UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

OPERADORES DE SCHATTEN-HERZ EN EL ESPACIO DE FOCK

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
OSCAR ZATARAIN VERA

DIRECTOR DE LA TESIS:
DR. SALVADOR PÉREZ ESTEVA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

MÉXICO, D.F. 14 DE ABRIL DE 2015

Agradecimientos

Por medio de estas líneas quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que hicieron posible la realización de este trabajo de investigación.

Por todo el apoyo económico y científico brindado durante el desarrollo de este proyecto, agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), al Posgrado en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y a la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Agradezco infinitamente al Dr. Salvador Pérez Esteva por su excelente guía en esta tesis. De igual manera, quedaré en deuda por corregir mis defectos con paciencia y sabiduría para esperar que este trabajo pudiera llegar a su fin.

Al resto de los miembros del jurado les agradezco profundamente su tiempo y dedicación para corregir el manuscrito final y fungir como miembros del jurado evaluador.

Agradezco a la Dra. Ana Meda Guardiola por el apoyo brindado como tutora durante mis estudios de maestría.

Finalmente, agradezco a mi familia por todo su apoyo y comprensión a través de los años.

Índice general

Introducción

El estudio de espacios de norma mixta tiene su origen en los trabajos de Hardy y Littlewood (ver [4, 5]), quienes consideraron funciones holomorfas en el disco unitario. Las normas mixtas juegan un papel muy importante en la teoría de espacios de funciones, pues la definición de estos depende de dichas normas, por ejemplo, los espacios de norma mixta de funciones de varias variables introducidos por Benedek y Panzone [1].

El espacio de Herz K_p^q que es un espacio de norma mixta con pesos, fue introducido en [6] por Herz. Desde entonces, la teoría de dichos espacios ha sido desarrollada significativamente ya que resultan ser muy útiles en el análisis de ciertos espacios de funciones. Por ejemplo, ciertos espacios de Herz tienen un papel importante en la caracterización de funciones y multiplicadores en los espacios clásicos de Hardy (ver [10, 11, 12]).

Algunos de los operadores más estudiados y conocidos son los operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy-Hilbert, aunque estos pueden definirse en otros espacios de Hilbert (espacios de Bergman, de Fock); una forma de "mirar" a los operadores de Toeplitz, es pensar que son "compresiones" de operadores de multiplicación al espacio en cuestión. Más aún, los operadores de Toeplitz pueden definirse para medidas de Borel complejas utilizando el producto interno del espacio en cuestión.

Un operador de Toeplitz T_μ es llamado positivo si la medida μ es una medida de Borel positiva finita. Para los operadores de Toeplitz positivos, son conocidas varias propiedades básicas, por ejemplo, en los espacios de Bergman y Fock, existen caracterizaciones acerca del acotamiento y la compacidad de los operadores de Toeplitz así como la pertenencia a las clases de Schatten (ver [14, 15]).

En [9], M. Loaiza, M. López-García y S. Pérez-Esteva estudiaron otro aspecto de los operadores de Toeplitz positivos definidos en el espacio de Bergman. Básicamente, descompusieron un operador de Toeplitz positivo dado en una familia de operadores locales, definieron ciertos espacios de norma mixta asociados a las clases de Schatten he hicieron una caracterización de pertenencia a estos espacios en términos de ciertos espacios de tipo Herz. Motivados por el trabajo de Loaiza et al., el resultado de esta tesis consiste en dar una caracterización análoga para operadores de Toeplitz positivos definidos en el espacio de Fock.

Este trabajo está organizado como sigue. En el capítulo 1 introducimos la notación, definiciones de algunos espacios en los que trabajamos y demostramos algunos resultados que ocupamos a lo largo de la tesis. Básicamente, introducimos a los espacios de Fock $\mathbf{F}_\alpha^p$ y demostramos algunas propiedades de dichos espacios. Definimos la transformada de Berezin de un operador así como de una función, además de introducir a los operadores de Toeplitz actuando en el espacio $\mathbf{F}_\alpha^2$. Finalmente definimos las clases de Schatten y damos algunas estimaciones para medidas de Borel positivas.

En el capítulo 2 estudiamos la pertenencia de los operadores de Toeplitz positivos a las clases de Schatten. También estudiamos a los operadores promedio y a la transformada de Berezin, mostramos que existe una relación estrecha entre tales conceptos por medio de una caracterización de pertenencia entre tales objetos.

Finalmente, en el capítulo 3, se encuentra el resultado principal de este trabajo, el cual consiste en dar una caracterización para el espacio de Fock $\mathbf{F}^2_\alpha$ análoga a la dada por M. Loaiza, M. López-García y S. Pérez-Esteva en [9]. Cabe mencionar que este capítulo hace uso exhaustivo de la teoría introducida en los capítulos anteriores.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducen los conceptos básicos y la notación que usamos a lo largo de este trabajo. Para mayores referencias acerca de los resultados de análisis funcional consultar [3, 8, 13]. Referencias acerca de los espacios de Fock consultar [14].

1.1. Espacios de Fock

Para los espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ que cuenten con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, supondremos que dicho producto es lineal en la primera coordenada y conjugado lineal en la segunda. Además dotamos a tales espacios con la norma inducida por el producto interno, definida por $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Recordamos que un espacio vectorial normado V es *completo* si toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento en V.

Definición 1.1. Un *espacio de Banach* es un espacio vectorial normado completo. Un *espacio de Hilbert*, denotado por $\mathcal{H}$, es un espacio vectorial con la norma inducida por el producto interno que además es completo.

Existen varios ejemplos de espacios de Banach, los conocidos espacios $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ con la norma usual $||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ para $x = (x_1, \cdots, x_n)$.

Existen otros ejemplos un poco más sofisticados, tal es el caso del espacio ℓ^p de las sucesiones complejas $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ que son p-sumables, en el sentido $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. También está el espacio $\mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mu)$ de funciones complejas f que son p-integrables con respecto a la medida μ, es decir, la integral $\int_{\mathbb{C}} |f|^p \, \mathrm{d}\mu$ es finita.

En particular como ejemplos de espacios de Hilbert tenemos al espacio de sucesiones ℓ^2 con el producto interno $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$, así como al espacio de funciones $\mathbf{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{dA}) = \mathbf{L}^2(\mathbb{C})$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} \, \mathrm{dA}(z)$, donde dA es la medida euclidiana en el plano complejo.

Para cualquier valor del parámetro positivo α, consideramos la medida gaussiana

$$\mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2}\ \mathrm{dA}(z).$$

De hecho, utilizando coordenadas polares se puede mostrar que $\mathrm{d}\lambda_\alpha$ es una medida de probabilidad. En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2}\ \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\
&= 2\alpha \int_0^{-\infty} e^u \frac{\mathrm{d}u}{-2\alpha} \\
&= \int_{-\infty}^0 e^u\ \mathrm{d}u = 1.
\end{aligned}$$

donde hemos ocupado el cambio de variable $u = -\alpha r^2$.

Para $\alpha > 0$ y $p > 0$, el espacio $\mathbf{L}^p_\alpha$ consiste de la colección de funciones Lebesgue medibles f sobre $\mathbb{C}$ tales que la función $f(z)e^{-\alpha|z|^2/2}$ está en $\mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$. Para $f \in \mathbf{L}^p_\alpha$ escribimos

$$||f||_{p,\alpha} = \left(\frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| f(z) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p \mathrm{dA}(z) \right)^{1/p}.$$

Análogamente, para $\alpha > 0$ y $p = \infty$ usamos la notación $\mathbf{L}^\infty_\alpha$ para denotar al espacio de funciones Lebesgue medibles f sobre $\mathbb{C}$ tales que

$$||f||_{\infty,\alpha} = \operatorname{ess\,sup} \left\{ |f(z)|\, e^{-\alpha|z|^2/2} : z \in \mathbb{C} \right\} < \infty.$$

De las definiciones de $\mathbf{L}^p_\alpha$ y $\mathrm{d}\lambda_\alpha$ se obtiene la relación $\mathbf{L}^p_\alpha = \mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_{p\alpha/2})$ para $0 < p < \infty$. Por consiguiente los espacios $\mathbf{L}^p_\alpha$ son completos para $0 < p < \infty$. De hecho el espacio $\mathbf{L}^\infty_\alpha$ también es completo aunque $\mathbf{L}^\infty_\alpha \neq \mathbf{L}^\infty(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ (ver [14]). Cuando $1 \leq p \leq \infty$, $\mathbf{L}^p_\alpha$ es completo con la norma $||f||_{p,\alpha}$ y cuando $0 < p < 1$ entonces $\mathbf{L}^p_\alpha$ es un espacio métrico completo con la distancia $d(f, g) = ||f - g||^p_{p,\alpha}$.

Definición 1.2. Para $\alpha > 0$ y $0 < p \leq \infty$ denotamos como $\mathbf{F}^p_\alpha$ al espacio consistente de funciones enteras en $\mathbf{L}^p_\alpha$. Los espacios $\mathbf{F}^p_\alpha$ son llamados espacios de Fock.

Una propiedad importante es que los espacios de Fock son cerrados en $\mathbf{L}^p_\alpha$, así los espacios $\mathbf{F}^p_\alpha$ son completos. Para ver lo anterior necesitamos demostrar algunos resultados. El primero es un resultado estándar de variable compleja y nos dice bajo que condiciones una sucesión de funciones analíticas converge a una función analítica.

Teorema 1.3. *Si $\{f_k(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ que converge uniformemente a $f(z)$ en Ω, entonces $f(z)$ es analítica en Ω.*

Demostración. Dado que $f_k \to f$ uniformemente en Ω y cada f_k es continua en Ω, entonces f es continua en Ω. Sea $\Omega' \subset \Omega$ un subdominio simplemente conexo, por el teorema de Cauchy

$$\int_\gamma f_k(z)\ \mathrm{d}z = 0$$

para todo k y para todo contorno cerrado γ en Ω'. Además

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_\gamma f_k(z)\ \mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z$$

para todo contorno γ en Ω', pues $f_k \to f$ uniformemente en Ω'. Por el teorema de Morera se tiene que f es analítica en Ω'. Por ende f es analítica en Ω. $\square$

Utilizamos frecuentemente el siguiente cálculo:

Observación 1.4. *Como* $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{w})$ *para* z *y* w *números complejos, entonces se cumple la igualdad:*

$$e^{-\alpha|z-w|^2} = e^{2\alpha\mathrm{Re}(z\overline{w})} e^{-\alpha|z|^2} e^{-\alpha|w|^2}.$$

El siguiente resultado da la tasa óptima de crecimiento para las funciones en los espacios de Fock.

Teorema 1.5. *Para cualquier* $0 < p \leq \infty$ *y* $z \in \mathbb{C}$ *se tiene*

$$\sup\left\{|f(z)| : f \in \mathbf{F}^p_\alpha\ ||f||_{p,\alpha} \leq 1\right\} = e^{\alpha|z|^2/2}.$$

Además, para $0 < p < \infty$*, cualquier función extremal es de la forma*

$$f(w) = e^{\alpha\bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2 + i\theta}, \quad w \in \mathbb{C},$$

donde θ *es un número real.*

Demostración. Asumamos primero que $0 < p < \infty$. Para $z = 0$ el resultado se obtiene de la subarmonicidad de la función $|f|^p$ y de integrar en coordenadas polares:

$$|f(0)|^p \leq \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left|f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \mathrm{dA}(w) = ||f||^p_{p,\alpha}.$$

La igualdad ocurre si y solo si f es constante. En efecto, supongamos que se da la igualdad, por el principio del módulo máximo f debe ser constante pues $|f|^p$ es una función subarmónica. Recíprocamente, si f es constante, digamos $f = M$ entonces:

$$\begin{aligned} |M|^p = |f(0)|^p &\leq ||f||^p_{p,\alpha} \\ &= ||M||^p_{p,\alpha} = |M|^p. \end{aligned}$$

Veamos el caso general, para $z \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathbf{F}^p_\alpha$, consideramos la función

$$F(w) = f(z-w)e^{\alpha\bar{z}w - \alpha|z|^2/2}, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Eligiendo $w = 0$ y de la desigualdad $|F(0)|^p \leq ||F||_{p,\alpha}^p$ deducimos

$$\begin{aligned} |f(z)|^p\, e^{-\alpha p|z|^2/2} &\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w)e^{\alpha\bar{z}w}e^{-\alpha|z|^2/2}e^{-\alpha|w|^2/2}\right|^p \, \mathrm{dA}(w) \\ &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left| f(z-w)e^{-\alpha|z-w|^2/2}\right|^p \, \mathrm{dA}(w) \\ &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\alpha|w|^2/2}\right|^p \, \mathrm{dA}(w) \\ &= ||f||_{p,\alpha}^p\,. \end{aligned}$$

Lo anterior muestra que

$$|f(z)| \leq ||f||_{p,\alpha}\, e^{\alpha|z|^2/2}.$$

Análogamente, la igualdad se obtiene si y solo si F es constante. Consecuentemente las funciones extremales son de la forma

$$f(w) = e^{\alpha\bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2 + i\theta}.$$

Solo resta probar el caso cuando $p = \infty$. Si $p = \infty$, de la definición de $||f||_{\infty,\alpha}$ se sigue que $|f(z)| \leq e^{\alpha|z|^2/2}$ para toda f con $||f||_{\infty,\alpha} \leq 1$. Por lo tanto

$$\sup\left\{|f(z)| : ||f||_{\infty,\alpha} \leq 1\right\} \leq e^{\alpha|z|^2/2}.$$

Por otro lado,la función constante $e^{\alpha|z|^2/2}$ es un vector unitario en $\mathbf{F}_\alpha^\infty$(ver Lema 1.13). De esta forma se tiene

$$\sup\left\{|f(z)| : ||f||_{\infty,\alpha} \leq 1\right\} = e^{\alpha|z|^2/2}.$$

□

Definición 1.6. Un *funcional lineal* es un mapeo lineal continuo de un espacio vectorial al espacio de los números complejos.

El corolario siguiente es muy útil, pues nos dice que las “evaluaciones puntuales” son continuas. Esto es, para cada $z \in \mathbb{C}$, el mapeo que manda una función $f \in \mathbf{F}_\alpha^p$ al número $f(z)$ es un funcional lineal continuo en $\mathbf{F}_\alpha^p$.

Corolario 1.7. *Sea $f \in \mathbf{F}_\alpha^p$ y $0 < p \leq \infty$. Entonces*

$$|f(z)| \leq ||f||_{p,\alpha}\, e^{\alpha|z|^2/2}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ahora sí, ya estamos listos para demostrar que los espacios de Fock son completos.

Proposición 1.8. *Para $\alpha > 0$ y $0 < p \leq \infty$, los espacios de Fock $\mathbf{F}_\alpha^p$ son completos.*

Demostración. Mostraremos que $\mathbf{F}^p_\alpha$ es cerrado en $\mathbf{L}^p_\alpha$. Sean $\{f_n\} \subset \mathbf{F}^p_\alpha$ y $f \in \mathbf{L}^p_\alpha$ tal que $f_n \to f$ en $\mathbf{L}^p_\alpha$. Entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbf{L}^p_\alpha$. Dado que las evaluaciones puntuales son continuas (Corolario 1.7) se tiene, para todo $z \in \mathbb{C}$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq ||f_n - f_m||_{p,\alpha}\, e^{\alpha|z|^2/2} \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty.$$

Así, localmente $\{f_m\}$ converge uniformemente a una función límite, que debe ser f, pues si el límite en $\mathbf{L}^p_\alpha$ y el límite puntual existen entonces deben ser iguales c.t.p. Ahora, utilizando el Teorema 1.3 se tiene que localmente el límite uniforme de funciones enteras es una función entera. Consecuentemente la función f está en $\mathbf{F}^p_\alpha$, probando que $\mathbf{F}^p_\alpha$ es cerrado. Se sigue que $\mathbf{F}^p_\alpha$ es completo. □

En particular, el espacio $\mathbf{F}^2_\alpha$, que es el subespacio cerrado de todas las funciones enteras en $\mathbf{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$, resulta ser un espacio de Hilbert con el producto interno heredado de $\mathbf{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$, a saber:

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z).$$

La siguiente proposición nos dice la forma exacta que tiene una base para el espacio $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Proposición 1.9. *Para cada entero no negativo n, sea*

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n.$$

Entonces el conjunto $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal para $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Demostración. Un cálculo con coordenadas polares aunado a la ortogonalidad en $\mathbf{F}^2_\alpha$ de las funciones z^n muestra que $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbf{F}^2_\alpha$. En efecto:

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} e_n(z)\overline{e_m(z)}\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n \sqrt{\frac{\alpha^m}{m!}} \overline{z}^m \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2}\ \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\frac{\sqrt{\alpha^{n+m}}}{\sqrt{n!m!}} \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{z}^m e^{-\alpha|z|^2}\ \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\frac{\sqrt{\alpha^{n+m}}}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{2\pi}\int_0^\infty r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta} e^{-\alpha r^2} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\alpha}{2\pi}\frac{\sqrt{\alpha^{n+m}}}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\ \mathrm{d}\theta \int_0^\infty r^{n+m} e^{-\alpha r^2}\ \mathrm{d}r^2.
\end{aligned}$$

Para $n \neq m$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\ \mathrm{d}\theta &= \frac{e^{i(n-m)\theta}}{i(n-m)}\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{i(n-m)}(1-1) = 0.
\end{aligned}$$

Por ende las funciones e_n son ortogonales en $\mathbf{F}^2_\alpha$. Para $n = m$ tenemos

$$\int_0^\infty r^{2n} e^{-\alpha r^2} \, \mathrm{d}r^2 = \int_0^\infty \rho^n e^{-\alpha\rho} \, \mathrm{d}\rho = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Así, se obtiene que $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal:

$$\begin{aligned} ||e_n||^2_\alpha &= \langle e_n, e_n \rangle_\alpha \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\sqrt{\alpha^{2n}}}{\sqrt{n!^2}} 2\pi \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \\ &= \alpha \frac{\alpha^n}{n!} \frac{n!}{\alpha^{n+1}} = 1, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Dada $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$ y $n \geq 0$ se tiene

$$\langle f, e_n \rangle_\alpha = \lim_{R\to\infty} \int_{|z|<R} f(z)\overline{e_n(z)} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z).$$

Dado que la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k$$

converge uniformemente en $|z| < R$, la siguiente igualdad es válida

$$\int_{|z|<R} f(z)\overline{e_n(z)} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \int_{|z|<R} z^k \overline{e_n(z)} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z).$$

Nuevamente utilizando coordenadas polares se obtiene

$$\langle f, e_n \rangle_\alpha = \lim_{R\to\infty} a_n \int_{|z|<R} z^n \overline{e_n(z)} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = a_n \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{e_n(z)} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z).$$

Por lo tanto, si $\langle f, e_n \rangle_\alpha = 0$ para todo $n \geq 0$ entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$, implicando que $f = 0$. Lo cual prueba que $\{e_n\}$ es un sistema completo en $\mathbf{F}^2_\alpha$ y por ende una base de $\mathbf{F}^2_\alpha$. □

Como consecuencia de la proposición anterior se tiene que la serie de Taylor de toda función f en $\mathbf{F}^2_\alpha$ converge a f en la norma del espacio $\mathbf{F}^2_\alpha$, dado que se cumple la siguiente igualdad

$$||f||^2 = \sum_{k=0}^\infty |a_k|^2 \left|\left|z^k\right|\right|^2.$$

El *Teorema de la Representación de Riesz*[13, p. 62] garantiza que todo funcional lineal acotado en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ puede ser representado por un producto interno con un vector en el espacio. Esta representación puede darse explícitamente para las evaluaciones puntuales en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Definición 1.10. Para $z, w \in \mathbb{C}$, la función $K_w(z)$ definida por

$$K_w(z) = K_\alpha(z, w) = e^{\alpha z \overline{w}}$$

es llamada el *núcleo reproductor* para w en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Claramente la función $K_w(z)$ es entera, además

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(z,w)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left|e^{\alpha z\overline{w}}\right|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{2\alpha \mathrm{Re}(z\overline{w})} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} e^{2\alpha \mathrm{Re}(z\overline{w})} \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} \, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} e^{\alpha|w|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z-w|^2} \, \mathrm{dA}(z) \\
&= e^{\alpha|w|^2}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Lo anterior muestra que $K_w \in \mathbf{F}^2_\alpha$. Así las evaluaciones puntuales, para funciones en $\mathbf{F}^2_\alpha$, pueden ser representadas como productos internos con núcleos reproductores.

Teorema 1.11. *Para $w \in \mathbb{C}$ y $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$ se cumple que $f(w) = \langle f, K_w \rangle_\alpha$.*

Demostración. Sea $g \in \mathbf{F}^1_\alpha$, por el Teorema del Valor Medio para funciones holomorfas y por el Teorema de Fubini se tiene

$$g(0) = \int_{\mathbb{C}} g(z) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} g(z) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(z) e^{-\alpha|z|^2} \, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty g(re^{i\theta}) e^{-\alpha r^2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(re^{i\theta}) r e^{-\alpha r^2} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty 2\pi g(0) r e^{-\alpha r^2} \, \mathrm{d}r \\
&= g(0) \int_{-\infty}^0 e^u \, \mathrm{d}u = g(0).
\end{aligned}$$

donde hemos ocupado el cambio de variable $u = -\alpha r^2$.

Sea $w \in \mathbb{C}$ fijo, reemplazando $g(z)$ por $g(w-z)$ en la igualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
g(w) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(w-z) e^{-\alpha|z|^2} \, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} g(z) e^{-\alpha|z-w|^2} \, \mathrm{dA}(z) \\
&= e^{-\alpha|w|^2} \int_{\mathbb{C}} g(z) e^{\alpha z\overline{w} + \alpha\overline{z}w} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z).
\end{aligned}$$

Sea $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz aunado a que $K_w \in \mathbf{F}^2_\alpha$ implican que $fK_w \in \mathbf{F}^1_\alpha$. De esta manera, reemplazando $g(z)$ por $f(z)e^{-\alpha z\overline{w}}$ se llega a

$$\begin{aligned} f(w) &= \int_{\mathbb{C}} f(z)e^{\alpha\overline{z}w}\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\ &= \langle f, K_w\rangle_\alpha . \end{aligned}$$

La conclusión se obtiene de la unicidad dada por el Teorema de la Representación de Riesz. □

Dado que todo subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ determina una única proyección ortogonal $P : H \to M$, se tiene el siguiente corolario para el espacio de Fock, el cual nos da la representación de la proyección como operador integral.

Corolario 1.12. *La proyección ortogonal*

$$P_\alpha : \mathbf{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha) \to \mathbf{F}^2_\alpha$$

es un operador integral. Específicamente,

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z, w) f(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w)$$

para toda $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ y todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ y $z \in \mathbb{C}$. Por el teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \langle P_\alpha f, K_z\rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha K_z\rangle_\alpha = \langle f, K_z\rangle_\alpha \\ &= \int_{\mathbb{C}} f(w) K_\alpha(z, w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w). \end{aligned}$$

Lo cual prueba la representación integral para la proyección. □

Para cualquier $z \in \mathbb{C}$, denotamos por k_z al núcleo reproductor normalizado en z, es decir

$$k_z(w) = \frac{K_\alpha(w, z)}{\sqrt{K_\alpha(z, z)}} = e^{\alpha\overline{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

Por (1.1) se tiene que $k_z(w)$ es unitario en $\mathbf{F}^2_\alpha$, un hecho importante y sorprendente es que $k_z(w)$ también es unitario en $\mathbf{F}^p_\alpha$.

Lema 1.13. *Cada $k_z(w)$ es unitario en $\mathbf{F}^p_\alpha$ donde $0 < p \leq \infty$.*

Demostración. Usando (1.1) con $p\alpha/2$ en lugar de α tenemos

$$\begin{aligned} ||k_z||^p_{p,\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| k_z(w) e^{-\frac{1}{2}\alpha|w|^2} \right|^p \mathrm{dA}(w) \\ &= \frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha\overline{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2} e^{-\frac{1}{2}\alpha|w|^2} \right|^p \mathrm{dA}(w) \\ &= \frac{p\alpha}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}p\alpha|z|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\frac{p\alpha}{2} w\overline{z}} \right|^2 e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2}\ \mathrm{dA}(w) \\ &= 1. \end{aligned}$$

El desarrollo anterior prueba el resultado para $0 < p < \infty$. Para $p = \infty$ se tiene

$$|k_z(w)|\, e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} = e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z|^2}.$$

De esta manera

$$\sup_{w\in\mathbb{C}} |k_z(w)|\, e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} = 1$$

quedando así completa la prueba del lema. □

1.2. Operadores de Toeplitz

Algunos de los operadores más estudiados y conocidos son los operadores de Toeplitz en el espacio de Hardy-Hilbert; una forma de "mirar" a los operadores de Toeplitz, es pensar que son "compresiones" de operadores de multiplicación al espacio en cuestión. En esta sección definimos a los operadores de Toeplitz en el espacio de Fock.

Definición 1.14. Para cada $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$, el *operador de Toeplitz* con símbolo φ es el operador lineal $T_\varphi : \mathbf{F}^2_\alpha \to \mathbf{F}^2_\alpha$ definido por

$$T_\varphi(f) = P_\alpha(\varphi f), \quad f \in \mathbf{F}^2_\alpha.$$

El mapeo claramente es lineal, además

$$||T_\varphi|| = ||P_\alpha(\varphi f)|| \leq ||\varphi f|| = ||\varphi||_\infty\,,$$

es decir el operador T_φ es lineal y acotado.

Las siguientes son propiedades importantes de los operadores de Toeplitz.

Proposición 1.15. *Para cualesquiera números complejos a y b, y para cualesquiera funciones acotadas φ y ψ se tiene:*

(i) $T_{a\varphi+b\psi} = aT_\varphi + bT_\psi$.

(ii) $T_{\overline{\varphi}} = T^*_\varphi$.

(iii) $T_\varphi \geq 0$ *si* $\varphi \geq 0$.

Demostración.

(i)

$$\begin{aligned} T_{a\varphi+b\psi}(f) &= P_\alpha((a\varphi + b\psi)f) \\ &= P_\alpha(a\varphi f + b\psi f) \\ &= aP_\alpha(\varphi f) + bP_\alpha(\psi f) \\ &= aT_\varphi + bT_\psi. \end{aligned}$$

(ii) Sean $f, g \in \mathbf{F}^2_\alpha$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left\langle T^*_\varphi f, g\right\rangle_\alpha &= \langle f, T_\varphi g\rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha(\varphi g)\rangle_\alpha = \langle f, \varphi g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathrm{d}\lambda_\alpha)} \\
&= \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{\varphi(z)g(z)}\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \overline{\varphi(z)}f(z)\overline{g(z)}\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \langle \overline{\varphi} f, g\rangle_{\mathbf{L}^2(\mathrm{d}\lambda_\alpha)} = \langle P_\alpha(\overline{\varphi} f), g\rangle_\alpha \\
&= \langle T_{\overline{\varphi}} f, g\rangle_\alpha .
\end{aligned}
$$

(iii) Sean $\varphi \geq 0$ y $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$, entonces

$$
\begin{aligned}
\langle T_\varphi f, f\rangle_\alpha &= \langle P_\alpha(\varphi f), f\rangle_\alpha \\
&= \int_{\mathbb{C}} \varphi f(z)\overline{f(z)}\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2\, \varphi(z)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \geq 0.
\end{aligned}
$$

□

Una de las diferencias principales entre los operadores de Toeplitz definidos en el espacio de Fock y los definidos en los espacios de Hardy y de Bergman, es la falta de funciones analíticas acotadas en $\mathbf{F}^p_\alpha$, así como de símbolos armónicos; pues por el principio del módulo máximo, una función analítica o armónica acotada en $\mathbb{C}$ debe ser constante.

Notamos que la representación integral de la proyección ortogonal P_α nos permite escribir al operador de Toeplitz de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
T_\phi(f)(z) &= \int_{\mathbb{C}} K(z,w)f(w)\phi(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} K(z,w)f(w)e^{-\alpha|w|^2}\phi(w)\ \mathrm{dA}(w).
\end{aligned}
$$

La representación anterior motiva a definir operadores de Toeplitz con símbolos más generales. Extendemos la definición de forma natural como sigue.

Definición 1.16. Sea μ una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{C}$, definimos al operador de Toeplitz T_μ como

$$
T_\mu(f)(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} K(z,w)f(w)e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}.
$$

Notamos que T_μ puede que no esté bien definido pues no es claro cuando la integral anterior converge, aún si la medida μ es finita, pues el núcleo $K(z,w)$ no está acotado para cualquier $z \neq 0$ fijo.

Para precisar las cosas, decimos que una medida de Borel compleja μ sobre $\mathbb{C}$ satisface la *condición* (M) si

$$\int_{\mathbb{C}} |K(z,w)|\, e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}|\mu|\,(w) < \infty \tag{1.2}$$

para toda $z \in \mathbb{C}$. Notamos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |K(z,w)|\, e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}|\mu|\,(w) &= \int_{\mathbb{C}} \left|e^{\alpha\overline{w}\frac{z}{2}}\right|^2 e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}|\mu|\,(w)\\ &= \int_{\mathbb{C}} |K\,(z/2,w)|^2\, e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}|\mu|\,(w)\end{aligned}$$

para toda $z \in \mathbb{C}$. De esta forma, la integral (1.2) es equivalente a

$$\int_{\mathbb{C}} |K(z,w)|^2\, e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}|\mu|\,(w) < \infty \tag{1.3}$$

para toda $z \in \mathbb{C}$. Es decir, la medida μ satisface la condición (M) si alguna de las integrales (1.2), (1.3) es finita.

Si μ satisface la condición (M) entonces el operador de Toeplitz T_μ está bien definido en un subconjunto denso de $\mathbf{F}^2_\alpha$. De hecho, si

$$f(w) = \sum_{k=1}^{N} c_k K(w, a_k)$$

es cualquier combinación lineal finita de núcleos en $\mathbf{F}^2_\alpha$, se sigue de la equivalencia de la condición (M) y de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que $T_\mu(f)$ está bien definido, ya que el conjunto de combinaciones lineales finitas de núcleos reproductores es denso en $\mathbf{F}^2_\alpha$ ([14],p. 41).

Un resultado clásico ([15]) de análisis funcional garantiza que para un operador positivo y compacto T en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, existen un conjunto ortonormal $\{e_n\}$ en $\mathcal{H}$ y una sucesión $\{s_n\}$ no creciente de números positivos tales que

$$T(x) = \sum_n s_n \langle x, e_n\rangle\, e_n, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Los números s_n están determinados únicamente por T y son llamados los valores singulares de T.

Definición 1.17. Sea T un operador positivo y compacto con valores singulares $\{s_n\}$ y sea $0 < p < \infty$. Decimos que el operador T pertenece a la clase de Schatten S_p si la sucesión $\{s_n\}$ pertenece a ℓ^p.

La extensión para un operador T más general se hace de la siguiente forma, decimos que T pertenece a la clase de Schatten S_p si $|T| = (T^*T)^{1/2}$ pertenece a S_p. Si $\{s_n\}$ es la sucesión de valores singulares para $|T|$, escribimos

$$||T||_{S_p} = \left[\sum_n s_n^p\right]^{1/p}.$$

Se distinguen dos casos especiales: Cuando $p = 1$ llamamos a S_1 la clase traza, y cuando $p = 2$ llamamos a S_2 la clase de Hilbert-Schmidt. Para mayor información acerca de las clases de Schatten consultar [15].

¿Cómo saber si un operador compacto T pertenece a la clase S_p? Una caracterización útil está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.18. *Sea T un operador compacto en $\mathcal{H}$ y $p \geq 1$ entonces T está en la clase S_p si y solo si $\sum |\langle Te_n, e_n\rangle|^p < \infty$ para todos los conjuntos ortonormales $\{e_n\}$. Más aún*

$$||T||_p = \sup\left\{\left[\sum |\langle Te_n, e_n\rangle|^p\right]^{\frac{1}{p}} : \{e_n\} \;\; \textit{ortonormal}\right\}.$$

Demostración. Primero asumamos que T es autoadjunto. En este caso, existe un conjunto ortonormal $\{\sigma_n\}$ tal que

$$Tx = \sum \lambda_n \langle x, \sigma_n\rangle \sigma_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

donde $\{\lambda_n\}$ es la sucesión de valores singulares para T y $\sum |\lambda_n|^p = ||T||_p^p$. Como $\lambda_n = \langle T\sigma_n, \sigma_n\rangle$, la convergencia de $\sum |\langle Te_n, e_n\rangle|^p$ para todos los conjuntos ortonormales $\{e_n\}$ implica que $\sum |\lambda_n|^p < \infty$, de esta forma $T \in S_p$. En efecto:

$$\begin{aligned}||T||_p^p &= \sum |\langle T\sigma_n, \sigma_n\rangle|^p \\ &\leq \sup\left\{\sum |\langle Te_n, e_n\rangle|^p : \{e_n\} \;\; \text{ortonormal}\right\}.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathcal{H}$, entonces para cualquier $m \geq 1$

$$\langle Te_m, e_m\rangle = \sum_n \lambda_n |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^2 .$$

Sea q el exponente conjugado de p, por la desigualdad de Hölder se tiene

$$\begin{aligned}|\langle Te_m, e_m\rangle| &\leq \sum_n |\lambda_n| \, |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^{\frac{2}{p}} |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \left[\sum_n |\lambda_n|^p |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^2\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_n |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^2\right]^{\frac{1}{q}} .\end{aligned}$$

Como $\sum_n |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^2 \leq ||e_m||^2 = 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\sum_n |\langle Te_m, e_m\rangle|^p &\leq \sum_m \sum_n |\lambda_n|^p |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^2 \\ &= \sum_n |\lambda_n|^p \sum_m |\langle e_m, \sigma_n\rangle|^2 \\ &\leq \sum_n |\lambda_n|^p .\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos los conjuntos ortonormales $\{e_n\}$ llegamos a

$$\sup\left\{\sum |\langle Te_n, e_n\rangle|^p : \{e_n\} \;\; \text{ortonormal}\right\} \leq ||T||_p^p$$

Esto prueba el caso cuando T es autoadjunto.

Para el caso general, escribimos a $T = T_1 + iT_2$ donde

$$T_1 = \frac{T+T^*}{2}, \quad T_2 = \frac{T-T^*}{2i},$$

cada factor es autoadjunto. Es claro que T está en S_p si y solo si T_1 y T_2 están en S_p. Además

$$|\langle Te_n, e_n\rangle|^2 = |\langle T_1 e_n, e_n\rangle|^2 + |\langle T_2 e_n, e_n\rangle|^2,$$

por ende existe una constante C (dependiente únicamente de p) tal que

$$C^{-1}|\langle Te_n, e_n\rangle|^p \leq |\langle T_1 e_n, e_n\rangle|^p + |\langle T_2 e_n, e_n\rangle|^p \leq C|\langle Te_n, e_n\rangle|^p.$$

El resultado se sigue del caso cuando T es autoadjunto. □

Problemas interesantes concernientes a los operadores de Toeplitz tienen que ver con el acotamiento y compacidad de estos, así como la pertenencia a las clases de Schatten, la última propiedad será estudiada en el Capítulo 2.

1.3. Transformada de Berezin

La transformada de Berezin asocia funciones suaves con operadores en espacios de Hilbert de funciones analíticas. Para un operador lineal T en $\mathbf{F}^2_\alpha$ cuyo dominio contiene a todos los núcleos reproductores normalizados, definimos la función $\widetilde{T}$ sobre $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\widetilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z\rangle_\alpha, \quad z \in \mathbb{C}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ representa al producto interno en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Llamaremos a $\widetilde{T}$ la transformada de Berezin de T. Si T es un operador lineal acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$ se tiene que la transformada de Berezin está bien definida y de hecho es analítica en $\mathbb{C}$.

Teorema 1.19. *Sea $\mathbf{L}(\mathbf{F}^2_\alpha)$ el espacio de Banach de todos los operadores lineales acotados en $\mathbf{F}^2_\alpha$. Entonces $T \to \widetilde{T}$ es un mapeo lineal acotado de $\mathbf{L}(\mathbf{F}^2_\alpha)$ en $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$. Más aún, el mapeo es uno a uno y preserva orden.*

Demostración. Sea T un operador lineal acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$. La linealidad del mapeo viene dada por la linealidad de la primera entrada del producto interno. Dado que el operador T es acotado, se sigue de la definición de $\widetilde{T}$ que ésta es acotada, pues se cumple $|\langle Tk_z, k_z\rangle| \leq ||Tk_z||\,||k_z|| \leq ||T||$. Veamos la inyectividad de la transformada. Supongamos que $\langle Tk_z, k_z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. De esta forma $\langle TK_z, K_z\rangle = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ donde $K_z(w) = K(w,z)$. La función $F(z,w) = \langle TK_z, K_w\rangle$ es real analítica en $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$, holomorfa en w y conjugada holomorfa en z. También, F vale 0 en la diagonal $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Se sigue de un teorema conocido en varias variables complejas (ver [7]) que F es idénticamente cero en $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. Por ende $TK_z(w) = 0$ para todo z y w, o $TK_z = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Como el conjunto de combinaciones lineales finitas de núcleos reproductores es denso en $\mathbf{F}^2_\alpha$ se concluye que $T = 0$. □

Propiedades acerca del operador T frecuentemente son reflejadas en propiedades para la transformada de Berezin $\widetilde{T}$. La transformada de Berezin recibe su nombre en honor a F. Berezin, quien introdujo el concepto en [2].

Decimos que la función Lebesgue medible φ satisface la *condición* (I_p), si $\varphi \circ t_a \in \mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ para todo $a \in \mathbb{C}$, donde $0 < p < \infty$ y $t_a(z)$ es el mapeo analítico traslación por a, es decir $t_a(z) = z + a$. En particular cualquier función que satisfaga la condición (I_p) debe estar en $\mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$.

Si φ satisface la condición (I_p) entonces

$$\int_{\mathbb{C}} |(\varphi \circ t_a)(z)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \int_{\mathbb{C}} |\varphi(z+a)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) < \infty.$$

Haciendo el cambio de variable $w = z + a$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |\varphi(z+a)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{C}} |\varphi(w)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(w-a) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |\varphi(w)|^p \, e^{-\alpha|a|^2} e^{2\alpha \mathrm{Re}(\overline{a}w)} \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{dA}(w) \\
&= e^{-\alpha|a|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha \overline{a} w} \right|^2 |\varphi(w)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) \\
&= e^{-\alpha|a|^2} \int_{\mathbb{C}} |K(w,a)|^2 \, |\varphi(w)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(w).
\end{aligned}$$

Es decir, se tiene que una función Lebesgue medible φ sobre $\mathbb{C}$ satisface la condición (I_p) si y solo si

$$\int_{\mathbb{C}} |K(z,a)|^2 \, |\varphi(z)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) < \infty$$

para toda $a \in \mathbb{C}$. Dada la forma exponencial del núcleo $K(z,a)$ la condición anterior es equivalente a

$$\int_{\mathbb{C}} |K(z,a)| \, |\varphi(z)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) < \infty.$$

La demostración de la afirmación anterior es análoga a la hecha en la sección de operadores de Toeplitz para la condición (M).

Cabe destacar que toda función en $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$ satisface la condición (I_p). En efecto, si $\varphi \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |k_a(z)|^2 \, |\varphi(z)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) &\leq ||\varphi||_\infty^p \int_{\mathbb{C}} |k_a(z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= ||\varphi||_\infty^p < \infty.
\end{aligned}$$

Supongamos que la función f satisface la condición (I_1). Podemos definir una función $\widetilde{f}$ sobre $\mathbb{C}$ como sigue:

$$\widetilde{f}(z) = \langle f k_z, k_z \rangle = \int_{\mathbb{C}} |k_z(w)|^2 \, f(w) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(w).$$

Llamamos a $\widetilde{f}$ la transformada de Berezin de f. Notamos que podemos escribir a $\widetilde{f}$ como

$$\widetilde{f}(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{-\alpha|z-w|^2} \, \mathrm{dA}(w) = \int_{\mathbb{C}} f(z \pm w) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(w).$$

En ocasiones es necesario enfatizar la dependencia en el parámetro α, en dichas ocasiones la notación que se usa es la siguiente:

$$B_\alpha f(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{-\alpha|z-w|^2} \, \mathrm{dA}(w), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Es decir, $\widetilde{f} = B_\alpha f$ si el parámetro no es especificado.

Ya hemos definido la transformada de Berezin para operadores y para funciones. ¿Puede extenderse dicha definición? La respuesta es positiva, y se extiende para una medida de Borel compleja.

Definición 1.20. La transforma de Berezin para una medida de Borel compleja μ es

$$\widetilde{\mu}(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |k_z(w)|^2 \, e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z-w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w),$$

siempre que las integrales converjan.

Si $\mathrm{d}\mu(z) = f(z)\,\mathrm{dA}(z)$ y f satisface la condición (I_1) se tiene que $\widetilde{\mu} = \widetilde{f}$. Así, podemos llamar a $\widetilde{\mu}$ la transformada de Berezin de la medida μ.
Cabe resaltar que si $\mathrm{d}\mu(z) = \varphi(z)\,\mathrm{dA}(z)$ entonces la medida μ satisface la condición (M) si y solo si φ satisface la condición (I_1). En efecto, de la definición de la condición (M) y de la equivalencia para la condición (I_p) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} |K(z,w)| \, e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}|\mu|\,(w) &= \int_{\mathbb{C}} |K(z,w)| \, e^{-\alpha|w|^2} \, |\varphi(w)| \, \mathrm{dA}(w) \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \int_{\mathbb{C}} |K(z,w)| \, |\varphi(w)| \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(w). \end{aligned}$$

Los siguientes resultados los utilizamos en el trabajo.

Proposición 1.21. *Si S es un operador en la clase traza o un operador positivo entonces*

$$\mathrm{tr}(S) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \widetilde{S}(z) \, \mathrm{dA}(z).$$

Más aún, un operador positivo S pertenece a la clase traza si y solo si la integral anterior converge.

Demostración. Supongamos primero que S es positivo, entonces $S = T^2$ para algún

$T \geq 0$. Para cualquier base ortonormal $\{e_n\}$, y del teorema de Fubini se obtiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(S) &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle Se_n, e_n\rangle_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} ||Te_n||_{2,\alpha}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{C}} |Te_n(z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n(z)|^2 \right] \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \int_{\mathbb{C}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle Te_n, K_z\rangle_\alpha^2 \right] \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, TK_z\rangle_\alpha^2 \right] \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \int_{\mathbb{C}} ||TK_z||_{2,\alpha}^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \langle SK_z, K_z\rangle_\alpha \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) = \int_{\mathbb{C}} \widetilde{S}(z) K(z,z) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \widetilde{S}(z) \, \mathrm{dA}(z).
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que S es autoadjunto y pertenece a la clase traza. Así, podemos escribir a S como

$$S = \frac{|S| + S}{2} - \frac{|S| - S}{2},$$

donde cada uno de los cocientes es un operador positivo en la clase traza. La fórmula buscada se obtiene de las correspondientes para cada operador positivo.

Finalmente, un operador arbitrario S en la clase traza puede ser escrito como

$$S = \frac{S + S^*}{2} + i\frac{S - S^*}{2},$$

donde cada cociente es un operador autoadjunto en la clase traza. La fórmula buscada para S se sigue de las correspondientes para operadores autoadjuntos en la clase traza. □

Lema 1.22. *Sean A un operador positivo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y x vector unitario en $\mathcal{H}$. Entonces $\langle A^p x, x\rangle \geq \langle Ax, x\rangle^p$ para $p \geq 1$ y $\langle A^p x, x\rangle \leq \langle Ax, x\rangle^p$ para todo $0 < p \leq 1$.*

Demostración. Sea

$$A = \int_0^\infty t \, \mathrm{d}E(t)$$

la descomposición espectral del operador positivo A, entonces para cualquier $p > 0$ y $x \in \mathcal{H}$ se tiene

$$A^p = \int_0^\infty t^p \, \mathrm{d}E(t)$$

y

$$\langle A^p x, x\rangle = \int_0^\infty t^p \, \mathrm{d}\langle E(t)x, x\rangle .$$

Si x es un vector unitario entonces

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\langle E(t)x, x\rangle = 1.$$

La conclusión del teorema se obtiene aplicando la desigualdad de Hölder. □

Proposición 1.23. *Si $1 \leq p \leq \infty$ y T está en la clase de Schatten S_p entonces $\widetilde{T}$ pertenece a $L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$.*

Demostración. Si T está en la clase traza, podemos escribir a T como

$$T = T_1 - T_2 + i(T_3 - T_4),$$

donde cada T_k es un operador positivo en la clase traza. Si T está en la clase de Schatten S_p entonces por la descomposición $T = T_1 - T_2 + i(T_3 - T_4)$ podemos asumir que T es positivo. Así, cuando T es positivo, T está en la clase de Schatten S_p si y solo si T^p está en la clase traza, por ende $\mathrm{tr}(T^p) < \infty$. Utilizando las proposiciones anteriores se tiene lo deseado:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T^p) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \widetilde{T^p}(z)\ \mathrm{dA}(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle T^p k_z, k_z \rangle\ \mathrm{dA}(z) \\ &\geq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \langle T k_z, k_z \rangle^p\ \mathrm{dA}(z) \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \widetilde{T}^p(z)\ \mathrm{dA}(z). \end{aligned}$$

□

1.4. Medidas de Fock-Carleson

En esta sección caracterizamos a las medidas de Carleson para los espacios de Fock.
La siguiente es una estimación muy útil para funciones en $\mathbf{F}^p_\alpha$.

Lema 1.24. *Para cualquier valor de los parámetros positivos α, p y R, existe una constante positiva $C = C(p, \alpha, R)$ tal que*

$$\left| f(a) e^{-\alpha|a|^2/2} \right|^p \leq \frac{C}{r^2} \int_{B(a,r)} \left| f(z) e^{-\alpha|z|^2/2} \right|^p \mathrm{dA}(z)$$

para todas las funciones enteras f, todos los números complejos a, y para todo $r \in (0, R]$. Donde $B(a, r)$ es la bola euclidiana centrada en a con radio r.

Demostración. Sea I la integral de la desigualdad, es decir:

$$\begin{aligned} I &= \int_{B(a,r)} \left| f(z) e^{-\alpha|z|^2/2} \right|^p \mathrm{dA}(z) \\ &= \int_{|w|<r} |f(w+a)|^p \, e^{-p\alpha|w+a|^2/2}\ \mathrm{dA}(w) \\ &= \int_{|w|<r} \left| f(w+a) e^{-\alpha w \overline{a}} \right|^p e^{-p\alpha(|w|^2+|a|^2)/2}\ \mathrm{dA}(w). \end{aligned}$$

Escribiendo la integral anterior en coordenadas polares y usando la subarmonicidad de la función $|f(w+a)e^{-\alpha w\bar{a}}|^p$ obtenemos

$$\begin{aligned} I &\geq |f(a)|^p \int_{|w|<r} e^{-p\alpha(|w|^2+|a|^2)/2}\, \mathrm{dA}(w) \\ &= 2\pi\, |f(a)|^p \int_0^r t e^{-p\alpha(|t|^2+|a|^2)/2}\, \mathrm{d}t \\ &= \pi \left| f(a)e^{-\alpha|a|^2/2} \right|^p \int_0^{r^2} e^{-p\alpha s/2}\, \mathrm{d}s \\ &\geq e^{-p\alpha r^2/2}\pi r^2 \left| f(a)e^{-\alpha|a|^2/2} \right|^p . \end{aligned}$$

□

Para dos números complejos z y w no cero que no estén en el mismo rayo (que empieza en el origen), el conjunto de puntos $nz + mw$, donde n, m son enteros arbitrarios, es llamado el *retículo* generado por z y w. El retículo más simple en los complejos es el retículo estándar de enteros

$$\mathbb{Z}^2 = \{m + in : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Cualquier arreglo fijo de un retículo puede ponerse en forma de sucesión, denotamos por $\{a_n\}$ a dicho arreglo. El siguiente es el resultado principal de la sección.

Teorema 1.25. *Sean μ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{C}, 0 < p < \infty$ y $0 < r < \infty$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) Existe $\alpha > 0$ y una constante positiva C_α tal que

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p \mathrm{d}\mu(w) \leq C_\alpha \int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p \mathrm{dA}(w)$$

para todas las funciones enteras f.

(b) Existe $\alpha > 0$ y una constante positiva C_α tal que

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2}\, \mathrm{d}\mu(w) \leq C_\alpha$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(c) Existe una constante positiva $C = C_r$ tal que $\mu(B(z,r)) \leq C$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Fijamos un radio positivo r, consideramos el retículo $r\mathbb{Z}^2$ en $\mathbb{C}$. Denotamos a cualquier arreglo fijo del retículo en forma de sucesión con $\{z_n\}$. Para cualquier función entera f, sea

$$I(f) = \int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p \mathrm{d}\mu(w).$$

Entonces

$$I(f) \leq \sum_n \int_{B(z_n,r)} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p \mathrm{d}\mu(w).$$

Por el Lema 1.24 y la desigualdad del triángulo existe una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left|f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \leq C_1 \int_{B(z_n,2r)} \left|f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(u)$$

para todo $w \in B(z_n, r)$. Supongamos que se cumple (c), entonces

$$\begin{aligned} I(f) &\leq \sum_n \int_{B(z_n,r)} C_1 \int_{B(z_n,2r)} \left|f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(u) \, \mathrm{d}\mu(w) \\ &= C_1 \sum_n \int_{B(z_n,r)} \mathrm{d}\mu(w) \int_{B(z_n,2r)} \left|f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(u) \\ &\leq C_2 \sum_n \int_{B(z_n,2r)} \left|f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(u). \end{aligned}$$

Hemos encontrado una constante positiva C_2 (independiente de f) tal que

$$I(f) \leq C_2 \sum_n \int_{B(z_n,2r)} \left|f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(u),$$

para todas las funciones enteras f. Dado que para todo punto en el plano complejo existe un entero positivo N de manera que dicho punto pertenece a lo más a N discos $B(z_n, 2r)$ obtenemos

$$I(f) \leq C_2 N \int_{\mathbb{C}} \left|f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(u).$$

Que es justamente el enunciado de (a), mostrando así que la condición (c) implica la condición (a).

Para demostrar que (a) implica (b), basta elegir $f = k_z$ y aplicar el Lema 1.13, procedamos a mostrarlo. Supongamos que se cumple (a). Para $f = k_z$ tenemos

$$\int_{\mathbb{C}} \left|k_z(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \, \mathrm{d}\mu(w) \leq C \int_{\mathbb{C}} \left|k_z(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \, \mathrm{dA}(w).$$

Sustituyendo k_z en el lado izquierdo de la desigualdad, y utilizando Lema 1.13 (k_z es unitario en $\mathbf{F}^p_\alpha$) en el lado derecho, llegamos a la desigualdad

$$\int_{\mathbb{C}} \left|e^{\alpha\bar{z}w}e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \, \mathrm{d}\mu(w) \leq C\frac{2\pi}{p\alpha}.$$

Ahora utilizando la Observación 1.4, la desigualdad anterior se convierte en

$$\int_{\mathbb{C}} \left|e^{-\frac{\alpha}{2}|w-z|^2}\right|^p \, \mathrm{d}\mu(w) \leq C\frac{2\pi}{p\alpha}.$$

Por ende, concluimos que

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|w-z|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) \leq C.$$

Finalmente, suponiendo (b), se obtiene la desigualdad

$$\int_{B(z,r)} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2}\, \mathrm{d}\mu(w) \leq C$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado que $|z-w| < r$ la desigualdad anterior implica

$$\mu(B(z,r)) \leq C e^{\frac{p\alpha}{2} r^2},$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Así, se tiene que la condición (b) implica la condición (c). $\square$

Notamos que la condición (c) es independiente de p y α. Así, si la condición (a) se cumple para algún $p > 0$ y algún α, entonces se cumple para todo p y todo α (con la constante C dependiente de p y α).

Análogamente, la condición (a) es independiente de r. Por lo tanto, si la condición (c) se satisface para algún $r > 0$, entonces se satisface para todo $r > 0$ (con la constante C dependiente de r).

En vista de las observaciones anteriores, llamamos a cualquier medida de Borel positiva μ que satisfaga cualquiera de las condiciones $(a)-(c)$ una medida de Fock-Carleson.

De la misma manera, para cada $\alpha > 0$, decimos que una medida de Borel positiva μ sobre $\mathbb{C}$ es una medida desvaneciente de Fock-Carleson si

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \left| f_n(z) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p \mathrm{d}\mu(z) = 0,$$

siempre que $\{f_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathbf{F}^p_\alpha$ que converge a 0 uniformemente en subconjuntos compactos.

Omitimos la demostración de los siguientes resultados, pueden consultarse en [14]. El primero muestra que el ser una medida desvaneciente de Fock-Carleson es independiente de la elección de p y α. El segundo enunciado da una caracterización de las medidas de Fock-Carleson y las medidas desvanecientes de Fock-Carleson.

Teorema 1.26. *Sean $p > 0, \alpha > 0, r > 0$ y μ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{C}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *μ es una medida desvaneciente de Fock-Carleson.*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2}\, \mathrm{d}\mu(w) \to 0$ *cuando* $z \to \infty$.

(iii) $\mu(B(z,r)) \to 0$ *cuando* $z \to \infty$.

Teorema 1.27. *Sea μ una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{C}, r > 0$ y $\{z_n\}$ cualquier arreglo del retículo $r\mathbb{Z}^2$. Entonces*

(a) *μ es una medida de Fock-Carleson si y solo si $\{\mu(B(z_k, r))\}$ está en ℓ^∞.*

(b) *μ es una medida desvaneciente de Fock-Carleson si y solo si la sucesión $\{\mu(B(z_k, r))\}$ está en c_0.*

Donde ℓ^∞ denota al espacio de todas las sucesiones acotadas, y c_0 es el espacio de todas las sucesiones que convergen a 0.

Recordando la definición $\widetilde{\mu}(z) = \dfrac{\alpha}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z-w|^2}\, \mathrm{d}\mu(w)$ y eligiendo $p = 2$ en los Teoremas 1.25 y 1.26, se tiene que una medida positiva de Borel sobre $\mathbb{C}$ es una medida de Fock-Carleson si y solo si $\widetilde{\mu} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$, y μ es una medida desvaneciente de Fock-Carleson si y solo si $\widetilde{\mu} \in C_0(\mathbb{C})$.

Notamos también que cuando el radio r es fijo, la función $z \mapsto \mu(B(z,r))$ es un múltiplo de la función promedio

$$\widehat{\mu}_r(z) = \frac{\mu(B(z,r))}{\pi r^2}.$$

Por ende, las condiciones sobre la función $z \mapsto \mu(B(z,r))$ pueden ser reemplazadas por sus correspondientes sobre las funciones promedio $\widehat{\mu}_r$.

La desigualdad siguiente nos será muy útil más adelante:

Lema 1.28. *Para cada $r > 0$ existe una constante positiva dependiente de r tal que*

$$\mu(B(z,r)) \leq C\widetilde{\mu}(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Para $z \in \mathbb{C}$ arbitrario se tiene

$$\begin{aligned}
\mu(B(z,r)) &= \int_{B(z,r)} \mathrm{d}\mu(w) \\
&\leq e^{\alpha r^2} \int_{B(z,r)} e^{-\alpha|z-w|^2}\, \mathrm{d}\mu(w) \\
&\leq e^{\alpha r^2} \int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z-w|^2}\, \mathrm{d}\mu(w) \\
&= e^{\alpha r^2} \frac{\pi}{\alpha} \widetilde{\mu}(z).
\end{aligned}$$

□

1.5. Operadores de Toeplitz acotados y compactos

Los resultados de esta sección caracterizan a los operadores de Toeplitz con símbolo positivo. El primer resultado caracteriza a los operadores de Toeplitz que son acotados en el espacio de Fock.

Teorema 1.29. *Supongamos que la medida de Borel positiva μ satisface la condición (M). Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) T_μ es acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

(b) $\widetilde{\mu}$ es acotada en $\mathbb{C}$.

(c) μ es una medida de Fock-Carleson.

Demostración. Por la representación integral de la proyección, si T_μ define un operador lineal acotado entonces

$$\langle T_\mu f, g\rangle = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{g(w)}e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}\mu(w)$$

para todas las funciones f y g en $\mathbf{F}^2_\alpha$. En particular

$$\begin{aligned}\langle T_\mu f, f\rangle &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^2\, e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}\mu(w)\\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^2\ \mathrm{d}\mu(w)\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$. Eligiendo $f = k_z$ en la igualdad anterior se llega a

$$\widetilde{\mu}(z) = \langle T_\mu k_z, k_z\rangle\,.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el acotamiento de T_μ obtenemos

$$0 \leq \widetilde{\mu}(z) \leq ||T_\mu k_z||\,||k_z|| \leq ||T_\mu|| \leq C$$

para toda $z \in \mathbb{C}$, mostrando así que la condición (a) implica la condición (b).

La condición (b) implica (c) se sigue del Lema 1.28 y del inciso (c) del Teorema 1.25.

Finalmente supongamos que la condición (c) se satisface, sean $f, g \in \mathbf{L}^\infty$ entonces $fg \in \mathbf{L}^1_\alpha$ y

$$|T_\mu f(z)| \leq \frac{\alpha}{\pi}\,||f||_\infty \int_{\mathbb{C}} |K(z,w)|\, e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}\mu(w) < \infty,$$

pues μ satisface la condición (M), por las equivalencias de la condición (M) se tiene que $T_\mu \in \mathbf{L}^2_\alpha$. Utilizando la expresión para $\langle T_\mu f, g\rangle$ tenemos

$$\begin{aligned}|\langle T_\mu f, g\rangle| &= \left|\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(w)\overline{g(w)}e^{-\alpha|w|^2}\ \mathrm{d}\mu(w)\right|\\ &\leq \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|f(w)g(w)e^{-\alpha|w|^2}\right|\ \mathrm{d}\mu(w)\\ &\leq C\frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|f(w)g(w)e^{-\alpha|w|^2}\right|\ \mathrm{dA}(w)\\ &\leq C\,||f||\,||g||\,,\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se obtiene de suponer (c) y utilizando las equivalencias del Teorema 1.25.
Como $\mathbf{L}^\infty$ es denso en $\mathbf{L}^2_\alpha$ entonces el operador $T_\mu : \mathbf{F}^2_\alpha \to \mathbf{L}^2_\alpha$ debe ser acotado, pero como $PT_\mu = T_\mu$ se obtiene entonces que $T_\mu : \mathbf{F}^2_\alpha \to \mathbf{F}^2_\alpha$ es acotado. □

Eligiendo en el teorema anterior

$$\mathrm{d}\mu(z) = \varphi(z)\ \mathrm{dA}(z)$$

obtenemos el siguiente corolario concerniente al acotamiento de los operadores de Toeplitz inducidos por funciones no negativas.

Corolario 1.30. *Supongamos que $\varphi \geq 0$ satisface la condición (I_1). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T_φ es acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

(b) $\widetilde{\varphi} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$.

(c) $\widehat{\varphi}_r \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$, donde r es cualquier radio positivo fijo.

Los siguientes resultados serán de ayuda más adelante.

Lema 1.31. *Sea $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ una sucesión que converge débilmente a cero, entonces $\{||x_n||\}$ resulta ser acotada.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}$ converge débilmente a cero, el *principio de acotación uniforme* garantiza que solo una del siguiente par de opciones es posible: podemos encontrar vectores en $\mathcal{H}$ para los cuales $\sup_n \langle x_n, y\rangle = \infty$ o $||x_n|| \leq M$ para alguna constante uniforme M. Dado que x_n converge débilmente a 0 entonces para cualquier y se tiene que $\lim_n \langle x_n, y\rangle$ existe. Además como una sucesión convergente es acotada y el conjunto de elementos y para los cuales $\sup_n \langle x_n, y\rangle = \infty$ es vacío, se concluye que $||x_n|| \leq M$. □

Lema 1.32. *Sea $M \subset \mathcal{H}$ subconjunto compacto. Si $\langle x_n, y\rangle \to 0$ para todo $y \in \mathcal{H}$, entonces $\langle x_n, y\rangle \to 0$ uniformemente para todo $y \in M$.*

Demostración. Sea $M \subset \mathcal{H}$ subconjunto compacto. La hipótesis implica que $x_n \to 0$ débilmente, por el Lema 1.31 se tiene que $||x_n|| \leq L$. Sea $\delta < \frac{\epsilon}{2L}$, entonces

$$M \subset \bigcup_{y\in M} (y + B(0,\delta)).$$

Por la compacidad de M se obtiene

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{l} (y_i + B(0,\delta)).$$

Existe N tal que si $n > N$ se satisface $|\langle x_n, y_i\rangle| < \epsilon/2$, $1 \leq i \leq l$. De esta manera, si $y \in M$, entonces $y = y_i + z$ con $z \in B(0,\delta)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y\rangle| &\leq |\langle x_n, y_i\rangle| + |\langle x_n, z\rangle| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \delta L < \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lema 1.33. *Una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathbf{F}^2_\alpha$ converge a 0 débilmente si y solo si $\{||f_n||_\alpha\}$ es acotada y $f_n(w) \to 0$ uniformemente en subconjuntos compactos cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ en $\mathbf{F}^2_\alpha$ converge a 0 débilmente, es decir

$$\langle f_n, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f_n(z)\overline{g(z)}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \to 0, \quad \text{para todo } g \in \mathbf{F}^2_\alpha.$$

El Lema 1.31 implica que $\{||f_n||_\alpha\}$ es acotada. Para ver que $f_n(w) \to 0$ uniformemente sobre conjuntos compactos, notamos que $w \mapsto K(w,\cdot)$ es un mapeo continuo de $\mathbb{C}$ en $\mathbf{F}^2_\alpha$, por ende si $K \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto, entonces el conjunto $\{K(w,\cdot)\}_{w\in K}$ es compacto en $\mathbf{F}^2_\alpha$. Por el Lema 1.32 y por las propiedades de los núcleos reproductores $K(w,\cdot)$ se tiene

$$f_n(w) = \langle f_n, K(w,\cdot)\rangle_\alpha \to 0$$

uniformemente para todo $w \in K$.

Veamos el recíproco del enunciado. Supongamos que $||f_n||_\alpha < L$ y $f_n(w) \to 0$ uniformemente sobre conjuntos compactos. Fijamos $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$, sea $K = \overline{B(0,N)}$, de esta manera

$$\int_{\mathbb{C}} f_n\overline{f}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha = \int_K f_n\overline{f}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha + \int_{K^c} f_n\overline{f}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha =: J_1 + J_2.$$

Acotamos cada una de las integrales del lado derecho. Por Hölder se tiene

$$\begin{aligned}
|J_2| &= \left|\int_{K^c} f_n\overline{f}\, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right| \leq \int_{K^c} \left|f_n\overline{f}\right| \mathrm{d}\lambda_\alpha \\
&\leq \left(\int_{K^c} |f_n|^2\, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{1/2} \left(\int_{K^c} |f|^2\, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{1/2} \\
&\leq L\left(\int_{|z|>N} |f|^2\, \mathrm{d}\lambda_\alpha\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, elegimos N suficientemente grande tal que $|J_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Fijando N podemos elegir N' de manera que $|f_n| < \dfrac{\epsilon}{2\lambda_\alpha(K)^{1/2}\,||f||_\alpha}$ en K, si $n \geq N' \geq N$, entonces

$$\begin{aligned}
|J_1| &\leq \int_K \left|f_n\overline{f}\right| \mathrm{d}\lambda_\alpha \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\lambda_\alpha(K)^{1/2}\,||f||_\alpha} \int_{|z|\leq N} |f|\, \mathrm{d}\lambda_\alpha \\
&\leq \frac{\epsilon}{2\lambda_\alpha(K)^{1/2}\,||f||_\alpha}\, ||f||_\alpha\, \lambda_\alpha(K)^{1/2} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|J_1 + J_2| \leq \epsilon,$$

es decir, f_n converge débilmente a cero. □

El siguiente teorema caracteriza a los operadores de Toeplitz compactos en el espacio de Fock.

Teorema 1.34. *Supongamos que la medida de Borel positiva μ satisface la condición (M). Entonces son equivalentes:*

(a) T_μ es compacto en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

(b) $\widetilde{\mu} \to 0$ cuando $z \to \infty$.

(c) μ es una medida desvaneciente de Fock-Carleson.

Demostración. Es claro que $k_z \to 0$ débilmente en $\mathbf{F}^2_\alpha$ cuando $z \to \infty$, la compacidad de T_μ en $\mathbf{F}^2_\alpha$ implica que $Tk_z \to 0$ en $\mathbf{F}^2_\alpha$. Como k_z es unitario en $\mathbf{F}^2_\alpha$ entonces $\widetilde{\mu} \to 0$ cuando $z \to \infty$, probando así que la condición (a) implica la condición (b).

La condición (b) implica (c) se sigue del Lema 1.28 y del inciso (iii) del Teorema 1.26.

Finalmente, asumamos que μ es una medida desvaneciente de Fock-Carleson, en particular es una medida de Fock-Carleson, por el Teorema 1.29, T_μ resulta ser acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$. Para mostrar que es compacto, recordamos la siguiente caracterización para que un operador positivo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sea compacto: T es compacto si y solo si

$$\lim_{n\to\infty} \langle Tf_n, f_n\rangle \to 0$$

siempre que $\{f_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{H}$ que converge débilmente a 0.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathbf{F}^2_\alpha$ que converge débilmente a 0. Por el Lema 1.33, dado $\epsilon > 0$, elegimos K compacto tal que $\int_K |f_n(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $n \geq 1$. Elegimos N suficientemente grande tal que $\int_{K^c} |f_n(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) < \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq N$. De esta manera llegamos a

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle T_\mu f_n, f_n\rangle &= \int_{\mathbb{C}} |f_n(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) \\ &= \int_K |f_n(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) + \int_{K^c} |f_n(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{si } n \geq N. \end{aligned}$$

La identidad anterior y la positividad de T_μ muestran que T_μ es compacto en $\mathbf{F}^2_\alpha$. □

Eligiendo en el teorema anterior

$$\mathrm{d}\mu(z) = \varphi(z) \, \mathrm{dA}(z)$$

obtenemos el siguiente corolario concerniente a la compacidad de los operadores de Toeplitz inducidos por funciones no negativas.

Corolario 1.35. *Supongamos que $\varphi \geq 0$ satisface la condición (I_1). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) T_φ es compacto en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

(b) $\widetilde{\varphi} \in C_0(\mathbb{C})$.

(c) $\widehat{\varphi}_r \in C_0(\mathbb{C})$, donde r es cualquier radio positivo fijo.

Capítulo 2

Operadores de Toeplitz en S_p para $p \geq 1$

Para $\mu \geq 0$, determinamos cuando el operador de Toeplitz T_μ sobre $\mathbf{F}^2_\alpha$ pertenece a la clase de Schatten S_p, para $p \geq 1$.

Recordando que para cualquier operador lineal acotado T en $\mathbf{F}^2_\alpha$ podemos definir la transformada de Berezin como

$$\widetilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z \rangle, \quad z \in \mathbb{C},$$

donde k_z son los núcleos reproductores normalizados en $\mathbf{F}^2_\alpha$ (Lema 1.13). Si T es positivo, entonces por la Proposición 1.21 tenemos

$$\operatorname{tr}(T) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \widetilde{T}(z) \, \mathrm{dA}(z).$$

En particular T está en la clase traza S_1 si y solo si la integral anterior converge. Como consecuencia se sigue la siguiente fórmula para la traza de un operador de Toeplitz en el espacio de Fock $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Proposición 2.1. *Supongamos que μ es una medida de Borel positiva sobre $\mathbb{C}$ que satisface la condición (M). Entonces T_μ está en la clase traza S_1 si y solo si μ es finita sobre $\mathbb{C}$. Más aún,* $\operatorname{tr}(T_\mu) = (\alpha/\pi)\mu(\mathbb{C})$.

Demostración. Notamos que todas las integrales son no negativas, usando el teorema de Fubini llegamos a

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(T_\mu) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \widetilde{\mu}(z) \, \mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \mathrm{dA}(z) \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha \bar{z} w} \right|^2 e^{-\alpha(|z|^2 + |w|^2)} \, \mathrm{d}\mu(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha |w|^2} \, \mathrm{d}\mu(w) \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha \bar{z} w} \right|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\mu(w) = \frac{\alpha}{\pi} \mu(\mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Lo anterior también muestra que $\operatorname{tr}(T_\mu) < \infty$ si y solo si $\mu(\mathbb{C}) < \infty$. $\square$

El siguiente lema da una condición sobre el símbolo del operador de Toeplitz para que este pertenezca a la clase S_p, para $p \geq 1$.

Lema 2.2. *Si $p \geq 1$ y $\varphi \in L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ entonces $T_\varphi \in S_p$.*

Demostración. Si $\varphi \in \mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ entonces $\varphi \circ t_a \in \mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ por un cambio de variables. De esta manera se tiene que $\varphi \circ t_a \in \mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{d}\lambda_\alpha)$ para todo $a \in \mathbb{C}$. Por ende φ satisface la condición (I_p). Dado que $p \geq 1, \varphi$ satisface la condición (I_1) y entonces T_φ está densamente definido en $\mathbf{F}^2_\alpha$.

Podemos descomponer a φ en una combinación lineal de cuatro funciones no negativas en $\mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$. Por lo tanto, podemos asumir que φ siempre es no negativa. Asumamos también que φ tiene soporte compacto, entonces T_φ es un operador positivo compacto cuya descomposición canónica es de la forma

$$T_\varphi f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n,$$

donde $\{\lambda_n\}$ es la sucesión de valores singulares de T_φ y $\{e_n\}$ es la base ortonormal de $\mathbf{F}^2_\alpha$. En particular

$$\lambda_n = \langle T_\varphi e_n, e_n \rangle = \int_{\mathbb{C}} |e_n(z)|^2 \varphi(z) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)$$

para todo $n \geq 1$. Por la desigualdad de Hölder se sigue que

$$|\lambda_n|^p \leq \int_{\mathbb{C}} |e_n(z)|^2 |\varphi(z)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z), \quad n \geq 1,$$

pues $|e_n(z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z)$ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{C}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p &\leq \int_{\mathbb{C}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_n(z)|^2 \right) |\varphi(z)|^p \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{C}} |\varphi(z)|^p K_\alpha(z, z) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= C \int_{\mathbb{C}} |\varphi(z)|^p \, \mathrm{dA}(z).
\end{aligned}$$

Entonces se tiene la desigualdad

$$||T_\varphi||^p_{S_p} \leq C \int_{\mathbb{C}} |\varphi(z)|^p \, \mathrm{dA}(z).$$

Veamos ahora el caso general, supongamos que φ es no negativa, sean

$$A_n := \{z \in \mathbb{C} : |z| < n, n \in \mathbb{N}\} \text{ y } \varphi_n := \varphi \chi_{A_n}.$$

Notemos que $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente de conjuntos medibles y $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Dado que φ es no negativa se tiene que la funciones φ_n son no negativas, como $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente se tiene para todo $z \in \mathbb{C}$ que $\varphi_n(z) \leq \varphi_{n+1}(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además para cada $z \in \mathbb{C}$ existe un número natural N tal que $z \in A_n$ para todo $n \geq N$, así $\varphi_n(z) = \varphi(z)$ para todo $n \geq N$. Por ende $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z)$. Aplicando el teorema de la convergencia monótona se tiene

$$\int_{\mathbb{C}} \varphi = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \varphi \chi_{A_n} = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi.$$

Como las funciones φ_n tienen soporte compacto, el caso anterior es aplicable obteniendo así la conclusión. $\square$

Una herramienta útil para estudiar a los operadores de Toeplitz es a través de las funciones promedio, las cuales fueron introducidas en el capítulo anterior.

Lema 2.3. *Sea $r > 0, \mu$ una medida de Borel compleja y*

$$\widehat{\mu}_r(z) = \frac{\mu(B(z,r))}{\pi r^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Si $\widehat{\mu}_r \in L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ para algún $0 < p < \infty$ entonces μ satisface la condición (M) y los operadores de Toeplitz T_μ y $T_{\widehat{\mu}_r}$ son ambos acotados en $\mathbf{F}^2_\alpha$. Más aún, existe una constante positiva C (independiente de μ) tal que $T_\mu \leq C T_{\widehat{\mu}_r}$.

Demostración. Sea

$$C = \int_{\mathbb{C}} \mu(B(z,r))^p \, \mathrm{dA}(z) < \infty.$$

Para cualquier $a \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\int_{B(a,r/2)} \mu(B(z,r))^p \, \mathrm{dA}(z) \leq C.$$

Cuando $z \in B(a, r/2)$ se cumple $B(a,r/2) \subset B(z,r)$, de esta manera $\mu(B(z,r)) \geq \mu(B(a,r/2))$ y

$$\frac{\pi r^2}{4} \mu(B(a,r/2))^p \leq C, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Por ende la función $a \mapsto \mu(B(a,r/2))$ es acotada. La medida μ satisface la condición (M) y por el teorema 1.29 el operador de Toeplitz T_μ es acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$, lo cual implica que la función $z \mapsto \mu(B(z,r))$ es acotada. Por lo tanto, $T_{\widehat{\mu}_r}$ es acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$, ya que si el símbolo es acotado, el operador de Toeplitz es un operador acotado.

Dada $f \in \mathbf{F}^2_\alpha$, por el teorema de Fubini se obtiene

$$\begin{aligned}
\pi r^2 \langle T_{\widehat{\mu}_r} f, f \rangle &= \pi r^2 \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, \widehat{\mu}_r(z) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, \mu(B(z,r)) \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \int_{\mathbb{C}} \chi_{B(z,r)}(w) \, \mathrm{d}\mu(w) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\mu(w) \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \, \chi_{B(w,r)} \, \mathrm{d}\lambda_\alpha(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \mathrm{d}\mu(w) \int_{B(w,r)} \left| f(z) e^{-\alpha |z|^2/2} \right|^2 \mathrm{dA}(z).
\end{aligned}$$

El Lema 1.24 implica que existe una constante positiva C tal que

$$C\,\langle T_{\widehat{\mu}_r} f, f\rangle \geq \int_{\mathbb{C}} |f(w)|^2\, e^{-\alpha|w|^2}\,\mathrm{d}\mu(w) = \langle T_\mu f, f\rangle\,.$$

$\square$

Notamos que la condición $\widehat{\mu}_r \in \mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ para $0 < p < \infty$ implica que

$$\lim_{a\to\infty} \int_{B(a,r/2)} \mu(B(z,r))^p\,\mathrm{dA}(z) = 0.$$

Consecuentemente, haciendo algunas modificaciones a los argumentos en la prueba anterior se puede mostrar que $\mu(B(a,r/2)) \to 0$ cuando $a \to \infty$, lo cual implica que T_μ es compacto en $\mathbf{F}^2_\alpha$ y $\widehat{\mu}_r \in C_0(\mathbb{C})$ (ver Teorema 1.34).

Para el resto del capítulo, $\{a_n\}$ denotará cualquier arreglo fijo del retículo $r\mathbb{Z}^2$ en forma de sucesión. Dado que si μ es positiva entonces el operador de Toeplitz T_μ es un operador acotado en $\mathbf{F}^2_\alpha$, se tiene la siguiente igualdad:

$$\widetilde{\mu}(z) = \langle T_\mu k_z, k_z\rangle_\alpha\,, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Cuando $\mathrm{d}\mu(z) = \varphi(z)\,\mathrm{dA}(z)$ obtenemos T_φ y $\widetilde{\varphi}$.

Ahora sí, con los lemas previos podemos caracterizar la pertenencia de los operadores de Toeplitz positivos a las clases de Schatten S_p cuando $p \geq 1$. Cabe mencionar que el siguiente teorema resulta ser fundamental para el capítulo siguiente.

Teorema 2.4. *Supongamos $\mu \geq 0, r > 0$ y $p \geq 1$. Si μ satisface la condición (M) entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El operador T_μ está en la clase de Schatten S_p.

(b) La función $\widetilde{\mu}(z)$ está en $L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$.

(c) La función $\mu(B(z,r))$ está en $L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$.

(d) La sucesión $\{\mu(B(a_n,r))\}$ está en ℓ^p.

Más aún, las normas $||T_\mu||_{S_p}$, $||\widetilde{\mu}||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}$, $||\widehat{\mu}_r||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}$ y $||\mu(B(a_n,r))||_{\ell^p}$ son comparables.

Demostración. El enunciado (a) implica (b) así como la comparación de normas se siguen de la Proposición 1.23. La desigualdad $\widehat{\mu}_r(z) \leq C\widetilde{\mu}(z)$ dada en Lema 1.28, muestra que (b) implica (c). Por ende

$$||\widehat{\mu}_r||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})} \leq C\,||\widetilde{\mu}||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}\,.$$

Ahora, suponiendo (c) se tiene que la función promedio $\widehat{\mu}_r(z)$ está en $\mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$ pues solo difiere por una constante de $\mu(B(z,r))$. Por el Lema 2.2 se sigue que el operador $T_{\widehat{\mu}_r}$ está en S_p. Más aún, el mismo lema nos dice que $||T_{\widehat{\mu}_r}||_{S_p} \leq C\,||\widehat{\mu}_r||_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}$. Combinando lo anterior con el Lema 2.3, concluimos que T_μ está en S_p. Además

$||T_\mu||_{S_p} \leq C\,||T_{\widehat{\mu}_r}||_{S_p}$ pues los operadores son positivos. Lo anterior prueba que (c) implica (a).

Para demostrar que la condición (d) es equivalente a las otras condiciones, supongamos primero que la condición (b) se satisface, lo cual implica que la función $\mu(B(z,2r))$ está en $\mathbf{L}^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$. Sea m un entero positivo tal que cada punto del plano complejo pertenece a lo más a m de los discos $B(a_n, r)$. Entonces

$$m\int_{\mathbb{C}} \mu(B(z,2r))^p \,\mathrm{dA}(z) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B(a_n,r)} \mu(B(z,2r))^p \,\mathrm{dA}(z).$$

Para cada $z \in B(a_n, r)$, se deduce de la desigualdad del triángulo que

$$\mu(B(z,2r)) \geq \mu(B(a_n,r)).$$

Por lo tanto

$$m\int_{\mathbb{C}} \mu(B(z,2r))^p \,\mathrm{dA}(z) \geq \pi r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(a_n,r))^p. \tag{2.1}$$

Mostrando así que (b) implica (c), utilizando la desigualdad (2.1) y el hecho de que $||\widehat{\mu}_r||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})} \leq C\,||\widetilde{\mu}||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}$ llegamos a

$$||\mu(B(a_n,r))||_{\ell^p} \leq C\,||\widehat{\mu}_r||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})} \leq C\,||\widetilde{\mu}||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}.$$

Para finalizar la prueba, supongamos que se cumple (d), es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(a_n,r))^p < \infty.$$

Se puede verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(z_n,r))^p < \infty,$$

donde $\{z_n\}$ es cualquier arreglo del retículo $(r/2)\mathbb{Z}^2$. De hecho, para cada punto z_k que no está en el retículo $\{a_n\}$, el disco $B(z_k, r)$ está cubierto por seis discos adyacentes $B(a_k, r)$. Por ende

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} \mu(B(z,r/2))^p \,\mathrm{dA}(z) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B(z_n,r/2)} \mu(B(z,r/2))^p \,\mathrm{dA}(z) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B(z_n,r/2)} \mu(B(z_n,r))^p \,\mathrm{dA}(z) \\
&= \frac{\pi r^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B(z_n,r))^p < \infty.
\end{aligned}$$

Por ende la condición (d) implica la condición (c). Dada la equivalencia de (c) a (b), se deduce que si la condición (c) se satisface para algún radio positivo, entonces la condición (c) también se satisface para cualquier otro radio positivo. Este hecho aunado a la estimación para $\int_{\mathbb{C}} \mu(B(z,r/2))^p \,\mathrm{dA}(z)$ muestran que

$$||\widehat{\mu}_r||_{L^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})} \leq C\,||\mu(B(a_n,r))||_{\ell^p}.$$

$\square$

Eligiendo en el teorema anterior

$$\mathrm{d}\mu(z) = \frac{\alpha}{\pi}\varphi(z)\ \mathrm{dA}(z),$$

obtenemos el siguiente corolario concerniente a los operadores de Toeplitz inducidos por funciones no negativas.

Corolario 2.5. *Supongamos $\varphi \geq 0, p \geq 1$ y $r > 0$. Si φ satisface la condición (I_1) entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) El operador de Toeplitz T_φ pertenece a la clase de Schatten S_p.

(b) La transformada de Berezin $\widetilde{\varphi}$ pertenece a $L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$.

(c) La función de promedio

$$\widehat{\varphi}_r(z) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z,r)} \varphi(w)\ \mathrm{dA}(w)$$

pertenece a $L^p(\mathbb{C}, \mathrm{dA})$.

(d) La sucesión de promedios $\{\widehat{\varphi}_r(a_n)\}$ pertenece a ℓ^p.

Para $0 < p \leq 1$, determinar cuando el operador de Toeplitz pertenece a la clase S_p requiere introducir nuevas ideas y técnicas que se escapan del alcance de este trabajo, el lector interesado puede consultar ([14], p. 248).

Capítulo 3

Operadores de Schatten-Herz en el espacio de Fock $\mathbf{F}^2_\alpha$

En este capítulo se encuentra el resultado principal de este trabajo.

Dividimos al plano complejo en anillos unitarios $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, a saber

$$A_n := \{z \in \mathbb{C} : n \leq |z| < n+1\},$$

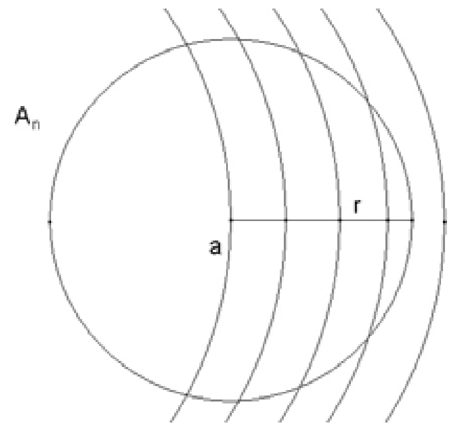
para estudiar por medio de los anteriores a ciertos operadores de Toeplitz.

El siguiente lema es un resultado que utilizaremos más adelante.

Lema 3.1. *Sea $r > 0$ y $a \in A_n$, entonces existe una constante natural $M := M(r)$ dependiente de r tal que*

$$B(a,r) \subset \bigcup_{k=-M}^{M} A_{n+k}.$$

Demostración.



Sea $a \in A_n$, como el diámetro de la bola $B(a,r)$ es igual a $2r$, se sigue que $B(a,r)$ interseca al anillo que contiene a su centro así como a $2r$ anillos dados por el diámetro (ver figura). Por lo tanto eligiendo $M = [r]+1$ se obtiene la conclusión. $\square$.

Procedemos a definir el siguiente espacio tipo Herz en el plano complejo.

Definición 3.2. Para $1 \leq p, q \leq \infty$ sea K^q_p el espacio de todas las funciones medibles tal que $\left(||f||_{L^p(A_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Dotamos a K^q_p con la norma

$$||f||_{K^q_p} = \left|\left|\left(||f||_{L^p(A_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right|\right|_{\ell^q} < \infty.$$

Definición 3.3. Sea $1 \leq p, q \leq \infty$. Para φ que satisface la condición I_1 definimos $\varphi_n = \chi_{A_n}\varphi$. Decimos que el operador $T_\varphi \in S_{p,q}$ si $T_{\varphi_n} \in S_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión $\left(||T_{\varphi_n}||_{S_p}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Dotamos a $S_{p,q}$ con la norma

$$||T_\varphi||_{S_{p,q}} = \left|\left|\left(||T_{\varphi_n}||_{S_p}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right|\right|_{\ell^q} < \infty.$$

Notamos que todo símbolo no negativo φ en K_p^q define un operador de Toeplitz T_φ en $S_{p,q}$. En efecto: Por el Teorema 2.4 se cumple que

$$\begin{aligned}
||T_{\varphi_n}||_{S_p} &\sim ||\widehat{\varphi_n}_r(z)||_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})} \\
&= \left(\int_{A_n} |\widehat{\varphi_n}_r(z)|^p \,\mathrm{dA}(z)\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{A_n} \left|\frac{1}{\pi r^2}\int_{B(z,r)} \varphi_n(w)\,\mathrm{dA}(w)\right|^p \mathrm{dA}(z)\right)^{1/p} \\
&\leq \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{A_n}\int_{B(z,r)} |\varphi_n(w)|^p \,\mathrm{dA}(w)\,\mathrm{dA}(z)\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{A_n}\int_{A_n} |\varphi_n(w)|^p \,\chi_{B(z,r)}(w)\,\mathrm{dA}(w)\,\mathrm{dA}(z)\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{A_n}\int_{A_n} |\varphi_n(w)|^p \,\chi_{B(w,r)}(z)\,\mathrm{dA}(z)\,\mathrm{dA}(w)\right)^{1/p} \\
&= \frac{1}{\pi r^2}\left(\int_{A_n} |\varphi_n(w)|^p \,\mathrm{dA}(w)\int_{A_n}\chi_{B(w,r)}(z)\,\mathrm{dA}(z)\right)^{1/p} \\
&= C\left(\int_{A_n} |\varphi_n(w)|^p \,\mathrm{dA}(w)\right)^{1/p} \\
&= C\,||\varphi_n(w)||_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}\,.
\end{aligned}$$

Es decir

$$||T_{\varphi_n}||_{S_p} \leq C\,||\varphi_n||_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}\,.$$

La desigualdad anterior implica que

$$||T_\varphi||_{S_{p,q}} \leq C\,||\varphi||_{K_p^q}\,.$$

Así, cada símbolo no negativo φ en K_p^q define un operador de Toeplitz T_φ en $S_{p,q}$.

Cabe resaltar que $T_\varphi = \sum_n T_{\varphi_n}$ (para φ que satisface I_1) en el conjunto denso de las combinaciones lineales finitas de los núcleos reproductores de $\mathbf{F}_\alpha^2$, procedemos a verificar la afirmación anterior.

Como $\varphi = \sum_n \varphi_n$ se tiene

$$\begin{aligned}
T_\varphi K(\zeta, z) &= \int_{\mathbb{C}} K(z,w)K(\zeta,w)\varphi(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) && (3.1)\\
&= \int_{\mathbb{C}} K(z+\zeta,w)\varphi(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) && (3.2)\\
&= \int_{\mathbb{C}} K(z+\zeta,w)\sum_n \varphi_n(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) && (3.3)\\
&= \int_{\mathbb{C}} \sum_n K(z+\zeta,w)\varphi_n(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) && (3.4)
\end{aligned}$$

La condición I_1 implica que

$$\int_{\mathbb{C}} \sum_n |K(z+\zeta,w)|\,|\varphi_n(w)|\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w) < \infty,$$

lo cual nos permite intercambiar la suma y la integral en (3.4). Por consiguiente

$$\begin{aligned}
T_\varphi K(\zeta, z) &= \sum_n \int_{\mathbb{C}} K(z+\zeta,w)\varphi_n(w)\ \mathrm{d}\lambda_\alpha(w)\\
&= \sum_n T_{\varphi_n} K(\zeta, z).
\end{aligned}$$

Dado que las combinaciones lineales finitas de los núcleos reproductores forman un conjunto denso en $\mathbf{F}^2_\alpha$; y la igualdad anterior es válida para una combinación lineal finita de núcleos reproductores, entonces se tiene el resultado.

Veremos más adelante que para $\varphi \geq 0$ que satisface la condición I_1, si $T_\varphi \in S_{p,q}$ se tiene la igualdad $\sum_n T_{\varphi_n} = T_\varphi$ en norma.

El siguiente lema se usará más adelante.

Lema 3.4. *Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ con $a_k \geq 0$ entonces se tiene la siguiente estimación*

$$\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=n-m}^{n+m} a_k \leq (2m+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Demostración. Expandamos las sumas para ver que forma van tomando los términos

$$\sum_{n=m}^{\infty}\sum_{k=n-m}^{n+m} a_k =$$

$$\begin{array}{l}
a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} \\
\quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} + a_{2m+1} \\
\qquad a_2 + \cdots + a_{2m-1} + a_{2m} + a_{2m+1} + a_{2m+2} \\
\qquad\quad \ddots \qquad \vdots \qquad \ddots \\
\qquad\qquad a_{2m-1} + a_{2m} + a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{4m-1} \\
\qquad\qquad\quad a_{2m} + a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{4m-1} + a_{4m} \\
\qquad\qquad\qquad a_{2m+1} + a_{2m+2} + \cdots + a_{4m-1} + a_{4m} + a_{4m+1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad + a_{2m+2} + \cdots + a_{4m-1} + a_{4m} + a_{4m+1} + a_{4m+2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (2m+1)a_0 + (2m+1)a_1 + \cdots + (2m+1)a_{2m} + (2m+1)a_{2m+1} + \cdots \\
&= (2m+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n.
\end{aligned}$$

□

Para el espacio de Bergman y considerando símbolos no negativos, en [9], los autores caracterizaron la pertenencia del operador T_φ al espacio $S_{p,q}$ vía los operadores promedio. En este trabajo se hace una caracterización análoga para el espacio de Fock. El resultado es el siguiente:

Teorema 3.5. *Sea $\varphi \geq 0$ que satisface la condición (I_1) y $1 \leq p, q \leq \infty$. Entonces son equivalentes:*

(a) El operador $T_\varphi \in S_{p,q}$.

(b) Las funciones promedio $\widehat{\varphi}_r \in K^q_p$.

(c) La norma $||T_\varphi||_{S_{p,q}}$ puede ser caracterizada en términos del retículo cuadrado $r\mathbb{Z}^2$ con $0 < r < 1$, a saber:

$$||T_\varphi||_{S_{p,q}} \sim \left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q},$$

donde $I_n := \{k : a_k \in A_n\}$ y $\{a_k\}$ es cualquier arreglo fijo del retículo cuadrado $r\mathbb{Z}^2$.

Demostración. Sea $\varphi \geq 0$ que satisface la condición (I_1). Demostraremos primero que los incisos (a) y (b) son equivalentes.

Sea $q < \infty$ (la extensión para $q = \infty$ es inmediata). Dado que las normas $||T_{\varphi_n}||_{S_p}$ y $||\widehat{\varphi_n}_r||_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}$ son comparables (Teorema 2.4) tenemos

$$\left(\sum ||T_{\varphi_n}||_{S_p}^q\right)^{1/q} \sim \left(\sum ||\widehat{\varphi_n}_r||_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}^q\right)^{1/q},$$

entonces es suficiente probar que para cada $r > 0$ se tiene

$$||\widehat{\varphi}_r||_{K_p^q} \sim \left(\sum ||\widehat{\varphi_n}_r||_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}^q\right)^{1/q}. \tag{3.5}$$

Sea $r > 0$ fijo. Por el Lema 3.1 existe una constante m tal que

$$\widehat{\varphi}_r(z) = \sum_{k=n-m}^{n+m} \widehat{\varphi_k}_r(z) \ \text{ si } \ z \in A_n, n \geq m. \tag{3.6}$$

Por otra parte, si $z \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\widehat{\varphi_n}_r(z) = \sum_{i=n-m}^{n+m} \widehat{\varphi_n}_r(z)\chi_{A_i}(z) \tag{3.7}$$

$$\leq \sum_{i=n-m}^{n+m} \widehat{\varphi}_r(z)\chi_{A_i}(z), \quad n \geq m. \tag{3.8}$$

Utilizando (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
||\widehat{\varphi}_r||_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}^q &= \left|\left|\sum_{k=n-m}^{n+m} \widehat{\varphi_k}_r\right|\right|_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}^q \\
&\leq \left(\sum_{k=n-m}^{n+m} ||\widehat{\varphi_k}_r||_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}\right)^q \\
&\leq (2m+1)^q \sum_{k=n-m}^{n+m} ||\widehat{\varphi_k}_r||_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}^q .
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando (3.8) llegamos a

$$\begin{aligned}
||\widehat{\varphi_n}_r||_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}^q &\leq \left|\left|\sum_{i=n-m}^{n+m} \widehat{\varphi}_r\right|\right|_{\mathbf{L}^p(A_i,\mathrm{dA})}^q \\
&\leq \left(\sum_{i=n-m}^{n+m} ||\widehat{\varphi}_r||_{\mathbf{L}^p(A_i,\mathrm{dA})}\right)^q \\
&\leq (2m+1)^q \sum_{i=n-m}^{n+m} ||\widehat{\varphi}_r||_{\mathbf{L}^p(A_i,\mathrm{dA})}^q .
\end{aligned}$$

Haciendo la suma desde m hasta infinito en las desigualdades obtenidas se llega a las siguientes estimaciones:

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} ||\widehat{\varphi}_r||^q_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})} &\leq (2m+1)^q \sum_{n=m}^{\infty}\sum_{k=n-m}^{n+m} ||\widehat{\varphi_{k r}}||^q_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})} \\ &\leq (2m+1)^{q+1} \sum_{n=0}^{\infty} ||\widehat{\varphi_{n r}}||^q_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})} \\ &\leq (2m+1)^{q+1} \sum_{n=0}^{\infty} ||\widehat{\varphi_{n r}}||^q_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}\end{aligned}$$

eligiendo $a_k = ||\widehat{\varphi_{k r}}||_{\mathbf{L}^p(A_k,\mathrm{dA})}$ en el Lema 3.4.

Análogamente

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty} ||\widehat{\varphi_{n r}}||^q_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})} &\leq (2m+1)^q \sum_{n=m}^{\infty}\sum_{i=n-m}^{n+m} ||\widehat{\varphi}_r||^q_{\mathbf{L}^p(A_i,\mathrm{dA})} \\ &\leq (2m+1)^{q+1} \sum_{i=0}^{\infty} ||\widehat{\varphi}_r||^q_{\mathbf{L}^p(A_i,\mathrm{dA})}\end{aligned}$$

eligiendo $a_k = ||\widehat{\varphi}_r||_{\mathbf{L}^p(A_k,\mathrm{dA})}$ en el Lema 3.4.

Con algunas modificaciones mínimas a los argumentos de la demostración del Lema 3.4 también se puede estimar a $\sum_{n=1}^{m-1} ||\widehat{\varphi}_r||^q_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}$ y $\sum_{n=1}^{m-1} ||\widehat{\varphi_{n r}}||^q_{\mathbf{L}^p(\mathbb{C},\mathrm{dA})}$, completando así la prueba de (3.5). Por ende se concluye que

$$\left(\sum ||T_{\varphi_n}||^q_{S_p}\right)^{1/q} \sim ||\widehat{\varphi}_r||_{K^q_p}\,.$$

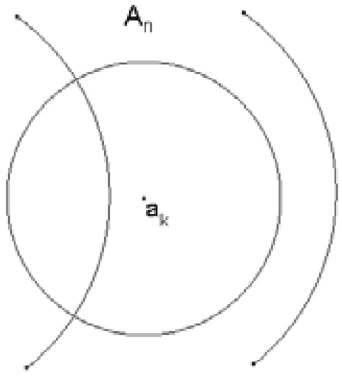
Es inmediato de la definición de los espacios $S_{p,q}$ y K^q_p que los incisos (a) y (b) son equivalentes.

Para finalizar, mostremos que los incisos (a) y (c) son equivalentes, para ello, haremos uso del retículo cuadrado $r\mathbb{Z}^2$ y del inciso (d) del Teorema 2.4.

Sea r fijo tal que $0 < r < 1$, $\{a_k\}$ cualquier arreglo fijo del retículo cuadrado $r\mathbb{Z}^2$ y

$$I_n := \{k : a_k \in A_n\}.$$

Estimamos la norma $||T_\varphi||_{S_{p,q}}$, pero antes notamos la siguiente descomposición de la función promedio evaluada en un punto del retículo.



Como $0 < r < 1$, entonces se tiene la siguiente descomposición:

$$\widehat{\varphi}_r(a_k) = \widehat{\varphi_{n-1}}_r(a_k) + \widehat{\varphi_n}_r(a_k) + \widehat{\varphi_{n+1}}_r(a_k).$$

Por el Teorema 2.4 se tiene

$$\begin{aligned}||T_{\varphi_n}||_{S_p} &\sim \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k\in I_{n-1}} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p + \sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p + \sum_{k\in I_{n+1}} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Por ende

$$\begin{aligned}||T_\varphi||_{S_{p,q}} &= \left(\sum_n ||T_{\varphi_n}||_{S_p}^q\right)^{1/q} \\ &\sim \left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_{n-1}} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p + \sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p + \sum_{k\in I_{n+1}} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_{n-1}} \left(\widehat{\varphi_{n-2}}_r(a_k)^p + \widehat{\varphi_{n-1}}_r(a_k)^p + \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p\right)\right.\right. \\ &\qquad + \sum_{k\in I_n} \left(\widehat{\varphi_{n-1}}_r(a_k)^p + \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p + \widehat{\varphi_{n+1}}_r(a_k)^p\right) \\ &\qquad \left.\left. + \sum_{k\in I_{n+1}} \left(\widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p + \widehat{\varphi_{n+1}}_r(a_k)^p + \widehat{\varphi_{n+2}}_r(a_k)^p\right)\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\ &= (\Delta).\end{aligned}$$

Recordando que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, si $a = (x, y, z)$ entonces existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$c_1\,||a||_p \leq ||a||_1 \leq c_2\,||a||_p\,.$$

Es decir, se satisface

$$c_1\left(|x|^p + |y|^p + |z|^p\right)^{1/p} \leq (|x| + |y| + |z|) \leq c_2\left(|x|^p + |y|^p + |z|^p\right)^{1/p}.$$

Deducimos de la primera y segunda desigualdad respectivamente

$$|x|^p + |y|^p + |z|^p \leq C\left(|x| + |y| + |z|\right)^p \tag{3.9}$$

y

$$\left(|x| + |y| + |z|\right)^p \leq C\left(|x|^p + |y|^p + |z|^p\right). \tag{3.10}$$

También, si $p > 1$ la siguiente desigualdad se satisface

$$\left(|x| + |y| + |z|\right)^{1/p} \leq |x|^{1/p} + |y|^{1/p} + |z|^{1/p}. \tag{3.11}$$

De esta manera, aplicando (3.9) a (Δ) seguido de (3.11) se obtiene

$$\begin{aligned}
(\Delta) &\leq C\left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_{n-1}} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p + \sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p + \sum_{k\in I_{n+1}} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\leq C\left(\sum_n \left(\left(\sum_{k\in I_{n-1}} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k\in I_{n+1}} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{1/p}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq 3C\left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Resumiendo

$$||T_\varphi||_{S_{p,q}} \leq 3C\left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} &= \left(\sum_n \left(\sum_{k\in I_n} \left(\widehat{\varphi_{n-1}}_r(a_k) + \widehat{\varphi_n}_r(a_k) + \widehat{\varphi_{n+1}}_r(a_k)\right)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_n \left(\left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi_{n-1}}_r(a_k)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi_n}_r(a_k)^p\right)^{1/p}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi_{n+1}}_r(a_k)^p\right)^{1/p}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_n \left(\left|\left|T_{\varphi_{n-1}}\right|\right|_{S_p} + ||T_{\varphi_n}||_{S_p} + \left|\left|T_{\varphi_{n+1}}\right|\right|_{S_p}\right)^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

La primera desigualdad se obtiene aplicando Minkowski pues tenemos una norma p. Para la segunda desigualdad notemos que

$$\left(\sum_{k\in I_n} \widehat{\varphi_j}_r(a_k)^p\right)^{1/p} \leq \left|\left|T_{\varphi_j}\right|\right|_{S_p},$$

pues el lado izquierdo es una componente de la norma en el lado derecho.

Ahora, aplicando la desigualdad (3.10) se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\sum_n\left(\sum_{k\in I_n}\widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} &\leq \left(\sum_n\left(\left|\left|T_{\varphi_{n-1}}\right|\right|_{S_p}+\left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_{S_p}+\left|\left|T_{\varphi_{n+1}}\right|\right|_{S_p}\right)^q\right)^{1/q}\\
&\leq C\left(\sum_n\left(\left|\left|T_{\varphi_{n-1}}\right|\right|_{S_p}^q+\left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_{S_p}^q+\left|\left|T_{\varphi_{n+1}}\right|\right|_{S_p}^q\right)\right)^{1/q}\\
&\leq C\left(\left|\left|T_\varphi\right|\right|_{S_{p,q}}^q+\left|\left|T_\varphi\right|\right|_{S_{p,q}}^q+\left|\left|T_\varphi\right|\right|_{S_{p,q}}^q\right)^{1/q}\\
&= 3^{1/q}C\left|\left|T_\varphi\right|\right|_{S_{p,q}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left|\left|T_\varphi\right|\right|_{S_{p,q}}\sim\left(\sum_n\left(\sum_{k\in I_n}\widehat{\varphi}_r(a_k)^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}.$$

Dada la estimación anterior y de las definiciones de los espacios $S_{p,q}$ y K_p^q se tiene el resultado. $\square$

Una consecuencia importante del teorema anterior es que para $\varphi\geq 0$ que satisface la condición (I_1), todo operador $T_\varphi\in S_{p,q}$ define un operador en $\mathbf{F}_\alpha^2$.

Teorema 3.6. *Sea $\varphi\geq 0$ que satisface la condición (I_1), si $T_\varphi\in S_{p,q}$ entonces se tiene la igualdad $\sum_n T_{\varphi_n}=T_\varphi$ en norma.*

Demostración. Sea $\varphi\geq 0$ que satisface la condición (I_1) tal que $T_\varphi\in S_{p,q}$. Dado que $\left|\left|T\right|\right|_\alpha\leq C\left|\left|T\right|\right|_{S_p}$ (pues S_p está inmerso en la clase de operadores continuos en $\mathbf{F}_\alpha^2$) y por el Teorema 2.4 se tiene

$$\left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_\alpha\leq C\left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_{S_p}\leq C\left|\left|\widehat{\varphi_n}_r\right|\right|_{\mathbf{L}^p(A_n,\mathrm{dA})}. \tag{3.12}$$

El Teorema 3.5 nos garantiza que las funciones promedio están en K_p^q, este hecho sumado a (3.12) implican que

$$\left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_{S_p}\to 0 \text{ y } \left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_\alpha\to 0.$$

Dado que $\left|\left|T_{\varphi_n}\right|\right|_\alpha=\sup\widehat{\varphi_n}_r(z)$ (Corolario 1.30) se llega a que $\sup\widehat{\varphi_n}_r(z)\to 0$. Por otro lado, si $z\in A_n$ entonces

$$\widehat{\varphi}_r(z)=\widehat{\varphi_{n-1}}_r(z)+\widehat{\varphi_n}_r(z)+\widehat{\varphi_{n+1}}_r(z)\leq 3C.$$

Por ende $\widehat{\varphi}_r(z)\to 0$ pues $\sup\widehat{\varphi_n}_r(z)\to 0$, así $\widehat{\varphi}_r(z)\in C_0(\mathbb{C})\subset\mathbf{L}^\infty(\mathbb{C})$. Recordando que $\left|\left|T_\varphi\right|\right|_\alpha\leq\left|\left|\varphi\right|\right|_\infty$ y notando que $\widehat{\widehat{\varphi}_r}_r\in\mathbf{L}^\infty$ se obtiene que los operadores T_φ y $T_{\widehat{\varphi}_r}$ son acotados y compactos (Corolarios 1.30 y 1.35).

Por demostrar que $\sum_n T_{\varphi_n} = T_\varphi$ en norma. Estimemos la cola de $\sum_n T_{\varphi_n}$:

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{n=N}^{\infty} T_{\varphi_n}\right|\right| &\leq C \left|\left|\sum_{n=N}^{\infty} T_{\varphi_n}\right|\right|_{S_{p,q}} \\ &= C\left(\sum_{n=N}^{\infty} ||T_{\varphi_n}||_{S_p}^q\right)^{1/q} \to 0\end{aligned}$$

pues $||T_{\varphi_n}||_{S_p} \to 0$. De esta manera concluimos que

$$\sum_{n=1}^{N} T_{\varphi_n} \to T_\varphi.$$

□

En esta tesis, hemos dado una caracterización parcial a la dada en [9] por los autores. Recapitulando, para los operadores de Toeplitz positivos definidos en el espacio de Fock, descompusimos dichos operadores en una familia de operadores locales; caracterizamos la pertenencia de los operadores de Toeplitz positivos a los espacios de norma mixta $S_{p,q}$, en términos de los operadores locales y del espacio de Herz K_p^q.

La caracterización completa, involucra la pertenencia de la transformada de Berezin al espacio de Herz K_p^q; cabe resaltar que dada la forma exponencial del núcleo reproductor del espacio de Fock, al trabajar con la transformada de Berezin, pueden llegar a tenerse problemas en el acotamiento de la última. Obtener la caracterización completa es una posible continuación de este trabajo.

Referencias

[1] A. Benedek, R. Panzone; *The space* $\mathbf{L}^p$*, with mixed norm* Duke Math. J. Volume 28, Number 3 (1961), 301-324.

[2] F. Berezin; *Covariant and contravariant symbols of operators*, (Ruso) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 36, 1972, 1134-1167.

[3] John B. Conway; *A Course in Functional Analysis*, second edition, Springer, New York, 1997.

[4] G.H. Hardy, J.E. Littlewood; *Some properties of fractional integrals II*, Math. Z. 34 (1932), 403-439.

[5] G.H. Hardy, J.E. Littlewood; *Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions* , Quart. J. Math. 12 (1941), 221-256.

[6] C. Herz; *Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*, J. Math. Mech., 1968, 18:, 283-324.

[7] S. Krantz; *Function Theory of Several Complex Variables*, 2nd edn., American Mathematical Society, 2001.

[8] E. Kreyszig; *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.

[9] M. Loaiza, M. López-García, S. Pérez-Esteva; *Herz Classes and Toeplitz Operators in the Disk*, Integr. equ. oper. theory 53, 2005, 287-296.

[10] Lu Shanzhen, Yang Dachun; *Some characterizations of weighted Herz-type Hardy spaces and its applications*, Acta Math. Sinica (New Ser.) 13 (1997), 45-58.

[11] Lu Shanzhen, Yang Dachun; *The decomposition of weighted Herz space on* $\mathbb{R}^n$ *and its applications*, Science China Mathematics, 1995, 38(2): 147-158.

[12] Lu Shanzhen, Yang Dachun; *The weighted Herz-type Hardy space and its applications*, Science China Mathematics, 1995, 38(6): 662-673.

[13] N. Young; *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[14] K. Zhu; *Analysis on Fock Spaces*, Springer, 2012.

[15] K. Zhu; *Operator Theory in Function Spaces*, 2nd. edn., American Mathematical Society, 2007.