



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA
ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

GEODÉSICAS DE GRUPOS DE LIE Y SISTEMAS INTEGRABLES

EXÁMENES GENERALES Y TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
OMAR DANIEL ÁLVAREZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE LA TESIS Ó TESINA:
DR. OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MÉXICO, D. F. 9 DE MARZO DE 2015.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Geodésicas de grupos de Lie y sistemas integrables

Daniel Álvarez

Índice general

| | |
|---|------------|
| Introducción | III |
| 1 Geometría simpléctica y mecánica clásica | 1 |
| 1.1. Mecánica lagrangiana y mecánica hamiltoniana | 1 |
| 1.2. Variedades simplécticas y sistemas hamiltonianos con simetrías . . . | 4 |
| 1.3. Mecánica en grupos de Lie | 12 |
| 2 Sistemas integrables y cuerpos rígidos | 15 |
| 2.1. La ecuación de Euler para el cuerpo rígido libre | 15 |
| 2.2. Sistemas integrables y ecuaciones de Lax | 18 |
| 2.3. Un cuerpo rígido con una cavidad elipsoidal llena de líquido y la ecuación de Euler-Poincaré para \mathfrak{so}_4 | 28 |
| Bibliografía | 32 |

“O frati”, dissi, “che per cento milia
perigli siete giunti a l’occidente,
a questa tanto picciola vigilia

d’i nostri sensi ch’è del rimanente
non vogliate negar l’esperienza,
di retro al sol, del mondo senza gente.

Considerate la vostra semenza:
fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza.”

Dante Alighieri: *Commedia, Inferno, XXVI*, 112-120. Siglo XIV.

Et cependant –étrange contradiction pour ceux qui croient au temps– l’histoire géologique nous montre que la vie n’est qu’un court épisode entre deux éternités de mort, et que, dans cet épisode même, la pensée consciente n’a duré et ne durera qu’un moment. La pensée n’est qu’un éclair au milieu d’une longue nuit.

Mais c’est cet éclair qui est tout.

Henri Poincaré, *La Valeur de la Science*, 1905.

La escritura metódica me distrae de la presente condición de los hombres. La certidumbre de que todo está escrito nos anula o nos afantasma. Yo conozco distritos en los que los jóvenes se prosternan ante los libros y besan con barbarie las páginas pero no saben descifrar una sola letra. [...] Quizá me engañen la vejez y el temor, pero sospecho que la especie humana –la única– está por extinguirse y que la Biblioteca perdurará: iluminada, solitaria, infinita, perfectamente inmóvil, armada de volúmenes preciosos, inútil, incorruptible, secreta.

Jorge Luis Borges: «La Biblioteca de Babel» en *Ficciones*, 1955.

Mi sono comportato da ostinato, inseguendo una parvenza d’ordine quando dovevo sapere bene che non vi è un ordine nell’universo.”

“Ma immaginando degli ordini errati avete pur trovato qualcosa...”

“Hai detto una cosa molto bella, Adso, ti ringrazio. L’ordine che la nostra mente immagina è come una rete, o una scala, che si costruisce per raggiungere qualcosa. Ma dopo si deve gettare la scala, perché si scopre che, se pure serviva, era priva di senso.

Umberto Eco: *Il nome della rosa*, 1980.

Introducción

En [20] Euler describió el movimiento de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo mediante la ecuación en \mathbb{R}^3

$$A\dot{\Omega} = A\Omega \times \Omega$$

con A una matriz simétrica, positivamente definida. Por un largo tiempo, esta ecuación no se interpretó de manera satisfactoria mediante el lenguaje de la mecánica lagrangiana o hamiltoniana: usualmente se introducían los ángulos de Euler que ocultaban el hecho crucial de que el espacio de configuraciones del sistema es SO_3 . Al parecer no fue sino hasta 1901 en [49], cuando Poincaré notó que dicha ecuación era esencialmente una ecuación de Euler-Lagrange escrita en términos de una trivialización del haz tangente que no constase necesariamente de campos coordinados. Arnold observó en [1] que esta ecuación y la ecuación también debida a Euler que describe la dinámica de un fluido ideal se pueden ver como ecuaciones geodésicas de una métrica invariante izquierda en un grupo de Lie de dimensión posiblemente infinita: SO_3 en el primer caso y el grupo de difeomorfismos que conserva volumen de \mathbb{R}^3 en el segundo. Estas observaciones fundamentales introdujeron nuevos métodos geométricos en la mecánica e hidrodinámica, métodos provenientes de la teoría de grupos y álgebras de Lie de dimensión finita e infinita.

El estudio de la mecánica siempre estuvo ligado al desarrollo de métodos para obtener parametrizaciones explícitas de las soluciones de las ecuaciones (o de maneras de justificar que no existen esas parametrizaciones en términos de ciertas funciones elementales). El descubrimiento del comportamiento caótico de las soluciones del problema de los tres cuerpos por parte de Poincaré puso fin a las esperanzas de obtener soluciones explícitas a todas las ecuaciones, sin embargo, el fenómeno de la integrabilidad recientemente ha suscitado un gran interés.

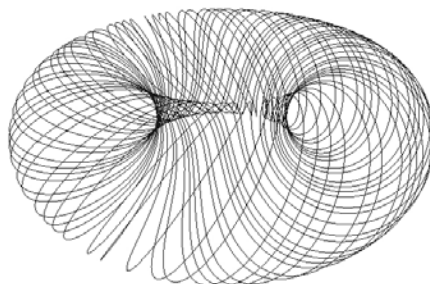


Figura 1: Movimiento casi periódico

En geometría simpléctica, se habla de *sistemas hamiltonianos completamente integrables o integrables en el sentido de Liouville* como de aquellos cuyo flujo en ciertas regiones consta de órbitas casi periódicas en toros donde la forma simpléctica se anula (ver figura 1). Hasta los años 70 la lista de sistemas hamiltonianos integrables era corta y se basaba en ingeniosos cambios de coordenadas ad hoc. Actualmente casi todos esos casos y otros, descubiertos recientemente, se analizan formulándolos como *ecuaciones de Lax*¹. En [23] se redujo el estudio de la ecuación Korteweg-de Vries (KdV), $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$, a la teoría espectral inversa del operador de Schrödinger $L = -d^2/dx^2 + u(x, t)$ con u rápidamente decreciente². P. D. Lax en [34] clarificó ese resultado expresando KdV como $\dot{L} = [L, A]$ con A otro operador lineal; ecuaciones de esa forma se llaman ahora *ecuaciones de Lax*. Esta observación dio lugar al *método de la deformación isopectral*, llamado así porque si $\dot{L} = [L, A]$, entonces el espectro de L es constante con respecto a t . S. P. Novikov descubrió una manera de obtener soluciones periódicas o casi periódicas de la ecuación KdV³. Su método, basado en utilizar ecuaciones de Lax con un parámetro, involucraba objetos clásicos de la geometría algebraica: superficies de Riemann y sus variedades jacobianas. Posteriormente, M. Adler, P. van Moerbeke, A. G. Reyman y otros matemáticos extendieron esa técnica y la aplicaron a diversos sistemas hamiltonianos.

En general, se dice que una ecuación diferencial ordinaria es integrable si

¹Saber si existe y cómo encontrar una representación del sistema como ecuación de Lax no es un problema trivial.

²Este problema había sido resuelto por I. M. Gelfand, B. M. Levitan y V. A. Marchenko, ver [36]. Esta teoría se conoce como *teoría espectral inversa* ya que consiste en prescribir un espectro y buscar los operadores autoadjuntos en un cierto espacio de Hilbert con ese espectro.

³Ver [46] para esto y revisar las notas históricas de [18, 19, 47, 52] para una descripción detallada del desarrollo de la teoría moderna de sistemas integrables.

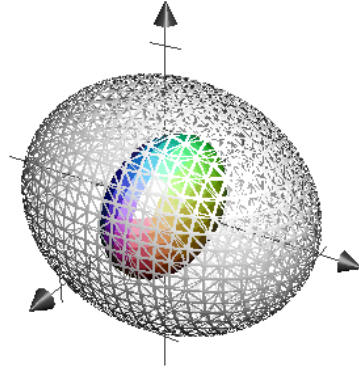


Figura 2: Cuerpo rígido con una cavidad elipsoidal llena de líquido

no es lineal y (A) admite soluciones explícitas, (B) admite numerosas constantes de movimiento, (C) sus soluciones están relacionadas con geometría algebraica, típicamente mediante superficies de Riemann y variedades abelianas (ver [32], Introducción); pero el término «explícitas» se toma en un sentido laxo: no bastan las funciones elementales (exponenciales y funciones algebraicas) para expresar las soluciones sino que por lo menos requerimos funciones elípticas.

* * *

Referencias básicas de geometría simpléctica y mecánica son [3, 38, 48], a un nivel más avanzado están [6, 4, 26] y el texto más popular sobre geometría y topología simpléctica⁴ es [40]. [32, 9] introducen sucintamente las principales ideas algebraicas sobre sistemas integrables, [8] es una referencia especialmente clara, concisa y concreta sobre los temas aquí incluidos; por otro lado, [11] es un tratado detallado de la teoría general de sistemas integrables (de dimensión finita e infinita). [45] es especialmente interesante pues ilustra el método de la deformación isoenergética relacionando tres célebres sistemas integrables: el flujo geodésico de un elipsoide, el movimiento de una partícula en una esfera sujeta a un potencial cuadrático y la ecuación KdV (soluciones casi periódicas). En [18, 47, 52] se pueden encontrar exposiciones sucintas de las diversas ideas sobre la integrabilidad y de su desarrollo histórico.

En el Capítulo 1 se describen brevemente algunos aspectos básicos del aparato de la geometría simpléctica y de los sistemas hamiltonianos con simetrías, poniendo como ejemplo arquetípico de uno de estos el flujo geodésico de una métrica

⁴Ver [10] para una descripción del origen de esta área de las matemáticas.

invariante izquierda en un grupo de Lie (expresado mediante la ecuación de Lie-Poisson que, si el grupo es semisimple, es naturalmente equivalente a una ecuación de Lax llamada ecuación de Euler). En el Capítulo 2 se introducen algunas ideas algebraicas sobre integrabilidad y se aplican a un par de casos interesantes: la ecuación de Euler para \mathfrak{so}_3 (que corresponde al movimiento de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo) y el flujo geodésico de un elipsoide n -dimensional y asimétrico. Después se presentan métricas en \mathfrak{so}_4 que corresponden a ciertos casos del movimiento de un cuerpo rígido con una cavidad elipsoidal llena de líquido, ver figura 2. También se mencionan algunos casos en los que la ecuación de Euler asociada da lugar a un sistema integrable. Usaremos la convención de suma de Einstein en las diversas fórmulas a menos que se indique lo contrario.

Capítulo 1

Geometría simpléctica y mecánica clásica

Este capítulo contiene una breve introducción al formalismo simpléctico en la mecánica clásica así como una descripción de varios ejemplos fundamentales de variedades simplécticas; en la última sección se describe el cuerpo rígido generalizado o de Euler-Arnold. Este capítulo está basado sobre todo en [3, 6, 38].

1.1. Mecánica lagrangiana y mecánica hamiltoniana

La geometría simpléctica surge de la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica. De acuerdo con el *principio de acción mínima*⁵ debido a Sir W. R. Hamilton, la evolución de un sistema físico compuesto de n partículas en el espacio euclidiano tridimensional usual está determinada por una función L llamada *lagrangiano*, definida en el espacio de posiciones y velocidades

$$M := T\mathbb{R}^{3n} \cong \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} = \{(q, \dot{q}) = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) : q_a, \dot{q}_a \in \mathbb{R}^3, a = 1 \dots n\}.$$

En un sistema natural,

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_a \frac{m_a}{2} |\dot{q}_a|^2 - V(q_1, \dots, q_n),$$

o sea, es la diferencia de las energías cinética y potencial. Esas coordenadas no necesariamente representan mediciones respecto de un observador inercial, pero

⁵O mejor dicho: principio de acción estacionaria o crítica.

satisfacen unas versiones generalizadas de la segunda ley de Newton, llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^b} = \frac{\partial L}{\partial q_a^b} \quad a = 1 \dots n \text{ y } b = 1, 2, 3;$$

en el caso de un sistema natural se tienen las famosas ecuaciones de Newton $m_a \ddot{q}_a^b = -\frac{\partial V}{\partial q_a^b}$. Se puede ver que las soluciones de esas ecuaciones son las curvas críticas de la funcional dada como sigue⁶: si se tiene la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ de clase C^∞ (y también L lo es)

$$\gamma \mapsto S(\gamma) := \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

la integral de la derecha se llama la acción de la trayectoria, *el principio de acción mínima (o estacionaria)*⁷ afirma que el movimiento de un cuerpo está descrito por una curva γ_0 tal que curvas cercanas γ_s tienen acciones que difieren de $S(\gamma_0)$ por un término $o(s)$ si $s \rightarrow 0$; o sea, se debe tener $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} S(\gamma_s) = 0$, lo cual se expresa mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Mecánica hamiltoniana. Si L es regular, o sea en todo punto

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right) \neq 0,$$

se define la *transformación de Legendre* $\mathbb{F}L : T\mathbb{R}^{3n} \rightarrow T^*\mathbb{R}^{3n}$, dada por

$$(q, \dot{q}) \mapsto \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right), \quad \text{con } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \text{ y } \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^1}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^2}, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^3} \right),$$

que resulta ser un difeomorfismo local; en los casos que nos interesan, de hecho $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo. Llamando $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$, los \dot{q}_a dependen únicamente de (p_a) , con esa condición se define el *hamiltoniano*

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_a p_a \cdot \dot{q}_a - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n),$$

para un lagrangiano natural H representa la energía total del sistema. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a las *ecuaciones de Hamilton*:

⁶Ver [16] pág. 164 y sucesivas.

⁷Ver [22] cap. 19 para una discusión vivaz de este principio.

$$\dot{p}_a^b = -\frac{\partial H}{\partial q_a^b}, \quad \dot{q}_a^b = \frac{\partial H}{\partial p_a^b}; \quad a = 1 \dots n \text{ y } b = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Observación 1. Consideremos un difeomorfismo φ de $X := T^*\mathbb{R}^{3n} = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n}\}$. Que φ conserve la forma de las ecuaciones (1) significa que, para toda función lisa H en X y $x \in X$, se tiene

$$T_x\varphi \begin{bmatrix} 0 & I_{3n} \\ -I_{3n} & 0 \end{bmatrix} dH|_x = \begin{bmatrix} 0 & I_{3n} \\ -I_{3n} & 0 \end{bmatrix} d(H \circ \varphi)|_{\varphi(x)},$$

donde $dH = (\partial H/\partial q_1, \dots, \partial H/\partial q_{3n}, \partial H/\partial p_1, \dots, \partial H/\partial p_{3n})^T$ y $T_x\varphi$ es la matriz jacobiana de φ en x . Esta condición implica que se satisface

$$T_x\varphi \begin{bmatrix} 0 & I_{3n} \\ -I_{3n} & 0 \end{bmatrix} (T_x\varphi)^T = \begin{bmatrix} 0 & I_{3n} \\ -I_{3n} & 0 \end{bmatrix},$$

si se cumple lo anterior para todo x se dice que φ es un *simplectomorfismo*, en el pasado se decía que φ era una transformación canónica (global). Esta observación es nuestra motivación para definir las variedades simplécticas.

Teorema de Noether. En general, el lenguaje lagrangiano se aplica a variedades. Si M es variedad lisa, un lagrangiano (autónomo) es una función $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ y, si L es regular, las ecuaciones de Euler-Lagrange definen un campo en TM , denotamos $\varphi_t(q, v) = (q_t, v_t)$ con $(q, v) \in TM$ al flujo local de ese campo. Notemos que la transformación de Legendre $\mathbb{F}L : TM \rightarrow T^*M$ también tiene sentido en este contexto.

Teorema 1.1.1 (Noether). Si g_s es un grupo de difeomorfismos a un parámetro de TM tal que L es invariante bajo su acción, entonces la función en TM

$$(q, v) \mapsto dL_{(q,v)} \left(0, \frac{d}{ds} g_s q \right)$$

es una constante de movimiento de φ_t .

Demostración. $(0, \frac{d}{ds} g_s q)$ se interpreta como el vector tangente a la fibra en q dado por $[s \mapsto g_s q] \in T_q M$. La afirmación se puede verificar en coordenadas locales, denotamos $\delta := \partial / \partial s$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v_a} \delta g_s q_t^a \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v_a} \right) \delta g_s q_t^a + \frac{\partial L}{\partial v_a} \delta \frac{\partial}{\partial t} g_s q_t^a = \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_a} \delta g_s q_t^a + \frac{\partial L}{\partial v_a} \delta \frac{\partial}{\partial t} g_s q_t^a = \frac{\partial}{\partial s} L(g_s q_t, T_{q_t} g_s(\dot{q}_t)) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

1.2. Variedades simplécticas y sistemas hamiltonianos con simetrías

La Observación 1 y las ecuaciones (1) motivan la introducción de las siguientes nociones que proveen el lenguaje general de la mecánica hamiltoniana.

Definición 1. Una *variedad simpléctica* es una variedad lisa M^m con una 2-forma diferencial $\omega \in \Omega^2(M)$ cerrada y no degenerada, es decir, para todo $p \in M$, si $v \in T_p M$ cumple $\omega(v, w) = 0$ para todo w , entonces $v = 0$. ω se llama *forma simpléctica*. Tenemos de inmediato un par de condiciones topológicas necesarias para la existencia de una forma simpléctica: una variedad simpléctica debe ser de dimensión par $m = 2n$ y orientable. ω induce un isomorfismo de $\mathfrak{X}(M)$ en $\Omega^1(M)$ que a cada campo X asigna la 1-forma $X \lrcorner \omega$. Una función $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ induce mediante el isomorfismo anterior un campo X_H tal que $dH = \omega(X_H, _) = X_H \lrcorner \omega$. X_H se llama *campo hamiltoniano asociado a H*. Veremos que la asignación $f \mapsto X_f$ es un antihomomorfismo de álgebras de Lie. Por la fórmula mágica de Cartan, un campo hamiltoniano X_H satisface

$$\mathcal{L}_{X_H} \omega = d(X_H \lrcorner \omega) + X_H \lrcorner d\omega = d^2 H = 0$$

entonces el flujo φ_t de X_H conserva la forma simpléctica. También se tiene una estructura de álgebra de Lie en $C^\infty(M)$. Si f, g son funciones real-valuadas en M su *corchete de Poisson* es $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$. Se puede ver que

$$d\{f, g\} = -[X_f, X_g] \lrcorner \omega, \quad (2)$$

usando $d\omega = 0$ y la fórmula de Palais para la derivada exterior:

$$\begin{aligned} d(X_1, X_2, X_3) &= X_1 \omega(X_2, X_3) - X_2 \omega(X_1, X_3) + X_3 \omega(X_1, X_2) + \\ &\quad - \omega([X_1, X_2], X_3) + \omega([X_1, X_3], X_2) - \omega([X_2, X_3], X_1). \end{aligned}$$

La misma fórmula muestra que el corchete de Poisson satisface la identidad de Jacobi, entonces tenemos que para todas f, g, h funciones:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{f, g, h\} &= \{f, h\}g + f\{g, h\} \\ 0 &= \{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Cuando en una variedad P se tiene una forma bilineal $\{, \}$ definida en el álgebra de sus funciones real-valuadas que satisface (3), se dice que P es una *variedad de Poisson*. Se dice que un difeomorfismo entre variedades simplécticas $f : (M, \omega_1) \rightarrow (N, \omega_2)$ es un *simplectomorfismo* si $f^* \omega_2 = \omega_1$.

Haces cotangentes. Si Q es variedad lisa, su haz cotangente $M := T^*Q$ tiene una 1-forma fundamental θ dada por $\theta_{(q,\alpha)}(u) := \alpha(T_q\pi(u))$ con $\pi : M \rightarrow Q$ la proyección. En coordenadas locales (q_1, \dots, q_n) de Q y $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ las coordenadas inducidas en M , $\theta = p_a dq^a$ y $d\theta = dp_a \wedge dq^a$ por lo que $\omega := -d\theta$ es una forma simpléctica, llamada la *forma simpléctica canónica de T^*Q* .

Definición 2. Un *sistema hamiltoniano* es una variedad simpléctica (M, ω) y una función llamada hamiltoniano $H \in C^\infty(M)$; el sistema dinámico asociado está dado por el flujo del campo X_H . Si M es un haz cotangente, el flujo de X_H está dado por ecuaciones de la forma (1). Un *sistema mecánico natural* es una variedad Q , llamada *espacio de configuraciones*, un potencial $V \in C^\infty(Q)$ y una métrica riemanniana g en Q , que nos da la energía cinética. El lagrangiano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ se calcula como $L(q, v) = (1/2)g(v, v) - V(q)$ y el hamiltoniano $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ está dado por $H(q, p) = p(v) - L(q, v)$, con $\mathbb{F}L(q, v) = (q, p)$ y $\mathbb{F}L : TM \rightarrow T^*M$ la transformación de Legendre dada por L . H representa la energía total del sistema mecánico: $H(q, p) = (1/2)g^*(p, p) + V(q)$ con g^* la métrica inducida en T^*Q por g .

Definición 3. Un *sistema hamiltoniano con grupo de simetría G* es un sistema hamiltoniano (M, ω, H) y un grupo de Lie G que actúa por la izquierda mediante simplectomorfismos en M de manera que H es constante en las órbitas de G . Una acción así determina un antihomomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que denotamos $\xi \mapsto \xi_M$. Si existe un levantamiento de ese homomorfismo a $(C^\infty(M), \{, \})$ que denotamos $\xi \mapsto f_\xi$, es decir, $f_{[a,b]} = \{f_a, f_b\}$ y $X_{f_\xi} = \xi_M$, M se llama *G -espacio hamiltoniano* o bien se dice que la acción es *hamiltoniana* o de *Poisson*; en ese caso, se define la *aplicación de momento* $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por

$$\langle J(x), \xi \rangle = f_\xi(x)$$

con \langle , \rangle la evaluación $\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposición 1.2.1 (Equivariancia de la aplicación de momento). *Si existe una aplicación de momento $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ y G es conexo, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{L_g} & M \\ J \downarrow & & \downarrow J \\ \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{\text{Ad}_g^*} & \mathfrak{g}^* \end{array}$$

conmuta, con Ad_g^* la acción coadjunta de G : $\langle \text{Ad}_g^*(x), \xi \rangle = \langle x, \text{Ad}_{g^{-1}}(\xi) \rangle$ y L_g traslación por $g \in G$.

Demostración. Definimos, si $p \in M$, $g \in G$ y $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
f_g(t) &= \langle \mathbf{J}(\exp(t\eta)gp), \xi \rangle - \langle \mathbf{J}(p), \text{Ad}_{g^{-1}\exp(-t\eta)}(\xi) \rangle, \text{ entonces} \\
\frac{df_g}{dt}(0) &= df_\xi(\eta_M|_{gp}) - f_{\text{Ad}_{g^{-1}}[\xi, \eta]}(p) = \text{ como } \text{Ad}_{g^{-1}} \text{ es automorfismo de } \mathfrak{g} \\
&= \omega_{gp}(\xi_M, \eta_M) - \{f_{\text{Ad}_{g^{-1}}(\xi)}, f_{\text{Ad}_{g^{-1}}(\eta)}\}(p) = \text{ por definici3n de } \{, \} \\
&= \omega_{gp}(\xi_M, \eta_M) - \omega_p\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g^{-1}\exp(s\xi)gp, \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} g^{-1}\exp(s\eta)gp\right) = \\
&= 0 \text{ ya que } G \text{ actúa mediante simplectomorfismos en } M.
\end{aligned}$$

Entonces, poniendo $g = e$ (el elemento neutro), se tiene f_e constante, pues

$$\frac{df_e}{dt}(t_0) = \frac{df_{\exp(t_0\eta)}}{dt}(0) = 0$$

y como $f_e(0) = 0$ tenemos el resultado si g está en la imagen de \exp , pero como G es conexo, cualquier vecindad de e genera G . De aquí en adelante, siempre que se hable de un grupo de Lie supondremos que se trata de un grupo conexo. \square

Acciones levantadas. Si G actúa en Q , esa acci3n se levanta a $M := T^*Q$ como $g(q, p) := (gq, p \circ (T_q g)^{-1})$, entonces G conserva θ la 1-forma fundamental de M y por lo tanto su forma simpléctica can3nica. Por la f3rmula de Cartan, si X es campo en M arbitrario y $\xi \in \mathfrak{g}$, se tiene $0 = (\mathcal{L}_{\xi_M} \theta)(X) = d(\xi_M \lrcorner \theta)(X) + (\xi_M \lrcorner d\theta)(X)$, luego, definiendo $\xi \mapsto f_\xi := \xi_M \lrcorner \theta$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, tenemos que $X_{f_\xi} = \xi_M$ y además esta aplicaci3n es homomorfismo de álgebras de Lie y por lo tanto tenemos que la acci3n levantada es de Poisson.

Observaci3n 2. Una condici3n suficiente sobre M para que toda acci3n simpléctica de un grupo de Lie en M sea de Poisson es que $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$ y M sea compacta; una condici3n suficiente sobre G para tener el mismo resultado es que $H^1(\mathfrak{g}) = 0 = H^2(\mathfrak{g})$. Ver [26], 24-26 para esto y un enfoque distinto a la reducci3n simpléctica.

Reducci3n simpléctica. Por la proposici3n anterior, si $p \in \mathfrak{g}^*$ es valor regular de \mathbf{J} , entonces $M_p := \mathbf{J}^{-1}(p)$ es invariante bajo G_p el estabilizador de p ; si G_p actúa libre y propiamente en M_p , el Teorema de la Rebanada de Koszul-Palais (ver [25] pág. 178) asegura que $F_p = M_p/G_p$ es variedad, si esto sucede, además es variedad simpléctica y se llama *espacio reducido de Marsden-Weinstein* o espacio reducido por brevedad.

Teorema 1.2.2 (Marsden-Weinstein [39]). *Sean p valor regular de \mathbf{J} y la acci3n de G_p en M_p libre y propia. Si $A, B \in T_x M$ son levantamientos de $A', B' \in T_{[x]} F_p$, la 2-forma en F_p dada por $\omega'(A', B') := \omega(A, B)$ es una forma simpléctica.*

Demostración. Sea $x \in M_p$, tenemos que $T_x M_p$ es el complemento ortogonal de $T_x Gx$ respecto a ω que denotamos $(T_x Gx)^\omega$: si $v \in T_x M$ y $\xi \in \mathfrak{g}$, entonces tenemos $\omega_x(\xi_M, v) = df_\xi(v) = \langle T_x \mathbf{J}(v), \xi \rangle$, luego $T_x M_p = \text{nuc } T_x \mathbf{J} = (T_x Gx)^\omega$. Por lo anterior ω' está bien definida y es no degenerada; por el Teorema de la Rebanada, F_p es localmente difeomorfo a bolas transversales a las órbitas de G_p y en esas bolas $\omega|$ es cerrada, entonces ω' es cerrada. \square

Proposición 1.2.3 (Teorema de Noether hamiltoniano). *Si (M, ω, H, G) es un sistema hamiltoniano con grupo de simetría G cuya acción es de Poisson, entonces la aplicación de momento asociada \mathbf{J} es constante en las curvas integrales de X_H y en cada espacio reducido (si lo hay) F_p el campo hamiltoniano del hamiltoniano inducido H_p es la proyección de X_H .*

Demostración. Sean $x \in M, \xi \in \mathfrak{g}$, entonces tenemos $\langle T_x \mathbf{J}(X_H), \xi \rangle = df_\xi(X_H) = \omega(\xi_M, X_H) = -dH(\xi_M) = 0$ y la segunda afirmación es inmediata. \square

En vez de usar acciones de grupos se pueden usar foliaciones para aplicar el procedimiento de reducción.

Proposición 1.2.4. *Si Ω es una forma cerrada en M tal que la familia de vectores ξ dada por $v \in \xi_p$ si $\Omega_p(v, u) = 0$ para todo $u \in T_p M$ tiene dimensión constante, entonces ξ es una distribución integrable y, en caso de ser variedad, M' el espacio de hojas de la foliación asociada, llamada la foliación nula de M , admite una única forma simpléctica ω tal que la proyección canónica $\pi : M \rightarrow M'$ satisface $\pi^* \omega = \Omega$.*

Demostración. Sean X, Y campos tangentes a ξ y Z campo arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= d\Omega(X, Y, Z) = X\Omega(Y, Z) - Y\Omega(X, Z) + Z\Omega(X, Y) \\ &\quad - \Omega([X, Y], Z) + \Omega([X, Z], Y) - \Omega([Y, Z], X) = -\Omega([X, Y], Z) \end{aligned}$$

lo que implica que $[X, Y]$ es tangente a ξ ; el Teorema de Frobenius implica que ξ es integrable. Supongamos que M' , el espacio de hojas, es una variedad (localmente siempre lo es), definimos $\omega(X, Y) := \Omega(X', Y')$ con X', Y' levantamientos arbitrarios a M . Claramente, ω está bien definida, es no degenerada, cerrada y es la única forma que satisface $\pi^* \omega = \Omega$. \square

Órbitas coadjuntas. Sea G un grupo de Lie y consideremos la acción de G en G por traslaciones izquierdas $L_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$, esa acción es libre y propia y, levantada, nos permite identificar T^*G con $G \times \mathfrak{g}^*$ y esa acción tiene aplicación de momento $(g, x) \mapsto \text{Ad}_g^* x$, entonces es sumersión. Si $a \in \mathfrak{g}^*$ su espacio reducido asociado es G/G_a , difeomorfo a su órbita \mathcal{O}_a bajo la acción coadjunta, que por lo

tanto tiene una estructura natural de variedad simpléctica. Por el teorema anterior y la fórmula de Palais, la forma simpléctica ω de \mathcal{O}_a en a es

$$\omega(X', Y') = \langle a, [X, Y] \rangle$$

si $X, Y \in \mathfrak{g}$ se proyectan a X', Y' . Esta forma simpléctica se llama *forma de Kirillov*.

Movimiento casi periódico e integrabilidad. En muchos sistemas hamiltonianos clásicos, no fue mediante simetrías evidentes que se obtuvieron explícitamente sus curvas integrales sino que se hallaron a partir de *simetrías ocultas*, es decir, constantes de movimiento construidas a partir de otras consideraciones. En el capítulo siguiente veremos la manera más exitosa hasta ahora de hallar primeras integrales, la representación del sistema como ecuación de Lax, pero incluso usando esa teoría el siguiente resultado es de gran utilidad.

Definición 4. Si (M^{2n}, ω) es una variedad simpléctica, se dice que unas coordenadas locales de M , $(q^a, p_a)_{a=1\dots n}$, son *coordenadas de Darboux* si $\{q^a, q^b\} = 0 = \{p_a, p_b\}$ y $\{q^a, p_b\} = \delta_a^b$ para $a, b = 1 \dots n$. Observemos que se tiene entonces $\omega = dp_a \wedge dq^a$. Para todo punto $p \in M$ y M arbitraria, existen coordenadas de Darboux cerca de p , este resultado se llama *Teorema de Darboux*. Notemos que respecto a coordenadas de Darboux $(q^a, p_a)_{a=1\dots n}$, (1) expresa el campo hamiltoniano de una función H .

Definición 5. Si (M^{2n}, ω) es una variedad simpléctica, se dice que $f_1, \dots, f_s \in C^\infty(M)$ están en *involución* si para todos a, b se tiene $\{f_a, f_b\} = 0$. Por (2), los campos hamiltonianos X_a asociados a las f_a satisfacen $[X_a, X_b] = 0$ para todos a, b . Luego, si las f_a son independientes, estos campos son campos coordenados localmente y por lo tanto, generan una foliación de M . En este caso debe tenerse $s \leq n$.

Teorema 1.2.5 (Liouville-Arnold-Jost [2, 33]). *Sea (M^{2n}, ω) una variedad simpléctica. Si tenemos $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ que están en involución y c es valor regular de $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$, entonces se tiene lo siguiente.*

1. *Si T es una componente conexa y compacta de $M_c := F^{-1}(c)$, T es difeomorfa al n -toro y existe una vecindad de T foliada por n -variedades conexas y compactas donde F es constante (las hojas son n -toros). Cada hoja de esta foliación posee una estructura afín canónica.*
2. *Si un abierto $U \subset M$ está foliado por toros de nivel de F , entonces en una vecindad $W \subset U$ se tienen coordenadas de Darboux $(\varphi^a, I_a)_{a=1\dots n}$, llamadas*

coordenadas de ángulo-acción, tales que $\{\varphi^a\}_{a=1\dots n}$ son coordenadas angulares en los toros, es decir, cada φ^a está definida módulo un múltiplo entero de 2π .

Demostración. Tomamos esta prueba de [48], §13.2.4. Se usa implícitamente que $n > 1$; si $n = 1$, este argumento se simplifica un poco, ver también [3] §50-B. Sean c_0 valor regular de F , $T \subset M_{c_0}$ una componente conexa y compacta y U una vecindad abierta de T tal que $TF|_{TU}$ tenga rango máximo. Los campos hamiltonianos X_a asociados a las funciones f_a generan una foliación \mathcal{F} de U tal que T es una de las hojas. Como T es compacta, el flujo Φ_t^a de $X_a|_T$ está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, luego tenemos una aplicación $K : \mathbb{R}^n \rightarrow T$ dada por $K(t_1, \dots, t_n) = \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n(p)$ con $p \in T$ fijo. K es un difeomorfismo local por lo que es abierta y como el complemento de su imagen también es abierto (se puede definir una aplicación parecida en otros puntos y los Φ_t^a conmutan), K debe ser suprayectiva. De ahí que $T \cong \mathbb{R}^n/R$ con R una retícula (es decir, un subgrupo discreto), por compacidad de T , la única posibilidad es que $T \cong \prod_i^n \mathbb{S}_i^1$ (ver [3], §49 para los detalles).

Sea \mathcal{T} una vecindad tubular de T con $\overline{\mathcal{T}}$ compacta y $\overline{\mathcal{T}} \subset \cup_{a=1}^m U_a$ con $F|_{U_a}^{-1}(c_0) = U_a \cap T \neq \emptyset$ para todo a y U_a abierto. Sea además B una bola en \mathcal{T} transversal a las hojas de \mathcal{F} cercanas a T tal que $p \in B$. Si tuviésemos una sucesión $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a p tal que la hoja que pasa por p_k interseca $\partial \mathcal{T}$, como $\partial \mathcal{T}$ es compacta, tendríamos un punto de acumulación x de esas intersecciones y como $\lim_{k \rightarrow \infty} F(p_k) = F(p) = c_0$ y también $F(x) = c_0$, esto contradice la elección del U_a tal que $x \in U_a$. Por lo tanto, existe una vecindad W de T tal que las hojas de \mathcal{F} que pasan por W están del todo contenidas en $\overline{\mathcal{T}}$ y, dado que son cerradas en $\overline{\mathcal{T}}$, son compactas. La estructura afín está dada por los flujos Φ_t^a . Notemos que cualquier colección $\{\psi_a(f_1, \dots, f_n)\}_{a=1\dots n}$ de funciones independientes define la misma foliación pero la fórmula

$$\{\psi_a \circ F, \psi_b \circ F\} = \sum_{c,d} \frac{\partial(\psi_a, \psi_b)}{\partial(f_c, f_d)} \{f_c, f_d\}$$

(que se puede comprobar usando el lema de Hadamard) implica que las ψ_a también están en involución, la regla de la cadena implica que el cambio de coordenadas $X_1, \dots, X_n \mapsto X_{\psi_1}, \dots, X_{\psi_n}$ es lineal: está dado por la matriz constante en cada hoja $(\partial \psi_a / \partial f_b)_{ab}$, por lo tanto la estructura afín que determinan es la misma.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las hojas de \mathcal{F} son compactas, por lo anterior se trata de toros $T(c)$ parametrizados por los valores $c \in \mathbb{R}^n$ de F en ellos. Tomemos una bola B como arriba y llamemos V a la unión de las hojas transversales a B . Definimos en V coordenadas $(c_1, \dots, c_n, t_1, \dots, t_n)$ dadas por $c_a(x) := f_a(x)$ y t_a en x tal que $x = \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n(q)$ con q la intersección de B

con la hoja en que yace x (las t_a están definidas módulo una retícula en \mathbb{R}^n pero eso no importará después). Tenemos entonces $\{t_a, c_b\} = \delta_a^b$ y $\{c_a, c_b\} = 0$ para todos a, b . En cada toro hacemos un cambio de coordenadas lineal $t_1, \dots, t_n \rightarrow \varphi'_1, \dots, \varphi'_n$ de manera que la retícula en \mathbb{R}^n que lo define sea la generada por $\{2\pi e_a\}_{a=1\dots n}$ con e_a básico canónico. Como B es contraíble, se tiene $V \cong B \times T$; además $\omega|_T = 0$ y la sección $s : T \rightarrow B \times T$ $s(x) = (p, x)$ induce isomorfismos en la cohomología de de Rham (§4 de [14]), de ahí que debe tenerse $[\omega] = 0$ en $H^2(V; \mathbb{R})$ o sea $\omega = d\alpha$ con $\alpha \in \Omega^1(V)$. Podemos tomar curvas lisas $\gamma_i(c)$ $i = 1 \dots n$ que dependan diferenciablemente de las c_a y sean base de $H_1(T(c); \mathbb{Z})$ y así definir las coordenadas de acción

$$I_a(c) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_a(c)} \alpha$$

como $\omega|_{T(c)} = 0$, la fórmula de Stokes implica que I_a sólo depende de la clase de homología de γ_a . Como $d\omega = 0$ y $\omega|_{T(c)} = 0$ tenemos

$$\omega = \sum_{k,l} a_{kl}(c) dc_k \wedge d\varphi'_l + \sum_{k,l} b_{kl}(\varphi', c) dc_k \wedge dc_l$$

y si $\alpha = u^k d\varphi'_k + v^l dc_l$, entonces se tiene $a_{kl} = \partial u^l / \partial c^k - \partial v^k / \partial \varphi'_l$ por lo que

$$2\pi dI_j(c) = \left(\int_{\gamma_j(c)} \frac{\partial u^l}{\partial c_k} d\varphi'_l \right) dc_k = \left(\int_{\gamma_j(c)} \left(a_{kl} + \frac{\partial v^k}{\partial \varphi'_l} \right) d\varphi'_l \right) dc_k = 2\pi \sum_k a_{kj} dc_k$$

ya que podemos suponer que $\gamma_j(c)$ tiene φ'_k constante si $k \neq j$. Como ω es no degenerada, $(a_{kl})_{k,l}$ es invertible en cada punto. Entonces el teorema de la función inversa implica que podemos expresar las I_j en términos de las c_k (en una vecindad $W \subset V$ de T). De nuevo se tiene

$$\omega = \sum_{k,l} a'_{kl}(I) dI_k \wedge d\varphi'_l + \sum_{k,l} b'_{kl}(\varphi', I) dI_k \wedge dI_l$$

y repitiendo el argumento previo tenemos que $dI_k = \sum_l a'_{lk} dI_l$ pero como las I_a son independientes, debe ser $a'_{kl} = \delta_k^l$; luego, como $d\omega = 0$, b'_{kl} depende solamente de I . Visto que

$$0 = d\omega = d \left(\sum_{k,l} b'_{kl}(I) dI_k \wedge dI_l \right),$$

tenemos $\sum_{k,l} b'_{kl}(I) dI_k \wedge dI_l = d \left(\sum_j g_j(I) dI_j \right)$ por el lema de Poincaré. El cambio de variables $\varphi^j = \varphi'_j - g_j(I_1, \dots, I_n)$ satisface que $\omega = dI_k \wedge d\varphi^k$. Por lo tanto, las coordenadas $(\varphi^a, I_a)_{a=1\dots n}$ son las coordenadas de Darboux que buscábamos. \square

Corolario 1.2.6. En el teorema anterior, como $H := f_1$ sólo depende de las coordenadas de acción I_a , las ecuaciones (1) para H son $\dot{I}_a = 0$ y $\dot{\varphi}_a = \partial H / \partial I_a$ por lo que respecto a ellas X_H se ve como

$$(\varphi^1, \dots, \varphi^n, I_1, \dots, I_n) \mapsto \omega^a(I_1, \dots, I_n) \frac{\partial}{\partial \varphi^a}$$

con $\omega^a = \partial H / \partial I_a(I_1, \dots, I_n)$ para $a = 1 \dots n$, constantes en cada toro llamadas frecuencias. Por lo tanto, en cada toro el movimiento es casi periódico. \square

Definición 6. Un sistema hamiltoniano completamente integrable o integrable en el sentido de Liouville es una variedad simpléctica M^{2n} y n funciones f_a en involución que satisfacen $\bigwedge_{a=1}^n df_a \neq 0$ en casi todo punto.

Hay otras versiones interesantes de la primera parte del Teorema anterior, una de las más útiles es la siguiente, debida a É. Cartan y basada en el trabajo de S. Lie. Este teorema permite reducir el orden de un sistema hamiltoniano.

Teorema 1.2.7 (Lie-Cartan [15]). Sea (M, ω, H) un sistema hamiltoniano con constantes de movimiento F_a $a = 1 \dots k$ tales que $p \in \mathbb{R}^k$ sea valor regular de $F = (F_1, \dots, F_k)$, para todos i, j

$$\{F_i, F_j\} = a_{ij}(F_1, \dots, F_k),$$

y la matriz $(a_{ij})_{ij}$ tenga rango constante $2q$ en una vecindad U de $0 \in \mathbb{R}^k$, entonces existen $\Phi_a(F)$ $a = 1 \dots k$ tales que

$$\{\Phi_j, \Phi_{k+q}\} = \begin{cases} \delta_j^k, & \text{si } j, k \leq q; \\ 0, & \text{si } j > 2q \text{ o } k > q. \end{cases}$$

Demostración. Notemos que las F_a se pueden usar como coordenadas locales en una vecindad de $x \in M_p := F^{-1}(p)$. Definimos un corchete de Poisson en U poniendo $\{f, g\}_U(F(y)) := \{f \circ F, g \circ F\}$, como

$$\{f, g\}_U = \{f \circ F, g \circ F\} = \sum_{j,k} \frac{\partial(f, g)}{\partial(F_j, F_k)} \{F_j, F_k\},$$

$\{f, g\}_U$ depende explícitamente de F solamente. Por un Teorema de Lie que generaliza naturalmente el Teorema de Darboux (ver [57]), existe un cambio de coordenadas $F_1, \dots, F_k \mapsto \varphi_1, \dots, \varphi_k$ tal que $\{, \}_U$ tiene la forma

$$\{\varphi_j, \varphi_{k+q}\}_U = \begin{cases} \delta_j^k, & \text{si } j, k \leq q; \\ 0, & \text{si } j > 2q \text{ o } k > q; \end{cases}$$

por lo que definiendo $\Phi_a := \varphi_a(F_1, \dots, F_k)$ tenemos las constantes de movimiento deseadas. \square

Observación 3. En la prueba anterior, los campos X_{Φ_a} con $a > 2q$ son tangentes a M_p y anulan $\omega|_{M_p}$. Poniendo $x \in M_p$, $V = \langle X_{\Phi_a} \rangle_{a=1\dots k}$ y $T_x M_p = V^\omega$ (el ortogonal simpléctico), dado que $(V^\omega)^\omega = V$ y $V/V \cap V^\omega$ es naturalmente un espacio vectorial simpléctico (ver 1.2.4), los campos X_{Φ_a} con $a > 2q$ generan la foliación nula de $\omega|_{M_p}$. Por lo tanto, por 1.2.4, el espacio de hojas asociado, si es variedad, es una variedad simpléctica.

Teorema 1.2.8 (Mishchenko-Fomenko [42]). *Si (M, ω, H) es un sistema hamiltoniano que admite constantes de movimiento F_a , $a = 1 \dots k$ tales que*

$$\{F_j, F_k\} = C_{jk}^l F_l$$

con C_{jk}^l constantes, estas funciones generan linealmente un álgebra de Lie \mathfrak{g} . Definimos el rango de \mathfrak{g} como el máximo rango de $(C_{jk}^l F_l)_{jk}$ que es un número par $2q$. Si se satisface

$$\dim M = 2n = 2k - 2q,$$

entonces si p es valor regular de $F = (F_1, \dots, F_k)$: $M_p := F^{-1}(p)$ tiene una estructura afín canónica, cada componente conexa y compacta de M_p es difeomorfa al k -toro y, con respecto a esa estructura afín, X_H es un campo constante.

Demostración. Sea p valor regular de F . Por el Teorema anterior, tenemos en una vecindad V de M_p , $\Phi_a(F_1, \dots, F_k)$, $a = 1 \dots k$ funciones independientes que satisfacen las relaciones indicadas. Si consideramos, $N_p = \{x \in M : \Phi_a(x) = p_a, 1 \leq a \leq 2q\}$, N_p es subvariedad simpléctica ($\dim N_p = 2n - 2q$), y las $k - 2q = (1/2)\dim N_p$ funciones Φ_a , $a > 2q$ determinan un sistema completamente integrable en N_p , por lo que 1.2.5 implica la conclusión del teorema. Notemos que dichas funciones sólo están definidas en una vecindad de M_p , en otras M_y se obtienen posiblemente otras constantes de movimiento. \square

Podemos aplicar el teorema anterior al problema de Kepler: una partícula en $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ sujeta a un potencial central $V(x) = 1/|x|$. Tenemos la conservación del momento angular $\mathbf{J} : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}_3$ y de la energía, es decir, un álgebra de Lie de primeras integrales de dimensión cuatro y rango dos en $T^*\mathbb{R}^3$.

1.3. Mecánica en grupos de Lie

Como ilustración de un sistema hamiltoniano con simetría tenemos el flujo geodésico de una métrica (pseudo)-riemanniana invariante izquierda (o derecha) en un grupo de Lie. Este problema generaliza naturalmente el caso del movimiento de un cuerpo rígido en torno a un punto fijo. Poincaré consideró este problema en

[49] pero otros autores habían hecho antes generalizaciones parciales a los grupos SO_n , ver [21].

Definición 7. Sean \mathfrak{G} un grupo de Lie y $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ un isomorfismo lineal con $\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle$. A se llama clásicamente *tensor de inercia*. Se tiene entonces un producto escalar en \mathfrak{g} dado por $(x, y) := \langle Ax, y \rangle$ que se extiende a una métrica pseudoriemanniana invariante izquierda en \mathfrak{G} , entonces A se extiende a un isomorfismo $A : T\mathfrak{G} \rightarrow T^*\mathfrak{G}$. Nuestro lagrangiano será $l(x) = (1/2)(x, x)$.

Consideremos las trivializaciones izquierda y derecha de $T^*\mathfrak{G} : L, R : T^*\mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G} \times \mathfrak{g}^*$ respectivamente. Definiendo $\text{Ad} : \mathfrak{G} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{G} \times \mathfrak{g}^*$, como $\text{Ad}(g, m) = (g, \text{Ad}_g^* m)$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathfrak{G} \times \mathfrak{g}^* & \\
 L \nearrow & & \searrow \pi \circ \text{Ad} \\
 T^*\mathfrak{G} & \xrightarrow{\quad J \quad} & \mathfrak{g}^* \\
 R \searrow & & \nearrow \pi \\
 & \mathfrak{G} \times \mathfrak{g}^* &
 \end{array}$$

donde J es la aplicación de momento dada por las traslaciones izquierdas y π es la proyección canónica. J se interpreta clásicamente como el momento angular con respecto al espacio, llamamos a $\mathcal{M} := \pi \circ L$ el momento angular con respecto al cuerpo. Por otro lado, Ω tal que $A\Omega = \mathcal{M}$ se llama la velocidad angular con respecto al cuerpo.

Teorema 1.3.1 (Poincaré-Arnold). *El momento angular $t \mapsto \mathcal{M} = \mathcal{M}(t)$ corresponde a una geodésica si y sólo si satisface la ecuación de Lie-Poisson⁸*

$$\dot{\mathcal{M}} = \text{ad}_\Omega^* \mathcal{M}; \quad (4)$$

que es equivalente a la ecuación de Euler-Poincaré:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \Omega} = \text{ad}_\Omega^* \frac{\partial l}{\partial \Omega}. \quad (5)$$

Demostración. Aplicando la transformación de Legendre inversa al hamiltoniano H dado por el lagrangiano l , (4) se transforma en (5). Sea $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow \mathfrak{G}$, $(s, t) \mapsto \sigma_s(t)$ una variación propia de $t \mapsto g_t$ y denotemos $\delta := \partial / \partial s|_{s=0}$,

⁸Ver [38] cap. 13 para comentarios históricos sobre esta terminología.

$S(s) = \int_0^1 l(\dot{\sigma})dt$, $\Omega = \Omega(s, t) = \sigma^{-1}\dot{\sigma}$, $\Xi = \Xi(s, t) = \sigma^{-1}\delta\sigma$. Entonces, aplicando la trivialización izquierda L a S , tenemos

$$\delta S(s) = \int_0^1 \frac{\partial l}{\partial \Omega}(\Omega)\delta\Omega dt = \int_0^1 \left(\text{ad}_\Omega^* \frac{\partial l}{\partial \Omega}(\Omega) - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \Omega} \right) \Xi dt$$

ya que $\delta\Omega = \dot{\Xi} + [\Omega, \Xi]$. De ahí que $\delta S = 0$ para toda σ si y sólo si se cumple (5). Notemos que (4) también es consecuencia directa de 1.2.3 aplicado a J \square

Observación 4. Notemos que la prueba tiene sentido para cualquier hamiltoniano regular e invariante izquierdo en $T^*\mathfrak{G}$. Para hamiltonianos invariantes derechos hay que cambiar el signo de (4).

Observación 5. La ecuación que determina el flujo geodésico es

$$\dot{g}_t = g_t \Omega_t := T_1 L_{g_t} \Omega_t$$

y se llama *ecuación de reconstrucción*.

Observación 6. Si \mathfrak{g} es semisimple o \mathfrak{G} es compacto, existe una forma bilineal simétrica k en \mathfrak{g} que es Ad-invariante (k es la forma de Killing en el primer caso). Luego, $(a, b) = k(a, \mathcal{I}b)$ para algún isomorfismo lineal $\mathcal{I} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, k -autoadjunto. Tenemos para todo $a \in \mathfrak{g}$ lo siguiente: $k(\mathcal{I}\Omega_t, a) = \langle \mathcal{M}, a \rangle = \langle \mathcal{M}, [\Omega_t, a] \rangle = k(\mathcal{I}\Omega_t, [\Omega_t, a]) = -k([\Omega_t, \mathcal{I}\Omega_t], a)$, lo que implica

$$\mathcal{I}\dot{\Omega}_t = [\mathcal{I}\Omega_t, \Omega_t] \tag{6}$$

que es un caso especial de lo que se llama en general *ecuación de Lax*. Llamaremos a (6) *ecuación de Euler*.

Definición 8. Una función $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ se llama *función de Casimir* si es constante en las órbitas coadjuntas.

Observación 7. (4) significa geoméricamente que las órbitas coadjuntas de \mathfrak{g}^* son invariantes bajo el flujo de \mathcal{M} , de hecho el sistema inducido en cada órbita es hamiltoniano con respecto a la forma de Kirillov, ver 1.2.3. Las funciones de Casimir son entonces primeras integrales triviales de (4).

Poincaré en [49] formuló (5) de manera más general, incluyendo las ecuaciones ordinarias de Euler-Lagrange, y observó que su ecuación es aplicable al caso de un cuerpo rígido libre y al de un cuerpo rígido con una cavidad llena de líquido, ver §2.3. Arnold en [1] observó que (4) tiene sentido para un grupo de difeomorfismos que conserva volumen y la usó para estudiar la dinámica de un fluido ideal. Actualmente, este formalismo se ha aplicado a casi todo problema que involucre cuerpos rígidos, fluidos o plasmas, ver [5, 8, 26, 38].

Capítulo 2

Sistemas integrables y cuerpos rígidos

En este capítulo presentamos una breve descripción del *método de la deformación isoespectral* ejemplificado mediante la ecuación de Euler para \mathfrak{so}_3 y el flujo geodésico de un elipsoide. Después se presentan ecuaciones de Euler-Poincaré en \mathfrak{so}_4 que representan un cuerpo rígido con una cavidad elipsoidal llena de líquido.

2.1. La ecuación de Euler para el cuerpo rígido libre

Esta sección está basada esencialmente en [8], cap. 2. Ver [3] cap. 6 para una explicación física del sistema (8) (expresa esencialmente la conservación del momento angular). Estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones de Euler* para el cuerpo rígido libre⁹.

La acción adjunta de SO_3 en \mathfrak{so}_3 es isomorfa a la acción natural de SO_3 en \mathbb{R}^3 y de hecho ese isomorfismo es una isometría respecto a la forma de Killing $(X, Y) \mapsto k(X, Y) := -(1/2)\text{Tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$ y el producto escalar canónico de \mathbb{R}^3 . En efecto, consideremos la base de \mathfrak{so}_3

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

⁹La referencia original es [20] pero al parecer Lagrange obtuvo estas ecuaciones de manera independiente, así como las ecuaciones para un cuerpo rígido en un campo gravitatorio.

el isomorfismo del que hablamos φ está dado por $x^i e_i \mapsto (x^1, x^2, x^3)$ y se tiene $\varphi(X) \cdot \varphi(Y) = k(X, Y)$ para todos $X, Y \in \mathfrak{so}_3$. Por lo tanto, la ecuación de Euler para \mathfrak{so}_3 $\mathcal{A}\dot{\Omega} = [\mathcal{A}\Omega, \Omega]$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 \\ \dot{\Omega}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3 \Omega_1 \\ \dot{\Omega}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2\end{aligned}\tag{8}$$

con los I_a los valores propios de \mathcal{A} que supondremos distintos, pues de otra manera, el sistema se trivializa. Los I_a son los momentos de inercia del cuerpo.

Para argumentar la integrabilidad conviene pasar a la descripción hamiltoniana. Esto equivale a aplicar el cambio de coordenadas $x = I_1 \Omega_1, y = I_2 \Omega_2, z = I_3 \Omega_3$. En esta descripción, las órbitas coadjuntas son las esferas $M(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = c$ y el hamiltoniano es la energía cinética

$$H(x, y, z) = \frac{x^2}{I_1} + \frac{y^2}{I_2} + \frac{z^2}{I_3}.$$

Como las esferas tienen dimensión dos, H induce un sistema completamente integrable en cada esfera de radio positivo, en efecto toda superficie orientable admite una forma simpléctica (que es simplemente una forma de área) y respecto a ella todo sistema hamiltoniano cuyo conjunto de puntos críticos tiene medida cero es completamente integrable pues él mismo es una constante de movimiento del sistema. Las curvas integrales de X_H están dadas por las curvas de nivel de $F = (H, M) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ver figura 3.

(8) no sólo da lugar a un sistema completamente integrable sino que también su flujo es linealizable canónicamente, para ello complejificaremos \mathfrak{so}_3 . En la siguiente sección usaremos que, de hecho, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}_3 \otimes \mathbb{C}$. Esto se puede probar considerando la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$E_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\tag{9}$$

que satisface $[E_a, E_b] = \varepsilon_{abc} E_c$ con ε un símbolo de Levi-Civita.

Si $A \neq B/l_a$ con $a = 1, 2, 3$, entonces $C := F^{-1}(A, B)$ (extendiendo F a \mathbb{C}^3) es una curva elíptica con dos agujeros. En efecto, C está dada por el siguiente sistema de ecuaciones, poniendo $q_a = 1/I_a$ y $q_{ab} = q_a - q_b$:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 2B, \\ q_{13}x^2 + q_{23}y^2 &= 2(A - q_3B);\end{aligned}$$

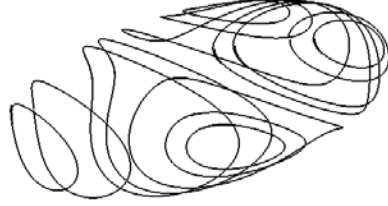


Figura 3: Dinámica de la velocidad angular del cuerpo rígido libre

pero la segunda ecuación define una cónica no singular y por lo tanto es isomorfa al plano complejo. La primera ecuación define C como una cubierta doble del plano con cuatro puntos de ramificación por lo que la fórmula de Riemann-Hurwitz implica que (la completación de) C tiene género uno y por tanto es una curva elíptica.

Las soluciones de (8) se pueden obtener considerando la 1-forma holomorfa sobre C

$$\omega := \frac{dx}{q_{32}yz} = \frac{dy}{q_{13}zx} = \frac{dz}{q_{21}xy}$$

ω es la constante 1 a lo largo de una solución. La completación de C que denotamos S es isomorfa a su variedad jacobiana $J(S)$ obtenida como $H^0(S; \Omega_S^1)^* / H^1(S; \mathbb{Z})$. Como $H^0(S; \Omega_S^1)^* \cong \mathbb{C}$ y $H^1(S; \Omega_S^1)$ es el espacio de 1-formas holomorfas sobre S , se puede dar un isomorfismo $S \cong J(S)$ poniendo, si $p \in S$,

$$p \mapsto \mathcal{A}(p) := \int_{\gamma} \omega$$

con γ una trayectoria de un punto fijo p_0 en S a p . La fórmula de Stokes implica que si tomamos dos caminos homotópicos $\gamma \simeq \gamma'$ (relativamente a sus extremos), entonces $\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma'} \omega$; pero \mathcal{A} está definida módulo las integrales sobre un par de lazos basados en p_0 que sean base de $\pi_1(S, p_0) \cong \mathbb{Z}^2 \cong H_1(S; \mathbb{Z})$. El subgrupo aditivo que generan en \mathbb{C} esas integrales se llama *retícula de períodos*. Entonces $\mathcal{A} : S \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ con Λ la retícula de períodos de S (\mathcal{A} se llama *aplicación de Abel-Jacobi*). Pero \mathcal{A} manda la solución de (8) por p_0 a una recta horizontal en \mathbb{C} y cambiando de p_0 tenemos que las curvas integrales que buscábamos son rectas

(parametrizadas linealmente) respecto a la estructura afín canónica de $J(S) \cong S$. Es decir, respecto a coordenadas afines naturales de C , el flujo del sistema no lineal (8) se trivializa: sus curvas integrales son tangentes a un campo constante en el plano (en \mathbb{C}/Λ para ser precisos).

Hemos visto entonces que el sistema (8) presenta los atributos A, B, C mencionados en la Introducción como indicadores de integrabilidad. En la siguiente sección mostraremos la linealizabilidad de (8) de otra manera.

Integrabilidad del flujo geodésico global. Si consideramos el flujo geodésico, dado por la ecuación $\dot{g}_t = g_t \Omega_t$, tenemos, como en el problema de Kepler, un álgebra de Lie de constantes de movimiento de dimensión cuatro y rango dos, dada por el momento J y la energía H . Como la dimensión de T^*SO_3 es seis y $(J, H) : T^*SO_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tiene rango máximo en casi todo punto, 1.2.8 nos permite concluir que las geodésicas viven en toros bidimensionales.

2.2. Sistemas integrables y ecuaciones de Lax

Esta sección está basada sobre todo en [8, 31], ver las notas bibliográficas en [52], pág. 146 para rastrear el origen de estas ideas.

Hemos visto que para un grupo de Lie semisimple \mathfrak{G} , la ecuación de Lie-Poisson se puede escribir como ecuación de Lax $\mathcal{L}\dot{\Omega} = [\mathcal{L}\Omega, \Omega]$. Por un Teorema de Ado ([28], pág. 189), toda álgebra de Lie real de dimensión finita \mathfrak{g} se encaja en $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) = \text{Mat}_m(\mathbb{C})$ para algún m , entonces consideraremos ecuaciones de Lax en $\mathfrak{g} \subset \text{Mat}_m(\mathbb{C})$.

Observación 8. Consideremos en general una familia de polinomios de matrices, $\{A_z(t) = \sum_j A_j(t)z^j\}_{t \in \mathbb{R}}$ con $A_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{g} \subset \text{Mat}_m(\mathbb{C})$ que satisface $\dot{A}_z = [A_z, B_z]$ con $B_z(t)$ dependiente de $A_z(t)$. Si para cada $z \in \mathbb{C}$, P_z es la solución fundamental del problema de Cauchy

$$\dot{P}_z = -B_z(t)P_z, \quad P_z(0) = I_N$$

entonces $A_z P_z$ también es solución de la ecuación lineal anterior, pero su condición inicial es $A_z(0)$ y la única solución del problema de Cauchy correspondiente es $P_z A_z(0)$ luego $P_z^{-1} A_z P_z = A_z(0)$, por lo que el polinomio característico de A_z $f(z, w) = \det(A_z - wI_m)$ no depende de t . Entonces el espectro de A_z es constante, por lo tanto al buscar soluciones de una ecuación de Lax, se buscan matrices con el mismo polinomio característico (y entonces mismo espectro), de ahí el nombre de *método de la deformación isopectral*. z (ó λ) se llama *parámetro spectral*.

Definición 9. Sea $A_z \in \mathfrak{g}[z]$. El conjunto de ceros $C := V(f)$ de $f(z, w) = \det(A_z - wI_m)$ es una curva algebraica. Si f es irreducible, al agregar una cantidad finita de puntos a C (es decir, al *normalizar* C , ver [24], cap. 2), obtenemos una superficie de Riemann compacta y conexa S que denotamos también \bar{C} , llamada la *curva espectral* de A_z , y una cubierta ramificada $z : S \rightarrow \mathbb{P}^1 := \mathbb{C}P^1$ de grado m que extiende la restricción a C de la proyección $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto z$.

Se tienen los siguientes hechos sobre superficies de Riemann (ver [24, 27, 41] o [31] para una descripción breve de las ideas principales).

Teorema 2.2.1. *Sea S superficie de Riemann compacta y conexa. \mathcal{O}_S y \mathcal{O}_S^* denotan la gavilla de funciones holomorfas en S y la gavilla de funciones holomorfas en S que no se anulan respectivamente. La sucesión exacta de gavillas sobre S*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{2\pi i \cdot} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_S^* \longrightarrow 1$$

induce una sucesión exacta larga en cohomología que da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow J(S) \hookrightarrow H^1(S; \mathcal{O}_S^*) \xrightarrow{\text{grado}} H^2(S; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

con $\frac{H^1(S; \mathcal{O})}{H^1(S; \mathbb{Z})} = J(S)$ la variedad jacobiana de S que es homeomorfa al toro complejo $\mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^{2g}$ con g el género de S . $H^1(S; \mathcal{O}_S^*)$ se llama grupo de Picard y está en biyección natural con las clases de isomorfismo de haces de líneas holomorfas sobre S . Como $H^2(S; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, a cada entero d corresponde un toro $\text{Pic}^d(S) \cong J(S)$ de haces de líneas no isomorfos de grado d . \square

Proposición 2.2.2. *Si $p : \tilde{S} \rightarrow S$ es una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann compactas y conexas y L es un haz de líneas holomorfo sobre \tilde{S} , entonces tenemos lo siguiente.*

1. $H^0(S; p_* \mathcal{O}(L)) \cong H^0(\tilde{S}; \mathcal{O}(L))$.
2. $p_* \mathcal{O}(L) \cong \mathcal{O}(E)$ con E un haz vectorial holomorfo sobre S de rango $\text{grado}(p)$ (el grado de p).

$\mathcal{O}(E)$ y $\mathcal{O}(L)$ denotan las gavillas de secciones correspondientes. \square

Proposición 2.2.3. *Si se tienen las hipótesis de la proposición anterior y L y E son los haces descritos (se prueba que E es único), entonces tenemos que*

$$\text{grado}(E) = \text{grado}(L) + (1 - \tilde{g}) - \text{grado}(p)(1 - g)$$

con \tilde{g} , g los géneros de \tilde{S} , S , respectivamente. \square

Definición 10. Sea $S = \overline{V(f)}$ superficie de Riemann compacta de género g con f irreducible dado por $f(z, w) = \det(A - wI_m)$, $A \in \mathfrak{g}[z]$.

$$\mathcal{P}_S = \{A_z \in \mathfrak{g}[z] : \det(A_z - wI_m) = f\}$$

es la familia isoespectral asociada a S .

Proposición 2.2.4. Sea $A_z \in \mathcal{P}_S$ y S como en la definición anterior, entonces existe un único haz de líneas holomorfo L sobre S de grado $m - 1 + g$ tal que es subhaz de $S \times \mathbb{C}^m$ y si $(z, w) \in V(f)$ y w es valor propio simple de A_z , la fibra de L sobre (z, w) es el espacio propio de A_z correspondiente a w .

Demostración. Consideremos la subvariedad algebraica V de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^{m-1}$ definida como

$$V = \{(z, w, [u]) : A_z u = wu\}$$

y la subvariedad $V_0 \subset V$ dada por

$$V_0 = \{(z, w, [u]) \in V : w \text{ es valor propio simple de } A_z\}.$$

Por hipótesis, los puntos de $C := V(f)$ donde la proyección $(z, w) \mapsto z$ se ramifica (es decir, los puntos (z, w) con w valor propio múltiple de A_z) son finitos, luego son aislados. Sea $p \in C$ uno de esos puntos, como C se supone lisa, tenemos una coordenada compleja ζ definida cerca de p que satisface

$$\zeta \mapsto F(\zeta) := (\psi(\zeta), [Z_1(\zeta) : \dots : Z_m(\zeta)]) \in V_0$$

con las Z_a funciones meromorfas con un polo en $\zeta = 0$ y ψ holomorfa. Luego se puede extender holomórficamente F a 0, definiendo

$$\zeta \mapsto \Phi(\zeta) := (\psi(\zeta), [\zeta^k Z_1(\zeta) : \dots : \zeta^k Z_m(\zeta)]) \in V$$

con k el máximo de los órdenes del polo 0 respecto a las Z_a ¹⁰. De esta manera para todo punto en C se tiene una sección local holomorfa Φ de la proyección $C \times \mathbb{C}P^{m-1} \rightarrow C$ que genera los espacios propios correspondientes a A_z . En los puntos de $S - C$ el mismo procedimiento nos arroja secciones holomorfas de la proyección $S \times \mathbb{C}P^{m-1} \rightarrow S$ compatibles con las anteriores; esta familia de secciones define el haz deseado L .

El haz E sobre \mathbb{P}^1 asociado a la cubierta ramificada $z : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ y a L dado por la Proposición 2.2.2 es el haz trivial ya que éste satisface la propiedad del inciso 2. La Proposición 2.2.3 implica entonces que el grado de L es $m - 1 + g$. \square

Definición 11. El resultado anterior permite definir una aplicación $\varphi_S : \mathcal{P}_S \rightarrow \text{Pic}^d(S)$ con $d = m - 1 + g$, llamada *aplicación de vectores propios*.

¹⁰Las Z_a podrían tener en cambio un cero común en 0, en ese caso bastaría multiplicar por $1/\zeta^k$ con k el mínimo orden de 0 respecto a las Z_a .

Matrices R y linealizabilidad. En ciertos casos la aplicación de vectores propios linealiza el flujo de una ecuación de Lax. La prueba del siguiente teorema constará de varios pasos que involucran las llamadas matrices u operadores R . Sea S la curva espectral de $A \in \mathfrak{g}[z]$, f su polinomio característico asociado y $z : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ es la cubierta ramificada asociada, denotamos $U_+ = z^{-1}(\mathbb{C})$ y $U_- = z^{-1}(\mathbb{P}^1 - \{0\})$, pensando \mathbb{P}^1 como $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Entonces $U_+ \cap U_- = V(f) - \{0\} \times \mathbb{C}$.

Teorema 2.2.5 (Reyman [51]). Sean $B = B(z, w) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}, w]$ y $A \in \mathfrak{g}[z]$ con curva espectral S lisa. La aplicación de vectores propios φ_S linealiza el flujo del campo en $\mathcal{P}_S \subset \mathfrak{g}[z]$ dado por definir para cada $A_z \in \mathcal{P}_S$:

$$A_z \mapsto [A_z, B(z, A_z)_+],$$

con $B(z, A_z)_+$ la parte polinomial en z de $B(z, A_z)$ incluyendo la constante. La dirección del flujo está dada por $B(z, w)$ pensado como 1-cociclo definido en $U_+ \cap U_-$ con clase de cohomología en $H^1(S; \mathcal{O}_S) \cong T_0 J(S)$ (visto como espacio tangente).

Definición 12. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie, \mathfrak{g}^* es naturalmente una variedad de Poisson con el corchete de Lie-Poisson:

$$\{f, g\}(x) = \langle x, [df, dg] \rangle$$

con $df, dg \in \mathfrak{g}^{**} \cong \mathfrak{g}$. En el caso de dimensión finita, el corchete de Lie-Poisson se restringe a la forma de Kirillov en las órbitas coadjuntas. Dada $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, su campo hamiltoniano X_f está dado esencialmente por (4):

$$X_f(x) = \text{ad}_{df(x)}^* x.$$

Proposición 2.2.6. Sea $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ una aplicación lineal tal que

$$[x, y]_R := [Rx, y] + [x, Ry] \quad (10)$$

sea un corchete de Lie (es decir, tal que satisfaga la identidad de Jacobi) y sea $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una función de Casimir para $[\cdot, \cdot]$. Se tiene que el campo hamiltoniano X_φ^R dado por $\{\cdot, \cdot\}_R$ (el corchete de Lie-Poisson inducido por $[\cdot, \cdot]_R$) está dado por

$$X_\varphi^R(x) = \text{ad}_{Rd\varphi(x)}^* x;$$

y, si ψ es otra función de Casimir para $[\cdot, \cdot]$, se tiene $\{\varphi, \psi\}_R = 0$. \square

Proposición 2.2.7. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ como espacio vectorial. Se tiene que $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por $R(x) = (1/2)(x_+ - x_-)$ con $x = x_+ + x_- \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ define un corchete de Lie mediante (10) y si φ es función de Casimir para $[\cdot, \cdot]$ se tiene

$$X_\varphi^R = \mp \text{ad}_{d\varphi_\mp}^* .$$

Denotamos \mathfrak{g}_0 a \mathfrak{g} con el corchete $[\cdot, \cdot]_R$. \square

Las pruebas de las proposiciones anteriores son inmediatas.

Proposición 2.2.8. *Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ como en la proposición anterior; G grupo de Lie con álgebra de Lie \mathfrak{g} y A, B subgrupos de G con álgebras de Lie \mathfrak{a} y \mathfrak{b} respectivamente. Sea φ función de Casimir en \mathfrak{g}^* y supongamos que $\exp(td\varphi(\xi)) = a(t)^{-1}b(t)$. Se tiene entonces que las soluciones de*

$$\dot{\xi} = \text{ad}_{d\varphi_-(\xi)}^* \xi$$

están dadas por $\xi(t) = \text{Ad}_{b(t)}^* \xi_0$, ξ_0 constante.

Demostración. Sean $\sigma : G_0 := A \times B \rightarrow G$, $\sigma_0 : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}$ dadas por $\sigma(a, b) = ab^{-1}$, $\sigma_0(x, y) = x - y$. Respecto a trivializaciones izquierdas $T_{(a,b)}\sigma = \text{Ad}_b \circ \sigma_0$, por lo que es invertible en cada fibra. Definimos $\sigma^* : T^*G_0 \rightarrow T^*G$ dada por $\sigma^*(g, p) = (\sigma(g), (T_g\sigma^*)^{-1}(p))$. σ^* conserva las estructuras simplécticas canónicas, entonces, poniendo $\varphi' = \varphi \circ \sigma^*$, σ^* manda el flujo del campo hamiltoniano $X_{\varphi'}$ (con respecto a \mathfrak{g}_0) en el flujo de X_φ . Este último flujo está dado por $t \mapsto x_t = (g_0 \exp(td\varphi(\xi)), \xi)$ pues basta considerar las ecuaciones (1) para φ . Por 2.2.7 tenemos el resultado si se toma $(\sigma^*)^{-1}(x_t)$ con $g_0 = e$. \square

Observación 9. Nos interesa aplicar estos resultados a $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}[z, 1/z] = \mathfrak{g}[z] \oplus \mathfrak{g}[1/z]$ (poniendo las constantes en el primer sumando). Supondremos que lo dicho anteriormente vale también para este caso de dimensión infinita, ver [52] para una justificación de esto. Resulta que si en \mathfrak{g} se tiene una forma bilineal simétrica Ad-invariante, ésta se puede extender a $\tilde{\mathfrak{g}}$ de manera que la ecuación

$$\dot{A}_z = [A_z, B(z, A_z)_+] \quad (11)$$

sea una ecuación de tipo (6). Es decir, (11) es también esencialmente una ecuación hamiltoniana con respecto a la estructura de $\tilde{\mathfrak{g}}_0$ descrita en 2.2.7 con $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}[z]$, $\mathfrak{b} := \mathfrak{g}[1/z]$, ver [8], Apéndice 2 para los detalles de esto.

Demostración de 2.2.5. Supongamos que $\exp(tB(z, A))$ se exprese como $a(t)^{-1}b(t)$ con $a(t), b(t)$ curvas lisas en los grupos de Lie generados por $\mathfrak{g}[z], \mathfrak{g}[1/z]$ respectivamente. Este problema de factorización se conoce como *problema de Riemann-Hilbert*, ver [52] para una discusión del problema en este contexto.

Sea E_0 el haz correspondiente bajo φ_S a la condición inicial A y consideremos F_t el haz sobre S definido por la función de transición $(z, w) \mapsto \exp(tB(z, w))$ en $U_+ \cap U_-$ (los haces son triviales sobre U_+ y U_-). Por 2.2.8, las soluciones de (11) están dadas por

$$A_z(t) = a(t)Aa(t)^{-1} = b(t)Ab(t)^{-1}$$

intercambiando los papeles de a y b para tener la primera igualdad. Esto significa que sobre $U_+ \cap U_-$ a y b determinan un isomorfismo $E_t \cong E_0$. Sea $(z, w) \mapsto \nu(z, w)$ una sección de E_0 definida en $U_+ \cap U_-$. Tenemos $A\nu(z, w) = w\nu(z, w)$, luego:

$$\begin{aligned} B(z, A)\nu(z, w) &= B(z, w)\nu(z, w), \\ \exp(tB(z, A))\nu(z, w) &= \exp(tB(z, w))\nu(z, w), \\ b(t)\nu(z, w) &= \exp(tB(z, w))a(t)\nu(z, w). \end{aligned}$$

Esto implica que $E_t \cong E_0 \otimes F_t$ como queríamos. \square

Observación 10. Como todo 1-cociclo, B está definido módulo 0-cofronteras¹¹, que son entre otras las funciones holomorfas en U_+ ó en U_- . Es claro sin embargo que a B puede añadirse un polinomio en w y se obtiene la misma ecuación (11).

La ecuación de Euler y las ecuaciones de Nahm. Las ecuaciones (8) se pueden ver como casos sencillos de las *ecuaciones de Nahm*, relacionadas con las ecuaciones de Yang-Mills auto-duales. Se buscan matrices $T_i(z)$ que dependan meromorfaemente de z y satisfagan

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial z} &= [T_2, T_3] \\ \frac{\partial T_2}{\partial z} &= [T_3, T_1] \\ \frac{\partial T_3}{\partial z} &= [T_1, T_2] \end{aligned}$$

las cuales son equivalentes a una ecuación de Lax, poniendo $A_\lambda = T_1 + iT_2 - 2iT_3\lambda + (T_1 - iT_2)\lambda^2$ y $B_\lambda = -iT_3 + (T_1 - iT_2)\lambda$ se tiene

$$\frac{\partial A_\lambda}{\partial z} = [A_\lambda, B_\lambda].$$

Un argumento parecido a la prueba del Teorema 2.2.5 muestra que la aplicación de vectores propios linealiza el flujo de la ecuación anterior en la variedad jacobiana de su curva espectral y la dirección del flujo está dada por el polinomio μ/λ . Ver [30] pág. 43. El caso que nos interesa se obtiene poniendo $T_a = l_a u_a(z) E_a$ con $a = 1, 2, 3$, $\{E_a\}$ la base (9) y suponiendo z real. Esta ecuación de Lax se debe a N. J. Hitchin [29].

¹¹Además, siendo precisos, estaríamos considerando $[B] \in \check{H}^1(\{U_+, U_-\}; \mathcal{O}_S^*)$ y $H^1(S; \mathcal{O}_S^*)$ es el colímite de esas cohomologías sobre las cubiertas indicadas por \mathbb{N} digamos. Toda cubierta tiene un refinamiento «bueno» (en el sentido de [14]) por lo que podemos usar una de ellas para calcular la cohomología, pero $\{U_+, U_-\}$ nunca es buena.

Podemos calcular el género de la curva espectral de la ecuación de Lax anterior en el caso del cuerpo rígido. El polinomio $p(\lambda, \mu) = \det(A_\lambda - \mu I_2)$ es de la forma

$$\mu^2 + a\mu\lambda + b\lambda^4 + c\lambda^2 + d$$

entonces define, al agregársele un punto al infinito, una cubierta doble ramificada de \mathbb{P}^1 , con tantos puntos de ramificación como ceros tiene el discriminante de p que es de grado cuatro y genérico, por lo que tiene cuatro raíces distintas, entonces la fórmula de Riemann-Hurwitz nos dice que la curva espectral S de A_λ es una curva elíptica. Además, la aplicación de vectores propios linealiza el flujo de la ecuación en $\text{Pic}^2(S) \cong J(S) \cong S$.

El flujo geodésico de un elipsoide asimétrico. El segundo ejemplo que presentamos aquí es el flujo geodésico de un elipsoide asimétrico en \mathbb{R}^{n+1} cuya completa integrabilidad fue observada en primer lugar por Jacobi (para $n = 2$). Nos basamos en [7] y en [3], Apéndice 15. Consideremos el elipsoide en \mathbb{R}^{n+1} de ecuación

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j^2}{a_j} = 1$$

con x_j las coordenadas canónicas y $0 < a_1 < \dots < a_{n+1}$. Las cuádricas C_z de ecuación

$$f_z(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j^2}{a_j - z} = 1$$

se llaman *confocales* al elipsoide de arriba, ver figura 4 (notemos que forman una red ortogonal, y entonces, un sistema de coordenadas en casi todo \mathbb{R}^n). No probaremos directamente la integrabilidad del flujo geodésico del elipsoide sino estudiaremos otro sistema hamiltoniano más manejable cuyo flujo está íntimamente relacionado con aquél. A saber, se trata del sistema hamiltoniano cuyas curvas integrales son las curvas cuyos puntos son líneas rectas tangentes a una misma geodésica del elipsoide, para dar sentido a esto requeriremos varias observaciones.

Definición 13. Sea N una hipersuperficie de una variedad simpléctica (M, ω) . Notemos que E , el haz de vectores tangentes a N tales que son ω -ortogonales a todo otro vector tangente a N , es un subhaz de TN de rango 1, por lo que, visto como distribución, es integrable. Las curvas integrales de E se llaman *curvas características de N* . Si el espacio Q de curvas características es una variedad, entonces éste admite una única forma simpléctica ω' tal que $p^*\omega' = \omega$ con $p : M \rightarrow Q$ la proyección canónica, ver 1.2.4.

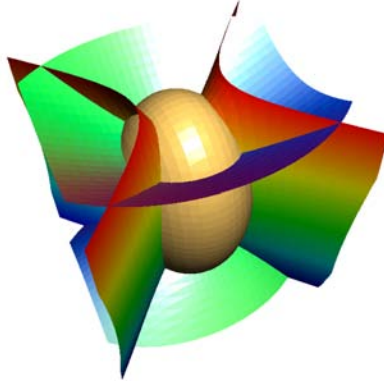


Figura 4: Cuádricas confocales

Observación 11. L_n la variedad de líneas afines y orientadas en \mathbb{R}^{n+1} es difeomorfa a $T^*\mathbb{S}^n = \{(p, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} : |p| = 1, p \cdot u = 0\}$ ¹² y ese difeomorfismo es de hecho un simplectomorfismo con respecto a la forma simpléctica natural de $T^*\mathbb{S}^n$ y a la forma simpléctica inducida en L_n como espacio de curvas características. Resulta que L_n es la variedad simpléctica que nos sirve para probar la integrabilidad del sistema hamiltoniano asociado al flujo geodésico del elipsoide.

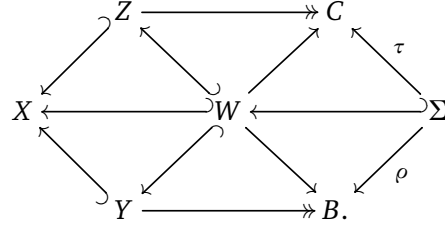
Observación 12. Sea S hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} , identificando $TS \cong T^*S$ mediante la métrica riemanniana inducida g , las geodésicas de g son las características de las hipersuperficies de nivel del hamiltoniano que es $H : T^*S \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $(x, v) \mapsto g(v, v)/2$.

Observación 13. Sea $S = F^{-1}(0)$ con 0 valor regular de F función en \mathbb{R}^{n+1} . Las características de la hipersuperficie $Z = S \times \mathbb{R}^{n+1}$ en $T^*\mathbb{R}^{n+1}$ son rectas con coordenadas en S constantes y cuya proyección en \mathbb{R}^{n+1} tiene dirección dada por el gradiente de F . El espacio de características de Z es $TS \cong T^*S$ ya que cada recta de ese tipo está determinada por su posición q en S y, considerando su componente en \mathbb{R}^{n+1} , por su punto más próximo al origen que, siendo ortogonal al gradiente de F en q , está en T_qS .

Observación 14. Sea $S = F^{-1}(0)$ con 0 valor regular de F función en \mathbb{R}^{n+1} . Consideremos $X := T^*\mathbb{R}^{n+1}$, $Y := \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{S}^n$, $Z := S \times \mathbb{R}^{n+1}$, se tiene $Y \pitchfork Z$, con $W := Y \cap Z = S \times \mathbb{S}^n$. Y y Z están foliados por sus curvas características y los espacios de hojas son variedades, entonces estos son variedades simplécticas y los llamamos B y C respectivamente. Definimos Σ como el conjunto de puntos críticos

¹²Cada línea está únicamente determinada por su dirección unitaria y su punto más próximo al origen.

de la composición $W \hookrightarrow Z \twoheadrightarrow C$, entonces tenemos el diagrama conmutativo



De hecho, $B \cong L_n$ pues por definición es el espacio de curvas características de Y , o sea, el espacio de geodésicas de \mathbb{R}^{n+1} con velocidad unitaria. Por la observación anterior, tenemos $C \cong TS \cong T^*S$. Además Σ es el conjunto de los vectores unitarios tangentes a S y τ es la inclusión de dichos vectores en TS . ρ está dada por mandar cada vector tangente a la recta afín que lo contiene y, por construcción, conserva las estructuras simplécticas, su imagen consta de las rectas afines orientadas tangentes a S . Si S es el elipsoide C_0 , ρ es un encaje y por lo tanto manda las curvas características de Σ en C (que son geodésicas parametrizadas por longitud de arco) en curvas características de su imagen, son éstas las soluciones que encontraremos: curvas que constan de líneas tangentes a geodésicas de C_0 .

Una línea $(p, u) \in L_n$ es tangente a C_z si y sólo si el polinomio $f_z(u + tp) - 1$ tiene una raíz doble y esto pasa si y sólo si su discriminante es 0:

$$\psi_z(p, u) = \left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{p_j u_j}{a_j - z} \right)^2 - f_z(p)(f_z(u) - 1) = 0.$$

$\psi_0^{-1}(0) \subset L_n$ es entonces el conjunto de líneas tangentes a C_0 , consideraremos $h := \psi_0/2$ como nuestro hamiltoniano, notemos que está definido en todo X . Definimos Γ la matriz de entradas

$$\Gamma_{ij} = \frac{p_i u_j - p_j u_i}{a_i a_j}$$

luego, las ecuaciones hamiltonianas de h : $\dot{p}_j = \partial h / \partial u_j$, $\dot{u}_j = -\partial h / \partial p_j$ se expresan como

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \Gamma p \\ \dot{u} &= \Gamma u - \beta p \end{aligned}$$

con β la matriz diagonal de entradas $1/a_j$, $j = 1 \dots n+1$. Si $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, consideremos $x \otimes y$ la matriz de entradas $x_a y_b$ (en el renglón a , columna b), denotamos

$p \wedge u := p \otimes u - u \otimes p$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d(p \otimes p)}{dt} &= [\Gamma, p \otimes p] \\ \frac{d(p \wedge u)}{dt} &= [\Gamma, p \wedge u] + [\beta, p \otimes p]\end{aligned}$$

por lo que las ecuaciones hamiltonianas de h implican la siguiente ecuación de Lax, donde λ es el parámetro espectral:

$$\frac{d(\overbrace{-\lambda^2 \alpha + \lambda p \wedge u + p \otimes p}^{A_\lambda})}{dt} = [A_\lambda, \overbrace{-\Gamma - \lambda \beta}^{B_\lambda}]$$

con $\alpha = \beta^{-1}$, pero tenemos que B_λ es la parte polinomial de $\lambda^3 A_\lambda^{-1}$ ya que

$$\begin{aligned}\lambda^3 A_\lambda^{-1} &= \lambda(-\alpha(I - \lambda^{-1} \beta p \wedge u - \lambda^{-2} p \otimes p))^{-1} = \\ &= -(I + \lambda^{-1} \beta p \wedge u) \beta \lambda + C_\lambda\end{aligned}$$

con C_λ un polinomio en $1/\lambda$. Por lo tanto, por el Teorema 2.2.5, el polinomio de Laurent $-\lambda^3 \mu^{-1}$ representa la dirección del flujo en la variedad jacobiana de la curva espectral S de A_λ . S es la completación de la curva dada por $\det(A_\lambda - \mu I) = 0$ que, poniendo $\mu = -\lambda^2 z$ (ver [44] para los cálculos), da lugar a

$$\lambda^{2n} (\lambda^2 - \psi_z(p, u)) \prod_{i=1}^{n+1} (a_i - z) = 0$$

por lo que se puede tomar como S a la curva hiperelíptica dada por $\lambda^2 = \psi_z(p, u)$ (notemos que S se obtiene entonces como cubierta ramificada de \mathbb{P}^1 con puntos de ramificación los ceros de $\psi_z(p, u)$ que representan a su vez ciertas cuádricas confocales al elipsoide). Expresando $\psi_z(p, u)$ en términos de sus residuos en los a_i tenemos

$$\psi_z(p, u) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{F_i(p, u)}{a_i - z}$$

por construcción las F_i son constantes de movimiento del sistema pero además están en involución (ver [44]) y, tomando solamente n de ellas, son independientes en un abierto denso de $L_n \cong T^* \mathbb{S}^n$ por lo que h da lugar también a un sistema integrable en el sentido de Liouville. Este estudio del flujo geodésico de un elipsoide se debe esencialmente a J. Moser [44].

2.3. Un cuerpo rígido con una cavidad elipsoidal llena de líquido y la ecuación de Euler-Poincaré para so_4

V. A. Steklov (o W. Stekloff en las referencias) estudió el movimiento de un cuerpo rígido con una cavidad elipsoidal llena de un fluido ideal cuyas líneas de vórtice son rectas en [54, 55]. Poincaré menciona en [49] que ya había considerado este problema y en [50] muestra cómo aplicar su *ecuación de Euler-Poincaré* (5) al problema considerado. Presentaremos las secciones 2-4, 6, 7 de [50].

Poincaré y Steklov estudiaron este problema como un modelo posible de la Tierra. Supongamos que la Tierra consta de una corteza sólida que delimita una cavidad elipsoidal \mathcal{C} y que los ejes de inercia de la tierra con respecto al centro del elipsoide coincidan con los ejes de inercia de éste con respecto a su centro¹³, ver figura 2. Supongamos que el elipsoide \mathcal{E} está descrito por $(x/p)^2 + (y/q)^2 + (z/r)^2 = 1$. Supongamos que el campo V de velocidades del líquido que llena \mathcal{C} satisfaga que sus componentes sean funciones lineales de las coordenadas del punto respecto a los ejes de inercia de la cavidad, Poincaré llama a esta situación *movimiento simple*. Se puede ver que, si el líquido es incompresible y de densidad constante, el movimiento simple se conserva en el tiempo¹⁴. Por lo anterior, si consideramos el movimiento relativo del líquido respecto a la corteza, el campo $V(x, y, z, t)$ que indica la velocidad de cada partícula del líquido se puede suponer de la forma

$$V(x, y, z, t) = D(\omega_2(t) \times Y)$$

con $X = (x, y, z)$, D la matriz diagonal con entradas p, q, r , $Y := D^{-1}X$ y ω_2 la velocidad angular del líquido con respecto a la corteza. Notemos que V es tangente a \mathcal{E} y $\text{div}(V) = 0$. Si el cuerpo rígido permanece inmóvil (en movimiento inercial), poniendo $\Omega(t) = \text{rot}(V)$, se puede determinar ω_2 mediante la ecuación de vorticidad (ver [22], §40-5)

$$\dot{\Omega}(t) = [\Omega(t), V]. \quad (12)$$

En efecto, esta ecuación se reduce a una ecuación (8) (con signos opuestos) con momentos de inercia $q^2 + r^2, p^2 + r^2, p^2 + q^2$. Esto nos dice que el líquido al interior de \mathcal{C} se comporta esencialmente como un cuerpo rígido, por lo que su espacio de configuraciones es SO_3 . Luego, una configuración del sistema está descrita por

¹³Steklov en [54] no supone esto y obtiene ecuaciones de movimiento más generales, (109) y (110) en pág. 307, que son también de tipo Euler-Poincaré.

¹⁴El flujo de $\Omega = \text{rot}(V)$ a través de un disco no cambia en el tiempo (Teorema de Kelvin) y esto implica que, bajo el flujo del fluido, las superficies tangentes al campo Ω mantienen esa propiedad. Usando además el Teorema de Helmholtz (consecuencia también del Teorema anterior), se tiene que Ω en cada momento es un campo paralelo. Ver [37] §1.2 para los detalles.

una rotación de la Tierra respecto a un observador inercial externo seguida de una rotación del líquido interno respecto a la corteza terrestre, es decir, el espacio de configuraciones del sistema es $SO_3 \times SO_3$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{so}_3 \times \mathfrak{so}_3 \cong \mathfrak{so}_4$. El campo v de velocidades del líquido percibido por un observador que se mueve inercialmente junto con el centro de \mathcal{E} es de la forma

$$v(x, y, z, t) = \omega_1(t) \times X + V(x, y, z, t)$$

ya que hay que considerar además de V la rotación de la corteza. Luego la densidad de energía cinética del líquido está dada por

$$\frac{\rho v \cdot v}{2} = \frac{\rho}{2} [\omega_1 \cdot (X \times (\omega_1 \times X)) + 2\omega_1 \cdot (X \times D(\omega_2 \times Y)) + \omega_2 \cdot (Y \times D^2(\omega_2 \times Y))]$$

con ρ la densidad constante del líquido. Sean $\omega_1 = (x_1, x_2, x_3)$, $\omega_2 = (y_1, y_2, y_3)$ coordenadas en \mathfrak{so}_3 respecto a la base (7). Integrando la expresión anterior sobre X en \mathcal{C} obtenemos la energía cinética del líquido contenido en \mathcal{C} . La energía cinética total $T : \mathfrak{so}_3 \times \mathfrak{so}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ se obtiene integrando además $(1/2)\omega_1 \cdot (X \times (\omega_1 \times X))$ sobre el cuerpo menos \mathcal{C} . Por lo tanto tenemos

$$T(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} (Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2) + \frac{8}{15} \pi pqr\rho [qrx_1y_1 + prx_2y_2 + pqx_3y_3] + \frac{2}{15} \pi pqr\rho [(q^2 + r^2)y_1^2 + (p^2 + r^2)y_2^2 + (p^2 + q^2)y_3^2].$$

Ahora, en [1] se muestra que (12) es (esencialmente) ecuación de Euler-Poincaré respecto a la métrica invariante derecha en $\text{Dif}_{Vol}(\mathcal{C})$, el grupo de difeomorfismos que conserva volumen en \mathcal{C} , dada por

$$(u, v) \mapsto \int_{\mathcal{C}} (u \cdot v) dx \wedge dy \wedge dz$$

con u, v campos en \mathcal{C} tangentes a \mathcal{E} que satisfacen $\text{div}(u) = \text{div}(v) = 0$, notemos que el álgebra de Lie de $\text{Dif}_{Vol}(\mathcal{C})$ se identifica con el espacio vectorial formado por los campos de esta forma. Que la métrica sea invariante derecha significa que el Teorema 1.3.1 se debe reformular cambiando el signo de los segundos miembros en (4) y en (5). Por otro lado, la métrica en SO_3 dada por un cuerpo rígido es invariante izquierda, luego en $SO_3 \times SO_3$ consideraremos el producto en el segundo factor como el dual del usual, es decir, para todos $A, B \in SO_3$ definimos $A \star B := BA$ de manera que T se extienda a una métrica invariante izquierda en $SO_3 \times SO_3$. Notemos que la representación adjunta «ad» inducida por \star es el negativo de la usual. Por lo tanto (por el cambio de signo mencionado), las ecuaciones de

movimiento en $\mathfrak{so}_3 \times \mathfrak{so}_3$ son las ecuaciones de Euler-Poincaré, para $a = 1, 2, 3$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x_a} = \sum_{d=1}^3 \varepsilon_{da}^b x_d \frac{\partial T}{\partial x_b}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial y_a} = - \sum_{d=1}^3 \varepsilon_{da}^b y_d \frac{\partial T}{\partial y_b} \quad (13)$$

con $\varepsilon_{da}^b := \varepsilon_{dab}$ un símbolo de Levi-Civita ya que en (7) se tiene que $[e_a, e_b] = \varepsilon_{abc} e_c$. Notemos que las ecuaciones del lado izquierdo en (13) comprenden (12) cuando $\omega_1 = 0$. Las ecuaciones de reconstrucción, que determinan la rotación del cuerpo y del líquido son

$$\begin{aligned} \dot{g}_1(t) &= g_1(t) \omega_1(t); \\ \dot{g}_2(t) &= g_2(t) \star \omega_2(t) = \omega_2(t) g_2(t) \end{aligned}$$

con $g_a(t) \in SO_3$, $a = 1, 2$. En [43] se estudian detalladamente las distintas variantes del problema de un cuerpo rígido con cavidades que contienen líquido.

En [35], cap. IX, §4 se generaliza este problema, introduciendo la noción de *giróstato*, que denota un cuerpo rígido C y un sistema de masas S ligadas a C de manera que el baricentro del sistema total $C \cup S$, en todo momento, es un punto fijo con respecto a C : por ejemplo, un giroscopio con eje anclado en una armadura rígida (un monociclo esencialmente) o este caso de un cuerpo con una cavidad rellena de líquido¹⁵.

Casos integrables de (13). Poincaré analiza situaciones especiales que permiten estudiar las ecuaciones (13) más fácilmente (§7 de [50]). Por ejemplo, si la corteza no rotase, como ya hemos observado, el líquido se mueve como un cuerpo rígido descrito por (12). Por otro lado, si tanto la corteza como \mathcal{C} fuesen sólidos de revolución con $A = B$ y $p = q$, la simetría respecto al eje z nos daría una constante de movimiento dada por el Teorema de Noether (que es x_3) lo que implica la completa integrabilidad del sistema. En efecto, es claro que las órbitas (co)adjuntas genéricas de $\mathfrak{so}_4 \cong \mathfrak{so}_3 \times \mathfrak{so}_3$ son difeomorfos a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ por lo que el Teorema 1.2.5 implica que basta encontrar una constante de movimiento independiente de T para tener la completa integrabilidad. De hecho, en este caso resulta que la rotación estacionaria del cuerpo y del líquido entorno al eje z es estable en el sentido de Lyapunov, ver [43], §2-9 y también [53] para un punto de vista más general. Si la cavidad fuese esférica, o sea $p = q = r$, el cuerpo rotaría como si no existiese el líquido al interior: (13) se reduce a ecuaciones tipo (8) para ω_1 con momentos de inercia $A - (8/15)\pi p^5$, $B - (8/15)\pi p^5$, $C - (8/15)\pi p^5$.

¹⁵Las ecuaciones que describen el movimiento de C son esencialmente las primeras ecuaciones de (13) y ya habían sido obtenidas por V. Volterra en [56] aunque Volterra estudió solamente el caso en que el líquido interno rota estacionariamente en torno a un eje.

Steklov considera el caso general y observa como hemos hecho que basta encontrar una cuarta constante de movimiento independiente de T y de las funciones de Casimir $\sum_i (\partial T / \partial x_i)^2$, $\sum_i (\partial T / \partial y_i)^2$, para tener la integrabilidad del sistema. Más adelante, Steklov encuentra condiciones suficientes sobre T para que esa constante de movimiento exista: [55], §42. En [13] se estudian las métricas de la forma de T , es decir, las métricas parametrizadas por A, B, C, p, q, r , mediante un cierto criterio algebraico que implica la completa integrabilidad y se prueba que, si T satisface ese criterio específico, entonces T pertenece a la familia tridimensional hallada por Steklov.

En [12] se describe la relación entre el caso integrable de este problema y uno de los casos integrables (caso de Steklov-Lyapunov) para las ecuaciones de Kirchhoff, que describen el movimiento de un cuerpo rígido en un líquido. Ahí se menciona también una ecuación de Lax con un parámetro para este problema, el parámetro espectral varía en una curva elíptica en vez de \mathbb{P}^1 como en nuestros ejemplos.

Equilibrios relativos y órbitas periódicas. Como $\pi_1(SO_3 \times SO_3) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, $SO_3 \times SO_3$ es compacto y cada clase de homotopía libre de lazos tiene un representante que es una geodésica¹⁶, se tienen al menos tres geodésicas cerradas en $SO_3 \times SO_3$ respecto a la métrica invariante izquierda inducida por T , es decir, tenemos al menos tres casos en que la evolución del sistema es periódica. Por otro lado, como una órbita coadjunta genérica \mathcal{O} es difeomorfa a $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, su anillo de cohomología (de de Rham) es $H_{dR}^*(\mathcal{O}) \cong \mathbb{R}[u, v]/(u^2, v^2)$; luego, $cl(\mathcal{O})$, la longitud de producto «cup» de \mathcal{O} , es tres. La teoría de Lyusternik-Schnirelmann (ver [40], §11.2) implica que $X_T|_{\mathcal{O}}$, siendo de tipo gradiente¹⁷, tiene al menos $cl(\mathcal{O})$ puntos singulares. Estos nos dan tres rotaciones estacionarias (equilibrios relativos).

¹⁶Ver [17], «Teorema de Cartan» en pág. 255. Debemos suponer que T es positivamente definida y no sólo no degenerada. Como $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ es abeliano, $\pi_1(SO_3 \times SO_3)$ también clasifica las clases de homotopía libre de lazos, ver [14], pág. 211.

¹⁷Precisamente, tomando una estructura casi compleja J en \mathcal{O} compatible con la forma de Kirillov, $JX_T|_{\mathcal{O}}$ es campo tipo gradiente con función de Lyapunov $-T$. Ver [40], §2.6.

Bibliografía

- [1] Arnold, V. I.: *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*. Annales de l'institut Fourier, páginas 319–361, 1966.
- [2] Arnold, V. I.: *On a theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics (Translation of Sibirsk. Mat.Ž. 4:2 1963)*. AMS Translations, II(61):292–296, 1967.
- [3] Arnold, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, 1989.
- [4] Arnold, V. I. y A. B. Givental: *Symplectic Geometry*. En Arnold, V. I. y S. P. Novikov (editores): *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 2000.
- [5] Arnold, V. I. y B. A. Khesin: *Topological Methods in Hydrodynamics*. Springer-Verlag, 1998.
- [6] Arnold, V. I., V. V. Kozlov y A. I. Neishtadt: *Dynamical Systems III: Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 2007.
- [7] Audin, M.: *Courbes algébriques et systèmes intégrables: géodésiques des quadriques*. Expositiones Mathematicae, páginas 193–226, 1994.
- [8] Audin, M.: *Spinning Tops: A Course on Integrable Systems*. Cambridge University Press, 1999.
- [9] Audin, M.: *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*. SMF, 2001.

- [10] Audin, M.: *Vladimir Igorevich Arnold and the Invention of Symplectic Topology*. En Colin, V. y A. Stipsicz (editores): *Contact and Symplectic Topology*, número 26 en *Bolyai Society Mathematical Studies*. Springer-Verlag, 2014.
- [11] Babelon, O., D. Bernard y M. Talon: *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [12] Bobenko, A. I.: *Euler equations in the algebras $e(3)$ and $so(4)$. Isomorphisms of integrable cases*. *Functional analysis and its applications*, 20(1):53–56, 1986.
- [13] Bogoyavlensky, O. I.: *Integrable Euler Equations on $SO(4)$ and their Physical Applications*. *Communications in Mathematical Physics*, 93(3):417–436, 1984.
- [14] Bott, R. y L. W Tu: *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [15] Cartan, E.: *Leçons sur les invariants intégraux*. Librairie Scientifique A. Hermann, 1922.
- [16] Courant, R. y D. Hilbert: *Methods of mathematical physics*, volumen 1. Interscience Publishers, Inc. New York, 1953.
- [17] do Carmo, M. P.: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [18] Dubrovin, B. A., I. M. Krichever y S. P. Novikov: *Integrable Systems*. En Arnold, V. I. y S. P. Novikov (editores): *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 2000.
- [19] Dubrovin, B. A., V. B. Matveev y S. P. Novikov: *Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators and Abelian varieties*. *Russian Mathematical Surveys*, 31(1):59–146, 1976.
- [20] Euler, L.: *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. 1765.
- [21] Fedorov, Y. N. y V. V. Kozlov: *Various aspects of n -dimensional rigid body dynamics*. *Translations of the American Mathematical Society*, 168:141–172, 1995.
- [22] Feynman, R. P., R. B. Leighton y M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, volumen 2. Addison-Wesley, 1964.

- [23] Gardner, C. S., J. M. Greene, M.D. Kruskal y R. M. Miura: *Method for solving the Korteweg-de Vries equation*. Physical Review Letters, 19:1095–1097, 1967.
- [24] Griffiths, P. A.: *Introduction to algebraic curves*. AMS, 1989.
- [25] Guillemin, V., Y. Karshon y V. Ginzburg: *Moment maps, cobordisms and Hamiltonian group actions*. AMS, 2002.
- [26] Guillemin, V. y S. Sternberg: *Symplectic techniques in physics*. Cambridge University Press, 1984.
- [27] Gunning, R. C.: *Lectures on Riemann surfaces*. Princeton University Press, 1966.
- [28] Hilgert, J. y K. H. Neeb: *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, 2012.
- [29] Hitchin, N. J.: *On the construction of monopoles*. Communications in Mathematical Physics, 89(2):145–190, 1983.
- [30] Hitchin, N. J.: *Monopoles, minimal surfaces and algebraic curves*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1987.
- [31] Hitchin, N. J.: *Riemann surfaces and integrable systems*. En *Integrable systems: Twistors, Loop Groups and Riemann Surfaces*. Oxford University Press, 1999.
- [32] Hitchin, N. J., G. B. Segal y R. S. Ward: *Integrable systems: Twistors, Loop Groups and Riemann Surfaces*. Oxford University Press, 1999.
- [33] Jost, R.: *Winkel-und Wirkungsvariable für allgemeine mechanische Systeme*. Helvetica Physica Acta, 41:965–968, 1968.
- [34] Lax, P. D.: *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*. Communications on pure and applied mathematics, 21(5):467–490, 1968.
- [35] Levi-Civita, T. y U. Amaldi: *Lezioni di Meccanica Razionale*, volumen 2. Zanichelli, Bologna, 1952.
- [36] Marchenko, V. A.: *Sturm-Liouville Operators and Applications*. Birkhäuser, 1986.
- [37] Marsden, J. E. y A. J. Chorin: *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 2000.

- [38] Marsden, J. E. y T. S. Ratiu: *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer-Verlag, 1999.
- [39] Marsden, J. E. y A. Weinstein: *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*. Reports on Mathematical Physics, páginas 121–130, 1974.
- [40] McDuff, D. y Salamon D.: *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 1998.
- [41] Miranda, R.: *Algebraic curves and Riemann surfaces*. Graduate Studies in Mathematics. AMS, 1995.
- [42] Mishchenko, A. S. y A. T. Fomenko: *Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems*. Functional analysis and its applications, 12(2):113–121, 1978.
- [43] Moiseyev, N. N. y V. V. Rumyantsev: *Dynamic Stability of Bodies Containing Fluid*. Applied Physics and Engineering. Springer-Verlag, 1968.
- [44] Moser, J.: *Geometry of quadrics and spectral theory*. En *The Chern Symposium 1979*, páginas 147–188. Springer-Verlag, 1980.
- [45] Moser, J.: *Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory*. Lezioni Fermiane. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1981.
- [46] Novikov, S. P.: *The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation*. Functional analysis and its applications, 12(2):236–246, 1974.
- [47] Novikov, S. P.: *Solitons and Geometry*. Lezioni Fermiane. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1992.
- [48] Novikov, S. P. y I. A. Taimanov: *Modern Geometric Structures and Fields*. Graduate Studies in Mathematics. AMS, 2006.
- [49] Poincaré, H.: *Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique*. C. R. Acad. Sci. Paris, T. CXXXII, 7:369–371, 1901.
- [50] Poincaré, H.: *Sur la précession des corps déformables*. Bulletin Astronomique, Série I, 27:321–356, 1910.
- [51] Reyman, A. G.: *Integrable Hamiltonian systems connected with graded Lie algebras*. Journal of Soviet Mathematics, 19(5):1507–1545, 1982.

- [52] Reyman, A. G. y M. A. Semenov-Tian-Shansky: *Dynamical Systems VII: Integrable Systems, Nonholonomic Dynamical Systems*, capítulo Integrable Systems II: Group-Theoretical Methods in the Theory of Finite-Dimensional Integrable Systems. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1994.
- [53] Rumyantsev, V. V.: *On the stability of motion of gyrostats*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 25(1):9–16, 1961.
- [54] Steklov, V. A.: *Sur la théorie des tourbillons*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e série, (10):271–334, 1908.
- [55] Steklov, V. A.: *Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale remplie par un liquide incompressible et sur les variations des latitudes*. Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, (1):145–256, 1909.
- [56] Volterra, V.: *Sulla teoria dei moti del polo terrestre*. Atti della Accademia delle Scienze di Torino, XXX:301–306, 1894-1895.
- [57] Weinstein, A.: *The local structure of Poisson manifolds*. Journal of differential geometry, 18(3):523–557, 1983.