Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

SUBCATEGORÍAS DE CONEXIÓN EN $\mathfrak{Top}$

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

JUAN PABLO FLORES MENDOZA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. CARLOS PRIETO DE CASTRO*

Cd. Universitaria, D.F. 2015

*Con apoyo del proyecto PAPIIT IN108712.

A mis profesores de toda la vida
gracias mamá y papá

Introducción

La intención de esta tesis es desarrollar a profundidad el artículo de "*Categorías de conexión*" de Graciela Salicrup junto con *"Fibraciones y correflexiones"* de la misma autora, finalizando con algunos resultados de los k-espacios de R. M. Vogt.

La tesis se divide en 5 capítulos. El primero trata sobre los elementos básicos de topología y categorías, definiendo espacio topológico y todos los conceptos que se utilizarán a lo largo de la tesis. En el segundo se definen los espacios conexos y se ven algunos resultados que permitirán extender la noción de conexidad a categorías particulares. Además, al final de dicho capítulo, se tratarán los conceptos de reflexividad y correflexividad desde un ámbito particular y se les relacionará con lo visto respecto de los espacios conexos. Posteriormente, en el tercer capítulo, se extenderán las nociones conceptuales de reflexividad y correflexividad a categorías. Uno de los resultados más importantes en dicho capítulo será la caracterización de las categorías correflexivas en $\mathfrak{Top}$. En el cuarto capítulo, haciendo pleno uso de lo anterior, se extiende la noción de conexidad en la categoría $\mathfrak{Top}$ de espacios topológicos, desarrollando el artículo principal; *Categorías de conexión*. Por último, en el quinto capítulo, se desarrollarán algunos resultados de R. M. Vogt y N. E. Steenrod sobre k-espacios y espacios compactamente generados, permitiendo ver algunas razones de por qué es práctico trabajar en las categorías $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ y $\mathcal{CG}$.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo atenderemos las nociones básicas que necesitaremos en lo siguiente. Empezaremos con la definición de espacio métrico, espacio topológico y algunos teoremas sin demostración sobre topología y categorías.[1] No obstante, algunas definiciones básicas serán vistas cuando las necesitemos en el correspondiente capítulo.

1.1. Topología

1.1.1 Definición. Un *espacio métrico* consta de un conjunto X y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, llamada *métrica*, que satisface los siguientes axiomas:

(1) Dados $x, y \in X$, se cumple $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$

(2) Para todo $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$

(3) Para todo $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Este último inciso se conoce como la *desigualdad del triángulo*.

1.1.2 Definición. Sean (X, d) y (Y, d') espacios métricos. Se dice que una función $f : X \to Y$ es *continua en un punto* x de X si dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Se dice que f es *continua* si es continua en todo punto x de X.

1.1.3 Observación. Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subseteq X$. Entonces la restricción $d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ es una métrica en Y. Al espacio Y con esta métrica se le conoce como *subespacio métrico* de X.[2]

1.1.4 Definición. Sea X un conjunto. Una *topología* en X es una familia τ de subconjuntos en X, llamados *abiertos*, tal que cumple lo siguiente

(1) Si $\{U_i\}_{i\in J}$ es una familia de elementos en τ, con J un conjunto arbitrario, entonces $\cup_{i\in J} U_i$ es un elemento en τ.

(2) Si $\{U_i\}_{i\in J}$ es una familia de elementos en τ, con J un conjunto finito, entonces $\cap_{i\in J} U_i$ es un elemento en τ.

[1] Se recomienda revisar [2] para mayor detalle en lo relacionado a topología.

[2] Formalmente, la restricción $f|_Y$ en un subconjunto de X se define como la composición $f \circ i$ donde i es el mapeo inclusión $i : Y \to X$ dado por $i(y) = y$.

En particular, X, que por definición es la intersección de una familia vacía, y $\varnothing$, que por definición es la unión de una familia vacía, están en τ. A la pareja (X, τ) se le denomina *espacio topológico*, el cual denotaremos sólo por X cuando no haya confusión con respecto a la estructura topológica dada por sus abiertos. Al conjunto X lo llamaremos el *conjunto subyacente* del espacio topológico.

Para mayor detalle respecto al tema de espacios métricos y su relación con los espacios topológicos (equivalencia de métricas, topología inducida por una métrica, etc.), así como funciones continuas, véase [3].

1.1.5 Ejemplos. Los siguientes son espacios topológicos.

(1) Un conjunto X con τ el conjunto de todos los subconjuntos de X. A esta topología se le denomina *topología discreta* en X. Al espacio topológico correspondiente se le llama *espacio discreto.*

(2) Un conjunto X con τ el conjunto que consta de X y $\varnothing$. A esta topología se le denomina *topología indiscreta* en X. Al espacio topológico correspondiente se le llama *espacio indiscreto.*

(3) Un conjunto X con τ el conjunto que contiene al conjunto vacío y a todos los subconjuntos de X cuyo complemento es finito. A esta topología se le denomina *topología cofinita* en X. Notemos que si X es finito, entonces τ es la topología discreta.

(4) Un conjunto X con τ el conjunto que contiene al conjunto vacío y a todos los subconjuntos de X cuyo complemento es a lo más numerable. A esta topología se le denomina *topología conumerable* en X. Notemos que si X es a lo más numerable, entonces τ es la topología discreta.

(5) Un espacio métrico X con τ el conjunto $\{U \subseteq X : \text{ para toda } x \in U \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ con } B_\varepsilon(x) \subseteq U\}$ de subconjuntos U de X abiertos, es decir, subconjuntos tales que para todo punto x en U existe una bola de radio mayor a cero que contiene a x y está contenida en U.

1.1.6 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Se dice que una función $f : X \to Y$ es *continua* si para todo abierto $V \subseteq Y$ se cumple que $f^{-1}(V)$ es un abierto de X.

1.1.7 Definición. Sea X un espacio topológico. A cualquier subconjunto de X, digamos Y, con la topología $\sigma = \{U \cap Y : U \text{ es abierto en } X\}$ a la que se le conoce como *topología inducida* o *topología relativa*, lo llamaremos *subespacio topológico* de X.

1.1.8 Teorema. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X. Y está caracterizado por la siguiente propiedad universal. La función inclusión $i : Y \to X$ es continua y toda función $f : Z \to Y$ con Z un espacio topológico es continua si y sólo si $i \circ f : Z \to X$ es continua.*

En un diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & X \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "i\circ f"'] & \end{tikzcd}$$

f es continua si y sólo si $i \circ f$ es continua.

1.1.9 Definición. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Definimos una *vecindad* de x como un conjunto $V \subseteq X$ para el que existe un abierto U en X, tal que $x \in U \subseteq V$.

1.1.10 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Entonces $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si U es vecindad de todos sus puntos.*

1.1.11 Definición. Denotaremos al conjunto de vecindades, de un punto x en un espacio topológico X, como N_x^X y, cuando no haya riesgo de confusión, simplemente como N_x. Al conjunto $N = \{N_x : x \in X\}$ le llamaremos *sistema de vecindades* de la topología de X.

1.1.12 Proposición. *El sistema de vecindades N de la topología de X satisface las siguientes condiciones.*

(1) *Dados $U \in N_x$ y $U \subseteq V$, se tiene que $V \in N_x$.*

(2) *Dados $U_i \in N_x$ con $i \in I$, I finito, se tiene que $\cap_{i \in I} U_i \in N_x$.*

(3) *Si $U \in N_x$, entonces $x \in U$.*

(4) *Si $U \in N_x$, entonces existe $V \in N_x$, tal que $U \in N_y$ para toda $y \in V$.*

1.1.13 Definición. Sea X un conjunto. Para cada $x \in X$, denotaremos por N_x a una familia que satisface (1), (2), (3) y (4) de la proposición anterior. Al conjunto $N = \{N_x : x \in X\}$ le llamaremos *sistema de vecindades* en X.

1.1.14 Teorema. *Sean X un conjunto y N un sistema de vecindades en X. Entonces, existe una única topología en X que tiene precisamente a N como el sistema de vecindades de ella.*

1.1.15 Definición. Sean X un espacio topológico y $x \in X$.

(1) Decimos que x es un *punto de contacto* de un conjunto $A \subseteq X$ si para toda vecindad V de x, la intersección de V con A es no vacía. Al conjunto

$$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ es un punto de contacto de } A\}$$

se le llama la *cerradura* de A.

(2) Un subconjunto A de X se dice que es *cerrado* si $A = \overline{A}$. Así, A es cerrado si y sólo si $X \setminus A$ es abierto.

1.1.16 Teorema. *Sea X un espacio topológico. Entonces, la familia $\mathcal{C}$ de los conjuntos cerrados de X satisface lo siguiente.*

(1) *Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos en $\mathcal{C}$, con I un conjunto arbitrario, entonces $\cap_{i \in I} U_i$ es un elemento en $\mathcal{C}$.*

(2) *Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos en $\mathcal{C}$, con I un conjunto finito, entonces $\cup_{i \in I} U_i$ es un elemento en $\mathcal{C}$.*

1.1.17 Teorema. *Sean X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X que satisface* (1) *y* (2) *del teorema anterior. Entonces, existe una única topología en X para la cual $\mathcal{C}$ es exactamente la familia de los subconjuntos cerrados.*

1.1.18 Teorema. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces, la función f es continua si y sólo si la imagen inversa de subconjuntos cerrados de Y bajo f es cerrada.*

1.1.19 Definición. Sea X un espacio topológico. Una familia β de conjuntos abiertos en X se denomina *base* de (la topología de) X, si todo abierto en X se puede expresar como unión de elementos de β. A los elementos de β se les llama *abiertos básicos*.

1.1.20 Observación. Para un espacio topológico X, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) β es base de la topología de X

(2) Para todo abierto U en X y para todo $x \in U$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$.

1.1.21 Proposición. *Sea β una base del espacio topológico Y. Entonces, la función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f^{-1}(B)$ es abierto para todo $B \in \beta$.*

1.1.22 Ejemplos. (1) $\mathbb{R}$ con la topología usual[3] tiene como base a la familia de intervalos abiertos (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) En $\mathbb{R}^n$ la familia $\{B_{\frac{1}{n}}(q) : n \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Q}^n\}$ es una base (numerable) para la topología usual.

1.1.23 Definición. Sean X un espacio topológico y γ una familia de subconjuntos de X. Decimos que γ es una *subbase* de la topología de X si la familia $B = \{\cap_{i\in F} U_i : U_i \in \gamma$ y F es finito$\}$ es una base para dicha topología.

1.1.24 Ejemplos. En el espacio $\mathbb{R}$ con la topología usual, la familia $\gamma = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ donde $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ y $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$, es una subbase para la topología usual.

1.1.25 Definición. Sea X un espacio topológico. Una familia β_x, de vecindades de $x \in X$, se denomina *base de vecindades* de x si, dada cualquier vecindad U de x, existe $V \in \beta_x$ tal que $x \in V \subseteq U$. A los elementos de β_x se les conoce como *vecindades básicas* de x.

1.1.26 Ejemplos. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Entonces las siguientes son bases de vecindades para x.

(1) $\beta_x = \{V : V$ es vecindad de x en $X\}$.

(2) $\beta_x = \{U : x \in U$ y U es abierto en $X\}$.

(3) $\beta_x = \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\}$, si X es un espacio métrico y $B_\varepsilon(x) = \{z \in X : d(z, x) < \varepsilon\}$. Incluso, la familia $\beta'_x = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de vecindades de X.

1.1.27 Definición. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que X es continua en un punto x de X, si para cada vecindad V de $f(x)$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x.

1.1.28 Definición. Una función f es *continua* si y sólo f es continua para todo $x \in X$.

De aquí en adelante, si no se especifica lo contrario, la palabra **aplicación** se referirá a una función continua.

1.1.29 Observación. Para espacios topológicos metrizables[4] ambas definiciones de continuidad son equivalentes.

[3] La topología usual de $\mathbb{R}$ es la topología generada por las bolas abiertas en $\mathbb{R}$, esto es, intervalos abiertos de la forma (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$.

[4] Un espacios topológico (X, τ) es metrizable si existe una métrica d para X tal que el conjunto formado por las bolas abiertas en X es una base para la topología τ.

1.1.30 Teorema. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función continua en x y $g : Y \to Z$ continua en $f(x)$. Entonces, la composición $g \circ f : X \to Z$ es continua en x. Consecuentemente, si f y g son continuas, entonces también lo es $g \circ f$.*

1.1.31 Teorema. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(1) *f es continua.*

(2) *Para todo abierto U en Y, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.*

(3) *Para todo subconjunto A de X, se cumple $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(4) *Para todo cerrado B en Y, $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

1.1.32 Teorema. *Sean X un espacio topológico y γ una subbase de su topología. Entonces $f : Y \to X$ es continua si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto para todo $U \in \gamma$.*

1.1.33 Definición. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es un *homeomorfismo* si es continua, biyectiva y su inversa, $f^{-1} : Y \to X$, también es continua. Si existe un tal homeomorfismo, se dice que los espacios X y Y son *homeomorfos.*

1.1.34 Teorema. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *f es un homeomorfismo.*

(2) *f es biyectiva y $f(U)$ es abierto en Y si y sólo si U es abierto en X.*

(3) *f es biyectiva y $f(C)$ es cerrado en Y si y sólo si C es cerrado en X.*

El inciso (2) anterior afirma que f establece una biyección entre los elementos de X y de Y y también entre los abiertos de uno y del otro. Es por ello que un homeomorfismo establece una equivalencia entre las estructuras de dos espacios topológicos.

1.1.35 Ejemplos. (1) La función identidad de un espacio topológico X en sí mismo, $1_X : X \to X$, es un homeomorfismo.

(2) Toda translación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, digamos $f(x) = x_0 + x$ con $x_0 \in \mathbb{R}^n$, es un homeomorfismo.

1.1.36 Definición. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que A es *denso* en X si $\overline{A} = X$. A un espacio X se le llama *separable* si contiene algún subconjunto denso numerable.

1.1.37 Ejemplo. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un espacio separable.

Los siguientes dos teoremas son importantes, ya que es frecuente tener funciones definidas por pedazos, es decir, que están dadas por fórmulas distintas en distintas porciones del dominio. Estos resultados, dan criterios para ver cuándo estas funciones resultan ser continuas.

1.1.38 Teorema. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos cerrados de X tales que $X = \cup_{i=1}^{n} A_i$. Entonces, una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f_i = f|_{A_i}$ es continua para toda $i = 1, \ldots, n$.*

1.1.39 Teorema. *Sea $\{A_j : j \in J\}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tales que $X = \cup_{j \in J} A_j$. Entonces, una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f_j = f|_{A_j}$ es continua para toda $j \in J$.*

1.1.40 Definición. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función (suprayectiva)[5]. La topología para Y dada de la siguiente manera: U es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en X, recibe el nombre de *topología de identificación* inducida por f. A f se le llama *identificación*.

La terminología se justifica pensando que la aplicación f "identifica" en un solo punto a todos aquellos puntos que tienen la misma imagen.

1.1.41 Teorema. *Sean X, Y, Z espacios topológicos y $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funciones suprayectivas. Supongamos que f es una identificación. Entonces*

(1) *g es continua si y sólo si $g \circ f$ es continua.*

(2) *Si g es una identificación entonces $g \circ f$ es una identificación.*

1.1.42 Definición. Sean X un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. A $X' := X/\sim$ con la topología de identificación, dada por la función canónica $p : X \to X/\sim$ se le llama *espacio cociente* de X bajo la relación $\sim$. También se dice que X' tiene la topología cociente.

1.1.43 Teorema. *Sea $f : X \to X'$ una identificación. Si se define una relación de equivalencia en X, tal que $x \sim x'$ si y sólo si $f(x) = f(x')$, entonces f determina un homeomorfismo $\overline{f} : X/\sim \to X'$.*

1.1.44 Ejemplos. (1) Sean $X = I$ el intervalo $[0, 1]$ y $Y = \mathbb{S}^1$. Si $f : X \to Y$ es la función exponencial $f(t) = e^{2\pi i s}$, entonces f es una identificación que identifica 0 con 1 en I.[6]

(2) Sean $X = \mathbb{R}$ y $Y = \mathbb{S}^1$. Si $f : X \to Y$ es la función exponencial $f(t) = e^{2\pi i s}$, entonces f es una identificación, tal que $f(s) = f(t)$ si y sólo si $t - s \in \mathbb{Z}$.

1.1.45 Teorema. *Sea $p : X \to X'$ una aplicación. Entonces, p es una identificación si y sólo si cada vez que se tenga una aplicación $f : X \to Y$, tal que si $p(x) = p(z)$ entonces $f(x) = f(z)$ con $x, z \in X$, existe una única aplicación $\bar{f} : X' \to Y$, tal que $\bar{f} \circ p = f$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ X' \arrow[ur, dotted, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

1.1.46 Definición. Sea $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es *abierta* si para todo $U \subseteq X$ abierto, se tiene que $f(U)$ es abierto en Y. Análogamente, se dice que f es cerrada si manda conjuntos cerrados de X en conjuntos cerrados en Y.

1.1.47 Teorema. *Si $f : X \to Y$ es continua, suprayectiva y abierta (o cerrada), entonces f es una identificación.*

Las siguientes definiciones constituyen la parte de productos y coproductos topológicos. Dichas definiciones serán utilizadas a lo largo de los tres capítulos siguientes, por lo que será de gran importancia conocer las proposiciones y teoremas siguientes. Para mayor detalle, se recomienda revisar [1].

---

[5] Si $y \notin f(X)$, entonces $f^{-1}\{y\} = \varnothing$. Es decir, $Y \setminus f(X)$ es discreto, por lo tanto conviene pedir que f sea suprayectiva.

[6] El conjunto $\mathbb{S}^1$ está definido como $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

1.1.48 Definición. Una *fuente de funciones* es una clase de funciones con dominio común $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$, donde I no es necesariamente un conjunto.

1.1.49 Proposición. *Si $\{f_i : (X,\tau) \to (Y_i,\sigma_i)\}_{i\in I}$ es una fuente de funciones entre espacios topológicos, entonces son equivalentes*:

(1) *τ es inicial respecto a $(f_i,\sigma_i)_{i\in I}$, es decir, $\tau = inf\{\alpha|\alpha$ es topología en X y f_i es continua para toda $i \in I\}$*[7].

(2) *$S = \{f_i^{-1}(U) : i \in I$ y U es abierto de $Y_i\}$ es una subbase de X.*

(3) *Si para toda $i \in I$, γ_i es una subbase de Y_i, entonces $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\gamma_i)$ es una subbase de X.*

(4) *Para toda $i \in I$, f_i es continua y si $g : Z \to X$ es una función tal que $f_i \circ g$ es continua para toda i, entonces g es continua.*

(5) *Para toda $i \in I$, f_i es continua y si el siguiente diagrama conmuta*:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "h"'] & & Y_i \\ & Z \arrow[ur, "g_i"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $g_i \circ h = f_i$ para todo i, con h biyectiva y continua y g_i continua, entonces h es un homeomorfismo.

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) Probemos el siguiente

1.1.50 Lema. *Si X es un conjunto y γ es una familia de subconjuntos de X, entonces γ es subbase de τ_0, donde $\tau_0 = \inf\{\tau : \tau$ es topología en X y $\gamma \subseteq \tau\}$.* En tal caso, τ_0 recibe el nombre de *topología generada por γ*.

Prueba. Sea $\gamma = \{G_i\}_{i\in I}$. Veamos que el conjunto $B = \{\bigcap_J G_j : J \subseteq I$ es finito $\}$ es una base para una topología σ. Primero, notemos que si $J = \varnothing$ entonces $\cap_J G_j$ es el conjunto X y por lo tanto todo elemento de X está contenido en al menos uno de B. Ahora, si $x \in A \cap A'$ con $A, A' \in B$, digamos $A := \bigcap_{J'} G_j$ y $A' := \bigcap_{J''} G_k$, podemos reetiquetar cada G_j y G_k tal que $A \cap A' = \bigcap_J (G_t)$ y por lo tanto, $A \cap A'$ sería un elemento de B, lo cual implica que B es base para una topología σ.

Veamos que $\tau_0 = \sigma$. Dado que $\gamma \subseteq \sigma$, se tiene que $\tau_0 \subseteq \sigma$ por ser τ_0 el ínfimo. Por otro lado, como τ_0 es topología y contiene a γ, se tiene la contención $B \subseteq \tau_0$, pero todo abierto de σ es una unión arbitraria de elementos de B, por lo tanto $\sigma \subseteq \tau_0$. Concluyendo que $\tau_0 = \sigma$.

Ahora, dado que

$$\tau = \inf\{\alpha : \alpha \text{ es topología en } X \text{ y } f_i : (X,\tau) \to (Y_i,\sigma_i) \text{ es continua para toda } i \in I\}$$

es igual a

$$\tau = \inf\{\alpha : \alpha \text{ es topología en } X \text{ y } \bigcup f_i^{-1}(\sigma_i) \subseteq \alpha\}$$

por el lema anterior, se tiene que S es subbase.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dado que cualquier elemento de σ se puede escribir como uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de γ_i, se tiene que $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\gamma_i)$ es subbase de τ.

[7]Nótese que una forma de ver al ínfimo de una familia de topologías $\{\tau_i\}_{i\in I}$, es mediante la intersección $\cap_{i\in I}\tau_i$. Claramente $\cap_{i\in I}\tau_i$ es una topología.

(3) $\Rightarrow$ (4) Basta ver que g es continua para un subbásico de X. Sea $A \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\gamma_i)$. Entonces $A = f_j^{-1}(U)$ con $U \in \gamma_j$ y por lo tanto $g^{-1}(A) = g^{-1}(f_j^{-1}(U))$ que es un abierto en Z por hipótesis.

(4) $\Rightarrow$ (5) Tomemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "g_i"] \arrow[dr, "h^{-1}"'] & & Y_i \\ & X \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

es decir, $g_i = f_i \circ h^{-1}$. Por hipótesis g_i es continua. Entonces $f_i \circ h^{-1}$ es continua para toda $i \in I$ y, por (4), se tiene que h^{-1} es continua. Por lo tanto h es un homeomorfismo.

(5) $\Rightarrow$ (1) Sea τ' la topología inicial en X respecto de $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$. Entonces τ' está contenida en τ, es decir, $(X, \tau) \xrightarrow{1_X} (X, \tau')$ es continua. Además, conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "1_X"'] & & Y_i \\ & X \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

y dado que 1_X es biyectiva y continua, concluimos que es un homeomorfismo. $\square$

1.1.51 Ejemplos. (1) Si $(Y_i, \sigma_i)_{i\in I}$ es una clase espacios topológicos y $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente tal que f_i es constante para toda $i \in I$, entonces la topología inicial de X respecto a $(f_i, \sigma_i)_{i\in I}$ es la indiscreta.

(2) Sea S el espacio de Sierpinski, esto es, el conjunto $\{0,1\}$ con la topología $\sigma := \{\{0,1\}, \{0\}, \varnothing\}$. Sea X un conjunto y, para toda $x \in X$, una función $f_x : X \to S$ tal que $f_x(y) = 1$ si $x = y$, $f_x(y) = 0$ si $x \neq y$. Entonces, la topología inicial de X respecto a $(f_x, \sigma)_{x\in X}$ es la topología cofinita.

1.1.52 Definición. Sea $(X_k)_{k\in K}$ una familia de conjuntos. El conjunto

$$\prod_{k\in K} X_k := \{x : K \to \cup_{k\in K} X_k : x(k) \in X_k \text{ para toda } k \in K\}$$

se llama *producto cartesiano de* $(X_k)_{k\in K}$. El elemento $x(k)$ recibe el nombre de *k-ésima coordenada* de x y se denota por x_k. Para toda $k \in K$, la función $p_k : \prod_{k\in K} X_k \to X_k$ tal que $p_k(x) = x_k$ para toda $x \in \prod_{k\in K} X_k$, recibe el nombre de *k-ésima proyección* del producto.

1.1.53 Definición. Sea $F = \{(X_k, \tau_k)\}_{k\in K}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos la fuente de funciones $\{p_k : \prod_{k\in K} X_k \to (X_k, \tau_k)\}_{k\in K}$ y sea τ la topología inicial de $\prod_{k\in K} X_k$ respecto a $(p_k, \tau_k)_{k\in K}$. Definiremos al espacio topológico $(\prod_{k\in K} X_k, \tau)$ como el *producto topológico de F*.

1.1.54 Teorema. *El producto topológico $\prod_{k\in K} X_k$, junto con sus proyecciones $p_k : \prod_{k\in K} X_k \to X_k$, está caracterizado por la siguiente propiedad universal*:

Para toda familia $\{f_k : Y \to X_k\}_{k\in K}$ de aplicaciones, existe una única aplicación $f : Y \to \prod_{k\in K} X_k$ tal que $p_k \circ f = f_k$ para toda $k \in K$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "f_k"] \\ \prod_{k\in K} X_k \arrow[r, "p_k"'] & X_k \end{tikzcd}$$

De forma dual, a lo visto para el caso de producto, tenemos las siguientes definiciones para el caso del coproducto.

1.1.55 Definición. Un *pozo de funciones* es una clase de funciones con contradominio común $(f_i : Y_i \to X)_{i\in I}$, donde I no es necesariamente un conjunto.

El siguiente resultado es dual al que acabamos de probar, así que omitiremos su prueba.

1.1.56 Proposición. *Si $\{f_i : (Y_i, \sigma_i) \to (X, \tau)\}_{i\in I}$ es un pozo de funciones entre espacios topológicos, con I un conjunto, entonces son equivalentes*:

(1) *τ es final respecto a $(\sigma_i, f_i)_{i\in I}$, es decir, $\tau = \sup\{\alpha : \alpha$ es topología en X y f_i es continua para toda $i \in I\}$* [8] .

(2) *$W \subset X$ es abierto si y sólo si $f_i^{-1}(W)$ es abierto en Y_i para toda $i \in I$*

(3) *$C \subseteq X$ es cerrado en X si y sólo si $f_i^{-1}(C)$ es cerrado en Y_i para toda $i \in I$.*

(4) *Para toda $i \in I$, f_i es continua y si $g : (X, \tau) \to (Z, \tau')$ es una función tal que $g \circ f_i$ es continua para toda i, entonces g es continua.*

(5) *Para toda $i \in I$, f_i es continua y si el siguiente diagrama conmuta*:

$$\begin{tikzcd}
(Y_i, \sigma_i) \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & & (X, \tau) \\
& (Z, \tau') \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

con h biyectiva y continua y g_i continua, entonces h es un homeomorfismo. □

1.1.57 Ejemplos. Si $(f_i : (Y_i, \sigma_i) \to X)_{i\in I}$ es un pozo de funciones constantes, entonces la topología final de X respecto a $(\sigma_i, f_i)_{i\in I}$ es la discreta.

1.1.58 Observación. (1) Sea $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ una fuente de funciones. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ *separa puntos*, es decir, si $x \neq y \in X$ entonces existe $i \in I$ tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$.

(b) $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ es *monofuente*, es decir, para cualesquiera dos funciones $g, h : Z \to X$ tales que $f_i \circ g = f_i \circ h$ para toda $i \in I$ entonces $g = h$.

(2) Sea $\{g_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ un pozo de funciones. Entonces son equivalentes:

(a) $\{g_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ *cubre puntos*, es decir, si $x \in X$ entonces existen $i \in I$ y $y \in Y_i$ tal que $f_i(y) = x$.

(b) $\{g_i : Y_i \to X\}_{i\in I}$ es *epipozo*, es decir, para cualesquiera dos funciones $g, h : X \to Z$ tales que $g \circ f_i = h \circ f_i$ para toda $i \in I$ entonces $g = h$.

[8] Nótese que una forma de ver al supremo de una familia de topologías $\{\tau_i\}_{i\in I}$, es mediante la intersección $\cap_{k\in K}\sigma_k$ donde σ_k es una topología que contiene a la unión de las topologías $\{\tau_i\}_{i\in I}$. Claramente $\cap_{k\in K}\sigma_k$ es una topología.

1.1.59 Definición. (1) Dada una familia de espacios topológicos $\{X_k\}_{k\in K}$, definimos el *coproducto* o *suma topológica* como el conjunto $\coprod_{k\in K} X_k := \bigcup_{k\in K} X_k \times \{k\}$ con la *topología final* con respecto a las inclusiones $i_j : X_j \to \bigcup_{k\in K} X_j \times \{k\}$ dadas por $i_k(x) = (x,k)$, es decir, $A \subseteq \coprod_{k\in K} X_k$ es abierto si y sólo si $i_k^{-1}(A)$ es abierto para todo X_k con $k \in J$. Notemos que a partir de lo anterior, el espacio X_k es abierto y cerrado en $\coprod_{k\in K} X_k$.

(2) Dada una familia de espacio topológicos punteados[9] (X_k, x_k) con $k \in K$, definimos su *cuña* como el espacio cociente

$$\bigvee_{k\in K} X_k = \left(\coprod_{k\in K} X_k)\right)/P,$$

donde P es el subespacio del coproducto formado por todos los puntos base $\{(x_k,k)\}_{k\in K}$ (esta definición será utilizada hasta el capítulo 3).

Notemos que $\bigvee_{k\in K} X_k$ tiene la topología final con respecto a las inclusiones $i'_k = q \circ i_k : X_k \to \bigvee_{k\in K} X_k$, donde q es la aplicación cociente del coproducto a la cuña. Además, el coproducto $i_k : X_k \to \coprod_{k\in J} X_k$ y la cuña $i'_k : X_k \to \bigvee_{k\in J} X_k$ son epipozos (cubren puntos).

1.1.60 Teorema. *El coproducto topológico $\coprod_{k\in K} X_k$, junto con sus inclusiones $i_k : X_k \to \coprod_{k\in K} X_k$, está caracterizado por la siguiente propiedad universal.*

Para toda familia $\{f_k : X_k \to Y\}_{k\in K}$, de aplicaciones, existe una única aplicación $f : \coprod_{k\in K} X_k \to Y$ tal que $f_k = f \circ i_k$ para toda $k \in K$. Esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & Y \\
\coprod_{k\in K} X_k \arrow[ur, dotted, "f"] & X_k \arrow[l, "i_k"] \arrow[u, "f_k"']
\end{tikzcd}$$

1.1.61 Teorema. *Sea X un espacio topológico, tal que $X = \cup_{k\in K} X_k$ con $X_i \cap X_j = \varnothing$ para $i \neq j$. Entonces X es el coproducto de las X_k si y sólo si X_k es abierto en X (si X_k es cerrado, también se cumple el teorema).*

Prueba. Dado que la unión $\cup_{k\in K} X_k$ es una ajena, para probar que X es el coproducto de las X_k, suponiendo que X_k es abierto, basta probar que X tiene la topología del coproducto. Si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $U \cap X_k$ es abierto para toda $k \in K$. Además, si $U \subseteq X$ cumple que $U \cap X_k$ es abierto para toda k. Como $U = \cup_{k\in K}(U \cap X_k)$, se tiene que U es abierto.

Ahora, si X es el coproducto de las X_k, entonces U es abierto en X si y sólo si $U \cap X_k$ es abierto en X_k para toda k. Como $X_i \cap X_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y $X_i \cap X_j = X_i$ si $i = j$, se tiene que X_k es abierto y cerrado en X para toda $k \in K$. □

A continuación veremos las definiciones de espacio compacto, localmente compacto y compactamente generado. Dichas definiciones serán utilizadas, principalmente, en el capítulo 4. De nuevo, se recomienda al lector revisar [2].

1.1.62 Definición. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que $C = \{U_j \subseteq X : j \in J\}$ es una *cubierta* de A en X si $A \subseteq \cup_{j\in J} U_j$. Definimos la cubierta C como *abierta* (o cerrada) si U_j es abierto (o cerrado) para todo $j \in J$. Si $C' \subseteq C$ y C' también es una cubierta, entonces decimos que C' es una *subcubierta* de C.

[9] Un espacio punteado es una pareja (X, x_0) donde X es un espacio topológico y x_0 es un elemento de X llamado punto básico.

1.1.63 Definición. Sea X un espacio topológico tal que toda cubierta abierta de X contiene una subcubierta finita (subcubierta con un número finito de elementos). Entonces decimos que X es un espacio *compacto*.

La siguiente proposición asegura que la propiedad de ser compacto, como subespacio de cualquier espacio topológico X, no depende de cómo yace dicho subespacio dentro de X.

1.1.64 Proposición. *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Entonces A con la topología relativa es un espacio compacto si y sólo si toda cubierta abierta $\{U_j\}_{i\in J}$ de A en X contiene una subcubierta finita.*

1.1.65 Teorema. *Sean X un espacio compacto y $A \subseteq X$. Si A es cerrado, entonces A es compacto.*

1.1.66 Teorema. *Sean X un espacio de Hausdorff*[10] *y $A \subseteq X$. Si A es compacto, entonces es cerrado.*

1.1.67 Teorema. *Sean X un espacio compacto y $f : X \to Y$ una función continua, entonces $f(X)$ es compacto.*

1.1.68 Teorema. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una aplicación. Si X es compacto y Y de Hausdorff, entonces f es cerrada. Más aún, si f es además suprayectiva, entonces f es una identificación.*

1.1.69 Teorema. Sean X un espacio de Hausdorff y F y G subconjuntos compactos ajenos de X. Entonces existen conjuntos abiertos ajenos U y V tal que $F \subseteq U$ y $G \subseteq V$

El siguiente teorema es conocido como *Teorema de Heine-Borel-Lebesgue*

1.1.70 Teorema. *Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

1.1.71 Definición. Un espacio topológico X es *localmente compacto* si para todo $x \in X$ existe $U \in N_x$, tal que U es compacto.

La siguiente definición será utilizada a lo largo del capítulo 3 y principalmente en el capítulo 4, en donde veremos algunas de las razones de por qué es importante estudiar a los espacios compactamente generados.

1.1.72 Definición. Un espacio topológico X es llamado *compactamente generado* si para todo $A \subseteq X$, A es cerrado si y sólo si para todo compacto $C \subseteq X$, $A \cap C$ es cerrado en C.

1.1.73 Definición. (1) Sean X y Y espacios topológicos. Definimos a $\mathfrak{Top}(X,Y) = \{f : f \text{ es una función continua de } X \text{ en } Y\}$ el conjunto de todas la aplicaciones de X en Y.

(2) Sean $H \subseteq \mathfrak{Top}(X,Y)$, $K \subseteq X$ compacto y $Q \subseteq Y$ abierto. Definimos $Q^K := \{f \in H : f(K) \subseteq Q\}$. A la topología en H que tiene como subbase a la colección

$$\{Q^K : K \subseteq X \text{ es compacto y } Q \subseteq Y \text{ es abierto }\}$$

se le llama topología *compacto-abierta* en H.

1.1.74 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Definimos la función *evaluación* $e : \mathfrak{Top}(X,Y) \times X \to Y$ como $e(f,x) = f(x)$.

[10] Un espacio es de Hausdorff si cualesquiera dos puntos se pueden separar por abiertos ajenos. Véase 1.1.76.

1.1.75 Teorema. *La topología compacto-abierta es la topología más gruesa que hace continua a la función evaluación.*[11]

Las últimas definiciones que veremos, con respecto de los prelimares de topología, serán los llamados *axiomas de separación*. Aunque, en la mayoría de los casos, no hablaremos de manera particular o explícita de ellos, serán utilizados a lo largo de cada capítulo. Se recomienda al lector revisar [2] o [3] para mayor detalle.

1.1.76 Definición. Sea X un espacio topológico. Entonces X es

(1) T_0 si, dados $x, x' \in X$ con $x \neq x'$, existe un abierto U en X tal que $x \in U$ y $x' \notin U$.

(2) T_1 si, dados $x, x' \in X$ con $x \neq x'$, existen conjuntos abiertos U y V en X tales que $x \in U$, $x' \notin U$, $x' \in V$ y $x \notin V$.

(3) T_2 o *de Hausdorff* si, dados $x, x' \in X$ con $x \neq x'$, existen conjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $x \in U$ y $x' \in V$.

(4) T_3 si, dados un conjunto cerrado $C \subseteq X$ y un punto $x \in X \setminus C$, existen conjuntos abiertos y ajenos U y V en X tales que $x \in U$ y $C \subseteq V$.

(5) $T_{3\frac{1}{2}}$ si, dados un conjunto cerrado $C \subseteq X$ y un punto $x \in X \setminus C$, existe una aplicación $f : X \to I$ tal que $f(x) = 1$ y $f(C) = \{0\}$.

Nótese que de la definición, se tiene la siguiente cadena de contenciones

$$T_2 \subset T_1 \subset T_0$$

1.1.77 Ejemplos. (1) El espacio de Sierpinski es T_0 pero no T_1.

(2) Un conjunto infinito X con la topología cofinita es T_1 pero no T_2.

(3) $\mathbb{R}$ con la topología σ generada por la siguiente base

$$\beta = \{U = V \setminus C : V \text{ es abierto en } \mathbb{R} \text{ con la topología usual y } C \text{ es numerable}\}$$

es T_2, pues un abierto de la topología usual U se pueden escribir como $U = U \setminus \varnothing$ y cualquiera dos puntos distintos $x, x' \in \mathbb{R}$ se pueden separar por dos intervalos abiertos ajenos mediante $(x - \frac{|x-x'|}{2}, x + \frac{|x-x'|}{2})$ y $(x' - \frac{|x-x'|}{2}, x' + \frac{|x-x'|}{2})$. Sin embargo, $(\mathbb{R}, \sigma)$ no es T_3. Es claro que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es abierto y, por lo tanto, $\mathbb{Q}$ cerrado en $(\mathbb{R}, \sigma)$. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y supongamos que existen $A, B \in \sigma$ tales que $x \in A$ y $\mathbb{Q} \subseteq B$. Como $A \in \sigma$, existe un abierto V de la topología usual de $\mathbb{R}$ y un conjunto numerable C tal que $x \in V \setminus C \subseteq A$, pues β es base. Por estar en la topología usual de $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \in V$. Sea $V' \setminus C'$ un elemento de β tal que $q \in V' \setminus C' \subseteq B$. Entonces $q \in V \cap V'$ y como el conjunto $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ forma una base para la topología usual de $\mathbb{R}$, se tiene que existe $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $q \in (a, b) \subseteq V \cap V'$. Dado que (a, b) es no numerable, existe una cantidad no numerable en el conjunto $(V \setminus C) \cap V' \setminus C'$ el cual está contenido en $A \cap B$. Por lo tanto A y B no pueden ser ajenos, esto es, el espacio $(\mathbb{R}, \sigma)$ no es T_3.

(4) Sea X un conjunto con la topología indiscreta. Entonces X es $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_3. Si X tiene más de un punto, no es T_0.

[11] Una topología τ es más gruesa con respecto a τ' si $\tau \subseteq \tau'$.

Existen ejemplos de espacios T_3 que no son $T_{3\frac{1}{2}}$. Además, si pedimos que un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ o T_3 también sea T_1, entonces se tiene la siguiente cadena de implicaciones

$$T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

esto es, un espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ y T_1 es T_3 y un espacio T_3 y T_1 es T_2.

1.2. Categorías

En esta sección definiremos los conceptos de *categoría*, *funtor*, *transformación natural* y *funtores adjuntos*, junto con algunos ejemplos que permitirán relacionar los conceptos con distintos temas en el campo de las matemáticas. Las definiciones dadas a continuación serán utilizadas hasta el capítulo 3. Para mayor detalle se recomienda revisar los libros [4] y [5].

1.2.1 Definición. Una *categoría* $\mathfrak{C}$ consta de:

(1) una clase $\mathfrak{C}_0$ cuyos miembros son llamados $\mathfrak{C}$–objetos;

(2) un conjunto $\mathfrak{C}(A, B)$ para cada par de $\mathfrak{C}$–objetos A, B, cuyos elementos se llaman $\mathfrak{C}$–*morfismos* de A a B y que denotaremos como flechas $A \xrightarrow{f} B$. La clase $\mathfrak{C}(\_,\_)$ cumple que si $(A, B) \neq (C, D)$ entonces $\mathfrak{C}(A, B) \cap \mathfrak{C}(C, D) = \varnothing$;

(3) para cada $\mathfrak{C}$–objeto A un morfismo $1_A \in \mathfrak{C}(A, A)$ llamado *identidad* en A;

(4) una *ley de composición* asociada a cada par de $\mathfrak{C}$–morfismos $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ y $g \in \mathfrak{C}(B, C)$ denotada con $A \xrightarrow{g\circ f} C$ en $\mathfrak{C}(A, C)$, que se representa con la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

y debe cumplir las siguientes condiciones:

(a) la composición es asociativa, esto es, dados $\mathfrak{C}$–morfismos $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ y $C \xrightarrow{h} D$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "h"] \\ B \arrow[r, "h\circ g"'] & D, \end{tikzcd}$$

es decir, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

(b) las identidades satisfacen que, dado $f \in \mathfrak{C}(A, B)$, se tiene que $f \circ 1_A = f$ y $1_B \circ f = f$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "1_B"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "1_A"'] & & B \\ & A \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta;

1.2.2 Definición. (1) Una categoría $\mathfrak{A}$ se dice que es una *subcategoría* de $\mathfrak{B}$ si cumple las siguientes condiciones:

(a) Los $\mathfrak{A}$–objetos son también $\mathfrak{B}$–objetos.

(b) Si A y A' son $\mathfrak{A}$–objetos, entonces $\mathfrak{A}(A, A') \subseteq \mathfrak{B}(A, A')$.

(c) Para cada $\mathfrak{A}$–objeto A, la $\mathfrak{B}$–identidad en A es la $\mathfrak{A}$–identidad en A.

(d) La ley de composición en $\mathfrak{A}$ es la restricción de la ley de composición en $\mathfrak{B}$ a los morfismos de $\mathfrak{A}$.

(2) $\mathfrak{A}$ es llamada una *subcategoría plena* de $\mathfrak{B}$ si cumple (1) y además, para cualesquiera dos $\mathfrak{A}$–objetos A y A', se tiene que $\mathfrak{A}(A, A') = \mathfrak{B}(A, A')$.

1.2.3 Ejemplos. (1) La categoría cero, con $\mathfrak{C}_0 = \varnothing$.

(2) Un monoide es una categoría con un solo objeto. Cada monoide está determinado por el conjunto de todas sus flechas; por la identidad y la regla de composición. Como cualesquiera dos de ellas tienen una composición, un monoide puede ser descrito como un conjunto M con una operación binaria $M \times M \to M$ la cual es asociativa y tiene un elemento identidad. Entonces, para cualquier categoría $\mathfrak{C}$ y cualquier objeto A en $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathfrak{C}(A, A)$ es un monoide.

(3) *Set* es la categoría cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyas flechas (o morfismos) todas las funciones entre ellos.

(4) Vec_K es la categoría cuyos objetos son espacios vectoriales sobre un campo fijo K y cuyos morfismos son funciones K-lineales.

(4) $\mathfrak{Top}$ es la categoría cuyos objetos son todos los espacios topológicos y morfismos todas las aplicaciones (funciones continuas) entre ellos.

(5) *Rel* es la categoría cuyos objetos son parejas (X, ρ) donde X es un conjunto y ρ es una relación binaria en X. Los morfismos son funciones que preservan la relación, es decir, $f : X \to Y$ tal que si $x\rho x'$ entonces $f(x)\sigma f(x')$, donde σ es la relación en Y. Como subcategoría plena de *Rel* se tiene a *Sym* cuyos objetos son conjuntos con una relación simétrica.

(6) *Grp* es la categoría cuyos objetos son todos los grupos y cuyos morfismos son los homomorfismos entre ellos. Como subcategoría plena, se tiene a *Ab* cuyos objetos son grupos abelianos.

(7) Met_u es la categoría cuyos objetos son espacios métricos y cuyos morfismos son las funciones uniformemente continuas. Una subcategoría plena de ésta es aquélla cuyos objetos son los espacios métricos completos. A esta categoría la denotaremos Met_c.

(8) $\mathcal{X}_{3\frac{1}{2}}$ o *Tych* es la subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son los espacios topológicos completamente regulares y T_1. Notemos que si denotamos por $\mathcal{X}_i$ a las subcategorías plenas de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son espacios topológicos T_i con $i \in \{0, 1, 2\}$ y $\mathcal{X}_3$ aquélla cuyos espacios sean T_3 y T_1, se tiene $\mathcal{X}_{3\frac{1}{2}} \subseteq \mathcal{X}_3 \subseteq \mathcal{X}_2 \subseteq \mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_0$.

1.2.4 Definición. Para cualquier categoría $\mathfrak{C}$ la *categoría opuesta* (o dual) de $\mathfrak{C}$ es la categoría $\mathfrak{C}^{op}$ cuyos objetos y morfismos identidad son los mismos que en $\mathfrak{C}$, pero $\mathfrak{C}^{op}(A, B) = \mathfrak{C}(B, A)$ y $f \circ^{op} g = g \circ f$, es decir, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}^{op}$ tienen los mismos objetos, pero las clases de morfismos cambian en dirección.

1.2.5 Ejemplos. Si $M = (m, \bullet, e)$ es un monoide, considerado como una categoría, entonces $M^{op} = (m, \hat{\bullet}, e)$ donde $a \hat{\bullet} b = b \bullet a$.

1.2.6 Observación. Dado que la categoría dual está definida, cualquier enunciado que corresponda a un objeto X en la categoría $\mathfrak{A}$ puede ser transladado a un enunciado lógicamente equivalente que corresponda al objeto X en la categoría $\mathfrak{A}^{op}$. Como ejemplos veremos en las siguientes secciones las reflexiones y correflexiones de una categoría dada.

Como consecuencia de lo anterior, tenemos el *principio de dualidad*, enunciado de la siguiente manera:

Para cualquier propiedad P que se cumple en todas las categorías, la propiedad P^{op} también se cumple para todas las categorías.

1.2.7 Definición. Dada una categoría $\mathfrak{C}$, un $\mathfrak{C}$–objeto A es:

(1) *inicial* si para cualquier $\mathfrak{C}$–objeto B, $\mathfrak{C}(A, B)$ tiene un único elemento;

(2) *final* si para cualquier $\mathfrak{C}$–objeto B, $\mathfrak{C}(B, A)$ tiene un único elemento (dual de inicial en $\mathfrak{C}^{op}$);

(3) un *objeto cero* si es inicial y final.

1.2.8 Ejemplos. La categoría Set tiene como objeto inicial $\varnothing$ y como objeto final cualquier conjunto con un solo elemento $\{x\}$.

1.2.9 Definición. Dado un morfismo $f \in \mathfrak{C}(A, B)$ se tiene que

(1) f es un *monomorfismo* si dados $h, g \in \mathfrak{C}(C, A)$ tales que $f \circ g = f \circ h$ entonces $g = h$.

(2) f es un *epimorfismo* si dados $h, g \in \mathfrak{C}(A, C)$ tales que $g \circ f = h \circ f$ entonces $g = h$.

(3) f es un *isomorfismo* si existe $g \in \mathfrak{C}(B, A)$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

1.2.10 Observación. Dos objetos iniciales (finales) de una categoría $\mathfrak{C}$ son isomorfos.

Si A y A' son iniciales en $\mathfrak{C}$, existen morfismos únicos f y g tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & A' \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend left, "1_{A'}"] & A \arrow[r, "f"] & A' \end{tikzcd}$$

por la unicidad de la definición $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_{A'}$, es decir, A y A' son isomorfos (un razonamiento dual permite concluir lo anterior para objetos finales).

Siguiendo con el ejemplo en Set, podemos concluir que dicha categoría no tiene objetos ceros ya que si existiese uno, digamos O, como los isomorfismos aquí son las funciones biyectivas, entonces $\varnothing$ sería biyectable con O y O sería biyectable con $\{x\}$ lo cual es imposible.

1.2.11 Definición. Dadas dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, un *funtor* F de $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{D}$ consta de:

(1) una asignación $\mathfrak{C}_0 \xrightarrow{F} \mathfrak{D}_0$ que manda a un $\mathfrak{C}$–objeto A en un $\mathfrak{D}$–objeto $F(A)$;

(2) y para cada par de $\mathfrak{C}$–objetos A y B, una función (que también denotaremos por F) $\mathfrak{C}(A, B) \xrightarrow{F} \mathfrak{D}(F(A), F(B))$ que manda $\mathfrak{C}$–morfismos $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathfrak{D}$–morfismos $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ tal que

(a) $F(1_A) = 1_{F(A)}$,

(b) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

1.2.12 Ejemplos. (1) Dada una categoría $\mathfrak{C}$, podemos definir el *funtor identidad*

$$\mathfrak{C}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B.$$

(2) Dada una categoría $\mathfrak{D}$, cuyos objetos son conjuntos con alguna estructura (grupos, anillos, módulos, espacio topológicos, etc.), definimos el *funtor que olvida* dicha estructura. Por ejemplo, de la categoría de grupos a Set, el funtor que olvida $U : Grp \to Set$

$$\begin{tikzcd}
(G,*,e) \arrow[r, "U"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[d, "f"] \\
(H,+,0) \arrow[r, "U"'] & H
\end{tikzcd}$$

que manda cada objeto en Gpr a su conjunto subyacente (conjunto sin la estructura) y cada homomorfismo en la función subyacente.

(3) Dada una categoría $\mathfrak{C}$ y cualquier $\mathfrak{C}$–objeto A, el *hom–funtor covariante* $\mathfrak{C}(A, \_) : \mathfrak{C} \to Set$ está definido como

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\mathfrak{C}(A,_)"] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{C}(A,B) \arrow[d, "\mathfrak{C}(A,f)"] \\
C \arrow[r, "\mathfrak{C}(A,_)"] & \mathfrak{C}(A,C),
\end{tikzcd}$$

donde $\mathfrak{C}(A, f)(g) = f \circ g$ que es un morfismo de A en C.

1.2.13 Definición. Un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es:

(1) *contravariante* si F asigna a cada $\mathfrak{C}$-objeto C un $\mathfrak{D}$-objeto $F(D)$ y a cada flecha $C \xrightarrow{f} C'$ una flecha $F(C') \xrightarrow{F(f)} F(C)$ en $\mathfrak{D}$. Así, $F(1_C) = 1_{F(C)}$ y $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$ (siempre y cuando la composición $f \circ g$ esté definida en C)

(2) *fiel* si para cada pareja de $\mathfrak{C}$ –objetos A y B, se tiene que $\mathfrak{C}(A, B) \xrightarrow{F} \mathfrak{C}(F(A), F(B))$ es inyectiva.

(3) *pleno* si para cada pareja de $\mathfrak{C}$ –objetos A y B, se tiene que $\mathfrak{C}(A, B) \xrightarrow{F} \mathfrak{C}(F(A), F(B))$ es suprayectiva.

1.2.14 Definición. (1) Una *transformación natural* $\tau : F \dot{\to} G$ entre dos funtores $F, G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, consta de una asignación que a cada $\mathfrak{C}$–objeto C lo manda a un $\mathfrak{D}$–morfismo $F(C) \xrightarrow{\tau_C := \tau(C)} G(C)$ de $\mathfrak{D}$ de tal manera que para todo $\mathfrak{C}$–morfismo $C \xrightarrow{f} C'$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\
C' & F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"] & G(C')
\end{tikzcd}$$

Cuando esto ocurre diremos que $\tau_C : F(C) \to G(C)$ es natural en C.

(2) Una transformación natural $\tau : F \dot{\to} G$, cuyas componentes τ_C son isomorfismos, es llamada una equivalencia natural (o isomorfismo natural) de F a G. Decimos que F y G se dice que son naturalmente isomorfos si existe un isomorfismo natural entre ellos.

1.2.15 Ejemplos. (1) La transformación identidad es un isomorfismo natural entre un funtor y él mismo, $id_F : F \dot{\to} F$, donde F es un funtor de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$, tal que a cada $\mathfrak{C}$–objeto A es mandado a $F(A) \xrightarrow{1_{F(A)}} F(A)$. Claramente el diagrama correspondiente conmuta.

(2) Sea K un campo, podemos construir un funtor $F : Set \to Vec_K$, tal que cualquier otro funtor construido de forma análoga de Set a Vec_K es naturalmente isomorfo a F. Primero veamos que todo conjunto X es base de un K-espacio vectorial $C(X)$:

Prueba.

(a) Para un conjunto X definimos

$$C(X) = \{X \xrightarrow{f} \mathbb{K} : f^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \text{ es finito } \}$$

es decir, $C(X)$ consiste en todas las funciones de X en el campo $\mathbb{K}$ que son cero salvo en un número finito de puntos.

$C(X)$ tiene como estructura de K-espacio vectorial la siguiente: si $f, g \in \mathbb{K}$ entonces $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y si $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

(b) Sea $x \in X$. Definimos la función $\delta_x \in C(X)$ como $\delta_x(t) = 0$ si $t \neq x$ y $\delta_x(t) = 1$ si $t = x$, donde 1 es el neutro multiplicativo de $\mathbb{K}$. Claramente el conjunto $\{\delta_a : a \in X\}$ es linealmente independiente y genera a $C(X)$ ya que cualquier función $f \in C(X)$ se puede escribir como $f = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\delta_{y_i}$ donde $y_1, \dots y_n$ son los elementos distintos de X que no se anulan bajo f. Por lo tanto $\{\delta_a : a \in X\}$ forma una K-base para $C(X)$.

Si definimos $\psi : X \to C(X)$ como $\psi(x) = \delta_x$, tenemos una biyección entre X y $\{\delta_a : a \in X\}$, es decir, podemos pensar a X como una base para $C(X)$.

Por otro lado, si $g : X \to V$ es una función K-lineal de X en el K-espacio vectorial V, entonces existe una única extensión $\varphi : C(X) \to V$ dada por la función K-lineal generada por $\overline{\varphi}(\delta_x) = \varphi(x)$ (que es única porque dada cualquier extensión η, se cumple que $\overline{\varphi}$ y η coinciden en la base).

Ahora, definimos el funtor $F : Set \to Vec_K$ que asigna a cada conjunto X un K-espacio vectorial $F(X)$ con base X y a cada función $X \xrightarrow{f} Y$ la única función entre K-espacios vectoriales $F(X) \xrightarrow{F} (Y)$ que extiende f al definirse sobre la base X. Dado que existen muchos K-espacios vectoriales con las mismas bases, parecería no estar bien definido dicho funtor, pero tomando un espacio vectorial específico (por ejemplo $C(X)$) con base X se obtiene un funtor $F : Set \to Vec_K$. Además, cualesquiera dos funtores obtenidos de ésta manera son naturalmente isomorfos:

Sean $F : Set \to Vec_K$ y $G : Set \to Vec_K$ funtores obtenidos como arriba. Definimos la transformación natural $\tau : F \dot{\to} G$ como sigue

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(X') \arrow[r, "\tau_{X'}"] & G(X') \end{tikzcd}$$

donde τ_X está dada por la función lineal generada a partir de la identificación de sus correspondientes bases (que son el conjunto X). Entonces dicha función lineal manda una base del dominio en una base del contradominio, es decir, es un isomorfismo de K-espacios vectoriales. Por lo tanto τ es un isomorfismo natural.

1.2.16 Definición. Un *diagrama* en una categoría $\mathfrak{C}$ es un funtor $D : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}$, donde $\mathcal{I}$ es una categoría pequeña, esto es, $\mathcal{I}_0$ es un conjunto. El dominio $\mathcal{I}$ es llamado el *esquema* del diagrama.

1.2.17 Ejemplos. Un diagrama en $\mathfrak{C}$, con esquema $\bullet \rightrightarrows \bullet$, es esencialmente un par de $\mathfrak{C}$–morfismos con dominio y codominio común.

1.2.18 Definición. Sea $D : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}$ un diagrama.

(1) Una $\mathfrak{C}$–fuente $(C \xrightarrow{f_i} D_i)_{i\in\mathcal{I}_0}$ se dice que es *natural* para D si para cada $\mathcal{I}$–morfismo $i \xrightarrow{f} j$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ D_i \arrow[rr, "D(f)"'] & & D_j. \end{tikzcd}$$

(2) Un *límite* de D es una fuente natural $(L \xrightarrow{l_i} D_i)_{i\in\mathcal{I}_0}$ para D con la siguiente propiedad universal: dada una fuente $(A \xrightarrow{f_i} D_i)_{i\in\mathcal{I}_0}$ natural para D, existe un único morfismo $f : A \to L$ tal que $f_i = l_i \circ f$ para todo i objeto de $\mathcal{I}$.

Como veremos a continuación, la noción de colímite es dual a la de límite.

1.2.19 Definición. Sea $D : \mathcal{I} \to \mathfrak{C}$ un diagrama.

(1) Un $\mathfrak{C}$–pozo $(D_i \xrightarrow{f_i} C)_{i\in\mathcal{I}_0}$ se dice que es *natural* para D si para cada $\mathcal{I}$–morfismo $i \xrightarrow{f} j$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[rr, "D(f)"] \arrow[dr, "f_i"'] & & D_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & C. & \end{tikzcd}$$

(2) Un *colímite* de D es un pozo natural $(D_i \xrightarrow{l_i} K)_{i\in\mathcal{I}_0}$ para D con la siguiente propiedad universal: dado un pozo $(D_i \xrightarrow{f_i} B)_{i\in\mathcal{I}_0}$ natural para D, existe un único morfismo $f : K \to B$ tal que $f_i = f \circ l_i$ para todo i objeto de $\mathcal{I}$.

Veremos ejemplos de colímites en la sección de correflexiones.

1.2.20 Definición. Una adjunción es una tripleta (F, G, τ) tal que $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ son funtores y $\tau : \mathfrak{C}(\_, G\_) \dot{\to} \mathfrak{D}(F\_, \_)$ es un isomorfismo natural.

La condición de naturalidad de τ se traduce como sigue: para cada $B_1 \xrightarrow{g} B_2$ morfismo en $\mathfrak{D}$ y $A_2 \xrightarrow{f} A_1$ morfismo en $\mathfrak{C}$, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[d, "g"] & \mathfrak{C}(A_1, G(B_1)) \arrow[r, "\tau_{A_1,B_1}"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(f,G(g))"'] & \mathfrak{D}(F(A_1), B_1) \arrow[d, "\mathfrak{D}(F(f),g)"] \\ A_1 & B_2 & \mathfrak{C}(A_2, G(B_2)) \arrow[r, "\tau_{A_2,B_2}"'] & \mathfrak{D}(F(A_2), B_2). \end{tikzcd}$$

Dado $h \in \mathfrak{C}(A_1, G(B_1))$, la función $[\mathfrak{C}(f, G(g))](h)$ está dada por la siguiente composición

$$A_2 \xrightarrow{f} A_1 \xrightarrow{h} G(B_1) \xrightarrow{G(g)} GB_2.$$

Análogamente se tiene una composición similar para $\mathfrak{D}(F(f), g)$.

Notemos que, por definición, τ es un isomorfismo natural si las componentes τ_{A_1,B_1} son isomorfismos en Set, es decir, si

$$\mathfrak{C}(A_1, G(B_1)) \xrightarrow{\tau_{A_1,B_1}} \mathfrak{D}(F(A_1), B_1)$$

es una biyección que es natural en ambas variables.

1.2.21 Teorema. *Cada adjunción (F, G, τ) está completamente determinada por cualquiera de los siguientes enunciados*:

(1) *Funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, y una transformación natural $\eta : 1_{\mathfrak{C}} \dot{\to} G \circ F$ tal que sus componentes $C \xrightarrow{\eta_C} G(F(C))$ son universales para G de C. Es decir, las componentes tienen la siguiente propiedad universal*:

Dado un $\mathfrak{C}$–objeto C, un $\mathfrak{D}$–objeto D y un $\mathfrak{C}$–morfismo $C \xrightarrow{f} G(D)$, existe un único $\mathfrak{D}$–morfismo $F(C) \xrightarrow{g} D$ tal que $f = G(g) \circ \eta_C$, es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, "f"'] & G(F(C)) \arrow[d, dotted, "G(g)"] & \in \mathfrak{C} & F(C) \arrow[d, "g"] & \in \mathfrak{D} \\ & G(D) & & D & \end{tikzcd}$$

(2) *Un funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, una asignación tal que para cada C se tiene un objeto $F(C)$ en $\mathfrak{D}$ y una flecha universal $C \xrightarrow{\eta_C} G(F(C))$ de C a G. Entonces el funtor F está definido por las flechas $C \xrightarrow{h} C'$ por medio de $G(F(h)) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ h$.*

(3) *Funtores $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ y $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, y una transformación natural $\varepsilon : F \circ G \dot{\to} 1_{\mathfrak{D}}$ tal que sus componentes $F(G(D)) \xrightarrow{\eta_D} C$ son universales para F de D. Es decir, las componentes tienen la siguiente propiedad universal*:

Dado un $\mathfrak{C}$–objeto C, un $\mathfrak{D}$–objeto D y un $\mathfrak{D}$–morfismo $F(C) \xrightarrow{g} D$, existe un único $\mathfrak{D}$–morfismo $C \xrightarrow{f} G(D)$ tal que $g = \varepsilon_D \circ F(f)_C$, es decir, el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, dotted, "F(f)"'] & D & \in \mathfrak{D} & C \arrow[d, "f"] & \in \mathfrak{C} \\ & F(G(D)) \arrow[u, "\varepsilon_D"] & & G(D) & \end{tikzcd}$$

(4) *Un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, una asignación tal que a cada D se tiene un objeto $G(D)$ en $\mathfrak{C}$ y una flecha universal $F(G(D)) \xrightarrow{\varepsilon_D} D$ de F a D.*

(5) *Funtores F y G, y transformaciones naturales $\eta : 1_{\mathfrak{C}} \dot{\to} G \circ F$ y $\varepsilon : F \circ G \dot{\to} 1_{\mathfrak{D}}$ tales que las composiciones*

$$G(D) \xrightarrow{\eta \circ G} (G \circ F \circ G)(D) \xrightarrow{G \circ \varepsilon} G(D) \text{ y } F(C) \xrightarrow{F \circ \eta} (F \circ G \circ F)(C) \xrightarrow{\varepsilon \circ f} F(C)$$

son las transformaciones identidad.

A F se le llama *adjunto izquierdo* de G (G es el adjunto derecho de F), denotado por $F \dashv G$. A η se le llama la *unidad de la adjunción* y a ε la *counidad de la adjunción.*

Capítulo 2

Conexidad

En este capítulo se verán las definiciones de espacio topológico conexo, localmente conexo, conectable por trayectorias y localmente conectable por trayectorias, entre otras. Probaremos algunos resultados que nos permitan generalizar la noción de conexidad a categorías topológicas.

Además, daremos las definiciones de propiedad reflexiva y correflexiva, junto con algunos ejemplos que las relacionan con los espacios totalmente inconexos, totalmente inconexos por trayectorias (tipt), localmente conexos y localmente conectables por trayectorias. Las nociones de reflexividad y correflexividad serán extendidas a categorías y, en los capítulos siguientes, mostraremos la importancia que tienen éstas.

2.1. Espacios conexos

2.1.1 Definición. (1) Si (X, τ) es un espacio topológico, una separación $U|V$ de (X, τ) es una pareja de abiertos ajenos U, V de (X, τ) tales que $X = U \cup V$.

(2) Si $U|V$ es una separación de (X, τ) y $U = \varnothing$ o $V = \varnothing$, se dice que $U|V$ es una *separación trivial*.

(3) Un espacio topológico (X, τ) es *conexo* si toda separación de (X, τ) es trivial.

2.1.2 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) *X es conexo.*

(2) *Cualesquiera dos puntos de X están conectados, es decir, si x y x' son puntos de X tales que $x \neq x'$, entonces existe un subespacio conexo de X que los contiene.*

(3) *Los únicos subconjuntos abiertos y cerrados de X son X y $\varnothing$.*

(4) *Si $\{0, 1\}$ denota al conjunto $\{0, 1\}$ con la topología discreta y $f : X \to \{0, 1\}$ es continua, entonces f es constante.*

(5) *Si Y es discreto con más de un punto y $f : X \to Y$ es continua, entonces f es constante.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2): Es claro, pues X es conexo y contiene a cualesquiera dos puntos.

Las siguientes implicaciones se harán por contrapuesta:

(2) $\Rightarrow$ (3): Sea $E \subset X$ propio, no vacío, abierto y cerrado en X. Entonces $X \setminus E \neq \varnothing$ y $X \setminus E$ es abierto y cerrado. Sean $a \in E$ y $b \in X \setminus E$, si F es un subconjunto conexo de X que

contiene a $\{a,b\}$, entonces $(E \cap F)|((X \setminus E) \cap F)$ es una separación no trivial de F y por lo tanto F no es conexo, es decir, a y b no están conectados en X.

(3) $\Rightarrow$ (4): Sea $f : X \to \{0,1\}$ continua no constante. Entonces f es suprayectiva y por lo tanto $\varnothing \neq f^{-1}(0) \neq X$ y $\varnothing \neq f^{-1}(1) \neq X$ son abiertos y cerrados en X.

(4) $\Rightarrow$ (5): Sea $f : X \to Y$ continua no constante con Y espacio discreto. Entonces existen $y, y' \in f(X)$ con $y \neq y'$. Definimos $g : Y \to \{0,1\}$ como

$$g(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z = y, \\ 1 & \text{si } z \neq y. \end{cases}$$

Como Y tiene la topología discreta, g es continua y $g \circ f : X \to \{0,1\}$ es continua no constante.

(5) $\Rightarrow$ (1): Sean $U|V$ una separación no trivial de X y $f : X \to \{0,1\}$ definida como $f(U) = \{0\}$ y $f(V) = \{1\}$. Entonces f es continua y no constante. $\square$

2.1.3 Ejemplos. (1) El espacio de Sierpinski $\mathcal{S} = (\{0,1\}, \{\{0,1\}, \{0\}\varnothing\})$ es conexo.

(2) Todo espacio indiscreto es conexo.

(3) Si (X, τ) es un espacio con una infinidad de elementos y τ es la topología cofinita, entonces (X, τ) es conexo.

(4) Los espacios singulares son conexos (espacios con un solo elemento).

2.1.4 Proposición. *El intervalo cerrado $I = [0,1]$, con la topología usual, es conexo.*

Prueba. Si I no fuera conexo, existirían A y B cerrados ajenos distintos del vacío tales que $A \cup B = I$. Sea d la métrica usual de I. Como A y B son cerrados y acotados, por 1.1.70, son compactos y, por lo tanto, existen $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $d(a_0, b_0) = d(A, B)$.[1] Por ser A y B ajenos, $a_0 \neq b_0$ y por lo tanto $d(a_0, b_0) = r > 0$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $a_0 < b_0$. Sea $x = a_0 + \frac{r}{2} \in I$. Como $d(a_0, x) = d(b_0, x) = \frac{r}{2} < r$, tenemos que $x \notin A$ y $x \notin B$ lo cual es una contradicción pues $A \cup B = I$. Por lo tanto $A = \varnothing$ o bien $B = \varnothing$, esto es, I es conexo. $\square$

Las siguientes dos proposiciones son de suma importancia para poder extender la idea de conexidad, como se verá también, con los espacios conectables por trayectorias.

2.1.5 Proposición. *La imagen continua de un conexo es conexa.*

Prueba. Sea $f : X \to Y$ continua con X conexo. Supongamos que $f(X)$ no es conexo. Entonces existe $g : f(X) \to \{0,1\}$ continua y suprayectiva por (4) de la proposición 2.1.2. Por lo tanto $g \circ f : X \to \{0,1\}$ es continua y suprayectiva, es decir, X no es conexo. $\square$

2.1.6 Proposición. *Si X es un espacio topológico y $\{X_j\}_{j \in J}$ es una familia de subespacios conexos de X tales que $\bigcap_{j \in J} X_j \neq \varnothing$, entonces $\bigcup_{j \in J} X_j$ es conexo.*

Prueba. Sean $x \in \bigcap_{j \in J} X_j$, $Y = \bigcup_{j \in J} X_j$ el subespacio de X con la topología relativa a X y $f : Y \to \{0,1\}$ una función continua, como $f|_{X_j}$ es constante para toda $j \in J$, si $f(x) = 0$ entonces $f(X_j) = \{0\}$ para toda $j \in J$ y por lo tanto f es constante, es decir, Y es conexo. $\square$

---

[1] $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) | a \in A \text{ y } b \in B\} = \text{ínf}\{d(a, B) | a \in A\}$ así, por la continuidad de la función distancia d, el conjunto $\text{ínf}\{d(a, B) | a \in A\}$ alcanza su máximo y su mínimo en un conjunto compacto, y por lo tanto existen los puntos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que $d(A, B) = d(a_0, b_0)$.

2.1.7 Proposición. *Sea C un subespacio conexo de X y supongamos que $C \subseteq E \subseteq \bar{C}$ donde $\bar{C}$ denota la cerradura de C. Entonces E es conexo. En particular, la cerradura de un conexo es conexa.*

Prueba. Primero veamos que si C es un espacio denso y conexo de X, entonces X es conexo. Sea $f : X \to \{0,1\}$ una función continua. Luego, la restricción $f|_C$ es constante, digamos $f(C) = \{0\}$. Entonces $f^{-1}(0)$ es un cerrado que contiene a C y por lo tanto a su cerradura, es decir, $X = \overline{C} \subseteq f^{-1}(0)$, por lo tanto X es conexo.

Ahora, como $E \subseteq \overline{C}$, entonces $E = \overline{C} \cap E$, es decir, C es denso y conexo en E, y por lo anterior E es conexo. □

2.1.8 Definición. Sean X un espacio topológico y x es uno de sus elementos. Definimos la *componente conexa* de x en X, que denotaremos por $C(x)$, como la unión de todos los subespacios conexos de X que contienen a x. Claramente $C(x)$ es conexo para todo x en X(ver 2.1.6).

2.1.9 Observación. (1) Como $C(x)$ es conexo, por definición y por 2.1.7, $\overline{C(x)} = C(x)$, es decir, las componentes conexas son cerradas.

(2) Si $x, y \in X$ y $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, entonces $C(x) \cup C(y)$ es un conjunto conexo que contiene a x y y. Por definición, tenemos que se debe cumplir $C(x) \cup C(y) \subseteq C(x), C(y)$, por lo tanto $C(x) = C(y)$.

2.1.10 Proposición. *Si X_j es un espacio topológico conexo para toda $j \in J$, entonces $\prod_{j \in J} X_j$ con la topología producto es conexo.*

Prueba. Primero probemos el caso para $J = \{1, 2\}$. Sean (x_1, x_2) y (x_1', x_2') en $X_1 \times X_2$. Entonces $\{(x_1, x_2), (x_1', x_2')\} \subseteq (X_1 \times \{x_2'\}) \cup (\{x_1\} \times X_2)$, el cual es un espacio conexo del producto ya que $\{(x_1, x_2')\} \subseteq (X_1 \times \{x_2'\}) \cap (\{x_1\} \times X_2)$ y cada uno de los elementos de la unión es conexo. Por lo tanto, cualesquiera dos puntos están conectados.

Por inducción, se prueba el caso para un producto finito. Ahora, para cualquier conjunto de índices J, sea $x \in \prod_{j \in J} X_j$, digamos $x = (x_j)_{j \in J}$. Probaremos que $C(x)$ es denso en $\prod_{j \in J} X_j$ y por 2.1.7, el producto será conexo. Tomemos un elemento básico de la topología producto $B = \bigcap_{i=1}^{n} p_{j_i}^{-1}(U_{j_i})$ con $\{j_1, \ldots, j_n\} \subseteq J$. Sean $y \in B$, digamos $y = (y_j)_{j \in J}$ y $z \in \prod_{j \in J} X_j$ tales que

$$z_{j_i} = \begin{cases} y_{j_i} & \text{si } j \in \{j_1, \ldots, j_n\}, \\ x_j & \text{si } i \notin \{j_1, \ldots, j_n\}. \end{cases}$$

Definimos $X_j' = X_j$ si $j \in \{j_1, \ldots, j_n\}$ y $X_j' = \{x_j\}$ si $j \notin \{j_1, \ldots, j_n\}$. Entonces $\{x, z\} \subseteq \prod_{j \in J} X_j'$. Y dado que $\prod_{j \in J} X_j'$ es homeomorfo a $X_{j_1} \times \ldots \times X_{j_n}$, el cual es conexo por el argumento de arriba, concluyendo que x y z están conectados. Esto es, $z \in C(x) \cap B$ y por lo tanto $C(x)$ es denso. □

2.1.11 Definición. Un espacio topológico X es *totalmente inconexo* si $C(x) = \{x\}$ para toda x en X.

Por ejemplo, todo espacio discreto es totalmente inconexo.

2.1.12 Observación. (1) Todo espacio X totalmente inconexo es T_1 ($C(x) = \{x\}$ es cerrado).

(2) Para todo espacio X, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) X es totalmente inconexo.

(b) Si $f : Y \to X$ es continua y Y es conexo, entonces f es constante.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea X totalmente inconexo. Dado que $f(Y)$ es conexo, se tiene que $f(Y)$ es un solo punto.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sean $Y = C(x)$ para alguna $x \in X$ y $f = i$ la inclusión. Entonces f es constante y por lo tanto $C(x) = \{x\}$.

2.2. Conexidad por trayectorias

2.2.1 Definición. (1) Una *trayectoria* en un espacio topológico X es una aplicación $\sigma : I \to X$ donde I es el intervalo $[0, 1]$. Si σ es una trayectoria en X, se dice que σ empieza en $\sigma(0)$ y termina en $\sigma(1)$.

(2) Un espacio X es *conectable por trayectorias* (cpt) si, dados $x, x' \in X$, existe una trayectoria en X que empieza en x y termina en x'.

2.2.2 Observación. (1) Todo espacio X cpt es conexo. Si $x, x' \in X$, existe una trayectoria $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = x$ y $\sigma(1) = x'$. Entonces $\{x, x'\} \subseteq \sigma(I) \subseteq X$ y dado que $\sigma(I)$ es conexo por 2.1.4 y 2.1.5, se tiene que x y x' están conectados en X.

(2) Todo intervalo E de $\mathbb{R}$ es conectable por trayectorias. Sean $a, b \in E$, la función $\sigma : I \to E$ definida como $\sigma(t) = a(1 - t) + bt$ es continua y tal que $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$.

2.2.3 Ejemplos. (1) Todo espacio indiscreto es cpt.

(2) El espacio de Sierpinski es cpt.

En el siguiente ejemplo se hará uso del corolario 2.3.7, el cual afirma que coproductos y cocientes de espacios localmente conexos (ver 2.3.3)son localmente conexos. La prueba de dicho resultado se hará en la siguiente sección, cuando se defina *reflexión* y *correflexión*.

(3) $E = \{(0, 0)\} \cup f(0, \frac{1}{\pi}] \subseteq \mathbb{R}^2$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es tal que $f(t) = (t, \mathrm{sen}\frac{1}{t})$, es conexo pero no cpt.

Supongamos que existe $\sigma : I \to E$ tal que $\sigma(0) = (0, 0)$ y $\sigma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Si p_x es la proyección sobre el eje x, $p_x \circ \sigma$ es una trayectoria en $\mathbb{R}$ tal que $p_x(\sigma(0)) = 0$ y $p_x(\sigma(1)) = \frac{1}{\pi}$. Entonces $[0, \frac{1}{\pi}] = p_x(\sigma(I))$; pues si existiese algún punto $a \in [0, \frac{1}{\pi}]$ tal que $a \notin p_x(\sigma(I))$ entonces se tendría una desconexión en $p_x(\sigma(I))$, lo cual es imposible. Ahora, notemos que $p_x|_E : E \to [0, \frac{1}{\pi}]$ es biyectiva, por lo tanto $\sigma(I) = E$. Por otra parte, I es compacto y E es T_2, entonces σ es cerrada, es decir, σ es una identificación y por lo tanto un homeomorfismo. Puesto que I es localmente conexo tenemos que E es localmente conexo (corolario 2.3.7), lo cual el falso, ya que podemos tomar una vecindad suficientemente pequeña en $(0, 0)$ tal que todo abierto que contenga al punto y esté contenido en la vecindad sea inconexo. Por lo tanto no existe trayectoria en E que una a $(0, 0)$ con $(\frac{1}{\pi}, 0)$.

La siguiente observación y proposición muestran una relación de suma importancia con las proposiciones de espacios conexos, mencionadas anteriormente. Dichos resultados nos permitirán extender la noción de conexidad a subcategorías de $\mathfrak{Top}$[2]

2.2.4 Observación. (1) De lo anterior, puesto que $f(0, \frac{1}{\pi}]$ es cpt y $(0, 0)$ está en la cerradura de $f(0, \frac{1}{\pi}]$, concluimos que, contrario a los espacios conexos, la cerradura de un espacio cpt no necesariamente es cpt.

[2] Véase 1.2.3 del Capítulo 2

(2) La imagen continua de un espacio cpt es cpt.

2.2.5 Proposición. *Si X es un espacio topológico y $\{X_j\}_{j\in J}$ es una familia de subespacios cpt tal que $\bigcap_{j\in J} X_j \neq \varnothing$ entonces $\bigcup_{j\in J} X_j$ es cpt.*

Prueba. Sean $x \in \bigcap_{j\in J} X_j$ y $a, b \in \bigcup_{j\in J} X_j$, entonces existen $i, i' \in J$ tales que $a \in X_i$ y $b \in X_{i'}$. Por hipótesis existen $w : I \to X_i$ y $w' : I \to X_{i'}$ tales que $w(0) = a$, $w(1) = x = w'(0)$ y $w'(1) = b$. Definimos $W : I \to \bigcup_{j\in J} X_j$ como:

$$W(t) = \begin{cases} w(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ w'(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que la función W es continua porque en cada intervalo lo es (al ser composición de continuas) y en la intersección $W(\frac{1}{2}) = x$ está bien definida. Por lo tanto W es una trayectoria de a en b en $\bigcup_{j\in J} X_j$. □

2.2.6 Proposición. *Si $\{X_j\}_{j\in J}$ es una familia de espacios cpt entonces el producto topológico $(\prod_{j\in J} X_j, \tau)$ es cpt.*

Prueba. Sean $x, x' \in \prod_{j\in J} X_j$. Para cada $j \in J$ sea $w_j : I \to X_j$ una trayectoria tal que $w_j(0) = x_j = p_j(x)$ y $w_j(1) = x'_j = p_j(x')$. Sea $w : I \to \prod_{j\in J} X_j$ la única función continua tal que, para toda $j \in J$, el siguiente diagrama conmuta[3]:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "w_j"] \arrow[d, "w"'] & X_j \\ \prod_{j\in J} X_j. \arrow[ur, "p_j"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces $w(0) = x$ y $w(1) = x'$ y por lo tanto $\prod_{j\in J} X_j$ es cpt.

2.2.7 Definición. Si X es un espacio topológico, definimos la *componente por trayectorias* de x en X, que denotaremos por $c(x)$, a la unión de todos los subespacios cpt de X que contienen a x.

2.2.8 Observación. (1) Para toda $x \in X$, $c(x)$ es cpt.

(2) Si $c(x) \cap c(y) \neq \varnothing$ entonces $c(x) = c(y)$.

2.2.9 Definición. Un espacio topológico X es *totalmente inconexo por trayectorias* (tipt) si, para toda $x \in X$, $c(x) = \{x\}$.

2.2.10 Observación. Si X es un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) X es tipt.

(2) Si $w : I \to X$ es continua, entonces w es constante.

Prueba. Por contrapuesta:

(1) ⇒ (2) Si existe $w : I \to X$ continua no constante, entonces podemos tomar $t \in I$ tal que $w(t) \neq w(0)$. Si $x := w(0)$, se tiene que $w(I) \subseteq c(x)$ porque $w(I)$ es cpt ((2) de 1.2.4), por lo tanto $c(x) \neq \{x\}$.

(2) ⇒ (1) Si X no es tipt, entonces existe una aplicación $w : I \to X$ no constante.

[3] Hemos hecho uso de la propiedad universal del producto topológico.

2.2.11 Ejemplos. (1) Todo espacio discreto es tipt.

(2) Si X es un espacio numerable infinito, con la topología cofinita, entonces X es conexo, localmente conexo y tipt (en el capítulo 4 volveremos a este ejemplo).

2.2.12 Proposición. *Sea $\{f_j : X \to X_j\}_{j \in J}$ una monofuente de funciones continuas tal que para toda $j \in J$ X_j es tipt. Entonces X también es tipt.*

Prueba. Por contrapuesta. Si X no es tipt entonces existe $w : I \to X$ continua no constante por la observación anterior. Por lo tanto, existe $t \in I$ tal que $x = w(0) \neq w(t) = x'$. Por ser $\{f_j\}_{j \in J}$ monofuente, existe $j_0 \in J$ tal que $f_{j_0}(x) \neq f_{j_0}(x')$, por lo tanto $f_{j_0} \circ w : I \to X_{j_0}$ es una trayectoria no constante, es decir, X_{j_0} no es tipt. □

2.2.13 Proposición. *Los productos y subespacios de espacios tipt son tipt.*

Prueba. Si $\{X_j\}_{j \in J}$ es una familia de espacios tipt y $\prod_{j \in J} X_j$ es su producto, entonces la familia de proyecciones $p_j : \prod_{j \in J} X_j \to X_j$ es monofuente. Además, si Y es un subespacio de X entonces la inclusión $i : Y \to X$ es monofuente. Por lo tanto, utilizando la proposición anterior, se concluye que productos y subespacio de tipt son tipt. □

2.3. Reflexiones y correflexiones

2.3.1 Definición. Sea ε una clase de funciones continuas. Se dice que una propiedad topológica P es *ε–reflexiva* si, dado un espacio topológico X, existe $e : X \to X'$ en ε tal que X' tiene la propiedad P y, si Y tiene la propiedad P y $g : X \to Y$ es continua, entonces existe una única función $g' : X' \to Y$ continua que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[dl, dotted, "\exists! g'"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

A la función e se le llama *reflexión*.

2.3.2 Proposición. *La propiedad de ser totalmente inconexo es cociente reflexiva, es decir, si X es un espacio topológico y $p : X \to Y$ es el cociente que identifica cada una de las componentes de X en un punto, entonces p es una reflexión de X en los espacios totalmente inconexos.*

Prueba. Primero veamos que Y es un espacio totalmente inconexo. Sea $y \in Y$ y supongamos que $C(y)$ tiene más de un punto. Por ser $C(y)$ cerrado, la restricción $q := p|^{C(y)}_{p^{-1}(C(y))}$ es una identificación. Por definición de p, $p^{-1}(C(y))$ es la unión de dos o más componentes de X, por lo tanto $p^{-1}(C(y))$ es disconexo. Entonces existe una función continua y suprayectiva $f : p^{-1}(C(y)) \to \{0, 1\}$, pero dado que q es una identificación, si $y' \in C(y)$, se tiene que $q^{-1}(y')$ es una componente de X, es decir, es un subconjunto conexo de $p^{-1}(C(y))$. Luego $f(q^{-1}(y'))$ es conexo, lo que significa que consiste de un sólo punto. Por lo tanto, existe una única función continua h que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(C(y)) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & \{0, 1\} \\ C(Y) \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

y dado que f es suprayectiva, se tiene que h es suprayectiva, es decir, $C(y)$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto Y es totalmente inconexo.

Ahora, sea $f : X \to Z$ una función continua con Z un espacio totalmente inconexo. Si $y \in Y$, se tiene que $p^{-1}(y)$ es una componente de X, por lo tanto la restricción $f|_{p^{-1}(y)}$ es constante al mandar dicho conjunto a un conexo en Z. Como p es una identificación, existe una única función continua h tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, dotted, "h"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto p es una reflexión de X en los espacios totalmente inconexos. □

2.3.3 Definición. (1) Un espacio topológico X es *localmente conexo* en $x \in X$ si x posee una base de vecindades conexas.

(2) X es *localmente conexo* si lo es en cada uno de sus puntos.

2.3.4 Proposición. *Si X es un espacio topológico, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *X es localmente conexo.*

(2) *Si $U \subseteq X$ es abierto, entonces las componentes conexas de U son abiertas.*

(3) *Si $U \subseteq X$ es abierto y $p : U \to U'$ es la reflexión de U en los totalmente inconexos, entonces U' es discreto.*

Prueba.
(1) ⇔ (2) Sean U abierto de X y $x \in U$. Por hipótesis existe una vecindad conexa B de x tal que $x \in B \subseteq U$ y además $x \in B \subseteq C_U(x)$, por lo tanto $C_U(x)$ es abierta.

Recíprocamente, si las componentes conexas de los abiertos son abiertas, sea $x \in X$, definimos $\mathcal{B}_x = \{B \subseteq X : B$ es componente conexa de algún abierto que contiene a $x\}$. Por lo tanto, si $x \in U$ con U abierto y B es la componente conexa en U que contiene a x, se tiene que tal que B está en $\mathcal{B}_x$.

(2) ⇔ (3) Dado que la reflexión 2.3.2 es una identificación de las componentes conexas a un punto y por hipótesis éstas son abiertas en U, entonces los puntos en U' son abiertos.

Recíprocamente, si U' es discreto, entonces la imagen inversa bajo p de los puntos (que son las componentes conexas) son abiertas en U. □

2.3.5 Lema. *Si $\{f_i : Y_i \to Y\}_{i \in I}$ es un pozo final y, para cada $i \in I$, Y_i es localmente conexo, entonces la reflexión dada por 2.3.2, digamos $r : Y \to Y'$, tiene como contradominio Y' un espacio discreto.*

Prueba. Sean $\{r_i : Y_i \to Y_i'\}_{i \in I}$ y $r : Y \to Y'$ reflexiones en los totalmente inconexos. Entonces, para toda $i \in I$, existe una única función continua f_i' tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r, "r_i"] \arrow[d, "f_i"'] & Y_i' \arrow[d, "f_i'"] \\ Y \arrow[r, "r"] & Y' \end{tikzcd}$$

Puesto que $(f_i)_{i\in I}$ es final y r es identificación, $(r \circ f_i)_{i\in I}$ es un pozo final ya que dado cualquier $U \subseteq Y'$ tal que $f_i^{-1}(r^{-1}(U))$ es abierto en Y_i para toda i, se tiene que $r^{-1}(U)$ es abierto en Y y por lo tanto U es abierto en Y'. En consecuencia, dado que r_i es una identificación, se tiene que para todo $U \subseteq Y'$ tal que $r_i^{-1}((f_i')^{-1}(U))$ es abierto, por un lado $(f_i')^{-1}(U)$ es abierto en Y_i' y por otro U es abierto en Y' (conmutatividad del diagrama). Por la proposición anterior, Y_i' es discreto y, por lo tanto, cualquier subconjunto de Y' es abierto, es decir, Y' es discreto. $\square$

2.3.6 Proposición. *Sea $\{f_i : X_i \to X\}_{i\in I}$ un pozo final y, para cada $i \in I$, X_i un espacio localmente conexo. Entonces X es localmente conexo.*

Prueba. Todo conjunto abierto U de X cumple que $\{f_i|^{U}_{f_i^{-1}(U)}\}_{i\in I}$ es un pozo final, ya que dado $W \subseteq U$ tal que $f_i^{-1}|_{f_i^{-1}(U)}(W)$ es abierto para toda i, por la continuidad de f_i, tenemos que W es abierto en $f_i^{-1}(U)$ y por ser $\{f_i\}_{i\in I}$ final, concluimos que W es abierto de U. Por lo tanto, haciendo uso del lema anterior, la reflexión de U en los totalmente inconexos es discreta, es decir, X es localmente conexo ((3) de 2.3.4).

2.3.7 Corolario. *Los coproductos y cocientes de espacios localmente conexos son localmente conexos.*

Prueba. Si $\coprod_{j\in J} X_j$ es el coproducto de los espacios topológicos X_j con $j \in J$, entonces la familia de inyecciones $m_j : X_j \to \coprod_{j\in J} X_j$ es un pozo final.

Si $p : X \to Y$ es identificación entonces la topología de Y es final respecto a p y X. $\square$

2.3.8 Proposición. *La propiedad de ser tipt es cociente reflexiva.*

Prueba. La propiedad es claramente topológica.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{f_j : X \to X_j\}_{j\in J}$ la fuente de todas las funciones continuas con dominio X y codominio un espacio tipt. Definimos en X la relación $\sim$ como; $x \sim x' \Leftrightarrow f_j(x) = f_j(x')$ para toda $j \in J$. Claramente $\sim$ es una relación de equivalencia. Consideremos el cociente y la proyección $p : X \to X/\sim$. Entonces tenemos que para toda $j \in J$ existe una única aplicación $m_j : X/\sim \to X_j$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "p"'] & X_j \\ X/\sim \arrow[ur, "m_j"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora, por como está definida $\sim$ tenemos que $\{m_j\}_{j\in J}$ separa puntos, es decir, es monofuente y por 2.2.12 concluimos que $X/\sim$ es tipt. Por lo tanto $p : X \to X/\sim$ es una reflexión de X en los tipt. $\square$

2.3.9 Observación. A diferencia de lo que pasa con los espacios totalmente inconexos, en general no se puede afirmar que la reflexión de un espacio topológico en los tipt sea la identificación de las componentes por trayectorias del espacio en un punto. En efecto, consideramos las componentes por trayectorias del conjunto $E = \{(0,0)\} \cup f(0, \frac{1}{\pi}] \subseteq \mathbb{R}^2$ con f como en (3) de 1.2.3, dadas por $\{(0,0)\}$ y $f(0, \frac{1}{\pi})$. Al identificar cada una de ellas con un punto obtenemos el espacio de Sierpinski que es cpt.

2.3.10 Definición. Una propiedad topológica P' es *correflexiva* si, dado un espacio topológico X con topología τ, existe una topología τ' en X tal que:

(1) $\tau \subseteq \tau'$.

(2) (X, τ') tiene la propiedad P'.

(3) Si $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ es continua y (Y, σ) tiene la propiedad P', entonces $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau')$ es continua.

2.3.11 Proposición. *La propiedad de ser localmente conexo es correflexiva.*

Prueba. La propiedad es claramente topológica.

Sean (X, τ) un espacio topológico y $\{f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau)\}_{i \in I}$ el pozo de todas las funciones continuas con dominio un espacio topológico localmente conexo y codominio (X, τ). Sea τ' la topología final de X respecto a $(f_i, \tau_i)_{i \in I}$. Entonces $1_X : (X, \tau') \to (X, \tau)$ y $f_i : (X_i, \tau_i) \to (X, \tau')$ para toda $i \in I$ son continuas. Si $f : (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ es continua y (Y, σ) es localmente conexo, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $f = f_{i_0}$ y por lo tanto $f_{i_0} = f : (Y, \sigma) = (X_{i_0}, \tau_{i_0}) \to (X, \tau')$ es continua. □

2.3.12 Definición. Se dice que un espacio topológico X es *localmente conectable por trayectorias* si cada $x \in X$ tiene una base local de vecindades en X cuyos elementos son cpt.

2.3.13 Lema. *Si $f : X \to Y$ es continua y $y \in f(X)$, entonces $f^{-1}(c(y))$ es unión de componentes conexas por trayectorias de X.*

Prueba. Puesto que $y \in f(X)$, $f^{-1}(c(y)) \neq \varnothing$. Si $x \in f^{-1}(c(y))$, $f(c(x)) \cap c(y) \neq \varnothing$, pero $f(c(x))$ es cpt, por lo tanto $f(c(x)) \cup c(y)$ es cpt y dado que $c(y)$ es la unión de todos los conjuntos cpt que tienen a y, concluimos que $f(c(x)) \subseteq c(y)$, es decir, $f^{-1}(c(y)) = \bigcup\{c(x) | x \in f^{-1}(c(y))\}$. □

2.3.14 Proposición. *La propiedad de ser localmente cpt es una propiedad correflexiva. Si X es un espacio topológico y X' es el espacio cuyo conjunto subyacente es el mismo que el de X y cuya topología tiene como base las componentes por trayectorias de los abiertos de X entonces $1_X : X' \to X$ es una correflexión de X en los localmente cpt.*

Prueba. Sean $f : Y \to X$ continua, Y localmente cpt y B un básico de la topología de X'. Entonces B es una componente por trayectorias de un abierto A de X. Por ser f continua, se tiene $f^{-1}(A)$ es un abierto en Y. Además, las componentes por trayectorias de $f^{-1}(A)$ son abiertos en Y (por 2.3.15). Por 2.3.13, $f^{-1}(B)$ es la unión de componentes por trayectorias de $f^{-1}(A)$, y por lo tanto $f^{-1}(B)$ es abierto, es decir, $f : Y \to X'$ es continua.

Para ver que X' es localmente cpt, tomemos un básico de la topología de X', digamos B. Si $x, x' \in B$ entonces, por ser B componente por trayectorias de un abierto de X, existe $w : I \to X$ continua tal que $w(0) = x$, $w(1) = x'$ y $w(I) \subseteq B$. Pero I es localmente cpt, por lo tanto $w : I \to X'$ es continua, es decir, B con la topología heredada de X' es cpt. Por lo que $1_X : X' \to X$ es una correflexión de X en los localmente cpt. □

2.3.15 Proposición. *Si X es un espacio topológico, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *X es localmente cpt.*

(2) *Para todo A abierto de X, las componentes por trayectorias de A son abiertas.*

(3) *X posee una base para su topología cuyos elementos son cpt.*

(4) *Para todo A abierto de X. Si $p : A \to A'$ es la identificación de las componentes por trayectorias de A en un punto, entonces A' es discreto y es la reflexión de A en los tipt.*

Prueba.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sean $A \subseteq X$ abierto y $a \in A$. Veamos que la componente por trayectorias en A de a es abierta en A. Por hipótesis existe una vecindad $N \subseteq X$ cpt tal que $a \in N \subseteq A$, entonces N es un abierto relativo a A tal que $a \in N \subseteq c_A(a)$, es decir, $c_A(a)$ es abierto.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea β la familia de componentes por trayectorias de abiertos de X. Por hipótesis, cualquier abierto A de X tiene componentes por trayectorias abiertas, por lo que si $a \in A$, $a \in c_A(a) \subseteq A$ y $c_A(a)$ es un abierto conexo contenido en A. Por lo tanto β es base de X.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea β una base de X cuyos elementos son cpt. Para $x \in X$, definimos $\beta_x = \{B \in \beta : x \in B\}$. Entonces β_x es una base local en x de elementos cpt.

(2) $\Rightarrow$ (4) Sean A abierto de X y $p : A \to A'$ la identificación de cada una de las componentes por trayectorias de A en un punto. Entonces, si $a' \in A'$, $p^{-1}(a')$ es una componente por trayectorias de A, es decir, $p^{-1}(a')$ es un abierto y por lo tanto $\{a'\}$ es un abierto en A', esto es, la topología de A' es discreta, lo cual significa que A' es tipt.

Si $f : A \to Y$ es continua con Y tipt, entonces dado $a' \in A'$, puesto que $p^{-1}(a')$ es componente por trayectorias de A, se tiene que $f(p^{-1}(a'))$ es un punto, por lo tanto existe una función continua $h : A' \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \\ A' \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir, p es una reflexión de A en los tipt.

(4) $\Rightarrow$ (2) Si A es un abierto de X y $p : (A, \tau_A) \to (A', \tau')$ es la identificación de cada componente por trayectorias de A en un punto, entonces se tiene por hipótesis que τ' es discreta. Por lo tanto, si $a \in A$, se tiene que $p^{-1}(p(a)) = c_A(a)$ es abierto. $\square$

Capítulo 3

Reflexiones y correflexiones en categorías

3.1. Reflexiones

3.1.1 Definición. Sean $\mathfrak{B}$ una categoría, $\mathfrak{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{B}$ y B un $\mathfrak{B}$–objeto.

(1) Una $\mathfrak{A}$–*reflexión* para B es un $\mathfrak{B}$–morfismo $B \xrightarrow{r} A$ donde A es un $\mathfrak{A}$–objeto, con la siguiente propiedad universal: para cualquier $\mathfrak{B}$–morfismo $B \xrightarrow{f} A'$ con A' un $\mathfrak{A}$–objeto, existe un único $\mathfrak{A}$–morfismo $A \xrightarrow{\bar{f}} A'$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

(2) $\mathfrak{A}$ es una categoría reflexiva si todo $\mathfrak{B}$–objeto tiene una $\mathfrak{A}$–reflexión.

3.1.2 Ejemplos. (1) Formando cocientes:

(a) Sea $\mathfrak{B} = Grp$ y $\mathfrak{A} = Ab$ la subcategoría plena de grupos abelianos. Sea G un grupo y G' su subgrupo conmutador [1]. Notemos que G/G' es abeliano; si $x, y \in G$, entonces $y^{-1}x^{-1}yx \in G'$, es decir $y^{-1}x^{-1}yxG' = G'$ y así

$$G' = (xy)(y^{-1}x^{-1}yx)G' = yxG'.$$

Afirmación: $G \xrightarrow{p} G/G'$ es una $\mathfrak{A}$–reflexión de G. Sea $G \xrightarrow{f} H$ un $\mathfrak{B}$–morfismo con H abeliano, definimos $\bar{f} : G/G' \to H$ como $\bar{f}(gG') = f(g)$, veamos que $\bar{f}$ está bien definida; si $gG' = g'G'$, entonces $gg'^{-1} \in G' \Rightarrow gg'^{-1} = a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdot \ldots \cdot a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1} \Rightarrow f(gg'^{-1}) = f(a_1)f(b_1)f(a_1)^{-1}f(b_1)^{-1} \cdot \ldots \cdot f(a_n)f(b_n)f(a_n)^{-1}f(b_n)^{-1} = 1_H$, es decir, $1_H = f(gg'^{-1}) = f(g)f(g'^{-1})$ y dado que el inverso es único, concluimos que $f(g) = f(g')$. Es claro que $\bar{f} \circ p = f$ y es única porque p es suprayectiva, esto es, cancelable por la derecha.

(b) Sea $\mathfrak{B} = Ab$ y $\mathfrak{A} = TFAb$ la subcategoría plena de grupos abelianos libres de torsión[2]. Sea G un grupo abeliano y TG su subgrupo de torsión, entonces $G \xrightarrow{p}$

[1] El subgrupo conmutador está generado por los elementos $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ con $x, y \in G$.

[2] El subgrupo de torsión H de un grupo abeliano G es aquél cuyos elementos son aquellos que tienen orden finito, es decir, $x \in H$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que n anula a x.

G/TG es una $\mathfrak{A}$–reflexión de G. Notemos que G/TG es libre de torsión, pues si existiese $g \in G/TG$ de orden finito, entonces existiría $n \in \mathbb{N}$ tal que $ng + TG = n(g + TG) = TG$, esto es, $g \in TG$.

Sea $G \xrightarrow{h} H$ un morfismo en Ab. Definimos $G/TG \xrightarrow{\bar{h}} H$ como $\bar{h}(g + TG) = h(g)$. Note que $\bar{h}$ está bien definida ya que si $g + TG = g' + TG \Rightarrow g - g' \in TG \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n(g - g') = 0_H \Rightarrow n(\bar{h}(g + TG) - \bar{h}(g' + TG)) = h(n(g - g')) = \bar{h}(n(g - g') + TG)$, pero $h(n(g - g')) = 0_H$, entonces $\bar{h}(\bar{0_G}) = 0_H$ y por lo tanto $\bar{h}(g + TG) - \bar{h}(g' + TG) = 0_H$ porque H es libre de torsión. En consecuencia, $\bar{h}(g + TG) = \bar{h}(g' + TG)$. Claramente $\bar{h} \circ p = h$ y $\bar{h}$ es única.

(2) Modificación de una estructura. Sean $\mathfrak{B} = Rel$ y $\mathfrak{A} = Sym$ la subcategoría plena de relaciones simétricas. Entonces, la función $(X, \rho) \xrightarrow{1_X} (X, \rho \cup \rho^{-1})$, con ρ^{-1} la relación inversa definida como $\rho^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in \rho\}$, claramente preserva la relación ρ y es una $\mathfrak{A}$–reflexión para (X, ρ).

Sea $(X, \rho) \xrightarrow{f} (Y, \sigma)$ un $\mathfrak{B}$–morfismo con σ simétrica. Definimos $\bar{f} : (X, \rho \cup \rho^{-1}) \to (Y, \sigma)$ como $\bar{f}(x) = f(x)$ (la función subyacente). Veamos que dicha función es un $\mathfrak{A}$–morfismo. Si $(x, x') \in \rho$ entonces $(f(x), f(x')) \in \sigma$, pues f es un morfismo. Ahora, como σ es simétrica, se tiene que $(f(x'), f(x)) \in \sigma$. Por lo tanto, preserva la relación de ρ^{-1}, es decir, $\bar{f}$ es un $\mathfrak{A}$–morfismo que claramente hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,\rho) \arrow[r, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & (X, \rho \cup \rho^{-1}) \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\
 & (Y, \sigma)
\end{tikzcd}$$

Además, $\bar{f}$ es única porque la identidad es suprayectiva y se cancela por la derecha.

(3) Completaciones. Veamos primero que todo espacio métrico tiene una completación.

(a) Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, existe un espacio métrico completo (X^*, d^*) y una isometría $\varphi : X \to X^*$ tal que $\varphi(X)$ es denso en X^*. A la pareja $(\varphi, (X^*, d^*))$ se le llama *completación* del espacio métrico (X, d).

Prueba. Denotemos por S al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en X. Definimos sobre S la siguiente relación: $(x_n) \sim (y_n)$ si y sólo si $\lim\limits_{n\to\infty} (d(x_n, y_n)) = 0$ con $n \in \mathbb{N}$. Claramente $\sim$ es de equivalencia. Definimos $X^* = S/\sim$ y $d^* : X^* \times X^* \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como $d^*(\overline{(x_n)}, \overline{(y_n)}) = \lim\limits_{n\to\infty} (d(x_n, y_n))$ y afirmamos que d^* es métrica. Para ver que está bien definida, basta notar que si (x_n) y (y_n) son sucesiones de Cauchy entonces $(d(x_n, y_n))$ es de nuevo una sucesión de Cauchy (por lo tanto converge en $\mathbb{R}$), y es métrica porque d lo es. Cada elemento $x \in X$ lo identificamos en X^* con la sucesión constante (x). Así, la función $\varphi : (X, d) \to (X^*, d^*)$ definida como $\varphi(x) = \overline{(x)}$ es una isometría.
Para verificar que $\varphi(X)$ es denso en X^*, consideremos $(x_n) \in S$ tal que $\overline{(x_n)} \notin \varphi(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\overline{x_i} = \overline{(x_i, x_i, \ldots)}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ (que pertenece a $\varphi(X)$), como (x_n) es de Cauchy, existe un entero $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ para toda $i, j > N$. Luego, tenemos

$$d^*(\overline{(x_n)}, (\overline{x_{N+1}})) = \lim_{n\to\infty} (d(x_n, x_{N+1})) < \varepsilon$$

lo cual significa que $\overline{(x_n)}$ es un punto de acumulación de $f(X)$, por lo tanto $\varphi(X)$ es denso en X^*.

Por último, X^* es completo. Sea (s_n) sucesión de Cauchy en X^*, es decir, $s_n = \overline{(x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots)}$. Podemos suponer que el diámetro del conjunto $\{x_i^n | i \in \mathbb{N}\}$ es menor que $\frac{1}{n}$, ya que para algún $K \in \mathbb{N}$; $d(x_i^n, x_j^n) < \frac{1}{n}$ para $i, j > K$ y así $(x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots)$ es equivalente a $(x_{K+1}^n, x_{K+2}^n, x_{K+3}^n, \ldots)$, es decir, la primera puede ser representada por ésta última.

Ahora veamos que $x = (x_1^1, x_2^2, x_3^3, \ldots)$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d^*(s_n, s_m) = \lim_{k\to\infty}(d(x_k^n, x_k^m)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para $n, m > N$, ya que (s_n) es de Cauchy. Escogemos $t > N$ fijo tal que el diámetro del conjunto $\{x_i^t : i \in \mathbb{N}\}$ sea menor a $\frac{\varepsilon}{3}$, es decir, $d(x_n^t, x_m^t) < \frac{\varepsilon}{3}$ con $n, m > N$, entonces

$$d^*(x_m^m, x_n^n) \leq d(x_m^m, x_m^t) + d(x_m^t, x_n^t) + d(x_n^t, x_n^n) < \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Y por lo tanto, x es de Cauchy. Y dado que $d^*(s_n, \overline{x}) = \lim_{t\to\infty}(d(x_t^n, x_t^t)) < \frac{\varepsilon}{3}$ para $n > N$, entonces $(s_n) \to \overline{x}$, es decir, X^* es completo.

(b) Sea $\mathfrak{B} = Met_u$ y $\mathfrak{A}$ la subcategoría plena de espacios métricos completos. Entonces, la completación de un espacio métrico (X, d) a (X^*, d^*) es una $\mathfrak{A}$–reflexión para (X, d).

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X,d) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & (X^*,d^*) \arrow[d, dotted, "\bar{f}"] \\
& (Y,d')
\end{tikzcd}$$

con φ y f funciones uniformemente continuas (φ es isometría) y $\bar{f}$ definida de la siguiente manera: dado $\overline{x} = \overline{(x_1, x_2, x_3, \ldots)} \in X^*$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d'(f(x_i), f(x_j)) < \varepsilon$ si $d(x_i, x_j) < \delta$ (continuidad uniforme de f), y $d(x_i, x_j) < \delta$ se cumple por ser (x_n) de Cauchy, es decir, existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j > N$ entonces $d(x_i, x_j) < \delta$. Por lo tanto $(f(x_n))$ converge en (Y, d'), digamos a x'. Definimos $\bar{f}(\overline{x}) = x'$.

$\bar{f}$ está bien definida ya que dado otro representante de $\overline{x}$, digamos (y_n), entonces

$$d(y_n, x') \leq d(y_n, x_m) + d(x_m, x') < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para n y m suficientemente grandes. Por lo tanto (y_n) converge a x'.

Claramente $\bar{f} \circ \varphi = f$ y es única porque cualquier otra función g tal que $\bar{f} \circ \varphi = f = g \circ \varphi$, se tiene que $g|_X = \bar{f}|_X$ y como X es denso en X^*, entonces $g = \bar{f}$.

3.1.3 Proposición. *Las reflexiones son únicas salvo isomorfismo, es decir*:

(1) *Si $B \xrightarrow{r} A$ y $B \xrightarrow{\bar{r}} \bar{A}$ son $\mathfrak{A}$–reflexiones para B, entonces existe un $\mathfrak{A}$–isomorfismo $k : A \to \bar{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\bar{r}"'] & A \arrow[d, dotted, "k"] \\
& \bar{A}
\end{tikzcd}$$

(2) *Si $B \xrightarrow{r} A$ es una $\mathfrak{A}$–reflexión para B y $k : A \to \bar{A}$ es un $\mathfrak{A}$–isomorfismo, entonces $B \xrightarrow{k \circ r} \bar{A}$ es una $\mathfrak{A}$–reflexión para B.*

Prueba.

(1) La existencia de k tal que $\bar{r} = k \circ r$ se sigue de la definición de $\mathfrak{A}$–reflexión para A. De la misma manera, existe un morfismo $\bar{k}$ tal que $r = \bar{k} \circ \bar{r}$. Entonces $(\bar{k} \circ k) \circ r = r = 1_A \circ r$, como se muestra en el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "\bar{r}"] \arrow[ddr, "r"'] & A \arrow[d, dotted, "k"] \arrow[dd, bend left, "1_A"] \\
& \bar{A} \arrow[d, dotted, "\bar{k}"] \\
& A
\end{tikzcd}
$$

Por la unicidad, de la definición de reflexión, se tiene que $\bar{k} \circ k = 1_A$; y por un razonamiento similar $k \circ \bar{k} = 1_{\bar{A}}$, esto es, k es un isomorfismo.

(2) Dado que k es un isomorfismo, existe $\bar{k} : \bar{A} \to A$ tal que $\bar{k} \circ k = 1_A$. Ahora, si $B \xrightarrow{f} A'$ es un $\mathfrak{B}$–morfismo con A' en $\mathfrak{A}$, entonces el diagrama izquierdo conmuta

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[r, "k"] \arrow[d, dotted, "\exists! \bar{f}"] & \bar{A} \arrow[dl, dotted, "\bar{\bar{f}}"] \\
& A'. &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, existe $A \xrightarrow{\bar{f}} A'$ tal que $\bar{f} \circ r = f$. Definimos $\bar{\bar{f}} = \bar{f} \circ \bar{k} : \bar{A} \to A'$ que cumple $\bar{\bar{f}} \circ k \circ r = (\bar{f} \circ \bar{k}) \circ k \circ r = \bar{f} \circ r = f$, y es única ya que si existe g tal que $g \circ k \circ r = f$ entonces $g \circ k = \bar{f}$ por la unicidad en diagrama derecho y por lo tanto $\bar{\bar{f}} = \bar{f} \circ \bar{k} = g \circ k \circ \bar{k} = g$. □

3.1.4 Proposición. *Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{B}$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.*

(1) *$\mathfrak{A}$ es una subcategoría plena de $\mathfrak{B}$.*

(2) *Para cada $\mathfrak{A}$–objeto A, $A \xrightarrow{1_A} A$ es una $\mathfrak{A}$–reflexión.*

(3) *Para cada $\mathfrak{A}$–objeto A, las flechas $\mathfrak{A}$–reflexivas en A son $\mathfrak{A}$–isomorfismos* en A.

(4) *Para cada $\mathfrak{A}$–objeto A, las flechas $\mathfrak{A}$–reflexivas en A son $\mathfrak{A}$–morfismos.*

Prueba. (1) ⇒ (2): Dado cualquier $\mathfrak{B}$–morfismo $A \xrightarrow{f} B$ con B en $\mathfrak{A}$, se tiene que f es un $\mathfrak{A}$–morfismo, pues $\mathfrak{A}$ es una subcategoría plena y, además, f es único con respecto a la propiedad de reflexividad ya que dado g tal que $f = g \circ 1_A$ entonces $g = f$.

(2) ⇒ (3): Se sigue de (1) en 3.1.3 y del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[dr, "r"'] & A \arrow[d, dotted, "\exists! k"] \\
& A'
\end{tikzcd}
$$

donde r es una reflexión y k es un $\mathfrak{A}$–isomorfismo.

(3) $\Rightarrow$ (4): Inmediato.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sea A un $\mathfrak{A}$–objeto con $\mathfrak{A}$–reflexión $A \xrightarrow{r_A} A'$ y $A \xrightarrow{f} B$ un $\mathfrak{B}$–morfismo con B en $\mathfrak{A}$. Entonces existe un único $\mathfrak{A}$–morfismo $\bar{f}$ tal que $f = \bar{f} \circ r_A$, por lo tanto $\mathfrak{A}$ es plena. $\square$

3.1.5 Proposición. *Sean $\mathfrak{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{B}$ y, para cada $\mathfrak{B}$–objeto, $B \xrightarrow{r_B} A_B$ una $\mathfrak{A}$–reflexión. Entonces, existe un funtor $R : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tal que las siguientes condiciones se cumplen*:

(1) $R(B) = A_B$ *para cada $\mathfrak{B}$–objeto B.*

(2) *Para cada $\mathfrak{B}$–morfismo $B \xrightarrow{f} B'$, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & R(B) \arrow[d, "R(f)"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"'] & R(B') \end{tikzcd}$$

conmuta (es decir, existe una transformación natural $r : I_{\mathfrak{B}} \dot{\to} U \circ R$ donde $I_{\mathfrak{B}}$ es el funtor identidad en $\mathfrak{B}$ y U es el funtor inclusión de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$).

Prueba. R existe porque dado f como en el diagrama, se tiene el siguiente morfismo $B \xrightarrow{r_{B'} \circ f} R(B') = A_{B'}$ y como r_B es una reflexión, existe un único $R(f)$ que hace conmutar el diagrama.

R es funtor. Conserva identidades por la unicidad de la reflexión en

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "1_B"'] & R(B) \arrow[d, "R(f)"'] \arrow[d, bend left, "1_A"] \\ B \arrow[r, "r_B"'] & R(B) \end{tikzcd}$$

y conserva composiciones por la unicidad de la reflexión en el diagrama exterior y la conmutatividad de los cuadrados:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & R(B) \arrow[d, "R(f)"'] \arrow[dd, bend left, "R(g \circ f)"] \\ B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "g"'] & R(B) \arrow[d, "R(g)"'] \\ B' \arrow[r, "r_{B''}"'] & R(B) \end{tikzcd}$$

$\square$

3.1.6 Definición. Un funtor $R : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ construido como en la proposición anterior es llamado un *reflector* para $\mathfrak{A}$.

3.1.7 Proposición. *Sea $\mathfrak{A}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{B}$. Entonces cualesquiera dos reflectores son naturalmente isomorfos.*

Prueba. Sean R y S reflectores para $\mathfrak{A}$ con reflexiones asociadas $B \xrightarrow{r_B} R(B)$ y $B \xrightarrow{s_B} S(B)$, entonces existen $\mathfrak{A}$–morfismos f_B y g_B que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[dr, "s_B"'] & R(B) \arrow[d, dotted, "f_B"] \\ & S(B) \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "s_B"] \arrow[dr, "r_B"'] & S(B) \arrow[d, dotted, "g_B"] \\ & R(B) \end{tikzcd}$$

La unicidad en la definición de reflexión implica, como en 3.1.3, que $g_B \circ f_B = 1_{R(B)}$ y $f_B \circ g_B = 1_{S(B)}$, por lo tanto f_B es un $\mathfrak{A}$–isomorfismo para todo B en $\mathfrak{B}$,

Que sea una transformación natural (y por lo tanto un isomorfismo natural), se sigue de la conmutatividad del diagrama izquierdo, el exterior y la propiedad de unicidad para r_B:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[d, "f"'] & R(B) \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "R(f)"] & S(B) \arrow[d, "s(f)"] \\ B' \arrow[r, "r_{B'}"'] & R(B') \arrow[r, "f_{B'}"'] & S(B') \end{tikzcd}$$

$\square$

3.1.8 Proposición. *Dada $\mathfrak{A}$ subcategoría de $\mathfrak{B}$, son equivalentes*:

(1) $\mathfrak{A}$ *es una subcategoría reflexiva de* $\mathfrak{B}$.

(2) *El funtor inclusión $U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tiene adjunto izquierdo.*

Prueba. Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{B}$. Entonces el funtor inclusión $U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tiene adjunto izquierdo $R : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ dado en 3.1.5. Veamos que R cumple la propiedad universal (1) del teorema 1.2.21. Sean B un $\mathfrak{B}$–objeto, A un $\mathfrak{A}$–objeto y $B \xrightarrow{f} U(A) = A$ un $\mathfrak{B}$–morfismo, entonces existe un único $\mathfrak{A}$–morfismo $R(B) \xrightarrow{\bar{f}} A$, porque $\mathfrak{A}$ es subcategoría reflexiva de $\mathfrak{B}$, tal que $f = U(\bar{f}) \circ r_B = \bar{f} \circ r_B$, es decir, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "r_B"] \arrow[dr, "f"'] & U(R(B)) \arrow[d, "U(\bar{f})"] \\ & U(A) \end{tikzcd} \in \mathfrak{B} \qquad \begin{tikzcd} R(B) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ A \end{tikzcd} \in \mathfrak{A}$$

Por lo tanto U tiene adjunto izquierdo R.

Ahora supongamos que $U : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ tiene adjunto izquierdo $Q : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. Sea B un $\mathfrak{B}$-objeto, definimos una reflexión en B como el $\mathfrak{B}$–morfismo $B \xrightarrow{r_B} U(Q(B))$ dado por (1) de teorema 1.2.21 que claramente cumple la propiedad universal de las reflexiones. Por lo tanto $\mathfrak{A}$ es una subcategoría reflexiva de $\mathfrak{B}$. Notemos que Q es un reflector y por 3.1.7, R y Q son naturalmente isomorfos.

Para el caso de correflexiones se tiene un enunciado dual.

3.2. Correflexiones

El concepto dual de subcategoría reflexiva es el de subcategoría *correflexiva*, esto es, $\mathfrak{A}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{B}$ si y sólo si $\mathfrak{A}^{op}$ es reflexiva en $\mathfrak{B}^{op}$.

3.2.1 Definición. Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{B}$ y B un $\mathfrak{B}$–objeto

(1) una $\mathfrak{A}$–*correflexión* para B es un $\mathfrak{B}$–morfismo $A \xrightarrow{c} B$ donde A es un $\mathfrak{A}$–objeto, con la siguiente propiedad universal: para cualquier $\mathfrak{B}$–morfismo $B \xrightarrow{f} A'$ con A' un $\mathfrak{A}$–objeto, existe un único $\mathfrak{A}$–morfismo $A \xrightarrow{f'} A'$ tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "c"'] & B \end{tikzcd}$$

(2) $\mathfrak{A}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{B}$ si todo $\mathfrak{B}$–objeto tiene una $\mathfrak{A}$–coreflexión.

3.2.2 Ejemplos. (1) Sea $\mathfrak{B} = Ab$ y $\mathfrak{A}$ la subcategoría plena de grupos abelianos de torsión. Si G es un grupo abeliano y TG es su subgrupo de torsión, el monomorfismo canónico $TG \xrightarrow{i} G$ es una $\mathfrak{A}$–correflexión de G.

Sea $H \xrightarrow{f} G$ un homomorfismo en $\mathfrak{B}$ con H en $\mathfrak{A}$, definimos $\bar{f} : H \to TG$ como la función subyacente, notemos que está bien definida ya que al ser H de torsión , dado $h \in H \setminus \{0_h\}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nh = 0_H$, entonces $0_G = f(0_H) = f(nh) = nf(h) = n\bar{f}(h)$. Además $\bar{f}$ es homomorfismo porque f lo es. La unicidad se sigue de la inyectividad de la inclusión, esto es, porque se cancela por la izquierda.

(2) Modificación de una estructura. Sea $\mathfrak{B} = Rel$ y $\mathfrak{A} = Sym$, entonces $(X, \rho \cap \rho^{-1}) \xrightarrow{1_X} (X, \rho)$ que claramente preserva la relación, es una $\mathfrak{A}$–correflexión para (X, ρ).

Sea $(Y, \sigma) \xrightarrow{f} (X, \rho)$ un $\mathfrak{B}$–morfismo con σ simétrica, definimos $\bar{f} : (Y, \sigma) \to (X, \rho \cap \rho^{-1})$ como $\bar{f}(y) = f(y)$ (la función subyacente), veamos que dicha función es un $\mathfrak{A}$–morfismo. Si $(y, y') \in \sigma$ entonces $(f(y), f(y')), (f(y'), f(y)) \in \rho$ pues f es morfimo, por lo tanto $\bar{f}$ es un $\mathfrak{A}$–morfismo que claramente hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} (Y,\sigma) \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[dr, "f"] & \\ (X, \rho \cap \rho^{-1}) \arrow[r, "1_X"'] & (X,\rho) \end{tikzcd}$$

Además $\bar{f}$ es única porque la identidad es inyectiva.

3.2.3 Ejemplos. Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría plena y no vacía de $\mathfrak{Top}$. Para cualquier espacio topológico X, sea $\mathfrak{A}|X$ la categoría coma cuyos objetos son las aplicaciones $f : B_f \to X$ en $\mathfrak{Top}$ donde B_f es un $\mathfrak{A}$–objeto, y cuyos morfismos de f a g son todos los mapeos $h : B_f \to B_g$ tal que $g \circ h = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B_f \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B_g \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Notemos que dado lo anterior, tenemos un diagrama en $\mathfrak{Top}$ y, con él, un pozo natural. Definimos $k(X) = \varinjlim D(X)$, es decir, como el codominio del colímite.

3.2.4 Observación. Por ser un colímite, $k(X)$ se caracteriza por la siguiente propiedad universal:

Dado cualquier pozo natural $(h_f : B_f \to Z)$ que es compatible con los morfismos $h : B_f \to B_g$ que hacen conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B_f \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_f"'] & & Bg \arrow[dl, "h_g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

existe una única aplicación $k(X) \xrightarrow{p} Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B_f \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[ddr, "h_f"'] & & B_g \arrow[dl, "g'"'] \arrow[ddl, "h_g"] \\ & k(X) \arrow[d, dotted, "p"] & \\ & Z & \end{tikzcd}$$

es decir, $p \circ f' = h_f$ y $p \circ g' = h_g$ para cualesquiera f' y g'.

3.2.5 Proposición. *Para cualquier espacio X en $\mathfrak{Top}$ existe una forma canónica de elegir a $k(X)$ sobre la subcategoría plena y no vacía $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{Top}$ tal que X y $k(X)$ tienen el mismo conjunto subyacente.*

Prueba. Dividiremos la prueba en tres pasos. El primero será definir un espacio topológico X' que hace continua a la función identidad entre los conjuntos subyacentes $X' \xrightarrow{1} X$ y que factoriza a través de X' a todos los elementos de $\mathfrak{A}|X$, el segundo será probar que dicho espacio topológico es compatible con las funciones $h : B_f \to B_g$ y el tercero ver que X' posee la propiedad universal de la observación anterior. De esta manera queda unívocamente definido el colímite bajo homeomorfismo a partir de la propiedad universal.

(1) Sea X' el espacio topológico dado por el conjunto subyacente de X y cuya topología está definida como sigue:

$U \subseteq X'$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(U)$ es abierto en B_f para todo $\mathfrak{A}|X$–objeto f.

Afirmación: $X' \xrightarrow{1} X$ es continua y cada $\mathfrak{A}|X$–objeto f se factoriza como en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & B_f \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X' \arrow[rr, "1_{X'}"] & & X \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

con f' la función subyacente de f. Para cualquier abierto V de X se cumple que $f^{-1}(V)$ es abierto en B_f para todo $\mathfrak{A}|X$–objeto f, entonces se sigue de la definición que $f^{-1}(V)$ es abierto de X'. Además, si f' es la función subyacente de f, se tiene que la imagen inversa bajo f' de un abierto V de X' es, como conjunto, $f^{-1}(V)$ y éste es abierto por definición, esto es, f' es continua en X'. Así, claramente conmuta el diagrama 2.1.

(2) Las funciones $h : B_f \to B_g$ son compatibles con X'. Dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_f \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f'"'] & B_g \arrow[dl, "g'"] \arrow[d, "g"] \\
(X',\tau) \arrow[r, "1_{X'}"'] & X
\end{tikzcd}$$

tenemos que probar, para $x \in B_f$, que se cumple la igualdad $f'(x) = g'(h(x))$. Por la factorización dada en (2.1) tenemos que $1_{X'}(f'(x)) = f(x)$ y $1_{X'}(g'(y)) = g(y)$, como h hace conmutar el triángulo con codominio X, se tiene que $g(h(x)) = f(x)$. Así, sustituyendo las igualdades anteriores, se tiene $1_{X'}(g'(h(x))) = 1_{X'}(f'(x))$ y dado que la identidad es inyectiva, concluimos que $g'(h(x)) = f'(x)$.

(3) Dado cualquier pozo natural $(h_f : B_f \to Z)$, sabemos que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_f \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "h_f"'] & & Bg \arrow[dl, "h_g"] \\
& Z &
\end{tikzcd}$$

para cualquier morfismo h del diagrama $D(X)$. Probaremos que existe un único morfismo en $\mathfrak{Top}$; $p : X' \to Z$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_f \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[ddr, "h_f"'] & & B_g \arrow[dl, "g'"'] \arrow[ddl, "h_g"] \\
& X' \arrow[d, dotted, "p"] & \\
& Z &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

conmuta, es decir, $p \circ f' = h_f$ y $p \circ g' = h_g$ para cualesquiera f' y g'.

Definimos $p : (X', \tau) \to Z$ de la siguiente manera: dado $w \in X'$ existen B_f y $x \in B_f$ tales que $f'(x) = w$, definimos $p(w) = h_f(x)$. [3]

Veamos que p está bien definida. Supongamos que existe $z \in B_g$ tal que $g'(z) = w$. Entonces existen un B_r y morfismos $u : B_r \to B_f$, $v : B_r \to B_g$ tales que $u(B_r) = x$ y $v(B_r) = z$, [4] por lo tanto $h_f(x) = h_f(u(B_r)) = h_r(B_r) = h_g(v(B_r)) = h_g(z)$, esto es, $p(w) = h_f(x) = h_g(z)$ que era lo que se quería probar.

Además h es continua porque dado $W \subseteq Z$ abierto se tiene que $f'^{-1}(p^{-1}(W)) = h_f^{-1}(W)$ (que es abierto para toda f), entonces $p^{-1}(W)$ es abierto en X'. Por último, p es única ya que dada otra función q que haga conmutar el diagrama (3.2), si $y \in X'$ existe $B_y \xrightarrow{q_y} X'$ tal que $q_y(B_y) = y$, entonces $p(y) = p(q_y(k)) = h_{q_y}(k) = q(q_y(k)) = q(y)$ para todo $k \in B_y$, y como y fue arbitrario, concluimos que $p = q$.

Por lo tanto X' es la elección canónica buscada. Definimos $k(X) := X'$. $\square$

3.2.6 Proposición. (1) *La función identidad de* $k(X) \xrightarrow{1} X$ *es continua.*

[3] La función f' existe porque funciones constantes también son elementos de $\mathfrak{A}|X$ y se pueden definir en $\mathfrak{A}$ por ser no vacío.

[4] Nótese que u y v son morfismos en $\mathfrak{A}|X$ si $r : B_r \to X'$ es constante.

(2) *$k(X)$ tiene la topología más fina*[5] *tal que para cualquier mapeo de cualquiera $\mathfrak{A}$–objeto B a X, el mapeo se factoriza a través de la función identidad de $k(X)$ a X.*

(3) *Si B es un $\mathfrak{A}$–objeto, entonces existe una correspondencia uno a uno entre los mapeos $B \xrightarrow{f} X$ y $B \xrightarrow{f'} k(X)$.*

(4) *$k(B) = B$ para todo $\mathfrak{A}$–objeto B, de hecho, $k(k(X)) = k(X)$ para todo X en $\mathfrak{Top}$.*

(5) *Si las composiciones $h \circ f$, como en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h\circ f"'] & k(X) \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

son continuas para todas las aplicaciones $B \xrightarrow{f} k(X)$ con B en $\mathfrak{A}$, entonces h es continua.

(6) *Para cualquier aplicación $X \xrightarrow{h} Y$ en $\mathfrak{Top}$, la función $k(h) : k(X) \to k(Y)$, definida igual a h sobre los conjuntos $k(X)$ y $k(Y)$, es continua. Por lo tanto, k define un funtor de $\mathfrak{Top}$ en la categoría plena cuyos objetos son todos los espacios $k(X)$ con X un espacio topológico, y morfismos $k(h)$ con h un morfismo de $\mathfrak{Top}$. Dicha categoría la denotaremos por $\mathcal{H}$.*

Prueba. (1) y (2) se siguen de la elección canónica (topología final).

(3) se sigue de (2) al factorizar cada mapeo a través de la función identidad.

(4) se sigue porque $B \xrightarrow{1_B} B$ es un $\mathfrak{A}|B$–morfismo, y por lo tanto todo abierto U de $k(B)$ es tal que $1_B^{-1}(U)$ es un abierto de B. Además, por (1) todo abierto de B es abierto de $k(B)$, es decir, $k(B) = B$. Así, $k(k(X)) = k(X)$ es inmediato.

(5) se da porque al tomar U abierto de Y, se tiene que $(h \circ f)^{-1}(U)$ es abierto de B, pero esto ocurre para toda f en $\mathfrak{A}|X$, y dado que $(h \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(h^{-1}(U))$ se tiene que $h^{-1}(U)$ es un abierto de $k(X)$. Por lo tanto, h es continua.

(6) se da porque el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "h"] & Y \\ B_f \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & \\ & k(X) \arrow[uu, "1_X"] \arrow[r, "h"'] & k(Y) \arrow[uu, "1_Y"'] \end{tikzcd}$$

ya que la composición $h \circ f$ es continua, entonces tenemos, por (3), que existe una correspondencia a $B_f \to k(X) \to k(Y)$ por $h \circ f'$ (h vista como la función subyacente). Entonces $h \circ f'$ es continua para toda f y por (5) $k(h) = h$ es continua.

[5]Dadas las topologías τ_1 y τ_2 de Z, diremos que τ_2 es más fina que τ_1 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

3.2.7 Observación. Notemos que por (6) existe una transformación natural del funtor k en el funtor identidad de $\mathfrak{Top}$ dada por

$$\begin{tikzcd} k(X) \arrow[r, "1"] \arrow[d, "k(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ k(Y) \arrow[r, "1"'] & Y \end{tikzcd}$$

3.2.8 Proposición. *$\mathcal{H}$ (del inciso (6) en la proposición anterior) es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Prueba. Sea X un espacio topológico. Entonces, la función identidad $k(X) \xrightarrow{1} X$ es continua por (1) de 3.2.6. Sea Y un objeto en $\mathcal{H}$ y $Y \xrightarrow{f} X$ una aplicación en $\mathfrak{Top}$. Entonces $Y = k(Y)$ por (4), por (6) $k(f)$ es continua y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} k(Y) = Y \arrow[d, dotted, "k(f)"'] \arrow[dr, "f"] & \\ k(X) \arrow[r, "1"'] & X \end{tikzcd}$$

La unicidad de $k(f)$ se sigue de la inyectividad de 1. Por lo tanto $k(X) \xrightarrow{1} X$ es una correflexión. $\square$

Nótese que en la construcción anterior podemos cambiar $\mathfrak{Top}$ por $Haus$ y todo se sigue cumpliendo. El siguiente ejemplo hace uso de dicho cambio.

3.2.9 Ejemplos. Sean X un espacio de Hausdorff y $\mathfrak{A}$ la subcategoría de espacios compactos de X. Si tomamos a $\mathfrak{A}|X$ su categoría coma determinada, entonces el espacio canónico $k(X)$ es un espacio compactamente generado.

Recordemos que un espacio X es compactamente generado (c.g.) si para todo $A \subseteq X$, A es cerrado si y sólo si pata todo $K \subseteq X$ compacto se tiene que $A \cap K$ es cerrado en K. Ahora veamos que X con la topología de los c.g. es equivalente a la de $k(X)$. Sea $A \subseteq X$ cerrado con en la topología c.g. Entonces, tomando $f : C \to X$ en $\mathfrak{A}|X$, $f(C)$ es compacto y por lo tanto $f(C) \cap A$ es cerrado en $f(C)$. Tomando $f^{-1}(A) = f^{-1}(f(C) \cap A) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(A) \cap C$ obtenemos que $f^{-1}(A)$ es cerrado en C para todo f en $\mathfrak{A}|X$ y para todo C, por lo tanto A es cerrado en $k(X)$. Por otro lado, sea B cerrado en $k(X)$. Entonces, en particular, para las inclusiones $i : C \to X$ con C compacto en X, se tiene que $i^{-1}(A) = A \cap C$ es cerrado en C, por lo tanto, A es cerrado en c.g. Lo que concluye que $k(X)$ es compactamente generado. $\square$

Para hacer una distinción cuando hablemos de los espacios compactamente generados por medio de la construcción 3.2.3, se denotará por $K(X)$ al espacio obtenido bajo dicha construcción con $\mathfrak{A}$ los espacios compactos de X, con X espacio de Hausdorff.

3.2.10 Proposición. (1) *La función identidad $K(X) \xrightarrow{1} X$ es continua.*

(2) *$K(X)$ es un espacio Hausdorff.*

(3) *$K(X)$ y X tienen los mismos conjuntos compactos.*

(4) *$K(X)$ es un espacio compactamente generado.*

(5) *Si X es un espacio compactamente generado entonces $K(X) = X$, de hecho, $K(K(X)) = K(X)$.*

(6) *Si la función $f : X \to Y$ es continua en conjuntos compactos entonces la función $K(f) : K(X) \to K(Y)$, definida igual que f sobre $K(X)$ y $K(Y)$, es continua.*

Prueba.

(1) Es inmediato de 3.2.6.

(2) Es claro, pues X es Hausdorff y de (1) se tiene que todo abierto de X es abierto de $K(X)$.

(3) Sea $A \subseteq K(X)$ compacto, entonces su imagen bajo la identidad es compacta por (1).

Ahora, sea $C \subseteq X$ compacto y $C' = 1^{-1}(C)$, veamos que $1|_{C'} : C' \to C$ es un homeomorfismo. Nótese que basta probar que $1_{C'}$ es cerrada. Sea $(B \cap C') \subseteq K(X)$ con B un cerrado en $K(X)$, por definición B interseca a cada compacto de X en un cerrado, esto es, $B \cap C$ (que es igual $B \cap C'$ como conjunto) es un cerrado en X, por lo tanto $B \cap C'$ es un cerrado en C', concluyendo así que $1|_{C'}$ es un homeomorfismo.

(4) Si $A \subseteq X$ interseca a cada compacto de $K(X)$ en un cerrado, por (3) interseca a cada compacto de X en un cerrado de X, esto es, A es cerrado en $K(X)$.

(5) Inmediato de 3.2.6

(6) Primero veamos que si $f : X \to Y$ es continua en compactos de X, con X compactamente generado y Y Hausdorff, entonces f es continua. Sea A cerrado en Y y sea C compacto en X, dado que $f|_C$ es continua, $f(C)$ es compacto y por lo tanto cerrado, lo cual implica que $A \cap f(C)$ es cerrado en Y, entonces $(f|_C)^{-1}(A \cap f(C)) = f^{-1}(A) \cap C$ es cerrado en C. Como X es compactamente generado se tiene que $f^{-1}(A)$ es cerrado en X, es decir, f es continua.

3.2.11 Definición. Se denotará por $\mathcal{CG}$ a la subcategoría de $Haus$ de los espacios compactamente generados de Hausdorff. Nótese que por (6) de la proposición anterior, K define un funtor de $Haus$ en $\mathcal{CG}$.

3.2.12 Proposición. *$\mathcal{CG}$ es una subcategoría correflexiva de $Haus$.*

□

La siguiente proposición es dual a la proposición 3.1.5 para correflectores.

3.2.13 Proposición. Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{B}$, para cada $\mathfrak{B}$–objeto B sea $A_B \xrightarrow{c_B} B$ una $\mathfrak{A}$–correflexión. Entonces existe un funtor $C : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:

(1) $C(B) = A_B$ para cada $\mathfrak{B}$–objeto B.

(2) Para cada $\mathfrak{B}$–morfismo $B' \xrightarrow{f} B$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} C(B) \arrow[r, "c_B"] \arrow[d, "C(f)"'] & B \arrow[d, "f"] \\ C(B') \arrow[r, "c_{B'}"'] & B' \end{tikzcd}$$

conmuta. □

Los siguientes resultados nos permitirán caracterizar las categorías correflexivas en $\mathfrak{Top}$ y, bajo dicha caracterización, obtener la categoría correflexiva generada por una categoría cualquiera $\mathfrak{A}$.

A partir de ahora trabajaremos con subcategorías de $\mathfrak{Top}$ plenas y repletas (cerradas bajo isomosfirmos).

3.2.14 Proposición. *Si $\mathfrak{A}$ es cualquier subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ cuya clase de objetos tiene elementos no vacíos, entonces toda $\mathfrak{A}$–correflexión es biyectiva.*

Prueba. Dados X un espacio en $\mathfrak{Top}$, $A \xrightarrow{c} X$ una $\mathfrak{A}$–correflexión y B un $\mathfrak{A}$–objeto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo para un morfismo f en $\mathfrak{Top}$ de B en X:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

Sean $x \in X$ y f tales que $f(b) = x$ para toda $b \in B$. Entonces f es continua y existe un único morfismo $\bar{f}$ tal que $c \circ \bar{f} = f$. Además, para toda $b \in B$ se cumple $c(\bar{f}(b)) = f(b) = x$, por lo tanto c es suprayectiva. Ahora, si $a_1, a_2 \in A$ son tales que $c(a_1) = c(a_2)$, entonces definimos f como $f(b) = c(a_1)$ para toda $b \in B$. Como f es continua, existe una única $\bar{f}$ tal que $c(\bar{f}(b)) = f(b) = c(a_1) = c(a_2)$. Dado que la función $B \xrightarrow{\bar{f}_i} A$ definida como $\bar{f}_i(b) = a_i$ para toda $b \in B$, es continua para $i \in \{1, 2\}$ y cumple $c(\bar{f}_i(b)) = f(b)$, por la unicidad en la definición de correflexión se tiene que $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$ y por lo tanto $a_1 = a_2$, es decir, c es inyectiva. □

3.2.15 Definición. Por la proposición anterior, una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos recibe el nombre de *subcategoría bicorreflexiva.*

El siguiente teorema, aunque importante, no será demostrado en su totalidad. Para mayor detalle se recomienda revisar el libro [11] o los artículos [12] y [13].

3.2.16 Teorema. *Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$ con elementos no vacíos, son equivalentes:*

(1) $\mathfrak{A}$ *es bicorreflexiva.*

(2) $\mathfrak{A}$ *es cerrada bajo la formación de cocientes y coproductos arbitrarios.*

Prueba. (1) $\Rightarrow$ (2) Veamos que $\mathfrak{A}$ es cerrada bajo cocientes. Sea $A' \xrightarrow{g} X$ cualquier cociente con A' un $\mathfrak{A}$–objeto. Si $A \xrightarrow{c} X$ es una $\mathfrak{A}$–correflexión, entonces existe $A' \xrightarrow{\bar{g}} A$ continua tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[d, dotted, "\bar{g}"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

es decir, $c \circ \bar{g} = g$. Por la proposición anterior existe la función inversa de c, denotada c^{-1}, la cual es continua ya que dado $U \subseteq A$ abierto, $(c^{-1})^{-1}(U) = c(U)$ es abierto si y sólo si $g^{-1}(c(U))$ lo es, pero g es un cociente, y puesto que el diagrama conmuta, se tiene $c \circ \bar{g} = g$, y por lo tanto $g^{-1}(c(U)) = \bar{g}^{-1}(c^{-1}(c(U))) = \bar{g}^{-1}(U)$ es abierto. En consecuencia, c es un homeomorfismo, lo que implica que X es un objeto de $\mathfrak{A}$.

Ahora veamos que es cerrada bajo coproductos. Sean X el coproducto de la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de $\mathfrak{A}$–objetos y $\eta_i : A_i \to X$ las inclusiones. Si $A \xrightarrow{c} X$ una $\mathfrak{A}$–correflexión de X, entonces para toda $i \in I$, existe $A_i \xrightarrow{f_i} A$ continua tal que $c \circ f_i = \eta_i$. Por lo tanto, de la propiedad universal del coproducto, existe una función continua $g : X \to A$ tal que $g \circ \eta_i = f_i$ para toda $i \in I$. Estas igualdades implican la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, "\eta_i"] & \\ A \arrow[r, shift right, "c"'] & X \arrow[l, shift right, "g"'] \end{tikzcd} \qquad y \qquad \begin{tikzcd} A_i \arrow[d, "\eta_i"'] \arrow[drr, "\eta_i"] & & \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & A \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, tenemos que $c \circ g : X \to X$ es una función continua tal que $c \circ g \circ \eta_i = c \circ f_i = \eta_i = 1_X \circ \eta_i$ pero, por la propiedad universal del coproducto 1_X es la única función continua que hace conmutar el diagrama derecho, por lo tanto $c \circ g = 1_X$. Por otra parte, dado que c es inyectiva y $c \circ g \circ c = c \circ 1_A$, se tiene que $g \circ c = 1_A$, esto es, c es un homeomorfismo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Véanse referencias.

3.2.17 Lema. Sean $(X_i \xrightarrow{u_i} X)_{i \in I}$ y $(Z_i \xrightarrow{v_i} Z)_{i \in I}$ coproductos topológicos arbitrarios. Si para cada $i \in I$ existe una aplicación cociente $c_i : X_i \to Z_i$, entonces la única función continua $c : X \to Z$, que para toda $i \in I$, hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "c_i"] \arrow[d, "u_i"'] & Z_i \arrow[d, "v_i"] \\ X \arrow[r, "c"'] & Z \end{tikzcd}$$

también es una aplicación cociente.

Prueba. c existe por la propiedad universal del coproducto topológico aplicado a la familia $(u_i)_{i \in I}$. Por otra parte, puesto que las inclusiones $(v_i)_{i \in I}$ forman un epipozo (1.1.59), dado cualquier $x \in X$, existe $i \in I$ y $x_i \in X_i$ tal que $v_i(x_i) = x$ y, puesto que c_i es suprayectiva, también existe $a_i \in A_i$ tal que $c_i(a_i) = x_i$. De lo anterior y de la conmutatividad del diagrama, tenemos que $u_i(a_i)$ es un punto de A que es preimagen de x bajo c, es decir, c es suprayectiva.

Supongamos que $g : X \to Y$ es una función tal que la composición $g \circ c : A \to Y$ es continua, entonces también será continua $g \circ c \circ u_i = g \circ v_i \circ c_i$ y puesto que c_i es una aplicación cociente, entonces $g \circ v_i$ es continua ((4) de la proposición 1.1.56), y puesto que $(X_i \xrightarrow{v_i} X)_{i \in I}$ es un epipozo final, entonces g es continua (por la misma proposición) y por lo tanto c es una aplicación cociente.

3.2.18 Teorema. Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, entonces

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \{X : X \text{ es espacio cociente de un coproducto de elementos de } \mathfrak{A}\}$$

es la subcategoría correflexiva generada por $\mathfrak{A}$ (la mínima con respecto a la contención).

Prueba.

(1) Veamos que $\widetilde{\mathfrak{A}}$ es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$. Sea Y un espacio en $\mathfrak{Top}$ que es homeomorfo a un X en $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Sea $h : X \to Y$ un homeomorfismo, puesto que para X existe una aplicación cociente $c : A \to X$ con A un coproducto de elementos de $\mathfrak{A}$, se tiene que $h \circ c : A \to Y$ es una aplicación cociente de un coproducto de elementos de $\mathfrak{A}$ y por lo tanto Y está en $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

(2) Veamos que $\widetilde{\mathfrak{A}}$ es cerrado bajo cocientes. Sea X en $\widetilde{\mathfrak{A}}$ y $q : X \to Y$ una aplicación cociente. Puesto que existe $c : A \to X$ aplicación cociente con A un coproducto de elementos de $\mathfrak{A}$, $q \circ c : A \to Y$ es una aplicación cociente y por lo tanto Y está en $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

Ahora veamos que es cerrada bajo coproductos y por 3.2.16 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ será una subcategoría bicorreflexiva. Si $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\widetilde{\mathfrak{A}}$ y X es su coproducto bajo inclusiones $X_i \xrightarrow{v_i} X$, entonces se tiene, para toda i en I, una aplicación cociente $c_i : A_i \to X_i$, en la que cada A_i es el coproducto para una familia $(A_{ij})_{j\in J_i}$ de elementos de $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Para cada i en I consideremos las inclusiones $Aij \xrightarrow{u_{ij}} A_i$ del coproducto A_i correspondiente. Sea

$$A = \coprod_{i\in I,\ j\in J_i} A_{ij}$$

entonces A es un coproducto de elementos de $\mathfrak{A}$. Supongamos que las inclusiones de este coproducto son $(A_{ij} \xrightarrow{w_{ij}} A)_{J_i,\ I}$. Si de estas inclusiones se consideran solamente aquellas w_{ij} con i fija y con $j \in J$, obtendremos aplicando la propiedad universal del coproducto (para esta i fija) que existe una única función continua $u_i : A_i \to A$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_{ij} \arrow[rr, "w_{ij}"] \arrow[dr, "u_{ij}"'] & & A \\ & A_i \arrow[ur, "u_i"'] & \end{tikzcd}$$

Observemos que A es un coproducto para $A_i \xrightarrow{u_i} A$, pues dada cualquier familia de funciones continuas $(g_i : A_i \to B)_{i\in I}$ puede considerarse la familia de composiciones $(g_i \circ u_{ij} : A_{ij} \to B)_{J_i,\ I}$ y asegurar que existe una función continua $f : A \to B$ tal que $f \circ w_{ij} = g_i \circ u_{ij}$, pero entonces se tiene que $f \circ u_i \circ u_{ij} = g_i \circ u_{ij}$ (conmutatividad del diagrama) y puesto que $(u_{ij})_{J_i}$ es un epipozo, $f \circ u_i = g_i$ y por lo tanto, la familia $(u_i)_{i\in I}$ satisface la propiedad universal del coproducto topológico. De esta manera, se tienen las condiciones del lema anterior y por lo tanto la única función continua $c : A \to X$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "c_i"] \arrow[d, "u_i"'] & X_i \arrow[d, "v_i"] \\ A \arrow[r, dotted, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

es una aplicación cociente, por lo tanto X está en $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

(3) Es la mínima respecto a la contención porque si $\mathfrak{B}$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ tal que cada objeto de $\mathfrak{A}$ es objeto de $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), por 3.2.16 $\mathfrak{B}$ es cerrada bajo cocientes y coproductos de elementos de $\mathfrak{A}$, por lo tanto, todo elemento de $\widetilde{\mathfrak{A}}$ es elemento de $\mathfrak{B}$.

Capítulo 4

Subcategorías de conexión en $\mathfrak{Top}$

4.1. Introducción

En este capítulo haremos uso de las nociones vistas en los capítulos anteriores para poder definir el concepto de *subcategoría de conexión* en $\mathfrak{Top}$. Veremos algunos resultados para dichas subcategorías y definiremos el concepto de subcategoría normal, h-subcategoría, categoría constante a la izquierda, entre otras, a las que, bajo la contención, les hallaremos ciertas subcategorías llamadas mínimas. Desarrollaremos, por fin, los artículos "Fibraciones y correflexiones" y "Categorías de conexión"de Graciela Salicrup.

En lo siguiente trabajemos con subcategorías de $\mathfrak{Top}$ plenas, repletas (cerradas bajo isomorfismos) y que contienen un espacio distinto del vacío.

La siguiente definición, engloba lo visto en el capítulo 1 sobre conexidad, haciendo referencia a las proposiciones 2.1.5, 2.1.6, 2.2.4 y 2.2.5.

4.1.1 Definición. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ con algún objeto distinto del vacío.

(1) Se dice que $\mathcal{A}$ es *invariante bajo aplicaciones (funciones continuas)* o *invariante bajo mapeos continuos* si dado un $\mathcal{A}$–objeto X, todas las imágenes continuas de él son $\mathcal{A}$–objetos, es decir, si $X \xrightarrow{f} Y$ es una aplicación entonces $f(X)$ es un $\mathcal{A}$–objeto (con la topología relativa a la topología de Y).

(2) Se dice que $\mathcal{A}$ es una *categoría de componentes* si dado un $\mathcal{A}$–objeto X y una familia de subespacios $\{A_i\}_{i\in I}$ de X, con I un conjunto de índices tal que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ es un $\mathcal{A}$–objeto (con la topología relativa a la topología de X).

4.1.2 Definición. Decimos que $\mathcal{A}$ es una *subcategoría de conexión* de $\mathfrak{Top}$ si tiene algún objeto distinto del vacío, es invariante bajo aplicaciones y es de componentes.

4.1.3 Definición. Sean $\mathcal{A}$ una subcategoría de conexión de $\mathfrak{Top}$ y X un espacio topológico. Decimos que un $A \subseteq X$ es una $\mathcal{A}$-*componente* en X si A pertenece a $\mathcal{A}$ y para cualquier $\mathcal{A}$-objeto A' se cumple lo siguiente: si $A \subseteq A'$ entonces $A = A'$.

Por ejemplo, para $\mathcal{A}$ la subcategoría de los espacios conexos las $\mathcal{A}$ componentes son las componentes conexas.

4.1.4 Observación. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son subcategorías de conexión y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, entonces las subcategorías correflexivas generadas por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ (3.2.18), denotadas por $\widetilde{\mathcal{A}}$ y $\widetilde{\mathcal{A}'}$ respectivamente, cumplen $\widetilde{\mathcal{A}} \neq \widetilde{\mathcal{A}'}$ si y sólo si existe un $\mathcal{A}'$–objeto X que no es un coproducto de sus $\mathcal{A}$–componentes.

Esto sucede ya que las $\mathcal{A}$–componentes y los coproductos de $\mathcal{A}$ son elementos de $\widetilde{\mathcal{A}}$, y dado que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, si $\widetilde{\mathcal{A}} \neq \widetilde{\mathcal{A}'}$ entonces existe X que cumple lo buscado (el recícproco es inmediato).

4.1.5 Ejemplos. $\mathfrak{Top}$, la subcategoría de espacios conexos $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ (proposiciones 2.1.5 y 2.1.6) y la subcategoría de espacios conectables por trayectorias $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ (observación 2.2.4 y proposición 2.2.5) son subcategorías de conexión.

4.1.6 Proposición. (1) *La intersección no vacía de una clase arbitraria de subcategorías de componentes es una categoría de componentes.*

(2) *La intersección no vacía de una clase arbitraria de subcategorías que son invariantes bajo mapeos continuos es una categoría invariante bajo aplicaciones.*

Prueba.

(1) Si $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ son categorías de componentes, dada $\{A_j\}_{j\in J}$ familia de espacios en $\mathcal{A} := \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ tal que $\bigcap\limits_{j\in J} A_j \neq \varnothing$ entonces $\bigcup\limits_{j\in J} A_j$ es un objeto de $\mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$, y así la unión de los A_i's es un objeto de la intesección de $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$.

(2) Es análogo al caso anterior. □

4.1.7 Corolario. *La intersección no vacía de una clase arbitraria de subcategorías de conexión es una subcategoría de conexión.*

□

4.1.8 Definición. Definimos la *subcategoría de componentes generada* por una familia $\mathcal{F}$, como la intesección de todas las subcategorías de componentes que contienen a la familia $\mathcal{F}$ (análogamente se define la *subcategoría invariante bajo aplicaciones generada* por una familia $\mathcal{F}$).

4.1.9 Definición. Definimos la *subcategoría de conexión generada* por una familia $\mathcal{F}$, como la intersección de todas las subcategorías de conexión que contienen a $\mathcal{F}$. Dado que $\mathfrak{Top}$ es una subcategoría de componentes, invariante bajo mapeos continuos y por lo tanto de conexión, por el corolario 4.1.7, la subcategoría de conexión generada está bien definida.

La siguiente definición es de suma importancia porque con ella podremos caracterizar a las subcategorías de conexión en $\mathfrak{Top}$.

4.1.10 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una clase de espacios topológicos distinta del vacío, denotaremos $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ a la subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos están definidos como sigue:

X es un $\mathcal{K}(\mathcal{F})$–objeto si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen F en $\mathcal{F}$ y una aplicación $F \xrightarrow{f} X$, cuya imagen contiene al subconjunto $\{x, y\}$ de X.

4.1.11 Teorema. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de espacios topológicos distina del vacío. Entonces $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es la subcategoría invariante bajo aplicaciones generada por $\mathcal{F}$ y, si $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es una categoría de componentes, entonces es también la categoría de conexión generada por $\mathcal{F}$.*

Prueba. Que $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es la subcategoría invariante bajo aplicaciones generada por $\mathcal{F}$ se sigue de la definición, ya que si damos una aplicación de un $\mathcal{K}(\mathcal{F})$–objeto X a Y, la imagen de X será un elemento de $\mathcal{K}(\mathcal{F})$. Si además $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es de componentes, entonces es una categoría de conexión. Veamos que cualquier otra la contiene. Sean X un $\mathcal{K}(\mathcal{F})$–objeto, $x_0 \in X$ y $\mathcal{A}$ una subcategoría de conexión que contiene a $\mathcal{F}$. Por definición, para cada punto $x \in X$ existe una aplicación f_x de un elemento F_x de $\mathcal{F}$ en X cuya imagen contiene al subconjunto

$\{x_0, x\}$, entonces $f_x(F_x)$ es un $\mathcal{A}$–objeto y así, $\mathcal{A}$ contiene una familia de subespacios $f_x(F_x)$ (que contiene al conjunto $\{x_0, x\}$) cuya intersección es distinta del vacío, y dado que $X = \bigcup\limits_{x\in X} f_x(F_x)$, concluimos que X es un objeto de $\mathcal{A}$. $\square$

En el capítulo 1 se dio la definición de *cuña* (1.1.59) tomando una suma topológica de espacios y haciendo cociente sobre sus puntos básicos. En el siguiente resultado haremos uso de dicha definición.

4.1.12 Proposición. *Si $\mathcal{F}$ es una clase de espacios topológicos no vacía, la cual es cerrada bajo la formación de cuñas, entonces $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es una subcategoría de conexión.*

Prueba. Por el teorema anterior, basta probar que $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es de componentes. Sea $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia de subespacios de X, con X un $\mathcal{K}(\mathcal{F})$–objeto, tal que $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \varnothing$. Sean $x, y \in \bigcup_{j\in J} A_j$ y $a \in \bigcap_{j\in J} A_j$. Entonces existen índices $i, i' \in J$ tales que $x, a \in A_i$ y $y, a \in A_{i'}$. Puesto que A_i y $A_{i'}$ son objetos de $\mathcal{K}(\mathcal{F})$, existen funciones $f : F \to A_i$ y $f' : F' \to A_{i'}$ con F y F' en $\mathcal{F}$ tales que $\{a, x\} \subseteq f(F)$ y $\{a, y\} \subseteq f'(F')$.

Si $p \in F$ y $q \in F'$ son tales que $f(p) = a$ y $f'(q) = a$, entonces definimos para $B := A_i \coprod A_{i'}/\{p, q\}$, la función $g : B \to \bigcup_{j\in J} A_j$ como

$$g(z) = \begin{cases} f_i(z) & \text{si } z \in A_i \\ f_{i'}(z) & \text{si } z \in A_{i'} \end{cases}$$

Notemos que f está bien definida porque A_i y $A_{i'}$ son espacios cerrados en el coproducto y ajenos salvo por los puntos del cociente (que tienen la misma imagen). Es continua porque f y f' lo son en A_i y $A_{i'}$ respectivamente. Además $\{x, y\} \subseteq g(B)$. Como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo cuñas tenemos, por lo tanto, que $\bigcup_{j\in J} A_j$ es un $\mathcal{K}(\mathcal{F})$–objeto. Así, por el teorema anterior, $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ es una categoría de conexión. $\square$

4.1.13 Corolario. *Cualquier subcategoría de conexión es de la forma $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ para alguna clase de espacios $\mathcal{F}$.*

Prueba. Notemos que si $\mathcal{A}$ es una subcategoría de conexión, entonces $\mathcal{A}_0$ (la clase de todos los objetos de $\mathcal{A}$) es cerrada bajo la formación de cuñas, ya que si $\{(X_j, \tau_j)\}_{j\in J}$ es una familia de objetos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigvee_{j\in J} X_j \times \{j\}$ es tal que bajo la inclusión $i_j : X_i \to \bigvee_{j\in J} X_j$ se obtienen subespacios de $\bigvee_{j\in J} X_j$ que se intersecan en el cociente y por lo tanto su unión, que es $\bigvee_{j\in J} X_j$, es un objeto de $\mathcal{A}$. Así, usando 4.1.12 y 4.1.11, se tiene que $\mathcal{K}(\mathcal{A}_0)$ es la mínima subcategoría de conexión que contiene a $\mathcal{A}_0$, es decir, $\mathcal{K}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}$. $\square$

Como es de esperarse, una subcategoría de conexión debería estar completamente relacionada con los espacios conexos. El siguiente corolario muestra, esencialmente, dicha relación.

4.1.14 Corolario. *Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría de conexión diferente de $\mathfrak{Top}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$.*

Prueba. Probaremos la contrapuesta. Sean $\mathcal{A}$ una subcategoría de conexión y X un objeto suyo con separación no trivial U, V, esto es $U, V \neq \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$ y $X = U \cup V$. Si Y es un espacio topológico y $\{a, b\} \in Y$, entonces el mapeo $X \xrightarrow{f} Y$ definido como $f(U) = a$ y $f(V) = b$ es continuo y, por el corolario anterior, Y es un $\mathcal{A}$–objeto. Esto es, $\mathcal{A} = \mathfrak{Top}$. $\square$

Nótese que como consecuencia inmediata se tiene lo siguiente: *La única subcategoría de conexión que contiene a los espacios discretos es $\mathfrak{Top}$.*

4.1.15 Definición. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría de conexión, denotaremos por $\mathcal{A}_L$ a la subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos X satisfacen la siguiente condición: para cualquier $x \in X$ existe una base de vecindades cuyos elementos pertenecen a $\mathcal{A}$.[1]

4.1.16 Corolario. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son dos subcategorías de conexión diferentes de $\mathfrak{Top}$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, entonces $\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}' = \mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}$.*

Prueba. Es claro que $\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}' \supseteq \mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}$. Ahora, si X es un objeto de $\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}'$ entonces, por el corolario anterior, X es conexo. Además, X está conformado de una sola $\mathcal{A}$–componente, ya que si no fuese el caso, tomando en cada punto $x \in X$ la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ que conforman una base de vecindades de x, obtenemos $\mathcal{A}$–componentes por cada punto. Si existiesen al menos dos ajenas entonces X tendría una separación no trivial, lo cual es una contradicción al corolario anterior. Concluyendo que X es una $\mathcal{A}$–componente y por lo tanto $\mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}_L \cap \mathcal{A}$. □

4.1.17 Proposición. *La subcategoría cuyos objetos son espacios con un solo elemento (singulares) y la subcategoría cuyos objetos son espacios indiscretos son subcategorías de conexión.*

Prueba. Claramente la subcategoría cuyos espacios son singulares satisface la definición de subcategoría de conexión trivialmente. Ahora, si $\mathcal{A}$ tiene como objetos los espacios indiscretos, sabemos que las funciones continuas sólo pueden ir de un indiscreto X a un subespacio indiscreto en la imagen, pues la continuidad obliga a que la imagen inversa de los abiertos del contradominio sea el conjunto subyacente de X o el vacío. Además, si una familia de subespacios indiscretos $\{A_i\}_{i\in I}$ de un espacio X cumple $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, entonces $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ debe ser un espacio indiscreto, pues dado un abierto $U \neq \varnothing$ de $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, existe $i \in I$ tal que $A_i \cap U \neq \varnothing$, entonces $A_i \subseteq U$ y también $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subseteq U$, pero dado que todos los subespacios A_j son indiscretos para toda j, se tiene $U = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

4.1.18 Definición. La subcategoría de espacios singulares y la subcategoría de espacios indiscretos, las cuales denotaremos por $\mathcal{A}^0$ y $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$ respectivamente, las llamaremos categorías de conexión triviales. Claramente $\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{A}^{\mathcal{S}}$.

4.1.19 Proposición. Cualquier categoría de conexión no trivial $\mathcal{A}$ contiene a $\mathcal{A}^0$ y $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$.

Prueba. De la definición, es inmediato que $\mathcal{A}$ contiene a $\mathcal{A}^0$. Ahora, si Y es un espacio indiscreto y X un objeto de $\mathcal{A}$ tal que X y Y tienen más de un elemento, entonces dado $y_0 \in Y$ y $x_0 \in X$, definimos $X \xrightarrow{f_y} Y$ como:

$$f_y(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x = x_0 \\ y & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

donde $y \in Y \setminus \{y_0\}$. Entonces f_y es continua (Y es indiscreto) y, por ser $\mathcal{A}$ subcategoría de conexión, se tiene que $f_y(X)$ son elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\bigcap\limits_{y\in Y} f_y(X) = \{y_0\}$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{y\in Y} f_y(X)(= Y)$ es un objeto de $\mathcal{A}$. □

4.1.20 Proposición. *$\mathcal{K}(\mathcal{S})$ con $\mathcal{S}$ el espacio de Sierpinski, es la mínima subcategoría de conexión no trivial.*

[1]Para detalles sobre la correflexividad de $\mathcal{A}_L$ véase [11].

Prueba. Primero notemos que como la familia $\{\mathcal{S}\}$ es cerrada bajo la formación de cuñas, se tiene que $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ es una subcategoría de conexión.

Claramente el espacio $\mathcal{S}$ no es indiscreto. Por lo tanto, haciendo uso de la proposición anterior, $\mathcal{A}^{\mathcal{S}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{S})$. Ahora, si $\mathcal{A}$ es cualquier categoría de conexión no trivial, entonces existe un espacio Y de $\mathcal{A}$ que no es singular ni indiscreto y por lo tanto, existen $x, y \in Y$ y $U \subset Y$ abierto, tales que $x \in U$ y $y \notin U$. Entonces $X \xrightarrow{g} \mathcal{S}$ definida como $g(z) = 0$ para toda $z \in U$ y $g(z) = 1$ para toda $z \in Y \setminus U$ es continua y por lo tanto $\mathcal{S}$ es objeto de $\mathcal{A}$. De esta manera, todo elemento de $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ es elemento de $\mathcal{A}$ por 4.1.13. □

Hemos probado las siguientes contenciones

$$\mathcal{A}^0 \subset \mathcal{A}^{\mathcal{S}} \subset \mathcal{K}(\mathcal{S}). \tag{4.1}$$

4.2. Subcategorías de conexión normales y h–categorías de conexión

En esta sección veremos algunas propiedades de las subcategorías de conexión normales y h-categorías, aunque nuestro objetivo principal será probar, para una subcategoría de conexión $\mathcal{A}$, que es necesario y suficiente tener al espacio $[0,1] = I$ como un elemento, para que ésta sea una h–*categoría*.

Recuérdese que dos aplicaciones (funciones continuas) $f, g : X \to Y$ son *homotópicas* (denotado por $f \simeq g$), si existe una homotopía entre ellas, es decir, una aplicación $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para toda $x \in X$. Así, dos espacios X y Y tienen el *mismo tipo de homotopía* si existen aplicaciones $\phi : X \to Y$ y $\psi : Y \to X$ tales que $\psi \circ \phi \simeq 1_X$ y $\phi \circ \psi \simeq 1_Y$.

4.2.1 Definición. (1) Una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es una h–*categoría* si para cada $\mathcal{A}$–objeto X, todos los espacios que tienen el mismo tipo de homotopía de X son $\mathcal{A}$–objetos.

(2) Una subcategoría de conexión $\mathcal{A}$ es *normal* si para todo $\mathcal{A}$–objeto X, todos los espacios que contienen a X como subespacio denso son $\mathcal{A}$–objetos.

4.2.2 Observación. Notemos que la intersección de h–categorías es una h–categoría así como la intersección de subcategorías normales es una subcategoría normal.

Si X es un objeto de la intersección de una familia de h–categorías, entonces cualquier espacio Y con el mismo tipo de homotopía se encuentra en todos los intersectandos, al ser estos h–categorías, concluimos que Y es un objeto de la intersección de la familia (para subcategorías normales el razonamiento es análogo).

4.2.1. Subcategorías de conexión normales

4.2.3 Proposición. *Una subcategoría de conexión $\mathcal{A}$ es normal si y sólo si las $\mathcal{A}$–componentes de cualquier espacio X son cerradas.*

Prueba. Sea $\mathcal{A}$ es una subcategoría de conexión normal. Si A es una $\mathcal{A}$–componente, entonces es densa en $\bar{A}$, por lo tanto $\bar{A}$ pertenece a $\mathcal{A}$ y dado que las $\mathcal{A}$–componentes son máximas respecto a la contención en X, concluimos que $\bar{A} \subseteq A \subseteq X$ y por lo tanto $A = \bar{A}$.

Recíprocamente, si A es un $\mathcal{A}$–objeto y A es denso en X, tomamos una $\mathcal{A}$–componente A' de X que contiene a A, como A' es cerrada, se tiene $\bar{A} \subseteq \bar{A}' = A' \subseteq X = \bar{A}$ por lo tanto $X = A'$, esto es, X es un objeto de $\mathcal{A}$. □

En el capítulo 1 vimos que el producto arbitrario de espacios conexos es conexo y el producto arbitrario de espacios conectables por trayectorias también es conectable por trayectorias. Sin embargo, el siguiente resultado muestra que, en general, lo anterior no ocurre para cualquier subcategoría de conexión.

4.2.4 Teorema. *Si $\mathcal{A}$ es una subcategoría de conexión entonces $\mathcal{A}_0$ es cerrada bajo la formación de productos finitos, y si $\mathcal{A}$ es normal, $\mathcal{A}_0$ es cerrada bajo la formación de productos arbitrarios.*

Prueba.

(1) Primero veamos que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la formación de productos finitos.

Sean X y Y $\mathcal{A}$–objetos distintos del vacío, veremos que $X \times Y$ pertenece a $\mathcal{A}$. Sean $(a, b) \in X \times Y$ y $(c, d) \in X \times Y$ y consideremos el punto $(a, d) \in X \times Y$. Entonces $X \xrightarrow{f} X \times \{d\}$ donde $f(x) = (x, d)$ y $Y \xrightarrow{g} \{a\} \times Y$ donde $g(y) = (a, y)$ son homeomorfismos tales que sus imágenes se intersecan en (a, d). Por lo tanto, $X \times \{d\} \cup \{a\} \times Y$ es un elemento de $\mathcal{A}$. Ahora, por 4.1.13 $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{F})$ para alguna clase $\mathcal{F}$ (que en la prueba fueron los espacios de $\mathcal{A}$) y como acabamos de probar que cualquiera dos puntos en $X \times Y$ están contenidos en la imagen continua (inclusión) de un elemento de $\mathcal{F}$, concluimos que $X \times Y$ está en $\mathcal{A}$. Por inducción se obtiene el resultado para cualquier número finito.

(2) Ahora, supongamos que $\mathcal{A}$ es normal. Sean $F := \{A_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de $\mathcal{A}$–objetos, $X = \prod_{i \in I} A_i$ y $p \in X$. Consideremos la $\mathcal{A}$–componente C_p de p en X (que siempre existe porque los $A_i's$ son encajables en X). Sea B abierto básico de la topología producto X. Entonces existen $i_1, \ldots, i_n \in I$ y abiertos $U_k \subseteq A_{i_k}$ con $k \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $B = \cap_{k=1}^{n} U_k$, es decir, B consta de los puntos $x \in X$ que satisfacen $x_{i_k} \in U_k$ para cada $k \in \{1, \ldots n\}$, donde x_{i_k} es la coordenada i_k de x.

Tomamos para cada U_k un punto fijo a_k. Sea q el punto de X definido como:

$$q_i = \begin{cases} a_k & \text{si } i = i_k \text{ para algún } k \\ p_i & \text{si } i \neq i_k \text{ para todo } k \end{cases}$$

entonces $q \in B$ por lo anterior.

Consideremos el subconjunto K de X que consiste de todos los puntos $x \in X$ tales que $x_i = p_i$ para todo $i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}$. Entonces K es homeomorfo a $X_{i_1} \times \ldots \times X_{i_n}$ y, por lo visto en (1), es un $\mathcal{A}$–objeto.

Puesto que K contiene a p y q por definición, se tiene que q está en la $\mathcal{A}$–componente C_p y por lo tanto $B \cap C_p \neq \varnothing$. Como B es un abierto básico arbitrario, tenemos que C_p es denso en X. Y como tenemos por hipótesis que $\mathcal{A}$ es normal, concluimos que X es un $\mathcal{A}$–objeto (nótese la semejanza de la prueba con 2.1.10). □

4.2.2. H–categorías

4.2.5 Definición. Un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g'"'] & Y \end{tikzcd}$$

es llamado *pullback* o *cuadrado cartesiano* si cumple lo siguiente: para cualquier cuadrado conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{g}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g'"'] & Y \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $\widetilde{X} \xrightarrow{k} X$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[drr, bend left, "\widetilde{f}"] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{g}"'] \arrow[dr, dotted, "k"] & & \\ & X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g'"'] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, $f' \circ k = \widetilde{f}$ y $g \circ k = \widetilde{g}$.

4.2.6 Definición. (1) Una clase de aplicaciones suprayectivas M es llamada una 0–*clase*.

(2) Una 0–clase es una 1–*clase* si para todo cuadrado cartesiano (pullback) en $\mathfrak{Top}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

se tiene que si f está en M, entonces g pertenece también a M.

4.2.7 Definición. A toda 0–clase M le podemos asociar la subcategoría plena $\underline{A}(M)$ de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son espacios A con la propiedad siguiente:

Cada función $X \xrightarrow{f} A$ que pertenece a M es una identificación.

4.2.8 Ejemplos. (1) Si M es la clase de todos los homeomorfismos entonces es una 0-clase, 1-clase y $\underline{A}(M)$ es $\mathfrak{Top}$.

(a) Claramente M es una 0–clase. Por otra parte, si el siguiente diagrama es un pullback

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

con f en M, entonces podemos tomar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f^{-1} \circ h"] \arrow[d, "1_{X'}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

que claramente conmuta, entonces por definición de pullback existe $X' \xrightarrow{\bar{g}} Y'$ tal que $1_{X'} = g \circ \bar{g}$ y $f^{-1} \circ h = \bar{h} \circ \bar{g}$. Por otro lado, si tomamos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[dr, "g"] \arrow[ddrrr, bend left, "\bar{h}"] \arrow[dddrr, bend right, "g"'] & & & \\
& X' \arrow[dr, "\bar{g}"] & & \\
& & Y' \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
& & X' \arrow[r, "h"'] & X
\end{tikzcd}$$

tenemos que $g \circ \bar{g} \circ g = 1_{X'} \circ g = g$ y $\bar{h} \circ \bar{g} \circ g = f^{-1} \circ h \circ g = f^{-1} \circ f \circ \bar{h} = \bar{h}$, es decir, todos los diagramas interiores conmutan. Ahora, al ser el cuadrado un pullback, existe una única aplicación de Y' en Y' y dado que la función identidad $1_{Y'}$ también hace conmutar el diagrama, concluimos que $\bar{g} \circ g = 1_{Y'}$. Por lo tanto g es una aplicación suprayectiva tal que $\bar{g} \circ g = 1_{Y'}$ y $g \circ \bar{g} = 1_{X'}$, esto es, g es un homeomorfismo.

(b) $\underline{A}(M)$ es $\mathfrak{Top}$ ya que cualquier función continua, suprayectiva y abierta (o cerrada) es una identificación y dado que los homeomorfismos son funciones continuas, biyectivas y abiertas (o cerradas), se tiene que todo elemento de $\mathfrak{Top}$ cumple la condición para ser elemento de $\underline{A}(M)$.

(2) Si M es la clase de todas las retracciones, entonces M es una 0-clase que no es una 1-clase y $\underline{A}(M)$ es $\mathfrak{Top}$.

Una retracción $X \xrightarrow{r} A$, donde $A \subseteq X$, es una aplicación tal que $r|_A = Id_A$.

(a) Claramente M es una 0-clase. Por otra parte, notemos que en $\mathfrak{Top}$ siempre existe el pullback para morfismos $A \xrightarrow{f} Y$ y $B \xrightarrow{g} Y$. Sea $X = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$ con la topología inicial[2] respecto a las proyecciones $A \times B \xrightarrow{p_A} A$ y $A \times B \xrightarrow{p_B} B$ dadas por $p_A(a, b) = a$ y $p_B(a, b) = b$. Si existe un espacio X' tal que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

definimos $Z \xrightarrow{h} X$ como $h(x) = (f'(z), g'(z))$. Notemos que $h(z) \in A \times B$ y dado que el diagrama conmuta, $f(f'(z)) = g(g'(z))$, esto es $h(z) \in X$. Además, hace

[2]La topolgoía inicial τ respecto a las aplicaciones $C \xrightarrow{h_1} D$ y $C \xrightarrow{h_2} E$ tiene como subbase a $\{h_i^{-1}(U) : i = 1, 2$ y U es abierto de D o $E\}$.

conmutar el siguiente diagrama trivialmente

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "g'"'] & & \\
& X \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

h es continua porque dado $U \subseteq X$ subbásico, por definición, existe $V \subseteq A$ abierto (o $V' \subseteq B$ abierto) tal que $U = p_A^{-1}(V)$, como $h^{-1}(U) = h^{-1}(p_A^{-1}(V)) = (f')^{-1}(V)$, se tiene que $h^{-1}(U)$ es abierto. Por último, h es única ya que claramente las proyecciones p_A y p_B separan puntos (1.1.58).

(b) Notemos que toda retracción $X \xrightarrow{r} A$ es una identificación. Si $r^{-1}(U)$ es abierto en X con $U \subseteq A$, entonces $r^{-1}(U) \cap A$ es un abierto en A, pero $r^{-1}(U) \cap A = U$. Por lo tanto r es una identificación.

(3) Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$. Si M es la clase de todas las $\mathcal{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A}(M) = \mathcal{A}$.

Por doble contención. Si Y es un elemento de $\underline{A}(M)$, entonces dada $X \xrightarrow{f} Y$ en M, se tiene que f es una identificación, pero dado que las correflexiones en $\mathfrak{Top}$ son biyectivas, concluimos que f es un homeomorfismo y por lo tanto Y está en $\mathcal{A}$.

Ahora, sea Y en $\mathcal{A}$ y $X \xrightarrow{f} Y$ una $\mathcal{A}$-correflexione en M. Por definición, dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "1_Y"] & \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

existe una única $\bar{f}$ tal que $f \circ \bar{f} = 1_Y$. Por otro lado, dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
Y \arrow[d, "\bar{f}"'] & \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

existe una única función que hace conmutar el diagrama, pero dado que $f \circ \bar{f} \circ f = 1_Y \circ f = f = f \circ 1_X$, se tiene que $\bar{f} \circ f = 1_X$, esto es, f es un homeomorfismo y por lo tanto una identificación.

(4) Si $M = \varnothing$, entonces $\underline{A}(M)$ es $\mathfrak{Top}$

4.2.9 Proposición. Si M es una 1–clase entonces $\underline{A}(M)$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

Prueba. Si $\underline{A}(M) = \varnothing$ o $\underline{A}(M)$ contiene solamente el espacio vacío, la afirmación es cierta. Supongamos que tiene objetos no vacíos.

(1) Sea $\{A_j\}_{j\in J}$ una familia arbitraria de $\underline{A}(M)$–objetos distintos del vacío. Si $X \xrightarrow{f} \coprod_{j\in J} A_j$ es una función continua en M, definimos f_j como la restricción $f|_{f^{-1}(A_j)} : f^{-1}(A_j) \to A_j$, entonces $X = \coprod_{j\in J} f^{-1}(A_j)$ por 1.1.61.

Notemos que el diagrama siguiente es un pullback

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(A_j) \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ A_j \arrow[r, hook, "i'"'] & \coprod_{j\in J} A_j \end{tikzcd}$$

donde los morfismos horizontales son inclusiones. Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ A_j \arrow[r, "i'"'] & \coprod_{j\in J} A_j \end{tikzcd}$$

es conmutativo para una $j \in J$ particular, definimos $\bar{g} : Z \to f^{-1}(A_j)$ como $\bar{g}(z) = i^{-1}(g(z))$. Está bien definida porque i es inyectiva y $f(g(z)) = i'(g_j(z))$, esto es, $f(g(z)) \in A_j$ y por lo tanto $g(z) \in f^{-1}(A_j)$. Además, hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dotted, "\bar{g}"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "g_j"'] & & \\ & f^{-1}(A_j) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & A_j \arrow[r, "i'"'] & \coprod_{j\in J} A_j \end{tikzcd}$$

ya que $i(\bar{g}(z)) = i(i^{-1}(g(z))) = g(z)$ y como $f_j(\bar{g}(z)) = f_j(i^{-1}(g(z)))$ entonces

$$i'(f_j(i^{-1}(g(z)))) = f(g(z)) = i'(g_j(z))$$

por la conmutatividad del cuadrado, y dado que i' es inyectiva, se tiene que $f_j(i^{-1}(g(z))) = g_j(z)$. La unicidad es inmediata de la inyectividad de i. Por lo tanto el primer diagrama es un pullback y como M es una 1–clase, f_j está en M para toda j. Además dado que cada A_j está en $\underline{A}(M)$, podemos concluir que f_j es una identificación para toda $j \in J$.

Ahora, si $f^{-1}(U)$ es abierto en X, entonces el conjunto $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(A_j) = f^{-1}(U\cap A_j)$ es abierto en $f^{-1}(A_j)$ y, como f_j es identificación, $U \cap A_j$ es un abierto de A_j. Por lo tanto $U = \bigcup_{j\in J}(U \cap A_j)$ es abierto en $\coprod_{j\in J} A_j$, lo cual implica que f es identificación, es decir, $\coprod_{j\in J} A_j$ es un objeto de $\underline{A}(M)$.

(2) Sea $p : A \to X$ una identificación con A un $\underline{A}(M)$–objeto. Supongamos que $f : Y \to X$ pertenece a M y consideremos el siguiente cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

Como M es una 1–clase tenemos que $\bar{f}$ está en M, es decir, es una identificación y por lo tanto $p \circ \bar{f}$ también lo es. Ahora, si $f^{-1}(U)$ es abierto en Y con $U \subseteq X$, entonces $g^{-1}(f^{-1}(U))$ es abierto en Z por la continuidad de las funciones, pero por la conmutatividad del diagrama $g^{-1}(f^{-1}(U)) = \bar{f}^{-1}(p^{-1}(U))$, y dado que $p \circ \bar{f}$ es identificación, concluímos que U es un abierto de X. Por consiguiente f es una identificación y, por lo tanto, X está en $\underline{A}(M)$.

Por (1) y (2) tenemos que $\underline{A}(M)$ es cerrada bajo coproductos e identificaciones y por 2.3.18, $\underline{A}(M)$ es una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.

4.2.10 Definición. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ invariante respecto a funciones continuas. Sea M' una 1–clase cuyos elementos son funciones inyectivas (y por lo tanto biyectivas). Podemos obtener de $\mathcal{A}$ y M' una subclase M de M' con la condición siguiente:

Un elemento $f : X \to Y$ de M' está en M si y sólo si para todo $\mathcal{A}$–objeto $A \subseteq Y$, la función $f|_{f^{-1}(A)} : f^{-1}(A) \to A$ es un homeomorfismo.

4.2.11 Proposición. *La clase M de la definición anterior es una 1–clase y $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \underline{A}(M)$.*

Prueba. Veamos que M es una 1–clase. Supongamos que tenemos el siguiente cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

con f en M y así f' en M'. Sea $A' \subseteq Y'$ un objeto de $\mathcal{A}$. Entonces $A := g(A')$ está en $\mathcal{A}$. Sean $f_1 = f|_{f^{-1}(A)}$ y $f_1' = f'|_{f'^{-1}(A')}$, entonces resulta un nuevo cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
f'^{-1}(A') \arrow[r] \arrow[d, "f_1'"'] & f^{-1}(A) \arrow[d, "f_1"] \\
A' \arrow[r, "g|_{A'}"'] & A
\end{tikzcd}$$

ya que dado un diagrama como el siguiente

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\bar{g}"] \arrow[drr, bend left, "g_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_1'"'] & & \\
& f'^{-1}(A') \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_1'"'] & f^{-1}(A) \arrow[d, "f_1"] \\
& A' \arrow[r, "g|_{A'}"'] & A
\end{tikzcd}$$

podemos definir $\bar{g}$ como ${f'}_1^{-1} \circ {g'}_1$ que hace conmutar trivialmente el diagrama izquierdo y, por la conmutatividad de cuadrado, conmutar al diagrama superior, es decir, si $z \in Z$ entonces $f_1(h(f_1^{-1}({g'}_1(y)))) = g({g'}_1(y)) = f_1(g_1(y))$. Además, como f_1 es homeomorfismo, en particular es una identificación y como M' es una 1–clase, entonces ${f'}_1$ está en M', es decir, es una identificación inyectiva y por lo tanto un homeomorfismo, por lo tanto f' está en M.

Ahora veamos que $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \underline{A}(M)$. Si A es un objeto de $\mathcal{A}$ y $X \xrightarrow{f} A$ pertenece a M, por definición de M, f es un homeomorfismo y, en particular, una identificación. Por lo tanto A pertenece a $\underline{A}(M)$ y como $\underline{A}(M)$ es una categoría correflexiva, es decir, es cerrada bajo coproductos e identificaciones. $\square$

4.2.12 Definición. Se dice que una función continua $g : X \to Y$ tiene la *propiedad de levantamiento (único) de homotopías* respecto a un espacio topológico Z si, para todo diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Z \times I \arrow[r, "H'"'] & Y \end{tikzcd}$$

con g continua e $i_0(z) = (z, 0)$ con $z \in Z$, existe $H : X \times I \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "g"] \\ Z \times I \arrow[r, "H'"'] \arrow[ur, dotted, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

En tal caso H recibe el nombre de *levantamiento* de H' que empieza con f.

4.2.13 Definición. (1) Sea E una clase no vacía de espacios topológicos y $f \in \mathfrak{Top}(X, Y)$. f es una *E–fibración* si tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto de cualquier espacio en E.

(2) Cuando E consta de todos los espacios topológicos, f es llamada *fibración de Hurewicz*.

4.2.14 Definición. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$.

(1) Decimos que A es un *retracto* de X (o que hay una retracción de X sobre A) si existe $r : X \to A$ continua tal que $r|A = 1_A$.

(2) Decimos que A es un *retracto por deformación* de X, si existe una homotopía $H : X \times I \to X$ tal que

$$H(x, 0) = x \text{ si } x \in X$$
$$H(x, 1) \in A \text{ si } x \in X$$
$$H(a, 1) = a \text{ si } a \in A$$

En particular, la aplicación $r_H : X \to A$ tal que $r_H(x) = (x, 1)$, es una retracción de X en A, es decir, A es un retracto de X.

(3) Si además de las condiciones en (2), pedimos que $H(a, t) = a$ para todo $a \in A$ y $t \in I$, entonces se dice que A es un retracto fuerte por deformación de X.

(4) Decimos que A es un *retracto débil* de X si existe $r : X \to A$ continua tal que $r \circ i \simeq 1_A$, donde $i : A \to X$ es la inclusión. En particular, todo retracto es un retracto débil.

(5) Decimos que A es un *retracto débil por deformación* de X si la inclusión $i : A \to X$ es una equivalencia homotópica. En particular, todo retracto por deformación es un retracto débil por deformación.

4.2.15 Definición. (1) Sea $j : X \to Y$ una función continua y W un espacio topológico. Decimos que j tiene la *propiedad de extensión de homotopía* (P.E.H.) respecto a W si cada vez que tenemos las funciones continuas $g : Y \to W$ y $H : X \times I \to W$ tales que

$H \circ i_0 = g \circ j$, existe $\widetilde{H} : Y \times I \to W$ continua (no necesariamente única) tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "j"'] & X \times I \arrow[d, "j\times 1_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
Y \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & Y \times I \arrow[dr, dotted, "\widetilde{H}"] & \\
 & & W
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, $\widetilde{H} \circ (j \times 1_I) = H$ y $\widetilde{H} \circ i_0 = g$.

(2) Una función continua $j : X \to Y$ se dice que es una *cofibración* si tiene la P.E.H. respecto a todo espacio topológico W.

4.2.16 Observación. Sea $f : X \to Y$ continua y Z_f el espacio obtenido al identificar el coproducto de $X \times I$ y Y, utilizando la siguiente identificación: $(x, 1) \in X \times I$ con $f(x) \in Y$. Z_f es llamado *cilindro de aplicación* de f. Dada la definición anterior, utilizaremos la siguiente notación: $[x, t]$ denota al punto de Z_f que le corresponde a $(x, t) \in X \times I$ bajo la identificación y $[y]$ a los puntos $y \in Y$ (así $[x, 1] = [f(x)]$ con $x \in X$).

Notemos que existe un encaje $i : X \to Z_f$ con $i(x) = [x, 0]$ y un encaje $j : Y \to Z_f$ con $j(y) = [y]$, y por ello consideraremos a X y Y como subespacios de Z_f. Además, existe una retracción $r : Z_f \to Y$ definida como $r[x, t] = [f(x)]$ para $x \in X$, $t \in I$ y $r[y] = y$ para $y \in Y$.

4.2.17 Lema. *Sea $X \xrightarrow{f} Y$ una función continua. Entonces, existe un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z_f \arrow[dl, shift left, "r"] \\
 & Y \arrow[ur, shift left, "j"] &
\end{tikzcd}$$

con i, j y r como en la observación anterior, tal que

(1) $1_{Z_f} \simeq j \circ r$ *(rel Y), es decir, existe una homotopía F de 1_{Z_f} a $j \circ r$ tal que $F([y], t) = [y]$ para todo $y \in Y$ y $t \in I$.*

(2) *i es una cofibración.*

Prueba.

(1) Definimos $F : Z_f \times I \to Z_f$ como

$$\begin{cases} F([x, t], t') = [x, (1 - t')t + t'] & \text{si } x \in X,\ t, t' \in I \\ F([y], t') = [y] & \text{si } y \in Y,\ t' \in I \end{cases}$$

F está bien definida por que $F([x, 1], t') = [x, (1 - t') + t'] = [x, 1] = [f(x)]$, es decir, los puntos de la intersección concuerdan en su imagen, es continua porque lo es en cada parte de la función y cumple

$$\begin{cases} F([x, t], 0) = [x, t] & \\ F([y], 0) = [y] & \text{es decir } F(\_, 0) = 1_{Z_f}(\_) \\ F([x, t], 1) = [x, 1] = [f(x)] = j(r[f(x)]) & \\ F([y], 1) = [y] & \text{es decir } F(\_, 1) = j \circ r(\_) \end{cases}$$

Además notemos que dada la definición de F, los puntos $y \in Y$ quedan fijos.

(2) Sea $g : Z_f \to W$ y $H : X \times I \to W$ continuas tal que $g([x,t]) = H(x,0)$ (es decir, el diagrama exterior en la definición de P.E.H. conmuta). Definimos $\widetilde{H} : Z_f \times I \to W$ como

$$\begin{cases} \widetilde{H}([y],t') = g([y]) \text{ si } y \in Y,\, t' \in I \\ \\ \widetilde{H}([x,t],t') = \begin{cases} g([x, \frac{2t-t'}{2-t'}]) & \text{si } 0 \leq t' \leq 2t \leq 2,\, x \in X \\ H(x, \frac{t'-2t}{1-t}) & \text{si } 0 \leq 2t \leq t' \leq 1,\, x \in X \end{cases} \end{cases}$$

$\widetilde{H}$ está bien definida ya que $\widetilde{H}([x,1],t') = g([x, \frac{2-t'}{2-t'}]) = g([f(x)])$, es continua porque lo es en cada parte de la definición y los puntos de intersección concuerdan con su imagen en cada caso. Además cumple $(\widetilde{H} \circ i \times 1_I)(x,t') = \widetilde{H}([x,0],t') = H(x,t')$ y $(\widetilde{H} \circ i_0)([x,t]) = \widetilde{H}([x,t],0) = g([x,t])$, $(\widetilde{H} \circ i_0)([y]) = \widetilde{H}([y],0) = g([y])$. Por lo tanto i tiene la P.E.H. para todo espacio topológico W. $\square$

4.2.18 Lema. *Si $i : A \to X$ tiene la P.E.H. Entonces, A es un retracto débil de X si y sólo si A es un retracto de X.*

Prueba. Dado (4) de 4.2.14, basta probar que toda retracción débil $r : X \to A$ es homotópica a una retracción.

Por hipótesis $r \circ i \simeq 1_A$, sea $H : A \times I \to A$ la homotopía, entonces $H(a,0) = r(a)$ para toda $a \in A$. Como i tiene la P.E.H. existe una homotopía $\widetilde{H} : X \times I \to A$, la cual extiende a H y empieza en r

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times 1_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\ X \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "r"'] & X \times I \arrow[dr, dotted, "\widetilde{H}"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

es decir, $\widetilde{H}(x,0) = r(x)$ para toda $x \in X$. Si $r' : X \to A$ está definida por $r'(x) = \widetilde{H}(x,1)$, entonces r' es una retracción de X en A, y por lo tanto $\widetilde{H}$ es una homotopía de r en r'. $\square$

Hasta aquí, todos los resultados acerca de retracciones, propiedades de levantamiento de homotopías y extensión de homotopías, serán utilizados para demostrar el teorema principal de esta sección. Sin embargo, los lemas y teoremas siguientes muestran que se puede extender aún más la relación entre cofibraciones y retracciones en el cilindro de aplicación.[3] Concluyendo lo anterior en el teorema 4.2.30.

4.2.19 Definición. Sea Y un espacio topológico y $X \subseteq Y$. Decimos que una homotopía $F : X \times I \to Y$ es una *deformación* si $F(x,0) = x$ para toda $x \in X$. Si, además, $F(X \times \{1\})$ está contenido en un subespacio A de Y, se dice que F es una *deformación* de X a A o que X es deformable a A.

4.2.20 Lema. *Un espacio X es deformable a un subespacio A si y sólo si la inclusión $i : A \to X$ tiene un inverso derecho homotópico.*

Prueba. Supongamos que X es deformable a A. Sea $F : X \times I \to X$ una deformación tal que $F(x \times \{1\})$ es subconjunto de A. Definimos $f : X \to A$ por la ecuación $i(f(x)) = F(x,1)$

[3] Dichos resultados pueden ser omitidos para los fines de la sección.

para toda $x \in X$, entonces F es una homotopía de 1_X en $i \circ f$, es decir, i tiene inverso derecho homotópico.

Ahora, si i tiene inverso derecho homotópico $f : X \to A$, entonces existe una homotopía $F : X \times I \to X$ tal que $i \circ f \simeq 1_X$, es decir, $F(x, 0) = x$ y $F(X \times 1) = i(f(X)) \subseteq A$ Por lo tanto X es deformable dentro de A. □

4.2.21 Lema. *A es un retracto débil por deformación de X si y sólo si A es un retracto débil de X y X es deformable a A.*

Prueba. A es un retracto débil por deformación si y sólo si la inclusión es una equivalencia homotópica, es decir, existe $r : X \to A$ tal que $r \circ i \simeq 1_A$ (retracto débil) e $i \circ r \simeq 1_X$ (la inclusión tiene inverso homotópico derecho). Por lo tanto, aplicando el lema anterior, X es deformable a A.

Para obtener el inverso del enunciado, probaremos que si la inclusión i tiene inverso homotópico izquierdo y derecho, entonces éstos son homotópicos. Por hipótesis A es un retracto débil de X y X es deformable a A, es decir, i tiene inverso homotópico izquierdo; $g \circ i \simeq 1_A$ y derecho $i \circ f \simeq 1_X$ respectivamente, entonces $f = 1_A \circ f \simeq g \circ i \circ f \simeq g \circ 1_X = g$, es decir, $f \simeq g$. □

4.2.22 Lema. *Sea A un retracto de X. Si X es deformable a A, entonces A es un retracto por deformación de X .*

Prueba. Sea $r : X \to A$ una retracción, entonces $1_A \simeq r \circ i$, es decir, r es inverso izquierdo homotópico. Dado que X es deformable a A, i tiene inverso homotópico derecho y por la observación del lema anterior, r cumple $1_X \simeq i \circ r$ y por lo tanto A es un retracto por deformación de X. □

4.2.23 Corolario. *Si $i : A \to X$ tiene la P.E.H. entonces A es un retracto débil por deformación de X si y sólo si A es un retracto por deformación de X.*

Prueba. A es un retracto débil por deformación si y sólo si la inclusión es una equivalencia homotópica, entonces la inclusión tiene inverso homotópico izquierdo. Por el lema 4.2.18, lo anterior ocurre si y sólo si A es retracto de X. Además, dado que la inclusión tiene inverso homotópico derecho si y sólo si X es deformable a A, se tiene por el lema 4.2.22 que lo anterior es cierto si y sólo si A es un retracto por deformación de X. □

4.2.24 Teorema. *Si $i : (X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1) \to X \times I$ tiene la P.E.H. entonces A es un retracto por deformación de X si y sólo si A es un retracto fuerte por deformación de X.*

Prueba. Si A es un retracto por deformación de X, sea $F : X \times I \to X$ la homotopía de 1_X a $i \circ r$, donde $X \xrightarrow{r} A$ es una retracción e i la inclusión de A en X. Definimos una homotopía $G : [(X \times 0) \cup (A \times I) \cup (X \times 1)] \times I \to X$ dada por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} G((x, 0), t') = x \text{ con } x \in X,\ t' \in I \\ G((x, t), t') = F(x, (1 - t')t) \text{ con } x \in A;\ t, t' \in I \\ G((x, 1), t') = F(r(x), 1 - t') \text{ con } x \in X,\ t' \in I \end{cases}$$

G está bien definida porque dada $x \in A$

$$G((x, 0), t') = x = F(x, 0)$$

y además

$$G((x, 1), t') = F(x, 1 - t') = F(r(x), 1 - t')$$

por ser r retracción. G es continua porque su restricción a cada conjunto cerrado $(X\times 0)\times I$, $(A\times I)\times I$ y $(X\times 1)\times I$ es continua. Notemos que si $(x,t)\in(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)$, entonces $G((x,t),0)=F(x,t)$ ya que $G((x,0),0)=x=F(x,0)$ y $G((x,1),0)=F(r(x),1)=i(r(r(x)))=r(x)=F(x,1)$. Por lo tanto tenemos que G restringida a $[(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)]\times 0$ puede extenderse a $(X\times I)\times 0$, y haciendo uso de la P.E.H. G restringida a $[(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)]\times 1$ puede extenderse a $(X\times I)\times 1$. Sea $G':(X\times I)\times 1\to X$ dicha extención, definimos $H:X\times I\to X$ como $H(x,t)=G'((x,t),1)$. Notemos que dada la definición anterior, se cumplen las ecuaciones

$$\begin{cases} H(x,0)=G'((x,0),1)=G((x,0),1)=x \text{ con } x\in X\\ H(x,1)=G((x,1),1)=F(r(x),0)=r(x) \text{ con } x\in X\\ H(x,t)=G((x,t),1)=F(x,0)=x \text{ con } x\in A,\ t\in I\end{cases}$$

Por lo tanto H es una homotopía relativa a A de 1_X a $i\circ r$, esto es, A es un retracto fuerte por deformación de X. □

4.2.25 Definición. Dado un espacio topológico X y $A\subseteq X$ subespacio:

(1) Decimos que (X,A) es una *pareja de espacios*. Una *aplicación de parejas*, denotada por $f:(X,A)\to(Y,B)$, es una función $f:X\to Y$ tal que $f(A)\subseteq B$.

(2) Dadas (X_1,A_1) y (X_2,A_2) parejas de espacios, definimos el *producto de parejas* $(X_1,A_1)\times(X_2,A_2)$ como $(X_1\times X_2,(A_1\times X_2)\cup(X_1\times A_2))$.

(3) Una *homotopía de parejas* es una homotopía sobre una aplicación de parejas $H:(X\times A)\times I=(X\times I,A\times I)\to(Y,B)$, es decir, $H:X\times I\to Y$ cumple $H(a,t)\in B$ para toda $a\in A$, $t\in I$.

(4) Un *homeomorfismo de parejas* $\phi:(X,A)\to(Y,B)$ es un homeomorfismo $\phi:X\to Y$ tal que $\phi(A)=B$.

4.2.26 Observación. Si $f_1:(X_1,A_1)\to(Y_1,B_1)$ y $f_2:(X_2,A_2)\to(Y_2,B_2)$ son aplicaciones de parejas, entonces $f_1\times f_2:(X_1,A_1)\times(X_2,A_2)\to(Y_1,B_1)\times(Y_2,B_2)$ es una aplicación de parejas.

4.2.27 Lema. *Existe un homeomorfismo de parejas* $\alpha:(I\times I,(\{0\}\times I)\cup(I\times\{1\})\cup(\{1\}\times I))\to(I\times I,\{1\}\times I)$.

Prueba. Definimos α como

$$\alpha(s,t)=\begin{cases}(1-3s,\frac{t}{3}) \text{ si } 0\le s\le\frac{1-t}{3}\\ (t,\frac{3s-2st+2t-1}{2t+1}) \text{ si } \frac{1-t}{3}\le s\le\frac{2+t}{3}\\ (3s-2,\frac{3-t}{3}) \text{ si } \frac{2+t}{3}\le s\le 1\end{cases}$$

notemos que está bien definida, ya que

$$\alpha\left(\frac{1-t}{3},t\right)=\begin{cases}(t,\frac{t}{3}) \text{ para el primer caso,}\\ (t,\frac{t(2t+1)}{3(2t+1)}) \text{ para el segundo,}\end{cases}$$

y

$$\alpha\left(\frac{2+t}{3},t\right)=\begin{cases}(t,\frac{(3-t)(2t+1)}{3(2t+1)}) \text{ para el primer caso,}\\ (t,\frac{3-t}{3}) \text{ para el segundo.}\end{cases}$$

α es continua porque lo es en cada uno de los tres pedazos cerrados, es inyectiva y suprayectiva, y α es cerrada porque va de un compacto a un T_2, por lo tanto $\alpha : I \times I \to I \times I$ es un homeomorfismo.

Notemos además, que $\alpha(0,t) = (1, \frac{t}{3})$,

$$\alpha(s,1) = \begin{cases} (1, \frac{1}{3}) \text{ si } 0 \leq s \leq 0 \\ (1, \frac{s+1}{3}) \text{ si } 0 \leq s \leq 1 \\ (1, \frac{2}{3}) \text{ si } 1 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

y $\alpha(1,t) = (1, \frac{3-t}{3})$, es decir $\alpha(\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{1\} \times I)) \subseteq \{1\} \times I$, pero como es suprayectiva, para que un elemento $(1,z) \in \{1\} \times I$ provenga de uno del dominio, digamos (s,t), es necesario que $s = 0, 1$ o $t = 1$. Por lo tanto se da la igualdad entre los conjuntos anteriores y por lo tanto α es un homeomorfismo de parejas. □

4.2.28 Lema. *Si (Z,X) es una pareja de espacios y $W = (Z\times\{0\})\cup(X\times I)\cup(Z\times\{1\}) \subseteq Z\times I$, entonces existe un homeomorfismo de parejas*

$$\varphi : (Z \times I \times I, (Z \times I \times \{1\}) \cup (W \times I)) \to (Z \times I \times I, (Z \times \{1\} \times I) \cup (X \times I \times I))$$

Prueba. Primero notemos que el dominio de la función buscada es igual a la pareja $(Z,X)\times (I \times I, (\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{1\} \times I))$ y el codominio $(Z \times I, (Z \times \{1\}) \cup (X \times I)) \times I$; es igual a $(Z,X) \times (I \times I, \{1\} \times I)$. Por lo tanto, definimos φ como $1_Z \times \alpha$, donde α es el homeomorfismo del lema anterior.

Claramente $1_Z \times \alpha : Z \times I \times I \to Z \times I \times I$ es un homeomorfismo, además, por el lema anterior $\alpha(\{0\} \times I) \cup (I \times \{1\}) \cup (\{1\} \times I)) = \{1\} \times I$, entonces se cumple

$$\varphi((Z\times I\times\{1\})\cup(Z\times\{0\}\times I)\cup(Z\times\{1\}\times I)\cup(X\times I\times I)) = (Z\times\{1\}\times I)\cup(X\times I\times I) \quad (4.2)$$

y por lo tanto φ es un homeomorfismo de parejas. □

4.2.29 Lema. *Si existe una retracción $\sigma : Z\times I \to (Z\times\{1\})\cup(X\times I)$, entonces también existe una retracción $\rho : Z\times I\times I \to (Z\times I\times\{1\})\cup(W\times I)$, donde $W = (Z\times\{0\})\cup(X\times I)\cup(Z\times\{1\}) \subseteq Z \times I$.*

Prueba. Supongamos que existe σ y definamos ρ como $\rho(z,s,t) = \varphi^{-1} \circ (\sigma \times 1_I) \circ \varphi(z,s,t)$. Notemos que ρ tiene el dominio y codominio buscado

$$Z \times I \times I \xrightarrow{\varphi} Z \times I \times I \xrightarrow{\sigma\times 1_I} (Z \times \{1\} \times I) \cup (X \times I \times I) \xrightarrow{\varphi^{-1}} (Z \times I \times \{1\}) \cup (W \times I)$$

ya que la última composición se cumple por (3.1) del lema anterior. Además ρ es continua por ser composición de continuas y cumple lo siguiente:

$$\rho(z,s,1) = \varphi^{-1}(\sigma\times 1_I((z,\alpha(s,1)))) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\sigma \times 1_I((z,1,\frac{1}{3}))) = \varphi^{-1}(z,\alpha(s,1)) = (z,s,1) \\ \varphi^{-1}(\sigma \times 1_I((z,1,\frac{s+1}{3}))) = \varphi^{-1}(z,\alpha(s,1)) = (z,s,1) \\ \varphi^{-1}(\sigma \times 1_I((z,1,\frac{2}{3}))) = \varphi^{-1}(z,\alpha(s,1)) = (z,s,1) \end{cases}$$

para $(z,s,1) \in Z \times I \times \{1\}$, ya que la tercera igualdad se obtiene porque σ es una retracción, es decir, $\sigma|_{Z\times\{1\}} = 1_{Z\times\{1\}}$ y por lo tanto $\rho(z,s,1) = \varphi^{-1}(\varphi((z,s,1))) = (z,s,1)$. Además, si $(z,0,t)$, $(z,1,t)$ están en $Z\times\{0\}\times I$, $Z\times\{1\}\times I$ respectivamente, por (3.1) del lema anterior se tiene que $\varphi(z,0,t), \varphi(z,1,t) \in Z\times\{1\}\times I$, así que aplicando un razonamiento análogo podemos concluir que $\rho(z,0,t) = (z,0,t)$ y $\rho(z,1,t) = (z,1,t)$. Y por último, si $(z,s,t) \in X \times I \times I$, como $\sigma|_{X\times I} = 1_{X\times I}$, entonces $\rho(x,s,t) = (x,s,t)$. Por lo tanto ρ es la retracción buscada. □

4.2.30 Teorema. *Sea X un espacio Hausdorff y supongamos que A es cerrado en X. Entonces, $i : A \to X$ es una cofibración si y sólo si hay una retracción $r : X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$.*

Prueba. Supongamos que i es una cofibración y consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i\times 1_I"] \arrow[ddr, bend left, "j"] & \\ X \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "i'"'] & X \times I \arrow[dr, dotted, "r"] & \\ & & (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \end{tikzcd}$$

donde $i' : X \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ es el encaje dado por $i'(x) = (x, 0)$ y $j : A \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ la inclusión, entonces existe $r : X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ que hace conmutar el diagrama, es decir, $r(x, 0) = r(i_0(x)) = i'(x) = (x, 0)$ y $r(a, t) = j(a, t) = (a, t)$, por lo tanto r es una retracción.

Inversamente, si existe $g : X \to W$ y $H : A \times I \to W$ como en la definición de cofibración, definimos $\widetilde{H} : X \times I \to W$ como $\widetilde{H}(x, t) = ((g, H) \circ r)(x, t)$, donde $(g, H)(x, 0) = g(x)$ si $(x, 0) \in X \times \{0\}$ y $(g, H)(a, t) = H(a, t)$ si $(a, t) \in A \times I$. $\widetilde{H}$ está bien definida porque $\widetilde{H}(a, 0) = H(a, 0) = g(a)$, es continua porque es composición de continuas y hace conmutar el diagrama siguiente por definición

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i\times 1_I"] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\ X \arrow[r, "i_0"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \times I \arrow[dr, dotted, "\widetilde{H}"] & \\ & & W \end{tikzcd}$$

□

Gracias a lo que hemos demostrado en el tema de retracciones, podremos probar, dada una subcategoría correflexiva $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{Top}$, que si toda correflexión de $\mathfrak{A}$ es una fibración de Hurewicz entonces $\mathfrak{A}$ es una h–categoría. Esto será de suma importancia para probar el teorema principal ya mencionado con anterioridad 4.2.35.

4.2.31 Lema. *Supongamos que $p : E \to B$ es una fibración de Hurewicz y que $A \subseteq X$ es un retracto fuerte por deformación. Si el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces existe $h : X \to E$ tal que $p \circ h = f$ y $h|_A \simeq g$.

Prueba. Supongamos que $H : X \times I \to X$ es una deformación de X en A tal que $H(a, t) = a$ y $r : X \to A$ la retracción dada por $r(x) = H(x, 1)$. Definimos $F : X \times I \to B$ como $F = f \circ H$, y $g' : X \to E$ como $g' = g \circ r$. Notemos que $p \circ g' = p \circ g \circ r = f|_A \circ r = f \circ r$ y que $F(x,1) = f(H(x,1)) = f(r(x))$, es decir, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "j_1"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{F}"'] & B \end{tikzcd}$$

donde $j_1(x) = (x,1)$. Puesto que p tiene la propiedad de levantamiento de homotopías con respecto a cualquier espacio, existe $\widetilde{F} : X \times I \to E$ tal que $p \circ \widetilde{F} = F$ y $\widetilde{F}(x,1) = g'(x)$. Definimos $h : X \to E$ como $h(x) = \widetilde{F}(x,0)$, de esta manera; $p(h(x)) = p(\widetilde{F}(x,0)) = F(x,0) = f(H(x,0)) = f(x)$, y además, si $a \in A$; $\widetilde{F}(a,0) = h(a)$ y $\widetilde{F}(a,1) = g'(a) = g(r(a)) = g(a)$. $\square$

Nótese que en la prueba anterior sólo se utilizó que: p sea una $\mathcal{C}$–fibración (p tiene la propiedad de levantamiento de homotopías para la clase $\mathcal{C}$ de espacios topológicos), que $A, X \in \mathcal{C}$ y A sea un retracto fuerte por deformación de X, esto es, podemos generalizar el resultado para dichas hipótesis.

4.2.32 Corolario. *Supongamos que toda $\mathcal{A}$–correflexión es una fibración de Hurewicz. Si X es un retracto fuerte por deformación de Y y X pertenece a $\mathcal{A}$, entonces Y pertenece a $\mathcal{A}$.*

Prueba. Sea $X \xrightarrow{i} Y$ la inclusión y $Y' \xrightarrow{c} Y$ una $\mathcal{A}$–correflexión de Y. Entonces existe $\bar{i} : X \to Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "i"'] & Y' \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Por hipótesis c es una fibración de Hurewicz. Por lo tanto, aplicando el lema anterior, existe $s : Y \to Y'$ continua que hace conmutar el nuevo diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{i}"] \arrow[d, "i"'] & Y' \arrow[d, "c"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] \arrow[ur, dotted, "s"'] & Y \end{tikzcd}$$

es decir, $s \circ i \simeq \bar{i}$ y $c \circ s = 1_X$. Como s es inyectiva, c es una retracción, y por ser correflexión en $\mathfrak{Top}$, es una retracción inyectiva, es decir, un homeomorfismo,esto es, Y es un $\mathcal{A}$–objeto. $\square$

4.2.33 Teorema. *Sea $\mathfrak{A}$ una subcategoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$. Si toda $\mathfrak{A}$–correflexión es una fibración de Hurewicz entonces $\mathfrak{A}$ es una h–categoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Prueba.

(1) Sea $g : Y \to X$ una equivalencia homotópica con X en $\mathfrak{A}$. Por el lema 4.2.17 tenemos la factorización siguiente

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & Z_g \arrow[dl, "r"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

donde Z_g es el cilindro de aplicación de g, r es un retracto fuerte por deformación e i es una cofibración que es equivalencia homotópica por serlo g, por lo tanto Y es un retracto débil por deformación de Z_g ((5) de 4.2.14). Ahora, como i es cofibración, tenemos por el lema 4.2.18 que Y es retracto de Z_g.

(2) Sea r la retracción de Z_g en Y. Si $A \xrightarrow{f} Y$ es una $\mathfrak{A}$–correflexión, entonces existe $Z_g \xrightarrow{h} A$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Z_g \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "r"] & \\
A \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

es decir, $f \circ h = r$. Por lo tanto, al componer dichas funciones con la inclusión de Y en Z_g, se tiene $f \circ h \circ i = r \circ i = 1_Y$. Por otro lado, $f \circ h \circ i \circ f = 1_Y \circ f = f$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "i \circ f"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
Z_g \arrow[d, "h"'] & \\
A \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

pero 1_A también hace conmutar el diagrama. Por lo tanto, como f es correflexión, $h \circ i \circ f = 1_A$, lo cual implica que f es un homeomorfismo, esto es, Y está en $\mathfrak{A}$. $\square$

4.2.34 Teorema. *Sea $\mathcal{A}$ un subcategoría de conexión de $\mathfrak{Top}$. Para que la categoría correflexiva generada por $\mathcal{A}$ ($\widetilde{\mathcal{A}}$) sea una h–categoría correflexiva de $\mathfrak{Top}$ es suficiente que el espacio $[0,1] = I$ pertenezca a $\mathcal{A}$.*

Prueba. Supongamos que I es un $\mathcal{A}$–objeto. Sea M' la clase de todas las fibraciones de Hurewicz biyectivas y M la clase derivada de $\mathcal{A}$ y M' dada la definición 4.2.10.

(1) Para cualquier espacio topológico X, sea $\{X_j\}_{j\in J}$ la familia de sus $\mathcal{A}$–componentes, denotemos por η_j la inclusión de X_j en X. Así, $\eta_j : X_j \to X$ es una fibración de Hurewicz inyectiva ya que dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & X_j \arrow[d, "\eta_j"] \\
Z \times I \arrow[r, "H'"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & X
\end{tikzcd}$$

con Z cualquier espacio topológico y H' una homotopía, se tiene que $H'(z,0) \in \eta_j(X_j)$ y $H'(z,\_) : I \to X$ es una trayectoria de $H'(z,0)$ a $H'(z,1)$, pero por hipótesis I está en $\mathcal{A}$ y X_j es una $\mathcal{A}$–componente, entonces $H'(z,I) \subseteq X_j$ y por lo tanto existe H que levanta H' en X_j y que hace conmutar los diagramas interiores del cuadrado.

Sea $\eta : \coprod_{j\in J} X_j \to X$ la función definida por la familia $\{\eta_j\}_{j\in J}$. Entonces η es una fibración de Hurewicz biyectiva (ya que cada homotopía se define como arriba).

(2) Sea $c : X' \to X$ una $\widetilde{\mathcal{A}}$–correflexión de X. Entonces existe una función continua $\bar{\eta}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\bar{\eta}"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ X' \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

Notemos que $\bar{\eta}$ es una fibración de Hurewicz biyectiva ya que dado el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & \coprod_{j\in J} X_j \arrow[d, "\bar{\eta}"] \arrow[dr, "\eta"] & \\ Z \times I \arrow[r, "H'"'] \arrow[ur, dotted, "H"] & X' \arrow[r, "c"'] & X \end{tikzcd}$$

existe H tal que $H \circ i_0 = f$ y $\eta \circ H = c \circ H'$ por ser η una fibración de Hurewicz, pero $\eta = c \circ \bar{\eta}$ entonces $c \circ H' = c \circ \bar{\eta} \circ H$ y como c es inyectiva $H' = \bar{\eta} \circ H$.

(3) Veamos que $\bar{\eta}$ es elemento de M. Sea $A' \subseteq X'$ un $\mathcal{A}$–objeto, entonces existe $j \in J$ tal que $A = c(A') \subseteq X_j$. Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A = c(A') \subseteq \coprod X_j \arrow[dl, "\bar{\eta}"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ A' = \bar{\eta}(c(A')) \arrow[rr, "c"'] & & A = c(A') \end{tikzcd}$$

y las siguientes igualdades $c(\bar{\eta}(A)) = A = 1_A(A)$ y $\bar{\eta}(c(A')) = A' = 1_{A'}(A')$, es decir, $\bar{\eta}$ manda homeomorfamente A sobre A', concluyendo que $\bar{\eta}$ está en M.

(4) Por la proposición 4.2.11; $\widetilde{\mathcal{A}} \subseteq \underline{A}(M)$ y dado que c es una $\widetilde{\mathcal{A}}$–correflexión, tenemos que $\bar{\eta}$ es una identificación biyectiva, es decir, un homeomorfismo. Por lo tanto c es una fibración de Hurewicz.

En resumen, hemos probado que toda correflexión de $\widetilde{\mathcal{A}}$ es una fibración de Hurewicz y, por el teorema anterior, $\widetilde{\mathcal{A}}$ es una h–categoría. □

El trabajo de esta sección hasta aquí expuesto, concluye en el siguiente:

4.2.35 Teorema. *Una categoría de conexión es una h–categoría si y sólo si el intervalo* $[0,1] = I$ *pertenece a* $\mathcal{A}$.

Prueba. Si $\mathcal{A}$ es una h–categoría entonces I, que tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, pertence a $\mathcal{A}$.

Por otra parte, si I es un $\mathcal{A}$–objeto y $\mathcal{A} = \mathfrak{Top}$ entonces $\mathcal{A}$ es una h–categoría. Si $\mathcal{A} \neq \mathfrak{Top}$, entonces $\mathcal{A}$ está contenida en $\mathcal{A}^C$ por el corolario 4.1.14. Por el teorema anterior, $\widetilde{\mathcal{A}}$ y $\mathcal{A}^C$ son h–categorías, entonces basta probar que $\widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}^C \subseteq \mathcal{A}$ para concluir que $\mathcal{A}$ es una h–categoría.

Sea X en $\widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}^C$, entonces X es la unión ajena de elementos de $\mathcal{A}$, es decir, X es unión ajena de conexos, pero X es conexo, entonces no puede darse el caso que existan dos elementos de la unión ajenos entre sí, ya que las componentes son cerradas 2.1.9. Por lo tanto X mismo es una $\mathcal{A}$–componente, lo cual implica $\widetilde{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}^C \subseteq \mathcal{A}$. □

4.2.36 Corolario. *Una categoría de conexión es una h–categoría si y sólo si* $\mathcal{A}^{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{A}$.

Prueba. Por el teorema anterior, si $\mathcal{A}$ es una h–categoría entonces I pretenece a $\mathcal{A}$, lo cual significa que todas las imágenes continuas de I pertenecen a $\mathcal{A}$ y por 2.2.5 se tiene que cualquier espacio conectable por trayectorias pertenece a $\mathcal{A}$.

Claramente, si $\mathcal{A}^{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{A}$ entonces I pertenece a $\mathcal{A}$ y por lo tanto $\mathcal{A}$ es una h–categoría. □

4.2.37 Corolario. $\mathcal{A}^{\mathcal{P}}$ *es la mínima h–categoría de conexión.*

□

4.2.38 Ejemplos. Las siguientes son h–categorías de conexión diferentes de $\mathfrak{Top}$:

(1) $\mathrm{K}(\mathcal{I}) = \mathcal{A}^{P}$.

(2) $\mathrm{K}(\mathcal{C}) = \mathcal{A}^{c}$, donde C denota la clase de los espacios conexos.

(3) $\mathrm{K}(m^{C})$, generada por los espacios espacios métricos conexos.

(4) $\mathrm{K}(\mathcal{K}^{\mathcal{C}})$, generada por los espacios espacios compactos conexos.

(5) $\mathrm{K}(\mathcal{H}^{\mathcal{C}})$, generada por los espacios espacios Hausdorff conexos.

4.3. Categoría constante a la izquierda y espacios $\mathcal{A}$–inconexos

4.3.1 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una clase de espacios topológicos. Definimos la *categoría constante a la izquierda* $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ como la subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos X satisfacen la siguiente condición:

Si $X \xrightarrow{f} Y$ es una función continua con Y un objeto de $\mathcal{F}$, entonces f es constante.

4.3.2 Proposición. $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ *es una categoría de conexión para cualquier clase de espacios topológicos* $\mathcal{F}$.

Prueba.

(1) $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ es invariante bajo mapeos continuos. Si $X \xrightarrow{f} Y$ es continua con X en $\mathcal{N}(\mathcal{F})$, dada una función g de $f(X)$ a un objeto F de $\mathcal{F}$, la composición

$$X \xrightarrow[f]{} Y \xrightarrow[g]{} F$$

$g(f(X))$ debe ser constante, esto es, g aplicada a $f(X)$ es un punto. Por lo tanto $f(X)$ está en $\mathcal{N}(\mathcal{F})$.

(2) $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ es de componentes. Si tenemos $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de X con A_i en $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ tales que su intersección es distinta del vacío, para cualquier función $\bigcup_{i\in I} A_i \xrightarrow{f} F$ con F en $\mathcal{F}$, se cumple $f(A_i) = \{c_i\}$ para toda $i \in I$, pero dado que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$, se tiene que existe una c tal que $f(A_i) = \{c\} \forall i \in I$. Por lo tanto f es constante en $\bigcup_{i\in I} A_i$.

4.3.3 Ejemplos. (1) $\mathcal{A}^0 = \mathcal{N}(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ contiene algún espacio que no es T_0.

Sea Y un espacio que no es T_0. Entonces existen dos elementos $y, y' \in Y$ tales que para cualquier abierto U de Y, se tiene que $y, y' \in U$. Si X es un espacio que contiene más de un elemento, podemos definir una función $X \xrightarrow{f} Y$ como:

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{si } x = x_0 \\ y' & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

donde $x_0 \in X$. Por lo tanto f es continua y no constante, es decir, X no está en $\mathcal{N}(\mathcal{F})$. Sin embargo, todos los espacios unipuntuales son elementos de $\mathcal{N}(\mathcal{F})$.

(2) $\mathcal{A}^{\mathcal{S}} = \mathcal{N}(\{\mathcal{S}\})$, donde $\mathcal{S}$ denota al espacio de Sierpinski (notemos que dicha igualdad justifica la notación $\mathcal{A}^{\mathcal{S}}$).

Claramente todo espacio indiscreto X está en $\mathcal{N}(\{\mathcal{S}\})$, ya que si existiese más de un elemento en X y una función $X \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ continua no constante, se cumpliría que $f^{-1}(0)$ es un abierto de X distinto del total, pero esto sería una contradicción pues X es indiscreto.

Ahora, si X no es indiscreto, entonces existe U abierto de X distinto del total. Definimos $X \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ como:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U \\ 1 & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

la cual es continua y no constante, por lo tanto X no está en $\mathcal{N}(\{\mathcal{S}\})$.

(3) $\mathfrak{Top} = \mathcal{N}(\mathcal{A}^0)$. Las únicas funciones a los espacios singulares son las constantes y éstas son continuas.

(4) $\mathcal{A}^C = \mathcal{N}(\{0,1\})$.

De forma análoga a las definiciones vistas en el capítulo de conexidad sobre espacios totalmente inconexos y tipt, tenemos la siguiente

4.3.4 Definición. Si $\mathcal{A}$ es una categoría de conexión, diremos que un espacio es *totalmente $\mathcal{A}$–inconexo* si sus $\mathcal{A}$–componentes son puntos. Denotaremos por $I(\mathcal{A})$ a la clase de todos los espacios totalmente $\mathcal{A}$–inconexos.

4.3.5 Proposición. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría de conexión, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$ si y sólo si $\mathcal{F} \subseteq I(\mathcal{A})$.*

Prueba. Un espacio X de $\mathcal{F}$ no es elemento de $I(\mathcal{A})$ si y sólo si la inclusión en X de sus $\mathcal{A}$–componentes son no constantes. □

4.3.6 Corolario. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría de conexión y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{N}(I(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$.*

Prueba. Observación: Si A y B son familias de espacios tales que $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(A)$. Si $X \xrightarrow{f} Y$ es una función continua con $Y \in B$, entonces X está en $\mathcal{N}(B)$ si y sólo si f es constante para todo espacio de B, en particular para todos los espacios en A.

Ahora, por la proposición anterior $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$ si y sólo si $\mathcal{F} \subseteq I(\mathcal{A})$. Por lo tanto $\mathcal{N}(I(\mathcal{A})) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$. □

4.3.7 Proposición. (1) $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \mathcal{N}(I(\mathcal{N}(\mathcal{F})))$ (2) $I(\mathcal{A}) = I(\mathcal{N}(I(\mathcal{A})))$

(1) Por 4.3.5: $\mathcal{N}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$ si y sólo si $\mathcal{F} \subset I(\mathcal{N}(\mathcal{F}))$, entonces $\mathcal{N}(I(\mathcal{N}(\mathcal{F}))) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{F})$. Por otro lado, si X es un espacio de $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ y $X \xrightarrow{f} Y$ es una función continua con Y en $I(\mathcal{N}(\mathcal{F}))$, entonces $f(X)$ está contenida en una $\mathcal{N}(\mathcal{F})$–componente, pero Y es totalmente $\mathcal{N}(\mathcal{F})$–inconexo, por lo tanto $f(X)$ es un punto, es decir, X es elemento de $\mathcal{N}(I(\mathcal{N}(\mathcal{F})))$.

(2) Por 4.3.5; $I(\mathcal{A}) \subseteq I(\mathcal{A})$ si y sólo si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}(I(\mathcal{A}))$. Por lo tanto, si las $\mathcal{N}(I(\mathcal{A}))$ –componentes de un espacio X son puntos, en particular las $\mathcal{A}$–componentes lo son, es decir, $I(\mathcal{N}(I(\mathcal{A}))) \subseteq I(\mathcal{A})$. Por otro lado, sea X en $I(\mathcal{A})$ y $Y \xrightarrow{f} X$ una función continua con Y en $\mathcal{N}(I(\mathcal{A}))$. Entonces f debe ser constante por definición. En particular, esto ocurre si Y es una $\mathcal{N}(I(\mathcal{A}))$–componente de X y f es la inclusión. □

4.3.8 Proposición. *Si $\mathcal{A}$ es una categoría de conexión no trivial, entonces todos los espacios en $I(\mathcal{A})$ son T_1.*

Prueba. Si X es un espacio indiscreto no singular, por 4.1.18, X está en $\mathcal{A}$ y por lo tanto X no pertenece a $I(\mathcal{A})$. Ahora, si X no es indiscreto ni T_1, existen dos puntos $x, x' \in X$ tales que si U y V son cualesquiera abiertos distintos tales que $x \in U$ y $x' \in V$ con alguno distinto del total, entonces $\{x, x'\} \subseteq U$ o $\{x, x'\} \subseteq V$ por no ser T_1, es decir, $\{x, x'\}$ es homeomorfo a $\mathcal{S}$. Ahora, dado que X tiene una $\mathcal{A}$–componente distinta a un punto, podemos concluir que X no pertenece a $I(\mathcal{A})$ y por lo tanto, cualquier espacio que no sea T_1 no es elemento suyo. □

4.3.9 Proposición. *Una categoría de conexión $\mathcal{A}$ es una h–categoría si y sólo si $\mathcal{A}$ no está contenida en $\mathcal{N}(I)$.*

Prueba. Si $\mathcal{A}$ es una h–categoría, por 4.2.35 I es un $\mathcal{A}$–objeto y por lo tanto $I \xrightarrow{1_I} I$ es una función continua no constante de un objeto de $\mathcal{A}$ en I, esto es, $\mathcal{A}$ no está contenida en $\mathcal{N}(I)$.

Ahora, si $\mathcal{A}$ no está contenida en $\mathcal{N}(I)$ y $\mathcal{A} \neq \mathfrak{Top}$, entonces existe un espacio X de $\mathcal{A}$ y una función continua no constante $X \xrightarrow{f} I$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que existen $x, y \in X$ tal que $f(x) = 0$ y $f(x) = 1$, y como X es conexo 4.1.14, se tiene $f(X) = I$. Por lo tanto I está en $\mathcal{A}$. □

4.3.10 Definición. Sea $\mathfrak{a}$ un cardinal mayor o igual a 2 y $\mathfrak{b}$ un cardinal infinito, diremos que un espacio X tiene la *topología de los $\mathfrak{b}$–complementos* si los conjuntos abiertos de X son subconjuntos cuyo complemento tiene cardinalidad $\leq \mathfrak{b}$. Se denotará por $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ a un espacio de cardinalidad $\mathfrak{a}$ con la topología de los $\mathfrak{b}$–complementos, y denotaremos por $X_{\mathfrak{a}}$ al espacio de cardinalidad $\mathfrak{a}$ con la topología cofinita.

Claramente, si $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$, el espacio $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ es discreto, ya que el complemento de todo conjunto será menor o igual a $\mathfrak{b}$.

4.3.11 Proposición. *Los objetos de la subcategoría $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$ son aquellos espacios X tal que si X es igual a $\bigcup_{j \in J} X_j$ donde los elementos de la familia $\{X_j\}$ son conjuntos cerrados disjuntos de X, entonces $card(J) > \mathfrak{a}$ si $\mathfrak{a}$ es infinito y $card(J) \geq \aleph_0$ si $\mathfrak{a}$ es finito.*

Prueba.

(1) Primero notemos que si $\mathfrak{a}$ es finito entonces $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}}) = \mathcal{A}^C$. Supongamos que $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ es una unión de cerrados ajenos con $card(J) < \aleph_0$, es decir, J un conjunto finito. Como $X_i \cap X_j = \varnothing$ para $i \neq j$, se tiene que $X \setminus X_k = \bigcup_{j \in J \setminus \{k\}} X_j$, pero $X \setminus X_k$ es abierto para toda $k \in J$, por lo tanto $\bigcap_{j \in J \setminus \{i\}} X \setminus X_j = X_i$ es un abierto de X, pero esto es una contradicción, pues dado $i \in J$; los conjuntos X_i y $\bigcup_{j \in J \setminus \{i\}} X_j$ formarían una separación no trivial de X. Por lo tanto $card(J) \geq \aleph_0$

(2) Ahora veremos que si $\mathfrak{a}$ es infinito y X no pertenece a $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$, entonces $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ con $1 < card(J) \leq \mathfrak{a}$, y si X es la unión disjunta de una familia de subconjuntos cerrados $\{X_j\}_{j \in J}$ y $card(J) \leq \mathfrak{a}$ entonces existe una función continua de X en $X_{\mathfrak{a}}$ no constante:

Si $\mathfrak{a}$ es infinito y X no pertenece a $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$, existe una función $X \xrightarrow{f} X_{\mathfrak{a}}$ continua no constante y por lo tanto, X es igual a $f^{-1}(X_{\mathfrak{a}}) := \bigcup_{j \in J} X_j$ donde cada X_j es la imagen inversa de algún punto de $X_{\mathfrak{a}}$ y, dado que los puntos son cerrados en $X_{\mathfrak{a}}$, X_j es cerrado para toda $j \in J$. Claramente $X_j \cap X_i = \varnothing$ para toda $j \neq i$ y $1 < card(J) \leq \mathfrak{a}$.

Ahora, si X es la unión disjunta de una familia de subconjuntos cerrados $\{X_j\}_{j \in J}$ y $card(J) \leq \mathfrak{a}$, definimos $X \xrightarrow{f} X_{\mathfrak{a}}$ como $f(x) = a_j$ si $x \in X_j$, donde $a_j \in X_{\mathfrak{a}}$ para toda

$j \in J$ y $a_j \neq a_i$ si $j \neq i$. f es continua ya que si tomamos un abierto U de $X_{\mathfrak{a}}$, entonces $U = X_{\mathfrak{a}} \setminus \{x_{t_1}, ..., x_{t_n}\}$, con $n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $f^{-1}(U)$ es igual a $X \setminus (X_{j_1} \cup ... \cup X_{j_m})$ con $m \in \mathbb{N}$, que es un abierto porque $X_{j_1} \cup ... \cup X_{j_m}$ es cerrado. Por lo tanto f es continua no constante, es decir, X no está en $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$. $\square$

4.3.12 Lema. *Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}$ son cardinales infinitos y $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}' \geq \mathfrak{b}$, entonces $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})$ y $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$ están propiamente contenidos en $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}})$ y $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}'})$ respectivamente.*

Prueba. Dado que existe un encaje $i : X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}} \to X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, podemos ver a $X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}}$ como subespacio de $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$. Por lo tanto (observación de 4.3.6) $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})$ está contenido en $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}})$.

Ahora probaremos que el espacio $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ es un objeto de $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}})$, y como dicho espacio no es objeto de $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})$ podemos concluir que la contención es propia. Si existiese una función continua no constante $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} \xrightarrow{f} X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}}$, tendríamos que $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ es igual a $\bigcup_{j\in J} X_j$ donde X_j es la preimagen de algún punto de $X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}}$. Como f no es constante $1 < card(J) \leq \mathfrak{a}'$, pero $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}' \geq \mathfrak{b}$ entonces existe $i \in J$ tal que $card(X_i) = \mathfrak{a}$ lo cual es una contradicción, ya que $X \setminus X_i$ sería un abierto cuyo complemento tiene un cardinal estrictamente mayor a $\mathfrak{b}$. Por lo tanto f es constante (para la contención propia de $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$ con respecto a $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}'})$ se procede de manera análoga). $\square$

4.3.13 Corolario. *Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}$ son cardinales infinitos y $\mathfrak{a} > \mathfrak{a}' \geq \mathfrak{b}$, entonces la categoría correflexiva $\widetilde{\mathcal{N}}(X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})$ está propiamente contenida en $\widetilde{\mathcal{N}}(X_{\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{b}})$.* $\square$

4.3.14 Lema. *$\mathcal{N}(X_{\aleph_0})$ es una h–categoría, además si $\mathfrak{b} \geq \aleph_0$, entonces $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}})$ es una h–categoría para todo cardinal $\mathfrak{a} \geq 2$.*

Prueba.

(1) $\mathcal{N}(X_{\aleph_0})$ es una h–categoría porque dada cualquier función continua $I \xrightarrow{f} X_{\aleph_0}$, se tiene que $I = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(x_j)$ con $x_j \in f(I)$, es decir, como los puntos son cerrados en $X_{\aleph_0}$, se tiene que I es la unión, a lo más numerable (por definición $X_{\aleph_0}$ tiene cardinal $\aleph_0$), de subconjuntos cerrados disjuntos, pero esto sólo puede suceder si $card(f(I)) = 1$ y por lo tanto, sólo si f es constante. Por lo tanto $\mathcal{N}(X_{\aleph_0})$ es una categoría de conexión que contiene a I, es decir, es una h–categoría.

(2) Supongamos que $\mathfrak{a}$ es finito. Entonces tenemos que $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ es un espacio discreto y por lo tanto $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}) = \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$.

Ahora supongamos que $\mathfrak{a}$ es infinito y notemos que los únicos subconjuntos compactos en $X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ son los finitos. Dado $B \subseteq X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ infinito, sabemos existe una familia numerable $A := \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ contenida en B, definimos la familia $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como sigue: $U_i := (X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}} \setminus \{A\}) \cup \{a_i\}$ y notemos que $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de B que no tiene subcubiertas finitas. Por lo tanto, dada una función continua $I \xrightarrow{f} X_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, se tiene que $f(I)$ es un conjunto compacto y en consecuencia finito, pero la única forma de tener a $f(I)$ como unión finita de cerrados (unión de puntos) ajenos es que $card(f(I)) = 1$, esto es, que f sea constante. $\square$

4.3.15 Lema. *Si $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{c}$ es la cardinalidad del continuo, entonces $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$ no es una h–categoría.*

Prueba. Dado que $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{c}$, podemos definir para cualquiera dos puntos $y, y' \in X_{\mathfrak{a}}$ una función inyectiva $I \xrightarrow{f} X_{\mathfrak{a}}$ tal que $f(0) = y$ y $f(1) = y'$. Nótese que cualquier función definida como la anterior es continua, ya que dado $U \subseteq X_{\mathfrak{a}}$ abierto cumple $card(X_{\mathfrak{a}} \setminus U) < \aleph_0$ y por lo tanto $car(I \setminus f^{-1}(U)) < \aleph_0$ por la inyectividad de f, y por lo tanto $f^{-1}(U)$ es un abierto en I. Dado lo anterior, podemos concluir que $X_{\mathfrak{a}}$ es conectable por trayectorias, en consecuencia $\mathcal{N}(X_{\mathfrak{a}})$ no puede ser una h–categoría. □

4.3.16 Teorema. *Cada una de las siguientes clases tiene al menos tantos elementos como la clase de los números cadinales*:

(1) *La clase de las categorías constante a la izquierda la cuales no son h–categorías (3.3.15).*

(2) *La clase de las h–categorías constante a la izquierda(3.3.14).*

(3) *La clase de las categorías correflexivas de* $\mathfrak{Top}$ *las cuales no son h–categorías (3.3.15).*

(4) *La clase de las h–categorías correflexivas de* $\mathfrak{Top}$ *(3.3.13 y 3.3.14).*

4.3.17 Lema. *Si* T_1 *denota a la clase de todos los espacios topológicos que son* T_1*, y* T' *a la clase de todos los espacios con la topología cofinita, entonces los objetos de* $\mathcal{N}(T_1)$ *son aquellos espacios que no pueden ser expresados como la unión disjunta de dos o más conjuntos cerrados distintos del vacío. Además* $\mathcal{N}(T_1) = \mathcal{N}(T')$.

Prueba. Sea X un espacio que se puede escribir como la unión de dos o más conjuntos cerrados disjuntos distintos del vacío, digamos $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, y sea Y un espacio con la topología cofinita tal que el cardinalidad del conjunto subyacente de Y sea igual a $card(J)$. Tomamos la identificación f que manda cada X_j a un elemento de Y y notemos que es continua: dado U abierto en Y, se tiene que su complemento Y/U es finito y por lo tanto $f^{-1}(U) = X \setminus \{X_{j_1}, ..., X_{j_m}\}$ que es un abierto de X. Dado que Y está en $\mathcal{N}(T_1)$, se tiene que X no pertenece a $\mathcal{N}(T_1)$.

Ahora, como $T' \subseteq T_1$, se tiene que $\mathcal{N}(T_1) \subseteq \mathcal{N}(T')$. Por otro lado, sea X cualquier espacio en T_1. Si X' es el espacio en T' que tiene como conjunto subyacente al conjunto subyacente de X, entonces la función identidad $X \xrightarrow{1_X} X'$ es continua porque los puntos son cerrados en X. Por lo tanto, si Z está en $\mathcal{N}(T')$ y la función $Z \xrightarrow{f} X$ es continua, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_x\circ f=cte"'] & X \arrow[dl, "1_X"] \\ X' & \end{tikzcd}$$

lo que nos permite concluir que f es constante, esto es, Z está en $\mathcal{N}(T_1)$, y por lo tanto $\mathcal{N}(T') \subseteq \mathcal{N}(T_1)$. □

4.3.18 Teorema. *La subcategoría* $\mathcal{N}(T_1)$ *es la mínima subcategoría normal.*

Prueba. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría normal. Si tomamos un espacio Z en $\mathcal{N}(T_1)$, entonces sus $\mathcal{A}$–componentes son cerradas y, por el lema anterior, Z no se puede escribir como unión disjunta de cerrados distintos del vacío, entonces Z mismo es una $\mathcal{A}$–componente y por lo tanto es un elemento de $\mathcal{A}$. □

Capítulo 5

k-espacios de Vogt

En este capítulo veremos algunas propiedades de los espacios vistos en la sección de correflexiones: los k-espacios (3.2.3) y los espacios compactamente generados (3.2.9). Mostrando, por ejemplo, que el producto de identificaciones es identificación y que existe un homeomorfismo entre ciertos espacios de funciones en las categorías $\mathfrak{K} - \mathfrak{top}$ y $\mathcal{CG}$. Concluiremos dicho capítulo con algunas proposiciones que relacionan los objetos de dichas categorías con los conceptos de conexidad.

5.1. Espacios compactamente generados

Si tomamos espacios compactamente generados X y Y, su producto topológico no necesariamente cae en $\mathcal{CG}$ (véase [14], ejemplo 2 de la sección 2.2). Sin embargo, usando el funtor K definido en el ejemplo 3.2.9 se puede definir un producto en la categoría $\mathcal{CG}$.

5.1.1 Definición. Si X y Y están en $\mathcal{CG}$, su producto $X \times_K Y$ (en $\mathcal{CG}$) se define por $K(X \times Y)$, donde $X \times Y$ es el producto topológico usual y K es el funtor de 3.2.9.

5.1.2 Teorema. *El producto $X \times_K Y$, con X y Y compactamente generados, tiene las propiedades de producto en la categoría $\mathcal{CG}$.*

Prueba. Primero veamos que las proyecciones $X \times_K Y \xrightarrow{P_X} X$ y $X \times_K Y \xrightarrow{P_Y} Y$ son morfismos en $\mathcal{CG}$. Al aplicar el funtor K a dichos morfismos, tenemos que $X \times_K Y \xrightarrow{K(P_X)} K(X)$ y $X \times_K Y \xrightarrow{K(P_Y)} K(Y)$ son morfismos en $\mathcal{CG}$, pero $X = K(X)$ y $Y = K(Y)$ por 3.2.9, por lo que P_X y P_Y son morfismos en $\mathcal{CG}$.

Ahora, veamos que $X \times_K Y$ tiene la propiedad universal del producto en la categoría $\mathcal{CG}$. Sean W en $\mathcal{CG}$ y $f : W \to X$ y $g : W \to Y$ morfismos en $\mathcal{CG}$. Buscamos un único morfismo h' que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "h'"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times_K Y \arrow[l, "p'_X"] \arrow[r, "p'_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto en $\mathfrak{Top}$, existe $W \xrightarrow{h} X \times Y$ tal que $p_X \circ h = f$ y $p_Y \circ h = g$. Así, aplicando el funtor K (y dado que $K(W) = W$), obtenemos el morfismo buscado. $\square$

5.1.3 Lema. *Si X y Y son espacios de Hausdorff entonces las topologías en $K(X)\times_K K(Y)$ y en $K(X\times Y)$ coinciden.*

Prueba. Dado que la función identidad en $K(X)\to X$ y $K(Y)\to Y$ es continua, tenemos que la identidad $K(X)\times K(Y)\to X\times Y$ también lo es. Haciendo uso de la correflexividad en $X\times_K Y \xrightarrow{X} \times Y$, existe una único morfismo, denotado por 1, que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K(X)\times_K K(Y) \arrow[r, dotted, "1"] \arrow[d] & X\times_K Y \arrow[d] \\ K(X)\times K(Y) \arrow[r] & X\times Y \end{tikzcd}$$

Ahora, aplicando el funtor K en el siguiente diagrama

$$X \xleftarrow{p_X} X\times Y \xrightarrow{p_Y} Y$$

obtenemos

$$K(X) \xleftarrow{K(p_X)} X\times_K Y \xrightarrow{K(p_Y)} K(Y)$$

por lo tanto, aplicando la propiedad universal para productos en $\mathfrak{Top}$, conseguimos un morfismo $X\times_K Y\to K(X)\times K(Y)$. Así, usando la correflexividad en $K(X)\times_K K(Y)\xrightarrow{1} K(X)\times K(Y)$, obtenemos un único morfismo de $K(X\times Y)$ en $K(X)\times_K K(Y)$. Y dado que los morfismos obtenidos son identidades, se tiene que $K(X)\times_K K(Y)$ y $X\times_K Y$ son homeomorfos. $\square$

5.1.4 Teorema. *Si X es un espacio localmente compacto y Y es un objeto de $\mathcal{CG}$ entonces $X\times_K Y = X\times Y$.*

Prueba. Sean A un subconjunto de $X\times Y$ tal que interseca a cada compacto en un cerrado y (x,y) un elemento del complemento de A. Probaremos que A es cerrado y por lo tanto las topologías de $X\times_K Y$ y $X\times Y$ coinciden.

Como X es localmente compacto, x tiene una vecindad N cuya cerradura $\overline{N}$ es compacta y, puesto que $N\times\{y\}$ es compacto, $A\cap(N\times\{y\})$ es cerrado. Sea $p_X(A\cap(N\times\{y\}))$ la proyección de $A\cap(N\times\{y\})$ en X, como dicha proyección en cerrada, se tiene que su complemento V es un abierto y tiene a x como elemento, por lo tanto, haciendo uso de la compacidad local, obtenemos una vecindad U de x tal que su cerradura es compacta y se queda contenida en V. En consecuencia, $\overline{U}\times\{y\}$ no interseca a A.

Sea B la proyección en Y de $A\cap(\overline{U}\times Y)$. Si C es un conjunto compacto en Y entonces $A\cap(\overline{U}\times C)$ es cerrado y es un subconjunto de $\overline{U}\times C$, es decir, es compacto en $X\times Y$ y por lo tanto $B\cap C$ es cerrado. Puesto que C es arbitrario y Y está en $\mathcal{CG}$, se sigue que B es cerrado, además $y\notin B$, entonces $U\times(Y\setminus B)$ es un abierto de (x,y) que no interseca a A. Por lo tanto A es cerrado. $\square$

5.1.5 Teorema. *Sean E y B espacios de Hausdorff y $p: E\to B$ una Haus –fibración, entonces $K(p): K(E)\to K(B)$ es una $\mathcal{CG}$–fibración.*

Prueba. Sea X en $\mathcal{CG}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & K(E) \arrow[d, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "H"'] & K(B) \end{tikzcd}$$

Dado que las identidades $K(E) \xrightarrow{1_E} E$, $K(B) \xrightarrow{1_B} B$ son continuas y K es funtor, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & K(E) \arrow[r, "1_E"] \arrow[d, "K(p)"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \times I \arrow[r, "H"'] & K(B) \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Como p es una $Haus$–fibración, existe $X \times I \xrightarrow{F} E$ tal que $F \circ i_0 = 1_E \circ f$ y $p \circ F = 1_B \circ H$. $\square$

5.1.6 Definición. Denotamos con $C(X,Y)$ al conjunto $\mathfrak{Top}(X,Y)$ con la topología compacto-abierta, y definimos Y^X como $K(C(X,Y))$.

5.1.7 Lema. *El mapeo evaluación $C(X,Y) \times X \xrightarrow{e} Y$ definido por $e(f,x) = f(x)$ es continuo en conjuntos compactos. Además, si X y Y están en $\mathcal{CG}$, entonces e es continuo como un mapeo $Y^X \times_K X \to Y$* (observación 3.2.10).

Prueba. Veamos que el mapeo evaluación es continuo en conjuntos compactos. Puesto que cualquier conjunto compacto del producto está contenido en el producto de sus proyecciones, basta con probar que e es continuo en cualquier conjunto de la forma $F \times A$, donde F es compacto en $C(X,Y)$ y A es compacto en X. Sean $(f_0, x_0) \in F \times A$ y $U \subseteq Y$ abierto tal que $f_0(x_0) \in U$, puesto que f_0 es continua se tiene que $f_0^{-1}(U)$ es abierto en X. Definiendo $N := f^{-1}(U) \cap A$, obtenemos una vecindad N en A de x_0 tal que su cerradura es compacta y satisface $f_0(\overline{N}) \subseteq U$. Por lo tanto, $(W(\overline{N}, U) \cap F) \times N$, donde $W(\bar{N}, U)$ es un subbásico de la topología compacto-abierta, es un abierto en $F \times A$ que contiene a (f_0, x_0) y está contenido en U bajo e, es decir, $(f_0, x_0) \in (W(\overline{N}, U) \cap F) \times N \subseteq e^{-1}(U)$. Por lo tanto hemos encontrado un abierto entre (f_0, x_0) y $e^{-1}(U)$.

Ahora, si aplicamos el funtor K a $C(X,Y) \times X \xrightarrow{e} Y$ obtenemos un mapeo continuo, dado por

$$K(C(X,Y) \times X \xrightarrow{e} Y)$$

pero cuando X está en $\mathcal{CG}$ obtenemos por el lema 5.1.3

$$K(C(X,Y) \times X) = K(C(X,Y)) \times_K K(X) =: Y^X \times_K X$$

y cuando Y está en $\mathcal{CG}$, $K(Y) = Y$. Por lo tanto e es continuo de $Y^X \times_K X$ en Y. $\square$

5.1.8 Lema. *Si X está en $\mathcal{CG}$ y Y está en $Haus$, entonces $C(X, K(Y))$ y $C(X,Y)$ son iguales como conjuntos y sus correspondientes topologías tienen los mismos conjuntos compactos. Por lo tanto $K(C(X, K(Y))) = K(C(X,Y))$ como espacios en $\mathcal{CG}$* (observación 3.2.10).

Prueba. Primero veamos que son iguales como conjuntos. Si $X \xrightarrow{f} K(Y)$ está en $C(X, K(Y))$, entonces la composición $X \xrightarrow{f} K(Y) \xrightarrow{1} Y$ es continua y y por lo tanto $f \in xC(X,Y)$. Por otro lado, si $X \xrightarrow{f} K(Y)$ está en $C(X,Y)$, podemos aplicarle el funtor K y por lo tanto $X \xrightarrow{K(f)} K(Y)$ está en $C(X, K(Y))$, nótese que como funciones; f y $K(f)$ son iguales. Por lo tanto los conjuntos $C(X, K(Y))$ y $C(X,Y)$ son iguales.

Puesto que la función identidad $K(Y) \xrightarrow{1} Y$ es continua, tenemos que el mapeo identidad de $C(X, K(Y))$ a $C(X,Y)$ es continuo, lo cual implica que cada conjunto compacto del primer conjunto es también compacto del segundo.

Ahora, sea $F \subseteq C(X,Y)$ compacto con respecto a la topología relativa a $C(X,Y)$ y sea F' el mismo conjunto, pero con la topología relativa a $C(X, K(Y))$. Queremos probar que F' es compacto. Basta mostrar que cada conjunto abierto W de $C(X, K(Y))$ interseca al conjunto F' en un abierto de F, ya que esto implicaría que la correspondencia $F \to F'$ es continua y por lo tanto F' compacto. Haremos dicho razonamiento para un subbásico W de la forma $W(C, U)$ donde C es compacto en X y U es abierto en $K(Y)$. Supongamos que $f_0 \in W(C,U) \cap F$, como $F \times C$ es compacto podemos aplicar el lema anterior y en consecuencia el mapeo evaluación $F \times C \xrightarrow{e} Y$ es continuo y, por el mismo lema, también es continuo como mapeo $F \times X \to K(Y)$, por lo tanto, $e^{-1}(U)$ es abierto en $F \times C$. Como C es compacto y $\{f_0\} \times C$ es mandado bajo el mapeo evaluación dentro de U, podemos tomar la proyección de $e^{-1}(U)$ en F y obtener una vecindad de f_0 en F, digamos V, tal que, $V \times C \subseteq e^{-1}(U)$. En consecuencia $f_0 \in V \subseteq W(C,U)$ y por lo tanto $W(C,U)$ es abierto en F, esto es, F' es compacto. $\square$

5.1.9 Teorema. *Si X, Y y Z están en $\mathcal{CG}$, entonces $Z^{Y \times X} = (Z^Y)^X$, esto es, $\mathcal{CG}(Y \times X, Z) = \mathcal{CG}(X, \mathcal{CG}(Y,Z))$.*

Prueba. Veamos que existe un homeomorfismo $C(Y \times X, Z) \xrightarrow{\mu} C(X, C(Y,Z))$. Sea $f \in C(Y \times X, Z)$, definimos $\mu f : X \to C(Y,Z)$ como la función tal que al evaluarla en x es $f(\_, x) : Y \to Z$, es decir, $(\mu f(x))(y) = f(y,x)$.

(1) $(\mu f)(x)$ es continua de Y en Z. Sea U abierto de Z y $y_0 \in Y$ tal que $f(y_0, x) \in U$, por la continuidad de f; la proyección de la imagen inversa de U bajo f es un subconjunto abierto de Y, digamos V, tal que $y_0 \in V$ y $f(V \times \{x\}) \subseteq U$, por lo tanto $y_0 \in V \subseteq \mu f(x)^{-1}(U)$, lo que implica que $(\mu f)(x)$ es continua de Y en Z.

(2) $\mu f : X \to C(Y,Z)$ es continua. Sea $W(B,U)$ un subbásico de $C(Y,Z)$, y supongamos que $\mu f(x_0) \in W(B,U)$ con $x_0 \in X$, entonces $f(B \times \{x_0\})$ es subconjunto de U y por lo tanto $B \times \{x_0\}$ está contenido en el abierto $f^{-1}(U)$. Como B es compacto, existe una vecindad N de x_0 tal que $B \times N \subseteq f^{-1}(U)$, esto es, $f(B,n) = (\mu f(n))(B) \subseteq U$ para toda $n \in N$, lo cual implica que $x_0 \in N \subseteq (\mu f)^{-1}(W(B,U))$.

(3) μ es continua. Por 5.1.7, el mapeo evaluación es continuo en $\mathcal{CG}$. Si aplicamos lo anterior en $C(Y \times X, Z) \times (Y \times X) \xrightarrow{e} Z$ y hacemos uso de la continuidad del inciso (2) sustituyendo X por $X \times C(Y \times X, Z)$ obtenemos que

$$\mu e : X \times C(Y \times X, Z) \to C(Y,Z)$$

es continua y, aplicando de nuevo el inciso (2) sustituyendo X por $C(Y \times X, Z)$, Y por X y Z por $C(Y,Z)$, obtenemos que

$$\mu(\mu e) : C(Y \times X, Z) \to C(X, C(Y,Z))$$

es continua. Veamos que $\mu(\mu e) = \mu$. Sea $g \in C(Y \times X, Z)$, por un lado sabemos que $(\mu g)(x) = g(\_, x)$, por otro lado, como el dominio de μe es $X \times C(Y \times X, Z)$; $(\mu(\mu e))(g) = \mu e(\_, g)$ por definición, y dado que el dominio de e es $(Y \times X) \times C(Y \times X, Z)$; $(\mu(\mu e))g(x) = \mu e(x, g) = e(\_, x, g) = g(\_, x)$. Por lo tanto dichas funciones son iguales.

(4) μ tiene un mapeo inverso continuo. Sean

$$e : X \times C(X, C(Y,Z)) \to C(Y,Z) \text{ y } e' : Y \times C(Y,Z) \to Z$$

mapeos evaluación. Tenemos la composición

$$e'(1_Y \times e) : Y \times X \times C(X, C(Y,Z)) \to Z$$

es continua en $\mathcal{CG}$ por el lema anterior. Aplicando el inciso (2) sustituyendo X por $C(X, C(Y, Z))$ y Y por $Y \times X$, obtenemos

$$\mu e'(1_Y \times e) : C(X, C(Y, Z)) \to C(Y \times X, Z)$$

que está bien definida como función y es continua. Veamos que $\mu e'(1_Y \times e)$ es el inverso de μ. Sea $f \in C(X, C(Y, Z))$, como abuso de notación escribiremos $(--_X)$ para denotar la evalución correspondiente al espacio X. Como el dominio de e es $X \times C(X, C(Y, Z))$, $\mu(e'(1_Y \times e)))(f) = e'(1_Y \times e((--_X, f))) = e'(--_Y, f(--_X))$ y dado que el dominio de e' es $Y \times C(Y, Z)$, $\mu(e'(1_Y \times e)))(f) = f(--_X)(--_Y)$ y por lo tanto $\mu(\mu(e'(1_Y \times e))))(f)$ es la función tal que al evaluarla en x da $f(x)(--_Y)$, esto es, la misma función f con la que empezamos (la composición contraria es análoga).

Por lo tanto, μ es un homeomorfismo entre los conjuntos $C(Y \times X, Z)$ y $C(X, C(Y, Z))$ y en consecuencia al aplicar el funtor K obtenemos

$$Z^{Y \times X} = K(C(Y \times X, Z)) = K(C(X, C(Y, Z))) = C(K(X), K(C(Y, Z))) = (Z^Y)^X$$

donde la tercera igualdad se da por el lema anterior. □

5.1.10 Corolario. *Sean X y Y espacios en $\mathcal{CG}$, entonces*

$$Y^{X \times I} := \mathcal{CG}(X \times I, Y) \text{ y } (Y^I)^X := \mathcal{CG}(X, \mathcal{CG}(I, Y))$$

son homeomorfos □

5.1.11 Teorema. *Supongamos que X y Z están en $\mathcal{CG}$ y que $X \xrightarrow{p} Y$ es una identificación (y por lo tanto Y también está en $\mathcal{CG}$), entonces $Z \times X \xrightarrow{1_Z \times p} Z \times X$ es una identificación.*

Prueba. Como p es suprayectiva, tenemos que $1_Z \times p$ es suprayectiva. Supongamos que $Z \times Y \xrightarrow{g} W$ es una función tal que $g \circ (1_Z \times p)$ es continua, para probar que $1_Z \times p$ es una identificación, basta con probar que g es continua (1.1.56).

Consideremos la biyección dada en el teorema anterior

$$\mu : C(Z \times X, W) \to C(X, C(Z, W))$$

y

$$\mu' : C(Z \times Y, W) \to C(Y, C(Z, W))$$

Puesto que $g \circ (1_Z \times p)$, que va de $Z \times X$ en W, es continua, entonces también lo es $\mu(g \circ (1_Z \times p))$ que va de X en $C(Z, W)$. Recordemos que dicha función está dada por $\mu(g \circ (1_Z \times p))(x)(z) = g(1_Z \times p)(x, z) = g(p(x), z)$, por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mu(g \circ (1_Z \times p))"] \arrow[dr, "p"'] & & C(Z, W) \\
& Y \arrow[ur, "\mu'(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

y en consecuencia la continuidad de $\mu'(g) \circ p$, pero p es una identificación, entonces $\mu'(g)$ es continua.

Ahora, dado que μ' es una biyección, tenemos, por lo tanto, que $g = \mu'^{-1}(\mu'(g))$ es continua. □

5.1.12 Corolario. *Supongamos que X, Y, W y Z están en $\mathcal{CG}$ y que $X \xrightarrow{p} Y$ y $W \xrightarrow{q} Z$ son identificaciones, entonces $X \times W \xrightarrow{p \times q} Y \times Z$ es identificación.*

Prueba. Por el teorema anterior $1_Y \times q$ y $p \times 1_W$ son identificaciones, y dado que $p \times q = 1_Y \times q \circ p \times 1_W$, se tiene que $p \times q$ es una identificación. □

5.2. k-espacios

En la sección de categorías, del capítulo de preliminares, vimos el ejemplo 3.2.3, en el cual definimos, a partir de una categoría $\mathfrak{A}$, un espacio $k(X)$ por medio de un colímite en la categoría coma $\mathfrak{A}|X$. Vimos que había una elección canónica de dicho espacio y le llamamos $k(X)$. En esta sección trabajaremos con una categoría $\mathfrak{A}$ determinada; la categoría de espacios compactos de Hausdorff. Así, tenemos la siguiente

5.2.1 Definición. Sea X un espacio topológico. Definimos $k(X)$ como el espacio que tiene como conjunto subyacente el mismo que X y cuya topología está dada como sigue

$A \subseteq X$ es cerrado en $k(X)$ si y sólo si $f^{-1}(A) \subseteq Q$ es cerrado para cualquier aplicación $Q \xrightarrow{\alpha} X$ donde Q es un espacio compacto de Hausdorff.

en tal caso, decimos que $k(X)$ es un *k-espacio* o que $k(X)$ tiene la *k-topología.*

5.2.2 Definición. Denotamos por $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ a la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ cuyos objetos son k-espacios y morfismos funciones continuas.

Por el ejemplo 3.2.3, las siguientes son afirmaciones que se cumplen para k-espacios

5.2.3 Proposición. (1) *La función identidad de $k(X) \xrightarrow{1} X$ es continua.*

(2) *$k(X)$ tiene la topología más fina tal que cualquier mapeo del $\mathfrak{A}$–objeto B a X se factoriza a través de la función identidad de $k(X)$ a X.*

(3) *Si B es un $\mathfrak{A}$–objeto, entonces existe una correspondencia uno a uno entre los mapeos $B \xrightarrow{f} X$ y $B \xrightarrow{f'} k(X)$.*

(4) *$k(B) = B$ para todo $\mathfrak{A}$–objeto B, de hecho, $k(k(X)) = k(X)$ para todo X en $\mathfrak{Top}$.*

(5) *Si las composiciones $h \circ f$, como en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h\circ f"'] & k(X) \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

son continuas para todas las aplicaciones $B \xrightarrow{f} k(X)$ con B en $\mathfrak{A}$, entonces h es continua.

(6) *Para cualquier aplicación $X \xrightarrow{h} Y$ en $\mathfrak{Top}$, la función $k(h) : k(X) \to k(Y)$, definida igual a h sobre los conjuntos $k(X)$ y $k(Y)$, es continua.*

□

5.2.4 Proposición. *La asignación que manda X en $k(X)$ determina un funtor de $\mathfrak{Top}$ en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$.*

El siguiente corolario fue probado para el caso general en 3.2.8.

5.2.5 Corolario. *El funtor inclusión $i : \mathfrak{K} - \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Top}$ es el adjunto izquierdo del funtor $k : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$.*

Prueba. Véase 3.1.8. □

5.2.6 Ejemplos. Los siguientes son ejemplos de k-espacios

(1) Espacios compactos de Hausdorff. Sean C un espacio compacto de Hausdorff y $A \subseteq C$ tal que para toda aplicación $Q \xrightarrow{\alpha} C$ la imagen inversa $\alpha^{-1}(A)$ es cerrada. Entonces para la función identidad $C \xrightarrow{1} C$(la cual es continua) se cumple $A = 1^{-1}(A)$ es cerrado en C, esto es, los cerrados de C son los mismos que los cerrados en $k(C)$.

(2) Espacios localmente compactos de Hausdorff. Sean X un espacio localmente compacto y de Hausdorff y B un subconjunto de X no cerrado. Entonces existe $x \in \overline{B}$ tal que $x \notin B$. Por definición de espacio localmente compacto (1.1.71), existe una vecindad compacta Q de x tal que $x \notin B \cap Q$, aunque claramente $x \in \overline{B \cap Q}$. Así, si tomamos la inclusión $Q \xrightarrow{i} X$, que es continua, tendremos que $i^{-1}(B)$ es igual a $B \cap Q$ el cual no es cerrado en Q. Por lo tanto B no es cerrado en la k-topología.

(3) Espacios compactamente generados. Sean X un espacio compactamente generado y $A \subseteq X$ tal que para cada aplicación $Q \xrightarrow{\alpha} X$ con Q compacto de Hausdorff, la imagen inversa $\alpha^{-1}(A)$ es cerrada. Entonces en particular, si $C \subseteq X$ es compacto, entonces se tiene $A \cap C = i^{-1}(A)$ donde i es la inclusión, es cerrada para todo C. Por lo tanto, A es cerrado en X.

5.2.7 Teorema. *Sea X un k-espacio y supongamos que $X \xrightarrow{q} Y$ es una identificación. Entonces Y es un k-espacio. En consecuencia, la categoría $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ es cerrada bajo identificaciones.*

Prueba. Supongamos que $B \subseteq Y$ cumple que su imagen inversa bajo cualquier aplicación $Q \xrightarrow{\beta} Y$ es cerrada con Q un espacio compacto de Hausdorff. Para probar que B es cerrado en Y, debemos probar que $q^{-1}(B)$ es cerrado en X. Para probar lo anterior, basta con ver que $\alpha^{-1}(q^{-1}(B))$ es cerrado para toda aplicación $Q \xrightarrow{\alpha} X$ con Q un espacio compacto de Hausdorff. Como $\alpha^{-1}(q^{-1}(B)) = (q \circ \alpha)^{-1}(B) = \beta^{-1}(B)$ con $Q \xrightarrow{\beta} Y$, se sigue que es cerrado. □

5.2.8 Definición. Sean X y Y son k-espacios. Definimos el *k-producto* como $k(X \times Y)$, donde $X \times Y$ es el producto topológico usual y k es el funtor visto en 5.2.4. Tal como hicimos en la sección anterior, escribiremos $X \times_k Y$ para denotar $k(X \times Y)$.

5.2.9 Teorema. *El producto $X \times_k Y$, con X y Y k-espacios, tiene las propiedades de producto en la categoría $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$.*

Prueba. Primero veamos que las proyecciones $X \times_k Y \xrightarrow{P_X} X$ y $X \times_k Y \xrightarrow{P_Y} Y$ son morfismos en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$. Si aplicamos el funtor k a las proyecciones en $\mathfrak{Top}$, se tiene que $X \times_K Y \xrightarrow{K(P_X)} K(X)$ y $X \times_K Y \xrightarrow{K(P_Y)} K(Y)$ son morfismos en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$, pero $X = k(X)$ y $Y = k(Y)$.

Ahora veamos que $X \times_k Y$ tiene la propiedad universal del producto en la categoría $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$. Sean W en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ y $f : W \to X$ y $g : W \to Y$ morfismos en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$. Buscamos un único morfismo h' en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ que haga conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h'"] \arrow[dr, "g"] & \\ X & X \times_K Y \arrow[l, "p'_X"] \arrow[r, "p'_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto en $\mathfrak{Top}$, existe $W \xrightarrow{h} X \times Y$ tal que $p_X \circ h = f$ y $p_Y \circ h = g$. Así, aplicando el funtor k (y dado que $k(W) = W$), obtenemos el morfismo buscado. □

5.2.10 Teorema. *Si C es un espacio compacto y Y es un objeto de $\mathfrak{K}-\mathfrak{Top}$ entonces $C\times_k Y = C\times Y$.*

Prueba. Sean B un subconjunto de $C\times Y$ *k-cerrado*, es decir, tal que para toda aplicación $Q \xrightarrow{\alpha} C\times Y$ con Q un espacio compacto de Hausdorff, la imagen inversa $\alpha^{-1}(B)$ es cerrado. Debemos mostrar que B es un cerrado en $C\times Y$.

Sea $(x,y)\in (C\times Y)\setminus B$. Como la inclusión de $C\times_k\{y\}$ en $C\times Y$ es continua con $C\times_k\{y\}$ compacto, entonces $B\cap(C\times_k\{y\})$ es cerrado (y por lo tanto compacto). Así, al tomar la proyección en C, se tiene un conjunto compacto que no contiene a x. Por lo tanto, haciendo uso de 1.1.69, existe una vecindad U de x en C tal que $(\overline{U}\times_k\{y\})\cap B=\varnothing$.[1] Sea A la proyección en Y de $(\overline{U}\times Y)\cap B$ y sea $Q \xrightarrow{\beta} Y$ una aplicación de un espacio compacto y Hausdorff. La función $i\times\beta:\overline{U}\times Q\to C\times Y$, donde i es la inclusión, es continua con un dominio compacto y Hausdorff. Por lo tanto, haciendo uso de la hipótesis, $(i\times\beta)^{-1}(B)\subseteq\overline{U}\times Q$ es cerrado. En consecuencia, $\beta^{-1}(A)\subseteq Q$ es cerrado. Por lo tanto, A es k-cerrado en Y, esto es, es cerrado en Y, y puesto que $y\notin A$, tenemos que $U\times(Y\setminus A)$ es una vecindad de (x,y) en $C\times Y$ tal que $(U\times(Y\setminus A))\cap B=\varnothing$. Por lo que concluimos que $B\subseteq C\times Y$ es cerrado. □

De forma análoga a la sección anterior, probaremos los resultados relativos a espacios de funciones e identificaciones en $\mathfrak{K}-\mathfrak{Top}$, reafirmando, así, la utilidad de dichas categorías.

5.2.11 Definición. Sean X y Y k-espacios. Denotamos con $\mathfrak{K}-\mathfrak{Top}(X,Y)$ al conjunto de aplicaciones en $\mathfrak{K}-\mathfrak{Top}$ de X a Y y denotamos con $M(X,Y)$ al espacio $k(C(X,Y))$, donde $C(X,Y)$ es el espacio de aplicaciones de X en Y con la topología compacto-abierta.

5.2.12 Lema. *Si Q es un espacio compacto de Hausdorff y Y es cualquier espacio topológico, entonces el mapeo evaluación $C(X,Y)\times X\xrightarrow{e} Y$ definido por $e(f,x)=f(x)$ es continuo.*

Prueba. Es un caso particular de 5.1.7 □

5.2.13 Lema. *Sea $X\times_k Y\xrightarrow{f} Z$ una aplicación, donde X y Y son k-espacios. Entonces la función $\bar f: X\to M(Y,Z)$ dada por $\bar f(x)=f(x,y)$ es continua.*

Prueba. Puesto que X es un k-espacio, basta probar que la composición $Q\xrightarrow{\alpha} X\xrightarrow{\bar f} M(Y,Z)$ es continua donde Q es un espacio compacto de Hausdorff y α es continua. Claramente el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Q\times_k Y \arrow[r, "\alpha\times 1_Y"] \arrow[d] & X\times_k Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1"] & Z \\
Q\times Y \arrow[r, "\alpha\times 1_Y"] & X\times Y \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

por 5.2.3 y 5.2.10 (para obtener la igualdad $Q\times_k Y=Q\times Y$). Por lo tanto, la composición $Q\times Y\xrightarrow{f\circ(\alpha\times 1_Y)} Z$ es continua y por el teorema 5.1.9, tiene un adjunto continuo en $\mathfrak{Top}$, digamos $\overline{f\circ(\alpha\times 1_Y)}$ que va de Q en $\mathfrak{Top}(Y,Z)$. Así, tenemos que $\overline{f\circ(\alpha\times 1_Y)}(q)=f(\alpha(q),\_)$ y en consecuencia el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\overline{f\circ(\alpha\times 1_Y)}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{Top}(Y,Z) \\
X \arrow[r, "\bar f"'] & M(Y,Z) \arrow[u, "1"']
\end{tikzcd}$$

[1]Notemos que si U y V son abiertos ajenos, entonces $\overline{U}\cap V=\varnothing$ ya que de lo contrario existiría un punto $x\in\overline{U}\cap V$ que tiene como vecindad a V, pero esto significaría que $U\cap V\neq\varnothing$.

Por lo tanto, la composición $\bar{f} \circ \alpha$ es continua. □

5.2.14 Lema. *Si Y es un k-espacio, entonces la función evaluación $M(Y,Z) \times Y \xrightarrow{e} Z$ es continua.*

Prueba. Procederemos de forma análoga al lema anterior. Sea $Q \xrightarrow{\alpha} M(Y,Z) \times Y$ una aplicación con Q espacio compacto de Hausdorff. Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ y consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & M(Y,Z) \times_k Y \arrow[rr, "e"] & & Z \\
Q \times_k Q \arrow[r, "\alpha_1 \times 1_Q"'] & M(Y,Z) \times Q \arrow[u, "1\times\alpha_2"'] \arrow[r, "\alpha'_2 \times_k 1_Q"'] & M(Q,Z) \times_k Q \arrow[r, "1"'] & \mathfrak{Top}(Y,Z) \times Y \arrow[u, "e'"']
\end{tikzcd}$$

donde $\delta(q) = (q,q)$, $\alpha'_2(q) = f(\alpha_2(q))$ y e' es el mapeo evaluación en $\mathfrak{Top}$ (el cual es continuo porque el espacio de funciones tiene la topología compacto-abierta). Puesto que la composición $e' \circ 1 \circ (\alpha'_2 \times 1_Q) \circ (\alpha_1 \times 1_Q) \circ \delta$ es continua, concluimos que $e \circ \alpha$ es continua. Por lo tanto e es continua.

5.2.15 Teorema. *La función que manda una aplicación f a $\bar{f}$, donde $\bar{f}(x) = f(x, \_)$, da como resultado una biyección*

$$\theta : \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(X \times Y, Z) \to \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(X, M(Y,Z))$$

Prueba. Sea f en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(X \times Y, Z)$. Entonces $\theta(f) = \bar{f}$ es una aplicación de X en $M(Y,Z)$ por 5.2.13. Además, si $\bar{f}$ es continua, entonces

$$X \times Y \xrightarrow{\bar{f} \times 1_Y} M(Y,Z) \times Y \xrightarrow{e} Z$$

es continua por el lema anterior. Por lo tanto, tomando f como dicha composición, ésta queda unívocamente determinada, lo cual concluye el resultado. □

5.2.16 Teorema. *Sean X y Z k-espacios y $X \xrightarrow{p} Y$ una identificación (por lo tanto Y también es un k-espacio). Entonces $X \times Z \xrightarrow{p \times 1_Z} Y \times Z$ es una identificación.*

Prueba. Como p es suprayectiva, tenemos que $p \times 1_Z$ también lo es. Supongamos que $Y \times Z \xrightarrow{g} W$ es una función tal que $g \circ (p \times 1_Z)$ es continua. Para probar que $1_Z \times p$ es una identificación, basta con probar que g es continua (1.1.56).

Consideremos la biyección dada en el teorema anterior

$$\theta : \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(X \times Z, W) \to \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(X, M(Z,W))$$

y

$$\theta' : \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(Y \times Z, W) \to \mathfrak{K} - \mathfrak{Top}(Y, M(Z,W))$$

Puesto que $g \circ (1_Z \times p)$, que va de $X \times Z$ en W, es continua, entonces también lo es $\theta(g \circ (p \times 1_Z))$ que va de X en $M(Z,W)$. Recordemos que dicha función está dada por $\theta(g \circ (p \times 1_Z))(x)(z) = g(1_Z \times p)(x,z) = g(p(x),z)$, por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\theta(g\circ(p\times 1_Z))"] \arrow[dr, "p"'] & & M(Z,W) \\
& Y \arrow[ur, "\theta'(g)"'] &
\end{tikzcd}$$

y en consecuencia, tenemos la continuidad de $\theta'(g) \circ p$, pero p es una identificación, entonces $\theta'(g)$ es continua. Ahora, dado que θ' es una biyección, tenemos, por lo tanto, que $g = \theta'^{-1}(\theta'(g))$ es continua. $\square$

5.2.17 Corolario. *Supongamos que X, Y, W y Z están en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ y que $X \xrightarrow{p} Y$ y $W \xrightarrow{q} Z$ son identificaciones, entonces $X \times W \xrightarrow{p\times q} Y \times Z$ es una identificación.*

Prueba. Por el teorema anterior $1_Y \times q$ y $p \times 1_W$ son identificaciones, y dado que $p \times q = 1_Y \times q \circ p \times 1_W$, se tiene que $p \times q$ es una identificación. $\square$

El mapeo evaluación tiene la siguiente propiedad universal.[2]

5.2.18 Proposición. *Si el mapeo evaluación $\mathfrak{Top}(Y, Z) \times Y \xrightarrow{e} Z$ es continuo y el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}\times 1_Y"'] & & Z \\
& \mathfrak{Top}(Y,Z) \times Y \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces f es continua si y sólo si $\bar{f}$ es continua.

Puesto que el mapeo evaluación $M(Y, Z) \times Y \xrightarrow{e} Z$ es continuo en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ si Y y Z son k-espacios, por la proposición anterior, podemos obtener una propiedad universal del mapeo evaluación para la categoría $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$.

5.2.19 Proposición. *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \times_k Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}\times 1_Y"'] & & Z \\
& M(Y,Z) \times_k Y \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces f es continua si y sólo si $\bar{f}$ es continua.

$\square$

5.2.20 Teorema. *Sean X y Y k-espacios. Entonces*

$$\theta : M(X, M(Y, Z)) \to M(X \times Y, Z)$$

es un homeomorfismo en la categoría $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$.

Prueba. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M(X, M(Y,Z)) \times X \times Y \arrow[r, "e_1\times 1_Y"] \arrow[d, "\theta\times 1_X\times 1_Y"'] & M(Y,Z) \times Y \arrow[d, "e_2"] \\
M(X\times Y, Z) \times X \times Y \arrow[r, "e_3"'] \arrow[ur, "\bar{e}\times 1_Y"] & Z
\end{tikzcd}$$

donde $M(X, M(Y, Z)) \times X \xrightarrow{e_1} M(Y, Z)$, $M(Y, Z) \times Y \xrightarrow{e_2} Z$ y $M(X \times Y, Z) \times X \times Y \xrightarrow{e_3} Z$. Como θ hace conmutar al diagrama, por la propiedad universal del mapeo evaluación de e_3, se tiene que θ es continuo. El triángulo superior conmuta por la definición de $\bar{e}_3$ y la biyectividad

[2]Para detalles de la prueba véase [2].

de θ. Así, por la propiedad universal en e_2, tenemos que $\bar{e_3} \circ (\theta \times 1_X)$ es continua si y sólo si e_1 es continua (donde ambas tienen la misma regla de correspondencia), por lo tanto, son iguales. Ahora, por la propiedad universal en e_1, aplicada al diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} M(X \times_k Y, Z) \times X \arrow[rr, "\bar{e_3} \times 1_X"] \arrow[dr, "\theta^{-1} \times 1_X"'] & & M(Y, Z) \\ & M(X, M(Y, Z)) \times_k X \arrow[ur, "e_1"'] & \end{tikzcd}$$

existe una única función

$$\psi : M(X \times Y, Z) \to M(X, M(Y, Z))$$

tal que $e_1 \circ (\psi \times 1_X) = \bar{e_3}$. Por otro lado,

$$e_3 \circ ((\theta \circ \psi) \times 1_X \times 1_Y) = e_2 \circ (e_1 \times 1_Y) \circ (\psi \circ 1_X \circ 1_Y) = e_2 \circ (\bar{e_3} \times 1_Y) = e_3$$

y

$$e_1 \circ ((\psi \circ \theta) \times 1_Y) = \bar{e_3} \circ (\theta \times 1_X) = e_1$$

Por lo tanto, por la propiedad universal de e_3 y e_1, se tiene que $\theta \circ \psi = 1$ y $\psi \circ \theta = 1$. En consecuencia, los espacio son homeomorfos. □

Por último, tenemos las siguientes tres proposiciones que relacionan a los espacios conexos, localmente conexos y conectables por trayectorias con su correspondiente k-espacio.

5.2.21 Proposición. *Sea X un espacio localmente compacto. Entonces X es conexo si y sólo si $k(X)$ es conexo.*

Prueba. Supongamos que X es conexo. Por el ejemplo (2) de 5.2.6, sabemos que $X = k(X)$, entonces $k(X)$ es conexo. Ahora, si $k(X)$ es conexo, entonces X es conexo por ser la imagen continua de $k(X)$ bajo la identidad. □

5.2.22 Proposición. *Sea X un espacio localmente compacto. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $k(X)$ localmente conexo.*

Prueba. Es inmediato que $k(X)$ es localmente conexo si X lo es (por la compacidad local). Ahora, supongamos que $k(X)$ es localmente conexo. Sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ una vecindad de x, como $x \in k(X)$ y U es una vecindad en la k-topología, existe un conjunto conexo V de x en $k(X)$ tal que $x \in V \subseteq U$. Haciendo uso de la continuidad de $k(X) \xrightarrow{1} X$, se concluye que $1(V) \subseteq X$ es un conexo en X tal que $x \in 1(V) \subseteq U$. □

5.2.23 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es conectable por trayectorias (cpt) si y sólo si $k(X)$ es conectable por trayectorias.*

Prueba. Por ser X imagen continua de $k(X)$ bajo la identidad, se sigue que si $k(X)$ es cpt entonces X también lo es. Ahora, supongamos que X es conectable por trayectorias. Sean x y x' en $k(X)$, veamos que existe una trayectoria que inicia en x y termina en x'. Como X es cpt, se tiene que existe una aplicación $I \xrightarrow{f} X$ del intervalo I tal que $f(0) = x$ y $f(1) = x'$. Como I es compacto, se sigue que $k(I) = I$, entonces I es un k-espacio. Por lo tanto, haciendo uso de la correflexividad vista en 3.2.6, se tiene que existe un único morfismo $\bar{f}$ en $\mathfrak{K} - \mathfrak{Top}$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, dotted, "\bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ k(X) \arrow[r, "1"'] & X \end{tikzcd}$$

esto es, $I \xrightarrow{\bar{f}} k(X)$ es tal que $\bar{f}(0) = x$ y $\bar{f}(1) = x'$. Por lo tanto $k(X)$ es cpt.

Bibliografía

[1] G. Salicrup, *Introducción a la topología*, Eds. J. Rosenblueth y C. Prieto, Aportaciones Matemáticas. Textos SMM, México, 1993.

[2] C. Prieto, *Topología básica*, Fondo de Cultuta Económica, México, 2003.

[3] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1996.

[4] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Segunda edición, Springer, Chicago, 1998.

[5] J. Adamek, H. Herrlich y G.E. Strecker, *Abstract and concrete categories: The joy of cats*, edición en línea: http://katmat.math,uni-bremen.de/acc , 2004.

[6] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, *Algebraic topology from a homotopical viewpoint*, editorial Springer, 2002.

[7] H. A. Rincón, *Álgebra lineal*, segunda edición, Las prensas de ciencias, México, 2006.

[8] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[9] G. Preuss, *Theory of topological structures*, D. Reidel Publishing Company, 1994.

[10] G. Salicrup, *Categorical topology*, Notas de Investigación. SMM, México, 1998.

[11] H. Herrlich, *Topologische reflexionen und coreflexionen*, Lectures Notes in Mathematics, Springer, 1968.

[12] J. F. Kennison, *Reflective functors in general topology and elsewhere*, Trans. Am. Math. Soc., 118(6): 303-315 (1965).

[13] H. Herrlich, G. E. Strecker, *Coreflective subcategories*, Trans. Am. Math. Soc., 157: 205-226 (1971).

[14] R. Fritsch y R. Piccinini, *Cellular structures in topology*, Board Editorial, Cambridge University press, 1990.