UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GRUPOS TOPOLÓGICOS DE ISOMETRÍAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

MANUEL EDUARDO CHACÓN OCHOA

TUTOR

DR. SERGEY ANTONYAN

2015

México, D.F.

Trabajo realizado gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, en el Proyecto IN101314 Topología geométrica-5 bajo la responsabilidad del Dr. Sergey Antonyan.
Se agradece a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Introducción

La teoría de los grupos topológicos de transformaciones se centra en el estudio de las acciones continuas de grupos topológicos en espacios topológicos. Estas pueden ser vistas como homomorfismos continuos de un grupo topológico G en el grupo de homeomorfismos de un espacio X, $\mathrm{Homeo}(X)$ respecto a la topología compacto-abierta en este último. Así, todo grupo topológico actuante en un espacio X tiene una fuerte relación con el grupo $\mathrm{Homeo}(X)$. Es por ello decepcionante que en general $\mathrm{Homeo}(X)$ no resulte ser un grupo toplógico.

Sin embargo, para espacios con una estructura más fuerte, la de espacio métrico, existe un grupo en cierto sentido análogo a $\mathrm{Homeo}(X)$ que tiene una mejor relación con su topología. Este grupo es el de las isometrías, es decir, el grupo de las biyecciones que preservan la métrica en el espacio respectivo.

El presente trabajo se dedica al estudio de los grupos de isometrías, su acción natural y su relación con otros grupos topológicos.

La primera parte comprende el estudio de estos grupos y de su acción natural. Se comienza con resultados relativos a la cualidades de dichos grupos en función de los correspondientes espacios métricos. Luego se considera la acción de los grupos de isometrías, concretamente se estudian condiciones bajo las cuales esta es propia. Los principales resultados expuestos en esta parte toman como referencia los artículos [5] y [8] de Gao y Kechris y de Manoussos y Strantzalos, respectivamente.

La segunda parte corresponde a las representaciones de grupos topológicos como grupos de isometrías.

Se parte de un teorema general sobre realizaciones en subgrupos de grupos de isometrías, para a continuación estudiar el caso de los subgrupos cerrados. Esto se hace tomando como referencia principal el trabajo de Piotr Niemiec [11], se deducen además resultados probados originalmente por Gao y Kechris y Julien Melleray en [5] y [9].

Después se presenta la caracterización de los grupos topológicos realizables como grupos de isometrías mediante una propiedad relativa a completud y se estudia la clase de estos grupos. Nuevamente la referencia es [11].

Finalmente se toca brevemente el problema de la existencia de métricas invariantes para acciones propias. Si bien el caso general sigue abierto, se han presentado diversos avances. Concretamente en este trabajo se incluye la equivalencia de este problema a la paracompacidad del espacio orbital; hecho probado por Antonyan y de Neymet en [1].

Capítulo 0

Notación y nociones previas

Se presentan a continuación la notación y terminología que se empleará en este trabajo, así como algunos resultados conocidos de los que se hará uso. Estos últimos sólo se enuncian y se proporciona una referencia.

Se procura usar notación estándar, por ejemplo $\cup$, $\cap$ y $\mathscr{P}()$ denotan las operaciones de unión, intersección y potencia, respectivamente, aunque $\cup$ se sustituye por $\sqcup$ cuando se consideran conjuntos ajenos con el propósito de enfatizar este hecho. Se denota por $\mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$ a los conjunto de los números reales y naturales, respectivamente, y por $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{N}^+$ a sus partes positivas (se considera $0 \in \mathbb{N}$). Para un conjunto arbitrario X se denota por $X^{<\omega}$ al conjunto de sucesiones finitas en X y por X^ω al conjunto de sucesiones infinitas.

Nociones de Topología General

Definición 0.1. Sea X un conjunto. Se dice que una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una *pseudométrica* en X si

- $d[X \times X] \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$,
- $d[\{(x,x) : x \in X\}] \subseteq \{0\}$,
- $\forall x,y \in X\ d(x,y) = d(y,x)$ y
- $\forall x,y,z \in X\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Un espacio pseudométrico es un par (X,d) con d una pseudométrica en X.

Definición 0.2. Sea (X,d) un espacio pseudométrico. Para $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se definen $B_d(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ y $\overline{B_d}(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}$. Si no existe ambigüedad simplemente se escribirá $B(x,\varepsilon)$ y $\overline{B}(x,\varepsilon)$.

Definición 0.3. Sean (X,τ) un espacio topológico y $A\subseteq X$. Se dice que el conjunto A es *precompacto* si su cerradura, $\overline{A}$, es compacta.

Definición 0.4. Sea (X,τ) un espacio topológico. El *peso* de X, $w(X)$, se refiere a la mínima cardinalidad de una base de su topología.

Se asumirá siempre que el peso de un espacio es infinito.

Definición 0.5. Sea $\{(X_i,\tau_i):i\in I\}$ un conjunto de espacios topológicos ajenos por pares. Se define su *suma*, $\bigoplus_{i\in I}X_i$, como el espacio topológico $(\bigsqcup_{i\in I}X_i,\tau)$ con τ dado por $U\in\tau$ si y sólo si para todo $i\in I$ $U\cap X_i\in\tau_i$.

Definición 0.6. Sean X un espacio topológico y $x\in X$. La *cuasicomponente* de x es la intersección de los subconjuntos simulaneamte abiertos y cerrados que lo contienen. El conjunto de las cuasicomponentes de un espacio se denotará por $\mathscr{C}$ y se le considerará provisto de la topología cociente respecto a la función que asigna a cada punto su cuasicomponente.

Teorema 0.7 (Bourbaki-Dieudonné)**.** *[4, p. 146] Sean X y Y espacios topológicos con Y regular, A denso en X y $f:A\to Y$ continua. Entonces f admite una extensión a X si y sólo si admite una extensión a $A\cup\{x\}$ para cada $x\in X$.*

Definición 0.8. Sean X y Y conjuntos arbitrarios. Se define X^Y como el conjunto de todas las funciones $f:X\to Y$. Si X es un espacio topológico se considera a X^Y provisto de la topología producto. Si Y es también espacio topológico se define $C(X,Y):=\{f\in X^Y : f \text{ es continua }\}$; además este conjunto estará dotado de la topología *compacto abierta*, es decir, aquella que tiene como subbase los conjuntos $\{f\in C(X,Y): f[K]\subseteq U\}$ con $K\subseteq X$ compacto y $U\subseteq Y$ abierto.

Definición 0.9. Sean X un espacio topológico, (Y,d) un espacio pseudométrico y $F\subseteq C(X,Y)$. F es *equicontinuo* en $x\in X$ si para todo $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ existe U vecindad de x tal que $f[U]\subseteq B_d(f(x),\varepsilon)$ para cualquier $f\in F$. F es equicontinuo si es equicontinuo en cada punto.

Teorema 0.10. *[6, p. 232] Sean X y Y espacios topológicos y sea $F\subseteq C(X,Y)$ equicontinuo. Entonces en F la topología de la convergencia puntual coincide con la topología compacto-abierta.*

Teorema 0.11 (Arzela-Ascoli)**.** *[6, p. 233] Sean X un espacio de Hausdorff, (Y,d) un espacio métrico y $F\subseteq C(X,Y)$. F es precompacto si F es equicontinuo y para todo $x\in X$ $F(x):=\{f(x):f\in F\}$ es precompacto en Y. Además si X es localmente compacto, entonces el recíproco es cierto.*

Definición 0.12. Sea (X,d) un espacio métrico. X es *polaco* si es completo y separable.

Teorema 0.13. *[4, p. 272] Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces existe un espacio métrico completo (Y,ρ), la compleción de X, tal que $X \subseteq Y$, $\rho\restriction_{X\times X} = d$ y X es denso en Y. Además Y es único salvo isometría y toda isometría de X se extiende a una isometría de Y.*

Teorema 0.14 (Stone)**.** *[4, p. 280] Toda cubierta abierta de un espacio metrizable admite un refinamiento localmente finito y σ-discreto.*

Grupos topológicos y acciones continuas

Definición 0.15. Una terna $(G,\cdot\tau)$ con $\cdot : G\times G \to G$ y $\tau \subseteq \mathscr{P}(G)$ se llama *grupo topológico* si

- $(G,\cdot)$ es un grupo,
- (G,τ) es un espacio topológico y
- Las funciones $\cdot$ y $g \mapsto g^{-1}$ son continuas.

Como es usual, los grupos topológicos se nombrarán simplemente por su conjunto subyacente, es decir, G se referirá a $(G,\cdot,\tau)$. También se omitirá el símbolo $\cdot$, $a\cdot b$ será ab.

Definición 0.16. Sean G y H grupos topológicos. Una biyección $f : G \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow H$ es un *isomorfismo topológico* si f y f^{-1} son homomorfismos continuos. En tal caso se dice además que G y H son *topológicamente isomorfos*, lo cual se denota por $G \cong H$.

Definición 0.17. Sea G un grupo topológico. Una pseudométrica d en G se dice *invariante por la izquierda* si $d(gx,gy) = d(x,y)$ para todos $g,x,y \in G$.

Definición 0.18. Sean G un grupo topológico y $A,B \subseteq G$. Se definen

- $AB := \{ab \in G : a \in A, b \in B\}$,
- $A^{-1} := \{a^{-1} : a \in A\}$ y
- $A^n := \{a_1a_2\cdots a_n : a_1,\cdots,a_n \in A\}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$.

Proposición 0.19. *[14, p. 6, p. 10] Sean G un grupo topológico y e su elemento neutro. Para cualquier vecindad U de e y $n \in \mathbb{N}^+$ existen V y W vecindades de e tales que $V^n \subseteq U$ y $WW^{-1} \subseteq U$.*

Proposición 0.20. *[14, p. 7] Sea G un grupo topológico. Si U es abierto en G entonces UA y AU son abiertos para cualquier $A \subseteq G$.*

Definición 0.21. Sean G un grupo topológico con neutro e y X un espacio topológico. Una *acción* (izquierda) de G en X es un función continua $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto gx$ tal que $ex = x$ y $(gh)x = g(hx)$ para cualesquier $g,h \in G$ y $x \in X$. Se dice también que G actúa en X o que X es un G-espacio.

Definición 0.22. Sean G un grupo topológico, X un G-espacio y $x \in X$. El grupo de isotropía de x es $G_x := \{g \in G : gx = x\}$. La acción de G en X es efectiva si $\bigcap_{x\in X} G_x := \{e\}$. La órbita de x es $G(x) := \{gx : g \in G\}$ y el espacio orbital es $X/G := \{G(x) : x \in X\}$ provisto de la topología cociente respecto a la proyección orbital $X \to X/G$ $x \mapsto G(x)$.

Definición 0.23. Sean G un grupo topológico, X un G-espacio y $U,V \subseteq X$. El *transportador* de U en V es $\langle U,V\rangle := \{g \in G : gU \cap V \neq \varnothing\}$. U es *relativamente delgado* con V si $\langle U,V\rangle$ es precompacto. U es *pequeño* si cada $x \in X$ tiene una vecindad relativamente delgada con U. La acción de G en X es *propia* o X es un *G-espacio propio* si cada punto tiene una vecindad pequeña.

Capítulo 1

Grupos topológicos de isometrías y su acción natural

Este capítulo se enfoca al estudio de los grupos de isometrías propiamente dichos así como al de su acción natural en el espacio correspondiente. Se comienza por ello definiendo formalmente estos grupos.

Definición 1.0.1. Sea (X,d) un espacio métrico. Una *isometría* de X es una función biyectiva $\varphi : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$ tal que $d(\varphi(x),\varphi(y)) = d(x,y)$ para cualesquier $x,y \in X$. Se denota al conjunto de tales funciones por $\text{Iso}(X,d)$.

Es evidente que cualquier isometría es un homeomorfismo y que el conjunto de dichas funciones constituye un grupo bajo la composición. Lo siguiente es dotar este conjunto de una estructura topológica, esta será la *topología de la convergencia puntual*, es decir, aquella en la que la convergencia es la convergencia puntual de funciones y que tiene como subbase los conjuntos de la forma

$$B(x,\varphi,\varepsilon) := \{\psi \in \text{Iso}(X,d) : d(\psi(x),\varphi(x)) < \varepsilon\}$$

con $x \in X$, $\varphi \in \text{Iso}(X,d)$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. En adelante se asume que cualquier grupo de isometrías está provisto de esta topología.

Teorema 1.0.2. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces Iso(X,d) es un grupo topológico.*

Demostración. Dados un abierto subbásico $U = B(x,\varphi,\varepsilon)$ en $\text{Iso}(X,d)$ e isometrías ψ y σ tales que $\psi\sigma \in U$ sean

$$V := B\left(\sigma(x),\psi,\frac{\varepsilon - d(\psi\sigma(x),\varphi(x))}{2}\right) \text{ y } W := B\left(x,\sigma,\frac{\varepsilon - d(\psi\sigma(x),\varphi(x))}{2}\right).$$

Es claro que $V \times W$ es vecindad abierta de (ψ, σ) en $\mathrm{Iso}(X,d) \times \mathrm{Iso}(X,d)$. Para $\psi_1 \in V$ y $\sigma_1 \in W$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\psi_1\sigma_1(x),\varphi(x)) &\leq d(\psi_1\sigma_1(x),\psi_1\sigma(x)) + d(\psi_1\sigma(x),\psi\sigma(x)) + d(\psi\sigma(x),\varphi(x)) \\ &< \frac{\varepsilon - d(\psi\sigma(x),\varphi(x))}{2} + \frac{\varepsilon - d(\psi\sigma(x),\varphi(x))}{2} + d(\psi\sigma(x),\varphi(x)) = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto la composición es continua en $\mathrm{Iso}(X,d)$.

Sean $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ y $U = B(x,\varphi,\varepsilon)$. Para cualquier $\psi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ se cumple que $d(\psi^{-1}\varphi(x),\varphi^{-1}\varphi(x)) = d(\psi^{-1}\varphi(x),\psi^{-1}\psi(x)) = d(\psi(x),\varphi(x))$, por lo que $\psi \in U$ si y sólo si $\psi^{-1} \in B(\varphi(x),\varphi^{-1},\varepsilon)$, i.e., $U^{-1} = B(\varphi(x),\varphi^{-1},\varepsilon)$. Por tanto $\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ es continua en $\mathrm{Iso}(X,d)$. ■

1.1. Propiedades de algunos grupos de isometrías

Lo primero que se probará son dos sencillos lemas que serán útiles posteriormente.

Lema 1.1.1. *Sean (X,d) un espacio métrico y D un subespacio denso de X. La función $\Gamma : Iso(X,d) \to X^D$, $\varphi \mapsto \varphi\restriction_D$ es un encaje topológico.*

Demostración. Sean $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ distintas. Por ser X un espacio Hausdorff $\varphi\restriction_D \neq \psi\restriction_D$.

Si $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es una red en $\mathrm{Iso}(X,d)$ tal que $\varphi_\alpha \to \varphi$ puntualmente para algún $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$, entonces en particular $\varphi_\alpha\restriction_D \to \varphi\restriction_D$, por lo que Γ es continua.

Si $U = \bigcap_{i=1}^n B(x_i,\psi_i,\varepsilon_i)$ es un abierto básico en $\mathrm{Iso}(X,d)$, entonces

$$\Gamma(U) = \{f \in X^D : \forall i \in \{1,\ldots,m\}\ f(x_{k_i}) \in B_d(\varphi_{k_i}(x_{k_i}),\varepsilon_{k_i})\} \cap \Gamma[\mathrm{Iso}(X,d)]$$

con $\{x_{k_i}\}_{i=1}^m = \{x_j\}_{j=i}^n \cap D$. Por tanto Γ es un encaje topológico. ■

Lema 1.1.2. *Sean (X,d) un espacio métrico y $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en Iso(X,d). Si $(\varphi_\alpha(x))_{\alpha\in\mathscr{A}}$ y $(\varphi_\alpha^{-1}(x))_{\alpha\in\mathscr{A}}$ convergen para todo $x \in X$, entonces $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es convergente en Iso(X,d).*

Demostración. Sean $\varphi,\psi : X \to X$ dadas por $\varphi(x) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} \varphi_\alpha(x)$ y $\psi(x) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} \varphi_\alpha^{-1}(x)$. Si $x,y \in X$, entonces $d(\varphi(x),\varphi(y)) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\varphi_\alpha(x),\varphi_\alpha(y)) = d(x,y)$. Además

$$\begin{aligned} d(\varphi\psi(x),x) &= \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\varphi_\alpha\psi(x),x) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\psi(x),\varphi_\alpha^{-1}(x)) = 0 \text{ y} \\ d(\psi\varphi(x),x) &= \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\varphi_\alpha^{-1}\varphi(x),x) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\varphi(x),\varphi_\alpha(x)) = 0, \end{aligned}$$

lo que implica $\psi = \varphi^{-1}$. Por tanto $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ y por construcción $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ converge a φ puntualmente. ■

Como es de suponer, no es posible decir mucho acerca de los grupos de isometrías en general; sin embargo, imponer algunas características al espacio métrico resulta en propiedades convenientes para su grupo de isometrías. El resto de esta sección se centra en esta clase de resultados.

Proposición 1.1.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $w(Iso(X,d)) \leq w(X)$.*

Demostración. Sea $D \subseteq X$ denso tal que $|D| \leq w(X)$. Del Lema 1.1.1 se sigue que $w(\mathrm{Iso}(X,d)) \leq w(X^D)$ y por la elección de D se tiene $w(X^D) \leq w(X)$. ■

Corolario 1.1.4. *Si (X,d) es separable, entonces Iso(X,d) es metrizable.*

Demostración. En esta situación Iso(X,d) es segundo numerable y por el Teorema de Birkhoff-Kakutani (Teorema A.2) se sigue que es metrizable. ■

Teorema 1.1.5. *Si (X,d) es un espacio polaco, entonces Iso(X,d) es un grupo polaco, es decir, separable y completamente metrizable.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.1.3 que Iso(X,d) es separable.

Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en X. Se define $\delta : \mathrm{Iso}(X,d) \times \mathrm{Iso}(X,d) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\delta(\varphi,\psi) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\left[\frac{d(\varphi(x_n),\psi(x_n))}{1+d(\varphi(x_n),\psi(x_n))} + \frac{d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}\right]$$

Por ser d métrica, δ es simétrica y no negativa. Sean $\varphi,\psi,\pi \in \mathrm{Iso}(X,d)$

$$\begin{aligned}
\delta(\psi,\pi) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\left[\frac{d(\varphi(x_n),\pi(x_n))}{1+d(\varphi(x_n),\pi(x_n))} + \frac{d(\varphi^{-1}(x_n),\pi^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi^{-1}(x_n),\pi^{-1}(x_n))}\right]\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\frac{d(\varphi(x_n),\pi(x_n))}{1+d(\varphi(x_n),\pi(x_n))} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\frac{d(\varphi^{-1}(x_n),\pi^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi^{-1}(x_n),\pi^{-1}(x_n))}\\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\frac{d(\varphi(x_n),\psi(x_n))}{1+d(\varphi(x_n),\psi(x_n))} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\frac{d(\psi(x_n),\pi(x_n))}{1+d(\psi(x_n),\pi(x_n))}\\
&\quad + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\frac{d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))} + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2}\frac{d(\psi^{-1}(x_n),\pi^{-1}(x_n))}{1+d(\psi^{-1}(x_n),\pi^{-1}(x_n))}\\
&= \delta(\varphi,\psi) + \delta(\psi,\pi).
\end{aligned}$$

Por tanto δ es una métrica en Iso(X,d).

Afirmación. δ es compatible con la topología de Iso(X,d).

Prueba: Primero se verificará que la topología de $\mathrm{Iso}(X,d)$ es más fina que la inducida por δ. Para ello considérese $U := B_\delta(\varphi,\varepsilon)$ una bola en $\mathrm{Iso}(X,d)$ respecto a la métrica δ. Sean $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$ y

$$V := \left[\bigcap_{n=0}^{N} B(x_n,\varphi,\frac{\varepsilon}{8})\right] \cap \left[\bigcap_{n=0}^{N} B(x_n,\varphi^{-1},\frac{\varepsilon}{8})\right]^{-1},$$

esta es una vecindad abierta de φ en la topología de la convergencia puntual. Si $\psi \in V$, entonces

$$\begin{aligned}\delta(\varphi,\psi) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\left[\frac{d(\varphi(x_n),\psi(x_n))}{1+d(\varphi(x_n),\psi(x_n))}+\frac{d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}\right]\\ &+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left[\frac{d(\varphi(x_n),\psi(x_n))}{1+d(\varphi(x_n),\psi(x_n))}+\frac{d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi^{-1}(x_n),\psi^{-1}(x_n))}\right]\\ &< \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\left[\frac{\varepsilon}{4}\right]+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}[2] < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

por lo que $V \subseteq U$.

Para la contención inversa considérense $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathrm{Iso}(X,d)$ y $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ tales que $\lim_{k\in\mathbb{N}} \delta(\varphi_k,\varphi) = 0$, en particular $d(\varphi_k(x_n),\varphi(x_n)) \to 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, para cualesquier $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existen $n,k \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_n,x) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ y $d(\varphi_k(x_n),\varphi(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$ por lo que

$$\begin{aligned}d(\varphi_k(x),\varphi(x)) &\leq d(\varphi_k(x),\varphi_k(x_n))+d(\varphi_k(x_n),\varphi(x_n))+d(\varphi(x_n),\varphi(x))\\ &= 2d(x_n,x)+d(\varphi_k(x_n),\varphi(x_n)) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a φ. †

Resta verificar la completud de esta métrica. Sea $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Iso}(X,d)$ una sucesión δ-Cauchy. Para cada $m \in \mathbb{N}$ la sucesión $(\varphi_i(x_m))_{i\in\mathbb{N}}$ es d-Cauchy, pues

$$\begin{aligned}d(\varphi_i(x_m),\varphi_j(x_m)) &\leq 2^m\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}\left[\frac{d(\varphi_i(x_n),\varphi_j(x_n))}{1+d(\varphi_i(x_n),\varphi_j(x_n))}+\frac{d(\varphi_i^{-1}(x_n),\varphi_j^{-1}(x_n))}{1+d(\varphi_i^{-1}(x_n),\varphi_j^{-1}(x_n))}\right]\\ &= 2^m\delta(\varphi_i,\varphi_j).\end{aligned}$$

Entonces, por completud de (X,d), es convergente.

Sea $x \in X$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}d(\varphi_i(x),\varphi_j(x)) &\leq d(\varphi_i(x),\varphi_i(x_n))+d(\varphi_i(x_n),\varphi_j(x_n))+d(\varphi_j(x_n),\varphi_j(x))\\ &= 2d(x,x_n)+d(\varphi_i(x_n),\varphi_j(x_n)),\end{aligned}$$

lo cual muestra que $(\varphi_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ es d-Cauchy; puede entonces definirse la función $\varphi(x) = \lim_{i\in\mathbb{N}} (\varphi_i(x))$. Obviamente $(\varphi_i^{-1}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ también es δ-Cauchy y análogamente se tiene que es convergente para cada $x \in X$; sea $\psi(x) = \lim_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i^{-1}(x)$. Se concluye por el Lema 1.1.2 que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

■

Teorema 1.1.6. *Sea (X,d) compacto. Entonces Iso(X,d) es compacto y metrizable.*

Demostración. La metrizabilidad se sigue del corolario 1.1.4. Fíjese $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en X y sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Iso}(X,d)$. Por compacidad de X existe una subsucesión $(\varphi_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{0,n}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Recursivamente, para $m \in \mathbb{N}$ existe $(\varphi_{m+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(\varphi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{m+1,n}(x_{m+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Para cada $m \in \mathbb{N}$ $(\varphi_{n,n})_{n\geq m}$ es una subsucesión de $(\varphi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $(\varphi_{n,n}(x_m))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Así, $(\varphi_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge puntualmente en $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Similarmente existe una subsucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\varphi_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\psi_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. De manera análoga al final de la prueba anterior se observa que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Iso(X,d) y por tanto Iso(X,d) es compacto. ■

Como se muestra en el siguiente ejemplo las propiedades relativas a conexidad no necesariamente se transmiten a Iso(X,d).

Ejemplo 1.1.7. Sea $X = [0,1]$ con la métrica usual. Ya que $d(x,y) = 1$ si y sólo si $\{x,y\} = \{0,1\}$ se tiene que para cualquier $g \in \mathrm{Iso}(X,d)$ $g(\{0,1\}) = \{0,1\}$, de lo cual se sigue que $g(x) = x$ o $g(x) = 1-x$. Por tanto $\mathrm{Iso}(X,d) \cong \mathbb{Z}_2$ con la topología discreta.

Sin embargo cierto grado de conexidad permite que Iso(X,d) posea otras propiedades deseables. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.1.8. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto y sea $\mathscr{C}$ el espacio cociente de las cuasicomponentes de X. Si $\mathscr{C}$ es compacto, entonces Iso(X,d) es localmente compacto.*

La demostración de este teorema es un poco más extensa que la de los anteriores y se realizará por medio de varios lemas.

Lema 1.1.9. *Sean (X,d) un espacio métrico localmente compacto, $F \subseteq$ Iso(X,d) y*

$$K(F) := \{x \in X : F(x) = \{\varphi(x) : \varphi \in F\} \textit{ es precompacto}\}.$$

Entonces $K(F)$ es un subconjunto abierto y cerrado de X.

Demostración. Sea $x \in K(F)$. Por compacidad local de X, para cada $z \in \overline{F(x)}$ existe una vecindad U_z precompacta; por compacidad de $\overline{F(x)}$ una cantidad finita $\{U_1,\dots,U_n\}$ de tales vecindades lo cubre. Sea $A := \bigcup_{i=1}^n U_i$. Esta es una vecindad precompacta de $\overline{F(x)}$. Sea ε tal que $N(F(x),\varepsilon) := \{y \in X : d(y,F(x) < \varepsilon)\} \subseteq A$. En adelante si $G \subseteq \mathrm{Iso}(X,d)$ y $B \subseteq X$ se denotará por $G(B)$ a $\{g(x) : g \in G,\ x \in B\}$. Dada $y \in B(x,\varepsilon)$ se tiene que

$$F(y) \subseteq F(B(x,\varepsilon)) = \bigcup_{f\in F} f[B(x,\varepsilon)] = \bigcup_{f\in F} B(f(x),\varepsilon) = N(F(x),\varepsilon) \subseteq A,$$

así $\overline{F(y)}$ es compacto y por tanto $B(x,\varepsilon) \subseteq K(F)$; luego $K(F)$ es abierto.

Sean x un punto de acumulación de $K(F)$ y $\eta > 0$ tal que $B(x,4\eta)$ es precompacto. Considérese $y \in K(F) \cap B(x,\eta)$, entonces

$$\overline{F(y)} \subseteq \overline{F(B(x,\eta))} \subseteq F(B(x,2\eta)) = \bigcup_{\varphi\in F} \varphi(B(x,2\eta)).$$

Por compacidad de $\overline{F(y)}$ existe $L \subseteq F$ finito tal que $\overline{F(y)} \subseteq L(N(x,2\eta))$. Sean $\varphi \in F$ y $\psi \in L$ tal que $\varphi(y) \in \psi(N(x,2\eta))$, entonces

$$\begin{aligned} d(\varphi(x),\psi(y)) &\leq d(\varphi(x),\varphi(y)) + d(\varphi(y),\psi(x)) + d(\psi(x),\psi(y)) \\ &= 2d(x,y) + d(\varphi(y),\psi(x)) < 4\eta, \end{aligned}$$

luego $\varphi(x) \in B(\psi(x),4\eta) \subseteq L(B(x,4\eta))$, por lo que $\overline{F(x)} \subseteq \overline{L(B(x,4\eta))}$. Por tanto $K(F)$ es cerrado. ■

Lema 1.1.10. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto cuyo espacio de cuasicomponentes $\mathscr{C}$ es compacto. Entonces existen $x_1,\dots,x_m \in X$ y $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m \in \mathbb{R}^+$ tales que $\bigcap_{i=1}^m B(x_i,Id,\varepsilon_i)$ es precompacto en $C(X,X)$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea $\varepsilon_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(x,\varepsilon_x)$ es precompacto. Entonces $B(x,Id,\varepsilon_x)$ es una vecindad de la identidad de X en $\mathrm{Iso}(X,d)$. Por la elección de ε_x, $x \in K(B(x,Id,\varepsilon_x))$ y por el Lema 1.1.9 este es un conjunto abierto que contiene a cualquier cuasicomponente de X que intersecta, entonces denotando por q a la función cociente de X a $\mathscr{C}$ se tiene que $q^{-1}q(K(B(x,Id,\varepsilon_x))) = K(B(x,Id,\varepsilon_x))$ y $q(K(B(x,Id,\varepsilon_x)))$ es abierto en $\mathscr{C}$. Por compacidad de $\mathscr{C}$ existen $x_1,\dots,x_m \in X$ tales que $\{q(K(B(x_i,Id,\varepsilon_{x_i})))\}_{i=1}^m$ es cubierta de $\mathscr{C}$. Esto significa que $X = \bigcup_{i=1}^m K(B(x_i,Id,\varepsilon_{x_i}))$. Considérese la vecindad $F = \bigcap_{i=1}^m B(x_i,Id,\varepsilon_{x_i})$ de la identidad; para toda $x \in X$ existe algún i tal que $x \in K(B(x_i,Id,\varepsilon_{x_i}))$, y puesto que $F \subseteq B(x_i,Id,\varepsilon_{x_i})$ se tiene que $\overline{F(x)}$ es compacto. Por el Teorema de Arzela-Ascoli, F es precompacto en $C(X,X)$. ■

Lema 1.1.11. *Si (X,d) es un espacio métrico localmente compacto y $\mathscr{C}$ compacto, entonces X es separable.*

La demostración de este resultado es esencialmente idéntica a la del caso conexo encontrada en [7, pp. 269-271].

Observación 1.1.12. Si X es segundo numerable, entonces también lo es $C(X,X)$. Se sigue que las sucesiones son adecuadas para describir la topología en $C(X,X)$, en particular los elementos f de la frontera de Iso(X,d) en $C(X,X)$ son límites de sucesiones en Iso(X,d).

Como se ha señalado (demostración del Lema 1.1.2), tales f preservan d; la pregunta es entonces cuándo son suprayectivas.

Lema 1.1.13. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto cuyo espacio de cuasicomponentes $\mathscr{C}$ es compacto. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$ Iso(X,d) converge puntualmente a $f \in C(X,X)$, entonces $f[X]$ es abierto y cerrado en X.*

Demostración. Por el Lema 1.1.9 es suficiente probar que $f[X] = K(F)$, para algún $F \subseteq \mathrm{Iso}(X,d)$.

En efecto, sea $F = \{\varphi_n^{-1} : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $x \in X$ se tiene que $\varphi_n^{-1} f(x) \to x$, pues $d(\varphi_n(x), f(x)) = d(x, \varphi_n^{-1} f(x))$. Entonces para V_x una vecindad precompacta de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $F(f(x)) = \{\varphi_n^{-1}(f(x))\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\varphi_n^{-1}(f(x))\}_{n=1}^N \cup V_x$. Así, $\overline{F(f(x))} \subseteq \{\varphi_n^{-1}(f(x))\}_{n=1}^N \cup \overline{V_x}$ y por ende es compacto. Por lo tanto $f[X] \subseteq K(F)$.

Ahora, si $y \in K(F)$ puede asumirse que existe una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\varphi_{n_k}^{-1}(y) \to x$ para algún $x \in X$, pues $F(y)$ es precompacto en X, luego $f(x) = f(\lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}^{-1}(y)) = y$, de donde $y \in f[X]$ y por tanto $K(F) = f[X]$. ∎

Proposición 1.1.14. *Si (X,d) es un espacio métrico localmente compacto y $\mathscr{C}$ es compacto, entonces Iso(X,d) es cerrado en $C(X,X)$.*

Demostración. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Iso}(X,d)$ tal que $\varphi_n \to f \in C(X,X)$ puntualmente. Se probará que f es suprayectiva.

Sea $y \in X$. Para cada $x \in X$ se denota por S_x a la cuasicomponente que lo contiene, y por S_n a la cuasicomponente que contiene a $\varphi_n^{-1}(y)$.

Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión constante $(S_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, entonces $S_{n_i} = S_0$ para algún $S_0 \in \mathscr{C}$, luego $\varphi_{n_i}(S_0) = S_y$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Sea $x \in S_0$, entonces $\varphi_{n_i}(x) \in S_y$ y $\varphi_{n_i}(x) \to f(x)$, por lo que $f(x) \in S_y$; luego, por el Lema 1.1.13, $S_y \subseteq f[X]$ y en particular $y \in f[X]$.

Supóngase que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesión constante. Por compacidad de $\mathscr{C}$ existe una subsucesión $(S_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $S \in \mathscr{C}$.

Afirmación. Existe una subsucesión $(S_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ hay $x_k \in S_{n_k}$ con $x_k \to x_0$ para algún $x_0 \in X$.

Prueba: Supóngase lo contrario y sea $R = (\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) \setminus S$. Sea $(y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq R$ tal que $y_m \to y \in X$. Si existen $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tales que $y_m \in (\bigcap_{n=1}^{n_0} S_n) \setminus S$ para $m > m_0$, entonces $y \in (\bigcap_{n=1}^{n_0} S_n) \setminus S \subseteq R$. Si no es así, se construye una subsucesión $(y_{m_p})_{p\in\mathbb{N}}$ de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de la siguiente forma: Se considera $y_{m_1} \in S_{k_1}$ con $k_1 > 1$ y $d(y_{m_1}, y) < 1$, luego $y_{m_2} \in S_{k_2}$ con $k_2 > k_1$ y $d(y_{m_2}, y) < \frac{1}{2}$, y así sucesivamente. Por construcción $y_{m_p} \in S_{k_p}$ y $y_{m_p} \longrightarrow y$, lo cual contradice la suposición inicial, por tanto este caso no es posible y necesariamente $y \in R$, se sigue que R es cerrado.

Así, $X \setminus R$ es abierto y contiene totalmente cada cuasicomponente que intersecta, entonces $q(X \setminus R)$ es una vecindad abierta de S en $\mathscr{C}$, por lo que $S_{n_i} \in q(X \setminus R)$, i.e., $S_{n_i} \subseteq X \setminus R$, finalmente. Por tanto $S_{n_i} = S$, contradiciendo la suposición de que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones constantes. †

De acuerdo a la afirmación, existe una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_k \to x_0 \in X$ y $x_k \in S_k = \varphi_k^{-1}(S_y)$, de donde $x_k = \varphi_k^{-1}(y_k)$ para alguna $y_k \in S_y$. Entonces

$$\begin{aligned} d(y_k, f(x_0)) &\leq d(y_k, \varphi_k(x_0)) + d(\varphi_k(x_0), f(x_0)) \\ &= d(x_k, x_0) + d(\varphi_k(x_0), f(x_0)) \to 0; \end{aligned}$$

por tanto $y_k \to f(X_0)$ y $f(x_0) \in S_y$, lo cual significa que $S_y \cap f[X] \neq \varnothing$, y entonces, por el Lema 1.1.13 $S_y \subseteq f[X]$, en particular $y \in f[X]$. ■

Del Lema 1.1.10 y la Proposición 1.1.14 se sigue el Teorema 1.1.8.

Para finalizar esta sección se dará un simple ejemplo que muestra la importancia de las hipótesis en algunos de los teoremas probados (1.1.6 y 1.1.8).

Ejemplo 1.1.15. Sea d la métrica discreta en $\mathbb{Z}$. Obviamente $(\mathbb{Z}, d)$ es localmente compacto pero no compacto. $\mathscr{C}$ tampoco es compacto, pues $\mathscr{C} \cong X$. Es fácil ver que $\mathrm{Iso}(\mathbb{Z}, d)$ es el grupo de biyecciones de $\mathbb{Z}$, el cual no es localmente compacto con la topología de la convergencia puntual. Para observar esto considérese una vecindad básica de $Id_{\mathbb{Z}}$, $B = \bigcap_{i=1}^{n} B(m_i, Id_{\mathbb{Z}}, 1) = \{f \in \mathrm{Iso}(X, d) : \forall i = 1, \cdots, n\ f(m_i) = m_i\}$ donde $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$, entonces la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_n(m) = \text{máx}\{l : l \leq m - n \ \&\ l \notin \{m_1, m_2, \cdots, m_k\}\}$ si $m \notin \{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ y $f_n(m) = m_i$ si $m \in \{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ está contenida en B pero no admite subsucesión convergente.

1.2. La acción natural de los grupos de isometrías

$\mathrm{Iso}(X, d)$ es un grupo de biyecciones de X, por lo que actúa de manera natural en X mediante la evaluación. Siendo $\mathrm{Iso}(X, d)$ un grupo topológico se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.2.1. *La acción de Iso(X, d) en X es continua.*

Demostración. Sea $U = B(y,\varepsilon)$ un abierto básico en X. Si $\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ y $x \in X$ son tales que $\varphi(x) \in U$ sean

$$V := B(x,\varphi,\frac{\varepsilon - d(\varphi(x),y)}{2}) \text{ y } W := B(x,\frac{\varepsilon - d(\varphi(x),y)}{2});$$

es claro que $V \times W$ es vecindad abierta de (φ,x) en $\mathrm{Iso}(X,d) \times X$. Considérense $\varphi_1 \in V$ y $x_1 \in W$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\varphi_1(x_1),y) &\leq d(\varphi_1(x_1),\varphi_1(x)) + d(\varphi_1(x),\varphi(x)) + d(\varphi(x),y) \\ &< \frac{\varepsilon - d(\varphi(x),y)}{2} + \frac{\varepsilon - d(\varphi(x),y)}{2} + d(\varphi(x),y) = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto la acción de $\mathrm{Iso}(X,d)$ en X es continua. ■

En otras palabras $\mathrm{Iso}(X,d)$ por medio de la evaluación es un grupo de transformaciones de X. En el estudio de estos temas son de particular interés las acciones propias, a continuación se probarán dos resultados sobre condiciones suficientes para que esto se dé.

Teorema 1.2.2. *Si (X,d) es conexo y localmente compacto, entonces Iso(X,d) es localmente compacto y la acción de Iso(X,d) en X es propia.*

Demostración. Por ser X conexo, tiene sólo una cuasicomponente, i.e., $\mathscr{C} = \{X\}$. Entonces, de acuerdo al Teorema 1.1.8, $\mathrm{Iso}(X,d)$ es localmente compacto. Fíjense $x,y \in X$. Sean $U := B(x,\varepsilon)$ y $V := B(y,\varepsilon)$, donde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ es tal que $\overline{B(y,2\varepsilon)}$ es compacto. Entonces, para $\psi \in \langle U,V \rangle$ existe $z \in U$ tal que $\psi(z) \in V$, luego $d(\psi(x),y) \leq d(\psi(x),\psi(z)) + d(\psi(z),y) < 2\varepsilon$; por tanto $\psi \in F := \{\varphi \in \mathrm{Iso}(X,d) : \varphi(x) \in B(y,2\varepsilon)\}$, por lo que $\langle U,V \rangle \subseteq F$. Por la definición de F y la elección de ε se tiene que $x \in K(F)$, y de acuerdo al Lema 1.1.9, $K(F)$ coincide con el espacio conexo X; entonces $F(w)$ es precompacto para cualquier $w \in X$. Por el Teorema de Arzela-Ascoli se sigue que F es precompacto en $C(X,X)$, luego $\langle U,V \rangle$ es precompacto en $C(X,X)$ y por el Lema 1.1.14 en $\mathrm{Iso}(X,d)$. ■

El segundo resultado permite una generalización en las hipótesis de conexidad respecto a las de este teorema. Antes de pasar a él se presenta la definición de esta propiedad más general.

Definición 1.2.3. Sea (X,d) un espacio métrico. Para cada $x \in X$ se define su *radio de compacidad* como $\rho(x) := \sup\{r > 0 : \overline{B}(x,r) \text{ es compacto}\}$. Si existe $x_0 \in X$ para el cual $\rho(x_0) = \infty$ (equivalentemente $\rho(x) = \infty$ para toda $x \in X$) entonces d se dice *propia*.

Lema 1.2.4. *ρ es una función de Lipschitz.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Si $\rho(x) \leq d(x,y)$, entonces $\rho(x) - \rho(y) \leq d(x,y)$. En otro caso sea $r \in (d(x,y), \rho(x))$. Entonces $\overline{B}(x,r)$ es compacto y por la contención $\overline{B}(y, r-d(x,y)) \subseteq \overline{B}(x,r)$, $\overline{B}(y, r-d(x,y)$ también lo es. Luego $r - d(x,y) \leq \rho(y)$ y al ser r arbitrario $\rho(x) - d(x,y) \leq \rho(y)$. Análogamente $\rho(y) - \rho(x) \leq d(x,y)$. ■

Si (X,d) es un espacio métrico localmente compacto se define una relación R en X por xRy si $d(x,y) < \rho(x)$ y $d(x,y) < \rho(y)$. Esta relación es reflexiva y simétrica. Recursivamente sean $R_0 := R$ y para $n \geq 1$ $R_n := R_{n-1} \cup (R_{n-1} \circ R_{n-1})$. $\bar{R} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}}$, la cerradura transitiva de R, es una relación de equivalencia.

Definición 1.2.5. Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto. Para $x \in X$, su clase de equivalencia respecto a la relación $\bar{R}$ definida en el párrafo anterior se llama *pseudocomponente de x* y se denota por $PC(x)$. Se dice que (X,d) es *pseudoconexo* si tiene sólo una pseudocomponente.

La siguiente proposición muestra que una clase importante de espacios satisface está definición:

Proposición 1.2.6. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto. Entonces*

I) *Cada pseudocomponente es abierta y cerrada.*

II) *Si (X,d) es conexo o la métrica d es propia, entonces X es pseudoconexo.*

Demostración. I) Considérese $x \in X$ fijo. Dado $y \in PC(x)$, sean $r_0 \in (0, \rho(y))$ y $\rho_0 \in (0, \rho(y) - r_0)$, entonces $\overline{B}(y, r_0)$ es compacto y $\rho(z) > \rho_0$ para todo $z \in \overline{B}(y, r_0)$. Por compacidad de $\overline{B}(y, r_0)$ existen $y_1, \ldots, y_n \in \overline{B}(y, r_0)$ tales que $\{B(y_i, \frac{\rho_0}{2})\}_{i=1}^n$ es cubierta de $\overline{B}(y, r_0)$. Luego, para cada $z \in B(y, r_0)$ existe $\{z_i\}_{i=1}^m \subseteq \{y_i\}_{i=1}^n$ tal que $d(z_i, z_{i+1}) < \rho_0$ $(i = 1, \ldots, m-1)$, $d(z, z_1) < \rho_0$ y $d(z_m, y) < \rho_0$; así $z \in PC(y) = PC(x)$. Por tanto $B(y, r_0) \subseteq PC(x)$.
Sea $z \notin PC(x)$. Claramente $B(z, \varepsilon) \cap PC(x) = \varnothing$ para cualquier $\varepsilon < \rho(z)$.

II) Es inmediato del inciso anterior que todo espacio métrico localmente compacto y conexo es pseudoconexo y de la definición que los espacios métricos propios también lo son.

■

Para probar el siguiente teorema es necesario un lema.

Lema 1.2.7. *Sea (X,d) un espacio métrico separable y localmente compacto. Si d no es propia, $N \in \mathbb{N}^+$, $0 < \varepsilon_0 < \ldots < \varepsilon_{N-1} < 1$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ se tienen $(x_0^i, \ldots, x_N^i) \in X^{N+1}$ tales que $(x_0^i)_{i \in \mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente y $d(x_k^i, x_{k+1}^i) \leq \varepsilon_k \rho(x_k^i)$ para cada $k \leq N-1$. Entonces $(x_N^i)_{i \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Se probará por inducción en $k \leq N$ que $(x_k^i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. El caso $k=0$ se cumple por hipótesis. Supóngase que para algún $k<N$ $(x_k^i)_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, de hecho sin pérdida de generalidad supóngase que esta sucesión converge a algún x_k. Ya que $d(x_k^i,x_{k+1}^i)\leq \varepsilon_k\rho(x_k^i)$ y $\rho(x_k^i)\to\rho(x_k)$ (por el Lema 1.2.4), si $\delta\in\mathbb{R}^+$, para i suficientemente grande $d(x_k,x_k^i)<\delta\rho(x_k)$; en particular para $\delta_k\in\mathbb{R}^+$ tal que $\varepsilon_k+2\delta_k<1$ se tiene

$$\begin{aligned} d(x_k,x_{k+1}^i) &\leq d(x_k,x_k^i)+d(x_k^i,x_{k+1}^i)<\delta_k\rho(x_k)+\varepsilon_k\rho(x_k^i)\\ &<\delta_k\rho(x_k)+\varepsilon_k\rho(x_k)+\varepsilon_k\rho(x_k^i)<\rho(x_k), \end{aligned}$$

luego $(x_{k+1})_{i\in\mathbb{N}}$ tiene subsucesión convergente. ■

Teorema 1.2.8. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto, separable y pseudoconexo. Entonces la acción de Iso(X,d) en X es propia.*

Demostración. Fíjense $x,y\in X$. Sean $r\in(0,\frac{1}{2}\operatorname{mín}\{\rho(x),\rho(y)\})$, $U:=B(x,r)$ y $V:=B(y,r)$. Si $\varphi\in\operatorname{Iso}(X,d)$ es tal que $\varphi U\cap V\neq\varnothing$, entonces $d(\varphi(x),y)<2r$ y por tanto basta mostrar que $K=\{\varphi\in\operatorname{Iso}(X,d): d(\varphi(x),y)\leq 2r\}$ es compacto. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en K.

Caso 1: Supóngase que d es propia. Por definición de K, $\varphi_n(x)\in\overline{B}(y,2r)$ y $\varphi_n^{-1}(x)\in\overline{B}(x,2r)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, por lo que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_{n_k}^{-1}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes

Afirmación. Si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Iso(X,d) tal que $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen, entonces para cualquier $z\in X$ existe una subsucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\zeta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n^{-1}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes

Prueba: Sean $y_0,y_1\in X$ los límites de $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. En particular $sup_{n\in\mathbb{N}}d(y_0,\gamma_n(x))<M$ para algún $M\in\mathbb{R}^+$. Luego, para cualquier $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d(y_0,\gamma_n(z)) &\leq d(y_0,\gamma_n(x))+d(\gamma_n(x),\gamma_n(z))\leq M+d(x,z) \text{ y}\\ d(y_1,\gamma_n^{-1}(z)) &\leq d(y_1,\gamma_n^{-1}(x))+d(\gamma_n^{-1}(x),\gamma_n^{-1}(z))\leq M+d(x,z). \end{aligned}$$

Al ser d propia esto implica que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\zeta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n'^{-1}(z))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen. †

Sea D un subespacio denso numerable de X. Por esta afirmación puede usarse con la sucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ el mismo argumento diagonal empleado en la prueba del Teorema 1.1.6 para obtener una subsucesión $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\psi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes para cualquier $x\in D$. Análogamente al final de la demostración del Teorema 1.1.5 se tiene que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en Iso(X,d).

Caso 2: Supóngase que d no es propia. Al igual que en el caso 1, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(\varphi_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(\varphi_{n_k}^{-1}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ son convergentes.

Afirmación. Si $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Iso(X,d) tal que $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen, entonces para cualquier $z\in X$ existe una subsucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\zeta_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n^{-1}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes

Prueba: Por pseudoconexidad existen $z_1,\ldots,z_{N-1}\in X$ tales que $d(z_k,z_{k+1})<\rho(z_k)$ para cada $k\in\{0,\ldots,N-1\}$, donde $z_0=x$ y $z_N=z$; entonces existe también $\varepsilon_k\in(0,1)$ tal que $d(z_k,z_{k+1})\leq\varepsilon_k\rho(z_k)$. Por hipótesis $(\gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergen, además

$$\begin{aligned} d(\gamma_n(z_k),\gamma_n(z_{k+1}))\leq\varepsilon_k\rho(z_k)=\varepsilon_k\rho(\varphi_n(z_k)) \text{ y}\\ d(\gamma_n^{-1}(z_k),\gamma_n(z_{k+1}))\leq\varepsilon_k\rho(z_k)=\varepsilon_k\rho(\varphi_n(z_k))\end{aligned}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$ y $k\in\{0,\ldots,N-1\}$. Por el Lema 1.2.7 $(\gamma_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\gamma_n^{-1}(z))_{n\in\mathbb{N}}$ contienen subsucesiones convergentes. †

Ahora sea $D\subseteq X$ denso numerable,de nuevo puede construirse de manera recursiva $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\psi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\psi_n^{-1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes para todo $x\in D$. Luego, para cualesquier $w\in X$ y $x\in D$ se cumple

$$\begin{aligned} d(\psi_n(w),\psi_m(w)) &\leq d(\psi_n(w),\psi_n(x))+d(\psi_n(x),\psi_m(x))+d(\psi_m(x),\psi_m(w))\\ &=2d(w,x)+d(\psi_n(x),\psi_m(x)),\end{aligned}$$

por lo que $(\psi_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Entonces existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n>N$ implica $d(\psi_n(w),\psi_N(w))<\rho(w)=\rho(\psi_N(w))$, así $(\psi_n(w))_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión convergente y al ser además sucesión de Cauchy es convergente. Análogamente existe el límite de $(\psi_n^{-1}(w))_{n\in\mathbb{N}}$. Se concluye por el Lema 1.1.2 que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Por tanto K es compacto. ■

Corolario 1.2.9. *Sean (X,d) un espacio métrico pseudoconexo localmente compacto y separable y G un subgrupo cerrado de Iso(X,d). Entonces*

I) *Iso(X,d) es localmente compacto.*

II) *La acción de G en X es propia.*

III) *Cada estabilizador es compacto, la relación orbital $\{(x,y)\in X^2 : x\in G(y)\}$ es cerrada (como subespacio de X^2) y la función $G\to G(x)$, $g\mapsto g(x)$ es abierta para cada $x\in X$.*

IV) *Los resultados en II) y III) son válidos para la acción diagonal de G en X^n, es decir, $g(x_1,\dots,x_n) = (gx_1,\dots,gx_n)$.*

Demostración. I) Para $x \in X$ existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\langle B(x,\varepsilon), B(x,\varepsilon)\rangle$ es precompacto. Por otro lado $Id_X \in B(x, Id_X, \varepsilon) \subseteq \langle B(x,\varepsilon), B(x,\varepsilon)\rangle$, por lo que este conjunto es una vecindad precompacta de Id_X en $\mathrm{Iso}(X,d)$.

II) Sean $x, y \in X$. Existen U y V vecindades de x y y respectivamente tales que $K = \langle U, V\rangle_{\mathrm{Iso}(X,d)}$ es precompacto en G. Entonces $\langle U, V\rangle_G = G \cap K$ es precompacto en G.

III) Sea $x \in X$. Para alguna vecindad abierta U de x $\langle U, U\rangle$ es precompacto, entonces el cerrado G_x está contenido en un conjunto compacto.
Sean $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\varphi_n(x_n) = y_n$ para ciertos $\varphi_n \in G$ y $(x_n, y_n) \to (x, y)$ para algunos $x, y \in X$. Existen U y V vecindades abiertas de x y y respectivamente tales que $K := \langle U, V\rangle$ es precompacto. Entonces para algún $N \in \mathbb{N}$ $x_n \in U$ y $y_n \in V$ si $n > N$, luego $\{\varphi_n\}_{n>N} \subseteq K$ por lo que existe una subsucesión $(\varphi_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a algún φ; así $\varphi(x) = \operatorname*{lím}_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{n_i}(x_{n_i}) = \operatorname*{lím}_{i\in\mathbb{N}} y_{n_i} = y$.
Finalmente supóngase que la función $G \to G(x),\ g \mapsto g(x)$ no es abierta, i.e., supóngase que existen $\mathscr{U}$ abierto en G y $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G(X) \setminus \{\varphi(x) : \varphi \in \mathscr{U}\}$ tal que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ para algún $\varphi \in \mathscr{U}$. Como en el punto anterior se observa que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(\varphi_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a algún $\psi \in G$. Para cualquier n $\psi_n \notin \mathscr{U} G_x$ y este conjunto es abierto, entonces $\psi \notin \mathscr{U} G_x$. Así $\varphi(x) = \operatorname*{lím}_{i\in\mathbb{N}} \varphi_{n_i} x = \psi(x)$, por lo que $\psi \in \varphi G_x \subseteq \mathscr{U} G_x$, una contradicción.

IV) Nótese que la demostración de (III) no depende de X o G, sino de la propiedad de la acción, es por ello suficiente probar que la acción diagonal es propia. Sean $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n) \in X^n$. Por el inciso (II) existen U y V vecindades de x_1 y y_1 respectivamente tales que $\langle U, V\rangle$ es precompacto en G; pero este conjunto es igual a $\langle \pi_1^{-1}(U), \pi_1^{-1}(V)\rangle$, con $\pi_1 : X^n \to X$ la proyección en la primera coordenada. Por tanto la acción de G en X^n es propia.

■

Al igual que la sección anterior se finaliza con un ejemplo.

Ejemplo 1.2.10. Sea $X = Y \cup \{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ con $Y = \{(y,0) : y \in \mathbb{R}\}$ y $d = \mathrm{mín}\{1, \delta\}$ donde δ denota la métrica Euclidiana. Por el Teorema 1.1.8 $\mathrm{Iso}(X,d)$ es localmente compacto; sin embargo la acción de $\mathrm{Iso}(X,d)$ en X no es propia, porque el grupo de isotropía de $(0,1)$ no es compacto, pues contiene las traslaciones de Y. Así, la acción de $\mathrm{Iso}(X,d)$ en X no es propia, incluso si X tiene dos componentes o pseudocomponentes.

Capítulo 2

Realizaciones de grupos topológicos como grupos de isometrías

La segunda parte de este trabajo se centra en las realizaciones de grupos topológicos como grupos de isometrías, es decir, dado G un grupo topológico encontrar un espacio métrico (X,d) tal que $G \cong \mathrm{Iso}(X,d)$.

La primera sección se centra en probar un teorema sobre subgrupos de grupos de isometrías y dos interesantes consecuencias de este. En la segunda sección se dará un resultado general que caracteriza completamente a los grupos realizables como grupos de isometrías. En la tercera sección se estudiará brevemente la existencia de métricas invariantes para acciones propias, pues como se verá esto implica una gran relación entre el grupo actuante y el grupo de isometrías respecto a tal métrica.

Cabe señalar que en este capítulo se asume en todo momento que los grupos topológicos considerados son Hausdorff, requerimiento natural pues los grupos de isometrías lo son.

2.1. Subgrupos cerrados de grupos de isometrías

Se comenzará con un teorema clásico relacionado a este tema que junto al teorema principal de esta sección tendrá interesantes consecuencias.

Será necesario para su demostración tener presente la noción de espacio métrico asociado a un espacio pseudométrico: Sea (X,d) un espacio pseudométrico, claramente $R := \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) = 0\}$ es una relación de equivalencia en X y la función $D : (X/R) \times (X/R) \to [0,\infty),\ (R[x],R[y]) \mapsto d(x,y)$ es una métrica.

Denotando por π a la proyección canónica $x \mapsto R[x]$, una terna $(Y,\rho;\xi)$ es un espacio métrico asociado a (X,d) si (Y,ρ) es isométrico a $(X/R,D)$ y $\xi = g \circ \pi$ para alguna isometría $g : (X/R,D) \to (Y,\rho)$.

Teorema 2.1.1. *Sean G un grupo topológico. Entonces existe un espacio métrico (M,ρ) tal que $w(M) = w(G)$ y G es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $Iso(M,\rho)$. Si G es metrizable y d es una métrica compatible en G e invariante por la izquierda, entonces G es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $Iso(G,d)$.*

Demostración. La topología de un grupo topológico es inducida por una familia de pseudométricas continuas, invariantes por la izquierda y acotadas por 1 con cardinalidad $w(G)$ (Proposición A.3). Sea $\{d_i : i \in I\}$ una de tales familias. Para cada d_i se definen R_i relación en G y D_i métrica en G/R_i como en el párrafo anterior. Es fácil ver que para cualquier $i \in I$ cada $g \in G$ induce una isometría en G/R_i, a saber $R_i[x] \mapsto R_i[gx]$; esto produce un homomorfismo $\Phi_i : G \to \mathrm{Iso}(G/R_i,D_i)$. Además si $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es una red en G convergente a algún $g \in G$, entonces para cualquier $x \in G$ se tiene

$$\Phi_i(g)(R_i[x]) = R_i[gx] = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} R_i[g_\alpha x] = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} \Phi_i(g_\alpha)(R_i[x]),$$

por lo que tal homomorfismo es continuo. Sea Φ el producto diagonal de $\{\Phi_i\}_{i\in I}$, esto es, $\Phi : G \to \prod_{i\in I} \mathrm{Iso}(G/R_i,D_i)$ con $\Phi : g \mapsto (\Phi_i(g))_{i\in I}$. Por continuidad de las funciones Φ_i, Φ es continua. Si $g_1, g_2 \in G$ y $g_1 \neq g_2$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $d_{i_0}(g_1,g_2) \neq 0$, luego

$$\Phi_{i_0}(g_1)(R_{i_0}[e]) = R_{i_0}[g_1] \neq R_{i_0}[g_2] = \Phi_{i_0}(g_2)(R_{i_0}[e])$$

por lo que Φ es inyectivo. Además si $(h_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es una red en G tal que $(\Phi(h_\alpha))_{\alpha\in\mathscr{A}}$ converge a algún $\Phi(h)$, entonces

$$R_i[h] = \Phi_i(h)(R_i[e]) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} \Phi_i(h_\alpha)(R_i[e]) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} R_i[h_\alpha]$$

para cualquier i, i.e., $d_i(h_\alpha,h) \to 0$ para cada i; así $h_\alpha \to h$. Por tanto Φ es un homomorfismo y un encaje topológico.

Para cada $i \in I$ considérese $(M_i,\rho_i;f_i)$ un espacio métrico asociado a (G,d_i), tal que $M_i \cap M_j = \varnothing$ si $i \neq j$. Según lo anterior existe un homomorfismo y encaje topológico $G \rightarrowtail \prod_{i\in I} \mathrm{Iso}(M_i,\rho_i)$. Sea ρ la métrica en $M := \bigoplus_{i\in I} M_i$ dada por $\rho(x,y) = \rho_i(x,y)$ si $x,y \in M_i$ y $\rho(x,y) = 1$ en otro caso. Nótese que para cualquier $(\varphi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Iso}(M_i,\rho_i)$ se tiene que $\varphi := \bigcup_{i\in I} \varphi_i \in \mathrm{Iso}(M,\rho)$. De esta forma se tiene que $\prod_{i\in I} \mathrm{Iso}(M_i,\rho_i)$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Iso}(M,\rho)$. Finalmente $w(G) = |I| \leq \prod_{i\in I} w(M_i) \leq |I|w(G) = w(G)$, por lo que $w(M) = \prod_{i\in I} w(M_i) = w(G)$.

Supóngase ahora que G es metrizable y sea d una métrica compatible e invariante por la izquierda. Claramente asignar a cada g la función $G \to G$, $x \mapsto gx$ es un homomorfismo inyectivo de G a $\mathrm{Iso}(G,d)$; además una red $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}} \subseteq G$ converge a algún $g \in G$ si y sólo si $g_\alpha x \to gx$ para cada $x \in G$ por lo tanto esta asignación es también un encaje topológico. ■

Lo siguiente es presentar la herramienta necesaria para probar los principales resultados de la sección. Para ello es necesaria cierta notación y terminología:

Para una función $f : X \to X$ y $n \in \mathbb{N}^+$ se denotará por $\bar{f}^n$ la n-ésima potencia cartesiana de f, esto es $\bar{f}^n : X^n \to X^n$ donde $\bar{f}^n(x_1,\ldots,x_n) = (f(x_1),\ldots,f(x_n))$; además para un conjunto unitario arbitrario $\{w\}$ se denotará por $f_{(w)}$ a la función $f \times Id_{\{w\}} : X \times \{w\} \to X \times \{w\}$. Similarmente para $d : X \times X \to X \times X$ métrica, con $\bar{d}^n$ se denota la métrica del supremo en X^n y $d_{(w)}$ es la métrica en $X \times \{w\}$ definida como $d_{(w)}((x,w),(y,w)) = d(x,y)$. Además para un espacio topológico V y una función continua $v : V \to V$ se definen $\widehat{V} = (V \times \mathbb{N}) \sqcup (\bigsqcup_{n \geq 1} V^n) \sqcup \mathbb{N}$ y $\widehat{v} : \widehat{V} \to \widehat{V}$ por las reglas $\widehat{v}\restriction_{V \times \{m\}} = \bar{v}^m$, $\widehat{v}\restriction_{V^n} = \bar{v}^n$ y $\widehat{v}(m) = m$ para cualesquier $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}^+$. Finalmente, para un espacio métrico (X,d) y $A,B,C \subseteq \mathbb{N}$ con $0,1 \notin C$, se dice que una métrica ρ en $(X \times A) \sqcup (\bigsqcup_{j \in C} X^j) \sqcup B$ *respeta* d si se satisface:

(FR1) ρ coincide con $d_{(m)}$ en $X \times \{m\}$ para todo $m \in A$.

(FR2) ρ coincide con $\bar{d}^n$ en X^n para todo $n \in C$.

(FR3) $\rho(x,y) \geq 1$ para todos x y y puntos en miembros distintos de la colección $\{X \times \{m\} : m \in A\} \cup \{X^n : n \in C\} \cup \{\{k\} : k \in B\}$.

Nótese que en tal caso se satisface

(FR4) ρ es compatible y si d es completa ρ lo es también.

Lema 2.1.2. *Sea $\{(X_s,d_s)\}_{s \in S}$ un conjunto no vacío de espacios métricos tales que para $A := \bigcap_{s \in S} X_s \neq \varnothing$ se cumple que A es cerrado en X_s, $A = X_s \cap X'_s$ y para cualesquier s y s' elementos distintos de S $d_s\restriction_{A \times A} = d_{s'}\restriction_{A \times A}$. Sean $X := \bigcup_{s \in S} X_s$ y $d : X \times X \to [0,\infty)$ dada por las reglas $d\restriction_{S \times S} = d_s$ para toda $s \in S$ y*

$$d(x,y) = \text{ínf}\{d_s(x,a) + d_{s'}(y,a) : a \in A\}$$

si $x \in X_s \setminus X_{s'}$ y $y \in X_{s'} \setminus X_s$.
Entonces d es una métrica en X y además para cada $(f_s)_{s \in S} \in \prod_{s \in S} Iso(X_s,d_s)$ tal que $f_s\restriction_A = f_{s'}\restriction_A \in Iso(A, d_s\restriction_{A \times A})$ se tiene que $f := \bigcup_{s \in S} f_s \in Iso(X,d)$.

Demostración. Sean $x,y,z \in X$ Si $x,y,z \in X_s$ para algún s, entonces las propiedades de métrica se satisfacen. Supóngase entonces que $x \in X_s$ y $y \in Y_{s'}$ con $s \neq s'$. Claramente $d(x,y) = \text{ínf}\{d_s(x,a) + d_{s'}(y,a) : a \in A\} > 0$, $d(x,x) = d_s(x,x) = 0$ y

$d(x,y) = \text{ínf}\{d_s(x,a)+d_{s'}(y,a) : a \in A\} = \text{ínf}\{d_{s'}(y,a)+d_s(x,a) : a \in A\} = d(y,x)$
Resta probar la desigualdad del triángulo. Ya que todo conjunto es biyectable con un ordinal se supondrá que S es un ordinal (≥ 2). La prueba se hará por inducción:

Base($S = \{0,1\}$): Si $x,z \in X_0$ y $y \in X_1$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= \text{ínf}\{d_0(x,a)+d_1(y,a) : a \in A\} + \text{ínf}\{d_1(y,a)+d_0(z,a) : a \in A\} \\ &= \text{ínf}\{d_0(x,a)+d_1(y,a)+d_1(y,a')+d_0(z,a') : a,a' \in A\} \\ &\geq \text{ínf}\{d_0(x,a)+d_1(a,a')+d_0(z,a') : a,a' \in A\} \geq d_0(x,z) = d(x,z). \end{aligned}$$

Si $x,y \in X_0$ y $z \in X_1$, entonces

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= d_0(x,y) + \text{ínf}\{d_0(y,a)+d_1(z,a) : a \in A\} \\ &= \text{ínf}\{d_0(x,y)+d_0(y,a)+d_1(z,a) : a \in A\} \\ &\geq \text{ínf}\{d_0(x,a)+d_1(z,a) : a \in A\} = d(x,z). \end{aligned}$$

El caso $y \in X_0$ y $x,z \in X_1$ y el caso $x \in X_0$ y $y,z \in X_1$ son análogos a los anteriores.

Sucesores: Asúmase el resultado válido para un ordinal α y $S = \alpha+1$. Considerando $Y_0 = \bigcup_{0 \leq s < \alpha} X_s$ y $Y_1 = X_\alpha$ la prueba se reduce al caso $S = \{0,1\}$.

Límites: Supóngase que S es un ordinal límite y que el resultado es válido para cualquier $\alpha < S$. Para $x,y,z \in X$ cualesquiera existe α_0 tal que $x,y,z \in \bigcup_{\alpha<\alpha_0} X_\alpha$ por lo que la desigualdad es válida.

Por tanto d es una métrica en X.

Es claro de las hipótesis que f es una función bien definida. Sean $x,y \in X$. Si $x,y \in X_s$ para algún $s \in S$. Entonces

$$d(f(x),f(y)) = d_s(f_s(x),f_s(y)) = d_s(x,y) = d(x,y);$$

si $x \in X_s \setminus X_{s's}$ y $y \in X_{s'} \setminus X_s$ para algunos $s,s' \in S$, entonces

$$\begin{aligned} d(f(x),f(y)) &= \text{ínf}\{d_s(f(x),a)+d_{s'}(f(y),a) : a \in A\} \\ &= \text{ínf}\{d_s(f_s(x),f_s(a))+d_{s'}(f_{s'}(y),f_{s'}(a)) : a \in A\} \\ &= \text{ínf}\{d_s(x,a)+d_{s'}(y,a) : a \in A\} = d(x,y). \end{aligned}$$

Por tanto $f \in \text{Iso}(X,d)$. ■

Lema 2.1.3. *Sean (X,ρ) un espacio métrico con $\rho < 1$ y $J \subseteq \mathbb{N}$ con $|J| = n+1 > 2$ y $0 \in J$. Entonces existe una métrica λ en $F := (X \times J) \sqcup X^n$ que satisface*

(a) λ respeta ρ y $\lambda \leq 5$.

(b) $\forall u \in Iso(X,\rho)$ $\widehat{u}\restriction_F \in Iso(F,\lambda)$

(c) *Si $g \in Iso(F,\lambda)$ es tal que $g(X \times \{j\}) = X \times \{j\}$ para cada $j \in J$, entonces $g = \widehat{u}\restriction_F$ para algún $u \in Iso(X,\rho)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad puede tomarse $J = \{0,1,\dots,n\}$. Sean $A = \{(x,\dots,x) \in X^n : x \in X\}$ y λ_0' la métrica en $X_0 = (X \times \{0\}) \sqcup A$ que coincide con $\bar{\rho}^n$ en A y con $\rho_{(0)}$ en $X \times \{0\}$ y dada por $\lambda_0'((x,0),(a,\dots,a)) = 1+\rho(x,a)$ si $x \in X$ y $(a,\dots,a) \in A$. Aplicando el Lema 2.1.2 a $\{(X_0,\lambda_0'),(X^n,\bar{\rho}^n)\}$ se obtiene una métrica λ_0 en $(X \times \{0\}) \sqcup X^n$ que extiende λ_0' y $\bar{\rho}^n$; es claro que λ_0 respeta ρ, $\lambda_0 \leq 3$, $\widehat{u}\restriction_{(X\times\{0\})\sqcup X^n} \in \mathrm{Iso}((X \times \{0\}) \sqcup X^n, \lambda_0)$ si $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ y para todos $x,x_1,\dots,x_n \in X$

$$\lambda_0((x,0),(x_1,\dots,x_n)) = 1 \Leftrightarrow x = x_1 = \cdots = x_n$$

Ahora, para $j \in J \setminus \{0\}$ sea λ_j la métrica en $(X \times \{j\}) \sqcup X^n$ que coincide con $\rho_{(j)}$ en $X \times \{j\}$ y con $\bar{\rho}^n$ en X^n y definida como $\lambda_j((x,j),(x_1,\dots,x_n)) = 1+\rho(x,x_j)$ si $x,x_1,\dots,x_n \in X$. Nótese además que λ_j respeta ρ, $\lambda_j \leq 2$ y para $x,x_1,\dots,x_n \in X$

$$\lambda_j((x,j),(x_1,\dots,x_n)) = 1 \Leftrightarrow x = x_j$$

Aplicando el Lema 2.1.2 a la familia $\{((X \times \{j\}) \sqcup X^n, \lambda_j) : j \in J\}$ se obtiene una métrica λ en F. Para cada $j \in \{0,\dots,n\}$ λ coincide con λ_j en $X \times \{j\}$ y X^n, por lo que respeta a p y si $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$, entonces $\widehat{u}\restriction_F \in \mathrm{Iso}(F,\lambda)$; además $\lambda_0 \leq 3$ y $\lambda_j \leq 2$ implica que $\lambda \leq 5$.

Dado g como en (c) sea $u : X \to X$ tal que $u_{(0)} = g\restriction_{X\times\{0\}}$ y similarmente para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ sea $u_j : X \to X$ tal que $(u_j)_{(j)} = g\restriction_{X\times\{j\}}$, finalmente sea $f = g\restriction_{X^n}$. Para cualesquier $x = (x_1,\dots,x_n) \in X^n$ y $j \in J \setminus \{0\}$, denotando como π_j a la j-ésima proyección de X^n, se tiene que

$$1 = \lambda((\pi_j(x),j),x) = \lambda(g(\pi_j(x),j),g(x)) = \lambda((u_j\pi_j(x),j),f(x)),$$

por lo que $u_j \circ \pi_j = \pi_j \circ f$. En consecuencia $f(x) = (u_j(x_j))_{j=1}^n$. Finalmente, para cualquier $z \in X$ se tiene que

$$1 = \lambda((z,0),(z,\dots,z)) = \lambda(g(z,0),g(z,\dots,z)) = \lambda((u(z),0),(u_1(z),\dots,u_n(z)))$$

y entonces $u(z) = u_1(z) = \cdots = u_n(z)$. ■

Lema 2.1.4. *Sean (X,ρ) un espacio métrico con $\rho < 1$, $G < Iso(X,\rho)$, $z \in X^n$ y $0 \in J \subseteq \mathbb{N}$ tal que $|J| = n+1 > 2$. Denótese por D a la cerradura (en X^n) del conjunto $\{\bar{u}^n(z) : u \in G\}$. Entonces existe una métrica μ en $F := [X \times J] \sqcup X^n \sqcup \{n-1\}$ con las siguientes propiedades:*

(a) *μ respeta ρ y $\mu \leq 11$*

(b) $\widehat{u}\restriction_F \in Iso(F,\mu)$ *si* $u \in G$

(c) Para cualquier $g \in Iso(F,\mu)$ *existe* $u \in Iso(X,\rho)$ *tal que* $g = \widehat{u}\restriction_F$ *y* $\bar{u}^n(z) \in D$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad puede considerarse $J = \{0,\dots,n\}$. Sean λ como en el Lema 2.1.3 y $5 < c_0 < \cdots < c_{n+1} < 6$. Sean $A = (X \times J) \sqcup D$ y μ_0 la métrica en $A \sqcup \{n-1\}$ que coincide con λ en A, $\mu_0((x,j),n-1) = c_j$ para $x \in X$ y $j \in J$ y $\mu(y,n-1) = c_{n+1}$ para $y \in D$. Aplicando el Lema 2.1.2 al conjunto $\{(A \sqcup \{n-1\},\mu_0),(F \setminus \{n-1\},\lambda)\}$ se obtiene una métrica μ que extiende μ_0 y λ. Como λ respeta ρ y μ coincide con λ en $F \setminus \{n-1\}$ entonces μ respeta ρ. $\lambda \leq 5$ y $\mu_0 \leq 6$ implican que $\mu \leq 11$. Por tanto se cumple (a). Además, para cada $u \in G$ $\bar{u}^n(D) = D$ y por (b) del Lema 2.1.3 se satisface también (b).

Sea $g \in \mathrm{Iso}(F,\mu)$. Como $\lambda \leq 5 < c_0 < c_1$ se tiene que $n-1$ es el único punto $q \in F$ que satisface $\mu(q,x) = c_0$ y $\mu(q,y) = c_1$ para algunos $x,y \in F$, entonces $g(n-1) = n-1$. Además, si $x \in X^n$ entones $\mu(x,n-1) \geq \mu(D,n-1) = c_{n+1}$ por lo que $X \times \{j\} = \{x \in F : \mu(x,n-1) = c_j\}$ y así $\mu(X \times \{j\}) = X \times \{j\}$ para cada $j \in J$. Como $g\restriction_{F\setminus\{n-1\}} \in \mathrm{Iso}(F \setminus \{n-1\},\lambda)$ y $g(n-1) = n-1$ por el punto (c) del Lema 2.1.3 existe $u \in \mathrm{Iso}(X,\rho)$ tal que $g = \widehat{u}\restriction_F$. Finalmente, $g(z) = \bar{u}^n(z) \in X^n$ y para $y \in X^n$ $\mu(y,n-1) = 1$ si y sólo si $y \in D$, con lo que $\bar{u}^n(z) \in D$. ■

El último lema preliminar es un resultado técnico sobre la existencia de métricas con una propiedad conveniente en conjuntos arbitrarios.

Lema 2.1.5. *Sea X un conjunto con cardinalidad mayor o igual a* 6*. Entonces existe una métrica* $d : X \times X \to \{0,1,2\}$ *tal que* $Iso(X,d) = \{Id_X\}$.

Demostración. Para $x \in X$ se denotará $S(x) = \{y \in X : d(x,y) = 1\}$. Obsérvese que basta definir este conjunto para cada $x \in X$, lo cual se hará en algunos casos.

Si $5 < |X| < \aleph_0$, sin pérdida de generalidad $X = \{0,1,\dots,n\}$ con $n \geq 5$. Se definen los conjuntos $S(x)$ como

$$S(0) = \{1\}, \qquad S(4) = \{1,3,5\},$$
$$S(1) = \{0,2,3,4\}, \qquad S(n) = \{n-1\} \text{ y}$$
$$S(2) = \{1,3\}, \qquad S(j) = \{j-1,j+1\} \text{ si } 4 < j < n.$$
$$S(3) = \{1,2,4\},$$

Entonces para cualquier $g \in \mathrm{Iso}(X,d)$ se tiene que $g(1) = 1$, porque este es el único elemento que satisface $|S(x)| = 4$; luego $g(0) = 0$ pues $S(0) = \{1\}$; $g(2) = 2$ ya que es el único elemento tal que $|S(x)| = 2$ y $1 \in S(x)$; $g(3) = 3$ pues es el único elemento tal que $|S(x)| = 2$ y $1 \notin S(x)$; $g(4) = 4$ por la definición de $S(3)$; finalmente si $4 < j < n$ $g(j) = j$ se verifica inductivamente.

Si $|X| = \aleph_0$ puede considerarse que $X = \mathbb{N}$. Se define d por

$$d(m,n) = \text{mín}(|m-n|,2).$$

Para cualquier $g \in \mathrm{Iso}(X,d)$ necesariamente $g(0) = 1$ ya que es el único punto que satisface $|S(x)| = 1$; inductivamente se tiene que $g(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El caso en que X es no numerable se verificará por inducción, para ello sea $I := \{\kappa : \kappa \text{ es cardinal y } \aleph_0 \leq \kappa < |X|\}$. Supóngase entonces que el resultado es válido para cualquier Y tal que $|Y| \in I$.

Si $|X|$ es el cardinal sucesor de algún κ puede asumirse que X es una unión disjunta $X' \sqcup (X' \times Y) \sqcup \{a\}$ donde $|X'| = \kappa$ y $|Y| = \kappa^+$, el sucesor cardinal de κ. Por hipótesis de inducción existe una métrica d' en X' con las propiedades buscadas. Como $|Y| \leq 2^\kappa$, existe una función inyectiva $\mu : X' \times Y \rightarrowtail \{1,2\}^{X'}$ tal que $\mu(x,y)(x) = 1$ para cualquier $(x,y) \in X' \times Y$. Se define ahora d de forma que

$d(x,y) = d'(x,y)$ si $x,y \in X'$, $\qquad d(x,y) = 1$ si $x,y \in X' \times Y$ y $x \neq y$

$d(x,y) = \mu(x)(y)$ si $x \in X' \times Y$ y $y \in X'$, $\qquad d(x,a) = 1$ si $x \in X'$.

y $d(x,a) = 2$ si $x \in X' \times Y$,

Nótese que para cualesquier $x \in X'$ y $y \in Y$ se tiene que $\{x\} \times Y \subseteq S(x)$ y $X' \times Y \setminus \{(x,y)\} \subseteq S(x,y)$, además $S(a) = X'$. Se tiene entonces que a es el único punto tal que $|S(x)| = \kappa$, por lo que para cualquier $g \in \mathrm{Iso}(X,d)$ $g(a) = a$, consecuentemente $g(X') = X'$ y así $g\restriction_{X'} = Id_{X'}$. Luego, si $y \in X' \times Y$, entonces $g(y) \in X' \times Y$, así $\mu(y)(x) = d(y,x) = d(g(y),x) = \mu(g(y))(x)$ para cualquier $x \in X'$ y por inyectividad de μ $g(y) = y$.

Si $|X|$ es un cardinal límite estrictamente mayor que $|I|$ sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $X_\alpha \cap X_\beta = X_\alpha \cap I = \varnothing$ y $|X_\alpha| = \alpha$ para $\alpha, \beta \in I$ cualesquiera. Nótese que el conjunto $X_* := \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ tiene cardinalidad $|X|$, entonces puede suponerse $X = \{a\} \sqcup I \sqcup X_*$. Por hipótesis inductiva existen d' una métrica en I y d_α una métrica en X_α para cada $\alpha \in I$ como las deseadas. Se define d que extienda a estas métricas y tal que $d(x,y) = 1$ si $x \in X_\alpha$ y $y \in X_\beta$ para $\alpha, \beta \in I$ distintos, $d(\alpha, x) = 2$ si $x \in X_\alpha$, $d(\alpha, x) = 1$ si $x \in X_* \setminus X_\alpha$, $d(a, \alpha) = 1$ y $d(a,x) = 2$ para $\alpha \in I$ y $x \in X_*$ cualesquiera. Nótese que para cualesquier $\alpha \in I$ y $x \in X_\alpha$ se cumple $X_* \setminus X_\alpha \subseteq S(\alpha) \cap S(x)$, además $S(a) = I$. De manera similar al caso anterior para cualquier $g \in \mathrm{Iso}(X,d)$ $g(a) = a$, $g\restriction_I = Id_I$ y $g(X_*) = X_*$. De las dos últimas igualdades y la definición de d en cada $\{\alpha\} \times X_*$ se infiere que $g(X_\alpha) = X_\alpha$ para cualquier $\alpha \in I$, consecuentemente $g\restriction_{X_*} = Id_{X_*}$.

Si $|X|$ es un cardinal límite y $|X| = |I|$, entonces puede suponerse que $X = I$. Para cada $\alpha \in X$ se tiene que $|\{\beta \in I : \aleph_0 \leq \beta < \alpha\}| \leq \alpha < |X|$, entonces existe $\gamma(\alpha) \in X$ tal que $|\{\beta \in I : \alpha < \beta \leq \gamma(\alpha)\}| = \alpha$. Se define ahora d de modo que si $\aleph_0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq |I|$, entonces $d(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ si y sólo si $\alpha_2 \leq \gamma(\alpha_2)$. Para cualquier $\alpha \in X$

$$S(\alpha) = \{\beta \in X : \beta < \alpha < \gamma(\beta)\} \sqcup \{\beta \in X : \alpha < \beta \leq \gamma(\alpha)\}$$

por lo que $|S(\alpha)| = \alpha$. Se sigue que $\mathrm{Iso}(X,d)$ es trivial. ■

Dado un cardinal infinito β se denota por D_β un espacio discreto fijo con cardinalidad β. Si (X,d) es un espacio métrico y $f : X \to X$ es una función continua, X^0 es un espacio con cardinalidad 1 y $\bar{f}^0$ denota a la función identidad en X^0. Se definen también $T(X) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} X^n$, $\widehat{X}_\beta := T(X) \times D_\beta$ y $\widehat{f}_\beta := (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^n) \times Id_{D_\beta}$. Para cualesquier $J \subseteq \mathbb{N}$ y $\{A_n\}_{n\in J} \subseteq \mathscr{P}(D_\beta)$ una métrica ρ en $\bigoplus_{n\in J}(X^n \times A_n) \subseteq \widehat{X}_\beta$ respeta d si se cumple que

(R1) ρ coincide con $\bar{d}^n{}_{(\xi)}$ en $X^n \times \xi$ para cada $n \in J \setminus \{0\}$ y $\xi \in A_n$.

(R2) $\rho(x,y) \geq 1$ para todos x y y puntos en miembros distintos de la colección $\{X^n \times \{\xi\} : n \in J,\, \xi \in A_n\}$.
Nótese que en tal caso se satisface

(R3) ρ es compatible y si d es completa ρ lo es también.

Teorema 2.1.6. *Sean β un cardinal infinito y (X,d) un espacio métrico acotado y no vacío tal que $w(X) \leq \beta$. Para cualquier subgrupo cerrado G de $Iso(X,d)$ existe una métrica υ en $\widehat{X}_\beta$ que respeta a d tal que*

$$\begin{aligned} G &\to Iso(\widehat{X}_\beta, \upsilon) \\ u &\mapsto \widehat{u}_\beta \end{aligned}$$

es un isomorfismo de grupos topológicos.

Demostración. En adelante se identificará D_β con $X^0 \times D_\beta$. Considérese $r \in [1,\infty)$ tal que $d < r$, entonces $p := \frac{1}{r}d$ es una métrica acotada por 1 y compatible en X para la cual $\mathrm{Iso}(X,p) = \mathrm{Iso}(X,d)$. Fíjese $\theta \in D_\beta$ y sea $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición del conjunto $D_\beta \setminus \{\theta\}$ tal que $|S_n| = \beta$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se denotarán $S_* := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ y $X_* := \widehat{X}_\beta \setminus (S_0 \cup \{\theta\})$. Por la definición de los conjuntos S_n para cada $\xi \in D_\beta$ existe un único $n(\xi) \in \mathbb{N}$ tal que $\xi \in S_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tau_n : S_n \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow D_\beta$ una función biyectiva. Sea $\{J_\xi : \xi \in S_*\}$ un partición de $D_\beta \setminus \{\theta\}$ tal que $|J_\xi| = n(\xi)$ para todo $\xi \in S_*$. Para cada $\xi \in S_*$ sea μ_ξ la métrica en

$$F_\xi := \left[X \times (J_\xi \cup \{\theta\})\right] \sqcup \left[X^{n(\xi)+1} \times \{\tau_{n(\xi)+1}(\xi)\}\right] \sqcup \{\xi\}$$

cuya existencia está dada por el Lema 2.1.4. Nótese que si $\xi, \eta \in S_*$ son distintos, entonces $F_\xi \cap F_\eta = X \times \{\theta\}$, el cual es cerrado en cada (F_ξ, μ_ξ) (por (FR2)). Puede entonces aplicarse el Lema 2.1.2 a la familia $\{(F_\xi, \mu_\xi) : \xi \in S_*\}$ para obtener una métrica μ en $\bigcup_{\xi\in S_*} F_\xi = X_*$. Entonces μ respeta p, $\mu \leq 11$ y $\widehat{u}_\beta\restriction_{X_*} \in \mathrm{Iso}(X_*, \mu)$ para cada $u \in G$.

Sea $Y \subseteq X$ denso tal que $|Y| \leq w(X)$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ $\kappa_n : S_n \twoheadrightarrow Y^n$ una función suprayectiva.

Afirmación. Si $g \in \mathrm{Iso}(X_*, \mu)$ cumple que $g(A) = A$ para cada A en la colección $S := \{X^n \times \{\xi\} : n \in \mathbb{N}^+, \xi \in D_\beta\} \cup \{\{\xi\} : \xi \in S_*\}$, entonces $g = \widehat{u}_\beta\restriction_{X_*}$ para algún $u \in G$.

Prueba: Sea g como en el enunciado. Entonces $g(F_\xi) = F_\xi$ para cualquier $\xi \neq \theta$; luego, por las propiedades de las respectivas μ_ξ, $g\restriction_{F_\xi} = \widehat{(u_\xi)}_\beta\restriction_{F_\xi}$ para algún $u_\xi \in \mathrm{Iso}(X,d)$ con $\bar{u_\xi}^n(\kappa_{n(\xi)}(\xi)) \in B_\xi := \overline{\{f^{n(\xi)}(\kappa_{n(\xi)}(\xi)) : f \in G\}} \subseteq X^n$. Si además $\eta \neq \theta$, como μ respeta p, entonces

$$\begin{aligned} p(u_\xi(x), u_\eta(x)) &= \mu((u_\xi(x), \theta), (u_\eta(x), \theta)) = \mu(\widehat{u_\xi}_\beta(x,\theta), \widehat{u_\eta}_\beta(x,\theta)) \\ &= \mu(g(x,\theta), g(x,\theta)) = \mu((x,\theta),(x,\theta)) = 0, \end{aligned}$$

por lo que $u := u_\xi$ no depende de ξ. Para cualesquier $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_n \in Y$ existe $x \in S_n$ tal que $\kappa_n(x) = (y_i, \ldots, y_n)$, entonces por la segunda propiedad de u se tiene que

$$(u(y_1), \ldots, u(y_{n(\xi)})) \in \overline{\{(g(y_1), \ldots, g(y_{n(\xi)})) : g \in G\}}.$$

Sea U una vecindad de $u\restriction_Y$ en X^Y, existen $y_1, \ldots, y_n \in Y$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$V := \{f \in X^Y : p(f(y_i), u(y_i)) < \varepsilon,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} \subseteq U$$

y por la antes señalado existe $g \in G$ tal que $g\restriction_Y \in V$, luego $u\restriction_Y$ pertenece a la cerradura de $\{g\restriction_Y : g \in G\}$ en X^Y. Como además $f \mapsto f\restriction_Y$ es un encaje de $\mathrm{Iso}(X,p)$ en X^Y (Lema 1.1.1) se sigue que u pertenece a la cerradura de G en $\mathrm{Iso}(X,p)$, i.e. $u \in G$. †

De acuerdo al Lema 2.1.5 existe una métrica $\lambda : S_0 \times S_0 \to \{0\} \cup [1,2]$ tal que $\mathrm{Iso}(S_0, \lambda) = \{Id_{S_0}\}$. Considérese el conjunto S definido en la afirmación, como $|S| = |S_0| = \beta$ existe una función inyectiva $\nu : S \rightarrowtail \{11, 12\}^{S_0}$. Se define una métrica ρ' en $X_* \sqcup S_0 = \widehat{X}_\beta \setminus \{\theta\}$por $\rho'\restriction_{X_* \times X_*} = \mu$, $\rho'\restriction_{S_0 \times S_0} = \lambda$ y $\rho'(\xi, \eta) = \nu(A_\xi)(\eta)$ si $\xi \in X_*$ y $\eta \in S_0$, con A_ξ el único elemento de S tal que $\xi \in A_x i$. Se verifica la desigualdad del triángulo:
Sean $x, y, z \in X_* \sqcup S_0$. Si $x, z \in X_*$ y $y \in S_0$, entonces

$$\rho'(x,y) + \rho'(y,z) \geq 22 \geq \mu(x,z) = \rho'(x,z).$$

Si $x, z \in S_0$ y $y \in X_*$, entonces

$$\rho'(x,y) + \rho'(y,z) \geq 22 > \lambda(x,z) = \rho'(x,z).$$

Si $x, y \in X_*$ y $z \in S_0$, entonces

$$\rho'(x,y) + \rho'(y,z) = \mu(x,y) + \nu(A_y)(z)$$

y esto último es igual a $\mu(x,y)+\rho'(x,z)$ si $A_x = A_y$ y mayor o igual a 12 si $A_x \neq A_y$ (porque μ respeta p), en cualquier caso

$$\rho'(x,y)+\rho'(y,z) \geq \rho'(x,z).$$

Si $x,y \in S_0$ y $z \in X_*$, entonces

$$\rho'(x,y)+\rho'(y,z) = \lambda(x,y)+\nu(A_z)(y) \geq 12 \geq \rho'(x,a).$$

Finalmente se extiende ρ' a una métrica ρ en $\widehat{X}_\beta$ definiendo $\rho(\xi,\theta) = 22$ si $\xi \in X_*$ y $\rho(\eta,\theta) = 23$ si $\eta \in S_0$. Es fácil ver que ρ respeta p.

Se ha señalado que $\widehat{g}_\beta \restriction_{X_*} \in \mathrm{Iso}(X_*,\mu)$, además para cualquier $\eta \in S_0 \cup \{\theta\}$ $\xi \mapsto \rho(\xi,\eta)$ es constante en cada miembro de S; se sigue que $\widehat{g}_\beta \in \mathrm{Iso}(\widehat{X}_\beta,\rho)$ para cualquier $g \in G$. Entonces la función $g \mapsto \widehat{g}_\beta$ está bien definida. Es además evidente que esta función es un homomorfismo inyectivo y que para una red $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}} \subseteq G$ y $g \in G$, g_α converge puntualmente a g si y solamente si $\widehat{(g_\alpha)}_\beta$ lo hace a $\widehat{g}_\beta$. Resta entonces verificar la suprayectividad de esta función.

Sea $u \in \mathrm{Iso}(\widehat{X}_\beta,\rho)$. Como θ es el único punto $w \in \widehat{X}_\beta$ para el cual se cumple $|\{\xi \in \widehat{X}_\beta : \rho(\xi,w) = 23\}| > 1$ necesariamente $u(\theta) = \theta$. Consecuentemente $u(X_*) = X_*$ y $u(S_0) = S_0$. Luego $u\restriction_{S_0} = Id_{S_0}$. Para $\xi,\eta \in X_*$ arbitrarios se tiene que $\rho(\xi,\delta) = \rho(\eta,\delta)$ para todo $\delta \in S_0$ si y sólo si ξ,η pertenecen al mismo elemento de S, esto por inyectividad de ν. Por las últimas dos observaciones $u(A) = A$ para todo $A \in S$. Luego, ya que ρ extiende a μ existe $g \in G$ tal que $u\restriction_{X_*} = \widehat{g}_\beta \restriction_{X_*}$. Como $u(\xi) = \xi = \widehat{g}_\beta(\xi)$ para cualquier $\xi \notin X_*$, $u = \widehat{g}_\beta$. Por tanto $G \to \mathrm{Iso}(\widehat{X}_\beta,\rho)$, $g \mapsto \widehat{g}_\beta$ es un isomorfismo topológico. Para concluir la prueba sea $\upsilon := r\rho$, esta es claramente una métrica en $\widehat{X}_\beta$ y además $\mathrm{Iso}(\widehat{X}_\beta,\rho) = \mathrm{Iso}(\widehat{X}_\beta,\upsilon)$. ■

Corolario 2.1.7. *Todo grupo polaco es topológicamente isomorfo al grupo de isometrías de un espacio polaco.*

Demostración. Sean H un grupo polaco y d_0 una métrica en H invariante por la izquierda y acotada por 1 (ver Teorema A.2). Sea (X,d) la compleción de (H,d_0), X es un espacio polaco. Por invarianza de d_0, para cada $h \in H$ la biyección de H $g \mapsto hg$ es una isometría, por ello se extiende a una única $u_h \in \mathrm{Iso}(X,d)$. Así $h \mapsto u_h$ es un homomorfismo y un encaje topológico de H en $\mathrm{Iso}(X,d)$; sea G la imagen de H bajo esa función. G es un subgrupo polaco del grupo polaco $\mathrm{Iso}(X,d)$, por lo que es cerrado. Se concluye aplicando el Teorema 2.1.6 con $\beta = \aleph_0$. ■

Corolario 2.1.8. *Todo grupo compacto y metrizable es topológicamente isomorfo al grupo de isometrías de un espacio métrico compacto.*

Demostración. Sean H un grupo compacto y d una métrica en H invariante por la izquierda y acotada por 1. Por el Teorema 2.1.1 H es topológicamente isomorfo a un subgrupo G de $\mathrm{Iso}(H,d)$. Por compacidad de H, G es cerrado en $\mathrm{Iso}(H,d)$ y nuevamente se concluye del Teorema 2.1.6. ∎

2.2. Caracterización de los grupos realizables como grupos de isometrías

Se dará ahora una caracterización de los grupos topológicos que son isomorfos a un grupo de isometrías. Para esto será necesaria la siguiente definición:

Definición 2.2.1. Un grupo topológico G es *Raikov completo* si cada red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ en G es convergente cuando satisface

(C) Para toda vecindad U del elemento neutro de G existe $\alpha_0 \in \mathscr{A}$ tal que $x_\alpha x_{\alpha'}^{-1}, x_\alpha^{-1}x_{\alpha'} \in U$ si $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$.

Todo grupo topológico G es topológicamente isomorfo a un subgrupo denso de un grupo Raikov completo que es único salvo isomorfismo topológico (ver Apéndice B). A tal grupo se le llama Raikov compleción de G y se le denota por G^*.

Si τ es una topología en un conjunto X, τ_δ denotará la topología en X que tiene por base a la familia de conjuntos G_δ de (X,τ). Los subconjuntos cerrados o densos respecto a esta nueva topología se nombrarán G_δ-cerrados o G_δ-densos, respectivamente.

Observación 2.2.2. Si τ es una topología en X, entonces $\tau \subseteq \tau_\delta$, ya que cualquier $U \in \tau$ puede expresarse como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con cada $U_n = U$.

Proposición 2.2.3. *Si $(G,\cdot,\tau)$ es un grupo topológico, entonces $(G,\cdot,\tau_\delta)$ también lo es.*

Demostración. Sean $U \in \tau_\delta$ y $a,b \in G$ que cumplen $a\cdot b^{-1} \in U$. Por definición de τ_δ existe un conjunto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau$ tal que $a\cdot b^{-1} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq U$. Por ser $(G,\cdot,\tau)$ grupo topológico para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $V_n, W_n \in \tau$ tales que $a \in V_n$, $b \in W_n$ y $V_n \cdot W_n^{-1} \subseteq U_n$. Luego $a \in V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$, $b \in W := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ y $V \cdot W^{-1} \subseteq U$. ∎

Definición 2.2.4. Un grupo topológico $(G,\cdot,\tau)$ es G_δ-completo si $(G,\cdot,\tau_\delta)$ es Raikov completo.

Teorema 2.2.5. *Para un grupo topológico G las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) G es G_δ-completo.

(II) *G es isomorfo a un subgrupo G_δ-cerrado de un grupo Raikov completo.*

(III) *G es G_δ-cerrado en todo grupo topológico que lo contiene como subgrupo.*

(IV) *Toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}} \subseteq G$ es convergente en G si satisface*

(CC) *Para toda familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vecindades del elemento neutro e de G existen $y,z\in G$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ tales que para cada $n\in\mathbb{N}$ si $\alpha \geq \alpha_n$, entonces $x_\alpha^{-1}y, x_\alpha z^{-1} \in U_n$.*

(V) *Toda red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}} \subseteq G$ es convergente en G si satisface*

(CC') *Para toda pseudométrica continua d en G invariante por la izquierda existen $y,z\in G$ tales que $\lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(x_\alpha, y) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(x_\alpha^{-1}, z^{-1}) = 0$.*

Demostración. A lo largo de esta prueba se denota por τ a la topología de G.

$(II)\Rightarrow(I)$ Supóngase que G es un subgrupo G_δ-cerrado de un grupo Raikov completo H. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G que satisface (C) respecto a la topología τ_δ. Por ser τ_δ más fina que τ se satisface la misma condición respecto a esta y por ser H Raikov completo existe $y\in H$ tal que $x_\alpha \to y$. Sea A un conjunto G_δ en H que contiene a y, entonces $Ay^{-1} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con cada U_n vecindad abierta de e en H. Sea V_0 vecindad abierta de e tal que $\overline{V_0} \subseteq U_0$ y recursivamente para $n\geq 1$ sea V_n vecindad abierta de e tal que $\overline{V_n} \subseteq V_{n-1}\cap U_n$. Entonces $F := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$ es un conjunto G_δ y cerrado en H tal que $e\in F\subseteq Ay^{-1}$. Por la suposición inicial sobre $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ existe $\alpha_0\in\mathscr{A}$ para el cual $x_{\alpha_0}x_\alpha^{-1}\in F$ si $\alpha\geq\alpha_0$ y por ser F cerrado $x_{\alpha_0}y = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} x_{\alpha_0}x_\alpha^{-1} \in F$, consecuentemente $x_{\alpha_0}\in A$. Por tanto y pertenece a la G_δ-cerradura de G en H, i.e., $y\in G$.

$(I)\Rightarrow(III)$ Supóngase que G es un subgrupo G_δ-completo de un grupo topológico K con topología $\mathscr{O}$. Entonces τ_δ coincide con la topología heredada de $(K,\mathscr{O}_\delta)$ y por completud de (G,τ_δ) G es cerrado en $(K,\mathscr{O}_\delta)$, es decir, es G_δ-cerrado en K.

$(III)\Rightarrow(II)$ Por (III), G es G_δ-cerrado en su Raikov compleción.

$(II)\Rightarrow(IV)$ Si se satisface (II), entonces G es G_δ-cerrado en G^*. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G que satisface (CC). Entonces satisface también (C), por lo que existe $w\in G^*$ tal que $w = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} x_\alpha$. Sea A un conjunto G_δ en G^* al que w pertenece. $Aw^{-1} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ con $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de vecindades abiertas de e en G^*. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea U_n vecindad abierta y simétrica de e en G^* tal que $U_n^2\subseteq V_n$. Sean $y,z\in G$ y $\{x_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en (CC) para $\{U_n\cap G\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ya que $(x_\alpha w^{-1})_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es convergente a e, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $\alpha\geq\alpha_0$ tal que $x_\alpha w^{-1} \in U_n$, luego $zw^{-1} = (x_\alpha z^{-1})^{-1}(x_\alpha w^{-1}) \in U_n^2 \subseteq V_n$. Se sigue que $zw^{-1} \in Aw^{-1}$ y entonces $A \cap G \neq \varnothing$. Por tanto w pertenece a la G_δ-cerradura de G.

$(IV) \Rightarrow (II)$ Supóngase que se cumple (IV). Para probar (II) es suficiente verificar que G es G_δ-cerrado en G^*. Sea entonces w en la G_δ-cerradura de G en G^*, en particular $w \in \overline{G}$, por lo que existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}} \subseteq G$ convergente a w. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de vecindades abiertas de e en G^* y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea V_n una vecindad abierta y simétrica de e en G^* tal que $V_n^2 \subseteq U_n$. Por pertenecer w a la G_δ-cerradura de G existe $y \in G$ tal que $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(V_n w \cap wV_n)$. Por convergencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n \in \mathscr{A}$ tal que $x_\alpha w^{-1}, w^{-1}x_\alpha \in V_n$ si $\alpha \geq \alpha_n$. Luego

$$x_\alpha y^{-1} = (x_\alpha w^{-1})(yw^{-1})^{-1} \in V_n V_n^{-1} \subseteq U_n \text{ y}$$
$$x_\alpha^{-1} y = (w^{-1}x_\alpha)^{-1}(w^{-1}y) \in V_n^{-1} V_n \subseteq U_n$$

si $\alpha \geq \alpha_n$. Por tanto la condición (CC) se satisface y por hipótesis $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ converge en G, así $w \in G$ y G es G_δ-cerrado en G^*.

$(V) \Rightarrow (IV)$ Supóngase que se satisface (V) y sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G que cumple (CC). Sea d una pseudométrica continua e invariante por la izquierda en G; para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $U_n = B_d(e, 2^{-n})$. Por (CC) existen $y, z \in G$ y una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathscr{A}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ $x_\alpha^{-1}y, x_\alpha z^{-1} \in U_n$ si $\alpha \geq \alpha_n$. Así, $d(e, x_\alpha^{-1}y) < 2^{-n}$ y $d(e, x_\alpha z^{-1}) < 2^{-n}$ si $\alpha \geq \alpha_n$. Por tanto (CC') se satisface y por (V) $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ converge.

$(IV) \Rightarrow (V)$ Supóngase que se satisface (IV) y sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G que cumple (CC'). Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de vecindades del elemento neutro de G; según la Proposición A.3 existe una pseudométrica d continua e invariante por la izquierda en G tal que $B_d(e, 2^{-n}) \subseteq U_n$. Por (CC') existen $y, z \in G$ tales que $\lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(x_\alpha, y) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(x_\alpha^{-1}, z^{-1}) = 0$, se sigue que existe $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{A}$ como en (CC). Por (IV) $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ converge.

■

Obviamente cualquier grupo Raikov completo es G_δ-completo. A continuación se dan ejemplos de otros grupos que satisfacen también está definición.

Proposición 2.2.6. *Los siguientes grupos son G_δ-completos:*

(a) Subgrupos G_δ-cerrados de grupos G_δ-completos.

(b) El producto directo y la suma directa de una familia arbitraria de grupos G_δ-completos.

(c) *Grupos topológicos que son unión contable de subgrupos G_δ-completos.*

(d) *Grupos topológicos σ-compactos.*

(e) *Grupos topológicos en los que los subconjuntos unitarios son conjuntos G_δ.*

(f) *Iso(X,d) para un espacio métrico (X,d) arbitrario. Más aún Iso(X,d) es Raikov completo si X es completo.*

Demostración. Para cada uno de los incisos se aplicará el Teorema 2.2.5

(a) Es inmediato de la equivalencia entre (I) y (II) en el Teorema 2.2.5.

(b) Sean $\{G_s\}_{s\in S}$ un conjunto de grupos G_δ-completos y $G := \prod_{s\in S} G_s$. Se mostrará que se satisface (IV), sea entonces $(x^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G que cumple (CC) y para cada $s\in S$ sea $(x_s^{(\alpha)})_{\alpha\in\mathscr{A}}$ la proyección de esa red en G_s. Para $t\in S$ fija sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de vecindades abiertas en G_t del elemento neutro de dicho grupo. Por la condición (CC) aplicada a las vecindades $U_n = \pi_t^{-1}(V_n)$ se obtienen $y,z\in G$ y $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para cada $n\in\mathbb{N}$ si $\alpha\geq\alpha_n$, entonces $(x^{(\alpha)})^{-1}y, (x^{(\alpha)})z^{-1}\in U_n$; en particular $(x_t^{(\alpha)})^{-1}\pi_t(y), (x_t^{(\alpha)})\pi_t(z)^{-1}\in V_n$. Se sigue de lo anterior y de la completud de cada G_s que para cualquier $s\in S$ existe $x_s = lim_{\alpha\in\mathscr{A}} x_s^{(\alpha)}$ y por tanto G es G_δ-completo.
Sea $H=\bigoplus_{s\in S} G_s$; para probar que este grupo es G_δ-completo es suficiente probar que es G_δ-cerrado en G. Si $(w_s)_{s\in S}\in G\setminus H$, entonces existe $S'\subseteq S$ numerable tal que $w_s\neq e_s$ si $s\in S'$ (donde e_s es el elemento neutro de G_s). Luego $A=\{(x_s)_{s\in S}\in G : \forall s\in S' x_s\neq e_s\}$ es un conjunto G_δ que contiene a $(w_s)_{s\in S}$ ajeno a H.

(c) Sea $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ con cada G_n un grupo G_δ-completo. Si $y\in G^*\setminus G$, entonces $y\notin G_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, además por el Teorema 2.2.5 cada G_n es G_δ cerrado en G^*; luego existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia de subconjuntos G_δ en G^* tales que $y\in A_n$ y $A_n\cap G_n=\varnothing$ para cada $n\in\mathbb{N}$. Así $A:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un conjunto G_δ tal que $y\in A$ y $A\cap G=\varnothing$. Por tanto G es G_δ-cerrado en G^*.

(d) Sea $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ con cada G_n un subespacio compacto. En particular cada G_n es cerrado en G^* por lo que es también G_δ-cerrado pues la topología G_δ es más fina. El resto de la prueba es igual a la del punto anterior.

(e) En este caso τ_δ es discreto y el resultado es inmediato.

(f) Sean (X,d) un espacio métrico y $G=$Iso(X,d). Sea $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G que satisface (CC'). Considérese $x\in X$ fijo y sea $\rho : G\times G\to[0,\infty)$ dada por $\rho(u,v)=d(u(x),v(x))$. Nótese que ρ es una pseudométrica continua e invariante por la izquierda en G, entonces por (CC') existen $\psi_1,\psi_2\in G$ para los cuales $\lim\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\varphi_\alpha(x),\psi_1(x)) = \lim\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\varphi_\alpha^{-1}(x),\psi_2^{-1}(x) = 0$. Esto implica que $(\varphi_\alpha(x))_{\alpha\in\mathscr{A}}$ y $(\varphi_\alpha^{-1}(x))_{\alpha\in\alpha}$ convergen. Pueden entonces definirse funciones $\mu,\nu : X \to X$ por $\mu(x) := \lim\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} \varphi_\alpha(x)$ y $\nu(x) := \lim\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} \varphi_\alpha^{-1}(x)$; según el Lema 1.1.2 estas son isometrías y por definición $\varphi_\alpha \to \mu$. Por tanto $\mathrm{Iso}(X,d)$ es G_δ-completo.

Si (X,d) es además completo y $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}} \subseteq \mathrm{Iso}(X,d)$ es una red que cumple (C) un argumento análogo al anterior muestra que es convergente.

■

Luego de estos preliminares se puede proceder a la caracterización de los grupos topológicos isomorfos a grupos de isometrías. Se adoptará la siguiente notación en el resto de la sección: Para dos pseudométricas acotadas d y d' en un conjunto X se denota: $\|d-d'\|_\infty = \sup_{x,y\in X} |d(x,y)-d'(x,y)|$.

Lema 2.2.7. *Sean G un grupo topológico y $\{\rho_s\}_{s\in S}$ un conjunto de métricas en G invariantes por la izquierda. Para cada $s\in S$ sea $(X_s,d_s;\pi_s)$ un espacio métrico asociado a (X,ρ_s) tal que $X_s\cap X_{s'}=\varnothing$ si $s\neq s'$. Entonces existe una métrica d en $X=\bigsqcup_{s\in S} X_s$ con las siguientes propiedades:*

(D1) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{d_s(x,y)} \leq d(x,y) \leq \sqrt[3]{d_s(x,y)}$ *para cualesquier $x,y\in X$ y $s\in S$.*

(D2) $d(\pi_s(a),\pi_t(a)) \leq \sqrt[3]{\|\rho_s-\rho_t\|}$ *para cualesquier $a\in G$ y $s,t\in S$.*

(D3) *(X_s,d_s) es cerrado en (X,d) para cualquier $s\in S$.*

(D4) $d(\pi_s(ag),\pi_t(ah)) = d(\pi_s(g),\pi_t(h))$ *para $a,g,h\in G$ y $s,t\in S$ cualesquiera.*

Demostración. Para cada $x\in G$ sea $\kappa(x)$ el único $s\in S$ tal que $x\in X_s$. Se define $v: X\times X\to\mathbb{R}$ por

$$v(x,y) = \|\rho_{\kappa(x)}-\rho_{\kappa(y)}\|_\infty + \text{ínf}\{d_{\kappa(x)}(x,\pi_{\kappa(x)}(g)) + d_{\kappa(y)}(y,\pi_{\kappa(y)}(g)) : g\in G\}$$

Nótese que

- $v(x,x)=0$ y $v(x,y)=v(y,x)$ para cualesquier $x,y\in X$.
- $v(x,y)=d_s(x,y)$ para cualesquier $s\in S$ y $x,y\in X_s$.
- $v(\pi_s(g),\pi_t(g)) = \|\rho_s-\rho_t\|_\infty$ para $s,t\in S$ y $g\in G$ cualesquiera.
- $v(\pi_s(g),\pi_t(h)) \geq \|\rho_s-\rho_t\|_\infty$ para $s,t\in S$ y $g,h\in G$ cualesquiera.
- $v(x,y)>0$ para cualesquier $x,y\in X$ distintos.
- $v(\pi_s(ag),\pi_t(ah)) = v(\pi_s(g),\pi_t(h))$ para $s,t\in S$ y $a,g,h\in G$ cualesquiera

Afirmación. Para cualesquier $x_1,x_2,x_3,x_4\in X$ y $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ si $v(x_j,x_{j+1})<\varepsilon$ para cada $j\in\{1,2,3\}$, entonces $v(x_1,x_4)\leq 8\varepsilon$

Prueba: Si $\max\{v(x_j, x_{j+1}) : j = 1,2,3\} < \varepsilon$, entonces existen $a_1, a_2, a_3 \in G$ tales que para cada $j \in \{1,2,3\}$

$$\|\rho_{\kappa(x_j)} - \rho_{\kappa(x_{j+1})}\|_\infty + d_{\kappa(x_j)}(x, \pi_{\kappa(x_j)}(a_j)) + d_{\kappa(x_{j+1})}(x_{j+1}, \pi_{\kappa(x_{j+1})}(a_j)) < \varepsilon$$

En particular $\|\rho_{\kappa(x_j)} - \rho_{\kappa(x_{j+1})}\|_\infty < \varepsilon$, por lo que $\|\rho_{\kappa(x_1)} - \rho_{\kappa(x_4)}\|_\infty < 3\varepsilon$.
Sean $b_1, b_2, b_3, b_4 \in G$ tales que $\pi_{\kappa(x_j)}(b_j) = x_j$ ($j = 1,2,3,4$). Entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{\kappa(x_{j+1})}(b_j, b_{j+1}) &\leq \rho_{\kappa(x_{j+1})}(b_j, a_{j+1}) + \rho_{\kappa(x_{j+1})}(a_{j+1}, b_{j+1}) \\
&\leq \|\rho_{\kappa(x_j)} - \rho_{\kappa(x_{j+1})}\|_\infty + \rho_{\kappa(x_j)}(b_j, a_{j+1}) + \rho_{\kappa(x_{j+1})}(a_{j+1}, b_{j+1}) \\
&= \|\rho_{\kappa(x_j)} - \rho_{\kappa(x_{j+1})}\|_\infty + d_{\kappa(x_j)}(x_j, \pi_{\kappa(x_j)}(a_{j+1})) \\
&\quad + d_{\kappa(x_{j+1})}(\pi_{\kappa(x_j)}(a_{j+1}), x_{j+1}) < \varepsilon
\end{aligned}$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned}
\rho_{\kappa(x_3)}(b_1, b_3) &\leq \rho_{\kappa(x_3)}(b_1, b_2) + \rho_{\kappa(x_3)}(b_2, b_3) \\
&\leq \|\rho_{\kappa(x_2)} - \rho_{\kappa(x_3)}\|_\infty + \rho_{\kappa(x_2)}(b_1, b_2) + \rho_{\kappa(x_3)}(b_2, b_3) < 3\varepsilon
\end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}
\rho_{\kappa(x_4)}(b_1, b_4) &\leq \rho_{\kappa(x_4)}(b_1, b_3) + \rho_{\kappa(x_4)}(b_3, b_4) \\
&\leq \|\rho_{\kappa(x_3)} - \rho_{\kappa(x_4)}\|_\infty + \rho_{\kappa(x_3)}(b_1, b_3) + \rho_{\kappa(x_4)}(b_3, b_4) < 5\varepsilon
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
v(x_0, x_3) &\leq \|\rho_{\kappa(x_1)} - \rho_{\kappa(x_4)}\|_\infty + d_{\kappa(x_1)}(x_1, \pi_{\kappa(x_1)}(b_1)) + d_{\kappa(x_4)}(x_4, \pi_{\kappa(x_4)}(b_0)) \\
&= \|\rho_{\kappa(x_1)} - \rho_{\kappa(x_4)}\|_\infty + \rho_{\kappa(x_4)}(b_4, b_0) < 8\varepsilon
\end{aligned}$$

†

Ahora sea $f : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt[3]{v(x,y)}$. De las propiedades de v se deducen:

(F1) $f(x,x) = 0$ y $f(x,y) = f(y,x) > 0$ para cualesquier $x, y \in X$ distintos.

(F2) Para $w, x, y, z \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ cualesquiera si $\{f(w,x), f(x,y), f(y,z)\} \subseteq [0, \varepsilon]$, entonces $f(x,z) \leq 2\varepsilon$.

(F3) $f(x,y) = \sqrt[3]{d_s(x,y)}$ y $f(\pi_s(g), \pi_t(g)) = \sqrt[3]{\|\rho_s - \rho_t\|_\infty}$ para $s, t \in S$, $x, y \in X_s$ y $g \in G$ cualesquiera.

(F4) $f(\pi_s(g), \pi_t(h)) \geq \sqrt[3]{\|\rho_s - \rho_t\}_\infty}$ para $s, t \in S$ y $g, h \in G$ cualesquiera.

(F5) $f(\pi_s(ag), \pi_t(ah)) = f(\pi_s(g), \pi_t(h))$ para $s, t \in S$ y $a, g, h \in G$ cualesquiera.

Finalmente sean $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{ínf}\{\sum_{i=1}^{n} f(z_{j-1}, z_j) : n \in \mathbb{N}^+,\ z_0, \ldots, z_n \in X,\ z_0 = x \text{ y } z_n = y\}.$$

Según el Lema A.1, d es una métrica en X tal que $\frac{1}{2} f(x,y) \leq d(x,y) \leq f(x,y)$ para cualesquier $x, y \in X$. De esta desigualdad y de (F3) se deducen (D1) y (D2). (D4) es inmediato de (F5) y la definición de d. (D3) se cumple pues por (F4) $d(X_s, X_t) = \text{ínf}\{d(\pi_s(g), \pi_t(h)) : g, h \in G\} \geq \frac{1}{2} \|\rho_s - \rho_t\|_\infty > 0$ si $s \neq t$. ■

Teorema 2.2.8. *Sea G un grupo topológico.*

(A) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Existe un espacio métrico (X, d) tal que G es topológicamente isomorfo a Iso(X, d)

(2) G es G_δ-completo.
Además, si G es G_δ-completo, el espacio (X, d) que cumple (1) puede tomarse de forma que $w(X) = w(G)$.

(B) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) Existe un espacio métrico completo (X, d) tal que G es topológicamente isomorfo a Iso(X, d)

(2) G es Raikov completo.
Además, si G es Raikov completo, el espacio (X, d) que cumple (1) puede tomarse de forma que $w(X) = w(G)$.

Demostración. Las implicaciones (A1)⇒(A2) y (B1)⇒(B2) se deducen del punto (f) en la Proposición 2.2.6.

(A2)⇒(A1) Sea G un grupo G_δ-completo. Por el Teorema 2.1.6 es suficiente probar que G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de Iso(X, d) para algún espacio métrico (X, d) con peso $w(G)$. Sea $\mathscr{B}$ una base local del elemento neutro e en G tal que $|\mathscr{B}| \leq w(G)$. Para cada $U \in \mathscr{B}$ existen una pseudométrica continua μ_U en G invariante por la izquierda y $r_U \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{\mu_U}(e, r_U) \subseteq U$; entonces $\lambda_U = \text{mín}(\frac{1}{r_U}\mu_U, 1)$ es una pseudométrica continua e invariante por la izquierda tal que $B_{\lambda_U}(e, 1) \subseteq U$. Sea V abierto en G. Existen $g \in G$ y $U \in \mathscr{B}$ tales que $gU \subseteq V$; luego, $B_{\lambda_U}(g, 1) = gB_{\lambda_U}(e, 1) \subseteq V$. De esto y la continuidad de las pseudométricas se sigue que $\{\lambda_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ induce la topología de G.

Sea $S := \mathscr{B}^{<\omega} \cup \mathscr{B}^{\omega}$. Para cada $s = (U_j)_{j \in J} \in S$ se define

$$\rho_s = \sum_{j \in J} \frac{1}{2^j} \lambda_{U_j}.$$

Obsérvese que ρ_s es una pseudométrica continua en G acotada por 1 e invariante por la izquierda, para toda $s \in S$. Por ser tales pseudométricas continuas la topología que inducen está contenida en la topología de G, por otro lado se ha notado que esta topología es inducida por $\{\lambda_U\}_{U \in \mathscr{B}}$ y para cada $U \in \mathscr{B}$ $\lambda_U = \rho_{s_U}$ con $s_U = (U, U, \cdots)$; por tanto $\{\rho_s\}_{s \in S}$ induce la topología de G.

Sean $(X_s, d_s; \pi_s)$ como en las hipótesis del Lema 2.2.7 y (X, d) como en su conclusión. Para cada $s \in S$ se define la función $\overline{\rho}_s : G \times G \to [0, \infty)$ por $\overline{\rho}_s(g, h) := d(\pi_s(g), \pi_s(h))$; esta es una pseudométrica en G que es invariante por la izquierda y cumple la desigualdad $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\rho_s} \leq \overline{\rho}_s \leq \sqrt[3]{\rho_s}$. Además al ser ρ_s continua se sigue por esta desigualdad que $\overline{\rho}_s$ también lo es. Luego $\{\overline{\rho}_s\}_{s \in S}$ induce la topología de G. Se infiere de la continuidad de $\overline{\rho}_s$ que π_s como función de G a (X, d) es continua.

Sean D un conjunto denso en G tal que $|D| \leq w(G)$ y $Z := \bigcup_{s \in \mathscr{B}^{<\omega}} \pi_s(D)$, nótese que $|Z| \leq w(G)$. Si $s \in \mathscr{B}^{<\omega}$, entonces $\pi_s(D)$ es denso en X_s por continuidad de π_s, así $\bigcup_{s \in \mathscr{B}^{<\omega}} X_s \subseteq \overline{Z}$. Fíjense $s = (U_j)_{j=1}^{\infty} \in S$ y $a \in G$ y para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ considérese $s_n := (U_j)_{j=1}^{n} \in \mathscr{B}^{<\omega}$; entonces por (D2)

$$d(\pi_{s_n}(a), \pi_s(a)) \leq \sqrt[3]{\|\rho_{s_n} - \rho_s\|_\infty} \leq \sqrt[3]{\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}};$$

luego $\pi_{s_n}(a) \to \pi_s(a)$. Por tanto $\bigcup_{s \in \mathscr{B}^{<\omega}} X_s$ es denso en X; esto implica que Z es también denso. Por ser X un espacio métrico se tiene entonces que $w(X) \leq |Z|$ y por ende $w(X) \leq w(G)$.

Solamente resta probar que G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\mathrm{Iso}(X, d)$, ya que por el Lema 1.1.3 esto implica $w(G) \leq w(X)$.

Para cada $g \in G$ se define $u_g : X \to X,\ \pi_s(x) \mapsto \pi_s(gx)$. Por la propiedad (D4) en el Lema 2.2.7

$$d(u_g(\pi_s(x)), u_g(\pi_r(y))) = d(\pi_s(gx), \pi_r(gy)) = d(\pi_s(x), \pi_r(y))$$

para cualesquier $g, x, y \in G$ y $s, r \in S$, entonces $u_g \in \mathrm{Iso}(X, d)$. Luego, la función $\Phi : G \to \mathrm{Iso}(X, d),\ g \mapsto u_g$ está bien definida. Además si $g, h \in G$, entonces $u_g u_h(\pi_s(x)) = \pi_s(ghx) = U_{gh}(\pi_s(x))$, por lo que es un homomorfismo. Si $g, h \in G$ y $g \neq h$, entonces para algún $s \in S$ $\rho_s(g, h) > 0$, por lo que

$$u_g(\pi_s(e)) = \pi_s(g) \neq \pi_s(h) = u_h(\pi_s(e));$$

por tanto Φ es inyectiva. Para cualquier red $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ en G convergente a algún g y $\pi_s(a)\in X$, por continuidad de π_s y el producto en G,

$$u_{g_\alpha}(\pi_s(a)) = \pi_s(g_\alpha a) \to \pi_s(ga) = u_g(\pi_s(a))$$

en X por lo que $\Phi(g_\alpha)\to\Phi(g)$ en $\mathrm{Iso}(X,d)$. Finalmente, sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ una red en G tal que la red $(u_{x_\alpha})_{\alpha\in\mathscr{A}}$ converge en $\mathrm{Iso}(X,d)$ a algún u. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto de vecindades de e en G y para cada V_n sea $U_n\in\mathscr{B}$ tal que $U_n\subseteq V_n$. Para $s:=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\pi_s(x_\alpha),u(\pi_s(e))) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(u_{x_\alpha}(\pi_s(e)),u(\pi_s(e))) = 0 \text{ y}$$
$$\lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(\pi_s(x_\alpha^{-1}),u^{-1}(\pi_s(e))) = \lim_{\alpha\in\mathscr{A}} d(u_{x_\alpha}^{-1}(\pi_s(e)),u^{-1}(\pi_s(e))) = 0;$$

de esto y por ser cerrado X_s en X se sigue que $u(\pi_s(e)),u^{-1}(\pi_s(e))\in X_s$. Entonces existen $y,z\in G$ tales que

$$\pi_s(y) = u(\pi_s(e)) \text{ y } \pi_s(z^{-1}) = u^{-1}(\pi_s(e)).$$

Por la desigualdad $\sqrt[3]{\rho_s}\le\overline{\rho}_s$ y la definición de $\overline{\rho}_s$ se tiene que

$$\rho_s(x_\alpha,y)\le[2\overline{\rho}_s(x_\alpha,y)]^3 = 8\,d(\pi_s(x_\alpha),\pi_s(y)),$$

lo cual implica que $\lim_{\alpha\in\mathscr{A}}\rho_s(x_\alpha,y)=0$; análogamente $\lim_{\alpha\in\mathscr{A}}\rho_s(x_\alpha^{-1},z^{-1})=0$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ sea $\alpha_n\in\mathscr{A}$ tal que si $\alpha\ge\alpha_n$, entonces $\rho_s(x_\alpha,y)<\frac{1}{2^n}$ y $\rho_s(x_\alpha^{-1},z)<\frac{1}{2^n}$. Por lo anterior si $\alpha\ge\alpha_n$, entonces

$$\lambda_{U_n}(x_\alpha^{-1}y,e)\le 2^n\rho_s(x_\alpha^{-1}y,e)<1 \text{ y } \lambda_{U_n}(x_\alpha z^{-1},e)\le 2^n\rho_s(x_\alpha z^{-1},e)<1;$$

así $x_\alpha^{-1}y, x_\alpha z^{-1}\in U_n\subseteq V_n$. Por (IV) de la Proposición 2.2.5 $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathscr{A}}$ es convergente. Por tanto Φ es un encaje cerrado.

(B2)⇒(B1) Supóngase que G es Raikov completo. De acuerdo al Teorema 2.1.1 existe un espacio métrico acotado (Z,ρ) tal que $w(G)=w(Z)$ y G es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Iso}(Z,\rho)$. Sea (Y,υ) la compleción de (Z,ρ), siguiendo la demostración del Lema 1.1.1 se tiene que $\mathrm{Iso}(Y,\upsilon)$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Iso}(Z,\rho)$, por otro lado la densidad de Z y la completud de Y implican que toda isometría de Z se extiende a una de Y; por tanto $\mathrm{Iso}(Y,\upsilon)\cong\mathrm{Iso}(Z,\rho)$. Entonces existe un subgrupo H de $\mathrm{Iso}(Y,\upsilon)$ al que G es topológicamente isomorfo; además, por ser G un grupo Raikov completo, H es cerrado. Luego, por el Teorema 2.1.6 $H\cong\mathrm{Iso}(X,d)$, donde $X=\widehat{Y}_{w(Y)}$ y d es una métrica que respeta ρ. Nótese que d es completa (por (R3)) y $w(X)=w(G)$. Esto concluye la demostración.

■

2.3. Métricas invariantes para acciones propias

La última sección se enfoca en la existencia de métricas invariantes para acciones de grupos topológicos en espacios metrizables, concretamente se dará un teorema que caracteriza su existencia para acciones propias.

Definición 2.3.1. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio metrizable. Una métrica en X es *invariante* si para cualesquier $g \in G$ y $x, y \in X$ $d(gx, gy) = d(x, y)$.

La relación de este tipo de métricas con el tema tratado en el capítulo está dada por la siguiente sencilla proposición similar a la segunda parte del Teorema 2.1.1.

Proposición 2.3.2. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio con una métrica invariante d. Para cada $g \in G$ la función $\hat{g} : X \to X,\ x \mapsto gx$ es una isometría. La función $G \to Iso(X,d),\ g \mapsto \hat{g}$ es un homomorfismo continuo; si además la acción de G es efectiva, entonces esta función es también un encaje topológico.*

Después de esta breve introducción se procede con el tema de la sección.

Definición 2.3.3. Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Un subconjunto F de X es un *conjunto fundamental* para G en X si $GF = X$ y cada punto $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $\langle U, F\rangle$ es precompacto.

Lema 2.3.4. *Sean G un grupo topológico que actúa continuamente en un espacio topológico X y $\pi : X \to X/G$ la proyección orbital. Sea $\mathscr{U}$ una familia de subconjuntos pequeños de X tal que $\{\pi(U) |\ U \in \mathscr{U}\}$ es una familia localmente finita en X/G. Entonces $\bigcup \mathscr{U}$ es pequeño.*

Demostración. Sean $x \in X$ y V una vecindad de x en X tal que

$$F := \{U \in \mathscr{U} : \pi(V) \cap \pi(U) \neq \varnothing\}$$

es finito. Sea $W \subseteq V$ tal que $\langle W, U\rangle$ es precompacto si $U \in F$. Por la definición de F $\langle W, U\rangle \subseteq \langle V, U\rangle = \varnothing$ si $U \notin F$. Por tanto

$$\langle W, \bigcup \mathscr{U}\rangle = \bigcup\{\langle W, U\rangle : U \in \mathscr{U}\} = \bigcup\{\langle W, U\rangle : U \in F\}$$

es precompacto. ∎

Lema 2.3.5. *Sea G un grupo topológico Hausdorff localmente compacto que actúa propiamente en un espacio Hausdorff X tal que X/G es paracompacto. Si A es un subconjunto pequeño de X, entonces existe un conjunto fundamental abierto para G en X que contiene a A.*

Demostración. Como G actúa propiamente en X cada punto tiene una vecindad pequeña y relativamente delgada a A. Luego, existe una cubierta $\mathscr{U}$ de X tal que todo $U \in \mathscr{U}$ es abierto, pequeño y $\langle U, A \rangle$ es precompacto. Por paracompacidad de X/G existe un refinamiento localmente finito $\mathscr{V}$ de $\{\pi(U) | U \in \mathscr{U}\}$. Considérese una función $F : \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ tal que $V \subseteq \pi(F(V))$. Si $V \in \mathscr{V}$, sea $W_V = F(U) \cap \pi^{-1}(V)$ y sean $Y_V = W_V$ si $V \cap \pi(A) = \varnothing$ y $Y_V = \langle W_V, A \rangle W_V$ si $V \cap \pi(A) \neq \varnothing$. Los conjuntos W_V y Y_V son pequeños y $\pi(W_V) = \pi(Y_V) = V$, entonces $F := \bigcup Y_V$, $V \in \mathscr{V}$, es pequeño por el Lema 2.3.4 y $\pi(F) \subseteq \bigcup \pi(Y_V) = X/G$, así F es un conjunto fundamental abierto que contiene a A por la definición de los conjuntos Y_V. ■

Teorema 2.3.6. *Sea G un grupo Hausdorff localmente compacto que actúa propiamente en un espacio metrizable X. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(I) Existe una métrica G-invariante en X.

(II) X/G es metrizable.

(III) X/G es paracompacto.

Demostración. $(I) \Rightarrow (II)$ Considérese una métrica G-invariante d en X. Se define $\rho : X/G \times X/G \to \mathbb{R}$ como $\rho(G(x), G(y)) = \text{ínf}\{d(g_1 x, g_2 y) : g_1, g_2 \in G\}$. Por la invarianza de d para $x, y, z \in X$ cualesquiera se tiene

$$\begin{aligned}
\rho(G(x), G(z)) &= \text{ínf}\{d(x, g_1^{-1} g_2 z) : g_1, g_2 \in G\} \\
&= \text{ínf}\{d(x, gz) : g \in G\} \\
&\leq \text{ínf}\{d(x, hy) + d(hy, gz) : g, h \in G\} \\
&= \text{ínf}\{d(x, hy) : h \in G\} + \text{ínf}\{d(hy, gz) : g, h \in G\} \\
&= \rho(G(x), G(y)) + \rho(G(y), G(z)).
\end{aligned}$$

Por ser la acción de G en X propia las órbitas son cerradas, luego, para $G(x) \neq G(y)$ se tiene $\rho(G(x), G(y)) = \text{ínf}\{d(x, gy) : g \in G\} > 0$. Por tanto ρ es una métrica. Es inmediato de la definición de ρ que para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\pi(B_d(x, \varepsilon)) \subseteq B_\rho(G(x), \varepsilon)$; además si $\rho(G(x), G(y)) < \varepsilon$, entonces $d(x, gy) < \varepsilon$ para algún $g \in G$, por lo que $B_\rho(G(x), \varepsilon) \subseteq \pi(B_d(x, \varepsilon))$. Por tanto la proyección orbital es continua y abierta respecto a d y ρ, de lo cual se sigue que ρ es compatible con la métrica de X/G.

$(II) \Rightarrow (III)$ Es consecuencia del Teorema de Stone.

$(III) \Rightarrow (I)$ Sea d una métrica en X compatible con su topología. De acuerdo al Lema 2.3.5 existe un conjunto fundamental abierto F para G en X. Se define $r(x) = d(x, X \setminus F)$. Claramente para cualesquier $x, y \in X$ $r(x) - r(y) \leq d(x, y)$, de lo que se sigue $r(x) + r(z) \leq d(x, y) + (r(y) + r(z))$, si $x, y, z \in X$. Entonces

$\mu(x,y) = \text{mín}\{d(x,y), r(x)+r(y)\}$ $(x,y \in X)$ es una pseudométrica en X. Luego se define

$$\rho(x,y) = sup\{\mu(gx,gy) : g \in G\}.$$

Claramente ρ es una pseudométrica invariante en X. Más aún, si $x,y \in X$ y $x \neq y$, por ser F un conjunto fundamental existe $g_0 \in G$ tal que $g_0 x \in F$, entonces $\mu(g_0 x, g_0 y) \geq r(g_0 x) > 0$ por lo que $\rho(x,y) > 0$. Por lo tanto ρ es métrica.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a algún $y_0 \in X$ respecto a ρ. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Como $GF = X$ existe $g_0 \in G$ tal que $g_0 y_0 \in F$; además por ser F abierto y por continuidad de la función $x \mapsto g_0^{-1} x$ existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_d(g_0 y_0, \delta) \subseteq F$ y $g_0^{-1} B_d(g_0 y_0, \delta) \subseteq B_d(y_0, \varepsilon)$. De la primera contención se sigue que $r(g_0 y_0) \geq \delta$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, y_0) < \frac{\delta}{2}$ para $n \geq N$, luego $\mu(g_0 x_n, g_0 y_0) < \frac{\delta}{2}$. Como $r(g_0 x_n) + r(g_0 y_0) \geq \delta$ se concluye de lo anterior que $d(g_0 x_n, g_0 y_0) < \frac{\delta}{2}$. Por tanto $x_n \in B_d(y_0, \varepsilon)$ si $n \geq N$.

Recíprocamente, supóngase que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún $y_0 \in X$ respecto a d, pero no respecto a ρ. Entonces para algún $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\rho(x_{n_k}, y_0) \geq \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por definición de ρ, para cada k existe $g_k \in G$ tal que $\mu(g_k x_k, g_k y_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$, en particular $r(g_k x_k) + r(g_k y_0) > \frac{\varepsilon_0}{2}$ y así $g_k \in \langle \{y_0\} \cup \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, F\rangle$. Como $\{y_0\} \cup \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es compacto y F es compacto $\langle \{y_0\} \cup \{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}, F\rangle$ es precompacto y entonces $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, sin pérdida de generalidad supóngase que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge y sea g su límite. Por continuidad de la acción $(g_k y_0)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(g_k x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a gy_0 (respecto a d), entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $d(g_k x_{n_k}, g_k y_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}$ si $k \geq K$ lo cual contradice $\mu(g_k x_{n_k}, g_k y_0) \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$.
Por tanto ρ es compatible con la topología de X.

■

Apéndice A

El Teorema de Birkhoff-Kakutani

Lema A.1. *Sean X un conjunto y $f : X \times X \to \mathbb{R}$ una función que satisface:*

(a) $f(x,y) \geq 0$ *para cualesquier* $x,y \in X$.

(b) $f(x,x) = 0$ *para cualquier* $x \in X$.

(c) Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$*, entonces* $f(w,x) \leq \varepsilon,\ f(x,y) \leq \varepsilon$ *y* $f(y,z) \leq \varepsilon$ *implica* $f(w,z) \leq 2\varepsilon$ *para* $w,x,y,z \in X$ *cualesquiera.*

Se define $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *por*

$$d(x,y) = \text{ínf}\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i,x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}^+,\ x_1,\dots,x_{n+1} \in X,\ x_1 = x \text{ y } x_{n+1} = y\}.$$

Entonces d satisface

(1) $\frac{1}{2}f(x,y) \leq d(x,y) \leq f(x,y)$ *para cualesquier* $x,y \in X$.

(2) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *para cualesquier* $x,y,z \in X$.

(3) Si para todos $x,y \in X$ $f(x,y) = f(y,x)$*, entonces d es una pseudométrica.*

(4) Si para todos $x,y \in X$ $f(x,y) = f(y,x)$ *y* $f^{-1}(\{0\}) = \{(x,x) : x \in X\}$*, entonces d es una métrica.*

Demostración. Obsérvese que si $f(x,y) = f(y,x)$ para todos $x,y \in X$, entonces para $x_1,\dots,x_n \in X$ se tiene $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1},x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i,y_{i+1})$, con $y_i = x_{n+1-i}$. Se sigue que d también es simétrica. Además, (a), (b) y (1) implican que para todos $x,y \in X$ $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,x) = 0$, por lo que (3) y (4) siguen de (1) y (2).

Por (c) para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si $f(x,y) \leq \varepsilon$ y $f(y,z) \leq \varepsilon$, entonces $f(x,z) \leq 2\varepsilon$. En particular si $f(x,y) = f(y,z) = 0$, entonces $f(x,z) = 0$. Inductivamente se tiene que si $f(x_1,x_2) = f(x_2,x_3) = \cdots = f(x_{n-1},x_n) = 0$, entonces $f(x_1,x_n) = 0$.

Sean $x,y \in X$. $f(x,y)$ es un elemento del conjunto de sumas en la definición de $d(x,y)$, entonces $d(x,y) \leq f(x,y)$. Para probar que $\frac{1}{2}f(x,y) \leq d(x.y)$ se mostrará por inducción que $\frac{1}{2}f(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i,x_{i+1})$ para cualesquier $n \in \mathbb{N}^+$ y $p = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in X^{n+1}$ tal que $x_1 = x$ y $x_{n+1} = y$. Para simplificar la notación si $v = (y_1,\ldots,y_{n+1}) \in X^{n+1}$ se denota por $|v|$ a $\sum_{i=1}^{n} f(y_i,y_{i+1})$. El caso base $n = 1$ es evidente. Supóngase ahora que $n \geq 2$ y que el resultado es válido para cada $k < n$. Se tienen tres casos:

Caso 1 ($f(x_1,x_2) \geq \frac{1}{2}|p|$): En este caso

$$\frac{1}{2}|p| \geq |p| - f(x_1,x_2) = \sum_{i=2}^{n} f(x_i,x_{i+1}) \geq \frac{1}{2}f(x_2,x_{n+1}),$$

donde la última desigualdad se cumple por la hipótesis de inducción. Entonces $f(x_2,x_{n+1}) \leq |p|$; además $f(x_1,x_2) \leq |p|$ por lo que $f(x_1,x_{n+1}) \leq 2|p|$, es decir, $\frac{1}{2}f(x,y) \leq |p|$.

Caso 2 ($f(x_n,x_{n+1}) \geq \frac{1}{2}|p|$): Es análogo al caso 1.

Caso 3 ($f(x_1,x_2) \leq \frac{1}{2}|p|$ y $f(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}|p|$): Nótese que este caso es solo posible cuando $n \geq 3$. Sea r el mayor entero para el cual se satisface $\sum_{i=1}^{r} f(x_i,x_{i+1}) \leq \frac{1}{2}|p|$. De $f(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{2}|p|$ se sigue que $\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i,x_{i+1}) \geq \frac{1}{2}|p|$, por ende $r < n$ y es entonces posible aplicar la hipótesis inductiva para obtener $\frac{1}{2}f(x_1,x_r) \leq \frac{1}{2}|p|$. Por otro lado la maximalidad de r implica que $\sum_{i=1}^{r+1} f(x_i,x_{i+1}) > \frac{1}{2}|p|$, por lo que $\sum_{i=r+2}^{n} f(x_i,x_{i+1}) < \frac{1}{2}|p|$, entonces aplicando nuevamente la hipótesis de inducción se tiene $\frac{1}{2}f(x_{r+2},x_{n+1}) < \frac{1}{2}|p|$. Por lo tanto $f(x_1,x_r) \leq |p|$ y $f(x_{r+2},x_{n+1}) \leq |p|$, además trivialmente $f(x_r,x_{r+1}) \leq |p|$; luego, por (c), $f(x_1,x_{n+1}) \leq 2|p|$.

Con esto queda probado (1).

Para mostrar (2) considérense $x,y,z \in X$. Para $p = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \in X^{n+1}$ y $q = (y_1,\ldots,y_{m+1}) \in X^{m+1}$ con $x = x_1,\ y = x_{n+1} = y_1$ y $z = y_{m+1}$ se define $s = (z_1,\ldots,z_{m+n+2})$ por $z_i = y_i$ si $1 \leq i \leq n+1$ y $z_i = x_{i-(n+1)}$ si $n+2 \leq i \leq m+n+2$. Luego $d(x,z) \leq |s| \leq |p| + |q|$; por tanto $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. ■

Teorema A.2 (Birkhoff-Kakutani). *Sea G un grupo topológico. Es condición necesaria y suficiente para la metrizabilidad de G que este sea un grupo Hausdorff primero numerable. En tal caso el grupo admite una métrica acotada e invariante por la izquierda (derecha).*

Demostración. La necesidad es clara.
Sea G un grupo topológico Hausdorff y primero numerable. Si G es discreto, entonces la métrica discreta satisface lo deseado. Supóngase entonces que G no es discreto. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local para el elemento neutro e tal que cada U_n es simétrico. Sea $V_1 := U_1$; recursivamente para cada $n \geq 2$ existe un mínimo k tal que $U_k^3 \subseteq U_n \cap V_{n-1}$ sea $V_n := U_k$. Ya que $V_n \subseteq V_n^3 \subseteq U_n$ para cualquier n, $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es

también una base local para e, en particular $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{e\}$. Definiendo $V_0 = G$ se tiene que $V_{n+1} \subseteq V_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in G$ existe n tal que $x \in V_n$.

Se define ahora $f : X \times X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \text{ínf}\{\frac{1}{2^k} : x^{-1}y \in V_k\}.$$

Obviamente $f(x,y) \geq 0$; además por lo señalado anteriormente si $x \neq e$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin V_k$ si $k \geq m$, de esto se sigue que $f(x,y) = 0$ si y sólo si $x^{-1}y = e$, i.e., $x = y$. De la simetría de cada V_n se tiene que $f(x,y) = f(y,x)$. Sean $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $w,x,y,z \in G$ tales que $f(w,x) \leq \varepsilon$, $f(x,y) \leq \varepsilon$ y $f(y,z) \leq \varepsilon$. Ya que f está acotada por 1, $f(x,z) \leq 2\varepsilon$ si $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$; supóngase entonces que $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Existen $i, j, k \in \mathbb{N}$ tales que $w^{-1}x \in V_i$, $x^{-1}y \in V_j$, $y^{-1}z \in V_k$, $\frac{1}{2^i} \leq \varepsilon$, $\frac{1}{2^j} \leq \varepsilon$ y $\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$. Sea $r := \text{mín}\{i, j, k\}$. Entonces

$$w^{-1}z = (w^{-1}x)(x^{-1}y)(y^{-1}z)(z^{-1}) \in V_iV_jV_k \subseteq V_r^3 \subseteq V_{r-1},$$

por lo que $f(w,z) \leq \frac{1}{2^{r-1}} \leq 2\varepsilon$. Ahora que se han verificado las hipótesis del Lema A.1 sea d como en su conclusión. Nótese que al estar f acotada por 1 d también lo está y que d es invariante por la izquierda pues $f(ax,ay) = f(x,y)$ porque $(ax)^{-1}(ay) = x^{-1}y$. Resta probar que d induce la topología de G.

Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $a \in G$ se define $U_\varepsilon(a) := \{x \in G : f(x,a) < \varepsilon\}$. Si $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y k satisface $\frac{1}{2^k} \leq \varepsilon$, entonces $aV_k \subseteq U_\varepsilon(a)$ pues $x \in aV_k$ implica $f(a,x) \leq \frac{1}{2^k}$, así cada $U_\varepsilon(a)$ es una vecindad de a; por otro lado si A es una vecindad de a, entonces existe k tal que $aV_k \subseteq A$, si $x \notin aV_k$, entonces $a^{-1}x \notin V_l$ para $l \geq k$ por lo que $f(x,a) \geq \frac{1}{2^k}$ y así $U_{\frac{1}{2^k}}(a) \subseteq aV_k \subseteq A$. Por tanto $\{U_\varepsilon(a) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ es un base de vecindades para a en la topología de G. Por el punto (1) del lema $U_\varepsilon(a) \subseteq B_d(a,\varepsilon) \subseteq U_{2\varepsilon}(a)$ para cualesquier $a \in G$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. De esto se sigue que d induce la topología de G.

Finalmente $d' : G \times G \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto d(x^{-1},y^{-1})$ es una métrica invariante por la derecha en G que es compatible pues $x \mapsto x^{-1}$ es un homeomorfismo. ∎

Proposición A.3. *Sea G un grupo topológico.*

- *Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto de vecindades de e. Existe una pseudométrica continua e invariante por la izquierda en G tal que $B_d(e, 2^{-n}) \subseteq U_n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

- *La topología de G es inducida por una familia de pseudométricas continuas, invariantes por la izquierda y acotadas por 1 con cardinalidad $w(G)$.*

Demostración.

- La prueba es análoga a la del Teorema A.2, pero al no tenerse que G es Hausdorff y que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para e no es posible afirmar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{e\}$ por lo que la función d obtenida es una pseudométrica y las contenciones $U_\varepsilon(a) \subseteq B_d(a,\varepsilon) \subseteq U_{2\varepsilon}(a)$ sólo implican la continuidad de d y no que induzca la topología.

- Sean $\mathscr{B} = \{U_i\}_{i\in I}$ una base local para e con cardinalidad $w(G)$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ una partición de $\mathscr{B}$ tal que cada B_i es numerable. Nuevamente la construcción en la demostración del Teorema A.2 aplicada a cada B_i proporciona una pseudométrica d_i continua e invariante por la izquierda. Sean U abierto en G y $g \in U$. Existe $V \in \mathscr{B}$ tal que $gV \subseteq U$. Para algún $j \in I$ $V \in B_j$, entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{d_j}(e,\varepsilon) \subseteq V$. Luego

$$B_{d_j}(g,\varepsilon) = gB_{d_j}(e,\varepsilon) \subseteq gV \subseteq U.$$

  Por tanto $\{d_i\}_{i\in I}$ induce la topología de G.

■

Apéndice B

Raikov-compleción de grupos topológicos

Definición B.1. Sea G un grupo topológico. $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(G) \setminus \{\varnothing\}$ es una familia de Cauchy si para cada vecindad abierta U de e existen $x, y \in G$ y $A, B \in \mathscr{F}$ tales que $A \subseteq xU$ y $B \subseteq Uy$. Si además $\mathscr{F}$ es un filtro o filtro abierto se dirá que es filtro de Cauchy o filtro abierto de Cauchy, respectivamente. Una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ en G es de Cauchy si para toda vecindad abierta U de e existe $\alpha_0 \in \mathscr{A}$ tal que $x_\alpha x_{\alpha'}^{-1}, x_{\alpha'}^{-1} x_\alpha \in U$ si $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$.

Lema B.2. *Sean G un grupo topológico. $\mathscr{F}$ es una familia de Cauchy si y sólo si para cada vecindad abierta U de e existe $P \in \mathscr{F}$ tal que $PP^{-1}, P^{-1}P \subseteq U$*

Demostración. Supóngase que $\mathscr{F}$ es una familia de Cauchy. Sea V vecindad abierta de e tal que $VV^{-1} \subseteq U \cap U^{-1}$; existen $P \in \mathscr{F}$ y $a \in G$ tales que $P \subseteq Va$, luego $PP^{-1} \subseteq Va(Va)^{-1} = VV^{-1} \subseteq U \cap U^{-1}$ y $P^{-1}P \subseteq (U \cap U^{-1})^{-1} = U \cap U^{-1}$.

Recíprocamente supóngase que $PP^{-1}, P^{-1}P \subseteq U$ para algún $P \in \mathscr{F}$. Fíjense $a, b \in P$, entonces $a^{-1}P \subseteq P^{-1}P$ y $Pb^{-1} \subseteq PP^{-1}$ por lo que $P \subseteq aU$ y $P \subseteq Ub$. ■

Proposición B.3. *Sea G un grupo topológico. Si una red en G es de Cauchy entonces su filtro asociado es de Cauchy y viceversa.*

Demostración. Sean $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{A}}$ una red de Cauchy en G y U una vecindad abierta de e. Existe $\alpha_0 \in \mathscr{A}$ tal que $x_\alpha x_{\alpha'}^{-1}, x_{\alpha'}^{-1} x_\alpha \in U$ si $\alpha, \alpha' \geq \alpha_0$; así $P := \{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}$ es un elemento del filtro asociado que satisface la condición del Lema B.2.

Recíprocamente sean $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en G y U una vecindad abierta de e. Existe $P \in \mathscr{F}$ tal que $PP^{-1}, P^{-1}P \subseteq U$. Fíjese $p \in P$, entonces para $A, B \subseteq P$, $a \in A$ y $b \in B$ cualesquiera se cumple $ab^{-1}, b^{-1}a \in U$, de lo cual se sigue que la red asociada es de Cauchy. ■

Definición B.4. Sea G un grupo topológico. G es *Raikov completo* si toda red de Cauchy en G es convergente, o equivalentemente si todo filtro de Cauchy en G lo es.

El propósito de este apartado es mostrar que todo grupo topológico G admite una *Raikov compleción*, esto es, probar la existencia de un grupo Raikov completo G^* con un subgrupo denso toplógicamente isomorfo a G. Para ello lo primero es presentar las nociones que se emplean en su construcción.

Definición B.5. Sean G un grupo topológico y $\eta, \xi \subseteq \mathscr{P}(G) \setminus \{\varnothing\}$.

- $o(\eta)$ se define como el conjunto de abiertos en G que contienen a algún elemento de η.
- $[\eta\xi]$ denota al conjunto $\{AB : A \in \eta, B \in \xi\}$.
- η es una familia *con encogimientos* si para cada $B \in \eta$ existen $A \in \eta$ y U y V vecindades abiertas de e tales que $UAV \subseteq B$.
- Un *filtro canónico* es un filtro abierto de Cauchy con encogimientos.
- Si η y ξ son bases de filtro tales que para cualesquier $A \in \eta$ y $B \in \xi$ se cumple $A \cap B \neq \varnothing$ se dirá que η es *sincrónico* con ξ.

Proposición B.6. *Sean $\eta, \xi \in \mathscr{P}(G) \setminus \{\varnothing\}$.*

(1) Si η es base abierta de filtro entonces $o(\eta)$ es un filtro abierto que contiene a η.

(2) Si η es una familia de conjuntos abiertos con encogimientos entonces $o(\eta)$ también lo es.

(3) Si η es una familia de Cauchy entonces $o(\eta)$ también lo es.

(4) Si η es base abierta de filtro y es una familia de Cauchy con encogimientos entonces $o(\eta)$ es un filtro canónico que contiene a η.

(5) Si η y ξ son bases abiertas de filtro entonces $[\eta\xi]$ es base abierta de filtro.

(6) Si η y ξ son familias con encogimientos entonces $[\eta\xi]$ es una familia con encogimientos.

(7) Si η y ξ son familias de Cauchy entonces $[\eta\xi]$ también lo es.

(8) Si η y ξ son bases abiertas de filtro entonces $o([o(\eta)o(\xi)]) = o([\eta\xi])$.

(9) Si η y ξ son filtros canónicos entonces $[\eta\xi]$ es una base de filtro abierto que es de Cauchy y , además $o([\eta\xi])$ es un filtro canónico.

(10) Si η es un filtro canónico y ξ es un filtro abierto de Cauchy sincrónico a η entonces $\eta \subseteq \xi$. En particular, si ξ es también un filtro canónico, $\eta = \xi$

Demostración. (1) Sean $A,B \in o(\eta)$. Entonces existen $L,M \in \eta$ tales que $L \subseteq A$ y $M \subseteq B$, luego existe $N \in \eta$ tal que $N \subseteq L \cap M$ y así $N \subseteq A \cap B$, por lo que $A \cap B \in o(\eta)$.

(2) Claramente si η es una familia de abiertos entonces $\eta \subseteq o(\eta)$. Sea $A \in o(\eta)$, entonces existe $L \in \eta$ tal que $L \subseteq A$. Por hipótesis existen $M \in \eta \subseteq o(\eta)$ y vecindades abiertas U y V de e tales que $UMV \subseteq L$.

(3) Sea U vecindad abierta de e. Existen $a,b \in G$ y $A,B \in \eta$ tales que $A \subseteq aU$ y $B \subseteq Ub$, luego $aU, Ub \in o(\eta)$ y el resultado se sigue.

(4) Es inmediato de (1), (2) y (3).

(5) Si $A \in [\eta\xi]$, entonces $A = L_1M_1$ para algunos $L_1 \in \eta$ y $M_1 \in \xi$ por lo que A es abierto. Si además $B = L_2M_2$ con $L_2 \in \eta$ y $M_2 \in \xi$ entonces existen $L \in \eta$ y $M \in \xi$ que satisfacen $L \subseteq L_1 \cap L_2$ y $M \subseteq M_1 \cap M_2$. Luego $LM \subseteq (L_1 \cap L_2)(M_1 \cap M_2) \subseteq L_1M_1 \cap L_2M_2$

(6) Sea $A \in [\eta\xi]$. Entonces $A = LM$ para algunos $L \in \eta$ y $M \in \xi$. Luego existen $L_1 \in \eta$, $M_1 \in \xi$ y U_1, U_2, V_1, V_2 vecindades de e tales que $U_1L_1V_1 \subseteq L$ y $U_2M_1V_2 \subseteq M$. Además $U_1L_1M_1V_2 \subseteq U_1L_1V_1U_2M_1V_2$ pues $e \in U_2V_1$, el resultado se sigue.

(7) Dada U vecindad abierta de e sea también V vecindad abierta de e tal que $V^2 \subseteq U$. Como ξ es de Cauchy existen $B \in \xi$ y $b \in G$ tales que $B \subseteq bV$, existen también $A \in \eta$ y $a \in G$ tales que $a \subseteq a(bVb^{-1})$. Así, $AB \subseteq abVb^{-1}bV = abV^2 \subseteq abU$. Similarmente se encuentran $C \in \eta$, $D \in \xi$ y $c,d \in G$ tales que $CD \subseteq Ucd$.

(8) Por (1) $[\eta\xi] \subseteq [o(\eta)o(\xi)]$ y entonces $o([\eta\xi]) \subseteq o([o(\eta)o(\xi)])$. Por otro lado, si $O \in o([o(\eta)o(\xi)])$ entonces existen $A \in \eta$, $B \in \xi$ y abiertos U y V tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $UV \subseteq O$; así $AB \in [\eta\xi]$ y $AB \subseteq O$ por lo que $O \in o([\eta\xi])$.

(9) Se sigue de (4)-(7).

(10) La segunda afirmación es consecuencia inmediata de la primera. Para verificar la primera sea $U \in \eta$. Por ser η una familia con encogimientos existen $P \in \eta$ y V vecindad de e tales que $PV \subseteq U$. Sea W vecindad de e tal que $W^{-1}W \subseteq V$. Por ser ξ de Cauchy existe $b \in G$ tal que $bW \in \xi$. Como $P \cap bW \neq \varnothing$ se tiene que $b \in PW^{-1}$, lo que implica $bW \subseteq PW^{-1}W \subseteq PV \subseteq PV$ y por ende $U \in \xi$. ■

Se cuenta ahora con todas las herramientas para definir la Raikov compleción de un grupo topológico. Sea G^* el conjunto de los filtros canónicos en G. Nótese que para cada $x \in G$ el conjunto de sus vecindades abiertas, denotado B_x, es un elemento de G^*; esto define una función inyectiva $i : G \to G^*$.

Se define una operación $\divideontimes$ en G^* por $\eta \divideontimes \xi := o([\eta\xi])$.

Proposición B.7. *G^* es un grupo bajo la operación $\divideontimes$ y la función i un morfismo de grupos.*

Demostración. Sean $\eta, \xi, \nu \in G^*$. Por (8) de la Proposición B.6

$$\begin{aligned}\eta \divideontimes (\xi \divideontimes \nu) &= o([\eta(\xi \divideontimes \nu)]) = o([\eta o([\xi\nu])]) = o([o(\eta)o([\xi\nu])]) \\ &= o([o(\eta)o(\xi)o(\nu)]) = o([o([\eta\xi])o(\nu)]) = o([o([\eta\xi]\nu)]) = (\eta \divideontimes \xi) \divideontimes \nu.\end{aligned}$$

Sean $A \in \eta$ y $B \in \eta \divideontimes B_e$, existen $C \in \eta$ y $L \in B_e$ tales que $CL \subseteq B$. $A \cap C \neq \varnothing$, pues η es filtro canónico, y $C \subseteq CL$, pues $e \in L$. Luego η y $\eta \divideontimes B_e$ son sincrónicos y por tanto $\eta \divideontimes B_e = \eta$. Similarmente $B_e \divideontimes \eta = \eta$.

Considérese $\eta' = \{A^{-1} : A \in \eta\} \in G^*$. Para $A, B \in \eta$ cualesquiera se tiene que $e \in (A\cap B)(A\cap B)^{-1} \subseteq AB^{-1}$ y $e \in (A\cap B)^{-1}(A\cap B) \subseteq A^{-1}B$, por lo que $\eta \divideontimes \eta' \subseteq B_e$ y $\eta' \divideontimes \eta \subseteq B_e$. Además por el Lema B.2 se dan las contenciones inversas. Por tanto $(G^*, \divideontimes)$ es un grupo.

Sean $x, y \in G$. Claramente $xy \in O$ para cualquier $O \in o([B_xB_y])$, por lo que $B_x \divideontimes B_y \subseteq B_{xy}$. Sea ahora $U \in B_{xy}$, entonces $x^{-1}Uy^{-1} \in B_e$ y existe $V \in B_e$ tal que $V^2 \subseteq x^{-1}Uy^{-1}$. Así, $xV \in B_x$, $Vy \in B_y$ y $(xV)(Vy) \subseteq U$; por lo que $U \in o([B_xB_y])$. Por tanto $B_{xy} = B_x \divideontimes B_y$, i.e., $i(xy) = i(x) \divideontimes i(y)$. ∎

Lo siguiente es definir una topología en G^*. Sea $\mathscr{T}$ la topología en G, para cada $U \in \mathscr{T}$ sea $U^* := \{\eta \in G^* : u \in \eta\}$. Nótese que para $U, V \in \mathscr{T}$ cualesquiera se satisface $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$, $U^* \cap i(G) = i(U)$ y $U^* \cap i(G) \neq \varnothing$. De esto se sigue que $\mathscr{B} := \{U^* : U \in \mathscr{T}\}$ es base para una topología $\mathscr{T}^*$ en G^* y que i es un encaje respecto a esta topología cuya imagen es densa.

Proposición B.8. *$(G^*, \divideontimes, \mathscr{T}^*)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Para cualquier $U \in \mathscr{T}$ se satisface $(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*$ por lo que la inversión en G^* es continua. Sean $\eta, \xi \in G^*$ y W^* una vecindad básica de $\eta \divideontimes \xi$. Entonces $W \in \eta \divideontimes \xi = o([\eta\xi])$, luego existen $U \in \eta$ y $V \in \xi$ tales que $UV \subseteq W$. Sean $\nu \in U^*$ y $\mu \in V^*$, entonces $UV \in [\nu\mu]$, por lo que $W \in o([\nu\mu]) = \nu \divideontimes \mu$, esto es, $\nu \divideontimes \mu \in W^*$; por tanto $U^* \divideontimes V^* \subseteq W^*$ y se sigue la continuidad de $\divideontimes$. ∎

A continuación se probará que G^* es Raikov completo, para ello es necesario dar previamente algunos resultados. Se emplearán las siguientes notaciones: $s(\xi) := \{UPV : P \in \xi,\ U, V \in B_e\}$ y $c(\xi) := o(s(\xi))$ si $\xi \in \mathscr{P}(G) \setminus \{\varnothing\}$.

Proposición B.9. *Si ξ es un filtro abierto de Cauchy en G, entonces $c(\xi)$ es un filtro canónico.*

Demostración. Por (4) de la Proposición B.6 es suficiente mostrar que $s(\xi)$ es base abierta de filtro y una familia de Cauchy con encogimientos.

Sea $A \in S(\xi)$, esto es, $A = U_1 P_1 V_1$ para algunos $U_1, V_1 \in B_e$ y $P_1 \in \xi$. Por ser U_1 abierto el producto $U_1 P_1 V_1$ lo es también. Sea además $B = U_2 P_2 V_2$ con $U_2, V_2 \in B_e$ y $P_2 \in \xi$.

$$A \cap B = (U_1 P_1 V_1) \cap (U_2 P_2 V_2) = (U_1 \cap U_2)(P_1 \cap P_2)(V_1 \cap V_2) \in s(\xi).$$

Por tanto $s(\xi)$ es base abierta de filtro.

Sean $W_1, W_2 \in B_e$ tales que $W_1^2 \subseteq U_1$ y $W_2^2 \subseteq V_1$, entonces $C := W_1 P W_2 \in s(\xi)$ satisface $W_1 B W_2 \subseteq A$, por tanto $s(\xi)$ es una familia con encogimientos.

Ahora sea $V \in B_e$ y sea $W \in B_e$ tal que $W^3 \subseteq V$. Por ser ξ filtro abierto de Cauchy existen $a, b \in G$ tales que $aW, Wb \in \xi$, entonces

$$W^3 b = (W)(Wb)(b^{-1}Wb) \in s(\xi) \text{ y } aW^3 = (aWa^{-1})(aW)(W) \in s(\xi),$$

además $aW^3 \subseteq aV$ y $W^3 b \subseteq Vb$; por tanto $s(\xi)$ es de Cauchy. ■

Proposición B.10. *Sean G un subgrupo denso de un grupo topológico H y η un filtro abierto en H. Si $\eta_G := \{W \cap G : W \in \eta\}$ se tiene que:*

a) η_G es un filtro abierto en G sincrónico con η;

b) si η es de Cauchy en H, entonces η_G es de Cauchy en G;

c) si η_G converge en G, entonces η converge en H al mismo punto;

d) si η es canónico en H, entonces η_G es canónico en G.

Demostración. a) Se sigue de la densidad de G.

b) Sea W una vecindad abierta de e en G. Entonces $W = U \cap G$ para alguna vecindad abierta de e en H. Por el Lema B.2 existe $F \in \eta$ tal que $FF^{-1}, F^{-1}F \subseteq U$. Sea $P = F \cap G \in \eta_G$, entonces

$$PP^{-1} = (F \cap G)(F^{-1} \cap G) = FF^{-1} \cap G \subseteq U \cap G = W \text{ y}$$
$$P^{-1}P = (F^{-1} \cap G)(F \cap G) = F^{-1}F \cap G \subseteq U \cap G = W.$$

c) Sea g límite de η_G y sea U una vecindad abierta de g en H. Por ser H un espacio regular existe V abierto en H tal que $g \in V$ y $\overline{V} \subseteq U$; $V \cap G$ es vecindad de g en G, entonces $V \cap G \in \eta_G$, i.e., $V \cap G = W \cap G$ para algún $W \in \eta$; luego $W \subseteq \overline{W \cap G} = \overline{V \cap G} \subseteq \overline{V} \cap \overline{G} \subseteq U$. Por tanto η converge a g en H.

d) Resta verificar que η_G es una familia con encogimientos. Sea $A \in \eta_G$, entonces $A = L \cap G$ para algún $L \in \eta$. Existen $M \in \eta$ y U, V vecindades abiertas de e en H tales que $UMV \subseteq L$, luego $(U \cap G)(M \cap G)(V \cap G) \subseteq UMV \cap G \subseteq A$.

■

Lema B.11. *Si η es un filtro en G tal que $o(\eta)$ converge entonces η converge.*

Demostración. Sea x un límite de $o(\eta)$, esto significa que $B_x \subseteq o(\eta)$. Por otro lado $o(\eta) \subseteq \eta$. Por tanto $B_x \subseteq \eta$, i.e., η converge a x. ∎

Teorema B.12. *G^* es Raikov completo.*

Demostración. Por el Lema B.11 y (1) y (3) de la Proposición B.6 es suficiente probar que todo filtro abierto de Cauchy converge. Sea η una de tales familias. Por simplicidad se considerará a cada $x \in G$ como $i(x)$ de forma que $G \subseteq G^*$. Así, η_G es un filtro abierto de Cauchy en G sincrónico con η. Sea $\xi := c(\eta_G)$, este es un filtro canónico en G contenido en η_G, en particular $\xi \in G^*$. Para cualquier vecindad básica U^* de ξ, $U \in \eta_G$, además $U \subseteq U^*$ por lo que η_G converge a ξ y por c) de la Proposición B.10 η también converge a ξ. ∎

Queda así probada la existencia de una Raikov compleción para cualquier grupo topológico. Finalmente se demostrará la unicidad, salvo isomorfismo topológico, de esta.

Lema B.13. *Sean G y H grupos topológicos y $f : G \to H$ un homomorfismo continuo. Si $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en G entonces $f(\mathscr{F}) := \{f(U) : U \in \mathscr{F}\}$ es un filtro de Cauchy en H.*

Demostración. Obviamente se cumple que $f(\mathscr{F})$ es un filtro en H. Sea U una vecindad abierta de e_H. Existen $A, B \in \mathscr{F}$ y $a, b \in G$ tales que $A \subseteq af^{-1}(U)$ y $B \subseteq f^{-1}(U)b$; luego $f(A) \subseteq f(af^{-1}(U)) \subseteq f(a)U$ y $f(B) \subseteq f(f^{-1}(U)b) \subseteq Uf(b)$. Por tanto $f(\mathscr{F})$ es de Cauchy. ∎

Proposición B.14. *Sean H un grupo topológico, G un subgrupo denso de H y $f : G \to K$ un homomorfismo continuo de G a un grupo Raikov completo K. f se extiende a un homomorfismo continuo $\hat{f} : H \to K$.*

Demostración. Para cada $z \in H$ sea η_z el conjunto de vecindades de z, este es claramente un filtro de Cauchy en H; entonces $\xi_z := \{U \cap G : U \in \eta_z\}$ lo es en G. Por el Lema B.13 cada $f(\xi_z)$ es un filtro de Cauchy en K, entonces $f(\xi_z)$ converge a algún $\hat{f}(z)$. Como para cualquier $g \in G$ $\lim \xi_g = g$ y f es continua se tiene que $\lim f(\xi_z) = f(z)$, por tanto $\hat{f}$ es una extensión de f.

Sean $A \subseteq G$, $z \in \overline{A}$ y $\delta_a := \{U \cap A : U \in \eta_z\}$, este es un filtro de Cauchy en G y por el Lema B.13 $f(\delta_A)$ es un filtro de Cauchy en K. Sea y_1 el límite de este filtro, entonces $y_1 \in \overline{\hat{f}(A)}$. Nótese que δ_A y ξ_z son sincrónicos, por lo cual $\hat{f}(\delta_A)$ y $\hat{f}(\xi_z)$ también lo son; luego sus límites coinciden y así $\hat{f}(z) \in \overline{\hat{f}(A)}$. Por tanto $\hat{f}\restriction_{G\cup\{z\}}$ es una extensión continua de f. Por ser K un espacio regular se sigue del Teorema de Bourbaki-Dieudonné que $\hat{f}$ es continua.

Supóngase que existen $a, b \in H$ tales que $\hat{f}(ab) \neq \hat{f}(a)\hat{f}(b)$. Sean O y W abiertos ajenos en K tales que $\hat{f}(ab) \in O$ y $\hat{f}(a)\hat{f}(b) \in W$ y sean U y V vecindades abiertas de $\hat{f}(a)$ y $\hat{f}(b)$, respectivamente, que cumplen $UV \subseteq W$. Existen además U_1 y V_1 abiertos en H tales que $a \in U_1$, $b \in V_1$, $f(U_1) \subseteq U$, $f(V_1) \subseteq V$ y $f(U_1V_1) \subseteq O$. Por densidad de G pueden encontrarse $a_1 \in U_1 \cap G$ y $b_1 \in V_1 \cap G$. De todo lo anterior se sigue que

$$\hat{f}(a_1b1) = f(a_1b_1) = f(a_1)f(b_1) = \hat{f}(a_1)\hat{f}(b_1) \in UV \subseteq W;$$

contradiciendo $O \cap W = \varnothing$. Por tanto $\hat{f}$ es un homomorfismo. ■

Es una consecuencia inmediata de esta proposición que si H_1 y H_2 son Raikov-compleciones de un grupo G entonces son topológicamente isomorfos.

Bibliografía

[1] Antonyan, S. y de Neymet S. *Invariant pseudometrics on Palais proper G-spaces*. Acta Math 98 (2003).

[2] Arhangel'skii, A. y Tkachenko, M. *Topological Groups and Related Structures*. Francia, Atlantis Press (2008).

[3] Berberian, S. *Lectures in Functional Analysis and Operator theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag (1974).

[4] Engelking, R. *General Topology, Revised and completed edition*. Berlin, Heldermann Verlag (1989).

[5] Gao, S. y Kechris, A. *On the classification of polish metric spaces up to isometry*. Mem. Amer. Math. Soc. 161 (2003).

[6] Kelly, J. *General Topology*. Reprint of the 1955 ed. published by Van Nostrand USA, Springer Verlag (1991).

[7] Kobayashi S. y Nomizu K. *Foundations of Differential Geometry, Vol. I*. USA, Interscience (1963).

[8] Manoussos, A. y Strantzalos, P. *On the group of isometries on a locally compact metric space*. Journal of Lie Theory, Volume 13 (2003).

[9] Melleray, J. *Compact metrizable groups are isometry groups of compact metric spaces*. Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008).

[10] de Neymet, S. *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones*. México, Sociedad Matemática Mexicana (2005).

[11] Niemiec, P. *Isometry groups among topological groups*. Pacific J. Math. 266 (2013).

[12] Palais, R. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*. Ann. Math. 73 (1961).

[13] Roelcke, W. y Dierolf, S. *Uniform structures on topological groups and their quotients*. McGraw-Hill Inc. (1981).

[14] Tkachenko, M. et. al. *Grupos Topológicos*. México, Universidad Autónoma Metropolitana (1997).

[15] Uspenskij, V. *On subgroups of minimal topological groups*. Topology Appl. 155 (2008).