho(T) = \rho(T^*)$.

Ahora tomamos $\lambda \in \rho(T) = \rho(T^*)$, $x \in D(R_\lambda)$ y $x^* \in X^*$. Entonces $X^* = R(\lambda - T^*)$ y tenemos

$$\begin{aligned} x^*(R_\lambda x) &= (\lambda - T^*)(\lambda - T^*)^{-1} x^*(R_\lambda x) \\ &= (\lambda - T)^*(\lambda - T^*)^{-1} x^*(R_\lambda x) \\ &= (\lambda - T^*)^{-1} x^*[(\lambda - T) R_\lambda x] \\ &= (\lambda - T^*)^{-1} x^*(x). \end{aligned}$$

Concluimos que $D(R_\lambda^*) = X^*$ y $R_\lambda^* = (\lambda - T^*)^{-1}$. □

Sin embargo, debido a la manera en qué se definió el adjunto de un operador en espacios de Hilbert, el resultado anterior se tiene que modificar.

Teorema 2.51 *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in B(H)$. Entonces, $\rho(T^*)$ y $\sigma(T^*)$ son las conjugaciones complejas de $\rho(T)$ y $\sigma(T)$.*

Demostración: Sea $\lambda \in \rho(T)$, es decir, $\overline{R(\lambda I - T)} = H$ y $(\lambda I - T)^{-1}$ existe y es continua. Como $(\lambda I - T)^{-1}$ existe y es continua, se tiene que $N(\lambda I - T) = \{0\}$ y $R(\lambda I - T) = H$. De los Teoremas 2.28 y 2.29 concluimos que $H = \overline{R(\lambda I - T)} \oplus R(\lambda I - T)^{\perp}$ y es fácil ver que $R(\lambda I - T)^{\perp} = N(\overline{\lambda} I - T^*)$, por lo que $N(\overline{\lambda} I - T^*) = \{0\}$ y $R(\overline{\lambda} I - T^*) = N(\lambda I - T)^{\perp} = H$, de donde $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$. Intercambiando los roles de T y T^* concluimos la demostración. □

2.5. Espectro de un operador lineal acotado.

En los teoremas de esta sección supondremos que $T \in B(X)$. En la primera parte de la sección hablaremos sobre una generalización de las funciones analíticas que conocemos de Variable Compleja, lo cual nos ayudará a demostrar que el espectro de un operador es no vacío cuando el espacio es complejo.

Teorema 2.52 *Sean X, Y espacios vectoriales no completos y $T : X \to Y$ un operador lineal acotado. Entonces existe un único operador lineal y acotado $\widehat{T} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ tal que $\widehat{T}x = Tx$ si $x \in X$. Más aún, $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. Si $T \in B(X)$, $\rho(\widehat{T}) = \rho(T)$.*

Demostración: Para definir $\widehat{T}$ suponemos que $\widehat{x} \in \widehat{X}$ y escogemos una sucesión x_k en X tal que $x_k \to x$. Entonces (x_k) es Cauchy en X y

$$\|Tx_k - Tx_j\| \leq \|T\|\|x_k - x_j\|,$$

así que (Tx_k) es de Cauchy en Y. Por lo que $Tx_k \to \widehat{y}$ con $\widehat{y} \in \widehat{Y}$. Fácilmente se prueba que $\widehat{y}$ depende solo de $\widehat{x}$ y T, no de la sucesión x_k. Definimos $\widehat{T}\widehat{x} = \widehat{y}$. Es claro que $\widehat{T}x = Tx$ cuando $x \in X$. Observamos que $\|x_k\| \to \|\widehat{x}\|$, $\|Tx_k\| \leq \|T\|\|x_k\|$, y por lo tanto $\|\widehat{T}\widehat{x}\| \leq \|T\|\|\widehat{x}\|$. Entonces $\widehat{T}$ es acotada y $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$. Por otro lado, si $x \in X$, tenemos que $\|Tx\| = \|\widehat{T}x\| \leq \|\widehat{T}\|\|x\|$, así que $\|T\| \leq \|\widehat{T}\|$. De donde $\|\widehat{T}\| = \|T\|$. La unicidad de $\widehat{T}$ se sigue de que X es denso en $\widehat{X}$. Notemos que si $S, T \in B(X)$ entonces $\widehat{ST} = \widehat{S}\widehat{T}$, pues tomando $\widehat{x} \in \widehat{X}$ y si suponemos que $x_n \to \widehat{x}$, $Tx_n \to \widehat{y}$ y $STx_n \to \widehat{z}$, entonces $\widehat{ST}\widehat{x} = \widehat{z}$ y $\widehat{S}\widehat{T}\widehat{x} = \widehat{S}\widehat{y} = \widehat{z}$. De esta manera $\widehat{T^{-1}}\widehat{T} = \widehat{T^{-1}T} = \widehat{I}$, es decir $\widehat{T^{-1}} = (\widehat{T})^{-1}$. Además, como $\|T\| = \|\widehat{T}\|$, tenemos que $(\lambda - T)^{-1}$ existe y es continuo si y sólo si $(\lambda - \widehat{T})^{-1}$ existe y es continuo. Finalmente, dado que $R(\lambda - T) \subseteq R(\lambda - \widehat{T})$ podemos concluir que $\rho(T) = \rho(\widehat{T})$. $\square$

El siguiente teorema nos dice que el espectro de un operador es compacto y nos da una expresión de R_λ para $\lambda \in \rho(T)$.

Teorema 2.53 *Si $T \in B(X)$ y $|\lambda| > \|T\|$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y*

$$R_\lambda y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1} y \tag{2.23}$$

para cada y en el (denso) rango de $\lambda - T$. Por lo que $\sigma(T)$ es compacto. Si X es completo y $\lambda > \|T\|$,

$$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}, \tag{2.24}$$

con la convergencia de la serie en $B(X)$.

Demostración: Primero supongamos que X es completo. Dado que $\|\lambda^{-1}T\| = |\lambda|^{-1}\|T\| < 1$, del Teorema 2.44 se sigue que $(I - \lambda^{-1}T)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}T)^n$. De donde

$$(\lambda - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}.$$

Así que, $\lambda \in \rho(T)$ cuando $|\lambda| > \|T\|$.

Si X no es completo, consideramos la extensión $\widehat{T}$ de T a la compleción $\widehat{X}$ de X. Del Teorema 2.52 y de que $\lambda \in \rho(T)$ cuando $|\lambda| > \|T\|$ se concluye que si $\lambda > \|T\| = \|\widehat{T}\|$, entonces $\lambda \in \rho(\widehat{T}) = \rho(T)$. Dado $y = (\lambda - T)x$, se prueba fácilmente por inducción que $x = \lambda^{-1}y + ... + \lambda^{-n}T^{n-1}y + \lambda^{-n}T^n x$. Como $|\lambda| > \|T\|$, entonces $\lambda^{-n}T^n x \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se concluye que

$$x = (\lambda - T)^{-1} y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1} y. \quad \square$$

Además observamos que si $T \in B(X)$ y la serie (2.24) converge en $B(X)$ para algún λ, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y el operador definido por la serie es R_λ. Pues denotando a la serie como A, se ve que $(\lambda - T)A = A(\lambda - T) = I$.

Con el fin de probar que el espectro de un operador $T \in B(X)$ es no vacío cuando el espacio es complejo, daremos una generalización de las funciones analíticas estudiadas en variable compleja. La siguiente definición y los próximos dos teoremas se encuentran en [2].

Definición 2.54 *Sea X un espacio de Banach complejo y y $D \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Una función $F : D \to X$ se denomina **analítica** si $\forall z_0 \in D$ existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq D$ y*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{2.25}$$

para algunos $a_0, a_1, ... \in X$ y $\forall z \in B_r(z_0)$.

Así, de la serie (2.21), resulta que el operador resolvente $R : \rho(T) \to B(X)$ es una función analítica.

Teorema 2.55 (Liouville) *Si $F : \mathbb{C} \to X$ es entera (analítica en todo $\mathbb{C}$) y acotada, entonces F es constante.*

Demostración: Tomemos $f \in X^*$ y consideremos $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$g(z) = f(F(z)).$$

Como F es analítica entonces g se puede escribir como la serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a_n)(z - z_0)^n \ \forall z_0 \in \mathbb{C},$$

es decir, g es analítica en el sentido usual pues las series de potencias son analíticas en el interior del círculo de convergencia. Y, además, es acotada pues $\|g(z)\| \leq \|f\|\|F(z)\|$. Del teorema de Liouville usual, se sigue que g es constante, de donde $g(z) = g(0)$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= g(z) - g(0) = f(F(z)) - f(F(0)) \\ &= f(F(z) - F(0)) \ \forall f \in X^*. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aplicando el Corolario 2.10 y de la igualdad (2.26) concluimos que $F(z) = F(0)\ \forall z$, lo que concluye la prueba. □

Teorema 2.56 *Si X es un espacio de Banach complejo y $T \in B(X)$, entonces $\sigma(T)$ es no vacío.*

Demostración: Sabemos del Teorema 2.49 que el operador resolvente es analítico en el conjunto resolvente, por lo que si $\sigma(T)$ fuera vacío, tendríamos que el operador resolvente es entera. Por otro lado, si $|\lambda| > \|T\|$, tenemos

$$\|\lambda x - Tx\| \geq |\lambda|\|x\| - \|Tx\| \geq (|\lambda| - \|T\|)\|x\|.$$

Se sigue que $\|R_\lambda\| \leq (\lambda - \|T\|)^{-1}$, si $|\lambda| > \|T\|$. Por lo tanto, $\|R_\lambda\| \to 0$ si $|\lambda| \to \infty$. De donde R sería entera y acotada, por lo que sería constante y, de hecho, $R_\lambda = 0$ para toda λ. Lo cual es imposible dado que R_λ da lugar a un operador inyectivo de X en X, pues supusimos que X contiene elementos distintos de cero (segunda línea de la introducción). $\square$

En vista del Teorema 2.52, el teorema anterior sigue siendo válido aún cuando X no es completo.

2.5.1. El radio espectral.

Definición 2.57 *Definimos el* ***radio espectral*** *de $T \in B(X)$ como*

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

El siguiente teorema muestra que el radio espectral es, de hecho, el radio de convergencia de la serie (2.24).

Teorema 2.58 *Supongamos que X es un espacio de Banach complejo y $T \in B(X)$. El operador resolvente está dado por*

$$R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1} \tag{2.27}$$

si $|\lambda| > r_\sigma(T)$. La serie también define al operador resolvente si la serie converge y $|\lambda| = r_\sigma(T)$. La serie diverge si $|\lambda| < r_\sigma(T)$.

Demostración: Si $|\lambda| > r_\sigma(T)$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ y, además, sabemos que R es analítica en $\rho(T)$. Por lo que tiene una única serie de Laurent convergente si $|\lambda| > r_\sigma(T)$. Por otro lado, sabemos que la ecuación (2.27) es válida cuando $|\lambda < \|T\|$. Por la unicidad, ésta debe ser la serie de Laurent.

Que la serie también define al operador resolvente si la serie converge y $|\lambda| = r_\sigma(T)$ se sigue de la observación posterior al Teorema 2.53. De esta misma observación tenemos que la serie (2.27) no pude converger si $\lambda \in \sigma(T)$, de donde no puede converger en λ_0 si $|\lambda_0| < r_\sigma(T)$. Pues de ser así, entonces la serie convergería para $|\lambda| > |\lambda_0|$ y, en particular, para algún punto en $\sigma(T)$. $\square$

Si consideramos (2.27) como una serie de potencias en λ^{-1}, la fórmula para el radio de convergencia nos dice que

$$r_{\sigma(T)} = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \tag{2.28}$$

De hecho, probaremos a continuación que la sucesión $\|T^n\|^{1/n}$ es convergente, así que el límite superior en (2.28) es un límite. Para probar esto, probaremos, primero, el llamado **teorema del mapeo espectral** para polinomios.

Dado un polinomio $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$ y $T \in B(X)$, definimos $p(T) = a_nT^n + a_{n-1}T^{n-1} + ... + a_0I$. Observamos que toda factorización de $p(\lambda)$ nos lleva a una factorización de $p(T)$ y que $p(T) \in B(X)$, por lo que podemos considerar su espectro.

Teorema 2.59 (Mapeo Espectral para Polinomios) *Sea $T \in B(X)$ con X espacio de Banach complejo. Si p es un polinomio, el espectro de $p(T)$ consiste de los puntos μ tales que $p(\lambda) = \mu$ para algún $\lambda \in \sigma(T)$. En símbolos, $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$.*

Demostración: Si $n = 0$, es decir, $p(\lambda) = a_0$, entonces $p(T) = a_0 I$ y hay que demostrar que $\sigma(p(T)) = \{a_0\}$. Claramente $a_0 \in \sigma(p(T))$ pues $a_0 I - p(T) = 0$. Inversamente, $\lambda I - p(T) = (\lambda - a_0)I$, por lo que si $\lambda \neq a_0$, entonces $\lambda I - p(T)$ es biyectiva, por lo que $\lambda \in \rho(T)$. Esto prueba el caso cuando $n = 0$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $n \geq 1$ y que $a_n = 1$. Sean μ fijo y $\beta_1, ..., \beta_n$ las raíces de $p(\lambda) - \mu$, tenemos que

$$p(T) - \mu I = (T - \beta_1) \cdots (T - \beta_n). \tag{2.29}$$

Si $T - \beta_1, ..., T - \beta_n$ tienen inversas continuas definidas en todo X, también la tiene $p(T) - \mu I$, siendo la inversa del último el producto de las inversas de los primeros en el sentido opuesto. Así, si $\mu \in \sigma(p(T))$, debe existir β_k tal que $\beta_k \in \sigma(T)$. Como $p(\beta_k) = \mu$ esto muestra que $\sigma(p(T)) \subseteq p(\sigma(T))$. Supongamos ahora que algún β_k, digamos β_1, está en $\sigma(T)$. Si $T - \beta_1$ tiene inversa, el rango de $T - \beta_1$ no puede ser todo X pues $\beta_1 \in \sigma(T)$. Así, (2.29) prueba que el rango de $p(T) - \mu I$ tampoco puede ser todo X, de donde $\mu \in \sigma(p(T))$. Si $T - \beta_1$ no tiene inversa, intercambiando $T - \beta_1$ y $T - \beta_n$ en (2.29) vemos que $p(T) - \mu I$ tampoco puede tener inversa, por lo tanto $\mu \in \sigma(p(T))$, lo que concluye la demostración del teorema. □

Ahora estamos listos para probar que el límite superior en (2.28) es, de hecho, un límite.

Teorema 2.60 *Supongamos que $T \in B(X)$ y que X es un espacio de Banach complejo, entonces $r_\sigma(T) \leq \|T^n\|^{1/n}$ $\forall n \geq 1$. Además, $\|T^n\|^{1/n} \to r_\sigma(T)$.*

Demostración: Del Teorema 2.59 se sigue que $\sigma(T^n)$ consiste de las n-ésimas potencias de los puntos de $\sigma(T)$. Así,

$$\begin{aligned} r_\sigma(T^n) &= \sup_{\lambda\in\sigma(T^n)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda^n| \\ &= \left(\sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|\right)^n = [r_\sigma(T)]^n. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Del Teorema 2.53 y de la definición del radio espectral, podemos concluir que $r_\sigma(T^n) \leq \|T^n\|$. Finalmente, de (2.30) obtenemos $r_\sigma(T) \leq \|T^n\|^{1/n}$, de donde se sigue que $r_\sigma(T) \leq \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, que junto con (2.28) finaliza la demostración del teorema. $\square$

2.6. Subdivisiones del espectro.

En este capítulo, daremos una clasificación del espectro en tres conjuntos ajenos por pares.

Dado un operador $T : D(T) \subseteq X \to X$ y un escalar λ podemos resaltar tres distintas posibilidades para el rango del operador $\lambda - T$:

I. $R(T) = X$
II. $\overline{R(T)} = X$, pero $R(T) \neq X$
III. $\overline{R(T)} \neq X$.

De igual manera, resaltamos tres posibilidades para $(\lambda - T)^{-1}$:

1. $(\lambda - T)^{-1}$ existe y es continua
2. $(\lambda - T)^{-1}$ existe pero no es continua
3. $(\lambda - T)^{-1}$ no existe.

De acuerdo a esta clasificación, obtenemos 9 distintas posibilidades para la inversa y el rango del operador $\lambda - T$, conocidas como sus estados. Decimos que un escalar λ pertenece a una de las clases $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, ..., \mathbf{III}_2, \mathbf{III}_3$ si $\lambda - T$ está en el estado correspondiente.

Teniendo en mente esta clasificación y con el fin de tener una idea clara del por qué un escalar pertenece al espectro de un operador, podemos dar una división del espectro en tres conjuntos mutuamente excluyentes.

Clases I_2 y II_2 = el espectro continuo, denotado por $\sigma_c(T)$

Clases III_1 y III_2 = el espectro residual, denotado por $\sigma_r(T)$

Clases I_3, II_3 y III_3 = el espectro puntual, denotado por $\sigma_p(T)$

Se observa que $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(\lambda I - T) \neq 0\}$. A los elementos de $\sigma_p(T)$ se les llama **valores propios** o eigenvalores. A los elementos distintos de cero de $N(\lambda I - T)$ se les llama **vectores propios** o eigenvectores con valor propio λ. $N(\lambda I - T)$ es el **espacio propio** o eigenespacio de T en λ.

Vale la pena aclarar que cuando el espacio vectorial X es de dimensión finita, las condiciones $N(T) = 0$ e

$R(T) = X$ son equivalentes para $T \in B(X)$. Por lo que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ para todo operador lineal y acotado en un espacio de dimensión finita.

Dado $\lambda \in \sigma_p(T)$, es posible encontrar una $x \in D(T)$ tal que $\|x\| = 1$ y $Tx = \lambda x$. Más generalmente, decimos que λ es un **valor propio aproximado** si a toda $\varepsilon > 0$ le corresponde alguna $x \in D(T)$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|\lambda x - Tx\| < \varepsilon$. El conjunto de tales λ es llamado el **espectro puntual aproximado de T**, denotado por $\sigma_{ap}(T)$.

Teorema 2.61 *El espectro puntual aproximado de T es un subconjunto cerrado de $\sigma(T)$ que contiene a todos los puntos de las frontera de $\sigma(T)$. Si $T \in B(X)$, donde X es complejo, $\sigma_{ap}(T)$ es no vacío.*

Demostración: Sean $\lambda \in \rho(T)$,

$$d = (\lambda, \sigma(T)) = \min\{|\lambda - \mu| : \mu \in \sigma(T)\}$$

y supongamos que $\|R_\lambda\| < \dfrac{1}{d}$. De la definición de d, se sigue que existe $\lambda_0 \in \sigma(T)$ tal que $d \leq |\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\|R_\lambda\|}$, lo cual es una contradicción al Lema 2.47. Esto prueba que si $\lambda \in \rho(T)$, entonces

$$\|R_\lambda\| \geq \frac{1}{d}. \tag{2.31}$$

Para probar que $\sigma_{ap}(T)$ es cerrado, tomemos una sucesión $(\lambda_n) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$ y sea $\varepsilon > 0$. Como

$\lambda_n \to \lambda$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\lambda_{n_0} - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.32}$$

Por otro lado, dado que $\lambda_{n_0} \in \sigma_{ap}(T)$, obtenemos una sucesión $x_n^{n_0}$ en el dominio de T con $\|x_n^{n_0}\| = 1$ $\forall n$ y un $n_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|(\lambda_{n_0} - T)x_n^{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ si } n \geq n_1 \tag{2.33}$$

Así, de (2.32) y (2.33), concluimos que si $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - T)x_n^{n_0}\| &= \|T_\lambda x_n^{n_0} - T_{\lambda_{n_0}} x_n^{n_0} + T_{\lambda_{n_0}} x_n^{n_0}\| \\
&\leq \|T_\lambda x_n^{n_0} - T_{\lambda_{n_0}} x_n^{n_0}\| + \|T_{\lambda_{n_0}} x_n^{n_0}\| \\
&= |\lambda - \lambda_{n_0}|\|x_n^{n_0}\| + \|(\lambda_{n_0} - T)x_n^{n_0}\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

de donde $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, es decir, $\sigma_{ap}(T)$ es cerrado.

Para probar que el espectro aproximado contiene a la frontera del espectro, tomemos $\lambda \in \partial\sigma(T)$. Entonces existe una sucesión $\lambda_1, \lambda_2, ...$ en $\rho(T)$ tal que $\lambda_n \to \lambda$. De la desigualdad (2.31) concluimos que

$$\|R_{\lambda_n}\| \geq \frac{1}{\text{mín}\{|\lambda_n - \mu| : \mu \in \sigma(T)\}} \geq \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|},$$

por lo que $\|R_{\lambda_n}\| \to \infty$ si $n \to \infty$. De esta manera, existe una sucesión y_n en X tal que $y_n \to 0$ y $\|R_{\lambda_n} y_n\| = 1$ para toda n. Escribiendo $x_n = R_{\lambda_n} y_n$, vemos que $\|x_n\| = 1$ y

$$\begin{aligned}
\|(\lambda - T)x_n\| &= \|T_\lambda x_n - T_{\lambda_n} x_n + T_{\lambda_n} x_n\| \\
&\leq |\lambda - \lambda_n|\|x_n\| + \|(\lambda_n - T)x_n\| \\
&= |\lambda - \lambda_n| + \|y_n\| \longrightarrow 0, \text{si } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

Finalmente, si $T \in B(X)$ y X es complejo, entonces $\sigma(T)$ es compacto y no vacío, por lo que debe contener algún punto en su frontera. Como $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$, se concluye que $\sigma_{ap}(T)$ es no vacío. $\square$

2.7. Reducibilidad.

Esta sección y la siguiente nos ayudarán más adelante para estudiar el espectro de un operador compacto. Los siguientes teoremas son puramente algebraicos, por lo que solo necesitaremos un espacio vectorial X y un operador lineal $T : D(T) \subseteq X \to X$. Por comodidad, D denotará al dominio de T.

Definición 2.62 *Un subespacio M de X se llama **invariante** bajo T si $T(D \cap M) \subseteq M$.*

De esta manera podemos hablar de la restricción de T a M visto como un operador de $D \cap M$ a M.

Definición 2.63 *Sean M_1 y M_2 subespacios linealmente independientes de X tales que $X = M_1 \oplus M_2$ y P_1, P_2 las proyecciones de X en M_1 y M_2 respectivamente. El operador T es **completamente reducido** por la pareja (M_1, M_2) si estos subespacios son invariantes bajo T y $P_iD \subseteq D$, $i = 1, 2$.*

Para aclarar las dos definiciones anteriores, tomemos M_i y P_i como en la Definición 2.63 y supongamos que

T es un operador lineal en X tal que $P_iD \subseteq D$, $i = 1, 2$. Entonces para $x \in D$ podemos escribir

$$Tx = P_1TP_1x + P_1TP_2x + P_2TP_1x + P_2TP_2x.$$

Para $i, j = 1, 2$ sea T_{ij} la restricción de P_iTP_j a M_j considerado como un operador a M_i. Si los elementos de X se representan como $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ con $x_i = P_ix$, entonces T se puede representar por la matriz $T = \left(\begin{smallmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{smallmatrix}\right)$. Observamos que M_1 es invariante bajo T si y sólo si T_{21} es el operador cero y por tanto, T es completamente reducido por (M_1, M_2) si y sólo si T_{21} y T_{12} son el operador cero.

El siguiente teorema se usará más adelante para demostrar que todo punto no trivial del espectro de un operador compacto es un punto aislado. La demostración se sigue naturalmente por lo que la omitiremos.

Teorema 2.64 *Sean T un operador lineal completamente reducido por (M_1, M_2) y T_i la restricción de T a M_i, $i = 1, 2$. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*
$(a) D(T) = D(T_1) \oplus D(T_2)$.
$(b) N(T) = N(T_1) \oplus N(T_2)$.
$(c) R(T) = R(T_1) \oplus R(T_2)$.
$(d) T^{-1}$ existe si y solo si T_1^{-1} yT_2^{-1} existen, en cuyo caso T^{-1} es completamente reducido por (M_1, M_2) y la restricción de T^{-1} a M_i es T_i^{-1}.
$(e) R(T) = X$ si y solo si $R(T_1) = M_1$ y $R(T_2) = M_2$.

2.8. El ascenso y descenso de un operador.

Al igual que en la sección anterior, los resultados de esta sección son puramente algebraicos. X denotará a un espacio vectorial y T será un operador lineal con dominio y rango en X. El resultado más importante de esta sección es el Teorema 2.68, el cual jugará un papel crucial en la teoría espectral de los operadores compactos.

Definimos T^n por inducción con $T^0 = I$ y $T^1 = T$. Entonces $D(T^0) = X$ y para $n \geq 1$, $D(T^n) = \{x \in D(T^{n-1}) : T^{n-1}x \in D(T)\}$. El núcleo de T^n es el conjunto $N(T^n) = \{x \in D(T^n) : T^n x = 0\}$. Si $x \in N(T^i)$ para algún i, entonces $T^i x = 0 \in D(T^j)$ para $j = 0, 1, \ldots$. Se sigue que $N(T^i) \subseteq D(T^j)$ para $i, j = 0, 1, \ldots$. Fácilmente se ve que los núcleos de las iteraciones de T forman una cadena creciente de subespacios:

$$0 = N(T^0) \subseteq N(T) \subseteq N(T^2) \subseteq \cdots. \tag{2.34}$$

También es fácil ver que $N(T^{n+1}) = \{x \in D(T) : Tx \in N(T^n)\}$; de donde se sigue que si $N(T^n) = N(T^{n+1})$, entonces $N(T^n) = N(T^k)$ para toda $k > n$.

Definición 2.65 *El menor entero p tal que $N(T^p) = N(T^{p+1})$ es llamado el* ***ascenso*** *de T, y se denota por $\alpha(T)$. Si no existe tal entero, definimos $\alpha(T) = \infty$.*

Notamos que $\alpha(T) = 0$ si y sólo si T es inyectiva.

A continuación, consideramos los rangos de las iteraciones de T. Ellos también forman una cadena de subespacios, sólo que ahora la cadena es decreciente:

$$X = R(T^0) \supseteq R(T) \supseteq R(T^2) \supseteq \cdots. \tag{2.35}$$

Claramente, $R(T^{n+1}) = T\{R(T^n) \cap D(T)\}$. Entonces, si $R(T^n) = R(T^{n+1})$, se sigue que $R(T^k) = R(T^n)$ para $k > n$.

Definición 2.66 *El menor entero no negativo q tal que $R(T^q) = R(T^{q+1})$ es llamado el **descenso** de T, y se denota por $\delta(T)$. Si no existe tal entero, definimos $\delta(T) = \infty$.*

Notamos que $\delta(T) = 0$ si y sólo si $R(T) = X$.

Lema 2.67 *Supongamos que $R(\lambda - T) = X$ para algún λ. Dados $i, j = 0, 1, ...,$ cada $x \in X$ puede escribirse de la forma $x = u + v$ con $u \in D(T^i)$ y $v \in R(T^j)$. Es decir,*

$$X = D(T^i) + R(T^j). \tag{2.36}$$

Demostración: Como $R(\lambda - T) = X$, tenemos que $R[(\lambda - T)^n] = X$ para $n = 0, 1, ...,$ entonces (2.36) es válida cuando $\lambda = 0$.

Sea $n = i + j$. Dada $y \in X$, existe $x \in D[(\lambda - T)^n] = D(T^n)$ tal que

$$y = (\lambda - T)^n x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \lambda^k T^{n-k} x.$$

De (2.35) concluimos que para $0 \leq k \leq i$, $T^{n-k}x \in R(T^{n-k}) \subseteq R(T^{n-i}) = R(T^j)$. Y para $i \leq k \leq n$, $T^{n-k}x \in D(T^k) \subseteq D(T^i)$. Lo que nos permite concluir que $y \in R(T^j) + D(T^i)$. $\square$

Teorema 2.68 *Si $\alpha(T) = p < \infty$ y $\delta(T) = q < \infty$, entonces $\alpha(T) \leq \delta(T)$. Si, además, $D(T) = X$ o $R(\lambda - T) = X$ para algún λ, entonces $\alpha(T) = \delta(T) = p$ y*

$$X = R(T^p) \oplus N(T^p). \tag{2.37}$$

Demostración: Probemos primero que $R(T^p) \cap N(T^j) = 0$ y $D(T^q) \subseteq R(T^j) + N(T^q)$ para $j = 1, 2, ...$, lo que nos ayudará a proceder con la demostración del teorema.

Fijemos $j \geq 1$. Si $x \in R(T^p) \cap N(T^j)$, entonces $x = T^p v$ para algún v y $0 = T^j x = T^{p+j} v$. Es decir, $v \in N(T^{p+j}) = N(T^p)$, pues $p = \alpha(T)$. Esto muestra que $x = T^p v = 0$ y, por lo tanto,

$$R(T^p) \cap N(T^j) = 0,\ j = 1, 2, ... \tag{2.38}$$

Para probar que $D(T^q) \subseteq R(T^j) + N(T^q)$, tomemos $x \in D(T^q)$. Tenemos que $T^q x \in R(T^q) = R(T^{q+j})$, pues $\delta(T) = q$, de donde existe v tal que $T^q x = T^{q+j} v$. Por tanto, $0 = T^q(x - T^j v)$. De esta manera, $x = T^j v + (x - T^j v) \in R(T^j) + N(T^q)$. Lo que prueba que

$$D(T^q) \subseteq R(T^j) + N(T^q),\ j = 1, 2, ... \tag{2.39}$$

Ahora podemos proceder a demostrar que $\alpha(T) \leq \delta(T)$. Si $x \in N(T^{q+1}) \subseteq D(T^q)$, de (2.39) tenemos que $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in R(T^p)$ y $x_2 \in N(T^q)$. Entonces $x_1 =$

$x - x_2 \in N(T^{q+1}) + N(T^q) = N(T^{q+1})$, por (2.34). De donde se concluye que $x_1 \in R(T^p) \cap N(T^{q+1})$. Pero en vista de (2.38) tenemos que $x = x_2 \in N(T^q)$, es decir, hemos probado que $N(T^{q+1}) \subseteq N(T^q)$ que junto con (2.34) nos lleva a que $N(T^{q+1}) = N(T^q)$, por lo que $p = \alpha(T) \leq q$

Finalmente, si $D(T) = X$ o $R(\lambda - T) = X$ para algún λ, del Lema 2.67 y la ecuación (2.39) concluimos que

$$X = R(T^j) + N(T^q),\ j = 1, 2, ... \tag{2.40}$$

Tomando $j = q$ en (2.38) y $j = p$ en (2.40) concluimos que

$$X = R(T^p) + N(T^q). \tag{2.41}$$

De (2.41) y (2.40) es claro que $R(T^j)$ no puede ser un subespacio propio de $R(T^p)$ para ningún $j \geq 1$, es decir, $q \leq p$ y se concluye la demostración del teorema. $\square$

2.9. Operadores compactos

En esta sección estudiaremos a los operadores compactos y algunas de sus propiedades para, más adelante, estudiar el espectro de dichos operadores.

A lo largo de esta sección X y Y denotarán espacios vectoriales normados.

Definición 2.69 *Dado $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal, decimos que T es **compacto** si para cualquier conjunto acotado B de X, $T(B)$ es relativamaente compacto en Y, es decir, $\overline{T(B)}$ es compacto en Y.*

Dado que Y es un espacio métrico, un operador T es compacto si y sólo si para toda sucesión acotada $(x_n) \subseteq X$, Tx_n contiene una subsucesión convergente en Y.

Notamos que todo operador lineal compacto es continuo. Pues si T no fuera continuo, podríamos encontrar una sucesión x_n en X tal que $\|x_n\| \leq 1$ y $\|Tx_n\| \to \infty$ lo cual no puede ocurrir si T es compacto.

Al conjunto de operadores compactos en $B(X,Y)$ lo denotaremos por $K(X,Y)$ y al de aquellos en $B(X)$ por $K(X)$.

Cuando Y es completo existe una útil caracterización de los operadores compactos dada en términos de los conjuntos totalmente acotados. Recordemos que un subconjunto no vacío de un espacio métrico es **totalmente acotado** si dada $\varepsilon > 0$, A está contenido en la unión de un número finito de bolas de radio ε.

Teorema 2.70 *Un subconjunto de un espacio métrico completo es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Corolario 2.71 *Si Y es completo, T es compacto si y sólo si $T(B)$ es totalmente acotado para todo subconjunto acotado B de X.*

Teorema 2.72 *El conjunto $K(X,Y)$ es un subespacio de $B(X,Y)$. Si Y es completo, dicho subespacio es cerrado.*

Demostración: Para probar que $K(X,Y)$ es un subespacio de (B,Y) tomemos $S,T \in K(X,Y)$, dos escalares λ,μ y una sucesión acotada (x_n) en X. Como S es compacto, existe una subsucesión (Sx_{n_k}) de (Sx_n) que converge y, análogamente, para la sucesión (x_{n_k}) existe una subsucesión $(Tx_{n_{k_j}})$ de (Tx_{n_k}) que converge. De donde concluimos que la subsucesión $(\lambda Sx_{n_k} + \mu Tx_{n_{k_j}})$ de $(\lambda Sx_n + \mu Tx_n)$ converge.

Ahora supongamos que Y es completo y (T_n) es una sucesión en $K(X,Y)$ que converge a algún $T \in B(X,Y)$. Como todo subconjunto acotado de X está contenido en un múltiplo de $S = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, es suficiente probar que $T(S)$ es totalmente acotado. Dada $\varepsilon > 0$ fijemos N tal que

$$\|T_N - T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como T_N es compacto, $T_N(S)$ es totalmente acotado. Por lo que existen $y_1, y_2, ..., y_m \in Y$ tales que $T_N(S) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\varepsilon/2}(y_i)$. De esta manera, dado $x \in S$, existe y_i, $1 \leq i \leq m$ tal que

$$\begin{aligned} \|Tx - y_i\| &\leq \|Tx - T_N x\| + \|T_N x - y_i\| \\ &\leq \|T - T_N\|\|x\| + \|T_N x - y_i\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Lo que prueba que $T(S)$ es totalmente acotado. $\square$

Una observación importante es que si X es un espacio vectorial normado de dimensión infinita, la identidad en X no es compacto. Pues de serlo, la bola unitaria cerrada sería compacta en X, lo cual es imposible por lema de Riesz.

Definición 2.73 *Si $T \in B(X,Y)$ y $\dim R(T) < \infty$, decimos que T es de* ***rango finito***.

Todo operador de rango finito es compacto como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.74 *Sea X un espacio vectorial normado y $P \in B(X)$ una proyección continua. P es compacto si y sólo si es de rango finito.*

Demostración: Supongamos que P es compacto. Como P es la identidad en $R(P)$, debemos tener que $\dim R(P) < \infty$, es decir, P es de rango finito.

Inversamente, si P es de rango finito, $\overline{P(S)}$ donde $S = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ es cerrado y acotado en $R(P)$. Del teorema de Heine-Borel concluimos que $\overline{P(S)}$ es compacto. $\square$

A continuación veremos algunas propiedades de los operadores compactos. Una de las más importantes es que el adjunto de un operador compacto es, a su vez, compacto.

Teorema 2.75 *Sean X, Y, Z espacios vectoriales normados, $T \in B(X, Y)$ y $S \in B(Y, Z)$. Si S o T son compactos, ST es compacto.*

Demostración: Supongamos, por ejemplo, que S es compacto (la demostración en el otro caso es similar) y sea (x_n) una sucesión acotada en X. Como T es continuo, Tx_n es acotada. Dado que S es compacto, concluimos que $S(Tx_n) = (ST)x_n$ contiene una subsucesión convergente. $\square$

Corolario 2.76 *Si T es un operador compacto cuyo dominio X es de dimensión infinita, T no puede tener inverso acotado.*

Demostración: Si T tuviera inverso acotado, del Teorema 2.75 tendríamos que $T^{-1}T = I$ sería compacto, lo que implicaría que $\dim(X) < \infty$. $\square$

Recordemos el Teorema de Arzelà-Ascoli que nos será útil para probar el próximo resultado.

Teorema 2.77 (Arzelà-Ascoli) *Supongamos que M es un espacio métrico compacto. Sea Φ una familia acotada y equicontinua de funciones en $C(M)$ (el conjunto de todas las funciones continuas de M en $\mathbb{R}$). Es decir:*
(a)$\|f\|_\infty \leq M, f \in \Phi$,
(b) $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|t_1 - t_2\| < \delta$, entonces $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ para toda $f \in \Phi$.
Entonces toda sucesión de funciones en Φ contiene una subsucesión convergente.

Teorema 2.78 *Si $T \in K(X,Y)$, $T^* \in K(Y^*, X^*)$. Si, además, Y es completo y $T^* \in K(Y^*, X^*)$, entonces $T \in K(X,Y)$.*

Demostración: Supongamos que $T \in K(X,Y)$ y sean $S = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, (y_n^*) una sucesión acotada en Y^*. Digamos que $\|y_n^*\| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y veamos a la sucesión (y_n^*) como una sucesión en el espacio $C\left(\overline{T(S)}\right)$ de funciones continuas en el compacto $\overline{T(S)}$. Para $y \in T(S)$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $|y_n^*(y)| \leq M\|y\| = M\|Tx\| \leq M\|T\|$ para algún $x \in S$. Así, para cada n,

$$\sup_{y \in \overline{T(S)}} |y_n^*(y)| = \sup_{y \in T(S)} |y_n^*(y)| \leq M\|T\|.$$

Por lo que (y_n^*) es acotada en $C\left(\overline{T(S)}\right)$. Más aún, es equicontinua, pues $|y_n^*(y_1) - y_n^*(y_2)| \leq M\|y_1 - y_2\|$ para toda n. Del Teorema de Arzelà-Ascoli concluimos que existe una subsucesión $(y_{n_k}^*)$ de (y_n^*) que converge uniformemente en $\overline{T(S)}$. Así, $y_{n_k}^* Tx = T^* y_{n_k}^*(x)$ converge uniformemente para $x \in S$; esto es, $T^* y_{n_k}^*$ converge en la norma de X^*.

La segunda parte se puede demostrar por el mismo método, sin embargo, aquí lo haremos usando la inmersión natural de X en X^{**} definida en la Sección 2.2 y la parte que ya hemos probado.

Sean $\phi : X \to X^{**}$ y $\psi : Y \to Y^{**}$ las inmersiones naturales de X en X^{**} y de Y en Y^{**} respectivamente. Entonces,

$$\psi Tx(y^*) = y^* Tx = T^* y^*(x) = \phi x(T^* y^*) = T^{**} x(y^*),$$

para toda $x \in X$ y toda $y^* \in Y^*$, así que

$$\psi Tx = T^{**} \phi x.$$

Si $x \in S$, entonces $\phi x \in S^{**}$ donde $S^{**} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| < 1\}$, pues ϕ es una isometría. Entonces

$$\psi T(S) \subseteq T^{**}(S^{**}).$$

Ahora, si T^* es compacto, de la parte que ya probamos tenemos que T^{**} es compacto. Por lo que $T^{**}(S^{**})$ es totalmente acotado (pues Y^{**} es completo), de donde concluimos que su subconjunto $\psi T(S)$ también lo es. Nuevamente, como ψ es una isometría, $T(S)$ es totalmente acotado en Y y como Y es completo, T es compacto. $\square$

Antes de empezar la teoría espectral de los operadores compactos, veamos un último teorema.

Teorema 2.79 *Sean X, Z espacios de Banach y Y simplemente un espacio vectorial normado. Supongamos que $T \in K(X, Y)$ y $A \in B(Z, Y)$ cuyo rango está contenido en $R(T)$. Entonces A es compacto.*

Demostración: Sea $\widehat{T} : X/N(T) \to Y$ dado por $\widehat{T}[x] = Tx$. Entonces $\widehat{T}$ es compacto, pues si S es la bola unitaria en X, $S + N(T)$ es la bola unitaria en $X/N(T)$ y $\widehat{T}(S + N(T)) = T(S)$ que es relativamente compacto. Como $\widehat{T}$ es continuo, fácilmente se prueba que $(\widehat{T})^{-1}$ es cerrado. También, $D((\widehat{T})^{-1}) = R(T) \supseteq R(A)$, por lo que podemos preguntarnos por el operador $(\widehat{T})^{-1}A$. Dado que $(\widehat{T})^{-1}$ es cerrado y A es continuo, $(\widehat{T})^{-1}A$ es un operador cerrado de Z en $X/N(T)$. Como Z y $X/N(T)$ son de Banach, el Teorema de la gráfica cerrada asegura que $(\widehat{T})^{-1}A$ es continuo. Del Teorema 2.75 concluimos que $A = \widehat{T}((\widehat{T})^{-1}A)$ es compacto. $\square$

2.9.1. Teoría Espectral de operadores compactos.

En esta sección describiremos el espectro de un operador compacto (Teorema 2.86). Con el fin de hacer esto, primero probaremos algunos resultados sobre el operador $\lambda - T$ que resultan, también, muy útiles.

A lo largo de la sección, T denotará un operador compacto en $B(X)$, con X un espacio vectorial y, como de costumbre, T_λ denotará al operador $\lambda - T$.

Teorema 2.80 *Los espacios nulos $N(T_\lambda^n)$, $n = 1, 2, ...$, son de dimensión finita.*

Demostración: Si $n = 1$ y $x \in N(T_\lambda)$, entonces $\lambda x - Tx = 0$, de donde $x = \lambda^{-1}Tx$. Es decir, $\lambda^{-1}T$ es la identidad en $N(T_\lambda)$. Así, la bola unitaria cerrada en $N(T_\lambda)$ debe ser compacta (pues $\lambda^{-1}T$ es compacto), de donde $\dim N(T_\lambda) < \infty$.

Para $n > 1$, escribimos

$$T_\lambda^n = (\lambda - T)^n = \lambda^n - n\lambda^{n-1}T + \cdots + (-1)^n T^n = \lambda^n - A,$$

donde $A = -n\lambda^{n-1}T + \cdots + (-1)^n T^n$ es compacto por los Teoremas 2.72 y 2.75. De manera similar al caso $n = 1$ aplicado al operador $\lambda^n - A$, concluimos que $\lambda^{-n}A$ es la identidad en $N(\lambda^n - A)$, por lo que $N(\lambda^n - A) = N(T_\lambda^n)$ debe ser finito dimensional. $\square$

Teorema 2.81 *Sean M un subespacio cerrado de X tal que $M \cap N(T_\lambda) = 0$. Entonces la restricción de T_λ a M tiene inverso acotado y $T_\lambda(M)$ es cerrado en X.*

Demostración: Supongamos que la restricción de T_λ a M no tiene inverso acotado de $T_\lambda(M)$ a M, entonces existe una sucesión $(x_n) \subseteq M$ tal que $\|x_n\| = 1$ para toda N y $T_\lambda x_n \to 0$ (ver demostración del Teorema 2.17). Como T es compacto, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge. Pero

$$x_{n_k} = \lambda^{-1}(Tx_{n_k} + T_\lambda x_{n_k}), \tag{2.42}$$

por lo que (x_{n_k}) converge. Su límite, x, está en M, pues M es cerrado. Entonces,

$$0 = \lim_{k\to\infty} T_\lambda x_{n_k} = T_\lambda x.$$

Pero, dado que $M \cap N(T_\lambda) = 0$, T_λ es inyectiva en M. Lo que es una contradicción, pues $\|x\| = 1 \neq 0$. Esto prueba que la restricción de T_λ a M tiene inverso continuo.

Para probar que $T_\lambda(M)$ es cerrado, tomemos $y \in \overline{T_\lambda(M)}$ y una sucesión $(x_n) \subseteq M$ tal que $T_\lambda x_n \to y$. Como la restricción de T_λ a M tiene inverso acotada, debemos tener que (x_n) es acotada. Entonces, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que (Tx_{n_k}) converge. De la igualdad (2.42) concluimos que (x_{n_k}) debe converger a algún $x \in M$. Así, $y = \lim_{k\to\infty} T_\lambda x_{n_k} = T_\lambda x \in T_\lambda(M)$. Lo que prueba que $T_\lambda(M)$ es cerrado. □

Teorema 2.82 *Los rangos $R(T_\lambda^n)$, $n = 1, 2, ...$, son cerrados.*

Demostración: Como se vio en la demostración del Teorema 2.80, es suficiente probar el caso $n = 1$.

Sea M como en el Teorema anterior tal que $X = M \oplus N(T_\lambda)$ (existe por el Teorema 2.23 ya que $\dim N(T_\lambda) < \infty$). Entonces, $T_\lambda(M)$ es cerrado. Pero como $X = M \oplus N(T_\lambda)$, tenemos que $R(T_\lambda) = T_\lambda(M)$, lo que concluye la demostración. □

El siguiente, es el Teorema central de la teoría espectral de los operadores compactos. Su demostración utiliza el Lema de Riesz.

Teorema 2.83 *El ascenso y descenso de T_λ son finitos (y, por tanto iguales). Si $p = \alpha(T)$, entonces,*

$$X = R(T_\lambda^p) \oplus N(T_\lambda^p), \tag{2.43}$$

donde ambos subespacios son cerrados.

Demostración Supongamos que $\alpha(\lambda - T) = \infty$. Entonces $N(T_\lambda^{n-1})$ es un subespacio cerrado propio de $N(T_\lambda^n)$ para $n = 1, 2, \ldots$. Del lema de Riesz, existe $x_n \in N(T_\lambda^n)$ tal que $\|x_n\| = 1$ para toda n y $\|x_n - x\| \geq \dfrac{1}{2}$ si $x \in N(T_\lambda^{n-1})$. Si $1 \leq m < n$, entonces

$$\begin{aligned} Tx_n - Tx_m &= \lambda x_n - (\lambda x_m + T_\lambda x_n - T_\lambda x_m) \\ &= \lambda x_n - z, \end{aligned} \tag{2.44}$$

donde z pertenece a $N(T_\lambda^{n-1})$ por (2.34) ya que $m \leq n - 1$. Entonces

$$\|Tx_n - Tx_m\| = |\lambda| \|x_n - \lambda^{-1} z\| \geq \frac{|\lambda|}{2} > 0. \tag{2.45}$$

Esto prueba que (Tx_n) no puede tener una subsucesión convergente, lo que contradice que T es compacto. Así, $\alpha(\lambda - T) < \infty$.

Ahora, si $\delta(\lambda - T) = \infty$, entonces $R(T_\lambda^{n+1})$ es un subespacio cerrado propio de $R(T_\lambda^n)$ para $n = 1, 2, \ldots$. Ahora escogemos $x_n \in R(T_\lambda^n)$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - x\| \geq \dfrac{1}{2}$ si $x \in R(T_\lambda^{n+1})$. Para $1 \leq n < m$ el elemento z en (2.44) ahora pertenece a $R(T_\lambda^{n+1})$. Entonces se cumple (2.45) y obtenemos una contradicción como antes.

Finalmente, como $D(T_\lambda) = X$, el Teorema 2.68 asegura que $X = R(T_\lambda^p) \oplus N(T_\lambda^p)$ donde $R(T\lambda^p)$ y $N(T_\lambda^p)$ son cerrados por los Teoremas 2.82 y 2.80. $\square$

A continuación, demostraremos dos corolarios del Teorema 2.83 los cuales caracterizarán al espectro de un operador compacto.

Corolario 2.84 *Todo punto distinto de cero del espectro de un operador compacto es un valor propio.*

Demostración: De la igualdad (2.43) concluimos que T_λ es inyectiva si y sólo si $R(T_\lambda) = X$. Ahora, si λ no es un valor propio, es decir, T_λ es inyectiva (y, por tanto $R(T_\lambda) = X$), el Teorema 2.81 asegura que $\lambda \in \rho(T)$. Esto demuestra que todo punto distinto de cero del espectro es un valor propio $\square$

Corolario 2.85 *El espectro de un operador compacto contiene a lo más un conjunto numerable de puntos. Además, cada $\lambda \in \sigma(T)$ distinto de cero es un punto aislado del espectro.*

Demostración: Probemos primero que todo punto distinto de cero del espectro es un punto aislado. De las cadenas (2.34) y (2.35) se tiene que $X_1 = R(T_\lambda^p)$ y $X_2 = N(T_\lambda^p)$ son invariantes bajo T_λ y, por lo tanto, bajo T. De esta manera, T es completamente reducido por los subespacios X_1 y X_2. Sea $T_K \in B(X_k)$ la restricción de T a X_k, $k = 1, 2$. La imagen bajo T_1 de un conjunto acotado en X_1 es relativamente compacto en X y por tanto en X_1, pues X_1 es cerrado; de donde T_1 es compacto. Claramente, $\lambda - T_1$ es inyectiva, entonces $\lambda \in \rho(T_1)$

por la demostración del Corolario 2.84. Así, $\mu \in \rho(T_1)$ para toda μ suficientemente cerca de λ (Teorema 2.48). Más aún, $\lambda - T_2$ es nilpotente pues $(\lambda - T_2)^p = 0$ y, por tanto, $\sigma(T_2) = \{\lambda\}$ por el Teorema 2.60. Esto prueba que $\mu - T_1$ y $\mu - T_2$ son ambas inyectivas si $\lambda \neq \mu$ y μ está suficientemente cerca de λ. Por el Teorema 2.64, lo mismo es cierto para $\mu - T$. Pero si μ no es un valor propio, entonces $\mu \in \rho(T)$. Así, cada $\lambda \neq 0 \in \sigma(T)$ es un punto aislado.

Finalmente, como el espectro de T es compacto, el conjunto $\sigma(T) \cap \{\lambda : |\lambda| \geq r\}$ es compacto. Pero este conjunto solo puede consistir de valores propios aislados y, por tanto, debe ser finito o vacío. Lo que prueba que el espectro contiene a lo más un conjunto numerable de puntos. $\square$

Estos dos corolarios caracterizan al espectro de un operador compacto.

Teorema 2.86 *El espectro de un operador compacto en $B(X)$ contiene a lo más un conjunto numerable de puntos y éstos no tienen punto de acumulación, excepto tal vez el cero. Todo punto distinto de cero del espectro es un valor propio.*

Capítulo 3

Los espacios c, c_o y ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$.

A continuación veremos algunos espacios de sucesiones importantes. Estos resultados y definiciones se pueden encontrar en [14].

Definición 3.1 *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$ y que X es el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares con las operaciones usuales, es decir, con la suma de sucesiones y multiplicación de sucesiones por escalar efectuadas término por término. Para cualquier elemento (x_j) de X, sea*

$$\|(x_j)\|_p = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}, & si\ 1 \leq p < \infty \\ \sup\{|x_j| : j \in \mathbb{N}\}, & si\ p = \infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

Entonces, la ***norma-p*** *en X es la función $\|\cdot\| : x \to [0, \infty]$. El conjunto de todas las sucesiones de escalares (x_j) tales que $\|(x_j)\| < \infty$ es denotado por ℓ_p.*

Resulta ser que cada uno de los espacios ℓ_p es un subespacio de X y tiene la correspondiente *norma-p* como norma. Para probar esto, lo primero que hay que hacer es obtener algunas desigualdades.

Definición 3.2 *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$. Defina q como sigue. Si $p = 1$, entonces sea $q = \infty$. Si $p = \infty$, entonces sea $q = 1$. Si $1 < p < \infty$, entonces sea q tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$; esto es, $q = \dfrac{p}{p-1}$. Entonces q es el* ***exponente conjugado de p****, y p y q son* ***exponentes conjugados****.*

Lema 3.3 *Supongamos que $1 < p < \infty$ y que q es el conjugado de p. Entonces*

$$rs \leq \frac{r^p}{p} + \frac{s^q}{q},$$

para cualesquiera r, s reales no negativos.

Proposición 3.4 (Desigualdad de Hölder) *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$ y que q es el conjugado de p. Entonces*

$$\|(x_j y_j)\|_1 \leq \|(x_j)\|_p \|(y_j)\|_q,$$

para cualesquiera $(x_j), (y_j)$ sucesiones de escalares.

Proposición 3.5 (Desigualdad de Minkowski) *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\|(x_j) + (y_j)\|_p \leq \|(x_j\|_p + \|(y_j)\|_p, \tag{3.2}$$

para cualesquiera $(x_j), (y_j)$ sucesiones de escalares.

Teorema 3.6 *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$. Entonces ℓ_p es un espacio vectorial con las operaciones usuales de sucesiones. La norma-p es una norma en este espacio vectorial.*

Teorema 3.7 *Supongamos que $1 \leq p \leq \infty$. Entonces ℓ_p es un espacio de Banach.*

El siguiente teorema caracteriza al espacio dual de ℓ_p para $1 \leq p < \infty$.

Teorema 3.8 *Supongamos que $1 \leq p < \infty$ y que q es el conjugado de p. El espacio dual de ℓ_p es ℓ_q. Es decir, si para cada elemento $(y_j) \in \ell_q$, $T(y_j)$ es la función en ℓ_p con valores escalares definida por la fórmula*

$$(T(y_j))(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j,$$

entonces T es un isomorfismo isométrico de ℓ_q en ℓ_p^*.

Demostración: Si $(x_j) \in \ell_p$ y $(y_j) \in \ell_q$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|(x_j)\|_p \|(y_j)\|_q < \infty$$

por la desigualdad de Hölder, es decir, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ converge. Esto prueba que T está bien definida y que

$$|T(y_j)(x_j)| \leq \|(x_j)\|_p \|(y_j)\|_q, \tag{3.3}$$

para $(x_j) \in \ell_p$ y $(y_j) \in \ell_q$. Para cada $(y_j) \in \ell_q$, la función $T(y_j)$ es claramente un funcional lineal en ℓ_p, y la desigualdad (3.3) implica que este funcional es acotado y satisface la desigualdad

$$\|T(y_j)\| \leq \|(y_j)\|_q. \tag{3.4}$$

Además, fácilmente se prueba que la función $T : \ell_q \to \ell_p^*$ es un operador lineal. El teorema estará probado una vez que se demuestre que $T(\ell_q) \supseteq \ell_p^*$ y que la igualdad se satisface en (3.4) para $(y_j) \in \ell_q$.

Supongamos que $x^* \in \ell_p^*$. Para cada j, sea (e_j) la sucesión en ℓ_p definida por

$$(e_j)_n = \begin{cases} 1, & \text{si } j = n \\ 0, & \text{si } j \neq n. \end{cases}$$

Tomemos $y_j = x^* e_j$ y sea z_j un escalar tal que $|z_j| = 1$ y $|y_j| = z_j y_j$. Supongamos por el momento que $p \neq 1$, de modo que $1 < q < \infty$. Entonces para cada entero positivo k,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q &= \sum_{j=1}^{k} z_j y_j |y_j|^{q-1} \\ &= x^* \left(\sum_{j=1}^{k} z_j |y_j|^{q-1} e_j \right) \\ &\leq \|x^*\| \left\| \sum_{j=1}^{k} z_j |y_j|^{q-1} e_j \right\|_p \\ &= \|x^*\| \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^{(q-1)p} \right)^{1/p} \\ &= \|x^*\| \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^{q} \right)^{1/p},\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^q \right)^{1-1/p} \leq \|x^*\|.$$

Haciendo tender k a infinito se concluye que $(y_j) \in \ell_q$ y que

$$\|(y_j)\|_q \leq \|x^*\|. \tag{3.5}$$

Ahora supongamos que $p = 1$, de modo que $q = \infty$. Para todo entero positivo j,

$$|y_j| = |x^* e_j| \leq \|x^*\| \|e_j\|_1 = \|x^*\|,$$

y al tomar supremo sobre j, se muestra de nuevo que $(y_j) \in \ell_q$ y que (3.5) se cumple. Para cada elemento $(x_j) \in \ell_p$,

$$\begin{aligned} x^*(x_j) &= x^*\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j x^* e_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j = (T(y_j))(x_j), \end{aligned}$$

de donde $T(y_j) = x^*$, lo que prueba que $T(\ell_q) \supseteq \ell_p^*$.

Solo resta probar que $\|T(y_j)\| = \|(y_j)\|_q$ para $(y_j) \in \ell_q$. Primero notemos que $T(y_j)$ es distinto de cero si (y_j) es un elemento distinto de cero de ℓ_q, de donde T es inyectiva. Ahora fijemos un elemento $(y_j) \in \ell_q$ y sea $x^* = T(y_j)$. El argumento del párrafo anterior proporciona un elemento (y'_j) de ℓ_q tal que $T(y'_j) = x^*$, y (y'_j) debe ser igual a (y_j) pues T es inyectiva. Se sigue de (3.5) que

$$\|(y_j)\| \leq \|T(y_j)\|. \tag{3.6}$$

Combinando (3.4) y (3.6) se llega a la igualdad deseada. □

Hay dos subespacios importantes de ℓ_∞, uno es el espacio c de las sucesiones de escalares convergentes y el otro es el espacio c_0 de las sucesiones que convergen a 0. Los espacios c y a c_0 heredan la norma $\|\cdot\|_\infty$ de ℓ_∞ y resultan ser, también, espacios de Banach.

Lo siguientes Teoremas caracterizan a los espacios duales de c_0 y de c. Necesitaremos la siguiente definición.

Definición 3.9 *Para un número complejo z, la función signo se define como* $\operatorname{sign}(z) = \dfrac{z}{|z|}$ *si* $z \neq 0$ *y* $\operatorname{sign}(0) = 1$.

Teorema 3.10 *El espacio dual de c_0 es ℓ_1.*

Demostración: Veremos que existe un isomorfismo isométrico entre c_0^* y ℓ_1.

Para hacer esto, sea $y = (y_n) \in \ell_1$. Definimos $f_y : c_0 \to \mathbb{C}$ tal que $f_y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n x_n$ con $x = (x_n) \in c_0$.

Es claro que f_y está bien definida para cualquier $y \in \ell_1$ y que

$$|f_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |y_n||x_n| \leq \|y\|_1 \|x\|_{c_0}.$$

Por tanto, f_y es un funcional lineal acotado con norma $\|f_y\| \leq \|y\|_1$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $x \in c_0$ dado por $x = (u_1, u_2, ..., u_m, 0, 0, ...)$ donde $u_n = \overline{\operatorname{sign}(y_n)}$. Se tiene que $y_k u_k = |y_k|$ y $\|x\|_{c_0} = 1$. También se sigue que $f_y(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} |y_k|$. Por tanto, $\|f_y\| \geq \sum\limits_{k=1}^{m} |y_k|$ para cualquier m, es decir, $\|f_y\| = \|y\|$. Hemos demostrado que el mapeo que manda y a f_y es un mapeo isométrico de ℓ_1 a c_0^*.

Falta ver ahora que cualquier elemento de c_0^* es de esta forma, es decir, que el mapeo $y \mapsto f_y$ es sobre.

Para ver esto, sea $g \in c_0^*$ y para $n \in \mathbb{N}$ sea $y_n = g(e_n)$ donde $e_n \in c_0$ es la sucesión $(0, 0, ..., \underset{(n)}{1}, 0, 0, ...)$. Para cualquier $N \in \mathbb{N}$ sea $v = \sum_{k=1}^{N} \overline{\mathrm{sign} y_k} e_k$. Se tiene que $v \in c_0$ y $\|v\| = 1$. Además,

$$|g(v)| = \sum_{k=1}^{N} |y_k| \leq \|g\|\|v\| = \|g\|.$$

Por tanto $y = (y_n) \in \ell_1$ y $\|y\|_1 \leq \|g\|$. Más aún, para cualquier elemento $x = (x_n) \in c_0$ se cumple que

$$g(x) = g\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n g(e_n) = f_y(x).$$

Es decir, $g = f_y$ y esto completa la prueba. $\square$

Teorema 3.11 *El espacio dual de c es ℓ_1. Es decir, dado un funcional $f \in c^*$ existe un único $y \in \ell_1$ y un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \lambda \lim_{j \to \infty} x_j.$$

Y cualquier $y \in \ell_1$ tiene esta forma. Además, $\|f\| = |\lambda| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_k|$.

Antes de demostrar el Teorema 3.11, veamos una proposición que nos será útil.

Proposición 3.12 *El espacio c coincide con el espacio $\overline{\langle e_0, e_1, ... \rangle}$ donde $e_n = (\delta_{nm})_{m \in \mathbb{N}}$ para $n \in \mathbb{N}$ y e_0 es la sucesión $(1, 1, 1, ...)$.*

Demostración: Es claro que $c \supseteq \overline{\langle e_0, e_1, ...\rangle}$. Ahora tomemos una sucesión $x \in c$. Demostraremos que la sucesión $x^n \in \overline{\langle e_0, e_1, ...\rangle}$ definida como

$$x^n = \left(\lim_{j\to\infty} x_j\right) e_0 + \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lim_{i\to\infty} x_i) e_k,$$

converge a x en c.

Observamos que

$$\begin{aligned}
x^1 &= (x_1, \lim_{j\to\infty} x_j, \lim_{j\to\infty} x_j, ...) \\
x^2 &= (x_1, x_2, \lim_{j\to\infty} x_j, \lim_{j\to\infty} x_j, ...) \\
&\vdots \\
x^n &= (x_1, x_2, ..., x_n, \lim_{j\to\infty} x_j, \lim_{j\to\infty} x_j, ...)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$x^n(k) = \begin{cases} x_k, & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ \lim\limits_{j\to\infty} x_j, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

De donde

$$|x^n(k) - x_k| = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq k \leq n \\ |\lim\limits_{j\to\infty} x_j - x_k|, & \text{si } k > n. \end{cases}$$

Además, cuando $k \to \infty$, $|\lim\limits_{j\to\infty} x_j - x_k| \to 0$. Por lo que

$$\|x^n - x\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x^n(k) - x_k| = \sup_{k>n} |\lim_{j\to\infty} x_j - x_k| \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Lo que finaliza la prueba. $\square$

Demostración del Teorema 3.11: De la Proposición 3.12 se concluye que cada $x \in c$ se escribe de manera única como

$$x = \left(\lim_{j\to\infty} x_j \right) e_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \lim_{i\to\infty} x_i) e_k. \tag{3.7}$$

Definamos $a = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$, $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_k - a)e_k$ y observemos que como $z(j) = x_j - a$, entonces $y(j) \to 0$ cuando $j \to \infty$. De donde concluimos que $z \in c_0$.

Del Teorema 3.10, sabemos que toda $f \in c_0^*$ se escribe de manera única como $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j y_j$, con $y \in \ell_1$. Así, dada $f \in c^*$ y dada $x \in c$, tenemos que $x = ae_0 + z$ con $z \in c_0$ de manera única (como en (3.7)) y se sigue que

$$f(x) = af(e_0) + \sum_{j=1}^{\infty} y_j z_j, \text{ con } (y_1, y_2, ...) \in \ell_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= af(e_0) + \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - a) y_j \\ &= a\left(f(e_0) - \sum_{j=1}^{\infty} y_j \right) + \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j. \end{aligned}$$

Por lo que toda $f \in c^*$ se escribe de manera única como

$$f(x) = \lambda \lim_{j\to\infty} x_j + \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j, \tag{3.8}$$

donde $\lambda = f(e_0) - \sum_{j=1}^{\infty} y_j$. Inversamente, si $y \in \ell_1$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el funcional

$$f(x) = \lambda \lim_{j\to\infty} x_j + \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

define un elemento en c^*. Afirmamos que

$$\|f\|_{c^*} = \|y\|_1 + |\lambda|. \tag{3.9}$$

Es claro que

$$\|f\|_{c^*} \leq \|y\|_1 + |\lambda|. \tag{3.10}$$

Tomando $x = (x_k)$ en (3.8) con $N \in \mathbb{N}$ fijo y

$$x_k = \begin{cases} \text{sign } y_k, & \text{si } 1 \leq k \leq N \\ \text{sign } \lambda, & \text{si } k > N, \end{cases} \tag{3.11}$$

obtenemos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} |y_j| + \text{sign } \lambda \sum_{j=N+1}^{\infty} y_j + |\lambda| \leq \|f\|_{c^*}.$$

Tomando el límite $N \to \infty$ concluimos que

$$|\lambda| + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j| \leq \|f\|_{c^*}, \tag{3.12}$$

lo cual, junto con (3.10), nos da (3.9). □

Recordemos que un espacio métrico X es **separable** si existe un subconjunto $D \subseteq X$ numerable y denso. Los siguientes teoremas nos dicen cuáles de los espacios vistos son separables.

Teorema 3.13 *Los espacios c, c_0 y ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$ son separables*

Demostración: Sea

$$D = \{x = (x_j) : x_j \in \mathbb{Q}\ \forall j,\ \text{y } x_j = 0 \text{ para j} \\ \text{suficientemente grande}\}.$$

Es claro que D es numerable. Demostraremos, primero, que D es denso en ℓ_p con $1 \leq p < \infty$.

Tomemos $x = (x_j) \in \ell_p$ y sea $\varepsilon > 0$. Como

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

existe $m > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=m+1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.13}$$

Además, dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, para cada $j \in [1, m]$ existe $y_j \in \mathbb{Q}$ con

$$|x_j - y_j| < \frac{\varepsilon}{2m^{1/p}}. \tag{3.14}$$

Tomando $y = (y_1, y_2, ..., y_m, 0, 0, ...) \in D$, de las desigualdades (3.13) y (3.14) se concluye que

$$\|x-y\|_p = \left(\sum_{j\leq m} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j>m} |x_j|^p\right)^{1/p} < \varepsilon, \tag{3.15}$$

lo cual prueba que D es denso en ℓ_p, $1 \leq p < \infty$.

Si $x \in c_0$, como $x_j \to 0$, de igual manera encontramos $m > 0$ tal que

$$\sup_{j>m} |x_j| < \varepsilon, \tag{3.16}$$

y $y = (y_1, y_2, ..., y_m, 0, 0, ...) \in D$ tal que

$$\sup_{j\leq m} |x_j - y_j| < \varepsilon. \tag{3.17}$$

De donde se concluye que

$$\|x-y\|_{c_0} \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{j>m} |x_j| + \sup_{j\leq m} |x_j - y_j|\right) < \varepsilon, \tag{3.18}$$

es decir, D es denso en c_0.

Finalmente, probaremos que $D + \lambda(1, 1, ...)$ con $\lambda \in \mathbb{Q}$ es denso en c.

Supongamos que $x \in c$ y que $x_j \to \mu$ en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\lambda \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|\lambda - \mu| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{3.19}$$

Además, dado que $x_j \to \mu$, existe $m > 0$ tal que

$$\sup_{j>m} |x_j - \mu| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{3.20}$$

Por último, encontramos $y_j \in \mathbb{Q}$ para $1 \leq j \leq m$ tales que

$$\sup_{j\leq m} |x_j - (y_j + \lambda)| < \frac{2\varepsilon}{3}. \qquad (3.21)$$

Tomando $y = (y_1 + \lambda, ..., y_m + \lambda, \lambda, ...) \in D + \lambda(1, 1, ...)$, de las desigualdades (3.19), (3.20) y (3.21) concluimos que

$$\|x - y\|_c \leq \frac{1}{2}\left(\sup_{j\leq m} |x_j - (y_j + \lambda)| + \sup_{j>m} |x_j - \lambda|\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\sup_{j\leq m} |x_j - (y_j + \lambda)| + \sup_{j>m} |x_j - \mu| + \sup_{j>m} |\lambda - \mu|\right)$$

$$< \varepsilon.$$

Lo cual finaliza la prueba. $\square$

Teorema 3.14 *El espacio ℓ_∞ no es separable.*

Demostración: Supongamos que $A \subseteq \ell_\infty$ es numerable. Probaremos que A no puede ser denso en ℓ_∞. Escribamos $A = (a^k)$ donde cada $a^k \in \ell_\infty$, es decir $a^k = (a_1^k, a_2^k, ...)$. Para cada entero k, definamos

$$b_k = \begin{cases} a_k^k + 1, & \text{si } |a_k^k| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |a_k^k| > 1. \end{cases} \qquad (3.22)$$

Notamos que $|b_k| \leq 2$, por lo que $b = (b_k) \in \ell_\infty$ y $|b_k - a_k^k| \geq 1 \; \forall k$. Entonces,

$$\|b - a^k\|_\infty \geq |b_k - a_k^k| \geq 1, \forall k,$$

de donde $b \notin \overline{A}$. $\square$

3.1. Matrices de operadores en c_0, ℓ_1 y ℓ_∞

A continuación hablaremos de matrices infinitas y algunas de sus propiedades. Esto nos será útil más adelante al calcular el espectro del operador de Cesàro. Los resultados fueron tomados de [18].

Toda matriz infinita $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ define un operador T que transforma la sucesión $x = (x_j)_{j\geq 1}$ en la sucesión $y = (y_i)_{i\geq 1}$ por medio de la fórmula $y_i = \sum_j a_{ij}x_j$ para toda $i \geq 1$, siempre que todas las series converjan.

Teorema 3.15 *La matriz $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ define un operador lineal y acotado $T \in B(c_0)$ si y sólo si*
1. los renglones de A pertenecen todos a ℓ_1 y sus normas en ℓ_1 están acotadas,
2. las columnas de A pertenecen todas a c_0.
La norma de operador de T es el supremo de las normas en ℓ_1 de los renglones.

Demostración: Supongamos que la matriz A sí define un operador $T \in B(c_0)$. Para cada $j \geq 1$, sea e_j la sucesión

$$(e_j)_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.23}$$

que claramente pertenece a c_0. Entonces, Ae_j debe pertenecer a c_0 para toda $j \geq 1$, pero

$$Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

que es la j-ésima columna de A. Es decir, hemos probado la propiedad 2.

Ahora, tomemos $x = (x_j)_{j\geq 1} \in c_0$ y denotemos por $\varphi_i(x)$ al i-ésimo término de Ax, es decir, $\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j$, veremos que $\varphi_i \in c_0^*$. Claramente φ_i es lineal pues el producto de matrices es distributivo. Ahora, observemos que para cada $n = 1, 2, ...,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ es un operador lineal acotado en c_0 y $\varphi_i(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, entonces, por el Teorema de Banach-Steinhaus (2.13) concluimos que $\varphi_i \in c_o^*$. Del Teorema 3.10 se concluye que los renglones de A pertenecen a ℓ_1 y $\|\varphi_i\| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. Además, como $Ax \in c_0$ para todo $x \in c_0$, aplicando nuevamente el Teorema de Banach-Steinhaus concluimos que $\sup_i \|\varphi_i\| < \infty$, es decir, $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty$, lo que finaliza la prueba de 1.

Ahora supongamos que se cumplen las propiedades 1 y 2 y tomemos $x = (x_j)_{j\geq 1} \in c_o$. Sea $\varepsilon > 0$, como

$x \in c_0$, existe $M > 0$ tal que

$$\sup_j |x_j| \leq M. \tag{3.24}$$

Como los renglones de A pertenecen a ℓ_1, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} |a_{ij}| < \varepsilon/2M. \tag{3.25}$$

Finalmente, como las columnas de A están en c_0 podemos encontrar $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n_0} |a_{ij}||x_j| < \varepsilon/2, \tag{3.26}$$

si $i \geq i_0$. De esta manera, de las desigualdades (3.24), (3.25) y (3.26) concluimos que existe i_0 tal que

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n_0} |a_{ij}||x_j| + \sum_{j=n_0}^{\infty} |a_{ij}| \sup_j |x_j| < \varepsilon,$$

si $i \geq i_0$. Es decir, T sí es un operador lineal de c_0 en c_0, falta ver que es acotado.

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_{c_o} = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_i \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j\right| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \left(|x_j| \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|\right) \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|,\end{aligned}$$

es decir, $T \in B(c_0)$ y $\|T\| \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

Por otro lado, para toda $x \in c_o$ con $\|x\| \leq 1$ tenemos

$$|\varphi_i(x)| \leq \sup_i |\varphi_i(x)| \leq \|T\|,$$

entonces, para toda i

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \|\varphi_i\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi_i(x)| \leq \|T\|.$$

De donde obtenemos $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \|T\|$, lo que concluye la prueba. $\square$

Teorema 3.16 *La matriz $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ define un operador lineal y acotado $T \in B(\ell_1)$ si y sólo si todas las columnas de A pertenecen a ℓ_1 y sus normas en ℓ_1 están acotadas.*
La norma de operador de T es el supremo de las normas en ℓ_1 de las columnas.

Demostración: Supongamos que la matriz A define un operador $T \in B(\ell_1)$ y consideremos la sucesión (3.23) de la demostración del Teorema anterior. Dicha sucesión pertenece a ℓ_1 para cada j y $\|e_j\|_{\ell_1} = 1$ para cada j. De esta manera, Ae_j (la j-ésima columna de A) pertenece a ℓ_1 para toda j. Además, $\|Te_j\| \leq \|T\|\|e_j\|$, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \|T\|$ para toda j. De donde se concluye que

$$\sup_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \leq \|T\|. \tag{3.27}$$

Ahora supongamos que las columnas de A pertenecen a ℓ_1 y sus normas en ℓ_1 están acotadas y tomemos $x \in \ell_1$. Hay que demostrar que $Ax \in \ell_1$, es decir que $\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right| < \infty$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\infty > \|x\| \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| &\geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \right) \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \\
&\geq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right|,
\end{aligned}$$

para toda n. De donde

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right| \leq \left(\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \|x\| < \infty, \tag{3.28}$$

es decir, T es un operador lineal de ℓ_1 en ℓ_1. Además, de la desigualdad (3.28) obtenemos

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \right| \leq \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|. \tag{3.29}$$

Finalmente, de (3.27) y (3.29) concluimos que $\|T\| = \sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|$. $\square$

Teorema 3.17 *La matriz $A = (a_{ij})_{i,j\geq 1}$ define un operador $T \in B(\ell_\infty)$ si y sólo si todos los renglones de A pertenecen a ℓ_1 y sus normas en ℓ_1 están acotadas.*
La norma de operador de T es el supremo de las normas en ℓ_1 de los renglones.

Demostración: Supongamos que la matriz A define un operador $T \in B(\ell_\infty)$. Para cada i fija consideremos la sucesión $x_0 = (\text{sign } a_{ij})_{j\geq 1} \in \ell_\infty$. Siguiendo la notación de la demostración del Teorema 3.15 tenemos que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}\overline{\text{sign } a_{ij}} = \varphi_i(x_0) < \infty$, es decir, los renglones de A están el ℓ_1. Además, como $Tx_0 \in \ell_\infty$, se tiene que $\|Tx_0\|_{\ell_\infty} \leq \|T\|$, de donde

$$\sup_i \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) \leq \|T\|. \tag{3.30}$$

Ahora supongamos que los renglones de A están en ℓ_1 y sus normas están acotadas. Tomemos $x \in \ell_\infty$, hay que ver que $Tx \in \ell_\infty$. Observemos que $|\varphi_i(x)| \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||x_j| \leq \|x\| \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \right) < \infty$, para toda i. Entonces

$$\sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right| \leq \|x\| \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty, \tag{3.31}$$

por lo que $Tx \in \ell_\infty$.

Finalmente, de (3.31) obtenemos que

$$\|T\| \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|,$$

que con (3.30) finaliza la demostración. $\square$.

3.2. El espacio ℓ_2.

Al sustituir $p = 2$ en la Definición 3.1 obtenemos que **el espacio** ℓ_2 es el conjunto de todas las sucesiones escalares (x_j) tales que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$ con la *norma-2* dada por

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{1/2}. \tag{3.32}$$

Es fácil ver que la norma (3.32) está inducida por el producto interior

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}, \tag{3.33}$$

para $x, y \in \ell_2$. Es decir, el espacio ℓ_2 es un espacio de Hilbert dotado del producto interior en (3.33).

El siguiente teorema caracteriza al espacio dual de ℓ_2.

Teorema 3.18 *Dado un funcional $f \in \ell_2^*$, existe un único $y \in \ell_2$ tal que*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \textit{para toda } x \in \ell_2.$$

Más aún $\|f\| = \|y\|$. *Podemos decir que* $\ell_2^* = \ell_2$.

Demostración: Es una consecuencia inmediata del Teorema de representación de Fréchet-Riesz (Teorema 2.30). $\square$

Capítulo 4

El operador de Cesàro y su espectro

Consideremos el operador que transforma una sucesión (x_n) en su sucesión de promedios

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right).$$

Denotaremos este operador como C y lo llamaremos el **Operador de Cesàro**. De esta manera,

$$C(x_1, x_2, ...) = (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots). \quad (4.1)$$

Como se vio en el capítulo anterior, podemos representar al Operador de Cesàro por medio de una matriz infinita

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Al resolver las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que deben cumplirse para cualquier sucesión (x_n), encontramos que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Es importante aclarar que, como consecuencia del teorema 2.83, el operador de Cesàro no es compacto en ninguno de los espacios c_0 y ℓ_p para $1 < p < \infty$, por lo que seguiremos técnicas distintas a las incluidas en la sección 2.9.

4.1. El operador de Cesàro en c_0.

Para calcular el espectro de C en c_0, seguiremos la idea expuesta por J. B. Reade en [15], de demostrar que los valores propios de C^* son los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ y que $(C - \lambda I)^{-1}$ es acotado para $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$.

Con la caracterización (4.2) del operador de Cesàro, resulta fácil demostrar que $C \in B(c_0)$, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *$C \in B(c_0)$ y $\|C\| = 1$.*

Demostración: Dado que los renglones de la matriz C claramente pertenecen a ℓ_1 y las columnas a c_0, el Teorema 3.15 muestra que $C \in B(C_0)$ y que $\|C\| = 1$. $\square$

El siguiente teorema nos dice qué matriz define al adjunto C^* de C.

Proposición 4.2 *El operador adjunto de C, $C^* : c_0^* \to c_0^*$ está definido por la siguiente matriz:*

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Demostración: Denotemos por A al operador que define la matriz $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$.

Sabemos, por el Teorema 3.10, que todo funcional $f \in c_0^*$ se puede representar por una sucesión $y = (y_j) \in$

ℓ_1. Así,

$$Af = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \cdots \\ \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \cdots \\ \frac{y_3}{3} + \cdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Por lo que, dado $x \in c_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} (Af)x = & x_1 \left(y_1 + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \cdots \right) \\ & + x_2 \left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \cdots \right) \\ & + x_3 \left(\frac{y_3}{3} + \cdots \right) \\ & \vdots \end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, también del Teorema 3.10, sabemos que

$$f(Cx) = x_1 y_1 + \frac{x_1 + x_2}{2} y_2 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} y_3 + \cdots . \tag{4.5}$$

Tras un reacomodo de términos, encontramos que las series definidas en (4.4) y (4.5) son iguales para cualquier $x \in c_0$. De la unicidad del operador adjunto concluimos que $A = C^*$. $\square$

Teorema 4.3 $C^* \in B(\ell_1)$ *y* $\|C^*\| = 1$.

Es claro que las columnas de C^* pertenecen a ℓ_1 y que el supremo de las normas es 1. Del Teorema 3.16 concluimos que $C^* \in B(\ell_1)$ y $\|C^*\| = 1$. $\square$

Proposición 4.4 $C^{**} = C$.

Demostración: Del Teorema 3.8, sabemos que toda $f \in (\ell_1)^*$ se puede representar por una sucesión $y = (y_j) \in \ell_\infty$. Así, dada $f \in (\ell_1)^*$ y $x \in \ell_1$ tenemos:

$$\begin{aligned}(Cf)x &= (Cy)x \\ &= x_1 y_1 + x_2\left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2}\right) + x_3\left(\frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{y_3}{3}\right)\cdots\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por otro lado, de la ecuación (4.3) y del Teorema 3.8, tenemos

$$\begin{aligned}f(C^*x) =& y_1\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \cdots\right) \\ &+ y_2\left(\frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \cdots\right) \\ &+ y_3\left(\frac{x_3}{3} + \cdots\right) \\ &\vdots\end{aligned} \tag{4.7}$$

Reacomodando términos, obtenemos la igualdad de (4.6) y (4.7). Es decir $C^{**} = C$, pero ahora visto como un operador en el dual de ℓ_1, el cual es isométricamente isomorfo a ℓ_∞. □

Teorema 4.5 *$C^{**} \in B(\ell_\infty)$ y $\|C^{**}\| = 1$.*

Demostración: Se sigue fácilmente del Teorema 3.17. □

A continuación, probaremos que el espectro de C actuando en c_0 consiste de los $\lambda \in \mathbb{C}$ que cumplen $|\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$. El primer paso para lograrlo, será probar que C no tiene valores propios.

Teorema 4.6 *$C \in B(c_0)$ no tiene valores propios.*

Demostración: Supongamos que $Cx = \lambda x$ con $x \neq 0$ en c_0. Entonces:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots x_n) &= \lambda x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

y encontramos que si x_N es el primer término distinto de cero de x, entonces $\lambda = 1/N$. Además,

$$\begin{aligned} &\lambda x_{n+1} - \lambda x_n \\ &\qquad = \frac{1}{n+1}(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1}) - \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \\ &\qquad = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)(x_1 + \cdots + x_n) + \frac{x_{n+1}}{n+1} \\ &\qquad = \frac{-1}{n(n+1)}(x_1 + \cdots + x_n) + \frac{x_{n+1}}{n+1} \\ &\qquad = \frac{-\lambda x_n}{n+1} + \frac{x_{n+1}}{n+1}. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$(\lambda(n+1) - 1)x_{n+1} = \lambda n x_n,$$

es decir,

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{\lambda n}{\lambda(n+1)-1}\right| = \left|\frac{n}{n+1-N}\right| \geq 1 \qquad (4.8)$$

para toda $n \geq N$, así que x_n no puede tender a cero, lo cual es una contradicción. Por tanto C no tiene valores propios. □

Sin embargo, $C^{**} \in B(\ell_\infty)$ tiene al valor propio $\lambda = 1$ con espacio propio formado por todas las sucesiones constantes.

El siguiente paso será encontrar los valores propios de $C^* \in B(\ell_1)$. Para lograrlo, recordaremos las notaciones o y O y probaremos dos lemas, dicha información se encuentra en [11].

Definición 4.7 *Diremos que $f(x) = O(\varphi(x))$, donde $\varphi(x)$ es una función real que solo toma valores positivos y $f(x)$, $\varphi(x)$ están definidas para los mismos valores de x, si para estos valores de x, existe un entero positivo K, que no depende de x, tal que*

$$|f(x)| \leq K\varphi(x).$$

Definición 4.8 *Sea $a \in \mathbb{R}$. Si, cuando $x \to a$,*

$$f(x)/\varphi(x) \to 0,$$

entonces escribiremos $f(x) = o(\varphi(x))$ cuando $x \to a$.

Lema 4.9 *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones reales. Supongamos que $a_n > 0$, $b_n > 0$ para toda n, que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge y que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) = \kappa, \quad \textit{con} \quad \kappa \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge o diverge, de acuerdo a si $\kappa > 0$ o $\kappa < 0$.

Demostración: Supongamos primero que $\kappa > 0$. Tomando $\varepsilon = \kappa/2$, encontramos N tal que, cuando $n \geq N$

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} > \frac{1}{2}\kappa;$$

esto es,

$$a_{n+1} < \frac{2}{\kappa}\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right).$$

Se sigue que

$$\sum_{i=N+1}^{n+1} a_i = \sum_{i=N}^{n} a_{i+1} < \frac{2}{\kappa}\left(\frac{a_N}{b_N} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) < \frac{2}{\kappa}\frac{a_N}{b_N}.$$

De donde la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ahora supongamos que $\kappa < 0$. Tomando $\varepsilon = -\kappa$, encontramos N tal que, para $n \geq N$

$$\frac{1}{b_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{1}{b_{n+1}} < 0;$$

esto es,

$$a_{n+1} > \frac{a_n}{b_n} b_{n+1}.$$

En particular,

$$\begin{aligned} a_{N+1} &> \frac{a_N}{b_N} b_{N+1}, \\ a_{N+2} &> \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}} b_{N+2} > \frac{a_N}{b_N} b_{N+2}, \\ &\vdots \\ a_{N+M} &> \frac{a_N}{b_N} b_{N+M}. \end{aligned}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. $\square$

Lema 4.10 (Prueba de Raabe) *Sea (a_n) una sucesión real. Supongamos que $a_n > 0$ para toda n y que, cuando $n \to \infty$,*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\sigma}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \textit{donde } \sigma \in \mathbb{R}.$$

Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente o divergente, de acuerdo a si $\sigma > 1$ o $\sigma < 1$.

Demostración: De la hipótesis,

$$\lim_{n\to\infty} \left(n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \right) = \sigma - 1,$$

así que el resultado se sigue del Lema 4.9 escribiendo $\kappa = \sigma - 1$ y $b_n = n^{-1}$. $\square$

Ahora sí estamos listos para encontrar los valores propios de C^*.

Teorema 4.11 *Los valores propios de $C^* \in B(\ell_1)$ son todos los λ que cumplen $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$.*

Demostración: Supongamos que $C^* x = \lambda x$ con $x \neq 0$ en ℓ_1. Entonces, resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \cdots &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1 - \lambda x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 &= \lambda x_2 - \lambda x_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir, $x_2 = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) x_1$, $x_3 = \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) x_2, \cdots$. De donde

$$x_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right) x_1. \tag{4.10}$$

Escribiendo $1/\lambda = \alpha + i\beta$ y usando el Binomio de Newton generalizado, encontramos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|x_n|}{|x_{n+1}|} &= \frac{1}{\left|1-\frac{1}{n\lambda}\right|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}}} = \left(1-\frac{2\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1/2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(-\frac{2\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^k \\
&= 1+(-1/2)\left(-\frac{2\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

cuando $n \to \infty$. Concluimos, por la Prueba de Raabe, que $x \in \ell_1$ si y sólo si $\mathrm{Re}\dfrac{1}{\lambda} > 1$, es decir, $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. □

Corolario 4.12 *$C \in B(c_0)$ tiene imagen densa.*

Demostración: El Teorema 4.11 prueba que $N(C^*) = \{0\}$. Probaremos que $N(C^*) = \{0\}$ implica que C tiene imagen densa. Si C no tuviera imagen densa, el Corolario 2.12 prueba que existe $\varphi \in c_0^*$ tal que $\varphi \neq 0$ y $\varphi(Cx) = 0$ para toda $x \in c_0$. De donde $C^*\varphi = 0$. □

A continuación, probaremos un Lema que será útil al calcular el espectro de C.

Lema 4.13 *Si $\alpha = Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 1$, $\prod_{j=1}^{n}\left|1-\frac{1}{j\lambda}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$ cuando $n \to \infty$. Usamos la notación $a_n \sim b_n$ en el sentido de que (a_n/b_n) y (b_n/a_n) ambas están acotadas.*

Demostración: Si $1/\lambda = \alpha + i\beta$ entonces, usando la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para x real y que $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = \ln n + \gamma + o(1)$ (donde γ es la constante de Euler), tenemos

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n} \left| 1 - \frac{1}{j\lambda} \right| &= \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \prod_{j=1}^{n} \left[\exp\left(-\frac{2\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \exp \sum_{j=1}^{n} \left(-\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\
&= \exp(-\alpha(\ln n + \gamma + O(1)) + O(1)) \\
&= \exp(-\alpha \ln n + O(1)) \\
&= \frac{O(1)}{n^{\alpha}}. \square
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n}\left|1-\frac{1}{j\lambda}\right|^{-1} &= \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &= \prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\leq \exp\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \exp(\alpha(\ln n+\gamma+O(1))+O(1))\\ &= \exp(\alpha\ln n+O(1))\\ &= O(1)n^{\alpha}.\end{aligned}$$

□

El siguiente, es el Teorema central de esta sección. Caracteriza al espectro del Operador de Cesàro.

Teorema 4.14 $\sigma(C)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}\}$.

Demostración: Los Teoremas 4.11 y 2.50 prueban que $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}\}\subseteq\sigma(C)$. Resta probar que $\sigma(C)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-\frac{1}{2}|\leq\frac{1}{2}\}$, es decir que $(C-\lambda I)^{-1}\in B(c_o)$ para $|\lambda-\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$.

Resolviendo $(C-\lambda I)x=y$ para x en términos de y obtenemos la matriz $(C-\lambda I)^{-1}$. Se tiene que

$$\left(x_1(1-\lambda),\frac{x_1}{2}+x_2\left(\frac{1}{2}-\lambda\right),\cdots\right)=(y_1,y_2,y_3,\cdots).$$

Por lo que el primer renglón de la matriz tiene a $\frac{1}{1-\lambda}$ en la primer entrada y cero en las demás.

Como

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{y_2 - \frac{x_1}{2}}{\frac{1}{2} - \lambda} &= \frac{y_2}{\frac{1}{2} - \lambda} - \frac{x_1}{1 - 2\lambda} \\ &= \frac{2}{1 - 2\lambda} y_2 - \frac{1}{(1 - \lambda)(1 - 2\lambda)} y_1 \\ &= -\frac{1}{2\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)} y_1 + \frac{2}{1 - 2\lambda} y_2, \end{aligned}$$

la primer entrada del segundo renglón es $-\frac{1}{2\lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{1}{2\lambda}\right)}$ y la segunda es $\frac{2}{1-2\lambda}$. Continuando este proceso, encontramos que el *n-ésimo* renglón es

$$-\frac{1}{n\lambda^2 \prod\limits_{j=m}^{n} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} \tag{4.11}$$

en el *m-ésimo* lugar para $m < n$,

$$\frac{n}{1 - n\lambda} \tag{4.12}$$

en el *n-ésimo* lugar, y cero en otro caso.

Por el Teorema 3.15, resta probar que la expresión

$$\frac{1 + \left|1 - \frac{1}{\lambda}\right| + \cdots \prod\limits_{j=1}^{n-1} \left|1 - \frac{1}{j\lambda}\right|}{n\lambda^2 \prod\limits_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} + \frac{n}{1 - n\lambda} \tag{4.13}$$

está acotada para toda n, y que para cada m, la expresión

$$-\frac{1}{n\lambda^2 \prod\limits_{j=m}^{n}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)} \tag{4.14}$$

tiende a cero cuando $n \to \infty$, ambas bajo la hipótesis de que $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$, es decir, $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) < 1$.

Para ver que la expresión en (4.13) está acotada para toda n basta observar que $\frac{n}{1-n\lambda} \to \frac{-1}{\lambda}$ cuando $n \to \infty$ y que

$$\left|1-\frac{1}{\lambda}\right| \leq \left|1-\frac{1}{\lambda}\right|\left|1-\frac{1}{2\lambda}\right| \leq \cdots \leq \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right).$$

Entonces, del Lema 4.13 tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\frac{1+\left|1-\frac{1}{\lambda}\right|+\cdots\prod\limits_{j=1}^{n-1}\left|1-\frac{1}{j\lambda}\right|}{n\lambda^2\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)}+\frac{n}{1-n\lambda}\\
&\leq \frac{1+(n-1)\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)}{n\lambda^2\prod\limits_{j=1}^{n}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)}\\
&\leq \frac{K}{n^{1-\alpha}}+\frac{n-1}{n}\frac{1}{\lambda^2}=O(1)
\end{aligned}$$

para alguna constante K, pues $\alpha < 1$.

Finalmente, de nuevo por el Lema 4.13,

$$\left| - \frac{1}{n\lambda^2 \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{j\lambda}\right)} \right| = \frac{\prod_{j=1}^{m-1} \left|1 - \frac{1}{j\lambda}\right|}{n\lambda^2 \prod_{j=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{j\lambda}\right|} \leq K_m \frac{K}{n^{1-\alpha}} \to 0$$

cuando $n \to \infty$ para algunas constantes positivas K_m y K, lo cual finaliza la prueba. $\square$

Nuestro siguiente propósito es calcular el espectro del operador C pero ahora definido en el espacio de Hilbert ℓ_2.

4.2. El operador de Cesàro en ℓ_2.

En esta sección calcularemos el espectro de C pero ahora definido en el espacio de Hilbert ℓ_2. Toda la información está basada en [3].

El primer paso será probar que el operador de Cesàro es acotado en ℓ_2 para lo cual haremos uso de la prueba de Schur que probaremos a continuación y que se encuentra en [7].

Teorema 4.15 (Prueba de Schur) *Sean i, j enteros no negativos. Si $k_{ij} \geq 0$, $p_i > 0$, $q_j > 0$ y α y β son constantes tales que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_{ij} p_i \leq \alpha q_j \quad (j = 0, 1, 2, ...)$$

y

$$\sum_{j=0}^{\infty} k_{ij} q_j \leq \beta p_i \quad (i = 0, 1, 2, ...),$$

entonces la ecuación

$$(Ax)(i) = \sum_{j=0}^{\infty} k_{ij} x_j$$

define un operador lineal acotado en ℓ_2*, y* $\|A\|^2 \leq \alpha\beta$.

Demostración: Si $(\xi_0, \xi_1, ...)$ es una sucesión de escalares tal que $\xi_n = 0$ para n suficientemente grande, entonces de la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{\infty} k_{ij}\xi_j \right|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{k_{ij}}\sqrt{q_j}\right) \left(\frac{\sqrt{k_{ij}}}{\sqrt{q_j}}\xi_j\right) \right|^2 \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} k_{ij}q_j\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_{ij}}{q_j}|\xi_j|^2\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \beta p_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{k_{ij}}{q_j}|\xi_j|^2\right) \\
&= \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\xi_j|^2}{q_j} \left(\sum_{i=0}^{\infty} k_{ij}p_i\right) \\
&\leq \beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\xi_j|^2}{q_j}\alpha q_j = \alpha\beta\|\xi\|^2.
\end{aligned}
$$

Dado que las sucesiones tales como ξ son densas en ℓ_2, la prueba está completa. □

Teorema 4.16 *El operador de Cesàro es acotado en ℓ_2, es decir, $C \in B(\ell_2)$.*

Demostración: Sea k_{ij} la sucesión definida por

$$
k_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i < j, \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } 0 \leq j \leq i. \end{cases}
$$

Si $p_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} k_{ij} p_j &= \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{i+1} \frac{1}{\sqrt{j+1}} \\ &< \frac{1}{i+1} \int_0^i \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{i+1} 2\sqrt{i} \\ &< \frac{1}{i+1} 2\sqrt{i+1} = 2p_i.\end{aligned}$$

Si $j \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} k_{ij} p_i &= \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{1+i} \frac{1}{\sqrt{i+1}} \\ &< \int_{j-1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{j}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{j+1}} \frac{\sqrt{j+1}}{\sqrt{j}} \leq 2\sqrt{2} p_j.\end{aligned}$$

Como también

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_{i0} p_i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} k_{i0} p_i < 1 + 2 = 3p_0,$$

se sigue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} k_{ij} p_i < 3p_j$$

para toda j, y la prueba de Schur implica que C es acotado. (Hay que notar que con esta elección de k y de p, $A = C$. Además, en este caso $p = q$.) $\square$

Como vimos al inicio del capítulo, C y C^* pueden ser representados por las siguientes matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Se sigue que

$$CC^* = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Resulta ser, entonces, que el producto CC^* es casi el mismo que la suma $C + C^*$; la diferencia $C + C^* - CC^*$ es el operador diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

La siguiente demostración está basada en el problema 61 de [7].

Teorema 4.17 $\|I - C\| = 1$.

Demostración: Sabemos que $C + C^* - CC^* = D$, de donde se concluye que $(I - C)(I - C^*) = I - D$. Del Teorema 2.33 tenemos que $\|I - C\|^2 = \|I - D\|$. Es suficiente probar que $\|I - D\| = 1$.

Observemos, primero, que

$$I - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

y sea $\alpha_j = \frac{j-i}{j}$ para $j = 1, 2, ...$ Entonces, para la sucesión $(e_j)_i$ definida en (3.23), tenemos que $(I - D)e_j = \alpha_j e_j$. De donde

$$|\alpha_j| = \|\alpha_j e_j\|_2 = \|(I - D)e_j\|_2 \leq \|I - D\|$$

para cada j, por lo cual

$$1 = \sup_j |\alpha_j| \leq \|I - D\|. \tag{4.15}$$

Finalmente, dado $x \in \ell_2$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|(I-D)x\|^2 &= \left\|(I-D)\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j e_j\right\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j x_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j\right\|^2 \qquad (4.16) \\
&= \|x\|^2. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

De (4.15) y (4.16) obtenemos que $\|I-D\| = 1$. □

Para nuestro siguiente propósito necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.18 *Si A es un operador definido en un espacio de Hilbert H tal que $\|A\| \leq 1$ y si $\|Ax\| = \|x\|$ para algún $x \in H$ con $x \neq 0$, entonces $\|A^*y\| = \|y\|$ para algún $y \in H$ con $y \neq 0$.*

Demostración: Escribamos $y = Ax$, por lo que $\|x\| = \|y\|$. Además,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 = \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle &= \langle A^*Ax, x\rangle \\
&\leq \|A^*Ax\|\|x\| = \|A^*y\|\|x\| \leq \|x\|^2
\end{aligned}$$

De donde $\|A^*Ax\| = \|x\|$, así que $\|A^*y\| = \|y\|$. □

Teorema 4.19 *Si $x \in \ell_2$, $\|x\| = 1$, entonces $\|(I-C)x\| < 1$ y $\|(I-C^*)x\| < 1$.*

Demostración: De la ecuación (4.16) observamos que $\|(I-D)x\| < \|x\|$ a menos que $x = 0$, por lo que

$$\begin{aligned}\|(I-C^*)x\|^2 &= \langle (I-C)(I-C^*)x, x\rangle \\ &\leq \|(I-C)(I-C^*)x\|\|x\| < \|x\|^2\end{aligned}$$

a menos que $x = 0$. Del Teorema 4.18 se concluye que tanto $\|(I-C)x\|$ como $\|(I-C^*)x\|$ son estrictamente menores a $\|x\|$, excepto cuando $x = 0$. □

Al igual que para $C \in B(c_0)$, el operador C definido en ℓ_2 no tiene valores propios.

Teorema 4.20 *$C \in B(\ell_2)$ no tiene valores propios.*

Demostración: Dado que $\ell_2 \subseteq c_0$, del Teorema 4.6 se sigue el resultado. □

El Teorema 4.11 prueba que los valores propios de $C^* \in B(\ell_1)$ son todos los λ que cumplen $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$. Sin embargo no es así para $C^* \in B(\ell_2)$ como lo muestra el siguiente Teorema.

Teorema 4.21 *Los valores propios de $C^* \in B(\ell_2)$ son todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $|\lambda - 1| < 1$.*

Demostración: Supongamos que $C^*x = \lambda x$ para algún λ y que $\frac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$. De la ecuación (4.10) y del Teorema del Binomio de Newton tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{|x_n|^2}{|x_{n+1}|^2} &= \frac{1}{|1-\frac{1}{n\lambda}|^2} = \frac{1}{1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}} \\
&= \left(1-\frac{2\alpha}{n}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} \left(-\frac{2\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^k \\
&= 1+\frac{2\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Como $|\lambda-1|<1$ es equivalente a $2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right)>1$, de la Prueba de Raabe (Teorema 4.10) concluimos que si $|\lambda-1|<1$ entonces $x\in\ell_2$, y que si $|\lambda-1|>1$ entonces $x\notin\ell_2$.

Para terminar con la demostración resta ver que si $|\lambda-1|=1$, entonces λ no es un valor propio de C^*, o, equivalentemente, $1-\lambda$ no es un valor propio de $I-C$. En efecto, si $\|x\|=1$ y $(I-C^*)x=(1-\lambda)x$, entonces $\|(I-C^*)x\|=|1-\lambda|$; del Teorema 4.19 concluimos que $|1-\lambda|$ no puede ser 1. $\square$

El próximo Teorema muestra claramente la dependencia del espectro de un operador y el espacio donde está definido.

Teorema 4.22 *El espectro de $C\in B(\ell_2)$ es el disco cerrado* $\{\lambda : |\lambda-1|\leq 1\}$.

Demostración: El Teorema 4.17 afirma que $\|I-C\|=1$, por lo que $\sigma(I-C)\subseteq\{\lambda : |\lambda|\leq 1\}$, y, por consiguiente, $\sigma(C) \subseteq \{\lambda : |1-\lambda| \leq 1\}$.

Del Teorema 4.21 concluimos que $\{\lambda : |1-\lambda \leq 1\} \subseteq \sigma(C)$. $\square$

Concluimos la sección con una propiedad interesante del Operador de Cesàro en ℓ_2.

Teorema 4.23 *El operador C es hiponormal.*

Demostración: La matriz C^*C tiene forma de L, es decir, es de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

con $\alpha_n = \sum_{j=n}^{\infty} \dfrac{1}{(j+1)^2}$. Como CC^* también tiene forma de L (con $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$), y como la diferencia dos matrices con forma de L es otra de la misma forma, el problema de probar la hiponormalidad de C se reduce al problema de decidir cuándo un matriz con forma de L es positiva. Como una matriz infinita es positiva si y solo si todas sus secciones finitas tienen determinante positivo, el problema se ha reducido a la evaluación del determinante de

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Restemos la segunda columna de la primera, después restemos la tercer columna de la segunda, y continuemos este proceso por todas las columnas. Obtenemos que el determinante de la matriz original es el mismo que el determinante de la matriz resultante, la cual es triangular.

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n & \alpha_n & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \alpha_0 - \alpha_1 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_2 - \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \alpha_2 - \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Dado que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos en su diagonal, concluimos que una matriz con forma de L es positiva si y solo si la sucesión (α_n) es positiva y decreciente. La prueba del Teorema se completa verificando que la sucesión $\left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} - \frac{1}{n+1}\right)$ satisface estas dos propiedades.

En efecto,

$$\frac{1}{n+1} = \int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2},$$

por lo que la sucesión es positiva.

Además,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^2} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{-(n+2) - (n+1)^2 + (n+1)(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\
&= \frac{-1}{(n+1)^2(n+2)} \leq 0,
\end{aligned}$$

por lo que la sucesión es decreciente. □

4.3. El operador de Cesàro en ℓ_p, $1 < p < \infty$.

En la presente sección, trataremos los resultados referentes al Operador de Cesàro definido, ahora, en el espacio ℓ_p. Dichos resultados están basados en [5]. Análogamente a las secciones 4.1 y 4.2, el primer paso es demostrar que C define un operador lineal acotado de ℓ_p en ℓ_p, para lo cual haremos uso de la desigualdad de Hardy ([10], capítulo IX).

Teorema 4.24 (Desigualdad de Hardy) *Si* $a_1, a_2, ...$ *son reales positivos no todos cero,* $p > 1$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ *, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^p < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p. \quad (4.18)$$

Demostración: Podemos suponer que $a_1 > 0$, pues si suponemos que $a_1 = 0$ y reemplazamos a_{n+1} por b_n, (4.18) se convierte en

$$\left(\frac{b_1}{2} \right) + \left(\frac{b_1 + b_2}{3} \right) + \cdots < \left(\frac{p}{p-1} \right)^p (b_1^p + b_2^p + \cdots),$$

una desigualdad más débil que (4.18).

Escribamos $\alpha_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, entonces

$$
\begin{aligned}
&\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n \\
&\quad = \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\{n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}\}\alpha_n^{p-1} \\
&\quad = \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \\
&\quad \leq \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)}{p-1}\{(p-1)\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p\} \\
&\quad = \frac{1}{p-1}\{(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\}. \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

La desigualdad en (4.19) se sigue del hecho de que la función exponencial es convexa, es decir, $e^{ax+by} \leq ae^x + be^y$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$ con $a + b = 1$, escribiendo $a = \frac{p-1}{p}, b = \frac{1}{p}, x = \ln(\alpha_n^p)$ y $y = \ln(\alpha_{n-1}^p)$.

Concluimos que $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{p-1}a_n \leq -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0$; y, por tanto, de la desigualdad de Hölder (en $\mathbb{R}^N$),

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p &\leq \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{p-1}a_n \\
&\leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p\right)^{1/q}. \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

Dividiendo por el último factor en la derecha, y elevando el resultado a la *n-ésima* potencia, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p. \tag{4.21}$$

Haciendo N tender a infinito obtenemos (4.18), excepto que tenemos $\leq$ en lugar de $<$. Notamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p$ es finita, y regresando a (4.20), y reemplazando N por ∞, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p &\leq \frac{p}{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{p-1} a_n \\ &\leq \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p\right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

La segunda desigualdad es estricta a menos que α_n^p y a_n^p sean proporcionales, es decir, a menos que $a_n = k\alpha_n$, donde k no depende de n. Si este es el caso entonces (como $a_1 = \alpha_1 > 0$) k debe ser 1, y por tanto $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = na_n$ para toda n. Esto solo es posible si todas las a son iguales, y esto es inconsistente con la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p < \frac{p}{p-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^p\right)^{1/q} \tag{4.23}$$

y (4.18) se sigue de (4.23) como (4.21) se siguió de (4.20). $\square$

4.3. EL OPERADOR DE CESÀRO EN ℓ_P, $1 < P < \infty$.

Teorema 4.25 *$C \in B(\ell_p)$ para $1 < p < \infty$.*

Demostración: Tomemos $x = (x_n) \in \ell_p$ con $1 < p < \infty$. De la desigualdad de Hardy, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|Cx\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j\right|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}|x_j|\right)^p\right)^{1/p} \\
&< \left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{k=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p} = \frac{p}{p-1}\|x\|_p.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

La desigualdad (4.24) prueba que $C : \ell_p \to \ell_p$ y que $\|C\| \leq \dfrac{p}{p-1}$.

Es importante observar que para $p = 1$, C no es un operador de ℓ_1 en ℓ_1. Pues al tomar $x = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell_1$, tenemos que $Cx = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots) \notin \ell_1$.

Al igual que en los dos casos anterior, el Operador de Cesàro definido en ℓ_p para $1 < p < \infty$ no tiene valores propios

Teorema 4.26 *$C \in B(\ell_p)$, con $1 < p < \infty$ no tiene valores propios*

Demostración: Como $\ell_p \subseteq \ell_p$ para toda p, el resultado es una consecuencia del Teorema 4.6. $\square$

Para el caso del operador de Cesàro definido en ℓ_2, encontramos que $\sigma(C) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$. Fue de gran importancia para el argumento que $\|C - I\|_2 = 1$, sin embargo la desigualdad análoga $\|C - \frac{q}{2}I\|_p \leq \frac{q}{2}$ no se cumple en general cuando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lo que sí se sigue cumpliendo es que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}\}$ pertenece al espectro puntal del operador adjunto $C^* : \ell_q \to \ell_q$. Con el propósito de demostrarlo, probaremos el siguiente resultado que se encuentra en [5], el cual es una ligera modificación del Lema 4.13.

Lema 4.27 *Sea β un número complejo tal que Re(βq) > 1 y sea q el conjugado de p. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\left|1 - \frac{\beta}{k}\right|^q\right) < \infty.$$

Demostración: Para cada k,

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{\beta}{k}\right|^q &= \exp\left(\frac{q}{2}\ln\left(1 - \frac{2}{k}\mathrm{Re}(\beta) + \frac{|\beta|^2}{k^2}\right)\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{q}{2}\left(-\frac{2}{k}\mathrm{Re}(\beta) + \frac{|\beta|^2}{k^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Multiplicando esta desigualdad para $k = 1, 2, \cdots, n$, tenemos

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left|1-\frac{\beta}{k}\right|^{q} &\leq \exp\left(-\mathrm{Re}(q\beta)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{q|\beta|^2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)\\ &< \exp\left(-\mathrm{Re}(q\beta)\ln n+\frac{q|\beta|^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\\ &= cn^{-\mathrm{Re}(q\beta)}\end{aligned}$$

donde $c = \exp\left(\dfrac{q|\beta|^2\pi^2}{12}\right)$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ es convergente para $s > 1$, la prueba está completa. $\square$

Teorema 4.28 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}\}$ *pertenece al espectro puntual de* $C^* \in \ell_q$*.*

Demostración: En la demostración del Teorema 4.11 se vio que si $C^*x = \lambda x$,

$$x_n = \prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{j\lambda}\right)x_1.$$

Como $|\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}$ si y solo si $\mathrm{Re}(\frac{1}{\lambda}) > \frac{1}{q}$, del Lema 4.27 concluimos que si $|\lambda - \frac{q}{2}| < \frac{q}{2}$ y $C^*x = \lambda x$, entonces $x \in \ell_q$. $\square$

Nuestro objetivo, ahora, es probar que

$$\sigma(C) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \left|\lambda - \frac{q}{2}\right| \leq \frac{q}{2}\right\}. \tag{4.25}$$

En vista del Teorema 4.28, solo resta verificar que $\sigma(C) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| \leq \frac{q}{2}\}$, es decir que $(C - \lambda I)^{-1}$

es acotado cuando $|\lambda - \frac{q}{2}| > \frac{q}{2}$. La idea es dominar a la matriz

$$E_\lambda := -\lambda^2[(C - \lambda I)^{-1} - D_\lambda] \tag{4.26}$$

por una matriz más manejable G_λ, donde D_λ es la parte diagonal de $(C - \lambda I)^{-1}$. Como se verifica fácilmente que D_λ es acotado en ℓ_p, que $(C - \lambda I)^{-1}$ sea acotado en ℓ_p es equivalente a que E_λ lo sea. El problema se ha reducido, por tanto, a demostrar que la matriz G_λ es acotada en ℓ_p.

El hecho de que G_λ es acotada en ℓ_p será una consecuencia del siguiente Teorema cuya demostración se encuentra en [1].

Teorema 4.29 *Sean $1 < p \leq q < \infty$, a y b sucesiones de números no negativos, p^* el conjugado de p y sea $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ la matriz dada por*

$$a_{nk} = \begin{cases} a_n b_k & si\ 1 \leq k \leq n, \\ 0 & si\ k > n. \end{cases} \tag{4.27}$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
(i) $A \in B(\ell_p, \ell_q)$;
(ii) existe K_1 tal que, para $m = 1, 2, ...,$

$$\sum_{n=1}^{m} \left(a_n \sum_{k=1}^{n} b_k^{p^*} \right)^q \leq K_1 \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^{p^*} \right)^{q/p}.$$

Empecemos dando la definición explícita de los operadores E_λ y D_λ y demostrando que D_λ es acotado.

Lema 4.30 *La matriz* D_λ *dada por* (4.26) *es acotada en* ℓ_p *para* $p > 1$.

Demostración: Para $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ definamos $|a| = (|a_n|)_{n=1}^\infty$, y sea $\sigma = \{0\} \cup \{1/r\}_{r=1}^\infty$. Recordando las fórmulas (4.11) y (4.12) para $(C - \lambda I)^{-1} : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N}$ cuando $\lambda \notin \sigma$, se tiene que

$$(C - \lambda I)^{-1} = D_\lambda - \frac{1}{\lambda^2} E_\lambda, \tag{4.28}$$

por la igualdad (4.26), donde el operador diagonal $D_\lambda = (d_{nm})_{n,m=1}^\infty$ está dado por $d_{nn} = \dfrac{1}{\frac{1}{n} - \lambda}$ y $d_{nm} = 0$ si $n \neq m$. El operador $E_\lambda = (e_{nm})_{n,m=1}^\infty$ es, por tanto, la matriz triangular inferior dada por $e_{1m} = 0$, para toda $m \in \mathbb{N}$, con

$$e_{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{n \prod\limits_{k=m}^{n} (1 - \frac{1}{k\lambda})} & \text{si } 1 \leq m < n, \\ 0 & \text{si } m \geq n, \end{cases} \tag{4.29}$$

para toda $n \geq 2$.

Fijemos $\lambda \notin \sigma$. Entonces $d(\lambda) = \operatorname{dist}(\lambda, \sigma) > 0$ y $|d_{nn}| \leq \frac{1}{d(\lambda)}$ para toda $n \geq 1$. Por tanto, si $a \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, entonces $|D_\lambda(a)| \leq \frac{1}{d(\lambda)}|a|$. Se sigue que D_λ es acotado en ℓ_p para toda $p > 1$ y $\|D_\lambda\|_p \leq \frac{1}{d(\lambda)}$. $\square$

Para $\lambda \notin \sigma$ es, por tanto, claro que $(C - \lambda I)^{-1}$ es acotado en ℓ_p si y solo si E_λ lo es por (4.28). De esta manera podemos restringir nuestra atención a E_λ.

Lema 4.31 *La matriz E_λ definida en (4.29) satisface $|E_\lambda(a)| \leq \beta(\lambda)G_\lambda(|a|)$, para alguna constante positiva $\beta(\lambda)$, donde $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $G_\lambda : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ está definido por*

$$(G_\lambda(b))_n := \frac{1}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^\alpha},\ n \geq 1, \tag{4.30}$$

con $\alpha = Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 1$.

Demostración: Para $\lambda \neq 0$, tenemos que

$$\alpha < 1 \text{ si y solo si } \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}. \tag{4.31}$$

Observamos que si λ satisface la condición (4.31), entonces necesariamente $\lambda \notin \sigma$. De acuerdo con el Lema (4.13) para cada λ que satisfaga la condición (4.31), existen constantes positivas A, B (que dependen de λ) tales que

$$\frac{A}{n^\alpha} \leq \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| \leq \frac{B}{n^\alpha}, \qquad n \geq 1. \tag{4.32}$$

Se sigue de (4.29) y (4.32) que

$$|e_{n1}| = \frac{1}{n \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right|} \leq \frac{1/A}{n^{1-\alpha}}, \qquad n \geq 2. \tag{4.33}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = 1$ obtenemos de (4.32), con un cambio de constantes, que

$$\frac{A'}{(n+1)^\alpha} \leq \prod_{k=1}^{n} \left|1 - \frac{1}{k\lambda}\right| \leq \frac{B'}{(n+1)^\alpha}, \qquad n \geq ,1 \quad (4.34)$$

Para $n \geq 3$ se sigue de (4.29), (4.32) y (4.34) que

$$|e_{nm}| = \frac{1}{n} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m-1} |1 - \frac{1}{k\lambda}|}{\prod_{k=1}^{n} |1 - \frac{1}{k\lambda}|} \leq \frac{B'/A}{n^{1-\alpha} m^\alpha}, \qquad 2 \leq m < n. \tag{4.35}$$

Podemos combinar (4.33) y (4.35) para encontrar que

$$|e_{nm}| \leq \frac{\beta(\lambda)}{n^{1-\alpha} m^\alpha}, \qquad 1 \leq m \leq n, \quad 1 \leq n, \tag{4.36}$$

para alguna constante $\beta(\lambda) > 0$. Así, para λ que satisface la condición (4.31) y para cada $a = (a_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, las entradas de E_λ satisfacen

$$|(E_\lambda(a))_n| \leq \frac{\beta(\lambda)}{n^{1-\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{k^\alpha}, \qquad n \geq 1.$$

Se sigue, por tanto, que

$$|E_\lambda(a)| \leq \beta(\lambda) G_\lambda(|a|), \qquad a \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \qquad \alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 1,$$

donde $G_\lambda : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N}$ es el operador lineal definido para cada $b = (b_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ por la ecuación (4.30). $\square$

Por lo que, si $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) < 1$, entonces (4.3) implica que $E_\lambda : \ell_p \to \ell_p$ es acotado si G_λ es acotado. El hecho de que G_λ sea acotado lo podemos asegurar por el Teorema 4.29 y el siguiente resultado, cuya demostración está basada en el Teorema 1 de [9].

Proposición 4.32 *Sean $p > 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ que satisfacen $(1-\alpha)p > 1$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \alpha$, entonces G_λ definido en* (4.30) *es acotado en ℓ_p.*

Demostración: La matriz G_λ es triangular inferior con entradas $a_{nk} = a_n b_k$, donde $a_n = n^{\alpha-1}$ y $b_k = k^{-\alpha}$, para $1 \le k \le n$. Por el Teorema 4.29, G_λ es acotado en ℓ_p si existe una constante positiva K tal que, para $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha p/(p-1)}}\right)^{p} \le K\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^{\alpha p/(p-1)}}. \quad (4.37)$$

En efecto, escribamos $c = (1-\alpha)p > 1$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha p/(p-1)}} = \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

y sea $q = \dfrac{p}{p-1}$ el conjugado de p. Observemos, primero, que si definimos φ_n como $\frac{1}{n^c} + \frac{1}{(n+1)^c} + \cdots$, entonces

$$\varphi_n \le \int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{t^c}dt = \left(\frac{1}{c-1}\right)\frac{1}{(n-1)^{c-1}} \le \left(\frac{2^{c-1}}{c-1}\right)\frac{1}{n^{c-1}} \quad (4.38)$$

para $n \geq 1$.

Además, si $s_0 = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m}(\varphi_n - \varphi_{n+1})s_n^p &= \sum_{n=1}^{m}\varphi_n s_n^p - \sum_{n=1}^{m}\varphi_{n+1}s_n^p \\
&= \sum_{n=1}^{m}\varphi_n s_n^p - \sum_{n=2}^{m+1}\varphi_n s_{n-1}^p \\
&= \sum_{n=1}^{m}\varphi_n s_n^p - \sum_{n=1}^{m+1}\varphi_n s_{n-1}^p \\
&= \sum_{n=1}^{m}\varphi_n (s_n^p - s_{n-1}^p) - \varphi_{m+1}s_m^p \\
&\leq \sum_{n=1}^{m}\varphi_n (s_n^p - s_{n-1}^p). \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Finalmente, como $p > 1$, la primera derivada de $f(x) = x^p$ es creciente para $x > 0$. Por lo que por el teorema valor medio tenemos que

$$s_n^p - s_{n-1}^p \leq pc_n s_n^{p-1}. \qquad (4.40)$$

De las desigualdades (4.38), (4.39), (4.40) y la desigualdad de Hölder concluimos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} n^{-c} s_n^p &= \sum_{n=1}^{m} (\varphi_n - \varphi_{n+1}) s_n^p \le \sum_{n=1}^{m} \varphi_n (s_n^p - s_{n-1}^p) \\
&\le \frac{2^{c-1} p}{c-1} \sum_{n=1}^{m} n^{1-c} s_n^{p-1} c_n \\
&= \frac{2^{c-1} p}{c-1} \sum_{n=1}^{m} (n^{\frac{c(1-p)}{p}} s_n^{p-1})(n^{\frac{p-c}{p}} c_n) \\
&\le \frac{2^{c-1} p}{c-1} \left(\sum_{n=1}^{m} n^{-c} s_n^p \right)^{(p-1)/p} \left(\sum_{n=1}^{m} n^{p-c} c_n^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\left(\sum_{n=1}^{m} n^{-c} s_n^p \right)^{1/p} \le \left(\frac{2^{c-1} p}{c-1} + 1 \right) \left(\sum_{n=1}^{m} n^{p-c} c_n^p \right)^{1/p}.
$$

De donde se concluye (4.37) con $K = \left(\frac{2^{c-1} p}{c-1} \right)^p$. □

Finalmente, a partir de la Proposición 4.32, podemos demostrar que se cumple (4.25).

Teorema 4.33 *El espectro del operador $C \in B(\ell_p)$, $1 < p < \infty$ es el conjunto $\sigma(C) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \frac{q}{2}| \le \frac{q}{2}\}$.*

Demostración: Sea $p > 1$ y escojamos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \frac{q}{2}| > \frac{q}{2}$. Escribiendo $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se sigue que $a^2 + b^2 > aq$ o, equivalentemente, que $\alpha = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} < \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$. En particular se cumple que $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\lambda}\right) <$

1. Reordenando $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$ obtenemos $(1-\alpha)p > 1$ y de la Proposición 4.32 se sigue que $G_\lambda : \ell_p \to \ell_p$ es acotado. Lo anterior implica que $(C - \lambda I)^{-1}$ es acotado en ℓ_p. $\square$

Bibliografía

[1] G. Bennet. Some elementary inequalities. *Quart. J. Math. Oxford*, 38:401–425, 1987.

[2] B. Bollobás. *Linear Analysis.* Cambridge University Press, 1999.

[3] A. Brown, P. R. Halmos, y A. L. Shields. Cesàro operators. *Acta Sci. Math.*, 26:125–137, 1965.

[4] E. Cesàro. Sur la multiplication des séries. *Bull. Sci. Math*, 14(2):114–120, 1890.

[5] G. P. Curbera y W. J. Ricker. Spectrum of the Cesàro operator in ℓ_p. *Arch. Math.*, 100:267–271, 2013.

[6] N. Dunford y J. T. Schwartz. *Linear operators.* Interscience, 1958.

[7] P. R. Halmos. *A Hilbert Space Problem Book.* Springer-Verlag, 1982.

[8] G. Hardy. An inequality for Hausdorff means. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):46–50, 1943.

[9] G. H. Hardy y J. E. Littlewood. Elementary theorems concerning power series with positive coefficients and moment constants of positive functions. *Journal fur Mathematik*, 157:141–158, 1927.

[10] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, y G. Polya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1934.

[11] J. M. Hyslop. *Infinite series*. Oliver and boyd, 1959.

[12] G. Leibowitz. Spectra of discrete Cesàro operators. *Tamkang Journal of Mathematics*, 3:123–132, 1972.

[13] G. Leibowitz. Discrete Hausdorff transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 38(3):541–544, 1973.

[14] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory*. Springer-Verlag, 1998.

[15] J. B. Reade. On the spectrum of the Cesàro operator. *Bull. London Math. Soc.*, 17:263–267, 1985.

[16] B. Rhoades. Generalized Hausdorff matrices bounded on ℓ_p and c. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 43(3-4):333–345, 1981.

[17] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.

[18] A. E. Taylor y D. C. Lay. *Introduction to Functional Analysis.* Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.