



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la dinámica de partículas:
Ecuación de Vlasov y la materia oscura

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

**PAOLA DOMÍNGUEZ
FERNÁNDEZ**

DIRECTOR DE TESIS:

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA



Cd. Universitaria, D. F.
2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Hoja de Datos del Jurado

Datos del alumno: Domínguez
Fernández
Paola
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
307008219

Datos del tutor: Dr.
Darío
Núñez
Zúñiga

Datos del sinodal 1: Dr.
Alejandro
Raga
Rasmussen

Datos del sinodal 2: Dra.
Rosario
Paredes
Gutiérrez

Datos del sinodal 3: Dra.
Ana Laura
García
Perciante

Datos del sinodal 4: Dr.
Guillermo
Chacón
Acosta

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Agradecimientos

La realización de esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo y la dirección del Dr. Darío Núñez Zúñiga. Cada larga discusión en los seminarios correspondientes con el Dr. Núñez ayudó a estructurar mi tesis tal y como está escrita ahora, y más aún, abrió la puerta a otros problemas que pretenden seguir siendo investigados posteriormente. Además de esto, quisiera aprovechar la oportunidad de agradecerle a Darío por ser un asesor como ningún otro, una persona bastante alegre, con un humor peculiar y quien me brindó su apoyo y consejo en varios aspectos de mi vida.

Quisiera dar un agradecimiento especial a la Dra. Ana Laura García Perciante y al Dr. Guillermo Chacón Acosta, investigadores de la UAM-Cuajimalpa, quienes además de ser mis sinodales, han aportado ideas y conceptos fundamentales para este trabajo y para la continuación de éste. También quisiera agradecer a mis otros sinodales, la Dra. Rosario Paredes Gutiérrez y el Dr. Alejandro Raga Rasmussen, quienes se tomaron el tiempo de leer esta tesis y de hacer observaciones y comentarios que ayudaron a enriquecer el trabajo.

También agradezco al Dr. Miguel Alcubierre Moya, con quien se tuvieron varias discusiones acerca de los elementos de volumen en el espacio-fase, y a José Manuel Torres y Omar Abel Rodríguez, quienes me ayudaron con detalles del código numérico utilizado.

No menos importante, agradezco a toda *mi familia*, en especial a *mis padres*, quienes me han brindado un apoyo incomparable a lo largo de este trayecto.

Finalmente, quisiera agradecer a los proyectos que brindaron el apoyo necesario para llevar acabo esta tesis:

- PAPIIT IN115311, Predicciones teóricas de la materia oscura, de los hoyos negros y de su coexistencia en las estructuras cósmicas así como las señales astrofísicas asociadas.
- PAPIIT IN103514, Sobre los diferentes modelos de materia oscura y sus consecuencias observacionales.

O! immodest mortal! Your destiny is the joy of watching the evershifting battle!

-Ludwig Eduard Boltzmann

Índice general

Introducción	9
1. Teoría cinética	13
1.1. Teoría cinética no-relativista	13
1.2. Teoría cinética relativista	18
1.2.1. Elemento de volumen en el espacio de momentos	26
1.3. Función de distribución	29
1.3.1. Función de distribución de Maxwell-Boltzmann	30
1.3.2. Función de distribución de Jüttner-Maxwell	32
1.3.3. Otro tipo de función de distribución	36
2. Geometría de Schwarzschild	39
2.1. Espacios con simetría esférica y estática	39
2.1.1. Métrica estática e isotrópica	39
2.1.2. Solución de Schwarzschild	40
2.2. Cantidades conservadas y ecuaciones de movimiento	44
2.3. Ecuación de Vlasov en una geometría de Schwarzschild	47
2.3.1. Caída libre	51
3. Análisis numérico de la Ecuación de Vlasov	53
3.1. Métodos numéricos	53
3.1.1. Método de diferencias finitas	54
3.1.2. Método Runge-Kutta	61
3.2. Estructura del código	65
3.2.1. Inicialización	66
3.2.2. Evolución temporal	68
4. Resultados	71
4.1. Caso no-relativista	71
4.1.1. Caso 1	72

4.1.2. Caso 2	73
4.1.3. Caso 3	76
4.1.4. Caso 4	79
4.1.5. Convergencia	81
4.2. Caso relativista	83
4.2.1. Función de distribución 1	84
4.2.2. Función de distribución 2	88
4.2.3. Convergencia	95
4.3. Comparación de resultados	95
5. Conclusiones	105
A. Transformación de elementos de volumen en Relatividad General	107
A.1. Elemento de volumen invariante en el espacio-tiempo	107
A.2. Elemento de área en el subespacio $\Sigma(t)$ del espacio-tiempo	109
A.3. Volumen invariante en el espacio de momentos	110

Introducción

El estudio de sistemas que consisten de muchas partículas es probablemente uno de los temas más activos en la Física. El entendimiento de las interacciones fundamentales entre núcleos, neutrinos, mesones, y otras partículas es un verdadero reto, sin embargo, si se trata de materia oscura, el reto es aún mayor, ya que no se tiene una idea clara acerca de su naturaleza o el candidato ideal de la partícula elemental que la formaría. En efecto, la llamada *materia oscura* introducida por Fritz Zwicky en 1933 [1], es una componente no visible en el universo cuya detección por alguna señal electromagnética no ha sido posible. Sin embargo, hay dos efectos indirectos principales por los cuales se cree en la existencia de esta materia oscura: uno es la alta velocidad en los cúmulos de galaxias, la cual excede por mucho la velocidad de escape del cúmulo si sólo se toman en cuenta las masas de las estrellas y el gas interestelar; y otra es la constancia en la velocidad de rotación de las galaxias espirales sin importar la distancia desde su centro, implicando una densidad de masa uniforme[2].

Mientras no se tengan pruebas acerca de la naturaleza de este tipo de materia, modelos teóricos se crean en base a propuestas o candidatos de partículas. Esta tarea es complicada, ya que por parte de la Física de partículas hay pocos candidatos considerados, como partículas masivas con interacción débil (Cold Dark Matter), neutrinos masivos, campos escalares[3],[4] y defectos topológicos [5]. Si ninguno de estos candidatos es el adecuado, se deberá resolver el problema inverso, es decir, determinar la naturaleza de la materia oscura directamente de las observaciones. Dado el caso, todas las observaciones indican que una característica de este tipo de materia es que tiene un comportamiento gravitacional muy similar si no es que igual, al de la materia bariónica y puede intercambiar energía cinética o momento sólo mediante una interacción gravitacional elástica o por colisiones directas. Esto hace pensar que un tratamiento de ésta como un fluido o una colección de partículas es adecuado. La presente tesis pretende analizar el enfoque de colección de partículas en un caso específico: la vecindad de un hoyo negro, esto con la finalidad de sentar una base para un estudio mucho más profundo acerca de la dinámica de cualquier tipo de partículas, y posteriormente poder analizar el caso de partículas de materia oscura.

Esto puede ser de gran interés pues puede mostrar las diferencias y similitudes entre los enfoques de fluido y colección de partículas.

Aunque se pueda decir que los sistemas de colecciones de partículas están “entendidos” debido a que siempre es posible escribir las ecuaciones de movimiento para cualquiera de éstos, la complejidad de un sistema que contiene muchas partículas es tan grande que la tarea de deducir algunas consecuencias importantes puede llegar a ser muy difícil. Los inconvenientes involucrados no se refieren a detalles cuantitativos que pueden ser resueltos con supercomputadoras, sino a los detalles cualitativos. En efecto, incluso si las interacciones entre las partículas individuales son muy sencillas, la pura complejidad debida a la interacción de un número grande de ellas puede dar en algunos casos lugar a características cualitativas no esperadas en el comportamiento del sistema. Puede ser que se requiera un análisis profundo para predecir la ocurrencia de estas características sólo del conocimiento de partículas individuales. Es por ello que el entendimiento de sistemas que consisten de muchas partículas no es trivial. Al intentar estudiar las interacciones de todas las partículas involucradas en un sistema en detalle, ya sea en equilibrio o fuera del equilibrio, y así poder calcular parámetros de significado macroscópico, se maneja el tratamiento de la *teoría cinética*. El principal objetivo de este enfoque es describir propiedades macroscópicas a partir de cantidades microscópicas asociadas con las partículas que componen cierto sistema. En el caso de esta tesis, no es de principal interés en el comportamiento individual de cada partícula, sin embargo un ejemplo en el cual se toman en cuenta las interacciones de todas las partículas involucradas en el sistema son las simulaciones de N-cuerpos. En este tipo de simulaciones, las ecuaciones de un sistema de N-partículas bajo la influencia de su fuerza gravitacional son integradas numéricamente sin ninguna simplificación u aproximación. Hay métodos llamados de ”árbol” que descomponen el sistema de partículas en subsistemas y expresan la interacción entre los subsistemas por una expansión multipolar, y hay métodos directos, donde simplemente se suman las fuerzas entre los pares de partículas. Más información acerca de estas simulaciones se puede ver en [6],[7],[8]. Pero para realizar un estudio numérico de este tipo, en la mayoría de los casos es necesario utilizar supercomputadoras.

En el enfoque de esta tesis es posible aplicar argumentos estadísticos para poder describir propiedades macroscópicas. Se define una función de distribución que da la densidad de probabilidad de encontrar a una partícula en cierto rango de posición y momento. Esta función de distribución posee cierta información acerca de cada partícula involucrada en el sistema de estudio, por lo que con esta densidad de probabilidad es posible calcular algún campo macroscópico de nuestro interés. En este tratamiento es necesario tomar en cuenta la ecuación propuesta en 1872 por Boltzmann [9], [10], la cual representa la evolución dinámica de esta función de distribución en un espacio-fase definido por coordenadas y momentos. Si se estudia

un sistema sin colisiones, como lo es el interés de la presente tesis, la ecuación de Boltzmann se reduce a la llamada ecuación de Vlasov, sugerida por Anatoly Vlasov en 1967 [11].

Un gas no colisional se define como un sistema de partículas cuyas colisiones poseen una sección eficaz despreciable. La única interacción entre partículas es mediada por campos macroscópicos que genera esta colección de partículas, como puede ser un campo gravitacional, electromagnético, etc. Este tipo de gas es un excelente modelo para entender sistemas de un gran número de partículas cuyas interacciones no se limitan a cierto rango.

En gravitación, los campos macroscópicos mencionados vienen descritos por las ecuaciones de Einstein o, en la aproximación Newtoniana, por la ecuación de Poisson. Las mejores aplicaciones de la ecuación de Vlasov para sistemas auto-gravitantes se encuentra en la dinámica estelar[12] o en Cosmología. En el primer caso, los sistemas considerados son galaxias o partes de galaxias en las cuales no haya mucho polvo o gas que requiera un tratamiento hidrodinámico, y las partículas en cualquier caso son estrellas o partículas de materia oscura. En el caso cosmológico son galaxias o incluso cúmulos de galaxias. El hecho de que sean modeladas como partículas indica que su estructura interna no tiene relevancia cuando se considera al sistema como un todo.

Debido a las distintas aplicaciones, es natural que exista una *teoría cinética relativista*, y con ello, una ecuación de Boltzmann relativista, cuyo desarrollo moderno se dio después de 1960 y el primer tratamiento se puede ver en [13]. Incluso, si se piensa en un Universo temprano en donde todas las partículas eran relativistas, es claro que este tipo de teoría es necesaria para el estudio de interacciones y dinámicas entre ellas en esa época. Sin embargo, se observará en este trabajo que el paso de los conceptos en teoría cinética no-relativista a aquéllos en teoría cinética relativista no es trivial. La finalidad de esta tesis es poder dar un modelo del posible comportamiento de partículas no-interactuantes en presencia de un objeto masivo mediante la ecuación de Vlasov no-relativista y también el comportamiento de éstas en la vecindad de un agujero negro mediante el estudio de la ecuación de Vlasov relativista en una métrica de Schwarzschild. Para esto se implementó un código numérico en Fortran. En este código se maneja una malla Euleriana, es decir, se discretiza el espacio-fase de las partículas y de esta manera una función de distribución definida en esta malla evoluciona temporalmente mediante la resolución de la ecuación de Vlasov y las ecuaciones características correspondientes. Se puede encontrar más información acerca de los métodos numéricos que utilizan mallas Eulerianas para resolver la ecuación de Vlasov en [14],[15], e información detallada acerca de distintos tipos de métodos numéricos encaminados en esta dirección en [16],[15],[17], [18],[19],[20],[21]. Gracias a la evolución de la función de distribución se pueden calcular la evolución

de cantidades macroscópicas, como lo son la densidad de partículas y la velocidad promedio de las partículas.

La tesis queda estructurada de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se dan las bases teóricas de la Teoría Cinética no-relativista y relativista, haciendo énfasis en la ecuación de Vlasov para el caso correspondiente. En este Capítulo también se incluye una discusión acerca de las funciones de distribución en equilibrio térmico y de las propuestas de funciones de distribución que se utilizan en este trabajo. En el Capítulo 2 se habla de la geometría de Schwarzschild, incluyendo la obtención del elemento de línea de esta métrica, obtención de cantidades conservadas, cálculo de ecuaciones de movimiento, y la obtención de la ecuación de Vlasov en esta métrica. En el Capítulo 3 se incluye la teoría acerca de los métodos numéricos utilizados en la tesis para el código computacional y después se incluye una explicación detallada acerca de la estructura del mismo. En el Capítulo 4 se incluyen los resultados que se obtuvieron mediante el código, así como una discusión de ellos. Finalmente, en el capítulo 5 se incluyen las conclusiones del trabajo.

Capítulo 1

Teoría cinética

1.1. Teoría cinética no-relativista

Uno de los principales propósitos de la teoría cinética es derivar propiedades macroscópicas en base a ecuaciones de evolución microscópicas, esto es, describiendo el estado microscópico del sistema, dado por los estados de las partículas individuales que lo componen.

Cuando se quiere describir una situación desde el punto de vista estadístico, es necesario considerar un *ensamble* que consiste en un número grande de sistemas similares. De esta manera, la probabilidad de ocurrencia de un evento en particular estará dada por la fracción de sistemas en el ensamble caracterizados por la ocurrencia de este evento en específico. Usualmente se tiene solamente conocimiento parcial del sistema bajo consideración, por lo que éste sólo se puede encontrar en cualquiera de los estados que son compatibles con la información que se tiene, estos se llaman *estados accesibles* del sistema. En una descripción estadística, los sistemas en el ensamble deben estar distribuidos en los distintos estados accesibles.

Al describir un sistema macroscópico, es posible especificar algunos parámetros independientes macroscópicamente, conocidos como *parámetros externos*. Por lo que se define un *macroestado* del sistema especificando los parámetros externos del sistema. Naturalmente, correspondiendo a un macroestado dado, el sistema se puede encontrar en uno de los posibles *microestados*. Ahora, un sistema puede ser descrito por un conjunto de n coordenadas q_1, q_2, \dots, q_n y n momentos correspondientes p_1, p_2, \dots, p_n , es decir, por un total de $2n$ parámetros. El número de coordenadas independientes n que se necesitan para la descripción de el sistema se llama número de grados de libertad del sistema. Este conjunto de coordenadas $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ pueden ser considerados como puntos en un *espacio fase* de $2n$ dimensiones en el cual cada eje coordenado es designado por una de las posiciones o momentos[22].

Formalmente se dice que este espacio es una variedad simpléctica de dimensión par, tal que cada punto en este espacio nos representa un estado del sistema considerado [23], donde se define a una estructura simpléctica en una variedad como una 2-forma diferencial no-degenerada. En una variedad simpléctica hay un isomorfismo entre campos vectoriales y 1-formas. Un campo vectorial en una variedad simpléctica correspondiente a la diferencial de una función se denomina campo vectorial hamiltoniano y éste define un flujo fase. Entonces el flujo fase de un campo vectorial hamiltoniano en una variedad simpléctica preserva la estructura simpléctica del espacio-fase [24], es decir, hay conservación de volúmenes en el espacio-fase. En Mecánica Clásica que este flujo fase preserve a una función diferenciable en la variedad simpléctica llamada *Hamiltoniana*, se interpreta como la ley de conservación de la energía.

Para describir a un sistema de n partículas se define una función de distribución en el espacio fase, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, donde $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_n)$ es el vector de posición y $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, de forma tal que se cumpla que el número de partículas cuyo centro de masa al tiempo t se encuentran localizadas entre \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ y cuyos momentos están entre \mathbf{p} y $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ viene dado por,

$$dn(t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}. \quad (1.1)$$

La función de distribución mide la densidad de partículas en el espacio fase, pero físicamente $f d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ representa la probabilidad de que al tiempo t , la partícula 1 se encuentre en el volumen infinitesimal del espacio fase $d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{p}_1$, la partícula 2 en $d^3\mathbf{r}_2 d^3\mathbf{p}_2$, y así sucesivamente para todas las partículas. De este modo, si se tienen n partículas en el sistema, esta condición se reescribe como,

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p} = n. \quad (1.2)$$

Dado que la función de distribución es una variable dinámica, su evolución se puede escribir

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Recordando las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde el Hamiltoniano queda definido como

$$H = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{L}, \quad (1.5)$$

y donde \mathcal{L} es el Lagrangiano del sistema. Entonces es fácil reescribir a la ecuación (1.3) como

$$\frac{df}{dt} = \sum_l \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \frac{\partial H}{\partial p_l} - \frac{\partial H}{\partial q_l} \frac{\partial f}{\partial p_l} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.6)$$

La última relación se puede reescribir usando los brackets de Poisson:

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.7)$$

Esta es la *ecuación de movimiento* para la función de distribución f .

Cuando se tiene que $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ es constante en una trayectoria del sistema, entonces se obtiene la llamada *ecuación de Vlasov* o de *Liouville* [25]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] = 0. \quad (1.8)$$

Esto ocurre debido a que en la ausencia de colisiones, *todas* las partículas en el rango $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ después de un intervalo de tiempo dt se encontrarán en un nuevo rango $d^3\mathbf{r}'d^3\mathbf{p}'$,

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{p}' = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}. \quad (1.9)$$

Así, la ecuación de Vlasov es la expresión matemática del *Teorema de Liouville*, el cual dice que un volumen en el espacio-fase permanece invariante, es decir, la densidad de puntos en el espacio-fase permanece constante para un observador que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n)$ [26]. Esto justifica la derivación de la ecuación de Vlasov o también llamada *ecuación de Boltzmann sin colisiones*.

Cuando hay colisiones, el número de partículas en el rango $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$ puede variar debido a que partículas que originalmente no se encuentren en este rango pueden ser dispersadas dentro de este rango o viceversa, ocasionando que haya un incremento o decremento neto por unidad de tiempo en el número de partículas en el rango $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{p}$. Por lo que se obtiene la *ecuación de Boltzmann*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_l \left(\frac{\partial f}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial f}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (1.10)$$

donde el último término denota el cambio del número de partículas en un rango dado debido a las colisiones que existan en el sistema. Sin embargo, para este trabajo es de nuestro interés estudiar un sistema sin colisiones, por lo que se estudiará la ecuación de Vlasov.

En términos de coordenadas cartesianas se tiene un Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}mv^2 +$

$\Phi(\mathbf{x}, t)$, donde Φ es el potencial gravitacional. En este caso la ecuación de Vlasov en coordenadas cartesianas queda escrita de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.11)$$

Para obtener esta expresión en coordenadas esféricas es necesario recordar que los momentos generalizados se definen como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad (1.12)$$

y de esta forma obtener el Hamiltoniano en coordenadas esféricas,

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + \Phi(r, \theta, \phi), \quad (1.13)$$

de donde se obtiene finalmente que la ecuación de Vlasov en coordenadas esféricas es [\[12\]](#)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_r}{m} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p_\theta}{mr^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial p_r} \\ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial p_\theta} - \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \frac{\partial f}{\partial p_\phi} = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

En el caso más común y el cual es de interés para el presente trabajo, se tiene una partícula de masa $m = 1$ en un potencial central $\Phi = \Phi(r) = -\frac{GM}{r}$ y se toma un plano fijo con $\theta = \frac{\pi}{2}$. De esta manera la ecuación [\(1.14\)](#) se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{p_\phi}{r^2} \frac{\partial f}{\partial \phi} - \left(\frac{GM}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{r^3} \right) \frac{\partial f}{\partial p_r} = 0. \quad (1.15)$$

Si se considera el caso de caída libre en un potencial Newtoniano, $\Phi = -\frac{GM}{r}$, esta ecuación se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial t} + p_r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{GM}{r^2} \frac{\partial f}{\partial p_r} = 0. \quad (1.16)$$

Es importante recordar esta expresión debido a que será la ecuación que se utilizará para el análisis numérico.

La ecuación de Vlasov significa que la función de distribución f se conserva para un observador que se mueve en la trayectoria de la partícula en el espacio-fase. De esta propiedad, si $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t = 0) > 0$ para toda (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , entonces $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) > 0$ para todo $t > 0$, por lo que probabilidades positivas permanecen positivas. En otras palabras,

en la trayectoria del movimiento de la partícula en el espacio-fase f es constante. Si suponemos que f es cualquier distribución en equilibrio, donde el equilibrio se define como aquél estado en el cual no hay ningún flujo de materia o energía, es decir, las variables de estado no cambian con el tiempo, entonces esto implica $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, por lo que la ecuación de Vlasov se reduce a

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (1.17)$$

Para poder generar una solución general a esta ecuación se considera que $\mathbf{r}'(t')$, $\mathbf{p}'(t')$ son los valores correspondientes de posición y velocidad al tiempo t' de una partícula que intersecta el punto (\mathbf{r}, \mathbf{p}) al tiempo $t = t'$.

Si se tienen funciones $a(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$, $b(\mathbf{r}', \mathbf{p}')$, ... que son constantes de movimiento para esta partícula, entonces cualquier función $f(a(\mathbf{r}', \mathbf{p}'), b(\mathbf{r}', \mathbf{p}'), \dots)$ satisface la ecuación (1.17) al tiempo $t = t'$, y entonces cualquier otra función $f(a(\mathbf{r}, \mathbf{p}), b(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \dots)$ de constantes de movimiento es una *solución estacionaria* de la ecuación de Vlasov [27]. Esta última afirmación es fácil de observar ya que si se tiene *cualquier* función de distribución $f = f(a, b, \dots)$, donde a, b, \dots son constantes de movimiento o cantidades conservadas como ya se mencionó, entonces la ecuación de Vlasov es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial t} + \dots = 0 \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (1.19)$$

lo cual confirma que este tipo de función de distribución es una solución estacionaria. Con la función de distribución se pueden calcular las propiedades macroscópicas del sistema. Estas propiedades se determinan a partir de la función de distribución en términos de cantidades promedio. La densidad del número de partículas queda definida de la siguiente manera,

$$N = \int f d^3\mathbf{p}, \quad (1.20)$$

resultando así, que la densidad de masa es

$$\rho = mN = m \int f d^3\mathbf{p}. \quad (1.21)$$

Y si se quiere saber la velocidad promedio de las partículas en un sistema dado, se tiene que,

$$\bar{v} = \frac{1}{N} \int v f d^3\mathbf{p}. \quad (1.22)$$

1.2. Teoría cinética relativista

La estructura de la teoría cinética no relativista de gases contiene elementos de diferentes partes de la Física, desde la dinámica de un sistema de dos partículas, hasta la descripción cinemática de sistemas gaseosos, donde, gracias a ciertas suposiciones estadísticas, uno obtiene un tratamiento de los fenómenos de transporte en la forma de la ecuación de Boltzmann[28].

La misma estructura general se aplica a la teoría cinética relativista. Lo que es de interés siempre, es saber las propiedades macroscópicas de cierto sistema, ya sea que esté en equilibrio o no; entonces el propósito se convierte en cómo expresar estas cantidades macroscópicas, que son funciones de las coordenadas del espacio-tiempo, en términos de las variables de estado macroscópicas, como temperatura o densidad de partículas, y de los parámetros microscópicos del sistema. Y para ello, en teoría cinética se utiliza una descripción estadística en términos de la función de distribución para una partícula. La evolución de esta función de distribución vendrá dada por la ecuación de Boltzmann o por la ecuación de Vlasov en el caso de que no hayan colisiones.

El concepto de espacio-fase en Relatividad General se refiere a un haz fibrado sobre el espacio tiempo, que en el límite clásico se debe reducir al espacio fase usual. Este haz fibrado, es un espacio que localmente es un espacio producto ¹, pero globalmente puede tener una estructura topológica diferente [23]. Una clase especial de haces fibrados son los vectoriales, es decir, aquellos que son espacios vectoriales. En este caso se pueden considerar dos casos relevantes, el haz tangente TM , y el haz cotangente T^*M al espacio-tiempo. En el primer caso se considera que el momento es un espacio vectorial cuya dimensión será el doble de la dimensión del espacio-tiempo, y en el segundo caso se puede pensar que el momento es una variedad simpléctica. Es por ello que cualquier función real en el haz cotangente puede ser interpretada como Hamiltoniana, por lo que el haz cotangente se puede entender como un espacio-fase en el cual la mecánica Hamiltoniana es válida. Entonces un *espacio-fase relativista* se puede definir como el haz cotangente al espacio-tiempo con una forma simpléctica[29],[30], [31].

De este modo, el objetivo es trabajar con los principios de la física estadística no relativista en el contexto de Relatividad General con el haz cotangente T^*M como espacio-fase. En este haz, un punto se puede expresar como (x^α, p_α) , donde se tiene un momento covariante. Naturalmente se podría decir que este espacio-fase es

¹Topología construida sobre el producto cartesiano de espacios topológicos a partir de la topología de los factores

8-dimensional, sin embargo la restricción de momentos,

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2 c^2, \quad (1.23)$$

indica que cualquiera de las componentes del momento se puede expresar en términos de las otras tres componentes, así p^0 pueda ser expresada en términos del 3-momento \mathbf{P} ,

$$p^0 = \left((g^{0i} p_i)^2 + g^{00} (g^{ij} p_i p_j + m^2 c^2) \right)^{1/2}, \quad (1.24)$$

lo cual restringe a la física a un espacio-fase 7-dimensional[32], [33]. Es importante mencionar que de aquí en adelante las convenciones seguidas en esta tesis son tener índices latinos para las componentes espaciales (1,2,3) e índices griegos para las componentes del espacio-tiempo (0,1,2,3). Así mismo, se trabajará con la convención de signos $(-, +, +, +)$.

La definición de una función de distribución en el espacio-fase relativista sugiere que ésta debe ser un escalar de Lorentz para poder ser consistente con un marco de trabajo relativista. Sin embargo, varios autores difieren en la definición de la función de distribución. Por un lado, algunos comienzan con una definición no-manifestantemente covariante de la función de distribución f que es formalmente idéntica a la usada en el caso no-relativista, y después deben demostrar que esta función es invariante bajo cualquier cambio de sistema de referencia, es decir, que es un escalar [34], [35]. Para ello hay dos tipos de enfoques: el primero de ellos se basa en la *invariancia* del elemento de volumen del espacio-fase, y el segundo se basa en definir de manera manifestantemente covariante la función de distribución microscópica, lo cual necesita de la introducción de nuevos conceptos de microhistorias y macrohistorias para poder introducir ensambles estadísticos covariantes. Por otro lado, hay autores que comienzan de un concepto que es manifestantemente relativista e invariante de Lorentz de la función de distribución para el número de líneas-mundo de partículas que cruzan una hipersuperficie espacialoide arbitraria en el espacio-tiempo. Una discusión completa se puede encontrar en [36]. En esta tesis se trabajará con la primer definición de función de distribución.

En Relatividad General no se puede decir que dos eventos hayan ocurrido al mismo tiempo en distintos lugares, es decir no hay simultaneidad, por ello es que algunos conceptos de la teoría cinética relativista no son covariantes, tal es el caso del concepto de *microestado* o *macroestado*.

En la física estadística Galileana, los ensambles se definen por medio del concepto de macroestado. Un macroestado de un sistema se define mediante los valores que tomen ciertas cantidades o campos macroscópicos en el sistema de referencia donde el estudio estadístico se está llevando acabo en un tiempo dado. Por ejemplo, si se estudia un gas en equilibrio, cantidades macroscópicas que se usan para definir un

macroestado son la densidad de partículas, velocidad o algún otro campo termodinámico arbitrario. De esta manera, un *ensamble* se define como la colección de sistemas que difieren microscópicamente pero que son idénticos macroscópicamente. En Relatividad, el macroestado de un sistema en un sistema de referencia inercial \mathcal{O} al tiempo t está definido por los valores de un macrocampo $A^{\mu\dots\nu}(t, \mathbf{x})$ y todos los otros macrocampos en la hipersuperficie del espacio-tiempo ($t = \text{const.}$). Si se quisiera saber el valor de este macrocampo en otro sistema de referencia se tendría que el cambio del macroestado bajo una transformación de Lorentz es

$$A'^{\alpha\dots\beta}(t', \mathbf{x}') = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \dots \Lambda_{\nu}^{\beta} A^{\mu\dots\nu}(t, \mathbf{x}), \quad (1.25)$$

donde t' y \mathbf{x}' están relacionados a t y \mathbf{x} por la misma transformación de Lorentz. Observando que t' no es constante, sino que varía con \mathbf{x}' , la ecuación (1.25) no define un macroestado en el sistema \mathcal{O}' . En otras palabras, el concepto de macroestado no es invariante de Lorentz, y lo mismo se sigue para el concepto de microestado. Como el promedio sobre ensambles se realiza sumando sobre todos los microestados correspondientes a un macroestado dado, entonces es claro que este procedimiento no es invariante de Lorentz tampoco.

Un observador en caída libre ve a su vecindad inmediata libre de fuerza gravitacional. Entonces éste debe poder construir un espacio de momentos local para las partículas que van pasando, en el cual cada partícula es representada por un punto, y donde exista una densidad y corriente que fluye en las regiones vecinas del espacio-tiempo de acuerdo con el teorema de Liouville. Este escenario estadístico debe ser covariante si es invariante de Lorentz para el observador en caída libre[13]. Para poder construir un estado del sistema en algún otro sistema de referencia \mathcal{O}' , es necesario conocer la evolución de estados del sistema de referencia \mathcal{O} . Lo que quiere decir que para poder construir un estado en otro sistema de referencia, es necesario conocer la evolución de los estados por los que pasa el sistema al correr el tiempo en el sistema de referencia de partida. Por lo que se introduce el concepto de historia y se define como *macrohistoria* de un sistema a los valores que toman varios campos macroscópicos en cada punto del espacio-tiempo donde el sistema exista. En un sistema inercial \mathcal{O} , esto significaría fijar el valor de cualquier campo macroscópico en todo punto x en \mathbb{R}^3 para cualquier valor de t . El concepto de *microhistoria* se define análogamente. Entonces el *ensamble relativista* se define como la colección de sistemas con microhistorias ω que corresponden (*para un periodo de tiempo suficientemente corto en el sistema localmente comóvil*) a la misma macrohistoria[36]. De hecho, esta definición de ensamble asegura que el procedimiento de promediar sea un procedimiento covariante. En otras palabras, si es que se tiene un campo escalar microscópico $\phi(x, p_*)$, entonces un campo obtenido a partir del promedio de este

mismo sobre el ensamble resulta en un campo escalar macroscópico

$$\Phi(x, p_*) = \langle \phi(x, p_*) \rangle, \quad (1.26)$$

donde $\langle \rangle$ denota promedio sobre el ensamble y $*$ denota una cantidad que vive en el haz cotangente T^*M . Entonces suponemos que existen colecciones de sistemas que son microscópicamente diferentes, pero macroscópicamente idénticos por un tiempo limitado.

En efecto, cuando se escoje al espacio-fase como el haz cotangente T^*M la generalización covariante de la densidad de partículas microscópica en el espacio-fase es un escalar, lo cual implica que la densidad de partículas macroscópica también lo es. Entonces la definición covariante de ensamble permite construir una función macroscópica en el espacio fase que es escalar a partir de una densidad de partículas que también es escalar. La función de distribución, definida como la densidad de partículas macroscópica en el espacio-fase T^*M cumple con ser una función macroscópica escalar. Si el promedio sobre el ensamble no fuera covariante, no habría garantía de que al promediar se obtuviera una función de distribución escalar.

Sea M la variedad del espacio-tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$ y $x = (ct, x^i)$ las coordenadas locales en M . Se consideran partículas idénticas en la vecindad de x donde x_r^i y p_{ri} denotan la posición y momento de la partícula r en el tiempo t , entonces se puede definir una función de distribución microscópica como [33],

$$\sum_r \delta^{(3)}(x^i - x_r^i) \delta^{(3)}(p_i - p_{ri}), \quad (1.27)$$

donde $\delta^{(3)}$ denota la distribución de Dirac 3-dimensional, es decir, un producto de tres funciones Delta de Dirac, cada una de las cuales contiene una componente del vector x^i o p_i . La integración de (1.27) con respecto a los volúmenes de espacio y momento resulta en el número de partículas que al tiempo t se encuentran dentro del elemento de volumen en el espacio de posiciones alrededor del punto x^i con momento dentro del elemento de volumen en el espacio de momentos alrededor del punto p_i . Lo que significa que este término es una densidad de partículas en el espacio-fase.

Si se consideran dos fluidos, se dice que son macroscópicamente iguales si sus propiedades macroscópicas son iguales. Aunque éstos sean iguales macroscópicamente, en general serán distintos a nivel microscópico, es decir, sólo los promedios son iguales. Así, un promedio sobre el ensamble se referirá a dividir la suma de todas los términos en (1.27) entre el número de sistemas del ensamble, obteniendo así la *densidad de partículas promedio*. Por lo que la función de distribución viene dada por,

$$f_*(t, x^i, p_i) := \left\langle \sum_r \delta^{(3)}(x^i - x_r^i(t)) \delta^{(3)}(p_i - p_{ri}(t)) \right\rangle. \quad (1.28)$$

Esta función es un escalar en Relatividad General que se interpreta como la función de distribución de una partícula en el espacio-fase 7-dimensional T^*M .

Una función de distribución f definida en TM se puede obtener a partir de la función de distribución f_* definida en T^*M mediante un cambio de variable,

$$f(t, x^i, p^i) = f_*(t, x^i, p_i), \quad (1.29)$$

mediante la siguiente relación

$$\delta(p_i - p_{il}) = \frac{1}{-g} \frac{p_0}{p^0} \delta(p^i - p_l^i). \quad (1.30)$$

donde g denota el determinante de la métrica. Más detalles acerca de la demostración de que la función de distribución definida en (1.28) es un escalar o la relación entre f y f_* se puede ver en [33].

Esto permite que se defina el 4-vector de flujo como,

$$j^\mu := \frac{p^\mu}{mc} f_*, \quad (1.31)$$

en donde se puede observar que si f_* tiene dimensión de la densidad de partículas en el espacio-fase, entonces la componente j^0 tendrá también la dimensión de la densidad de partículas en el espacio-fase.

Hay un tipo de tratamiento de la Relatividad General llamado *Formalismo 3+1*, en el cual se asume que los espacio-tiempos de interés son globalmente hiperbólicos, por lo que cualquier espacio-tiempo de esta naturaleza puede ser foliado completamente, es decir, puede ser rebanado en cortes 3-dimensionales de tal manera que cada rebanada 3-dimensional $\Sigma(t)$ sea espacialoide. Cada foliación puede ser identificada por un parámetro t que puede ser considerado como una *función universal de tiempo*, [37]. Dado este formalismo, se consideran $\Delta^3x \subset \Sigma_\mu(t)$ elementos de volumen del espacio-tiempo que viven en hojas de tiempo t de una foliación del espacio-tiempo $\Sigma(t)$. Además, se elijen a las componentes covariantes como variables de momento en la capa de masa S_* definida por la constricción de momentos y $p_i \in \Delta^3p_*$, donde $\Delta^3p_* \subset S_*$ es un intervalo 3-dimensional de momentos que pertenecen a la capa de masa S_* . Es decir, si se considera un 4-espacio definido por las cuatro componentes del momento p_μ , entonces S_* es una hipersuperficie 3-dimensional de restricción en ese espacio definida por $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2 c^2$, donde todas las partículas tienen la misma masa en reposo.

Sea $n(t)$ el número total de partículas en el tiempo t que tienen posiciones x^i y momentos p_i en los rangos Δ^3x y Δ^3p_* respectivamente. Este número de partículas se puede obtener integrando la componente temporal de (1.31) con respecto al

elemento de volumen 3-dimensional $d^3\Sigma_0$ correspondiente a la hipersuperficie $\Sigma(t)$ del espacio tiempo, y con respecto al elemento de volumen 3-dimensional $d^3V_{p_*}$ de la capa de masa S_* . Por lo que se obtiene,

$$n(t) = \int_{\Delta^3x \times \Delta^3p_*} \frac{p^0}{mc} f_*(t, x^i, p_i) d^3\Sigma_0 d^3V_{p_*}. \quad (1.32)$$

El elemento de volumen invariante del espacio-tiempo es,

$$d^4V_x = \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.33)$$

sin embargo, el elemento de volumen 3-dimensional de la subvariedad $\Sigma(t)$ del espacio-tiempo es

$$d^3\Sigma_\mu = \delta_\mu^0 \sqrt{-g} d^3x, \quad (1.34)$$

cuya componente temporal corresponde a

$$d^3\Sigma_0 = \sqrt{-g} d^3x. \quad (1.35)$$

El elemento de volumen sobre la capa de masa cambia según el haz que se tome como espacio-fase, si se toma T^*M se tiene

$$d^3V_{p_*} = mc \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d^3p_*}{p^0}, \quad (1.36)$$

mientras que si se toma el haz tangente TM como espacio-fase, se tiene

$$d^3V_p = mc \sqrt{-g} \frac{d^3p}{p_0}. \quad (1.37)$$

Una discusión más amplia acerca de la obtención de los elementos de volumen invariantes se encuentra en el apéndice (A).

Vale la pena mencionar que en el Formalismo 3+1 es posible escribir a la métrica del espacio-tiempo como

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.38)$$

donde α es la *función de lapso*, la cual indica el lapso de tiempo propio $d\tau$ entre dos hipersuperficies $\Sigma(t)$ medido por observadores que se mueven a lo largo de la dirección normal de estas hipersuperficies u observadores de Euler, $d\tau = \alpha(t, x^i) dt$; β^i es el *vector de shift*, el cual indica la velocidad relativa entre los observadores de Euler y las líneas de coordenadas espaciales constantes; y γ_{ij} es la métrica 3-dimensional

que mide distancias propias dentro de la hipersuperficie, $dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$.

Y de esta manera se puede escribir

$$\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}, \quad (1.39)$$

donde g y γ son los determinantes de la métrica $g_{\mu\nu}$ y γ_{ij} respectivamente. En el límite Newtoniano $\alpha \rightarrow 1$, y este término entonces se reduce a la métrica inducida en cada hipersuperficie Σ , es decir, se reduce a la parte espacial de la métrica.

Ahora, haciendo uso de (1.35) y (1.36), se obtiene que el número total de partículas (1.32) es,

$$n(t) = \int_{\Delta^3x \times \Delta^3p_*} f_*(t, x^i, p_i) d^3x d^3p_*, \quad (1.40)$$

expresión que se tomará como análoga a la ecuación (1.2) en el caso no-relativista. El hecho de tener una función de distribución definida sobre un ensamble permite calcular distintos campos macroscópicos de la manera usual, como el 4-flujo de la densidad partículas, el cual se obtiene integrando (1.31) sobre el espacio de momentos

$$N^\mu(x^i) = \int \frac{p^\mu}{mc} f_*(x^i, p_*) d^3V_{p_*}, \quad (1.41)$$

donde N^0 es la *densidad del número de partículas*, lo que se considera el análogo a la ecuación (1.20) en el caso no-relativista. En un sistema de referencia de Lorentz localmente en reposo se tiene

$$N^\mu = (\mathcal{N}, \mathbf{0}), \quad (1.42)$$

donde \mathcal{N} es la *densidad del número de partículas*, es decir, N^0 .

Se puede demostrar que $\nabla_\mu N^\mu = 0$, lo cual habla de la conservación del número de partículas. De (1.41) se sigue que $N_\mu v^\mu \leq 0$ para cualquier vector temporal oide dirigido hacia el futuro o vector nulo v^μ , obteniendo la igualdad solamente si $f_* = 0$ en un punto dado.

Si se quiere hacer un cálculo de alguna componente promedio de la velocidad, entonces la expresión es

$$\bar{v}^i = \frac{1}{\mathcal{N}} \int v^i f_*(x^i, p_*) d^3V_{p_*}, \quad (1.43)$$

lo que dado el caso correspondería a $\frac{N^i}{N^0}$. Por ejemplo para la velocidad radial correspondiente al tiempo coordinado se tiene que

$$\bar{v} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \frac{p^r}{p^0} f_*(x^i, p_*) d^3V_{p_*}, \quad (1.44)$$

ecuación que se identifica como el análogo a la ecuación (1.22).

La función de distribución f_* será una función no negativa en la capa de masa S_* .

Al considerar un gas no-colisional, las partículas viajan a lo largo de geodésicas en el espacio-tiempo. El vector tangente a la geodésica a cualquier tiempo será unitario temporalmente dirigido hacia el futuro, lo cual define un flujo en S_* . Denotando a la 1-forma que genera este flujo como X , la condición para que f_* represente la distribución de una colección de partículas que se mueven libremente en un espacio-tiempo dado, es que ésta debe ser constante a lo largo del flujo, es decir $Xf = 0$. Una interpretación análoga usando el haz tangente TM se puede encontrar en [38]. Esta interpretación da pie a una ecuación que dé la evolución temporal de la función de distribución, es decir, la ecuación de Vlasov.

Como en el caso de esta tesis se usa el haz cotangente T^*M como espacio-fase, entonces se tiene que la ecuación de Vlasov es

$$\frac{df_*}{d\tau} = 0, \quad (1.45)$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial f_*}{\partial x^\alpha} + \frac{dp_i}{d\tau} \frac{\partial f_*}{\partial p_i} = 0, \quad (1.46)$$

donde solamente se ha escrito el operador de derivada sobre una geodésica cualquiera $\frac{d}{d\tau}$. Se puede notar que, para partículas lumínicas, τ cambia a λ , un parámetro afín. Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente manera,

$$\partial_t f_* + \frac{p^i}{p^0} \partial_i f_* + \frac{1}{p^0} \frac{dp_i}{d\tau} \frac{\partial f_*}{\partial p_i} = 0. \quad (1.47)$$

Se debe tomar en cuenta que las velocidades y las derivadas del momento se pueden calcular mediante las ecuaciones de las características[39],

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{p^i}{m}, \quad (1.48)$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \Gamma_{i\nu}^\mu p_\mu p^\nu. \quad (1.49)$$

donde los símbolos de Christoffel son

$$\Gamma_{i\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho i}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i\nu}}{\partial x^\rho} \right). \quad (1.50)$$

Por lo que la *ecuación de Vlasov relativista sobre la capa de masa* es,

$$\partial_t f_* + \frac{p^i}{p^0} \partial_{x^i} f_* + \frac{1}{p^0} \Gamma_{i\nu}^\mu p_\mu p^\nu \partial_{p_i} f_* = 0, \quad (1.51)$$

recordando que se consideran a las componentes contravariantes del momento como funciones de sus componentes covariantes. Así mismo p^0 puede ser expresado en términos de las otras componentes haciendo uso de $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = -m^2c^2$. La ecuación (1.51) es una ecuación lineal hiperbólica en una métrica dada para f_* .

La ecuación de Vlasov puede estar acoplada con las ecuaciones de Einstein, dando como resultado un sistema Einstein-Vlasov [39],[38],[40],[41], [42]. Este sistema consiste en la ecuación de Vlasov definida por la métrica $g_{\mu\nu}$ para f o f_* y las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.52)$$

Para tener un sistema completo, se define al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ en términos de la función de distribución f_* y la métrica $g_{\mu\nu}$

$$T_{\mu\nu} = \int p_\mu p_\nu f_*(x^i, p_*) d^3V_{p_*}, \quad (1.53)$$

cuya integración es sobre la capa de masa, ó en términos de la función de distribución f como,

$$T_{\mu\nu} = \int p_\mu p_\nu f(x^i, p) d^3V_p. \quad (1.54)$$

De (1.53) también se sigue una desigualdad, $T_{\mu\nu}v^\mu w^\nu \geq 0$, donde v^μ y w^μ son vectores temporaloides dirigidos hacia el futuro, llamada *condición de energía dominante*[43]. Esta condición se puede interpretar diciendo que para cualquier observador la densidad de energía local es no-negativa y el vector de flujo de energía local es no-espacialoide. En otras palabras, esta condición es una condición de energía débil con el requerimiento adicional de que la presión no debe exceder la densidad de energía.

En este trabajo no se resuelve el sistema Vlasov-Einstein. Se trabajará con una función de distribución de prueba definida en el haz cotangente T^*M , trabajando con momentos covariantes, sin que ésta modifique la curvatura. Por lo que se utiliza la ecuación de Vlasov definida en la ecuación (1.51) y las cantidades macroscópicas se obtendrán promediando con los elementos de volumen correspondientes a este espacio-fase.

1.2.1. Elemento de volumen en el espacio de momentos

En este trabajo se le da mayor peso al caso relativista. En este caso, el elemento de volumen invariante ante transformaciones de sistemas de referencia en el espacio de momentos es,

$$d^3V_{p_*} = mc \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d^3p_*}{p^0}. \quad (1.55)$$

Cuando se consideran coordenadas cartesianas, no hay duda que

$$d^3p_* = dp_x dp_y dp_z, \quad (1.56)$$

sin embargo, si se quiere trabajar en coordenadas esféricas, este elemento de volumen tiene dos posibles definiciones según la literatura,

$$d^3p_* = \begin{cases} p^2 \sin \theta_p dp d\theta_p d\phi_p \\ dp_r dp_\theta dp_\phi, \end{cases} \quad (1.57)$$

donde p es la norma del vector momento, θ_p y ϕ_p ángulos definidos en el espacio de momentos, y p_r , p_θ , p_ϕ , las componentes del 4-vector de momento covariante asociadas a las coordenadas espaciales r , θ y ϕ , respectivamente.

A la primer opción de la ecuación (1.57) se le llamará caso A, y a la segunda opción se le llamará caso B. De esta forma, en el caso A, se puede ver la analogía con la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas en el espacio de posiciones, es decir, se pueden definir p_x , p_y y p_z como

$$p_x = p \sin \phi_p \cos \theta_p \quad (1.58)$$

$$p_y = p \sin \phi_p \sin \theta_p \quad (1.59)$$

$$p_z = p \cos \phi_p, \quad (1.60)$$

cuya transformación inversa es

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (1.61)$$

$$\theta_p = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{p_z} \right) \quad (1.62)$$

$$\phi_p = \tan^{-1} \left(\frac{p_y}{p_x} \right). \quad (1.63)$$

Si se quiere trabajar con las componentes covariantes (correspondientes a los momentos conjugados en el caso no-relativista), entonces hay que recordar que

$$p_x = m\dot{x} \quad (1.64)$$

$$p_y = m\dot{y} \quad (1.65)$$

$$p_z = m\dot{z}, \quad (1.66)$$

y en coordenadas esféricas,

$$p_r = m\dot{r} \quad (1.67)$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (1.68)$$

$$p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (1.69)$$

donde el punto denota derivada con respecto al tiempo propio (o con respecto al tiempo coordenado en el caso no-relativista).

Si se quiere expresar a p_x , p_y y p_z en términos de los momentos covariantes en coordenadas esféricas, entonces es útil recordar que

$$dx = \cos \phi \sin \theta dr + r \cos \phi \cos \theta d\theta - r \sin \phi \sin \theta d\phi \quad (1.70)$$

$$dy = \sin \phi \sin \theta dr + r \sin \phi \cos \theta d\theta + r \cos \phi \sin \theta d\phi \quad (1.71)$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad (1.72)$$

de donde, acomodando términos, se obtiene la siguiente relación

$$p_x = \cos \phi \sin \theta p_r + \frac{\cos \phi \cos \theta}{r} p_\theta - \frac{\sin \phi}{r \sin \theta} p_\phi \quad (1.73)$$

$$p_y = \sin \phi \sin \theta p_r + \frac{\sin \phi \cos \theta}{r} p_\theta + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} p_\phi \quad (1.74)$$

$$p_z = \cos \theta p_r - \frac{\sin \theta}{r} p_\theta. \quad (1.75)$$

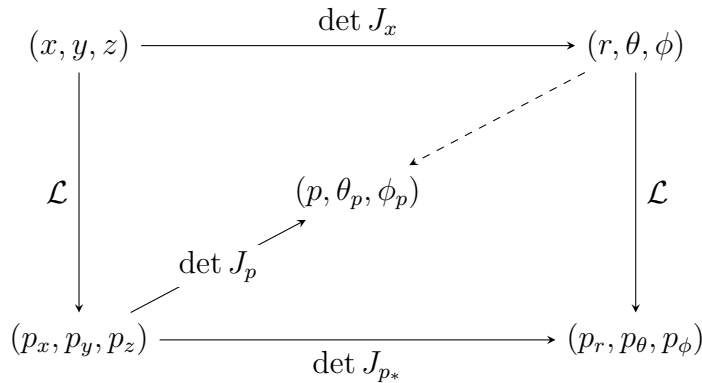
Teniendo todas las expresiones anteriores, es posible obtener, mediante Jacobianos, las relaciones entre (p_x, p_y, p_z) y (p, θ_p, ϕ_p) (caso A),

$$dp_x dp_y dp_z = p^2 \sin \theta_p dp d\theta_p d\phi_p, \quad (1.76)$$

y entre (p_x, p_y, p_z) y (p_r, p_θ, p_ϕ) (caso B),

$$dp_x dp_y dp_z = \frac{1}{r^2 \sin \theta} dp_r dp_\theta dp_\phi. \quad (1.77)$$

Por lo que todas las opciones se pueden sintetizar en el diagrama siguiente,



El camino superior hacia la derecha nos indica que las coordenadas cartesianas están relacionadas con las coordenadas esféricas mediante el Jacobiano $\det J_x = r^2 \sin \theta$ que es comúnmente conocido. El camino de la izquierda dirigido hacia abajo indica una directa relación de las las coordenadas con los momentos p_x , p_y y p_z mediante las derivadas con respecto al tiempo, como se indica en (1.64) y (1.67), formalmente estas ecuaciones se obtienen de la función Lagrangiana. El camino de la derecha dirigido hacia abajo muestra una relación de las coordenadas esféricas con los momentos covariantes asociados a esas mismas coordenadas, en este caso la relación se da mediante una descripción Lagrangiana también. La esquina inferior izquierda nos muestra dos posibles caminos, aquél que se dirige hacia la derecha se refiere a que los momentos covariantes asociados a las coordenadas cartesianas y los momentos covariantes asociados a las coordenadas esféricas están relacionados mediante el Jacobiano $\det J_{p_*} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}$, (1.77); mientras que el camino dirigido hacia el centro se refiere a la ecuación (1.76), en donde $\det J_p = p^2 \sin \theta_p$. Finalmente, la flecha punteada sólo hace mención a la similitud conceptual entre r , θ , ϕ , y p , θ_p , ϕ_p . De este modo, en la presente tesis se hará referencia al elemento de volumen $d^3 p_*$ como en el caso A, (1.76), y al elemento de volumen $d^3 p$ como en el caso B, (1.77).

1.3. Función de distribución

Si la función de distribución es una densidad de probabilidad, por naturaleza debe ser invariante con respecto a cualquier transformación de coordenadas de los elementos de volumen del espacio de posiciones y momentos si el número de partículas en el elemento de volumen se mantiene constante. Esto se sigue del teorema de Liouville y de la dinámica de partículas. Sin embargo, hay que tener cuidado cuando la dinámica de las partículas se vuelve relativista, ya que, como se mencionó en la sección (1.2), la transformación de un volumen en el espacio-fase no es trivial.

En este capítulo se pretende hablar acerca de las posibles funciones de distribución. Como se ha mencionado anteriormente, cualquier distribución que sea función de cantidades conservadas representa una solución estacionaria de la ecuación de Vlasov, por lo que en las dos primeras secciones de este capítulo se habla de este tipo de soluciones. La función de distribución de Maxwell-Boltzmann en el caso no-relativista y la función de distribución de Jüttner-Maxwell en el caso relativista. Finalmente en la tercer sección se discute un poco acerca de otro tipo de funciones de distribución, así como las funciones de distribución que se utilizan en esta tesis para estudiar la dinámica de partículas.

1.3.1. Función de distribución de Maxwell-Boltzmann

En esta sección se llega a la expresión general de una función de distribución no-relativista en el caso de que las partículas en estudio se encuentren en equilibrio térmico. Es decir, se considera que la colección de partículas se encuentra en contacto con un reservorio de calor, en este caso el Universo.

Se considera a un sistema A que está en contacto con un reservorio de calor A' , donde este último tiene muchos más grados de libertad que A . Bajo condiciones de equilibrio, se quiere encontrar la probabilidad P_r de encontrar el sistema A en cualquiera de los microestados r con energía E_r . Recordando que un microestado es la especificación detallada de una configuración microscópica de un sistema termodinámico.

Al asumir que cualquier interacción es lo suficientemente débil entre A y A' , entonces sus energías son aditivas. La energía total del sistema $A_T = A + A'$ tiene un valor constante en algún rango entre E_T y $E_T + \delta E$. La conservación de energía será

$$E_T = E_r + E', \quad (1.78)$$

donde E' denota la energía del reservorio A' . Si A se encuentra en un estado r , el número de estados accesibles al sistema A_T será el número de estados $\Omega(E_T - E_r)$ accesibles a A' cuando su energía se encuentra en un rango δE cerca del valor $E' = E_T - E_r$. Pero la probabilidad de ocurrencia en un ensamble donde A se encuentra en el estado r es simplemente proporcional al número de estados accesibles a A_T , por lo que

$$P_r = C\Omega(E_T - E_r), \quad (1.79)$$

donde C es una constante de proporcionalidad.

Ahora se debe hacer uso del hecho de que $A \ll A'$. Entonces $E_r \ll E_T$, y se puede hacer una aproximación de la ecuación (1.79) mediante la expansión del logaritmo de $\Omega(E')$ alrededor del punto $E' = E_T$. Entonces

$$\ln\Omega(E_T - E_r) = \ln\Omega E_T - \left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial E'}\right)_0 E_r - \dots, \quad (1.80)$$

donde debido a que A' es un reservorio de calor, $E_r \ll E_T$, los términos de órdenes mayores se pueden despreciar. Y se tiene

$$\left(\frac{\partial \ln\Omega}{\partial E'}\right)_0 = \beta = \frac{1}{kT}, \quad (1.81)$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura del reservorio. Este resultado se obtiene debido a que por definición el parámetro β tiene dimensiones

del recíproco de la energía. De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned} \ln \Omega(E_T - E_r) &= \ln \Omega(E_T) - \beta E_r \\ (E_T - E_r) &= \Omega(E_T) e^{-\beta E_r}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Como $\Omega(E_T)$ es una constante independiente de r , la ecuación (1.79) se puede escribir como

$$P_r = B e^{-\beta E_r}, \quad (1.83)$$

donde B es una constante de proporcionalidad que se puede determinar mediante la condición de normalización,

$$\int_r P_r = 1, \quad (1.84)$$

con lo que se obtiene finalmente[22]:

$$P_r = \frac{e^{-\beta E_r}}{\int_r e^{-\beta E_r}}. \quad (1.85)$$

Como ya se ha mencionado, un estado de una partícula puede ser descrito especificando la posición y el momento de ésta. Si se considera un gas muy diluido, se puede prestar atención en una partícula y ésta satisface las condiciones de un sistema pequeño en contacto con un reservorio de calor, por lo que satisface la ecuación (1.85), llamada en Física Estadística descripción canónica. Por lo que se obtiene que la probabilidad $P(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}$ de encontrar a la partícula en el rango \mathbf{r} , $d\mathbf{r}$ y \mathbf{v} , $d\mathbf{v}$ será

$$P_r(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v} \propto e^{-\beta(\frac{1}{2}mv^2 + \epsilon)} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}, \quad (1.86)$$

donde ϵ es la energía interna del gas. La suma sobre el factor $e^{-\beta \epsilon}$ sólo contribuye en una constante de proporcionalidad. Si se multiplica a esta probabilidad por el número total N de partículas, se obtiene el número promedio de partículas en esos rangos de posición y momento. Es entonces donde se define

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}, \quad (1.87)$$

como el número promedio de partículas con su posición del centro de masa entre \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ y velocidad entre \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Por lo que la ecuación (1.86) da

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v} = C e^{-\beta(\frac{1}{2}mv^2)} d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v}, \quad (1.88)$$

donde C es una constante de proporcionalidad que puede ser determinada mediante la condición de normalización,

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{v} = N. \quad (1.89)$$

Esto es, asumiendo todas las posibles velocidades de $-\infty$ hasta ∞ y todas las posibles posiciones en un volumen V . Haciendo los cálculos se obtiene que esta constante de proporcionalidad es

$$C = n \left(\frac{\beta m}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.90)$$

donde $n = \frac{N}{V}$. Por lo que se obtiene finalmente

$$f(\mathbf{v}) d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{v}. \quad (1.91)$$

Esta es la *distribución de velocidades de Maxwell* para una partícula en un gas diluido en equilibrio térmico. Cuando $f(\mathbf{v})$ sólo depende de $|\mathbf{v}| = v$, entonces es posible expresar el elemento de volumen como

$$\int d^3v = \int dv_r dv_\theta dv_\phi = 4\pi v^2 dv, \quad (1.92)$$

donde se ha tomado como elemento de volumen la ecuación (1.76) en la última igualdad. Por lo que se reescribe la ecuación (1.91) de la siguiente manera,

$$F(v) dv = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \quad (1.93)$$

donde F es la multiplicación de la función de distribución $f(v)$ por el volumen $4\pi v^2 dv$ de la cáscara esférica definida por el radio interior v y radio exterior $v + dv$.

$$F(v) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (1.94)$$

La ecuación (1.94) es la *distribución del módulo de las velocidades de Maxwell*. Y ésta es una solución estacionaria de la ecuación de Vlasov no-relativista.

En la Figura 1.1 se muestra una gráfica de esta distribución para distintos valores de la temperatura y considerando $m = 1$, $n = 1$ y $k = 1$. Se puede observar que conforme la temperatura aumenta la función de distribución disminuye en amplitud, sin embargo no hay restricción en las velocidades, es decir, no se tiene como límite a la velocidad de la luz. Entonces al considerar un modelo relativista, esta función de distribución dejará de ser válida.

1.3.2. Función de distribución de Jüttner-Maxwell

La principal dificultad de la física estadística relativista es la complicación introducida por los principios de la Relatividad en la descripción matemática de las

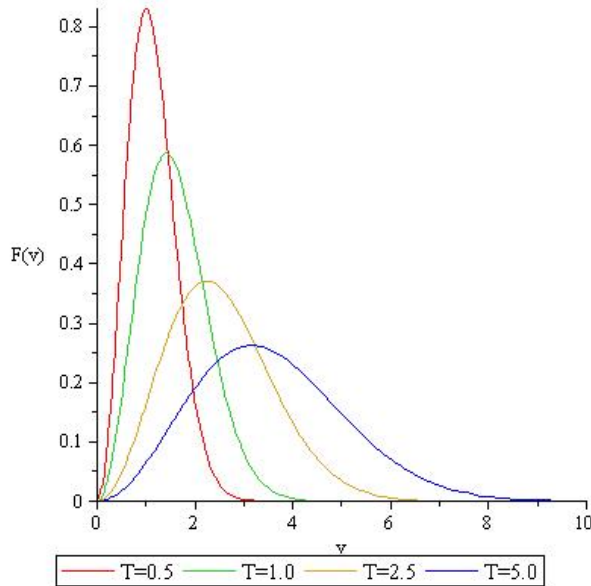


Figura 1.1: Función de distribución del módulo de las velocidades de Maxwell

interacciones de muchas partículas. Estas interacciones en la física no-relativista se pueden describir mediante potenciales o hamiltonianos, sin embargo esto no se puede utilizar en la física relativista, ya que la Relatividad Especial prohíbe velocidades de propagación superiores a las de la luz. Las interacciones entonces deben ser descritas por medio de campos que intercambian energía y momento con las partículas[44]. Otra de las complicaciones de introducir una interacción gravitacional en este caso es que el espacio-tiempo ya no es una entidad estática a través de la cual la materia se mueve, sino que evoluciona dinámicamente con los cambios en la evolución dinámica de la materia contenida en éste.

La función de distribución en el caso relativista depende de \mathbf{x}, \mathbf{p} y t . Y la ecuación dinámica de ésta es la ecuación de Boltzmann,

$$\frac{df}{d\tau} = Cf, \quad (1.95)$$

donde C es el operador de colisión de Boltzmann. En este estudio es de interés tratar con sistemas no colisionales, por lo que se tendrá $C = 0$, la ecuación de Vlasov. Notando que el primer término, $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ desaparece debido a que el tiempo propio se define como el tiempo medido en el sistema de referencia en reposo de cada partícula y en ese sistema, no hay evolución[45].

El término de colisiones C de la ecuación de Boltzmann se puede deducir obteniendo

expresiones para el número de partículas que entran y salen del elemento de volumen $d^3x d^3p$ [46], obteniendo así la siguiente expresión

$$\int \left(f'_1 f'_2 - f_1 f_2 \right) F \sigma d\Omega d^3V_{p*}, \quad (1.96)$$

donde f_1 y f_2 denotan las funciones de distribución correspondientes a las partículas con momentos p_1 y p_2 antes de la colisión, f'_1 y f'_2 denotan las funciones de distribución correspondientes a las partículas con momentos p'_1 y p'_2 después de la colisión, F se denota como una invariante del flujo, $\sigma d\Omega$ corresponde a la base del cilindro de volumen dV donde se encuentran las partículas y d^3V_{p*} es el elemento de volumen en el espacio de momentos.

Este término tiene que ver con la tasa de producción de entropía, por lo que en equilibrio este término debe desaparecer, lo cual implica que

$$f'_1 f'_2 = f_1 f_2. \quad (1.97)$$

Tomando el logaritmo de ambos lados en la ecuación (1.97) se sigue que

$$\ln f'_1 + \ln f'_2 = \ln f_1 + \ln f_2, \quad (1.98)$$

lo cual es una suma invariante, por lo que por Teorema se debe cumplir que

$$\ln f = - (A + B_\alpha p^\alpha), \quad (1.99)$$

donde A y B_α son dos parámetros que se deben determinar. Si se asume que en el sistema de referencia localmente en reposo (r) de Lorentz B_α sólo tiene coordenada temporal,

$$B^\alpha = \left(\frac{\beta}{mc}, \mathbf{0} \right), \quad (1.100)$$

donde β será un parámetro a determinar. Considerando esto y la definición del 4-flujo, es posible obtener que B^α viene dado por

$$B^\alpha = \frac{\beta}{mc^2} u^\alpha, \quad (1.101)$$

donde u^α es la 4-velocidad del gas en consideración. Ahora, el parámetro β se determina a partir de el valor de equilibrio de la entropía por partícula s . Al tomar la diferencial de esta entropía se obtiene

$$ds = \frac{k\beta}{mc^2} \left(de - \frac{p}{n^2} dn \right), \quad (1.102)$$

donde k es la constante de Boltzmann, e es la energía interna por partícula, n es la densidad del número de partículas y p es la presión isotrópica. La ecuación (1.102) se puede comparar con la ecuación de Gibbs, es decir,

$$ds = \frac{1}{T} \left(de - \frac{p}{n^2} dn \right). \quad (1.103)$$

Por lo que es posible identificar que

$$\beta = \frac{mc^2}{kT}, \quad (1.104)$$

es decir, β es una relación entre la energía en reposo y la energía térmica de una partícula. La constante A se puede identificar con un potencial químico en equilibrio, sin embargo, dado que no es de nuestro interés la naturaleza de las partículas, asumiremos que $A = 0$ sin pérdida de generalidad. Un desarrollo más detallado acerca de la deducción de los parámetros se puede ver en [46].

Entonces se tiene que la función de equilibrio es

$$f = C_0 e^{-\frac{u^\alpha p_\alpha}{kT}}, \quad (1.105)$$

expresión obtenida por Ferencz Jüttner en el año de 1911[47], Es por ello que se le denomina *función de distribución de Jüttner*. La constante C_0 es una constante de normalización que se obtiene de manera similar a la constante de normalización que se obtuvo en el caso de la distribución de Maxwell, es decir, integrando sobre todo el espacio-fase correspondiente para obtener el número de partículas. Las integrales se resuelven utilizando coordenadas esféricas en el 4-momento, resultando así,

$$f = \frac{n}{4\pi m^2 c k T K_2(\beta)} e^{-\frac{u^\alpha p_\alpha}{kT}}, \quad (1.106)$$

donde K_2 es una función modificada de Bessel de segunda especie. Otra deducción de la función de distribución de Jüttner se puede encontrar en [48].

Cuando se considera a la 4-velocidad del gas en un sistema de referencia localmente en reposo, se tiene

$$u^\alpha = (c, \mathbf{0}), \quad (1.107)$$

por lo que la función de distribución (1.105) queda expresada como

$$f = C_0 e^{-\frac{cp^0}{kT}}, \quad (1.108)$$

donde p^0 será expresado gracias a la constricción de momentos como

$$p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (1.109)$$

1.3.3. Otro tipo de función de distribución

El concepto de equilibrio en Termodinámica nos dice que un sistema se encuentra en equilibrio si los parámetros de estado (parámetros macroscópicos) no cambian con el tiempo. En el marco de Boltzmann el equilibrio se define como el macroestado correspondiente a la mayoría de microestados, es decir, el macroestado con el mayor volumen en el espacio-fase (recordando que para teoría cinética relativista los conceptos correspondientes son macrohistorias y microhistorias respectivamente). Este marco nos dice que el equilibrio termodinámico está dado por la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Las funciones de distribución en equilibrio térmico, son por definición, solución de la ecuación de Vlasov por ser funciones de la energía. Sin embargo es de interés para esta tesis poder considerar otro tipo de función de distribución cuya evolución pueda ser modelada por la ecuación de Vlasov, es decir, una ecuación que considera un sistema en el cual no hay colisiones.

Es importante notar que un sistema sin colisiones no necesariamente implica un sistema en equilibrio, por ejemplo, en un gas o líquido cualquiera pueden existir fluctuaciones a nivel microscópico que alteren ligeramente los parámetros de estado, pero a nivel macroscópico se puede considerar que el sistema se encuentra en equilibrio. Entonces cualquiera se puede preguntar, si un sistema se encuentra en equilibrio termodinámico, ¿está justificado el hecho de utilizar una función de distribución estacionaria para describir este tipo de sistema?.

Bajo este pensamiento, se propone trabajar con dos funciones de distribución distintas a las de equilibrio térmico. La primera opción es elegir una función de distribución del tipo gaussiana en todas las variables, ésta permite tener cierta intuición acerca de lo que representa esta densidad de probabilidad restringiendo su valor a cierto rango de posibles momentos radiales y a cierto rango de posibles posiciones.

$$f_1 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r} - \frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p}}, \quad (1.110)$$

donde C es una constante de normalización que se obtiene al integrar sobre todo el espacio-fase, r_0 una posición radial inicial en la que se encuentra centrada la función de distribución f_1 , σ_r es el ancho RMS (Root Mean Square) de la gaussiana correspondiente a la coordenada r , p_0 es el momento radial inicial en el cual se encuentra centrada f_1 y σ_p es el ancho RMS de la gaussiana correspondiente a la coordenada p .

La segunda opción es elegir una función de distribución que sea una modificación de la función de distribución en equilibrio térmico. Por ello se elige multiplicar a una función de distribución tipo Jüttner por una gaussiana en la coordenada r , donde de nuevo, se elige de esta manera porque restringe a las partículas a estar en cierta

región en el el espacio de posiciones.

$$f_2 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r}} e^{-\frac{p^0 c}{2\sigma_p}}, \quad (1.111)$$

donde C es de nuevo una constante de normalización que se obtiene al integrar sobre todo el espacio-fase correspondiente y p^0 viene dada por la constricción de momentos según la métrica que se use.

Debido a que en esta tesis se hace un análisis numérico de la ecuación de Vlasov, las ecuaciones (1.110) y (1.111) son condiciones iniciales que se usan para poder hacer la evolución temporal. Cada una de las constantes de normalización se calculan con los límites de la malla utilizada como espacio-fase en el código numérico. Los otros parámetros mencionados se varían para poder obtener distintos casos. En la sección 3 se darán más especificaciones acerca de lo anterior.

Capítulo 2

Geometría de Schwarzschild

2.1. Espacios con simetría esférica y estática

2.1.1. Métrica estática e isotrópica

Se define un espacio-tiempo estático como aquel en cual se puede encontrar un tiempo coordenado t con dos propiedades: la primera es que todas las componentes de la métrica son independientes de t , y la segunda es que la geometría no cambia si hay reversión temporal, $t \rightarrow -t$. Un espacio-tiempo que cumple con la primer propiedad pero no necesariamente con la segunda se llama *estacionario* [49]. Entonces, el intervalo de tiempo propio más general para un espacio-tiempo estático, simétrico e isotrópico es [50]

$$d\tau^2 = -F(r)c^2 dt^2 + 2rE(r)dt dr + r^2 D(r)dr^2 + C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

donde F , E , D y C son funciones desconocidas que dependen de r . Sin embargo es posible definir un nuevo tiempo coordenado tal que nos permita eliminar el elemento $g_{tr}(r)$,

$$t' = t + \varphi(r) \quad (2.2)$$

donde φ es una función arbitraria de r . Esto permite que la ecuación (2.1) se pueda escribir de la siguiente manera,

$$d\tau^2 = -F(r)c^2 dt'^2 + G(r)dr^2 + C(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.3)$$

donde

$$G(r) = r^2 \left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right). \quad (2.4)$$

Es posible redefinir el radio r también de manera tal que obtengamos la forma estándar del tiempo propio para esta métrica. Se define

$$r'^2 = C(r)r^2, \quad (2.5)$$

y de esta manera se puede obtener,

$$d\tau^2 = -B(r')c^2 dt'^2 + A(r')dr'^2 + r'^2 d\Omega^2, \quad (2.6)$$

donde,

$$B(r') = F(r), \quad (2.7)$$

y,

$$A(r') = \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)}\right) \left(1 + \frac{r}{2C(r)\frac{dC(r)}{dr}}\right)^{-2}. \quad (2.8)$$

Y donde se ha escrito $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. En adelante se trabajará sin r y t primas. Y se hace notar que las únicas componentes del tensor métrico diferentes de cero son

$$g_{rr} = A(r) \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \quad g_{tt} = -B(r). \quad (2.9)$$

2.1.2. Solución de Schwarzschild

Las ecuaciones de Einstein son un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales no-lineales acopladas, lo cual hace que sean muy difíciles de resolver.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.10)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. Debido al ingenio del humano, alrededor de treinta soluciones han sido encontradas, pero en particular, nos interesa la primer solución exacta encontrada que no sea la solución trivial espacio plano. Los espacios-tiempo más sencillos en Relatividad General son aquellos que tienen más simetría, y el más útil de estos puede ser la geometría del espacio vacío afuera de una fuente esféricamente simétrica de la curvatura, este es el caso de la geometría de Schwarzschild, debida a Karl Schwarzschild, quien encontró esta solución analítica de las ecuaciones de Einstein en el año de 1916, [51]. En particular se tiene que la métrica estándar ya anteriormente discutida es

$$ds^2 = -B(r)c^2 dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2 \quad (2.11)$$

Sin embargo, hay otra notación estándar para esta métrica,

$$ds^2 = -e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin\theta d\phi^2, \quad (2.12)$$

donde se tiene que ν y λ son funciones de r , es decir, $B(r) = e^\nu$ y $A(r) = e^\lambda$. Esto es válido dado que $g_{tt} < 0$ y $g_{rr} > 0$ para $r > \frac{2GM}{c^2}$ [49]. Por lo que se tiene que los elementos de la métrica covariantes diferentes de cero son

$$g_{tt} = -e^\nu \quad (2.13)$$

$$g_{rr} = e^\lambda \quad (2.14)$$

$$g_{\theta\theta} = r^2 \quad (2.15)$$

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta. \quad (2.16)$$

De donde se obtienen los símbolos de Christoffel distintos de cero a partir de la definición (1.50)

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{cdt} \quad (2.17)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \quad (2.18)$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{1}{2} e^{\lambda-\nu} \frac{d\lambda}{cdt} \quad (2.19)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} \quad (2.20)$$

$$\Gamma_{tr}^r = \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{cdt} \quad (2.21)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \quad (2.22)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-\lambda} \quad (2.23)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -re^{-\lambda} \sin^2\theta \quad (2.24)$$

$$\Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta \quad (2.26)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r} \quad (2.27)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot\theta. \quad (2.28)$$

Así mismo, se pueden calcular las componentes del tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.29)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci,

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}^\rho = \partial_\rho \Gamma_{\beta\alpha}^\rho - \partial_\beta \Gamma_{\rho\alpha}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\lambda, \quad (2.30)$$

y R es el escalar de Ricci,

$$R = g^{ij} R_{ij} = R^j_j. \quad (2.31)$$

$$G_t^t = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) \quad (2.32)$$

$$G_t^r = -\frac{1}{r} e^{-\lambda} \frac{d\lambda}{cdt} \quad (2.33)$$

$$G_r^r = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) \quad (2.34)$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi \quad (2.35)$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} \right) \right] \quad (2.36)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-\nu} \left[\frac{d^2\lambda}{c^2 dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\lambda}{cdt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{cdt} \frac{d\nu}{cdt} \right]. \quad (2.37)$$

Se quiere una solución para vacío, por lo que se debe resolver,

$$G_\nu^\mu = 0, \quad (2.38)$$

de donde se obtiene lo siguiente:

$$G_t^t = 0 \Rightarrow e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \quad (2.39)$$

$$G_r^r = 0 \Rightarrow e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \quad (2.40)$$

$$G_t^r = 0 \Rightarrow \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (2.41)$$

Uno de los resultados claros de estas ecuaciones es que

$$\frac{d\lambda}{dr} = -\frac{d\nu}{dr}, \quad (2.42)$$

por lo que al sustituir en (2.39), se obtiene

$$e^\lambda = 1 + r \frac{d\nu}{dr}. \quad (2.43)$$

La ecuación (2.42) implica que $\lambda + \nu = f(t)$. Pero siempre se puede redefinir un tiempo arbitrario $t' = \int_0^t e^{-\frac{f(t)}{2}} dt$ de tal forma que se pueda cambiar a $\nu \rightarrow \nu' = \nu + f(t)$. Lo que significa que siempre es posible elegir un tiempo coordenado tal que $\lambda + \nu = 0$ [52]. Lo que conlleva a

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad (2.44)$$

donde r_s es una constante. Muy lejos de la fuente, la métrica se debe reducir a un espacio de Minkowsky, $e^{-\lambda} = e^{\nu} \rightarrow 1$. Y para valores muy grandes de r , se debe tener un campo gravitacional débil, es decir, la solución se debe reducir al caso Newtoniano, $g_{tt} = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, donde M es la masa de la fuente y G es la constante Gravitacional. De esto se sigue que

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (2.45)$$

este parámetro es el llamado *radio de Schwarzschild*, la superficie de una estrella estática está siempre fuera de este radio. La superficie $r = r_s$ se llama el *horizonte* del agujero negro. Con el cual se obtiene que la métrica de Schwarzschild se escribe

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.46)$$

Una característica que sobresale es que la geometría afuera de una fuente esféricamente simétrica se encuentra caracterizada por la masa total M y no por cómo se encuentra ésta distribuida adentro de la fuente. Otra característica aún más interesante es la que nos dice el Teorema de Birkhoff [53],[54], la métrica de Schwarzschild es una solución afuera de cualquier distribución de masa siempre y cuando la simetría esférica se mantenga, incluso si ésta varía con el tiempo, ya que específicamente, no se exige que la fuente sea estática.

Es importante ver que este resultado también pudo ser obtenido directamente de la ecuación (2.11)[55].

La métrica de Schwarzschild es la métrica correcta para describir la solución a las ecuaciones de Einstein en el caso de vacío esféricamente simétrico. En principio, M es cualquier parámetro, que puede ser interpretado como la masa Newtoniana convencional que se mediría en el estudio de órbitas a grandes distancias de la fuente gravitatoria. En el límite $M \rightarrow 0$ se recupera el espacio de Minkowsky, como se espera. Más allá, hay que notar que la métrica se convierte progresivamente en una de Minkowsky conforme $r \rightarrow \infty$, a esta propiedad se le conoce como *planitud asintótica*.

2.2. Cantidades conservadas y ecuaciones de movimiento

El estudio de geodésicas en la geometría de Schwarzschild está en conexión directa con las leyes de conservación de energía y momento angular debido a que la métrica es independiente del tiempo y a que es esféricamente simétrica. En particular las cantidades $\vec{\xi} \cdot \vec{u}$ y $\vec{\eta} \cdot \vec{u}$ se conservan, donde \vec{u} es la 4-velocidad, $\vec{\xi} = (1, 0, 0, 0)$ es el vector de Killing asociado a esta simetría bajo desplazamientos en la coordenada del tiempo, y $\vec{\eta} = (0, 0, 0, 1)$ es el vector de Killing asociado a esta simetría debido a que la métrica es independiente de la coordenada ϕ bajo rotaciones alrededor del eje z . Donde un *vector de Killing* es una forma general de caracterizar la simetría en cualquier sistema coordenado. Una simetría implica una cantidad conservada a lo largo de una geodésica[56]. De esta manera, si un vector ξ^α satisface la ecuación de Killing,

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \quad (2.47)$$

entonces a lo largo de una geodésica, $p^\alpha \xi_\alpha = \text{const.}$

La forma explícita de estas cantidades en Schwarzschild es

$$E = -\vec{\xi} \cdot \vec{u} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.48)$$

$$L = \vec{\eta} \cdot \vec{u} = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} \quad (2.49)$$

donde se ha nombrado a E como la energía conservada por unidad de masa en reposo, y L como el momento angular conservado por unidad de masa en reposo.

Es posible llegar a estas cantidades de otras maneras, como lo es, desarrollando las ecuaciones de geodésicas o mediante el análisis de la formulación Lagrangiana, las cuales son equivalentes. En esta sección se desarrollará la última.

La formulación Lagrangiana empieza con la introducción de una acción, la cual es usualmente definida como una integral de la densidad Lagrangiana sobre una región finita del espacio-tiempo,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q^\alpha(\tau), \dot{q}^\alpha(\tau), \tau) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.50)$$

donde se tiene un campo q^α en un espacio-tiempo curvo y \dot{q}^α son sus primeras derivadas. Las ecuaciones dinámicas para q^α se obtienen pidiendo que la variación en la acción se haga cero si la variación está en el camino q^α ,

$$\delta S = 0, \quad (2.51)$$

e introduciendo una variación δq^α que es arbitraria en una región \mathcal{V} de la variedad del espacio-tiempo, pero que desaparece en todos lados en la hipersuperficie cerrada $\partial\mathcal{V}$, es decir,

$$\delta q|_{\mathcal{V}} = 0, \quad (2.52)$$

Por lo que se tiene que

$$\delta S = \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.53)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} \delta q^\alpha + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta \dot{q}^\alpha \right)_{,\tau} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \right)_{,\tau} \delta q^\alpha \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.54)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \right)_{,\tau} \right] \delta q^\alpha \sqrt{-g} d^4x + \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \delta q^\alpha d\sigma_\alpha, \quad (2.55)$$

donde se ha utilizado el teorema de Gauss en el último paso, con σ es una hipersuperficie. La segunda integral se hace cero debido a la ecuación (2.52). Por lo que si $\delta S = 0$, se obtiene,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^\alpha} = 0 \quad (2.56)$$

Esta es la ecuación de Euler-Lagrange para un campo escalar q [57]. En el caso de la métrica de Schwarzschild, el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-g_{00}c^2\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 \right], \quad (2.57)$$

donde el punto indica derivada con respecto al tiempo propio, $\frac{d}{d\tau}$. Se puede observar que \mathcal{L} es independiente de t y ϕ , por lo que aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para estas dos coordenadas se obtienen dos resultados inmediatos:

$$E = -g_{00}c^2\dot{t} \quad (2.58)$$

$$L = g_{\phi\phi}\dot{\phi}, \quad (2.59)$$

cantidades conservadas que se reducen en coordenadas de Schwarzschild a

$$E = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r} \right) c^2\dot{t} \quad (2.60)$$

$$L = r^2 \sin\theta \dot{\phi}. \quad (2.61)$$

Ahora, cualquier velocidad inicial cae sobre un plano ecuatorial ya que siempre se pueden redefinir los ejes de tal forma de que la velocidad esté en un plano con $\theta = \pi/2$,

por lo que para cualquier movimiento en específico, se puede asumir $\theta = \pi/2$ sin pérdida de generalidad. Además, debido a que la métrica es esféricamente simétrica, cualquier movimiento que empieza en un plano ecuatorial se debe quedar en el plano ya que no hay ninguna asimetría que “empuje” a una partícula a otro lado u a otro plano. La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada θ es:

$$r \frac{dr}{d\tau} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta} - r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0, \quad (2.62)$$

de donde se observa que $\theta = \pi/2$ es una solución, lo cual sólo verifica que un camino plano es una solución. En adelante se considerará este valor de θ , por lo que $p^\theta = 0$. La última ecuación de Euler-Lagrange es

$$\frac{d}{d\tau} (g_{rr} \dot{r}) + \frac{\partial}{\partial r} (g_{00}) \frac{c^2 t^2}{2} - \frac{\partial}{\partial r} (g_{rr}) \frac{\dot{r}^2}{2} - r \dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.63)$$

Sin embargo esta ecuación no es tan sencilla de resolver, por lo que es más fácil obtener una ecuación para r utilizando las cantidades conservadas, energía y momento angular. Tomando en cuenta que $\mathcal{L} = \frac{ds^2}{d\tau^2} - \frac{c^2}{2}$, se llega a la siguiente relación

$$-c^2 = -\frac{1}{g_{00} c^2} E^2 + g_{rr} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{g_{\phi\phi}}, \quad (2.64)$$

por lo que la ecuación para r es

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\frac{E^2}{g_{00} g_{rr} c^2} - \frac{L^2}{g_{\phi\phi} g_{rr}} - \frac{c^2}{g_{rr}}}. \quad (2.65)$$

En términos de las coordenadas de Schwarzschild esta expresión se reduce a,

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) - m^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}. \quad (2.66)$$

Debido a que la componente cero del momento está relacionada con la energía, será útil obtener una relación de ésta utilizando normalización de momentos, $g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2 c^2$,

$$-g_{00} p^0{}^2 + g_{rr} p^{r2} + g_{\theta\theta} p^{\theta2} + g_{\phi\phi} p^{\phi2} = -m^2 c^2, \quad (2.67)$$

de donde se obtiene p^0

$$p^0 = \sqrt{\frac{1}{g_{00}} \left(m^2 c^2 + g_{rr} p^{r2} + g_{\theta\theta} p^{\theta2} + g_{\phi\phi} p^{\phi2}\right)}. \quad (2.68)$$

Ecuación que se reduce en coordenadas de Schwarzschild a

$$p^0 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \left(\frac{p^{r^2}}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + \frac{L^2}{r^2} + m^2 c^2 \right)}, \quad (2.69)$$

donde se han utilizado las expresiones de la ecuación (2.60). Y expresando esta ecuación en términos de los momentos covariantes se tiene,

$$p^0 = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \left(p_r^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 c^2 \right)}. \quad (2.70)$$

Se nota que es posible expresar a la ecuación (2.68) en términos de derivadas con respecto al tiempo coordinado haciendo uso de nuevo de la constricción de momentos, pero agrupando términos de la siguiente manera:

$$-g_{00} p^{0^2} \left(1 - \frac{g_{rr}}{g_{00}} \left(\frac{p^r}{p^0} \right)^2 - \frac{g_{\theta\theta}}{g_{00}} \left(\frac{p^\theta}{p^0} \right)^2 - \frac{g_{\phi\phi}}{g_{00}} \left(\frac{p^\phi}{p^0} \right)^2 \right) = -m^2 c^2 \quad (2.71)$$

$$\Rightarrow p^0 = \frac{mc}{\left(g_{00} \left(1 - \frac{g_{rr}}{g_{00}} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 - \frac{g_{\theta\theta}}{g_{00}} \left(\frac{d\theta}{cdt} \right)^2 - \frac{g_{\phi\phi}}{g_{00}} \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 \right) }^{1/2}}. \quad (2.72)$$

De esta manera se puede ver que (2.72) se reduce al resultado conocido,

$$p^0 = \frac{mc}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}}, \quad (2.73)$$

donde v es la norma del vector velocidad.

2.3. Ecuación de Vlasov en una geometría de Schwarzschild

Dependiendo si se desea trabajar con el tiempo propio o el tiempo coordinado, la ecuación de Vlasov sobre la capa de masa se puede escribir de dos formas equivalentes,

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu f_* + \frac{dp_i}{d\tau} \partial_{p^i} f_* = 0 \quad (2.74)$$

$$\partial_t f_* + \frac{dx^i}{dt} \partial_i f_* + \frac{dp_i}{dt} \partial_{p^i} f_* = 0, \quad (2.75)$$

donde las componentes del momento p^μ son funciones de p_μ y la métrica. Recordando que la métrica tomada en cuenta en este caso está dada por la ecuación (2.46),

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.76)$$

la ecuación de Vlasov (2.74) queda expresada de la siguiente manera,

$$\partial_t f_* + \frac{dr}{dt} \partial_r f_* + \frac{d\theta}{dt} \partial_\theta f_* + \frac{d\phi}{dt} \partial_\phi f_* + \frac{dp_r}{dt} \partial_{p_r} f_* + \frac{dp_\theta}{dt} \partial_{p_\theta} f_* + \frac{dp_\phi}{dt} \partial_{p_\phi} f_* = 0. \quad (2.77)$$

En este caso se trabajará en el plano ecuatorial, es decir, tomando $\theta = \frac{\pi}{2}$, por lo que esta ecuación se reducirá a,

$$\partial_t f_* + \frac{dr}{dt} \partial_r f_* + \frac{d\phi}{dt} \partial_\phi f_* + \frac{dp_r}{dt} \partial_{p_r} f_* + \frac{dp_\phi}{dt} \partial_{p_\phi} f_* = 0. \quad (2.78)$$

La velocidad coordenada $\frac{dx^i}{dt}$ se puede expresar en términos de las componentes covariantes espaciales del momento,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\tau} \frac{d\tau}{cdt} = \frac{p^i}{p^0} = \frac{g^{ij} p_j}{p^0}. \quad (2.79)$$

La ecuación (2.79) en caso de la métrica de Schwarzschild, haciendo uso de (2.70), queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{g^{ii} p_i}{\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} (p_r^2 (1 - \frac{2GM}{rc^2}) + \frac{L^2}{r^2} + m^2 c^2)}}. \quad (2.80)$$

De manera que para la componente r se tiene,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) p_r}{\sqrt{p_r^2 + \frac{L^2}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}}. \quad (2.81)$$

Y para la componente ϕ se tiene,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{p_\phi}{r^2 \sqrt{p_r^2 + \frac{L^2}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}} \quad (2.82)$$

$$= \frac{L}{r^2 \sqrt{p_r^2 + \frac{L^2}{r^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}}, \quad (2.83)$$

donde vale la pena mencionar que este término casi no es utilizado debido a que generalmente la función de distribución no depende de la coordenada ϕ , lo que tiene como consecuencia que $\partial_\phi f = 0$.

En cuanto al término $\frac{dp_i}{dt}$, éste se puede obtener primero expresando a $\frac{dp_i}{d\tau}$ en términos de los símbolos de Christoffel,

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \Gamma_i^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (2.84)$$

$$= \Gamma_i^{00} p_0 p_0 + \Gamma_i^{l0} p_l p_0 + \Gamma_i^{0j} p_0 p_j + \Gamma_i^{lj} p_l p_j, \quad (2.85)$$

y después dividiendo entre p^0 ,

$$\frac{dp_i}{dt} = \Gamma_i^{00} \frac{p_0 p_0}{p^0} + \Gamma_i^{l0} \frac{p_l p_0}{p^0} + \Gamma_i^{0j} \frac{p_0 p_j}{p^0} + \Gamma_i^{lj} \frac{p_l p_j}{p^0}. \quad (2.86)$$

Se obtendrán a continuación cada uno de los términos de la ecuación (2.84) para la componente de r , el primer término es,

$$\Gamma_r^{00} p_0^2 = \Gamma_{r0}^0 g^{00} p_0^2 \quad (2.87)$$

$$= -\frac{GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} p_0^2 \quad (2.88)$$

$$= -\frac{GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^2} (g_{00} p_0^2) \quad (2.89)$$

$$= -\frac{GM}{r^2 c^2} p_0^2 \quad (2.90)$$

El segundo término es,

$$\Gamma_r^{l0} p_l p_0 = \Gamma_r^{r0} p_r p_0 + \Gamma_r^{\theta 0} p_\theta p_0 + \Gamma_r^{\phi 0} p_\phi p_0 = 0, \quad (2.91)$$

debido a que $\Gamma_r^{r0} = 0 = \Gamma_r^{\phi 0}$ y $p_\theta = 0$.

El tercer término es,

$$\Gamma_r^{0j} p_0 p_j = \Gamma_r^{0r} p_0 p_r + \Gamma_r^{\theta 0} p_0 p_\theta + \Gamma_r^{0\phi} p_0 p_\phi = 0, \quad (2.92)$$

debido a que $\Gamma_r^{0r} = 0 = \Gamma_r^{0\phi}$ y $p_\theta = 0$.

Y el cuarto término es,

$$\Gamma_r^{lj} p_l p_j = \Gamma_r^{rj} p_r p_j + \Gamma_r^{\theta j} p_\theta p_j + \Gamma_r^{\phi j} p_\phi p_j \quad (2.93)$$

$$= \Gamma_r^{rr} p_r p_r + \Gamma_r^{r\phi} p_r p_\phi + \Gamma_r^{\phi r} p_\phi p_r + \Gamma_r^{\phi\phi} p_\phi p_\phi \quad (2.94)$$

$$= \Gamma_{rr}^r g^{rr} p_r^2 + \Gamma_{r\phi}^\phi g^{\phi\phi} p_\phi^2 \quad (2.95)$$

$$= -\frac{GM}{r^2 c^2} p_r^2 + \frac{1}{r^3} p_\phi^2, \quad (2.96)$$

donde desde el segundo paso se han eliminado los términos que contenían a p_θ y también se ha tomado en cuenta que $\Gamma_r^{\phi\phi} = 0 = \Gamma_r^{\phi r}$.

Por lo que se reescribe a la ecuación (2.84) como

$$\frac{dp_r}{d\tau} = -\frac{GM}{r^2 c^2} p^0{}^2 - \frac{GM}{r^2 c^2} p_r{}^2 + \frac{L^2}{r^3}. \quad (2.97)$$

Y de esta manera es fácil obtener que la derivada del momento radial covariante con respecto al tiempo coordenado es

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{GM}{r^2 c^2} p^0 - \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{p_r{}^2}{p^0} + \frac{L^2}{r^3 p^0}. \quad (2.98)$$

De forma análoga es posible obtener la coordenada ϕ de la ecuación (2.84),

$$\frac{dp_\phi}{d\tau} = \Gamma_\phi^{00} p_0 p_0 + \Gamma_\phi^{l0} p_l p_0 + \Gamma_\phi^{0j} p_0 p_j + \Gamma_\phi^{lj} p_l p_j. \quad (2.99)$$

El único término con símbolos de Christoffel distintos de cero es el cuarto,

$$\Gamma_\phi^{lj} p_l p_j = \Gamma_\phi^{rj} p_r p_\phi + \Gamma_\phi^{\theta j} p_\theta p_j + \Gamma_\phi^{\phi j} p_\phi p_j \quad (2.100)$$

$$= \Gamma_\phi^{r\phi} p_r p_\phi + \Gamma_\phi^{\phi r} p_\phi p_r \quad (2.101)$$

$$= -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) p_r p_\phi + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \quad (2.102)$$

$$= 0, \quad (2.103)$$

donde se observa que el término es cero debido a la elección de $\theta = \frac{\pi}{2}$, ya que la forma general de los dos símbolos de Christoffel en la ecuación anterior son,

$$\Gamma_\phi^{r\phi} = \Gamma_{\phi\phi}^r g^{\phi\phi} \quad (2.104)$$

$$= -r \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) \frac{1}{r^2} \quad (2.105)$$

$$= -\frac{\sin^2 \theta}{r} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right), \quad (2.106)$$

$$\Gamma_\phi^{\phi r} = \Gamma_{\phi r}^\phi g^{rr} \quad (2.107)$$

$$= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right). \quad (2.108)$$

Con esto se obtiene,

$$\frac{dp_\phi}{d\tau} = 0. \quad (2.109)$$

Por lo que la ecuación para Vlasov en coordenadas de Schwarzschild queda expresada de la siguiente manera,

$$\partial_t f_* + \left(\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \frac{p_r}{p^0} \right) \partial_r f_* + \frac{L}{r^2 p^0} \partial_\phi f_* + \left(-\frac{GM}{r^2 c^2} p^0 - \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{p_r^2}{p^0} + \frac{L^2}{r^3 p^0} \right) \partial_{p_r} f_* = 0, \quad (2.110)$$

donde recordamos que p^0 viene dado por la ecuación (2.70).

En general las funciones de distribución con las que se trabajan tienen simetría esférica, por lo que no dependen de la coordenada ϕ , reduciendo la ecuación (2.110) a

$$\partial_t f_* + \left(\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \frac{p_r}{p^0} \right) \partial_r f_* + \left(-\frac{GM}{r^2 c^2} p^0 - \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{p_r^2}{p^0} + \frac{L^2}{r^3 p^0} \right) \partial_{p_r} f_* = 0. \quad (2.111)$$

2.3.1. Caída libre

Un caso de interés en esta tesis es analizar a las partículas en caída libre mediante la evolución de la ecuación de Vlasov. Para ello se hace el momento angular igual a cero, $L = 0$ en el análisis hecho en la sección 2.3.

La velocidad coordenada quedará expresada de manera general de la siguiente forma,

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{g^{ii} p_i}{\sqrt{p_r^2 + \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}}. \quad (2.112)$$

Con lo que la forma explícita de la coordenada r será,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) p_r}{\sqrt{p_r^2 + \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}}, \quad (2.113)$$

y para la coordenada ϕ se tendrá simplemente que,

$$\frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (2.114)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.98), se tiene que para caída libre, la derivada del momento covariante radial con respecto al tiempo coordenado es,

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{GM}{r^2 c^2} p^0 - \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{p_r^2}{p^0}. \quad (2.115)$$

Obteniendo de esta manera que la ecuación de la Vlasov en coordenadas de Schwarzschild para el caso de caída libre es,

$$\partial_t f_* + \left(\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) \frac{p_r}{p^0} \right) \partial_r f_* + \left(-\frac{GM}{r^2 c^2} p^0 - \frac{GM}{r^2 c^2} \frac{p_r^2}{p^0} \right) \partial_{p_r} f_* = 0. \quad (2.116)$$

Capítulo 3

Análisis numérico de la Ecuación de Vlasov

3.1. Métodos numéricos

La mayoría de las ecuaciones de teorías de la Física, tal como las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones de Navier-Stokes, las ecuaciones de movimiento de Newton, la ecuación de Schrodinger, y en caso de nuestro interés, la ecuación de Boltzmann, vienen dadas en términos de ecuaciones diferenciales parciales, esto es, estas leyes describen un fenómeno físico relacionando derivadas *temporales y espaciales*[58]. Estas ecuaciones diferenciales parciales son en general difíciles de resolver de manera exacta, sólo es posible en algunos casos idealizados. Estas dificultades pueden tener distintos orígenes, desde la presencia de fronteras irregulares, hasta la existencia de términos no-lineales en las ecuaciones. Entonces para resolver este tipo de ecuaciones en cualquier situación dinámica, se vuelve inevitable hacer uso de las aproximaciones numéricas[37].

Estas ecuaciones diferenciales parciales o ecuaciones integro-diferenciales tienen como una de las variables independientes al tiempo t . Este tipo de ecuaciones son de tal naturaleza que si el estado del sistema físico es especificado arbitrariamente a un tiempo inicial $t = t_0$, entonces una solución existe para $t \geq t_0$ y se encuentra determinada únicamente por las ecuaciones junto con las condiciones de frontera o alguna otra condición auxiliar[59].

La ecuación de Vlasov, o ecuación de Boltzmann sin colisiones, es una *ecuación diferencial parcial lineal hiperbólica de primer orden homogénea con coeficientes variables*. Donde la *linealidad* queda descrita cuando la variable dependiente, en este caso la función de distribución f , y todas sus derivadas aparecen de manera lineal, es decir, no aparecen productos que involucren a más de uno de estos términos. El *orden*

viene determinado por el orden de la derivada parcial más alta y la *homogeneidad* viene determinada cuando el lado derecho de la ecuación es cero, en este caso el término de colisiones es cero.

Simulaciones numéricas de la ecuación de Vlasov son de fundamental importancia para el estudio de varios procesos en la teoría cinética. En el caso de esta tesis, es de interés saber cuál es el comportamiento de ciertas distribuciones en la vecindad de un agujero negro. Se trabaja un código en el cual se utilizan dos métodos numéricos acoplados: el *método de diferencias finitas* para la diferenciación espacial, y el *método de Runge-Kutta* para la diferenciación temporal, es decir, hay una discretización Euleriana. Sin embargo es de gran importancia saber que hay varios métodos basados en una malla Euleriana cuyo propósito es resolver la ecuación de Vlasov [60],[61], [16], [62], como por ejemplo el *método de segundo orden* de Cheng y Knorr [63] o el *método CIP* (cubic interpolated propagation)[64], cuya generalización a más dimensiones se puede encontrar en [65], [21].

3.1.1. Método de diferencias finitas

Se usará la letra u para denotar la solución numérica (aproximada). Los subíndices denotarán puntos espaciales y los superíndices niveles discretos temporales, es decir, $u_{i,j}^n$ denota la solución numérica en un punto de la malla (i, j) en un nivel de tiempo n .

La idea fundamental del método de diferencias finitas es sustituir al espacio-tiempo continuo por un grupo de puntos discretos. El paso de tiempo entre dos niveles consecutivos en la malla se denota como Δt , mientras que la distancia entre dos puntos adyacentes se denota como Δx . Las distancias entre puntos en la malla no necesariamente deben ser uniformes, sin embargo en este caso se considera que si lo son.

El siguiente paso es aproximar las derivadas parciales en la ecuación diferencial parcial (EDP) por *diferencias finitas* mediante el uso del teorema de Taylor. Por ejemplo, si $u(x)$ tiene n derivadas continuas en el intervalo (a, b) , entonces para $a < x_0$ y $x_0 + h < b$,

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu_x(x_0) + h^2 \frac{u_{xx}(x_0)}{2!} + \dots + h^{n-1} \frac{u_{n-1}(x_0)}{(n-1)!} + O(h^n), \quad (3.1)$$

donde

$$u_x = \frac{du}{dx}, \quad u_{xx} = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad u_{(n-1)} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}. \quad (3.2)$$

Y $O(h^n)$ términos de orden n . Si se trunca el lado derecho de la ecuación (3.2) descartando el término $O(h^n)$, entonces se obtiene una aproximación para $u(x_0 + h)$.

El error en esta aproximación será $O(h^n)$.

En el método de diferencias finitas se sabe el valor de x_0 y $x_0 + h$, así como también el valor de $u(x_0)$ y $u(x_0 + h)$. Esto permite llegar a las llamadas aproximaciones en diferencias finitas,

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu_x(x_0) + O(h^2), \quad (3.3)$$

de donde,

$$u_x(x_0) = \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + O(h), \quad (3.4)$$

y si se desprecia el término $O(h)$, se obtiene la aproximación en diferencias finitas de *primer orden*

$$u_x(x_0) \approx \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}. \quad (3.5)$$

Esta aproximación es llamada *aproximación en diferencias finitas hacia adelante* debido a que se empieza en un punto x_0 y va hacia adelante al punto $x_0 + h$.

Para la construcción de aproximaciones en diferencias finitas de derivadas parciales, se utiliza el teorema de Taylor (3.2) donde los términos con derivadas ordinarias se sustituyen por derivadas parciales. En el caso de que u dependa de tres variables x , y y t se tiene

$$u(t, x_0 + \Delta x, y) = u(t, x_0, y) + \Delta x u_x(t, x_0, y) + \frac{\Delta x^2}{2!} u_{xx}(t, x_0, y) + \cdots + \frac{\Delta x^{n-1}}{(n-1)!} u_{x^{n-1}}(t, x_0, y) + O(\Delta x^n). \quad (3.6)$$

Realizando el mismo procedimiento se obtiene la aproximación para la derivada parcial,

$$u_x(t, x_0, y) \approx \frac{u(t, x_0 + \Delta x, y) - u(t, x_0, y)}{\Delta x}. \quad (3.7)$$

En la malla Euleriana, se puede utilizar otra notación de esta aproximación,

$$u_x(t_n, x_i, x_j) \approx \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x}. \quad (3.8)$$

Ahora reemplazando Δx por $-\Delta x$ en la ecuación (3.6), se puede obtener la *aproximación en diferencias finitas de primer orden hacia atrás* de $u_x(t_n, x_i, x_j)$,

$$u_x(t_n, x_i, x_j) \approx \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x}. \quad (3.9)$$

Estas dos primeras aproximaciones son a primer orden en x , pero el orden se puede incrementar para hacer la aproximación más precisa tomando más términos en las series de Taylor. Truncando (3.6) hasta $O(\Delta x^3)$, reemplazando Δ por $-\Delta$ y

restando esta última expresión de (3.6) se puede obtener la siguiente expresión para $u_x(t_n, x_i, x_j)$,

$$u_x(t_n, x_i, x_j) \approx \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x}. \quad (3.10)$$

Esta ecuación es llamada *aproximación en diferencias finitas de segundo orden central*.

Las aproximaciones a las derivadas parciales con respecto a otras variables se derivan de la misma manera obteniendo así por ejemplo la aproximación hacia atrás con respecto al tiempo,

$$u_t(t_n, x_i, x_j) \approx \frac{u_{i,j}^n - u_{i,j}^{n-1}}{\Delta t}, \quad (3.11)$$

la aproximación hacia adelante con respecto al tiempo,

$$u_t(t_n, x_i, x_j) \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad (3.12)$$

y la aproximación central de segundo orden con respecto al tiempo,

$$u_t(t_n, x_i, x_j) \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (3.13)$$

Muchas EDP contienen derivadas parciales de segundo o mayor orden, por lo que el método de diferencias finitas se puede usar para derivar aproximaciones de éstas. Sin embargo, para el caso de esta tesis no es necesario hacer un análisis de ello debido a que la ecuación de Vlasov no contiene mas que derivadas de primer orden.

Análisis de estabilidad von Neumann

El esquema de Diferencias Finitas es *estable* si y sólo si los errores puntuales no crecen sin límites con el tiempo[66]. Otra interpretación de estabilidad en el esquema de Diferencias Finitas es que para *un esquema estable de Diferencias Finitas, errores pequeños en las condiciones iniciales causan errores pequeños en la solución*[67]. También, la definición de estabilidad de un esquema de diferenciación es similar a la definición de buen comportamiento de una ecuación diferencial parcial.

En la práctica, la estabilidad de un método numérico puede ser analizada por otros métodos muy sofisticados. El método usado de manera más común es el análisis de von Neumann [67]. Es relativamente fácil de realizar pero se limita solamente a problemas de valores iniciales lineales con coeficientes constantes o que varíen poco. Para entender este método se puede considerar el ejemplo de la ecuación de difusión en una dimensión con condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.14)$$

Esta ecuación se puede escribir en diferencias finitas de segundo orden en el tiempo y espacio como,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = \nu \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2}, \quad (3.15)$$

dejando que

$$d = \frac{2\nu\Delta t}{(\Delta x)^2} > 0. \quad (3.16)$$

Entonces

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + d(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n). \quad (3.17)$$

Si la función $u(x, t)$ está definida en el intervalo $[0, X]$ y es periódica en x de tal manera que $u(x + nX) = u(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Entonces, si Δx es constante, la función u se puede representar mediante una serie de Fourier,

$$u_j = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \hat{u}_k e^{-\frac{2\pi i k j}{L}}, \quad (3.18)$$

donde

$$\hat{u}_k = \sum_{j=1}^L u_j e^{\frac{2\pi i k j}{L}}. \quad (3.19)$$

En $t = t^n$ y $x = x_j$, se tiene

$$u_j^n = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \hat{u}_k^n e^{-ij\phi_k}, \quad (3.20)$$

donde ϕ_k se conoce como el ángulo fase. La ecuación diferencial (3.15) es lineal y puede ser descompuesta en modos de Fourier. Dividiendo la ecuación (3.17) por $e^{-ij\phi_k}$, y haciendo un poco de álgebra se obtiene para cada k

$$\hat{u}_k^{n+1} = \hat{u}_k^{n-1} + 2d\hat{u}_k^n (\cos \phi_k - 1). \quad (3.21)$$

Esta expresión puede ser reescrita como

$$F^n = \mathbf{G} \cdot F^{n-1}, \quad (3.22)$$

donde \mathbf{G} , llamada *matriz de amplificación*, no depende del tiempo y viene dada por

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2d(\cos \phi - 1) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Asumiendo que se conoce F^0 , entonces n multiplicaciones de \mathbf{G} da

$$F^n = \mathbf{G} \cdot \dots \cdot \mathbf{G} \cdot F^0. \quad (3.24)$$

La *condición de estabilidad* se define como sigue: si las amplitudes de los modos de Fourier son finitas al tiempo $t = 0$, entonces éstas deben permanecer finitas por todos los pasos de tiempo[68].

Este requerimiento se cumple cuando

$$|\lambda_i|^n < M, \quad (3.25)$$

donde M es un número real finito positivo y λ_i los eigenvalores de \mathbf{G} . En el ejemplo dado, la condición de estabilidad es

$$|\lambda_{\pm}| = |d(\cos \phi - 1) \pm \sqrt{d^2(\cos \phi - 1)^2 + 1}| \leq 1 \quad (3.26)$$

Entonces, tomando en cuenta la ecuación (3.17) donde $d = \nu \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$, el factor de amplificación es sólo una matriz de 1×1

$$\mathbf{G} = 1 - 2d(1 - \cos \phi). \quad (3.27)$$

El requerimiento de estabilidad se alcanza cuando,

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\nu}. \quad (3.28)$$

Es importante saber que límites similares aplican a Δt para todos los esquemas explícitos.

En un siguiente ejemplo se pueden considerar ecuaciones acopladas de continuidad y de momento describiendo a un flujo de un fluido en una dimensión,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c_s \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c_s \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.30)$$

Uno puede checar que la ecuación (3.29) es equivalente a la ecuación de onda diferenciando la primera de ellas con respecto a x , la segunda con respecto a t , y usando que $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x}$. El resultado es

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad (3.31)$$

donde

$$c_s = \sqrt{\frac{P}{\rho}} \quad (3.32)$$

es la velocidad del sonido en un medio.

En este caso se puede obtener que el factor de amplificación es,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2s i \sin \frac{\theta}{2} \\ 2s i \sin \frac{\theta}{2} & 1 - 4s^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

donde $\theta = 2\pi k \Delta x / X$, $s = c_s \Delta t / \Delta x$, y donde de nuevo, las funciones se encuentran definidas en el intervalo $[0, X]$.

La ecuación de eigenvalores λ es

$$\lambda^2 + \left(4s^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \right) \lambda + 1 = 0. \quad (3.34)$$

Cuya resolución lleva al criterio de estabilidad

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_s}. \quad (3.35)$$

Este límite en Δt dice que la información no se debe esparcir en la malla a una velocidad mayor que la velocidad característica del problema definido. Este requerimiento es conocido como la condición *Courant-Friederichs-Lewy* o CFL, y es el límite más comunmente encontrado en las simulaciones hidrodinámicas[69],[68]. La interpretación geométrica de esta condición nos dice que el dominio de dependencia numérico debe ser más grande que el dominio de dependencia físico. Si este no fuera el caso, sería imposible que la solución numérica converja a la solución exacta, debido a que conforme la malla se haga más fina, siempre habrá información física relevante que se quedará fuera del dominio de dependencia numérico[37].

La estabilidad y convergencia se encuentran relacionadas mediante el Teorema de Lax [70], [37],[67],

Teorema 1 *Un esquema consistente de diferenciación de dos niveles para un problema de valores iniciales bien planteado es convergente si y sólo si es estable.*

Por lo que mientras se tenga un esquema consistente, convergencia será sinónimo de estabilidad.

Ecuaciones hiperbólicas en dos dimensiones

Se considera la ecuación diferencial parcial

$$u_t + au_x + bu_y = 0. \quad (3.36)$$

La *velocidad de propagación* en la dirección x es a y en la dirección y es b . La solución en un punto dado (x, y) en el tiempo t dependerá de $u(x, y, 0) = f(x, y)$ en $(x_0, y_0) = (x - at, y - bt)$. Entonces el dominio de dependencia en un punto (x, y, t) será (x_0, y_0) . La solución de la ecuación (3.36) será constante a lo largo de estas curvas características.

Aproximando los valores de las derivadas en Diferencias Finitas, la ecuación (3.36) se puede escribir como

$$u_{j,k}^{n+1} = u_{j,k}^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{j,k}^n - u_{j-1,k}^n) - \frac{b\Delta t}{\Delta y} (u_{j,k}^n - u_{j,k-1}^n). \quad (3.37)$$

Se observa que este esquema de diferenciación es una aproximación de orden $\mathbf{O}(\Delta t) + \mathbf{O}(\Delta x) + \mathbf{O}(\Delta y)$.

Haciendo un análisis de estabilidad como en la sección (3.1.1) se obtiene que las condiciones de estabilidad para $R_x = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ y $R_y = \frac{b\Delta t}{\Delta y}$ son[67]

$$(1 - 2R_x)^2 \leq 1 \quad (3.38)$$

$$(1 - 2R_y)^2 \leq 1 \quad (3.39)$$

$$(1 - 2R_x - 2R_y)^2 \leq 1, \quad (3.40)$$

lo cual requiere que R_x y R_y satisfagan

$$0 \leq R_x \leq 1 \quad y \quad (3.41)$$

$$0 \leq R_y \leq 1. \quad (3.42)$$

Mientras que la tercer condición requiere que

$$0 \leq R_x + R_y \leq 1. \quad (3.43)$$

Por lo que el esquema de diferenciación de la ecuación (3.37) es precisa a primer orden en el tiempo y espacio, y *condicionalmente estable* si $0 \leq R_x + R_y \leq 1$ y $R_x, R_y \geq 0$; y por consecuencia *convergente*. De hecho, $0 \leq R_x \leq 1$ y $0 \leq R_y \leq 1$ es una condición necesaria de convergencia para este esquema de diferenciación. Por lo que se observa que la condición necesaria y suficientemente estable es más restrictiva que la condición CFL necesaria.

En el caso de la ecuación de Vlasov (ecuaciones (ecuación (2.111))) los coeficientes a y b son respectivamente

$$a = \frac{dp_r}{dt} \quad (3.44)$$

$$b = \frac{dr}{dt}. \quad (3.45)$$

Entonces la condición necesaria de convergencia es,

$$0 \leq \frac{dp_r}{dt} \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1 \quad (3.46)$$

$$0 \leq \frac{dr}{dt} \frac{\Delta t}{\Delta p_r} \leq 1. \quad (3.47)$$

3.1.2. Método Runge-Kutta

Los métodos que preservan fuertemente estabilidad (SSP por sus iniciales en inglés) están diseñados específicamente para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que vienen de discretizaciones espaciales de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) dependientes del tiempo, específicamente ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas[71], [72], [73].

En el caso unidimensional una ley de conservación hiperbólica viene dada por

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (3.48)$$

donde u es una función de x y t , y los subíndices indican derivadas parciales. Las EDPs hiperbólicas tienen ciertas dificultades para métodos numéricos debido a que sus soluciones contienen típicamente discontinuidades. Entonces se trata de encontrar una aproximación numérica que discretice la derivada espacial en la EDP, dando como resultado un esquema semi-discreto, es decir, una EDO en la variable temporal t ,

$$u_t = F(u). \quad (3.49)$$

Se quisiera discretizar la sistema de EDO (3.49). A veces se puede mantener la estabilidad teniendo un esquema totalmente discreto

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t F(u^n), \quad (3.50)$$

que es la aproximación de Euler de primer orden hacia adelante de la ecuación (3.49). El problema con este esquema es que es sólo preciso a primer orden en el tiempo. Para problemas hiperbólicos, el requerimiento de estabilidad lineal conlleva

usualmente a un cociente restringido entre el paso de tiempo Δt y el paso espacial Δx . Esto resulta en una precisión global de primer orden en el esquema (3.50), por lo que es mejor incrementar el orden de precisión en el tiempo mientras se mantienen las propiedades de estabilidad.

Los métodos SSP de Runge-Kutta fueron primero estudiados para poder garantizar que discretizaciones que son de total disminución variacional (TVD por sus iniciales en inglés) y de total variación limitada (TVB por sus iniciales en inglés), cuando se acoplan con el método de Euler, todavía produzcan soluciones TVD y TVB cuando se acoplan con métodos de Runge-Kutta de órdenes mayores.

El método de Runge-Kutta explícito puede ser escrito como

$$u^{(i)} = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^m a_{ij} F(u^{(j)}) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.51)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \sum_{j=1}^m b_j F(u^{(j)}), \quad (3.52)$$

o de la forma

$$u^{(0)} = u^n \quad (3.53)$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} (\alpha_{ij} u^{(j)} + \Delta t \beta_{ij} F(u^{(j)})) \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.54)$$

$$u^{n+1} = u^{(m)}, \quad (3.55)$$

donde por consistencia se pide que $\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{ij} = 1$. Esta forma es llamada de Shu-Osher, y es conveniente porque si todos los coeficientes α_{ij} y β_{ij} son no-negativos, se puede hacer una manipulación para combinar pasos hacia adelante de Euler con un paso de tiempo modificado. Esta observación motiva el siguiente teorema [71]:

Teorema 2 *Si el método de Euler hacia adelante aplicado a $u_t = F(u)$ es fuertemente estable bajo la restricción del paso de tiempo $\Delta t \leq \Delta t_{FE}$, donde Δt_{FE} es el paso de tiempo de Euler tal que,*

$$|u + \Delta t F(u)| \leq |u| \quad \text{para } 0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{FE}, \quad \text{para toda } u, \quad (3.56)$$

y si $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \geq 0$, entonces la solución obtenida por el método de Runge-Kutta (3.53) satisface estabilidad fuerte,

$$|u^{n+1}| \leq |u^n| \quad (3.57)$$

bajo la restricción de tiempo

$$\Delta t \leq \mathbf{C}(\alpha, \beta) \Delta t_{FE}, \quad (3.58)$$

donde $\mathbf{C}(\alpha, \beta) = \min_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{\beta_{ij}}$.

En la literatura \mathbf{C} es conocida como la condición CFL, sin embargo en este caso no es precisamente lo mismo. Como se vio en la sección anterior, la condición CFL es una relación entre el paso de tiempo y el tamaño de la malla espacial, mientras que en este caso, el llamado *coeficiente SSP* describe un cociente de el paso de tiempo que preserva fuerte estabilidad y el paso de tiempo fuertemente estable del método de Euler hacia adelante.

Se define un *coeficiente efectivo SSP* como $\mathbf{C}_{eff} = \frac{\mathbf{C}}{m}$, donde m es el número de evaluaciones requeridas de la función por paso de tiempo, típicamente m es igual al número de etapas. Por ejemplo para, el método SSP de Runge-Kutta de segundo orden de dos etapas, *SSPRK(2, 2)*, el coeficiente efectivo SSP es $\mathbf{C}_{eff} = \frac{1}{2}$.

Entonces las propiedades favorables del método SSPRK se derivan de los argumentos de convexidad. En particular, si el método de Euler hacia adelante es fuertemente estable con cierto coeficiente CFL, entonces métodos SSPRK de órdenes mayores con un coeficiente CFL modificado pueden ser construidos como combinaciones convexas (ecuación (3.58)) de los pasos hacia adelante de Euler con varios tamaños de pasos[73],[74].

Método de cuarto orden

Se comienza escribiendo la cuarta etapa del método de Runge-Kutta de cuarto orden de la siguiente forma

$$u^{(1)} = u^n + c_{10}F(u^n) \tag{3.59}$$

$$u^{(2)} = u^n + c_{20}\Delta tF(u^n) + c_{21}\Delta tF(u^{(1)}) \tag{3.60}$$

$$u^{(3)} = u^n + c_{30}\Delta tF(u^n) + c_{31}\Delta tF(u^{(1)}) + c_{32}\Delta tF(u^{(2)}) \tag{3.61}$$

$$u^{n+1} = u^n + c_{40}\Delta tF(u^n) + c_{41}\Delta tF(u^{(1)}) + c_{42}\Delta tF(u^{(2)}) \tag{3.62}$$

$$+ c_{43}\Delta tF(u^{(3)}), \tag{3.63}$$

donde hay una relación entre los coeficientes c_{ij} y α_{ij} y β_{ij} en la forma Shu-Osher (3.53):

$$c_{10} = \beta_{10} \quad (3.64)$$

$$c_{20} = \beta_{20} + \alpha_{21}\beta_{10} \quad (3.65)$$

$$c_{21} = \beta_{21} \quad (3.66)$$

$$c_{30} = \alpha_{32}\alpha_{21}\beta_{10} + \alpha_{31}\beta_{10} + \alpha_{32}\beta_{20} + \beta_{30} \quad (3.67)$$

$$c_{31} = \alpha_{32}\beta_{21} + \beta_{31} \quad (3.68)$$

$$c_{32} = \beta_{32} \quad (3.69)$$

$$c_{40} = \alpha_{43}\alpha_{32}\alpha_{21}\beta_{10} + \alpha_{43}\alpha_{32}\beta_{20} + \alpha_{43}\alpha_{31}\beta_{10} + \alpha_{42}\alpha_{21}\beta_{10} \quad (3.70)$$

$$+ \alpha_{41}\beta_{10} + \alpha_{42}\beta_{20} + \alpha_{43}\beta_{30} + \beta_{40} \quad (3.71)$$

$$c_{41} = \alpha_{43}\alpha_{32}\beta_{21} + \alpha_{42}\beta_{21} + \alpha_{43}\beta_{31} + \beta_{41} \quad (3.72)$$

$$c_{42} = \alpha_{43}\beta_{32} + \beta_{42} \quad (3.73)$$

$$c_{43} = \beta_{43}. \quad (3.74)$$

Esta relación hace ver que si todos los coeficientes α_{ij} y β_{ij} son no-negativos, entonces los coeficientes c_{ij} también serán no negativos. Resolviendo las condiciones de orden hasta cuarto orden se encuentra que los coeficientes deben satisfacer una familia de dos parámetros, o uno de los tres casos especiales de una familia con un parámetro [71].

Teorema 3 *Si se requiere que $\beta_{ij} \geq 0$, cualquier método Runge-Kutta SSP de cuarto orden con cuatro etapas no se tendrá $\mathbf{C} > 0$.*

Sin embargo se pueden obtener métodos SSP de cuarto orden con cinco etapas *SSPRK*(5, 4) que son óptimos, cuya deducción se puede encontrar en [75],[76].

$$u^{(1)} = u^n + 0.391752226571890\Delta t F(u^n) \quad (3.75)$$

$$u^{(2)} = 0.444370493651235u^n + 0.555629506348765u^{(1)} \quad (3.76)$$

$$+ 0.368410593050371\Delta t F(u^{(1)}) \quad (3.77)$$

$$u^{(3)} = 0.620101851488403u^n + 0.379898148511597u^{(2)} \quad (3.78)$$

$$+ 0.251891774271694\Delta t F(u^{(2)}) \quad (3.79)$$

$$u^{(4)} = 0.178079954393132u^n + 0.821920045606868u^{(3)} \quad (3.80)$$

$$+ 0.544974750228521\Delta t F(u^{(3)}) \quad (3.81)$$

$$u^{n+1} = 0.517231671970585u^{(2)} + 0.096059710526147u^{(3)} \quad (3.82)$$

$$+ 0.06369246866629\Delta t F(u^{(3)}) + 0.386708617503269u^{(4)} \quad (3.83)$$

$$+ 0.226007483236906\Delta t F(u^{(4)}). \quad (3.84)$$

Este método tiene un coeficiente SSP $C = 1.508$, y coeficiente efectivo SSP $C = 0.302$. Se encontró numéricamente que este método es óptimo, y es por ello que se utiliza en el código utilizado en esta tesis para resolver la ecuación de Vlasov.

3.2. Estructura del código

Se realizaron dos códigos para resolver la ecuación de Vlasov en el caso de caída libre en un potencial gravitatorio para el caso no-relativista (1.16), y el caso relativista usando una métrica de Schwarzschild (2.116). A continuación se muestra la estructura general que se maneja en ambos códigos elaborados con el lenguaje de programación Fortran.

Inicialización

- Condiciones iniciales y definición de parámetros.
- Definir límites de la malla.
- Definir tamaño de paso de r y p_r .
- Definir la malla.
- Definir $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dp_r}{dt}$.
- Asignar memoria a los arreglos de la malla.
- Llamar a la malla.
- Cálculo de la constante de normalización.
- Definición de la f inicial.

Evolución temporal

- Inicio del ciclo de tiempo.
 - Llamar a subrutina con $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dp_r}{dt}$.
 - Llamar a subrutina Diferencias Finitas.
 - Llamar a subrutina Runge-Kutta de cuarto orden.
 - Cálculo de densidad.
 - Escribir datos en archivos.dat
- Fin del ciclo de tiempo.

En las siguientes subsecciones se muestra una explicación breve acerca de las partes que conforman al código. Se llegan a mostrar algunas subrutinas del código, evitando así poner todo el código y poder abordar los puntos clave de manera simple. Estas partes de código corresponderán al código utilizado para analizar la ecuación de Vlasov relativista, sin embargo se harán comentarios acerca de la diferencia con el caso no-relativista.

3.2.1. Inicialización

En la primer parte del código se definen los valores de las masas, número de partículas y parámetros involucrados según el tipo de función de distribución inicial elegida:

$$f_1 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r} - \frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p}}, \quad (3.85)$$

ó

$$f_2 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r}} e^{-\frac{p^0 c}{2\sigma_p}}, \quad (3.86)$$

donde C es la constante de normalización, r_0 la posición inicial de la función de distribución, p_0 el valor del momento radial inicial, σ_r es el ancho RMS (Root Mean Square) de la gaussiana correspondiente a la coordenada r , σ_p es el ancho RMS de la gaussiana correspondiente a la coordenada p_r y p^0 es la componente temporal del 4-momento correspondiente a la energía de las partículas involucradas.

Después se define el valor del paso utilizado para la coordenada r , Δr , la coordenada p_r , Δp , y el paso de tiempo Δt haciendo uso de la condición de convergencia CFL, (3.46), mencionada en la sección de métodos numéricos y diferencias finitas. También se definen los límites en los contadores que ayudarán a definir la malla: N_r para la coordenada r , y N_{pmin} y N_{pmax} para la coordenada p_r .

Una vez definidos los parámetros anteriores es posible definir la coordenada r y la coordenada p_r , o sea, queda definida la malla, lo cual se realiza en una subrutina para mayor facilidad.

```
subroutine Malla
!Variable r
      do i = 1,N_r
            r(i) = r_S + i*dr
      end do
!Variable p
```

```

do j = N_p_min, N_p_max
    p(j) = j*dp
end do

end subroutine Malla

```

Donde se nota que para el caso no-relativista la coordenada r empieza desde el origen hasta un valor definido, mientras que en el caso relativista ésta queda definida a partir del horizonte, es decir, a partir del radio de Schwarzschild r_S .

Con las coordenadas definidas como arreglos es posible definir a los términos de la ecuación de Vlasov $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dp_r}{dt}$ en una subrutina llamada *Coefficientes*. Estos términos difieren si es el caso no-relativista o el relativista según (1.16) y (2.116) respectivamente.

Con la subrutina *Malla* es posible también llamar a la subrutina *Normalización*, que como su nombre lo indica, calcula la constante de normalización. En ésta se incluyen los dos tipos de funciones de distribución usadas como condiciones iniciales. De esta manera, el usuario tiene la posibilidad de elegir entre cualquiera de las dos al inicio del programa.

El cálculo de la constante de normalización se hace integrando en toda la malla haciendo uso de las relaciones (1.2) y (1.40). A esta constante en el código se le llama *cnorm* y, una vez obtenida, es posible definir la función de distribución inicial en la subrutina llamada *Distribucion*.

```

subroutine Distribution

if (trim(adjustl(tipo_f)).eq.'Gauss') then

    do i = 1, N_r
        do j = N_p_min, N_p_max

            f(i,j) = cnorm*exp( - ((r(i) - r_inicial)**2)/(2*(r_ancha**2)) )*&
                    exp( - ((p(j) - p_inicial)**2)/(2*(p_ancha**2)) )

        end do
    end do

else if (trim(adjustl(tipo_f)).eq.'Juttner') then

    do i = 1, N_r
        do j = N_p_min, N_p_max

            f(i,j) = cnorm*exp( - ((r(i) - r_inicial)**2)/(2*(r_ancha**2)) )*&
                    exp(-(p0(i,j)*c)/(2.0*Temp))

        end do
    end do

```

```

        end do
else
        write(*,*) 'Error, funcion no especificada'
end if

end subroutine Distribucion

```

En este caso *Gauss* corresponde a f_1 y *Juttner* corresponde a f_2 como ya se han definido anteriormente.

3.2.2. Evolución temporal

Esta parte del código utiliza los métodos numéricos mencionados en la sección (3.1). Es la parte fundamental del código, es decir, la evolución temporal de la función de distribución. Aquí s representa el contador del tiempo, y se define a it_{max} como el número máximo de iteraciones que hará el código. Así mismo, como no es necesario escribir en archivos todas las iteraciones, se pone un condicional para que se escriban los archivos cada cierta iteración, *skip*. La variable *cont* es un contador para nombrar a los archivos obtenidos según la iteración de tiempo.

Antes de empezar con la evolución temporal se abren todos los archivos necesarios y, como es de esperarse, la subrutina encargada de escribir todos los datos en el formato deseado durante la evolución se llama *EscribirArchivos*. Al finalizar la evolución se cierran todos los archivos. Esta parte no es de relevancia por lo que no se mostrará la parte del código correspondiente.

La evolución temporal se muestra a continuación:

```

cont = 1
t = dt
it_max = 38000
skip = 1000

do s = 1, it_max

    call RK4
    call Densidad

    if ((mod(cont, skip) == 0).or.(s==1)) then

        call EscribirArchivos

    end if

    cont = cont + 1
    t = t+dt

```

```

        if(s.eq.(0.2*it_max)) then
            write(*,*) '20%...'
        else if(s.eq.(0.4*it_max)) then
            write(*,*) '40%...'
        else if(s.eq.(0.6*it_max)) then
            write(*,*) '60%...'
        else if (s.eq.(0.8*it_max)) then
            write(*,*) '80%...'
        end if

        if (s.eq.it_max) then

            write(*,*) 'El tiempo final es'
            write(*,*) t

        end if

    end do
end do

```

De este modo, a cada iteración se llama a la subrutina *RK4*, que es donde se calcula el siguiente paso de tiempo de la función de distribución elegida según el método Runge-Kutta de cuarto orden de cinco etapas, es decir, se hace uso de la ecuación (3.75) como se explicó en la sección 3.1.2. Así mismo, dentro de esta rutina se necesita del método de diferencias finitas, por lo que dentro de *RK4* se llama a la subrutina *DiferenciasFinitas*, que es donde se calculan las derivadas espaciales de la función de distribución. Al final de la subrutina *DiferenciasFinitas* se incluye la condición de convergencia a cada paso de tiempo, esto es, se definen las condiciones necesarias y suficientes mencionadas en la subsección (3.1.1) en cada paso, indicando al programa que imprima en pantalla si es que en algún momento no se cumplen estas condiciones. Con el siguiente paso de tiempo de la función de distribución es posible llamar a la subrutina *Densidad*, cuyo cometido es integrar a la función de distribución en el espacio de momentos y así poder obtener la evolución temporal de la densidad N^0 o ρ según sea el caso.

```

subroutine Densidad

    densidad_0(1:N_r) = 0.0

    do i = 1,N_r
        do j = N_p_min,N_p_max

            factor1 = (1.0)/((r(i)**2)*p0(i,j))

            velocidad_0 = p0(i,j)
            f_test1 = f(i,j)

            densidad_0(i) = densidad_0(i) + factor1*velocidad_0*f_test1*dp

```

```
        end do
    end do

return

end subroutine Densidad
```

Hay que notar que para el caso relativista se utiliza la componente cero de la relación (1.41) y haciendo uso del elemento de volumen con momentos covariantes. En el caso no-relativista se hace lo análogo a lo definido en la sección de Teoría cinética no-relativista, es decir, se integra a la función de distribución con el elemento de volumen de momentos correspondiente.

Al final de la evolución temporal se agrega un condicional para que se muestre al usuario el avance que lleva el programa.

Capítulo 4

Resultados

4.1. Caso no-relativista

En esta sección se muestran los resultados obtenidos haciendo uso de la ecuación no-relativista de Vlasov con un potencial central, es decir, la ecuación (1.16).

En este caso se trabajó la función de distribución inicial gaussiana en la coordenada r y gaussiana en la coordenada p como se definió en la sección 1.3.3,

$$f_1 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r} - \frac{(p-p_0)^2}{2\sigma_p}}, \quad (4.1)$$

donde C es la constante de normalización que se obtiene al integrar sobre todo el espacio-fase (en este caso se refiere a la malla establecida en el código), r_0 la posición radial inicial en la que se encuentra centrada la función de distribución f_1 , σ_r es el ancho RMS (Root Mean Square) de la gaussiana correspondiente a la coordenada r , p_0 es el momento radial inicial en el cual se encuentra centrada f_1 y σ_p es el ancho RMS de la gaussiana correspondiente a la coordenada p .

En este caso se mantuvieron fijos los parámetros en el código que se indican en la Tabla 4.1,

$m = 1$	$M = 300$	$particulas = 10^6$	$\sigma_p = 2$	$\Delta r = 75$
$c = 1$	$G = 1$	$\sigma_r = 150$	$\Delta p = 0.4$	$\Delta t = 0.05$

Se muestran a continuación cuatro casos, en los primeros tres se varía el momento inicial radial p_0 , es decir, aquel momento en el que se centra la función de distribución inicial e integrando sobre un elemento de volumen con momentos conjugados (el cual se denotará por facilidad como d^3p_* , análogo al caso relativista). El cuarto caso considera un momento inicial radial igual al caso 2 pero integrando sobre un elemento de volumen según la ecuación (1.77).

Caso	Elemento de volumen	p_0
1	d^3p_*	0.35
2	d^3p_*	0.0
3	d^3p_*	-0.35
4	d^3p	0.0

4.1.1. Caso 1

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_0 = -0.35$ y $r_0 = 6000$. Recordando que la constante de normalización se obtiene mediante la ayuda de la relación (1.2) y el número de partículas que se quieran considerar, entonces se obtiene $C = 0.702434888241$. Por lo que la función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura (4.1).

La evolución temporal de esta función de distribución se obtiene mediante la solución

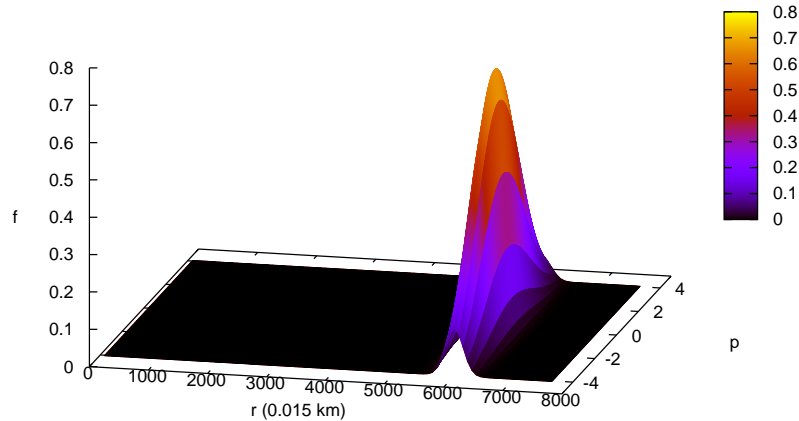


Figura 4.1: Función de distribución inicial f_1 para Caso 1

de la ecuación de Vlasov. En la Figura 4.2 se muestra esta evolución en donde cada gráfica corresponde a una iteración de tiempo distinta (s), y por lo tanto, a un tiempo distinto. Se seleccionan ciertas iteraciones representativas para poder mostrar un comportamiento general y evitar graficar todos los tiempos. En este caso el tiempo total en el programa fue de 1150.05.

Dada la función de distribución inicial se puede calcular la densidad del número de

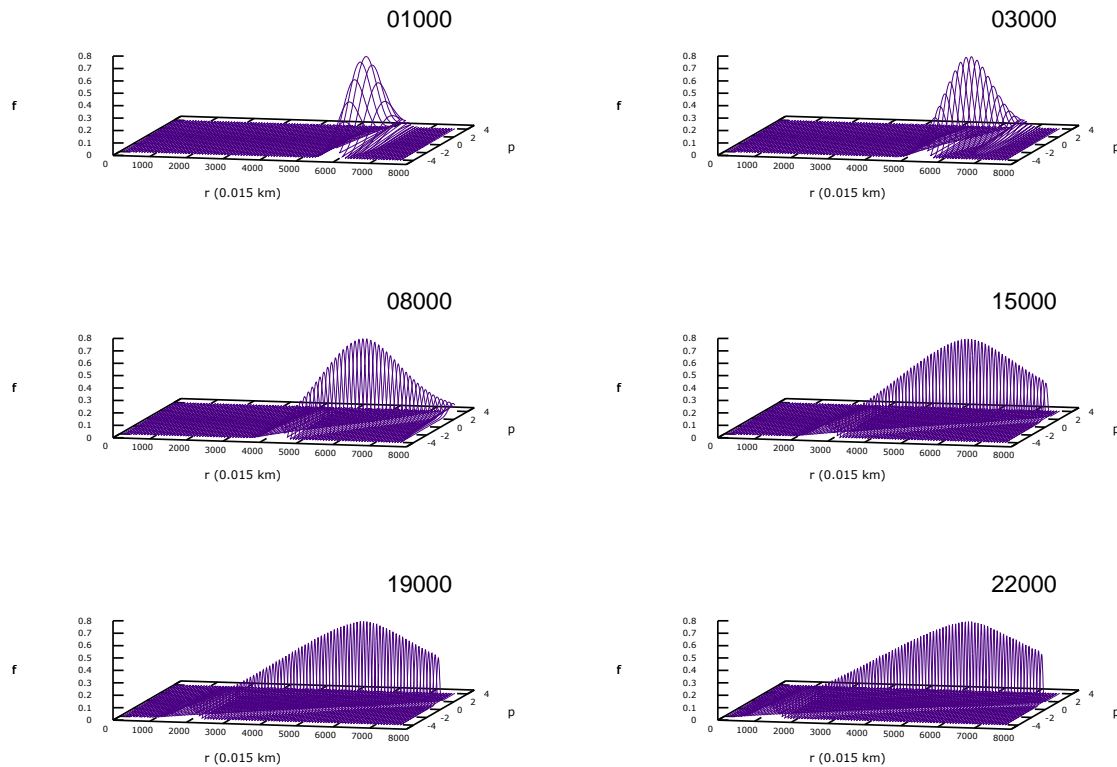


Figura 4.2: Evolución temporal de f_1 para Caso 1

partículas inicial ρ en función de r , Figura 4.3.

La evolución temporal de esta densidad va de la mano con la evolución temporal de la función de distribución, resultando así lo mostrado en la Figura 4.4; en donde cada curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.2.

En la Figura 4.4 se puede observar que la densidad va incrementando cuando el tiempo aumenta. Esto se puede apreciar de mejor forma en la Figura 4.5, donde se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

4.1.2. Caso 2

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_0 = 0.0$ y $r_0 = 6000$. Donde se obtuvo una constante de normalización, $C = 0.7116763795$ Por lo que la

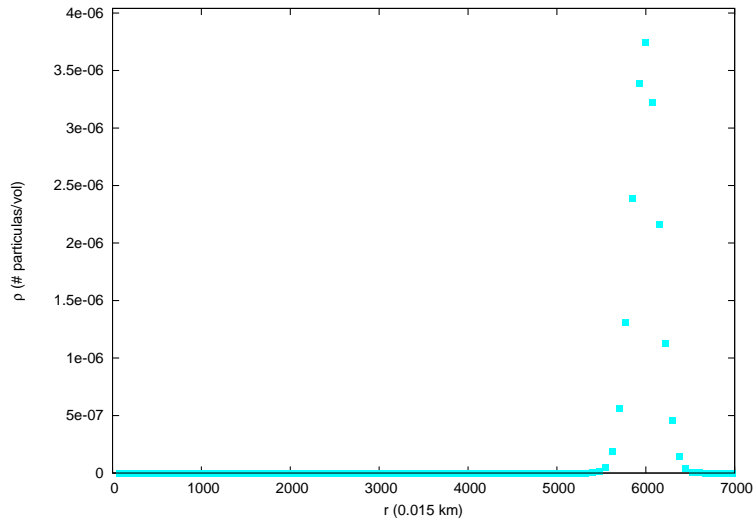


Figura 4.3: $\rho vs r$. Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 1.

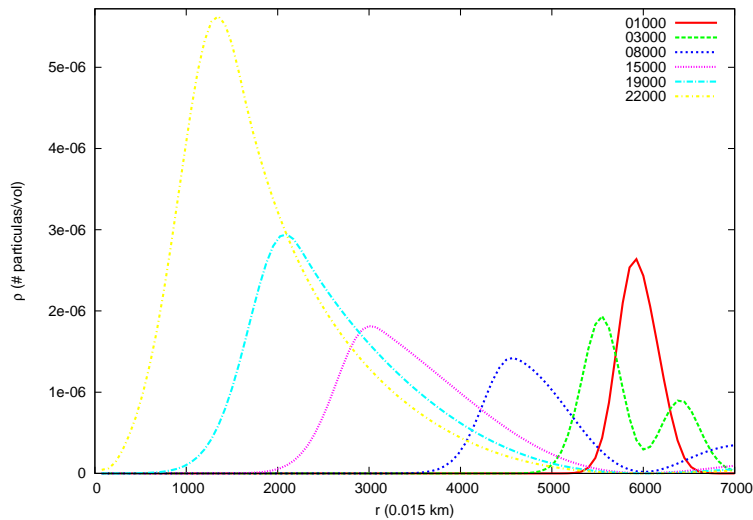


Figura 4.4: $\rho vs r$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 1.

función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura (4.6).

En la Figura 4.7 se muestra la evolución temporal en donde cada gráfica corresponde de nuevo a un tiempo distinto. En este caso el tiempo total en el programa fue de 1150.05 también,

La densidad del número de partículas inicial ρ en función de r , se puede ver en la

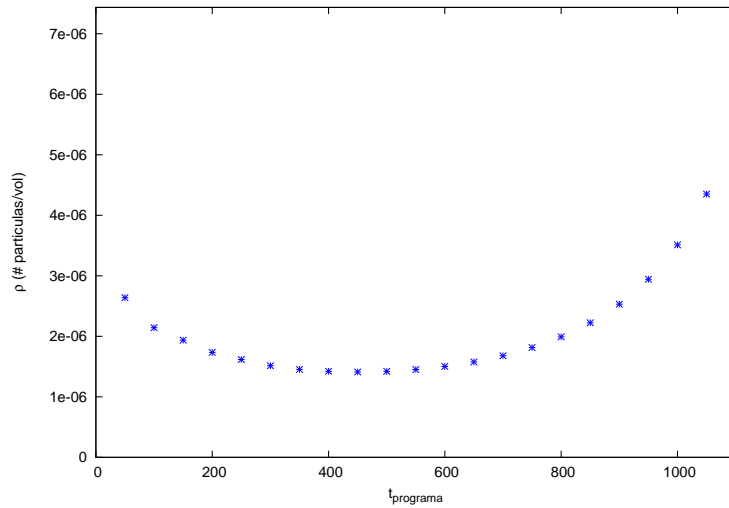


Figura 4.5: ρ_{max} vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 1.

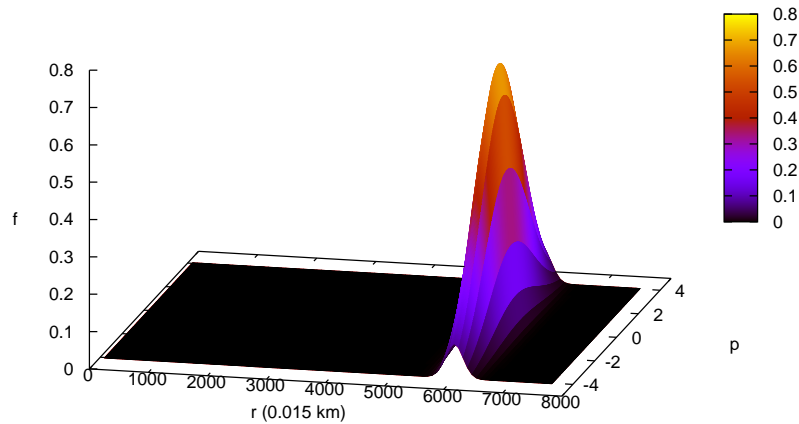


Figura 4.6: Función de distribución inicial f_1 para Caso 2.

Figura 4.8.

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura 4.9; en donde cada

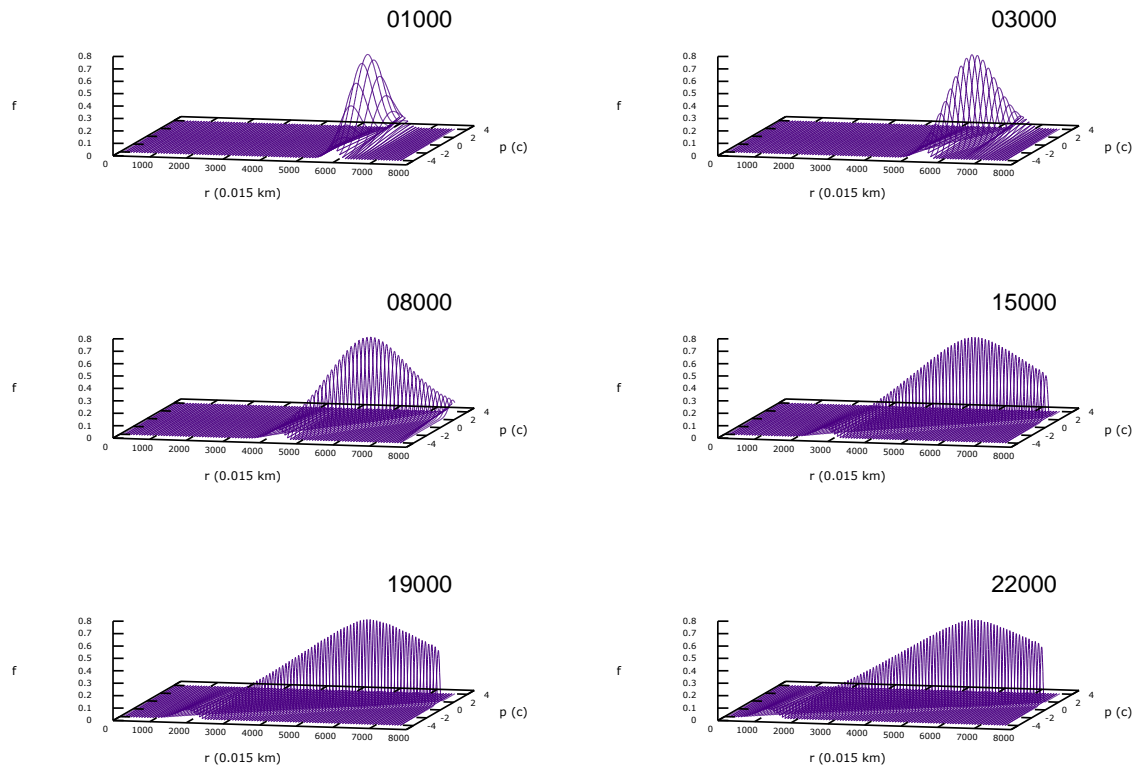


Figura 4.7: Evolución temporal de f_2 Caso 1

curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.7.

En la Figura 4.9 se puede observar cómo la densidad va incrementando cuando el tiempo aumenta también. En la Figura 4.10, se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

4.1.3. Caso 3

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_0 = 0.35$ y $r_0 = 6000$. Donde se obtuvo una constante de normalización $C = 0.70243488824$ La función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura (4.11).

En la Figura 4.12 se muestra esta función evolución en donde cada gráfica corresponde a un tiempo distinto. En este caso el tiempo total en el programa fue de 1150.05 también,

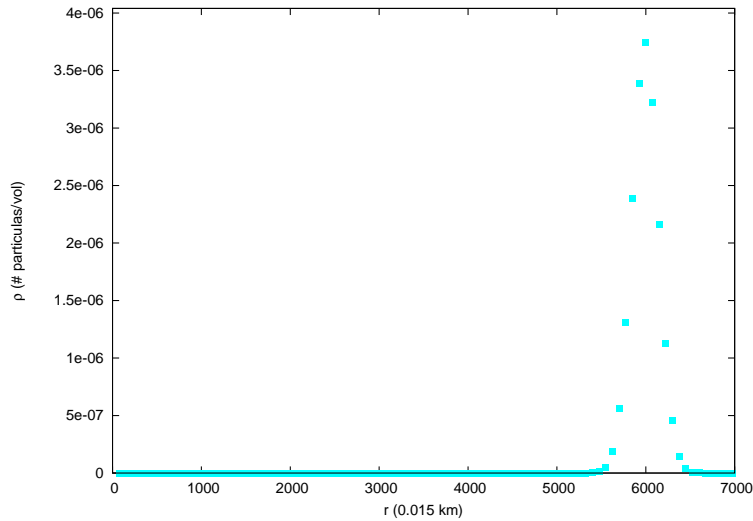


Figura 4.8: $\rho vs r$. Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 2.

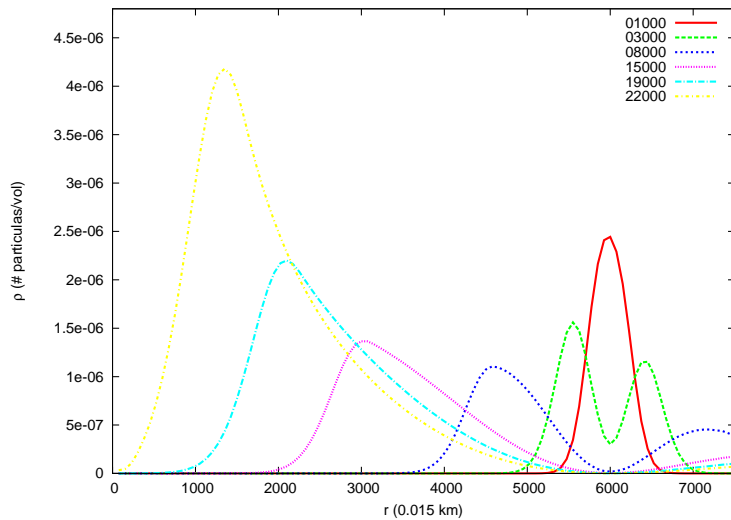


Figura 4.9: $\rho vs r$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 2.

La densidad del número de partículas inicial ρ en función de r , se puede ver en la Figura 4.13.

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura 4.14; en donde cada curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.12.

En la Figura 4.14 se observa también que la densidad va incrementando cuando el

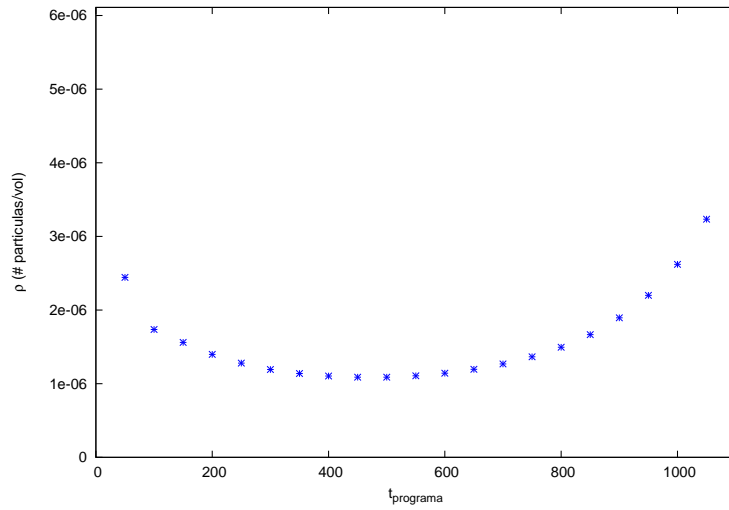


Figura 4.10: ρ_{max} vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 2.

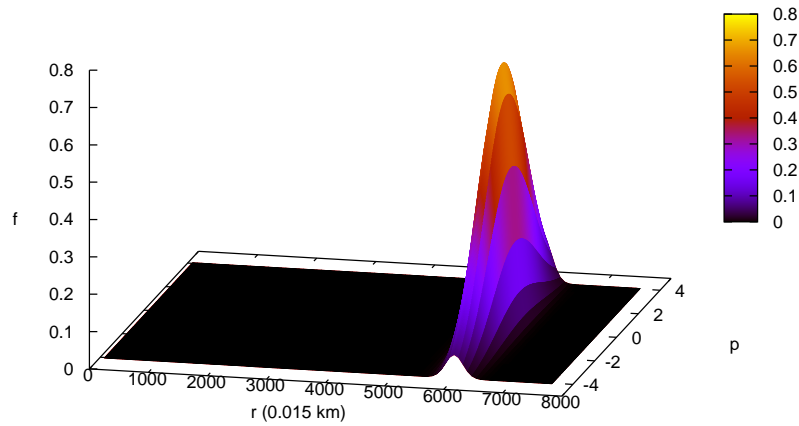


Figura 4.11: Función de distribución inicial f_1 para Caso 3

tiempo aumenta. En la Figura 4.15 se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

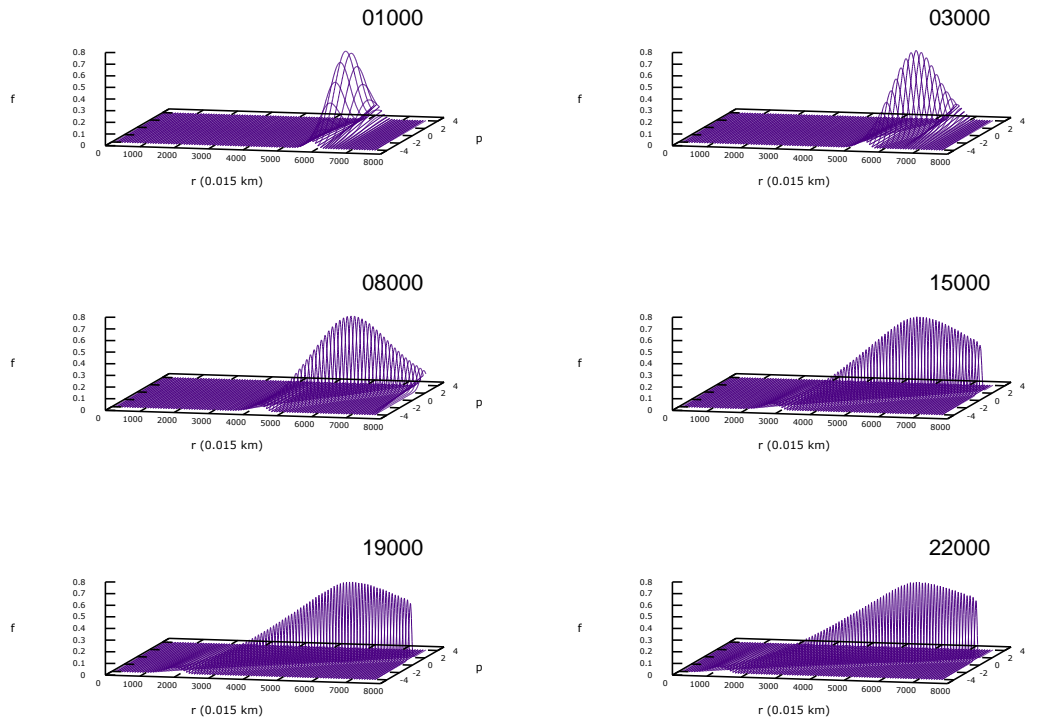


Figura 4.12: Evolución temporal de f_1 para Caso 3.

4.1.4. Caso 4

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_0 = 0.0$ y $r_0 = 6000$. Donde se obtuvo una constante de normalización $C = 0.70243488824$ La función de distribución inicial en este caso es idéntica a la mostrada en la Figura (4.1), por lo que no se considera necesario volverla a mostrar en esta subsección.

En la Figura 4.16 se muestra la evolución temporal de esta función en donde de nuevo cada gráfica corresponde a un tiempo distinto. En este caso el tiempo total en el programa fue de 2650.05 también,

La densidad del número de partículas inicial ρ en función de r , se puede ver en la Figura 4.17.

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura 4.18; en donde cada curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.16.

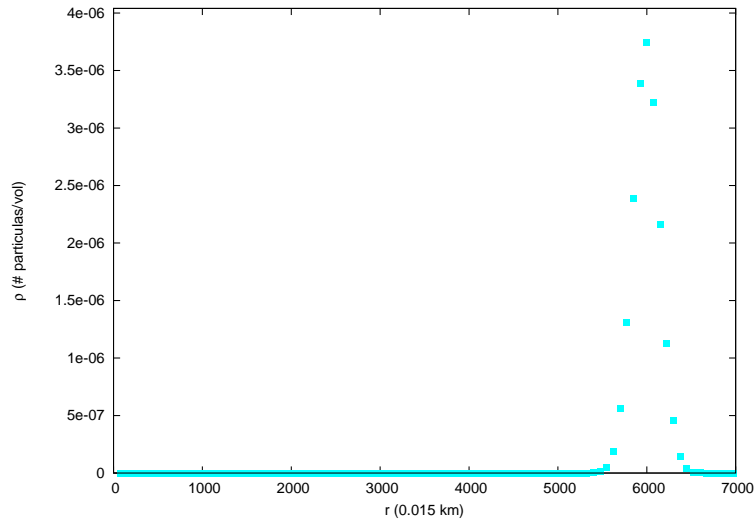


Figura 4.13: $\rho vs r$. Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 3.

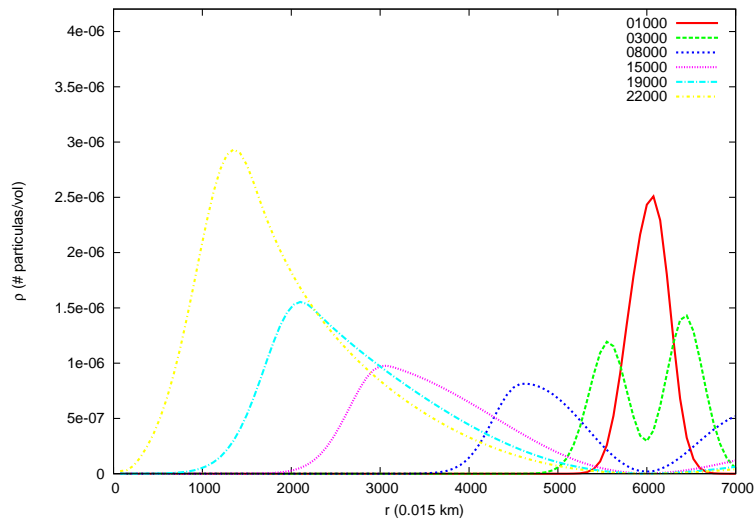


Figura 4.14: $\rho vs r$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 3.

En la Figura 4.18 se observa que la densidad sólo decrece cuando el tiempo aumenta, distinto que los tres casos anteriores. En la Figura 4.19 se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

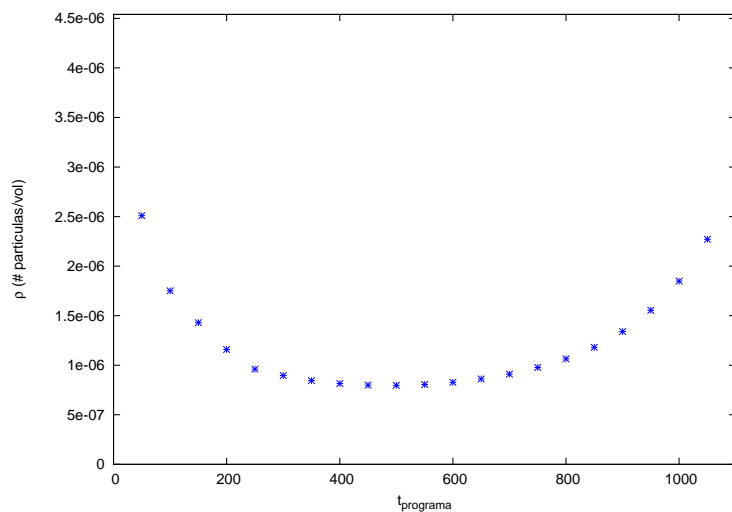


Figura 4.15: ρ_{max} vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 3.

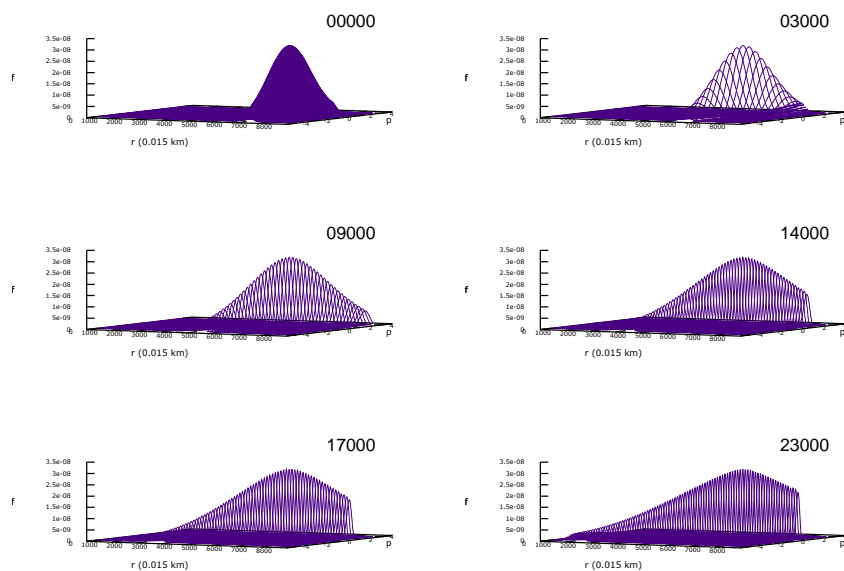


Figura 4.16: Evolución temporal de f_1 para Caso 4.

4.1.5. Convergencia

Una forma de ver si el código está realizando bien los cálculos es tomando tres distintos valores del paso de tiempo, Δt , el paso en la coordenada r , Δr y el paso en

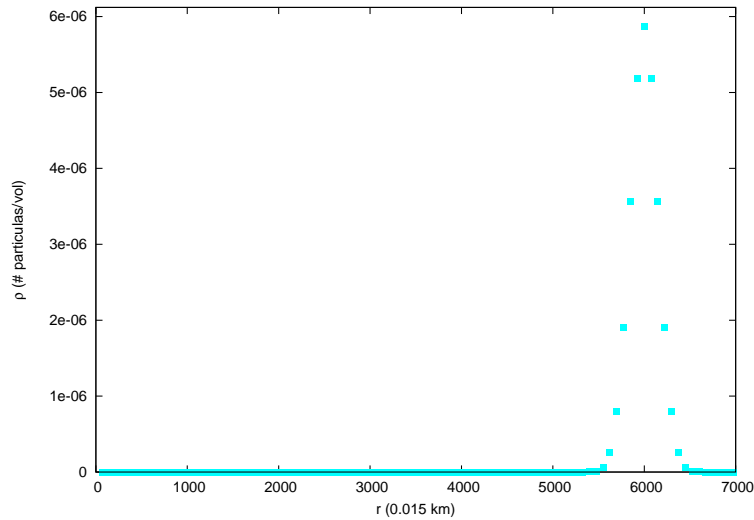


Figura 4.17: $\rho vs r$. Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 4.

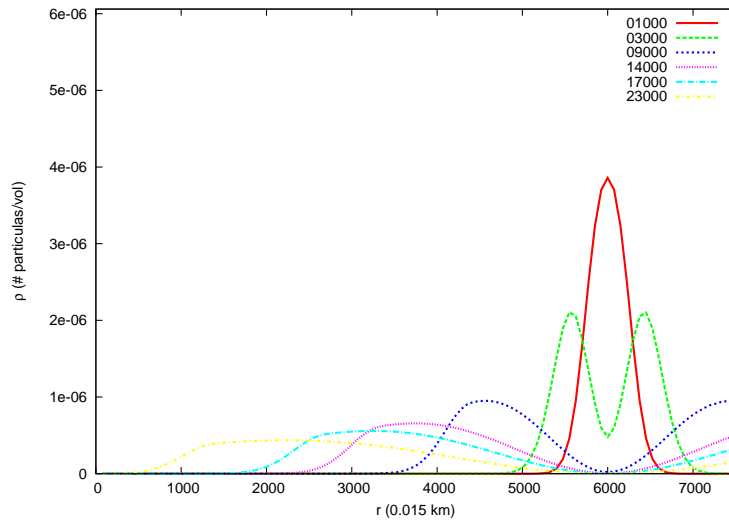


Figura 4.18: $\rho vs r$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 4.

la coordenada p_r , Δp_r . Es decir se toma Δr , $\frac{\Delta}{2}$ y $\frac{\Delta}{4}$, lo mismo se hace para el tiempo y la coordenada p_r . En la Figura 4.20 se muestra el último paso de la evolución de la densidad para condiciones iniciales $p_0 = 0.0$ y $r_0 = 6000$, en el caso del elemento de volumen d^3p_* .

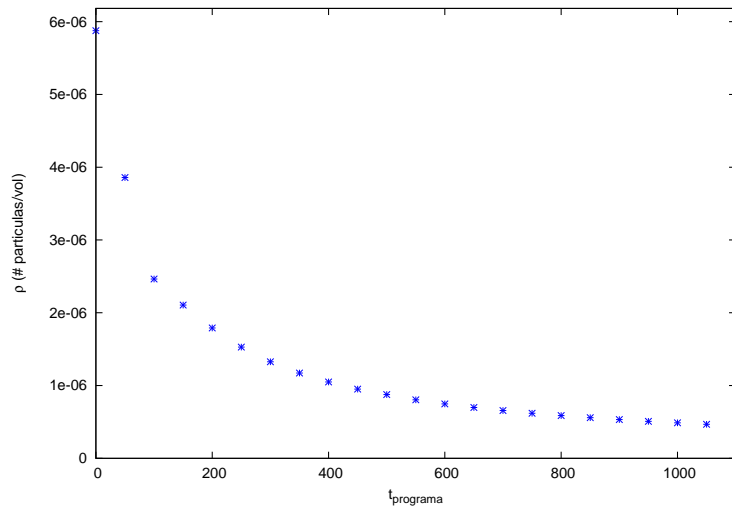


Figura 4.19: ρ_{max} vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 4.

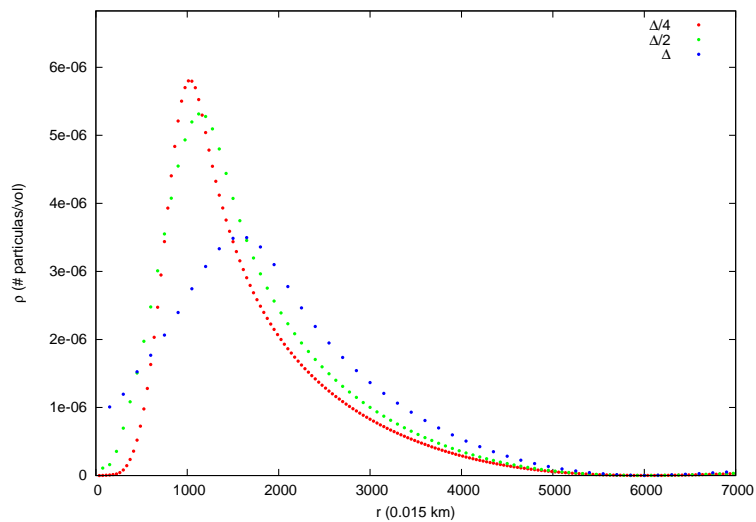


Figura 4.20: Prueba de convergencia para caso no-relativista.

4.2. Caso relativista

En esta sección se muestran los resultados obtenidos haciendo uso de la ecuación relativista de Vlasov con una métrica de Schwarzschild, (2.116). En la siguiente

tabla se resumen los casos que se manejarán en esta sección, los primeros tres se diferencian debido a su condición inicial en p_{r0} , y los otros dos casos se diferencian debido a σ_{p^0} ,

Caso	Tipo de f	Condición inicial
1	f_1	$p_{r0} = -0.1$
2	f_1	$p_{r0} = 0.0$
3	f_1	$p_{r0} = 0.1$
4	f_2	$\sigma_{p^0} = 0.1$
5	f_2	$\sigma_{p^0} = 0.05$

4.2.1. Función de distribución 1

En este caso se trabajó con la función de distribución inicial gaussiana en la coordenada r y gaussiana en la coordenada p_r ,

$$f_1 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r} - \frac{(p_r-p_{r0})^2}{2\sigma_{p_r}}}, \quad (4.2)$$

como el caso no-relativista.

En este caso se mantuvieron fijos en el código los parámetros mostrados en la Tabla [4.2.1](#),

$m = 1$	$M = 300$	$particulas = 10^6$	$\sigma_{p_r} = 0.2$	$\Delta r = 75$
$c = 1$	$G = 1$	$\sigma_r = 150$	$\Delta p = 0.0098$	$\Delta t = 0.5$

Caso 1

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_{r0} = -0.1$ y $r_0 = 6000$. Recordando que la constante de normalización se obtiene mediante la ayuda de la relación [\(1.40\)](#) y el número de partículas que se quieran considerar, entonces se obtiene $C = 1.8653971092080029 \times 10^{-5}$. Por lo que la función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura [\(4.21\)](#).

La evolución temporal de esta función de distribución se obtiene mediante la solución de la ecuación de Vlasov relativista. En la Figura [4.22](#) se muestra esta evolución en donde cada gráfica corresponde a un tiempo distinto. Se muestran algunas iteraciones representativas del comportamiento general. En este caso el tiempo total en el programa fue de 22000.5.

Dada la función de distribución inicial se puede calcular la densidad del número de partículas inicial N^0 en función de r , Figura [4.23](#).

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura [4.24](#), en donde cada

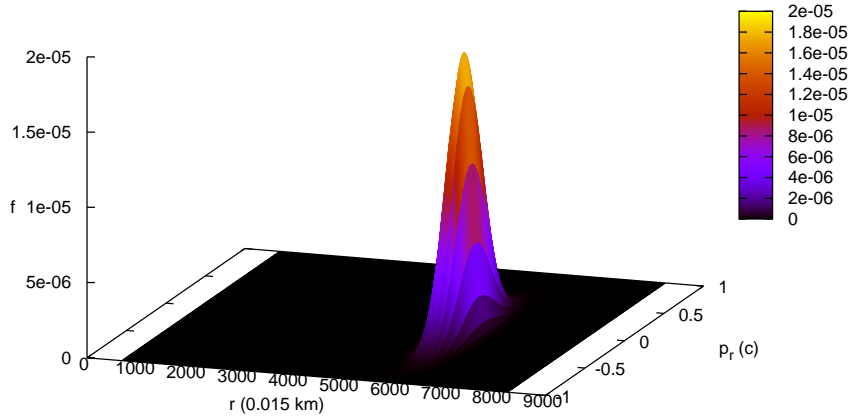


Figura 4.21: Función de distribución inicial f_1 para Caso 1.

curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.22.

En la Figura 4.24 se puede observar que la densidad va aumentando cuando el tiempo aumenta, es decir, conforme el pulso de densidad se dirige hacia el horizonte. Esto se puede observar en la Figura 4.25, donde se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

Caso 2

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_{r0} = 0.0$ y $r_0 = 6000$. La constante de normalización que se obtiene es $C = 2.3315936442791169 \times 10^{-5}$. Por lo que la función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura (4.26).

En la Figura 4.27 se muestra la evolución temporal de esta función de distribución. El tiempo total en el programa fue de 19000.5.

Dada la función de distribución inicial se calculó la densidad del número de partículas inicial N^0 en función de r , Figura 4.28.

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura 4.29, en donde cada curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.27.

En la Figura 4.29 se puede observar también que la densidad va aumentando cuando

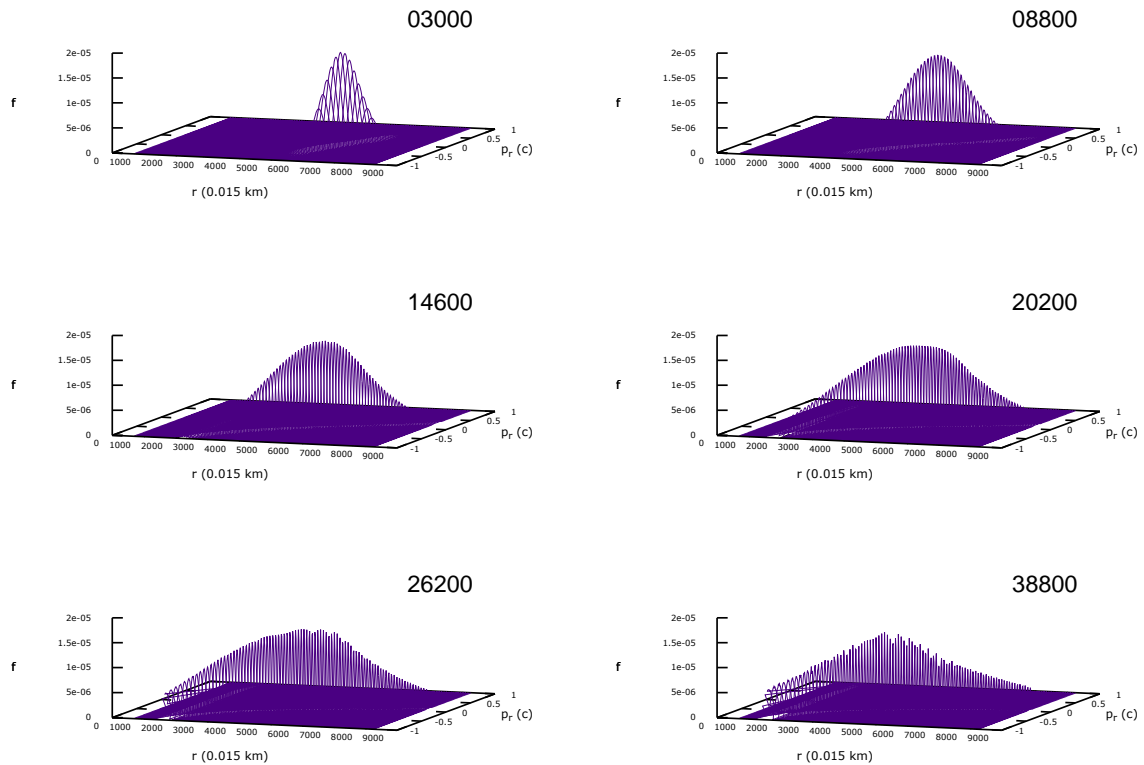


Figura 4.22: Evolución temporal de f_1 para Caso 1.

el tiempo aumenta. En la Figura 4.30 se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

Caso 3

En este caso se utilizaron los siguientes parámetros iniciales: $p_{r_0} = 0.1$ y $r_0 = 6000$. La constante de normalización que se obtiene es $C = 1.8653971092080049 \times 10^{-5}$. La función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura 4.31.

En la Figura 4.32 se muestra la evolución temporal de esta función de distribución. El tiempo total en el programa fue de 19000.5.

Se calculó la densidad del número de partículas inicial N^0 en función de r , Figura 4.33.

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura 4.34, en donde cada

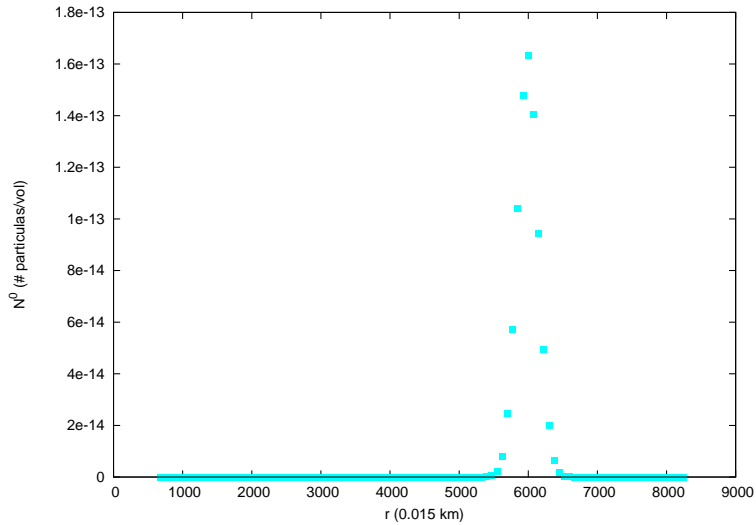


Figura 4.23: N^0 vs r . Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 1.

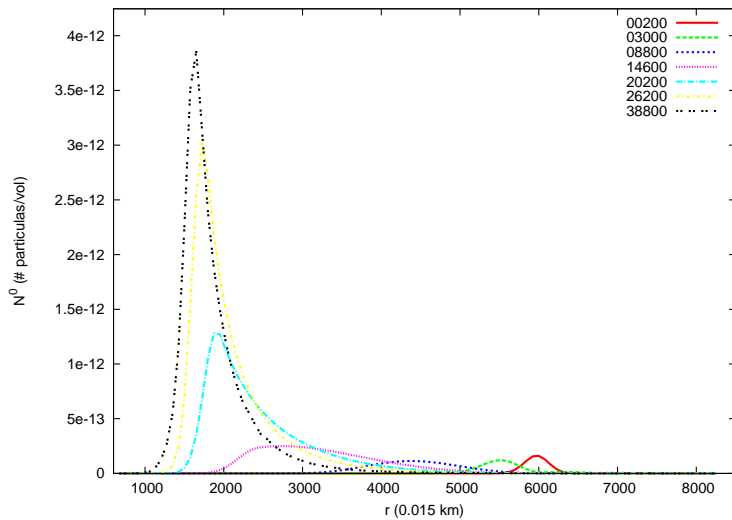


Figura 4.24: N^0 vs r . Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 1.

curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.32.

En la Figura 4.34 se puede observar de nuevo que la densidad va aumentando cuando el tiempo aumenta. En la Figura 4.35 se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

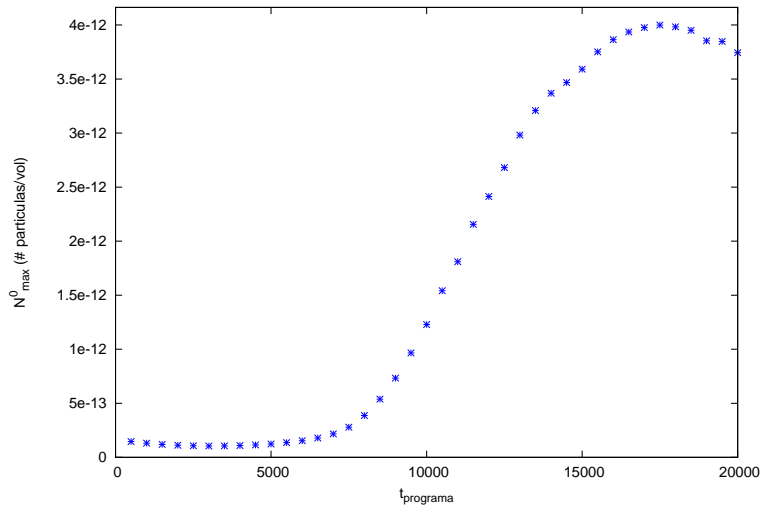


Figura 4.25: N_{max}^0 vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 1.

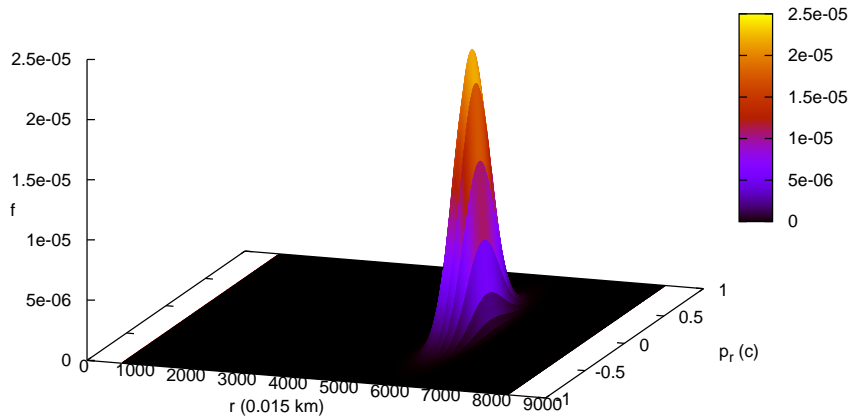


Figura 4.26: Función de distribución inicial f_1 para Caso 2.

4.2.2. Función de distribución 2

En este caso se trabajó con una función de distribución inicial gaussiana en la coordenada r y tipo Juttner en la coordenada p_r , es decir,

$$f_2 = C e^{-\frac{(r-r_0)^2}{2\sigma_r}} e^{-\frac{p_r^0}{2\sigma_{p^0}}}, \quad (4.3)$$

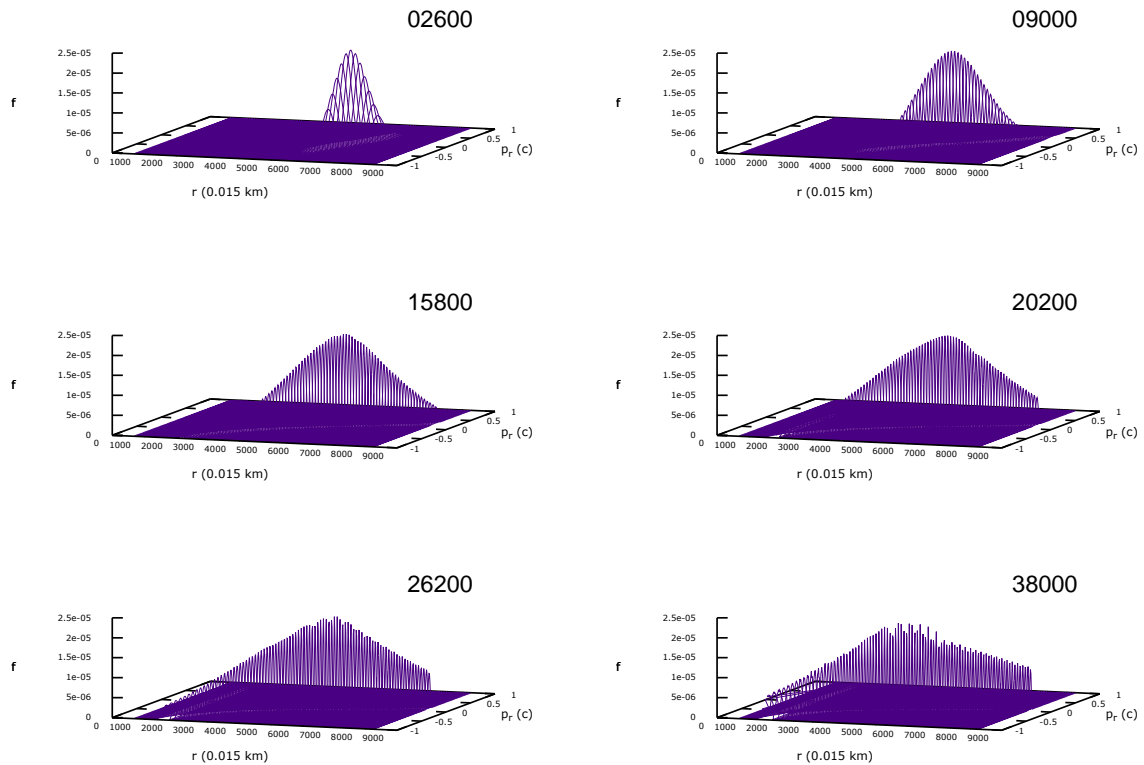


Figura 4.27: Evolución temporal de f_1 para Caso 2.

donde C es la constante de normalización que se obtiene al integrar sobre todo el espacio-fase, r_0 la posición radial inicial en la que se encuentra centrada la función de distribución f_2 , σ_r es el ancho RMS (Root Mean Square) de la gaussiana correspondiente a la coordenada r , p^0 viene dada por,

$$p^0 = \sqrt{\frac{m^2 c^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + p_r^2}, \quad (4.4)$$

y σ_{p^0} es una constante que sirve también como ancho de la parte de la función que depende de p_r . En este caso se mantuvieron fijos los mismos parámetros en el código según la tabla 4.2.1.

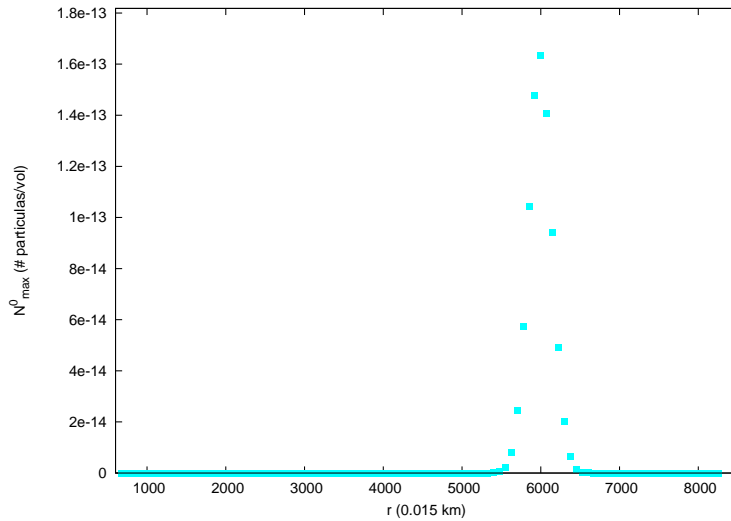


Figura 4.28: N^0 vs r . Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 2.

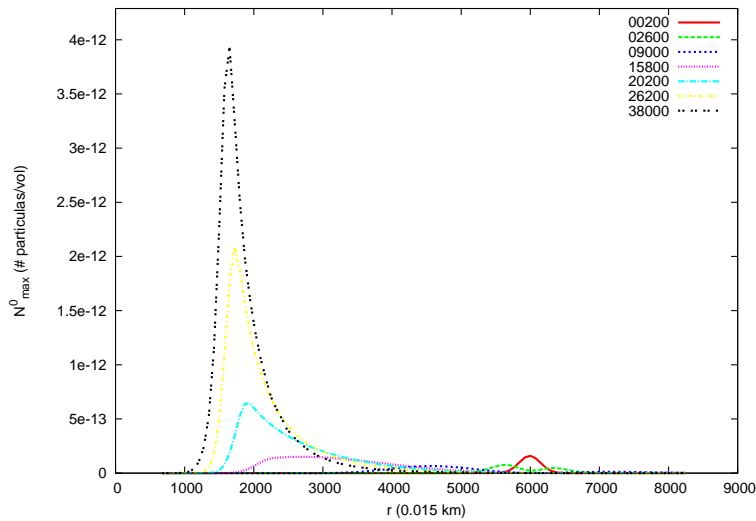


Figura 4.29: N^0 vs r . Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 2.

Caso 1

En este caso se utilizó como parámetro inicial: $r_0 = 6000$ y $\sigma_{p_0} = 0.1$. La constante de normalización que se obtiene es $C = 4.1760389579940753 \times 10^{-4}$. La función de distribución inicial se muestra en la Figura 4.36.

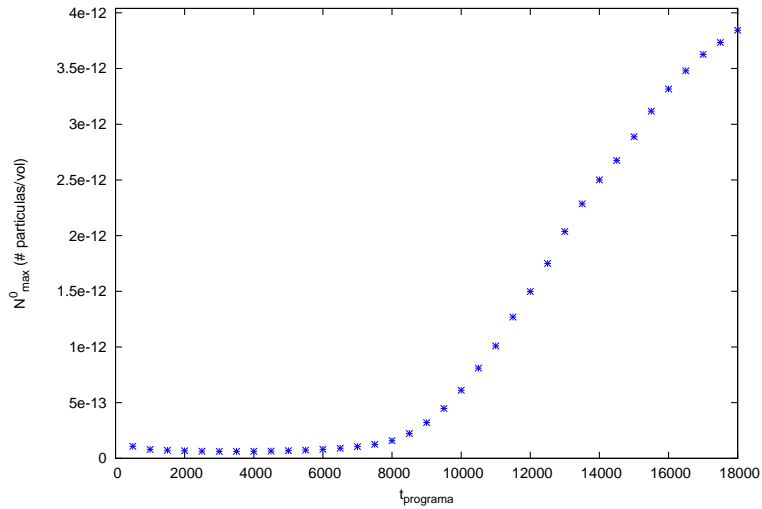


Figura 4.30: N_{max}^0 vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 2.

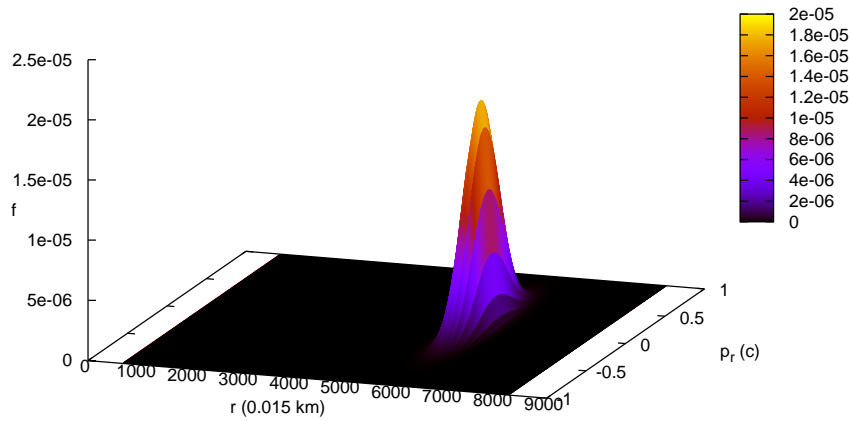


Figura 4.31: Función de distribución inicial f_1 para Caso 3.

La evolución temporal de esta función de distribución se grafica en la Figura 4.37. En este caso el tiempo total en el programa fue de 19000.5.

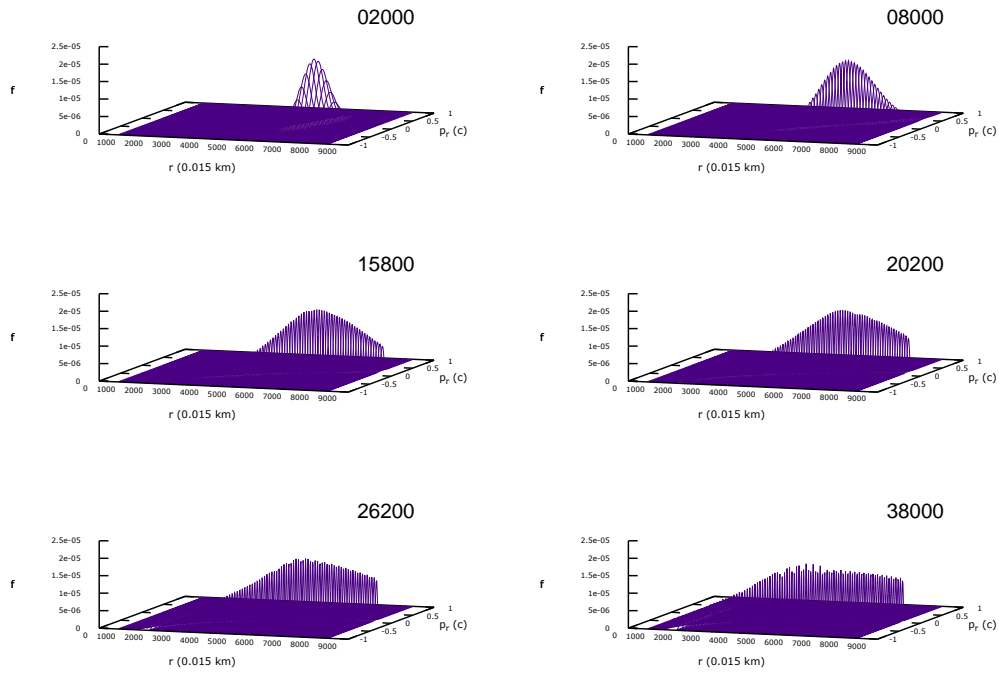


Figura 4.32: Evolución temporal de f_1 para Caso 3.

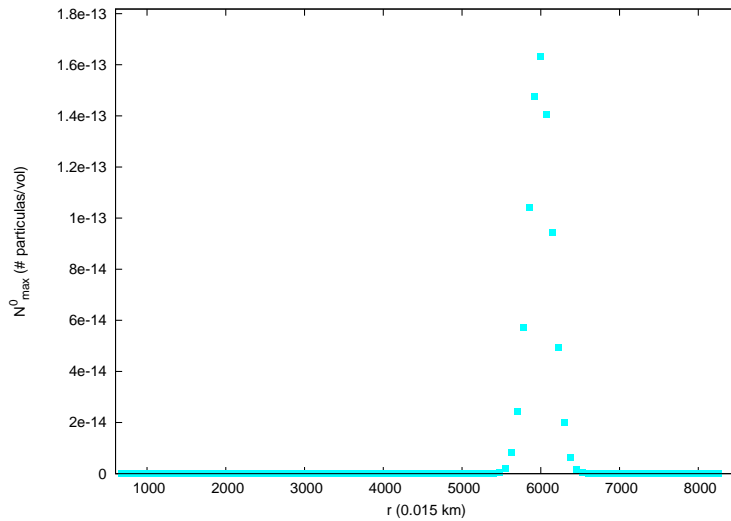


Figura 4.33: N^0 vs r . Densidad inicial del número de partículas para f_1 Caso 3.

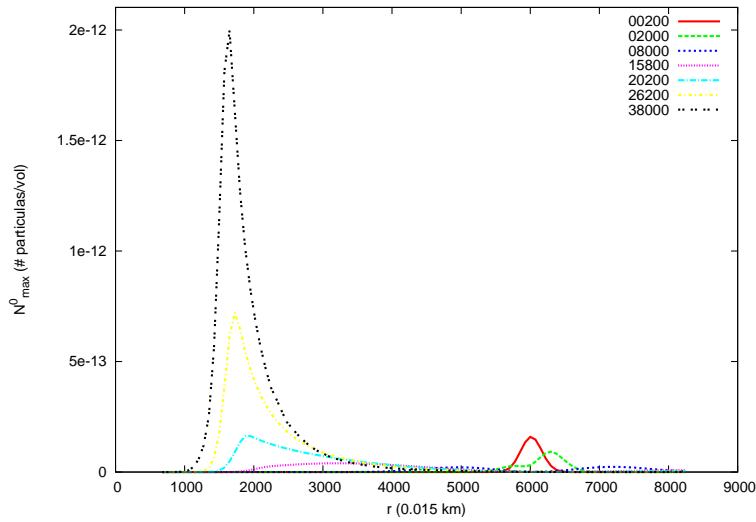


Figura 4.34: N^0 vs r . Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 3.

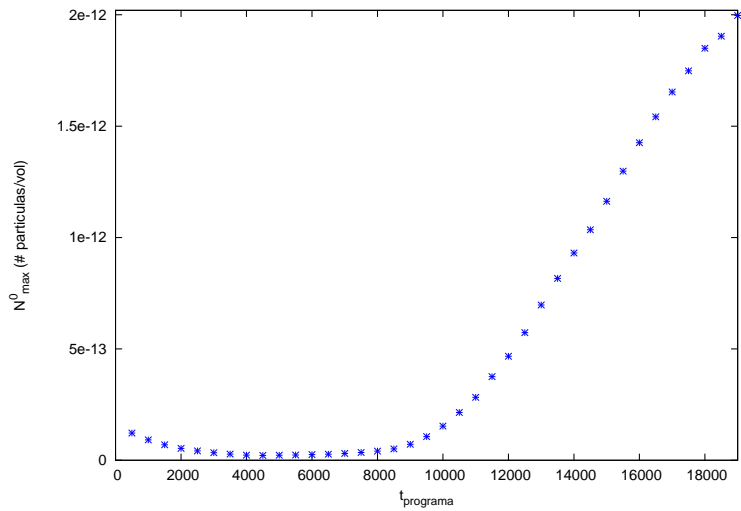


Figura 4.35: N^0_{max} vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_1 Caso 3.

La densidad del número de partículas inicial N^0 en función de r se muestra en la Figura 4.38.

La evolución temporal de esta densidad se puede observar en la Figura 4.39, en donde cada curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura

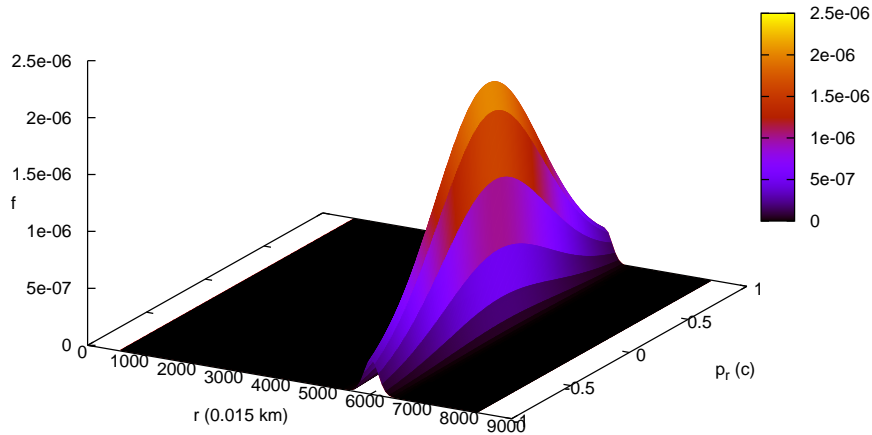


Figura 4.36: Función de distribución inicial f_2 para Caso 1.

4.37.

Se puede observar que la densidad va aumentando conforme el tiempo aumenta en la Figura 4.40, donde se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

Caso 2

En este caso se utilizó como parámetro inicial: $r_0 = 6000$ y $\sigma_{p^0} = 0.05$. La constante de normalización que se obtiene es $C = 0.18638549963839079$. La función de distribución inicial en este caso es la mostrada en la Figura 4.41.

En la Figura 4.42 se muestra la evolución temporal de la función de distribución. El tiempo total en el programa fue de 21000.5.

La densidad del número de partículas inicial N^0 en función de r se muestra en la Figura 4.43.

La evolución temporal de esta densidad se muestra en la Figura 4.44, en donde cada curva corresponde a la misma iteración o tiempo graficado en la Figura 4.42.

En la Figura 4.39 se puede observar también que la densidad va aumentando cuando el tiempo aumenta. Esto se aprecia en la Figura 4.45, donde se grafican los máximos de la función de densidad a cada tiempo.

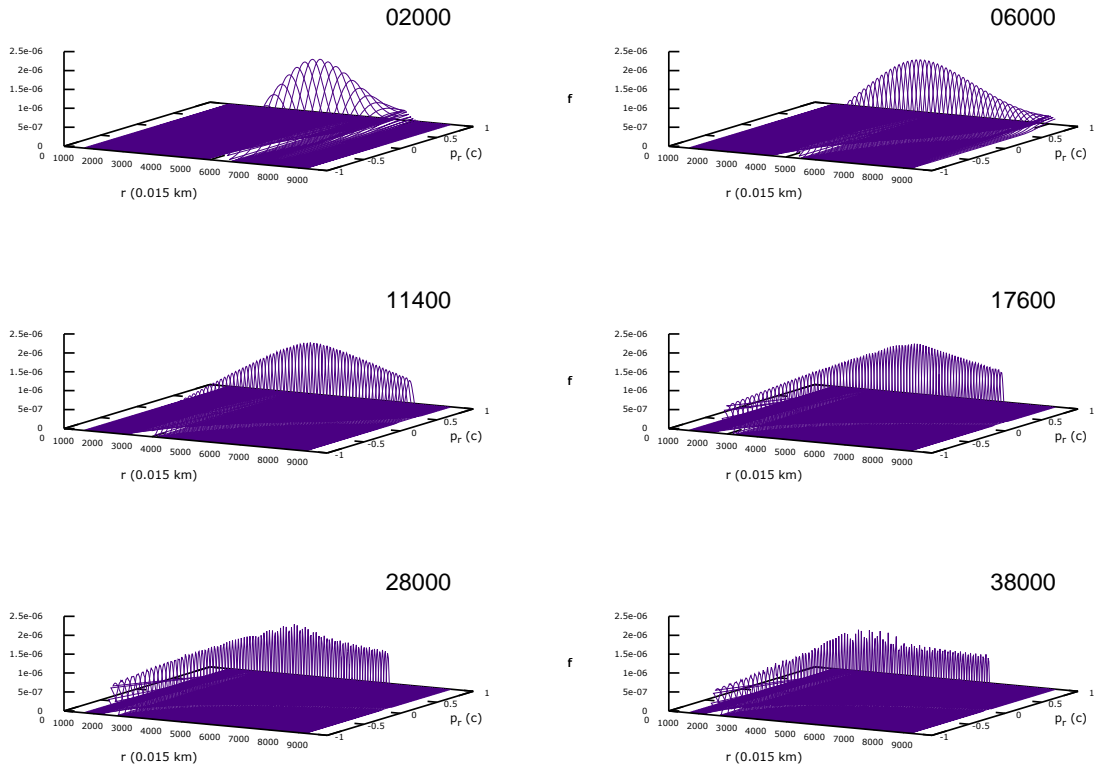


Figura 4.37: Evolución temporal de f_2 para Caso 1.

4.2.3. Convergencia

En este caso también se realiza una prueba de convergencia. Es decir se toma Δr , $\frac{\Delta r}{2}$ y $\frac{\Delta r}{4}$, y lo mismo se hace para el tiempo y la coordenada p_r . En la Figura 4.46 se muestra el último paso de la evolución de la densidad para condiciones iniciales $p_0 = 0.0$ y $r_0 = 6000$ con f_1 ,

4.3. Comparación de resultados

En esta sección se muestra como difieren los resultados de la sección no-relativista, la sección relativista, y por último, una comparación de ambas secciones.

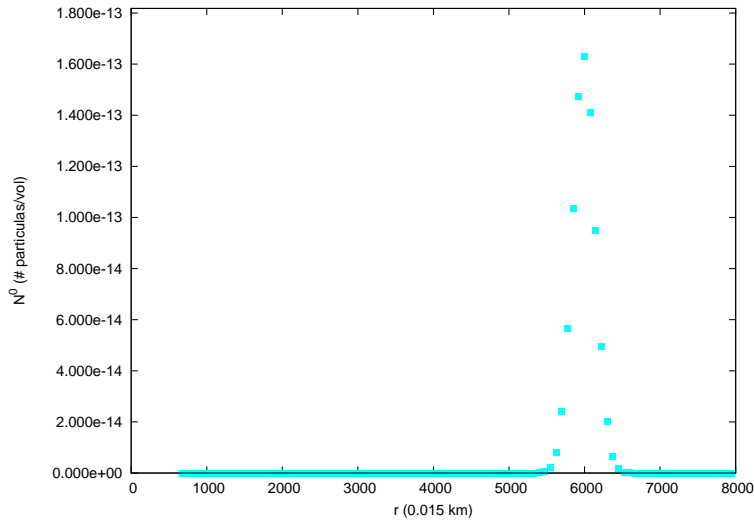


Figura 4.38: N^0 vs r . Densidad inicial del número de partículas para f_2 Caso 1.

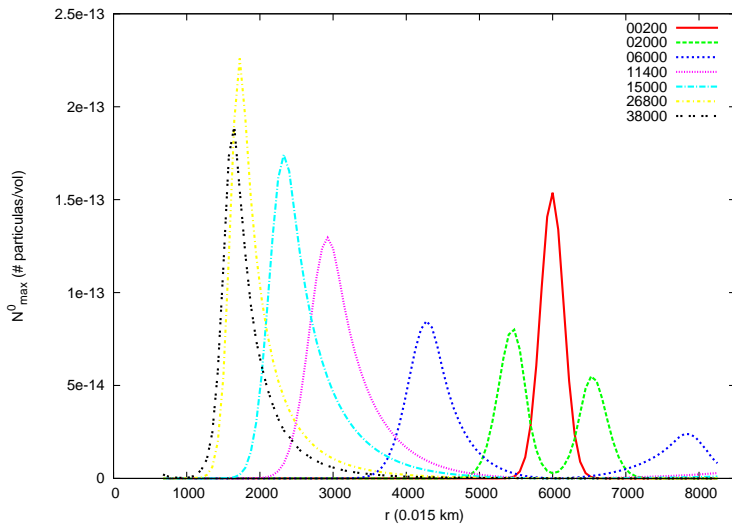


Figura 4.39: N^0 vs r . Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_2 Caso 1.

En el caso no-relativista, para la función f_1 se puede observar que el comportamiento de la densidad en el tiempo es casi igual para los 3 casos, Figura 4.47. La densidad comienza en un valor fijo y presenta un comportamiento decreciente en un inicio para finalmente crecer conforme el tiempo aumenta, lo que nos dice que la densidad es creciente conforme ésta se acerca al origen. Que en un inicio sea decreciente nos indica

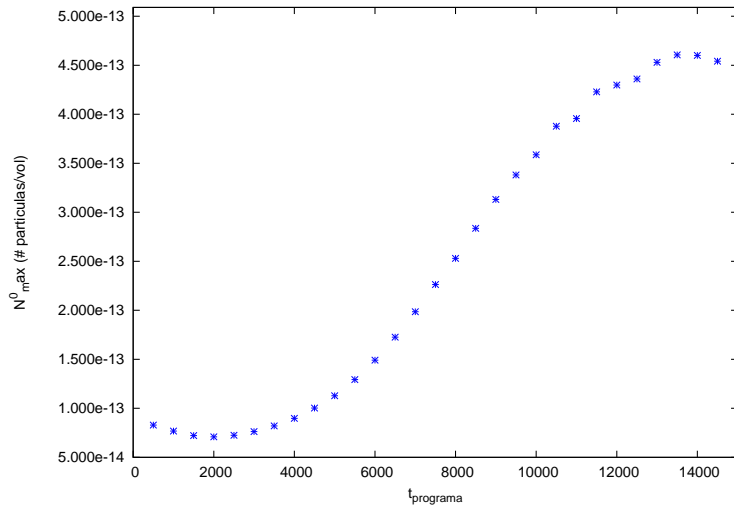


Figura 4.40: N_{max}^0 vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_2 Caso 1.

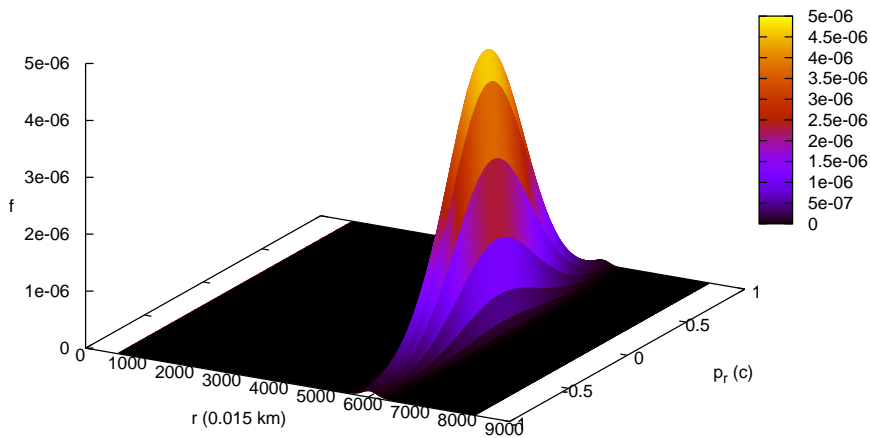


Figura 4.41: Función de distribución inicial f_2 para Caso 2.

que hay partículas con velocidades en todas las direcciones por lo que unas tienden a escapar y otras tienden a caer hacia el objeto masivo, la cantidad de partículas

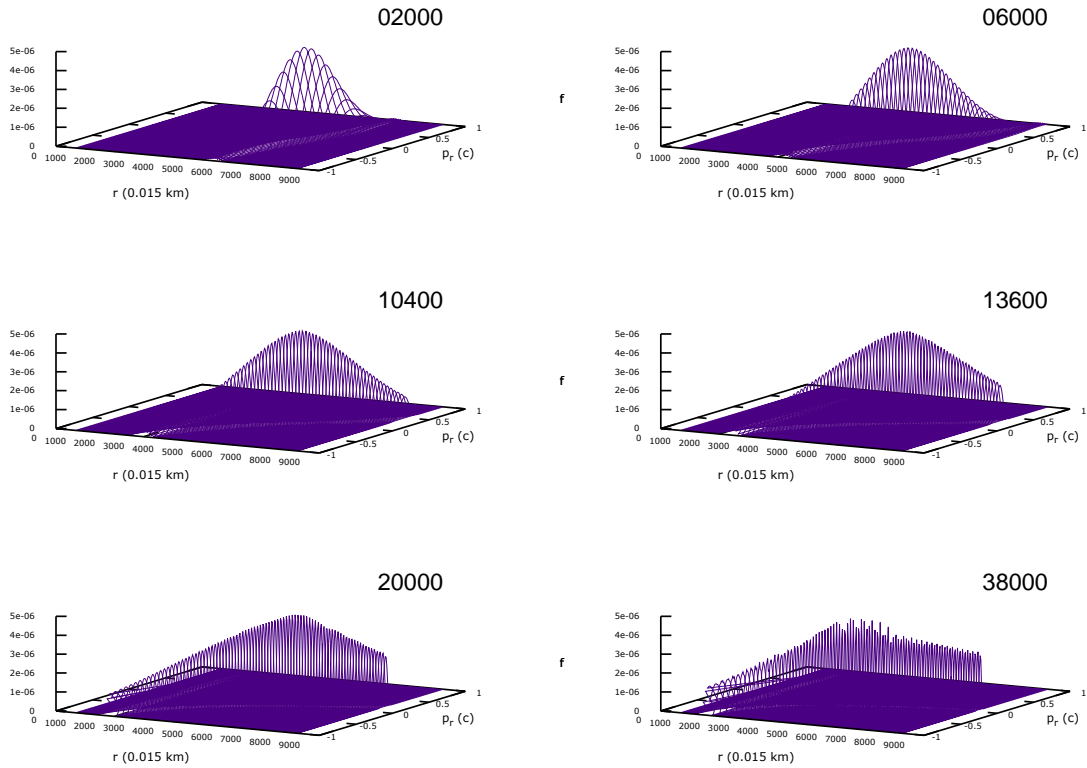


Figura 4.42: Evolución temporal de f_2 para Caso 2.

que vayan de un lado u otro depende de la condición inicial en el momento radial r . Cuando se empieza a observar un incremento en la densidad, éste se debe a que conforme las partículas estén más cerca del origen el volumen físico se ve reducido. La diferencia entre los 3 casos se puede observar en las gráficas $\rho vs r$, donde se observa que el pulso de densidad inicial, cuya forma es una función gaussiana, se divide en dos pulsos, uno que se dirige hacia al origen (izquierda), y otro que se aleja; para el dato inicial $p_0 = -0.35$ se observa que el pulso dirigido hacia la izquierda tiene mayor amplitud que el pulso dirigido hacia la derecha, para el dato inicial $p_0 = 0.0$ se observa que la amplitud de ambos pulsos es la misma, y finalmente, para el dato inicial $p_0 = 0.35$ se observa que el pulso dirigido hacia la derecha tiene una amplitud mayor. Es por ello que en la Figura 4.47 se observa que la amplitud del pulso dirigido hacia la izquierda en el tiempo final es mayor para $p_0 = -0.35$, menor para $p_0 = 0.0$ y mucho menor para $p_0 = 0.35$. Esto quiere decir que el hecho de centrar a la gaussiana en cierto momento radial inicial dada una amplitud de la gaussiana en la componente

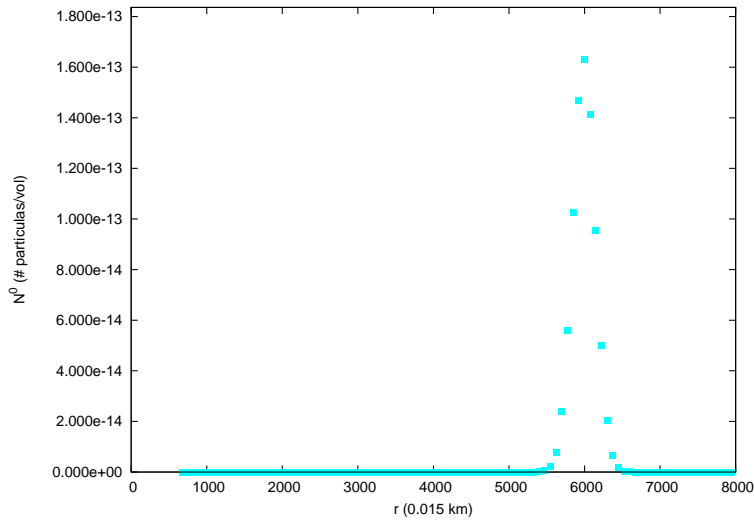


Figura 4.43: N^0 vs r . Densidad inicial del número de partículas para f_2 Caso 2.

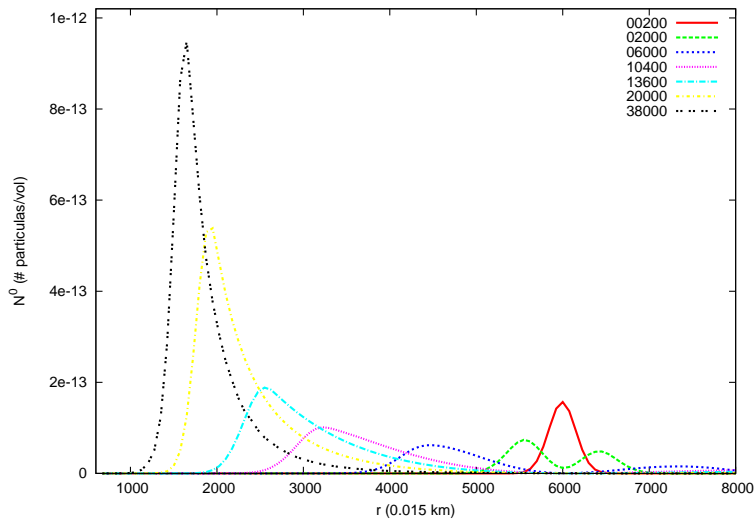


Figura 4.44: N^0 vs r . Evolución temporal de la densidad del número de partículas para f_2 Caso 2.

p_r , es decir σ_p , afecta al número de partículas que caen radialmente al objeto de masa M : si se centra en 0.0, entonces la mitad de las partículas caerán radialmente, mientras que la otra mitad alcanza una velocidad mayor a la de escape; mientras que si se centra en un valor distinto de cero más partículas tenderán a tener inicialmente ese valor del momento y, dependiendo del signo, habrán menos o más partículas que

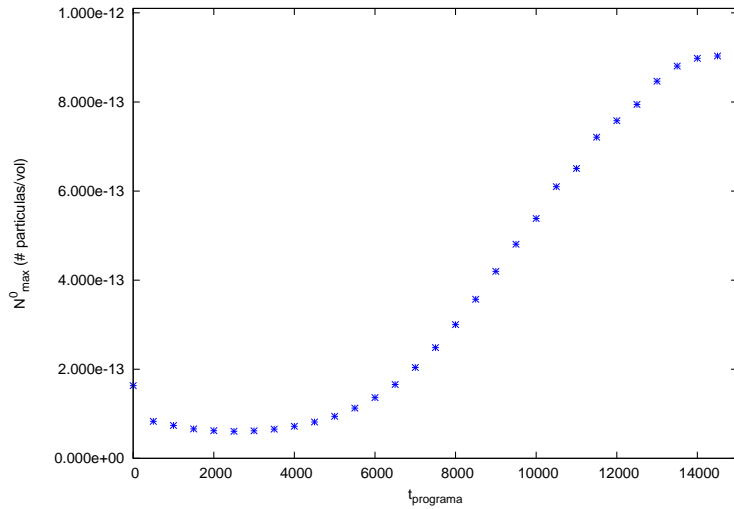


Figura 4.45: N^0_{max} vs t . Evolución temporal del máximo de la densidad del número de partículas para f_2 Caso 2.

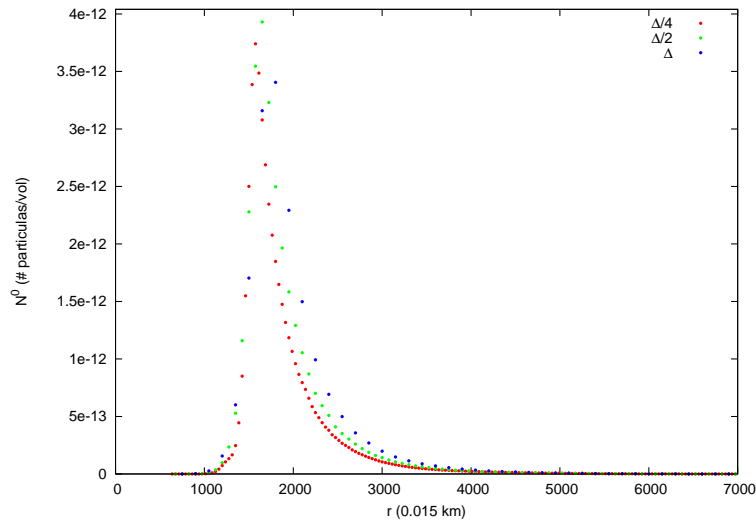


Figura 4.46: Prueba de convergencia para caso relativista.

alcancen la velocidad de escape. Y el efecto de ver que el pulso dirigido hacia la izquierda siempre aumente conforme se acerca al origen se debe, como ya se dijo, a que se va reduciendo el volumen físico.

En la Figura 4.48 se muestra la comparación de la evolución temporal de la densidad utilizando el elemento de volumen con momentos conjugados d^3p_* y el elemento de

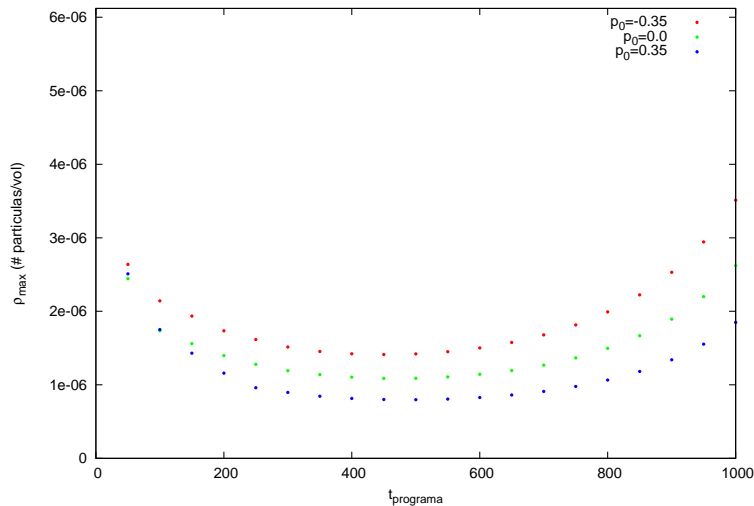


Figura 4.47: ρ_{max} vs $t_{programa}$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para los 3 casos no-relativistas con f_1 .

volumen d^3p , definido en la ecuación (1.77). Ambos casos utilizan como condiciones iniciales $p_0 = 0.0$ y $r = 6000$. Como se puede observar, cuando se utiliza el elemento de volumen d^3p se observa sólo un comportamiento decreciente, lo cual no coincide con el caso en el que se utilizan momentos conjugados, ya que este último comienza a crecer a partir del $t_{tiempo} = 400$. Esto nos indica que es muy importante definir desde un inicio con qué tipo de descripción se trabajará. En el caso relativista, para la función f_1 se puede observar que el comportamiento de la densidad contra el tiempo es similar para los 3 casos, Figura 4.49. En este caso la densidad presenta un comportamiento creciente conforme el tiempo aumenta, es decir, la densidad crece conforme ésta se acerca al horizonte, caso que coincide con lo que se observaba en el caso no-relativista utilizando el elemento de volumen con momentos conjugados. Esto se debe principalmente a que se utiliza el elemento de volumen en el espacio de momentos involucrando momentos covariantes. La diferencia entre los 3 casos es que la densidad final es mayor si $p_0 = -0.1$, y menor si $p_0 = 0.1$, lo que se traduce a que habrá más partículas que caigan radialmente que partículas que superen la velocidad de escape para el primer caso. Se puede observar en las gráficas N^0 vs r , que el pulso de densidad inicial, cuya forma es una función gaussiana, se divide en dos pulsos, uno que se dirige hacia el origen (izquierda), y otro que se aleja; para el dato inicial $p_0 = -0.1$ se observa que el pulso dirigido hacia la izquierda tiene mayor amplitud que el pulso dirigido hacia la derecha, para el dato inicial $p_0 = 0.0$ se observa que la amplitud de ambos pulsos es la misma, y finalmente, para el dato inicial $p_0 = 0.1$

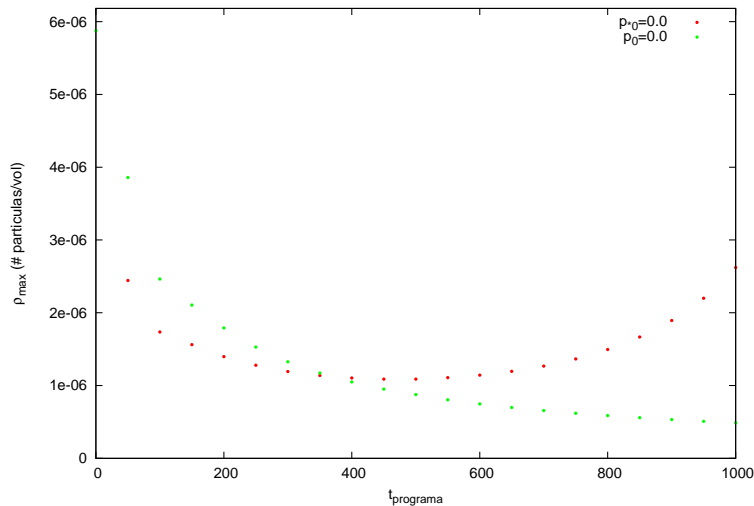


Figura 4.48: ρ_{max} vs $t_{programa}$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para caso 2 y 4 no-relativistas con f_1 .

se observa que el pulso dirigido hacia la derecha tiene una amplitud mayor, lo cual coincide con el caso no-relativista. Entonces en este caso también influye el hecho de centrar la gaussiana en cierto momento radial inicial dada una amplitud de la gaussiana en la componente p , es decir σ_p en el número de partículas que caigan radialmente y las que alcancen la velocidad de escape.

En el caso relativista para la función f_2 se puede observar que el comportamiento de la densidad en el tiempo es similar para los 2 casos, Figura 4.50 Como en el caso de la función f_1 , la densidad presenta un comportamiento creciente conforme el tiempo aumenta, y como ya se mencionó, esto se debe principalmente al elemento de volumen en el espacio de momentos involucrando momentos covariantes. La diferencia entre los 2 casos es que la densidad final es mayor si $\sigma = 0.05$, lo cual sucede debido a que la constante de normalización es casi el doble de grande que el caso 1. Se puede observar en las gráficas N^0 vs r , que el pulso de densidad inicial, se divide en dos pulsos, uno que se dirige hacia al origen (izquierda), y otro que se aleja, pero primero la amplitud de ambos pulsos es la misma, y después el pulso dirigido a la derecha siempre disminuye de manera considerable, de la misma forma que el caso f_1 .

Finalmente se pueden mostrar las gráficas comparativas del caso relativista y el caso no-relativista para el caso de f_1 . Para la densidad, se muestra en la Figura 4.51 el caso de el momento radial inicial $p_0 = 0.0$ para el caso no-relativista una gráfica de ρ vs t , utilizando los dos tipos de elementos de volumen en el espacio de momentos y para el caso relativista se muestran dos gráficas N^0 vs t .

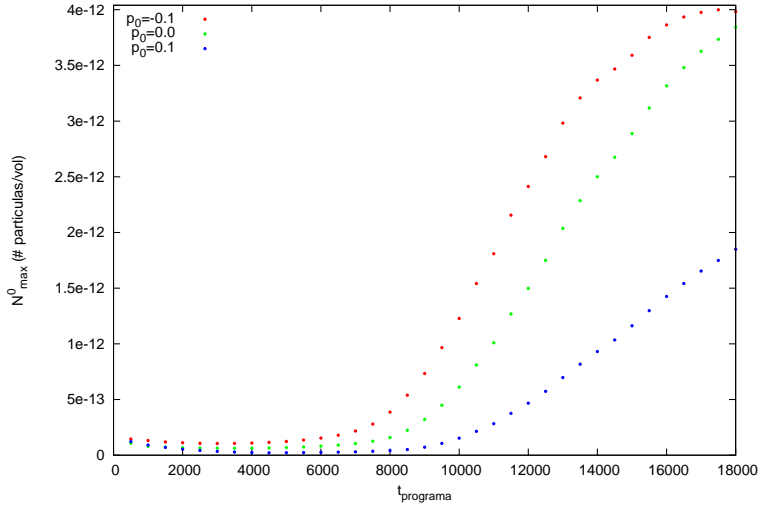


Figura 4.49: N^0_{max} vs $t_{programa}$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para los 3 casos relativistas con f_1 .

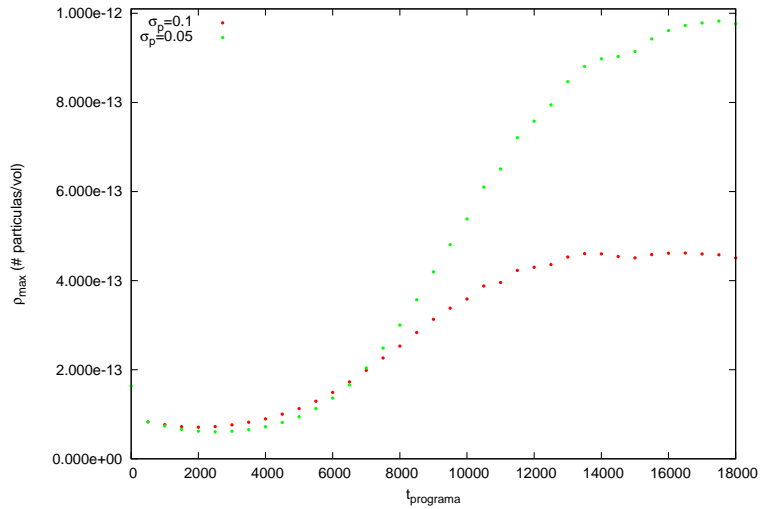


Figura 4.50: N^0_{max} vs $t_{programa}$. Evolución temporal de la densidad del número de partículas para los 2 casos relativistas con f_2 .

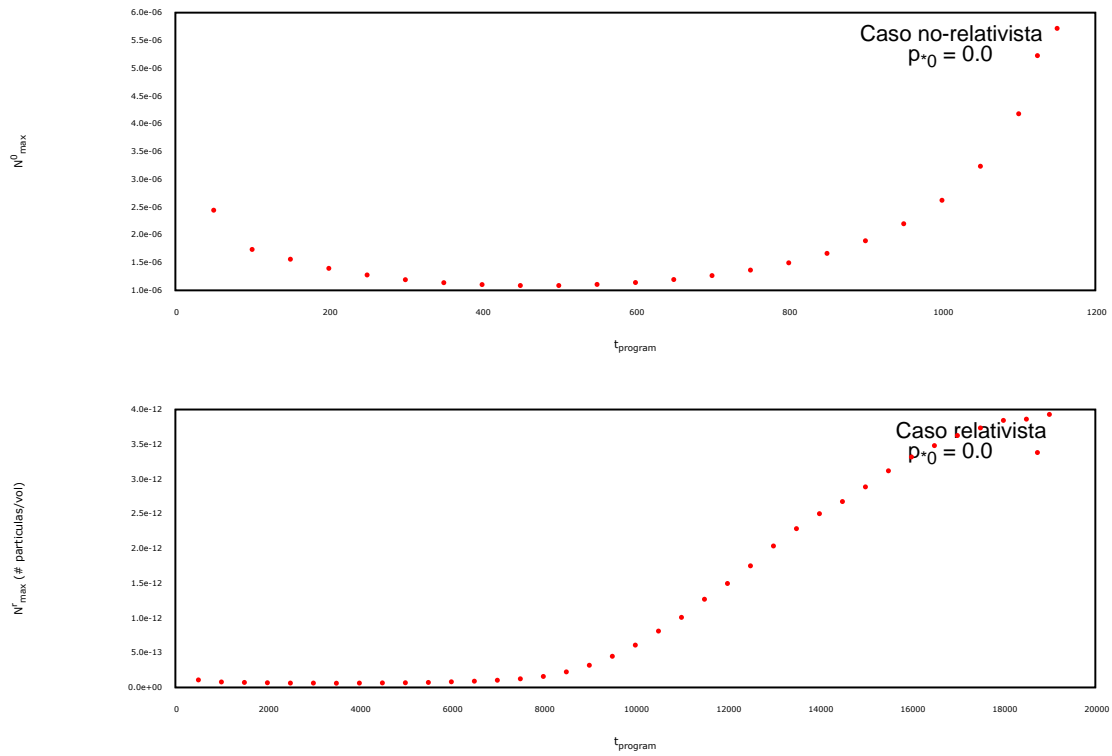


Figura 4.51: Evolución temporal del número de partículas el caso relativista y no-relativista con f_1 .

Capítulo 5

Conclusiones

Si se sabe que la función de distribución en equilibrio de Maxwell en el caso no-relativista, o de Juttner en el caso relativista, son una solución en equilibrio de la ecuación de Vlasov, entonces es de interés poder proponer algún otro tipo de función de distribución que represente sistemas estacionarios fuera del equilibrio cuando la tasa de colisiones sea baja. Es por ello que en esta tesis se presentan dos posibles opciones de funciones de distribución con la finalidad de hacer un estudio numérico y analítico de la evolución temporal de la densidad de partículas ante la presencia de un objeto masivo. Elegir una función de distribución inicial del tipo gaussiana permite tener cierta intuición acerca de lo que representa esta densidad de probabilidad restringiendo su valor a cierto rango de posibles momentos radiales y a cierto rango de posiciones. Y elegir una función de distribución que sea una modificación de la función de distribución de Juttner, multiplicando ésta por una gaussiana en la componente radial resulta ser otra propuesta que pareció interesante para este trabajo.

Se elaboró un código computacional para poder estudiar la evolución temporal de la función de distribución mediante la ecuación de Vlasov para dos dimensiones del espacio-fase en el caso no-relativista utilizando coordenadas esféricas con un potencial central Newtoniano y en el caso relativista con una métrica de Schwarzschild. Esta evolución sirve para calcular la evolución temporal de la densidad inicial mediante la integración de la función de distribución en el espacio de momentos, en donde es necesario considerar un elemento de volumen invariante ante transformaciones de sistemas de referencia inerciales en el caso relativista, reduciéndose al elemento de volumen no-relativista tomando el límite Newtoniano.

El comportamiento general no-relativista de la evolución temporal de la densidad coincide con el comportamiento relativista, observándose un crecimiento continuo cuando un pulso se acerca al origen o al horizonte respectivamente. Este resultado

parece razonable debido a que, como la definición de densidad lo sugiere, número de partículas por unidad de volumen, conforme el volumen físico se va reduciendo, entonces habrá un aumento en la densidad, que es lo que sucede cuando las partículas se van acercando al origen u horizonte.

Esta tesis pretende ser la base para poder hacer un estudio más profundo acerca de distintas propuestas de funciones de distribución y de esta manera poder obtener distintos perfiles de densidad. Se espera poder proponer alguna condición inicial que nos permita encontrar un equilibrio después de un tiempo de evolución. En principio hay dos pasos a seguir inmediatos, el primero de ellos es estudiar la ecuación de Vlasov considerando un espacio-fase 3-dimensional, esto es, considerando momentos angulares, y el segundo paso es estudiar otros espacios curvos o potenciales externos. El primer paso permitiría añadir a la función de distribución una componente que dependa del momento angular. El segundo paso incluye el estudio de la ecuación de Vlasov en coordenadas penetrantes o una métrica de Eddington-Finkelstein, lo cual quitará los problemas geométricos debido al horizonte en el caso de Schwarzschild. Este trabajo es también una base para poder comparar con perfiles de densidad obtenidos observacionalmente, lo que tiene como consecuencia también el poder obtener posibles perfiles de densidad para partículas de materia oscura, ya que como se ha mencionado, la finalidad de utilizar este tipo de descripción de Teoría Cinética es no poner interés en la naturaleza de las partículas sino sólo en su comportamiento macroscópico.

Apéndice A

Transformación de elementos de volumen en Relatividad General

A.1. Elemento de volumen invariante en el espacio-tiempo

Considerando el espacio 4-dimensional con coordenadas x^μ y la transformación de coordenadas directa,

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (\text{A.1})$$

con transformación inversa dada por

$$x^\mu = x^\mu(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \quad (\text{A.2})$$

Las diferenciales se transforman de acuerdo a

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (\text{A.3})$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu. \quad (\text{A.4})$$

Entonces la transformación de un 4-volumen será:

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3, \quad (\text{A.5})$$

donde,

$$\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} \quad (\text{A.6})$$

es el Jacobiano de la transformación, el cual será igual a $\det(\Lambda_{\beta'}^{\alpha})$ en este caso. Usando el tensor métrico y terminología de matrices, la transformación de las componentes de la métrica es,

$$(g') = (\Lambda)(\eta)(\Lambda)^T, \quad (\text{A.7})$$

donde (g') es la matriz de $g'_{\mu\nu}$, (η) la matriz de $\eta_{\mu\nu}$ y (Λ) la matriz de Λ . Se sigue que los determinantes satisfacen

$$\det(g') = \det(\Lambda)\det(\eta)\det(\Lambda^T). \quad (\text{A.8})$$

Pero se sabe que,

$$\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T), \quad (\text{A.9})$$

$$\det(\eta) = -1. \quad (\text{A.10})$$

Por lo que se obtiene

$$\det(g') = -[\det(\Lambda)]^2, \quad (\text{A.11})$$

concluyendo que

$$\det(\Lambda_{\beta'}^{\alpha}) = \sqrt{-g'}, \quad (\text{A.12})$$

donde se escribe $g' := \det(g'_{\alpha\beta})$. De la ecuación (A.5) se obtiene la transformación del 4-volumen,

$$dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g'} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3. \quad (\text{A.13})$$

Esto se hizo pasando de una métrica plana a cualquier otro tipo de coordenadas, por lo que en general se tiene que el elemento de volumen en un espacio curvo realmente es $\sqrt{-g'} d^4 x'$. El tensor métrico se transforma conforme a

$$g_{\mu\nu} = g'_{\sigma\tau} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\nu}}. \quad (\text{A.14})$$

El determinante de (A.14) lleva a

$$g = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^2 g', \quad (\text{A.15})$$

donde $\frac{\partial x'}{\partial x}$ sería la transformación Jacobiana de la ecuación (A.6). Con esto se puede ver que el elemento de volumen $\sqrt{-g'} d^4 x$ se transforma como

$$\sqrt{-g'} d^4 x = \sqrt{-g'} d^4 x', \quad (\text{A.16})$$

por lo que $\sqrt{-g'} d^4 x$ es un elemento de volumen en el espacio-tiempo invariante.

A.2. Elemento de área en el subespacio $\Sigma(t)$ del espacio-tiempo

En la sección (A.1) se vió que el elemento de volumen invariante en el espacio tiempo es,

$$d^4V_x = \sqrt{-g}d^4x. \quad (\text{A.17})$$

Sin embargo, el operador dx^μ que actúa linealmente en un vector tangente arbitrario u se define como una 1-forma, por lo que en realidad

$$d^4x := \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma, \quad (\text{A.18})$$

donde \wedge hace referencia al producto exterior y $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo Levi-Civita definido como

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{permutacion par} \\ -1 & \text{permutacion impar} \\ 0 & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

La unión de hojas 3-dimensionales $\Sigma(t)$ definidas por $x^0 = ct$, con t constante constituyen una foliación local del espacio-tiempo. El elemento de superficie en este caso se define como:

$$d^3\Sigma_\mu := \frac{1}{3!}\sqrt{-g}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma. \quad (\text{A.20})$$

En un sistema de coordenadas adaptado a la foliación, se tiene $dx^0 = 0$, entonces para un tensor $T(x, p)$ se tiene

$$\int_{V_x} T(x, p) \frac{1}{3!}\sqrt{-g}\varepsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad (\text{A.21})$$

ya que $\varepsilon_{\mu ijk} = \delta_\mu^0 \varepsilon_{ijk}$. Por lo que (A.20) se reduce finalmente a

$$d^3\Sigma_\mu = \delta_\mu^0 \sqrt{-g}d^3x \quad (\text{A.22})$$

donde

$$d^3x := \frac{1}{3!}\varepsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k, \quad (\text{A.23})$$

análogo a la ecuación (A.18).

En un sistema adaptado a la foliación se tiene que

$$d^3\Sigma_\mu = \delta_\mu^0 \frac{1}{\sqrt{g^{00}}}\sqrt{-g_\Sigma} d^3x, \quad (\text{A.24})$$

donde g_Σ es el determinante de la métrica inducida y g^{00} viene dado por

$$g^{00} = \frac{g_\Sigma}{g} \quad (\text{A.25})$$

A.3. Volumen invariante en el espacio de momentos

De la misma forma que se introdujo el elemento de volumen (A.17), se define un elemento de volumen en el espacio de momentos covariantes 4-dimensional,

$$d^4V_{p_*} = \frac{1}{\sqrt{-g}} d^4p_*, \quad (\text{A.26})$$

donde

$$d^4p_* := \frac{1}{4!} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dp_\mu \wedge dp_\nu \wedge dp_\rho \wedge dp_\sigma. \quad (\text{A.27})$$

Sin embargo, para la hoja 3-dimensional $\Sigma(t)$, se deben usar 3-formas en integrales con respecto a la capa de masa S_* . El análogo a (A.20) será,

$$d^3S^\mu = \frac{1}{3!} \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}} dp_\nu \wedge dp_\rho \wedge dp_\sigma. \quad (\text{A.28})$$

Ahora, usando la restricción de momentos $p_\mu p^\mu = -m^2 c^2$ tenemos que [46],

$$p_\mu \frac{dp^\mu}{dp^j} = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\Rightarrow p_0 \frac{dp^0}{dp^j} + p_k \delta_j^k = 0 \quad (\text{A.30})$$

$$\Rightarrow dp^0 = -\frac{p_j}{p_0} dp^j, \quad (\text{A.31})$$

ó análogamente

$$dp_0 = -\frac{p^j}{p^0} dp_j. \quad (\text{A.32})$$

Por lo que la ecuación (A.28) se puede escribir como

$$d^3S^\mu = \frac{p^\mu}{p^0} \frac{1}{\sqrt{-g}} dp_1 \wedge dp_2 \wedge dp_3 \quad (\text{A.33})$$

. Y se puede mostrar que el volumen escalar en la capa de masa es

$$d^3V_{p_*} = \sqrt{d^3S_\mu d^3S^\mu}, \quad (\text{A.34})$$

cuya demostración que se puede encontrar en [33]. Y al sustituir (A.33) en (A.34) se obtiene finalmente que el elemento de volumen en el espacio de momentos covariantes es

$$d^3V_{p_*} = mc \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{d^3p_*}{p^0}, \quad (\text{A.35})$$

donde

$$d^3p_* := \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} dp_i \wedge dp_j \wedge dp_k. \quad (\text{A.36})$$

Bibliografía

- [1] Sidney van den Bergh. The early history of dark matter. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111, 06 1999.
- [2] E. Fischer. The properties of dark matter. *ArXiv e-prints*, March 2011.
- [3] Kimberly Coble, Scott Dodelson, and Joshua A. Frieman. Dynamical Lambda models of structure formation. *Phys.Rev.*, D55:1851–1859, 1997.
- [4] R.R. Caldwell; R. Dave; P.J. Steinhardt. Quintessential cosmology novel models of cosmological structure formation. *Astrophysics and Space Science*, 261, 1998.
- [5] D.N. Spergel and U. Pen. Topological defects in a open universe. pages 0017–27, 1994.
- [6] J S Bagla; T Padmanabhan. Cosmologicaln-body simulations. *Pramana*, 49, 1997.
- [7] L. Stiller; L.L. Daemen; J.E. Gubernatis. N-body simulations on massively parallel architectures. *Journal of Computational Physics*, 115, 1994.
- [8] Rainer Spurzem. Direct n-body simulations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 109, 1999.
- [9] Ludwig Boltzmann. Weitere studien uber das warmegleichgewicht unter gasmolekullen. *W.A. Band I*, 66, 1872.
- [10] E. G. D. Cohen. Boltzmann and Statistical Mechanics. *eprint arXiv:cond-mat/9608054*, August 1996.
- [11] A A Vlasov. The vibrational properties of an electron gas. *Soviet Physics Uspekhi*, 10(6):721, 1967.
- [12] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, second edition, 2010.

-
- [13] J. W. Tauber, G. E.; Weinberg. Internal state of a gravitating gas. *Physical Review*, 122, 05 1961.
- [14] E. Sonnendrucker F. Filbet. Numerical methods for vlasov equation. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, 2003.
- [15] F. Filbet; E. Sonnendrücker. Comparison of eulerian vlasov solvers. *Computer Physics Communications*, 150, 2003.
- [16] T.D. Arber; R.G.L. Vann. A critical comparison of eulerian-grid-based vlasov solvers. *Journal of Computational Physics*, 180, 2002.
- [17] N.B. Esikova. A method for the numerical solution of vlasov's equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 20, 1980.
- [18] Jenő Gazdag. Numerical solution of the vlasov equation with the accurate space derivative method. *Journal of Computational Physics*, 19, 1975.
- [19] Eric Fijalkow. A numerical solution to the vlasov equation. *Computer Physics Communications*, 116, 1999.
- [20] M. Shoucri; R.R.J. Gagne. Numerical solution of the vlasov equation by transform methods. *Journal of Computational Physics*, 21, 1976.
- [21] M. Shoucri. Eulerian codes for the numerical solution of the vlasov equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13, 2008.
- [22] F. Reif. *Statistical thermal physics*. McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [23] Tijana T. Ivancevic Vladimir G. Ivancevic. *Applied Differential Geometry: a Modern Introduction*. World Scientific Publishing, 2007.
- [24] V.I. Arnol'd. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, USA, 1978.
- [25] Richard L. Liboff. *Kinetic Theory: Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions*. Springer, third edition, 2003.
- [26] G. Medeiros Kremer. *An introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases*. Springer, 2010.
- [27] Hannu E.J. Koskinen. *Physics of Space Storms from the Solar Surface to the Earth*. Springer, 2011.

-
- [28] Ch.G van Weert, W.A van Leeuwen and S.R de Groot. Elements of relativistic kinetic theory. *Physica*, 69:441–457, 1973.
- [29] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, second edition, 1978.
- [30] Giovanni Amelino-Camelia, Laurent Freidel, Jerzy Kowalski-Glikman, and Lee Smolin. The principle of relative locality. *Phys.Rev.*, D84:084010, 2011.
- [31] James T Hazboun, Jeffrey S; Wheeler. A systematic construction of curved phase space: A gravitational gauge theory with symplectic form. *Journal of Physics Conference Series*, 360, 05 2012.
- [32] M. A. H. MacCallum. *General Relativity and Gravitation: Proceedings of the 11th International Conference on General Relativity and Gravitation*. Cambridge University Press, 1978.
- [33] F. Debbasch; W.A. van Leeuwen. General relativistic boltzmann equation, i: Covariant treatment. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388, 2009.
- [34] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *The Classical Theory of Fields*, volume 2. Pergamon, 4th edition, 1975.
- [35] K.S. Thorn C.W. Misner and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Co., 1973.
- [36] Fabrice Debbasch, Jean-Pierre Rivet, and Willem Van Leeuwen. Invariance of the relativistic one-particle distribution function. *Physica*, A301:181, 2001.
- [37] M. Alcubierre. *Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- [38] Alan D. Rendall. An Introduction to the Einstein-Vlasov system. *Banach Centre Publications*, 1996.
- [39] Håkan Andréasson. The einstein-vlasov system/kinetic theory. *Living Reviews in Relativity*, 14(4), 2011.
- [40] H.E. Kandrup; P.J. Morrison. Hamiltonian structure of the vlasov-einstein system and the problem of stability for spherical relativistic star clusters. *Annals of Physics*, 225, 1993.

-
- [41] G. Rein; A. D. Rendall. Global existence of solutions of the spherically symmetric vlasov-einstein system with small initial data. *Communications in Mathematical Physics*, 150, 12 1992.
- [42] G. Rein; A. D. Rendall. The newtonian limit of the spherically symmetric vlasov-einstein system. *Communications in Mathematical Physics*, 150, 12 1992.
- [43] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [44] L. Dagdug L. García-Colín Scherer, G. Chacón Acosta. *100 años de teoría cinética relativista*. Universidad Autónoma Metropolitana, 2013.
- [45] Dr. David G. Long. Relativistic single particle kinetic theory. *Annalen der Physik*, 503, 1991.
- [46] Carlo. Cercignani and Gilberto Medeiros. Kremer. *The relativistic Boltzmann equation: Theory and Applications*. Birkhäuser, 2002.
- [47] Ferencz Jüttner. Das maxwellsche gesetz der geschwindigkeitsverteilung in der relativtheorie. *Ann.Phys.*, 856(34), 1911.
- [48] Werner Israel. Relativistic kinetic theory of a simple gas. *Journal of Mathematical Physics*, 4, 1963.
- [49] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, 1985.
- [50] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, 2004.
- [51] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, 1916, Seite 189-196, pages 189–196, 1916.
- [52] R. Aldrovandi and J.G. Pereira. *An introduction to General Relativity*. World Scientific, 2004.
- [53] G.D. Birkhoff and R.E. Langer. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, 1923.
- [54] Nils Voje Johansen; Finn Ravndal. On the discovery of birkhoff's theorem. *General Relativity and Gravitation*, 38, 03 2006.

-
- [55] H. F. Weinberger. *A First Course in Partial Differential Equations: with Complex Variables and Transform Methods*. Dover, 1965.
- [56] James B. Hartle. *Gravity: An introduction to Einstein's General Relativity*. Addison Wesley, 2003.
- [57] Eric Poisson. *A relativist's toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004.
- [58] Stanley J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover Publications, 1982.
- [59] R.D. Richtmyer and K.W. Morton. *Difference methods for initial-value problems*. Interscience Publishers, second edition, 1967.
- [60] E. Pohn; M. Shoucri; G. Kamelander. Eulerian vlasov codes. *Computer Physics Communications*, 166, 2005.
- [61] Sugama H. Watanabe T.H. Vlasov and drift kinetic simulation methods based on the symplectic integrator. *Transport Theory and Statistical Physics*, 34, 2005.
- [62] Glenn Joyce, Georg Knorr, and Homer K Meier. Numerical integration methods of the vlasov equation. *Journal of Computational Physics*, 8(1):53–63, 1971.
- [63] C.Z Cheng; Georg Knorr. The integration of the vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22, 1976.
- [64] Takashi Nakamura; Takashi Yabe. Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional vlasov—poisson equation in phase space. *Computer Physics Communications*, 120, 1999.
- [65] MAGDI Shoucri. Vlasov equation, a new efficient and structured approach. *Modeling and Simulation*, 10(part 3):25–27, 1979.
- [66] C. G. Mingham D. M. Causon. *Introductory Finite Difference Methods for PDES*. Mingham and Ventus Publishing ApS, 2010.
- [67] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations. Finite Difference Methods*. Texts in Applied Mathematics 22. Springer, 1995.
- [68] Peter Bodenheimer, Gregory P. Laughlin, Michal Rozyczka, and Harold W. Yorke. *Numerical Methods in Astrophysics. An Introduction*. Series in Astronomy and Astrophysics. Taylor and Francis Group, 2007.

-
- [69] William F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academic Press Inc, 3rd edition edition, 1992.
- [70] John C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Science. SIAM, second edition edition, 2004.
- [71] Chi-Wang Shu Sigal Gottlieb, David Ketcheson. *Strong Stability Preserving Runge-Kutta And Multistep Time Discretizations*. World Scientific, 2011.
- [72] Gabriel de Moraes, Renan de S Teixeira, and Leonardo S de B Alves. Analysis of strong stability preserving time-marching schemes for partial differential equations. 2012.
- [73] Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2):439–471, 1988.
- [74] Steven J Ruuth and Raymond J Spiteri. Two barriers on strong-stability-preserving time discretization methods. *Journal of Scientific Computing*, 17(1-4):211–220, 2002.
- [75] J. F. B. M. Kraaijevanger. Contractivity of runge-kutta methods. *BIT Numerical Mathematics*, 31, 1991.
- [76] Steven J. Spiteri, Raymond J.; Ruuth. A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40, 2002.