# Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias


# Optimización de rendimientos en portafolios de inversión a tiempo discreto

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:


María Catalina Beltrán Llorente


DIRECTOR DE TESIS:
**Dr. Daniel Hernández Hernández**


Ciudad Universitaria, D. F. 2015

Hoja de Datos del Jurado

**1. Datos del alumno**
Beltrán
Llorente
María Catalina
58 90 74 44
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
30709065-0

**2. Datos del tutor**
Dr.
Daniel
Hernández
Hernández

**3. Datos del sinodal 1**
Dra.
María Asunción Begoña
Fernández
Fernández

**4. Datos del sinodal 2**
Dra.
Ana
Meda
Guardiola

**5. Datos del sinodal 3**
Dr.
Gerónimo Francisco
Uribe
Bravo

**6. Datos del sinodal 4**
Dr.
Sergio Iván
López
Ortega

**7.Datos del trabajo escrito.**
Optimización de rendimientos en portafolios de inversión a tiempo discreto
50 p
2015

# Agradecimientos

A mi padre. Gordi, gracias por enseñarme que rendirse nunca es una opción. Ya podrás dormir tranquilo, ¡ por fin termine la tesis !

A madre. Llorente, gracias por apoyarme en todas mis decisiones aún cuando no estés del todo de acuerdo con ellas. Tu amor incondicional es mi motor para seguir adelante.

A mi hermana. Cacho, sin ti simplemente mi vida no tendría sentido. Gracias por hacer de mi vida un lugar maravilloso (y también muy escandaloso).

A mis abuelitos Andrés y Gela. Gracias por quererme y apoyarme siempre. Esto también se los debo a ustedes.

A mis tíos Armando, Laura, Ángeles y Edalid. Gracias por su apoyo incondicional, por que más que mis tíos han sido mis amigos y consejeros de toda la vida. Definitivamente no estaría aquí sin su apoyo.

A mis primos Paco, Blanca y Mariana. Crecer junto con ustedes ha sido una aventura llena de momentos y recuerdos increíbles (¿ Se acuerdan del Burrito Sabanero?). Gracias por estar conmigo en los buenos y malos momentos, gran parte de lo que soy se los debo a ustedes.

A Cynthia. Gracias por ser mi cómplice de toda la vida. Eres simplemente mi alma gemela. Dios se lució al ponerte en mi camino.

A Melani. Gracias por ser esa chispa de alegría en mi camino. Haces de mi vida un lugar más feliz.

A Jesús. Gracias por todo lo que hemos compartido, por enseñarme que cuando de verdad quieres a alguien la distancia se vuelve solo un número.

A la Dra. Begoña Férnandez, la Dra. Ana Meda, el Dr. Gerónimo Uribe y el Dr. Segio López. Gracias por tomarse el tiempo de leer este trabajo y enriquecerlo con sus comentarios.

Al Dr. Daniel Hernández. Gracias por creer en mí.

Al más especial de todos, a ti Señor por que hiciste realidad este sueño, por todo el amor con el que me rodeas y porque me tienes en tus manos. Esta tesis es para ti.

# Índice general

# Introducción

El manejo de riesgos es uno de los problemas más antiguos en el mundo de las finanzas. Podemos rastrear sus orígenes al año 1974, año en que se crea el primer comité de supervisión bancaria en Basilea, Suiza. El comité estaba formado por los gobernadores de los bancos centrales de Alemania, Bélgica, Canadá, España, EE. UU., Francia, Italia, Japón, Luxemburgo, Holanda, el Reino Unido, Suecia y Suiza. Años más tarde, en 1988, surge **Basilea I**. En este acuerdo se establece una definición de capital regulatorio, con el cual las instituciones financieras pudieran hacer frente a los riesgos de crédito, mercado y tipo de cambio.

A principios de 1990 aparece por primera vez el concepto de valor en riesgo (VaR por sus siglas en inglés *value at risk*). En ese momento, el VaR es utilizado por unas pocas instituciones bancarias para estimar la pérdida esperada del valor de los activos que componían sus portafolios de inversión. Con el paso de los años esta medida se estandariza en el mercado, a consecuencia de esto, el Comité de Basilea decide incluirla en sus recomendaciones para calcular el riesgo.

Consciente de las limitaciones del Basilea I el Comité de supervisión bancaria de Basilea emite en 2004 el acuerdo **Basilea II**. Este consiste en un nuevo conjunto de recomendaciones las cuales se basan en tres pilares:

- Cálculo de los requisitos mínimos de capital.
- El proceso de supervisión de la gestión de los fondos propios.
- La disciplina de mercado.

Basilea II constituye una mejora significativa en lo que a capital regulatorio se refiere, sin embargo, con la finalidad de fortalecer el mercado tras la crisis de 2008 son publicados, el 31 de diciembre de 2010, los acuerdos **Basilea III** .

En general, los acuerdos de Basilea tienen la finalidad de reducir al máximo el endeudamiento de las instituciones financieras y garantizar su capacidad de respuesta ante los diversos riesgos financieros a los cuales se encuentran expuestas.

Otra cuestión de suma importancia para las entidades financieras es maximizar la utilidad esperada de sus portafolios de inversión. A lo largo de los años diversos autores han abordado este tema. En julio de 1993, Grossman y Zhou publican *Optimal investment strategies for control drawdowns* [5], artículo en que se analiza la estrategia de inversión óptima para el inversionista que pretende no perder más de un cierto porcentaje fijo del valor máximo de su portafolio. En 1999, Bielecki, Hernández y Pliska publican en su artículo *Risk sensitive control of finite state Markov Chains in discrete time, with portfolio management* [1] un modelo que permite optimizar la utilidad esperada a largo plazo de un portafolio de inversión sensible al riesgo.

Como alternativa al problema de maximizar la utilidad podemos analizar el rendimiento del portafolio con respecto a cierta *meta*, la cual se entiende como el rendimiento mínimo esperado. Este problema ha sido abordado desde distintos puntos de vista por Pham en [12] y Hata, Nagai y Sheu en [6]. Ambos artículos se desarrollan en un mercado financiero a tiempo continuo.

En este trabajo abordaremos el manejo del riesgo de un portafolio al tratar de acotar la probabilidad de que la tasa de crecimiento del portafolio se encuentre por encima de cierta tasa objetivo y posteriormente encontrar la estrategia de inversión que maximice esta cota. Para lograrlo estableceremos una relación de dualidad entre este problema y el de maximizar la utilidad esperada de un portafolio sensible al riesgo.

En otras palabras, el objetivo que se persigue es encontrar la estrategia óptima para el inversionista que busca maximizar la cota superior de la probabilidad de mantener la tasa de crecimiento de su portafolio por encima de cierta tasa objetivo $k$; a su vez, esta será la estrategia óptima para el inversionista que busque maximizar la utilidad esperada de su portafolio y cuyo parámetro de riesgo es $\theta_k \in (0, 1)$.

Si consideramos $k$ como la tasa mínima de crecimiento necesaria para no incurrir en pérdidas, entonces el encontrar la estrategia que maximiza la cota superior de la probabilidad de que el portafolio este por encima de esta tasa implica que el inversionista podrá minimizar el riesgo de incurrir en pérdidas al aplicar esta estrategia. Cabe mencionar que este análisis esta hecho en un horizonte de tiempo a largo plazo y en un mercado financiero a tiempo discreto.

Para el problema de maximizar la utilidad esperada del portafolio utilizaremos como marco de referencia la metodología desarrollada en [1]. Por otro lado, para establecer la relación de dualidad que nos permita encontrar la estrategia que maximice la cota superior de la probabilidad de mantener la tasa de crecimiento del portafolio por encima de cierta tasa $k$ utilizaremos elementos de la teoría de grandes desviaciones así como algunos teoremas de dualidad extraídos de [2] y [14] respectivamente.

El trabajo se divide en tres capítulos. El primero contiene información general sobre mercados financieros, portafolios de inversión, VaR y fondos de pensiones. Esta información, tomada de [4], [16], [3], [11], [8] y [9], nos permitirá familiarizarnos con los aspectos a estudiar en los siguientes capítulos. En el Capítulo 2 se presenta el modelo que nos permitirá encontrar la estrategia óptima para poder maximizar la utilidad del portafolio y un par de ejemplos que nos mostrarán como se implementa; las fuentes consultadas en su desarrollo fueron [1] y [5]. En el último capítulo se desarrolla la metodología que nos permite acotar la probabilidad de mantener la tasa de crecimiento de nuestro portafolio por encima de cierta tasa $k$ y posteriormente encontrar la estrategia de inversión que la maximiza. Finalmente se presentan algunas aplicaciones de estos resultados en el cálculo del VaR y fondos de pensiones.

# Capítulo 1

# Mercados financieros en tiempo discreto

Los Mercados Financieros son escenarios físicos o virtuales que, regulados por un conjunto de reglas, permiten la negociación de diversos activos financieros; a través de estas negociaciones los participantes, entre los cuales encontramos inversionistas, emisores e intermediarios, pueden realizar operaciones de inversión, financiamiento y cobertura.

Aunque la existencia de un mercado financiero no es una condición necesaria para la creación y negociación de un activo financiero, en la mayoría de las economías los activos se crean y posteriormente se comercian en algún tipo de mercado.

En las siguientes páginas trabajaremos con mercados financieros en los cuales las operaciones se realizan en tiempo discreto, es decir, al inicio (o final) de cierto período, el cual puede ser de una hora, un día, un mes, etc.

## 1.1. Activos financieros

Un activo, en términos generales, es un bien tangible que posee una persona física o moral y que tiene valor en un intercambio. Los activos tangibles son aquellos cuyo valor depende de sus atributos físicos, como por ejemplo terrenos, edificios, artículos electrónicos, etc. Por el contrario, los activos intangibles no dependen de sus características físicas ya que son obligaciones contractuales sobre beneficios futuros.

Los activos financieros son activos intangibles para los cuales el valor o beneficio es una obligación de dinero a futuro. La entidad que se compromete a realizar los pagos futuros se llama *emisor* del activo financiero. Por otro lado, el poseedor del activo es denominado *inversionista*.

### 1.1.1. Precio y riesgo de un activo financiero

Un principio económico básico es que el precio de cualquier activo financiero es igual al valor presente de su flujo de pagos de efectivo a lo largo del tiempo. Es por esta razón que la tasa de retorno esperada está directamente relacionada con el precio del activo. Dado el precio de un activo y su flujo de efectivo esperado es posible estimar la tasa de retorno esperada. El grado de certeza de un flujo de efectivo dependerá del tipo de activo financiero y las características de su emisor.

Los activos financieros están expuestos a diversos tipos de riesgo, entre los cuales podemos resaltar los siguientes:

- **Riesgo de poder de compra o riesgo de inflación.** Es el riesgo asociado al poder de compra potencial del flujo de efectivo esperado.
- **Riesgo crédito o riesgo de incumplimiento.** Es el riesgo derivado del posible incumplimiento de sus obligaciones contractuales por parte del emisor.
- **Riesgo de tipo de cambio extranjero.** Es el riesgo asociado a que el tipo de cambio varíe de forma adversa. Este riesgo ha cobrado relevancia en los últimos años a raíz de la globalización de los mercados.

Basados en el nivel de riesgo que poseen los activos financieros podemos clasificarlos de la siguiente manera:

- **Activos libres de riesgo.** Son aquellos activos en los cuales el riesgo de incumplimiento es prácticamente cero. Por lo general su rentabilidad no suele ser muy grande. En este rubro podemos colocar a la deuda pública emitida por ciertos gobiernos y también a las cuentas de ahorro bancarias.
- **Activos con riesgo.** En este caso el riesgo de insolvencia por parte del emisor existe, es por esta razón que la rentabilidad del activo no está asegurada y varía a lo largo del tiempo. Dentro de esta clase de activos podemos encontrar acciones, bonos y fondos de inversión.

### 1.1.2. Tipos de activos financieros

Los activos financieros más comúnmente utilizados son los siguientes:

- **Certificados de depósito a término.** Título libremente negociable con el cual una persona, física o moral, podrá depositar cierta cantidad de efectivo y retirarlo después de un tiempo determinado. El único beneficio obtenido es el rendimiento de su inversión.
- **Bonos.** Son títulos de deuda emitidos por una entidad financiera. Se colocan generalmente con un descuento sobre el valor del título. A su vencimiento se redimen por su valor facial y en algunos casos existen cupones. Los cupones consisten en el pago de intereses cada cierto tiempo entre la fecha de emisión y el vencimiento.
- **Acciones.** Son títulos de propiedad fraccionada de una entidad. El inversionista recibe el pago de dividendos por la posesión de las acciones y, dependiendo de su naturaleza, tendrá ciertos privilegios en la distribución de utilidades.
- **Fondos de inversión.** Son títulos constituidos mediante portafolios de inversión creados con un objetivo definido según el perfil de cada inversionista.
- **Papeles comerciales.** Título mediante el cual el emisor se compromete a pagar cierta cantidad al inversionista en la fecha del vencimiento.

- **Depósitos bancarios.** Depósitos realizados en una institución bancaria, los cuales pueden ser retirados en cualquier momento.

- **Papel moneda.** Documento emitido por el gobierno para ser utilizado como dinero de curso legal.

### 1.1.3. Función de los activos financieros

Los activos financieros cuentan con dos funciones principales:

- Transferencia de fondos de aquellos que tienen excedentes para invertir hacia aquellos que necesitan de estos fondos para transformarlos en activos tangibles.

- Transferir fondos de tal manera que quede distribuido el riesgo asociado al flujo de efectivo.

Sin embargo, las obligaciones contraídas por los poseedores finales de la riqueza son, por lo general, diferentes de las obligaciones emitidas por los demandantes de los activos. Este es el resultado de la actividad de los intermediarios financieros, los cuales buscan transformar las obligaciones finales en activos financieros que el público prefiere.

### 1.1.4. Propiedades de los activos financieros

Los activos financieros tienen ciertas propiedades que los hacen atractivos hacia los diversos tipos de emisores e inversionistas. Algunas propiedades importantes de los activos financieros son las siguientes:

1. **Monetización.** Esta propiedad la poseen los activos que son empleados como medio de cambio o en el establecimiento de transacciones. Estos activos son llamados *dinero*. Otros activos, a pesar de no ser dinero, están muy cercanos al mismo, ya que pueden ser transformados en dinero con gran facilidad. Esta clase de activos también poseen esta propiedad.

2. **Divisibilidad y denominación.** Esta se relaciona con el tamaño mínimo al cual el activo puede ser liquidado y convertido en dinero. Entre menor es el tamaño, más divisible es el activo financiero.

3. **Reversibilidad.** La reversibilidad se refiere al costo derivado de invertir en un activo financiero y posteriormente volver a convertirlo en efectivo. También se le conoce como *costo de respuesta* o *costo de viaje redondo*.

4. **Flujo y retorno de efectivo.** El rendimiento que un inversionista obtendrá al poseer un activo financiero depende de todas las distribuciones de efectivo que el activo pagará. En un mundo con inflación es importante distinguir entre el *rendimiento nominal esperado* y *rendimiento real neto esperado*. El rendimiento que hemos descrito es el *rendimiento nominal esperado*. El *rendimiento real neto esperado* es el *rendimiento nominal esperado* después de ser ajustado por la pérdida de poder de adquisición del activo financiero a consecuencia de la inflación.

5. **Período de vencimiento.** Es el tiempo transcurrido hasta que llega la fecha en la que se hará el último pago o en la cual el propietario del activo ha convenido pedir su liquidación. El período de vencimiento es una característica importante en activos financieros como los bonos.

6. **Convertibilidad.** Una propiedad importante de los activos es que pueden ser convertidos en otros activos. En algunos casos los activos son convertidos dentro de la misma clase de activos, sin embargo, la conversión puede abarcar diversas clases de activos.

7. **Divisas.** La mayor parte de los activos financieros están nominados en alguna divisa. Ya que cada día los mercados están más globalizados está característica ha cobrado relevancia al momento de escoger un activo.

8. **Liquidez.** Representa la cualidad de los activos para ser convertidos en efectivo de forma inmediata sin pérdida significativa de su valor. Cuanto más fácil es convertir un activo en dinero se dice que es más líquido.

9. **Nivel de riesgo.** Esta es una propiedad básica de los activos financieros y es determinante en su valor, ya que mientras mayor sea el riesgo que posee un activo mayor será el rendimiento esperado.

10. **Complejidad.** Algunos activos financieros son complejos en el sentido de que son combinaciones de dos o más activos simples.

11. **Estatus fiscal.** Es una característica importante de cualquier activo, sin embargo, debemos considerar que las reglamentaciones gubernamentales para gravar los activos financieros varían ampliamente de país en país.

## 1.2. Portafolios de inversión

Un portafolio o cartera de inversión es una combinación de inversiones realizadas sobre diversos activos financieros. Esta característica permite que los portafolios sean un instrumento financiero mediante el cual es posible diversificar la inversión y, en consecuencia, reducir el riesgo.

Para introducir los conceptos fundamentales necesarios para el desarrollo de este trabajo utilizaremos un modelo de mercado multiperíodo. Las características de este modelo son:

- Tienen **fecha inicial** 0 y **fecha de término** $t$ con $t = 1, 2, 3, ....$ Las operaciones solo pueden realizarse en estas fechas.

- Cuentan con un **espacio muestral finito** $\Omega$ con $k < \infty$ elementos

$$\Omega\ = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_k\}$$

  donde el valor de cada $\omega_i \in \Omega$ es desconocido para el inversionista a tiempo $t(0)$ y se conocerá en un tiempo futuro $t(n)$.

- Existe una **medida de probabilidad** P en $\Omega$, tal que, $P(\omega) > 0$ para toda $\omega \in \Omega$.

- Una **cuenta bancaria** $B := \{B_t : t = 0, 1, 2, 3, ...\}$ con $B_0 = 1$ y $B_t \geq 1$ una variable aleatoria. Adicionalmente definimos $r(t) \equiv r$ con $t = 1, 2, 3, ...$ como la **tasa de interés**.

- Es posible asociarle un **proceso de precios** $S := \{S(t) : t = 0, 1, 2, 3, ...\}$ donde el vector

$$S(t) := (S_1(t), S_2(t), S_3(t), ..., S_m(t))$$

  con $m < \infty$ representa el precio de los m activos con riesgo a tiempo t. $S(0)$ es un vector de escalares positivos mientras que los precios a tiempo t son variables aleatorias no negativas.

Ahora que conocemos las características del modelo podemos definir algunos conceptos de interés.

- Las **estrategias o políticas de inversión**

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), ..., \pi_m(t))$$

  describen el número de unidades de cada uno de los activos con riesgo que se han podido adquirir durante el periodo $[t, t+1)$ con el capital inicial a tiempo t. En particular $\pi(0)$ representa la cantidad invertida en la cuenta bancaria. Los valores de $\pi_i(t)$ pueden ser positivos o negativos. Los valores negativos hacen referencia a ventas en corto de los activos.

- El **proceso de valor del portafolio** describe el valor total del portafolio a tiempo t, esto es

$$V_t := \pi(0)B_t + \sum_{k=1}^{m} \pi_k(t)S_k(t) \tag{1.1}$$

  con $t = 0, 1, 2, 3, ....$ Cabe resaltar que $V_t$ es una variable aleatoria que depende de la estrategia $\pi$.

- La **ganancia del portafolio** es la variable aleatoria que describe las pérdidas o ganancias obtenidas a tiempo t. Es decir

$$G_t := \pi(0)r + \sum_{k=1}^{m} \pi_k(t)\triangle S_k(t) \tag{1.2}$$

  donde $\triangle S_k(t) := S_k(t) - S_k(t-1)$. Podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$G_t = V_t - V_{t-1}.$$

  Esto significa que cualquier cambio en el valor del portafolio se verá reflejado como pérdidas o ganancias.

El *numerario* es un proceso $I = \{I_t\}$ estrictamente positivo que cumple $I_0 = 1$. Es además una entidad económica negociable de cuyo precio depende el precio descontado de los demás bienes de intercambio comercial. El uso de un *numerario* facilita las comparaciones de valor cuando solo los precios descontados son relevantes. En este caso consideraremos la cuenta bancaria como el *numerario*, esto con la finalidad de definir el proceso de precios descontados como $S^* := \{S^*(t) : t = 0, 1, 2, 3, ...\}$, donde el vector

$$S^*(t) := (S_1^*(t), S_2^*(t), S_3^*(t), ..., S_m^*(t))$$

se define de la siguiente manera:

$$S_i^*(t) := \frac{S_i(t)}{B_t}$$

con $i = 1, 2, ..., m$ y $t = 0, 1, 2, 3, ....$

Definimos el proceso de valor descontado como

$$V_t^* := \pi(0) + \sum_{k=1}^{m} \pi_k(t) S_k^*(t)$$

para $t = 0, 1, 2, 3, ....$ Finalmente, definimos la ganancia descontada a tiempo t de la siguiente manera:

$$G_t^* := \sum_{k=1}^{m} \pi_k(t) \triangle S_k^*,$$

donde $\triangle S_k^* := S_k^*(t) - S_k^*(t-1)$.

### 1.2.1. Tipos de portafolios

La mayor ventaja que ofrecen los portafolios de inversión es que permiten diversificar el capital en una amplia gama de activos de distinta naturaleza lo que permite disminuir el impacto de los distintos riesgos financieros a los cuales se encuentran expuestos los activos que lo componen. Partiendo de esto podemos clasificar lo portafolios de inversión de la siguiente manera:

- **De renta fija**: Son integrados solamente por activos de renta fija.
- **De renta variable**: Se integran por instrumentos de inversión de renta variable.
- **Corporativo**: Es integrado únicamente por acciones.
- **Patrimonial**: Se integra por valores de renta fija y variable así como acciones. Es decir, es una combinación de los tres anteriores.
- **De instrumentos financieros derivados**: Como su nombre lo dice, está integrado por instrumentos como *swaps*, opciones y futuros.
- **Mixtos**: Es el más general de todos, se incluyen activos de cualquier tipo.

### 1.2.2. Arbitraje y otras consideraciones económicas

Todo mercado financiero puede ser clasificado, según sus características económicas, dentro de alguna de las siguientes categorías

1. **No se rige bajo la *ley de un solo precio***: Se dice que un mercado financiero se rige bajo la *ley de un solo precio* si **NO** existen dos estrategias $\pi^*$ y $\pi^\bigstar$ tal que $V_t^{\pi^*}(\omega) = V_t^{\pi^\bigstar}(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$ y $t > 0$ pero $V_0^{\pi^*}(\omega) > V_0^{\pi^\bigstar}(\omega)$. En caso de existir las estrategias $\pi^*$ y $\pi^\bigstar$ diremos que el mercado *no se rige bajo la ley de un solo precio.*

2. **Hay estrategias dominantes pero se mantiene la ley de un solo precio**: Se dice que una *estrategia* $\pi^*$ *es dominante* si existe otra estrategia $\pi^\bigstar$ tal que $V_0^{\pi^*}(\omega) = V_0^{\pi^\bigstar}(\omega)$ y $V_t^{\pi^*}(\omega) > V_t^{\pi^\bigstar}(\omega)$ para toda $\omega \in \Omega$ y $t > 0$. En este tipo de mercados existen esta clase de estrategias y al mismo tiempo se mantiene la ley de un solo precio.

3. **Hay oportunidades de arbitraje pero no hay estrategias dominantes**: Se dice que existen *oportunidades de arbitraje* si existe una estrategia $\pi$ tal que:

   - $V_0^\pi = 0$
   - $V_t^\pi \geq 0$
   - $E^\pi(V_t) > 0$

   donde $E^\pi(V_t)$ es el valor esperado del portafolio a tiempo t con $t > 0$ bajo la estrategia $\pi$. Este tipo de estrategias se encuentran en estos mercados, sin embargo, no existen estrategias dominantes.

4. **No hay oportunidades de arbitraje**: Solo esta categoría es razonable desde el punto de vista económico.

### 1.2.3. Modelo binomial de valuación de activos

A manera de ejemplo presentaremos el modelo binomial de valuación de activos. Supongamos que se tiene un portafolio de inversión con $m + 1$ activos:

- **un activo sin riesgo** con precio $B_0$ a tiempo 0 y un precio determinado $B_t$ a tiempo t con $t = 1, 2, 3, ....$ Definimos el precio del activo a tiempo t como
$$B_t := B_0 e^{rt}$$
donde r es la tasa de interés libre de riesgo.

- **m activos con riesgo** cuyo vector de precios aleatorios a tiempo t será $S(t) = \{(S_1(t), S_2(t), S_3(t), ..., S_m(t))\}$ donde $S_i(t)$ representa el precio aleatorio del i-ésimo activo a tiempo t con $t = 0, 1, 2, 3, ....$

Supongamos que el precio del i-ésimo activo con riesgo aumenta con probabilidad $p_i$ o bien disminuye con probabilidad $1 - p_i$. Esto es, a tiempo $t = 1$ el precio aleatorio del i-ésimo activo con riesgo $S_i(1)$ sería:

- $u_i S_i(0)$ con probabilidad $p_i$

- $d_i S_i(0)$ con probabilidad $(1 - p_i)$, con $u_i > d_i$ para todo $i = 1, 2, 3, ..., m$. En general, el precio del i-ésimo activo con riesgo a tiempo t lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$S_i(t) = S_i(0)u_i^{X_i^n} d_i^{n-X_i^n} = S_i(0)e^{X_i^n ln(u_i) - X_i^n ln(d_i) + nln(d_i)}$$

donde $X_i^n$ es la variable aleatoria que representa el número de veces que el precio del i-ésimo activo con riesgo aumenta. Es claro que $X_i^n$ es una variable aleatoria con distribución binomial y parámetros $n$ y $p_i$.

Si el inversionista dispone de una fortuna inicial de $\sigma$ unidades monetarias y sigue la estrategia de inversión $(\pi(0), \pi(t))$ donde $\pi(0)$ representa la cantidad invertida en el activo sin riesgo y $\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), ..., \pi_m(t))$ el número de unidades que posee de cada uno de los m activos con riesgo a tiempo t. Entonces su fortuna a tiempo t está definida de la siguiente manera:

$$V_t := \pi(0)e^{rt} + \sum_{k=1}^{m} \pi_k(t)S_k(t). \tag{1.3}$$

De igual manera, definimos la ganancia a tiempo t como:

$$G_t := \pi_0 r + \sum_{k=1}^{m} \pi_k(t)\triangle S_k, \tag{1.4}$$

donde $\triangle S_k := S_k(t) - S_k(t-1)$. Las ecuaciones (1.3) y (1.4) se pueden contrastar con (1.1) y (1.2) respectivamente.

Concluiremos esta sección presentando un par de escenarios en los cuales es posible encontrar oportunidades de arbitraje.

- Supongamos que el inversionista sabe de antemano que, aún en el peor de los casos, invertir en los activos con riesgo es mejor que invertir en el activo sin riesgo, es decir, si supiese que $e^{rt} < d_i < u_i$ para todo $i = 1, 2, 3, ...m$, entonces él podría conseguir un crédito a tiempo 0 y con este comprar los activos, vender los activos a tiempo $t > 0$, pagar el crédito y así obtener una ganancia sin tener que invertir una sola unidad de su propio capital.

- Si por el contrario tuviese la certeza de que, aún en el mejor de los casos, es más conveniente invertir en el activo sin riesgo, es decir, si supiera de antemano que $d_i < u_i < e^{rt}$ para todo $i = 1, 2, 3, ...m$, entonces podría realizar una venta en corto de los activos con riesgo a tiempo 0 e invertir el dinero obtenido de esta transacción en el activo sin riesgo, a tiempo $t > 0$ utilizaría el dinero invertido en el activo sin riesgo y las ganancias que este le generó para comprar los activos con riesgo que debe entregar como resultado de la venta en corto y de esta manera obtendría una ganancia sin invertir una sola unidad de su capital.

## 1.3. Valor en Riesgo (VaR)

El 19 de Octubre de 1987 es conocido en el mundo de las finanzas como el lunes negro; fue este día cuando se desplomaron los mercados de valores de todo el mundo, en un lapso de tiempo muy breve. Esta caída ha sido el mayor derrumbe porcentual, sucedido en un mismo día, en la historia de los mercados de valores.

La lección aprendida de este catastrófico evento es que miles de millones de dólares pueden perderse como consecuencia de una pobre supervisión en cuestión de administración de riesgos financieros.

Es a partir de este suceso que es desarrollado el cálculo del valor en riesgo (VaR por sus siglas en inglés *Value at Risk*) como un método para poder cuantificar el riesgo de mercado.

El VaR es una medida estadística de riesgo de mercado que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio en un intervalo de tiempo, con cierta probabilidad o nivel de confianza. Es importante mencionar que la definición de VaR es válida únicamente en condiciones normales de mercado, ya que en momentos de crisis y turbulencia la pérdida se estima mediante pruebas de *estrés* o valores extremos.

Para el cálculo del VaR son necesarios dos parámetros: el nivel de confianza $\alpha$ al cual se quiere estimar la pérdida y un horizonte de tiempo. Matemáticamente se define de la siguiente manera.

**Valor en Riesgo (VaR)**. Dado cierto nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ y con un horizonte de tiempo de un día, el valor en riesgo (VaR) es el valor mínimo $l$ tal que la probabilidad de que la variable aleatoria de las perdidas diarias $\mathbf{L}$ exceda el valor $l$ no supera $(1-\alpha)$, esto es

$$VaR_\alpha := inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \tag{1.5}$$

De la ecuación (1.5) podemos notar que el $VaR_\alpha$ es un cuantil de la función de distribución de pérdidas diarias.

Lo que hace el VaR es crear un umbral de pérdidas el cual no se superará con probabilidad $\alpha$. Es evidente que mientras más alto sea el nivel de confianza $\alpha$ el $VaR_\alpha$ reflejará un umbral más grande.

### 1.3.1. Metodologías para el cálculo del VaR

El valor en riesgo se puede calcular mediante dos métodos:

- **Métodos paramétricos**: Se caracterizan por el supuesto de que la función de pérdidas y ganancias del activo en cuestión se distribuye de acuerdo a una curva de densidad de probabilidad normal. Sin embargo, se ha observado que la gran mayoría de los activos no siguen un comportamiento estrictamente normal, más bien, son aproximados a la curva de una normal, por lo tanto, los resultados que se obtienen a partir de estos métodos son solo aproximaciones.

- **Métodos no paramétricos**: Consisten en utilizar una serie de datos históricos sobre los precios de los activos y construir con estos una serie de tiempo de precios y/o rendimientos simulados.

Para que esta metodología arroje resultados satisfactorios es necesario identificar los componentes de los activos del portafolio y reunir los datos de los precios históricos por un período que oscile entre 250 y 500 datos. A partir de estos datos se calcula el cuantil correspondiente al nivel de confianza deseado.

Existen tres tipos de simulación histórica:

- **Crecimientos absolutos**
- **Crecimientos logarítmicos**
- **Crecimientos relativos**

### 1.3.2. Aplicaciones del VaR

En general, El VaR es utilizado por cualquier institución expuesta a riesgos financieros. Podemos clasificar las aplicaciones de los métodos para calcular el VaR de la siguiente manera:

- **Pasiva: análisis de riesgo.** La aplicación temprana de métodos para cuantificar el VaR es utilizada como una medida para el análisis del riesgo al cual esta expuesta la institución. Además, el VaR puede ser utilizado para conocer los riesgos que se corren en las diversas operaciones comerciales y de inversión en las que se incurre. También sirve para comunicar a los inversionistas de una corporación el riesgo financiero de esta última en términos no técnicos y de fácil comprensión.

- **Defensiva: control de riesgo.** El siguiente paso es utilizar el VaR para colocar activos en el mercado. Su ventaja es que sirve como común denominador para poder comparar activos con riesgo en los diversos mercados.

- **Activa: gestión de riesgo.** El VaR puede ayudar a los gestores de portafolios de inversión en la toma de decisiones, ya que ofrece una visión global del impacto del riesgo de mercado en el portafolio.

Las instituciones que pasan por el proceso de calcular su propio VaR se ven obligadas a enfrentarse a su estado de exposición al riesgo financiero y a la creación de estrategias para el manejo de este. Lo anterior vuelve al proceso más importante que el valor en sí.

Como se puede observar el VaR no otorga certidumbre con respecto a las pérdidas en las que puede incurrir una inversión, sino una expectativa de resultados a partir de los supuestos en los modelos y parámetros empleados para su cálculo.

Es importante señalar que la mayor ventaja que presenta el VaR probablemente radica en el hecho de que impuso una metodología estructurada para una crítica objetiva acerca del manejo del riesgo.

## 1.4. Fondos de pensiones

Un fondo de pensiones es un patrimonio creado para cumplir con el plan de pensiones y cuya gestión, custodia y control se realizan de acuerdo a la legislación vigente.

Entre los diversos riesgos financieros a los que se encuentra expuesto un fondo de pensiones podemos resaltar los siguientes:

- **Riesgo de Mercado**: Es el riesgo de que el valor de un portafolio disminuya debido a movimientos adversos en los factores de riesgo que determinan su precio.
- **Riesgo de Crédito**: Es el riesgo relativo a la posible pérdida que asume una entidad económica a consecuencia del incumplimiento de obligaciones contractuales en el que puede incurrir la contraparte con la cual se relaciona.
- **Riesgo de Liquidez**: Este se traduce como la incapacidad de una entidad económica de disponer de los fondos necesarios para poder hacer frente a sus obligaciones.

En esta sección abordaremos los fundamentos matemáticos que hay detrás de las pensiones. La clave en el análisis matemático de las pensiones está en la proyección del salario futuro. Es por esta razón que será el primer tema que abordemos.

### 1.4.1. Función de escala de salario

Para modelar el crecimiento del salario utilizaremos una escala de salario determinista $\{s_x\}$. Este supuesto es poco realista, sin embargo, es el más utilizado en la práctica. Al considerar que un individuo no comienza a trabajar hasta una cierta edad, la escala normalmente comienza en alguna edad inicial $x_0$ mayor que 0. La función de escala de salario nos sirve para proyectar el salario de un individuo cuya edad actual es $x$. La definimos de la siguiente manera:

$$\frac{s_y}{s_x} : \frac{\sigma_{y,y+1}}{\sigma_{x,x+1}},$$

donde $\sigma_{i,i+1}$ representa el salario anual recibido en el año correspondiente a la edad i a i+1.

#### Tasa de salario

Con frecuencia se trabaja con la tasa de salario en un solo punto en lugar de utilizar el salario en un mes en particular. La definición matemática de tasa de cambio nos permite definir la tasa de salario como

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sigma_{t,t+h}}{h}.$$

De la definición anterior podemos concluir que la tasa de salario es un concepto ambiguo, esto ya que a pesar de estar definida en tiempo continuo el salario normalmente de percibe de manera discreta. Por otra parte, el límite cuando h tiende a 0 por la derecha y el límite cuando h tiende a 0 por la izquierda bien pueden ser diferentes si t es un punto en el tiempo en el cual se ajusta el salario.

En la práctica, cuando se debe estimar una tasa de salario se determina un pequeño intervalo $(t - 0.5h, t + 0.5h)$ de longitud $h$ y se aproxima la tasa de salario usando

$$\frac{\sigma_{t-0.5h,t+0.5h}}{h}.$$

En general se utiliza $h = 1$ para aproximar la tasa de salario, por lo tanto

$$\text{Tasa de salario a edad } x \simeq s_{x-0.5}$$

### 1.4.2. Planes de pensiones

En cualquier plan de pensiones existe una fase de acumulación durante la cual se realizan las contribuciones. Estas contribuciones se acumularán en una cuenta la cual deberá estar disponible en el momento en que el titular del plan decida retirarse. Con el dinero acumulado en esta cuenta él podrá comprar una anualidad vitalicia la cual le servirá para cubrir sus necesidades después del retiro. Algunos planes de pensiones contemplan la posibilidad de entregar al titular una parte o incluso la totalidad del dinero acumulado en la cuenta.

Podemos clasificar los planes de pensiones de la siguiente manera:

- **Plan de beneficio definido:** En este tipo de plan el titular de la cuenta define el monto que espera recibir al momento de retirarse. Es definido en el sentido de que la fórmula es determinada de antemano. Cuando la fórmula está calculada con el salario cercano al retiro el plan de de beneficio definido se denomina plan de salario final. Cuando se calcula con el salario promedio se denomina plan de salario de carrera promedio. En este plan es necesario hacer contribuciones regularmente para así poder cubrir el costo del plan de retiro.

- **Plan de contribución definida:** Como su nombre lo indica en este tipo de plan se especifica el monto de contribución, usualmente como porcentaje del salario (este porcentaje es llamado *tasa de contribución*) topado a cierto límite (por ejemplo el 0.10 del salario mensual hasta un máximo de 15 salarios mínimos). En el plan de contribución definida el beneficio al momento del retiro depende del valor acumulado en la cuenta hasta ese momento, por lo tanto, no es un valor fijo.

La tasa de reemplazo de un plan de pensiones se define como:

R:= Monto anual de la pensión recibida / Último salario anual.

Esta tasa representa el porcentaje de la pensión recibida con respecto al último salario percibido. Una tasa de reemplazo de alrededor del $0.7$ es por lo general una tasa adecuada para que una persona pueda mantener el estilo de vida que tenía al momento de retirarse.

En ambos planes existe el riesgo de que el valor acumulado en la cuenta no sea suficiente para cubrir el costo del plan de retiro. Este riesgo generalmente esta relacionado con el hecho de que los rendimientos generados por la cuenta estén por debajo de lo esperado.

Es importante mencionar que el dinero que se va acumulando en la cuenta es invertido con el fin de generar un mayor rendimiento, sin embargo, al ser invertido queda expuesto al riesgo de mercado. Lo anterior implica que de presentarse movimientos adversos en los factores de riesgo que influyen en los precios de los activos en los cuales esta invertido el dinero del plan, este podría generar pérdidas considerables en lugar de ganancias. Esto explica por que los rendimientos pueden estar por debajo de lo esperado.

Es por esta razón que resulta de suma importancia tomar medidas que nos permitan maximizar la tasa de rendimiento del portafolio en el cual se invierten los fondos para el retiro.

Cabe mencionar que no todas las personas se retiran a una edad específica, mientras que algunos lo hacen antes de la edad establecida (por diversas razones como por ejemplo: discapacidad, muerte, retiro temprano, etc.) otros continúan trabajando años después de haber alcanzado la edad establecida por la ley para poder retirarse. Es por esta razón que, en la práctica, los cálculos se realizan utilizando un modelo de decrementos múltiples el cual nos permite contemplar estas posibilidades.

Para concluir esta sección presentaremos un pequeño ejemplo.

**Ejemplo 1.1**: Juan contrata un plan de pensión de **contribución definida**. La tasa de contribución es fijada bajo los siguientes supuestos:

1. Las contribuciones mensuales son fijadas como un porcentaje de la tasa de crecimiento salarial.

2. Las contribuciones son invertidas y ganan una tasa de interés del $0.10$ efectiva anual.

3. La escala de crecimiento del salario esta definida por $s_x = 1.045^x$ y el salario crece de manera continua.

4. Juan decide que al momento del retiro contratara una anualidad vitalicia vencida y pagadera anualmente. Se fija el precio de la anualidad en $14.43657$.

Al día de hoy Juan tiene 25 años y tres meses, calcula la mínima tasa de contribución requerida para obtener una tasa de reemplazo del $0.7$ si Juan planea retirarse dentro de 34 años y 6 meses.

*Solución:* Ya que las contribuciones son proporcionales a la tasa de crecimiento salarial lo primero que tenemos que hacer es proyectar estas. La tasa (anual) de crecimiento salarial dentro de k meses será:

$$S\frac{s_{25.25+k/12-0.5}}{s_{25.25-0.5}} = S(1.045)^{k/12}$$

Ya que Juan se retirará dentro de 36 años y seis meses (414 meses), entonces k=1,2,...,414.

Ahora que conocemos esto es necesario modelar el valor acumulado de las contribuciones. Sea c la tasa de contribución, entonces, el valor acumulado de las contribuciones será:

$$c\sum_{k=1}^{414}\frac{S(1.045)^{k/12}}{12}(1.1)^{\frac{414-k}{12}}$$

$$=\frac{cS}{12}(1.1)^{34.5}\sum_{k=1}^{414}\frac{(1.045)^{k/12}}{1.1^{k/12}}=432.4425cS.$$

El beneficio anual pactado de la pensión sera de $0.7S(1.045)^{34}$ por lo tanto el valor presente de la anualidad vitalicia es igual a 45.1353S.

Ahora solo nos queda igualar este valor con el valor acumulado de las contribuciones y así poder obtener el valor de c.

$$432.4425cS = 45.1353S.$$

Por lo tanto la tasa mínima de contribución $c = 0.1044$.

Ahora supongamos que la tasa de interés que ganan las contribuciones al ser invertidas es 0.08. En ese caso el valor acumulado de las contribuciones será igual a

$$c\sum_{k=1}^{414}\frac{S(1.045)^{k/12}}{12}(1.08)^{\frac{414-k}{12}}$$

$$=\frac{cS}{12}(1.08)^{34.5}\sum_{k=1}^{414}\frac{(1.045)^{k/12}}{1.08^{k/12}}=292.8653cS.$$

Por lo tanto, la tasa mínima de contribución sería $c=\dfrac{45.1353}{292.8653}=0.1541$ que es casi 0.5 mayor que la tasa original. Este ejemplo nos muestra que un pequeño cambio en las tasas de interés tiene un gran impacto en los fondos de pensiones.

Al llegar a este punto ya estamos familiarizados con los conceptos y herramientas básicas necesarias para la optimización de portafolios de inversión y el manejo de rendimientos. En los siguientes capítulos se buscará construir un modelo que nos permita maximizar la utilidad esperada de un portafolio de inversión y a partir de esto poder obtener la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) que permita maximizar la cota superior de la probabilidad de que la tasa de rendimiento de un portafolio se encuentre por encima de cierta tasa objetivo.

# Capítulo 2

# Optimización de portafolios de inversión

El objetivo de este capítulo es presentar un modelo que nos permita calcular la estrategia de inversión óptima para el inversionista que busca maximizar la utilidad esperada del valor de un portafolio de inversión sensible al riesgo en un horizonte de tiempo a largo plazo.

Para poder lograr nuestro objetivo necesitaremos algunos resultados sobre procesos de Markov controlados, es por esta razón que este será el tema que se presenta en la primera sección de este capítulo.

## 2.1. Procesos de Markov controlados

Consideremos un proceso de Markov controlado a tiempo discreto

$$(\aleph, \mathbf{A}, \{A(x) : x \in \aleph\}, P, c),$$

con:

- Un espacio de estados finito $\aleph = \{1, 2, 3, ..., N\}$, dotado de la topología discreta.
- A un espacio de Borel llamado espacio de controles. Recordemos que un espacio de Borel es un par (A,$\mathbb{A}$), que consiste en un conjunto A y una $\sigma$-álgebra $\mathbb{A}$ de subconjuntos de A.
- Para cada $x \in \aleph$, suponemos que existe un conjunto no vacío $A(x) \subset \mathbf{A}$ que representa el conjunto de controles admisibles cuando el sistema se encuentra en el estado $x$.
- Sea $\mathbf{K} := \{(x, a) : x \in \aleph, a \in \mathbf{A}\}$ el conjunto de parejas admisibles, el cual se supone que es un subespacio de Borel.
- Sea X un proceso estocástico que describe la evolución de una clase de factores económicos, el cual se modela como una cadena de Markov estacionaria a tiempo discreto.
- La regla de transición $P_{x,y}(a)$ es un kernel estocástico en $\aleph$ dado $\mathbf{K}$.

- $c : \mathbf{K} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, no necesariamente no negativa, la cual representa el costo en un período.

**Hipótesis H.1**

1. Para todo $x, y \in \aleph$ la función $a \to P_{x,y}(a)$ con $a \in A(x)$ es continua.
2. Para todo $x \in \aleph$, $A(x)$ es un subconjunto compacto de $\mathbf{A}$.

Denotaremos por $\wp$ al conjunto de políticas (o estrategias) y diremos que una política $\pi \in \wp$ es una **política de Markov** si existe una sucesión de funciones $\{\pi_t\}$ donde $\pi_t : \aleph \to P(\mathbf{A})$ con P($\mathbf{A}$) el conjunto de medidas de probabilidad en $\mathbf{A}$, tal que $\pi_t(x)(A(x)) = 1$. Denotaremos al conjunto de políticas de Markov como $\wp_M$, y $\wp_{DM}$ serán el conjunto de **políticas de Markov deterministas**, es decir, aquellas políticas $\pi = \{\pi_t\} \in \wp_M$ para las cuales $\pi_t(x)$ es una medida de Dirac concentrada en algún punto de A($x$). Recordemos que la medida de Dirac es la medida $\delta_x$ definida para algún $x \in \aleph$ y todo $A \subseteq X$ como $\delta_x := 1_A(x)$.

Definimos $H_0 := \aleph$ y $H_{t+1} := H_t \times \{x_1 \in \aleph \mid P_{x,x_1}(a) > 0, x \in H_t, (x,a) \in \mathbf{K}\}$ para t= 0,1,2,3,.... Diremos $\pi = \{\pi_t\}$ es una **estrategia de control** si es una sucesión de kernels estocásticos en $\mathbf{A}$ dado $H_t$ que satisface $\pi_t(A(x_t) \mid h_t) = 1$ $\forall h_t \in H_t, t \geq 0$.

En particular, denotaremos por $\mathbf{F}$ al conjunto de funciones $f : \aleph \to \mathbf{A}$ tal que $f(x) \in A(x)$ para todo $x \in \aleph$. Diremos que una política $\pi \in \wp_{DM}$ es estacionaria si existe $f \in \mathbf{F}$ tal que $\pi_t(f(x_t) \mid h_t) = 1$ $\forall h_t \in H_t, t \geq 0$; denotaremos esta política como $f \in \mathbf{F}$.

Si el estado inicial $x \in \aleph$ y la estrategia $\pi \in \wp$ están dados, existe una única medida de probabilidad $P_x^\pi$ en $(\Omega, \Im)$ donde $\Omega := (\aleph \times \mathbf{A})^\infty$ y $\Im$ es su $\sigma$-álgebra correspondiente. Denotamos por $E_x^\pi$ a la esperanza con respecto a $P_x^\pi$.

**Hipótesis H.2**

1. Al aplicarse cualquier política $\pi \in \wp_{DM}$ el espacio de estados es irreducible, es decir, dados $x, y \in \aleph$ y $\pi \in \wp_{DM}$, existe $m = m(x, y, \pi) < N$ tal que $P_x^\pi[x_m = y] > 0$.
2. Para todo $x \in \aleph$ y $a \in A(x)$, $P_{x,x} > 0$.

*Criterio de optimización ajustado al riesgo.* Dado $x \in \aleph$, el costo promedio ajustado al riesgo bajo la estrategia $\pi \in \wp$ es definido como

$$L(\pi, \gamma) := \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{\gamma} \ln E_x^\pi \exp \Big[\gamma \sum_{t=0}^{T-1} c(x_t, a_t)\Big],$$

donde $\gamma > 0$ es el parámetro que refleja la aversión al riesgo. El problema de control óptimo consiste en encontrar la estrategia $\pi^*$ tal que

$$L(\gamma) = L(\pi^*, \gamma) = \inf_{\pi \in \wp} L(\pi, \gamma). \tag{2.1}$$

**Teorema 2.1**: Si existen un número $\lambda$ y una función $W : \aleph \to \mathbb{R}$ tal que

$$e^{\lambda + W(x)} = \min_{a \in A(x)} \Big\{e^{\gamma c(x,a)} \sum_{y \in \aleph} e^{W(y)} P_{x,y}(a)\Big\}, \tag{2.2}$$

entonces $L(x) = \dfrac{1}{\gamma}\lambda$ y la estrategia óptima $f^* \in \mathbf{F}$ es tal que

$$e^{\gamma c(x,f^*(x))} \sum_{y \in \aleph} e^{W(y)} P_{x,y}(f^*(x)) = \min_{a \in A(x)} \Big\{ e^{\gamma c(x,a)} \sum_{y \in \aleph} e^{W(y)} P_{x,y}(a) \Big\}.$$

La demostración de este teorema de puede consultar en [7].

Cabe resaltar que el teorema anterior implica que la **estrategia óptima** será **única, determinista y estacionaria**.

Dada $g \in \mathbb{R}^N$, definimos el operador $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ como sigue

$$Tg(x) = \inf_{a \in A(x)} \Big\{ \gamma c(x,a) + \ln \sum_{y \in \aleph} e^{g(y)} P_{x,y}(a) \Big\} \tag{2.3}$$

y, para cada $k \geq 1$ la función $g_k \in \mathbb{R}^N$ está definida por

$$g_k(x) = Tg_{k-1}(x) \tag{2.4}$$

con

$$g_0 = g.$$

Si consideramos la definición de $g_k$ y usamos la propiedad de Markov obtenemos lo siguiente

$$g_k(x) = \inf_{\pi \in \wp} \ln E_x^{\pi} exp \Big\{ \sum_{t=0}^{k-1} \gamma c(X_t, a_t) + g(X_k) \Big\}. \tag{2.5}$$

Existe además $\pi^g = \{\pi_k^g\} \in \wp_{DM}$ tal que

$$g_k(x) = \ln E_x^{\pi^g} exp \Big\{ \sum_{t=0}^{k-1} \gamma c(X_t, a_t) + g(X_k) \Big\}.$$

Dada $\pi^g = \{\pi_k^g\} \in \wp_{DM}$ definimos, para $t = 0, 1, ..., k-1$, la matriz $Q_{x,y}^g(t)$ de dimensión $N \times N$ de la siguiente manera :

$$Q_{x,y}^g(t) := e^{\gamma c(x, \pi_t^g(x))} P_{x,y}(\pi_t^g(x)).$$

Entonces,

$$E_x^{\pi^g} exp \Big\{ \sum_{t=0}^{k-1} \gamma c(x_t, a_t) + g(x_k) \Big\} = Q^g(0), ..., Q^g(k-1) e^g(x) = \Gamma_k^g e^g(x),$$

donde

$$\Gamma_k := Q^g(0), ..., Q^g(k-1).$$

Observemos que de la Hipótesis H.1 podemos concluir que $\Gamma_k > 0$ para $k \geq N$.

Recordemos que el Teorema 2.1 nos dice que existe una función $W(x)$ y una constante $\lambda$ tal que, para todo $x \in \aleph$,

$$\lambda + W(x) = TW(x). \tag{2.6}$$

**Iteración de valores**. Dada cierta $g \in \mathbb{R}^N$ arbitraria, definimos recursivamente, para $x \in \aleph$

$$\lambda_k(x) := g_k(x) - g_{k-1}(x).$$

**Teorema 2.2**: Sean $\lambda$ y $W$ como en (2.6). Entonces, para cada $x \in \aleph$, $\lambda_k(x) \to \lambda$ cuando $k \to \infty$. Por otra parte

$$\sup_x \left| L(x, \pi_k^*, \gamma) - \frac{\lambda}{\gamma} \right| \to 0$$

cuando $k \to \infty$, con $\pi_k^* \in \mathbf{F}$ tal que

$$L(\pi^*, \gamma) = \inf_{\pi \in \wp} L(\pi, \gamma).$$

La demostración de este teorema se encuentra en [1].

En las siguientes secciones utilizaremos los resultados obtenidos hasta ahora con la finalidad de caracterizar y calcular la estrategia óptima de inversión para un portafolio sensible al riesgo.

## 2.2. Formulación del modelo

Sea X un proceso estocástico que describe la evolución de una clase de factores económicos, el cual se modela como una cadena de Markov estacionaria a tiempo discreto con matriz de probabilidad de transición $Q = (Q_{x,y})$ y espacio de estados finito $\aleph$. Como se mencionó anteriormente, en el mercado existen m **activos con riesgo** a los cuales podemos asociar un vector aleatorio Z, de dimension m, el cual representa el **vector de precios relativos** durante un período de tiempo. Definimos la distribución de probabilidad condicional *v(x,y,dz)*, esto es, dado que $X_t = x$ y $X_{t+1} = y$ la probabilidad de que durante el período *(t,t+1)* el vector de precios relativos sea $Z_{t+1}$ es *v(x,y,dz)*. Finalmente incluiremos una **cuenta bancaria** la cual supondremos que genera una tasa de interés continuo r constante por período, es decir, si se invierte el día de hoy un peso en esta cuenta dentro de t períodos se tendrá un total de $e^{tr}$ pesos.

Nota 2.1: Los conceptos descritos a continuación han sido introducidos previamente en la sección 2.1

Sea $\mathbf{A}$, un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, cuyos elementos $a$ representan los vectores de **acciones admisibles** para los activos con riesgo, es decir, el número de unidades de cada uno de los activos con riesgo que se han podido adquirir durante el periodo $[t, t+1)$ con el capital inicial a tiempo t. De lo anterior tenemos que para cada $x \in \aleph$ existe $A(x) \subset \mathbf{A}$, no vacío, el cual representa el conjunto de acciones admisibles cuando X se encuentra en el estado $x$.

Definimos $\mathbf{K} := \{(x,a) : x \in \aleph, a \in \mathbf{A}\}$ como el conjunto de pares admisibles, $H_{t+1} := H_t \times \{x_1 \in \aleph \mid P_{x,x_1}(a) > 0, x \in H_t, (x,a) \in \mathbf{K}\}$ para t= 0,1,2,3,.... Diremos $\pi = \{\pi_t\}$ es una **estrategia de control** si es una sucesión de kernels estocásticos en $\mathbf{A}$ dado $H_t$ que satisface $\pi_t(A(x_t) \mid h_t) = 1 \ \ \forall h_t \in H_t, t \geq 0.$

Denotaremos por $\wp$ al conjunto de estrategias (o políticas) y diremos que una estrategia $\pi \in \wp$ es una **estrategia de Markov** si existe una sucesión de funciones $\{\pi_t\}$ donde $\pi_t : \aleph \to P(\mathbf{A})$ con P($\mathbf{A}$) el conjunto de medidas de probabilidad en $\mathbf{A}$, tal que $\pi_t(x)(A(x)) = 1$. Denotaremos al conjunto de estrategias de Markov como $\wp_M$, y $\wp_{DM}$ serán el conjunto de **estrategias de Markov deterministas**, es decir, aquellas políticas $\pi = \{\pi_t\} \in \wp_M$ para las cuales $\pi_t(x)$ es una medida de Dirac concentrada en algún punto de A($x$). En particular, denotaremos por $\mathbf{F}$ al conjunto de funciones $f : \aleph \to \mathbf{A}$ tal que $f(x) \in A(x)$ para todo $x \in \aleph$. Diremos que una política $\pi \in \wp_{DM}$ es estacionaria si existe $f \in \mathbf{F}$ tal que $\pi_t(f(x_t) \mid h_t) = 1$ $\forall h_t \in H_t, t \geq 0$; denotaremos esta política como $f \in \mathbf{F}$.

Definimos $V_t$, el **valor del portafolio a tiempo t** bajo cierta estrategia $\pi$ y con estado inicial $X_0 = x$, como:

$$V_{t+1} = V_t\{e^r + \pi_t \bullet (Z_{t+1} - e^r\mathbf{1})\}. \tag{2.7}$$

Aquí $\bullet$ representa el producto interno de vectores y $\mathbf{1}$ hace referencia a un vector de 1s de dimensión m.

## 2.3. Planteamiento del problema

Sea $\theta \in (-\infty, 1)$ el parámetro que representa la actitud del inversionista con respecto al riesgo, esto es, mientras más pequeño sea el valor de $\theta$ mayor será la aversión del inversionista a correr riesgos.

Para cada $\theta < 1$, con $\theta \neq 0$, definimos la función de utilidad del valor del portafolio a tiempo T como

$$U(V_T) = \frac{V_T^\theta}{\theta}. \tag{2.8}$$

Maximizar el valor esperado de la utilidad de un portafolio se traduce en resolver el siguiente problema

$$\sup_{\pi \in \wp}\{E_x^\pi[\theta^{-1}V_T^\theta]\}, \tag{2.9}$$

donde $E_x^\pi$ hace referencia a la esperanza condicional dada la estrategia $\pi$ y $X_0 = x$.

Ya que $\theta$ toma valores positivos y negativos es posible reescribir la ecuación (2.9) de la siguiente manera:

a) para $\theta > 0$

$$\sup_{\pi \in \wp}\{E_x^\pi[V_T^\theta]\} \tag{2.10}$$

b) para $\theta < 0$

$$\inf_{\pi \in \wp}\{E_x^\pi[V_T^\theta]\}. \tag{2.11}$$

Este planteamiento correspondería a un horizonte de tiempo finito, sin embargo, los criterios de optimización en un horizonte de tiempo finito a menudo conducen a estrategias óptimas en función del tiempo, en cuyo caso las dificultades para su cálculo pueden ser grandes. La alternativa es utilizar criterios de optimización en un horizonte infinito, ya que estos ofrecen la posibilidad de conducirnos a estrategias óptimas estacionarias y por lo tanto con menos dificultades para su cálculo. Además, un horizonte de tiempo infinito es con frecuencia muy apropiado para los problemas prácticos de inversión, como por ejemplo, la gestión de un fondo de inversión. Es por esta razón que nuestro análisis se basará en un horizonte infinito y en consecuencia el problema a resolver sería el siguiente:

Para $\theta > 0$

$$J(\theta) = \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^{\pi}[V_T^{\theta}] \tag{2.12}$$

mientras que para $\theta < 0$

$$J(\theta) = \inf_{\pi \in \wp} \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^{\pi}[V_T^{\theta}]. \tag{2.13}$$

Aquí $J(\theta)$ representa la tasa de crecimiento ajustada al riesgo de la utilidad esperada.

## 2.4. Optimización de portafolios sensibles al riesgo

Para poder calcular la estrategia de inversión que maximice la utilidad esperada del valor del portafolio buscaremos reescribir las ecuaciones (2.12) y (2.13) de tal manera que podamos hacer uso de los resultados obtenidos en la Sección 2.1. Comenzaremos definiendo el **valor esperado condicional** $\mu^{\theta}$ de la siguiente manera:

$$\mu^{\theta}(x,y,a) := E_{x,y}[e^{\theta \ln(e^r + a \bullet (Z - e^r \mathbf{1}))}]. \tag{2.14}$$

Con la intención de darle sentido a la ecuación (2.14) y a los resultados que se presentan a continuación introduciremos la siguiente hipótesis:

**Hipótesis H.3:**

1. El conjunto de estrategias $\mathbf{A}$ está definido de tal forma que, para cada $a \in \mathbf{A}$, $e^r + a \bullet (Z - e^r \mathbf{1}) > 0$ casi seguramente.

2. Para cada $x,y \in \aleph$ y $a \in \mathbf{A}$ la esperanza condicional $\mu^{\theta}(x,y,a)$ existe y es finita.

3. $V_0 = 1$.

También definiremos la **probabilidad de transición**

$$P_{x,y}^{\theta} := \frac{Q_{x,y}\mu^{\theta}(x,y,a)}{\sum_{s \in \aleph} Q_{x,s}\mu^{\theta}(x,s,a)} \tag{2.15}$$

y el **costo en un período**

$$c^{\theta}(x,a) := \frac{1}{\theta} \ln \Big( \sum_{s \in \aleph} Q_{x,y}\mu^{\theta}(x,s,a) \Big). \tag{2.16}$$

Sea $J^*(\theta) := \dfrac{1}{\theta} J(\theta)$. Recordemos que $J(\theta)$ depende de la naturaleza positiva o negativa de $\theta$, por lo tanto $J^*(\theta)$ se puede escribir de la siguiente manera:

a) para $\theta > 0$

$$J^*(\theta) = \frac{1}{\theta} \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi [V_T^\theta] = \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{\theta} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi [V_T^\theta] \tag{2.17}$$

b) para $\theta < 0$

$$J^*(\theta) = \frac{1}{\theta} \inf_{\pi \in \wp} \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi [V_T^\theta] = - \inf_{\pi \in \wp} \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{|\theta|} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi [V_T^\theta]. \tag{2.18}$$

Tras algunos cálculos que implican esperanzas condicionales podemos expresar nuestra tasa $J^*(\theta)$ de la siguiente manera:

a) para $\theta > 0$

$$J^*(\theta) = \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{\theta} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi [e^{\theta \sum_{t=0}^{T-1} c^\theta (X_t, \pi_t)}], \tag{2.19}$$

b) para $\theta < 0$

$$J^*(\theta) = - \inf_{\pi \in \wp} \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{|\theta|} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi [e^{\theta \sum_{t=0}^{T-1} c^\theta (X_t, \pi_t)}], \tag{2.20}$$

donde los cambios de notación a $E_x^{\pi,\theta}$ y $c^\theta(X_t, \pi_t)$ se hacen con la finalidad de mantener la información ordenada.

Observemos que (2.20)y (2.1) implican que:

$$J^*(\theta) = -L(\theta). \tag{2.21}$$

Ahora que hemos logrado expresar nuestro problema en términos de lo establecido en la Sección 2.1, es necesario hacer algunas hipótesis adicionales con la finalidad de que $J^*$ cumpla con lo establecido en H.1 y H.2.

**Hipótesis H.4:**

1. Para todo $x, y \in \aleph$, la esperanza condicional $\mu^\theta(x,y,a)$ es estrictamente positiva.
2. La matriz Q es irreducible.
3. Para cada $x \in \aleph$, $Q_{x,x} > 0$.

Ahora que $J^*$ cumple con H.1 y H.2 podemos hacer uso de los Teoremas 2.1 y 2.2 los cuales establecen lo siguiente:

Para $\theta < 0$, existe un número $\lambda$ y una función $W : \aleph \to \mathbb{R}$ tal que

$$e^{\lambda + W(x)} = \min_{a \in A(x)} \Big\{ \sum_{y \in \aleph} Q_{x,y} \mu^\theta (x, y, a) e^{W(y)} \Big\}$$

Además, $J^*(\theta) = \dfrac{1}{\theta}\lambda$ con $f^* \in \mathbf{F}$ la estrategia óptima de inversión para $J^*(\theta)$, es decir:

$$e^{\lambda + W(x)} = \sum_{y \in \aleph} Q_{x,y} \mu^\theta (x, y, f^*(x)) e^{W(y)}).$$

Hasta ahora hemos logrado caracterizar la solución a la ecuación (2.20). Para (2.19) explotaremos la teoría desarrollada para matrices no negativas y así buscaremos una solución directa, al menos en el caso donde las estrategias admisibles son de Markov y deterministas.

Definimos para toda $f \in \mathbf{F}$ la función matriz cuadrada

$$B^{\theta}(f) := \{Q_{x,y}\mu^{\theta}(x,y,f(x))\}. \tag{2.22}$$

con $x, y \in \aleph$.

**Lema 2.1**:*Dada la estrategia* $\pi = (f_0, f_1, f_2, ...) \in \wp_{DM}$*, entonces,* $E_x^{\pi}[V_T^{\theta}] = E_x^{\pi}[e^{\theta \ln(V_T)}]$ *es igual a la suma de los elementos en el renglón* $x$ *de la matriz* $B^{\theta}(f_0)B^{\theta}\theta(f_1)...B^{\theta}(f_{T-1})$.

*Demostración.* Basta con demostrar, por medio de inducción, que para cada $\pi = (f_0, f_1, f_2, ...) \in \wp_{DM}$ se cumple lo siguiente

$$E^{\pi}[e^{\theta \ln \theta(V_T)}|X_0 = i, X_T = j]P(X_0 = i, X_T = j) = B_{ij}^{\theta,T}$$

para todo $i, j \in \aleph$ y para todo tiempo T, donde $B_{ij}^{\theta,T}$ denota el elemento en el renglón i y la columna j de la matriz $B^{\theta}(f_0)B^{\theta}\theta(f_1)...B^{\theta}(f_{T-1})$.

Para T=1 ocurre

$E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_1)}|X_0 = i, X_1 = j]P(X_0 = i, X_1 = j)$

$= E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_1)}|X_0 = i, X_1 = j]Q_{i,j}$

$= Q_{i,j} \int e^{\theta \ln(V_1)} v(i, j, df) = \mu^{\theta}(i, j, f(i))Q_{i,j} = B_{i,j}^{\theta}.$

Por el paso de inducción suponemos que se cumple para T-1. Entonces

$E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_T)}|X_0 = i, X_T = j]$

$= E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_{T-1})}$

$\times e^{\theta \ln(e^r + f_{T-1}(X_{T-1})(Z_{T-1} - e^r 1))}|X_0 = i, X_T = j]$

$= E^{\pi}[E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_{T-1})}$

$\times e^{\theta \ln(e^r + f_{T-1}(X_{T-1})(Z_{T-1} - e^r 1))}|X_0 = i, X_{T-1}, X_T = j]|X_0 = i, X_T = j]$

$= E^{\pi}[E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_{T-1})}|X_0 = i, X_{T-1}]$

$\times \mu^{\theta}(X_{T-1}, j, f_{T-1}(X_{T-1}))|X_0 = i, X_T = j]$

$= \sum_k E^{\pi}[E^{\pi}[e^{\theta \ln(V_{T-1})}|X_0 = i, X_{T-1} = k]$

$\times \mu^{\theta}(X_{T-1}, j, f_{T-1} = k)P(X_{T-1} = k|X_0 = i, X_T = j)]$

pero

$$P(X_{T-1}=k|X_0=i,X_T=j)=\frac{P(X_{T-1}=k,X_0=i,X_T=j)}{P(X_0=i,X_T=j)}$$
$$=\frac{P(X_0=i,X_{T-1}=k)Q_{kj}}{P(X_0=i,X_T=j)}$$

y por el supuesto sabemos que se cumple lo siguiente

$$E^{\pi}[e^{\theta\ln(V_{T-1})}|X_0=i,X_{T-1}=k]P(X_0=i,X_{T-1}=k)=B_{ik}^{\theta,T-1}$$

Sustituyendo nos queda de la siguiente manera:

$$E^{\pi}[e^{\theta\ln(V_{T-1})}|X_0=i,X_T=j]=\frac{\sum_k B_{ik}^{\theta,T-1}\mu^{\theta}(k,j,f_{T-1}(k))Q_{kj}}{P(X_0=i,X_T=j)}$$
$$=\frac{\sum_k B_{ik}^{\theta,T-1}B_{kj}^{\theta}}{P(X_0=i,X_T=j)}.$$

□

Para facilitar la demostración de la siguiente proposición es necesario recordar que, en vista de que la matriz $B_{\theta}(f)$ es no-negativa, irreducible y no periódica, sabemos que existe un radio espectral positivo, el cual denotaremos como $\varphi_f$; a este corresponde un eigenvector estrictamente positivo. Además, si $\vartheta$ es cualquier otro eigenvalor, ocurre que $\varphi_f>|\vartheta|$, y su correspondiente eigenvector no será estrictamente positivo.

**Proposición 2.1:** *Supongamos que existe un número $\varphi$ estrictamente positivo, un vector columna $\upsilon$ estrictamente positivo, y alguna $f^*\in F$ tal que: $\varphi\upsilon=B^{\theta}(f^*)\upsilon\geq B^{\theta}(f)\upsilon$ para toda $f\in \boldsymbol{F}$. Entonces $J(\theta)=\ln\varphi$ y la estrategia $f^*$ es óptima.*

*Demostración.* De los supuestos tenemos que:

$$\varphi\upsilon=B^{\theta}(f_n^*)\upsilon\geq B^{\theta}(f_n)\upsilon, \tag{2.23}$$

para $n=0,1,2,....$

En particular, si tomamos n=1 obtenemos

$$\varphi\upsilon\geq B^{\theta}(f_1)\upsilon.$$

Ahora, si multiplicamos ambos lados de la desigualdad anterior por $B^{\theta}(f_0)$ y después aplicamos la desigualdad (2.23) con n=0 tenemos que

$$\varphi^2\upsilon\geq B^{\theta}(f_0)B^{\theta}(f_1)\upsilon.$$

Se vuelve evidente que a través de la inducción es fácil demostrar que

$\varphi^n \upsilon \geq B^\theta(f_0)B^\theta(f_1)B^\theta(f_2)...B^\theta(f_0)B^\theta(f_n)\upsilon$, $n = 0, 1, 2, ....$

Por el Lema 2.1,

$\varphi^T \upsilon(x) \geq E_x^\pi[e^{\theta \ln(V_T)}]\upsilon(x)$

$Tln\varphi + \ln \upsilon(x) \geq \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln(V_T)}] + \ln \upsilon(x)$.

Por lo tanto, de la ecuación (2.12), concluimos que

$J(\pi, \theta) \leq \ln \varphi$.

Ya que $\pi$ fue escogida arbitrariamente, esta desigualdad funciona para todas las estrategias de Markov deterministas.

Aún nos falta demostrar que la igualdad se cumple cuando $\pi = f^*$. Para esto definimos $C := \varphi^{-1}B^\theta(f^*)$, una matriz con radio espectral 1. Sabemos que $C^T$ la T-ésima potencia de C, converge a una matriz estrictamente positiva cuando $T \to \infty$. Este resultado se puede consultar en [15]. Esto nos dice que $\ln(C^T \mathbf{1}(x))$ también converge $\forall x \in \aleph$, en tal caso, $\dfrac{1}{T}\ln(C^T \mathbf{1}(x))$ converge a cero. Entonces, por el Lema 2.1

$\ln E_x^{f^*}[e^{\theta \ln(V_T)}] = \ln[B^\theta(f^*)]^T \mathbf{1}(x)$

$= \ln[\varphi C]^T \mathit{1}(x) = Tln\varphi + \ln C^T \mathbf{1}(x)$.

Esto implica que

$J(f^*, \theta) = \text{lím sup}_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}(Tln\varphi + \ln C^T \mathbf{1}(x))$

$= \ln \varphi + \text{lím sup}_{T\to\infty} \dfrac{1}{\theta}\dfrac{1}{T} \ln C^T \mathbf{1}(x)) = \varphi$.

$\square$

**Proposición 2.2:**

$$\varphi = \sup_{f \in F} \varphi_f.$$

*Demostración.* Escogemos arbitrariamente $f \in F$, sea $\omega$ el eigenvector correspondiente al radio espectral $\varphi_f$; definimos $\varphi, \upsilon$ y $f^*$ tal como se hizo en la proposición 2.1. Ya que sabemos que $\omega$ y $\upsilon$ son estrictamente positivos entonces podemos asumir, sin perdida de generalidad, que $\upsilon \geq \omega$. Entonces, por (2.23) tenemos

$\varphi_f \omega = B^\theta(f)\omega \leq B^\theta(f)\upsilon \leq B^\theta(f^*)\upsilon = \varphi\upsilon$.

Tras aplicar un sencillo argumento de inducción obtenemos la siguiente desigualdad

$\varphi_f^n \omega \leq \varphi^n \upsilon \ \forall n.$

Ya que f fue elegida arbitrariamente, podemos afirmar que esta desigualdad se cumple $\forall f \in F$. Por lo tanto

$$\varphi = \sup_{f \in F} \varphi_f.$$

$\square$

Sea $\lambda = \ln \varphi$. Por lo tanto, si para $\theta > 0$, $f^* \in F$ es la estrategia de inversión óptima, entonces $\lambda = J(\theta)$. Con esto concluimos la discusión sobre la optimalidad de nuestra solución.

Definamos ahora el valor de iteración y el operador $T^\theta$ para nuestro portafolio de la siguiente manera:

a) para $\theta > 0$

$$T^\theta g^\theta(x) := \sup_{a \in A} \ln \sum_{y \in \aleph} Q_{x,y} \mu^\theta(x,y,a) e^{g^\theta(x)}$$

b) para $\theta < 0$

$$T^\theta g^\theta(x) := \inf_{a \in A} \ln \sum_{y \in \aleph} Q_{x,y} \mu^\theta(x,y,a) e^{g^\theta(x)}.$$

**Usaremos el superíndice $\theta$ para enfatizar la dependencia de la solución con respecto a este parámetro.**

De manera vectorial, podemos reescribir esta ecuación como:

a) para $\theta > 0$

$$T^\theta g := \sup_{f \in F} \ln B^\theta(f) e^{g^\theta}$$

b) para $\theta < 0$

$$T^\theta g := \inf_{f \in F} \ln B^\theta(f) e^{g^\theta}.$$

Como ya se explicó en la Sección 2.1, dado $g_0 : \aleph \to \mathbb{R}$ arbitrario, el valor de iteración esta definido recursivamente por:

a) para $\theta > 0$

$$g_k = T^\theta g = \sup_{f \in F} \ln B^\theta(f) e^{g_{k-1}}$$

b) para $\theta < 0$

$$g_k = T^\theta g = \inf_{f \in F} \ln B^\theta(f) e^{g_{k-1}}.$$

La sucesión definida por $\lambda_k(x) := g_k(x) - g_{k-1}(x)$ converge a $\lambda$ cuando $k \to \infty$. Para cada $x \in \aleph$ y $z \in \aleph$ arbitrario y fijo ocurre que $g_k \to W(x) - W(z)$ cuando $k \to \infty$.

Este algoritmo nos permite calcular la estrategia óptima $f^* \in \mathbf{F}$. En la siguiente sección se presentan un par de ejemplos numéricos que nos permitirán ilustrar la manera en que funciona.

## 2.5. Ejemplos numéricos

**Ejemplo 1:** Consideremos un portafolio con las siguientes características:

- $\aleph = (1, 2)$.
- Hay un activo con riesgo.
- r=0.
- $\theta = -3$.
- La matriz de probabilidad de transiciones es

$$Q=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

- La distribución de probabilidad condicional asociada al precio de los activos es:
  $v(1,1,1.1) = 1 \quad v(1,2,0.7) = 1$
  $v(2,1,0.6) = 1 \quad v(2,2,1.2) = 1$

  Esto es, si el precio inicial es S, entonces después de un período el precio puede ser $1.1S, 0.7S, 0.6S$, ó $1.2S$.

Calcular la estrategia de inversión óptima para este portafolio.

*Solución*: Empecemos definiendo el conjunto **A**, de la hipótesis **H.3** inciso 1 tenemos que

$$e^r + a \bullet (Z - e^r \mathbf{1}) > 0$$

para todo $a \in A$ y para los cuatro posibles valores de Z. Por lo tanto:

$$-5 < a < 2.5$$

Ya que **A** debe ser un conjunto compacto podemos asumir que **A**$=[-4, 2]$.

Las ecuaciones explicitas de la esperanza condicional $\mu^\theta(x, y, a)$ son

$$\mu^\theta(1,1,a) = e^{-3\ln(1+0.1a)} \quad \mu^\theta(1,2,a) = e^{-3\ln(1-0.3a)}$$
$$\mu^\theta(2,1,a) = e^{-3\ln(1-0.4a)} \quad \mu^\theta(2,2,a) = e^{-3\ln(1+0.2a)}$$

Por lo tanto, la matriz $B^\theta(f)$ es de la forma:

$$B^\theta(f)=\begin{pmatrix} 0.8e^{-3\ln(1+0.1f(1))} & 0.2e^{-3\ln(1-0.3f(1))} \\ 0.3e^{-3\ln(1-0.4f(2))} & 0.7e^{-3\ln(1+0.2f(2))} \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la estrategia óptima implementaremos el algoritmo de iteración descrito en la sección anterior empezando con $g_0 = 1$ y utilizando la función *solver* de la hoja de cálculo Excel.

Tras siete iteraciones, las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a $0.1766$ y $0.0638$ para los estados 1 y 2, respectivamente. El valor de $\Lambda(-3)$ converge a $-0.00546563$, por lo tanto, la tasa de crecimiento esperada $J(-3) = 0 . 00546563$.

**Ejemplo 2:** Para este ejemplo consideremos el portafolio descrito en el ejemplo anterior con $\theta = 0 . 9$.

Calcular la estrategia de inversión óptima para este portafolio.

*Solución*: Definamos el conjunto **A**: de la hipótesis **H.3** inciso 1 tenemos que

$$e^r + a \bullet (Z - e^r \mathbf{1}) > 0$$

$\forall a \in A$ y para los cuatro posibles valores de Z. Por lo tanto:

$$-5 < a < 2 . 5$$

Ya que **A** debe ser un conjunto compacto podemos asumir que **A**$=[-4, 2]$.

Observemos que el conjunto resultante es el mismo que en el ejemplo anterior, esto se debe a que el conjunto **A** no depende del parámetro de riesgo.

Las ecuaciones explicitas de la esperanza condicional $\mu^\theta(x, y, a)$ son

$$\begin{array}{ll} \mu^\theta(1,1,a) = e^{0.9\ln(1+0.1a)} & \mu^\theta(1,2,a) = e^{0.9\ln(1-0.3a)} \\ \mu^\theta(2,1,a) = e^{0.9\ln(1-0.4a)} & \mu^\theta(2,2,a) = e^{0.9\ln(1+0.2a)} \end{array}$$

Por lo tanto, la matriz $B^\theta(f)$ es de la forma:

$$B^\theta(f)=\begin{pmatrix} 0 . 8e^{0.9\ln(1+0.1f(1))} & 0 . 2e^{0.9\ln(1-0.3f(1))} \\ 0 . 3e^{0.9\ln(1-0.4f(2))} & 0{,}7e^{0.9\ln(1+0.2f(2))} \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el ejemplo 1 implementaremos el algoritmo de iteración descrito en la sección anterior empezando con $g_0 = 1$ y utilizando la función *solver* de la hoja de cálculo Excel para encontrar la estrategia óptima.

Tras siete iteraciones, las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a 2 y $1 . 7749$ para los estados 1 y 2, respectivamente. El valor de $\Lambda(0 . 9)$ converge a $0 . 02988145$, por lo tanto, la tasa de crecimiento esperada $J(0 . 9) = 0 . 02988145$.

Observemos que para el mismo portafolio $J(0 . 9) > J(-3)$, esto nos dice que el parámetro de riesgo influye sensiblemente en la tasa esperada de crecimiento. Por lo tanto podemos concluir que la tasa esperada de crecimiento es proporcional al nivel de riesgo que el inversionista este dispuesto a correr.

# Capítulo 3

# Manejo óptimo de rendimientos

A lo largo de este capítulo buscaremos establecer una relación de dualidad entre el problema de maximizar la utilidad esperada del valor de un portafolio y el de maximizar la probabilidad de que la tasa de crecimiento de un portafolio se encuentre por encima de cierto umbral $k$. Esta relación nos permitirá, utilizando los resultados obtenidos en el Capítulo 2, acotar superiormente la probabilidad mencionada y así encontrar la estrategia de inversión que la maximice.

## 3.1. Especificaciones del modelo

A continuación se presentan las características principales del modelo con el cual vamos a trabajar a lo largo de este capítulo, así como un resumen de los elementos introducidos en el Capítulo 2.

- Sea X un **proceso estocástico** que describe la evolución de una clase de factores económicos, el cual se modela como una cadena de Markov estacionaria a tiempo discreto con matriz de probabilidad de transición $Q = Q_{x,y}$ y espacio de estados finito $\aleph$.

- Trabajaremos con m **activos con riesgo** a los cuales asociamos un vector Z, de dimensión m, el cual representa el **vector de precios relativos** durante un período. Aunado a este vector tenemos la distribución de probabilidad condicional *v(x,y,dz)*.

- Incluiremos también una **cuenta bancaria** la cual gana una tasa de interés r constante por período.

- Sea A un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$ cuyos elementos representan los vectores de **acciones admisibles** para los activos con riesgo. Para cada $x \in \aleph$ existe $A(x) \in \mathbf{A}$, no vacío, el cual representa el conjunto de acciones admisibles cuando el proceso de factores económicos X se encuentra en el estado $x$.

- Definimos $\mathbf{K} := \{(x,a) : x \in \aleph, a \in \mathbf{A}\}$ como el conjunto de pares admisibles, $H_0 := \aleph$ y $H_{t+1} := H_t \times \{x_1 \in \aleph \mid P_{x,x_1}(a) > 0, x \in H_t, (x,a) \in \mathbf{K}\}$ para $t = 0, 1, 2, 3, ...$

Diremos que $\pi = \{\pi_t\}$ es una **estrategia de control** si es una sucesión de kernels estocásticos en $\mathbf{A}$ dado $H_t$ que satisface

$$\pi_t(A(x_t)|h_t) = 1$$

para toda $h_t \in H_t$ con $t = 0, 1, 2, 3, ...$

- Denotaremos por $\wp$ al conjunto de políticas o estrategias de inversión. Diremos que $\pi \in \wp$ pertenece al conjunto de **estrategias de Markov** ($\wp_M$) si existe una sucesión de funciones $\{\pi_t\}$ donde $\pi_t : \aleph \to P(A)$, con P(A) el conjunto de medidas de probabilidad en A, tal que, $\pi_t(a)(A(x)) = 1$. Denotaremos por $\wp_{DM}$ al conjunto de **estrategias de Markov deterministas**. Sea $\mathbf{F}$ el conjunto de funciones $f : \aleph \to \mathbf{A}$ tal que $f(x) \in A(x)$ para todo $x \in \aleph$. Diremos que una estrategia $\pi \in \wp_{DM}$ es estacionaria si existe $f \in \mathbf{F}$ tal que $\pi_t(f(x_t)|h_t) = 1$ $\forall h_t \in H_t$ con $t = 0, 1, 2, 3, ...$ Denotaremos esta estrategia como $f \in \mathbf{F}$.
- Definimos el **valor del portafolio a tiempo t**, bajo la estrategia $\pi$ y con estado inicial $X_0 = x$, de la siguiente manera:

$$V_{t+1} := V_t\{e^r + \pi_t \bullet (Z_{t+1} - e^r\mathbf{1})\}$$

donde $\bullet$ representa el producto interno de vectores y $\mathbf{1}$ denota un vector de 1s de dimensión m.
- Sea $\theta \in (-\infty, 1)$ nuestro **parámetro de riesgo**, el cual representa la actitud del inversionista con respecto al riesgo.

Ahora que conocemos las características más importantes del modelo, definiremos el problema que nos interesa resolver.

## 3.2. Planteamiento del problema

El problema de minimizar las pérdidas de un portafolio de inversión, para un horizonte de tiempo finito T, consiste en

$$\min_{\pi\in\wp} P[V_T^\pi \leqslant k], \tag{3.1}$$

donde k representa un objetivo fijado por el inversionista. En vista de que nuestro propósito es trabajar con un horizonte de tiempo T grande, la variable de nuestro estudio será la tasa de crecimiento del portafolio, la cual definimos como:

$$L_T^\pi = \frac{\ln V_T^\pi}{T}. \tag{3.2}$$

Una vez definida $L_T^\pi$, podemos escribir (3.1) de la siguiente manera:

$$\inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} P[L_T^\pi \leqslant k]. \tag{3.3}$$

Además, nos interesa estudiar (3.3) para valores de $k$ tales que $P[L_T^\pi \leqslant k]$ es pequeña, es decir, estamos tratando con un evento de rara ocurrencia. Desde el punto de vista del inversionista la ocurrencia de este tipo de eventos no le es favorable, ya que implica pérdidas significativas. La teoría para grandes desviaciones es la encargada de estudiar este tipo de eventos. Cuando se considera un evento de rara ocurrencia nos referimos a eventos para los cuales $\frac{1}{T}lnP[A]$ es de tamaño moderado cuando $T \to \infty$.

Considerando lo anterior, podemos expresar (3.3) de la siguiente manera:

$$\inf_{\pi \in \wp} \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi \leqslant k]. \tag{3.4}$$

Por otra parte, sabemos que

$$P[L_T^\pi \leqslant k] = 1 - P[L_T^\pi > k],$$

por lo tanto

$$\inf_{\pi \in \wp} P[L_T^\pi \leqslant k] \tag{3.5}$$

es equivalente a

$$\sup_{\pi \in \wp} P[L_T^\pi > k]. \tag{3.6}$$

De lo anterior podemos concluir que:

$$\inf_{\pi \in \wp} \liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi \leqslant k]$$

es equivalente a:

$$\sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > k]. \tag{3.7}$$

En las siguientes páginas de este capítulo desarrollaremos una metodología que nos permitirá acotar la probabilidad expresada en (3.7) y posteriormente encontrar la estrategia de inversión que nos permita maximizar el valor de esta cota. Para esto estableceremos una relación dual entre (3.7) y el problema de maximizar la utilidad del valor esperado de un portafolio de inversión sensible al riesgo, es decir, probaremos que para cada $k > 0$ existe $0 < \theta_k < 1$ tal que la estrategia que maximiza la esperanza de la utilidad a largo plazo con parámetro de riesgo $\theta = \theta_k$ es la estrategia que nos permite maximizar la cota superior de (3.7).

Lo anterior es equivalente a afirmar que la estrategia que debe seguir un inversionista que quiera maximizar la cota superior de la probabilidad de que la tasa que genere su portafolio esté por encima de cierta tasa $k$ es la misma estrategia que debe seguir un inversionista, cuyo parámetro de riesgo es $\theta_k$, al buscar maximizar la utilidad esperada de su portafolio.

## 3.3. Resultados Principales

En el capítulo anterior se presentó un modelo que permite maximizar la utilidad esperada del valor de un portafolio de inversión. Este modelo nos permite resolver, a través de algoritmos de programación dinámica, el siguiente problema:

$$\Lambda(\theta) = \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]. \tag{3.8}$$

Los resultados presentados a continuación nos permitirán relacionar el problema de maximizar la utilidad esperada de un portafolio de inversión cuando el parámetro de riesgo está en el intervalo $(0,1)$ con el problema de maximizar la cota superior de (3.7). Con esto se pretende encontrar una estrategia óptima (o cercana a la óptima) para este último, partiendo de los resultados obtenidos en el Capítulo 2.

**Nota 3.1:** Para facilitar las demostraciones que se presentan a continuación es necesario tener en cuenta lo siguiente:

1. Algunas propiedades aritméticas de los **límites** que se presentan en [10] son:
$$\limsup_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) \leq \limsup_{x\to\infty}(f(x)) + \limsup_{x\to\infty}(g(x))$$
$$\liminf_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) \geq \liminf_{x\to\infty}(f(x)) + \liminf_{x\to\infty}(g(x))$$
$$\limsup(-f(x)) = -\liminf(f(x)).$$

2. Algunas propiedades aritméticas de **ínfimos y supremos** que se presentan en [10] son:
$$\sup_{x\in X}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in X}(f(x)) + \sup_{x\in X}(g(x))$$
$$\sup_{x\in X}(-f(x)) = -\inf_{x\in X}(f(x)).$$

3. Sea $(X,\Im,\mu)$ un espacio de medida y sea $p \geq 1$, $q \leq \infty$ con $1/p + 1/q = 1$. Entonces, para toda función medible de valores reales o complejos f y g sobre X, la **desigualdad de Hölder** establece que:
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

4. Sea X una variable aleatoria, entonces, para toda $\varepsilon \in \mathbb{R}$ la **desigualdad de Chebyshev** establece que
$$P[X > \varepsilon] \leq e^{-\varepsilon t} E[e^{tX}] \text{ con } t > 0.$$

**Lema 3.1**: La función $\Lambda$ definida en (3.8) es convexa en $\theta \in (0,1)$.

*Demostración.* Para $\pi \in \wp$ fija, probaremos que para cualesquiera $\alpha,\beta \in (0,1)$ y para todo $\varepsilon \in (0,1)$ se cumple que
$$\Lambda(\varepsilon\alpha + (1-\varepsilon)\beta, \pi) \leq \varepsilon\Lambda(\alpha,\pi) + (1-\varepsilon)\Lambda(\beta,\pi).$$

Sean $f = [V_t^\pi]^{\varepsilon\alpha}$, $g = [V_t^\pi]^{(1-\varepsilon)\beta}$, $p = \dfrac{1}{\varepsilon}$ y $q = \dfrac{1}{1-\varepsilon}$, entonces, la desigualdad de Hölder nos dice que:
$$E_x^\pi[(V_t^\pi)^{\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta}] \leq \{E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha]\}^\varepsilon \{E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta]\}^{(1-\varepsilon)}.$$

Aplicando el logaritmo natural en ambos lados de la desigualdad tenemos que
$$\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^{\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta}] \leq \varepsilon \ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha] + (1-\varepsilon)\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta],$$

y dividiendo entre T,
$$\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^{\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta}] \leq \frac{1}{T}\varepsilon \ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha] + \frac{1}{T}(1-\varepsilon)\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta].$$

Tomando ahora el $\limsup_{T\to\infty}$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^{\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta}]\leq\limsup_{T\to\infty}\Big\{\frac{1}{T}\varepsilon\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha]+\frac{1}{T}(1-\varepsilon)\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta]\Big\}.$$

Recordemos que:

$$\limsup_{T\to\infty}\Big\{\frac{1}{T}\varepsilon\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha]+\frac{1}{T}(1-\varepsilon)\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta]\Big\}$$

$$\leq\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\varepsilon\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha]+\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}(1-\varepsilon)\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta],$$

por lo tanto

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^{\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta}]\leq\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\varepsilon\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\alpha]+\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}(1-\varepsilon)\ln E_x^\pi[(V_t^\pi)^\beta]. \tag{3.9}$$

Observemos que

$$\Lambda(\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta,\pi)=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{[\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta]\ln V_T^\pi}]=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[(V_T^\pi)^{\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta}],$$

$$\Lambda(\alpha,\pi)=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\alpha\ln V_T^\pi}]=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[(V_T^\pi)^\alpha],$$

$$\Lambda(\beta,\pi)=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\beta\ln V_T^\pi}]=\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[(V_T^\pi)^\beta].$$

Por lo tanto podemos escribir (3.9) de la siguiente manera

$$\Lambda(\varepsilon\alpha+(1-\varepsilon)\beta,\pi)\leq\varepsilon\Lambda(\alpha,\pi)+(1-\varepsilon)\Lambda(\beta,\pi). \tag{3.10}$$

Ya que $\pi$ fue escogida arbitrariamente podemos afirmar que este resultado se cumple para toda $\pi\in\wp$.

□

**Transformada de Fenchel-Legendre**. Dada $\pi\in\wp$ fija, la transformada de Fenchel-Legendre [14] de $\Lambda:(0,1)\to\mathbb{R}$ está definida, para toda $k>0$, por

$$\Lambda^*(k,\pi):=\sup_{\theta\in(0,1)}\{\theta k-\Lambda(\theta,\pi)\}. \tag{3.11}$$

**Corolario 3.1**: $\Lambda^*$ es una función convexa.

*Demostración.* Sabemos de [14] que si $\Lambda$ es una función convexa, entonces, la transformada de Fenchel-Legendre de $\Lambda$, $\Lambda^*$, es una función convexa. Del Teorema (3.1) tenemos que $\Lambda$ es una función convexa, por lo tanto, $\Lambda^*$ es convexa.

□

Con la intención de darle sentido a los resultados presentados a continuación introduciremos la siguiente hipótesis:

**Hipótesis H.5**

1. Suponemos que existe $\theta_k$ tal que

$$\theta_k k - \Lambda(\theta_k, \pi^*) = \sup_{\theta \in (0,1)} \{\theta k - \Lambda(\theta, \pi^*)\}$$

donde $\pi^*$ es la estrategia de inversión óptima para $\Lambda(\theta_k)$.

El siguiente teorema nos permite relacionar el problema de maximizar la utilidad esperada de un portafolio de inversión sensible al riesgo con el problema de maximizar la cota superior de la probabilidad expresada en (3.7). A través de esta relación es posible calcular la estrategia de inversión que maximiza esta cota.

**Teorema 3.1**: Dada $k > 0$ fija

$$\sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > k] \leq -\Lambda^*(k, \pi^*). \tag{3.12}$$

*Demostración.* Para $k \in (0,1)$ y $\pi \in \wp$ fijas, tenemos que

$$P[L_T^\pi > k] = P[T^{-1} \ln V_T^\pi > k] = P[lnV_T^\pi > Tk].$$

Por otro lado, desigualdad de Chebyshev establece que

$$P[X > \varepsilon] \leq e^{-\varepsilon t} E[e^{tX}], \text{ con } t > 0.$$

Aplicando este resultado a $L_T^\pi$, con $t = \theta T$ y $\varepsilon = k$, obtenemos la siguiente relación

$$P[L_T^\pi > k] \leq e^{-\theta T k} E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}], \text{ con } \theta \in (0,1).$$

Al aplicar el logaritmo natural en ambos lados de la desigualdad tenemos que, con $\theta \in (0,1)$

$$\ln P[L_T^\pi > k] \leq -\theta T k + \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}] \tag{3.13}$$

y dividiendo entre T,

$$\frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > k] \leq -\theta k + \frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}], \text{ con } \theta \in (0,1).$$

Tomando ahora el $\limsup_{T \to \infty}$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > k] \leq \limsup_{T \to \infty} \Big( -\theta k + \frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}] \Big),$$

con $\theta \in (0,1)$. Note que $\theta k$ no depende de T, entonces podemos reescribir la desigualdad de la siguiente manera:

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > k] \leq -\theta k + \limsup_{T \to \infty} \Big( \frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}] \Big).$$

Sabemos que ambas ecuaciones están bien definidas para toda $\pi \in \wp$, por lo tanto podemos maximizar sobre $\pi$

$$\sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > k] \leq \sup_{\pi \in \wp} \Big( -\theta k + \limsup_{T \to \infty} \Big( \frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}] \Big) \Big).$$

Como $\theta k$ no depende de $\pi$, la desigualdad anterior se puede escribir como

$$\sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P[L_T^\pi > k] \le -\theta k + \sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta\ln V_T^\pi}]\right).$$

Ya que la ecuación $-\theta k + \sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta\ln V_T^\pi}]\right)$ está bien definida para $\theta \in (0,1)$, podemos minimizar esta expresión con respecto a $\theta$. Observemos que el lado izquierdo de la desigualdad es independiente de $\theta$, por lo cual

$$\sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P[L_T^\pi > k] \le \inf_{\theta\in(0,1)}\left(-\theta k + \sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta\ln V_T^\pi}]\right)\right).$$

La ecuación anterior es equivalente a

$$\sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P[L_T^\pi > k] \le -\sup_{\theta\in(0,1)}\left(\theta k - \sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta\ln V_T^\pi}]\right)\right).$$

Observemos que

$$\Lambda(\theta,\pi^*) = \sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta\ln V_T^\pi}]\right),$$

por lo tanto

$$\sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P[L_T^\pi > k] \le -\sup_{\theta\in(0,1)}(\theta k - \Lambda(\theta,\pi^*)),$$

y usando H.5,

$$\sup_{\pi\in\wp}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P[L_T^\pi > k] \le -\Lambda^*(k,\pi^*).$$

□

Ahora que conocemos estos resultados, estudiaremos sus aplicaciones prácticas, en los casos específicos del VaR y los Fondos de Pensiones.

## 3.4. Aplicaciones al VaR

Definamos la función de pérdida de la siguiente manera:

$$L_T^\pi := \frac{\ln V_T^\pi}{T}.$$

Considerando un horizonte de tiempo a largo plazo y dado cierto nivel de confianza $\alpha \in (0,1)$ fijo nuestro objetivo consiste en encontrar $l$ tal que

$$\inf_{\pi\in\wp}\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln P[L_T^\pi > l] < \ln(1-\alpha).$$

Empecemos considerando lo siguiente:

De la ecuación (3.13) tenemos que, con $\theta \in (0,1)$:

$$\ln P[L_T^\pi > k] \leq -\theta T k + \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]$$

Tomando ahora el $\liminf_{T\to\infty}$ en ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > l] \leq \liminf_{T\to\infty} \Big( -\theta l + \frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]\Big),$$

con $\theta \in (0,1)$. Note que $\theta l$ no depende de T, entonces podemos reescribir la desigualdad de la siguiente manera:

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > l] \leq -\theta l + \liminf_{T\to\infty} \Big(\frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]\Big).$$

Sabemos que ambas ecuaciones están bien definidas para toda $\pi \in \wp$, por lo tanto podemos minimizar sobre $\pi$

$$\inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > l] \leq \inf_{\pi\in\wp} \Big( -\theta l + \liminf_{T\to\infty} \Big(\frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]\Big)\Big),$$

notando que $\theta k$ no depende de $\pi$, la desigualdad anterior se puede escribir como

$$\inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > l] \leq -\theta l + \inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} \Big(\frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]\Big).$$

Ya que la ecuación $-\theta l + \inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} \Big(\frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]\Big)$ está bien definida para $\theta \in (0,1)$ entonces podemos minimizar esta expresión con respecto a $\theta$. Observemos que el lado izquierdo de la desigualdad es independiente de $\theta$, por lo tanto

$$\inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^\pi > l] \leq \inf_{\theta\in(0,1)} \Big( -\theta l + \inf_{\pi\in\wp} \liminf_{T\to\infty} \Big(\frac{1}{T} \ln E_x^\pi[e^{\theta \ln V_T^\pi}]\Big)\Big).$$

Ahora que logramos construir una metodología que nos permite calcular el VaR en un horizonte de tiempo a largo plazo presentaremos un ejemplo numérico que nos permita aplicarlo.

Consideremos el portafolio de inversión presentado en el Capítulo 2, el cual cuenta con las siguientes características:

- $\aleph = (1,2)$.
- Hay un activo con riesgo.
- r=0.
- La matriz de probabilidad de transiciones es

$$Q = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

- La distribución de probabilidad condicional asociada al precio de los activos es:

  $v(1,1,1.1) = 1 \quad v(1,2,0.7) = 1$
  $v(2,1,0.6) = 1 \quad v(2,2,1.2) = 1$

  Esto es, si el precio inicial es S, entonces después de un período el precio puede ser $1.1S, 0.7S, 0.6S$, ó $1.2S$.

Haciendo uso de la metodología desarrollada en el Capítulo 2 y de la función *solver* de la hoja de cálculo Excel se calculó el $VaR_\alpha$ para distintos valores de $\alpha$. Los resultados obtenidos se presenta a continuación.

**Caso 1:** $\alpha = 0.99$

- $\theta_l = 0.999987585$ es tal que

$$\inf_{\pi\in\wp}\left[\liminf_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta_l \ln V_T^\pi}]\right)\right] - \theta_l l = \ln(0.01).$$

- Las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a $0.3465$ y $0.1268$ para los estados 1 y 2, respectivamente. Estas conforman la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) $\pi^*$.

- $VaR_{0.99} = 4.608823678$.

**Caso 2:** $\alpha = 0.95$

- $\theta_l = 0.999984251$ es tal que

$$\inf_{\pi\in\wp}\left[\liminf_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta_l \ln V_T^\pi}]\right)\right] - \theta_l l = \ln(0.05).$$

- Las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a $0.3465$ y $0.1268$ para los estados 1 y 2, respectivamente. Estas conforman la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) $\pi^*$.

- $VaR_{0.95} = 2.999375568$.

**Caso 3:** $\alpha = 0.90$

- $\theta_l = 0.999984251$ es tal que

$$\inf_{\pi\in\wp}\left[\liminf_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\ln E_x^\pi[e^{\theta_l \ln V_T^\pi}]\right)\right] - \theta_l l = \ln(0.1).$$

- Las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a $0.3465$ y $0.1268$ para los estados 1 y 2, respectivamente. Estas conforman la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) $\pi^*$.

- $VaR_{0.90} = 2.306217744$.

## 3.5. Aplicaciones a fondos de pensiones

Retomemos el Ejemplo 1.1:

Juan contrata un plan de pensión de **contribución definida**. La tasa de contribución es fijada bajo los siguientes supuestos:

1. Las contribuciones mensuales son fijadas como un porcentaje de la tasa de crecimiento salarial.
2. Las contribuciones son invertidas y ganan una tasa de interés del $0.10$ efectiva anual.
3. La escala de crecimiento del salario esta definida por $s_x = 1.045^x$ y el salario crece de manera continua.
4. Juan decide que al momento del retiro contratara una anualidad vitalicia vencida y pagadera anualmente. Se fija el precio de la anualidad en $14.43657$.

Al día de hoy Juan tiene 25 años y tres meses, calculamos la mínima tasa de contribución requerida para obtener una tasa de reemplazo del $0.7$ tomando en cuenta que Juan planea retirarse dentro de 34 años y 6 meses.

Tras realizar algunos cálculos concluimos que la tasa mínima de contribución ascendía a $0.1044$.

También se cálculo la tasa mínima de contribución en caso de que la tasa de interés que ganarán las contribuciones al ser invertidas fuera de 0,08. En este caso la tasa mínima de contribución resulto ser igual a $0.1541$.

Este ejemplo nos muestra lo sensible que es la tasa de contribución a los cambios en la tasa de interés que ganan las contribuciones al ser invertidas.

Ahora supongamos que invertimos las contribuciones en el portafolio descrito en los ejemplo del Capítulo 2, el cual presenta las siguientes características:

- $\aleph = (1, 2)$.
- Hay un activo con riesgo.
- r=0.
- La matriz de probabilidad de transiciones es

$$Q=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

- La distribución de probabilidad condicional asociada al precio de los activos es:
  $v(1,1,1.1) = 1 \quad v(1,2,0.7) = 1$
  $v(2,1,0.6) = 1 \quad v(2,2,1.2) = 1$

  Esto es, si el precio inicial es S, entonces después de un período el precio puede ser $1.1S, 0.7S, 0.6S$, ó $1.2S$.

Calculemos ahora la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) que permita maximizar la probabilidad de que la tasa de rendimiento del portafolio este por encima del $0.1$. Recordemos que las cotizaciones de un fondo de pensiones están invertidas a largo plazo, por lo tanto, podemos hacer uso de los resultados obtenidos en este capítulo.

Sea

$$L_T^{\pi} = \frac{\ln V_T^{\pi}}{T}$$

la tasa de crecimiento de nuestro portafolio, calculemos entonces

$$\sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^{\pi} > 0.1] \leq -\Lambda^*(0.1)$$

donde

$$\Lambda^*(0.1) = \sup_{\theta \in (0,1)} [0.1\theta - \Lambda(\theta)]$$

y

$$\Lambda(\theta) = \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^{\pi}[e^{\theta \ln V_T^{\pi}}].$$

Utilizando la función *solver* de la hoja de cálculo Excel obtenemos los siguientes resultados:

- $\theta_{0.1} = 0.900901872$ es tal que

$$\sup_{\theta \in (0,1)} [0.1\theta - \Lambda(\theta)] = 0.1\theta_{0.1} - \Lambda(\theta_{0.1}).$$

- Las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a $2$ y $1.7840$ para los estados 1 y 2, respectivamente. Estas conforman la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) $\pi^*$.

- $0.1\theta_k - \Lambda(\theta_k) = 0.060128581$ por lo tanto

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^{\pi^*} > 0.1] \leq -0.060128581.$$

  Ya que la ecuación anterior expresa el logaritmo natural de la probabilidad podemos concluir que probabilidad está acotada superiormente por $0.941643448$.

¿ Cómo cambiaría la estrategia de inversión si el rendimiento esperado del portafolio en el cual invertimos las contribuciones fuera $0.08$ ?

Para saber esto es necesario resolver la siguiente ecuación

$$\sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^{\pi} > 0.08] \leq -\Lambda^*(0.08)$$

donde

$$\Lambda^*(0.08) = \sup_{\theta \in (0,1)} [0.08\theta - \Lambda(\theta)]$$

y

$$\Lambda(\theta) = \sup_{\pi \in \wp} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln E_x^{\pi^*}[e^{\theta \ln V_T^{\pi}}].$$

Utilizando la función *solver* de la hoja de cálculo Excel obtenemos los siguientes resultados:

- $\theta_{0.08} = 0.862861676$ es tal que

$$\sup_{\theta \in (0,1)} [0.1\theta - \Lambda(\theta)] = 0.08\theta_{0.08} - \Lambda(\theta_{0.08}).$$

- Las proporciones óptimas obtenidas para el activo con riesgo convergen a 2 y $1.4517$ para los estados 1 y 2, respectivamente. Estas conforman la estrategia de inversión óptima (o cercana a la óptima) $\pi^*$.

- $0.1\theta_k - \Lambda(\theta_k) = 0.042381114$ por lo tanto

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln P[L_T^{\pi^*} > 0.1] \leq -0.042381114.$$

  Ya que la ecuación anterior expresa el logaritmo natural de la probabilidad podemos concluir que nuestra probabilidad está acotada superiormente por $0.958504412$.

Observemos que el parámetro de riesgo $\theta_{0.1} > \theta_{0.08}$, esto nos dice que mientras mayor sea la tasa de crecimiento mínima esperada, mayor será el nivel de riesgo que el inversionista deberá estar dispuesto a correr. Por otro lado, mientras más grande sea la tasa mínima esperada, más pequeña será la probabilidad de que la tasa de crecimiento del portafolio se encuentre por arriba de esta.

# Conclusiones

A lo largo de este trabajo profundizamos en los conceptos y herramientas básicas para la comprensión de los mercados financieros, portafolios de inversión así como algunos aspectos relacionados con el manejo de riesgos. Posteriormente presentamos una metodología para calcular la estrategia de inversión que permite maximizar la utilidad del valor de un portafolio. Finalmente, partiendo de la metodología anterior, pudimos calcular la estrategia que maximiza la cota superior de la probabilidad de mantener la tasa de crecimiento de un portafolio por arriba de cierta tasa fija $k$.

Las siguientes conclusiones son resultado del análisis detallado de cada uno de los temas presentados en los capítulos anteriores:

1. Partiendo de un proceso de Markov controlado podemos desarrollar una metodología que nos permita calcular la estrategia de inversión que maximice la esperanza del valor de un portafolio. Debido a las complicaciones derivadas de los criterios de optimización para tiempo finito y del hecho de que un horizonte de tiempo infinito es muy apropiado para los problemas prácticos de inversión esta metodología fue desarrollada para horizontes de tiempo grandes. Es importante mencionar que esta metodología consiste en un algoritmo de programación dinámica.

2. La tasa esperada de crecimiento del portafolio depende del nivel de riesgo que el inversionista está dispuesto a asumir.

3. Existe una relación dual entre el problema de maximizar la esperanza del valor de un portafolio y el de maximizar la cota superior de la probabilidad de que la tasa de crecimiento del portafolio se encuentre por arriba de cierto umbral. Esta relación establece que la estrategia que debe seguir un inversionista que busca maximizar la cota superior de la probabilidad de que la tasa de crecimiento de su portafolio sea mayor que cierta tasa fija $k > 0$ es a su vez la estrategia que seguirá el inversionista que busca maximizar la esperanza del valor de su portafolio y cuyo parámetro de riesgo es $\theta_k \in (0, 1)$. Se considera que la probabilidad de que la tasa de crecimiento del portafolio este por debajo de $k$ es un evento de rara ocurrencia, por lo que estos resultados están basados en la teoría para grandes desviaciones.

4. La metodología que nos permite calcular la estrategia de inversión que maximiza la cota superior de la probabilidad de que la tasa de crecimiento de un portafolio rebase cierto umbral tiene aplicaciones prácticas en lo relativo al manejo de riesgos. Por un lado nos permite calcular el VaR con cierto grado de confianza $\alpha$ y en horizontes de tiempo grandes. Además podemos

hacer uso de ella para acotar con cierta probabilidad los rendimientos de un fondo de pensiones.

5. La tasa de crecimiento ajustada al riesgo de la utilidad esperada es una función convexa con respecto al parámetro de riesgo $\theta \in (0, 1)$.

# Bibliografía


1. Bielecki T., Hernández D. y Pliska S. (1999), *Risk sensitive control of finite state Markov chains in discrete time, with applications to portfolio management*, Mathematical Methods of Operations Research, Vol. 50, 167-188.

2. Dembo A. y Zeitouni O. (1998), *Large deviations Techniques and Applications*, 2da Ed. Nueva York, USA. Springer.

3. Embrechts P., Klüppelberg C. y Mikosch T. (1997), *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Alemania. Springer.

4. Fabozzi F., Modigliani F. y Jones F. (2009), *Foundations of Financial Markets and Institutions*, 4ta Ed. USA. Prentice Hall.

5. Grossman S. y Zhou Z. (1993), *Optimal investment strategies for controlling drawdowns*, Mathematical Finance, Vol. 3, No. 3, 241-276.

6. Hata H., Nagai H. y Sheu S. (2006), *Asymptotics of the probability minimizing a down-side risk*, The Annals of Applied Probability, Vol. 20, No. 1, 52-89.

7. Hernández D. y Marcus S. (1999), *Existence of Risk-Sensitive Optimal Stationary Policies for Controlled Markov Processes*, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 40, 273-285.

8. Jorion, P. (2007), *Value at risk : the new benchmark for managing financial risk*, 3era Ed. Nueva York, USA. McGraw-Hill.

9. Li J. y Ng A. (2014), *ACTEX MLC Study Manual: Vol II*, USA. ACTEX.

10. Martínez C. y Sanz M. (1992), *Análisis de una variable real*, Barcelona, España. Editorial Reverté.

11. McNeil A., Frey R, y Embrechts P. (2006), *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, USA. Princeton University Press.

12. Pham H. (2003), *A large deviations approach to optimal long term investment*, Finance and Stochastics, Vol. 7, 169-195.

13. Pliska S. (1997), *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, 1era Ed. Massachusetts USA. Blackwell Publishers.

14. Rockafellar R. (1970), *Convex Analysis*, Princeton, New Jersey. Princeton University Press.

15. Seneta E. (1993), *Non-Negative matrices and Markov Chains*, Nueva York, USA. Springer - Verlag.

16. Shreve S. (2004), *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, USA. Springer.