UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

COMPACTACIONES EQUIVARIANTES LIBRES

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:

ERNESTO AURELIO VELASCO VALADEZ

DRA. NATELLA ANTONYAN

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÉXICO, D. F. 29 DE JUNIO DE 2015

Agradecimientos

A mi familia, amigos, compañeros, profesores
y cada uno de los que hicieron esto posible,
mis agradecimientos para cada uno no podría equiparar
todo lo que me han dado y ayudado a lograr, aún así:
muchas gracias a todos.

Índice general

Introducción

Un *grupo topológico de transformaciones* es una terna (G, X, θ), donde G es un grupo, X es un espacio topológico (en este caso se dice que X es un G-*espacio*) y θ es una acción continua de $G \times X$ en X. Estos formalizan el concepto de simetría en los espacios topológicos.

Uno de los enfoques existentes en la teoría de grupos de transformaciones consiste en considerar un resultado que se satisface para la categoría de espacios topológicos y determinar si su análogo se cumple, dado un grupo G, en los espacios en los que actúa. Bajo este planteamiento se encuentra el problema de la búsqueda de compactaciones equivariantes.

En este caso una compactación equivariante para X es un espacio compacto en el que X se encaja densamente con las mismas "simetrías" que X.

En 1960 Palais [18] demostró que cada G-espacio de Tychonoff tiene una G-compactación si G es un grupo compacto de Lie. Este resultado fue generalizado por de Vries en 1978 en [8] y [9] para el caso en el que G es un grupo localmente compacto. En 1988, en [13], Megrelishvili prueba que no todo G-espacio de Tychonoff tiene una compactación equivariante, cuando el grupo actuante no es localmente compacto.

En este trabajo se recopilan algunos resultados existentes al respecto, centrando nuestro interés en el caso de las compactaciones equivariantes libres y G-espacios universales.

En el primer capítulo se proporciona un listado de conceptos, resultados básicos de topología, así como la notación que se usará durante el texto. Posteriormente se incluye una breve introducción a la teoría de los grupos de transformación, ciertas propiedades que se estudian en ellos y algunos G-espacios de particular interés.

En el capítulo tres se describe una caracterización de los G-espacios que poseen compactación equivariante usando familias de funciones que separan puntos de cerrados para después detallar el estudio de las compactaciones equivariantes, cuando se preservan propiedades adicionales de la acción del grupo.

Se finaliza el último capítulo con resultados correspondientes a las compactaciones maximales equivariantes así como algunos ejemplos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establecen las definiciones y resultados básicos que se usarán a lo largo del presente trabajo, todos estos son en su mayoría bien conocidos y se puede profundizar sobre ellos en [10], [19] y [17].

A los espacios topológicos los llamaremos en general simplemente espacios.

1.1. Espacios topológicos

Las siguientes definiciones y resultados tratan sobre espacios topológicos y sus propiedades, recordando también el conocido teorema de Borsuk-Ulam.

Definición 1.1.1. *Sean X y Y espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ continua se llama perfecta si es cerrada y $f^{-1}(y)$ es compacto para cada $y \in Y$.*

La demostración del siguiente teorema puede verse en [10, Teorema 3.7.11].

Teorema 1.1.2. *Sea $\{f_s : X \to Y_s \mid s \in S\}$ una familia de funciones continuas. Si existe $s_0 \in S$ tal que f_{s_0} es perfecta y Y_s es Hausdorff para todo $s \neq s_0$, entonces la función producto diagonal $\Delta f_s : X \to \prod Y_s$, dada por $f(x) = (f_s(x))_{s \in S}$, es una función perfecta.*

Definición 1.1.3. *Sean V y W espacios normados. Considere $A \subset V$ y $B \subset W$ tales que, si $a \in A$ y $b \in B$ entonces, $-a \in A$ y $-b \in B$. Una función continua $f : A \to B$ es impar, si para cada $a \in A$, $f(-a) = -f(a)$.*

Teorema 1.1.4 (Borsuk-Ulam). *No existe una función impar $f : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^n$ para $n \geq 0$.*

En diversas construcciones del texto se usarán además dos clases de espacios topológicos. Estas son los siguientes:

Definición 1.1.5. *Sea X un espacio topológico. El cono de X, el cual denotaremos por $\operatorname{Cono}(X)$, es el espacio cociente $X \times [0,1]/\sim$, donde la relación de equivalencia $\sim$ es la definida por $(x,t) \sim (y,s)$ si y solo si $(x,t) = (y,s)$ o $s = t = 0$.*

A las clases de equivalencia las denotaremos por $[x,t]$ y nos referiremos a la clase $[x,0]$ como θ: el vértice del cono. En algunos casos y para facilitar la notación escribiremos la clase $[x,t]$ en el cono simplemente como tx.

Si $p : X \times I \to \operatorname{Cono}(X)$ es la función cociente y X es compacto, se observa que la familia $\{p(X \times [0,t)) \mid 0 < t \leq 1\}$ es una base local de abiertos para $\theta \in \operatorname{Cono}(X)$.

Esto sucede ya que si $\theta \in U \subset \operatorname{Cono}(X)$ con U abierto, entonces $p^{-1}(U)$ es abierto y es claro que $X \times \{0\} \subset p^{-1}(U)$ ya que $\theta \in U$. Ahora, como $X \times \{0\}$ es compacto, existe $[0,t) \subset I$ tal que

$$X \times \{0\} \subset X \times [0,t) \subset p^{-1}(U).$$

Luego $p(X \times [0,t)) \subset p(p^{-1}(U)) = U$ y además es claro que $p^{-1}(p(X \times [0,t)) = X \times [0,t)$. Es decir que $p(X \times [0,t))$ es abierto en $\mathrm{s}\operatorname{Cono}(X)$, quedando justificada la observación.

Si además X es un espacio compacto y metrizable, su cono también lo es, como puede verse en [11, Capítulo VI, Lema 1.1].

La segunda clase de interés se obtiene del producto de conos de la siguiente manera.

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio topológico y K un subconjunto de índices tal que $|K| = \kappa$. Definimos el κ-join de X, $J_\kappa(X)$, como el subespacio del producto $\operatorname{Cono}(X)^\kappa$ tal que*

$$J_\kappa(X) = \left\{ (t_k x_k)_{k \in K} \in \operatorname{Cono}(X)^\kappa \,\middle|\, t_k = 0 \text{ para casi toda } k \in K, \sum_{k \in K} t_k = 1 \right\}.$$

Es decir que $t_k x_k = \theta$, *con* θ *el vértice de* Cono(X), *salvo en número finito de índices* $k \in K$.

La demostración de la siguiente proposición puede verse en [12, Ejemplo 4.4.2].

Proposición 1.1.7. *Sea* X *el espacio discreto de dos puntos. Entonces, para cada* $k \in \mathbb{N}$, $J_k(X)$ *es homeomorfo a* $\mathbb{S}^{k-1}$.

1.2. Compactaciones

Los siguientes teoremas se relacionan con las compactaciones para espacios topológicos. Todos los espacios compactos considerados son a su vez de Hausdorff.

Definición 1.2.1. *Sea* X *un espacio topológico. Una compactación para* X *es una pareja* (K, j), *donde* K *es un espacio compacto y* j *es un encaje denso. Al conjunto* $K \setminus j(X)$ *se le llama residuo de la compactación.*

El siguiente teorema es bien conocido, puede verse en [10, Teorema 3.5.11].

Teorema 1.2.2. *Sea* X *un espacio topológico localmente compacto pero no compacto. Entonces existe una única compactación, salvo homeomorfismo, para* X *tal que su residuo es un punto.*

Definición 1.2.3. *Sea* X *un espacio topológico. Consideremos una familia* $\{Y_j\}_{j\in J}$ *de espacios y una familia de funciones continuas* $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j \mid j \in J\}$. *Decimos que la familia* $\mathcal{F}$ *separa puntos de* X *si para cualesquiera* $x, y \in X$ *con* $x \neq y$, *existe una función* $f_j \in F$ *tal que* $f_j(x) \neq f_j(y)$. *Análogamente, se dice que* $\mathcal{F}$ *separa puntos de cerrados de* X, *si para cualquier cerrado* $B \subset X$ *y cada* $x \in X \setminus B$, *existe* $f_j \in F$ *tal que* $f_j(x) \notin \overline{f_j(B)}$.

El siguiente teorema es fundamental en este texto y su uso en adelante será constante, pude verse su prueba en [10, Teorema 2.3.20].

Teorema 1.2.4 (Encaje de Tychonoff)**.** *Sea* X *un espacio* T_0 *y* $\mathcal{F} = \{f_j : X \to Y_j \mid j \in J\}$ *una familia de funciones que separa puntos de cerrados. Entonces la función producto diagonal* $\Delta\mathcal{F} : X \to \prod_{j\in J} Y_j$, *dada por* $\Delta\mathcal{F}(x) = (f_j(x))_{j\in J}$ *es un encaje.*

1.3. Espacios de funciones

Para terminar este capítulo, se presentan algunos de los resultados sobre las distintas topologías que pueden darse a los siguientes conjuntos.

Definición 1.3.1. *Sean X, Y espacios. Se define*

$$\mathcal{C}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua}\}.$$

Si además Y es un espacio metrizable se define

$$\mathcal{C}^*(X,Y) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f \text{ es acotada}\}.$$

En el caso en el que $Y = \mathbb{R}$ se denotará $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ por $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}^*(X,Y)$ como $\mathcal{C}^*(X)$.

Definición 1.3.2. *Sean (X,τ_X), (Y,τ_Y) dos espacios. Dados $U \subset Y$ abierto y $x \in X$ definimos el siguiente subconjunto de $\mathcal{C}(X,Y)$:*

$$\langle x, U\rangle = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(x) \in U\}.$$

Entonces

$$\Gamma = \{\langle x, U\rangle \mid x \in X, U \in \tau_Y\}$$

es subbase para una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$, a la cual se le llama **topología punto-abierta**. *El espacio $\mathcal{C}(X,Y)$ equipado con dicha topología se denota $\mathcal{C}_p(X,Y)$.*

Definición 1.3.3. *Sean (X,τ_X), (Y,τ_Y) dos espacios. Dados $U \subset Y$ abierto y $K \subset X$ compacto se define el siguiente conjunto:*

$$\langle K, U\rangle = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset U\}.$$

Entonces

$$\Lambda = \{\langle K, U\rangle \mid U \in \tau_Y, K \subset X \text{ es compacto}\}$$

es subbase para una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$, la cual se denomina **topología compacto-abierta**. *El espacio $\mathcal{C}(X,Y)$ equipado con dicha topología se denota $\mathcal{C}_c(X,Y)$.*

Definición 1.3.4. *Sean X un espacio y (Y, d) un espacio métrico. Definimos la métrica $d_\infty : \mathcal{C}^*(X, Y) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera*

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \{d\big(f(x), g(x)\big)\}.$$

Entonces d_∞ genera una topología en $\mathcal{C}^*(X, Y)$, a la que llamaremos **topología de convergencia uniforme***; en esta situación se denotará al espacio como $\mathcal{C}^*_u(X, Y)$.*

La demostración del siguiente teorema puede ser encontrada en [17, Teorema 46.7].

Teorema 1.3.5. *Sean X un espacio y (Y, d) un espacio métrico. Denotemos por τ_p, τ_c y τ_u las topologías punto-abierta, compacto-abierta y de convergencia uniforme en $\mathcal{C}(X, Y)$, entonces se cumple que*

$$\tau_p \subset \tau_c \subset \tau_u.$$

Si además X es compacto, $\tau_c = \tau_u$.

Definición 1.3.6. *Sean X un espacio de Hausdorff y (Y, d) un espacio métrico. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ de funciones continuas es* **equicontinua** *en $x_0 \in X$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U, de x_0, tal que $d\big(f(y), f(x_0)\big) < \varepsilon$ para cualesquiera $y \in U$ y $f \in \mathcal{F}$. Si la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en cada punto de X, se dice simplemente que $\mathcal{F}$ es* **equicontinua***.*

El siguiente lema será muy importante en lo posterior. La demostración puede encontrarse en [19, Teorema 43.14].

Lema 1.3.7. *Sean X un espacio y (Y, d) un espacio métrico. Si una familia de funciones $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ es equicontinua entonces la topología compacto abierta y punto abierta coinciden en $\mathcal{F}$.*

La demostración del siguiente puede consultarse en [19, Teorema 43.15]

Teorema 1.3.8 (Arzela-Ascoli)**.** *Sea (Y, d) un espacio métrico y X un espacio. Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}_c(X, Y)$ tiene cerradura compacta si*

1. *$\mathcal{F}$ es equicontinua y*

2. *el conjunto $\mathcal{F}(x) = \{f(x) \in Y \mid f \in \mathcal{F}\}$ tiene cerradura compacta para cada $x \in X$.*

Capítulo 2

Acciones de grupos

En lo posterior se considerarán únicamente espacios de Tychonoff.

2.1. Grupos topológicos

Definición 2.1.1. *Sea G un grupo equipado con una topología. Diremos que G es un* ***grupo topológico*** *si las operaciones de* ***multiplicación*** $\mu : G \times G \to G,\ \mu(g,h) = g \cdot h$ *e,* ***inversión*** $\iota : G \to G,\ \iota(g) = g^{-1}$ *son continuas.*

Es sencillo ver que la continuidad de las operaciones μ e ι equivale a la continuidad de la función **división** $\delta : G \times G \to G$ dada por $\delta(g,h) = gh^{-1}$.

En adelante, para $A, B \subset G$ denotaremos a $\mu(A \times B)$ como AB y $\iota(A)$ con A^{-1}. En el caso en que $A = B$, se denotará AA como A^2. Si sucede que $A = A^{-1}$ diremos que A es un conjunto **simétrico**.

También se observa que $\iota : G \to G$ es un homeomorfismo, así como las funciones $\mu_g,\ {}_g\mu : G \to G$ dadas por $\mu_g(h) = gh$ y ${}_g\mu(h) = hg$. De esto último se tiene que para cualesquiera $U, H \subset G$, siendo alguno de ellos abierto, los conjuntos UH y HU son abiertos.

Las vecindades de la identidad del grupo, $e \in G$, tienen propiedades interesantes que se pueden inferir de la continuidad de las funciones multiplicación e inversión. Dada U una vecindad de $e \in G$, como $e = \mu(e,e)$, entonces existe una vecindad V

de e tal que $\mu(V \times V) = V^2 \subset U$. Además, dado que la inversión es homeomorfismo y $e \in U^{-1}$ este último conjunto también es una vecindad de la identidad. Luego $V = U \cap U^{-1}$ cumple que $V = V^{-1}$, ya que $V^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U = V$ y $V \subset U$. Es decir, para cada vecindad U del elemento neutro del grupo, existe una vecindad simétrica V tal que $e \in V$ y $V \subset U$.

La estructura algebraica de un grupo topológico nos permite trabajar con funciones uniformemente continuas como ocurre en el caso de $\mathbb{R}$. La definición formal es la siguiente.

Definición 2.1.2. *Sean G un grupo topológico y $f : G \to \mathbb{R}$. Entonces*

1. *f es llamada* **uniformemente continua por la derecha** *si, para cada $\varepsilon > 0$ existe W, vecindad de $e \in G$, tal que $ab^{-1} \in W$ implica que*

$$|f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

2. *f es llamada* **uniformemente continua por la izquierda** *si, para cada $\varepsilon > 0$ existe W, vecindad de $e \in G$, tal que $a^{-1}b \in W$ implica que*

$$|f(a) - f(b)| < \varepsilon.$$

Si una función $f : G \to \mathbb{R}$ es tanto un uniformemente continua por la derecha como por la izquierda, diremos simplemente que f es **uniformemente continua**.

Un caso en el que se puede hablar simplemente de funciones uniformemente continuas es en el que G es un grupo abeliano, por ejemplo: $\mathbb{R}$.

Para cada una de las definiciones anteriores se tiene una equivalencia, que usaremos continuamente durante el texto. A continuación se presentan esas equivalencias.

Lema 2.1.3. *Sea G un grupo topológico. Para una función $f : G \to \mathbb{R}$ son equivalentes:*

i) *f es uniformemente continua por la derecha.*

ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $W \subset G$, vecindad de $e \in G$, tal que $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$ si $s \in W$ y $t \in G$.*

De manera similar, f es uniformemente continua por la izquierda si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $W \subset G$, vecindad de $e \in G$, tal que $|f(ts) - f(t)| < \varepsilon$ si $s \in W$ y $t \in G$.

Demostración. La primera implicación es clara ya que si f es uniformemente continua por la derecha, para cada $\varepsilon > 0$ existe V vecindad de e tal que $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ si $ab^{-1} \in V$. Para esta misma vecindad V y para cada $t \in G$ se cumple que $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$ si $st(t^{-1}) = s \in V$; lo cual prueba la primera parte.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe W, vecindad simétrica de e, tal que $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$ para todo $t \in G$ y $s \in W$. Sean $a, b \in G$ tales que $ab^{-1} \in W$, por lo cual, para cualquier $t \in G$ se tiene que $|f(ab^{-1}t) - f(t)| < \varepsilon$. En particular para $t = b$, se tiene que $|f(a) - f(b)| < \varepsilon$ si $ab^{-1} \in W$, lo cual termina demostración.

La prueba en el caso en que f es uniformemente continua por la izquierda es completamente análoga al primer caso. □

Definimos a partir de las definiciones de continuidad uniforme, las familias de funciones:

$$\mathcal{RUC}(G) = \{f \in \mathcal{C}(G) \mid f \text{ es uniformemente continua por la derecha}\},$$

$$\mathcal{LUC}(G) = \{f \in \mathcal{C}(G) \mid f \text{ es uniformemente continua por la izquierda}\},$$

$$\mathcal{RUC}^*(G) = \{f \in \mathcal{RUC}(G) \mid f \text{ es acotada}\} \text{ y}$$

$$\mathcal{LUC}^*(G) = \{f \in \mathcal{LUC}(G) \mid f \text{ es acotada}\}.$$

Definición 2.1.4. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{F}$ un subfamilia de funciones continuas de $\mathcal{C}(G)$. Decimos que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua por la derecha en $t \in G$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe W vecindad de $e \in G$, tal que $s \in W$ y $f \in \mathcal{F}$ implica $|f(st) - f(t)| < \varepsilon$.*

Si $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua por la derecha en cada $t \in G$, decimos que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua en G.

2.2. Acciones

Definición 2.2.1. *Sean G un grupo topológico y X un espacio. Una **acción** de G en X es una función continua $\theta : G \times X \to X$ que satisface lo siguiente:*

1) $\theta(e, x) = x$ para cada $x \in X$.

2) $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta((gh), x)$ para cualesquiera $g, h \in G$ y cada $x \in X$.

*Si $\theta(g, x) = x$ para cada $g \in G$ y $x \in X$ entonces diremos que la acción es **trivial**.*

De aquí en adelante, cuando no haya riesgo de confusión, la imagen $\theta(g, x)$ se denotará simplemente por gx. Es decir, $\theta(g, x) = gx$.

Dado un elemento $g \in G$, éste induce una función continua

$$\begin{aligned} \theta_g : \ & X \to X \\ & x \mapsto gx\,, \end{aligned}$$

que llamaremos *traslación* por g. Se observa que cada θ_g es una función invertible, ya que ${\theta_g}^{-1} = \theta_{g^{-1}}$; de donde se concluye que las traslaciones θ_g son homeomorfismos de X en sí mismo. Análogamente, a cada $x \in X$ se le asocia la función continua

$$\begin{aligned} \theta^x : \ & G \to X \\ & g \mapsto gx \end{aligned}$$

que de manera respectiva recibe el nombre de *movimiento* por x.

Definición 2.2.2. *La terna (G, X, θ), donde G es un grupo topológico, X es un espacio y θ es una acción de G en X, es llamada **grupo topológico de transformaciones**. En este caso diremos que X es un G**-espacio**.*

A partir de este momento, por conveniencia, al referirnos a un G-espacio X se dará por hecho que se está considerando un grupo topológico de transformaciones (G, X, θ) y todos los grupos que se consideren serán topológicos.

Algunos conjuntos relacionados con una acción se definen a continuación.

Definición 2.2.3. *Si G es un grupo topológico y X es un G-espacio con acción θ, para $A \subset X$ y $H \subset G$ consideraremos los siguientes conjuntos:*

I) *$H(A) = \{ha \in X \mid h \in H, a \in A\} = \theta(H \times A)$ el cual se llama H-**saturación** de A. Si $A = \{x\}$, $H(\{x\})$ se denotará como $H(x)$. Si además $H = G$, diremos que $G(x)$ es la **órbita** de x en X. Si $H = \{h\}$, se denota $H(A)$ como hA.*

II) *El conjunto $G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$ recibe el nombre de **estabilizador** de A. Si $A = \{x\}$, se usa la notación G_x en lugar de $G_{\{x\}}$; en este caso a G_x también se le nombra **grupo de isotropía** de x.*

III) *Se dice que $A \subset X$ es H-**invariante** si $H(A) = A$. Cuando $H = G$, se dirá simplemente que A es **invariante**.*

IV) *Un punto $x \in X$ se llama **fijo** si $G = G_x$, es decir, si $gx = x$ para cada $g \in G$.*

Podemos observar que para verificar que un conjunto A sea invariante basta comprobar que $G(A) \subset A$, ya que se tiene siempre que $A = eA \subset G(A)$.

También podemos concluir que para cada U, abierto de X, y $H \subset G$, el conjunto $H(U)$ es un subconjunto abierto de X, ya que

$$H(U) = \bigcup_{h \in H} hU$$

y al ser U abierto y $\theta_h(U) = hU$, dado que $\theta_h(U)$ es abierto para cada $h \in H$, concluimos que $H(U)$ también es abierto. .

Si A es invariante, también se cumple que $X \setminus A$ es invariante. Supongamos que $G(X \setminus A) \not\subset X \setminus A$, entonces existen $a \in A$, $g \in G$ y $x \in X \setminus A$ tales que $gx = a$; luego, $x = g^{-1}a \in A$ por ser A invariante, lo cual es una contradicción.

Asimismo, si A y B son invariantes entonces $A \cap B$ es invariante, ya que si $gx \in G(A \cap B)$ con $g \in G$, $x \in A$ y $x \in B$, tenemos que $gx \in A$ y $gx \in B$ ya que ambos conjuntos son invariantes. Luego $G(A \cap B) \subset A \cap B$.

Si $A \subset X$ es un conjunto invariante, la restricción $\theta|_{G\times A} : G \times A \to A$ es una acción continua de G en A. En este sentido, se dice que A es un G-*subespacio* de X.

Podemos ahora considerar algunas propiedades de los G-espacios en base a los conjuntos definidos anteriormente.

Definición 2.2.4. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio; entonces se tienen las siguientes definiciones:*

I) *Si para cada $x \in X$, $G_x = \{e\}$, diremos que X es un G-espacio libre y que la acción es libre.*

II) *Si para todo $x \in X$, $G_x = \{e\}$ o $G_x = G$, diremos X es un G-espacio semilibre.*

III) *Si X es semilibre y existe un único $x \in X$ tal que $G_x = G$, entonces se dirá que X es un G-espacio estrictamente semilibre.*

Para clarificar los conceptos, se proporcionan algunos ejemplos sencillos.

Ejemplos 2A

1. Considere $G = \mathbb{Z}_2$, con la topología discreta, y $X = \mathbb{S}^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Definimos la acción de G en X por $1 \cdot x = x$ y $-1 \cdot x = -x$. En este caso la continuidad de la acción es inmediata de la continuidad del producto por escalares en $\mathbb{R}^n$. Para este caso además se observa que X es un G-espacio libre.

2. Se puede generalizar el ejemplo anterior de la siguiente manera: sea $G = \mathbb{Z}_2$, nuevamente considerado como espacio discreto, y X un espacio lineal normado sobre $\mathbb{R}$. Con la acción dada por $g \cdot x = gx$, es decir, la multiplicación por escalares. Como X es normado, esta acción es continua y es inmediato que X es un G-espacio estrictamente semilibre. Luego, si $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$, se tiene que S es invariante y por lo tanto G actúa en S y es claro que S es libre.

   Esta acción suele llamarse **acción antipodal**

A continuación presentamos algunos resultados útiles sobre las nociones antes definidas y que usaremos en lo sucesivo.

Proposición 2.2.5. *Sea X un G-espacio y $A \subset X$ invariante, entonces $\overline{A}$ es invariante.*

Demostración. Sea A un subconjunto invariante de X. Como se mencionó anteriormente, basta probar que $G(\overline{A}) \subset \overline{A}$. Ahora bien, las traslaciones por elementos de G son homeomorfismos de X en sí mismo, por lo cual

$$G(\overline{A}) = \bigcup_{g\in G} g\overline{A} = \bigcup_{g\in G} \overline{gA}.$$

Como A es invariante $G(A) = A$, con lo que se deduce $gA \subset A$ para cada $g \in G$; de donde se sigue $\overline{gA} \subset \overline{A}$ para toda $g \in G$. Por lo tanto

$$G(\overline{A}) = \bigcup_{g\in G} \overline{gA} \subset \overline{A}$$

y en conclusión $G(\overline{A}) = \overline{A}$. □

Proposición 2.2.6. *G_x es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Para $x \in X$ se tiene $ex = x$, es decir $e \in G_x$. Si $h, g \in G_x$, entonces $gx = x$ y $hx = x$, con lo que $gx = hx$ y por consiguiente

$$x = h^{-1}(hx) = h^{-1}(gx) = (h^{-1}g)x = x$$

con lo que $h^{-1}g \in G_x$ y por lo tanto G_x es un subgrupo de G.

Resta ver que G_x es cerrado para cada $x \in X$. Dados $g \in \overline{G_x}$ y $U \subset X$ una vecindad de gx, por la continuidad de la acción se tiene que existen vecindades $V \subset G$ y $W \subset X$ de g y x, respectivamente, tales que $VW \subset U$. Luego, como $g \in \overline{G_x}$ entonces $V \cap G_x \neq \emptyset$, es decir que existe $h \in V$ tal que $hx = x$. Por consiguiente $x \in VW \subset U$. Entonces $x \in U$ para toda vecindad U de gx. Por lo tanto $gx = x$, concluyendo que G_x es cerrado. □

Dado un G-espacio X, es inmediato de las propiedades de la acción que dos órbitas son iguales o son ajenas, es decir, $\{G(x) \mid x \in X\}$ es una partición de X. Esto nos da un nuevo espacio, que se define en seguida.

Definición 2.2.7. *Para un G-espacio X, denotamos por X/G al conjunto $\{G(x) \mid x \in X\}$ y lo dotamos de la topología cociente respecto de la función $p : X \to X/G$ dada por $p(x) = G(x)$. A este espacio se le denomina el espacio de órbitas de X y p se llama proyección orbital.*

Proposición 2.2.8. *Sea X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es abierta.*

Demostración. Sea U abierto de X. Entonces por definición de la topología cociente hay que verificar que $p^{-1}(p(U))$ es abierto en X. Para ello basta ver que $p^{-1}(p(U)) = G(U)$, ya que $G(U)$ es abierto en X. Si $x \in p^{-1}(p(U))$ entonces existe $u \in U$ tal que $p(x) = p(u)$, es decir, que $x \in G(u) \subset G(U)$ y análogamente, si $x \in G(U)$, existe $u \in U$ tal que $p(x) = p(u)$; luego $x \in p^{-1}(p(U))$. □

En el caso de los espacios topológicos las funciones que resultan de interés son las funciones continuas. En los G-espacios las funciones de mayor importancia son aquellas que además de ser continuas respetan o conmutan con la acción del grupo. Esto queda más claro con la definición siguiente.

Definición 2.2.9. *Sea G un grupo topológico. Si X, Y son dos G-espacios, una función continua $f : X \to Y$ se llama* ***G-equivariante*** *o* ***G-función*** *si*

$$f(gx) = gf(x) \tag{2.1}$$

para toda $x \in X$ y toda $g \in G$. Cuando no haya riesgo de confusión diremos simplemente que f es ***equivariante***. *En caso de que Y tenga la acción trivial de G, es decir $f(gx) = f(x)$ para cualesquiera $x \in X$ y $g \in G$, diremos que f es* ***invariante***.

Ejemplos 2B

1. Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ y los G-espacios $X = Y = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con la acción antipodal mencionada en el ejemplo 2A. Considere las siguientes funciones:

   a) $\zeta : X \to Y$ dada por $\zeta(x) = -x$.

   b) $\psi : X \to Y$ dada por $\psi(x) = \overline{x}$, donde $\overline{x}$ el conjugado complejo de x.

   c) $\phi : X \to Y$ dada por $\phi(x) = x^2$.

   Bajo esta acción las funciones ζ y ψ son claramente equivariantes. Por otro lado, se observa que ϕ no es equivariante bajo esta acción, ya que $\phi(-1 \circ x) = \phi(-x) = x^2$, mientras que $-1 \circ \phi(x) = -1 \circ x^2 = -x^2$.

2. Sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ y los G-espacios $X = Y = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con la acción dada por $-1 \bullet x = \overline{x}$. Considere además la función $\phi : X \to Y$ dada por $\phi(x) = x^2$. Bajo esta acción tenemos que la función ϕ resulta equivariante pues $\overline{x}^2 = \overline{x^2}$.

2.3. Producto y cociente de G-espacios

Dada una familia de G-espacios $\{X_j \mid j \in J\}$ podemos considerar el espacio producto. En este se puede definir una acción de manera natural mediante la función θ tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{array}{rcl} G \times \prod_{j\in J} X_j & \xrightarrow{\theta} & \prod_{j\in J} X_j \\ g(x_j)_{j\in J} & \mapsto & (gx_j)_{j\in J}. \end{array}$$

En este caso θ es continua ya que en cada coordenada es continua. A esta se le suele llamar acción diagonal. Siempre que consideremos un producto de G-espacios se estará considerando que está dotado de esta acción θ.

En esta situación se observa que el producto diagonal de funciones equivariantes $f_j : X \to X_j$ es también equivariante, ya que para $g \in G$ se tiene

$$g \mathop{\Delta}_{j\in J} f_j(x) = g(f_j(x))_{j\in J} = (f_j(gx))_{j\in J} = \mathop{\Delta}_{j\in J} f_j(gx).$$

Además el producto de G-espacios libres es a su vez un G-espacio libre dotado de esta acción. Esto ocurre también en el caso del producto de G-espacios semilibres y estrictamente semilibres.

Consideremos un grupo G y H un subgrupo cerrado de G, sea G/H el espacio de las clases laterales izquierdas de G con la topología cociente inducida por la función $q : G \to G/H$, donde $q(g) = gH$. Note que esta función es abierta ya que para cada $U \subset G$ se tiene que $q^{-1}(q(U)) = UH$ y si U es abierto, el conjunto UH también es abierto.

Definimos la acción $\theta : G \times G/H \to G/H$ como $\theta(g, kH) = gkH$. Es claro que $\theta(e, kH) = kH$ y

$$\theta(g, \theta(s, kH)) = \theta(g, skH) = gskH = \theta(gs, kH).$$

Ahora bien, como q es abierta, la función $id_G \times q : G \times G \to G \times G/H$ también lo es. Además, de las definiciones de las funciones se sigue que para cada $(g, k) \in G \times G$ se tiene que $\theta \circ (id_G \times q)(g, k) = q \circ \mu(g, k)$, donde μ es la multiplicación del grupo, es decir que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "id_G \times q"'] & G \arrow[d, "q"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\theta"] & G/H \end{tikzcd}$$

Dado que μ y q son continuas y $id_G \times q$ es abierta, θ es continua. Es inmediato que q resulta equivariante.

Es fácil ver que los G-espacios de la forma G/H tiene una sola órbita, en este sentido son los G-espacios más sencillos de todos.

Otro caso de interés surge al considerar un G-espacio X y su respectivo cono. Si G es un grupo localmente compacto, se puede considerar al $\mathrm{Cono}\,(X)$ como un G-espacio definiendo la acción de la siguiente manera $\widehat{\sigma}(g, [x, t]) = [\sigma(g, x), t]$, donde σ es la acción de G en X.

Es claro que $\widehat{\sigma}$ cumple las propiedades de una acción, ya que

$$\widehat{\sigma}(e, [x, t]) = [\sigma(e, x), t] = [x, t],$$

para cada $[x, t] \in \mathrm{Cono}(X)$. Además

$$\begin{gathered} \widehat{\sigma}(g, \widehat{\sigma}(h, [x, t])) = \widehat{\sigma}(g, [\sigma(h, x), t]) = \\ [\sigma(g, \sigma(h, x)), t] = [\sigma(gh, x), t] = \widehat{\sigma}(gh, [x, t]), \end{gathered}$$

con lo cual $\widehat{\sigma}$ cumple las condiciones para ser una acción. Resta comprobar que $\widehat{\sigma}$ está bien definida y es continua.

Sea $p : X \times I \to \mathrm{Cono}\,(X)$ la función cociente. Ahora, como G es localmente compacto,

$$id_G \times p : G \times (X \times I) \to G \times \mathrm{Cono}\,(X)$$

es también una función cociente, como puede verse en [5, Proposición 13.19]. Además la función $i : G \times (X \times I) \to X \times I$, para la cual $i(g, x, t) = (\sigma(g, x), t)$, es continua ya que es continua en cada coordenada.

Considere la función $\tilde{\sigma} = p \circ i : G \times (X \times I) \to \text{Cono}(X)$. Se afirma que $\tilde{\sigma}$ es constante en las fibras de $id_G \times p$. En efecto, dado $(g, [x, t]) \in G \times \text{Cono}\,(X)$, se tiene que $(id_G \times p)^{-1}(g, [x, t]) = \{g\} \times p^{-1}([x, t])$. Si $[x, t] \neq \theta$, entonces $(id_G \times p)^{-1}(g, [x, t]) = (g, (x, t))$ y es claro que $\tilde{\sigma}$ es constante en esta fibra. Si $[x, t] = \theta$, entonces $(id_G \times p)^{-1}(g, [x, t]) = \{(g, (x, 0)) \mid x \in X\}$, y para un punto de esta forma se tiene que

$$\tilde{\sigma}(g(x, 0)) = (p \circ i)(g, (x, 0)) = p(\sigma(g, x), 0) = [\sigma(g, x), 0] = \theta.$$

Entonces $\tilde{\sigma}$ es constante en las fibras de $id_G \times p$ y por lo tanto define una función continua $\varsigma : G \times \text{Cono}\,(X) \to \text{Cono}\,(X)$ para la cual $\tilde{\sigma} = \varsigma \circ (id_G \times p)$. Es claro que $\varsigma = \widehat{\sigma}$. Por lo que la acción esta bien definida y es continua.

Si además X es un G-espacio libre se observa con facilidad que con esta acción $\text{Cono}\,(X)$ es un G-espacio estrictamente semilibre.

Dotado de la acción definida anteriormente se puede ver que $J_k(X)$ es un G-espacio para cada cardinal k y cada G-espacio X. Para esto solo hace falta ver que $J_k(X)$ es un conjunto invariante de $\text{Cono}\,(X)^k$ que está dotado de la acción diagonal. Pero este hecho es inmediato ya que si $(t_i x_i)_{i \in K} \in J_k(X)$ se tiene que $g(t_i x_i)_{i \in K} = (t_i(g x_i))_{i \in K}$ que sigue siendo un elemento de $J_k(X)$ ya que los valores t_i no se alteran.

En lo siguiente consideraremos los espacios anteriormente mencionados con las acciones mostradas en cada caso.

Capítulo 3

Compactaciones equivariantes

A partir de este capítulo comenzaremos el estudio del tema central de este texto.

Los grupos topológicos los llamaremos simplemente **grupos**, su elemento neutro lo denotaremos generalmente como e siempre y cuando no haya riesgo de confusión.

3.1. Compactaciones de G-espacios

Las compactaciones de los espacios de Tychonoff tienen su análogo en los G-espacios, el cual se introduce con la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Una **compactación equivariante** o **G-compactación** de X es una pareja (Z, j), donde Z es un G-espacio compacto y $j : X \to Z$ es un encaje denso y equivariante. Al conjunto $Z \setminus j(X)$ se le conoce como residuo de la G-compactación (Z, j).*

En lo que sigue con compactación equivariante de X nos referiremos al G-espacio Z donde X se encaja, cuando sea conveniente, dando por entendido que hay un encaje equivariante de X en Z.

Dada una compactación equivariante (Z, i) de X, podemos identificar a X con $i(X)$ y considerar a X como un G-subespacio de Z. Así que, inicialmente, para abordar el problema de la búsqueda de compactaciones equivariantes de un G-espacio

X, podemos tratar de extender la acción de G en X a una compactación Z de X. Esto se observa en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "id_G \times i"'] & X \arrow[d, "i"] \\ G \times Z \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] & Z. \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, en el caso en que $G = \mathbb{Z}_2$, como espacio discreto, y $X = (-1, 1)$. Donde la acción está dada por la multiplicación de números reales $\theta(g, x) = g \cdot x$, una compactación para X es el espacio $Z = [-1, 1]$ y podemos extender la acción naturalmente a Z simplemente definiendo en 1 y -1 igual que para los elementos de X. Esta acción claramente resulta continua y con ello Z es una compactación equivariante de X.

De manera similar podemos usar la compactación maximal o de Stone-Čech βX ya que esta posee una propiedad universal: dada una función continua $f : X \to Z$ donde Z es un espacio compacto, existe una única función $F : \beta X \to Z$ que extiende a f, como puede verse en [10, Teorema 3.6.1]. Entonces, considerando las traslaciones

$$\theta_g : X \to X \subset \beta X,$$

podemos encontrar extensiones $\widetilde{\theta}_g : \beta X \to \beta X$. Por la unicidad de la extensión se tienen las propiedades:

1) $\widetilde{\theta}_{gh} = \widetilde{\theta}_g \circ \widetilde{\theta}_h$ ya que $\theta_{gh} = \theta_g \circ \theta_h$.

2) $\widetilde{\theta}_e(x) = x$ para todo $x \in \beta X$.

3) Cada $\widetilde{\theta}_g$ es un homeomorfismo, ya que $\widetilde{\theta}_{g^{-1}} = \widetilde{\theta}_g^{-1}$.

De aquí podemos definir la posible acción $\widetilde{\theta} : G \times \beta X \to \beta X$ como $\widetilde{\theta}(g, x) = \widetilde{\theta}_g(x)$, sin embargo $\widetilde{\theta}$ no necesariamente es continua, ni siquiera en el caso en el que G es compacto, un ejemplo de este hecho puede verse en [18, Sección 1.5]. Por lo que es necesario usar otro enfoque en la resolución del problema. Un par de casos en el que $\widetilde{\theta}$ es continua se dan enseguida.

Teorema 3.1.2. *Sea G un grupo discreto. Entonces todo G-espacio tiene compactación equivariante.*

Demostración. Sea X un G-espacio. Como se vio antes, usando la compactación de Stone-Čech tenemos la función $\widetilde{\theta} : G \times \beta X \to \beta X$ dada por $\widetilde{\theta}(g,x) = \widetilde{\theta}_g(x)$ donde $\widetilde{\theta}_g$ es la extensión de θ_g para cada $g \in G$. Como cada una de estas funciones es continua, dada una vecindad U de $gx \in \beta X s$, existe V abierto de βX tal que $x \in V$ y $\widetilde{\theta}_g(V) \subset U$; por consiguiente $\{g\} \times V$ es una vecindad de $(g,x) \in G \times \beta X$ y se tiene que

$$\widetilde{\theta}\big(\{g\} \times V\big) = \widetilde{\theta}_g(V) \subset U,$$

lo cual prueba la continuidad de $\widetilde{\theta}$. Concluyendo que $\widetilde{\theta}$ es una acción. □

Teorema 3.1.3. *Sean G un grupo y X un G-espacio localmente compacto. Entonces, la compactación de Alexandroff, B, de X es una compactacion equivariante.*

Demostración. Sea $B = X \cup \{*\}$ la compactacion de Alexandroff de X. Definimos la acción $\hat{\theta}$ en B de la siguiente manera: si $x \in X$ y $g \in G$, $\hat{\theta}(gx) = \theta(g,x)$ y para cada $(g,*) \in G \times B$ se define $\hat{\theta}(g,*) = *$. Es inmediato que $\hat{\theta}$ cumple las propiedades de una acción, resta únicamente ver que es continua.

Se afirma que para cada $K \subset X$ compacto, existe una vecindad V de $e \in G$ tal que $\overline{V(K)}$ es compacto. Efectivamente, para cada $x \in K$ considere U_x, una vecindad de x, tal que $\overline{U_x}$ es compacto. Ahora, de la continuidad de la acción existen vecindades V_x y W_x de $e \in G$ y $x \in K$, respectivamente, tales que $V_x(W_x) \subset U_x$. De la compacidad de K, existen $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que $K \subset W_{x_1} \cup \cdots \cup W_{x_n}$. Entonces la vecindad $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ de $e \in G$ cumple que

$$V(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}(W_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Por lo tanto $\overline{V(K)} \subset \overline{U_{x_1}} \cup \cdots \cup \overline{U_{x_n}}$, de donde se sigue que $\overline{V(K)}$ es compacto.

Sea U una vecindad básica canónica de $*$ en B, es decir, $U = \{*\} \cup (X \setminus K)$, donde K es un compacto de X. Ahora, para $(g,*) \in G \times B$ se tiene que $\hat{\theta}(g,*) = * \in U$. Por la afimación anterior existe una vecindad simétrica de la identidad V, tal que $\overline{V(K)}$ es compacto. Sea $g \in G$ y considere $H = g^{-1}\overline{V(K)}$ el cual es también compacto ya que las traslaciones por cada g son homeomorfismos. Considere ahora las vecindades $O = \{*\} \cup (X \setminus H)$ y $W = Vg$ de $* \in B$ y $g \in G$, respectivamente. Entonces $\hat{\theta}(W \times O) = \{*\} \cup \theta(W \times (X \setminus H))$. Ahora,

$$\theta(W \times (X \setminus H)) = \bigcup_{w \in W} w(X \setminus H) = \bigcup_{w \in W} (X \setminus wH),$$

por lo que al tomar complementos y recordar cómo se definieron H y W, se tiene

$$X \setminus \theta(W \times (X \setminus H)) = \bigcap_{w \in W} wH = \bigcap_{v \in V} vg(g^{-1}\overline{V(K)}) = \bigcap_{v \in V} v\overline{V(K)};$$

como V es simétrica, $v^{-1} \in V$ para cada $v \in V$. Luego, si $x \in K$ entonces $x = v(v^{-1}x) \in vV(K) = \{vv'k \mid v' \in V, k \in K\}$. Entonces $K \subset wH$ para cada $w \in W$ y por lo tanto

$$K \subset \bigcap_{v \in V} vV(K) \subset \bigcap_{v \in V} v\overline{V(K)} = \bigcap_{w \in W} wH = X \setminus \theta(W \times (X \setminus H)),$$

de donde es claro que $\theta(W \times (X \setminus H)) \subset X \setminus K$ y por lo tanto $\hat{\theta}(W \times O) \subset U$, quedando probada la continuidad de $\hat{\theta}$. $\square$

3.1.1. G-espacios Compactos

Para mostrar la existencia de compactaciones para espacios de Tychonoff se usa la familia de funciones continuas del espacio en el intervalo $[0, 1]$. La idea a seguir en esta sección es encontrar una colección de G-espacios compactos que realicen la misma función que el intervalo $[0, 1]$ en el caso de espacios topológicos de Tychonoff. Dado que los G-espacios compactos pueden tener formas muy abstractas, el lugar adecuado para buscar inicialmente es $\mathcal{C}(G)$, el espacio de funciones reales y continuas en el grupo G .

En adelante la topología en $\mathcal{C}(G)$, es la topología punto-abierta o de convergencia puntual. En caso de que consideremos el espacio con la topología compacto-abierta ó la topología de convergencia uniforme denotaremos al espacio como $\mathcal{C}_c(G)$ y $\mathcal{C}_u(G)$, respectivamente.

Dentro de $\mathcal{C}(G)$ consideraremos también varios de sus subconjuntos, tales como $\mathcal{RUC}(G)$, $\mathcal{LUC}(G)$ y $\mathcal{C}^*(G)$.

Como se buscan G-espacios compactos dentro de $\mathcal{C}(G)$, nos gustaría dotar de una estructura de G-espacio a $\mathcal{C}(G)$. De manera natural esto puede hacerse mediante la siguiente función:

$$\begin{array}{rcl} \psi : G \times \mathcal{C}(G) & \to & \mathcal{C}(G) \\ (t, f) & \mapsto & \psi(t, f), \end{array}$$

donde $\psi(t, f)(s) = f(st)$ para todo $s \in G$.

Cabe notar que para $e \in G$ se cumple $\psi(e, f) = f$ para toda $f \in \mathcal{C}(G)$. Además, para cada $s \in G$

$$\psi\big(g, \psi(h, f)\big)(s) = \psi(h, f)(sg) = f(sgh) = \psi(gh, f)(s),$$

por lo que $\psi\big(g, \psi(h, f)\big) = \psi(gh, f)$ para cualesquiera $g, h \in G$ y cada $f \in \mathcal{C}(G)$.

De las observaciones anteriores se sigue que ψ será una acción de G en $\mathcal{C}(G)$ siempre y cuando ψ sea continua. Pero ψ no necesariamente resulta continua, sin embargo existen subconjuntos invariantes de $\mathcal{C}(G)$ en los que se satisface la continuidad de ψ.

A partir de este momento trabajaremos frecuentemente con las familias equicontinuas de $\mathcal{C}(G)$ ya que son estas, cuando además tienen la propiedad de ser invariantes, en las que la restricción de ψ es continua. Esto queda claro con el siguiente lema.

Lema 3.1.4. *Sea $Z \subset \mathcal{C}(G)$ una familia equicontinua tal que $\psi(G \times Z) = Z$. Entonces*

$$\theta = \psi|_{G \times Z} : G \times Z \to Z$$

es continua, es decir, Z es un G-espacio. Más aún, $Z \subset \mathcal{RUC}(G)$.

Demostración. Primero probaremos que para cada $x \in G$, la función $\rho_x : G \times Z \to \mathbb{R}$ definida como $\rho_x(t, f) = f(xt)$ es continua en cada punto $(t, f) \in G \times Z$. Para esto sean $x \in G$, $(t_0, f_0) \in G \times Z$ y $(t, f) \in G \times Z$. Entonces

$$|\rho_x(t, f) - \rho_x(t_0, f_0)| = |f(xt) - f_0(xt_0)| \leq |f(xt) - f(xt_0)| + |f(xt_0) - f_0(xt_0)|,$$

dado $\varepsilon > 0$ podemos considerar la vecindad de f_0,

$$W = \langle xt_0, B_{\varepsilon/2}(f_0(xt_0)) \rangle := \big\{ h \in \mathcal{C}(G) \mid h(xt_0) \in B_{\varepsilon/2}(f_0(xt_0)) \big\}.$$

Además como Z es equicontinua, para $\varepsilon/2$ y $xt_0 \in G$ existe $V' \subset G$ vecindad de xt_0 tal que $|f(z) - f(xt_0)| < \varepsilon/2$ para todo $z \in V'$ y toda $f \in Z$. Asimismo existe V, vecindad de t_0, tal que $xV \subset V'$. Por consiguiente, si $(t, f) \in V \times W$, se sigue que $|\rho_x(t, f) - \rho_x(t_0, f_0)| < \varepsilon$, con lo que que ρ_x es continua para cada $x \in X$.

Obsérvese que $\rho_x(t, f) = \psi(t, f)(x)$ para cada $x \in G$ y $(t, f) \in G \times Z$. Entonces, si consideramos una vecindad sub-básica $\langle x, U\rangle$ de $\psi(t_0, f_0)$, se tiene que

$$\psi(t_0, f_0)(x) = \rho_x(t_0, f_0) \in U$$

y como ρ_x es continua, existen vecindades O y Q de t_0 y f_0, respectivamente, tales que $\rho_x(O \times Q) \subset U$, es decir, que

$$\psi(O \times Q) \subset \langle x, U\rangle,$$

por lo cual θ es continua y por lo tanto Z es un G-espacio.

Finalmente, si $f \in Z$, como $\psi(G \times Z) = Z$, tenemos que $\psi(t, f) \in Z$ para cada $t \in G$. Por lo que la familia $\{\psi(t, f) \mid t \in G\} \subset Z$ es equicontinua ya que se encuentra contenida en Z, en particular, para $e \in G$ y cada $\varepsilon > 0$ existe $W \subset G$ vecindad de e tal que

$$|f(st) - f(t)| < \varepsilon$$

para cada $s \in W$ y $t \in G$. Por lo anterior y el lema 2.1.3 se concluye que $f \in \mathcal{RUC}(G)$. □

El lema anterior prueba que podemos restringirnos a $\mathcal{RUC}(G)$, en lugar de trabajar en todo $\mathcal{C}(G)$. En este momento ya tenemos una colección de G-espacios dentro de $\mathcal{RUC}(G)$, sin embargo nos interesan específicamente los que son compactos; estos los encontraremos con ayuda del teorema de Arzela-Ascoli.

Lema 3.1.5. *Sea $Y \subset \mathcal{C}^*(G)$ una familia equicontinua, para la cual*

$$\psi(G \times Y) = Y$$

y además $Y(g) = \{f(g) \mid f \in Y\}$ es acotado para toda $g \in G$. Sea $Z = \overline{Y}$, entonces Z es equicontinua y compacta, además $\psi(G \times Z) = Z$ y $Z \subset \mathcal{RUC}^*(G)$, es decir que Z es un G-espacio compacto.

Demostración. Denotemos por $\overline{Y}^c$ la cerradura de Y en la topología compacto-abierta. Como $Y(g) \subset \mathbb{R}$ es acotado, $Y(g)$ tiene cerradura compacta para cada $g \in G$. Como Y es equicontinua se cumplen las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli y por lo tanto $\overline{Y}^c \subset \mathcal{C}_c(G)$ es compacto. Cabe notar que como Y es equicontinua la cerradura de Y en la topología punto-abierta y en la topología compacto-abierta coinciden, esto dado que ambas topologías coinciden en familias equicontinuas (lema 1.3.7). Entonces

$$\overline{Y}^c = \overline{Y} = Z \subset \mathcal{C}(G)$$

es compacto. Además la cerradura de una familia equicontinua también es equicontinua, es decir, que Z es equicontinua.

Continuemos demostrando que $\psi(G \times \overline{Y}) = \overline{Y}$. Es claro que $\overline{Y} \subset \psi(G \times \overline{Y})$. Para probar la otra contención, consideremos para cada $t \in G$ las funciones

$$\psi_t : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G)$$

definidas como $\psi_t(f) = \psi(t, f)$ para cada $f \in \mathcal{C}(G)$. Estas funciones son continuas ya que si $t \in G$, $f \in \mathcal{C}(G)$ y $W = \langle x, U \rangle$ es una vecindad de $\psi_t(f)$, entonces

$$\psi_t(f)(x) = \psi(t, f)(x) = f(xt) \in U,$$

es decir que $f \in \langle xt, U \rangle$. Sea $V = \langle xt, U \rangle$. Entonces, si $g \in V$, se tiene que

$$\psi_t(g)(x) = \psi(t, g)(x) = g(xt) \in U.$$

En consecuencia $\psi_t(g) \in W$ y por ende $\psi_t(V) \subset W$, lo cual prueba que ψ_t es continua para cada $t \in G$. Ahora bien, es claro que para todo $A \subset \mathcal{C}(G)$ se cumple que

$$\psi(G \times A) = \bigcup_{t \in G} \psi_t(A).$$

Como $\psi(G \times Y) = Y$, se cumple que $\psi_t(Y) \subset Y$ para cada $t \in G$; luego de la continuidad de cada ψ_t se sigue $\psi_t(\overline{Y}) \subset \overline{\psi_t(Y)}$. Lo que implica $\psi_t(\overline{Y}) \subset \overline{Y}$ para toda $t \in G$, de donde se concluye que $\psi(G \times \overline{Y}) = \overline{Y}$. Finalmente, por el lema anterior, $Z \subset \mathcal{RUC}^*(G)$. $\square$

En lo posterior al considerar una familia equicontinua de $\mathcal{C}(G)$ podemos considerarla como G-espacio con la acción dada por ψ. En esta situación denotaremos a $\psi(g, f)$ simplemente por gf, donde gf es la función dada por la regla $(gf)(h) = f(hg)$ para cada $h \in G$.

Corolario 3.1.6. *Para $f \in \mathcal{RUC}^*(G)$ sea $O_f = \{\psi_t(f) \mid t \in G\}$. Entonces $X_f = \overline{O_f}$ es un G-espacio compacto.*

Demostración. Como $f \in \mathcal{RUC}^*(G)$, para toda $\varepsilon > 0$ existe W vecindad de $e \in G$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $xy^{-1} \in W$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ para cada $t \in G$ y $x_0 \in G$ tenemos que $|f(xt) - f(x_0t)| < \varepsilon$ si $xx_0^{-1} \in W$. Luego sea $V = Wx_0$. Es claro que $x_0 \in V$ y si $y \in V$, entonces $yx_0^{-1} \in W$ por lo que

$$|f(yt) - f(x_0t)| = |\psi_t(f)(y) - \psi_t(f)(x_0)| < \varepsilon\,.$$

Luego, la familia $O_f = \{\psi_t(f) \mid t \in G\}$ es equicontinua ya que lo es en cada punto de G.

Además para cada $s \in G$ se cumple que el conjunto

$$O_f(s) = \{\psi_t(f)(s) \in \mathbb{R} \mid t \in G\} = \{f(st) \in \mathbb{R} \mid t \in G\}$$

es acotado dado que f lo es.

Finalmente resta probar que $\psi(G \times O_f) \subset O_f$. Para esto sea $(h, \psi_t(f)) \in G \times O_f$. Luego para cada $s \in G$ se tiene que

$$\psi(h, \psi_t(f))(s) = \psi_t(f)(sh) = f(sht) = \psi_{ht}(f)(s)\,.$$

Consecuentemente $\psi(h, \psi_t(f)) = \psi_{ht}(f) \in O_f$. Con estas observaciones y el lema anterior la proposición queda probada. □

Definición 3.1.7. *Sean X un G-espacio con acción θ y una función $f : X \to \mathbb{R}$. Si para cada $\varepsilon > 0$, existe W, vecindad de e, tal que si $g \in W$, se tiene que $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in X$, se dice que f es **θ-uniforme** o bien **G-uniforme**.*

Para un G-espacio X, definimos el siguiente conjunto:

$$\mathscr{C}(X) = \{f \in \mathcal{C}^*(X) \mid f \text{ es } G\text{-uniforme}\}.$$

Ahora bien, para un G-espacio X con acción θ y una función $f : X \to \mathbb{R}$, definimos para cada $x \in X$ la función $f_x : G \to \mathbb{R}$ dada por la composición de f con el movimiento por $x \in X$. Es decir que la función se encuentra dada por $f_x(g) = f\big(\theta^x(g)\big) = f(gx)$. Similarmente para cada $g \in G$ se define $f^g : X \to \mathbb{R}$ como $f^g(x) = f\big(\theta_g(x)\big) = f(gx)$.

Partiendo de una sola función se tienen dos familias de funciones asociadas a ella, la primera a la que denotaremos como

$$B_f = \{f_x \in \mathcal{C}(G) \mid x \in X\}$$

y la segunda como

$$B^f = \{f^g \in \mathcal{C}(X) \mid g \in G\}.$$

Ambas serán de gran importancia posteriormente para determinar las condiciones para que un G-espacio X posea una G-compactación.

Lema 3.1.8. *Sea X un G-espacio y $f \in \mathcal{C}(X)$. Entonces son equivalentes:*

I) *f es G-uniforme.*

II) *B_f es una familia equicontinua en $e \in G$.*

III) *B_f es uniformemente equicontinua por la derecha en G.*

Más aún, si $f \in \mathcal{C}^*(X)$, entonces $B_f(g)$ es acotado para cada $g \in G$.

Demostración. Es inmediato de la definición que f es G-uniforme si y solo si B_f es equicontinua en $e \in G$.

Ahora, probemos que la segunda afirmación es equivalente a la tercera. Como B_f es equicontinua en $e \in G$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe W, vecindad de e , tal que, si $g \in W$, se tiene que $|f_x(g) - f_x(e)| < \varepsilon$ para cada $x \in X$. Sea $t \in G$ y $x \in X$. Por hipótesis, para cada $s \in W$ se cumple que

$$|f_x(st) - f_x(t)| = |f(stx) - f(tx)| = |f_{tx}(s) - f_{tx}(e)| < \varepsilon.$$

Por consiguiente B_f es uniformemente equicontinua por la derecha en G.

Si B_f es uniformemente equicontinua por la derecha en G, dada $\varepsilon > 0$, existe W, vecindad de e, tal que para cualquier $t \in G$ y $x \in X$ se cumple $|f_x(st) - f_x(t)| < \varepsilon$ si $s \in W$. Por lo que para $t = e$ se cumple que $|f_x(s) - f_x(e)| < \varepsilon$ si $s \in W$; en consecuencia B_f es equicontinua en e.

Por otro lado, ya que $f \in \mathcal{C}^*(X)$, para cada $g \in G$ y $x \in X$ se tiene que $|f_x(g)| = |f(gx)| < M$, para alguna $M > 0$, lo cual muestra que $B_f(g)$ es acotado para cada $g \in G$. $\square$

3.2. Existencia de compactaciones equivariantes

Proposición 3.2.1. *Sea X un G-espacio. Si $Z \subset X$ y $U \subset G$ son subconjuntos compactos, entonces para $f \in \mathcal{C}(X)$ se cumple:*

a) $B'_f = \{f_z \in \mathcal{C}(G) \mid z \in Z\}$ *es equicontinua en* $e \in G$.

b) $B'^f = \{f^g \in \mathcal{C}(X) \mid g \in U\}$ *es equicontinua en* X.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}(X)$ y considere $\sigma_f : G \times X \to \mathbb{R}$ definida como $\sigma_f(t, x) = f(tx)$. Claramente σ_f es continua por ser composición de la acción de G en X y de f. Ahora bien, probemos que $B'_f = \{f_z \mid z \in Z\}$ es equicontinua en $e \in G$. Ya que σ_f es continua y dado $\varepsilon > 0$, para cada $z \in Z$ existe una vecindad $V_z \times W_z$ de (e, z) tal que $|\sigma_f(g, w) - \sigma_f(e, z)| < \varepsilon/2$ si $(g, w) \in V_z \times W_z$. Se observa que $\{W_z \mid z \in Z\}$ es cubierta abierta de Z y como Z es compacto, existen $z_1, \ldots, z_n \in Z$ tales que

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i}.$$

Entonces la vecindad de e que se deseaba encontrar es:

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{z_i}$$

ya que si $g \in V$ y $z \in Z$, entonces $z \in W_{z_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$; consecuentemente $(g, z), (e, z) \in V_{z_j} \times W_{z_j}$, por lo cual $|\sigma_f(g, z) - \sigma_f(e, z_j)| < \varepsilon/2$ y

$|\sigma_f(e,z) - \sigma_f(e,z_j)| < \varepsilon/2$. Por ende

$$|f_z(g) - f_z(e)| = |\sigma_f(g,z) - \sigma_f(e,z)| < \varepsilon$$

si $g \in V$ y $z \in Z$, de donde se concluye que B'_f es equicontinua en $e \in G$.

La demostración en el caso de B'^f es análoga a la primera parte, así que resumiremos lo mas posible la prueba. La función σ_f es continua y entonces, dados $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, para cada $g \in U$ existe una vecindad básica $V_g \times W_g$ de (g,x) tal que $|\sigma_f(h,w) - \sigma_f(g,x)| < \varepsilon/2$ si $(h,w) \in V_g \times W_g$. Como $\{V_g \mid g \in U\}$ es cubierta abierta del compacto U, existen $g_1, \dots, g_n \in U$ tales que $U \subset V_{g_1} \cup \dots \cup V_{g_n}$. Luego $W = W_{g_1} \cap \dots \cap W_{g_n}$ es la vecindad de x para la cual

$$|f^g(y) - f^g(x)| = |\sigma_f(g,y) - \sigma_f(g,x)| < \varepsilon$$

si $y \in W$ y para cada $g \in U$. Por lo tanto B'^f es equicontinua en X. □

Lema 3.2.2. *Sea Z un G-espacio compacto. Entonces $\mathcal{C}(Z) = \mathscr{C}(Z)$. Además, si X es un G-espacio y $\phi : X \to Z$ es continua y equivariante, se cumple que $f \circ \phi \in \mathscr{C}(X)$ para toda $f \in \mathcal{C}(Z)$.*

Demostración. Es inmediato el hecho que $\mathscr{C}(Z) \subset \mathcal{C}(Z)$, por ello basta probar la otra contención. Sea $f \in \mathcal{C}(Z)$. De la compacidad de Z se sigue que f es acotada. Además, de la proposición 3.2.1 se tiene que B_f es equicontinua en $e \in G$ y usando en seguida el lema 3.1.8 se concluye que $f \in \mathscr{C}(Z)$; por lo tanto $\mathscr{C}(Z) = \mathcal{C}(Z)$.

Falta demostrar la segunda parte. Consideremos un G-espacio X y una función $\phi : X \to Z$ continua y equivariante. Para $f \in \mathcal{C}(Z)$ y $x \in X$ se satisface

$$(f \circ \phi)_x(g) = f\big(\phi(gx)\big) = f(g\phi(x)) = f_{\phi(x)}(g),$$

con lo que $(f \circ \phi)_x = f_{\phi(x)}$ y por consiguiente

$$\{(f \circ \phi)_x \mid x \in X\} \subset \{f_z \mid z \in Z\} = B_f.$$

Como B_f es equicontinua en $e \in G$, en consecuencia $\{(f \circ \phi)_x \mid x \in X\}$ también lo es, y como $f \circ \phi$ es acotada $f \circ \phi \in \mathscr{C}(X)$. □

Lema 3.2.3. *Sea X un G-espacio y $f \in \mathscr{C}(X)$. Entonces $X_f = \overline{B_f}$ es un G-espacio compacto.*

Demostración. Como $f \in \mathscr{C}(X)$, se tiene que $f \in \mathcal{C}^*(X)$, lo cual implica que $B_f(g)$ es acotado para cada $g \in G$. Además, es claro que B_f es equicontinua dado que $f \in \mathscr{C}(X)$. Finalmente probemos que $\psi(G \times B_f) = B_f$. Para ello, bastará demostrar que $\psi(G \times B_f) \subset B_f$. Sea $(g, f_x) \in G \times B_f$. Entonces para cada $s \in G$ se tiene que

$$\psi(g, f_x)(s) = f_x(sg) = f(sgx) = f_{gx}(s),$$

es decir, $\psi(g, f_x) = f_{gx} \in B_f$. Luego $\psi(G \times B_f) = B_f$ y la proposición queda probada por el lema 3.1.5. $\square$

Lema 3.2.4. *Sea X un G-espacio y $f \in \mathscr{C}(X)$. Entonces la función $\Phi_f : X \to X_f$ dada por $x \mapsto f_x$ es continua y equivariante, más aún, existe $\delta \in \mathcal{C}(X_f)$ tal que $f = \delta \circ \Phi_f$.*

Demostración. Primero probemos que Φ_f es continua. Sea $x \in X$ y $\langle g, U \rangle$ una vecindad de $\Phi_f(x) = f_x$, es decir $f_x(g) = f(gx) \in U$. Luego, como f es continua, existe una vecindad V de gx tal que $f(V) \subset U$. Sea $W = g^{-1}V$. Claramente W es vecindad de x. Si $z \in W$ se sigue que $gz \in V$, lo cual que implica que $f(gz) = f_z(g) \in U$. Es decir $f_z \in \langle g, U \rangle$ y por lo tanto Φ_f es continua.

Por otro lado, sean $x \in X$ y $g \in G$. Entonces para cada $s \in G$ se tiene que

$$\Phi_f(gx)(s) = f_{gx}(s) = f(sgx) = f_x(sg) = gf_x(s) = g\Phi_f(x)(s)\,.$$

Consecuentemente, $\Phi_f(gx) = g\Phi_f(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$, por lo tanto Φ_f es equivariante.

Finalmente, sea $\delta : X_f \to \mathbb{R}$ definida como $\delta(h) = h(e)$ para cada $h \in X_f$. Para notar la continuidad de δ considere $h \in X_f$ y una vecindad U de $\delta(h)$, entonces, se tiene que $h(e) \in U$. Sea $V = \langle e, U \rangle \cap X_f$. Claramente $h \in V$ y para cada $j \in V$ se tiene que $j(e) = \delta(j) \in U$. Esto prueba que δ es continua.

Ahora, para cada $x \in X$ se cumple que

$$\delta\big(\Phi_f(x)\big) = \delta(f_x) = f_x(e) = f(x),$$

luego $f = \delta \circ \Phi_f$. Por lo tanto existe $\delta \in \mathcal{C}(X_f)$ tal que $f = \delta \circ \Phi_f$. $\square$

Teorema 3.2.5. *Sea X un G-espacio. Entonces $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados de X si y solo si existe una familia $\{\eta_\gamma : X \to K_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ que separa puntos de cerrados, donde K_γ es un G-espacio compacto y η_γ es continua y equivariante para cada $\gamma \in \Gamma$.*

Demostración. Sea $A \subset X$ cerrado y no vacío y $x_0 \notin A$. Sea $f \in \mathscr{C}(X)$ tal que $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$, es decir

$$f_{x_0}(e) \notin \overline{\{f_x(e) \mid x \in A\}}.$$

Consideremos ahora la función δ asociada a f definida en el lema anterior. la función $\delta : X_f \to \mathbb{R}$ se encuentra definida como $\delta(g) = g(e)$ para cada $g \in X_f$, con lo que se tiene

$$\delta(f_{x_0}) \notin \overline{\{\delta(f_x) \mid x \in A\}} = \overline{\delta\big(\{f_x \mid x \in A\}\big)}.$$

Como δ es continua, tenemos

$$\delta\big(\overline{\{f_x \mid x \in A\}}\big) \subset \overline{\delta\big(\{f_x \mid x \in A\}\big)}.$$

Entonces $f_{x_0} \notin \overline{\{f_x \mid x \in A\}}$, por lo cual $\Phi_f(x_0) \notin \overline{\Phi_f(A)}$.

Esto implica que la familia de funciones continuas y equivariantes

$$\{\Phi_f : X \to X_f \mid f \in \mathscr{C}(X)\}$$

separa puntos de cerrados y X_f es un G-espacio compacto para cada $f \in \mathscr{C}(X)$. Lo cual prueba la necesidad.

Sea ahora

$$\{\eta_\gamma : X \to K_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$$

una familia de funciones continuas y equivariantes que separa puntos de cerrados en X, donde K_γ es un G-espacio compacto para todo $\gamma \in \Gamma$. Supongamos que $A \subset X$ es cerrado no vacio y $x_0 \notin A$. Entonces existe η_γ tal que

$$\eta_\gamma(x_0) \notin \overline{\eta_\gamma(A)}\,.$$

Luego existe $h \in \mathcal{C}(K_\gamma)$ tal que $h\big(\eta_\gamma(x_0)\big) = 0$ y $h\big(\overline{\eta_\gamma(A)}\big) = \{1\}$. Sea $f = h \circ \eta_\gamma$. Por el lema 3.2.2 se tiene que $f \in \mathscr{C}(X)$, además es claro que $f(x_0) = 0$ y tenemos que $\overline{f(A)} \subset \{1\}$, ya que

$$f(A) \subset h\big(\overline{\eta_\gamma(A)}\big) = \{1\}.$$

Por lo tanto $f(x_0) \notin \overline{f(A)}$, es decir, $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados. □

Teorema 3.2.6. *Sea X un G-espacio. Entonces X tiene una G-compactación (K, j) si y solo si $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados.*

Demostración. Si $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados, por el teorema anterior y el teorema del encaje de Tychonoff, se tiene que

$$\Delta\Phi_f : X \to \widetilde{K} = \prod_{f \in \mathscr{C}(X)} X_f$$

definida como

$$\Delta\Phi_f(x) = \big(\Phi_f(x)\big)_{f \in \mathscr{C}(X)}$$

es un encaje. Como cada $\Phi_f : X \to X_f$ es equivariante, $\Delta\Phi_f$ lo es también; pues la acción de G en $\widetilde{K}$ es la acción diagonal. Además $K = \overline{\Delta\Phi_f(X)}$ es compacto ya que es un cerrado del G-espacio compacto $\widetilde{K}$. Es claro que $\Delta\Phi_f(X)$ es invariante, por ende K lo es y consecuentemente K es un G-espacio. Además $\Delta\Phi_f(X)$ es denso en K y por lo tanto $(K, \Delta\Phi_f)$ es una G-compactación para X.

Si X tiene una G-compactación (K, j), como $j : X \to K$ es un encaje, entonces $B = \{j\}$ separa puntos de cerrados y por lo tanto, del teorema 3.2.5, $\mathscr{C}(X)$ separa puntos de cerrados. □

El resultado probado por de Vries en [8], con el que finalizamos este capítulo, es el siguiente.

Teorema 3.2.7 (de Vries)**.** *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces todo G-espacio posee una compactación equivariante.*

Capítulo 4

Compactaciones equivariantes libres

Teniendo la existencia de compactaciones equivariantes, surge la pregunta de si estas compactaciones tienen las mismas propiedades que X respecto a la acción de G.

Para ilustrar esto considere $X = (-1, 1)$ y $G = \mathbb{Z}_2$ con la acción dada por $-1x = -x$. Es claro que X es un G-espacio estrictamente semilibre y $Y = [-1, 1]$ es una compactación equivariante de X que es también estrictamente semilibre.

Entonces, dado un grupo G y X un G-espacio libre (respectivamente, semilibre, estrictamente semilibre), surge la pregunta ¿existe una compactación equivariante para X que sea también libre (respectivamente, semilibre, estrictamente semilibre)?. En este capítulo se desarrollan algunos resultados relacionados con esta pregunta en el caso en el que el grupo actuante es compacto de Lie, además se muestra la construcción de una nueva familia de G-espacios que realizan la función del intervalo y funciones a estos que separan puntos de cerrados.

Primeramente dedicamos una sección enfocada a resultados de las acciones de grupos compactos.

4.1. Acciones de grupos compactos

Las acciones de grupos compactos son de gran interés ya que existe una gran cantidad de resultados al respecto de sus propiedades.

Teorema 4.1.1. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio con acción $\theta : G\times X \to X$. Entonces θ es perfecta.*

Demostración. Sea F un cerrado de $G\times X$ y $z \in X\setminus\theta(F)$. Entonces $z \neq \theta(g,x) = gx$ para todo $(g,x) \in F$, es decir que $g^{-1}z \neq x$ para cada $x \in \pi_2(F)$ y por consiguiente $(g, g^{-1}z) \notin F$ para cada $g \in G$.

Como F es cerrado, existen vecindades $U_g \subset G$ y $O_g \subset X$ de g y $g^{-1}z$, respectivamente, tales que $U_g \times O_g \subset (G\times X)\setminus F$. Luego para cada O_g existen vecindades $\widehat{V}_g$ de g y W_g de z, tales que $\widehat{V}_g^{-1} W_g \subset O_g$. Consideremos para cada $g \in G$ la vecindad $V_g = U_g \cap \widehat{V}_g$.

Como G es compacto, existen $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que $G = \cup_{i=1}^n V_{g_i}$. Sea $W = \cap_{i=1}^n W_{g_i}$ la cual es una vecindad de z.

Afirmamos que $W \cap \theta(F) = \emptyset$. En caso contrario, existe $w \in W \cap \theta(F)$. Entonces existe $(g,y) \in F$ tal que $w = gy$. Luego $g \in V_{g_i}$ para alguna $i \in \{1,\dots,n\}$ y $w \in W_{g_i}$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$. Entonces $g^{-1}z \in V_{g_i}^{-1}W_{g_i} \subset O_{g_i}$ y por lo tanto

$$(g,y) = (g, g^{-1}w) \in U_{g_i} \times O_{g_i} \subset (G\times X)\setminus F,$$

lo cual no es posible. Con esto queda probada la afirmación y por lo tanto θ es una función cerrada.

Además $\theta^{-1}(x) = \{(g, g^{-1}x) \mid g \in G\}$ es homeomorfo a G. Ya que para cada $x \in X$ la función $i_x : G \to \theta^{-1}(x)$, dada por $i_x(g) = (g, g^{-1}x)$, es claramente continua y biyectiva. Por lo cual se tiene que θ es perfecta. □

De este teorema se deduce fácilmente que la proyección orbital es también una función perfecta, lo cual se prueba en el corolario siguiente.

Corolario 4.1.2. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital $p : X \to X/G$ es perfecta.*

Demostración. Para cada $z \in X/G$ se tiene que $p^{-1}(z) = G(x)$, donde $x \in X$ es tal que $p(x) = z$. $G(x)$ es compacto para cada $x \in X$ pues es la imagen de la acción del compacto $G \times \{x\}$.

Además para $A \subset X$ cerrado, se tiene que $p^{-1}(p(A)) = G(A)$ es cerrado por ser la imagen del cerrado $G \times A$ bajo la acción (ver teorema 4.1.1). Por lo tanto p es perfecta. $\square$

Gracias a la compacidad del grupo muchas de las propiedades del G-espacio X se heredan a su espacio de órbitas X/G, algunas usando precisamente el hecho de que la proyección orbital es perfecta. En particular, resulta de interés la propiedad de ser Tychonoff, la cual no es un invariante bajo funciones perfectas, pero si se preserva en presencia de la compacidad de G como se afirma en el siguiente teorema, cuya prueba puede verse en [18, Proposición 1.1.8] .

Teorema 4.1.3. *Sean G un grupo compacto y X un espacio de Tychonoff. Entonces X/G es de Tychonoff.*

De este resultado podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 4.1.4. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio de Tychonoff. Entonces para cada $A \subset X$ cerrado e invariante y cada $x \notin A$ existe $\lambda : X \to I$ invariante, donde I denota el intervalo $[0,1]$, tal que $\lambda(G(x)) \subset \{1\}$ y $\lambda(A) \subset \{0\}$.*

Demostración. Del teorema anterior se tiene que X/G es de Tychonoff, además recordemos que la proyección orbital $p : X \to X/G$ es cerrada por ser G compacto, luego $p(A)$ es cerrado en X/G

Observe que $p(x) \notin p(A)$, de otra manera existiría $a \in A$ tal que $p(a) = p(x)$, es decir que existiría $g \in G$ tal que $ga = x$. Pero A es invariante, luego $x = ga \in A$ lo cual es una contradicción.

Dado que X/G es de Tychonoff y $p(x) \notin p(A)$, existe $\nu : X/G \to I$ continua tal que $\nu(p(x)) = 1$ y $\nu(p(a)) = 0$ para cada $a \in A$. Sea $\lambda = \nu \circ p : X \to I$. Es claro que para todos $z \in X$ y $g \in G$ se satisface

$$\lambda(gx) = \nu(p(gx)) = \nu(p(x)) = \lambda(x),$$

es decir que λ es invariante. Es claro que $\lambda(G(x)) \subset \{1\}$ y $\lambda(A) \subset \{0\}$ para cada $a \in A$. $\square$

Uno de los resultados mas importantes en la teoría de acciones de grupos compactos es el llamado teorema de la rebanada, probado por Mostow. Este jugará un papel central en los resultados posteriores. Primeramente damos un par de definiciones con las que se trabajará de aquí en adelante.

Definición 4.1.5. *Sea G un grupo. Decimos que G es un grupo de Lie si G es una variedad diferenciable y además las operaciones del grupo y la inversión son funciones suaves.*

Definición 4.1.6. *Sea X un G-espacio, sea H un subgrupo de G. Decimos que un subconjunto S de X es una H-rebanada local si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) *S es un conjunto H-invariante.*

ii) *S es cerrado en $G(S)$.*

iii) *Para cada $g \notin H$ se satisface $gS \cap S = \emptyset$.*

iv) *$G(S)$ es abierto en X.*

Dado $x \in S$, si $G_x = H$ decimos que S es una rebanada exacta. Si $G(S) = X$ entonces S es una H-rebanada global.

El teorema de la rebanada que a continuación enunciamos sin prueba puede verse [18, Corolario 1.7.19].

Teorema 4.1.7. *[Mostow] Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio. Para cada $x \in X$ existe una G_x-rebanada local que contiene a x.*

Una equivalencia bastante usual de la existencia de una rebanada que usaremos durante este capítulo se da en términos de funciones como se verá enseguida.

Proposición 4.1.8. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Dado $V \subset X$ abierto invariante, entonces para cualquier función equivariante $f : V \to G/H$ el conjunto $S = f^{-1}(eH)$ es una H-rebanada local. Si además $V = X$, entonces S es una H-rebanada global.*

Demostración. Sea $f : V \to G/H$ una función equivariante y sea $S = f^{-1}(eH)$. Observe que por ser V invariante, $G(S) \subset G(V) = V$. Además, si $x \in V$ entonces $f(x) = gH$ para alguna $g \in G$. Dado que f equivariante, se tiene que $f(g^{-1}x) = eH$, es decir, $g^{-1}x \in S$ y es claro que $x = g(g^{-1}x) \in G(S)$, por cual $V = G(S)$. Por lo tanto $G(S)$, es abierto en X. Además, S es cerrado en $G(S)$ por ser f continua.

Por otra parte si $g \in H$ y $s \in S$ entonces $f(gs) = gf(s) = geH = eH$, luego $gs \in S$ y por lo tanto S es H-invariante. Más aún, si $gS \cap S \neq \emptyset$ para algún $g \in G$, entonces existen $s, t \in S$ tales que $gs = t$, luego $f(gs) = f(t)$, de donde $gH = eH$ y por lo tanto $g \in H$. Con esto queda probado que S es una H-rebanada local.

Si además $V = X$ es claro que $G(S) = X$. Por lo tanto S es una H-rebanada global. □

Lema 4.1.9. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Entonces, para $x \in X$ existe una H-rebanada local que contiene a x si y solo si existe una vecindad abierta e invariante $V \subset X$ de x, y una función equivariante $f : V \to G/H$ tal que $f(x) = eH$.A f se le suele llamar función rebanadora.*

Demostración. Considere $p : G \to G/H$, la función cociente dada por $p(g) = gH$. Sea $x \in X$ y supongamos que existe S, una H-rebanada local tal que $x \in S$. Sea $V = G(S)$, para cada $z \in V$ tenemos que $z = gs$ para algunos $g \in G$ y $s \in S$. De esta manera, definimos $f : V \to G/H$ como $f(gs) = gH$.

Veamos primero que f está bien definida. Si $z = gs = ht$ para algunos $g, h \in G$ y $s, t \in S$ entonces $h^{-1}gs = t \in S$. Como S es una rebanada, $h^{-1}g \in H$. Luego $hH = gH$, por lo cual $f(gs) = f(ht)$ y por lo tanto f está bien definida. Claramente f es equivariante y $f(x) = eH$ por la definición de f.

Además f es continua, ya que para $A \subset G/H$ cerrado, de la continuidad de p, $p^{-1}(A)$ es cerrado en G. Afirmamos que $f^{-1}(A) = p^{-1}(A)(S)$ lo cual es claro ya que si $gs \in p^{-1}(A)(S)$ entonces $f(gs) = gH \in A$ y si $z \in f^{-1}(A)$, como $z = gs$ entonces $f(z) = gH \in A$, luego $g \in p^{-1}(A)$ y $z = gs \in p^{-1}(A)(S)$. Como $p^{-1}(A)(S)$ es la imagen bajo la acción del cerrado $p^{-1}(A) \times S$ de $G \times V$, dado que G es compacto la acción es cerrada por el teorema 4.1.1, luego f es continua.

La otra implicación es inmediata de la proposición anterior. □

4.1.1. Productos Torcidos

Dados G un grupo topológico, H un subgrupo cerrado de G y X un H-espacio, considere la función $\theta : H \times (G \times X) \to G \times X$ dada por $\theta(h,(g,x)) = (gh^{-1}, hx)$, que claramente es continua ya que lo es en cada coordenada. Se cumple también que $\theta(e,(g,x)) = (g, hx)$ y

$$\theta(h, \theta(l,(g,x))) = \theta(h,(gl^{-1}, lx)) = (gl^{-1}h^{-1}, hlx) = \theta(hl,(g,x)),$$

por lo tanto θ es una acción.

Definición 4.1.10. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Si X es un H-espacio, definimos el producto torcido de G con X como el espacio de órbitas de $G \times X$ bajo la acción $\theta(h,(g,x)) = (gh^{-1}, hx)$, es decir, $G \times_H X = (G \times X)/H$.*

A un elemento de $G \times_H X$ lo denotaremos por $[g,x]$. Es decir, $[g,x]$ denota la H-órbita del punto $(g,x) \in G \times X$.

Podemos definir una acción de G en $G \times_H X$ de la siguiente manera. Sea

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & G \times (G \times_H X) \to G \times_H X \\ & (g,[h,x]) \mapsto [gh,x]\,. \end{aligned}$$

Observe que $[k,x] = [l,y]$ si y solo si existe $h \in H$ tal que $(k,x) = (lh^{-1}, hy)$. Así, para cada $g \in G$ se satisface

$$\alpha(g,[l,y]) = [gl,y] = [glh^{-1}, hy] = [gk,x] = \alpha(g,[k,x]),$$

y por lo tanto α está bien definida.

Considere la proyección orbital $p : G \times X \to G \times_H X$, para la cual $p(g,x) = [g,x]$, y $f : G \times (G \times X) \to G \times X$ definida como $f(g,(h,x)) = (gh,x)$. Evidentemente f es continua.

Como p es continua y abierta, $id_G \times p : G \times (G \times X) \to G \times (G \times_H X)$ es abierta, además. Es fácil ver, de las definiciones de cada función, que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \times (G \times X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_G \times p"'] & G \times X \arrow[d, "p"] \\ G \times (G \times_H X) \arrow[r, "\alpha"] & G \times_H X \end{tikzcd}$$

por lo que para $U \subset G\times_H X$ abierto, $\alpha^{-1}(U) = (id_G \times p)(f^{-1}(p^{-1}(U)))$ que es abierto por ser $id_G \times p$ abierta así como f y p continuas.

Por otro lado $e[g,x] = [g,x]$ y $h(l[g,x]) = [hlg,x] = (hl)[g,x]$; por lo tanto α es una acción en $G \times_H X$.

Los productos torcidos tiene una estrecha relación con las funciones equivariantes de un G-espacio X a los espacios de la forma G/H donde H es un subgrupo cerrado de G y por consiguiente, en el caso de los grupos compactos de Lie, con las rebanadas.

Lema 4.1.11. *Sea G un grupo, H un subgrupo cerrado de G y S un H-espacio. Entonces la función $\pi : G \times_H S \to G/H$ dada por $\pi[g,s] = gH$ es continua, abierta y equivariante.*

Demostración. Sea $\pi_1 : G \times S \to G$ la proyección en la primera coordenada. Considere además la proyección orbital $p : G \times S \to G \times_H S$ y la función cociente $q : G \to G/H$. Cada una de estas funciones es continua y abierta.

Sea $\psi = q \circ \pi_1 : G \times S \to G/H$. De lo anterior sabemos que ψ es continua y abierta. Observe además que para cada $[g,s] \in G \times_H X$ se tiene que $p^{-1}([g,s]) = \{(gh^{-1}, hs) \in G \times X \mid h \in H\}$.

Por otro lado, para cada $(g,s) \in G \times S$ y $h \in H$ se cumple que

$$\psi(gh^{-1}, hs) = q(\pi_1((gh^{-1}, hs))) = q(gh^{-1}) = gh^{-1}H = gH$$

pues $h^{-1} \in H$, es decir, ψ es constante en las fibras de p. Entonces, por el lema de transgresión, existe una única $\phi : G \times_H S \to G/H$ continua tal que $\phi \circ p = \psi$. Luego, para cada $[g,s] \in G \times_H X$ se tiene que

$$\phi[g,s] = \phi(p(g,s)) = \psi(g,s) = q(\pi_1(g,s)) = q(g) = gH.$$

Entonces $\pi = \phi$.

Dado que p es sobre y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & G/H, \\ G \times_H S \arrow[ur, "\phi"] & \end{tikzcd}$$

para cada $U \subset G \times_H S$ se tiene $\pi(U) = \psi(p^{-1}(U))$. Así, si U es abierto entonces $\pi(U)$ lo es ya que ψ es abierta y p es continua. Finalmente π es equivariante, pues $\pi[kg, s] = kgH = k\pi[g, s]$ para cada $k \in G$ y $[g, s] \in G \times_H X$. □

Por otra parte, tenemos que en presencia de una función rebanadora un G-espacio puede considerarse como un producto torcido.

Lema 4.1.12. *Sean G un grupo compacto y H un subgrupo cerrado de G. Para un G-espacio X y $f : X \to G/H$ una función equivariante, si $S = f^{-1}(eH)$, se tiene que la función $q : G \times_H S \to X$ definida por $q([g, s]) = gs$ es un homeomorfismo equivariante.*

Demostración. Como f es equivariante, tenemos que $S = f^{-1}(eH)$ es una H-rebanada global, en particular S es H invariante y por lo tanto un H-espacio.

Consideremos la proyección orbital $p_H : G \times S \to G \times_H S$ y la restricción de la acción a $G \times S$, $\theta : G \times S \to X$, donde $\theta(g, s) = gs$. Se tiene que θ es constante en las fibras de p_H, lo cual se sigue del hecho que $p_H^{-1}([g, s]) = \{(gh^{-1}, hs) \mid h \in H\}$, luego $\theta(gh^{-1}, hs) = gs$ para cada $h \in H$. Por el lema de transgresión existe una única $\varphi : G \times_H S \to X$, continua, tal que $\varphi \circ p_H = \theta$, es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p_H"'] & X. \\ G \times_H S \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De la unicidad de φ se sigue que $q = \varphi$ es continua.

Veamos que q es equivariante. Sean $g \in G$ y $[k, s] \in G \times_H S$. Entonces

$$q(g[k, s]) = q([gk, s]) = gks = gq([k, s]).$$

Además si $x \in X$, se tiene que $f(x) = gH$ para algún $g \in G$. Luego, como f es equivariante, $f(g^{-1}x) = eH$; entonces $g^{-1}x \in S$, $q([g, g^{-1}x]) = gg^{-1}x = x$ y por lo tanto q es sobreyectiva. Si $q([g, s]) = q([k, r])$, se tiene que $gs = kr$ con $s, r \in S$; entonces $gH = gf(s) = f(gs) = f(kr) = kH$. Luego $g = kh$ para alguna $h \in H$, por lo cual $k = gh^{-1}$ y $khs = kr$. Por consiguiente $r = hs$, y por lo tanto, $[k, r] = [g, s]$ de donde inferimos que q es biyectiva.

Por otro lado, dado que S es cerrado en X tenemos que $G \times S$ es cerrado en $G \times X$. Como G es compacto, la acción de G en X es cerrada, por el teorema 4.1.1. Entonces, θ es cerrada ya que es la restricción de la acción al cerrado $G \times S$. Por la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que q es cerrada, pues p_H es continua y θ es cerrada. Por lo tanto q es un homeomorfismo equivariante. $\square$

Usando los resultados anteriores podemos probar una propiedad importante de las funciones equivariantes cuya imagen está contenida en un G-espacio de la forma G/H.

Teorema 4.1.13. *Sean G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio. Entonces, cada función equivariante $f : X \to G/H$ es abierta.*

Demostración. Considere $S = f^{-1}(eH)$. Por la proposición 4.1.8 se tiene que S es una H-rebanada global, en particular $G(S) = X$. Luego, por el lema anterior X es G-homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$. Usando el homeomorfismo equivariante $q : G \times_H S \to X$ definido por $q([g, s]) = gs$, tenemos que $q^{-1} : X \to G \times_H S$ está definido como $q^{-1}(x) = [g, s]$, donde $x = gs$ ya que $X = G(S)$.

Del lema 4.1.11, la función $\pi : G \times_H S \to G/H$ dada por $\pi[g, s] = gH$ es abierta. Observe que para cada $x \in X$ se satisface

$$f(x) = f(gs) = gf(s) = gH = \pi[g, s] = \pi(q^{-1}(gs)) = \pi(q^{-1}(x)),$$

es decir $f = \pi \circ q^{-1}$. Como ambas funciones son abiertas f también lo es. $\square$

Como nota final podemos ver que en el caso de los grupos compactos G, con H un subgrupo cerrado de G y cada función equivariante $f : X \to G/H$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo tomando $S = f^{-1}(eH)$ y las funciones que se han considerado en los resultados anteriores.

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\theta"'] & G \times_H S \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & G/H . \end{tikzcd}$$

4.2. Compactaciones equivariantes libres

Con las propiedades de las funciones consideradas en la sección anterior es posible construir una familia de G-espacios compactos y funciones equivariantes de un G-espacio X a estos, que separen puntos de cerrados. Estos espacios son los conos de un espacio de la forma G/H.

Lema 4.2.1. *Sean X y Y espacios topológicos, con Y compacto, $W \subset X$ abierto y $f : W \to Y$ una función continua. Si existe $\lambda : X \to [0,1]$ tal que $\lambda(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus W$ entonces la función $F : X \to \mathrm{Cono}(Y)$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} \theta & si\ x \notin W, \\ [f(x), \lambda(x)] & si\ x \in W \end{cases}$$

es continua.

Demostración. Si $p : Y \times [0,1] \to \mathrm{Cono}(Y)$ es la función cociente y $x \in W$ tenemos que $F(x) = p(f(x), \lambda(x))$, y por lo tanto, es continua en W. Además para $F\ |_{X\setminus W}$ es constante, luego es continua en $X \setminus W$. Resta ver que F es continua para cada $x \in Fr(W)$.

Sea $x \in Fr(W) = Fr(X \setminus W)$. Como W es abierto entonces $x \in X \setminus W$, luego $F(x) = \theta$. Consideremos una vecindad básica de $\theta \in \mathrm{Cono}(Y)$, la cual es de la forma $p(Y \times [0,t))$ con $t > 0$ como se observó en el primer capítulo, ya que Y es compacto. Ahora, como $\lambda(x) = 0$ y dado que λ es continua, existe una vecindad V de x tal que $\lambda(V) \subset [0,t)$. Luego, para $v \in V$ se cumple que $F(v) \in p(Y \times [0,t))$ y por lo tanto F es continua. □

Teorema 4.2.2 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sea G un grupo compacto de Lie, X un G-espacio, $A \subset X$ cerrado y $a \in X$ tal que $a \notin A$. Entonces, existe una función $f : X \to \mathrm{Cono}\,(G/G_a)$ equivariante tal que $f(a) \neq \theta$ y $f(a) \notin \overline{f(A)}$.*

Demostración. Primero notemos que el estabilizador G_a es un subconjunto cerrado de G, luego es compacto. Como $G_a(a) = \{a\} \subset X \setminus A$, G_a es compacto y $X \setminus A$ es abierto entonces existe N vecindad de a tal que $G_a(N) \subset X \setminus A$, luego $G_a(N)$ claramente es una vecindad G_a-invariante de a.

Por otro lado por la continuidad de la acción existen vecindades abiertas $O \subset G$ y $U \subset X$ de e y a respectivamente, tales que $O(U) \subset X \setminus A$. Además por el argumento mencionado anteriormente podemos considerar a U como una vecindad G_a-invariante.

Como G es de Lie, por el teorema de la rebanada y el lema 4.1.9 existe una vecindad invariante V de a y una función equivariante $\varphi : V \to G/G_a$ tal que $\varphi(a) = eG_a$. Considere $S = \varphi^{-1}(eG_a)$, $Q = S \cap U$ y $W = G(Q)$. Observe que S y U son G_a-invariantes; tenemos además que $O(Q) \subset O(U) \subset X \setminus A$ y $a \in Q$. También se cumple $W \subset V$.

Observe que para estos conjuntos $W \cap S = Q$, ya que si $x \in Q \subset G(Q) = W$ dado que $Q = S \cap U$ entonces $x \in W \cap S$. Por otro lado, si $x \in W \cap S$ existen $g \in G$ y $s \in S \cap U$ tales que $x = gs$. Pero entonces $\varphi(x) = \varphi(gs) = g\varphi(s)$ y por lo tanto $eG_a = gG_a$, por lo que $g \in G_a$. Como S y U son G_a-invariantes, $x = gs \in S \cap U = Q$.

Sea $\psi = \varphi|_W : W \to G/G_a$. Es claro que ψ es equivariante pues φ lo es y de la observación anterior se tiene que

$$\psi^{-1}(eG_a) = W \cap \varphi^{-1}(eG_a) = W \cap S = Q.$$

Por la proposición 4.1.8 Q es una G_a-rebanada.

Por otro lado, del lema 4.1.12, tenemos que $q : G \times_{G_a} S \to V$ definida por $q([g, s]) = gs$ es un G-homeomorfismo y como la proyección orbital $p_{G_a} : G \times S \to G \times_{G_a} S$ es abierta, tenemos que $q(p_{G_a}(G \times Q))$ es abierto en V ya que Q es abierto en S, pues $Q = S \cap U$. Se afirma que $W = G(Q) = q(p_{G_a}(G \times Q))$. En efecto:

$$q(p_{G_a}(G \times Q)) = \{q[g, y] \in V \mid (g, y) \in G \times Q\} = \{gy \mid g \in G, y \in Q\} = G(Q).$$

Entonces W es un abierto invariante de V, y por lo tanto de X. Además $a \in W$.

Como Q es una G_a-rebanada para a, tenemos que W es G-homeomorfo a $G \times_{G_a} Q$. Ahora, $O \times_{G_a} Q$ es abierto en $G \times_{G_a} Q$, y por lo tanto, $O(Q) \subset W$ es abierto en W. Del teorema 4.1.13 la función ψ es abierta, de esto último se sigue que $\psi(O(Q))$ es abierto en G/G_a. Es claro que $eG_a \in \psi(O(U))$.

Ahora veremos que se cumple $\psi(O(Q)) \cap \psi(A \cap W) = \emptyset$. Si no se cumpliera, entonces $\psi(hx) = \psi(gy)$ para algunos $h \in O$, $g \in G$ y $x, y \in Q$, donde $gy \in A$. Luego como ψ es equivariante se sigue que $h\psi(x) = g\psi(y)$. Además como $x, y \in Q$ tenemos que $\psi(x) = eG_a = \psi(y)$, de donde $hG_a = gG_a$. Luego $g = hk$ para algún $k \in G_a$ por lo cual $gy = hky$. Como Q es G_a-invariante, $ky \in Q$, entonces $gy = hky \in O(Q) \subset X \setminus A$, lo cual es una contradicción ya que $gy \in A$

Como W es invariante y abierto, $X \setminus W$ es cerrado e invariante y $a \notin X \setminus W$. Por el corolario 4.1.4 existe $\lambda : X \to I$ invariante tal que $G(a) \subset \lambda^{-1}(\{1\})$ y $X \setminus W \subset \lambda^{-1}(\{0\})$. Por el lema 4.2.1, dado que G/G_a es un espacio compacto, la función $f : X \to \text{Cono}\,(G/G_a)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \theta & \text{si } x \notin W \\ \lambda(x)\psi(x) & \text{si } x \in W \end{cases}$$

es continua; resta probar que f cumple las condiciones deseadas.

Sean $x \in X$ y $g \in G$. Supongamos primero que $x \notin W$, dado que W y $X \setminus W$ son invariantes, $gx \in X \setminus W$ luego $f(gx) = \theta = g\theta = gf(x)$. Si $x \in W$. Entonces $gx \in W$. Luego ya que ψ es equivariante y λ es invariante se tiene

$$f(gx) = \lambda(gx)\psi(gx) = \lambda(x)(g\psi(x)) = g\lambda(x)\psi(x) = gf(x)$$

quedando probado que f es equivariante. Además es fácil ver que $f(a) = 1 \cdot eG_a \neq \theta$.

Para finalizar, se afirma que existe una vecindad de $f(a)$ que no interseca a $f(A)$. Tenemos primeramente que

$$f(A \cap (X \setminus W)) = \{\lambda(x)\psi(x) \mid x \in A \cap X \setminus W\}.$$

Como $\lambda(x) = 0$ para cada $x \in X \setminus W$, se tiene que $f(A \cap (X \setminus W)) = \{\theta\}$. Por otro lado, es claro que

$$f(A \cap W) \subset [0,1]\psi(A \cap W) = \{t\psi(x) \in \text{Cono}(G/G_a) \mid x \in A \cap W\},$$

y por lo tanto $f(A) \subset [0,1]\psi(A \cap W)$.

$B = (0,1]\psi(O(U))$ es abierto en Cono (G/G_a) ya que $\psi(O(U))$ es abierto en G/G_a y además $a \in O(U)$. Entonces $f(a) = 1G_a \in (0,1]\psi(O(U))$. Luego, observe que $(0,1]\psi(O(U))$ y $[0,1]\psi(A \cap W))$ son ajenos en Cono (G/G_a), dado que los conjuntos $\psi(O(U)) \times (0,1]$ y $(\psi(A \cap W) \times (0,1]) \cup (G/G_a \times \{0\})$ lo son, esto ya que $\psi(O(Q)) \cap$

$\psi(A \cap W) = \emptyset$ como se probó anteriormente. Por lo tanto $B \cap f(A) = \emptyset$, de donde, $f(a) \notin \overline{f(A)}$ concluyendo la prueba. $\square$

De este resultado se deducen los siguientes corolarios para los espacios libres y semilibres, respectivamente.

Corolario 4.2.3. *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio libre. Entonces la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f : X \to \text{Cono}\,(G) \mid f \text{ es equivariante}\}$ separa puntos de cerrados.*

Demostración. Es inmediato del teorema anterior ya que $G_a = \{e\}$ para cada $a \in X$, luego se puede considerar $G = G/G_a$. Si $A \subset X$ es cerrado y $a \notin A$, existe $f : X \to \text{Cono}(G/G_a) = \text{Cono}(G)$ equivariante tal que $f(a) \notin \overline{f(A)}$. $\square$

Corolario 4.2.4. *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio semilibre. Entonces la familia de funciones $\mathcal{F} = \{f : X \to \text{Cono}\,(G) \times I \mid f \text{ es equivariante}\}$ separa puntos de cerrados.*

Demostración. Sea A un cerrado en X y $a \notin A$, como X es semilibre tenemos que $G_a = G$ o $G_a = \{e\}$. Si $G_a = G$ podemos considerar una vecindad U de a que sea G-invariante y $U \subset X \setminus A$. Luego $X \setminus U$ es un cerrado invariante y $A \subset X \setminus U$, por lo que existe $h : X \to I$ invariante tal que $X \setminus U \subset h^{-1}(\{1\})$ y $h(a) = 0$. Entonces $f : X \to \text{Cono}(G) \times I$ dada por $f(x) = (\theta, h(x))$, es continua. Además

$$f(gx) = (\theta, h(gx)) = (g\theta, h(x)) = g(\theta, h(x)) = gf(x)$$

por lo tanto f es equivariante y $f(a) = (\theta, 0)$. Por otro lado,

$$\overline{f(A)} = \overline{\{\theta\} \times h(A)} = \{\theta\} \times \overline{h(A)} = \{(\theta, 1)\}$$

y por lo tanto $f(a) \notin \overline{f(A)}$.

Si $G_a = \{e\}$, entonces se puede considerar $G = G/G_a$. Del teorema anterior existe $j : X \to \text{Cono}(G/G_a) = \text{Cono}(G)$ equivariante tal que $j(a) \notin \overline{j(A)}$. Sea $f : X \to \text{Cono}(G) \times I$ dada por $f(x) = (j(x), 1)$, claramente f es equivariante por serlo j y análogamente al caso anterior

$$\overline{f(A)} = \overline{j(A) \times \{1\}} = \overline{j(A)} \times \{1\}$$

como $j(a) \notin \overline{j(A)}$, entonces $f(a) \notin \overline{f(A)}$. $\square$

El siguiente teorema nos indica que en el caso de los G-espacios libres la existencia de una compactación equivariante estrictamente semilibre está garantizada. Más adelante se proporciona un ejemplo de un G-espacio libre sin compactación equivariante libre, así como un espacio estrictamente semilibre sin una compactación estrictamente semilibre.

Teorema 4.2.5 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio libre no compacto. Entonces X tiene una compactación equivariante estrictamente semilibre.*

Demostración. Supongamos primeramente que X no tiene una compactación equivariante libre.

Como X es libre la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{f : X \to \mathrm{Cono}\,(G) \mid f \text{ es equivariante}\}$$

separan puntos de cerrados. Sea $k = |\mathcal{F}|$, entonces la función producto diagonal

$$F = \mathop{\Delta}_{f\in\mathcal{F}} f : X \to \mathrm{Cono}\,(G)^k$$

es un encaje equivariante de X en $\mathrm{Cono}\,(G)^k$. Sea $K = \overline{F(X)}$, K es un G-espacio compacto en el que X es denso. Es claro que (K, F) es una compactación equivariante para X. Ahora bien, como $\mathrm{Cono}\,(G)^k$es un G-espacio estrictamente semilibre y $K \subset \mathrm{Cono}\,(G)^k$, entonces K es semilibre.

Por otro lado, si X tiene una compactación equivariante libre K, dado que X no es compacto existe $p \in K \setminus X$. Considere $Y = K \setminus G(p)$, como $G(p)$ es invariante entonces Y lo es y podemos considerar a Y como un G-espacio, observe que Y es libre. Ahora, como $p \notin X$, entonces $G(p) \cap X = \emptyset$; luego $X \subset Y$.

Ya que $G(p)$ es cerrado, entonces Y es abierto en K y por lo tanto Y es localmente compacto. Además K es una compactación equivariante para Y ya que $X \subset Y$. Como Y es localmente compacto, podemos considerar su compactación de Alexandroff B. Del teorema 3.1.3 esta es una compactación equivariante de Y que es estrictamente semilibre ya que Y es libre y al ser una compactación para Y, lo es también de X. □

Capítulo 5

Compactaciones maximales

A continuación se prueban la existencia de compactaciones equivariantes maximales, algunas de sus propiedades, así como los casos para G-espacios libres (respectivamente semilibres, estrictamente semilibres). Primeramente se definen maneras de comparar compactaciones equivariantes análogas al caso de las compactaciones no equivariantes de espacios topológicos. En este capítulo todos los grupos considerados serán localmente compactos salvo que se indique otro caso.

Definición 5.0.6. *Se dice que dos compactaciones equivariantes* (KX, k)*,* (LX, l) *de un* G*-espacio* X *son equivalentes si existe* $f : KX \to LX$ *un* G*-homeomorfismo tal que* $f(k(x)) = l(x)$ *para cada* $x \in X$*.*

Es inmediato de su definición que esta relación es de equivalencia.

Se puede considerar a X como un subespacio de sus compactaciones, de esta manera en ocasiones se omitirá el encaje equivariante para hacer mas sencilla la notación. En este sentido la definición anterior puede traducirse de la siguiente manera, si consideramos dos compactaciones equivariantes de X, KX y LX, son equivalentes si existe un G-homeomorfismo $f : KX \to LX$ tal que $f(x) = x$ para cada $x \in X$, es decir, X es fijo bajo f.

Ahora definimos la segunda relación en la clase de las G-compactaciones de X

Definición 5.0.7. *Sean dos compactaciones equivariantes* (KX, k)*,* (LX, l) *de un* G*-espacio* X*. Se dice que* $(KX, k) \preceq (LX, l)$ *si existe una función equivariante* f :

$LX \to KX$ tal que $f(l(x)) = k(x)$ para cada $x \in X$.

Observe que esta función es siempre sobreyectiva, ya que al ser $f(LX)$ compacto y $f \circ l = k$ se tiene que

$$KX = \overline{(k(X))} = \overline{f(l(X))} \subset \overline{f(LX)} = f(LX).$$

Por otro lado usando el hecho de que X es denso en sus compactaciones se tiene que dos G-compactaciones (KX, k) y (LX, l) son equivalentes si y solo si $(KX, k) \preceq (LX, l)$ y $(LX, l) \preceq (KX, k)$.

Además, la relación $\preceq$ está bien definida en la clase de equivalencia de las compactaciones equivariantes de X y resulta ser un orden parcial usando la observación anterior. En seguida se prueba la existencia de una compactación equivariante maximal respecto al orden $\preceq$.

Teorema 5.0.8. *Sea X un G-espacio con al menos una compactación equivariante. Entonces, existe una única compactación equivariante maximal respecto al orden $\preceq$, salvo equivalencia, denotada como $\beta_G X$.*

Demostración. Ya que X tiene al menos una G-compactación, se puede considerar una familia $\Gamma = \{(K_\alpha, j_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ de G-compactaciones de X con un representante de cada clase de equivalencia.

Considere el G-espacio compacto $K = \prod_{\alpha \in A} K_\alpha$ y la función $\beta_G = \underset{\alpha \in A}{\Delta} j_\alpha : X \to Y$. Como cada j_α es un encaje equivariante, j lo es. Además, $\beta_G X = \overline{\beta_G(X)}$ es un G-espacio compacto y $(\beta_G X, \beta_G)$ es una G-compactación de X.

Dada cualquier compactación equivariante (K, j) de X, existe $\lambda \in A$ tal que (K_λ, j_λ) es un representante de la familia Γ que es equivalente a (K, j).

Sea $\pi_\lambda : \beta_G X \to K_\lambda$ la proyección en la coordenada λ, la cual es una función equivariante. Para cada $x \in X$ se tiene que $\beta_G(x) = (j_\alpha(x))_{\alpha \in A}$ luego $\pi_\lambda(j(x)) = j_\lambda(x)$. Por lo tanto $(K, j) \preceq (\beta_G X, \beta_G)$, pues $(K_\lambda, j_\lambda) \preceq (\beta_G X, \beta_G)$ y (K, j) es equivalente a (K_λ, j_λ).

Esto prueba que $\beta_G X$ es un elemento máximo en las clases de las G-compactaciones de X; este último hecho implica la unicidad de esta salvo equivalencia. $\square$

A continuación demostraremos algunas de las propiedades análogas a la compactación de Stone-Čech que posee la compactación $\beta_G X$ de un G-espacio X.

Teorema 5.0.9. *Sea G un grupo. Para un G-espacio X y cada función equivariante $f : X \to B$, donde B es un G-espacio compacto, existe una única $F : \beta_G X \to B$ equivariante tal que $F(\beta_G(x)) = f(x)$ para cada $x \in X$, donde $\beta_G : X \to \beta_G X$ es un encaje equivariante.*

Más aún, si (bX, b) una compactación equivariante para la cual se satisface la condición anterior. Entonces bX es equivalente a $\beta_G X$.

Demostración. Considere el encaje equivariante $\beta_G : X \to \beta_G X$. Sea $b = \beta_G \Delta f : X \to \beta_G(X) \times B$, con $b(x) = (\beta_G(x), f(x))$, b es continua ya que f y β_G lo son y si $b(x) = b(y)$, entonces $\beta_G(x) = \beta_G(y)$. Como β_G es encaje se tiene que $x = y$, luego b es inyectiva.

Veamos que b es abierta sobre $b(X)$, es decir, b es un encaje. Sea U abierto en X como β_G es encaje $\beta_G(U)$ es abierto en $\beta_G(X)$, por lo tanto existe V abierto de $\beta_G X$ tal que $V \cap \beta_G(X) = \beta_G(U)$, luego $V \times B$ es abierto en $\beta_G(X) \times B$. Afirmamos que $(V \times B) \cap b(X) = b(U)$. Si $y \in (V \times B) \cap b(X)$ entonces existe $x \in X$ tal que

$$y = b(x) = (\beta_G(x), f(x)) \in V \times B.$$

Luego $\beta_G(x) \in V \cap \beta_G(X) = \beta_G(U)$. Por ser β_G inyectiva se tiene que $x \in U$ y por lo tanto $y = b(x) \in b(U)$; con lo que $(V \times B) \cap b(X) \subset b(U)$. Ahora, si $y \in b(U)$ entonces existe $x \in U$ tal que

$$y = b(x) = (\beta_G(x), f(x)) \in b(U).$$

Además, $\beta_G(x) \in \beta_G(U) = V \cap \beta_G(X)$. Entonces $y \in (V \times B) \cap b(X)$, por lo tanto b es un encaje.

Por otro lado, para $bX = \overline{b(X)} \subset \beta_G(X) \times B$, tenemos que (bX, b) es una compactación equivariante de X. Como $\beta_G X$ es maximal existe $\phi : \beta_G X \to bX$ equivariante tal que $\phi(\beta_G(x)) = b(x)$ para cada $x \in X$. Sea $\pi_2 : \beta_G(X) \times B \to B$ la proyección en la segunda coordenada y considere $F = \pi_2 \circ \phi : \beta_G X \to B$. Dado que π_2 y ϕ son equivariantes F lo es. Entonces para $x \in X$,

$$F(\beta_G(x)) = \pi_2(\phi(\beta_G(x))) = \pi_2(b(x)) = \pi_2(\beta_G(x), f(x)) = f(x).$$

La unicidad de F se sigue del hecho que $\beta_G(X)$ es denso en $\beta_G X$; así queda probada la primera afirmación.

Sea (bX, b) una compactación equivariante para la cual se cumple la condición mencionada antes, entonces para $\beta_G : X \to \beta_G X$ existe $B : bX \to \beta_G X$ equivariante tal que $B(b(x)) = \beta_G(x)$. Luego se tiene que $\beta_G X \preceq bX$ y $bX \preceq \beta_G X$ por ser $\beta_G X$ máximo, por lo tanto bX es equivalente a $\beta_G X$. □

Una propiedad universal mas para la G-compactación maximal puede darse en términos de funciones G-uniformes como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 5.0.10 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sean G un grupo y X un G-espacio. Entonces, para cada función $f : X \to \mathbb{R}$, G-uniforme y acotada, existe una única $F : \beta_G X \to \mathbb{R}$ que extiende a f.*

Además, si bX es una compactación equivariante para la que se satisface la condición anterior. Entonces, bX es equivalente a $\beta_G X$.

Demostración. Considere $f : X \to \mathbb{R}$, G-uniforme y acotada, considere el G-espacio X_f como en el lema 3.2.3 y las funciones $\Phi_f : X \to X_f$ y $\delta : X_f \to \mathbb{R}$ dadas por $\Phi(x) = f_x$ para $x \in X$ y $\delta(g) = g(e)$ para $g \in X_f$.

Por el lema 3.2.3, X_f es un G-espacio compacto ya que f es G-uniforme y acotada.

Por la proposición anterior, para la función $\Phi_f : X \to X_f$ existe $\Psi_f : \beta_G X \to X_f$ que extiende a esta ultima. Sea $F = \delta \circ \Psi_f : \beta_G X \to \mathbb{R}$. Entonces para cada $x \in X$ se cumple

$$F(x) = \delta(\Psi_f(x)) = \delta(f_x) = f_x(e) = f(x)$$

lo cual prueba la primera afirmación.

Sea B un G-espacio compacto y considere una función equivariante $f : X \to B$. Por la compacidad de B se tiene, del lema 3.2.2, que cada $\phi \in \mathcal{C}(B)$ es G-uniforme y acotada y además $f_\phi = \phi \circ f : X \to \mathbb{R}$ también lo es. Por hipótesis existe $F_\phi : bX \to \mathbb{R}$ extensión de f_ϕ. Considere el producto diagonal

$$\lambda = \mathop{\Delta}_{\phi \in \mathcal{C}(B)} \phi : B \to \prod_{\phi \in \mathcal{C}(B)} \mathbb{R},$$

es un encaje ya que $\mathcal{C}(B)$ separa puntos de cerrados, y

$$D = \underset{\phi\in\mathcal{C}(B)}{\Delta} F_\phi : bX \to \prod_{\phi\in\mathcal{C}(B)} \mathbb{R}.$$

Dado que D es continua $D(bX) = D(\overline{X}) \subset \overline{(D(X))}$. Además, para cada $x \in X$, se tiene que

$$D(x) = (F_\phi(x))_{\phi\in\mathcal{C}(B)} = (f_\phi(x))_{\phi\in\mathcal{C}(B)} = (\phi(f(x)))_{\phi\in\mathcal{C}(B)} = \lambda(f(x)),$$

de donde se sigue que $D(bX) \subset \overline{(D(X))} = \overline{\lambda(f(X))} \subset \lambda(B)$.

Entonces, considere $F = \lambda^{-1} \circ D : bX \to B$ que es continua y además cada $x \in X$ $F(x) = f(x)$.

Resta ver que F es equivariante. Para cada $g \in G$, sea $A_g = \{x \in bX \mid gF(x) = F(gx)\}$. Cada A_g es un conjunto cerrado, ya que si $z \in bX \setminus A_g$, entonces $gF(z) \neq F(gz)$. Por lo que existen $U, W \subset B$ abiertos ajenos tales que $gF(z) \in U$ y $F(gz) \in W$. Dado que $F(z) \in g^{-1}U$ y $g^{-1}U$ es abierto y la acción es continua existe V vecindad de z tal que $F(V) \subset g^{-1}U$ y $F(gV) \subset W$. Es claro que $V \subset bX \setminus A_g$ probando así que A_g es cerrado.

Ahora $X \subset \cap_{g\in G} A_g$, ya que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. Entonces $bX = \overline{X} \subset \cap_{g\in G} A_g$ de donde $bX = \cap_{g\in G} A_g$. Por lo tanto F es equivariante y usando el teorema anterior tenemos que bX es equivalente a $\beta_G X$. $\square$

De este teorema se sigue como corolario una propiedad mas que caracteriza $\beta_G X$.

Corolario 5.0.11 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sean bX una G-compactación para X y K es una subfamilia equicontinua, invariante y compacta de $\mathcal{C}(G)$. Si para cada función equivariante $f : X \to K$ admite una única extensión equivaiante a bX. Entonces bX es equivalente a $\beta_G X$.*

Demostración. Basta ver que satisface la condición del teorema anterior. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función acotada y G-uniforme. Para $\Phi_f : X \to X_f$ como X_f es una familia equicontinua, invariante y compacta de $\mathcal{C}(G)$ existe una única extensión $\Phi'_f : bX \to X_f$. Sea $\delta : X_f \to \mathbb{R}$ dada por $\delta(g) = g(e)$, entonces la función $F = \delta \circ \Phi'_f : bX \to \mathbb{R}$ cumple que

$$F(x) = \delta(\Phi'_f(x)) = \delta(\Phi_f(x)) = \delta(f_x) = f(x)$$

para cada $x \in X$, es decir F extiende a f. La unicidad es inmediata de la densidad de X. $\square$

Corolario 5.0.12 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones equivariantes $f : X \to K_f$ donde K_f es una familia equicontinua, compacta e invariante de $\mathcal{C}(G)$. Entonces la función*

$$F = \mathop{\Delta}_{f \in \mathcal{F}} f : X \to \prod_{f \in \mathcal{F}} K_f$$

es un encaje equivariante y $\overline{F(X)}$ es una compactación equivariante de X equivalente a $\beta_G X$.

Demostración. Del teorema 3.2.5 la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, por lo tanto F es un encaje equivariante. Sea $B = \overline{F(X)}$, luego (B, F) es una compactación equivariante de X.

Ahora bien, si $l : X \to K_l$ es una función equivariante con K_l una familia equicontinua, compacta e invariante de $\mathcal{C}(G)$ entonces

$$\pi_l : B \subset \prod_{f \in \mathcal{F}} K_f \to K_l$$

dada por $\pi_l(x_f)_{f \in \mathcal{F}} = x_l$ es continua y equivariante y para cada $F(x) \in F(X)$ se tiene que $F(x) = (f(x))_{f \in \mathcal{F}}$. Luego $\pi_l(F(x)) = l(x)$, es decir, π_l extiende a l y por el corolario anterior B es equivalente a $\beta_G X$. $\square$

En el caso en el que G es un grupo compacto de Lie podemos dar otra caracterización de la G-compactación maximal de un G-espacio X.

Teorema 5.0.13 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sean G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio. Entonces, para cada función equivariante $f : X \to \mathrm{Cono}\,(G/H)$, con H un subgrupo cerrado de G, existe una única $F : \beta_G X \to \mathrm{Cono}\,(G/H)$, equivariante, que extiende a f.*

Además, si bX es una compactación equivariante para la que se satisface la condición anterior. Entonces, bX es equivalente a $\beta_G X$.

Demostración. Sea H un subgrupo cerrado de G. Entonces $\mathrm{Cono}\,(G/H)$ es un G-espacio compacto y por ende la primera afirmacion es cierta por el teorema 5.0.9.

Sea B un G-espacio compacto y una función equivariante $f : X \to B$. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones equivariantes $g : X \to \mathrm{Cono}\,(G/H_g)$ donde H_g es un subgrupo cerrado de G. Del teorema 4.2.2 se tiene que la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados en B.

Entonces la función

$$\lambda = \mathop{\Delta}_{g\in\mathcal{F}} g : B \to \prod_{g\in\mathcal{F}} \mathrm{Cono}\,(G/H_g),$$

es un encaje equivariante, ya que cada $g \in \mathcal{F}$ es equivariante y por lo tanto λ es equivariante. Considere el homomorfismo equivariante $\lambda^{-1} : \lambda(B) \to B$.

Para cada $g \in \mathcal{F}$ denotemos por

$$\pi_g : \prod_{g\in\mathcal{F}} \mathrm{Cono}\,(G/H_g) \to \mathrm{Cono}\,(G/H_g),$$

la proyección en la coordenda g. Dada $g \in \mathcal{F}$. Sea $\phi_g = \pi_g \circ \lambda \circ f : X \to \mathrm{Cono}\,(G/H_g)$, la cual es composición de funciones equivariantes. Por hipótesis existe $\psi_g : bX \to \mathrm{Cono}\,(G/H_g)$ equivariante que extiende a ϕ_g.

Entonces,

$$D = \mathop{\Delta}_{g\in\mathcal{F}} \psi_g : bX \to \prod_{g\in\mathcal{F}} \mathrm{Cono}\,(G/H_g)$$

es una función equivariante.

Dado que D es continua $D(bX) = D(\overline{X}) \subset \overline{(D(X))}$. Además, para cada $x \in X$, se tiene que

$$D(x) = (\psi_g(x))_{g\in\mathcal{F}} = (\phi_g(x))_{g\in\mathcal{F}} = (\pi_g(\lambda(f(x)))_{g\in\mathcal{F}} = \lambda(f(x)),$$

de donde se sigue que $D(bX) \subset \overline{(D(X))} = \overline{\lambda(f(X))} \subset \lambda(B)$.

Entonces, considere $F = \lambda^{-1} \circ D : bX \to B$ que es continua. Más aún, para cada $x \in X$ se tiene que $F(x) = f(x)$. Además, F es equivariante pues λ^{-1} y D lo son. Por el teorema 5.0.9 tenemos que bX es equivalente a $\beta_G X$ $\square$

Corolario 5.0.14 (N. Antonyan, S. Antonyan). *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio. Ahora, sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las funciones equivariantes $f : X \to \operatorname{Cono}(G/H_f)$ donde H_f es un subgrupo cerrado de G. Entonces la función*

$$F = \underset{f\in\mathcal{F}}{\Delta} f : X \to \prod_{f\in\mathcal{F}} \operatorname{Cono}(G/H_f)$$

es un encaje equivariante y $\overline{F(X)}$ es una compactación equivariante de X equivalente a $\beta_G X$.

Demostración. Del teorema 4.2.2 la familia $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, por lo tanto F es un encaje equivariante. Sea $B = \overline{F(X)}$; luego (B, F) es una compactación equivariante de X.

Es claro que B cumple la condición mencionada en el teorema anterior. Por lo tanto B es equivalente a $\beta_G X$. □

En el caso de existir una compactación equivariante libre para un G-espacio X se puede probar de manera análoga la existencia de una compactación maximal equivariante libre bajo el mismo orden, ya que el producto de G-espacios libres también es libre, sin embargo esta coincide con la G-compactación maximal como se prueba en seguida.

Proposición 5.0.15. *Sea X un G-espacio libre. Si existe una compactación equivariante libre para X entonces $\beta_G X$ es un G-espacio libre.*

Demostración. Sea (K, j) una compactación equivariante libre para X, por la propiedad universal de $\beta_G X$ existe una única función equivariante $F : \beta_G X \to K$ tal que F extiende a $j : X \to K$. Ahora bien, sea $z \in \beta_G X$ y considere $h \in G_z$. Entonces $hF(z) = F(hz) = F(z)$ por lo cual $h \in G_{F(z)}$. Como K es libre $h = e$ y por lo tanto $G_z = \{e\}$ para cada $z \in \beta_G X$, con lo cual queda probada la proposición. □

En el caso en el que G es un grupo compacto de Lie, cada G-espacio libre tiene una G-compactación estrictamente semilibre y análogamente se prueba la existencia de una compactación maximal estrictamente semilibre $\beta^*_G X$. Esta compactación no siempre coincide con $\beta_G X$, ya que $\beta_G X$ no siempre es un espacio estrictamente semilibre.

Algunas propiedades de $\beta_G^* X$, para G un grupo compacto de Lie, son las siguientes.

Teorema 5.0.16 (N. Antonyan, S. Antonyan)**.** *Sea G un grupo compacto de Lie y X un G-espacio libre. Entonces, cada función equivariante $f : X \to \mathrm{Cono}(G)$ tiene una única extensión equivariante $F : \beta_G^* X \to \mathrm{Cono}(G)$. Más aún, si bX es una G-compactación estrictamente semilibre, para la que se cumple la condición anterior, bX es equivalente a $\beta_G^* X$.*

Además, si $\mathcal{F}$ es la familia de todas las funciones equivariantes $f : X \to \mathrm{Cono}(G)$, entonces la función

$$F = \mathop{\Delta}_{f \in \mathcal{F}} f : X \to \prod_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Cono}(G)$$

es un encaje equivariante y $\overline{F(X)}$ es una compactación equivariante estrictamente semilibre equivalente a $\beta_G^* X$.

Para finalizar este capítulo se incluye una caracterización de los G-espacios libres que poseen compactación equivariante libre, que puede verse en [2].

Teorema 5.0.17. *Sea X un G-espacio libre. Entonces, existe una función equivariante $f : X \to J_k(G)$, para algún $k \in \mathbb{N}$, si y solo si X tiene una compactación equivariante libre.*

Con este resultados podemos mostrar algunos ejemplos relacionados con la existencia de compactaciones para G-espacios libres y estrictamente semilibres.

Ejemplo 5A Sea $G = \mathbb{Z}_2$ y considere $S = \{x \in \ell_2 \mid \|x\| = 1\}$, donde

$$\ell_2 = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} \,\middle|\, x_n \in \mathbb{R} \text{ para cada } n \geq 1 \text{ y } \sum x_n^2 < \infty \right\},$$

entonces G actúa en S mediante la multiplicación por un escalar, es decir $-1 * x = -x$, como se vio en el ejemplo 2A.

Supongamos que S se encaja en algún G-espacio libre y compacto K, entonces existe una función continua de $j : K \to J_k(G)$, para algún $k \in \mathbb{N}$. Luego existe una función equivariante $f : S \to J_k(G)$ pero recordemos que $J_k(G) \cong \mathbb{S}^{k-1}$ (ver proposición 1.1.7), con $\mathbb{S}^{k-1}$ la esfera de dimensión $k-1$. Ahora, tomando $n > k-1$ tenemos que el encaje $i : \mathbb{S}^n \to S$, $i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_{n+1}, 0, \ldots)$ es equivariante y por lo tanto $f \circ i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{k-1}$ es equivariante. Pero esto es equivalente a que la función $f \circ i$ es impar, que por el teorema 1.1.4 (Borsuk-Ulam), no es posible. Por lo tanto S no puede encajarse en un G-espacio libre compacto.

Tenemos además un ejemplo de un G-espacio estrictamente semilibre sin una compactación equivariante estrictamente semilibre.

Ejemplo 5B Sean G y $S = \{x \in \ell_2 \mid \|x\| = 1\}$. Considere $X = S \sqcup \{*\}$, donde $\{*\}$ es abierto y cerrado en X y fijo bajo la acción de G. Entonces X es un G-espacio estrictamente semilibre.

Si existiera una compactación estrictamente semilibre B de X, tenemos que B tiene un único punto fijo, y $* \in X \subset B$ es fijo, por lo tanto $*$ es el único punto fijo de B. Ahora bien, sea K la cerradura de S en B, de esto tenemos que K es una compactación equivariante para S.

Dado que $\{*\}$ es abierto en X, existe V abierto en B tal que $\{*\} = V \cap X$ luego $* \in V$ y $V \cap S = \emptyset$. En conclusión $* \notin K$. Por lo tanto K sería una compactación equivariante libre para S, lo cual no es posible como se vio en el ejemplo anterior.

Finalmente se tiene un ejemplo de un G-espacio libre para el cual $\beta_G(X)$ no es estrictamente semilibre y por lo tanto $\beta^*_G(X)$ no es equivalente a $\beta_G(X)$.

Ejemplo 5C Sean G y S como en los ejemplos anteriores. Considere la unión ajena $X = S_1 \sqcup S_2$, con $S_1 = S_2 = S$. Como G es finito, $\beta_G X = \beta X$. Supongamos que βX es estrictamente semilibre.

Como S_1 y S_2 son conjuntos completamente separados en X entonces $\overline{S_1} \subset \beta X$ y $\overline{S_2} \subset \beta X$ son conjuntos compactos ajenos de βX.

Ahora, $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$ con compactaciones equivariantes de S, pero al menos una de ellas no contiene el punto fijo de βX, ya que son conjuntos ajenos. Por lo cual S tendría una compactación equivariante libre, lo cual contradice el primer ejemplo.

Por lo tanto $\beta_G X$ no es estrictamente semilibre.

Bibliografía

[1] Antonyan, N. Equivariant embedding and compactifications of free G-spaces. *Internat. J. Math. Math. Sci. 1* (2003).

[2] Antonyan, N. Universal Free G-spaces. *Topology and its Applications 157* (2010).

[3] Antonyan, N., and Antonyan, S. Free G-spaces and maximal equivariant compactifications. *Annali di Matematica*, 184 (2005), 407–420.

[4] Bredon, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups.* Academic Press, 1972.

[5] Bredon, G. E. *Topology and Geometry.* Springer-Verlag, 1993.

[6] de Neymet, S. *Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones.* Aportaciones Matemáticas. Sociedad Matemática Mexicana, 2006.

[7] de Vries, J. Can every Tychonoff G-space equivariantly be embedded in a compact Hausdorff G-space? *Math. Centrum, Amstermdam, Afd. Zuiver Wisk*, 36 (1975).

[8] de Vries, J. Equivariant Embeddings of G-spaces. *General topology and its relations to modern analysis and algebra IV Part B: Contributed Papers* (1976), 485–493.

[9] de Vries, J. On Existence of G-compactifications. *Bull. Ac. Polon. Sci. Ser. Math. 26* (1978), 275–280.

[10] ENGELKING, R. *General Topology.* PWN. Sci. Publ., Warsaw, 1977.

[11] HU, S. T. *Theory of Retracts.* Wayne State University Press, 1965.

[12] MATOUŠEK, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry.* Springer-Verlag, 2003.

[13] MEGRELISHVILI, M. A Tychonov G-space not admitting a compact Hausdorff G-extension or G-linearization. *Russian Mathematical Surveys 43*, 2 (1988), 177–178.

[14] MEGRELISHVILI, M. Compactification and factorization in the category of G-spaces. In *Categorical Topology.* World Scientific, 1989, pp. 220–237.

[15] MEGRELISHVILI, M. Free Topological G-groups. *New Zealand Journal of Mathematics 25*, 1 (1996), 59–72.

[16] MEGRELISHVILI, M., AND SCARR, T. Constructing Tychonoff G-spaces which are not G-Tychonoff. *Topology and its Applications 86*, 1 (1998), 69–81.

[17] MUNKRES, J. *Topology.* Prentice Hall, 2000.

[18] PALAIS, R. S. *The classification of G-Spaces.* American Mathematical Society, 1960.

[19] WILLARD, S. *General Topology.* Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1970.