UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LA ESTRUCTURA RETICULAR DE LOS PRERRADICALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

CÉSAR BARDOMIANO MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA

2015

México, D.F.

1. Datos del alumno
   Bardomiano
   Martínez
   César
   12856918
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   412051557

2. Datos del tutor
   Dr.
   Alejandro
   Alvarado
   García

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía

4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   José
   Ríos
   Montes

5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Bertha María
   Tomé
   Arreola

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Luis Ángel
   Zaldívar
   Corichi

7. Datos del trabajo escrito
   Algunos aspectos de la estructura
   reticular de los prerradicales
   64 p
   2015

Algunos aspectos de la estructura reticular de los prerradicales

César Bardomiano Martínez

Índice general

Introducción.

Se considera a R como un anillo asociativo con elemento unitario. $R-Mod$ es la categoría de los módulos izquierdos sobre R. Siempre se considerarán módulos izquierdos, si no hay necesidad de especificar, un módulo M significa que M es un grupo abeliano con estructura de módulo izquierdo sobre R. Un ideal (bilateral) I de R es un ideal izquierdo y derecho de R. Notar que un anillo simple (artiniano) R es un anillo cuyos únicos ideales bilaterales son 0 y R.

El objetivo del siguiente trabajo es presentar de una forma accesible y autocontenida una pequeña parte de la teoría de prerradicales sobre $R-Mod$. Los prerradicales tienen su origen alrededor de la década de 1950 en los estudios de Kurosh y Amitsur. Aunque no fue hasta 20 años después, cuando Bican, Kepka et. al. publicaron [2] en donde tratan la teoría de prerradicales y su relación con las teorías de torsión de $R-Mod$. Además emplean a los prerradicales como una herramienta para el estudio de la categoría de R-módulos y del anillo R.
El capítulo 1 está basado en [10] y [4]. Se define un prerradical y al considerar la clase de los prerradicales se le dota de una estructura reticular. También se incluyen las conexiones que algunas subclases de prerradicales tienen con las teorías de torsión de $R - Mod$ así como los filtros lineales asociados al anillo R. Fundamentalmente las relativas a las correspondencias que hay entre las distintas clases mencionadas.
Los capítulos restantes presentan los resultado dados en [8] y [9], a los cuales debe el título este escrito. Aquí se estudia con más detalle la estructura de la clase de los prerradicales dando paso a la clasificación de algunos anillos, como son los anillos simples, los semisimples, los V-anillos y los V-anillos locales. Estas caracterizaciones se dan en términos de ciertos prerradicales específicos.
En el Apéndice A se dan algunos conceptos de teoría básica de módulos. Esta parte no incluye demostraciones de algunas de las afirmaciones salvo los relativos a módulos singulares que es abordado en [5], además de los V-anillos

definidos en [7]. Para más detalles se pueden consultar [1] y [6].
El Apéndice B complementa la parte preliminar con algunos conceptos relativos a la teoría básica de retículas, más detalles se pueden encontrar en [3].

Capítulo 1

Prerradicales

1.1. Prerradicales.

1.1.1. Definición y propiedades

Definición 1.1.1. *Un prerradical es un subfuntor del funtor identidad en* $R-Mod$*, es decir, una asignación* $R-Mod \xrightarrow{r} R-Mod$
que satisface las siguientes condiciones:

1. *Para cada* $M \in R-Mod$*,* $r(M) \leq M$*,*

2. *Si* $M, N \in R-Mod$ *y* $f \in Hom_R(M, N)$ *entonces* $f(r(M)) \leq r(N)$*, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ r(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "f|"] & r(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Se denota a la clase de los prerradicales sobre $R-Mod$ como $R-pr$.

Observación 1.1.1. *Por la segunda condición de la definición se tiene para cada* $r \in R-pr$ *y* $M, N \in R-Mod$ *con* $N \leq M, r(N) \leq r(M)$*.*

Proposición 1.1.1. $R-pr$ *está parcialmente ordenado por la siguiente relación, para cada* $r, t \in R-pr, r \preceq t$ *si y sólo si* $r(M) \leq t(M)$ *para todo* $M \in R-Mod$*.*

Demostración. Sean $r, s, t \in R-pr$. Como $r(M) \leq r(M)$ para todo $M \in R-Mod$ entonces $r \preceq r$. Supóngase que $r \preceq s$ y $s \preceq r$, se sigue que para cada $M \in R-Mod$ $r(M) \leq s(M)$ y $s(M) \leq r(M)$ por tanto $r(M) = s(M)$ esto implica $r = s$. Por último, si $r \preceq s \preceq t$ entonces $r(M) \leq s(M)$ y

$s(M) \leq t(M)$, así $r(M) \leq t(M)$ para cada $M \in R-Mod$, con lo que se tiene la transitividad. $\square$

Observación 1.1.2. *Dados $M \in R-Mod$ y $r, s \in R-pr$ se tiene el cociente $M/r(M)$ entonces $s(M/r(M)) \leq M/r(M)$, por el teorema de la correspondencia existe un único $N \leq M$ tal que $r(M) \leq N$ y $N/r(M) = s(M/r(M))$.*

Definición 1.1.2. *Para $r, s \in R-pr$ y $M \in R-Mod$ se definen las siguientes operaciones:*

1. *$(r \wedge s)(M) := r(M) \cap s(M)$.*
2. *$(r \vee s)(M) := r(M) + s(M)$.*
3. *$(r \cdot s)(M) := r(s(M))$.*
4. *$(r : s)(M)$ es el único submódulo de M tal que $(r : s)(M)/r(M) = s(M/r(M))$ (ver observación 1.1.2).*
   Para C una subclase de en $R-pr$:
5. *$r := \bigwedge\{s \in C\}$ se define como $r(M) = \bigcap\{s(M) | s \in C\}$.*
6. *$t := \bigvee\{s \in C\}$ se define como $t(M) = \sum\{s(M) | s \in C\}$.*

Observación 1.1.3. *En la definición anterior los objetos definidos son prerradicales. Notar que si $r, s \in R-pr$ entonces $\bigwedge\{r, s\} = r \wedge s$ y $\bigvee\{r, s\} = r \vee s$.*

Demostración. Ya que las demostraciones son similares para todos los casos, sólo se prueban (4) y (6).
Sean $M, N \in R-Mod$ y $f \in Hom_R(M, N)$. Demostración de (6). Dado $s \in C, s(M) \leq M$ entonces $r(M) = \sum\{s(M) | s \in C\} \leq M$ y $f(s(M)) \leq s(N)$ así $f(t(M)) = f(\sum\{s(M) | s \in C\}) \leq \sum_{s \in C} f(s(M)) \leq \sum_{s \in C} s(N) = t(N)$.
Demostración de (4). Claramente $(r : s)(M) \leq M$. Sean $N \in R-Mod$ y $f \in Hom_R(M, N)$. Como r es un prerradical, $f(r(M)) \leq r(N)$. Entonces el morfismo $\hat{f} \in Hom_R(M/r(M), N/r(N))$ tal que para cada $m + r(M) \in M/r(M)$, $\hat{f}(m + r(M)) = f(m) + r(N)$, está bien definido. Dado que s es una prerradical $\hat{f}(s(M/r(M))) = \hat{f}((r : s)(M)/r(M)) = f((r : s)(M)) + r(N)/r(N) \leq s(N/r(N)) = (r : s)(N)/r(N)$. Por lo tanto, $f((r : s)(M)) \leq f((r : s)(M)) + r(N) \leq (r : s)(N)$.

$\square$

Corolario 1.1.1. *$R-pr$ es una gran retícula con el orden $\preceq$ y $\vee, \wedge$ definidas como antes. Más aún, $(R-pr, \preceq, \bigvee, \bigwedge)$ es una retícula completa cuyo elemento menor $\boldsymbol{0}$ y elemento mayor $\boldsymbol{1}$ son tales que para cada $M \in R-Mod$, $\boldsymbol{0}(M) = 0$ y $\boldsymbol{1}(M) = M$.*

Hay una relación importante entre $\cdot, \vee, \wedge, (:)$.

Observación 1.1.4. *Si $r, s \in R-pr$ entonces $r \cdot s \preceq\ r \wedge s \preceq r \vee s \preceq (r:s)$.*

Demostración. Sea $M \in R-Mod$ entonces $r \cdot s(M) = r(s(M)) \leq s(M)$ y $r(s(M)) \leq r(M)$, ya que $s(M) \leq M$, entonces $r(s(M)) \leq r(M) \cap s(M)$ de donde $r \cdot s \preceq\ r \wedge s$. Directamente de la definición es claro que $r \wedge s \preceq r \vee s$. Para $M \in R-Mod$, considerando la proyección canónica ρ de M a $M/r(M)$, se obtiene $r(M)+s(M)/r(M) = \rho(s(M)) \leq s(M/r(M)) = (r:s)(M)/r(M)$ y entonces $r(M)+s(M) \leq (r:s)(M)$, por lo tanto $r \vee s \preceq (r:s)$. $\square$

Observación 1.1.5. *Si $r \in R-pr$ entonces $r(R)M \leq r(M)$ para cada $M \in R-Mod$.*

Demostración. Para cada $m \in M$ se tiene el homomorfismo multiplicar por m, $R \xrightarrow{\_\cdot m} M$, como r es un prerradical $(\_ \cdot m)(r(R)) = r(R)m \leq r(M)$ entonces $r(M) \geq r(R)M$. $\square$

Como corolario,

Corolario 1.1.2. *$r(R)$ es un ideal bilateral de R para todo $r \in R-pr$.*

Proposición 1.1.2. *Sea $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de módulos. Entonces para cada $r \in R-pr$:*

1. $r(\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) = \oplus_{\lambda\in\Lambda} r(M_\lambda)$
2. $r(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} r(M_\lambda)$

Demostración. Los homomorfismos $M_\lambda \xhookrightarrow{i_\lambda} \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ y $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \xrightarrow{\rho_\lambda} M_\lambda$ son las inclusiones y proyecciones canónicas respectivamente.
(1) Como r es un prerradical y $M_\lambda \xhookrightarrow{i_\lambda} \oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ se tiene $r(M_\lambda) \leq r(\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$.
También hay una proyección $\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \xrightarrow{\rho_\lambda} M_\lambda$ por lo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[r, two heads, "\rho_\lambda"] & M_\lambda \\
r(\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\rho_\lambda|"] & r(M_\lambda) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Esto implica que si $\sum x_\lambda \in r(\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$ entonces $\rho_\lambda(\sum x_\lambda) = x_\lambda \in r(M_\lambda)$ y por tanto $r(\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \leq r(M_\lambda) \leq \oplus_{\lambda\in\Lambda} r(M_\lambda)$.
(2) Análogamente, como el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[r, two heads, "\rho_\lambda"] & M_\lambda \\
r(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads, "\rho_\lambda|"] & r(M_\lambda) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Entonces si $(x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, \rho_\lambda((x_\lambda)) = x_\lambda \in r(M_\lambda)$, así $r(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \leq r(M_\lambda) \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} r(M_\lambda)$. □

Lema 1.1.1. *Si r es un prerradical entonces $r(R) = R$ si y sólo si $r(M) = M$ para cada $M \in R - Mod$.*

Demostración. Una implicación es clara. Por otro lado, sea ρ el cociente $\oplus_{x\in M} Rx \xrightarrow{\rho} M$ definido de forma canónica. Ya que r es un prerradical, $r(M) = r(\sum_{x\in M} Rx) \geq \rho(r(\oplus_{x\in M} Rx)) = \rho(\oplus_{x\in M} r(Rx)) = \sum_{x\in M} r(Rx)$. Usando el cociente $(\_\cdot x)$ de R a Rx, para cada $x \in M$, $r(R)x = (\_\cdot x)(r(R)) \leq r(Rx)$ lo que por hipótesis implica $Rx \leq r(Rx)$, como la otra desigualdad es clara, $Rx = r(Rx)$. Por lo tanto $r(M) \geq \sum_{x\in M} r(Rx) = \sum_{x\in M} Rx = M$, con lo que se obtiene la igualdad deseada. □

1.1.2. Radicales y prerradicales idempotentes.

Definición 1.1.3. *Se dice que $r \in R - pr$ es idempotente si $r \cdot r = r$ y es llamado un radical si $(r : r) = r$ es decir si $r(M/r(M)) = 0$ para todo $M \in R - Mod$.*

Notación 1.1.1. *De ahora en adelante, para cada $r, s \in R - pr$ $r \cdot s = rs$.*

Lema 1.1.2. *Sean $N \leq M \in R - Mod$ y $r \in R - pr$. Entonces r es radical si y sólo si $r(M/N) = r(M)/N$ para cada $N \leq r(M)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$). La proyección $M \xrightarrow{\rho} M/N$ cuyo núcleo es N, induce el homomorfismo $r(M) \xrightarrow{\rho|} r(M/N)$, esto por ser r prerradical. Por la contención $N \leq r(M)$ se tiene $r(M)/N = \rho|(r(M)) = \rho(r(M)) \leq r(M/N)$ y por el tercer teorema de isomorfismo $M/N \diagup r(M)/N \overset{f}{\cong} M/r(M)$. Como r es un radical el homomorfismo $g = f\rho_1$ $M/N \xrightarrow{g} M/r(M)$ donde, $M/N \xrightarrow{\rho_1} M/N \diagup r(M)/N$ y $M/N \diagup r(M)/N \xrightarrow{f} M/r(M)$, cuando se restringe a $r(M/N)$ es cero entonces $r(M/N) \leq Nuc(g) = r(M)/N$. Recíprocamente aplicado la hipótesis a $N = r(M)$, r es radical. □

Un resultado dual es válido para prerradicales idempotentes:

Lema 1.1.3. *Un prerradical r es idempotente si y sólo si $r = r(r : s)$ para todo $s \in R - pr$.*

Demostración. ($\Leftarrow$). Primero hay que notar que $(r : \mathbf{0}) = r$ para todo $r \in R-pr$. En efecto, si $M \in R - MOd$ entonces $(r : \mathbf{0})(M)/r(M) = \mathbf{0}(M/r(M)) = 0 = r(M)/r(M)$ por lo tanto $(r : \mathbf{0}) = r$. Si $r = r(r : s)$ para todo $s \in R-pr$ entonces para $s = \mathbf{0}$, $r = r(r : \mathbf{0}) = rr$. Por lo tanto r es idempotente.
($\Rightarrow$). Sean r un prerradical idempotente y $s \in R - pr$. Por definición $r \preceq (r : s)$, y por la Observación 1.1.4 $r(r : s) \preceq r \wedge (r : s)$. Si r es idempotente entonces $r = rr \preceq r(r : s) \preceq r \wedge (r : s) = r$, pues $r \preceq (r : s)$. Por lo tanto $r = r(r : s)$ para todo $s \in R - pr$. □

Definición 1.1.4. *Una clase $\mathscr{C}$ de módulos sobre un anillo R es llamada, clase de pretorsión si es cerrada bajo cocientes y coproductos y es llamada clase libre de pretorsión si es cerrada bajo submódulos y productos.*

Definición 1.1.5. *A cada prerradical r le pueden ser asociadas las siguientes clases de módulos:*

1. $\mathbb{T}_r := \{M \in R - Mod | r(M) = M\}$
2. $\mathbb{F}_r := \{M \in R - Mod | r(M) = 0\}$
3. $\bar{\mathbb{T}}_r := \{r(M) | M \in R - Mod\}$
4. $\bar{\mathbb{F}}_r := \{M/r(M) | M \in R - Mod\}$

Observación 1.1.6.
1. *r es un prerradical idempotente si y sólo si $\mathbb{T}_r = \bar{\mathbb{T}}_r$.*
2. *r es un radical si y sólo si $\mathbb{F}_r = \bar{\mathbb{F}}_r$.*

Proposición 1.1.3. *$\mathbb{T}_r$ y $\mathbb{F}_r$ son clases de pretorsión y libre de pretorsión respectivamente.*

Demostración. Dados $M, N \in R - Mod$ con $M \in \mathbb{T}_r$ y un epimorfismo f, $M \xrightarrow{f} N$, se satisface $N = f(M) = f(r(M)) \leq r(N)$, por tanto $N \in \mathbb{T}_r$. Ahora sea $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un conjunto de módulos contenido en $\mathbb{T}_r$ entonces, por la Proposición 1.1.2 $\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \oplus_{\lambda\in\Lambda} r(M_\lambda) = r(\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$ esto implica $\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \in \mathbb{T}_r$. Por lo tanto $\mathbb{T}_r$ es una clase de pretorsión.
Dualmente si $N \leq M \in \mathbb{F}_r$ y $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un conjunto de módulos contenido en $\mathbb{T}_r$ entonces $r(N) \leq r(M) = 0$ y $r(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda) \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} r(M_\lambda) = 0$. Por lo tanto $\mathbb{F}_r$ es una clase libre de pretorsión. □

Proposición 1.1.4. *1. Hay una correspondencia biyectiva entre los prerradicales idempotentes de $R-pr$ y las clases de pretorsión de $R-Mod$.*

2. Hay una correspondencia biyectiva entre radicales de $R-pr$ y las clases libres de pretorsión de $R-Mod$.

Demostración. (1). Sea $\mathscr{C}$ una clase de pretorsión de $R-Mod$ y para cualquier $M \in R-Mod$ la colección $\{N \leq M | N \in \mathscr{C}\}$ que es no vacía pues 0 es un elemento de la colección. Ahora se define $r_{\mathscr{C}}(M) := \sum\{N \leq M | N \in \mathscr{C}\}$, como $\mathscr{C}$ es cerrado bajo sumas directas y cocientes, $r_{\mathscr{C}}(M) \in \mathscr{C}$. Se tiene que $r_{\mathscr{C}}$ es claramente un prerradical e idempotente. Ahora para cada prerradical r idempotente, como antes, le es asociado $\mathbb{T}_r$. Solo resta probar que para cada prerradical idempotente y cada clase de pretorsión $\mathscr{C}$, $r = r_{\mathbb{T}_r}$ y $\mathscr{C} = \mathbb{T}_{r_{\mathscr{C}}}$. Recordando que $\mathbb{T}_r = \{M \in R-Mod | r(M) = M\}$ y debido a la construcción de $r_{\mathbb{T}_r}$, $r_{\mathbb{T}_r} \preceq r$ además r es idempotente por lo que $r = r_{\mathbb{T}_r}$. Por otro lado, $r_{\mathscr{C}}$ es idempotente entonces $\bar{\mathbb{T}}_{r_{\mathscr{C}}} = \mathbb{T}_{r_{\mathscr{C}}}$, pero $\bar{\mathbb{T}}_{r_{\mathscr{C}}} = \mathscr{C}$.
(2). Por dualidad de (1). □

Observación 1.1.7. *Sean $t, r \in R-pr$ con $t \preceq r$ y t idempotente, entonces $rt = tr = t$.*

Demostración. Sea $M \in R-Mod$. Como $t \preceq r$, para $t(M)$, $t(t(M)) \leq r(t(M))$ y al ser t idempotente se satisface $t(M) = t(t(M)) \leq r(t(M)) \leq t(M)$, es decir, $t(M) = rt(M)$. Análogamente se prueba la otra igualdad. □

Proposición 1.1.5. *1. Para cualquier prerradical r existe un mayor prerradical idempotente $\hat{r}$ menor que r.*

2. Para cualquier prerradical r existe un menor radical $\bar{r}$ mayor que r.

Demostración. (1). Si $r \in R-pr$ sea $\hat{r}$ el prerradical correspondiente a $\mathbb{T}_r$ entonces $\hat{r} \preceq r$ y por la Observación 1.1.7 cumple la propiedad deseada. Una vez más, la segunda parte se obtiene por dualidad. □

Es posible dar una construcción por recursión de $\hat{r}$ y $\bar{r}$, como sigue:
$\hat{r}$: Si β no es un ordinal límite, $r^{\beta} = rr^{\beta^{-1}}$, en el caso límite $r^{\beta} = \bigcap_{\alpha<\beta} r^{\alpha}$ y finalmente $\hat{r} = \bigcap_{\beta} r^{\beta}$.
$\bar{r}$: Si β no es un ordinal límite, $r_{\beta} = (r_{\beta^{-1}} : r)$, en el caso límite $r_{\beta} = \sum_{\alpha<\beta} r_{\alpha}$ y finalmente $\bar{r} = \sum_{\beta} r^{\beta}$

Definición 1.1.6. *Sea* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta y $r \in R-pr$. Se dice que r es exacto izquierdo si la sucesión:*

$$0 \longrightarrow r(M) \longrightarrow r(N) \longrightarrow r(L)$$

es exacta y es exacto derecho si la sucesión:

$$r(M) \longrightarrow r(N) \longrightarrow r(L) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Teorema 1.1.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un prerradical r:*

1. *r es exacto izquierdo.*

2. *Si $N \leq M \in R-Mod$, entonces $r(N) = r(M) \cap N$ para todo $M \in R-Mod$.*

3. *r es idempotente y $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo submódulos.*

Demostración. La proyección ρ de M a M/N induce la restricción $r(M) \overset{\rho|}{\twoheadrightarrow} r(M/N)$, con lo que se obtiene $Nuc(\rho|) = r(M) \cap Nuc(\rho) = r(M) \cap N$ para cualquier $M \in R-Mod$,
$(1 \Rightarrow 2)$: Considere la sucesión:

$$0 \longrightarrow N \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} M/N \longrightarrow 0$$

Por hipótesis la sucesión:

$$0 \longrightarrow r(N) \overset{i}{\hookrightarrow} r(M) \overset{\rho|}{\twoheadrightarrow} r(M/N)$$

es exacta. Es decir, $r(N) = Im(i) =$
$Nuc(\rho|) = r(M) \cap N$.
$(2 \Rightarrow 1)$: Es suficiente probar el resultado para las sucesiones del tipo:

$$0 \longrightarrow N \overset{i}{\hookrightarrow} M \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} M/N \longrightarrow 0$$

Como r es prerradical se obtiene:

$$r(N) \overset{i}{\hookrightarrow} r(M) \overset{\rho|}{\twoheadrightarrow} r(M/N)$$

Usando (2), $r(N) = r(M) \cap N$ es decir:

$$0 \longrightarrow r(N) \overset{i}{\hookrightarrow} r(M) \overset{\rho|}{\twoheadrightarrow} r(M/N)$$

es exacta.
$(2 \Rightarrow 3)$: Para cada $M \in R-Mod, r(M) \leq M$ entonces por (2), $r(r(M)) = r(M) \cap r(M) = r(M)$. Si además $M \in \mathbb{T}_r$ entonces $r(N) = N \cap r(M) = N \cap M = N$ para cualquier $N \leq M$, con esto queda demostrado (3).
$(3 \Rightarrow 2)$: Sean $M \in R-Mod$ y $N \leq M$. Como r es idempotente $r(M) \in \mathbb{T}_r$, entonces $r(M) \cap N \in \mathbb{T}_r$, ya que $\mathbb{T}_r$ es cerrada bajo submódulos. Además $r(N) \leq r(M) \cap N \leq N$ por lo tanto $r(N) = r(r(N)) \leq r(r(M) \cap N) = r(M) \cap N \leq r(N)$. $\square$

Es válido también un resultado dual para radicales que se enuncia de la siguiente forma:

Teorema 1.1.2. *Son equivalentes para un prerradical r:*

1. *r preserva epimorfismos.*
2. *$r(M) = r(R)M$ para cualquier $M \in R - Mod$.*
3. *r es radical y $\mathbb{F}_r$ es cerrada bajo cocientes.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$): Si $M \in R - Mod$ y $m \in M$ se tiene el epimorfismo $R \xrightarrow{\cdot m} Rm$, como r preserva epimorfismos $r(Rm) = \_ \cdot m(r(R)) = r(R)m$. Por otro lado si se considera:

$$\oplus_{x \in M} Rm \xrightarrow{\rho} \sum_{m \in M} Rm = M$$

entonces la siguiente cadena de igualdades se satisfacen, $r(\sum_{x \in M} Rm) = \rho|(r(\oplus_{x \in M} Rm)) = \rho(r(\oplus_{x \in M} Rm)) = \rho(\oplus_{x \in M} r(Rm)) = \sum_{x \in M} r(Rm)$, por lo que $r(R)M = \sum_{m \in M} r(R)m = \sum_{m \in M} r(Rm) = r(\sum_{m \in M} Rm) = r(M)$.
($2 \Rightarrow 3$): Para cualquier $M \in R - Mod$, $r(M/r(M)) = r(R)(M/r(M))) = r(R)(M/r(R)M) = 0$, es decir r es un radical. Si $M \in \mathbb{F}_r$ y $N \in R - Mod$ para el cual se tiene el cociente $M \xrightarrow{f} N$ entonces $0 = f(0) = f(r(M)) = f(r(R)M) = r(R)f(M) = r(R)N = r(N)$, así $N \in \mathbb{F}_r$.
($3 \Rightarrow 1$): Sean $M, N \in R - Mod$ y $f \in Hom_R(M, N)$ un epimorfismo, entonces $f(r(M)) \leq r(N)$. Por hipótesis r es radical y utilizando el Lema 1.1.3 se obtiene $r(N)/f(r(M)) = r(N/f(r(M))) \leq r(N/r(N)) = 0$, con lo que se obtiene la igualdad $f(r(M)) = r(N)$. Es decir el homomorfismo $f|$, inducido por f es un epimorfismo. □

Definición 1.1.7. *Un prerradical que cumpla alguna de las condiciones del teorema anterior es llamado $t - radical$.*

Definición 1.1.8. *Una clase de pretorsión es llamada hereditaria si es cerrada bajo submódulos.*

En consecuencia:

Corolario 1.1.3. *Hay una correspondencia biyectiva entre los prerradicales exactos izquierdos y las clases de pretorsión hereditarias.*

1.2. Teorías de torsión.

Definición 1.2.1. *Una teoría de torsión en $R - Mod$ es una pareja $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ de clases de módulos que satisface:*

1. *$Hom_R(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{F}$.*

2. Si $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $F \in \mathbb{F}$ entonces $T \in \mathbb{T}$.

3. Si $Hom_R(T, F) = 0$ para todo $T \in \mathbb{T}$ entonces $F \in \mathbb{F}$.

Observación 1.2.1. *La relación $\lessdot$ sobre la clase de las teorías de torsión en $R - Mod$ definida como: $(\mathbb{T}_1, \mathbb{F}_1) \lessdot (\mathbb{T}_2, \mathbb{F}_2)$ si y sólo si $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$, es un orden parcial. Notar que $\mathbb{T}_1 \subseteq \mathbb{T}_2$ si y sólo si $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_1$.*

Definición 1.2.2. *Si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión, a $\mathbb{T}$ se le conoce como clase de torsión y si $M \in \mathbb{T}$ entonces se dice que M es de torsión, también a $\mathbb{F}$ se le conoce como clase libre de torsión y si $M \in \mathbb{F}$ entonces se dice que M es libre de torsión.*

Observación 1.2.2. *Si $\mathscr{C}$ es una subclase de $R - Mod$ entonces $\mathscr{C}$ genera una teoría de torsión de la siguiente manera:*

$$\mathbb{F} = \{F \in R - Mod | Hom_R(C, F) = 0, \text{ para cada } C \in \mathscr{C}\}$$

$$\mathbb{T} = \{T \in R - Mod | Hom_R(T, F) = 0, \text{ para cada } F \in \mathbb{F}\}$$

Entonces $\mathbb{T}$ es la menor clase de torsión tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{T}$.
Dualmente $\mathscr{C}$ cogenera una teoría de torsión.

$$\mathbb{T} = \{T \in R - Mod | Hom_R(T, C) = 0, \text{ para cada } C \in \mathscr{C}\}$$

$$\mathbb{F} = \{F \in R - Mod | Hom_R(T, F) = 0, \text{ para cada } T \in \mathbb{T}\}$$

Entonces $\mathbb{F}$ es la menor clase de libre torsión tal que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{F}$.

Definición 1.2.3. *Una clase $\mathscr{C}$ de módulos es cerrada bajo extensiones si para cada sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

con $L, N \in \mathscr{C}$ se tiene que $M \in \mathscr{C}$.

Teorema 1.2.1. *Para una clase de módulos $\mathbb{T}$ son equivalentes:*

1. $\mathbb{T}$ es la clase de torsión para alguna teoría de torsión.

2. $\mathbb{T}$ es cerrada bajo tomar cocientes, coproductos y extensiones.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría de torsión para la cual $\mathbb{T}$ es su clase de torsión. Sean $M \in \mathbb{T}$ y $f \in Hom_R(M, N)$ un epimorfismo. Para cualquier $F \in \mathbb{F}$ y $g \in Hom_R(N, F)$ se tiene que $g(N) = g(f(M)) = 0$ ya que $gf \in Hom_R(M, F)$, por tanto $g = 0$ lo que implica $N \in \mathbb{T}$.
Para una familia $\{M_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathbb{T}$ y $F \in \mathbb{F}$ se tiene que $Hom_R(\oplus_\Lambda M_\lambda, F) \cong \prod_\Lambda Hom_R(M_\lambda, F) = 0$ ya que $M_\lambda \in \mathbb{T}$ para cada $\lambda \in \Lambda$ por lo tanto

$\oplus_\Lambda M_\lambda \in \mathbb{T}$.
Por último $\mathbb{T}$ es cerrado bajo extensiones. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $L \leq M \in R-Mod$ y que $L, M/L \in \mathbb{T}$. Además, si $F \in \mathbb{F}$ y $\alpha \in Hom_R(M,F)$ se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"] & M/L \arrow[r] & 0 \\ & & F & & \end{tikzcd}$$

Entonces $\rho i = 0$, porque el renglón es exacto, y $\alpha i = 0$ ya que $\alpha i \in Hom_R(L,F)$. Utilizando la propiedad universal del conúcleo, existe $f \in Hom_R(M/L,F)$ tal que $\alpha = f\rho$, pero como $M/L \in \mathbb{T}$ entonces $f = 0$ y por lo tanto $\alpha = 0$, así que $M \in \mathbb{T}$.
$(2 \Rightarrow 1)$. Si $\mathbb{T}$ es cerrada bajo tomar cocientes, coproductos y extensiones; sea $(\mathbb{T}', \mathbb{F})$ la teoría de torsión generada por $\mathbb{T}$ y como $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{T}'$ sólo resta ver que $\mathbb{T}' \subseteq \mathbb{T}$. Para esto sea $M \in \mathbb{T}'$ como $\mathbb{T}$ es una clase de pretorsión $r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{T}$, es decir, el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathbb{T}$. Es suficiente probar que $M/r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{F}$ ya que en ese caso $M/r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{T} \cap \mathbb{F} = \{0\}$, esto es $M/r_{\mathbb{T}}(M) = 0$ y por tanto $M \in \mathbb{T}$. Para esto sean $T \in \mathbb{T}'$ y $f \in Hom_R(T, M/r_{\mathbb{T}}(M))$, si $f \neq 0$ entonces existe $N \leq M$ tal que $r_{\mathbb{T}}(M) < N$ y $f(T) = N/r_{\mathbb{T}}(M)$ que pertenece a $\mathbb{T}$ ya que $\mathbb{T}$ es cerrado bajo cocientes. También se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & r_{\mathbb{T}}(M) \arrow[r, hook] & N \arrow[r, two heads] & N/r_{\mathbb{T}}(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\mathbb{T}$ es cerrado bajo extensiones $N \in \mathbb{T}$, que es una contradicción a la maximalidad de $r_{\mathbb{T}}(M)$ por tanto $f = 0$ y $M/r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{F}$. □

Teorema 1.2.2. *Son equivalentes para una clase de módulos $\mathbb{F}$:*

1. *$\mathbb{F}$ es la clase libre de torsión para alguna teoría de torsión.*
2. *$\mathbb{F}$ es cerrada bajo tomar submódulos (monomorfismos), productos y extensiones.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ una teoría de torsión para la cual $\mathbb{F}$ es una clase libre de torsión. Si $M \in \mathbb{F}$ y $N \leq M$, entonces para cualquier $T \in \mathbb{T}$ y para cualquier $g \in Hom_R(T,N)$ se tiene que $g = 0$ ya que $ig \in Hom_R(T,M)$ lo que implica $N \in \mathbb{T}$.
Para una familia $\{M_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathbb{F}$ y $T \in \mathbb{T}$ se tiene que $Hom_R(T, \prod_\Lambda M_\lambda) \cong \prod_\Lambda Hom_R(T, M_\lambda) = 0$ ya que $M_\lambda \in \mathbb{F}$ para cada $\lambda \in \Lambda$, por lo tanto $\prod_\Lambda M_\lambda \in \mathbb{F}$.
Por último, para la cerradura bajo extensiones y sin pérdida de generalidad se puede suponer que $L \leq M \in R-Mod$ y que $L, M/L \in \mathbb{F}$. Además para $T \in \mathbb{F}$ y $\alpha \in Hom_R(T,M)$ se obtiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & T \arrow[d, "\alpha"] & & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[r, two heads, "\rho"] & M/L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\rho i = 0$, porque el renglón es exacto, y $\rho\alpha = 0$ ya que $\rho\alpha \in Hom_R(T, M/L)$. Utilizando la propiedad universal del núcleo existe un único $f \in Hom_R(T, L)$ tal que $\alpha = if$, pero como $L \in \mathbb{T}$ se tiene $f = 0$ y por lo tanto $\alpha = 0$, esto es $M \in \mathbb{F}$.
$(2 \Rightarrow 1)$. Supongamos que $\mathbb{F}$ es cerrada bajo tomar submódulo, productos y extensiones; sea $(\mathbb{T}, \mathbb{F}')$ la teoría de torsión cogenerada por $\mathbb{F}$. Como $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}'$ sólo resta ver que $\mathbb{F}' \subseteq \mathbb{F}$. Para esto sea $M \in \mathbb{F}'$, como $\mathbb{F}$ es una clase libre de pretorsión $M/r_{\mathbb{F}}(M) \in \mathbb{F}$, de hecho, $r_{\mathbb{F}}(M)$ es el menor submódulo de M que satisface tal propiedad. Es suficiente probar que $r_{\mathbb{F}}(M) = 0$ ya que en ese caso $M/r_{\mathbb{F}}(M) = M \in \mathbb{F}$. En efecto, como $r_{\mathbb{F}'}(M) \leq M \in \mathbb{F}'$ entonces $r_{\mathbb{F}'}(M) \in \mathbb{F}'$. Si se demuestra que $r_{\mathbb{F}}(M) \in \mathbb{T}$ la afirmación se cumple, ya que entonces $r_{\mathbb{F}}(M) \in \mathbb{T} \cap \mathbb{F}' = \{0\}$. Para esto, sean $F \in \mathbb{F}$ y $f \in Hom_R(r_{\mathbb{F}}(M), F)$, si $f \neq 0$ entonces $Nuc(f) \lneq r_{\mathbb{F}}(M)$ y $r_{\mathbb{T}}(M)/Nuc(f) \neq 0$. Además $r_{\mathbb{F}}(M)/Nuc(f) \cong f(r_{\mathbb{F}}(M))$ que pertenece a $\mathbb{F}$ ya que es cerrado bajo submódulos, así también se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & r_{\mathbb{F}}(M)/Nuc(f) \arrow[r, hook] & M/Nuc(f) \arrow[r, two heads] & M/r_{\mathbb{F}}(M) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Puesto que $M/r_{\mathbb{F}}(M) \cong (M/Nuc(f))/(r_{\mathbb{F}}(M)/Nuc(f))$. Como $\mathbb{F}$ es cerrado bajo extensiones $M/Nuc(f) \in \mathbb{F}$, que es una contradicción a la minimalidad de $r_{\mathbb{F}}(M)$ por tanto $Nuc(f) = r_{\mathbb{F}}(M)$ es decir $f = 0$ y entonces $r_{\mathbb{F}}(M) \in \mathbb{T}$ y por tanto $M \in \mathbb{F}$. $\square$

Lo anterior motiva la siguiente definición, que está relacionada con la Definición 1.2.2.

Definición 1.2.4. *Dada $\mathscr{C}$ una clase de módulos, se dice que:*

1. *$\mathscr{C}$ es una clase de torsión si es una clase de pretorsión cerrada bajo extensiones.*

2. *$\mathscr{C}$ es una clase libre de torsión si es una clase libre de pretorsión cerrada bajo extensiones.*

Observación 1.2.3. *Si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión entonces $M \in \mathbb{F}$ si y sólo si $Hom_R(T, M) = 0$ para todo $T \in \mathbb{T}$. Además, $r_{\mathbb{T}}(M)$ es el mayor submódulo de M que pertenece a $\mathbb{T}$ y $M \in \mathbb{F}$ si y sólo si $r_{\mathbb{T}}(M) = 0$.*

Lema 1.2.1. *Si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión entonces $r_{\mathbb{T}}$ es un radical idempotente.*

Demostración. Si $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión, como $\mathbb{T}$ en particular es una clase de pretorsión entonces $r_{\mathbb{T}}$ es un prerradical idempotente. Notar que para cada $M \in R - Mod$, $M/r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{F}$, en efecto. Supóngase que $f \neq 0$ con $f \in Hom_R(T, M/r_{\mathbb{T}}(M))$ y $T \in \mathbb{T}$. entonces existe $N \leq M$ tal que $r_{\mathbb{T}}(M) < N$ y $f(T) = N/r_{\mathbb{T}}(M)$ que pertenece a $\mathbb{T}$ ya que $\mathbb{T}$ es cerrado bajo cocientes, así también se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow r_{\mathbb{T}}(M) \hookrightarrow N \twoheadrightarrow N/r_{\mathbb{T}}(M) \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{T}$ es cerrado bajo extensiones $N \in \mathbb{T}$, que es una contradicción a la maximalidad de $r_{\mathbb{T}}(M)$. Por tanto $f = 0$ y $M/r_{\mathbb{T}}(M) \in \mathbb{F}$, lo que implica $r_{\mathbb{T}}(M/r_{\mathbb{T}}(M)) \in \mathbb{T} \cap \mathbb{F} = \{0\}$, esto es $r_{\mathbb{T}}$ es radical. □

Recíprocamente:

Lema 1.2.2. *Si r es un radical idempotente entonces $(\mathbb{T}_r, \mathbb{F}_r)$ es una teoría de torsión.*

Demostración. Por la Observación 1.2.3, $Hom_R(M, N) = 0$ para cada $M \in \mathbb{T}_r, N \in \mathbb{F}_r$. r es radical si y sólo si $\mathbb{F}_r = \bar{\mathbb{F}}_r$, además para cada $K \in R - Mod$ $r(K/r(K)) = 0$, esto es, $K/r(K) \in \mathbb{F}_r$. Si M es tal que $Hom_R(M, N) = 0$ para cada $N \in \mathbb{F}_r$, en particular se satisface para $M/r(M)$ y la respectiva proyección canónica, lo que implica $M = r(M)$, con esto $M \in \mathbb{T}_r$. Análogamente, r es idempotente si y sólo si $\mathbb{T}_r = \bar{\mathbb{T}}_r$. Si N es tal que $Hom_R(M, N) = 0$ para cada $M \in \mathbb{T}_r$, en particular se satisface para $r(M)$ y la inclusión canónica, entonces $r(M) = 0$ y por tanto $M \in \mathbb{F}_r$. □

Usando los dos lemas anteriores es inmediato:

Teorema 1.2.3. *Hay una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión de $R - Mod$ y los radicales idempotentes.*

Sean $\mathscr{C}$ una clase de módulos cerrada bajo cocientes y $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ la teoría de torsión generada por $\mathscr{C}$. Entonces, $F \in \mathbb{F}$ si y sólo si para cada $N \leq F$ tal que $N \in \mathscr{C}$ se tiene $N = 0$, ya que por construcción de $\mathbb{F}$ para $N \leq M$ y la respectiva inclusión, debe suceder que $i(N) = 0$ así que $N = 0$. Recíprocamente si M no tiene submódulos distintos de 0 en $\mathscr{C}$, como $\mathscr{C}$ es cerrado bajo cocientes entonces para cada $C \in \mathscr{C}$ y $f \in Hom_R(C, M)$ implica que $0 = f(C)$ ya que $f(C) \leq M$ y entonces $M \in \mathbb{F}$. Por tanto $M \in \mathbb{T}$ si y sólo si no tiene cocientes distintos de 0 en $\mathbb{F}$, que inmediato ya que $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es una teoría de torsión. Lo anterior se resume como sigue.

Proposición 1.2.1. *Sea $\mathscr{C}$ una clase de módulos cerrada bajo cocientes y $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ la teoría de torsión generada por $\mathscr{C}$. Entonces $\mathbb{T} = \{M \in R - Mod|$ cada cociente $N \neq 0$ existe $0 \neq L \leq N, L \in \mathscr{C}\}$.*

1.2.1. Teorías de torsión hereditarias.

Definición 1.2.5. *Una teoría de torsión* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es hereditaria si* $\mathbb{T}$ *es hereditaria.*

Con la definición anterior, el Corolario 1.1.3 y el Teorema 1.2.3 se concluye lo siguiente:

Teorema 1.2.4. *Hay una correspondencia biyectiva entre las teorías de torsión hereditarias y los radicales exactos izquierdos.*

Proposición 1.2.2. *Una teoría de torsión* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es hereditaria si y sólo si* $\mathbb{F}$ *es cerrada bajo cápsulas inyectivas.*

Demostración. Supóngase que $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es hereditaria y consideremos r el radical exacto izquierdo asociado. Sea $F \in \mathbb{F}$ y $E(F)$ su cápsula inyectiva, entonces $0 = r(F) = r(E(F)) \cap F$. Como $F \leq_e E(F)$ entonces $r(E(F)) = 0$ y por tanto $E(F) \in \mathbb{F}$. Recíprocamente si $\mathbb{F}$ es cerrado bajo cápsulas inyectivas, sea r el radical idempotente asociado a la teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$. Si $T \in \mathbb{T}$ y $C \leq T$ entonces $r(C/r(C)) = 0$, esto es $C/r(C) \in \mathbb{F}$. Como $E(C/r(C))$ es inyectivo el existe β tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho"] & T \arrow[ddl, dashed, "\beta"] \\
& C/r(C) \arrow[d, hook] & \\
& E(C/r(C)) &
\end{tikzcd}
$$

Finalmente como $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas se tiene $\beta = 0$, lo que implica (por la conmutatividad del diagrama anterior) que $\rho = 0$ y entonces $C \in \mathbb{T}$. $\square$

Corolario 1.2.1. *Si* $\mathscr{C}$ *es una clase de módulos cerrada bajo submódulos y cocientes, entonces la teoría de torsión generada por* $\mathscr{C}$ *es hereditaria.*

Demostración. Sea $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ la teoría de torsión generada por $\mathscr{C}$, además sean $F \in \mathbb{F}$ y $0 \neq f \in Hom_R(C, E(F))$ con $C \in \mathscr{C}$. Entonces $0 \neq f(C) \in \mathscr{C}$, así que $0 \neq F \cap f(C) \in \mathscr{C}$ que es una contradicción ya que $F \cap f(C) \leq F$. Por tanto $\mathbb{F}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, es decir $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ es hereditaria. $\square$

Proposición 1.2.3. *Una teoría de torsión hereditaria* $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ *es generada por* $\{Rm \in \mathbb{T} | m \in M \in R - Mod\}$.

Demostración. Hay que notar que $M \in \mathbb{T}$ si y sólo si $Rm \in \mathbb{T}$ para cada $m \in M$, lo que se sigue directamente ya que $\mathbb{T}$ es hereditaria, cerrada bajo cocientes y coproductos ya que $M = \sum_{m \in M} Rm$ (ver Lema 1.3.4). De lo anterior la proposición es clara. $\square$

1.3. Topologías lineales de R.

1.3.1. Grupos topológicos.

Definición 1.3.1. *G es un grupo topológico si G es un grupo abeliano y un espacio topológico tal que la operación (de G)* $G \times G \xrightarrow{f} G$ *y la función* $G \xrightarrow{g} G$ *definida como $g(x) = -x$ son continuas.*

Recordar que si $U, V \subseteq G$ entonces $U + V = \{u + v | u \in U, v \in V\}$ y $-U = \{u | -u \in U\}$. De ahora en adelante f y g denotan a las funciones de la definición anterior, a menos que se indique lo contrario.

Observación 1.3.1. *g es un homeomorfismo. En consecuencia, $U \subseteq G$ es abierto si y sólo si $g^{-1}(U) = -U$ es abierto.*

Lema 1.3.1. *Sea G un grupo topológico y $a \in G$ fijo. Entonces la función* $G \xrightarrow{f_a} G$ *definida para $x \in G$ como $f_a(x) = x + a$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Mediante la proyección $\{a\} \times G$ es homeomorfo a G. Observando que $f_a = f|_{\{a\} \times G}$ se obtiene que f_a es continua, y biyectiva. De la misma forma f_{-a} es continua, además satisface $f_a f_{-a} = Id_G = f_{-a} f_a$ $\square$

De esto se obtiene la siguiente:

Observación 1.3.2. *Sea G un grupo topológico. Si $U \subseteq G$ es abierto y $a \in G$ entonces $a + U := \{a\} + U$ es abierto. En consecuencia, si $V \subseteq G$ es abierto entonces $U + V$ es abierto. Finalmente, si $a \in G$ entonces $U \subseteq G$ es una vecindad abierta de a si y sólo si $U - a$ es una vecindad abierta del* 0.

Definición 1.3.2. *Si X es un espacio topológico y $x \in X$. Una base de vecindades de x, es $B_x \subseteq \mathcal{N}_x$ donde $\mathcal{N}_x$ es un sistema de vecindades de x, si satisface para cada $U \in N_x$ existe $V \in B_x$ tal que $V \subseteq U$.*

Proposición 1.3.1. *Sea G un grupo topológico $\mathcal{N}$ el conjunto de vecindades abiertas del* 0 *entonces las siguientes propiedades se satisfacen:*

1. *Si $U \in \mathcal{N}$ y $a \in U$ entonces existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $a + V \subseteq U$ $(N1)$.*

2. Para todo $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V + V \subseteq U$ ($N2$).

3. Si $U \in \mathcal{N}$ entonces $-U \in \mathcal{N}$ ($N3$).

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}$ y $a \in U$, por el Lema 1.3.1 $U - a$ es abierto y $U - a \in \mathcal{N}$, considerando $V = U - a$ se sigue $f_a(U - a) = U \subseteq U$, esto es $N1$.
Sea $U \in \mathcal{N}$, como f es una función continua y $(0, 0) \in f^{-1}(U)$ por lo que existen $V_1, V_2 \subseteq G$ abiertos tal que $(0, 0) \in V_1 \times V_2 \subseteq f^{-1}(U)$. Considerando $V = V_1 \cap V_2$ se obtiene $V \times V \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq f^{-1}(U)$, por lo tanto $f(V \times V) = V + V \subseteq U$, esto es $N2$.
$N3$ es inmediato de la continuidad de la función g. $\square$

Recíprocamente se tiene:

Proposición 1.3.2. *Sean G es un grupo abeliano y $\emptyset \neq \mathcal{N} \subseteq \wp(G)$ satisface las condiciones $N1-N3$ de la proposición anterior. Adicionalmente, si $0 \in U$ para cada $U \in \mathcal{N}$, y para cada $U, V \in \mathcal{N}$ existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \subseteq U \cap V$, entonces existe una única topología en G para la cual G es un grupo topológico y $\mathcal{N}$ es la base de vecindades del 0.*

Demostración. Se define $\tau = \{U \subseteq G |$ para cada $x \in U$ existe $W \in \mathcal{N}, x + W \subseteq U\}$. Entonces así definido, τ es una topología para G. En efecto, $\emptyset, G \in \tau$. Sean $U_1, U_2 \in \tau$ y $x \in U_1 \cap U_2$, entonces para $i = 1, 2$ existe $W_i \in \mathcal{N}$ tal que $x + W_i \subseteq U_i, i = 1, 2$. Por hipótesis existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \subseteq W_1 \cap W_2$, por lo que $x + W \subseteq x + W_i \subseteq U_i, i = 1, 2$. Así $x + W \subseteq U_1 \cap U_2$, esto es $U_1 \cap U_2 \in \tau$. Sea una familia $\{U_i\}_I \subseteq \tau$ y $x \in \cup_{i \in I} U_i$ entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$, como $U_{i_0} \in \tau$, existe $W \in \mathcal{N}$ que satisface $x + W \subseteq U_{i_0} \subseteq \cup_{i \in I} U_i$ lo que implica $\cup_{i \in I} U_i \in \tau$. Por lo tanto τ es una topología para G.
Por ($N1$) los elementos de $\mathcal{N}$ son abiertos. Si $U \in \tau$ y $a \in G$, sea $b \in a + U$ entonces $b - a \in U$ por lo que existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $b - a + V \subseteq U$, así $b + V \subseteq a + U$ y por ende $a + U$ es abierto.
Para la continuidad de f, sea $U \subseteq G$ abierto y $(c, d) \in f^{-1}(U)$, entonces $c + d \in U$ y existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $c + d + W \subseteq U$, aplicando $N2$ a W existe $V \in \mathcal{N}$ que satisface $V + V \subseteq W$ entonces $c + d \in (c + V) \times (d + V) \subseteq f^{-1}(U)$ como $c + V, d + V$ son abiertos $(c + V) \times (d + V)$ es abierto y por tanto f es continua.
Demostración la continuidad de g. Si $U \in \tau$ y $a \in -U$ entonces $-a \in U$, por lo que existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $-a + W \subseteq U$. Por $N3$ $-W \in \mathcal{N}$ así $a + (-W) \subseteq -U$ y por lo tanto $-U \in \tau$. De esto se sigue la continuidad de g.
Por lo tanto G es un grupo topológico y $\mathcal{N}$ es una base de vecindades abiertas del 0, además es única en vista de la Observación 1.3.2. $\square$

1.3.2. Anillos topológicos.

Definición 1.3.3. *Un anillo topológico es un anillo R, tal que como grupo abeliano es un grupo topológico y la función* $R \times R \xrightarrow{h} R$ *definida como* $h(r,s) = rs$ *es continua.*

Recordar que si $U, V \subseteq R$ entonces $UV = \{uv | u \in U, v \in V\}$ y $-U = \{u| -u \in U\}$. De ahora en adelante h denota a la función de la definición anterior, a menos que se indique lo contrario.

Lema 1.3.2. *Sea R un anillo topológico. Si $a \in R$ entonces las funciones* $R \xrightarrow{h_a} R$, $R \xrightarrow{h^a} R$ *definidas como $h_a(r) = ar$ y $h^a(r) = ra$ para $r \in R$, son continuas.*

Demostración. Basta notar que los siguientes espacios $\{a\} \times R, R \times \{a\}$ son homeomorfos a G y las funciones h_a, h^a son las respectivas restricciones de h a los subespacios $\{a\} \times R, R \times \{a\}$ de $R \times R$. □

$N1, N2, N3$ denotan las propiedades dadas en la Proposición 1.3.1.

Proposición 1.3.3. *Sea R un anillo topológico. Entonces el conjunto de vecindades abiertas del 0, $\mathcal{N}$ satisface $N1, N2, N3$. Más aún, satisface:*

1. *Para cada $r \in R$ y $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $rV \subseteq U$ y $Vr \subseteq U$ $(N4)$.*
2. *Para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $VV \subseteq U$ $(N5)$.*

Demostración. Debido a la Proposición 1.3.1 el conjunto $\mathcal{N}$ satisface $N1 - N3$. Para $N4$, si $r \in R$ y $U \in \mathcal{N}$, como U es abierto por el Lema 1.3.2 aplicado a r, se tiene que $(h_r)^{-1}(U)$ es abierto en $\{r\} \times R$ y por tanto existe W_1 abierto tal que $\{r\} \times W_1 \subseteq (h_r)^{-1}(U)$. Análogamente existe W_2 abierto tal que $W_2 \times \{r\} \subseteq (h^r)^{-1}(U)$. Como los espacios $W_2 \times \{r\}, \{r\} \times W_1$ son homeomorfos, es posible considerar sin pérdida de generalidad $V = W_1 \cap W_2$, así $h_r(V) = rV \subseteq U$ y $h^r(V) = Vr \subseteq U$. Sea $U \in \mathcal{N}$, como h es continua existen $W_1, W_2 \in \mathcal{N}$ tal que $W_1 \times W_2 \subseteq h^{-1}(U)$, considerando $V = W_1 \cap W_2$ se satisface $VV \subseteq U$. □

Recíprocamente:

Proposición 1.3.4. *Si R es un anillo y $\emptyset \neq \mathcal{N} \subseteq \wp(R)$ satisface $N1 - N5$ de la proposición anterior, adicionalmente, si $0 \in U$ para cada $U \in \mathcal{N}$, y para cada $U, V \in \mathcal{N}$ existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \subseteq U \cap V$, entonces existe una única topología en R para la cual R es un anillo topológico y $\mathcal{N}$ es la base de vecindades del 0.*

Demostración. Sea $\tau = \{U \subseteq G|$ para cada $x \in U$ existe $W \in \mathcal{N}, x + W \subseteq U\}$. Como antes, τ así definido, es una topología para R.
Primero, h_a definida como antes es continua para cada $a \in R$. En efecto, si $U \in \mathcal{N}$ y $r \in (h_a)^{-1}(U)$, entonces $ar \in U$ y existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $ar+W \subseteq U$. También existe $V \in \mathcal{N}$ con la propiedad $aV \subseteq W$ así $r + V \subseteq (h_a)^{-1}(U)$ por lo que $(h_a)^{-1}(U) \in \tau$, esto es h_a es continua. Análogamente h^a es también continua para cada $a \in R$.
Ahora, si $U \in \tau$ y $(c, d) \in h^{-1}(U)$ entonces $cd \in U$, por lo que existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $cd + W \subseteq U$, por $N2$ existe $V_1 \in \mathcal{N}$ tal que $V_1 + V_1 \subseteq W$. En vista de $N5$, existe V_2 que satisface $V_2V_2 \subseteq V_1$, una vez más, por $N2$ existe $V_3 \in \mathcal{N}$ con la propiedad $V_3 + V_3 \subseteq V_1$. Considerando las funciones h_c, h^d que son continua, los siguientes conjuntos son abiertos $V_d = (h^d)^{-1}(V_3) \cap V_2 \cap V_1, V_c = (h_c)^{-1}(V_3) \cap V_2 \cap V_1$, entonces $(c, d) \in (c+V_c) \times (d+V_d) \subseteq h^{-1}(U)$ puesto que si $v \in V_d, v' \in V_c$ entonces $(c+v)(d+v') = cd+cv'+vd+vv' \in cd+W \subseteq U$. Por lo tanto h es continua y debido a la Proposición 1.3.2, τ es única y $\mathcal{N}$ es la base de vecindades del 0. □

Definición 1.3.4. *Sea R un anillo. $\mathcal{N} \subseteq \wp(R)$ es llamado conjunto fundamental de vecindades del 0 o simplemente fundamental si satisface:*

1. *Para cada $U \in \mathcal{N}, 0 \in U$ $(P1)$.*

2. *Si $U, V \in \mathcal{N}$ entonces existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \subseteq U \cap V$ $(P2)$.*

3. *Si $U \in \mathcal{N}$ y $a \in U$ entonces existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $a + V \subseteq U$ $(N1)$.*

4. *Para todo $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V + V \subseteq U$ $(N2)$.*

5. *Si $U \in \mathcal{N}$ entonces $-U \in \mathcal{N}$ $(N3)$.*

6. *Para cada $r \in R$ y $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $rV \subseteq U$ y $Vr \subseteq U$ $(N4)$.*

7. *Para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $VV \subseteq U$ $(N5)$.*

De esta definición y en vista de las Proposiciones 1.3.3 y 1.3.4 las siguientes observaciones son inmediatas.

Observación 1.3.3. *Si R es un anillo topológico entonces $\mathcal{N}$ el conjunto de vecindades abiertas del 0 es fundamental. Para R un anillo y $\mathcal{N} \subseteq \wp(R)$ conjunto fundamental, existe una única topología tal que R es un anillo topológico y $\mathcal{N}$ es un conjunto de vecindades abiertas del 0.*

Observación 1.3.4. *Si R es un anillo y κ es un conjunto fundamental de vecindades del 0, entonces existe única topología tal que R es un anillo topológico cuya base de vecindades consiste de ideales izquierdos de R.*

Proposición 1.3.5. *Sea R un anillo y $\kappa \subseteq \wp(R)$ tal que $I \leq {}_R R$ para cada $I \in \kappa$. Si se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *Si $I \in \kappa, J \leq {}_R R$ e $I \leq J$ entonces $J \in \kappa$ $(L1)$.*

2. *Si $I, J \in \kappa$ entonces $I \cap J \in \kappa$ $(L2)$.*

3. *Si $I \in \kappa$ y $r \in R$ entonces $(I : r) \in \kappa$ $(L3)$.*

Entonces κ es un conjunto fundamental de vecindades del 0.

Demostración. Las propiedades $P1$ y $P2$ son inmediatas ya que cada $I \in \kappa$ es un ideal izquierdo de R y por $L2$ respectivamente. Por $L1$, $N1 - N3, N5$ son también inmediatas. Sea $r \in R$ e $I \in \kappa$ entonces $(I : r) \in \kappa$ y $J = I \cap (I : r) \in \kappa$ que satisface $rJ, Jr \subseteq I$. □

1.3.3. Filtros lineales.

Definición 1.3.5. *Sea R un anillo topológico cuyo conjunto fundamental κ consiste de ideales izquierdos de R, entonces R es llamado anillo topológico lineal (izquierdo) y κ es llamado filtro de ideales (izquierdo) de R.*

Observación 1.3.5. *$\{\kappa | \kappa$ filtro de ideales de $R\} := R - fil$ es cardinable, dado que está en correspondencia biyectiva con las topologías de R.*

Definición 1.3.6. *Sea $\kappa \in R - fil$. $M \in R - Mod$ es de $\kappa - torsión$ si $(0 : m) \in \kappa$ para cada $m \in M$. $\mathbb{T}_\kappa := \{M \in R - Mod | M$ es de $\kappa - torsión\}$.*

Lema 1.3.3. *Si $\kappa \in R - fil$, $\mathbb{T}_\kappa$ es una clase de pretorsión hereditaria.*

Demostración. Es claro que si $M \in \mathbb{T}_\kappa$ y $N \leq M$ entonces $N \in \mathbb{T}_\kappa$. Sean $M \in \mathbb{T}_\kappa$ y $f \in Hom_R(M, N)$ un epimorfismo con $N \in R - Mod$. Si $n \in N$ entonces $n = f(m)$ para algún $m \in M$ y como $(0 : m) \subseteq (0 : f(m)) = (0 : n)$ con $(0 : m) \in \kappa$ debido a $L1$ $(0 : n) \in \kappa$, entonces $N \in \mathbb{T}_\kappa$.
Para una familia $\{M_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathbb{T}_\kappa$, si $m \in \oplus_\Lambda M_\lambda$ entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tales que $0 \neq m_{\lambda_i} \in M_{\lambda_i}$ y $M_{\lambda_i} \in \mathbb{T}_\kappa$ para cada $i \in \{1...n\}$, entonces $(0 : m_{\lambda_i}) \in \kappa$. Además $(0 : m) = \cap_{i=1}^n (0 : m_{\lambda_i})$, por lo que $(0 : m) \in \kappa$, esto es $\oplus_\Lambda M_\lambda \in \kappa$. □

Lema 1.3.4. *Si $\mathscr{C}$ es una clase de pretorsión hereditaria entonces existe un único $\kappa \in R - fil$ tal que $\mathscr{C} = \mathbb{T}_\kappa$.*

Demostración. Sea $\kappa = \{I \leq {}_RR | R/I \in \mathscr{C}\}$ con $\mathscr{C}$ una clase de pretorsión hereditaria.
Si $I \leq J \leq {}_RR$ e $I \in \kappa$ entonces $R/I \in \mathscr{C}$ y también $J \leq I \in \mathscr{C}$ ya que $J/I \leq R/I$ y $\mathscr{C}$ es hereditaria. Como es cerrada bajo cocientes y dado que $R/J \cong (R/I)/(J/I)$, entonces $R/J \in \mathscr{C}$ por lo que $J \in \kappa$, esto es $L1$.
Sean $I, J \in \kappa$, como $R/(I \cap J) \hookrightarrow R/I \oplus R/J$ y $R/I, R/J \in \mathscr{C}$ entonces $R/I \oplus R/J \in \mathscr{C}$. Como $\mathscr{C}$ es hereditaria y cerrada bajo cocientes entonces $R/(I \cap J) \in \mathscr{C}$, por lo que $L2$ se satisface.
Finalmente, sean $I \in \kappa$ y $r \in R$, como $(I : r) = (0 : r + I)$ entonces $R/(I : r) = R/(0 : r{+}I) \cong R(r{+}I) \leq R/I \in \mathscr{C}$ lo que implica $R/(I : r) \in \mathscr{C}$, esto es $L3$.
Por otro lado, $\mathbb{T}_\kappa = \{M \in R - Mod | (0 : m) \in \kappa \text{ para cada } m \in M\}$. Notemos que $\mathbb{T}_\kappa = \{M \in R - Mod | Rm \in \mathscr{C} \text{ para cada } m \in M\}$. En efecto, si $M \in \mathbb{T}_\kappa$ y $m \in M$ entonces $(0 : m) \in \kappa$, así que $Rm \cong R/(0 : m) \in \mathscr{C}$. Para la igualdad, sea $M \in \mathbb{T}_\kappa$, como $M = \sum_{m \in M} Rm$ entonces es un cociente de $\oplus_{m \in M} Rm$ y cada $Rm \in \mathscr{C}$ por lo que $M \in \mathscr{C}$, esto es $\mathbb{T}_\kappa \subseteq \mathscr{C}$. Recíprocamente, si $M \in \mathscr{C}$ entonces para cada $m \in M$, $Rm \in \mathscr{C}$ lo que implica $Rm \cong R/(0 : m) \in \mathscr{C}$ esto es $(0 : m) \in \kappa$ y por lo tanto $M \in \mathbb{T}_\kappa$. □

Utilizando los dos lemas anteriores así como el Corolario 1.1.3 son inmediatos los siguientes teoremas.

Teorema 1.3.1. *Hay una correspondencia biyectiva entre $R - fil$ y las clases libres de pretorsión hereditarias de $R - Mod$.*

Teorema 1.3.2. *Hay una correspondencia biyectiva entre:*

1. *Topologías lineales de R, de ahora en adelante $Top(R)$.*

2. *$R - fil$.*

3. *Clases de pretorsión hereditarias de $R - Mod$.*

4. *Prerradicales exactos izquierdos de $R - Mod$.*

Un caso particular que se puede tratar y aparece más adelante es el siguiente.

Observación 1.3.6. *Sea R un anillo e $I \leq {}_RR$ entonces $\eta(I) := \{J \leq {}_RR | I \leq J\}$ es un filtro de ideales de R.*

Notación 1.3.1. $L_\kappa : = \cap\{I | I \in \kappa\}$.

Esto motiva la siguiente:

Definición 1.3.7. *Un filtro $\kappa \in R-fil$ es Jansiano si es cerrado bajo tomar intersecciones arbitrarias.*

Teorema 1.3.3. *Son equivalentes para $\kappa \in R-fil$:*

1. *κ es Jansiano.*
2. *$\mathbb{T}_\kappa$ es cerrado bajo productos.*
3. *$L_\kappa \in \kappa$.*

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Sea $\{M_\lambda\}_\Lambda \subseteq \mathbb{T}_\kappa$, si $m \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ entonces $m = (m_\lambda)$ con $(0 : m_\lambda) \in \kappa$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Entonces $(0 : m) = \cap_{\lambda\in\Lambda}(0 : m_\lambda) \in \kappa$ esto por (1), lo que implica $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \in \mathbb{T}_\kappa$.
$(2 \Rightarrow 3)$. Recordando que $\mathbb{T}_\kappa = \{M \in R-Mod|M \text{ es de } \kappa - torsión\}$ y de la definición de L_κ es inmediato.
$(2 \Rightarrow 3)$. Para $\{I_\lambda\}_\Lambda \subseteq \kappa$ se tiene $L_\kappa \subseteq \cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, $L1$ implica que $\cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \in \kappa$. □

Corolario 1.3.1. *Un filtro $\kappa \in R-fil$ es Jansiano si y sólo si es de la forma $\kappa = \eta(I)$ para algún $I \leq {}_RR$.*

Demostración. Por definición de $\eta(I), I \leq {}_RR$ es Jansiano. Recíprocamente, por el Teorema 1.3.3 $\kappa = \eta(L_\kappa)$. □

Las correspondencias establecidas con anterioridad y el teorema anterior tienen como consecuencia:

Teorema 1.3.4. *Hay una correspondencia biyectiva entre:*

1. *$\kappa \in R-fil$ tal que κ es Jansiano.*
2. *Los prerradicales r exactos izquierdos de $R-Mod$ tales que $\mathbb{T}_r$ es cerrado bajo productos.*

Definición 1.3.8. *Un prerradical r es Jansiano si $\mathbb{T}_r$ es cerrado bajo productos.*

1.3.4. Topologías de Gabriel.

Definición 1.3.9. *Un filtro de Gabriel (izquierdo), es un filtro $\kappa \in R-fil$ que satisface: Dado $I \leq {}_RR$ para el cual existe $J \in \kappa$ tal que $(I : a) \in \kappa$ para todo $a \in J$ entonces $I \in \kappa$ (L4).*

Notación 1.3.2. $R-gab := \{\kappa \in R-fil|\kappa$ *es un filtro de Gabriel*$\}$.

Lema 1.3.5. *Si $\kappa \in R - gab$ entonces $\mathbb{T}_\kappa$ es clase de torsión hereditaria.*

Demostración. Dado que κ es un filtro entonces $\mathbb{T}_\kappa$ es una clase de pretorsión hereditaria. Sólo resta ver que es cerrado bajo extensiones.
Sea $M \in R - Mod$ y la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow L \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/L \longrightarrow 0$$

Con $L, M/L \in \mathbb{T}_\kappa$. Recordemos que $\mathbb{T}_\kappa = \{M \in R - Mod | (0 : m) \in \kappa \text{ para cada } m \in M\}$. Dado $m \in M$, $(L : m) = (0 : m + L) \in \kappa$, por tanto para cada $r \in (L : m)$ se tiene $rm \in L \in \mathbb{T}_\kappa$. Considerando $J = (L : m)$ se obtiene $((0 : m) : r) = (0 : rm) \in \kappa$ que en vista de la condición $L4$, $(0 : m) \in \kappa$ lo que implica $M \in \mathbb{T} \in \kappa$, es decir $\mathbb{T}_\kappa$ es cerrado bajo extensiones. □

Lema 1.3.6. *Si $\mathscr{C}$ es una clase de torsión hereditaria entonces existe un único $\kappa \in R - gab$ tal que $\mathbb{T}_\kappa = \mathscr{C}$.*

Demostración. Por el Lema 1.3.4 existe un único $\kappa \in R - fil$ tal que $\mathbb{T}_\kappa = \mathscr{C}$ que tiene la siguiente descripción, $\kappa = \{I \leq {}_RR | R/I \in \mathscr{C}\}$. Sólo resta demostrar que se satisface $L4$. Sea $I \leq {}_RR$ y $J \in \kappa$ tal que para cada $a \in J, (I : a) \in \kappa$, considerando la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow (I + J)/I \hookrightarrow R/I \twoheadrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$$

Como $J \in \kappa$ y $J \leq I + J$ entonces $R/(I + J) \in \kappa$. Por otro lado, si $a \in J$ entonces $(I : a) = (I \cap J : a) \in \kappa$, además $Ra + (I \cap J)/(I \cap J) \cong J/(I \cap J) \cong R/((I \cap J) : a) \in \mathscr{C}$, considerando esto para cada $a \in J$, $(I + J)/I \cong (J/J \cap I) \in \mathscr{C}$ y como $\mathscr{C}$ es cerrada bajo extensiones, $R/I \in \mathscr{C}$ y por tanto $I \in \kappa$. □

De lo anterior es inmediato:

Teorema 1.3.5. *Hay una correspondencia biyectiva entre:*

1. *$R - gab$*
2. *Teorías de torsión hereditarias de $R - Mod$.*
3. *Radicales exactos izquierdos de $R - Mod$.*

Observación 1.3.7. *$R - gab$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias.*

Debido a esta observación y al teorema anterior la siguiente definición tiene sentido.

Definición 1.3.10. *Dado $\kappa \in R - fil$ entonces $J(\kappa) := \cap\{\gamma \in R - gab | \kappa \subseteq \gamma\}$.*

Observación 1.3.8. *En vista del Teorema 1.3.5, si* $\kappa \in R{-}fil$ *entonces* $J(\kappa)$ *corresponde a la teoría de torsión generada por* $\{M \in R - Mod | M$ *es de* $\kappa -$ *torsión*$\}$.

Proposición 1.3.6. *Si* $\kappa \in R - fil$ *entonces* $J(\kappa) = \{I \leq {}_RR | I \leq J \lneq {}_RR$ *y existe* $x \notin J, (J : x) \in \kappa\}$.

Demostración. La colección $\mathscr{C} = \{R/I | I \in \kappa\}$ es cerrada bajo cocientes y submódulos ya que $\kappa \in R - fil$, entonces aplicando la Proposición 1.2.1 se obtiene una teoría de torsión $(\mathbb{T}, \mathbb{F})$ que es hereditaria por el Corolario 1.2.1. Entonces la descripción obtenida de $\mathbb{T} = \{M \in R{-}Mod|$ cada cociente $N \neq 0$ existe $0 \neq L \leq N, L \in \mathscr{C}\}$ que corresponde a $J(\kappa)$ implica $J(\kappa) = \{I \leq {}_RR | I \leq J \lneq {}_RR$ y existe $x \notin J, (J : x) \in \kappa\}$. □

Observación 1.3.9. *Sea* $\kappa = \{I \leq {}_RR | I \leq_e R\}$ *entonces* $\kappa \in R - fil$.

Definición 1.3.11. *Sea* $\kappa = \{I \leq {}_RR | I \leq_e R\}$ *entonces* $J(\kappa)$ *es llamada la topología de Goldie de* R *y* $(\mathbb{T}_{J(\kappa)}, \mathbb{F}_{J(\kappa)})$ *la teoría de torsión de Goldie.*

Proposición 1.3.7. *Sea* Z *el prerradical singular (ver A.2), entonces* $\bar{Z} = Z_2$.

Demostración. Primero hay que notar que para cada $M \in R{-}Mod$, $Z(M) \leq_e \bar{Z}(M)$. Sea $N \leq \bar{Z}(M)$ tal que $N \cap Z(M) = 0$, entonces $Z(N) = N \cap Z(\bar{Z}(M)) \leq N \cap Z(M) = 0$ y N es libre de torsión ya que $N \cap Z(M) = 0$ lo que implica $N = 0$. Entonces $Z_2(M)/Z(M) = (Z : Z)(M)/Z(M) = Z(M/Z(M)) \geq \bar{Z}(M)/Z(M)$ entonces $\bar{Z} \preceq Z_2$ y por tanto $\bar{Z} = Z_2$. □

Proposición 1.3.8. *Si* $\kappa = \{I \leq {}_RR | I \leq_e R\}$ *entonces* $J(\kappa) = \{I \leq {}_RR |$*hay* $J \in \kappa, I \leq J$ *y* $(I : x) \in \kappa$ *para cada* $x \in J\}$.

Demostración. Por $L4$ es claro que $\{I \leq {}_RR|$ hay $J \in \kappa, I \leq J$ y $(I : a) \in \kappa$ para cada $a \in J\} \subseteq J(\kappa)$. Por otro lado, si $I \in J(\kappa)$ entonces por construcción, R/I es de torsión entonces $R/I = Z_2(R/I) = Z(R/I/Z(R/I))$. $Z(R/I) \leq R/I$ entonces existe J ideal izquierdo de R con $I \leq J$ tal que $Z(R/I) = J/I$ entonces y por tanto $R/J = Z(R/J)$, así que $J \in \kappa$. También $J/I = Z(R/I) = Z(Z(R/I)) = Z(J/I)$, es decir, J/I es de torsión, lo que finalmente implica $(I : x) \in \kappa$ para cada $x \in J$. □

Observación 1.3.10. *Un módulo* M *es libre de torsión de Goldie si y sólo si* $Z(M) = 0$.

Capítulo 2

La estructura reticular de $R-pr$.

En este capítulo se presenta el material dado en [8]. El primer resultado cobra relevancia en el siguiente.

Teorema 2.0.1. *Sean $r, s, t \in R-pr$, $\{r_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq R-pr$ y $M \in R-Mod$. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

1. a) $r \preceq s \Rightarrow r \vee (s \wedge t) = s \wedge (r \vee t)$.

   b) *Si $\{r_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una familia dirigida de prerradicales entonces* $r \wedge (\bigvee_\alpha r_\alpha) = \bigvee_\alpha (r \wedge r_\alpha)$.

2. a) $(\bigwedge_\alpha r_\alpha)s = \bigwedge_\alpha (r_\alpha s)$.

   b) $(\bigvee_\alpha r_\alpha)s = \bigvee_\alpha (r_\alpha s)$.

   c) $(s : \bigwedge_\alpha r_\alpha) = \bigwedge_\alpha (s : r_\alpha)$.

   d) $(s : \bigvee_\alpha r_\alpha) = \bigvee_\alpha (s : r_\alpha)$.

3. a) $(s:t)r \preceq (sr : tr)$; *r es radical si y sólo si* $(s:t)r = (sr:tr)$, *para todo* s, t.

   b) $(r:s)(r:t) \preceq (r:st)$; *$r$ es idempotente si y sólo si* $(r:s)(r:t) = (r:st)$, *para todo* s, t.

Demostración. 1. a) $r \preceq s$ implica $r(M) \leq s(M)$ para todo $M \in R-Mod$. Por la Ley modular (para módulos) $r \vee (s \wedge t)(M) = r(M) + (s \wedge t)(M) = r(M) + (s(M) \cap t(M)) = s(M) \cap (r(M) + t(M)) = s \wedge (r \vee t)(M)$, por lo tanto $r \preceq s \Rightarrow r \vee (s \wedge t) = s \wedge (r \vee t)$.

b) Primero hay que notar que para $M \in R{-}Mod$ y una familia $\{L_i\}_I$ dirigida de módulos se satisface $M \cap (\sum_I L_i) = \sum_I (M \cap L_i)$. Es suficiente notar que $\sum_I L_i = \bigcup_I L_i$, es claro que $\bigcup_I L_i \leq \sum_I L_i$, por otra parte, si $x \in \sum_I L_i$ entonces $x = x_{i_1} + ... + x_{i_n}$ para algunos $i_j \in I$ y $x_{i_j} \in L_{i_j}, j = 1, ..., n$ dado que la familia es dirigida existe $i_0 \in I$ tal que $L_{i_j} \leq L_{i_0}, j = 1, ..., n$ entonces $x \in L_{i_0}$ y por tanto $x \in \bigcup_I L_i$ lo que implica $\sum_I L_i = \bigcup_I L_i$. De esto se sigue directamente que $M \cap (\sum_I L_i) = \sum_I (M \cap L_i)$. Sea $M \in R - Mod$ entonces $\{r_\alpha(M)\}_{\alpha \in A}$ es una familia dirigida y por tanto para $r(M)$ se cumple que $r(M) \cap (\sum_\alpha r_\alpha(M)) = \sum_\alpha (r(M) \cap r_\alpha(M))$, es decir, $r \wedge (\bigvee_\alpha r_\alpha) = \bigvee_\alpha (r \wedge r_\alpha)$.

2. *a*) $(\bigwedge_\alpha (r_\alpha s))(M) = \cap_\alpha r_\alpha(s(M)) = (\bigwedge_\alpha r_\alpha)(s(M)) = ((\bigwedge_\alpha r_\alpha)s)(M)$.

   b) $((\bigvee_\alpha r_\alpha)s)(M) = (\bigvee_\alpha r_\alpha)(s(M)) = \sum_\alpha r_\alpha(s(M) = \sum_\alpha r_\alpha s(M) = (\bigvee_\alpha r_\alpha s)(M)$.

   c) $(s : \bigwedge_\alpha r_\alpha)(M)/s(M) = (\bigwedge_\alpha r_\alpha)(M/s(M)) = \cap_\alpha (r_\alpha(M/s(M))) = \cap_\alpha (((r_\alpha : s)(M))/s(M)) = (\bigwedge_\alpha ((r_\alpha : s)(M)))/s(M)$, esto demuestra $(s : \bigwedge_\alpha r_\alpha) = \bigwedge_\alpha (s : r_\alpha)$.

   d) $(s : \bigvee_\alpha r_\alpha)(M)/s(M) = (\bigvee_\alpha r_\alpha)(M/s(M)) = \sum_\alpha (r_\alpha(M/s(M))) = \sum_\alpha (((r_\alpha : s)(M))/s(M)) = (\bigvee_\alpha ((r_\alpha : s)(M)))/s(M)$, esto demuestra $(s : \bigvee_\alpha r_\alpha) = \bigvee_\alpha (s : r_\alpha)$.

3. *a*) Como $s(r(M)) \leq r(M) \leq M$ utilizando la proyección a $s(r(M))$, $r(M)/s(r(M)) \leq r(M/s(r(M)))$, entonces $((s : t)r)(M)/s(r(M)) = (s : t)(r(M))/s(r(M)) = t(r(M)/s(r(M))) \leq t(r(M/s(r(M)))) = tr(M/s(r(M)))) = (sr : tr)(M)/s(r(M))$; si r es radical la igualdad en (a) se da en vista del Lema 1.1.2. Por otro lado, considerando $s = t = 1$ r es radical.

   b) $((r : s)((r : t)(M)))/(r(r : t)(M)) = s((r : t)(M)/r(r : t)(M)) \twoheadrightarrow s((r : t)(M)/r(M)) = s(t(M/r(M))) = (r : st)(M)/r(M)$ entonces $(r : s)(r : t) \preceq (r : st)$ y por el Lema 1.1.3 la igualdad se da si r es idempotente, para la parte "sólo si", una vez más $s = t = 1$.

□

Corolario 2.0.1. $\{r \in R - pr | rr = r\} := R - pid$ *es cerrado bajo tomar* $\vee$ *y* $\{r \in R - pr | (r : r) = r,$ *y* r *es exacto izquierdo*$\} := R - prid$ *es cerrado bajo* $\wedge$.

Demostración. Sea $\{r_\lambda\}_\Lambda \subseteq R - pid$ entonces por hipótesis y 2.b) del teorema anterior se satisfacen las siguientes igualdades $\bigvee_\Lambda r_\lambda = \bigvee_\Lambda (r_\lambda r_\lambda) \preceq \bigvee_\Lambda (r_\lambda \bigvee_\Lambda r_\lambda) = (\bigvee_\Lambda r_\lambda)(\bigvee_\Lambda r_\lambda) \preceq \bigvee_\Lambda r_\lambda$, esto es $\bigvee_\Lambda r_\lambda$ es idempotente. Dualmente se demuestra la otra afirmación. □

2.1. Submódulos característicos.

Esta sección es abordada en [2].

Proposición 2.1.1. *Dado $\emptyset \neq \mathscr{A} \subseteq R-Mod$ una subclase de $R-Mod$ y $M \in R-Mod$. $p_{\mathscr{A}}(M) := \sum\{Im(f) | f \in Hom_R(A, M), A \in \mathscr{A}\}$, y $q^{\mathscr{A}}(M) := \bigcap\{Nuc(f) | f \in Hom_R(M, A), A \in \mathscr{A}\}$ son prerradicales.*

Definición 2.1.1. *Sean $M, N \in R-Mod$ con $N \leq M$. Se define para cada $K \in R-Mod$, $t_{N\leq M}(K) := \sum\{f(N) | f \in Hom_R(M, K)\}$ y $t^{N\leq M}(K) := \bigcap\{f^{-1}(N) | f \in Hom_R(K, M)\}$.*

Observación 2.1.1. *$t_{N\leq M}$ y $t^{N\leq M}$ de la definición anterior son prerradicales.*

Proposición 2.1.2. *Considere $M, N \in R-Mod$ con $N \leq M$, las siguientes desigualdades se satisfacen:*

1. *$t_{N\leq M} \preceq p_{\{N\}}$.*
2. *$q_{\{M/N\}} \preceq t^{N\leq M}$.*

Demostración. Sea $K \in R-Mod$,
(1). Dado $f \in Hom_R(M, K)$ se tiene el morfismo $g = f|_N \in Hom_R(N, K)$ entonces $t_{N\leq M}(K) \leq p_{\{N\}}(K)$ lo que implica $t_{N\leq M} \preceq p_{\{N\}}$.
(2). Para cada $g \in Hom_R(K, M), f = \rho g \in Hom_R(K, M/N)$, donde ρ es la proyección canónica a M/N, así $q_{\{M/N\}}(K) = \bigcap\{Nuc(f) | f \in Hom_R(K, M/N)\}$ $\leq \bigcap\{Nuc(\rho g) | g \in Hom_R(K, M)\} = \bigcap\{g^{-1}(Nuc(\rho)) | g \in Hom_R(K, M)\} = \bigcap\{g^{-1}(N) | g \in Hom_R(K, M)\} = t^{N\leq M}(K)$, por lo tanto $q_{\{M/N\}} \preceq t^{N\leq M}$. □

Definición 2.1.2. *Para $M \in R-Mod$ y $N \leq M$, se dice que N es un submódulo característico o totalmente invariante en (de) M si para cualquier $f \in End(M)$ se tiene $f(N) \leq N$. Si N es un submódulo característico de un módulo M se denotará $N \leq_{t.i} M$.*

Observación 2.1.2. *Si $r \in R-pr$ entonces $r(M)$ es un submódulo totalmente invariante de M.*

Demostración. Se sigue directamente de la definición de prerradical. □

Lema 2.1.1. *Sean $M \in R-Mod$ y $N \leq M$, entonces:*

1. *$t_{N\leq M}(M)$ es el menor submódulo totalmente invariante de M que contiene a N.*

2. *$t^{N\leq M}(M)$ es el mayor submódulo totalmente invariante de M que está contenido en N.*

Demostración. Como $t_{N\leq M}$, $t^{N\leq M}$ son prerradicales entonces $t_{N\leq M}(M)$ y $t^{N\leq M}(M)$ son submódulos totalmente invariantes de M y dado que $Id_M \in End(M)$ se satisfacen las siguientes desigualdades $N = Id_M(N) \leq \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M,M)\}. = t_{N\leq M}(M)$ y $N = Id_M(N) \geq \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(M,M)\} = t^{N\leq M}(M)$,
(1). Sea $K \leq_{t.i} M$ tal que $N \leq K$, entonces para cualquier $f \in End(M)$, $f(N) \leq f(K) \leq K$, con esto se obtiene $t_{N\leq M}(M) = \sum\{f(N)|f \in End(M)\} \leq K$,
(2). Análogamente, si $K \leq_{t.i} M$ tal que $N \geq K$, entonces para cualquier $f \in End(M), f^{-1}(N) \geq f^{-1}(K) = K + Nuc(f) \geq K$, entonces $K \leq \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in End(M)\}$. □

Teorema 2.1.1. *Son equivalentes para N un submódulo de $M, M \in R-Mod$:*

1. *$N \leq_{t.i} M$.*

2. *$t_{N\leq M}(M) = N$.*

3. *$t^{N\leq M}(M) = N$.*

4. *Existe $r \in R-pr$ tal que $r(M) = N$.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$) Por (1) del Lema 2.1.1 $N \leq t_{N\leq M}(M)$ y además como N es totalmente invariante $t_{N\leq M}(M) \leq N$, por tanto $t_{N\leq M}(M) = N$.
($1 \Rightarrow 3$) Análogo a ($1 \Rightarrow 2$).
($2 \Rightarrow 1$) Como $t_{N\leq M}$ es un prerradical, la igualdad $t_{N\leq M}(M) = N$ implica N totalmente invariante.
($3 \Rightarrow 4$) Sea $r = t^{N\leq M}$ entonces $N = t^{N\leq M}(M) = r(M)$.
($4 \Rightarrow 1$) Por el mismo argumento de ($2 \Rightarrow 1$). □

2.2. Átomos en $R-pr$.

Definición 2.2.1. *Sea $M \in R-Mod$ y $N \leq_{t.i} M$. Para cada $K \in R-Mod$:*

1. *$\alpha_N^M(K) := \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M,K)\}$*

2. *$\omega_N^M(K) := \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(K,M)\}$*

Proposición 2.2.1. *Sean M y N como en la definición anterior entonces α_N^M y ω_N^M son prerradicales.*

Demostración. Sean $K, L \in R\!-\!Mod$ y $h \in Hom_R(K, M)$ entonces, $h^{-1}(N) \leq K$. Por otro lado si $f \in Hom_R(K, L)$ y $g \in Hom_R(L, M)$ el morfismo $gf \in Hom_R(K, M)$, entonces $\bigcap\{h^{-1}(N)|h \in Hom_R(K, M)\} \leq \bigcap\{(gf)^{-1}(N)|g \in Hom_R(L, M)\} = \bigcap\{f^{-1}(g^{-1}(N))|g \in Hom_R(L, M)\} = f^{-1}(\bigcap\{g^{-1}(N)|g \in Hom_R(L, M)\})$. Así las cosas, $f(\bigcap\{h^{-1}(N)|h \in Hom_R(K, M)\}) \leq f(f^{-1}(\bigcap\{ g^{-1}(N)|g \in Hom_R(L, M)\})) = \bigcap\{g^{-1}(N)|g \in Hom_R(L, M)\} \cap Im(f) \leq \bigcap\{g^{-1}(N)|g \in Hom_R(L, M)\}$, que es lo mismo que $f(\omega_N^M(K)) \leq \omega_N^M(L)$. Análogamente α_N^M es un prerradical. □

Lema 2.2.1. *Si $N \leq_{t.i} M \in R - Mod$ entonces $\alpha_N^M = t_{N \leq M}$ y $\omega_N^M = t^{N \leq M}$, además $\alpha_N^M(M) = t_{N \leq M}(M) = N = t^{N \leq M}(M) = \omega_N^M(M)$.*

Corolario 2.2.1. *Dados $r \in R - pr, M \in R - Mod$ y $N \leq_{t.i} M$, entonces son equivalentes:*

1. *$r(M) = N$.*
2. *$\alpha_N^M \preceq r \preceq \omega_N^M$.*

Demostración. $(2 \Rightarrow 1)$: Por el Lema 2.2.1 $N = \alpha_N^M(M) \leq r(M) \leq \omega_N^M(M) = N$.
$(1 \Rightarrow 2)$: Sea $K \in R - Mod$, como r es prerradical y por hipótesis $r(M) = N$ entonces $f(N) = f(r(M)) \leq r(K)$ para cualquier $f \in Hom_R(M, K)$. Esto implica $\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N)|f \in Hom_R(M, K)\} \leq r(K)$ para todo $K \in R - Mod$, es decir $\alpha_N^M \preceq r$. De forma similar, si $f \in Hom_R(K, M)$ se satisface $f(r(K)) \leq r(M) = N$ entonces $r(K) \leq r(K) + Nuc(f) = f^{-1}(f(r(K))) \leq f^{-1}(N)$, esto para cualquier $f \in Hom_R(K, M)$, entonces $r(K) \leq \bigcap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(K, M)\} = \omega_N^M(K)$, esto prueba la segunda parte. □

Lema 2.2.2.
1. *Sean $S \in R\!-\!simp$ y $E(S)$ su cápsula inyectiva, entonces $S \leq_{t.i} E(S)$.*
2. *Si $I \leq R$ es un ideal bilateral entonces $I \leq_{t.i} R$.*

Demostración. (1). Sea $f \in End(E(S))$. Si $f = 0$, entonces $f(S) = 0 \leq S$. Si $f(S) \neq 0$, entonces $S \cap f(S) \neq 0$, pues $S \leq_e E(S)$. Como S es simple entonces $S = f(S) \cap S \leq f(S)$. Además como $f \neq 0$, entonces $f(S)$ es simple y por tanto $S = f(S)$. En cualquier caso $f(S) \leq S$. (2). Si $f \in End(R)$ entonces $f = \_ \cdot x$ para algún $x \in R$. Debido a esto, $f(I) = \_ \cdot x(I) = Ix \leq I$. □

Lema 2.2.3. *Si $r \in R - pr$ y $r(E(S)) = 0$ para cada $S \in R - simp$ entonces $r = \boldsymbol{0}$.*

Demostración. Sea $0 \neq r \in R - pr$. Entonces existe $M \in R - Mod$ tal que $r(M) \neq 0$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \neq Rx \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & r(M) \\ S \arrow[r, hook] & E(S) \end{tikzcd}$$

Como $E(S)$ es inyectivo existe $0 \neq \varphi \in Hom_R(M, E(S))$ tal que hace conmutar el diagrama anterior. Y como $\varphi \neq 0$ existe $0 \neq \psi \in Hom_R(M, E(S))$, pues $E(S)$ es inyectivo, tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} r(M) \arrow[rr, hook] \arrow[drr, dashed, "\varphi"] & & M \arrow[d, dashed, "\psi"] \\ Rx \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & S \arrow[r, hook] & E(S) \end{tikzcd}$$

Como r es un prerradical entonces $0 \neq \psi(r(M)) \leq r(E(S))$, por lo tanto $r(E(S)) \neq 0$. $\square$

Observación 2.2.1. *Si $K \leq N \leq M \in R - Mod$ y $K, N \leq_{t.i} M$ entonces $\alpha_K^M \preceq \omega_N^M$ y $\omega_K^M \preceq \omega_N^M$.*

Teorema 2.2.1. *$R - pr$ es una gran retícula atómica y coatómica, cuyo conjunto de átomos es $\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\}$ y el conjunto de coatómos es $\{\omega_I^R | I \leq {}_R R_R$ e I es máximo$\}$.*

Demostración. Primero por el Lema 2.2.2 y la Proposición 2.2.1 $\alpha_S^{E(S)}$ y ω_I^R están bien definidos. Sea $r \in R - pr$ con $r \neq \mathbf{0}$, por el Lema 2.2.3 existe $S \in R - simp$ con la propiedad $r(E(S)) \neq 0$ entonces $S \leq r(E(S))$, La Observación 2.2.1 implica $\alpha_S^{E(S)} \preceq \alpha_{r(E(S))}^{E(S)}$ y en vista del Corolario 2.2.1 $\alpha_{r(E(S))}^{E(S)} \preceq r$. Por lo tanto $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$.
Hay que ver que $\alpha_S^{E(S)}$ es un átomo. Si existe $t \in R - pr$ tal que $t \prec \alpha_S^{E(S)}$ entonces $t(E(S)) \leq \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S$, como S es simple $t(E(S)) = 0$ o $t(E(S)) = S$, si $t(E(S)) = S$, por el Corolario 2.2.1 $\alpha_S^{E(S)} \preceq t$ que contradice la suposición sobre t, entonces $t(E(S)) = 0$. Ahora para $S' \in R - simp$ con $S' \ncong S$, se tiene $t(E(S')) \leq \alpha_S^{E(S)}(E(S'))$, pero $\alpha_S^{E(S)}(E(S')) = \sum\{f(S) | f \in Hom_R(E(S), E(S'))\}$ entonces para cada $f \in Hom_R(E(S), E(S')$ $f(S) = 0$ o $f(S) \cong S$ y esto último no puede suceder ya que $f(S) \leq S' \ncong S$. Por lo tanto $t(E(S')) \leq \alpha_S^{E(S)}(E(S')) = 0$ y entonces $t(E(S)) = 0$ para todo $S \in R - simp$. El Lema 2.2.3 implica $t = \mathbf{0}$, entonces $\alpha_S^{E(S)}$ es un átomo para cada $S \in R - simp$.
Análogamente sea $r \in R - pr$ tal que $r \neq 1$ entonces por Lema 1.1.1 $r(R) \lneq R$ por lo que existe $I \leq R$ máximo que contiene a $r(R)$, entonces $r \preceq \omega_{r(R)}^R \preceq$

ω_I^R. Notar que ω_I^R es un coátomo, en efecto. Si existe $t \in R-pr$ tal que $\omega_I^R \prec t$, como I es máximo, evaluando en R se obtiene $I = \omega_I^R(R) \leq t(R)$. Se tienen dos casos, $t(R) = R$ o $t(R) = I$. Por Corolario 2.2.1 $t(R) = I$ implica $t \preceq \omega_I^R$, lo que no puede suceder pues $\omega_I^R \prec t$. Así $t(R) = R$, con lo que $t = \mathbf{1}$. Entonces efectivamente $\{\omega_I^R | I \leq R$ e I es máximo$\}$ es el conjunto de coátomos. □

Proposición 2.2.2. *Para cada $I \leq R$ ideal bilateral α_I^R es un t-radical.*

Demostración. Recordando que $M \cong Hom_R(R, M)$ se tienen las siguientes igualdades $\alpha_I^R(M) = \sum\{f(I)|f \in Hom_R(R, M)\} = \sum\{If(1)|f \in Hom_R(R, M)\} = I\sum\{f(1)|f \in Hom_R(R, M)\} = I\sum\{Rx|x \in M\} = \alpha_I^R(R)M$. □

2.3. Caracterización de algunos anillos.

Notación 2.3.1.

1. $C_0 = \oplus\{S \in R - simp\}$.
2. $P_0 = \prod\{S|S \in R - simp\}$.

Observación 2.3.1. *$\alpha_{C_0}^{C_0}(M) = Zoc(M)$ y $\omega_0^{C_0}(M) = Rad(M)$ para cada $M \in R - Mod$.*

Demostración. Es claro recordando que $Zoc(M) = \sum\{Im(f)|f \in Hom_R(N, M)$ N es semisimple$\}$ y $Rad(M) = \bigcap\{Nuc(f)|f \in Hom_R(M, N), N$ es semisimple$\}$. □

Lema 2.3.1. *Si R es un anillo simple entonces para todo $M \in R - Mod$ y $N \leq_{t.i} M$, $N = M$ o $N = 0$.*

Demostración. Supóngase que $N \neq 0$ y $N \lneq M$, como $M \in R - Mod$ entonces $M = \oplus_I S_i$ para algún conjunto I e $S_i \in R - simp$ para todo $i \in I$ además $N = \oplus_J S_j$ para $J \lneq I$, sea $j_0 \in J$ así se obtiene un automorfismo f entre $M = \oplus_I S_i$ y $(\oplus_{I \setminus J} S_i) \oplus (\oplus_{J \setminus \{J_0\}} S_j) \oplus S_{j_0}$, pero $f(N) \nleq N$, que contradice el hecho de que $N \leq_{t.i} M$, por tanto $N = M$. □

Teorema 2.3.1. *Son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es un anillo simple.*
2. *$\alpha_0^M = \omega_0^M$ para todo $0 \neq M \in R - Mod$.*
3. *$\alpha_N^M = \omega_N^M$ para todo $0 \neq M \in R - Mod$ y $N \leq_{t.i} M$.*
4. *$\alpha_M^M = \omega_M^M$ para todo $0 \neq M \in R - Mod$.*

Demostración. $(3 \Rightarrow 2)$ y $(1 \Rightarrow 4)$ son claras.
$(1 \Rightarrow 3)$: Sean $0 \neq M \in R-Mod$ y $N \leq_{t.i} M$ por el Lema 2.3.1 $N = M$ o $N = 0$. Si $N = 0$, $\alpha_0^M(L) = 0$ para todo $L \in R-Mod$, además R simple implica que todo módulo es un cogenerador de $R-Mod$ entonces para cada $L \in R-Mod$, $0 = Re_M(L) = \omega_0^M(L)$, y por tanto $\alpha_0^M = \omega_0^M$ para todo $0 \neq M \in R-Mod$.
Por otro lado si $N = M$, $\omega_M^M(L) = \bigcap\{f^{-1}(M) | f \in Hom_R(L, M)\} = L = \mathbf{1}(L)$, y también todo módulo es un generador de $R-Mod$, entonces $\omega_M^M(L) = \mathbf{1}(L) = L = tra_M(L) = \alpha_M^M(L)$ para cada $L \in R-Mod$.
$(2 \Rightarrow 1)$: Como $\alpha_0^M = \mathbf{0}$ entonces $\omega_0^M = \mathbf{0}$, es decir para todo módulo $L, \omega_0^M(L) = 0$ con lo que el siguiente morfismo es inyectivo $L \hookrightarrow M^{Hom_R(L,M)}$, lo que significa que M es un cogenerador de $R-Mod$, por tanto R es simple.
$(4 \Rightarrow 1)$: Como $\omega_M^M = \mathbf{1}$, entonces $\mathbf{1} = \alpha_M^M$ para todo $0 \neq M \in R-Mod$. Si $M = S \in R-simp$, S es un generador de $R-Mod$, así R es simple. □

Lema 2.3.2. *Para cada $r \in R-pr$ existe el mayor t-radical menor que r*

Demostración. Considere $A = \{s \in R-pr | s \preceq r, s$ es t-radical$\}$ que es no vacío pues $\mathbf{0} \in A$, sea $\underline{r} = \sum\{s | s \in A\}$ entonces $\underline{r}$ es un prerradical tal que $\underline{r} \preceq r$. Resta probar que es t-radical, en efecto, sea $M \in R-Mod$, $\underline{r}(M) = \sum\{s | s \in A\}(M) = \sum\{s(M) | s \in A\} = \sum\{s(R)M | s \in A\} = (\sum\{s(R) | s \in A\})M = \underline{r}(R)M$, claramente es el mayor de todos los t-radicales menores que r. □

Lema 2.3.3. *Dado $r \in R-pr$, $\underline{r} = \alpha_{r(R)}^R$ donde $\underline{r}$ es el mayor t-radical menor que r.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.2 $\alpha_{r(R)}^R$ es t-radical entonces $\alpha_{r(R)}^R \preceq \underline{r}$ y también por el Lema 2.2.1 $\alpha_{r(R)}^R \preceq r$ con lo que se tiene $\alpha_{r(R)}^R \preceq \underline{r} \preceq r$. Entonces $r(R) = \alpha_{r(R)}^R(R) \leq \underline{r}(R) \leq r(R)$ es decir $\underline{r}(R) = r(R)$, así las cosas, para cada $M \in R-Mod$, $\underline{r}(M) = \underline{r}(R)M = r(R)M = \alpha_{r(R)}^R(R)M = \alpha_{r(R)}^R(M)$. □

El siguiente teorema es una caracterización para los anillos semisimples:

Teorema 2.3.2. *Son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es un anillo semisimple.*
2. *$R-pr$ es una retícula de Boole finita.*
3. *$R-pr$ es una retícula de Boole.*
4. *$R-pr$ es una gran retícula de Boole.*

5. *Para todo* $r \in R-pr$, $r = \vee\{\alpha_S^{E(S)} | \alpha_S^{E(S)} \preceq r\}$.

6. $\mathit{1} = \vee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R-simp\}$.

7. *Para cada* $r \in R-pr$ *existe una subclase* $\mathcal{A}$ *de* $R-simp$ *tal que* $r = Zoc_{\mathcal{A}}$ *donde* $Zoc_{\mathcal{A}}(M) = \sum\{S \leq M | S \cong T \in \mathcal{A}\}$.

8. *Para cada* $r \in R-pr$, $r = \wedge\{\omega_I^R | I$ *es el menor ideal de* R *tal que,* $r \preceq \omega_I^R\}$.

9. $\mathit{0} = \wedge\{\omega_I^R | I$ *es ideal máximo de* $R\}$.

Demostración. $(2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4)$ y $(5 \Rightarrow 6)$ son claros.
$(1 \Rightarrow 2)$: Para todo $M \in R-Mod$, M es semisimple, entonces $M = \oplus_I S_i$ para $S_i \in R-simp$, y dado $r \in R-pr$, $r(M) = r(\oplus_I S_i) = \oplus_I r(S_i)$. Como S_i es simple, $r(S_i) = 0$ ó $r(S_i) = S_i$, es decir r está completamente determinado por sus valores en $R-simp$, entonces hay un isomorfismo de álgebras booleanas entre $R-pr$ y subconjuntos de $R-simp$, a cada $r \in R-pr$ le corresponde $\{S \in R-simp | r(S) \neq 0\}$, además R semisimple implica $R = \oplus_{i=1}^n S_i$ con lo que $R-simp$ es un álgebra booleana de conjuntos finita y por tanto $R-pr$ también lo es.
$(4 \Rightarrow 5)$: Sea $r \in R-pr$ y $\mathcal{A} = \{\alpha \in R-pr | \alpha$ es un átomo $, \alpha \preceq r\}$, claramente r es una cota superior de $\mathcal{A}$, supóngase que existe t con la propiedad $r \npreceq t$ y cota superior de $\mathcal{A}$, es decir $r \wedge (\neg t) \neq \mathbf{0}$, entonces existe α un átomo tal que $\alpha \preceq r \wedge (\neg t)$ como $r \wedge (\neg t) \preceq r$, $\alpha \in \mathcal{A}$, con lo que se obtiene la siguiente cadena de desigualdades, $\alpha \preceq (r \wedge (\neg t)) \wedge t = r \wedge ((\neg t) \wedge t) = \mathbf{0}$, que es una contradicción al hecho de que α es un átomo, por lo tanto debe suceder que $r \leq t$, así $r = \vee\{\alpha_S^{E(S)} | \alpha_S^{E(S)} \preceq r\}$.
$(6 \Rightarrow 7)$: $\mathbf{1} = \vee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R-simp\}$, para cada $S' \in R-simp$, $E(S') = \mathbf{1}(E(S')) = \vee\alpha_S^{E(S)}(S') = S'$, como $r \preceq \mathbf{1} = \bigvee_S \alpha_S^{E(S)} = \bigvee_S \alpha_S^S$, por la proposición (2.2.1), sea $\mathcal{A} = \{S \in R-simp | r(S) \neq 0\}$, entonces $r(M) = \bigvee_S\{\alpha_S^S(M) | S \in \mathcal{A}\} = Zoc_{\mathcal{A}}(M)$. $(7 \Rightarrow 1)$: $\mathbf{1} = Zoc_{R-simp}$ entonces $R = \mathbf{1}(R) = Zoc_{R-simp}(R)$ es decir R es un anillo semisimple. Por dualidad se demuestran $(4 \Rightarrow 8 \Rightarrow 9 \Rightarrow 1)$. □

Corolario 2.3.1. *R es un anillo semisimple si y sólo si $[\alpha_N^M, \omega_N^M]$, es una retícula de Boole finita para todo $M \in R-Mod$ y $N \leq_{t.i} M$.*

Demostración. Es claro por el Teorema 2.3.2 utilizando $(1 \Leftrightarrow 2)$, ya que $[\alpha_0^M, \omega_M^M] = [\mathbf{0}, \mathbf{1}] = R-pr$. □

Teorema 2.3.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es un anillo semisimple.*

2. *$\alpha_I^R = \omega_I^R$ para cualquier ideal I de R.*

3. *ω_J^R es un t-radical, donde $J = \omega_0^{C_0}(R)$.*

4. *$\omega_J^R = \omega_0^{P_0}$ donde $J = \omega_0^R$.*

5. *$\omega_I^R = \omega_0^S$ para cada ideal I máximo de R, donde S es un módulo simple tal que $I = Ann(S)$.*

6. *ω_I^R es un t-radical para cada ideal I máximo de R.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$): Por el Teorema 2.3.2, para todo $r \in R - pr$ existe $\neg r$, su complemento que satisface $r \vee (\neg r) = \mathbf{1}$ y $r \wedge (\neg r) = \mathbf{0}$, además para cada módulo M, $M = r \vee (\neg r)(M) = r(M) + (\neg r)(M) = r(M) \oplus (\neg r)(M) = r(M) \times (\neg r)(M)$, (visto como producto directo), entonces $M = r(R)M \times (\neg r)(R)M$. Lo que implica que $r(R)M = r(M)$ para cada $M \in R - Mod$. Finalmente $\alpha_I^R(M) = \alpha_I^R(R)M = IM = \omega_I^R(R)M = \omega_I^R(M)$.
($2 \Rightarrow 6$): Es inmediato puesto que α_I^R es un t-radical.
($2 \Rightarrow 3$): Por la misma razón que $2 \Rightarrow 6$.
($6 \Rightarrow 5$): Como ω_I^R es un t-radical, por el Lema 2.3.3 $\omega_I^R = \alpha^R_{\omega_I^R(R)} = \alpha_I^R$ entonces $\mathbb{F}_{\omega_I^R} = \{M \in R - Mod | \omega_I^R(M) = 0\} = \{M \in R - Mod | IM = 0\} = R/M - Mod$, esto implica que $S^X \in \mathbb{F}_{\omega_I^R}$ para cualquier conjunto X, ya que $I = Ann(S)$. Por otro lado, como ω_0^S es un radical, para S simple, entonces $\bar{\mathbb{F}}_{\omega_0^S} = \mathbb{F}_{\omega_0^S} = \{M \in R - Mod | \omega_0^S(M) = 0\} = \{M \in R - Mod |\ M \hookrightarrow S^X$, para algún conjunto$X\}$.
Sea K ideal izquierdo máximo de R tal que $I \leq K$, entonces $S = R/K$ y también $I = \cap_{a \in R}(K : a)$. Así $R/I \hookrightarrow S^X$ para algún conjunto X. Entonces $\mathbb{F}_{\omega_0^S} = \mathbb{F}_{\omega_I^R}$, además para cada $M \in R - Mod$, $\omega_I^R(M) = IM$ con lo que $\omega_I^R(M) \in R/I - Mod$ y $\omega_0^S(M) \in \mathbb{F}_{\omega_0^S}$, por lo tanto $\omega_I^R(M) = \omega_0^S(M)$, es decir $\omega_I^R = \omega_0^S$.
($3 \Rightarrow 4$): Análogo a $6 \Rightarrow 5$.
($5 \Rightarrow 1$): Sean I ideal de R y S un módulo simple tal que $I = Ann(S)$. Como $\mathbb{F}_{\omega_0^S} = \mathbb{F}_{\omega_I^R}$ y $\omega_0^S(S) = 0$ entonces $S \in \mathbb{F}_{\omega_I^R}$, se sigue que $S \hookrightarrow (R/I)^X$ para algún conjunto X, dado que S es un módulo simple implica $S \hookrightarrow R/I$. Se tiene que R/I es un anillo simple que contiene un ideal simple, entonces R/I es un anillo semisimple, por lo tanto $R/I \cong S^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, también de la igualdad $\omega_I^R = \omega_0^S$ se tiene que ω_I^R es radical y entonces $\omega_I^R(R/I) = 0$ por lo que existe un morfismo $0 \neq f \in Hom_R(R/I, R)$ entonces $Im(f)$ es un submódulo semisimple, de hecho como $I = Ann(S)$ debe suceder que

$Im(f) \not\leq I$. Sea $S' \leq Im(f)$ submódulo simple tal que $S' \cong S$ y $S \cap I = 0$. Si $\alpha_{C_0}^{C_0}(R) \lneq R$ entonces existe I ideal máximo de R tal que $\alpha_{C_0}^{C_0}(R) \leq I$, aplicando la construcción anterior a I existe S' tal que $S' \cong S$ y $S \cap I = 0$, que no puede suceder pues $\alpha_{C_0}^{C_0}(R) \leq I$ por lo tanto $Zoc(R) = \alpha_{C_0}^{C_0}(R) = R$, es decir R es un anillo semisimple.
$(4 \Rightarrow 5)$: Primero, si $I = Ann(S)$ para S un módulo simple entonces $\omega_0^S \preceq \omega_I^R$. supóngase que existe S' un módulo simple e I' ideal de R tal que $I' = Ann(S')$ y $\omega_0^{S'} \prec \omega_{I'}^R$. Por hipótesis $\omega_J^R(S') = \omega_0^{P_0}(S') = 0 = \bigwedge_S \omega_0^S(S') = 0$ y como $\omega_{I'}^R(S') = S'$ y $\omega_I^R(S') = 0$ entonces $\omega_J^R(S') = \bigwedge_I \omega_I^R(S')$, por tanto $\bigwedge_S \omega_0^S(S') = \bigwedge_I \omega_I^R(S') = \omega_I^R(S')$ con $I \neq I'$ entonces $\omega_I^R(S') \preceq \omega_0^{S'}(S')$ lo que finalmente implica $S' = \omega_0^S(S') \leq \omega_I^R(S') \leq \omega_0^{S'}(S') = 0$, que es una contradicción, por lo tanto debe suceder $\omega_0^S = \omega_I^R$ para cada ideal I máximo de R, donde S es un módulo simple tal que $I = Ann(S)$. $\square$

Corolario 2.3.2. *R es un anillo semisimple si y sólo si Z es un t-radical, donde Z es el prerradical singular (ver A.2 o Definición 1.3.11).*

Demostración. Para la parte *sólo si* por 2.2.1 $\alpha_{Z(R)}^R \preceq Z \preceq \omega_{Z(R)}^R$, si R es semisimple por (2) del Teorema 2.3.3, se tiene la igualdad, $\alpha_{Z(R)}^R = Z = \omega_{Z(R)}^R$, entonces Z es t-radical. Para el recíproco, si Z es radical entonces $Z(R) = 0$ debido a 1.3.10. Como Z es t-radical, para cada $M \in R-Mod$, $Z(M) = Z(R)M = 0$ entonces $Z = \mathbf{0}$. Finalmente, dado que $M \leq_e E(M)$ se tiene que, $E(M)/M = Z(E(M)/M) = 0$ (ver A.2), por lo que todo módulo es inyectivo, que es equivalente a que R es semisimple. $\square$

Lema 2.3.4. *Sea $r \in R-pr$. Si r es radical y $\mathbb{F}_r$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas entonces r es exacto izquierdo.*

Demostración. Dado $M \in R-Mod$ y $N \leq M$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & r(M) \cap N/r(N) \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d, hook, "i_2"] & M/r(N) \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & E(r(M) \cap N/r(N)) & \end{tikzcd}$$

Esto por la inyectividad de $E(r(M) \cap N/r(N))$. Como r es radical $r(N/r(N)) = 0$ entonces $r(r(M) \cap N/r(N)) = 0$, esto es $r(M) \cap N/r(N) \in \mathbb{F}_r$. Por hipótesis $\mathbb{F}_r$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas, entonces $E(r(M) \cap N/r(N)) \in \mathbb{F}_r$. También $r(M) \cap N/r(N) \leq r(M)/r(N) \leq r(M/r(N))$ y $h(r(M/r(N))) \leq r(E(r(M) \cap N/r(N))) = 0$, lo que implica que $i_2 = 0$ y por tanto $r(M) \cap N = r(N)$. $\square$

Lema 2.3.5. *Para cada $S \in R-simp$, $\alpha_S^{E(S)}$ es idempotente si y sólo si $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$.*

Demostración. Primero, $\alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S$. Entonces $\alpha_S^{E(S)}(S) = \alpha_S^{E(S)}(\alpha_S^{E(S)}$ $(E(S))) = \alpha_S^{E(S)} \cdot \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S$.
Recíprocamente, si $\alpha_S^{E(S)}(S) = S$ entonces $\alpha_S^S \preceq \alpha_S^{E(S)} \preceq \alpha_S^S$. Por lo tanto $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$ que es idempotente. □

Teorema 2.3.4. *Son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es un V-anillo.*

2. *Cada átomo en $R-pr$ es idempotente.*

3. *Cada átomo en $R-pr$ es exacto izquierdo.*

4. *Para cada $S \in R-simp$, $\alpha_s^{E(S)} = \alpha_S^S$.*

5. *Para cada $\mathbf{0} \neq r \in R-pr$, existe $S \in R-simp$ tal que $\alpha_S^S \preceq r$.*

6. *$\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R-simp\}$ es idempotente.*

7. *$\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R-simp\}$ es exacto izquierdo.*

8. *$\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R-simp\} = \omega_0^{C_0}$.*

9. *$\alpha_0^{C_0} = \omega_0^{C_0}$.*

10. *$\alpha_N^{C_0} = \omega_N^{C_0}$ para cada submódulo $N \leq_{t.i} C_0$.*

Demostración. Por los Teoremas (1.1.1) y (1.1.2), $3 \Rightarrow 2$ y $7 \Rightarrow 6$ son inmediatos.
($5 \Rightarrow 1$). Sea $S \in R-simp$, entonces $\alpha_S^{E(S)} \neq 0$ y hay $S' \in R-simp$ tal que $\alpha_{S'}^{S'} \preceq \alpha_S^{E(S)}$, con $S' = \alpha_{S'}^{S'}(S') \neq 0$, así $S' \cong S$ y $S' \cong E(S)$ lo que implica que S es inyectivo para todo $S \in R-simp$.
($1 \Rightarrow 5$). Dado $\mathbf{0} \neq r \in R-pr$ por el Teorema 2.2.1 existe $S \in R-simp$ tal que $\alpha_S^{E(S)} \preceq r$, por 1 $\alpha_S^S \preceq r$.
($1 \Rightarrow 4$) Como cada $S \in R-simp$ es inyectivo $E(S) = S$, entonces $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$.
($4 \Rightarrow 3$). Dado $\alpha_S^{E(S)}$ un átomo, $M \in R-Mod$ y $N \leq M$ se tiene que $\alpha_S^{E(S)}(N) = \alpha_S^S(N) = \alpha_S^S(M) \cap N$ que por Teorema 1.1.1 $\alpha_S^{E(S)}$ es exacto izquierdo.
($6 \Rightarrow 2$). Si $T \in R-simp$, $\bigvee_S \alpha_S^{E(S)}(T) = \alpha_T^{E(T)}(T)$. Entonces, $T = \alpha_T^{E(T)}(E(T)) = \bigvee_S \alpha_S^{E(S)}(\bigvee_S \alpha_S^{E(S)}(E(T))) = \bigvee_S \alpha_S^{E(S)}(\alpha_T^{E(T)}(E(T))) = \bigvee_S \alpha_S^{E(S)}(T) = \alpha_T^{E(T)}(T)$, y por el Lema 2.3.5 $\alpha_T^{E(T)}$ es idempotente para cada $T \in R-simp$.
($2 \Rightarrow 1$). Dado $S \in R-simp$, por el Lema 2.3.5 $S = \alpha_S^{E(S)}(S)$ por lo que

existe un monomorfismo $f \in Hom_R(E(S), S)$, entonces $E(S) = S$, para todo simple S.
$(5 \Rightarrow 8)$. Primero hay que notar que si para $M \in R - Mod$ existe $0 \neq x \in \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\}(M) = \sum_{S \in R-simp} \alpha_S^{E(S)}(M)$ entonces $x = x_{S_1} + ... + x_{S_n}$ y existen $y_{S_i} \in S_i$, morfismos $0 \neq f_i \in Hom_R(E(S_i), M)$ tal que $0 \neq f_i(y_{S_i}) = x_{S_i}$ para $i = 1, ..., n$ lo que a su vez implica $f(Ry_{S_i}) \cong S_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y por tanto $Rx \cong S_1 \oplus ... \oplus S_n$.
Si $\alpha = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\} \neq \omega_0^{C_0}$ entonces existe $M \in R - Mod$ tal que $\alpha(M) < \omega_0^{C_0}(M)$ o $\omega_0^{C_0}(M) < \alpha(M)$. Notar que $\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\} \neq \mathbf{0}$, en el caso $\omega_0^{C_0} = \mathbf{0}$ el resultado es claro. En el primer caso, existe $0 \neq x \in \omega_0^{C_0}(M) \backslash \alpha(M)$, entonces por la descripción anterior para cada $S \in R - simp$, $\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\} \prec \alpha_S^S$ considerando $K = Rx$. En el segundo caso, existe $0 \neq x \in \alpha(M) \setminus \omega_0^{C_0}(M)$. entonces utilizando la descripción $Rx \cong S_1 \oplus ... \oplus S_n$, se tiene que $0 = \omega_0^{C_0}(S_i) < \alpha_{S_i}^{S_i}(S_i) = S_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, también para cada simple $S \ncong S_i$ se satisface $0 = \omega_0^{C_0}(S) < \alpha_S^S(S) = S$, es decir, para cada $S \in R - simp, \omega_0^{C_0} \prec \alpha_S^S$. Por contrapuesta se tiene el resultado.
$(8 \Rightarrow 7)$. Dado que $\omega_0^{C_0}$ es radical, por el Lema 2.3.4 es suficiente ver que $\mathbb{F}_{\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\}}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas. Sea $\alpha = \bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\}$ y $M \in \mathbb{F}_\alpha$, si $\alpha(E(M)) \neq 0$ entonces existe $0 \neq x \in E(M)$ tal que $Rx = S_1 \oplus ... \oplus S_n$ para $S_i \in R - simp$ e $i = 1, ..., n$. Como M es esencial en $E(M), Rx \cap M \neq 0$ entonces para algún S_{i_0} existe un morfismo no cero de $E(M)$ a M, a saber $\_ \cdot x$, lo que implica que $\alpha(M) \neq 0$ que es una contradicción ya que $M \in \mathbb{F}_\alpha$. Por tanto $\alpha(E(M)) = 0$ lo que finalmente implica que $\bigvee\{\alpha_S^{E(S)} | S \in R - simp\}$ es exacto izquierdo.
$(1 \Rightarrow 9)$. Como R es un V-anillo por el Corolario A.1.1 C_0 es cogenerador de $R - Mod$, entonces $\mathbf{0} = \omega_0^{C_0} = \alpha_0^{C_0}$.
$(9 \Rightarrow 1)$. $\alpha_0^{C_0} = \omega_0^{C_0}$ implica $\omega_0^{C_0} = \mathbf{0}$ por lo que C_0 es cogenerador de $R - Mod$ que es equivalente a que R sea un V-anillo.
$(10 \Rightarrow 9)$. Es claro.
$(1 \Rightarrow 10)$. Es suficiente notar que el único submódulo totalmente invariante de C_0 es 0 entonces la afirmación se sigue como en $1 \Rightarrow 9$. □

Lema 2.3.6. *Sean $M, N \in R - Mod$ tal que $N = N_1 \oplus N_2 \leq_{t.i} M = M_1 \oplus M_2$ y $N_j \leq M_j$. Entonces $N_j \leq_{t.i} M_j$ para $j = 1, 2$ y:*

1. $\alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2} = \alpha_N^M$.
2. $\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2} = \omega_N^M$.

Demostración. Para la primera afirmación sea ρ_j la proyección canónica de M a M_j e i_j la inclusión canónica de M_j a M, $j = 1, 2$. Dado $f \in End(M_j)$ entonces $i_j f \rho_j \in End(M)$ y por tanto $f(N_j) = i_j f(\rho_j(N_1 \oplus N_2)) = i_j f \rho_j(N) \leq N$. Si $x \in f(N_j)$ y $x \in M_j \backslash N_j$ entonces existen $0 \neq x_1 \in M_1, 0 \neq x_2 \in M_2$ tal que $f(y) = x = x_1 + x_2$ con $y \in N_j$, como $f(N_j) \leq N$ implica $x_1 \in N_1, x_2 \in N_2$. Sin pérdida de generalidad si $j = 1$ entonces $x_2 = x_1 - x \in N_1 \cap N_2 = 0$ que es una contradicción por lo tanto $f(N_1) \leq N_1$. De forma similar para $j = 2$. Es decir $N_j \leq_{t.i} M_j$ para $j = 1, 2$.

(1). Sea $K \in R-Mod$ y $M_j \xrightarrow{f_j} K$ $(j = 1, 2)$. Entonces $f = f_j \rho_j \in Hom_R(M, K)$ y $f_j(N_j) = f_j \rho_j(N) = f(N) \leq \alpha_{N_j}^{M_j}$, es decir, cada f_j en $Hom_R(M_j, K)$ induce un morfismo en $Hom_R(M, K)$ entonces $\alpha_{N_j}^{M_j}(K) \leq \alpha_N^M(K)$ para $j = 1, 2$ y $K \in R-Mod$, por lo que $\alpha_{N_j}^{M_j} \preceq \alpha_N^M$, que implica $\alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2} \preceq \alpha_N^M$. De forma análoga, si $f \in Hom_R(M, K)$ entonces $f_j = f i_j \in Hom_R(M_j, K)$ y $f(N) = f(N_1 \oplus N_2) = f_1(N_1) + f_2(N_2) \leq \alpha_{N_1}^{M_1}(K) + \alpha_{N_1}^{M_1}(K)$, consecuentemente $\alpha_N^M(K) \leq \alpha_{N_1}^{M_1}(K) \vee \alpha_{N_1}^{M_1}(K)$, que significa $\alpha_N^M \preceq \alpha_{N_1}^{M_1} \vee \alpha_{N_2}^{M_2}$, con eso se tiene la igualdad.

(2). Sea $K \in R-Mod$ y $K \xrightarrow{f} M$ $(j = 1, 2)$. Entonces $f_j = \rho_j f \in Hom_R(K, M_j)$ y $\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2}(K) = \omega_{N_1}^{M_1} \cap \omega_{N_2}^{M_2}(K) \leq f_1^{-1}(N_1) \cap f_2^{-1}(N_2) = (\rho_1 f)^{-1}(N_1) \cap (\rho_2 f)^{-1}(N_2) = f^{-1}(\rho_1(N_1) \cap \rho_2(N_2)) = f^{-1}((N_1 \oplus N_2) \cap (N_1 \oplus N_2)) = f^{-1}(N_1 \oplus N_2) = f^{-1}(N)$ por lo que $\omega_{N_1}^{M_1}(K) \wedge \omega_{N_2}^{M_2}(K) \leq \omega_N^M(K)$, que implica $\omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2} \preceq \omega_N^M$. De forma análoga, si $f_j \in Hom_R(K, M_j)$ entonces $f = i_j f_j \in Hom_R(K, M)$ y $\omega_N^M(K) \leq f^{-1}(N) = (i_j f_j)^{-1}(N) = f_j^{-1}(N_j)$ consecuentemente $\omega_N^M(K) \leq \omega_{N_j}^{M_j}(K)$ $(j = 1, 2)$, que significa $\omega_N^M \preceq \omega_{N_1}^{M_1} \wedge \omega_{N_2}^{M_2}$, con esto se tiene la igualdad. $\square$

Finalmente el siguiente teorema caracteriza a los anillos que son productos finitos de anillos simples en términos de $R-pr$.

Teorema 2.3.5. *Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es un producto directo finito de anillos simples.*

2. *Cada coátomo en $R-pr$ es un radical.*

3. *Cada coátomo en $R-pr$ es un radical y sólo hay un número finito de coátomos.*

Demostración. $(3 \Rightarrow 2)$: Es inmediato.
$(2 \Rightarrow 1)$: Dado I ideal bilateral máximo de R, ω_I^R es un coátomo, que por hipótesis es un radical, entonces $\omega_I^R(R/I) = \omega_I^R(R/\omega_I^R(R)) = 0$. Sea $J_I = \alpha_{R/I}^{R/I}(R)$ entonces $J_I \nleq I$, en otro caso $f(R/I) \leq J_I \leq I$ para todo $f \in$

$Hom_R(R/I, R)$, así $R/I \leq f^{-1}(I)$, por lo que $R/I \leq \omega_I^R(R/I) = 0$ que es una contradicción, puesto que R/I es simple. Como I es máximo $I + J_I = R$, también $If(R/I) = 0$ para todo $f \in Hom_R(R/I, R)$ y por tanto $IJ_I = 0$. Sea $J = \sum\{J_I | I$ es un ideal máximo de $R\}$, si $J \lneq R$ entonces existe un ideal K máximo de R tal que $J \leq K$ pero $J_K \leq J \leq K$, que es una contradicción, por tanto $J = R$. Entonces $1 \in J$, $1 = \sum_{s=1}^n a_s$ para algunos $a_s \in J_{I_s}$ y $n \in \mathbb{N}$, si existe $x \in \cap_{s=1}^n I_s$ entonces $x = \sum_{s=1}^n x a_s$ ya que $I_s J_{I_s} = 0$ implica $x = 0$, ahora el Teorema Chino del Residuo asegura que el morfismo $f \in Hom_R(R, \prod R/I_s)$ definido como $f(x) = (x + I_s)$ es un isomorfismo de anillos.
$(1 \Rightarrow 3)$: supóngase que $R = \prod_{s=1}^n R_s$ donde R_s es un anillo simple para cada $s = 1, ..., n$. sea $I_s = \{x \in R | x_s = 0\}$ y $K_s = \{x \in R | x_t = 0$ para cada $t \neq s\}$, que como R_s es simple, es máximo y simple respectivamente. Por el Teorema 2.2.1 $\omega_{I_s}^R$ son los coátomos, y por el Lema 2.3.6, considerando $M = R, N = I_s = M_2 = N_2, M_1 = K_s, N_1 = 0$ se obtiene $\omega_{I_s}^R = \omega_0^{K_s} \wedge \omega_{I_s}^{I_s} = \omega_0^{K_s}$ que es radical. $\square$

Capítulo 3

Particiones de la retícula de prerradicales.

3.1. Radicales y prerradicales idempotentes II

Notación 3.1.1. *$\mathcal{E}$ denota una clase completa de representantes de clases de isomorfismo de módulos inyectivos.*

Observación 3.1.1. *Si $E \in \mathcal{E}$ entonces para cada $N \leq_{t.i} E$ el prerradical ω_N^E es exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $L \leq M \in R{-}Mod$. Primero, para cada $f \in Hom_R(M,E)$ existe $h \in Hom_R(L,E)$, a saber la restricción. Por otro lado, si $f \in Hom_R(L,E)$, dado que E es inyectivo, existe $\varphi \in Hom_R(M,E)$ tal que $f = \varphi i = \varphi|_L$ donde $L \xhookrightarrow{i} M$, así $\omega_N^E(L) = \cap\{f^{-1}(N)|f \in Hom_R(L,E)\} = \cap\{\varphi|_L^{-1}(N)|\varphi \in Hom_R(M,E)\} = \cap\{\varphi^{-1}(N) \cap L|\varphi \in Hom_R(M,E)\} = \omega_N^E(M) \cap L$. $\square$

Proposición 3.1.1. *Sea $\sigma \in R-pr$:*

1. *α_M^M es idempotente para todo $M \in R{-}Mod$. De hecho, σ es idempotente si y sólo si $\sigma = \bigvee\{\alpha_M^M|\sigma(M) = M\}$.*
2. *ω_0^M es un radical para todo $M \in R-Mod$. De hecho, σ es radical si y sólo si $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^M|\sigma(M) = 0\}$.*
3. *σ es exacto izquierdo si y sólo si $\sigma = \bigwedge\{\omega_{\sigma(E)}^E|E \in \mathcal{E}\}$.*
4. *σ es radical exacto izquierdo si y sólo si $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^E|\sigma(E) = 0,\ y\ E \in \mathcal{E}\}$.*

Demostración. (1). Primero, si σ es idempotente, entonces para todo $K \in R-Mod$, $\sigma(\sigma(K)) = \sigma(K)$ y $\sigma(K) \leq \alpha_{\sigma(K)}^{\sigma(K)}(K)$, así $\sigma \preceq \bigvee\{\alpha_M^M | \sigma(M) = M\}$. Por el Corolario 2.2.1, para cualquier $M \in R-Mod$ tal que $\sigma(M) = M$, $\alpha_M^M \preceq \sigma$, por lo tanto, $\bigvee\{\alpha_M^M|\sigma(M) = M\} \preceq \sigma$, con lo que la igualdad se satisface.
Recíprocamente, $\sigma = \bigvee\{\alpha_M^M|\sigma(M) = M\}$ implica que σ es idempotente en vista del Corolario 2.0.1 y que α_M^M es una traza.
(2). Primero, si σ es radical, entonces para todo $K \in R-Mod$, $\sigma(K/\sigma(K)) = 0$ y $\omega_0^{K/\sigma(K)}(K) \leq \sigma(K)$, así $\bigwedge\{\omega_0^M|\sigma(M) = 0\} \preceq \sigma$. Por el Corolario 2.2.1, para cualquier $M \in R-Mod$ tal que $\sigma(M) = M$, $\sigma \preceq \omega_0^M$, por lo tanto, $\sigma \preceq \bigwedge\{\omega_0^M|\sigma(M) = 0\}$, con lo que la igualdad se satisface.
Recíprocamente, $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^M|\sigma(M) = 0\}$ implica que σ es radical en vista del Corolario 2.0.1 y que ω_0^M es un rechazo y por tanto radical.
(3). Primero, si σ es exacto izquierdo, entonces para todo $K \in R-Mod$, $\sigma(K) = K \cap \sigma(E(K)) = i^{-1}(\sigma(E(K)))$, donde i es la inclusión de K en $E(K)$, así $\omega_{\sigma(E(K))}^{E(K)}(K) \leq \sigma(K)$ con lo que $\bigwedge\{\omega_{\sigma(E)}^E|E \in \mathcal{E}\} \preceq \sigma$. Por el Corolario 2.2.1, para cualquier $E \in \mathcal{E}$, $\sigma \preceq \omega_{\sigma(E)}^E$, por lo tanto $\sigma \preceq \bigwedge\{\omega_{\sigma(E)}^E|E \in \mathcal{E}\}$, con lo que la igualdad se satisface.
Recíprocamente, $\sigma = \bigwedge\{\omega_{r(E)}^E|E \in \mathcal{E}\}$ implica que σ es exacto izquierdo en vista de Corolario 2.0.1 y que $\omega_{\sigma(E)}^E$ es exacto izquierdo.
(4). Primero, si σ es radical exacto izquierdo, entonces para todo $K \in R-Mod$, si $E = E(K/\sigma(K))$ entonces $\sigma(K/\sigma(K)) = 0$ ya que σ es radical y $\sigma(K/\sigma(K)) = (K/\sigma(K)) \cap \sigma(E)$ ya que σ es exacto izquierdo. Como $K/\sigma(K) \leq_e E$ implica $\sigma(E) = 0$, entonces $\omega_0^E(K) \leq \sigma(K)$ y por tanto $\bigwedge\{\omega_0^E|\sigma(E) = 0, \text{ y } E \in \mathcal{E}\} \preceq \sigma$. Por otra parte, debido al Corolario 2.2.1 $\sigma \preceq \omega_0^E$ para cada $E \in \mathcal{E}$ tal que $\sigma(E) = 0$, por lo que $\sigma \preceq \bigwedge\{\omega_0^E|\sigma(E) = 0, \text{ y } E \in \mathcal{E}\}$, con esto se tiene la igualdad.
Recíprocamente, si $\sigma = \bigwedge\{\omega_0^E|\sigma(E) = 0, \text{ y } E \in \mathcal{E}\}$, como para cada $E \in \mathcal{E}$ ω_0^E es exacto izquierdo y además es un rechazo, ω_0^E es un radical exacto izquierdo, esto junto con el Corolario 2.0.1 implican que σ es un radical exacto izquierdo. □

3.2. Igualadores, anuladores, coigualadores y totalizadores.

Notación 3.2.1. *De ahora en adelante si no hay confusión para cada $\sigma \in R-pr$ y $M \in R-Mod$, $\sigma(M) := \sigma M$. $C_1 := \oplus\{E(S)|S \in R-simp\}$.*

Observación 3.2.1. *Para cada $\sigma \in R-pr$ las siguientes clases son no vacías y cerradas bajo tomar $\bigwedge$ y $\bigvee$.*

1. $\mathcal{A}_e = \{\tau \in R - pr | \tau\sigma = \sigma\}$;

2. $\mathcal{A}_a = \{\tau \in R - pr | \tau\sigma = \boldsymbol{0}\}$;

3. $\mathcal{A}_c = \{\tau \in R - pr | (\sigma : \tau) = \sigma\}$;

4. $\mathcal{A}_t = \{\tau \in R - pr | (\sigma : \tau) = \boldsymbol{1}\}$.

Definición 3.2.1. *Sea $\sigma \in R - pr$. Se definen los siguientes prerradicales:*

1. *El igualador de σ, $e(\sigma) = \bigwedge\{\tau \in \mathcal{A}_e\}$;*

2. *El anulador de σ, $a(\sigma) = \bigvee\{\tau \in \mathcal{A}_a\}$;*

3. *El coigualador de σ, $c(\sigma) = \bigvee\{\tau \in \mathcal{A}_c\}$;*

4. *El totalizador de σ, $t(\sigma) = \bigwedge\{\tau \in \mathcal{A}_t\}$.*

Observación 3.2.2. $e(\sigma)\sigma = \sigma$, $a(\sigma)\sigma = \boldsymbol{0}$, $(\sigma : c(\sigma)) = \sigma$ *y* $(\sigma : c(\sigma)) = \boldsymbol{1}$.

Teorema 3.2.1. *Para cada $\sigma \in R - pr$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. a) *$\sigma \preceq e(\sigma)$;*
   b) *$e(\sigma)$ es un prerradical idempotente;*
   c) *$e(\sigma) = \sigma$ si y sólo si σ es idempotente;*
   d) *$e(\sigma) = \bigvee\{\alpha^{\sigma M}_{\sigma M} | M \in R - Mod\}$.*

2. a) *$a(\sigma)$ es un radical;*
   b) *$a(\sigma) = \bigwedge\{\omega^{\sigma M}_0 | M \in R - Mod\} = \omega^{\sigma C_1}_0$.*

3. a) *$c(\sigma) \preceq \sigma$;*
   b) *$c(\sigma)$ es un radical;*
   c) *$c(\sigma) = \sigma$ si y sólo si σ es un radical;*
   d) *$c(\sigma) = \bigwedge\{\omega^{M/\sigma M}_0 | M \in R - Mod\}$.*

4. a) *$t(\sigma) = \bigvee\{\alpha^M_M | M \in R - Mod, \sigma(R)M = 0\}$;*
   b) *$t(\sigma)$ es un prerradical Jansiano exacto izquierdo.*

Demostración. 1. *a)* $\sigma = e(\sigma)\sigma \preceq e(\sigma)$.

b) $(e(\sigma)e(\sigma))\sigma = e(\sigma)(e(\sigma)\sigma) = e(\sigma)\sigma = \sigma$ por tanto $e(\sigma) \in \mathcal{A}_e$. Entonces $e(\sigma) \preceq e(\sigma)e(\sigma) \preceq e(\sigma)$ lo que implica $e(\sigma)e(\sigma) = e(\sigma)$.

c) Si $e(\sigma) = \sigma$ por (b) σ es idempotente. Recíprocamente, si σ es idempotente utilizando (a) se obtiene, $e(\sigma) \preceq \sigma \preceq e(\sigma)$ lo que implica $e(\sigma) = \sigma$.

d) Para cada $M \in R-Mod$, $e(\sigma)\sigma M = \sigma M$, como σ es idempotente y debido a la Proposición 3.1.1, $\alpha_{\sigma M}^{\sigma M} \preceq \bigvee\{\alpha_N^N | e(\sigma)N = N\} = e(\sigma)$ entonces $\bigvee\{\alpha_{\sigma M}^{\sigma M} | M \in R-Mod\} \preceq e(\sigma)$. Por otra parte, si $M \in R-Mod$ entonces $\sigma M = \alpha_{\sigma M}^{\sigma M}(\sigma M) = \alpha_{\sigma M}^{\sigma M}\sigma(M)$ lo que implica $\sigma \preceq \bigvee\{\alpha_{\sigma M}^{\sigma M}\sigma | M \in R-Mod\} = \bigvee\{\alpha_{\sigma M}^{\sigma M} | M \in R-Mod\}\sigma \preceq \sigma$, es decir, $\bigvee\{\alpha_{\sigma M}^{\sigma M} | M \in R-Mod\} \in \mathcal{A}_e$ que por definición de $e(\sigma)$, $e(\sigma) \preceq \bigvee\{\alpha_{\sigma M}^{\sigma M} | M \in R-Mod\}$.

2. *a*) Por el Teorema 2.0.1 se satisface $(a(\sigma) : a(\sigma))\sigma \preceq (a(\sigma)\sigma : a(\sigma)\sigma) = \mathbf{0}$, esto es, $(a(\sigma) : a(\sigma)) \in \mathcal{A}_a$ entonces $a(\sigma) \preceq (a(\sigma) : a(\sigma)) \preceq a(\sigma)$, lo que implica que $a(\sigma)$ es un radical.

b) En vista del Corolario 2.2.1 y que $a(\sigma)\sigma = \mathbf{0}$ se satisface $a(\sigma) \preceq \omega_0^{\sigma M}$. Entonces $a(\sigma) \preceq \bigwedge\{\omega_0^{\sigma M} | M \in R-Mod\}$. Por otra parte, si $M \in R-Mod$ entonces $(\omega_0^{\sigma M})(\sigma)(M) = \omega_0^{\sigma M}(\sigma(M)) = 0$, lo que implica $\bigwedge\{\omega_0^{\sigma M} | M \in R-Mod\} \in \mathcal{A}_a$, y por tanto $\bigwedge\{\omega_0^{\sigma M} | M \in R-Mod\} \preceq a(\sigma)$.
Para la segunda igualdad, utilizando la primera igualdad y el Corolario 2.2.1, $a(\sigma) \preceq \omega_0^{\sigma C_1}$. Para la otra desigualdad, es suficiente con $\omega_0^{\sigma C_1} \in \mathcal{A}_a$. Si existe $M \in R-Mod$ tal que $\omega_0^{\sigma C_1}(M) \neq 0$ entonces existe $x \in \sigma M$ y $x \in Nuc(f)$ para cada $f \in Hom_R(\sigma M, \sigma C_1)$. $< x >$ es finitamente generado, entonces existen máximos en $< x >$ y por ende cocientes simples, sean ρ_x y $S =< x > /N$ donde ρ_x es el morfismo canónico a S y N es un máximo. Sean $S \xhookrightarrow{i_S} E(S)$, $E(S) \xhookrightarrow{j} C_1$ las inclusiones, como $E(S)$ es inyectivo, existe h_x tal que $h_x i = i_s \rho_x$. En un diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & < x > \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\rho_x"] & \sigma M \arrow[ddl, dashed, "h_x"] \\ & S \arrow[d, hook, "i_S"] & \\ & E(S) & \end{tikzcd}$$

Y debe suceder que $h(\sigma M) \leq \sigma C_1$, de otra forma $0 \neq i_S(\rho_x(x)) = j(h_x(x)) \in E(S)$. Así el morfismo, $jh_x = g_x \in Hom_R(\sigma M, C_1)$ tal que $Im(g_x) \leq \sigma C_1$. Considerando $f_x \in Hom_R(\sigma M, \sigma C_1)$ la correstricción de g_x es tal que $f_x(x) \neq 0$, en efecto, $f_x(x) = g_x(x) =$

$jh_x(x) = h_x(x) = h_x(i(x)) = i_S(\rho_x(x)) = \rho_x(x) \neq 0$, que es una contradicción. Entonces $\omega_0^{\sigma C_1}(\sigma M) = 0$ para cada $M \in R-Mod$, por lo que $\omega_0^{\sigma C_1} \in \mathcal{A}_a$ y $\omega_0^{\sigma C_1} \preceq a(\sigma)$. Con esto se tiene la igualdad.

3. *a*) $c(\sigma) \preceq (\sigma : c(\sigma)) = \sigma$.

   b) $(\sigma : (c(\sigma) : c(\sigma))) = ((\sigma : c(\sigma)) : c(\sigma)) = (\sigma : c(\sigma)) = \sigma$ lo que implica $(c(\sigma) : c(\sigma)) \in \mathcal{A}_c$ entonces $c(\sigma) \preceq (c(\sigma) : c(\sigma)) \preceq c(\sigma)$, esto es, $c(\sigma) = (c(\sigma) : c(\sigma))$.

   c) Si $\sigma = c(\sigma)$ por (b) σ es radical. Recíprocamente, si σ es radical entonces $\sigma \in \mathcal{A}_c$ y por (a), $c(\sigma) \preceq \sigma \preceq c(\sigma)$ con lo que $\sigma = c(\sigma)$.

   d) Como $c(\sigma) \in \mathcal{A}_c$ entonces $(\sigma : c(\sigma)) = \sigma$. Por lo que para cada $M \in R-Mod$, $c(\sigma)(M/\sigma M) = (\sigma : c(\sigma))/\sigma M = \sigma M/\sigma M = 0$, que el Corolario 2.2.1 implica, $c(\sigma) \preceq \omega_0^{M/\sigma M}$ y por tanto $c(\sigma) \preceq \bigwedge\{\omega_0^{M/\sigma M} | M \in R-Mod\}$. Por otra parte si $K \in R-Mod$, $(\sigma : \omega_0^{K/\sigma K})(K)/\sigma K = \omega_0^{K/\sigma K}(K/\sigma K) = 0$, esto es, $(\sigma : \omega_0^{K/\sigma K})(K) = \sigma K$. Entonces, $\sigma \preceq \bigwedge\{(\sigma : \omega_0^{M/\sigma M}) | M \in R-Mod\} = (\sigma : \bigwedge\{\omega_0^{M/\sigma M} | M \in R-Mod\}) \preceq \sigma$, lo que implica $\bigwedge\{\omega_0^{M/\sigma M} | M \in R-Mod\} \in \mathcal{A}_c$ por tanto $\bigwedge\{\omega_0^{M/\sigma M} | M \in R-Mod\} \preceq c(\sigma)$, con esto se obtiene la igualdad.

4. *a*) Como $t(\sigma) \in \mathcal{A}_t$, para cada $M \in R-Mod$ $t(\sigma)(M/\sigma M) = (\sigma : t(\sigma))(M)/\sigma M = M/\sigma M$ entonces $(\sigma : t(\sigma)t(\sigma))(M/\sigma M) = t(\sigma)t(\sigma)(M/\sigma M) = t(\sigma)(\sigma(M/\sigma M)) = M/\sigma M$, lo que implica, $(\sigma : t(\sigma)t(\sigma))(M) = M$ entonces $t(\sigma)t(\sigma) \in \mathcal{A}_t$ por lo que $t(\sigma) \preceq t(\sigma)t(\sigma) \preceq t(\sigma)$, es decir $t(\sigma)$ es idempotente y por la Proposición 3.1.1, $t(\sigma) = \bigvee\{\alpha_M^M | t(\sigma)M = M\}$. Si $N \in R-Mod$ es tal que $\sigma N = 0$ entonces existe un epimorfismo $(R/\sigma R)^{(X)} \xrightarrow{f} N$ y también, $t(\sigma)(R/\sigma R) = (\sigma : t(\sigma))(R)/\sigma R = R/\sigma R$, dado que $t(\sigma)$ es un prerradical, $f(t(\sigma)((R/\sigma R)^{(X)})) \leq t(\sigma)N$. Por otro lado $f(t(\sigma)((R/\sigma R)^{(X)})) = f((t(\sigma)(R/\sigma R))^{(X)}) = f(R/\sigma R) = N$ entonces $t(\sigma)N = N$, en vista del Corolario 2.2.1 $\alpha_N^N \preceq t(\sigma)$ lo que implica $\bigvee\{\alpha_N^N | \sigma RN = 0\} \preceq t(\sigma)$. Para la otra desigualdad, si $K \in R-Mod$ entonces $(\sigma : \alpha_{K/\sigma K}^{K/\sigma K})(K)/\sigma K = \alpha_{K/\sigma K}^{K/\sigma K}(K/\sigma K) = K/\sigma K$, es decir, $(\sigma : \alpha_{K/\sigma K}^{K/\sigma K})(K) = K$ y como $\sigma R(K/\sigma K) = 0$ se sigue que $K = (\sigma : \alpha_{K/\sigma K}^{K/\sigma K})(K) \leq \bigvee\{\alpha_M^M | M \in R-Mod, \sigma(R)M = 0\}(K) = (\sigma : \bigvee\{\alpha_M^M | M \in R-Mod, \sigma(R)M = 0\})(K)$ esto es $(\sigma : \bigvee\{\alpha_M^M | M \in R-Mod, \sigma(R)M = 0\}) = \mathbf{1}$ entonces $\bigvee\{\alpha_M^M | M \in R-Mod, \sigma(R)M = 0\} \in \mathcal{A}_t$ por lo que $t(\sigma) \preceq \bigvee\{\alpha_M^M | M \in R-Mod, \sigma(R)M = 0\}$.

b) $\mathbb{T}_{t(\sigma)} = \{M \in R-Mod | t(\sigma)M = M\}$ por tanto si $M \in \mathbb{T}_{t(\sigma)}$ entonces $M = \sum_N \sum\{f(N) | f \in Hom_R(N,M)\}$. Por otra parte, sea $\eta(\sigma(R))$ el filtro Jansiano generado por $\sigma(R)$ y $\mathbb{T}_{\eta(\sigma(R))}$ la clase de torsión hereditaria y cerrada bajo productos asociada a $\eta(\sigma(R))$, entonces $\mathbb{T}_{\eta(\sigma(R))} = \{M \in R-Mod | (0:m) \in \eta(\sigma(R))$, para cada $m \in M\} = \{M \in R-Mod | \sigma(R) \leq (0:m)$, para cada $m \in M\} = \{M \in R-Mod | \sigma(R)M = 0\}$. Si $M \in \mathbb{T}_{t(\sigma)}$ entonces $\sigma(R)M = 0$ y por tanto $M \in \mathbb{T}_{\eta(\sigma(R))}$ es decir $\mathbb{T}_{t(\sigma)} \subseteq \mathbb{T}_{\eta(\sigma(R))}$. Para la otra contención, si ${}_RM \in \mathbb{T}_{\eta(\sigma(R))}$ entonces $\sigma(R) \leq (0:m)$ para cada $m \in M$, entonces $\sigma(R)Rm = 0$ para cada $m \in M$. Finalmente $\{Rm | m \in M\} \subseteq \{N \in R-Mod | \sigma(R)N = 0\}$ y entonces $\bigvee\{\alpha_N^N | N \in R-Mod, \sigma(R)M = 0\}(M) = M$ por lo tanto $M \in \mathbb{T}_{t(\sigma)} = \{M \in R-Mod | t(\sigma)M = M\}$, con esto $\mathbb{T}_{t(\sigma)} = \{M \in R-Mod | t(\sigma)M = M\} = \mathbb{T}_{\eta(\sigma(R))}$, esto es, $t(\sigma)$ es un prerradical Jansiano exacto izquierdo.

□

3.3. Particiones inducidas por igualadores.

Sea $\sigma \in R-pr$ fijo.

Definición 3.3.1. *Si $\tau, \eta \in R-pr$ entonces $\tau \sim_\sigma \eta$ si $\tau\sigma = \eta\sigma$.*

Observación 3.3.1. *$\sim_\sigma$ es una relación de equivalencia en $R-pr$.*

Demostración. Sean $\tau, \eta, \gamma \in R-pr$. $\tau\sigma = \tau\sigma$ entonces $\tau \sim_\sigma \tau$, también $\tau\sigma = \eta\sigma$ es lo mismo que $\eta\sigma = \tau\sigma$ esto es $\eta \sim_\sigma \tau$. Finalmente, si $\tau \sim_\sigma \eta$ y $\eta \sim_\sigma \gamma$ entonces $\tau\sigma = \eta\sigma$ y $\eta\sigma = \gamma\sigma$ que implica $\tau\sigma = \gamma\sigma$ esto es $\tau \sim_\sigma \gamma$. □

Notación 3.3.1. *Para $\tau \in R-pr$ sea $[\tau]_\sigma := \{\eta \in R-pr | \tau \sim_\sigma \eta\}$.*

Si se define $R-pr \xrightarrow{r_\sigma} R-pr$ como $r_\sigma(\eta) = \eta\sigma$ entonces $r_\sigma^{-1}(\tau\sigma) = [\tau]_\sigma$.

Observación 3.3.2. *Sea $\tau \in R-pr$ entonces $[\tau]_\sigma$ es un intervalo.*

Demostración. Sea $\{\eta_\alpha\}_\Lambda \subseteq [\tau]_\sigma$. Por el Teorema 2.0.1 se satisface la siguiente igualdad $(\bigwedge_\Lambda \eta_\alpha)\sigma = \bigwedge_\Lambda(\eta_\alpha\sigma) = \bigwedge \tau\sigma = \tau\sigma$, así $\bigwedge_\Lambda \eta_\alpha \in [\tau]_\sigma$. Análogamente $\bigvee_\Lambda \eta_\alpha \in [\tau]_\sigma$. □

Notación 3.3.2. *Para $\tau \in R-pr$, $[\tau]_\sigma := [\tau_\sigma, \tau^\sigma]$.*

Observación 3.3.3. *$[\boldsymbol{0}]_\sigma = [\boldsymbol{0}, a(\sigma)]$ y $[\boldsymbol{1}]_\sigma = [e(\sigma), \boldsymbol{1}]$*

Demostración. Para esto es suficiente recordar que $a(\sigma) = \bigvee\{\eta \in \mathcal{A}_a\}$ y $e(\sigma) = \bigwedge\{\eta \in \mathcal{A}_e\}$. $\square$

Teorema 3.3.1. *Sea $S \in R\!-\!simp$ y $\sigma = \alpha_S^{E(S)}$ entonces $R\!-\!pr = [\mathbf{0}]_\sigma \cup [\mathbf{1}]_\sigma$.*

Demostración. Hay que notar dos hechos. Primero, para cada $M \in R\!-\!Mod$ $M \hookrightarrow \prod E(S')$ para algunos $S' \in R - simp$ entonces $\sigma M \leq \sigma \prod E(S') \leq \prod \sigma E(S') = \prod \alpha_S^{E(S)}(E(S')) = \alpha_S^{E(S)}(E(S)) = S$ entonces $\sigma M = 0$ o $\sigma M = M$, dado que para $M = E(S)$, $\sigma M = S$ y junto con Teorema 3.2.1 $e(\sigma) = \bigvee\{\alpha_{\sigma M}^{\sigma M} | M \in R\!-\!Mod\} = \alpha_S^S$. Por otro lado, $\sigma C_1 = \alpha_S^{E(S)} \oplus_{S' \in R-simp} E(S') = \oplus_{S' \in R-simp} \alpha_S^{E(S)}(E(S')) = S$ y en vista del Teorema 3.2.1, $a(\sigma) = \omega_0^{\sigma C_1} = \omega_0^S$. Finalmente por la observación anterior $[\mathbf{0}]_\sigma = [\mathbf{0}, \omega_0^S]$ y $[\mathbf{1}] = [\alpha_S^S, \mathbf{1}]$, para cualquier $\eta \in R - pr$, $\eta S = 0$ o $\eta S = S$ que por el Corolario 2.2.1 implica: en el primer caso $\eta \preceq \omega_0^S$, en el segundo $\alpha_S^S \preceq \eta$, que es justamente $\eta \in [\mathbf{0}]_\sigma \cup [\mathbf{1}]_\sigma$. $\square$

Recordar que para cada $\tau \in R\!-\!pr$, $\bar{\tau}$ y $\hat{\tau}$ denotan a el menor radical mayor que τ y el mayor prerradical idempotente menor que τ respectivamente.

Teorema 3.3.2. *Sea $\sigma \in R\!-\!pr$ fijo, además si $\tau \in R\!-\!pr$ $\lambda = \bigwedge\{\omega_0^{\sigma M/\tau\sigma M} | M \in R - Mod\}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *$e(\tau\sigma) = e(\tau_\sigma)$.*

2. *Si σ o $(\tau\sigma)$ es idempotente entonces $\tau_\sigma = \tau\sigma$.*

3. *$\lambda \preceq \tau^\sigma$. Si $\tau\sigma$ es una radical entonces $\lambda = \tau^\sigma$.*

4. *$c(\gamma) \preceq \lambda$ para todo $\gamma \in [\tau]_\sigma$, en particular $c(\tau^\sigma) \preceq \lambda$.*

5. *Si τ es un radical entonces $\tau \preceq \lambda$ y por tanto $\lambda \in [\tau]_\sigma$.*

6. *Si $\lambda \in [\tau]_\sigma$ entonces $\bar{\tau}_\sigma$ es el menor radical en $[\tau]_\sigma$.*

Demostración. (1) $e(\tau_\sigma)\tau\sigma = e(\tau_\sigma)\tau_\sigma\sigma = (e(\tau_\sigma)\tau_\sigma)\sigma = \tau_\sigma\sigma = \tau\sigma$ entonces $e(\tau\sigma) \preceq e(\tau_\sigma)$. Por otra parte $(e(\tau\sigma)\tau_\sigma)\sigma = e(\tau\sigma)(\tau_\sigma\sigma) = e(\tau\sigma)\tau\sigma = \tau\sigma$ lo que implica $e(\tau\sigma)\tau_\sigma \in [\tau]_\sigma$. Entonces $\tau_\sigma \preceq e(\tau\sigma)\tau_\sigma \preceq \tau_\sigma$, es decir, $e(\tau\sigma)\tau_\sigma = \tau_\sigma$ por lo que $e(\tau_\sigma) \preceq e(\tau\sigma)$.
(2) Si σ es idempotente $(\tau\sigma)\sigma = \tau(\sigma\sigma) = \tau\sigma$ entonces $\tau_\sigma \preceq \tau\sigma$, o si $\tau\sigma$ es idempotente, por (1) y el Teorema 3.2.1 $\tau_\sigma \preceq e(\tau_\sigma) = e(\tau\sigma) = \tau\sigma$. Además, si $\gamma \in [\tau]_\sigma$ entonces $\tau\sigma = \gamma\sigma \preceq \gamma$, en particular $\tau\sigma \preceq \tau_\sigma$. En ambos casos la igualdad se satisface.
(3) Para cualquier $M \in R - Mod$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tau\sigma M \arrow[r, hook, "i"] & \sigma M \arrow[r, two heads, "\rho"] & \sigma M/\tau\sigma M \arrow[r] & 0 \\
 & & \lambda\sigma M \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\rho|"] & \lambda(\sigma M/\tau\sigma M) \arrow[u, hook, "i"] &
\end{tikzcd}$$

Pero $\lambda(\sigma M/\tau\sigma M) = \bigwedge\{\omega_0^{\sigma N/\tau\sigma N} | N \in R-Mod\}(\sigma M/\tau\sigma M) = 0$ entonces $\lambda\sigma M \leq \tau\sigma M$, es decir $\lambda\sigma \preceq \tau\sigma$. Por lo que $(\lambda \vee \tau_\sigma)\sigma = \lambda\sigma \vee \tau_\sigma\sigma = \lambda\sigma \vee \tau\sigma = \tau\sigma$, lo que implica $\lambda \vee \tau_\sigma \in [\tau]_\sigma$, finalmente, $\lambda \preceq \lambda \vee \tau_\sigma \preceq \tau^\sigma$. Supóngase que $\tau\sigma$ es un radical, para cada $M \in R-Mod$ $\sigma M/\tau\sigma M \leq \sigma(\sigma M/\tau\sigma M)$ (σ es un prerradical), con lo cual $\tau^\sigma(\sigma M/\tau\sigma M) \leq \tau^\sigma(\sigma(\sigma M/\tau\sigma M)) = \tau^\sigma\sigma(M/\tau\sigma M) = \tau\sigma(M/\tau\sigma) = 0$ y por el Corolario 2.2.1 $\tau^\sigma \preceq \omega_0^{\sigma M/\tau\sigma M}$ entonces $\tau^\sigma \preceq \lambda$.
(4) Sea $\gamma \in [\tau]_\sigma$, debido al Teorema 3.2.1 $c(\gamma) = \bigwedge\{\omega_0^{M/\gamma M} | M \in R-Mod\}$, además $\sigma M/\tau\sigma M = \sigma M/\gamma\sigma M$ entonces $c(\gamma) \preceq \lambda$.
(5) Si τ es un radical entonces para todo $M \in R-Mod$ $\tau(\sigma M/\tau\sigma M) = 0$ y por el Corolario 2.2.1 $\tau \preceq \omega_0^{\sigma M/\tau\sigma M}$ que implica $\tau \preceq \bigwedge\{\omega_0^{\sigma M/\tau\sigma M} | M \in R-Mod\}$ esto es $\tau \preceq \lambda$. Finalmente, $\tau \preceq \lambda \preceq \tau^\sigma$, es decir $\lambda \in [\tau]_\sigma$.
(6) Si $\lambda \in [\tau]_\sigma$, dado que λ es un radical y en vista de (3) $\tau_\sigma \preceq \bar{\tau}_\sigma \preceq \tau^\sigma$ por lo que $\bar{\tau}_\sigma \in [\tau]_\sigma$. $\square$

3.4. Particiones inducidas por coigualadores.

Sea $\sigma \in R-pr$ fijo. De forma análoga a la sección anterior.

Definición 3.4.1. *Si $\tau, \eta \in R-pr$ entonces $\tau \sim^\sigma \eta$ si $(\sigma : \tau) = (\sigma : \eta)$.*

Observación 3.4.1. *$\sim^\sigma$ es una relación de equivalencia en $R-pr$.*

Notación 3.4.1. *Para $\tau \in R-pr$ sea $[\tau]^\sigma := \{\eta \in R-pr | \tau \sim^\sigma \eta\}$.*

Si se define $R-pr \xrightarrow{l^\sigma} R-pr$ como $l^\sigma(\eta) = (\sigma : \eta)$ entonces $(l^\sigma)^{-1}(\sigma : \tau) = [\tau]^\sigma$.

Observación 3.4.2. *Sea $\tau \in R-pr$ entonces $[\tau]^\sigma$ es un intervalo.*

Notación 3.4.2. *Para $\tau \in R-pr$, $[\tau]^\sigma := [{}_\sigma\tau, {}^\sigma\tau]$.*

Observación 3.4.3. $[\boldsymbol{0}]^\sigma = [\boldsymbol{0}, c(\sigma)]$ *y* $[\boldsymbol{1}]^\sigma = [t(\sigma), \boldsymbol{1}]$

Demostración. Recordar que $c(\sigma) = \bigvee\{\eta \in \mathcal{A}_c\}$ y $t(\sigma) = \bigwedge\{\eta \in \mathcal{A}_t\}$. $\square$

Teorema 3.4.1. *Sea $\sigma \in R-pr$ fijo, si $\tau \in R-pr$ $\eta = (\sigma : \tau)$ y $\delta = \bigvee\{\alpha_{\eta M/\sigma M}^{\eta M/\sigma M} | M \in R-Mod\}$. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $c(\eta) = c({}^{\sigma}\tau)$.

2. Si η *o* σ *es un radical entonces* $l^{\sigma}(\eta) = \eta$ *y* ${}^{\sigma}\tau = \eta$.

3. ${}_{\sigma}\tau \preceq \delta$*.Si* η *es idempotente entonces* $\delta = {}_{\sigma}\tau$.

4. $\delta \preceq e({}_{\sigma}\tau)$*; más aún,* $\delta \preceq e(\gamma)$ *para cada* $\gamma \in [\tau]^{\sigma}$.

5. $\eta \preceq (\sigma : \delta)$.

6. Si τ *es idempotente entonces* $\delta \preceq \tau$ *y por tanto* $\delta \in [\tau]^{\sigma}$.

7. Si $\delta \in [\tau]^{\sigma}$ *entonces* $\hat{{}^{\sigma}\tau}$ *es el mayor prerradical idempotente en* $[\tau]^{\sigma}$.

Demostración. (1) Primero $(\sigma : \tau) = \eta = (\eta : c(\eta)) = ((\sigma : \tau) : c(\eta)) = ((\sigma : {}^{\sigma}\tau) : c(\eta)) = (\sigma : ({}^{\sigma}\tau : c(\eta)))$ entonces ${}^{\sigma}\tau \preceq ({}^{\sigma}\tau : c(\eta)) \preceq {}^{\sigma}\tau$ por lo tanto $c(\eta) \preceq c({}^{\sigma}\tau)$. Por otro lado $\eta = (\sigma : \tau) = (\sigma : {}^{\sigma}\tau) = (\sigma : ({}^{\sigma}\tau : c({}^{\sigma}\tau))) = ((\sigma : {}^{\sigma}\tau) : c({}^{\sigma}\tau)) = ((\sigma : \tau) : c({}^{\sigma}\tau)) = (\eta : c({}^{\sigma}\tau))$ entonces $c({}^{\sigma}\tau) \preceq c(\eta)$, con esto se obtiene la igualdad.
(2) Si σ es radical entonces $(\sigma : \sigma) = \sigma$, por tanto $(\sigma : \eta) = (\sigma : (\sigma : \tau)) = ((\sigma : \sigma) : \tau)$ con lo que $l^{\sigma}(\eta) = (\sigma : \eta) = (\sigma : \tau) = \eta$ y como además $(\sigma : \eta) = (\sigma : \tau)$ entonces $\eta \preceq {}^{\sigma}\tau$. Si η es radical por (1) y el Teorema 3.2.1 $\eta = c(\eta) = c({}^{\sigma}\tau) \preceq {}^{\sigma}\tau$. Por otro lado, para cualquier $\gamma \in [\tau]^{\sigma}$, $\gamma \preceq (\sigma : \gamma) = (\sigma : \tau) = \eta$, en particular, ${}^{\sigma}\tau \preceq \eta$ así en ambos casos $\eta = {}^{\sigma}\tau$.
(3) Dado $K \in R-Mod$, $\tau(K/\sigma K) = (\sigma : \tau)(K)/\sigma K = \eta K/\sigma K = \alpha^{\eta K/\sigma K}_{\eta K/\sigma K}(\eta K/\sigma K) \preceq \bigvee\{\alpha^{\eta M/\sigma M}_{\eta M/\sigma M} | M \in R-Mod\}(\eta K/\sigma K) = \delta(\eta K/\sigma K) = \delta((\sigma : \tau)K/\sigma K) = \delta(\tau(K/\sigma K)) \leq \tau(K/\sigma K)$ es decir $\delta\tau \in [\tau]^{\sigma}$ y entonces ${}_{\sigma}\tau \preceq \delta\tau \preceq \delta$. Si η es idempotente entonces para todo $M \in R-Mod$, ${}_{\sigma}\tau(\eta M/\sigma M) = (\sigma : {}_{\sigma}\tau)(\eta M)/\sigma M = \eta\eta(M)/\sigma = \eta M/\sigma M$, en vista del Corolario 2.2.1 $\alpha^{\eta M/\sigma M}_{\eta M/\sigma M} \preceq {}_{\sigma}\tau$.
(4) Dado $\gamma \in [\tau]^{\sigma}$ por el Teorema 3.2.1, $e(\gamma) = \bigvee\{\alpha^{\gamma M}_{\gamma M} | M \in R-Mod\}$. Si $K \in R-Mod$ entonces $\eta K/\sigma K = (\sigma : \tau)K/\sigma K = (\sigma : \gamma)K/\sigma K = \gamma(K/\sigma K)$ lo que implica $\{\alpha^{\eta M/\sigma M}_{\eta M/\sigma M} | M \in R-Mod\} \subseteq \{\alpha^{\gamma M}_{\gamma M} | M \in R-Mod\}$ así se tiene que $\delta \preceq e(\gamma)$, en particular para ${}_{\sigma}\tau$, $\delta \preceq e({}_{\sigma}\tau)$.
(5) Dado $M \in R-Mod$, $\eta M/\sigma M = \alpha^{\eta M/\sigma M}_{\eta M/\sigma M}(\eta M/\sigma M) \leq \delta(\eta M/\sigma M) \leq \delta(M/\sigma M) = (\sigma : \delta)(M)/\sigma M$ entonces $\eta \preceq (\sigma : \delta)$.
(6) Dado $M \in R-Mod$, $\eta M/\sigma M = (\sigma : \tau)(M)/\sigma M = \tau(M/\sigma M) = \tau\tau(M/\sigma M)$
$= \tau(\tau(M/\sigma M)) = \tau((\sigma : \tau)(M)/\sigma M) = \tau(\eta M/\sigma M)$ y por el Corolario 2.2.1 $\alpha^{\eta M/\sigma M}_{\eta M/\sigma M} \preceq \tau$ entonces $\delta \preceq \tau$. Finalmente por el inciso (3) ${}_{\sigma}\tau \preceq \delta \preceq {}^{\sigma}\tau$ esto es $\delta \in [\tau]^{\sigma}$.
(7) Notar que δ es idempotente ya que es el supremo de una traza, si $\delta \in [\tau]^{\sigma}$ y debido a la propiedad de $\hat{\tau^{\sigma}}$ se sigue que ${}_{\sigma}\tau \preceq \delta \preceq \hat{\tau^{\sigma}} \preceq \tau^{\sigma}$. □

3.5. Particiones inducidas por anuladores.

Definición 3.5.1. *Si* $\sigma, \tau \in R-pr$*,* $\sigma \sim_a \tau$ *si* $a(\sigma) = a(\tau)$*.*

Observación 3.5.1. $\sim_a$ *induce una relación de equivalencia en* $R-pr$*.*

Demostración. Sean $\sigma, \tau, \eta \in R-pr$. Es claro que $a(\sigma) = a(\sigma)$ entonces $\sigma \sim_a \sigma$, si $\sigma \sim_a \tau$ entonces $a(\sigma) = a(\tau)$ lo que claramente implica $\tau \sim_a \sigma$. Finalmente, si $\sigma \sim_a \tau$ y $\tau \sim_a \eta$ entonces $a(\sigma) = a(\tau)$ y $a(\tau) = a(\eta)$ por tanto $a(\sigma) = a(\eta)$, es decir $\sigma \sim_a \eta$. □

Notación 3.5.1. *Para* $\tau \in R-pr$ *sea* $[\tau]_a := \{\eta \in R-pr | \tau \sim_a \eta\}$*.*

Lema 3.5.1. *Sea* $\sigma, \tau \in R-pr$ *entonces,* $a(\sigma) = a(\tau)$ *si y sólo si* $\sigma C_1 = \tau C_1$*.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.1 es claro que si $\sigma C_1 = \tau C_1$ entonces $a(\sigma) = \omega_0^{\sigma C_1} = \omega_0^{\tau C_1} = a(\tau)$.
Recíprocamente, si $a(\sigma) = a(\tau)$ entonces por el Teorema 3.2.1 $\omega_0^{\sigma C_1} = \omega_0^{\tau C_1}$. Si $S \in R-simp$ entonces $\omega_0^{\sigma C_1}(\tau E(S)) = \omega_0^{\tau C_1}(\tau E(S)) = 0$ por lo que debe existir un monomorfismo $\tau E(S) \xrightarrow{f} \sigma C_1$, pues de no ser así existe $0 \neq x \in \tau E(S)$ y $x \in \cap\{Nuc(f) | f \in Hom_R(\tau E(S), \sigma C_1)\}$, como $S \leq_e E(S)$, existe $0 \neq r \in R$ tal que $rx \in S$ y entonces $S \leq \omega_0^{\tau C_1}(\tau E(S)) = 0$, que no es posible ya $S \in R-simp$. Sea $S' \in R-simp$ con $S' \ncong S$, si $S' \leq Im(f)$ implica $S' \hookrightarrow E(S)$ que es una contradicción, por tanto $Im(f) \cap \sigma E(S') = 0$. En resumen, para cada $S \in R-simp$ hay un monomorfismo $\tau E(S) \xrightarrow{f} \sigma E(S)$ y por tanto un monomorfismo $\tau C_1 \hookrightarrow \sigma C_1$, de forma simétrica $\sigma C_1 \hookrightarrow \tau C_1$ y por tanto $\tau C_1 = \sigma C_1$. □

Proposición 3.5.1. *1. Para* $\tau \in R-pr$*,* $[\tau]_a = [\alpha_{\tau C_1}^{C_1}, \omega_{\tau C_1}^{C_1}]$*.*

2. $[\mathbf{1}]_a = [\alpha_{C_1}^{C_1}, \mathbf{1}]$*.*

3. $[\mathbf{0}]_a = \{\mathbf{0}\}$*.*

Demostración. (1) $\sigma \in [\tau]_a$ si y sólo si $a(\sigma) = a(\tau)$ si y sólo si $\sigma C_1 = \tau C_1$ que por el Corolario 2.2.1 es equivalente a $\alpha_{\tau C_1}^{C_1} \preceq \sigma \preceq \omega_{\tau C_1}^{C_1}$.
(2) Es inmediato de (1) ya que $\omega_{C_1}^{C_1} = \mathbf{1}$.
(3) Como C_1 es un cogenerador de $R-Mod$ cada $M \in R-Mod$, sin pérdida de generalidad, $M \leq (C_1)^X$ para algún conjunto X entonces $\omega_0^{C_1} = 0$. También $\alpha_0^{C_1} = 0$. Entonces $[\mathbf{0}]_a = \{0\}$. □

Teorema 3.5.1. $[\mathbf{0}]_a \cup [\mathbf{1}]_a = R-pr$ *si y sólo si* R *es un V-anillo local.*

Demostración. Primero hay que notar que $[\mathbf{0}]_a \cup [\mathbf{1}]_a = \{\mathbf{0}\} \cup [\alpha^{C_1}_{C_1}, \mathbf{1}]$. Es necesario y suficiente con que $\alpha^{C_1}_{C_1}$ sea el único átomo esto es si y sólo si existe un único módulo S simple que además es inyectivo si y sólo si R es un V-anillo local. Si es R es un anillo local entonces existe un único ideal máximo I por lo que $R/I = S$ es el único simple, si R es V-anillo S es inyectivo, la otra implicación es clara. $\square$

Teorema 3.5.2. *Para un anillo R son equivalentes:*

1. $R = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ *donde* $S_i \in R-simp$ *para cada* $i \in \{1, ..., n\}$.

2. $[\mathbf{1}]_a = \{\mathbf{1}\}$

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Si $R = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ donde $S_i \in R-simp$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ entonces existe un epimorfismo $C_1 \xrightarrow{\rho} R$, a saber la correstricción de la identidad, por lo que $R = \rho(C_1) \leq \alpha^{C_1}_{C_1}(R)$ entonces $R = \alpha^{C_1}_{C_1}(R)$ lo que implica $\alpha^{C_1}_{C_1} = \mathbf{1}$ que finalmente $[\mathbf{1}]_a = [\alpha^{C_1}_{C_1}, \mathbf{1}] = \{\mathbf{1}\}$.
$(2 \Rightarrow 1)$. Si $[\mathbf{1}]_a = \{\mathbf{1}\}$ entonces $\alpha^{C_1}_{C_1} = \mathbf{1}$, en particular $\alpha^{C_1}_{C_1}(R) = R$, por lo que existe un epimorfismo $C_1^{(X)} \xrightarrow{f} R$ pero como R es finitamente generado este morfismo se restringe a $E(T_1) \oplus E(T_2) \oplus ... \oplus E(T_m)$ para $T_1, ..., T_m \in R-simp$. R es proyectivo, entonces $f|$ se escinde, por lo que R es un sumando directo de $E(T_1) \oplus E(T_2) \oplus ... \oplus E(T_m)$ lo que implica $E(T_1) \oplus E(T_2) \oplus ... \oplus E(T_n) = R$ para algún $n \leq m$. $\square$

Teorema 3.5.3. *Son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es un anillo semisimple.*

2. $[\sigma]_a = \{\sigma\}$ *para todo* $\sigma \in R-pr$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$. Si R es semisimple entonces $R = S_1 \oplus ... \oplus S_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ con S_i simple para cada $i \leq N$, además cada módulo es inyectivo, en particular los simples, entonces $C_1 = C_0$. Dado $\sigma \in R-pr$ y $\tau \in [\sigma]_a$ por el Lema 3.5.1 $\sigma C_1 = \tau C_1$, si $S' \in R-simp$ entonces $\sigma S' \leq \sigma C_1 = \tau C_1 = \tau C_0 = \tau \oplus_{S \in R-simp} S = \oplus_{S \in R-simp} \tau S$ por lo que $\sigma S' \leq \tau S'$ análogamente $\tau S' \leq \sigma S'$ para cada $S' \in R-simp$. Como cada $M \in R-Mod$ es semisimple entonces $\tau(M) = \tau(T_1 \oplus ... \oplus T_k) = \tau(T_1) \oplus ... \oplus \tau(T_k) = \sigma(T_1) \oplus ... \oplus (T_k) = \sigma(M)$ donde $T_1, ..., T_k \in R-simp$, esto es $\tau = \sigma$ y por lo tanto $[\sigma]_a = \{\sigma\}$.
$(2 \Rightarrow 1)$. Si $[\sigma]_a = \sigma$ para cada $\sigma \in R-pr$, en particular para $\mathbf{1}$, $[\mathbf{1}]_a = \mathbf{1}$. Por el Teorema 3.5.2 $R = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_n)$ donde $S_i \in R-simp$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Ahora, para $S \in R-simp$ $\alpha^{E(S)}_S(C_1) = \alpha^{E(S)}_S(\oplus_{S' \in R-simp} E(S')) = \oplus_{S' \in R-simp} \alpha^{E(S)}_S(E(S')) = S = \alpha^S_S(C_1)$ por el Lema 3.5.1 $a(\alpha^{E(S)}_S) = a(\alpha^S_S)$ lo

que implica $\alpha_S^{E(S)} = \alpha_S^S$, en particular $\alpha_S^{E(S)}(S) = \alpha_S^S(S)$. Así de la definición de $\alpha_S^{E(S)}$, existe un morfismo $f \in Hom_R(E(S), S)$ tal que $f(S) = S$ y por tanto $Nuc(f) = 0$ entonces $S \cong E(S)$ lo que implica $R = S_1 \oplus ... \oplus S_n$ donde $S_i \in R - simp$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. $\square$

3.6. Particiones inducidas por totalizadores.

Definición 3.6.1. *Si $\eta, \tau \in R - pr$, $\eta \sim_t \tau$ si $t(\eta) = t(\tau)$.*

De la misma forma que en la sección anterior.

Observación 3.6.1. *$\sim_t$ induce una relación de equivalencia en $R - pr$.*

Notación 3.6.1. *Para $\tau \in R - pr$ sea $[\tau]_t := \{\eta \in R - pr | \tau \sim_t \eta\}$.*

Lema 3.6.1. *Sea $\sigma, \tau \in R - pr$ entonces, $t(\sigma) = t(\tau)$ si y sólo si $\sigma R = \tau R$.*

Demostración. Si $t(\tau) = t(\sigma)$ entonces $0 = \tau R(R/\tau R) = \sigma R(R/\tau R)$ por lo que $\sigma R \preceq \tau R$. De forma análoga $\tau R \leq \sigma R$. Para la otra implicación, por el Teorema 3.2.1 $t(\sigma) = \bigvee\{\alpha_M^M | M \in R - Mod, t(R)M = 0\}$ entonces es clara la afirmación. $\square$

Proposición 3.6.1. 1. *Para $\tau \in R - pr$, $[\tau]_t = [\alpha_{\tau R}^R, \omega_{\tau R}^R]$.*

2. *$[\mathbf{1}]_t = \{\mathbf{1}\}$.*

3. *$[\mathbf{0}]_t = [\mathbf{0}, \omega_0^R]$.*

Demostración. (1) Por el lema anterior $\sigma \in [\tau]_t$ si y sólo si $\sigma R = \tau R$, en vista del Corolario 2.2.1 esto es equivalente a $\alpha_{\tau R}^R \preceq \sigma \preceq \omega_{\tau R}^R$.
(2) Para cada $M \in R - Mod$ existe un epimorfismo $R^{(X)} \twoheadrightarrow M$ lo que implica $\alpha_R^R = \mathbf{1}$ y por (1), $[\mathbf{1}]_t = \{\mathbf{1}\}$.
(3) Es consecuencia inmediata de (1). $\square$

Teorema 3.6.1. *Sea R un anillo. Entonces $[\mathbf{0}]_t \cup [\mathbf{1}]_t = R - pr$ si y sólo si ω_0^R es el único coátomo de $R - pr$ si y sólo si R es un anillo simple.*

Demostración. R es un anillo simple si y sólo si $0 \leq {}_RR$ es un ideal máximo si y sólo si ω_0^R es el único coátomo de $R - pr$ y por la Proposición 3.6.1 es equivalente a $R - pr = [\mathbf{0}, \omega_0^R] \cup \{\mathbf{1}\} = [\mathbf{0}]_t \cup [\mathbf{1}]_t$. $\square$

Teorema 3.6.2. *Son equivalentes para un anillo R:*

1. *R es un cogenerador de $R - Mod$.*

2. $[\boldsymbol{0}]_t = \{\boldsymbol{0}\}$.

Demostración. Para cada $M \in R-Mod$, $0 = \omega_0^R(M)$ si y sólo si existe un monomorfismo $M \hookrightarrow R^X$ para algún conjunto X. Es decir, $\omega_0^R = \mathbf{0}$ si y sólo si R es un cogenerador de $R-Mod$. $\square$

Teorema 3.6.3. *Para un anillo R son equivalentes:*

1. *R es un anillo semisimple.*

2. $[\sigma]_t = \{\sigma\}$ *para cada* $\sigma \in R-pr$.

Demostración. Por el Teorema 2.3.3, R es semisimple si y sólo si $\alpha_I^R = \omega_I^R$ para cada ideal I bilateral de R ($I \leq_{t.i}\ {}_R R_R$) si y sólo si, por el Corolario 2.2.1, $I = \sigma R$ para algún $\sigma \in R-pr$. Y utilizando que $[\sigma]_t = [\alpha_{\sigma R}^R, \omega_{\sigma R}^R]$, se siguen inmediatamente ambas implicaciones. $\square$

Apéndice A

Módulos

Definición A.0.1. *Sea $\mathscr{U}$ una clase de R-módulos. Para cada $K \in R-Mod$ se definen:*

1. $Tra_{\mathscr{U}}(K) := \sum\{Im(f)|f \in Hom_R(M,K),\ M \in \mathscr{U}\}$.
2. $Re_{\mathscr{U}}(K) := \cap\{Nuc(f)|f \in Hom_R(K,M),\ M \in \mathscr{U}\}$.

Proposición A.0.1. *$Tra_{\mathscr{U}}(K)$ y $Re_{\mathscr{U}}(K)$ son submódulos de K. Son llamados, la traza de $\mathscr{U}$ en K y el rechazo de $\mathscr{U}$ en K, respectivamente. Para cada $h \in Hom_R(K,L), K, L \in R.Mod$, $h(Tra_{\mathscr{U}}(K)) \leq Tra_{\mathscr{U}}(L)$ y $h(Re_{\mathscr{U}}(K)) \leq Re_{\mathscr{U}}(L)$.*

En el caso particular en que $\mathscr{U} = \{M\}$ se escribe simplemente Tra_M y Re_M según corresponda.

Definición A.0.2. *Un módulo M es llamado:*

1. *Generador de $R-Mod$ (Generador), si $Tra_M(K) = K$ para todo $K \in R-Mod$.*
2. *Cogenerador de $R-Mod$ (Cogenerador), si $Re_M(K) = 0$ para todo $K \in R-Mod$.*

La definición anterior puede ser generalizada a cualquier clase $\mathscr{C}$ de R-módulos.

Teorema A.0.1. *1. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) *M es un generador.*

b) *Toda suma directa de copias de M es un generador.*

c) *Una suma directa de copias de M es un generador.*

d) *Todo módulo K es cociente de una suma directa de copias de M.*

2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a) *M en un cogenerador.*

   b) *Toda producto de copias de M es un cogenerador.*

   c) *Un producto de copias de M es un cogenerador.*

   d) *Todo módulo K se sumerge en un producto de copias de M.*

Un hecho importante y muy útil es:

Proposición A.0.2. *Dado $\mathscr{U}$ una clase de R-módulos y K un módulo, entonces:*

1. *$Tra_{\mathscr{U}}(K)$ es el mayor submódulo de K generado por la clase $\mathscr{U}$.*

2. *$Re_{\mathscr{U}}(K)$ es el menor de los submódulos L de K tal que K/L es cogenerado por la clase $\mathscr{U}$.*

En consecuencia;

Corolario A.0.1. *Dado $\mathscr{U}$ una clase de R-módulos y K un módulo, entonces:*

1. *$\mathscr{U}$ genera a K si y sólo si $Tra_{\mathscr{U}}(K) = K$.*

2. *$\mathscr{U}$ cogenera a K si y sólo si $Re_{\mathscr{U}}(K) = 0$.*

Corolario A.0.2. *Dado $\mathscr{U}$ una clase de R-módulos, K un módulo y $L \leq K$, entonces:*

1. *$Tra_{\mathscr{U}}(K) = L$ si y sólo si $Tra_{\mathscr{U}}(K) \leq L$ y $Tra_{\mathscr{U}}(L) = L$.*

2. *$Re_{\mathscr{U}}(K) = L$ si y sólo si $L \leq Re_{\mathscr{U}}(K)$ y $Re_{\mathscr{U}}(K/L) = 0$.*

En particular del Corolario A.0.2 $Tra_{\mathscr{U}}(Tra_{\mathscr{U}}(K)) = Tra_{\mathscr{U}}(K)$ y $Re_{\mathscr{U}}(K/Re_{\mathscr{U}}(K)) = 0$.

A.1. V-anillos

Teorema A.1.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

1. *Todo módulo simple es inyectivo.*

2. *Para cada módulo M, $Rad(M) = 0$.*

3. *Para módulo M cíclico, $Rad(M) = 0$.*

4. *Todo ideal izquierdo de R es una intersección de ideales izquierdos máximos de R.*

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$): Sea M un módulo, si $0 \neq x \in M$, considere $\mathcal{A} = \{N \leq M | x \notin N\} \neq \emptyset$, ordenado parcialmente por la contención, por el lema de Zorn $\mathcal{A}$ tiene elementos máximos, sea Y un máximo con la propiedad. $D = \cap\{L \leq M | Y < L\}$ entonces $x \in D$, en otro caso existe $L \leq M$ tal que $x \notin L > Y$ lo que no puede ser por la maximalidad de Y, por lo tanto $0 \neq D/Y$ y además es simple, así el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D/Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "Id"] & M/Y \arrow[dl] \\ & D/Y & \end{tikzcd}$$

Además al morfismo $M/Y \longrightarrow D/Y$ es suprayectivo, entonces $M/Y = D/Y \oplus K/Y$ para algún $K \leq M$ y $x \notin K$, por tanto $M/Y = D/Y$, es decir Y es máximo, con lo que $x \notin Rad(M)$ para cada $x \neq 0$, esto es $Rad(M) = 0$.
($2 \Rightarrow 3$): Es claro.
($3 \Rightarrow 4$): Dado $I \leq R$ ideal izquierdo, $Rad(R/I) = \cap\{J + I | I \leq J, J$ máximo de $R\}$, si $x \in \cap J$ entonces $Rad(R/I) \leq Rad(R(x + I)) = 0$ por lo que $I = \cap J$.
($4 \Rightarrow 1$): Sea S un módulo simple e I un ideal de R. Si $0 \neq f \in Hom_R(I, S)$ y $J = Nuc(f)$ que por (4), $J = \cap J_i$ para algunos J_i ideales máximos de R, como $f \neq 0$ existe J_0 máximo tal que $J \leq J_0$ pero $I \nleq J_0$, al ser I/J simple, ya que f es no cero y S es simple $I/Nuc(f) \cong Im(f) = S$, $J_0/J_0 \cap I = J$ o $J_0/J_0 \cap I = I/J$, pero el primer caso no se puede dar ya que $I \nleq J_0$, por lo que $J_0 \cap I = J = Nuc(f)$. Entonces $R/J_0 = (J_0 + I)/J_0 \cong_{\bar{h}^{-1}} I/(J_0 \cap I) = I/J \cong_{\bar{f}} S$, donde $\bar{h}$ y $\bar{f}$ son los isomorfismos canónicos dados por el segundo teorema de isomorfismo y el inducido por f, respectivamente. Definido $\varphi = \bar{f}\,\bar{h}^{-1}\rho$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & R \arrow[r, two heads, "\rho"] & (J_0 + I)/J_0 \arrow[r, "\bar{h}^{-1}"] & I/J \arrow[dlll, "\bar{f}"] \\ & S & & & \end{tikzcd}$$

En efecto, sea $x \in I$, $\varphi(x) = \bar{f}\,\bar{h}^{-1}\rho(x) = \bar{f}\,\bar{h}^{-1}(x + J_0) = \bar{f}\,\bar{h}^{-1}(h(y) + J_0) = \bar{f}(h^{-1}(h(y)) + J_0 \cap I) = \bar{f}(x + J) = f(x)$. Finalmente, por el criterio de Baer

S es inyectivo. $\square$

Definición A.1.1. *Se dice que un anillo R es un V-anillo si satisface alguna de las condiciones del teorema anterior.*

Se sigue del teorema (A.1.1) y de la definición anterior:

Corolario A.1.1. *R es un V-anillo si y sólo si C_0 es un cogenerador de $R-Mod$.*

A.2. Módulos singulares.

Proposición A.2.1.

1. *Dados $L, M, N \in R-Mod$ con $L \leq M \leq N$ entonces $L \leq_e N$ si y sólo si $L \leq_e M$ y $M \leq_e N$.*

2. *Dados $M_1, M_2, N_1, N_2 \in R-Mod$ con $M_1 \leq_e N_1$ y $M_2 \leq_e N_2$ entonces $M_1 \cap M_2 \leq_e N_1 \cap N_2$.*

3. *Dado N un submódulo de un módulo M y $f \in Hom_R(L, M)$. Si $N \leq_e M$ entonces $f^{-1}(N) \leq_e L$.*

4. *Para $\{M_i\}_I, \{N_i\}_I$ dos familias de submódulos de un módulo M. Si $\sum_I N_i = \oplus_I N_i$, además $N_i \leq_e M_i$ entonces $\sum_I M_i = \oplus_I M_i$ y $\oplus_I N_i \leq_e \oplus_I M_i$.*

Para un pseudocomplemento N de un submódulo en M se satisface la siguiente:

Proposición A.2.2. *Si N es un pseudocomplemento de L en M entonces:*

1. *$N \oplus L \leq_e M$.*

2. *$(N \oplus L)/N \leq_e M/N$.*

Utilizando el Lema de Zorn:

Corolario A.2.1. *Cualquier submódulo de un módulo M es un sumando directo un submódulo esencial de M.*

Y utilizando (A.2.2):

Corolario A.2.2. *Un módulo M es semisimple si y sólo si no tiene submódulos esenciales propios.*

Lema A.2.1. *Sea $M \in R-Mod$. El conjunto $Z(M) = \{x \in M | (x : 0) \leq_e {}_R R\}$ es un submódulo de M.*

Demostración. R es esencial en si mismo, $0 \in Z(M)$. Si $x, y \in Z(M)$ entonces $(x:0)$ y $(y:0)$ son esenciales en R, por tanto $(x:0) \cap (y:0)$ también lo es y $(x \pm y)(x:0) \cap (y:0) = 0$ entonces $x \pm y \in Z(M)$. Para cualquier $t \in R$ el ideal $I = \{r \in R | rt \in (x:0)\}$ es esencial por la proposición (A.2.1) e $Itx \leq (x:0)x = 0$ por lo que $tx \in Z(M)$. □

Definición A.2.1. *El submódulo descrito en (A.2.1) es llamado el submódulo singular de M. Un módulo M es llamado singular si $Z(M) = M$, no singular si $Z(M) = 0$*

Proposición A.2.3. *Un módulo M es singular si y sólo si $M \cong K/L$ para $L \leq K \in R - Mod$ y $L \leq_e K$.*

Demostración. Primero, supóngase que M es singular y $M \cong F/K$ para algún módulo libre F y $K \leq F$. Sea $\{x_j\}_J$ una base para F, para cada $j \in J$ hay $I_j \leq_e R$ tal que $I_j x_j \leq K$ ya que F/K es singular, por la proposición (A.2.1), $\oplus_J I_j x_j \leq_e \oplus R x_j = F$ por lo que $K \leq_e F$.
Recíprocamente, $M \cong K/L$ con $L \leq_e K$. Dado cualquier $k \in K$ el ideal $I = \{r \in R | kr \in L\}$ es esencial en R por (A.2.1) y $I(k + L) = 0$, entonces K/L es singular y en consecuencia M lo es. □

Proposición A.2.4.
1. *Todos los submódulos, cocientes y sumas (directas o no) de módulos singulares son singulares.*
2. *Todos los submódulos, productos y extensiones esenciales de módulos no singulares son no singulares.*
3. *Dados $N \leq M \in R - Mod$. Si N y M/N son no singulares entonces M es no singular.*

Finalmente:

Proposición A.2.5. *Dado R un anillo no singular;*

1. *Para todo $M \in R - Mod$, $M/Z(M)$ es no singular.*
2. *Si N es un submódulo de M tal que N y M/N son singulares entonces M es singular.*
3. *Todas las extensiones esenciales de módulos singulares son singulares.*

Demostración. (1). $Z(M/Z(M)) = N/Z(M)$ para algún $N \leq M$ tal que $Z(M) \leq N$. $Z(M) \leq_e N$. En efecto, si $L \leq M$ tal que $Z(M) \cap L = 0$ entonces L es no singular y además se sumerge en $N/Z(M)$, que es singular, por lo que L es singular y por tanto $L = 0$. Para cualquier $x \in N$, sea

$I = (x : 0)$. Si J es un ideal de R para el cual $J \cap I = 0$ entonces $J \cong Jx$. Como $Z(Jx) = Jx \cap Z(M) \leq_e Jx \cap N = Jx$ lo que implica $Z(J) \leq J$. Pero $Z(J) = 0$ ya que R es no singular, así $J = 0$. Entonces $I \leq_e R$ y por tanto $x \in Z(M)$, con lo cual $Z(M/Z(M)) = 0$.
(2). Como N es singular entonces $N \leq Z(M)$ así hay un cociente de M/N hacia $M/Z(M)$, con lo que $M/Z(M)$ es singular. Por (1) $M/Z(M)$ es no singular entonces $M/Z(M) = 0$, por lo tanto $Z(M) = M$.
(3). Dado cualquier $N \leq_e M \in R - Mod$ con N singular. Por (A.2.3) M/N es singular, finalmente utilizando (2), M es singular. $\square$

Apéndice B

Retículas.

Dado $(L, \leq)$ un orden parcial y $\emptyset \neq X \subseteq L$ una cota superior para X es un elemento $l \in L$ tal que $x \leq s$ para cada $x \in X$. A un elemento l tal que para cualquier $l' \in L$ con la propiedad de $x \leq l'$ para cada $x \in X$ implica $l \leq l'$, es llamado la menor de cota superior de X, de existir tal elemento es único y es llamado supremo del conjunto, es denotado $\vee X$ o $sup(X)$. Una cota inferior de X es un elemento $m \in L$ tal que $m \leq x$ para cada $x \in X$. A un elemento m tal que para cualquier $m' \in L$ con la propiedad de $m' \leq x$ para cada $x \in X$ implica $m' \leq m$, es llamado la mayor de cota inferior, de existir tal elemento es único y es llamado ínfimo del conjunto, es denotado $\wedge X$ o $inf(X)$.

Definición B.0.1. *Una retícula es un orden parcial* $(L, \leq)$ *tal que para cada* $x, y \in L$ *existen* $x \vee y$ *y* $x \wedge y$*. Una retícula es completa, si para cada* $X \subseteq L$ *existe* $\vee X$ *y* $\wedge X$*.*

Observación B.0.1. *Si* $(L, \leq)$ *es una retícula completa entonces existen* $0 := \wedge L$ *y* $1 := \vee L$ *de hecho la otra implicación es también válida.*

Una subretícula de una retícula $(L, \leq)$ es un orden parcial $(L', \leq')$, donde $L' \subseteq L$ y $\leq'$ es la restricción de $\leq$ a L', que es una retícula es sí mismo. Si $(L, \leq)$ es una retícula, dados $a, b \in L$ con $a \leq b$ entonces $[a, b] := \{x \in L | a \leq x \leq b\}$ es una subretícula de L, en general cuando se hable de una retícula se omite el orden y sólo se menciona el conjunto a menos que haya necesidad de especificar.

Definición B.0.2. *Una retícula* L *es modular si para cada* $x, y, z \in L$ *tal que* $y \leq x$ *entonces* $x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z)$*.*

Sea L una retícula completa, si $a \in L$ un elemento x es un complemento para a si $x \vee a = 1$ y $x \wedge a = 0$.

Definición B.0.3. *Una retícula completa es llamado complementada si cada elemento tiene complemento*

Proposición B.0.1. *Para una retícula L las siguintes condiciones son equivalentes:*

1. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *para cada* $a, b, c \in L$.

2. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *para cada* $a, b, c \in L$.

3. $b \wedge (a \vee c) \leq c \vee (a \wedge b)$ *para cada* $a, b, c \in L$.

Una retícula que satisfaga alguna de las condiciones anteriores es llamada retícula distributiva.

Proposición B.0.2. *En una retícula distributiva, de existir, los complementos son únicos.*

Definición B.0.4. *Un álgebra de Bool es una retícula* $(L, \leq)$, *con* 0, 1, *complementada y distributiva.*

Un átomo en un álgebra de Boole es un elemento $a \neq 0$ tal que si $b < a$ entonces $b = 0$. Un coátomo en un álgebra de Boole es un elemento $a \neq 1$ tal que si $a < b$ entonces $b = 1$.

Definición B.0.5. *Un álgebra de Boole* $(L, \leq)$ *es atómica si para cada* $a \in L$ *existe* $x \in L$ *átomo tal que* $x \leq a$, *es coatómica si para cada* $a \in L$ *existe* $x \in L$ *coátomo tal que* $a \leq x$.

Es posible extender los conceptos anteriores para grandes retículas, es decir cuando L no necesariamente es un conjunto.

Bibliografía

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Springer-Verlag New York Inc., 1992.

[2] L. Bican, T. Kepka, and P. Nemec. *Rings, Modules and Preradicals*. Marcel Dekker New York, 1982.

[3] G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society Colloquium publications Vol. XXV, 1973.

[4] J. S. Golan. *Linear topologies on a ring: an overview*. Longman Scientific & Technical, 1987.

[5] K. Goodearl and R. Warfield. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge Press, 1989.

[6] F. Kasch. *Modules and Rings. A translation of Moduln und Ringe*. Academic Press London LTD, 1982.

[7] G. O. Michler and O. E. Villamayor. On rings whose simple modules are injective. *Journal of Algebra*, 1973.

[8] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso, and C. Signoret. The lattice structure of preradicals. *Communications in Algebra*, 2002.

[9] F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, R. Fernández-Alonso, and C. Signoret. The lattice structure of preradicals ii: Partitions. *Journal of Algebra and its aplications*, 2002.

[10] B. Stenström. *Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1975.