



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA ELÉCTRICA - CONTROL**

**ALGORITMO NO LINEAL DE ESTIMACIÓN  
DE PARÁMETROS EN TIEMPO FINITO**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**DOCTOR EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**  
**EDER GUZMÁN BALTAZAR**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. JAIME A. MORENO PÉREZ, II-UNAM**  
**COMITÉ TUTOR**  
**DR. LEONID FRIDMAN, FI-UNAM**  
**DR. LUIS A. ÁLVAREZ-ICAZA LONGORIA, II-UNAM**

**MÉXICO, D. F., JUNIO DE 2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Tang Xu Yu  
Secretario: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René  
1er vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto  
2do vocal: Dr. Fridman Leonid  
3er vocal: Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A.

La tesis se realizó en el Instituto de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Jaime A. Moreno Pérez

---

# **Agradecimientos**

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México por todo el apoyo prestado para la realización de esta tesis y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca doctoral.

# Resumen

En esta tesis se plantea el problema de estimación paramétrica en tiempo finito y estimación exacta de un parámetro variante en el tiempo. Durante el estudio de este problema se desarrollaron dos algoritmos, el primero es un algoritmo capaz de estimar un parámetro variante en el tiempo de forma exacta, y el segundo es un algoritmo que estima múltiples parámetros constantes en tiempo finito. La idea para generar estos nuevos algoritmos parte de la teoría clásica de control adaptable y se complementa con no linealidades obtenidas de algoritmos por modos deslizantes, estos últimos aportan robustez, que permite la estimación de un parámetro variante en el tiempo de forma exacta, y la convergencia en tiempo finito.

Para el primer caso, se provee un análisis similar al método Lyapunov para mostrar convergencia, usando múltiples funciones de Lyapunov en lugar de una. Se muestra que si el coeficiente de la señal a ser estimada cumple con la condición de Excitación Persistente y su número de cambios de signo es acotado en cualquier intervalo acotado de tiempo, entonces el observador convergerá globalmente y uniformemente en tiempo finito al valor real. Para el algoritmo estimador de múltiples parámetros se toma como base el análisis de un estimador lineal recursivo, y se complementa con técnicas usadas en el análisis para modos deslizantes, en especial aquellas generadas a partir del algoritmo Super-Twisting.

# Contenido

Contenido . . . . .	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes y motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. Objetivos principales. . . . .	3
1.2.2. Objetivos particulares. . . . .	3
1.3. Formulación del problema . . . . .	4
1.4. Contribuciones . . . . .	7
1.5. Descripción de capítulos . . . . .	7
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Observabilidad . . . . .	9
2.2. Excitación persistente . . . . .	10
2.3. Algoritmo Genérico de Segundo Orden . . . . .	14
2.3.1. Convergencia en tiempo finito de AGSO . . . . .	16
2.4. Control Adaptable por Modelo de Referencia . . . . .	19
2.5. Funciones de Lyapunov múltiples . . . . .	22
2.6. Elipsoides contenidas . . . . .	23
<b>3. Estimador de un parámetro variante en el tiempo</b>	<b>25</b>
3.1. Tipo de sistema en estudio y estimador . . . . .	25
3.2. Convergencia del estimador con regresor con signo definido . . . . .	30
3.3. Convergencia del estimador con regresor con signo indefinido . . . . .	34
3.3.1. Caso sin perturbaciones: $\rho_1(t, e) = \rho_2(t, e) = 0$ . . . . .	35
3.3.2. Caso perturbado: $\rho_1(t, e) \neq \rho_2(t, e) \neq 0$ . . . . .	43
3.4. Ejemplos en simulación. . . . .	45
3.4.1. Regresor con cambio de signo y perturbación . . . . .	45
3.4.2. Cambio de signo y perturbación . . . . .	48
3.4.3. Número de cambios de signo . . . . .	53

<b>4. Estimador de múltiples parámetros constantes en tiempo finito</b>	<b>55</b>
4.1. Tipo de sistema en estudio y estimador . . . . .	55
4.2. Estabilidad y Análisis de Convergencia . . . . .	57
4.2.1. Convergencia asintótica de $x_1(t)$ . . . . .	57
4.2.2. Análisis de la trayectoria $x_1(t)$ . . . . .	59
4.2.3. Análisis de Convergencia en Tiempo Finito . . . . .	62
4.3. Aplicación al problema de Identificación Paramétrica . . . . .	66
4.4. Ejemplos de simulación . . . . .	67
4.4.1. Estimación de parámetros en péndulo simple . . . . .	67
4.4.2. Estimación del estado y parámetros constantes . . . . .	68
<b>5. Aplicación al Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR)</b>	<b>73</b>
5.1. Simulación con Modelo de Referencia sin ceros . . . . .	73
5.1.1. Condiciones de excitación persistente, sin perturbaciones . . . . .	75
5.1.2. Condición de excitación persistente, con perturbaciones . . . . .	75
5.1.3. Ausencia de condición de excitación persistente . . . . .	79
5.2. Simulación con Modelo de Referencia con ceros. . . . .	82
5.2.1. Condición de excitación persistente, sin perturbaciones . . . . .	82
5.2.2. Condición de excitación persistente, con perturbación . . . . .	83
5.2.3. Ausencia de excitación persistente . . . . .	84
<b>6. Conclusiones</b>	<b>91</b>
<b>Referencias</b>	<b>93</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes y motivación

Dentro de la teoría de control, la estimación paramétrica es un campo ampliamente estudiado, ya que en muchas ocasiones el conocimiento completo de un sistema no es posible, debido a variaciones desconocidas o no medibles de los parámetros. La estimación paramétrica es el proceso de usar señales conocidas (medibles) de un sistema dinámico, para determinar un conjunto de parámetros finito, los cuales sirven para desarrollar modelos matemáticos que representen adecuadamente las características del sistema (Raol et al., 2004). Cuando los parámetros del sistema no cambian con el tiempo, la estimación se puede hacer fuera de línea a través de la medición de la salida y la inyección de entrada conocidas, como se hace en el control clásico. El interés por sistemas con parámetros no fijos nace en los 50's, cuando se comenzaron a estudiar los sistemas de pilotos automáticos en aeronaves, donde los parámetros cambian dependiendo de las altitudes y rangos de velocidad, pero que pueden ser representados por medio de sistemas lineales para un punto operativo dado (Ioannou y Sun, 1996; Ioannou y Fidan, 2006). A partir de entonces el control adaptable de sistemas se ha desarrollado en diversas direcciones además del control, como observación adaptable (Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Ioannou y Sun, 1996; Marino y Tomei, 1995; Besançon, 2000; Ioannou y Fidan, 2006; Besançon, 2007), que a su vez se ha aplicado en campos variados como detección de fallas y aislamiento (Besançon, 2007), o monitoreo de procesos (Dochain, 2003; Krevaris et al., 2013), en esta última área se menciona que uno de los principales problemas en adaptación es la incertidumbre paramétrica que se genera cuando los parámetros no han convergido al valor real, por lo que es importante diseñar algoritmos para disminuir dichos tiempos de convergencia. Durante el desarrollo de las técnicas de estimación se usaron varios métodos para el diseño de leyes de estimadores paramétricos, uno de ellos que tuvo gran desarrollo durante los 70's es el de diseño de Lyapunov. Dentro de este enfoque destacan los trabajos de Morgan y Narendra (1977a,b), que caracterizan el

comportamiento de las trayectorias solución de Sistemas Lineales y Variantes en el Tiempo (SLVT), que aparecen frecuentemente en control adaptable clásico. En especial la ecuación mostrada en el trabajo de Morgan y Narendra (1977a), la cual ha sido usada en esquemas de Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR), y Observadores Adaptable Lineales y No lineales (Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Marino y Tomei, 1995; Ioannou y Sun, 1996; Ioannou y Fidan, 2006; Besançon, 2007). Aunque el mencionado algoritmo ha sido usado extensivamente por 4 décadas (ver el libro de Besançon (2007)), se sigue usando en observadores de sistemas no lineales Lipschitz (Ekramian et al., 2013), y sistemas con parámetros que entran en forma no lineal al sistema (Tyukin et al., 2013).

Por otro lado se tiene el Algoritmo Genérico de Segundo Orden (AGSO), con una estructura similar a la ya citada ecuación estudiada por Morgan y Narendra (1977a). El AGSO fue introducido por Moreno (2011), y tiene como casos especiales al Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG) (Moreno, 2009, 2011), y al Algoritmo Super-Twisting (AST), este último un algoritmo de segundo orden por modos deslizantes propuesto originalmente por Levant (1993). El AST tiene propiedades de convergencia y robustez sorprendentes, ya que converge en tiempo finito y es insensible a perturbaciones no desvanecientes. Este algoritmo ha encontrado numerosas aplicaciones como diferenciador exacto (Levant, 1998, 2003), controladores por retroalimentación de salida (Levant, 2003), y observadores (Davila et al., 2005, 2006). El AST también se ha usado para estimar parámetros de sistemas mecánicos (Davila et al., 2006; M'Sirdi et al., 2008), sin embargo la señal de salida equivalente linealmente filtrada del AST se usa para obtener el regresor para luego usarlo en un algoritmo recursivo lineal que identifica los parámetros asintóticamente.

En este trabajo se pretende tomar ventaja de las estructuras del SLVT analizado por Morgan y Narendra (1977a); Narendra y Annaswamy (1989), y complementarlo con la estructura del AGSO para generar un algoritmo cuyas trayectorias solución converjan al origen en tiempo finito, además de presentar cierta robustez ante variaciones temporales de los parámetros, las cuales en este caso se consideraran perturbaciones.

En cuanto estimación paramétrica en tiempo finito destaca el trabajo de Adetola y Guay (2008); Hartman et al. (2010), el problema con el algoritmo presentado en este trabajo es que se necesita evaluar en línea la invertibilidad de la matriz regresor, para calcular la matriz inversa en el momento apropiado, y a partir de ella calcular los parámetros de forma exacta.

Entonces la principal motivación es tener un algoritmo con las ventajas de un algoritmo recursivo; la estimación paramétrica se obtiene mientras evoluciona el sistema, y la estimación en línea contiene toda la información provista por datos pasados; y las ventajas del AGSO; convergencia en tiempo finito y dependiendo de ciertos parámetros, robustez ante cierto tipo de perturbaciones.

## 1.2. Objetivos

Como se mencionó en la introducción, en este trabajo, se pretende tomar ventaja de las estructuras del SLVT Morgan y Narendra (1977a), complementarlo con no linealidades tomadas del AGSO para generar algoritmos cuyas trayectorias solución convergen a cero en tiempo finito, en algunos casos sean robustos ante ciertas perturbaciones, y que puedan ser usados en el campo de estimación paramétrica. Con esta idea se definen el objetivos del presente trabajo de tesis:

### 1.2.1. Objetivos principales.

- Diseñar un algoritmo capaz de estimar un parámetro variante en el tiempo en tiempo finito.
- Diseñar un algoritmo capaz de estimar múltiples parámetros constantes en tiempo finito.
- Establecer las condiciones de convergencia de los algoritmos propuestos.

### 1.2.2. Objetivos particulares.

Para el algoritmo estimador de un parámetro variante en el tiempo.

- Establecer convergencia en tiempo finito del nuevo algoritmo a través de funciones de Lyapunov múltiples.
- Establecer la convergencia en tiempo finito, cuando el nuevo algoritmo es afectado por un cierto tipo de perturbaciones.
- Describir el uso del nuevo algoritmo en la estimación paramétrica considerando las variaciones temporales de dicho parámetro como perturbación.

Para el algoritmo estimador de múltiples parámetros constantes.

- Retomar la teoría clásica para establecer la estabilidad del nuevo algoritmo no lineal propuesto, a través de una función de Lyapunov.
- Establecer las condiciones de convergencia en tiempo finito a través de la función de Lyapunov negativa semidefinida, y varias herramientas clásicas.
- Aplicar el algoritmo a la estimación paramétrica.
- Utilizar el algoritmo propuesto en el problema clásico de Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR).

### 1.3. Formulación del problema

Considere la clase sistemas descritos por la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g_1(x_1, u) + B(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2, t) + \delta(t), \\ y &= x_1,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^l$ , son los estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es una entrada conocida y  $y \in \mathbb{R}$  es la salida medida.  $g_1$  es una función continua conocida y  $g_2$  corresponde a una función conocida posiblemente discontinua o multivaluada, por último  $\delta$  representa términos inciertos. Las variables medibles son  $x_1$ , y la entrada conocida  $u$ .  $B(t)$  es una matriz de funciones conocidas y acotadas, con la cota no necesariamente conocida. El problema se centra en proponer un algoritmo capaz de estimar el estado  $x_2$  a partir del estado medible  $x_1$ , cuando el coeficiente variante en el tiempo  $B(t)$  es conocido. A partir de la clase de sistemas propuesto (ecuación (1.1)), y el algoritmo estimador se genera una dinámica de error, en esta última es donde se centran los análisis de convergencia.

Para el caso lineal, el problema anterior ha sido ampliamente estudiado y utilizado como herramienta en observación y control adaptable (Morgan y Narendra, 1977a; Sastry y Bodson, 1989; Narendra y Annaswamy, 1989; Ioannou y Fidan, 2006), un sistema lineal no autónomo con coeficientes variantes en el tiempo, que representa una dinámica de error, queda descrito por la siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= A(t)z_1 + B(t)z_2 \\ \dot{z}_2 &= C(t)z_1,\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde  $z_i \in \mathbb{R}^{c_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$  son matrices de funciones continuas a tramos. Como se mencionó arriba el problema se centra en estimar la trayectoria  $z_2$  a partir del estado conocido  $z_1$  y las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$ . Normalmente el sistema (1.2) representa una dinámica de error donde  $z_1$  es el error del estado medido y  $z_2$  es el error entre los parámetros medidos y los estimados. El problema se centra en este caso en establecer las condiciones bajo las cuales las trayectorias solución del sistema (1.2), convergen a cero. En este caso, las condiciones indican como deben ser elegidas las matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$ .

Un problema parecido al anterior plantea el mencionado AGSO (Moreno, 2011), que está dado por el siguiente sistema no lineal,

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -k_1\phi_1(z_1) + z_2 + \varsigma_1(t, z) \\ \dot{z}_2 &= -k_2\phi_2(z_1) + \varsigma_2(t, z)\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde  $z_i$ ,  $i = 1, 2$  son variables de estado escalares,  $k_i$ ,  $i = 1, 2$  son ganancias positivas a

diseñar,  $\varsigma_i(t, z)$ ,  $i = 1, 2$  son perturbaciones variantes en el tiempo, y las no linealidades  $\phi_1(z_1)$  y  $\phi_2(z_1)$  son

$$\phi_1(z_1) = \mu_1 |z_1|^p \text{signo}(z_1) + \mu_2 |z_2|^q \text{signo}(z_1), \mu_1, \mu_2 \geq 0, \quad (1.4a)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(z_1) = & \mu_1^2 |z_1|^{2p-1} \text{signo}(z_1) + \mu_1 \mu_2 (p+q) |z_1|^{p+q-1} \text{signo}(z_1) + \\ & + \mu_2^2 |z_1|^{2q-1} \text{signo}(z_1), \end{aligned} \quad (1.4b)$$

con  $\mu_1, \mu_2 \geq 0$  constantes no negativas, y  $q \geq 1 \geq p \geq \frac{1}{2}$  números reales. Cuando  $p = \frac{1}{2}$  la función  $\phi_2$  tiene una discontinuidad acotada en  $z_1 = 0$ , entonces las soluciones del sistema (1.3) son trayectorias en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). En la siguiente sección se presentarán las características y condiciones de convergencia del AGSO, las cuales dependen principalmente de los escalares  $p$  y  $q$ . Por el momento lo interesante es que la formulación de este problema, planteado a través del sistema (1.3), se puede plantear en los términos manejados arriba: se estima el estado no medible  $z_2$ , a partir de la variable  $z_1$ , funciones  $\phi_1(z_1)$  y  $\phi_2(z_1)$  conocidas, y determinados valores de las ganancias  $k_1(t)$ ,  $k_2(t)$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ , lo anterior a pesar de las perturbaciones  $\varsigma_i(t, z)$ ,  $i = 1, 2$ . Como caso particular el AGSO tiene el AST, éste se recupera con  $p = \frac{1}{2}$  y  $B(t) = 1$  (Levant, 1993; Davila et~al., 2005, 2006; Moreno, 2009; Gonzalez et~al., 2012). Este algoritmo se puede ver como una dinámica de error generada a partir de una cierta planta (similar a la forma (1.1)) y un observador, donde  $z_1$  representa el error del estado conocido, y  $z_2$  el error entre un estado no conocido y uno estimado. Se puede ver que el problema es parecido al planteado por la ecuación (1.2).

Con base en la estructura de los algoritmos (1.2) y (1.3), se desarrollaron algoritmos estimadores de parámetros en tiempo finito y robustos ante ciertas perturbaciones. Lo que resta de la sección se centrará en mostrar las dinámicas de error generadas a partir de los nuevos algoritmos. Por otro lado, en cada uno de los capítulos se describe la clase de sistemas para los cuales se puede diseñar el respectivo estimador.

El primer sistema propuesto se puede ver como un AST con coeficientes variables,

$$\dot{z}_1 = -k_1 |b(t)| \phi_1(z_1) + b(t) z_2 \quad (1.5a)$$

$$\dot{z}_2 = -k_2 b(t) \phi_2(z_1) + \delta(t) \quad (1.5b)$$

donde  $z_1 \in \mathbb{R}$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $b(t)$  es una función escalar dependiente del tiempo,  $k_1$ ,  $k_2$  son ganancias constantes a ser diseñadas,  $\delta(t)$  representa una perturbación variante en el tiempo, y  $\phi_i(z_1)$ ,  $i = 1, 2$  están dadas como en (1.4). Para este algoritmo el problema se centró en estimar  $z_2$  a partir de  $z_1$ ,  $b(t)$  conocidos, y a pesar de estar presentes cierto tipo de perturbaciones  $\delta(t)$ . Cómo se vera más adelante el principal uso de este algoritmo es la estimación

paramétrica. Aunque sólo se realizó el análisis para la estimación de un parámetro, la parte interesante es que debido a la robustez del algoritmo este parámetro puede ser variante en el tiempo. El propósito perseguido es demostrar que la convergencia del algoritmo a cero es en tiempo finito, a pesar de la variaciones temporales del parámetro a estimar. El caso para múltiples parámetros requiere un estudio más exhaustivo, ya que al parecer la no linealidad definida por la función  $\phi_2(z_1)$  combate la excitación persistente que satisface la función  $b(t)$  para que los parámetros converjan, se podría decir que las propiedades de robustez y excitación se combaten. Durante el proyecto de tesis no se lograron establecer las condiciones para garantizar la convergencia del algoritmo (1.5) con  $z_2$  como vector.

La segunda dinámica planteada surge al utilizar los términos de bajo orden del AGSO (aquellos donde la potencia a la que están elevados incluye a  $p$  en (1.4)), y cambiar el coeficiente 1 que multiplica al estado  $z_2$  en la ecuación (1.3), por un coeficiente variante en el tiempo  $B(t)$ , con el propósito de generar un sistema parecido al mostrado en (1.2) (una ganancia, multiplicada por un término de inyección conocida, sumado con una función vectorial de términos conocidos, multiplicando a la diferencia de términos a estimar, la segunda ecuación es un término de inyección conocido multiplicado por una función vectorial de términos también conocidos), que pueda ser usado en estimación paramétrica. La mencionada dinámica está descrita por las siguientes ecuaciones,

$$\dot{z}_1 = -k_1|z_1|^p \text{signo}(z_1) + B^T(t)z_2 \quad (1.6a)$$

$$\dot{z}_2 = -k_2|z_1|^{2p-1} \text{signo}(z_1)B(t) \quad (1.6b)$$

donde  $z_1 \in \mathbb{R}$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}^{n_a}$  son variables de estado,  $k_1, k_2$  son ganancias positivas a ser diseñadas;  $\frac{1}{2} < p < 1$  es un número real, y  $B(t)$  es una matriz de funciones continuas y acotadas de dimensiones  $1 \times n_a$ . Note que el sistema (1.6) es continuo para casi todos los valores de  $p$ , exceptuando  $p = \frac{1}{2}$ . En este trabajo se restringe a  $\frac{1}{2} < p < 1$ , ya que para  $p = \frac{1}{2}$  las condiciones de convergencia se presumen diferentes, principalmente porque el lado derecho de la ecuación (1.6b) es discontinuo. Por otro lado se tiene que para  $p = 1$  se recupera un algoritmo clásico (ver ecuación (1.2) con  $A(t)$  constante) comúnmente usado como estimador paramétrico (Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Ioannou y Sun, 1996). Entonces el problema se centra demostrar que el sistema (1.6) converge a cero en tiempo finito y las condiciones bajo las cuales sucede esto, tomando en cuenta las condiciones ya mencionadas;  $z_2$  no conocida,  $z_1$  conocida, y  $B(t)$  un vector de funciones continuas a tramos y acotadas. Como se ha venido diciendo la principal aplicación es la estimación paramétrica, dentro del presente trabajo, primero se establecerá la convergencia del algoritmo, y posteriormente se mostrará su aplicación.

## 1.4. Contribuciones

Las contribuciones que se presentan en el trabajo de tesis, se listan a continuación:

- Se proponen dos algoritmos estimadores; uno capaz de estimar parámetros constantes y otro capaz de estimar un parámetro variante en el tiempo, la novedad en ambos algoritmos es que convergen a los valores reales en tiempo finito.
- El algoritmo estimador de parámetros constantes es fácil de implementar y entender, ya que tiene la misma estructura que el algoritmo clásico estudiado por Morgan y Narendra (1977a) (Narendra y Annaswamy, 1989; Ioannou y Fidan, 2006). Se podría decir que al algoritmo clásico sólo se le agregaron algunas no linealidades, con las que se logra tener una mayor velocidad de convergencia de las trayectorias solución, esto debido a la propiedad de convergencia en tiempo finito que añaden las mencionadas no linealidades.
- El estimador de un parámetro variante en el tiempo, se puede ver como una extensión de Algoritmo Super-Twisting Clásico (ASTC), es decir un ASTC con coeficientes variantes en el tiempo, con lo cual se extiende la aplicación de dicho algoritmo.
- Para la demostración de convergencia de ambos algoritmos se hace uso de herramientas matemáticas clásicas y nuevas dentro de la teoría de control, dando como resultado técnicas novedosas para el análisis de convergencia de algoritmos no lineales, y variantes en el tiempo.
- Al basarse en un estimador clásico, los nuevos algoritmos propuestos pueden ser incluidos fácilmente en la teoría de control, observación, y las diferentes aplicaciones que han encontrado estas dos herramientas.

## 1.5. Descripción de capítulos

El trabajo de tesis está dividido en 5 capítulos. En el capítulo 2 se repasan varios conceptos que se utilizan como herramientas de análisis a lo largo del trabajo; se repasará el concepto de observabilidad de manera muy breve, la propiedad de excitación persistente en algoritmos clásicos, el AGSO como lo presenta Moreno (2011), el Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR) clásico, y por último el tema de Elipsoides contenidas, que servirá para relacionar las funciones de Lyapunov múltiples usadas en el capítulo 3. En el capítulo 3 se presenta el estimador de parámetro variante en el tiempo; se comienza mostrando la clase de sistemas para los cuales se puede diseñar dicho estimador, para después generar una dinámica de error, posteriormente se demuestra que las trayectorias de la dinámica de error convergen

a cero en tiempo finito, diferenciando dos casos, con perturbaciones, y sin perturbaciones, se finaliza mostrando algunos ejemplos con simulaciones del nuevo algoritmo. En el capítulo 4 se presenta el algoritmo estimador de parámetros constantes, primero se hace un análisis de estabilidad de las trayectorias solución, y se establece la convergencia asintótica de una de ellas, siguiendo los pasos del análisis para el caso lineal (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989), después se establece convergencia de las trayectorias en tiempo finito bajo la condición de excitación persistente, se finaliza el capítulo con algunos ejemplos con simulaciones, donde se muestra la aplicación del nuevo algoritmo como estimador paramétrico.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Observabilidad

En esta sección se recuerda brevemente la definición de observabilidad y se repasa un método de análisis para determinar si un sistema es observable.

La noción de observabilidad parte del concepto de indistinguibilidad (Nijmeijer y van~der Schaft, 1990; Vargas~Casillas, 2002), dicho concepto indica que dos estados iniciales son indistinguibles si generan la misma salida para cualquier entrada que se pueda poner en el sistema. Es decir la salida no se diferencia a pesar de que las condiciones iniciales sean diferentes. Antes de mostrar la definición formal, consideremos el sistema no lineal forzado de una salida

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1a)$$

$$y = h(x) \quad (2.1b)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado,  $y \in \mathbb{R}$  es la salida y  $u$  es la entrada exógena del sistema. La siguiente definición de indistinguibilidad fue tomada del libro de Nijmeijer y van~der Schaft, 1990.

**Definición 2.1.** *Dos estados  $x_1, x_2 \in M$  se dicen indistinguibles (denotado  $x_1 \mathcal{I} x_2$ ) para (2.1) si para cada función de entrada admisible  $u$  la función de salida  $t \mapsto y(t, 0, x_1, u)$  del sistema para el estado inicial  $x(0) = x_1$ , y la función de salida  $t \mapsto y(t, 0, x_2, u)$ ,  $t \geq 0$ , del sistema para el estado inicial  $x(0) = x_2$ , son idénticas en su dominio común de definición.*

A partir de la definición de indistinguibilidad 2.1, se puede definir la observabilidad como sigue,

**Definición 2.2.** *Un sistema se denomina observable si  $x_1 \mathcal{I} x_2$  implica  $x_1 = x_2$ .*

La definición 2.2 concluye que el sistema (2.1) es observable si la única forma en que dos salidas sean iguales es que no haya diferencia entre los estados iniciales. En otras palabras, no importa que entrada  $u$  se utilice para el sistema, si tenemos dos estados iniciales diferentes, las salidas también serán diferentes, es decir distinguibles.

Una vez establecida la definición, el siguiente paso es poder decir si un sistema es observable o no. El análisis de observabilidad se hace normalmente por medio del mapa de  $r$ -observabilidad (Inouye, 1977; Zeitz, 1984; Vargas-Casillas, 2002), el cual relaciona el estado  $x$ , y la salida  $y$  del sistema (2.1) y  $r - 1$  de sus derivadas temporales. Se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{O}(x, v) = [L_f^0 h, L_f^1 h, \dots, L_f^{r-1} h]^T = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \dots & y^{(r-1)} \end{bmatrix}^T, \quad (2.2)$$

donde  $v = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \dots & u^{(w)} \end{bmatrix}^T$ ,  $L_f^k h$  (con  $w$  suficientemente grande) son formas dependientes de la entrada de las derivadas de Lie de  $h$ , definidas por  $L_f^0 h(x) = h(x)$

$$L_f^k h(x) = \frac{\partial L_f^{k-1} h}{\partial x} f + \frac{\partial L_f^{k-1} h}{\partial v} \frac{dv}{dt}, \quad k \geq 1. \quad (2.3)$$

$u$  aparece explícitamente hasta la  $(r - w)$ -ésima derivada de Lie, mientras que la salida y sus primeras  $k$  derivadas temporales con  $k < r - w$  pueden ser expresadas como funciones únicamente del estado  $x$ . La propiedad más importante de este mapa es la inyectividad. Un mapa es globalmente inyectivo si cada punto en la imagen corresponde a un único punto en el dominio. La inyectividad global implica la existencia de una inversa que mapea puntos en la imagen a puntos en el dominio. Una condición suficiente para la observabilidad para toda entrada es la inyectividad global para toda  $v$  del mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathcal{O}$  para alguna  $r \geq n$ .

Aunque generalmente, un sistema de una salida de orden  $n$  tiene un mapa de  $r$ -observabilidad inyectivo (Vargas et al., 2002), con  $r \leq 2n + 1$ , en este trabajo se hará un breve análisis de identificabilidad de un parámetro asumiendo que  $r = n$ , es decir con el conocimiento de la salida y  $n - 1$  de sus derivadas, lo cual se hace en muchos métodos de diseño (Vargas et al., 2002).

## 2.2. Excitación persistente

En el caso presentado en esta tesis, es de especial importancia la condición de excitación persistente, la cual es necesaria para asegurar estabilidad uniforme y asintótica de ciertos sistemas lineales.

Una primera ecuación diferencial encontrada con frecuencia dentro del estudio de sis-

temas adaptables se presenta a continuación,

$$\dot{x}(t) = -U(t)U^T(t)x(t) \quad (2.4)$$

donde  $U(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  es una función continua a tramos y acotada. Si

$$Q(t) = U(t)U^T(t) \quad (2.5)$$

entonces  $Q(t)$  es una matriz positiva semidefinida. Derivando temporalmente la candidata a función de Lyapunov  $V = x^T x/2$  a lo largo de las trayectorias de (2.4) sólo se puede demostrar que el punto  $x = 0$  es uniformemente estable, pero como muestra el siguiente teorema existen condiciones suficientes y necesarias para que el sistema (2.4) sea uniforme y asintóticamente estable.

**Teorema 2.1.** *Las siguientes condiciones (1)-(4) son equivalentes y aseguran la estabilidad uniforme y asintótica del punto de equilibrio  $x = 0$  de la ecuación diferencial (2.4)*

1. *Existen constantes positivas  $t_0$ ,  $T_0$  y  $\varepsilon_1$  tal que para todo vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_t^{t+T_0} w^T U(\tau)U^T(\tau)w d\tau \geq \varepsilon_1 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.6)$$

2. *Existen constantes positivas  $t_0$ ,  $T_0$  y  $\varepsilon_2$  tal que para todo vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\int_t^{t+T_0} \|U(\tau)U^T(\tau)w\| d\tau \geq \varepsilon_2 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.7)$$

3. *Existen constantes positivas  $t_0$ ,  $T_0$  y  $\varepsilon_3$  tal que para todo vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|U^T(\tau)w\| d\tau \geq \varepsilon_3 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.8)$$

4. *Existen constantes positivas  $t_0$ ,  $T_0$  y  $\varepsilon_4$  tal que*

$$\lambda_i \left[ \int_t^{t+T_0} U(\tau)U^T(\tau) d\tau \right] \geq \varepsilon_4 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.9)$$

donde  $\lambda_i[A]$  denota el  $i$ -ésimo autovalor de la matriz  $A$ . △

Para la demostración del Teorema 2.1 se debe referir a los trabajos de Morgan y Narendra (1977b); Narendra y Annaswamy (1989).

Pasemos al segundo caso, el cual es parte de la motivación del presente trabajo,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A(t)z_1(t) + U^T(t)z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) &= -U(t)z_1(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $z_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $z_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $A(t)$  y  $U(t)$  son matrices de funciones acotadas y continuas a tramos de dimensiones  $n \times n$  y  $n \times m$  respectivamente, y  $A(t) + A^T(t)$  es uniformemente negativa definida, es decir  $A(t) + A^T(t) \leq -Q < 0$ . Como en la primera ecuación (2.4) la atención se centra en analizar las condiciones necesarias y suficientes para las cuales el sistema (2.10) es uniforme y asintóticamente estable. El siguiente Teorema establece dichas condiciones (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989),

**Teorema 2.2.** *El punto  $x = 0$  de la ecuación (2.10) es uniforme y asintóticamente estable si, y sólo si, existen constantes positivas  $T_0$ ,  $\delta_0$  y  $\epsilon_0$  con  $t_2 \in [t, t + T_0]$  tal que para cualquier vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$\left\| \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2 + \delta_0} U^T(\tau)w d\tau \right\| \geq \epsilon_0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.11)$$

△

Cuando  $\|\dot{U}(t)\|$  es uniformemente acotado, la condición (2.11) puede ser relajada como se muestra en el siguiente corolario.

**Corolario 2.1.** *Si  $U(t)$  es suave,  $\dot{U}(t)$  es uniformemente acotada, y  $U(t)$  satisface la siguiente condición*

$$\frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} \|U^T(\tau)w\| d\tau \geq \epsilon_0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.12)$$

para  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , y constantes positivas  $T_0$  y  $\epsilon_0$ , y todos los vectores unitarios  $w \in \mathbb{R}^n$ , entonces la solución  $x = 0$  de la ecuación (2.10) es uniforme y asintóticamente estable.

△

Narendra y Annaswamy (1989) mencionan que bajo las condiciones dadas en el Corolario 2.1 para  $U(t)$  la desigualdad (2.12) es equivalente a la siguiente desigualdad,

$$\int_t^{t+T_0} U(\tau)U^T(\tau) d\tau \geq \alpha I \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.13)$$

para constantes positivas  $t_0$ ,  $T_0$  y  $\alpha$ . Esta condición denominada **excitación persistente** implica que la integral de la matriz  $U(t)U^T(t)$  sobre un intervalo finito  $T_0$  es una matriz positiva definida. Otra interpretación implica que la matriz  $U(t)U^T(t)$ , la cual tiene rango unidad en cada instante, al ser integrada sobre un intervalo y cumplir con la condición dada en (2.13) adquiere rango completo.

Un caso especial de (2.10), donde la matriz  $A$  no es variante en el tiempo es mostrado por Marino y Tomei (1995), este sistema es de importancia dentro de la tesis, ya que para esta forma se puede garantizar convergencia uniforme y exponencial como se enuncia en el siguiente Lema,

**Lema 2.1.** (Sastry y Bodson, 1989; Narendra y Annaswamy, 1989) *Considere el sistema lineal variante en el tiempo*

$$\dot{x} = Ax + \Omega^T(t)z, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.14)$$

$$\dot{z} = -\Lambda\Omega(t)Px, \quad z \in \mathbb{R}^p \quad (2.15)$$

en el cual  $A$  es una matriz de  $n \times n$  Hurwitz,  $P$  es una matriz de  $n \times n$ , simétrica y positiva definida tal que se satisface la igualdad  $A^T P + PA = -Q$ , con  $Q$  simétrica y positiva definida, y  $\Lambda$  es una matriz de  $p \times p$ , simétrica y positiva definida. Si  $\|\Omega(t)\|$ ,  $\|\dot{\Omega}(t)\|$  son uniformemente acotadas y  $\Omega(t)$  satisface la condición de excitación persistente, entonces  $(x, z) = 0$  es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable.  $\Delta$

Por otro lado para que las condiciones de convergencia de (2.4) y (2.10) sean equivalentes,  $u$  tiene que ser restringida, esto nos conducirá a la revisión de propiedades para la convergencia del algoritmo propuesta en este trabajo. El primer paso, propuesto en Narendra y Annaswamy (1989), es definir una clase de funciones a las cuales pertenece  $U$

**Definición 2.3.** *Sea  $C_\delta$  un conjunto en  $[0, \infty)$  para el cual existe una  $\delta > 0$  tal que para todo  $t_1, t_2 \in C_\delta$ ,  $t_1 \neq t_2$  implica  $|t_1 - t_2| \geq \delta$ . Entonces  $\mathcal{P}_{[0, \infty)}$  esta definido como la clase de funciones reales valuadas en  $[0, \infty)$  tal que para cada  $U \in \mathcal{P}_{[0, \infty)}$ , corresponde algún  $\delta$  y  $C_\delta$  tal que*

1.  $U(t)$  y  $\dot{U}(t)$  son continuas y acotadas en  $[0, \infty)/C_\delta$  y
2. para todo  $t_1 \in C_\delta$ ,  $u(t)$  y  $\dot{u}(t)$  se tienen límites finitos cuando  $t \uparrow t_1$  y  $t \downarrow t_1$   $\Delta$

Cuando no se pueda asegurar que  $U(t)$  es acotada, se tiene que pedir que la planta sea estable. Lo anterior para poder aplicar todos los conceptos explicados dentro del trabajo. Un vector  $u$  se dice que pertenece a  $\mathcal{P}_{[0, \infty)}$  si cada componente de  $u$  pertenece a  $\mathcal{P}_{[0, \infty)}$ . Con esta condición sobre  $u$  se pueden usar indistintamente las ecuaciones (2.11) y (2.12). Una vez definida la condición de excitación persistente es de importancia para este trabajo señalar una propiedad adicional. Para poder citarla a través de un lema es necesario la definición del siguiente conjunto (Narendra y Annaswamy, 1989).

**Definición 2.4.** El conjunto de todas las funciones  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $u \in \mathcal{P}_{[0,\infty)}$  que satisfice la condición en la desigualdad (2.13) sobre un periodo  $T_0$  para todo  $t \geq t_0$  es denotado por  $\Omega_{(n,t_0,T_0)}$ .  $\Delta$

Los subíndices  $n$ ,  $t_0$ , y  $T_0$  en la Definición 2.4 se refieren a la dimensión del espacio, el tiempo inicial, y el intervalo sobre el cual la función  $u$  es persistentemente excitada. En muchos casos el tiempo inicial puede ser omitido, por lo que el conjunto se denotará como  $\Omega_{(n,T_0)}$ .

**Lema 2.2.**

1. Si  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  y cualquier componente de  $u(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , ó pertenece a  $\mathcal{L}^1$ , o pertenece a  $\mathcal{L}^2$ , entonces  $u \notin \Omega_{(n,T)}$  para cualquier  $T$ .
2. Si  $u_1 \in \Omega_{(n,t_0,T)}$ ,  $u_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $u_2 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $u_1 + u_2 \in \Omega_{(n,t_1,T)}$  para algún  $t_1 \geq t_0$ . El mismo resultado se mantiene si  $u_2 \in \mathcal{L}^1$  o  $\mathcal{L}^2$ .
3. Si  $u_1, u_2 \in \Omega_{(n,T)}$ , entonces  $u_1 + \epsilon u_2 \in \Omega_{(n,T)}$  para algún  $\epsilon \in \mathbb{R}$  suficientemente pequeño.

$\Delta$

El Lema 2.2 indica que una señal de excitación persistente lo sigue siendo aunque se le sumen señales en algún sentido pequeñas.

## 2.3. Algoritmo Genérico de Segundo Orden

Uno de los algoritmos que ayudarán a la construcción de algoritmos estimadores de parámetros en tiempo finito es el denominado Algoritmo Genérico de Segundo Orden (AGSO) (Moreno, 2011), el cual está descrito por

$$\dot{z}_1 = -k_1 \phi_1(z_1) + z_2 + \varsigma_1(t, x) \quad (2.16a)$$

$$\dot{z}_2 = -k_2 \phi_2(z_1) + \varsigma_2(t, x) \quad (2.16b)$$

donde  $z_1$  y  $z_2$ , son las variables de estado escalares,  $k_1$  y  $k_2$  son ganancias positivas a ser diseñadas,  $\varsigma_1(t, x)$  y  $\varsigma_2(t, x)$  son perturbaciones variantes en el tiempo y/o no lineales, y las no linealidades  $\phi_1(z_1)$  y  $\phi_2(z_1)$  son,

$$\phi_1(z_1) = \mu_1 |z_1|^p \text{sign}(z_1) + \mu_2 |z_1|^q \text{sign}(z_1), \quad \mu_1, \mu_2 \quad (2.17a)$$

$$\phi_2(z_1) = \mu_1^2 p |z_1|^{2p-1} \text{sign}(z_1) + \mu_1 \mu_2 (p+q) |z_1|^{p+q-1} \text{sign}(z_1) + \mu_2 q |z_1|^{2q-1} \text{sign}(z_1), \quad (2.17b)$$

con  $\mu_1, \mu_2 \geq 0$  constantes no negativas y  $q \geq 1 \geq p \geq \frac{1}{2}$  son números reales. Se debe notar que cuando  $p = \frac{1}{2}$  la función  $\phi_2(x_1)$  tiene una discontinuidad (acotada) en  $z_1 = 0$ . Dado que  $\phi_2(z_1)$  no es necesariamente una función continua, en general la ecuación diferencial (2.16) no tiene soluciones clásicas, de tal forma que las soluciones de (2.16) son todas trayectorias en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Para diferentes valores de los parámetros  $\mu_1, \mu_2, p, q$  algunos casos en particular son recordados:

- Un algoritmo lineal se recobra cuando  $\mu_1, \mu_2, p, q = 1, 0, 1, 1$ , de tal forma que  $\phi_1(z_1) = z_1, \phi_2(z_1) = z_1$ .
- El Algoritmo Super-Twisting Clásico (STC), originalmente propuesto por Levant (1993), se obtiene para  $\mu_1, \mu_2, p, q = 1, 0, \frac{1}{2}, q$ , de tal forma que  $\phi_1(x_1) = |x_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(x_1), \phi_2(x_1) = \frac{1}{2} \text{sign}(x_1)$ . En este caso  $\phi_2(x_1)$  es una función discontinua.
- Un algoritmo homogéneo (Bacciotti y Rosier, 2001a; Levant, 2005) se obtiene cuando  $\mu_2 = 0$  y  $p \geq \frac{1}{2}$ .
- Para  $p = \frac{1}{2}$  y  $q = 1$  se obtiene el Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG) (Moreno, 2009).

Para los algoritmos citados en arriba, las ganancias  $k_1, k_2$  son constantes, pero estas también pueden ser variables como muestran Davila et~al. (2010) y Gonzalez et~al. (2012).

Por otro lado una característica interesante del AGSO es que sus propiedades de convergencia dependen de los valores de  $p$  y  $q$ .

**Definición 2.5.** *El origen  $x = 0$  del sistema (2.16) es (localmente) globalmente*

- *Estable en Tiempo-Finito, si todas las trayectorias que empiezan en (una vecindad de  $z = 0$ )  $\mathbb{R}^2$  convergen a  $z = 0$  en tiempo finito.*
- *Exponencialmente estable, si todas las trayectorias que empiezan en (una vecindad de  $z = 0$ )  $\mathbb{R}^2$  convergen a  $z = 0$  exponencialmente.*
- *Asintóticamente estable, si todas la trayectorias que empiezan en (una vecindad de  $z = 0$ )  $\mathbb{R}^2$  convergen a  $z = 0$  asintóticamente.*
- *Uniformemente estable, si todas las trayectorias que empiezan en  $\mathbb{R}^2$  convergen a una vecindad de  $z = 0$  en tiempo finito, y la convergencia temporal es uniformemente acotada (superiormente) con respecto a la condición inicial.*
- *Robustamente estable, si todas las trayectorias que empiezan en (una vecindad de  $z = 0$ )  $\mathbb{R}^2$  convergen a  $z = 0$  para una familia de perturbaciones desvanecientes en el origen.*

**Cuadro 2.1:** Propiedades de convergencia del AGSO

Término de bajo orden $p$	Término de alto orden $q$	Tipo de estabilidad	
$p = 1$	$q = 1$	Robusta, exponencial	No uniforme, práctica
$\frac{1}{2} < p < 1$	$q = 1$	Robusto, Tiempo finito	No uniforme, práctica
$p = \frac{1}{2}$	$q = 1$	Tiempo finito, exacto	No uniforme, práctica
$p = 1$	$q > 1$	Exponencial, robusto	Uniforme, práctica
$\frac{1}{2} < p < 1$	$q > 1$	Robusto, Tiempo finito	Uniforme, práctica
$p = \frac{1}{2}$	$q > 1$	Robusto, Tiempo finito	Uniforme práctica

- *Exactamente estable, si para todas las trayectorias que empiezan en (una vecindad de  $z = 0$ )  $\mathbb{R}^2$  convergen a  $z = 0$  en tiempo finito, para una familia de perturbaciones que son no desvanecientes en el origen.*
- *Prácticamente estable, si todas las trayectorias que empiezan en (una vecindad de  $z = 0$ )  $\mathbb{R}^2$  convergen a un vecindario de  $z = 0$  en tiempo finito, para una familia de perturbaciones no desvanecientes en el origen.*

Con estas definiciones Moreno (2011) presenta una tabla (ver tabla 2.1) donde se presentan las propiedades de convergencia dependiendo de los valores de  $p$  y  $q$ .

A partir de la tabla 2.1 (Moreno, 2011) se explica que el tipo de convergencia recae en el término de bajo orden  $p$ , mientras que el término de alto orden es responsable de la uniformidad de la convergencia con respecto a la condición inicial. Por otro lado se aprecia que para  $p = \frac{1}{2}$  la robustez de la estabilidad es exacta con respecto a las perturbaciones. Esta robustez es consecuencia de la discontinuidad, lo cual distingue a los algoritmos STC y ASTG.

### 2.3.1. Convergencia en tiempo finito de AGSO

Cuando el exponente del término de bajo orden se encuentra entre los valores  $\frac{1}{2} \leq p < 1$  las trayectorias del AGSO con ganancias constantes  $k_1, k_2$  convergen al origen robustamente y en tiempo finito. Y para  $p = \frac{1}{2}$  esta convergencia se logra a pesar de las perturbaciones.

Para demostrar este tipo de convergencia, Moreno (2011) utiliza la siguiente función de Lyapunov (robusta) cuadrática,

$$V_Q(z) = \zeta^T P \zeta, \quad (2.18)$$

donde  $\zeta^T = \Phi^T(z) = [\phi_1(z_1), z_2]$ , y  $P = P^T > 0$  es la única matriz solución positiva definida de la Ecuación Algebraica de Lyapunov (EAL)  $A^T P + PA = -Q$ , con  $A$  una matriz Hurwitz

y una matriz arbitraria positiva definida y simétrica  $Q = Q^T > 0$ . Y hace notar que  $\Phi(z)$  es un homeomorfismo global para cada  $(p, q)$ , con  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ , y para  $p = 1$  este es un difeomorfismo.

Moreno (2011) también hace una importante observación sobre la naturaleza de la función de Lyapunov  $V_Q$  (2.18), la cual es clave para hacer el análisis de convergencia.  $V_Q$  es continua pero no localmente Lipschitz, entonces las versiones usuales del Teorema de Lyapunov (Filippov, 1988; Bacciotti y Rosier, 2001a; Orlov, 2005) no pueden ser usadas con esta función de Lyapunov, pero menciona que es posible mostrar que  $V_Q(\varphi(t, x_0))$  es una función absolutamente continua (AC) del tiempo a lo largo de las trayectorias  $\varphi(t, z_0)$  de la ecuación diferencial (2.16). Esto implica que es diferenciable casi en todas partes. Entonces, si la derivada  $\dot{V}_Q$  es negativa definida casi en cualquier parte, entonces  $V_Q(t, z_0)$  es monótonamente decreciente y converge a cero, la cual es la condición requerida en el Teorema de Zubov (Poznyak, 2008, Teorema 20.2, p. 568).

El siguiente teorema es el resultado obtenido del análisis de convergencia sin perturbaciones,

**Teorema 2.3.** *Considere el sistema (2.16) con  $\mu_1 > 0$ , y ganancias constantes  $k_1, k_2$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El origen  $z = 0$  de (2.16) es asintóticamente estable.*
2. *La matriz  $A$  de la EAL es Hurwitz, i.e. todos sus autovalores tienen parte real negativa.*
3. *Las ganancias constantes son positivas, i.e.  $k_1 > 0, k_2 > 0$ .*
4. *Para cada matriz positiva definida y simétrica  $Q = Q^T > 0$ , la EAL mencionada arriba tiene una única solución positiva definida y simétrica  $P = P^T > 0$ .*

*En este caso la función (2.18) es una función de Lyapunov fuerte y global para el sistema (2.16). La derivada temporal  $\dot{V}_Q$  de la función de Lyapunov, tomada a lo largo de las trayectorias del sistema, satisface la ecuación diferencial*

$$V_Q \leq -\gamma(Q, \mu_1) V_Q^{\frac{3p-1}{2p}}(z) - \gamma(Q, \mu_2) |x_1|^{q-1} V_Q(z), \quad (2.19)$$

donde  $\gamma_1(Q, \mu_1) \triangleq \mu_1 p \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1-p}{2p}}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}}$ ,  $\gamma_2(Q, \mu_2) \triangleq \mu_2 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max} P}$ , son escalares dependientes de la selección de la matriz  $Q$  y  $\mu_1, \mu_2$ . △

Lo más importante de este Teorema es que a pesar de los elementos no lineales, dependiendo de los exponentes pueden ser discontinuos, la estabilidad del punto de equilibrio  $z = 0$  de la ecuación 2.16 es completamente determinada por la estabilidad de la matriz  $A$ .

Por otro lado el tiempo de convergencia se puede calcular de la ecuación (2.19) y queda descrita es la siguiente proposición (Moreno, 2011).

**Proposición 2.1.** *Suponga que  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , y  $\mu_2 \geq 0$ . Entonces una trayectoria del AGSO (2.16) empezando en  $z_0 \in \mathbb{R}^2$  converge al origen en tiempo finito  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$  ( $\mu_1 > 0$ ), y ésta alcanza dicho punto en un tiempo menor a*

$$T(z_0) = \begin{cases} \frac{2p}{(1-p)\gamma_1(Q,\mu_1)} V_Q^{\frac{1-p}{2p}}(z_0) & \text{si } \mu_2 = 0 \text{ ó } q > 1, \\ \frac{2p}{(1-p)\gamma_2(Q,\mu_2)} \ln \left( 1 + \frac{\gamma_2(Q,\mu_2)}{\gamma_1(Q,\mu_1)} V_Q^{\frac{1-p}{2p}}(z_0) \right) & \text{si } \mu_2 > 0 \text{ y } q = 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

donde  $V_Q(z)$ ,  $\gamma_1(Q,\mu_1)$  y  $\gamma_2(Q,\mu_2)$  son dadas en el Teorema 2.3. Cuando  $p = 1$  ( $\mu_1 > 0$ ) la convergencia es exponencial.  $\triangle$

También se caracteriza la robustez del AGSO cuando presenta perturbaciones variantes en el tiempo y/o no lineales,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -k_1 \phi_1(z_1) + z_2 + \varsigma_1(t, z) \\ \dot{z}_2 &= -k_2 \phi_2(z_1) + \varsigma_2(t, z). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Usando el vector  $\zeta$  (2.18) es posible escribir (2.21) como

$$\dot{\zeta} = \phi'_1(z_1) \begin{bmatrix} -k_1 \phi_1(z_1) + z_2 + \varsigma_1(t, z) \\ -k_2 \phi_2(z_1) + \frac{\varsigma_2(t, z)}{\phi'_1(z_1)} \end{bmatrix} = \phi'_1(z_1)(A\zeta + \tilde{\varsigma}), \quad (2.22)$$

$$\text{con } \tilde{\varsigma}(t, \zeta) = \begin{bmatrix} \varsigma_1(t, z) \\ \left( \frac{1}{p\mu_1|z_1|^{p-1} + q\mu_2|x_1|^{q-1}} \right) \varsigma_2(t, z) \end{bmatrix}_{z=\varphi^{-1}(\zeta)}$$

La clase de de perturbaciones que puede combatir el sistema queda definida por la transformación  $\tilde{\varsigma}(t, \zeta)$ , la cual satisface las condiciones de sector (ver Moreno (2011)).

Y el análisis de convergencia del sistema (2.21) queda definido en el siguiente teorema

**Teorema 2.4.** *Suponga que existe una matriz  $P = P^T > 0$  simétrica y positiva definida, constantes positivas  $\theta_1, \theta_2 > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que la desigualdad matricial (DM)*

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + \epsilon P + R & PB \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} \leq 0, \quad (2.23)$$

o equivalentemente, la Desigualdad Algebraica de Riccati (DAR)

$$A^T P + PA + \epsilon P + R + PB\Theta^{-1}B^T P \leq 0, \quad (2.24)$$

son satisfechas, donde  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

dependiendo de si  $\varsigma_1(t, z)$  y  $\varsigma_2(t, z)$ , sólo  $\varsigma_1(t, z)$ , o sólo  $\varsigma_2(t, z)$  están presentes, respectivamente. En este caso el origen es global y robustamente estable, de tal forma que las trayectorias el sistema (2.21) convergen al origen para todas las perturbaciones que satisfacen las

condiciones (ver (Moreno, 2011, 4.4.1 Clases de perturbacion)),

$$\begin{aligned} |\varsigma_1(t, z)| &\leq g_1(\mu_1|z_1|^p + \mu_2|z_1|^q), & \text{con } g_1 > 0 \\ |\varsigma_2(t, z)| &\leq g_2(p\mu_1^2|z_1|^{2p-1} + (p+q)\mu_1\mu_2|z_1|^{p+q-1} + q\mu_2^2|z_1|^{2q-1}), & \text{con } g_2 > 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

y la forma cuadrática  $V_Q = \zeta^T P \zeta$  es una función de Lyapunov fuerte y robusta para el sistema (2.21). Para  $1 > p \geq \frac{1}{2}$  y  $\mu_1 > 0$  cada trayectoria alcanza el origen en un tiempo finito menor a

$$T(z_0) = \begin{cases} \frac{2}{(1-p)\epsilon\mu_1^{\frac{1}{p}}\lambda_{\min}^{\frac{1-p}{2p}}\{P\}} V_Q^{\frac{1-p}{2p}}(z_0) & \text{si } \mu_2 = 0 \text{ o } q > 1 \\ \frac{2p}{(1-p)q\epsilon\mu_2} \ln \left( 1 + \frac{q\mu_2}{p\mu_1^{\frac{1}{p}}\lambda_{\min}^{\frac{1-p}{2p}}\{P\}} \right) & \text{si } \mu_2 > 0 \text{ y } q = 1 \end{cases}, \quad (2.26)$$

△

## 2.4. Control Adaptable por Modelo de Referencia

La estructura básica del Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR) se muestra en la Fig. 2.1. Como se mencionó, el modelo de referencia se elige para generar la trayectoria deseada,  $y_m$ , que la salida de la planta  $y_p$  tiene que seguir. El control  $C(\theta)$  en el CAMR directo tiene una estructura que depende de los parámetros constantes desconocidos, los cuales son actualizados por una ley de adaptación. Este tipo de diseño permite manipular el control  $C(\theta)$  tal que el análisis de estabilidad de la dinámica de error puede ser hecho a través del enfoque EPR-Lyapunov (de las siglas Estrictamente Positivo Real), para poder generar la mencionada ley de adaptación.

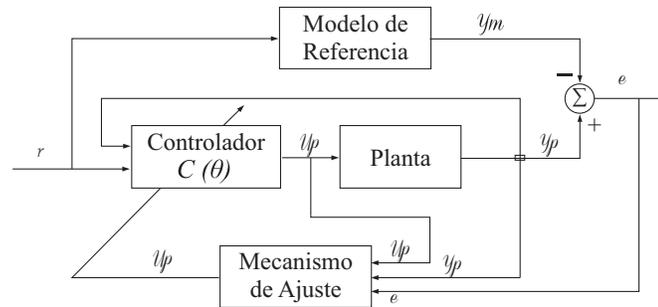


Figura 2.1: Estructura general del CAMR (Ioannou y Sun, 1996).

Para el CAMR directo clásico (Narendra y Annaswamy, 1989; Ioannou y Sun, 1996), se considera la planta de Una Entrada y Una Salida (UEUS) y Lineal e Invariante en el Tiempo

(LIT)

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + B_p u_p \\ y_p &= C_p^T x_p\end{aligned}\tag{2.27}$$

donde  $x_p \in \mathbb{R}^n$ ;  $y_p, u_p \in \mathbb{R}^1$  y  $A_p, B_p, C_p$  tienen las dimensiones apropiadas, que pueden ser descritas en la forma de entrada/salida

$$y_p = G_p(s)u_p\tag{2.28}$$

con la función de transferencia  $G_p(s)$  expresada en la forma

$$G_p(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)}\tag{2.29}$$

donde  $Z_p, R_p$  son polinomios mónicos y  $k_p$  es una constante referida como “ganancia de alta frecuencia”. Se asume que la planta tiene grado relativo  $n^* = 1$ . El caso  $n^* \geq 2$  no es considerado, ya que para aplicar el nuevo algoritmo presentado en este trabajo, se requiere que la salida de referencia aparezca en la primera derivada de la salida. Un modelo de referencia, seleccionado por el diseñador para especificar las características del lazo cerrado, está descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= A_m x_m + B_m r, & x_m(0) &= x_{m0} \\ y_m &= C_m^T x_m\end{aligned}\tag{2.30}$$

donde  $x_m \in \mathbb{R}^{p_m}$  para algún entero  $p_m$ ;  $y_m, r \in \mathbb{R}^1$  y  $r$  es la entrada de referencia, la cual se asume como una función del tiempo, continua a tramos y uniformemente acotada. La función de transferencia del modelo de referencia está dada por

$$y_m = W_m(s)r\tag{2.31}$$

que se expresa en la misma forma que (2.29),

$$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)}\tag{2.32}$$

donde  $Z_m(s), R_m(s)$  son polinomios mónicos y  $k_m$  es constante.

Cuando los parámetros de la planta son conocidos, el problema de Control por Modelo de Referencia (CMR) consiste en determinar la entrada de la planta  $u_p$  de tal forma que todas las señales son acotadas y la salida de la planta  $y_p$  sigue la salida del modelo de referencia  $y_m$  para cualquier entrada de referencia dada  $r(t)$  de la clase definida arriba. Para alcanzar el objetivo del CMR se asume que  $G_p(s)$  y  $W_m(s)$  satisfacen las siguientes suposiciones:

**A1** Una cota superior  $n$  de grado  $n_p$  de  $R_p(s)$  es conocida.

**A2** El grado relativo  $n^* = n_p - m_p$  de  $G_p(s)$  es uno, i.e.  $n^* = 1$ .

**A3**  $Z_p(s)$  es un polinomio mónico y Hurwitz de grado  $m_p = n_p - 1$ .

**A4** El signo de la ganancia de alta frecuencia  $k_p$  es conocido.

**B1**  $Z_m(s), R_m(s)$  con polinomios mónicos y Hurwitz de grado  $q_m, p_m$ , respectivamente, donde  $p_m \leq n$ . El grado relativo  $n_m^* = p_m - q_m$  de  $W_m$  es el mismo que el de  $G_p(s)$ , i.e.,  $n_m^* = n^* = 1$ .

Bajo estas condiciones, si los parámetros de la planta (2.27) son conocidos, el problema de CMR puede ser resuelto por la ley de control dada por Narendra y Annaswamy (1989); Ioannou y Sun (1996)

$$\dot{w}_1 = Fw_1 + gu_p, \quad w_1(0) = 0 \quad (2.33a)$$

$$\dot{w}_2 = Fw_2 + gy_p, \quad w_2(0) = 0 \quad (2.33b)$$

$$u_p = \theta^{*T} w \quad (2.33c)$$

donde  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$w = [w_1^T \quad w_2^T \quad y_p \quad r]^T, \theta^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^{*T} \quad c_0^*]^T \quad (2.34)$$

$$F = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & -\lambda_{n-4} & \cdots & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

$\lambda_i$  son los coeficientes de

$$\Lambda(s) = s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \lambda_1 s + \lambda_0 = \det(sI - F),$$

que es un polinomio arbitrario mónico y Hurwitz de grado  $n - 1$  que contiene a  $Z_m(s)$  como un factor, i.e.,  $\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s)$ , siendo  $\Lambda_0(s)$  mónico, Hurwitz y de grado  $n_0 = n - 1 - q_m$ .  $\theta^*$  es un vector de valores nominales de los coeficientes del controlador, que en general no son únicos, y pueden ser elegidos de tal forma que la función de transferencia en lazo cerrado formado de  $r$  a  $y_p$  es igual a  $W_m(s)$ .

Cuando los parámetros de la planta son desconocidos, el objetivo del Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR) es diseñar la variable de control  $u_p$  de tal forma que se

consiga el mismo objetivo que le CMR. Es bien sabido (Sastry y Bodson, 1989; Narendra y Annaswamy, 1989; Ioannou y Sun, 1996) que el objetivo es logrado si la ley de control (2.33c) se reemplaza por

$$u_p = \theta^T(t)w \quad (2.36)$$

donde  $\theta(t)$  es el estimado de  $\theta^*$  en el tiempo  $t$  generado por la ley de adaptación

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma e_1 w \text{signo}(\rho^*), \quad (2.37)$$

donde

$$e_1 = y_p - y_m, \text{signo}(\rho^*) = \text{sign}\left(\frac{k_p}{k_m}\right), \Gamma = \Gamma^T > 0. \quad (2.38)$$

Este es un resultado clásico en Control Adaptable (Narendra y Annaswamy, 1989; Ioannou y Sun, 1996)

**Teorema 2.5.** *Bajo las condiciones establecidas (asumiendo que  $W_m(s)$  es Estrictamente Positiva Real (EPR)) el esquema de CAMR dado por (2.36-2.38) garantiza que:*

1. *Todas las señales en lazo cerrado son acotadas y el error de seguimiento  $e_1$  converge a cero asintóticamente con el tiempo para cualquier señal de referencia  $r \in \mathcal{L}_\infty$ .*
2. *Si  $r$  es suficientemente rica de orden  $2n$ ,  $\dot{r} \in \mathcal{L}_\infty$  y  $Z_p(s)$ ,  $R_p(s)$  son relativamente coprimas, entonces el error paramétrico  $|\tilde{\theta}| = |\theta - \theta^*|$  y el error de seguimiento  $e_1$  converge a cero exponencialmente rápido.*

□

## 2.5. Funciones de Lyapunov múltiples

En esta sección se hace un breve repaso de una técnica usada en sistemas híbridos Liberzon (2003), que será utilizada en el capítulo 3.

Considere dos sistemas  $\dot{x} = f_1(x)$  y  $\dot{x} = f_2(x)$  asintóticamente (globalmente) estables, y permita que  $V_1$  y  $V_2$  sean sus respectivas funciones de Lyapunov (radialmente no acotadas). La parte de interés en este caso es establecer estabilidad del sistema conmutado (switched) usando ambas funciones de Lyapunov  $V_1$  y  $V_2$ . Para definir un sistema conmutado (switched) se necesita la noción de señal cambiante (switching signal). Esta es una función constante a tramos  $\varpi : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{D}$ . Dicha conmutación  $\varpi$  tiene un número finito de discontinuidades (las cuales se llamarán *tiempos de conmutación* (switching times)) en cada intervalo acotado y toma un valor constante en cada intervalo entre dos tiempos de cambio consecutivos. El papel de  $\varpi$  es especificar, en cada instante de tiempo  $t$ , el índice  $\varpi(t) \in \mathcal{D}$  del subsistema

activo, es decir, el sistema de la familia ( $f_1$  ó  $f_2$ ) que está siendo seguido. Entonces un sistema conmutado con tiempo de conmutación dependiente puede describirse por la ecuación,

$$\dot{x}(t) = f_{\varpi}(x). \quad (2.39)$$

En ausencia de una función de Lyapunov común, las propiedades de estabilidad del sistema conmutado (2.39) en general dependen de la señal cambiante  $\varpi$ . Permita que  $t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  sean los tiempos de conmutación. Si sucede que los valores de  $V_1$  y  $V_2$  coinciden con cada tiempo de cambio, i.e.,  $V_{\varpi(t_{i-1})}(t_i) = V_{\varpi(t_i)}(t_i)$  para todo  $i$ , entonces  $V_{\varpi}$  es una función de Lyapunov continua para el sistema cambiante, y se concluye estabilidad asintótica. En general la función  $V_{\varpi}$  es discontinua. Mientras cada  $V_d$  decrece cuando el subsistema  $d$ -ésimo es activo, ésta puede crecer cuando el subsistema  $d$ -ésimo es inactivo. A continuación se describe la idea para establecer estabilidad asintótica; considere los valores de  $V_d$  al inicio de cada intervalo en el cual  $\varpi = d$ . Para que el sistema cambiante sea asintóticamente estable, los valores mencionados deben formar una secuencia decreciente para cada  $d$ . Esta es la idea a seguir para demostrar convergencia a cero del algoritmo propuesto en el capítulo 3.

## 2.6. Elipsoides contenidas

La información presentada en esta sección es una consecuencia del Procedimiento-S usado en el análisis de DML Boyd y Vandenberghe (2004). La técnica mostrada a continuación se usará en el capítulo 3.

Una elipsoide  $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$  con interior no vacío puede representarse como el conjunto de nivel de una función cuadrática,

$$\mathcal{E} = \{x | x^T F x + 2g^T x + h \leq 0\}, \quad (2.40)$$

donde  $F$  es una matriz simétrica, positiva definida, y  $h - g^T F^{-1} g < 0$ . Suponga que  $\bar{\mathcal{E}}$  es otra elipsoide con una representación similar,

$$\bar{\mathcal{E}} = \{x | x^T \bar{F} x + 2\bar{g}^T x + \bar{h} \leq 0\}, \quad (2.41)$$

con  $\bar{F}$  una matriz simétrica positiva definida,  $\bar{h} - \bar{g}^T \bar{F}^{-1} \bar{g} < 0$ . Por el Procedimiento-S, se sabe que  $\mathcal{E} \subseteq \bar{\mathcal{E}}$  si y sólo si existe una  $\lambda > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} \bar{F} & \bar{g} \\ \bar{g}^T & \bar{h} \end{bmatrix} \leq \lambda \begin{bmatrix} F & g \\ g^T & h \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Entonces si la desigualdad (2.42) se cumple se tiene que la elipsoide  $\mathcal{E}$  está contenida dentro de la elipsoide  $\bar{\mathcal{E}}$ , lo cual se usará en el capítulo 3.

# Capítulo 3

## Estimador de un parámetro variante en el tiempo

### 3.1. Tipo de sistema en estudio y estimador

El nuevo algoritmo presentado en este capítulo puede ser considerado un observador. Se plantea de esta forma debido a que incluye varios algoritmos utilizados en la literatura como observadores, tales como el de Alta Ganancia (AG), Super-Twisting Clásico (STC), Algoritmo Super-Twisting Generalizado (ASTG), además del Diferenciador Uniforme (DU) y un estimador paramétrico clásico, pero la principal aportación se encuentra en el campo de la identificación. El nuevo algoritmo tiene la capacidad de estimar Parámetros constantes y Variantes en el Tiempo, lo cual logra debido a que dentro de su estructura considera no linealidades como las del Algoritmo Super-Twisting Clásico (ASTC). Las no linealidades usadas en los algoritmos del tipo STC, conceden propiedades como convergencia en tiempo finito y robustez ante cierto tipo de perturbaciones, o como se menciona en la comunidad de modos deslizantes “insensibilidad” ante perturbaciones acotadas. El análisis mostrado en el capítulo tiene el propósito de evidenciar que la propiedad de robustez permite hacer estimación exacta de Parámetros Variantes en el Tiempo (PVT), mientras que la propiedad de convergencia en tiempo finito genera una mayor velocidad de convergencia comparada con uno de los estimadores lineales clásicos estudiado por Morgan y Narendra (1977a), Narendra y Annaswamy (1989), Sastry y Bodson (1989) entre otros.

Para comenzar, considere el sistema de segundo orden dado por las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, u) + b(t, u, y) x_2, \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, u) + \delta(t), \\
y &= x_1
\end{aligned} \tag{3.1}$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$  son los estados,  $u \in \mathbb{R}^m$  es una entrada conocida y  $y \in \mathbb{R}$  es la salida medida.  $f_1$  es una función continua conocida y  $f_2$  corresponde a una función conocida multivaluada o posiblemente discontinua.  $\delta$  representa términos desconocidos. Las variables medidas son  $x_1$  y la entrada conocida  $u$ .  $b(t, u, y)$  es una función conocida con cota inferior y superior, es decir,

$$-b_M \leq b(t, u, y) \leq b_M. \tag{3.2}$$

Cabe notar que  $b(\cdot)$  puede cambiar de signo (no es de signo definido) y puede volverse cero en algunos intervalos. Se asume que el sistema (3.1) tiene soluciones en el sentido de Filippov (Filippov, 1988).

Primero se hará un pequeño análisis de identificabilidad del algoritmo (3.1), para ello se usará el siguiente mapa el mapa de observabilidad,

$$O(x, u, w) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ f_1(x_1, u) + b(t, u, y) x_2 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

el cual es claramente global e invertible para cada entrada conocida y desconocida  $u$  y  $\delta$  en algún instante de tiempo, si  $b(t, u, y) \neq 0$ . Si durante algún intervalo  $t \in [t_1, t_2]$  sucede que  $b(t, u, y) = 0$ , entonces es imposible estimar el valor de  $x_2(t)$  for  $t \in [t_1, t_2]$ .

El objetivo principal dentro del capítulo es estimar el estado no medible  $x_2$  utilizando el estado medible  $x_1$ , cuando el coeficiente variante en el tiempo  $b(t, u, y)$  es conocido. Se puede inferir del mapa de observabilidad, que el estado  $x_2$  será exactamente estimable sólo si,

1.  $b(t, u, y) \neq 0$  para todo tiempo, i.e. su signo no cambia,
2. ó  $b(t, u, y)$  cambia de signo pero  $x_2$  no cambia durante periodos de tiempo cuando  $b(t, u, y) = 0$ .

La primera situación, está dada por el Super-Twisting Clásico (STC), cuando es usado como diferenciador, originalmente propuesto por Levant (1993) (ver también los trabajos de Levant (1998, 2005); Fridman y Levant (2002)). En este caso el coeficiente  $b(t, u, y)$  es constante (e igual a uno). Un observador basado en el AST es presentado por Davila et~al.

(2005), y un punto de vista basado en la función de Lyapunov es propuesta por Moreno y Osorio (2008); Moreno (2011); Moreno y Osorio (2012); Gonzalez et~al. (2012); Moreno (2013), donde se ha mostrado que una función de Lyapunov cuadrática con matriz  $P$  constante permite asegurar la convergencia del observador en tiempo finito, a pesar de las perturbaciones, usando ganancias constantes o variantes en el tiempo.

El segundo caso es motivado por la situación en la cual  $x_2$  es un parámetro (constante) a ser identificado, y  $b(t, u, y)$  es el regresor, el cual puede cambiar de signo. Si el parámetro es constante es posible (de acuerdo con la ecuación (3.3) acerca de la observabilidad/identificabilidad del parámetro) estimarlo exactamente para un coeficiente variante en el tiempo  $b(t, u, y)$  siempre y cuando este no sea permanentemente cero. Un resultado clásico en este caso es provisto por un algoritmo lineal capaz de identificar el parámetro constante  $x_2$ , en caso de que  $b(t, u, y)$  es de Excitación Persistente (EP) (ver la condición (3.14) abajo) (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Marino y Tomei, 1995). La condición de EP implica (informalmente hablando) que  $b(t, u, y)$  sea diferente de cero de vez en vez, así el parámetro puede ser estimado independientemente de la condición inicial. Note que los estimadores paramétricos lineales (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Marino y Tomei, 1995) son incapaces de estimar exactamente (y después de un tiempo finito) el valor del parámetro. Aun más, si el valor de  $x_2$  cambia durante los intervalos de tiempo cuando  $b(t, u, y)$  es diferente de cero, estos algoritmos lineales son sólo capaces de seguir el valor real con un error acotado, aunque es teóricamente posible reducir dicho error de acuerdo con el análisis de observabilidad. En este capítulo se mostrara gracias a los términos no lineales y discontinuos (como las presentes en los Observadores ST presentados por Levant (1993); Davila et~al. (2005); Moreno (2013)), que el estimador propuesto permite la estimación exacta y en tiempo finito del parámetro  $x_2$  cuando el regresor  $b(t, u, y)$  es de EP y si no hay demasiados cambios de signo en una ventana de tiempo fija, pero móvil. Si la variable  $x_2$  no es constante durante los tiempos cuando  $b(t, u, y)$  es diferente de cero, entonces el observador propuesto es capaz de estimar su valor de forma exacta y en tiempo finito. Durante los tiempos cuando  $b(t, u, y)$  es cero, entonces el observador no será capaz de estimar los valores correctamente debido a la falta de identificabilidad.

Además del estimador de parámetros clásico mencionado arriba, en la literatura hay algunos casos donde es deseable saber el comportamiento de PVT desconocidos, como la eficiencia volumétrica en un motor diésel engine (Dovifaaz et~al., 2002), el rango de rotación variante en el tiempo de un giroscopio dinámico (Dong y Leland, 2005), o el coeficiente de potencia de un modelo de turbina de tiempo (Villanueva y Alvarez-Icaza, 2009).

En un trabajo reciente (Battista et~al., 2011), el AST fue usado para estimar un PVT (tasa específica de crecimiento). Una suposición importante es que se considera el regresor

$b(\cdot) > 0$  (en ese caso la concentración de biomasa). En el algoritmo mostrado en este capítulo, se considera que  $b(t)$  puede cambiar de signo y bajo algunas condiciones puede ser cero, además el análisis de convergencia mostrado en este trabajo es más sencillo cuando el regresor  $b(t)$  no cambia de signo, porque puede hacerse con funciones de Lyapunov parecidas a las cuadráticas (cf. con el trabajo de Moreno (2009)).

Otra contribución es que en la demostración se deja en claro que la robustez, heredada de las no linealidades del AST, es la propiedad que hace al nuevo algoritmo capaz de estimar PVT. Esta propiedad distingue al Observador Super-Twisting (OST) de estimadores tales como el Observador de Alta Ganancia (AG) Gauthier et al. (1992); Khalil (2002); Besançon (2007), el cual no es capaz de converger con la presencia de perturbaciones no desvanecientes.

Las pruebas de los resultado mencionados son hechas en un marco de Lyapunov. Cuando  $b(t, u, y)$  es variante en el tiempo pero no cambia de signo, se usa una función de Lyapunov (variante en el tiempo) para mostrar que el observador converge exactamente y en tiempo finito al verdadero valor del estado  $x_2$ , a pesar de las variaciones en el tiempo, siempre y cuando éstas sean acotadas y las ganancias del observador apropiadamente seleccionadas. Cuando  $b(t, u, y)$  no cambia su signo se usa una función de Lyapunov múltiple para mostrar la convergencia al origen. Este último procedimiento es novedoso incluso para el caso lineal.

Para la planta dada en la forma (3.1), el Observador ST propuesto tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_1 &= -k_1 |b(t, u, y)| \phi_1(e_1) + f_1(\hat{x}_1, u) + b(t, u, y) \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -k_2 b(t, u, y) \phi_2(e_1) + f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u),\end{aligned}\tag{3.4}$$

donde  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ , y  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$  son los errores de estimación de estado;  $k_1$  y  $k_2$  son ganancias constantes del observador, seleccionadas para asegurar la convergencia al origen del observador. Las no linealidades inyectadas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  tienen la forma para  $p = \frac{1}{2}$  (compare con (2.17))

$$\phi_1(e_1) = \mu_1 |e_1|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) + \mu_2 |e_1|^q \text{sign}(e_1), \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0,\tag{3.5}$$

$$\phi_2(e_1) = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(e_1) + \mu_1 \mu_2 \left( q + \frac{1}{2} \right) |e_1|^{q-\frac{1}{2}} \text{sign}(e_1) + \mu_2^2 |e_1|^{2q-1} \text{sign}(e_1),\tag{3.6}$$

donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son constantes no negativas, mayores a cero, y  $q \geq \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ . Note que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  están relacionadas, debido a que  $\phi_2(e_1) = \phi_1'(e_1) \phi_1(e_1)$ , ambas son funciones monótonamente crecientes de  $e_1$ , y  $\phi_1$  es continua, mientras  $\phi_2$  es discontinua en  $e_1 = 0$ . La soluciones del observador (3.4) se entienden en el sentido de Filippov (Filippov, 1988). Los errores de estimación de estado (i.e. el vector de error de estimación  $e = [e_1, e_2]^T$ ) satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= -k_1 |b(t, u, y)| \phi_1(e_1) + b(t, u, y) e_2 + \rho_1(t, e) \\ \dot{e}_2 &= -k_2 b(t, u, y) \phi_2(e_1) + \rho_2(t, e),\end{aligned}\quad (3.7)$$

donde

$$\rho_1(t, e_1) = f_1(x_1 + e_1, u) - f_1(x_1, u) \quad (3.8)$$

$$\rho_2(t, e) = f_2(x_1 + e_1, x_2 + e_2, u) - f_2(x_1, x_2, u) - \delta(t). \quad (3.9)$$

Cada término de la perturbación  $\rho_1$  y  $\rho_2$  tiene dos componentes

- $\rho_{1f} = f_1(x_1 + e_1, u) - f_1(x_1, u)$ ,  $\rho_{2f} = f_2(x_1 + e_1, x_2 + e_2, u) - f_2(x_1, x_2, u)$  son debido a los términos dinámicos. Note que (en ausencia de ruido) los términos  $\rho_{1f} = f_1(x_1 + e_1, u) - f_1(x_1, u)$  pueden ser eliminados si se usa  $f_1(y, u)$  en lugar de  $f_1(\hat{x}_1, u)$  en el observador (3.4).
- $\rho_{2\delta} = -\delta$  debido al término de incertidumbre/perturbación  $\delta$ .

Cada término tiene una influencia diferente en el comportamiento del observador, y está será discutida abajo.

Para lograr una perfecta estimación se imponen las siguientes condiciones de crecimiento para los términos de perturbación:

**Suposición 3.1.** *Se asume que existen dos funciones no negativas  $g_1(t) \geq 0$ ,  $g_2(t) \geq 0$ , tales que*<sup>1</sup>

$$|\rho_1(t, e)| \leq g_1(t) |b(t, u, y)| |\phi_1(e_1)| \quad (3.10a)$$

$$|\rho_2(t, e)| \leq g_2(t) |b(t, u, y)| |\phi_2(e_1)|, \quad (3.10b)$$

para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $t \geq 0$ .

Resalta la dependencia de  $b(t, u, y)$  en la cota de la perturbación (3.10b), la cual puede parecer extraña a primera vista. Sin embargo, cabe notar de la dinámica de la planta (3.1), que en el caso  $b(t, u, y) = 0$  para un intervalo de tiempo  $t \in [t_1, t_2]$ , un cambio en el estado variable  $x_2$  no causa ningún efecto en el valor de la variable medida  $x_1$ , i.e.  $x_2$  no es observable desde  $x_1$ . Por lo tanto es imposible estimar  $x_2$  durante este intervalo de tiempo. Entonces es claro que estimar el estado  $x_2$  sin error para todos los tiempos, es necesario que durante los tiempos cuando  $b(t, u, y) = 0$ , la perturbación  $\rho_2(t, x)$  también se tiene que desvanecer. Por otro lado, la dependencia de la cota de la perturbación (3.10a) del término  $b(t, u, y)$  recae en el término de corrección  $k_1 |b(t, u, y)|$ , ya que se debe notar de (3.5)-(3.6) que  $\rho_1(t, e)$  se desvanece en

<sup>1</sup> $g_1(\cdot)$  y  $g_2(\cdot)$  pueden depender de señales conocidas, por ejemplo  $y, u, e_1$  o  $\hat{x}$ .

el origen, i.e.  $\rho_1(t, 0) = 0$ , mientras  $\rho_2(t, e)$  es no desvaneciente en el origen cuando  $\mu_1 > 0$  debido a los términos discontinuos en  $\phi_2(e_1)$ . Esto último permite converger al algoritmo a pesar de la perturbación  $\rho_2(t, e)$  actuando persistentemente. Esto es una de la principales características del OST.

### 3.2. Convergencia del estimador con regresor con signo definido

Primero considere el caso donde el coeficiente  $b(t, u, y)$  no cambia de signo, i.e. puede ser no negativo  $b(t, u, y) \geq 0$  o no positivo  $b(t, u, y) \leq 0$  para todo tiempo. En particular, cuando  $b(t, u, y)$  es una constante positiva o negativa, es común usar una función (no suave) de Lyapunov cuadrática, como en Moreno y Osorio (2008); Moreno (2011); Moreno y Osorio (2012); Moreno (2012, 2013), para probar convergencia al origen en tiempo finito y robustez (insensibilidad) contra perturbaciones.

Se demostrará para el caso de signo definido  $b(t, u, y)$ , que una función de Lyapunov fuerte, cuadrática (no suave), invariante en el tiempo, con una apropiada selección de ganancias, y considerando las variaciones de las perturbaciones y el coeficiente  $b(t, u, y)$ , lleva a concluir que el origen es un punto de equilibrio global, y robustamente estable en tiempo finito, bajo ciertas condiciones para  $b(t, u, y)$ . Más aún es *exactamente* estable.

**Teorema 3.1.** *Considere el OST (3.4), y suponga que las perturbaciones satisfacen (3.10), para algunas funciones conocidas  $g_1(t) \geq 0$ ,  $g_2(t) \geq 0$ . Asuma que  $b(t, u, y)$  es acotada como en (3.2), y que es de signo definido, i.e. puede ser no negativa  $b(t, u, y) \geq 0$  o no positiva  $b(t, u, y) \leq 0$  para todo tiempo. Elija las ganancias como*

$$k_1 > \alpha_1, k_2 > \alpha_2, \quad (3.11)$$

donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se toman de las igualdades

$$\rho_1(t, x) = \alpha_1(t, x) |b(t, u, y)| \phi_1(e_1) \quad (3.12)$$

$$\rho_2(t, x) = \alpha_2(t, x) |b(t, u, y)| \phi_2(e_1) \quad (3.13)$$

Asuma que el coeficiente variante en el tiempo  $b(t, u, y)$  satisface la siguiente condición de excitación persistente (PE):

Existen constantes positivas  $\varepsilon > 0$  y  $T > 0$  tales que

$$\int_t^{t+T} |b(\tau)| d\tau \geq \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (3.14)$$

Entonces  $e = 0$  es un punto de equilibrio global, uniforme (del tiempo inicial) asintótica y robustamente estable, así todas las trayectorias del sistema (3.7) convergen al origen para

todas la perturbaciones. Si  $\mu_1 > 0$  o si  $\mu_2 > 0$  y  $\frac{1}{2} \leq q < 1$  entonces la convergencia al origen es en tiempo finito, y si  $\mu_2 > 0$  y  $q = 1$  la convergencia es al menos exponencial. La forma cuadrática  $V_+(e)$  para el caso no negativo ( $V_-(e)$  para el no positivo)

$$V_+(e) = \zeta^T P_+ \zeta, \quad (V_-(e) = \zeta^T P_- \zeta), \quad (3.15)$$

donde

$$\zeta^T = \Phi^T(e) = [\phi_1(e_1), e_2], \quad (3.16)$$

y  $P_+$  ( $P_-$ ) es una matriz constante positiva,  $P_{\pm} = P_{\pm}^T > 0$ , están dadas por

$$P_+ = \begin{bmatrix} p_1 & -1 \\ -1 & p_2 \end{bmatrix}, \quad \left( P_- = \begin{bmatrix} p_1 & +1 \\ +1 & p_2 \end{bmatrix} \right), \quad p_1 > 0, \quad p_2 = \frac{p_1 + k_1}{k_2}, \quad p_1 p_2 > 1, \quad (3.17)$$

es una función de Lyapunov fuerte y robusta. △

*Demostración.* En este apartado se desarrollará sólo la prueba para el caso no negativo  $b(t, u, y) \geq 0$ , el caso no positivo es idéntico. Considere como una candidata a función de Lyapunov la forma cuadrática (3.15) con constante  $P_+$ .  $V_+(e)$  (3.15) es Absolutamente Continua y continuamente diferenciable donde sea excepto en el conjunto  $\mathcal{S} = \{(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2 \mid e_1 = 0\}$ .

Note que debido a (3.10) podemos escribir  $\rho_1(t, x) = \alpha_1(t, x) |b(t, u, y)| \phi_1(e_1)$ , y  $\rho_2(t, x) = \alpha_2(t, x)$

$|b(t, u, y)| \phi_2(e_1)$  para algunas funciones  $|\alpha_1(t, x)| \leq g_1(t)$  y  $|\alpha_2(t, x)| \leq g_2(t)$ . Usando estas funciones y notando que  $\phi_2(e_1) = \phi_1'(e_1) \phi_1(e_1)$ , donde  $\phi_1'(e_1) = \frac{1}{2} \mu_1 |e_1|^{-\frac{1}{2}} + p \mu_2 |e_1|^{q-1}$ , se puede mostrar que

$$\dot{\zeta} = |b(t, u, y)| \phi_1'(e_1) \begin{bmatrix} -(k_1 - \alpha_1(t, x)), & 1 \\ -(k_2 - \alpha_2(t, x)), & 0 \end{bmatrix} \zeta = |b(t, u, y)| \phi_1'(e_1) \mathcal{A}(t, x) \zeta,$$

para cada punto en  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$ , donde esta derivada existe. La matriz  $\mathcal{A}(t, x)$  está dada por

$$\mathcal{A}(t, x) = \begin{bmatrix} -\tilde{k}_1(t, x), & 1 \\ -\tilde{k}_2(t, x), & 0 \end{bmatrix},$$

donde  $\tilde{k}_1(t, x) = k_1 - \alpha_1(t, x)$ ,  $\tilde{k}_2(t, x) = k_2 - \alpha_2(t, x)$ . De forma similar se puede calcular la derivada de  $V_+(e)$  en el mismo conjunto como

$$\dot{V}_+ = |b(t, u, y)| \phi_1'(e_1) \zeta^T (\mathcal{A}^T(t, x) P_+ + P_+ \mathcal{A}(t, x)) \zeta = -|b(t, u, y)| \phi_1'(e_1) \zeta^T Q_+(t, x) \zeta, \quad (3.18)$$

donde

$$Q_+(t, x) = \begin{bmatrix} 2\tilde{k}_1(t, x)p_1 - 2\tilde{k}_2(t, x) & \tilde{k}_2(t, x)p_2 - \tilde{k}_1(t, x) - p_1 \\ \tilde{k}_2(t, x)p_2 - \tilde{k}_1(t, x) - p_1 & 2 \end{bmatrix},$$

Entonces se tiene que demostrar

$$\begin{bmatrix} 2\tilde{k}_1p_1 - 2\tilde{k}_2 & -p_1 - \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2p_2 \\ -p_1 - \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2p_2 & 2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.19)$$

con  $\tilde{k}_1 \geq 0$  y  $\tilde{k}_2 \geq 0$ . Se tienen las siguientes desigualdades,

$$2\tilde{k}_1p_1 - 2\tilde{k}_2 \geq 0 \Rightarrow \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} \leq p_1 \text{ and} \quad (3.20)$$

$$(4\tilde{k}_1p_1 - 4\tilde{k}_2) - (-p_1 - \tilde{k}_1 + \tilde{k}_2p_2)^2 \geq 0 \quad (3.21)$$

Para que la desigualdad (3.21) se cumpla, se puede proceder con  $p_2 = \frac{p_1 + \tilde{k}_1}{\tilde{k}_2}$ , y es lo mismo para  $Q_-$ . Con esta selección de  $p_2$ ,  $Q_+$  se tiene la siguiente ecuación,

$$Q_+ = \begin{bmatrix} 2\tilde{k}_1p_1 - 2\tilde{k}_2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (3.22)$$

de tal forma  $\lambda_{Q_{max}} = 2\tilde{k}_1p_1 - 2\tilde{k}_2$  y  $\lambda_{Q_{min}} = 2$ , esto es porque el valor de  $p_1 \gg 0$ . Se puede elegir  $p_1$  lo suficientemente grande para asegurar convergencia. Así, la condición que debe ser garantizada es que  $\mathcal{A}$  sea Hurwitz,

$$\det(\lambda - \mathcal{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda + \tilde{k}_1 & \tilde{k}_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \tilde{k}_1\lambda + \tilde{k}_2. \quad (3.23)$$

Por lo tanto, se debe cumplir que los autovalores sean negativos

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\tilde{k}_1 \pm \sqrt{\tilde{k}_1^2 - 4\tilde{k}_2}}{2} \quad (3.24)$$

porque  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 > 0$  se debe mantener que

$$\tilde{k}_1^2 - 4\tilde{k}_2 \geq 0 \quad (3.25)$$

$$\tilde{k}_1^2 \geq 4\tilde{k}_2 \quad (3.26)$$

La desigualdad (3.26) es el análogo del análisis presentado por Moreno (2009, 2011). Y

también se debe mantener que,

$$-\tilde{k}_1 + \sqrt{\tilde{k}_1^2 - 4\tilde{k}_2} \leq 0, \quad (3.27)$$

$$\tilde{k}_1^2 \leq \tilde{k}_1^2 + 4\tilde{k}_2 \Rightarrow 0 \leq \tilde{k}_2. \quad (3.28)$$

Note que para  $P_+ > 0$  se requiere que  $p_1 p_2 > 1$ .

Se puede mostrar que  $Q_+(\cdot)$  es positiva definida, i.e.  $Q_+(t, x) \geq \nu \mathbb{I}$  para alguna constante  $\nu > 0$ , si  $P_+$  se selecciona como en (3.17) y las ganancias son como en (3.11). Recordando la desigualdad estándar para formas cuadráticas

$$\lambda_{\min}\{P_+\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P_+ \zeta \leq \lambda_{\max}\{P_+\} \|\zeta\|_2^2,$$

donde

$$\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2(e_1) + e_2^2 = \mu_1^2 |e_1| + 2\mu_1 \mu_2 |e_1|^{\frac{1}{2}+q} + \mu_2^2 |e_1|^{2q} + e_2^2$$

es la norma euclidiana  $\zeta$ , y notando que la desigualdad

$$|e_1|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\mu_1} |\phi_1(e_1)| \leq \frac{1}{\mu_1} \|\zeta\|_2 \leq \frac{V_+^{\frac{1}{2}}(e)}{\mu_1 \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P_+\}} \quad (3.29)$$

se satisface para cada  $\mu_1 > 0$ , y por lo tanto

$$-|e_1|^{-\frac{1}{2}} \leq -\mu_1 \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P_+\} V_+^{-\frac{1}{2}}(x).$$

También la desigualdad

$$|e_1|^{1-q} \leq \left( \frac{1}{\mu_2} |\phi_1(e_1)| \right)^{\frac{1-q}{q}} \leq \left( \frac{1}{\mu_2} \|\zeta\|_2 \right)^{\frac{1-q}{q}} \leq \left( \frac{V_+^{\frac{1}{2}}(e)}{\mu_2 \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P_+\}} \right)^{\frac{1-q}{q}} \quad (3.30)$$

se satisface que para cada  $\frac{1}{2} \leq q < 1$  y  $\mu_2 > 0$ , y por lo tanto

$$-|e_1|^{q-1} \leq -\left( \frac{V_+^{\frac{1}{2}}(e)}{\mu_2 \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P_+\}} \right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Note que  $\lambda_{\min}\{Q_+\} = \nu_+$ . Esto muestra que para  $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$  (se usa la identidad  $\phi_1'(e_1) =$

$$\frac{1}{2}\mu_1 |e_1|^{-\frac{1}{2}} + q\mu_2 |e_1|^{q-1})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_+ &= -|b(t, u, y)|\phi'_1(e_1)\zeta^T Q_+(t, x)\zeta \leq -v_+ |b(t, u, y)|\phi'_1(e_1)\zeta^T \zeta \\ &\leq -v_+ |b(t, u, y)| \left( \frac{1}{2}\mu_1 |e_1|^{-\frac{1}{2}} + q\mu_2 |e_1|^{q-1} \right) \zeta^T \zeta \\ &\leq -\gamma_1 |b(t, u, y)| V_+^{\frac{1}{2}}(e) - \gamma_2 |b(t, u, y)| V_+^{\frac{3q-1}{2q}}(e), \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_1 = \mu_1^2 \frac{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P_+\} v_+}{2\lambda_{\max}\{P_+\}}, \quad \gamma_2 = \mu_2^q \frac{q\lambda_{\min}^{\frac{1-q}{2q}}\{P_+\} v_+}{\lambda_{\max}\{P_+\}}. \quad (3.31)$$

Para  $\ell = \frac{3q-1}{2q} > 1$  se usa solamente el primer término en el lado derecho de la desigualdad. Esto muestra que  $V_+(\varphi(t, e_0))$  es no creciente, y el origen es uniformemente estable. La solución de la ecuación diferencial

$$\dot{v}(t) = -\gamma(t)v^\ell(t), \quad v(t_0) = v_0 > 0, \quad (3.32)$$

con  $\gamma(t) = \gamma_1 |b(t, u, y)|$  (o  $\gamma(t) = \gamma_2 |b(t, u, y)|$ , if  $\ell > 1$ ), puede ser fácilmente obtenida por separación de variables, y está dada por

$$\begin{aligned} v^{1-\ell}(t) &= \max \left\{ v^{1-\ell}(t_0) - (1-\ell) \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau, 0 \right\}, \quad \frac{1}{2} \leq \ell < 1, \\ v(t) &= e^{-\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau} v(t_0), \quad \ell = 1. \end{aligned} \quad (3.33)$$

En el caso de que  $\mu_1 > 0$  o  $\mu_2 > 0$  y  $\frac{1}{2} \leq \ell < 1$ , por el principio de comparación Khalil (2002), se sigue que bajo la condición (3.14),  $V_+(t)$  es monótonamente decreciente y alcanza el cero en tiempo finito. Más aun, esto pasa uniformemente de la condición inicial  $t_0$ . Esto implica que el origen es global y uniformness estable en tiempo finito. Para  $\mu_1 = 0, \mu_2 > 0$  y  $q = 1$  la convergencia es exponencial.  $\square$

### 3.3. Convergencia del estimador con regresor con signo indefinido

Ahora se considerará el caso cuando el coeficiente  $b(t, u, y)$  puede cambiar de signo, i.e. es no negativo  $b(t, u, y) \geq 0$  para algunos intervalos de tiempo y no positivo  $b(t, u, y) \leq 0$  para algunos intervalos de tiempo. Para un señal dada  $b(t, u, y)$  se asocia la secuencia creciente de tiempos  $\mathcal{S} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, \dots\}$ , tal que  $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N < \dots$ , de acuerdo a la sigu-

iente regla:  $b(t, u, y) \geq 0$  durante el intervalo  $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$  y  $b(t, u, y) \leq 0$  durante el intervalo  $t \in (t_{2i+1}, t_{2i+2})$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Note que se ha asumido inicialmente que  $b(t, u, y) \geq 0$ , pero si este no es el caso se puede proponer  $t_0 = t_1$ . La secuencia  $\mathcal{S}$  puede ser finita o infinita. Los intervalos positivos  $\mathcal{I}^+(\mathcal{S}) = \cup_{j \in \mathbb{Z}_+} [t_{2j}, t_{2j+1}]$  corresponden a la unión de intervalos donde  $b(t, u, y) \geq 0$  (un conjunto de medida cero), y su correspondiente para los intervalos negativos  $\mathcal{I}^-(\mathcal{S}) = \cup_{j \in \mathbb{Z}_+} [t_{2j+1}, t_{2j+2}]$ . Es importante mencionar que los intervalos pueden cambiar porque la función  $b(t, u, y)$  puede depender de la trayectoria de estado  $x_1(t)$ , y dicha trayectoria cambia su comportamiento dependiendo de las condiciones iniciales del sistema 3.1.

Hasta este punto se ha mostrado que  $V_+$  ( $V_-$ ) es no creciente durante los intervalos de tiempo  $b(t, u, y) \geq 0$  ( $b(t, u, y) \leq 0$ ) y decrece si  $b(t, u, y) > 0$  ( $b(t, u, y) < 0$ ). Sin embargo,  $V_+$  ( $V_-$ ) puede crecer durante los intervalos de tiempo donde  $b(t, u, y) \leq 0$  ( $b(t, u, y) \geq 0$ ). En lo subsecuente se usarán estas dos funciones de Lyapunov (parciales),  $V^+$  y  $V^-$ , para encontrar condiciones sobre  $b(t, u, y)$  de tal forma que se pruebe que el error de estimación converge al origen (ver Branicky (1998)). En el mencionado análisis se considerarán dos subcasos: uno con perturbaciones y otro sin ellas.

### 3.3.1. Caso sin perturbaciones: $\rho_1(t, e) = \rho_2(t, e) = 0$

Este caso aparece, por ejemplo, cuando en (3.1)  $x_2$  representa un parámetro constante, i.e.  $\dot{x}_2 = 0$ , que se desea identificar,  $b(t, u, y)$  corresponde al regresor, y por lo tanto ambos  $f_2(x_1, x_2, u) = 0$  y  $\delta(t) = 0$ .

En este caso se considera una función de Lyapunov adicional para el error de estimación (3.7):

$$V_0(e) = \zeta^T P_0 \zeta, \quad (3.34)$$

donde  $\zeta$  está dada por (3.16) y  $P_0$  es una matrix constante, positiva definida  $P_0 = P_0^T > 0$ , dada por

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \quad p_1 > 0, \quad p_1 = p_2 k_2, \quad (3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(e) &= 2p_1 \phi_1(e_1) \phi_1'(e_1) (-k_1 |b(t, u, y)| \phi_1(e_1) + b(t, u, y) e_2) - 2p_2 k_2 b(t, u, y) \phi_2(e_1) e_2 \\ &= -2p_1 k_1 |b(t, u, y)| \phi_1'(e_1) |\phi_1(e_1)|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Debido a  $\dot{V}_0(e) \leq 0$  para cada valor de  $b(t, u, y)$ , se sigue que el origen  $e = 0$  es un punto de equilibrio uniformemente estable. Ahora la tarea se centra en probar convergencia asintótica en tiempo finito.

Para mostrar convergencia a cero, se revisarán las dos funciones  $V_+(t)$  y  $V_-(t)$ , definidas en el Teorema 3.1, a lo largo de las trayectorias del sistema de error (3.7). Ya que dichas funciones no son Lipschitz continuas, su derivada en algunos puntos tiende a infinito (hay una división entre  $|x_1|$ , como se puede ver en (3.18)), y por lo tanto no se puede usar la desigualdad de  $V_+$  ( $V_-$ ) durante los tiempos cuando  $|x_1| = 0$  para calcular su crecimiento, ya que dicha desigualdad no está acotada.

Considere por ejemplo el comportamiento  $V_+$  durante un intervalo negativo. En este caso

$$\dot{\zeta} = |b(t, u, y)|\phi'_1(e_1) \begin{bmatrix} -k_1 & -1 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix} \zeta = |b(t, u, y)|\phi'_1(e_1)\mathcal{A}_-\zeta,$$

y la derivada de  $V_+(e)$  es igual a

$$\dot{V}_+ = |b(t, u, y)|\phi'_1(e_1)\zeta^T (\mathcal{A}_-^T P_+ + P_+ \mathcal{A}_-) \zeta = -|b(t, u, y)|\phi'_1(e_1)\zeta^T Q_* \zeta,$$

donde

$$Q_* = \begin{bmatrix} 2(p_1 k_1 + k_2) & p_1 - k_1 - p_2 k_2 \\ p_1 - k_1 - p_2 k_2 & -2 \end{bmatrix}.$$

$Q_*$  no tiene signo definido, porque  $V_+$  puede crecer durante un intervalo negativo, y lo mismo ocurre con  $V_-$  durante intervalos positivos.

Para librar este problema, se usa la siguiente idea, al final del intervalo positivo  $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$  la función  $V_+$  ha alcanzado algunos valores  $V_+(t_{2i+1})$ . Se tiene que establecer un valor inicial para la función  $V_-$  en los tiempos  $t_{2i+1}$ , i.e.  $V_-(t_{2i+1})$ . Se asignan como  $V_-(t_{2i+1})$  la energía del conjunto de nivel de la función  $V_+$  con energía  $V_+(t_{2i+1})$ . Se procede de la misma forma (sólo cambiando roles) al final de los intervalos negativos  $t \in (t_{2i+1}, t_{2(i+1)})$ . De esta forma se puede calcular el decrecimiento de  $V_+$  ( $V_-$ ) durante los intervalos positivo (negativo)  $\mathcal{I}^+(\mathcal{S})$  ( $\mathcal{I}^-(\mathcal{S})$ ). Si  $V_+(t)$  o  $V_-(t)$  converge a cero, entonces  $e(t)$  lo hará también.

Debido a que los conjuntos de nivel  $V_+$  ( $V_-$ ) son elipsoides (en las coordenadas  $\zeta$ ), entonces se puede obtener una expresión explícita para  $V_-(t_{2i+1})$  como una función de  $V_+(t_{2i+1})$  (o  $V_+(t_{2i})$  como una función de  $V_-(t_{2i})$ ). Esto se hace en le siguiente Lema.

**Lema 3.1.** *Considere las elipsoides definidas por  $\mathcal{E}_\kappa^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T P_+ x \leq \kappa\}$  y  $\mathcal{E}_\varsigma^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T P_- x \leq \varsigma\}$ , donde  $P_+$  y  $P_-$  están dados en (3.17). Entonces  $\mathcal{E}_\kappa^+ \subseteq \mathcal{E}_\varsigma^-$  y las fronteras son tangentes si y sólo si*

$$\varsigma = \alpha\kappa, \alpha \triangleq \frac{\sqrt{p_1 p_2 + 1}}{\sqrt{p_1 p_2 - 1}}. \quad (3.36)$$

También,  $\mathcal{E}_\varsigma^- \subseteq \mathcal{E}_\kappa^+$  y las fronteras son tangentes si y sólo si  $\kappa = \alpha\varsigma$ . △

*Demostración.* Usando el procedimiento-S (S-procedure, S-p) (Boyd y Vandenberghe, 2004, p. 655, Example B.1) se sigue que  $\mathcal{E}_\kappa^+ \subseteq \mathcal{E}_\zeta^-$  si y sólo si  $\exists \lambda > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} P_- & 0 \\ 0 & -\zeta \end{bmatrix} \leq \lambda \begin{bmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix}.$$

Esto es equivalente a  $\zeta \geq \lambda\kappa$  y  $\begin{bmatrix} (\lambda-1)p_1 & (\lambda+1) \\ (\lambda+1) & (\lambda-1)p_2 \end{bmatrix} \geq 0$ . Note que en la última desigualdad  $\lambda > 1$ , porque con  $\lambda = 1$  la matriz no es positiva semidefinida. La última desigualdad es por lo tanto equivalente a  $(\lambda-1)^2 p_1 p_2 \geq (\lambda+1)^2$ . Esto es equivalente a  $\sqrt{p_1 p_2} \geq \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$ , y finalmente a  $\lambda \geq \frac{\sqrt{p_1 p_2} + 1}{\sqrt{p_1 p_2} - 1}$ .

Para que las fronteras sean tangentes se tiene que elegir el valor mínimo posible para  $\lambda$ , en este caso  $\alpha = \frac{\sqrt{p_1 p_2} + 1}{\sqrt{p_1 p_2} - 1}$ . El segundo caso  $\mathcal{E}_\zeta^- \subseteq \mathcal{E}_\kappa^+$  nos lleva exactamente a las mismas desigualdades.  $\square$

Para probar convergencia del observador se requiere que la función  $b(t, u, y)$  cumpla, además de la condición usual de excitación persistente (3.14), una condición en la “densidad” de cambios de signo, que estos sean el menor numero posible respecto a la tasa de convergencia. Se define la “densidad” de cambios de signo para una señal  $b(t, u, y)$ , si existe, como sigue,

**Definición 3.1.** Una señal  $b(t, u, y)$ , con una secuencia de tiempos asociada  $\mathcal{S} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, \dots\}$ , se dice que tiene una densidad de cambios de signo finita si existe una constante positiva  $\sigma > 0$  tal que el número de cambios de signo en un intervalo  $[t_0, t_0 + t]$ , dado por

$$S = \text{cardinalidad}\{\mathcal{S} \cap [t_0, t_0 + t]\},$$

satisface para todo  $t \geq t_0$

$$S \leq \sigma(t - t_0).$$

$\triangle$

Ahora se puede establecer el resultado principal.

**Teorema 3.2.** Considere el OST (3.4), y suponga que no hay perturbaciones, i.e. se satisface (3.10) con  $g_1(t) = g_2(t) = 0$ . Asuma aun más que  $b(t, u, y)$  es acotada como en (3.2), y que ésta cambia de signo de acuerdo con la secuencia  $\mathcal{S} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, \dots\}$ .

Escoja las ganancias  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $p_1 > 0$ , y  $p_1 p_2 > 1$ .

Asuma que el coeficiente variante en el tiempo  $b(t, u, y)$  satisface la condición de excitación persistente (PE) (3.14), y que  $b(t, u, y)$  tiene una densidad de cambios de signo  $\sigma$  (ver Definición 3.1).

Entonces cuando  $\mu_2 \neq 0$  y  $\ell = 1$  el origen  $e = 0$  para el sistema (3.7) es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable si  $\sigma$  es un número finito, es decir, si satisface

$$\sigma < \frac{\epsilon}{\gamma_2 \ln(\alpha) T}. \quad (3.37)$$

donde  $\sigma$  se presenta en la Definición 3.1,  $\epsilon$  y  $T$  son tomadas de la condición de excitación persistente (3.14),  $\alpha$  se define en la ecuación (3.36), y  $\gamma_2$  es definida en (3.31). Si  $\mu_1 \neq 0$  o  $\mu_2 \neq 0$  y  $q < 1$  entonces es local y uniformemente estable en tiempo finito. Si  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 \neq 0$  y  $\ell = 1$  entonces el origen  $e = 0$  es un punto de equilibrio global y uniformemente estable en tiempo finito, si  $\sigma$  es un número finito, i.e. satisface (3.37).  $\triangle$

Note que la condición (3.37) impone un límite superior para la densidad de cambios. Este límite superior es más grande entre más pequeño es  $\alpha$ . Es evidente que como  $\alpha \rightarrow 1^+$  entonces  $\frac{\epsilon}{\ln(\alpha)T} \rightarrow \infty$ , aunque el rol de  $\gamma_2$  no es completamente claro. La siguiente proposición muestra que para cualquier valor positivo de las ganancias  $k_1, k_2$ , es posible seleccionar  $p_1$  y  $p_2$  tal que  $\alpha$  pueda ser seleccionada arbitrariamente cerca de 1, también es posible notar que  $\gamma_2$  es más pequeña conforme  $p_1$  se hace más grande y por lo tanto la desigualdad (3.37) puede ser satisfecha para cualquier señal de EP con densidad de cambios de signo definida.

**Proposición 3.1.** *Suponga que  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$  son dadas, entonces es posible seleccionar  $p_1 \gg 0$ ,  $p_2 > 0$  tal que  $p_1 p_2 > 1$  (y por lo tanto las matrices  $P_+$  y  $P_-$  definidas en (3.17) son positivas definidas) y  $Q$  en (3.49) es positiva definida y tal que el producto  $p_1 p_2$  es arbitrariamente grande, por lo tanto para cualquier  $\bar{\epsilon} > 0$  el valor de  $\alpha$  en (3.36) es  $\alpha = 1 + \bar{\epsilon}$ , y  $\gamma_2 \rightarrow 0$  como  $p_1 \rightarrow \infty$ .  $\triangle$*

*Demostración.* Se define  $\eta = p_1 p_2$ . Usando (3.11) se obtiene

$$4(k_1 p_1 - k_2) > \left( k_2 \frac{p_1}{p_1} - (k_1 + p_1) \right)^2,$$

o equivalentemente

$$\left( k_1 + p_1 - 2\sqrt{(k_1 p_1 - k_2)} \right) \frac{p_1}{k_2} < \eta < \left( k_1 + p_1 + 2\sqrt{(k_1 p_1 - k_2)} \right) \frac{p_1}{k_2}.$$

Así, por ejemplo, seleccionando  $\eta$  como

$$\eta = (k_1 + p_1) \frac{p_1}{k_2}, \text{ this means } p_2 = \frac{k_1 + p_1}{k_2},$$

se satisfarán las desigualdades. Se ve inmediatamente de la última ecuación, que para las ganancias dadas  $k_1, k_2$ , si  $\eta$  es arbitrariamente grande, entonces es posible seleccionar un  $p_1$  positivo tal que las desigualdades son satisfechas, porque la función en el lado derecho de la desigualdad crece sin cota cuando  $p_1$  lo hace. Dado que  $\alpha$  en (3.36) es  $\alpha = (\eta + 1) / (\eta - 1)$  es posible seleccionar  $\alpha$  arbitrariamente cerca de (y mayor que) 1.

Dadas las matrices simétricas, positivas definidas  $P_+$  y  $P_-$

$$P_+ = \begin{bmatrix} p_1 & -1 \\ -1 & p_2 \end{bmatrix} \text{ and } P_- = \begin{bmatrix} p_1 & 1 \\ 1 & p_2 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

sus autovalores son dados por las raíces del siguiente polinomio en ambos casos,

$$\zeta^2 - (p_1 + p_2)\zeta + p_1 p_2 - 1 = 0 \quad (3.39)$$

Las raíces son,

$$\zeta_1 = \frac{p_1 + p_2 + \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4(p_1 * p_2 - 1)}}{2} \quad (3.40)$$

$$\zeta_2 = \frac{p_1 + p_2 - \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4(p_1 * p_2 - 1)}}{2} \quad (3.41)$$

Esto puede ser deducido de  $\zeta_2 = \lambda_{\min}\{P_+\}$  (o  $\zeta_2 = \lambda_{\min}\{P_-\}$ ) y  $\zeta_1 = \lambda_{\max}\{P_+\}$  (o  $\zeta_1 = \lambda_{\max}\{P_-\}$ ), entonces tenemos

$$\frac{\lambda_{\min}^{\bar{\ell}}\{P_{\pm}\}}{\lambda_{\max}\{P_{\pm}\}} = \frac{(p_1 + p_2 - \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4(p_1 * p_2 - 1)})^{\bar{\ell}}}{p_1 + p_2 + \sqrt{(p_1 + p_2)^2 - 4(p_1 * p_2 - 1)}} \quad (3.42)$$

con  $\bar{\ell} = \frac{1-q}{2q}$  (ver ec. (3.31)), la ecuación dentro de la raíz cuadrada puede ser escrita como  $\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4}$ , así (3.42) es

$$\frac{\lambda_{\min}^{\bar{\ell}}\{P_{\pm}\}}{\lambda_{\max}\{P_{\pm}\}} = \frac{(p_1 + p_2 - \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4})^{\bar{\ell}}}{p_1 + p_2 + \sqrt{(p_1 - p_2)^2 + 4}} \quad (3.43)$$

Escogiendo  $p_2 = \frac{p_1 + k_1}{k_2}$ , se tiene

$$\frac{\lambda_{\min}^{\bar{\ell}}\{P_{\pm}\}}{\lambda_{\max}\{P_{\pm}\}} = \frac{\left(p_1\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) + \frac{k_1}{k_2} - \sqrt{\left(p_1\left(1 - \frac{1}{k_2}\right) - \frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 4}\right)^{\bar{\ell}}}{p_1\left(1 + \frac{1}{k_2}\right) + \frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\left(p_1\left(1 - \frac{1}{k_2}\right) - \frac{k_1}{k_2}\right)^2 + 4}} \quad (3.44)$$

para  $p_1 \gg 0$  se tiene

$$\frac{\lambda_{\min}^{\bar{\ell}}\{P_{\pm}\}}{\lambda_{\max}\{P_{\pm}\}} \approx \frac{1}{p_1^{1-\bar{\ell}} 2^{1-\bar{\ell}} k_2^{\bar{\ell}}} \quad (3.45)$$

Por lo tanto, escogiendo  $p_2 = \frac{p_1 + k_1}{k_2}$  and  $p_1 \gg 0$ , el cociente  $\frac{\lambda_{\min}^{\bar{\ell}}\{P_{\pm}\}}{\lambda_{\max}\{P_{\pm}\}} \approx \frac{1}{p_1^{1-\bar{\ell}} 2^{1-\bar{\ell}} k_2^{\bar{\ell}}}$ . Así, se

tiene

$$\gamma_2 = \mu_2^{\frac{1}{q}} \frac{q \lambda_{\min}^{\bar{\ell}} \{P_{\pm}\} v_+}{\lambda_{\max} \{P_{\pm}\}} \quad (3.46)$$

$$\approx \mu_2^{\frac{1}{q}} \frac{q v_+}{p_1^{1-\bar{\ell}} 2^{1-\bar{\ell}} k_2^{\bar{\ell}}} \quad (3.47)$$

Por lo tanto la constante  $\sigma$ ,

$$\sigma < \frac{\epsilon}{\gamma_2 \ln(\alpha) T} \approx \frac{\epsilon p_1^{1-\bar{\ell}} 2^{1-\bar{\ell}} k_2^{\bar{\ell}}}{\mu_2^{\frac{1}{q}} q v_+ \ln(\alpha) T} \quad (3.48)$$

Es claro que la cota de cambios de signo es independiente de las ganancias  $k_1$  y sólo depende de  $k_2$ , pero dicha cota puede ser tan grande como se desee, debido a que el valor de  $p_1$  puede ser elegido arbitrariamente. La única condición para los cambios de signo es que deben ser finitos en un intervalo, porque ni  $p_1$  puede ser infinito ni  $\ln(\alpha)$  puede ser cero.  $\square$

**Observación 3.1.** *La condición de excitación persistente (3.14) y la densidad del cambio de signo (Definición 3.1) requeridas para convergencia de las trayectorias al origen del presente algoritmo, son el análogo de la condición de excitación persistente necesaria para probar estabilidad asintótica del algoritmo lineal que se presenta en Morgan y Narendra (1977a), Narendra y Annaswamy (1989). En los mencionados artículos, la condición de excitación persistente requerida es satisfecha por una función suave, continua a tramos, con derivada acotada y número finito de conmutaciones donde la función es discontinua. Tal condición de excitación persistente es suficiente y necesaria para concluir estabilidad uniforme y asintótica del algoritmo lineal presentado en dichos documentos, y las características de la señal son ilustradas por un ejemplo que usa una función que incrementa el número de cambios de signo conforme el tiempo crece (comparar con un ejemplo similar en Anderson (1977)). En este sentido se considera que la condición de densidad de cambio de signo es suficiente y necesaria.*

*Demostración.* (Teorema 3.2) Se usan las mismas variables que en la prueba anterior (Teorema 3.1), la derivada de  $V_+(e)$  durante los intervalos positivos  $\mathcal{I}^+(\mathcal{S})$  es igual a la derivada de  $V_-(e)$  durante los intervalos negativos  $\mathcal{I}^-(\mathcal{S})$ , y están dadas por

$$\dot{V}_{\pm} = -|b(t, u, y)| \phi_1'(e_1) \zeta^T Q \zeta,$$

donde

$$Q = \begin{bmatrix} 2l_1 & l_2 - p_1 \\ l_2 - p_1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Durante los intervalos respectivos se satisfacen la desigualdades diferenciales

$$\dot{V}_{\pm} \leq -\gamma |b(t, u, y)| V_{\pm}^{\frac{3q-1}{2q}}(e),$$

donde  $\gamma = \gamma_1$  definido en (3.31) en el caso  $\mu_1 \neq 0$  o  $\gamma = \gamma_2$  en (3.31) en el caso  $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$  y  $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$ , y  $\lambda_{\min}\{Q\} = \nu_+$ . Note que  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\nu_+$  son iguales para  $V_+$  y  $V_-$  porque hay una sola matriz  $Q$ , y los autovalores de  $P_+$  y  $P_-$  son iguales. Note que no se usan las desigualdades diferenciales de  $V_+$  ( $V_-$ ) durante el intervalo negativo (positivo)  $\mathcal{I}^-(\mathcal{S})$  ( $\mathcal{I}^+(\mathcal{S})$ ). Porque de la función de Lyapunov  $V_0$  se sabe que el origen  $e = 0$  es uniformemente estable. Por lo que ahora es necesario probar convergencia.

Se considera que  $\mu_1 > 0$  o que  $\mu_2 > 0$  y  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ . Para calcular una cota superior del valor de las funciones de Lyapunov  $V_+$  y  $V_-$  se usa el principio de comparación Khalil (2002) con la ayuda de la ecuación diferencial (3.32), con la solución dada (3.33). Durante los intervalos positivos  $\mathcal{I}^+$  la función  $V_+$  se decrementa como

$$V_+^{1-\ell}(t) \leq \max \left\{ V_+^{1-\ell}(t_{2i}) - (1-\ell) \int_{t_{2i}}^t \gamma(t) dt, 0 \right\}, t_{2i} \leq t \leq t_{2i+1} \quad (3.50)$$

mientras en los intervalos negativos  $\mathcal{I}^-$  la función  $V_-$  se decrementa como

$$V_-^{1-\ell}(t) \leq \max \left\{ V_-^{1-\ell}(t_{2i+1}) - (1-\ell) \int_{t_{2i+1}}^t \gamma(t) dt, 0 \right\}, t_{2i+1} \leq t \leq t_{2(i+1)}, \quad (3.51)$$

donde  $\gamma(t) = \gamma_{1,2} |b(t, u, y)|$ .

Para cada intervalo las condiciones iniciales se establecen como sigue: Para el tiempo inicial  $V_+(t_0)$  dado. Al final del intervalo positivo, en el instante  $t_1$ , la función ha alcanzado el valor  $V_+(t_1)$ , que puede ser calculado usando (3.50). Se sabe que el estado  $e$  está en el conjunto de nivel de  $V_+$  con energía de nivel  $V_+(t_1)$ . Este conjunto de nivel de  $V_+$  está contenido, de acuerdo al Lema 3.1, en el conjunto de nivel de la función  $V_-$  con energía  $\alpha V_+(t_1)$ , donde  $\alpha$  es dado por (3.36). Así, se puede establecer con certeza el valor inicial de  $V_-(t_1)$  para el intervalo negativo como  $V_-(t_1) = \alpha V_+(t_1)$ . Se calcula  $V_-(t_2)$  usando (3.51), y  $V_+(t_2)$  se establece como  $V_+(t_2) = \alpha V_-(t_2)$ , debido a que este conjunto de nivel  $V_+$  contiene el conjunto nivel  $V_-$  con energía  $V_-(t_2)$ . Y se procede en esta forma sucesivamente.

Considere la ecuación diferencial

$$\dot{v}(t) = -\gamma(t)v^\ell(t), \quad v(t_0) = v_0, \quad v(t_i^+) = \alpha v(t_i^-), \quad (3.52)$$

donde  $\gamma(t) = \gamma_{1,2}|b(t, u, y)|$ , y la cual es actualizada en cada instante de tiempo en la secuencia de tiempos  $\mathcal{S}$ .

Por el principio de comparación se sabe que si  $V_+(e_0) \leq v(t_0)$  entonces  $V_+(t) \leq v(t)$  durante los intervalos positivos  $\mathcal{I}^+(\mathcal{S})$  y  $V_-(t) \leq v(t)$ . Y por lo tanto si  $v(t) \rightarrow 0$  entonces  $V_+(t) \rightarrow 0$  o  $V_-(t) \rightarrow 0$  (o ambas) si el número de conmutaciones en la secuencia  $\mathcal{S}$  no tiene puntos de acumulación, esto es, si el número de conmutaciones en la secuencia  $\mathcal{S}$  dentro de cualquier intervalo compacto de tiempo es finito. En este caso se sabe también que  $e(t) \rightarrow 0$ , y por lo tanto  $e = 0$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable para el punto (3.7). La solución de (3.52) está dada por

$$v^{1-\ell}(t) = v^{1-\ell}(t_i^+) - (1-\ell) \int_{t_i}^t \gamma(\tau) d\tau, \quad \frac{1}{2} \leq \ell < 1,$$

$$v(t) = e^{-\int_{t_i}^t \gamma(\tau) d\tau} v(t_i^+), \quad \ell = 1,$$

para cada intervalo  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  (siempre que  $v(t) \geq 0$ . Cuando  $v(t)$  alcanza el cero, permanece en cero). Haciendo una composición de soluciones con la actualización de las condiciones iniciales, se obtiene una expresión para la solución en el instante  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  en términos de la condición inicial  $v(t_0)$

$$v^{1-\ell}(t) = \alpha^{i(1-\ell)} v^{1-\ell}(t_0) - (1-\ell) \sum_{j=0}^{i-1} \alpha^{(i-j)(1-\ell)} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma(\tau) d\tau +$$

$$- (1-\ell) \int_{t_i}^t \gamma(\tau) d\tau, \quad \frac{1}{2} \leq \ell < 1, \quad (3.53)$$

$$v(t) = \alpha^i e^{-\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau} v(t_0), \quad \ell = 1. \quad (3.54)$$

Se mostrara que si  $\gamma(t)$  satisface (3.14) y si su densidad  $\sigma$  de cambios de signo es suficientemente pequeña, entonces  $v(t) \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$  en el caso  $\ell = 1$  o que existe un tiempo  $\Theta > 0$  tal que  $v(t) = 0$  para  $t \geq t_0 + \Theta$  en el caso  $\frac{1}{2} \leq \ell < 1$ .

Se comienza considerando el caso  $\ell = 1$ . Es fácil ver que (ver también Morgan y Narendra (1977a)) que la condición (3.14) es equivalente a la existencia de una constante  $c$  tal que

$$\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \geq \frac{\epsilon}{T} (t - t_0) + c.$$

Más aun, porque  $\alpha > 1$  existe una  $\beta > 0$  tal que  $\alpha = e^\beta$ . Ya que en (3.53)  $i \leq \sigma(t - t_0)$  se

puede escribir

$$\begin{aligned} v(t) &= \alpha^j e^{-\int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau} v(t_0) \leq e^{\beta\sigma(t-t_0)} e^{-\frac{\epsilon}{T}(t-t_0)+c} v(t_0), \\ &= \exp\left\{-\left(\frac{\epsilon}{T} - \beta\sigma\right)(t-t_0) + c\right\} v(t_0), \end{aligned}$$

y de esta ecuación se sigue que  $v(t) \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$  para cada  $v(t_0)$  si  $\sigma < \frac{\epsilon}{\beta T} = \frac{\epsilon}{\ln(\alpha)T}$ .

Porque en este caso  $\gamma(t) = \gamma_2 |b(t, u, y)|$  esto es equivalente a que se satisfaga (3.37). Ahora, para el caso  $\frac{1}{2} \leq \ell < 1$ , y porque  $\alpha > 1$ ,

$$\sum_{j=0}^{i-1} \alpha^{(i-j)(1-\ell)} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \gamma(\tau) d\tau + \int_{t_i}^t \gamma(\tau) d\tau \geq \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \geq \frac{\epsilon}{T}(t-t_0) + c, \forall t \geq t_0,$$

y se puede escribir la siguiente ecuación, considerando (3.53),

$$v^{1-\ell}(t) \leq \alpha^{i(1-\ell)} v^{1-\ell}(t_0) - (1-\ell) \left(\frac{\epsilon}{T}(t-t_0) + c\right) \leq \exp\{\beta\sigma(t-t_0)\} v^{1-\ell}(t_0) - (1-\ell) \left(\frac{\epsilon}{T}(t-t_0) + c\right)$$

la cual converge a cero en un tiempo finito  $\Theta$  si

$$v^{1-\ell}(t_0) \leq (1-\ell) \left(\frac{\epsilon}{T}\Theta + c\right) \exp\{-\beta\sigma\Theta\} = (1-\ell) \left(\frac{\epsilon}{T}\Theta + c\right) \alpha^{-\sigma\Theta}. \quad (3.55)$$

Esto significa que dado cualquier  $\epsilon, T, \sigma, \alpha, c$  existe un tiempo finito de convergencia  $\Theta$  para condiciones iniciales lo suficientemente pequeñas  $v(t_0)$ .

Ya que  $b(\cdot)$  satisface (3.14) y tiene una densidad finita de cambios de signo  $\sigma$ , entonces cuando  $\mu_2 \neq 0$  y  $q = 1$  el origen  $e = 0$  es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable, si  $\sigma$  es pequeña, i.e. satisface (3.37). Si  $\mu_1 \neq 0$  o  $\mu_2 \neq 0$  y  $q = 1$  entonces el origen  $e = 0$  es un punto de equilibrio global, y uniformemente estable en tiempo finito, si  $\sigma$  es pequeña, i.e. satisface (3.37).  $\square$

### 3.3.2. Caso perturbado: $\rho_1(t, e) \neq \rho_2(t, e) \neq 0$

Esto es un caso importante, el cual aparece, por ejemplo, cuando en (3.1),  $x_2$  representa un parámetro variante en el tiempo, i.e.  $\dot{x}_2 \neq 0$ , a ser identificado, y  $b(t, u, y)$  corresponde al regresor. Para ser identificable el parámetro  $x_2$  no puede cambiar cuando el regresor  $b(t)$  es cero. En este caso la función (3.34) no es de Lyapunov porque su derivada no está definida. Así, se tiene que relacionar la función de Lyapunov múltiple para mostrar convergencia del observador,

**Teorema 3.3.** *Considere el OST (3.4), y suponga que las perturbaciones satisfacen (3.10). Asuma que  $b(t, u, y)$  es acotada con en (3.2), y que cambia de signo de acuerdo con la secuencia  $\mathcal{S} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N, \dots\}$ . Elija las ganancias como (3.11) con  $p_1 > 0$ ,  $p_1 p_2 > 1$ .*

*Asuma que el coeficiente variante en el tiempo  $b(t, u, y)$  satisface la condición de excitación persistente (EP) (3.14), y que tiene un densidad de cambios de signo  $\sigma$  finita. Entonces cuando  $\mu_2 \neq 0$  y  $q = 1$  el origen  $e = 0$  para el sistema (3.7) es un punto de equilibrio global y exponencialmente estable  $\sigma$  es pequeño, i.e. si satisface (3.37). Si  $\mu_1 \neq 0$  o  $\mu_2 \neq 0$  y  $q < 1$  entonces es local, uniformemente convergente en tiempo finito para cualquier perturbación. If  $\mu_1 \neq 0$ ,  $\mu_2 \neq 0$  y  $q = 1$  entonces el origen  $e = 0$  es un punto de equilibrio global, uniformemente convergente en tiempo finito si  $\sigma$  es pequeña, i.e. satisface (3.37), para cualquier perturbación.  $\triangle$*

El resultado anterior asegura la convergencia exacta del error de estimación a cero, a pesar de las perturbaciones, cuando las ganancias son diseñadas apropiadamente. Sin embargo, se requiere que las perturbaciones, en particular  $\rho_2(t, e)$ , se desvanezca cuando el coeficiente  $b(t, u, y)$  se desvanece. Como se comenta al principio del capítulo esto es inamovible, dado que la condición es equivalente a una condición de observabilidad (identificabilidad). Si la perturbación  $\rho_2(t, e)$  no se desvanece cuando  $b(t, u, y)$  es cero, entonces el error de estimación se incrementa (deja de ser cero si el observador ya había convergido) durante el tiempo que  $b(t, u, y)$  está cerca de cero. Una vez que  $b(t, u, y)$  se vuelve diferente de cero el observador converge una vez más. Esto puede ser probado usando argumentos parecidos a los Lyapunov de los teoremas anteriores y conceptos de acotamiento final y uniforme como en el Teorema 4.3 presentado por Moreno (2011). El comportamiento mencionado se ilustra más abajo con algunos ejemplos en simulación.

*Demostración.* La idea de la prueba es muy similar a la hecha para los Teoremas 3.1 y 3.2. La derivada de  $V_+(e)$  durante los intervalos positivos  $\mathcal{I}^+(\mathcal{S})$  es igual a la derivada de  $V_-(e)$  durante los intervalos negativos  $\mathcal{I}^-(\mathcal{S})$  y están dados por

$$\dot{V}_{\pm} = -|b(t, u, y)|\phi_1'(e_1)\zeta^T Q \zeta,$$

donde

$$Q_{\pm}(t, x) = \begin{bmatrix} 2\tilde{k}_1(t, x)p_1 - 2\tilde{k}_2(t, x) & \tilde{k}_2(t, x)p_2 - \tilde{k}_1(t, x) - p_1 \\ \tilde{k}_2(t, x)p_2 - \tilde{k}_1(t, x) - p_1 & 2 \end{bmatrix},$$

con  $\tilde{k}_1 = k_1 - \alpha_1(t, x)$ ,  $\tilde{k}_2 = k_2 - \alpha_2(t, x)$  como en el Teorema 3.1. Durante los respectivos intervalos se satisfacen las desigualdades diferenciales

$$\dot{V}_{\pm} \leq -\gamma|b(t, u, y)|V_{\pm}^{\frac{3q-1}{2q}}(e),$$

donde  $\gamma = \gamma_1$  definida en (3.31) en el caso  $\mu_1 \neq 0$  o  $\gamma = \gamma_2$  en (3.31) en el caso  $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$  y  $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$ , y  $\lambda_{\min}\{Q\} = \nu_+$ . Note que  $\gamma_1, \gamma_2$  y  $\nu_+$  son el mismo para  $V_+$  y  $V_-$  debido a que hay una sola matriz  $Q$  y los autovalores de  $P_+$  y  $P_-$  son el mismo. El resto de la prueba es la misma que la del Teorema 3.2.

□

## 3.4. Ejemplos en simulación.

### 3.4.1. Regresor con cambio de signo y perturbación

Como se mencionó la principal motivación para el desarrollo del trabajo es cuando  $x_2$  (considerando la planta (3.1)) corresponde a una constante o a un parámetro variante en el tiempo a ser estimado (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Marino y Tomei, 1995).

El ejemplo tiene dos propósitos; mostrar que en los intervalos donde se hace la suposición 3.1 no es satisfecha, el algoritmo no es capaz de seguir el valor real del parámetro, y que a pesar de esta desventaja el intervalo donde el algoritmo presentado no puede alcanzar el valor deseado es más pequeño cuando se incrementan las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ .

Considere el sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, u) + b(t, u, y)x_2(t) \quad (3.56a)$$

$$y = x_1 \quad (3.56b)$$

donde  $y \in \mathbb{R}$  es una señal medible,  $b(t, u, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función conocida acotada y continua a tramos, y  $x_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un parámetro continuo desconocido variante en el tiempo a ser identificado. El nuevo algoritmo se restringe al caso donde  $y$  es una variable escalar. El objetivo es estimar  $x_2$  en tiempo finito siempre que  $y(t)$  y  $b(t, u, y)$  sean conocidos, y  $b(t, u, y)$  es EP (3.14). El nuevo algoritmo (3.4) conduce a un estimador paramétrico en tiempo finito de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}} &= -k_1 |b(t, u, y)| \phi_1(e_1) + b(t, u, y) \hat{x}_2(t) + f_1(x_1, u) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= -k_2 \phi_2(e_1) b(t, u, y) \end{aligned} \quad (3.57)$$

donde  $\phi_1(e_1)$ ,  $\phi_2(e_1)$  son como en las ecuaciones (3.5), (3.6) y  $e_1 = \hat{y} - y = \hat{x}_1 - x_1$  es la salida del error de estimación.  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$  son constantes positivas escalares y  $\hat{x}_2$  es el parámetro estimado. Defina el error de estimación paramétrica como  $e_2 = \hat{x}_2(t) - x_2(t)$ , entonces la dinámica de estimación de error puede ser escrita como

$$\dot{e}_1 = -k_1 |b(t, u, y)| \phi_1(e_1) + b(t, u, y) e_2 \quad (3.58a)$$

$$\dot{e}_2 = -k_2 \phi_2(e_1) b(t, u, y) - \dot{x}_2, \quad (3.58b)$$

donde  $\dot{x}_2$  corresponde a una perturbación generada por la dinámica de error debida a la variación en tiempo del parámetro  $x_2$ . Se debe notar que cuando  $x_2(t)$  es constante, la derivada no aparece en la ecuación (3.58b) y el sistema no tiene la perturbación. Ahora, comparando con la ecuación (3.10b) en la suposición 3.1, se tiene que  $\rho_2(t, e)$  puede ser escrita como

$$|\rho_2(t, e)| = \frac{\dot{x}_2}{|b(t, u, y)| \phi_2(e_1)} |b(t, u, y)| \phi_2(e_1), \quad (3.59)$$

comparado con (3.10b), tenemos que el algoritmo converge cuando  $\alpha_2(t, x)$  es acotada por la función  $g_1(t)$  como está establecido en la prueba del Teorema 3.1, el problema es cuando  $|b(t, u, y)| = 0$ , porque  $\alpha_2(t, x) = \infty$ . Con el sistema en estas condiciones, se tiene que pedir que la función  $b(t, u, y)$  no permanezca en cero por mucho tiempo. En el ejemplo está claro que el estimador no puede alcanzar la trayectoria del parámetro real en el intervalo cerca de  $b(t, u, y) = 0$ , pero después de este lapso de tiempo la convergencia es recobrada. Es claro que el algoritmo no converge en el intervalo donde la suposición 3.1 no se cumple, y el intervalo es más pequeño entre más grande es  $k_2$ .

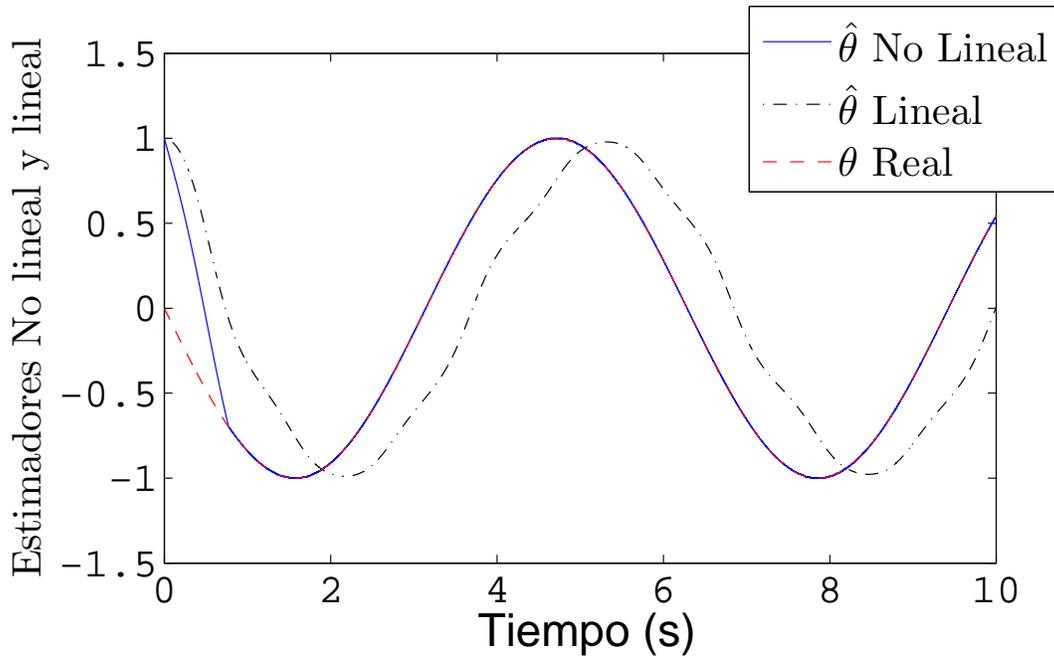
Considere la dinámica de un péndulo simple con fricción y un soporte móvil, como en el caso de un péndulo unido a un carro móvil (ver e.g. Astrom y Furuta (2000))

$$\dot{z}_1 = x_1 \quad (3.60)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{l} \cos(z_1) \varphi(t) - \frac{g}{l} \sin(z_1) - \frac{k}{ml^2} x_1 \quad (3.61)$$

donde  $z_1$  es el ángulo entre la línea vertical y el péndulo,  $x_1$  es la velocidad angular,  $l$  es la barra sin masa,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $m$  es la masa de la punta de la barra,  $k$  es el coeficiente de fricción viscosa en el pivote, y  $\varphi(t)$  representa la aceleración del pivote. Se asume que el movimiento del pivote es conocido, y se considera la aceleración  $\varphi(t)$  como un parámetro desconocido y posiblemente variante en el tiempo. Se asume que ambos estados  $z_1$  y  $x_1$  son medibles.

El estimador propuesto es,



**Figura 3.1:** Parámetro variante en el tiempo y sus estimados con algoritmos no lineal y lineal.

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_1 |b(z_1)| \phi_1(e_1) + b(z_1) \hat{x}_2(t) - \frac{g}{l} \sin(z_1) + \frac{1}{ml^2} u \quad (3.62)$$

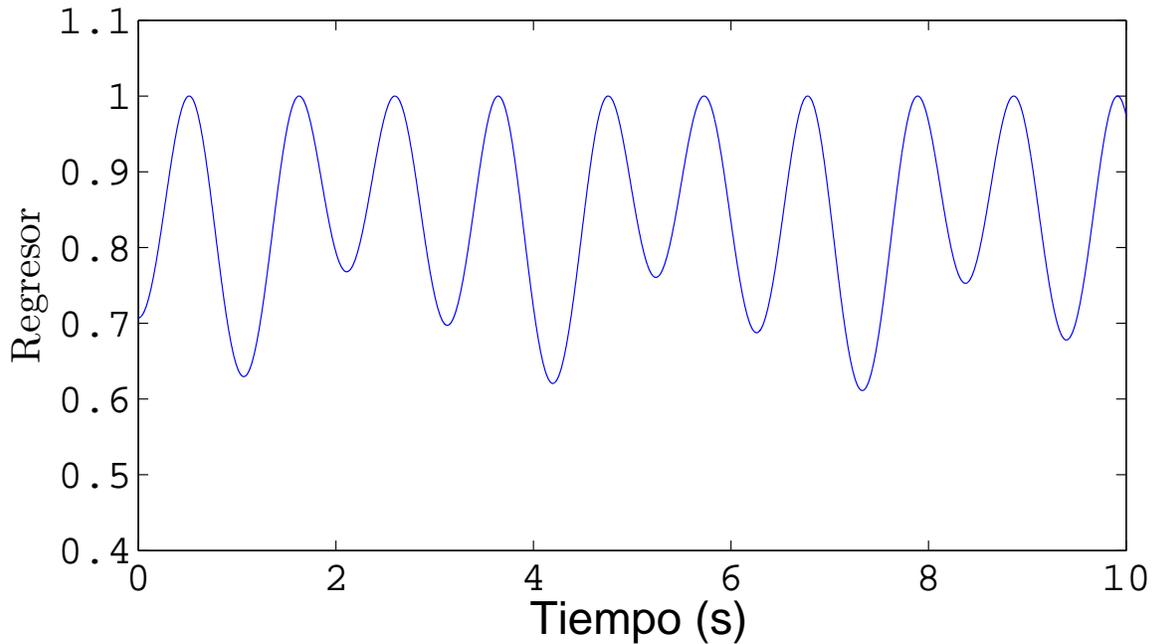
$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_2 \phi_2(e_1) b(z_1) \quad (3.63)$$

donde  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$  es el error de estado,  $b(z_1) = \frac{1}{l} \cos(z_1)$  es el regresor,  $\hat{x}_2(t)$  es el parámetro a estimar,  $\phi_1(\cdot)$  y  $\phi_2(\cdot)$  están dados como en (3.5,3.6), con  $q = 1$ .

Para los resultados de la simulación se supone que el desplazamiento del pivote está dado por una señal  $-A \sin(\omega t)$ , donde la amplitud  $A$  se varía para ejemplificar diferentes comportamientos del péndulo, y la frecuencia es  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Los otros parámetros conocidos están dado por  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 0 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$ , el parámetro variante en el tiempo es  $\varphi(t) = \omega^2 \sin(\omega t)$  y el regresor está dado por  $b(z_1) = \frac{1}{l} \cos(z_1)$ . El comportamiento del algoritmo clásico lineal (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989), con  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 10$ , es comparado con el comportamiento del algoritmo convergente en tiempo finito, obtenido con los siguiente valores  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 10$ .

La Figura 3.1 muestra la convergencia de ambos estimadores el lineal y no lineal. Aparentemente el algoritmo no lineal es capaz de estimar el parámetro variante en el tiempo exactamente y en tiempo finito, mientras el estimador paramétrico es incapaz de seguir el valor real del parámetro. Se nota que esta simulación el regresor (ver Fig. 3.2) no cambia su signo.

Modificando la aceleración del pivote el regresor cambia su signo, como se muestra en la



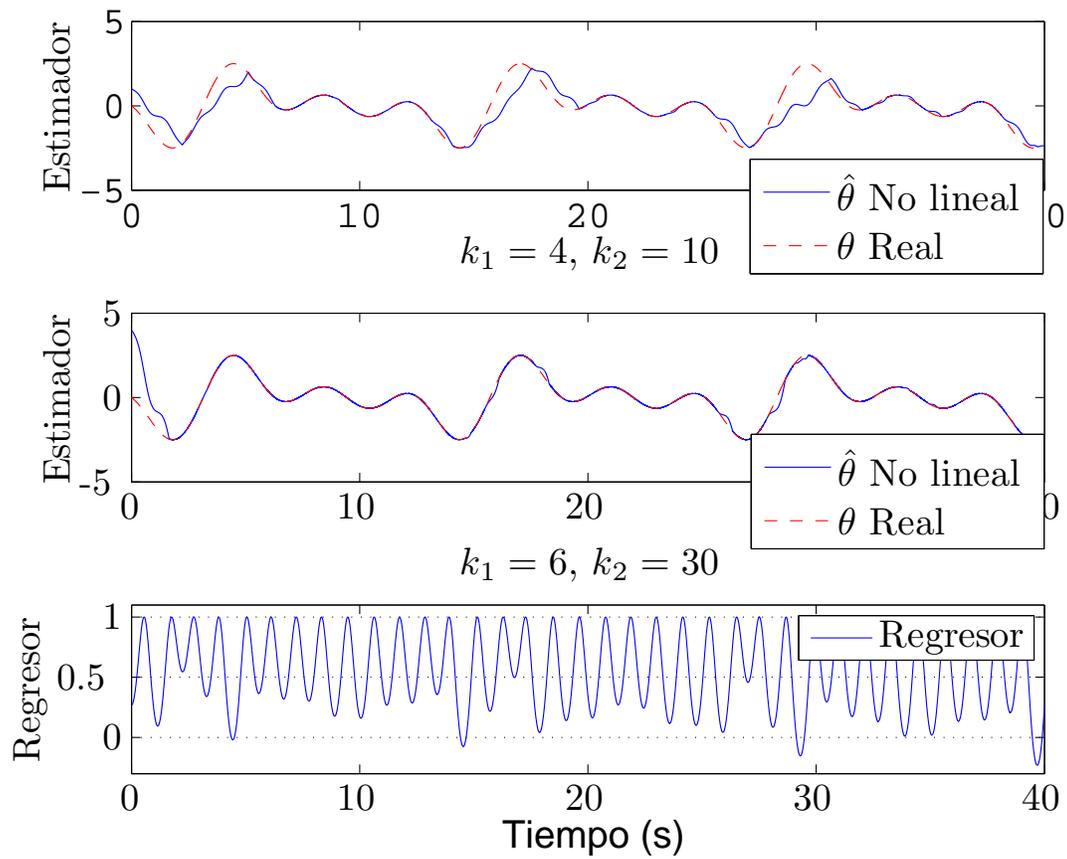
**Figura 3.2:** Regresor

figura 3.3, donde también se muestra el comportamiento del estimador no lineal, para ganancias  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 10$  (figura superior), y  $k_1 = 6$  y  $k_2 = 30$  en la figura inferior. El algoritmo lineal no es presentado, ya que este siempre tiene un error de seguimiento. Es claro que el estimador converge inicialmente en tiempo finito, pero cuando el regresor está muy cerca de cero el error de estimación crece una vez más, y regresa a cero después de que el valor del regresor se ha incrementado. También se ve que durante los cruces por cero el error se reduce al incrementar las ganancias del observador.

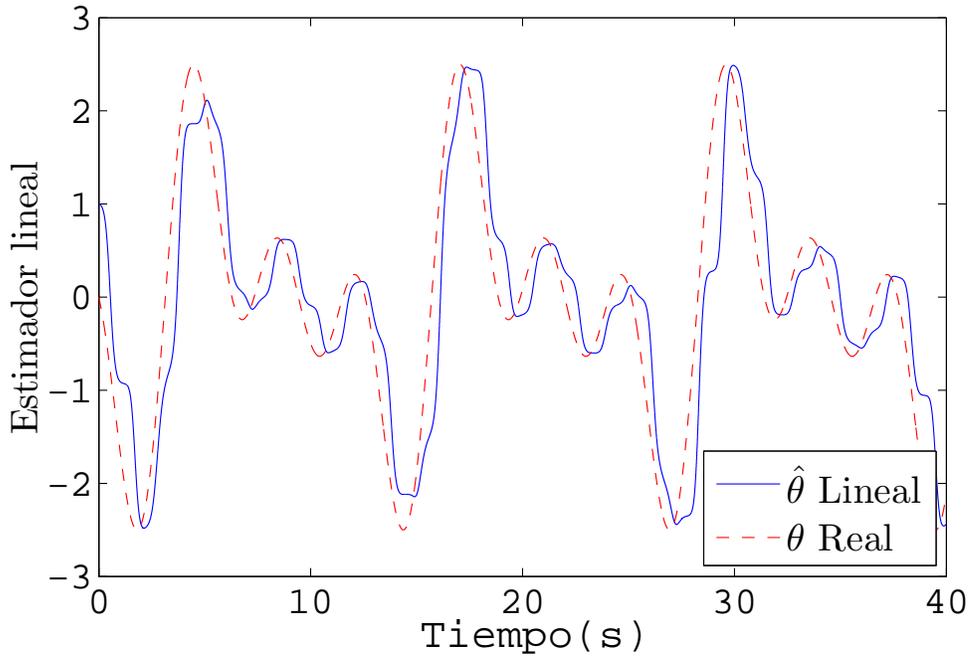
En la figura 3.4 se puede ver la estimación lineal del mismo parámetro que en la figura 3.3. El estimador lineal es generado con el nuevo algoritmo presentado en este capítulo, generado al escoger las ganancias  $k_1 =$ ,  $k_2 = 30$ ,  $\mu_1 = 0$ ,  $\mu_2 = 2$ . Se puede ver que el algoritmo lineal es incapaz de generar la estimación exacta, se genera una estimación, se genera una estimación con error acotado.

### 3.4.2. Cambio de signo y perturbación

En el ejemplo previo, las condiciones requeridas en el Teorema 3.3 no son completamente satisfechas, porque la perturbación, dada por la derivada del PVT a estimar, no cumple con la condición (3.10b) en algunos pequeños intervalos. En el ejemplo mostrado en esta sección, todas las suposiciones del Teorema 3.3 se cumplen. El propósito del ejemplo es mostrar que las ganancias del estimador no lineal son escogidas para compensar la perturbación, y que la



**Figura 3.3:** Parámetro variante en el tiempo, su estimado y el regresor.



**Figura 3.4:** Parámetro variante en el tiempo, y su estimado con algoritmo lineal

densidad de cambio es una suposición técnica suficiente. Entonces, considere el sistema,

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ux_2(t) \quad (3.64)$$

donde  $x_2(t)$  es un parámetro conocido a ser estimado, dado por  $x_2(t) = u^2 \sin(u)$ . Un estimador para el sistema (3.64) es

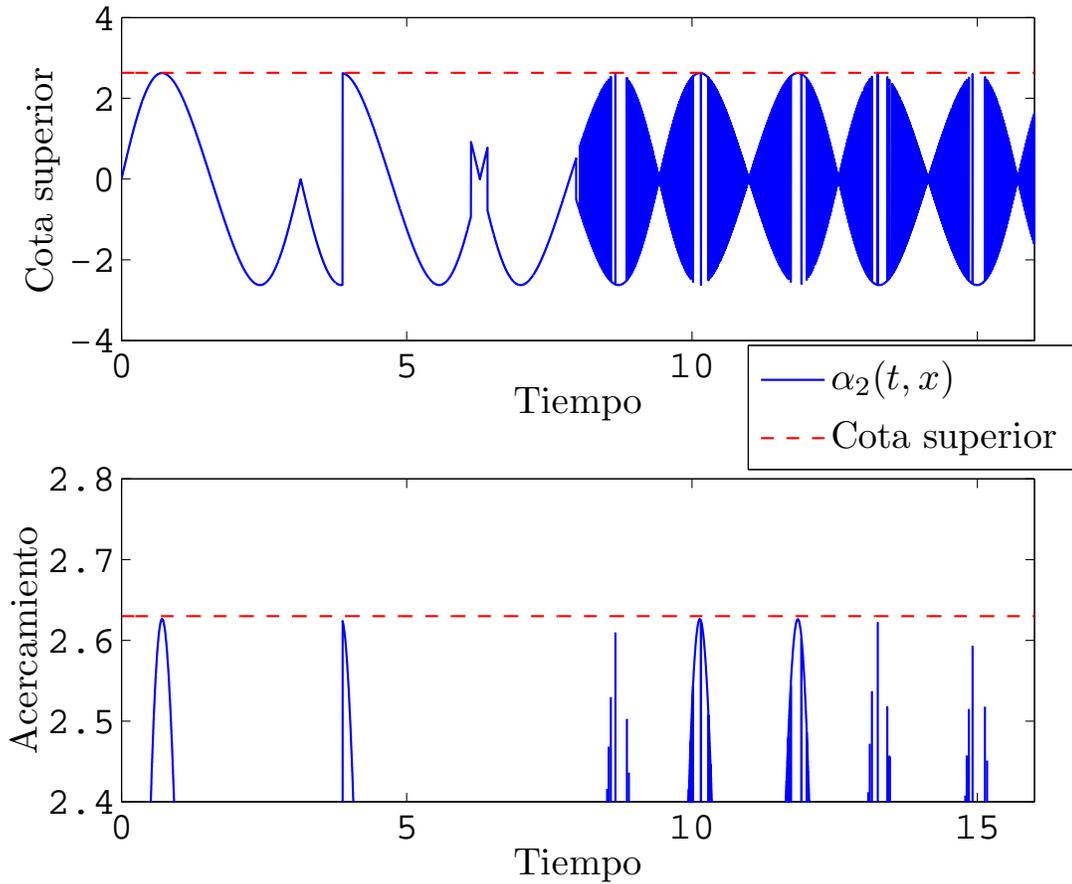
$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_1|u|\phi_1(e_1) - 2x_1 + u\hat{x}_2(t) \quad (3.65a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_2\phi_2(e_1)u \quad (3.65b)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son escogidas por el diseñador,  $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$ ,  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$ ,  $\phi_1(\cdot)$  y  $\phi_2(\cdot)$  están dadas como en (3.5,3.6), con  $q = 1$ . El error dinámico entre las ecuaciones (3.64) y (3.65) está dado por la siguientes ecuaciones

$$\dot{e}_1 = -k_1|u|\phi_1(e_1) + ue_2 \quad (3.66a)$$

$$\dot{e}_2 = -k_2\phi_2(e_1)u - \dot{x}_2(t) \quad (3.66b)$$



**Figura 3.5:**  $\alpha_2(t, x)$  y su cota superior.

donde las variables son a las mencionadas arriba. Para las simulaciones  $u = \sin(t)$ ,  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 2.63$ , la perturbación es analizada en la siguiente ecuación

$$\rho_2(t, e) = -\dot{x}_2(t) = \alpha_2 |b(t, x, y)| \phi_2(e_1) \quad (3.67)$$

donde  $\alpha_2(t, x) = -2u \frac{-2u \sin(u) + u \cos(u)}{|u| \text{sign}(e_1)}$ . El propósito de la ganancia  $k_2$  es compensar la perturbación  $\alpha_2(t, x)$ . En la parte superior de la figura 3.5 (y acercamiento parte inferior), se puede notar que el valor máximo de  $\alpha_2(t, x)$  es aproximadamente 2.63, así  $k_2 \geq 2.63$ . Con esta cota se puede revisar la desigualdad  $k_2 |u| \phi_2(e_1) \geq \rho_2(t, e)$  gráficamente en Fig. 3.6. Por último, la convergencia del valor estimado al valor real de la función puede verse en la figura 3.7. Las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  fueron elegidas de forma exacta porque en este ejemplo se conoce la cota superior mínima de la perturbación, y dicha perturbación cumple la ecuación (3.10b) de la suposición 3.1.

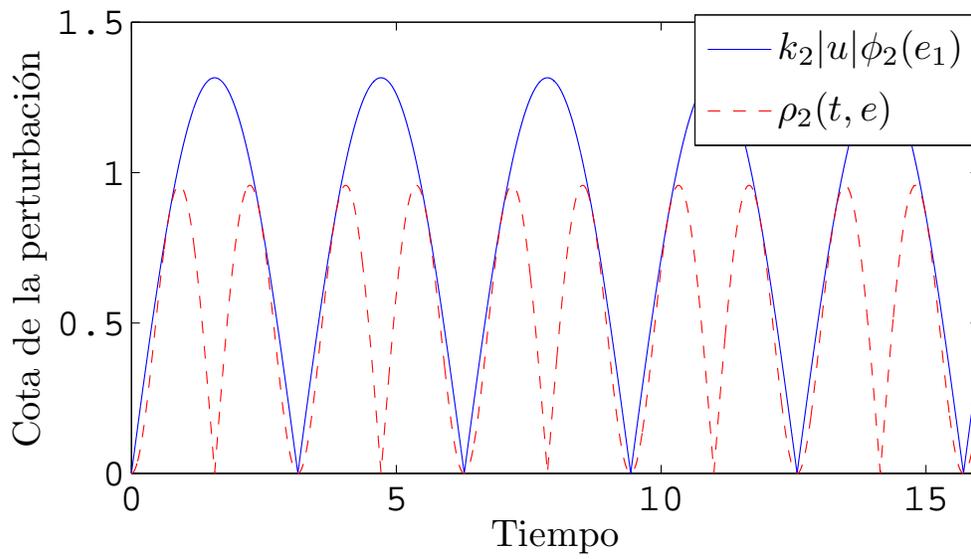


Figura 3.6: Perturbación y su cota superior.

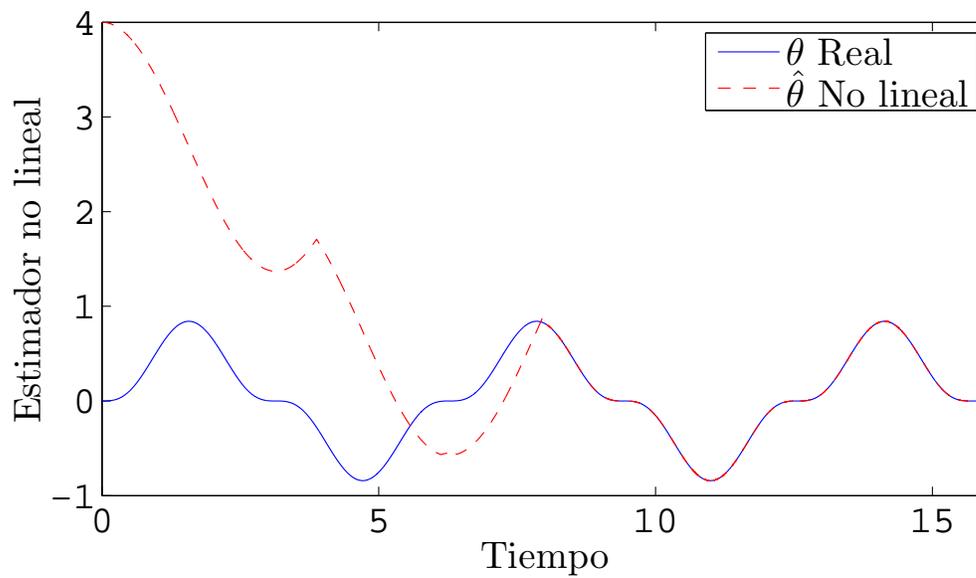


Figura 3.7: Parámetro variante en el tiempo, su estimado y el regresor.

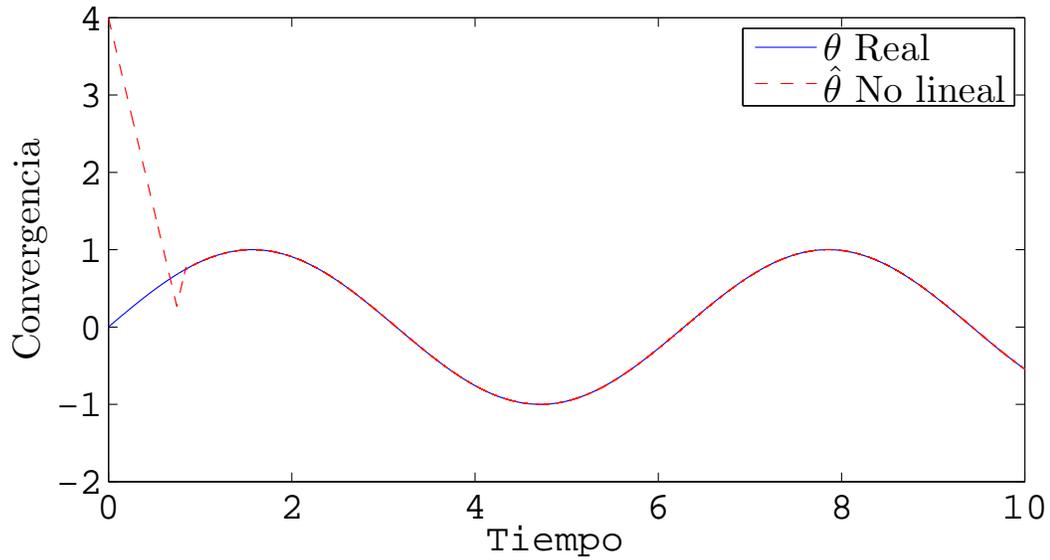


Figura 3.8: Convergencia del estimador no lineal con regresor con periodo de 10s

### 3.4.3. Número de cambios de signo

En la proposición 3.1 se afirma que no importa como se elijan las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ , siempre existe un número  $\sigma$  y su correspondiente cota superior tal que la desigualdad (3.37) se mantiene. En (3.37) se puede notar que entre más grande es  $p_1$ , más grande es la cota superior de  $\sigma$  (ver la prueba de la proposición 3.1), y  $\gamma_2$  es más pequeña (cf. ecuaciones (3.31) y (3.48)), lo cual reduce la velocidad de convergencia. El siguiente ejemplo muestra que cuando el numero de cambios de signo incrementa, el tiempo de convergencia también incrementa. Consider el sistema

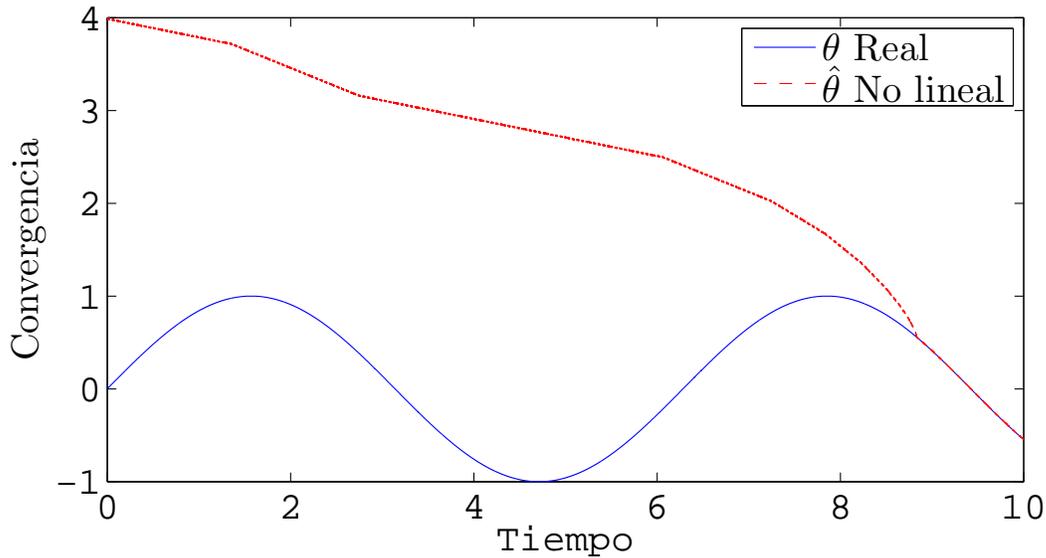
$$\dot{x}_1 = -2x_1 + ux_2(t), \quad (3.68)$$

donde  $x_1$  se mide,  $x_2(t) = \sin(t)$  es una señal desconocida, y  $u$  es un pulso cuya amplitud varía entre  $-1$  y  $1$ , tiene un ciclo de trabajo del 50%. Un estimador para el sistema (3.68) es

$$\dot{\hat{x}}_1 = -k_1|u|\phi_1(e_1) - 2x_1 + u\hat{x}_2 \quad (3.69)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_2u\phi_2(e_1) \quad (3.70)$$

con  $\phi_1(\cdot)$  y  $\phi_2(\cdot)$  como en (3.5), (3.6). El periodo de la señal  $u$  en el sistema (3.68), se varía para apreciar como la velocidad de convergencia decrece, debido al incremento del cambio de signo (ver figuras 3.8, 3.9). Al comparar las figuras 3.8 y 3.9, se puede notar que entre mayor es la frecuencia, el tiempo de convergencia es más grande.



**Figura 3.9:** Convergencia del estimador no lineal con regresor con periodo de 0.01s

El estimador presentado en este capítulo es capaz de estimar un parámetro variante en el tiempo. Dicha propiedad se logró gracias a los términos no lineales parecidos al ST y al AG-SO. Estos términos hacen que el algoritmo propuesto sea robusto ante ciertas perturbaciones, que en este caso se generan en el algoritmo debido a las variaciones temporales del parámetro a estimar. Se analizaron las perturbaciones analíticamente, y se presentaron algunas simulaciones que mostraron como sólo es posible estimar el parámetro cuando el regresor (en este caso la función  $b(t)$ ) es diferente de cero. El nuevo algoritmo agrega una ventaja a las técnicas recursivas; la estimación de parámetros variantes no lentos. El nuevo sistema también se puede considerar como una generalización de varios observadores de segundo orden presentes en la literatura, como el de Alta Ganancia, Super-Twisting, Diferenciador Uniforme y el Super-Twisting Generalizado.

# Capítulo 4

## Estimador de múltiples parámetros constantes en tiempo finito

### 4.1. Tipo de sistema en estudio y estimador

En esta sección se presenta un algoritmo recursivo para la estimación de parámetros constantes convergente en tiempo finito. El nuevo algoritmo se basa en el un algoritmo de estimación clásico (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Marino y Tomei, 1995; Ioannou y Sun, 1996) y en los términos de bajo orden tomados del Algoritmo Genérico de Segundo Orden (AGSO) (Moreno, 2009, 2011).

Como se mencionó al inicio del trabajo, en los años setenta se presentan dos trabajos (Morgan y Narendra, 1977a,b) que describen el comportamiento de las trayectorias solución de un Sistema Lineal Variante en el Tiempo (SLVT) que aparecen constantemente en el control adaptable clásico. En particular el siguiente sistema lineal, no autónomo con coeficientes variantes en el tiempo (Morgan y Narendra, 1977a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A(t)x_1 + B(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= C(t)x_1 ,\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}^{c_1}$ , y  $x_2 \in \mathbb{R}^{c_2}$ , son las variables de estado,  $A(t)$ ,  $B(t)$  y  $C(t)$  son matrices de funciones acotadas y continuas a tramos. Normalmente cuando (4.1) se aplica a la estimación paramétrica,  $x_1$  representa la dinámica de error entre el estado estimado y el estado conocido y  $x_2$  representa el error en entre los parámetros constantes estimados y los y los conocidos.

Los objetivos perseguidos en este capítulo son utilizar el sistema (4.1) en la estimación de multiples parámetros constantes y darle una mayor velocidad de convergencia, al otorgarle la propiedad de tiempo finito, por medio de términos no lineales de bajo orden presentes en le AGSO introducido en Moreno (2011), y restringiendo  $c_1 = 1$  para el espacio de la variable de estado  $x_1$ . Dicho algoritmo es una extensión del Algoritmo Super-Twisting Generaliza-

do (ASTG) (Moreno, 2009, 2011), y el Algoritmo Super-Twisting (AST), un algoritmo por modos deslizantes de segundo orden propuesto originalmente por Levant (1993). Como se mencionó, las propiedades de convergencia y robustez del AST son notables, puesto que converge en tiempo finito y es insensible a perturbaciones no desvanecientes.

La principal aportación que presenta este apartado es la prueba de convergencia de un algoritmo que puede ser usado como estimador paramétrico. La prueba se logra con técnicas clásicas mostradas por Narendra y Annaswamy (1989) y argumentos como los presentados por Moreno y Osorio (2012). La idea principal es mostrar que el algoritmo lineal puede adoptar las propiedades de convergencia del AGSO con sólo añadir algunos términos no lineales. Es importante mencionar que para algunos algoritmos se puede concluir convergencia de las trayectorias solución usando técnicas de homogeneidad Levant (2005, 2007); Orlov (2005, 2009); Bacciotti y Rosier (2001b), pero en este caso el algoritmo estudiado no es homogéneo, debido a la dependencia directa del tiempo. La estimación en tiempo finito fue lograda por el algoritmo por mínimos cuadrados presentado por Adetola y Guay (2008) y Hartman et al. (2010), pero el punto de vista presentado aquí puede ser visto como una extensión no lineal de un algoritmo clásico, donde la inyección no lineal mejora la convergencia haciéndola en tiempo finito.

Considere el siguiente sistema, el cual es una combinación de los términos de bajo orden del AGSO (Moreno, 2011), y el algoritmo lineal clásico analizado en Morgan y Narendra (1977a); Narendra y Annaswamy (1989),

$$\dot{x}_1(t) = -k_1|x_1|^p \text{sign}(x_1) + B^T(t)x_2(t) \quad (4.2a)$$

$$\dot{x}_2(t) = -k_2p|x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1)B(t) \quad (4.2b)$$

donde  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_1}$  son las variables de estado;  $k_1, k_2$  son ganancias positivas a diseñar;  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$  es un número real, y  $B(t)$  es una matriz de funciones acotadas y continuas a tramos de  $n_1 \times n_2$ . Note que el sistema (4.2) es continuo, excepto cuando  $p = \frac{1}{2}$ . En este trabajo se restringe  $\frac{1}{2} < p < 1$  para el análisis, porque cuando  $p = \frac{1}{2}$ , las condiciones de convergencia son diferentes, ya que el lado derecho de (4.2b) es discontinuo. Además si  $p = \frac{1}{2}$  and  $B(t) = 1$  se recupera el AST. Por otra parte si  $p = 1$ , tenemos el algoritmo clásico lineal comúnmente usado como estimador en la literatura (Morgan y Narendra, 1977a; Narendra y Annaswamy, 1989). Las técnicas de homogeneidad para establecer la existencia de una función de Lyapunov no pueden ser usadas, (Bacciotti y Rosier, 2001b; Levant, 2005; Orlov, 2005; Levant, 2007; Orlov, 2009), a causa del vector función  $B^T(t)$ .

El resultado principal de este capítulo es la siguiente afirmación acerca del sistema (4.2)

**Teorema 4.1.** *Considere el sistema (4.2) con  $\frac{1}{2} < p < 1$ ,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 \geq 1$ ;  $k_1, k_2 > 0$ , y que  $B(t)$*

sea un vector de funciones acotadas y continuas a tramos,

1. Entonces la trayectoria solución  $x_1$  del sistema (4.2) tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito.
2. Si hay constantes positivas  $T_0$ ,  $\epsilon_0$  y  $\delta_0$ , y una  $t_2 \in [t, t + T_0]$  tal que un vector unitario  $w \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{T_0} \left| \int_{t_2}^{t_2 + \delta_0} B(\tau) w d\tau \right| \geq \epsilon_0, \quad (4.3)$$

entonces cada trayectoria de (4.2) converge al origen  $x = 0$  en tiempo finito.  $\square$

## 4.2. Estabilidad y Análisis de Convergencia

En esta sección, siguiendo las ideas exhibidas en Narendra y Annaswamy (1989), se presenta la prueba del Teorema 4.1, en tres partes; la primera parte trata sobre la estabilidad del punto de equilibrio del sistema (4.2) y la convergencia asintótica de la trayectoria  $x_1(t)$  a cero; la segunda parte es acerca del comportamiento de la trayectoria  $x_1(t)$ , la cual es usada como una herramienta en la tercera parte; en la última parte se prueba que las trayectorias solución del sistema (4.2) convergen a cero en tiempo finito.

Para comenzar, note que el sistema (4.2) es continuo, pero no es Lipschitz en  $x_1 = 0$ , entonces no tiene soluciones clásicas, de tal forma que las soluciones de (4.2) son trayectorias en el sentido de Filippov.

### 4.2.1. Convergencia asintótica de $x_1(t)$

Para establecer que el punto equilibrio del sistema (4.2) es estable, se propone la siguiente candidata a función de Lyapunov,

$$V(x) = \mathcal{L}^T \mathcal{L} = |x_1|^{2p} + \frac{2}{k_2} x_2^T x_2 \quad (4.4)$$

con  $\mathcal{L}^T = [\mathcal{L}_1 \quad \mathcal{L}_2]^T = \left[ |x_1|^p \text{sign}(x_1) \quad \frac{1}{\sqrt{k_2}} x_2 \right]$ , y la derivada en el tiempo,

$$\dot{V}(x) = 2p|x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{k_2} \dot{x}_2^T x_2 \quad (4.5a)$$

$$\begin{aligned} &= 2p|x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1)(-|x_1|^p \text{sign}(x_1) + B(t)x_2) + \\ &\quad + \frac{2}{k_2} x_2 \left( -k_2 p |x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1) B^T(t) \right)^T x_2 \\ &= -2pk_1|x_1|^{3p-1} + 2p|x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1)B(t)x_2 + \\ &\quad - 2p|x_1|^{2p-1} \text{sign}(x_1)B(t)x_2 \\ &= -2pk_1|x_1|^{3p-1} \end{aligned} \quad (4.5b)$$

Debido a que  $\dot{V}(x) \leq 0$ , el punto de equilibrio del sistema (4.2) es global y uniformemente estable.

Se demostrará que  $x_1 \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ , usando el siguiente lema tomado de Ioannou y Sun (1996) (caso especial del Teorema de Barbalat donde se pide que  $\dot{f}$  sea uniformemente continua, también véase Slotine y Li (1991)).

**Lema 4.1.** Si  $f, \dot{f} \in \mathcal{L}_\infty$  y  $f \in \mathcal{L}_p$  para algún  $p \in [1, \infty)$ , entonces  $f(t) \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

Inicialmente, note que las ecuaciones (4.4) y (4.5b) implican que  $V(x)$  es acotada y por lo tanto  $x_1$  y  $x_2$  son acotadas, consecuentemente  $x_1 \in \mathcal{L}_\infty$ . Considerando que  $x_1$  y  $x_2$  son acotadas, es claro de la ecuación (4.2a), que  $\dot{x}_1$  es acotada, entonces  $\dot{x}_1 \in \mathcal{L}_\infty$ . Considerando que  $x_1$  y  $x_2$  son acotadas, es claro de la ecuación (4.2a), que  $\dot{x}_1$  son acotadas, entonces  $\dot{x}_1 \in \mathcal{L}_\infty$ . Finalmente, se puede deducir de (4.5b) que  $x_1 \in \mathcal{L}_2$ . De lo previo se infiere cuando se toma en cuenta que la derivada de la función de Lyapunov (4.5b) puede ser reescrita como  $\dot{V}(x) = -2pk_1 \frac{1}{|x_1|^{-3p+3}} |x_1|^2$ ; considerando que  $-3p+3 \geq 0$  si  $p \leq 1$ ; y  $-\frac{1}{|x_1|^{-3p+3}} \leq -\frac{1}{V^{\frac{-3p+3}{2p}}(x_0)}$ , donde  $x_0$  es el vector de estado valuado en el tiempo  $t_0$ .

Todas las condiciones del Lema 4.1 son satisfechas, aun más  $x_1 \rightarrow 0$  como  $t \rightarrow \infty$ .

**Observación 4.1.** Debido a que  $x_1(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces existe un tiempo  $T_x$  tal que

$$|x_1| \leq |x_1|^p \leq |x_1|^{2p-1}. \quad (4.6)$$

La última desigualdad es válida para  $2p-1 \leq p$ , ( $p \leq 1$ ), en una región cerca de  $x_1 = 0$ . Lo anterior es claro cuanto la primera parte de la ecuación es analizada,

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq |x_1|^p \\ \frac{|x_1|}{|x_1|^p} &= |x_1|^{1-p} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

debido a que ambos lados son positivos,

$$\begin{aligned} \left(|x_1|^{1-p}\right)^{\frac{1}{1-p}} &\leq 1^{\frac{1}{1-p}} \\ |x_1| &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

La desigualdad es válida para pequeños valores, específicamente  $|x_1| \leq 1$ . Lo mismo puede ser hecho para la segunda parte de la desigualdad

$$\begin{aligned} |x_1|^p &\leq |x_1|^{2p-1} \\ \frac{|x_1|^p}{|x_1|^{2p-1}} &= |x_1|^{1-p} \leq 1. \end{aligned}$$

la cual es igual a la desigualdad (4.7). Con  $p = 1$  la desigualdad (4.6) es trivial.  $\triangle$

### 4.2.2. Análisis de la trayectoria $x_1(t)$

En este apartado se analiza el comportamiento de la trayectoria  $x_1(t)$ . Primero se notará que la desigualdad  $|x_1| \leq |x_1|^p \leq |x_1|^{2p-1}$  (con  $p \leq 1$ ) siempre se cumple para  $t > T_x$  (ver secciones previas), dado que  $x_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por otro lado, de la ecuación (4.2a) se tiene que si  $x_1 = 0$  y  $B^T(t)x_2(t) = 0$ , entonces  $x_1$  permanece en cero hasta que  $B^T(t)x_2(t) \neq 0$ . Entonces primero se demostrará que  $x_1 \neq 0$  periódicamente, aun más, será probado que cuando  $B^T(t)$  cumple la condición de excitación persistente (4.3),  $x_1$  adquiere grandes valores en un instante de tiempo, dentro del intervalo  $[t, t + T_0]$ . Así, aunque  $x_1$  permanece en cero por algún tiempo, la acción de la excitación persistente previene que la trayectoria permanezca ahí para todo tiempo futuro.

La prueba es hecha por contradicción, primero se asume que la hipótesis  $|x_1|^{2p-1} < c\|\mathcal{L}(x, t)\| = \sqrt{|x_1|^{2p} + \frac{1}{k_2}x_2^T x_2}$  es verdadera,  $\forall t \geq T_x$  y  $c \in (0, 1)$ , entonces usando algunas desigualdades se deduce que existe un instante de tiempo  $t_2 \in [t_0, t_0 + T_0]$  y un número positivo  $\delta_0$ , tal que  $|x_1(t_2 + \delta_0)|^{2p-1} > c\|\mathcal{L}(x, t_2 + \delta_0)\|$ . En consecuencia, con la última desigualdad y de acuerdo con la expresión  $|x_1| \leq |x_1|^p \leq |x_1|^{2p-1}$ , se puede escribir  $|x_1(t_2 + \delta_0)| > c\|\mathcal{L}(x, t_2 + \delta_0)\|$ , lo cual dice que en un instante de tiempo  $t_2 + \delta_0$ ,  $|x_1|$  es más grande que alguna fracción de la magnitud del vector  $\|\mathcal{L}(x, t)\|$ , de tal forma que la magnitud sólo puede ser cero en el origen, en consecuencia mientras  $x_2 \neq 0$ ,  $|x_1|$  no puede ser cero durante el intervalo  $[t_0, t_0 + T_0]$ . Lo anterior puede ser hecho para cada intervalo  $[t, t + T_0]$ ,  $\forall t > T_x$ , en presencia de la condición

de excitación persistente (4.3) cuando no hay excitación persistente  $x_1 \rightarrow 0$  as  $t \rightarrow \infty$ , y  $x_2$  permanece acotada.

Ahora, considere la condición de excitación persistente,

$$\left\| \frac{1}{T_0} \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) w d\tau \right\| \geq \epsilon_0, \text{ o} \quad (4.9)$$

$$\left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) w d\tau \right\| \geq \epsilon_0 T_0 \quad (4.10)$$

con  $w = \frac{x_2(t)}{\|x_2(t)\|}$ . Otra desigualdad es

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) (w \|x_2(\tau)\| - x_2(\tau)) d\tau \right\| &\leq B_{max} \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} \|x_2(t_2) - x_2(\tau)\| d\tau \\ &\leq B_{max} \delta_0 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} \|x_2(t_2) - x_2(\tau)\| \\ &\leq B_{max} \delta_0 \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} \|\dot{x}_2(\tau)\| d\tau \\ &= B_{max} \delta_0 \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} (-k_2 p |x_1(\tau)|^{2p-1} \text{sign}(x_1(\tau)) B^T(\tau)) d\tau \\ \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) (w \|x_2(\tau)\| - x_2(\tau)) d\tau \right\| &\leq B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)|^{2p-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Reescribiendo la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} \|x_2(t_2)\| \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) w d\tau \right\| - \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) x_2(\tau) d\tau \right\| &\leq \\ &\leq B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)|^{2p-1} \end{aligned}$$

y reordenando,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) x_2(\tau) d\tau \right\| &\geq \|x_2(t_2)\| \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau) w d\tau \right\| + \\ &\quad - B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1|^{2p-1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por otro lado, tomando la ecuación (4.2a) e integrando sobre el intervalo  $[t_2, t_2 + \delta_0]$ ,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -k_1|x_1(t)|^p \text{sign}(x_1) + B(t)x_2(t) \\
\int_{t_2}^{t_2+\delta_0} \dot{x}_1(\tau) d\tau &= \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} (-k_1|x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1(\tau)) + B(\tau)x_2(\tau)) d\tau \\
x_1(t_2 + \delta_0) &= \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} (-k_1|x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1(\tau)) + B(\tau)x_2(\tau)) d\tau + x_1(t_2) \\
|x_1(t_2 + \delta_0)| &= \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} (-k_1|x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1(\tau)) + B(\tau)x_2(\tau)) d\tau + x_1(t_2) \right\| \\
&\geq \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau)x_2(\tau) d\tau \right\| - \left\| x_1(t_2) + \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} -k_1|x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1(\tau)) d\tau \right\| \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Usando las desigualdades (4.12) y  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$  o equivalentemente  $-\|a + b\| \geq -\|a\| - \|b\|$ , tenemos

$$\begin{aligned}
\|x_1(t_2 + \delta_0)\| &\geq \|x_2(t_2)\| \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} B(\tau)w d\tau \right\| - B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)|^{2p-1} + \\
&\quad - \left\| \int_{t_2}^{t_2+\delta_0} -k_1|x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1(\tau)) d\tau \right\| - \|x_1(t_2)\| \\
&\text{Usando la desigualdad (4.10)} \\
&\geq \epsilon_0 T_0 \|x_2(t_2)\| - B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)|^{2p-1} + \\
&\quad - k_1 \delta_0 \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)|^p - |x_1(t_2)| \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Usando la función de Lyapunov (4.4) y sabiendo que  $x_1$  asume grandes valores en algunos instantes de tiempo, puede ser demostrado que  $V(x)$  decrece periódicamente cada intervalo de tiempo  $[t, t + T_0]$ , y alcanza el cero en tiempo finito. Se sabe por el análisis de estabilidad y por la hipótesis inicial que

$$\begin{aligned}
|x_1(t)| &\leq |x_1(t)|^p \leq |x_1|^{2p-1} < c \|\mathcal{L}(x(t))\| \text{ entonces} \\
\sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)| &\leq \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1(\tau)|^p \leq \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} |x_1|^{2p-1} < c \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} \|\mathcal{L}(x(\tau))\|, \\
&\text{y porque } \|\mathcal{L}(x(t))\| \text{ es decreciente, se puede escribir} \\
c \sup_{\tau \in [t_2, t_2+\delta_0]} \|\mathcal{L}(x(\tau))\| &\leq c \|\mathcal{L}(x(t_2))\| \quad (4.15)
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}(x(t))\|^2 &= |x_1(t)|^{2p} + \frac{1}{k_2} \|x_2\|^2 \\
\|x_2(t)\|^2 &= k_2 \|\mathcal{L}(x(t))\|^2 - k_2 |x_1(t)|^{2p} \\
&\text{with the hypothesis } |x_1(t)|^p < c \|\mathcal{L}(x(t))\| \\
\|x_2(t)\|^2 &> k_2 \|\mathcal{L}(x(t))\|^2 - k_2 c^2 \|\mathcal{L}(x(t))\|^2 \\
|x_2(t)| &> \sqrt{k_2 - k_2 c^2} \|\mathcal{L}(x(t))\|
\end{aligned}$$

Entonces, se puede escribir la desigualdad (4.14) como,

$$\begin{aligned}
|x_1(t_2 + \delta_0)| &\geq \epsilon_0 T_0 |x_2(t_2)| - B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 c \|\mathcal{L}(x(t_2))\| + \\
&\quad - k_1 \delta_0 c \|\mathcal{L}(x(t_2))\| - c \|\mathcal{L}(x(t_2))\| \\
|x_1(t_2 + \delta_0)| &\geq \left[ \epsilon_0 T_0 \sqrt{k_2 - k_2 c^2} + \right. \\
&\quad \left. - c (B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 + k_1 \delta_0 + 1) \right] \|\mathcal{L}(x(t_2))\|
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$c^2$  puede ser elegido tal que el coeficiente del lado derecho es positivo, y usando el hecho  $\|\mathcal{L}(x(t_2 + \delta_0))\| \leq \|\mathcal{L}(x(t_2))\|$  (debido a la función de Lyapunov (4.4) es decreciente). Con  $c^2 = \frac{k_2 T_0^2 \epsilon_0^2}{k_2 T_0^2 \epsilon_0^2 + (1+b)^2}$  y  $b = B_{max}^2 \delta_0^2 k_2 + k_1 \delta_0 + 1$ , se puede escribir (4.16),

$$|x_1(t_2 + \delta_0)| \geq c \|\mathcal{L}(x(t_2 + \delta_0))\| \tag{4.17}$$

Ya que  $|x_1(t)|^{2p-1} \geq |x_1(t)|^p \geq |x_1(t)| \quad \forall t \geq T_x$ , se puede escribir,

$$|x_1(t_2 + \delta_0)|^p \geq c \|\mathcal{L}(x(t_2 + \delta_0))\| \tag{4.18}$$

lo cual contradice la hipótesis inicial, y en consecuencia existe un instante de tiempo  $t_2 + \delta_0$ , cada intervalo de tiempo  $[t, t + T_0]$ , donde  $x_1$  es grande.

### 4.2.3. Análisis de Convergencia en Tiempo Finito

Ahora utilizando la derivada en el tiempo de la función de Lyapunov (4.5b) y el resultado de la sección anterior, se mostrará que  $V(x, t)$  decrece cada intervalo  $t \in [t, t + T_0]$ . Considere la derivada

$$\dot{V}(x, t) = -2pk_1 |x_1|^{3p-1}$$

Integrando sobre el intervalo  $[t_1, t_1 + T] \in [t_0, t_0 + T_0]$ , se tiene,

$$\begin{aligned} V(t_1 + T) - V(t_1) &\leq -2pk_1 \int_{t_1}^{t_1+T} |x_1(\tau)|^{3p-1} d\tau \\ &= -2pk_1 \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{1}{|x_1(\tau)|^{1-p}} |x_1(\tau)|^{2p} d\tau \end{aligned}$$

Usando el hecho  $-\frac{1}{|x_1|^{1-p}} \leq -\frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_1)}$ , se puede escribir,

$$V(t_1 + T) - V(t_1) \leq -2pk_1 \frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_1)} \int_{t_1}^{t_1+T} |x_1(\tau)|^{2p} d\tau \quad (4.19)$$

Ahora, integrando la ecuación (4.2a) sobre el intervalo  $[t_1, t]$ ,

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_1(t_1) &= \int_{t_1}^t -k_1 |x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1) d\tau + \int_{t_1}^t B(\tau) x_2(\tau) d\tau \\ |x_1(t)| &\geq |x_1(t_1)| - \left\| \int_{t_1}^t k_1 |x_1(\tau)|^p \text{sign}(x_1) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_1}^t B(\tau) x_2(\tau) d\tau \right\| \\ &\geq |x_1(t_1)| - (t - t_1) k_1 \sup_{\tau \in [t_1, t]} \|\mathcal{L}(x(\tau))\| + \\ &\quad - (t - t_1) B_{max} \sup_{\tau \in [t_1, t]} \|\mathcal{L}(x(\tau))\| \end{aligned}$$

si el intervalo es restringido a  $[t_1, t_1 + T]$ , se tiene  $(t - t_1) \leq T$  y porque  $\|\mathcal{L}(x(t))\|$  es decreciente, se cumple  $\|\mathcal{L}(x(t))\| \leq \|\mathcal{L}(x(t_1))\|$  para todo  $t \in [t_1, t_1 + T]$ , entonces

$$\begin{aligned} |x_1| &\geq |x_1(t_1)| - Tk_1 \|\mathcal{L}(x(t_1))\| - TB_{max} \|\mathcal{L}(x(t_1))\| \\ &\text{para todo } t \in [t_1, t_1 + T] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Usando la desigualdad  $|x_1| \leq |x_1|^p$  y (4.20),

$$\begin{aligned}
|x_1|^p &\geq |x_1(t_1)| - Td\|\mathcal{L}x(t_1)\|, \\
&\text{with } d = k_1 + B_{max}, \quad t_1 = t_2 + \delta_0 \\
|x_1|^p &\geq c\|\mathcal{L}x(t_1)\| - Td\|\mathcal{L}x(t_1)\| \\
&= (c - Td)V^{\frac{1}{2}}(t_1), \text{ is positive if } T \leq \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

Entonces se puede escribir

$$|x_1|^{2p} \geq (c - Td)^2 V(t_1) \quad (4.21)$$

Ahora substituyendo (4.21) en (4.19),

$$\begin{aligned}
V(t_1 + T) - V(t_1) &\leq -2pk_1 \frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_1)} \int_{t_1}^{t_1+T} (c - Td)^2 V(t_1) d\tau \\
&= -2pk_1 \frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_1)} T(c - Td)^2 V(t_1) \\
&= -2pk_1 T(c - Td)^2 V^{\frac{3p-1}{2p}}(t_1)
\end{aligned} \quad (4.22)$$

Así  $T < \frac{c}{d}$ , y de  $[t_1, t_1 + T] \subset [t_0, t_0 + T_0]$  se sigue que  $T < t_0 + T_0 - t_1$ . De lo anterior, se puede escribir (4.22), para  $T = \min(c/d, t_0 + T_0 - t_1)$  y  $\gamma = 2pk_1 T(c - Td)^2$ , como sigue,

$$V(t_1 + T) \leq V(t_1) - \gamma V^{\frac{3p-1}{2p}}(t_1). \quad (4.23)$$

Considerando la desigualdad (4.23), y que  $V(t)$  es decreciente y una función positiva definida, entonces se puede escribir,

$$V(t_0 + T_0) \leq V(t_1 + T) \leq V(t_1) - \gamma V^{\frac{3p-1}{2p}}(t_1) < V(t_0), \quad (4.24)$$

es evidente que para el intervalo  $[t, t + T_0]$ , la función  $V(t)$  es cada vez más pequeña.

Arreglando la ecuación (4.23),

$$V(t_0 + T_0) \leq V(t_1) \left( 1 - \gamma \frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_1)} \right)$$

notando que  $V(t_1) \leq V(t_0) \Rightarrow -\frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_1)} \leq -\frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_0)}$

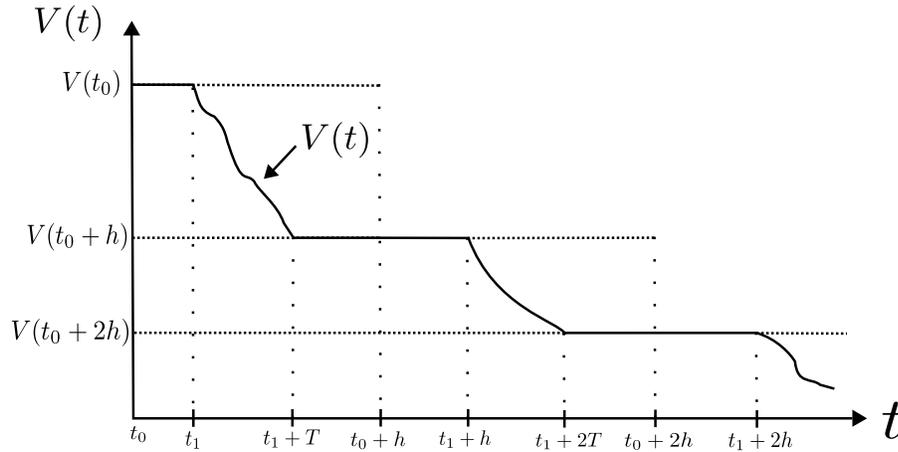
$$V(t_0 + T_0) \leq V(t_0) \left( 1 - \gamma \frac{1}{V^{\frac{1-p}{2p}}(t_0)} \right)$$

$$V(t_0 + T_0) \leq V(t_0) - \gamma V^{\frac{3p-1}{2p}}(t_0)$$

Ahora, se puede demostrar que la función de Lyapunov  $V(t)$  converge a cero en tiempo finito. Primero note que  $V(t)$  decrece cada intervalo  $[t_0, t_0 + T_0]$  (ver Fig. 4.1), entonces puede ser escrito  $t_0 + nT_0$  indicando el principio de cada intervalo de decrecimiento, con  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando en cuenta la expresión (4.25), se puede generar una desigualdad diferencial,

$$V(t + nh) \leq V(t) - \gamma V^q(t), \quad (4.25)$$

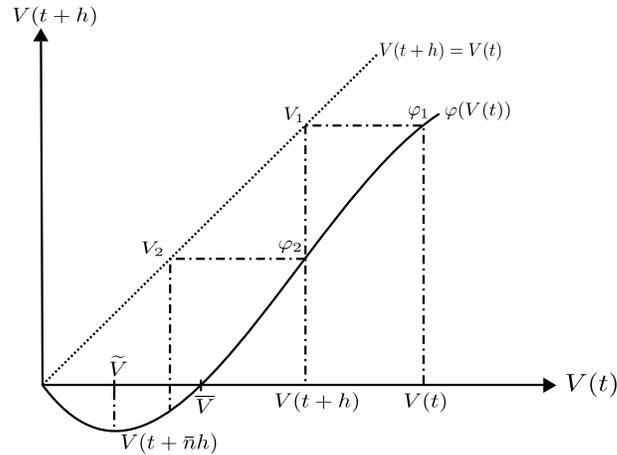
con  $q = \frac{3p-1}{2p}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , y  $h = T_0$ .



**Figura 4.1:** Decremento de la función  $V(t)$ .

Ahora, vamos a establecer, gráficamente, algunos hechos acerca del lado derecho de la desigualdad (4.25). Definiendo dos ejes rectangulares,  $V(t)$  horizontalmente y  $V(t + nh)$  verticalmente (ver Fig. 4.2). La línea punteada representa  $V(t + nh) = V(t)$ . Ahora, se analiza el lado derecho de (4.25) como una función de  $V$ ,  $\varphi(V) = V - \gamma V^{\frac{3p-1}{2p}}$  y omitiendo por un instante que  $0 < V - \gamma V^{\frac{3p-1}{2p}}$ . Permítase que  $V$  sea pequeña, por otro lado obteniendo la derivada de  $\varphi(V)$  con respecto a  $V$ ,  $\varphi'(V) = 1 - \gamma \left( \frac{3p-1}{2p} \right) V^{\frac{p-1}{2p}}$ , así la ecuación  $\varphi(V)$  tiene un mínimo o un máximo en un valor  $\tilde{V}$ , que satisface  $\tilde{V}^{\frac{1-p}{2p}} = \gamma \left( \frac{3p-1}{2p} \right)$ . Obteniendo la segunda derivada  $\varphi''(V) = -\gamma \left( \frac{3p^2-4p+1}{4p} \right) V^{-\frac{p+1}{2p}}$ , el término  $\frac{3p^2-4p+1}{4p}$  es negativo para  $\frac{1}{2} < p < 1$  y  $V(t)$  es siempre positivo, así el punto  $\tilde{V}$  es un mínimo. Por otro lado, cuando  $V$  es grande, el término dominante es  $V$ , entonces  $\varphi(\cdot)$  es positivo. De  $\varphi(V)$ , se sabe que existe un valor  $\bar{V}$  que satisface  $\bar{V}^{\frac{1-p}{2p}} = \gamma$ , entonces  $\bar{V}$  es valor donde  $\varphi(\bar{V}) = 0$ . También es importante notar que  $V(t) > \varphi(V(t))$  donde sea, excepto cuando  $V(t) = 0$ . Usando esta información se puede cons-

truir la gráfica  $\varphi(V(t))$  como en la Fig. 4.2. Tomando en cuenta que  $\varphi(V(t))$  es más grande que cero y decreciente, cuando  $V(t) = \bar{V}$ ,  $V(t+h) = 0$  y permanece ahí para todo tiempo futuro.



**Figura 4.2:** Función decreciente  $V(t)$ .

La desigualdad (4.25) también puede ser analizada de forma clásica (Levy y Lessman, 1961). Sea  $V(t_0) = V(t+0h) = V(t)$  el valor inicial de  $V(t)$ , entonces  $\varphi_1$  es el valor en  $V(t+h)$ . Se dibuja el segmento  $\varphi_1 V_1$  para intersecar la recta  $V(t+h) = V(t)$  en  $V_1$ , trazando una perpendicular con el eje  $V(t)$  de  $V_1$  hasta encontrar la curva  $\varphi_1$  y los ejes en  $V(t+h)$ . Trazando una línea horizontal de  $\varphi_1$  hasta encontrar la recta  $V(t+h) = V(t)$  en  $V_2$ , una vez más se genera una perpendicular desde el eje  $V(t)$  hasta encontrar la curva  $\varphi_2$  y el eje  $V(t+2h)$ , y así sucesivamente. Siguiendo este procedimiento hay un intervalo  $[V(t+(\bar{n}-1)h), V(t+\bar{n}h)]$  tal que la línea perpendicular con el eje  $V(t)$  lo cruza, lo cual significa que durante ese intervalo la curva  $V(t)$  alcanza el cero. Por lo tanto la función  $V(t)$  alcanza el cero en tiempo finito, consecuentemente el estado  $x$  alcanza el origen en tiempo finito.

### 4.3. Aplicación al problema de Identificación Paramétrica

Varios problemas en control adaptable pueden ser convertidos a uno de la forma clásica presentado por Narendra y Annaswamy (1989). Se considerará dentro de este trabajo la formulación del problema de identificación paramétrica. Considere el sistema descrito por la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{y} = B^T(t)\theta \quad (4.26)$$

donde  $y$  es una señal medible,  $B^T(t)$  es un vector conocido de funciones acotadas y continuas a tramos, y  $\theta$  es un vector desconocido de parámetros constantes a ser definidos. El trabajo desarrollado durante este capítulo se restringirá al caso donde  $y$  es una variable escalar. El

objetivo es estimar  $\theta$  en tiempo finito sabiendo que  $y(t)$  y  $B^T(t)$  son conocidos, y  $B^T(t)$  cumple con la condición de EP (4.3). Debido a la estructura de (4.2) se tiene un estimador paramétrico en tiempo finito con la siguiente estructura

$$\begin{aligned}\dot{\hat{y}} &= -k_1|e_y|^p \text{sign}(e_y) + B^T(t)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -k_2|e_y|^{2p-1}pB(t)\end{aligned}\quad (4.27)$$

donde  $e_y = \hat{y} - y$  es una estimación del error de salida.  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$  son escalares positivos constantes a ser diseñados y  $\hat{\theta}$  es el vector paramétrico estimado. Definiendo el error de estimación como  $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$ , la dinámica de error puede ser escrita como

$$\dot{e}_y = -k_1|e_y|^p + B^T(t)e_\theta \quad (4.28)$$

$$\dot{e}_\theta = -k_2p|e_y|^{2p-1}B(t), \quad (4.29)$$

lo anterior tiene la misma estructura que (4.2). El teorema 4.1 implica que para cualesquiera valores de  $k_1 > 0$  y  $k_2 > 0$ , y si  $B(t)$  cumple la condición de EP, entonces ambos  $e_y$  y  $e_\theta$  convergen a cero en tiempo finito.

## 4.4. Ejemplos de simulación

Como ilustración de la aplicación y el desarrollo del algoritmo propuesto en este capítulo, se presentan dos ejemplos.

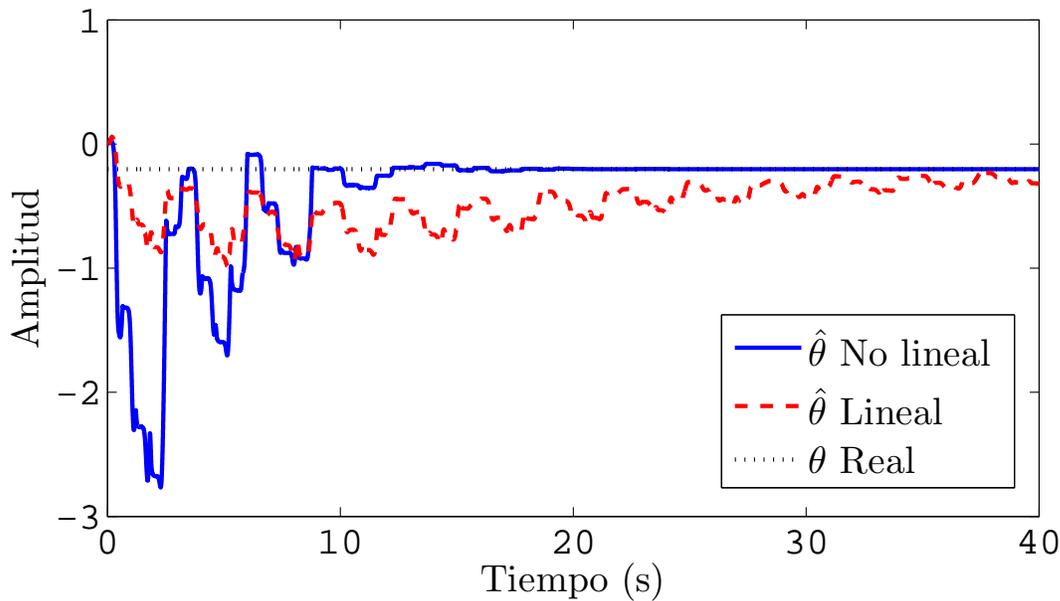
### 4.4.1. Estimación de parámetros en péndulo simple

Considere la dinámica del péndulo simple

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_2 = \theta_1 x_2 + \theta_2 \sin(x_1) + \theta_3 u \quad (4.31)$$

donde  $x_1$  es el ángulo con la línea vertical,  $x_2$  es la velocidad angular,  $\theta_1 = -k/m \leq 0$ ,  $\theta_2 = -g/l < 0$ ,  $\theta_3 = 1/ml^2 > 0$  son constantes. Asuma que ambos estados son medibles y que  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$  es el vector de parámetros desconocidos. El estimador de parámetros propuesto es



**Figura 4.3:** Estimación del parámetro  $\theta_1 = -0.2$  con el algoritmo lineal y el AGSO (no lineal).

$$\dot{\hat{x}}_2 = -k_1 |e_{x2}|^p \text{sign}(e_{x2}) + B^T(x, u) \hat{\theta} \quad (4.32)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -k_2 |e_{x2}|^{2p-1} \text{sign}(e_{x2}) B(x, u) \quad (4.33)$$

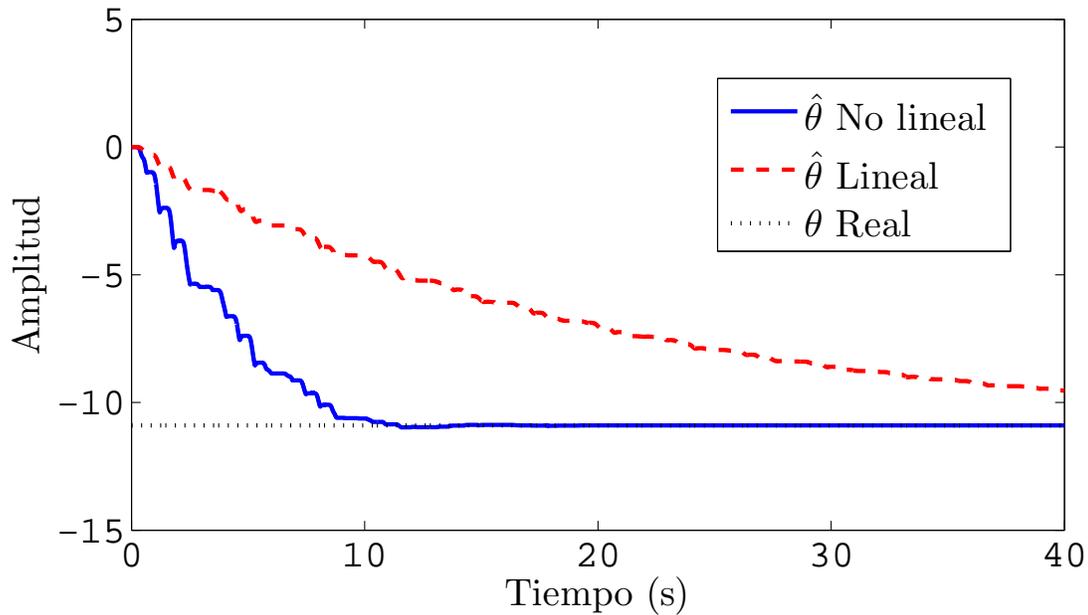
where  $e_{x2} = \hat{x}_2 - x_2$  is the state error,  $B(x, u) = [x_2, \sin(x_1), u]$  es el regresor,  $\hat{\theta}$  es el vector de parámetros estimados.

Para la simulación los parámetros han sido elegidos como  $\theta_1 = -0.2$ ,  $\theta_2 = -10.9$ ,  $\theta_3 = 1.12$ . El comportamiento del algoritmo (clásico) lineal con  $p = 1$ ,  $k_1 = 50$ ,  $k_2 = 100$ , es comparado con el comportamiento del AGSO (no lineal) (4.2), con  $p = \frac{2}{3}$ ,  $k_1 = 50$ ,  $k_2 = 100$ . La señal de entrada ha sido seleccionada como  $u = 3 \sin(t) + 3 \sin(10t)$ , que asegura la condición de excitación persistente.

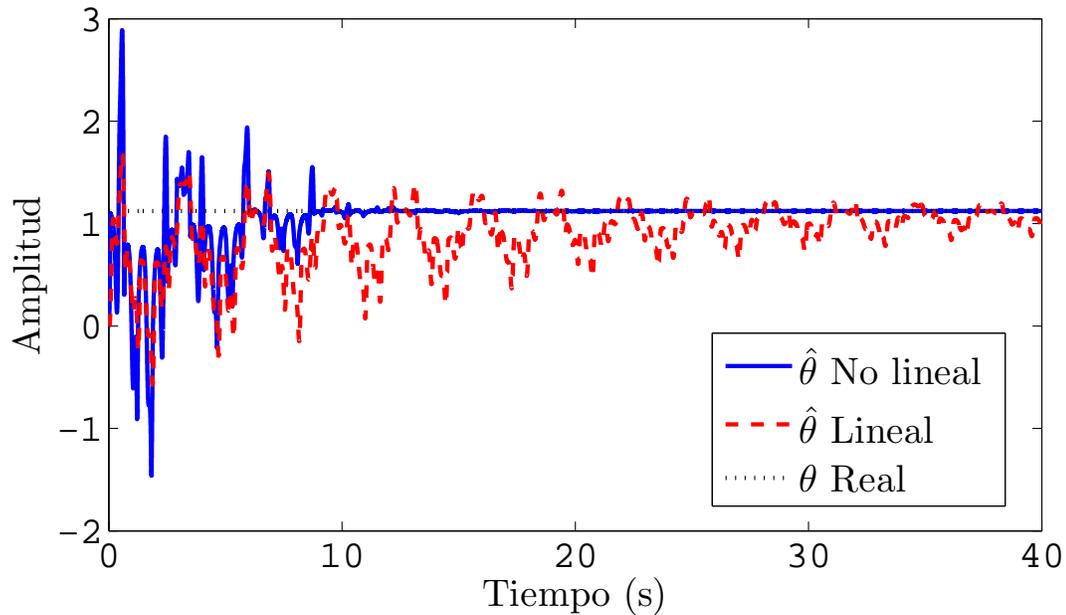
La Fig. 4.3 muestra la convergencia de ambos algoritmos al parámetro real  $\theta_1 = -0.2$ . De forma similar, las figuras 4.4 y 4.5 muestran la convergencia de los parámetros a los valores reales correspondientes  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . Es claro que los términos no lineales en el AGSO incrementan la velocidad de convergencia, así los parámetros estimados alcanzan el valor original en tiempo finito.

#### 4.4.2. Estimación del estado y parámetros constantes

En el ejemplo anterior fue necesario medir ambos estados, la posición angular  $x_1$  y la velocidad angular  $x_2$  del péndulo, para identificar los parámetros desconocidos. Sin embargo, en



**Figura 4.4:** Estimación del parámetro  $\theta_2 = -10.9$  con el algoritmo lineal y el AGSO (no lineal).



**Figura 4.5:** Estimación del parámetro  $\theta_3 = 1.12$  con el algoritmo lineal y el AGSO (no lineal).

muchos casos los estados no directamente medible. En esta caso se considerará la velocidad como el estado no medibles, por lo tanto se deberá hacer uso de un observador para obtener un valor estimado de la velocidad, y después el estimado de los parámetros del planta.

Moreno (2009) propone que el ASTG dado por

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = -k_1 \phi_1(e_{x1}) + \hat{x}_{2s} \\ \dot{\hat{x}}_{2s} = -k_2 \phi_2(e_{x1}) + B^T(t, y, u, \hat{x}_{2s}) \hat{\theta} \end{cases} \quad (4.34)$$

con

$$\begin{aligned} \phi_1(e_{x1}) &= \mu_1 |e_{x1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{x1}) + \mu_2 e_{x1} , \\ \phi_2(e_{x1}) &= \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(e_{x1}) + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |e_{x1}|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(e_{x1}) + \mu_2^2 e_{x1} , \end{aligned}$$

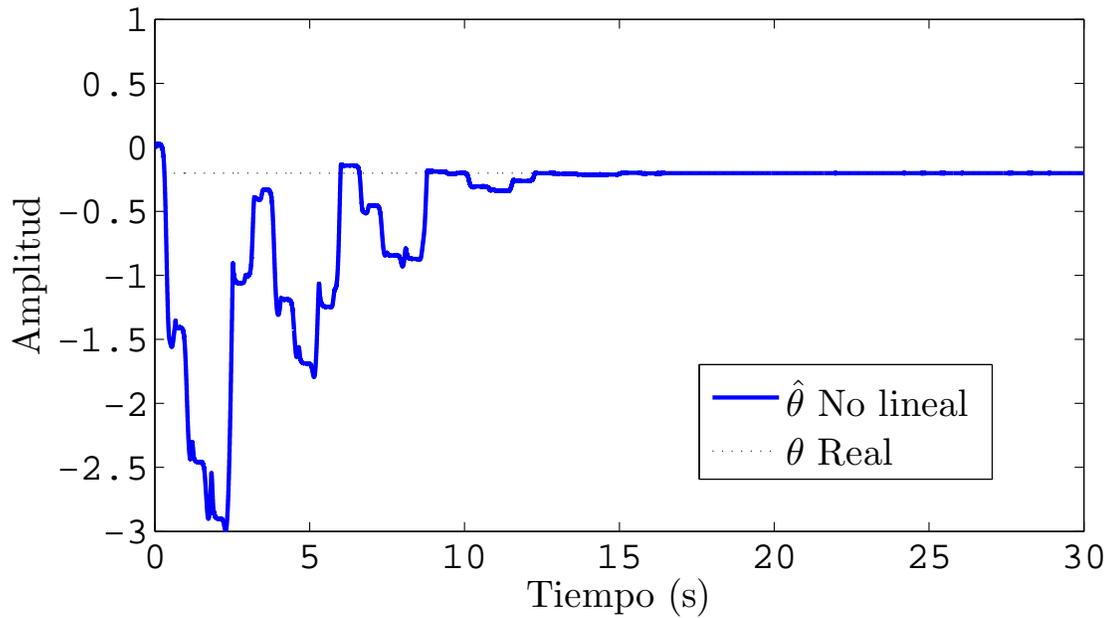
y  $\mu_1 > 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  con constantes no negativas arbitrarias, es posible estimar  $x_2$  en tiempo finito cuando sólo es medible  $x_1$ , y a pesar de la incertidumbre paramétrica del sistema. Usando el valor estimado  $\hat{x}_{2s}$  de  $x_2$  y el estimador de parámetros previamente diseñado se tiene,

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_{2p} = -k_3 |e_{x2}|^p \text{sign}(e_{x2}) + B^T(t, y, u, \hat{x}_{2s}) \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} = -k_4 p |e_{x2}|^{2p-1} \text{sign}(e_{x2}) B(t, y, u, \hat{x}_{2s}) , \end{cases} \quad (4.35)$$

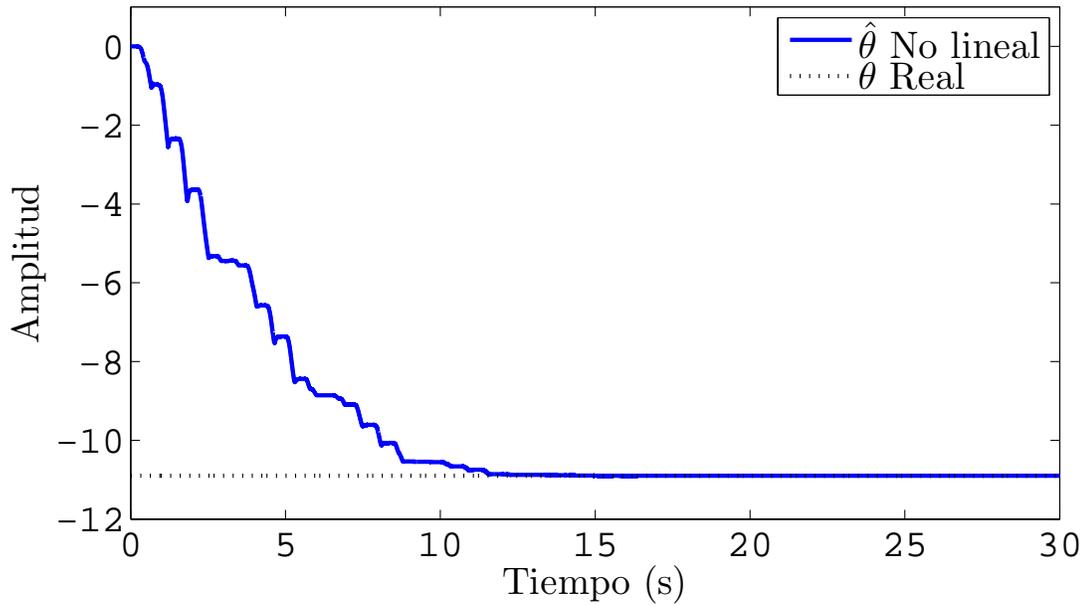
es posible estimar, en tiempo finito, la velocidad angular  $x_2$ , y los parámetros del péndulo. En (4.34-4.35)  $e_{x1} = \hat{x}_1 - x_1$ ,  $e_{x2} = \hat{x}_{2p} - \hat{x}_{2s}$ ,  $B^T(t, y, u, \hat{x}_{2s}) = [\hat{x}_{2s}, \sin(x_1), u]$  es el regresor con el valor estimado  $\hat{x}_{2s}$  de  $x_2$ .

Para la simulación se considera que la velocidad es estimada por  $\Sigma_1$  (4.34), con  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 5$ . Como estimador paramétrico  $\Sigma_2$  (4.35) se considera otra vez el estimador no lineal con  $k_3 = 50$ ,  $k_4 = 100$ . Las figuras 4.6, 4.7 y 4.8 muestran el comportamiento de las trayectorias generadas por los algoritmos para los parámetros  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  and  $\theta_3$ , respectivamente. Las figuras muestran que los parámetros son estimados en tiempo finito por el algoritmo no lineal, y que se tiene un resultado similar al mostrado cuando ambos estados son medidos.

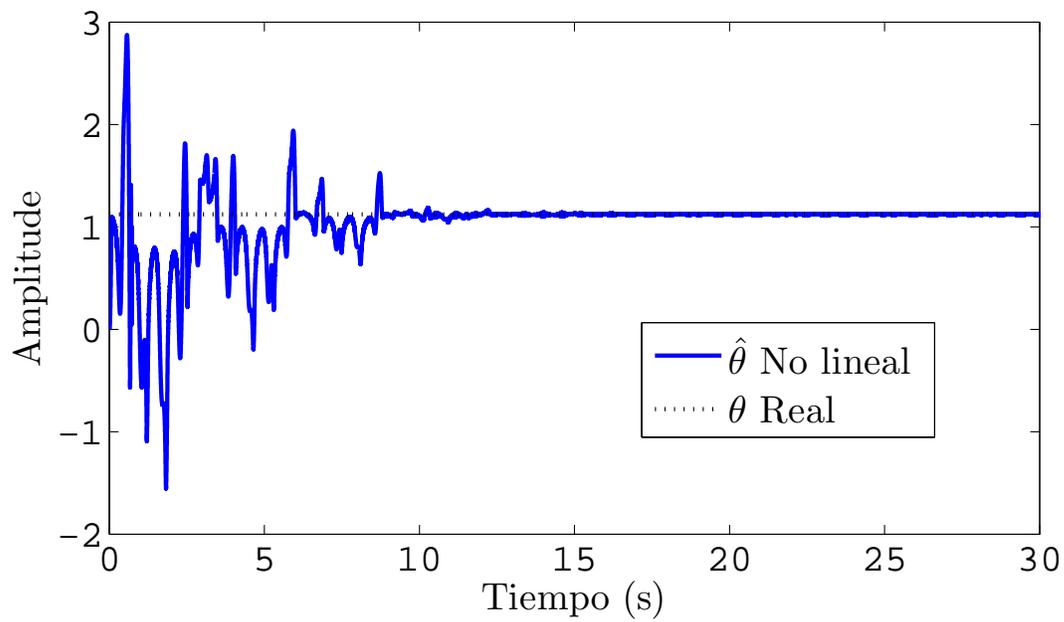
En este capítulo se presentó un estimador capaz de estimar múltiples parámetros en tiempo finito. La convergencia en tiempo finito se logró gracias a las no linealidades parecidas al AGSO. Debido a la estructura parecida de la dinámica de error no lineal, al algoritmo clásico (4.1), el nuevo algoritmo se puede usar en observadores y controladores clásicos (como se presenta en el siguiente capítulo). También, a causa de esta estructura fue posible utilizar en esencia el método clásico de convergencia, el cual se complementó algunas técnicas para poder concluir convergencia de las trayectorias solución de la dinámica de error a cero en tiempo finito.



**Figura 4.6:** Estimación del parámetro  $\theta_1 = -0.2$  con el algoritmo lineal y el AGSO (no lineal), con sólo medición de la posición.



**Figura 4.7:** Estimación del parámetro  $\theta_2 = -10.9$  con el algoritmo lineal y el AGSO (no lineal), con sólo medición de la posición.



**Figura 4.8:** Estimación del parámetro  $\theta_3 = 1.12$  con el algoritmo lineal y el AGSO (no lineal), con sólo medición de la posición.

# Capítulo 5

## Aplicación al Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR)

En este capítulo se presenta una aplicación del algoritmo estimador de parámetros constantes. Con el objetivo de mejorar el tiempo de convergencia y darle cierta robustez al Control Adaptable por Modelo de Referencia (CAMR) clásico, se añaden algunas no linealidades a la ley de control, las cuales se recuperan del AGSO (Moreno, 2011; Moreno y Osorio, 2012). En general se trata de obtener mejores propiedades de convergencia del algoritmo clásico por medio de las técnicas presentadas en el capítulo 4.

Uno de los propósitos de desarrollar el estimador paramétrico presentado en el capítulo anterior es heredar la propiedad de convergencia en tiempo finito a todos los algoritmos que utilizan el algoritmo de estimación clásico (Narendra y Annaswamy, 1989; Sastry y Bodson, 1989; Ioannou y Sun, 1996). Al igual que en el capítulo anterior, se cambia el error del estado conocido por algunas no linealidades tomadas del AGSO.

En el presente capítulo se muestra una aplicación del algoritmo estimador de múltiples parámetros (capítulo 4) al problema de CAMR (sección 2.4), aunque no se presentan las demostraciones de convergencia, por medio de simulaciones se muestra que al hacer la retroalimentación no lineal, el tiempo de convergencia a los valores deseados se ve disminuido en comparación con el algoritmo clásico.

### 5.1. Simulación con Modelo de Referencia sin ceros

El controlador y la ley de adaptación para el CAMR, mostrado en la sección 2.4, se modifican de la siguiente forma,

$$u_p = \theta^T(t)w - k_1 \phi_1(e_1) \text{sign}(\rho^*) \quad (5.1a)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\Gamma \phi_2(e_1)w \text{sign}(\rho^*) \quad (5.1b)$$

donde  $e_1 = y_p - y_m$ , y  $\rho^* = \frac{k_p}{k_m}$  (ver sección 2.4)

$$\begin{aligned} \phi_1(e_1) &= |e_1|^p \text{sign}(e_1) \\ \phi_2(e_1) &= |e_1|^{2p-1} \text{sign}(e_1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

y  $p$  es una constante a elegir en el intervalo.

Si  $k_1 = 0$ ,  $p = 1$  y  $\Gamma = 1$  se recupera el CAMR clásico (2.36-2.37). Los términos continuos, no Lipschitz extras  $|e_1|^p \text{sign}(e_1)$  en  $\phi_1$ , y  $|e_1|^{2p-1} \text{sign}(e_1)$  en  $\phi_2$  son capaces de acelerar el error de seguimiento  $e_1$  y el error en los parámetros  $\tilde{\theta}$ , aunque hay una idea general para demostrar la convergencia en tiempo finito no se ha podido desarrollar completamente. La principal contribución de este capítulo es mostrar por medio de ejemplos y simulaciones que esquema de CAMR dado por (5.1a-5.1b) cumple que:

1. Todas las señales de la planta en lazo cerrado están acotadas y el error de seguimiento  $e_1$  converge a cero asintóticamente con el tiempo para cualquier entrada de referencia  $r \in \mathcal{L}_\infty$ .
2. Si  $r$  es suficientemente rica de orden  $2n$ ,  $\dot{r} \in \mathcal{L}_\infty$ , entonces el error paramétrico  $|\tilde{\theta}| = |\theta - \theta^*|$  y el error de seguimiento  $e_1$  convergen más rápido que el algoritmo lineal, posiblemente en tiempo finito.

También se muestra que el lazo de control es robusto contra perturbaciones aditivas en el canal de control, i.e. perturbaciones acotadas que entran en el canal del control, causan un error de control acotado.

Para comparar los controladores con términos lineales y con los términos no lineales propuestos en esta investigación, considere la planta de segundo orden (ya usada como ejemplo en Narendra y Annaswamy (1989))

$$y_p = \frac{k_p(s + b_0)}{s^2 + a_1s + a_0} u_p. \quad (5.3)$$

Los valores para las constantes desconocidas usadas en la simulación son  $k_p = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $a_1 = -3$  y  $a_0 = 1$ , y el signo de  $k_p > 0$  es conocido. El modelo de referencia está dado por

$$y_m = \frac{1}{s+1} r. \quad (5.4)$$

Un controlador nominal que logra el objetivo dado por Narendra y Annaswamy (1989); Ioannou y Sun (1996)

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -2w_1 + u_p, & w_1(0) &= 0 \\ \dot{w}_2 &= -2w_2 + y_p, & w_2(0) &= 0 \\ u_p &= \theta_1 w_1 + \theta_2 w_2 + \theta_3 y_p + c_0 r, \end{aligned} \quad (5.5)$$

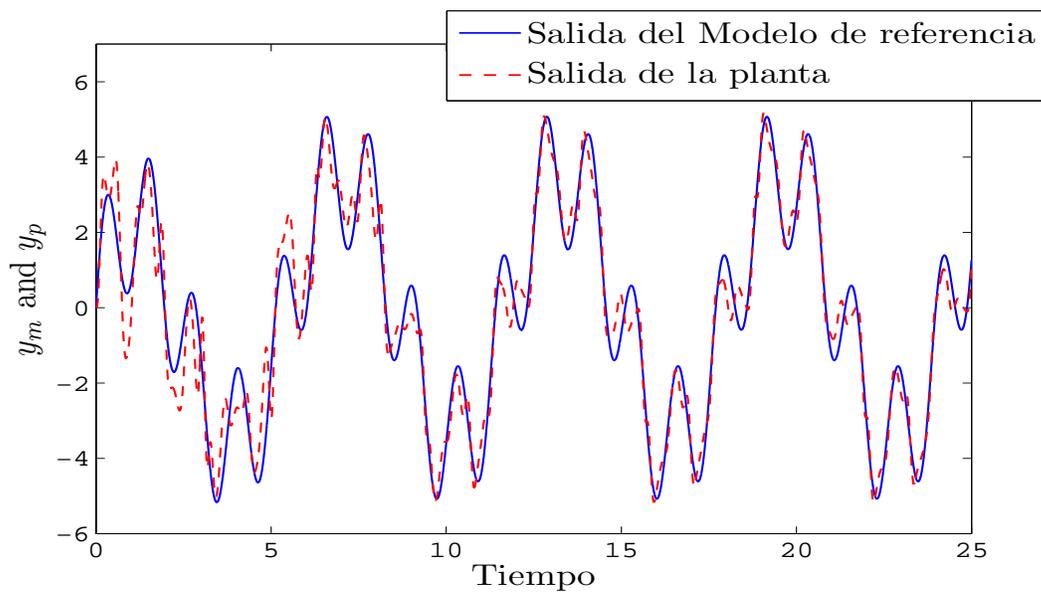
donde  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ c_0]^T$ ,  $w = [w_1 \ w_2 \ y_p \ r]^T$ , y los valores nominales de los parámetros son  $\theta^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \theta_3^* \ c_0^*]^T = [0, \ 6, \ -5, \ 1]^T$ . Se presentarán tres casos en simulación.

### 5.1.1. Condiciones de excitación persistente, sin perturbaciones

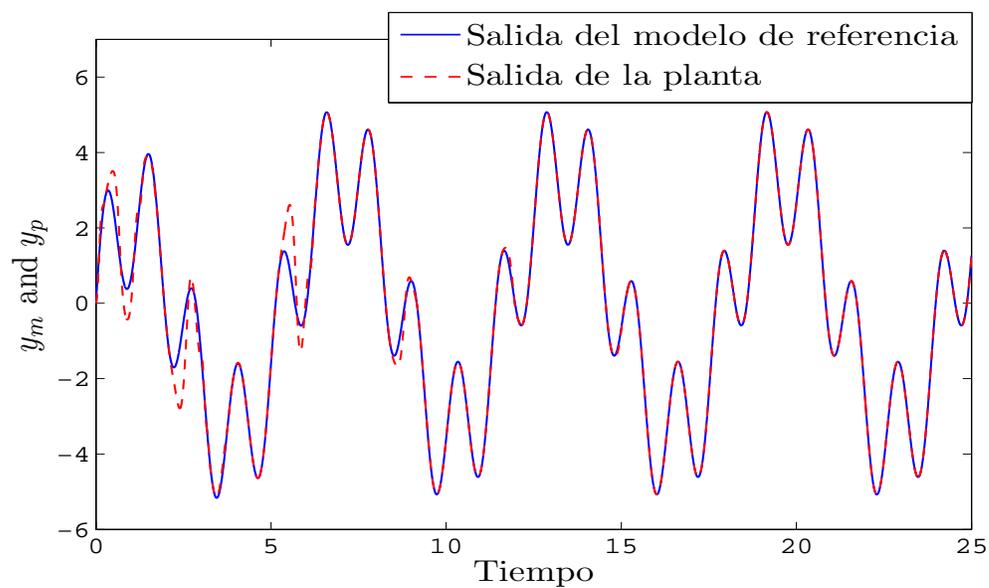
Para las simulaciones la señal de referencia  $r$  ha sido seleccionada como  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ , esta es suficientemente rico para el sistema, así que el regresor  $w$  es persistentemente excitante. El Control Adaptable por Modelo de Referencia clásico (lineal) está dado por (2.36-2.38), donde  $\Gamma$  se estableció como una matriz identidad de dimensión 4. El CAMR (no lineal) está dado por (5.1a-5.2), donde las ganancias se han seleccionado como  $k_1 = 10$  y  $k_2 = 1$ . La figura 5.1 muestra la salida de referencia dada por el modelo  $y_m$  (línea continua) y la salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el esquema de CAMR (clásico), mientras la figura 5.2 muestra las mismas figuras para el CAMR (no lineal) propuesto. La figura 5.3 muestra el error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para los esquemas de CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo). La variable de control correspondiente  $u_p$  se muestra en la figura 5.4. De estas figuras es claro que el controlador (no lineal) propuesto converge muchos más rápido que el clásico. Más aun, el parámetro converge, como se muestra en la figura 5.5, es alcanzado en tiempo finito y mucho más rápida que el algoritmo clásico.

### 5.1.2. Condición de excitación persistente, con perturbaciones

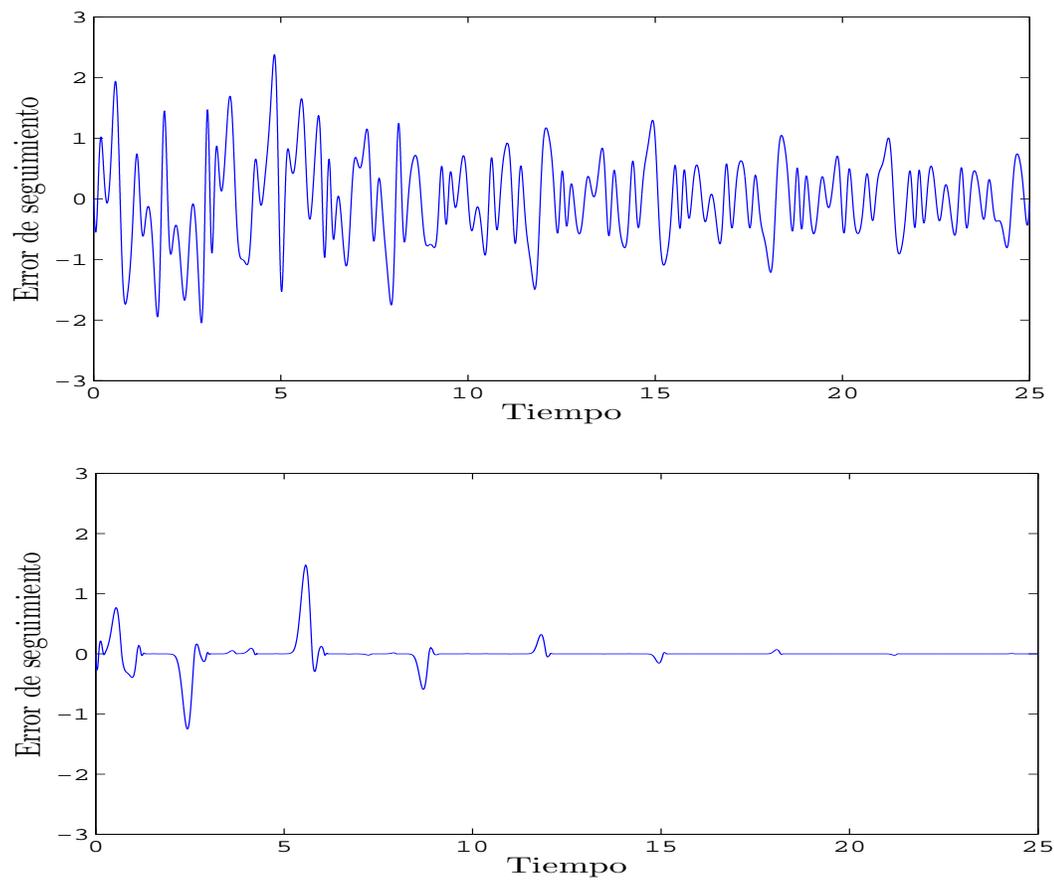
Se mostró en la prueba del Teorema, que el algoritmo de CAMR (no lineal) propuesto (5.1a-5.2) es robusto contra perturbaciones aditivas en el control de entrada y en los parámetros, debida por ejemplo a variaciones lentas en los parámetros. Para ilustrar estas características se ha hecho una simulación con una perturbación  $p(t) = 5 \sin(6t)$ , entrando en el canal de control de la planta. La figura 5.6 muestra el error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para los esquemas de CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo). Es claro que los términos adicionales no lineales del algoritmo propuesto conducen a un error de seguimiento más pequeño. Más aun, la estimación paramétrica (mostrada en la figura 5.7) es más rápido para el algoritmo propuesto que par el clásico. Es interesante notar que para el algoritmo no lineal la



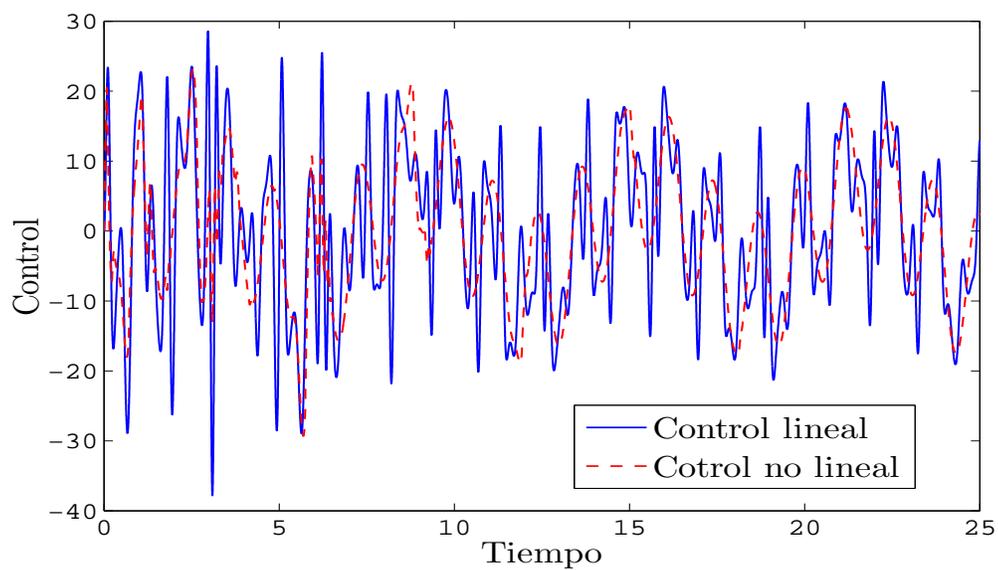
**Figura 5.1:** Salida del modelo de referencia  $y_m$  (línea continua) y salida de la planta  $y_p$  (línea punteada), con el CAMR clásico, con señal de referencia  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ .



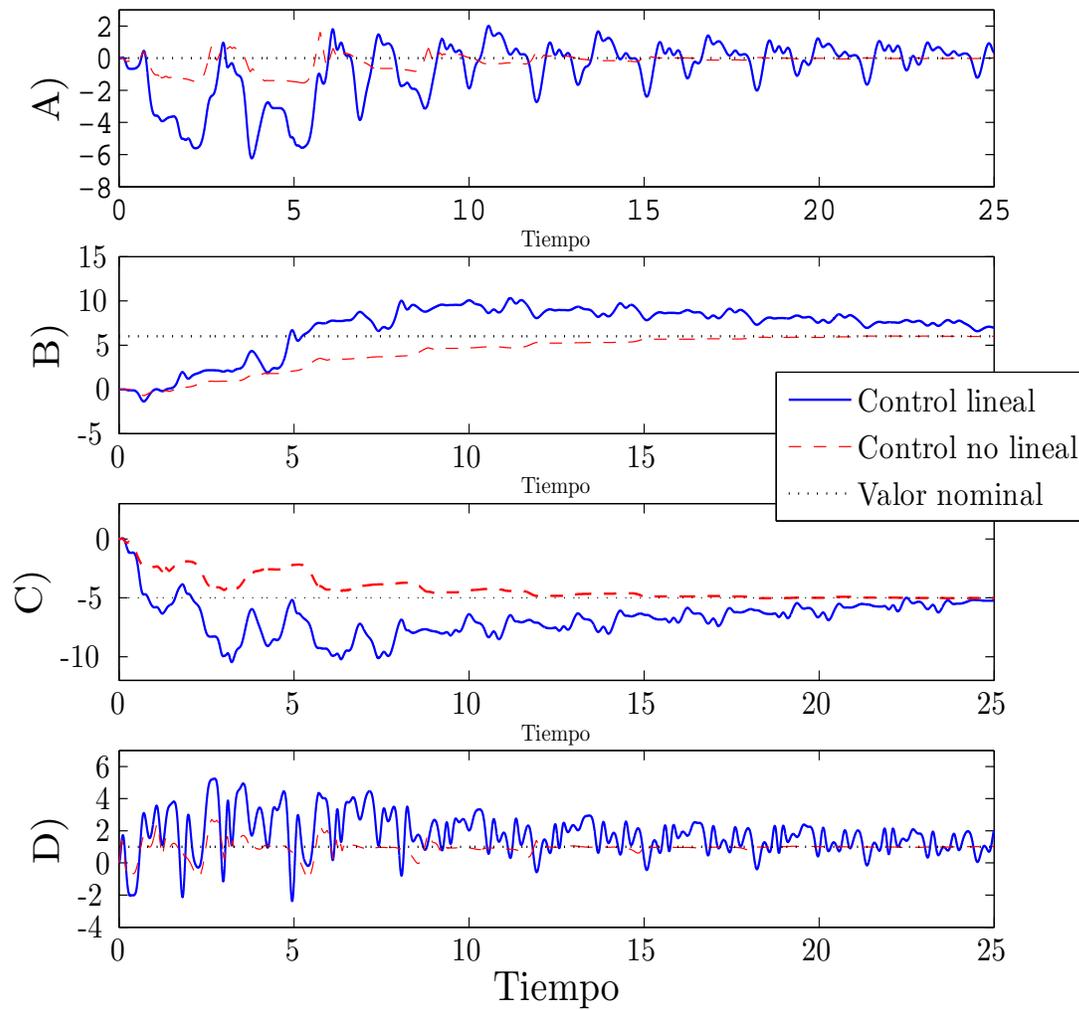
**Figura 5.2:** Salida del modelo  $y_m$  (línea continua) y salida de la planta  $y_p$  (línea punteada), con el CAMR no lineal y señal de referencia  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ .



**Figura 5.3:** Error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para el CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo), con señal de referencia  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ .

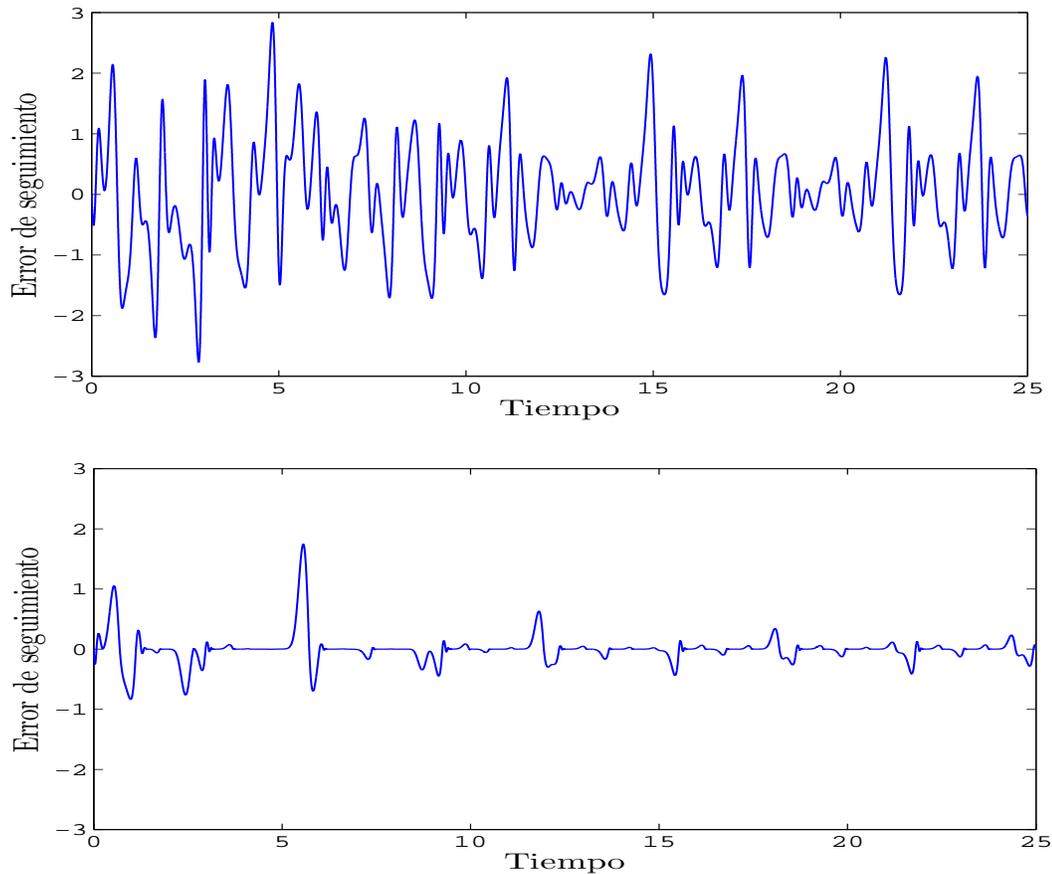


**Figura 5.4:** Control variable  $u_p$  para CAMR clásico (línea continua) y el CAMR no lineal propuesto (línea punteada) con señal de referencia  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ .



**Figura 5.5:** Convergencia de la estimación paramétrica a los valores reales con señal de referencia  $r = 5 \sin(t) + 10 \sin(5t)$ . A)  $\theta_1^* = 0$ , B)  $\theta_2^* = 6$ , C)  $\theta_3^* = -5$  and D)  $c_0^* = 1$

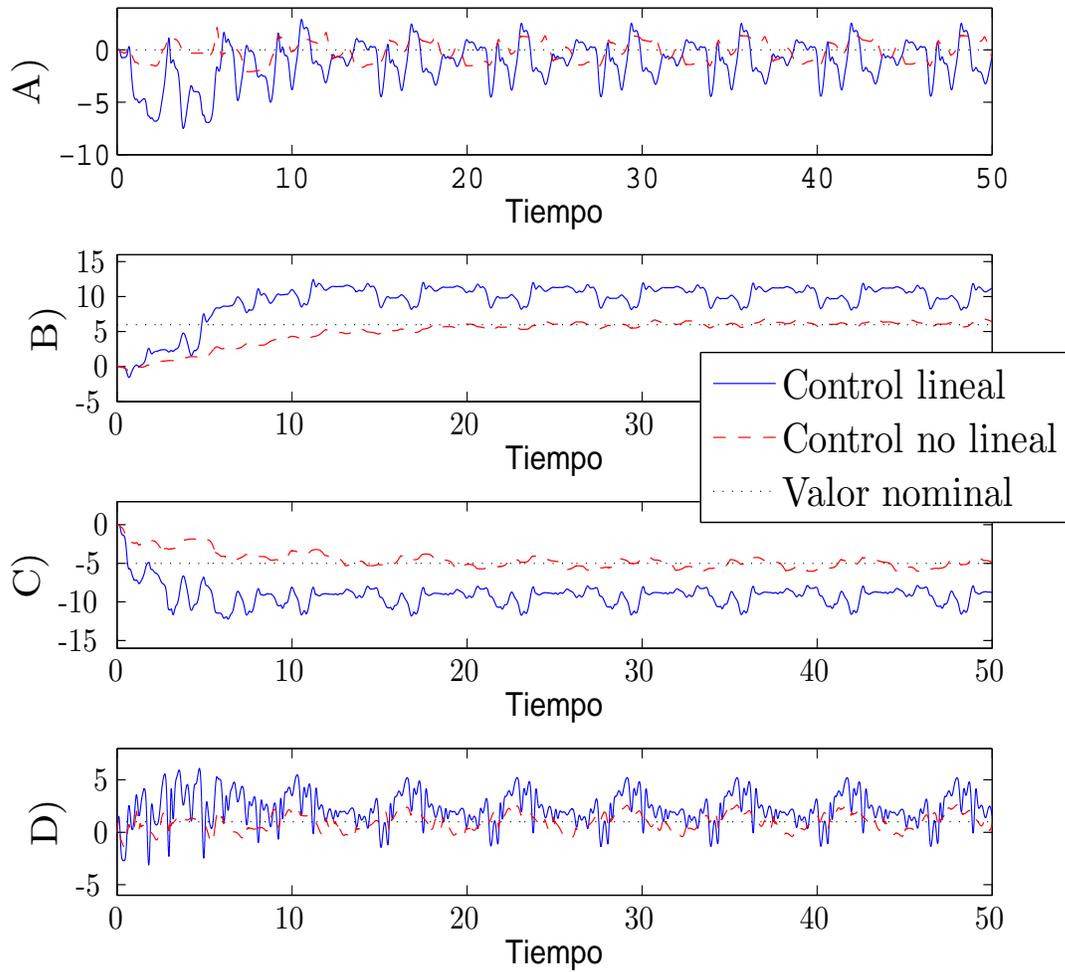
estimación paramétrica oscila alrededor del valor verdadero, mientras la estimación tiene un sesgo.



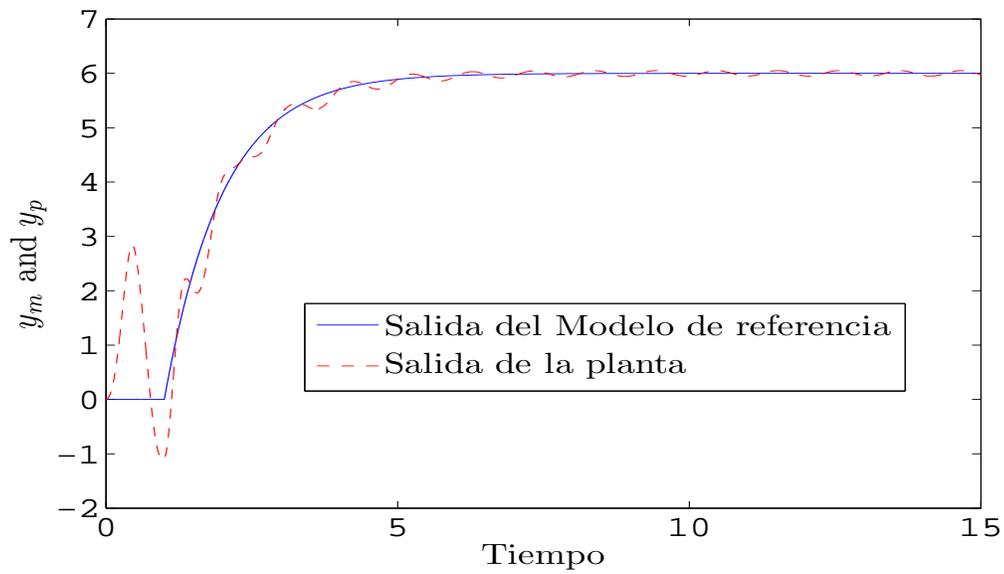
**Figura 5.6:** Error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para el CAMR clásico (arriba) y el no lineal (abajo), con señal de referencia  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ , y perturbación  $p(t) = 5 \sin(6t)$ .

### 5.1.3. Ausencia de condición de excitación persistente

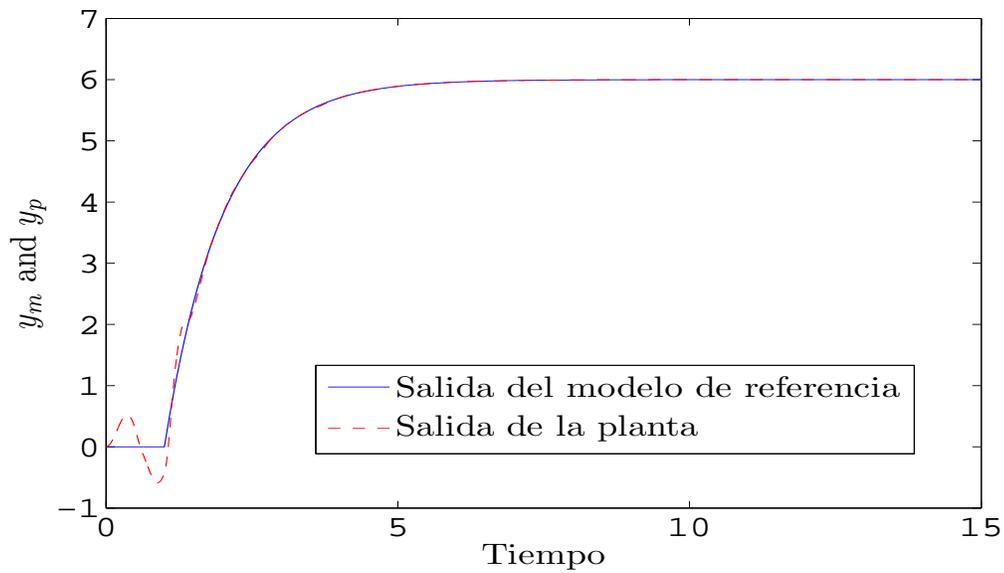
Es bien sabido que las propiedades del CAMR son débiles cuando la condición de excitación persistente no es satisfecha. Para una señal de referencia constante  $r(t) = 6$ , la figura 5.8 muestra que salida de referencia dada por el modelo  $y_m$  (línea continua) y la salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el esquema de CAMR (clásico), mientras la Figura 5.19 muestra los mismos resultados para el CAMR (no lineal) propuesto. La variable de control correspondiente  $u_p$  se muestra en la figura 5.10. Es notable que la convergencia del CAMR no lineal propuesto es mucho más rápida también es este caso.



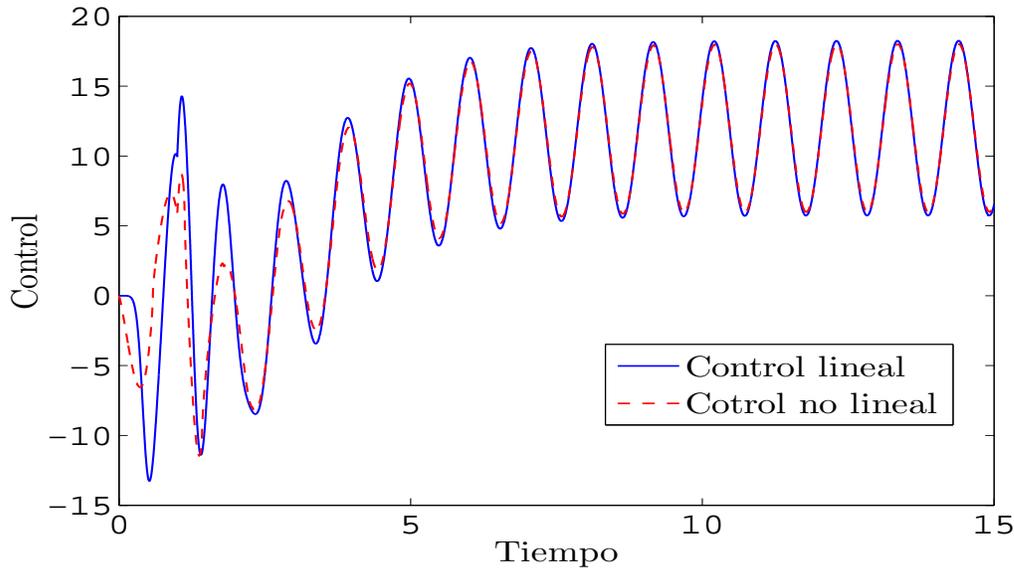
**Figura 5.7:** Convergencia paramétrica a los valores reales con señal de referencia  $r = 5 \sin(t) + 10 \sin(5t)$ , y perturbación  $p(t) = 5 \sin(6t)$ . A)  $\theta_1^* = 0$ , B)  $\theta_2^* = 6$ , C)  $\theta_3^* = -5$  and D)  $c_0^* = 1$ .



**Figura 5.8:** Salida del modelo  $y_m$  (línea continua) y salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el CAMR clásico, y con señal de referencia  $r = 6$ .



**Figura 5.9:** Salida del modelo  $y_m$  (línea continua) y salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el CAMR no lineal, y señal de referencia  $r = 6$ .



**Figura 5.10:** Variable de control  $u_p$  para el CAMR (línea continua) y el no lineal (línea punteada) con señal de referencia  $r = 6$ .

## 5.2. Simulación con Modelo de Referencia con ceros.

En este ejemplo se considera una modelo de referencia con ceros, pero se sigue conservando el grado relativo 1. Considere la planta,

$$y_p = \frac{k_p(s + b_0)}{s^2 + a_1s + a_0} u_p. \quad (5.6)$$

Los valores constantes desconocidos usados en la simulación son  $k_p = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $a_1 = -3$  y  $a_0 = 1$ , y el signo de  $k_p > 0$  es conocido. El modelo de referencia está dado por

$$y_m = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6} r. \quad (5.7)$$

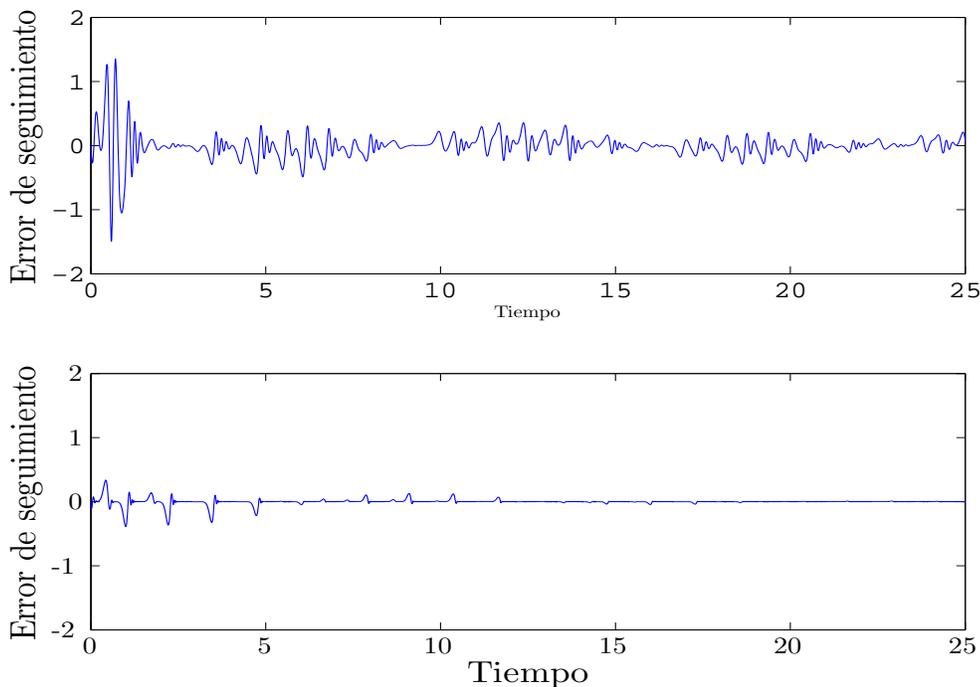
Un controlador nominal que alcanza el objetivo de seguimiento dado por (2.33a, 2.33b, 5.1a), donde  $F = -1$ ,  $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ c_0]^T$ ,  $w = [w_1 \ w_2 \ y_p \ r]^T$ , y los valores nominales de los parámetros son  $\theta^* = [\theta_1^* \ \theta_2^* \ \theta_3^* \ c_0^*]^T = [-1, 4, -8, 1]^T$ .

Al igual que en la sección anterior se presentan tres escenarios diferentes de simulación.

### 5.2.1. Condición de excitación persistente, sin perturbaciones

Para las simulaciones la señal de referencia  $r$  ha sido seleccionado como  $r = 5 \sin(0.5t) + 10 \cos(5t)$ , tratando de hacer que sea suficientemente rica, de tal forma que el regresor  $w$  cumpla con la condición de excitación persistente.

El CAMR clásico (lineal) está dado por (2.36), donde  $\Gamma$  ha sido establecido como la una matriz identidad de dimensión 4. El CAMR propuesto (no lineal) está dado por (5.1a-5.2), donde la ganancia ha sido establecida como  $k_1 = 15$ , y  $p$  ha sido seleccionada arbitrariamente como  $\frac{2}{3}$ . Fig. 5.11 muestra el error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para los esquemas de CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo). La correspondiente variable de control  $u_p$  se muestra en la Fig. 5.12. De estas figuras, es claro que el algoritmo propuesto en este trabajo (no lineal) es más rápido que el clásico. Para la convergencia paramétrica, mostrada en la Fig. 5.13, se tiene que el tiempo de convergencia es menor para el algoritmo no lineal en la mayoría de los casos.

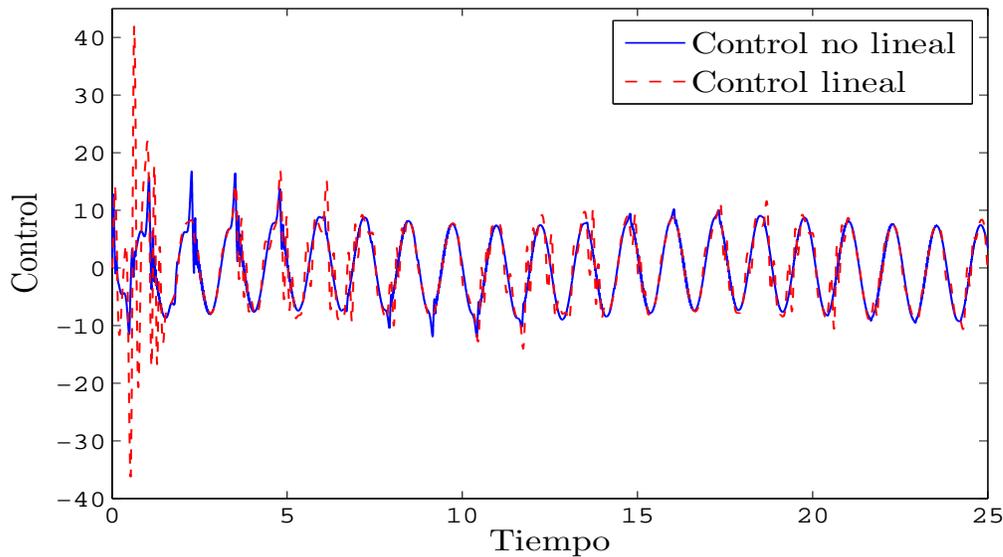


**Figura 5.11:** Error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para el CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo) con una señal de referencia  $r = 5 \sin(0.5t) + 10 \cos(5t)$ .

*Salida de la planta con ruido:* La Fig. 5.14 muestra el error de seguimiento cuando una señal de ruido de aproximadamente 5 % de la salida de la planta es sumado. Note que el CAMR no lineal aun converge más rápido que el lineal, y el efecto de ruido una vez que se establece la señal es similar en ambos sistemas.

### 5.2.2. Condición de excitación persistente, con perturbación

Con esta simulación se muestra que el nuevo algoritmo propuesto, puede agregar ciertas propiedades de robustez a la técnica donde se incorpore. Para ilustrar esta característica, se

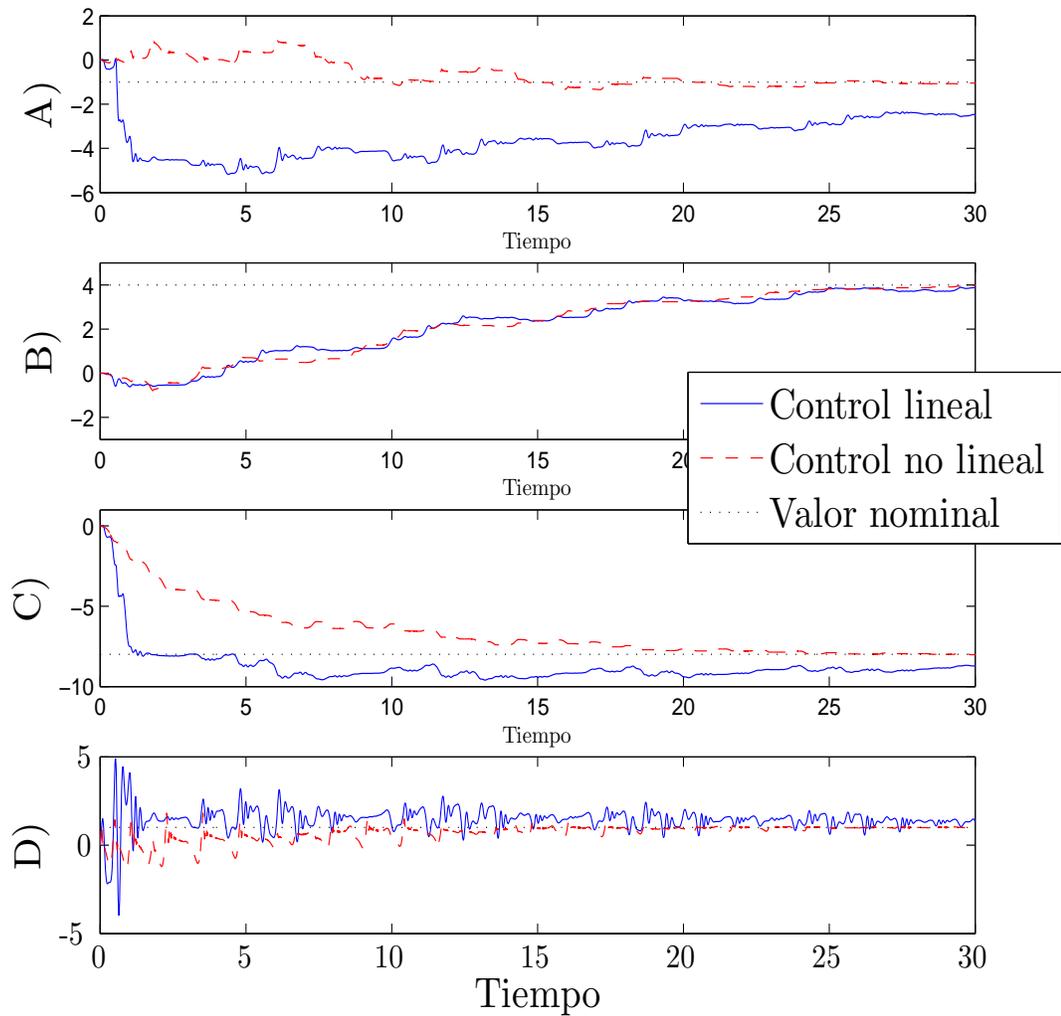


**Figura 5.12:** Variable de control  $u_p$  para el CAMR clásico (línea continua) y el CAMR no lineal (línea punteada) con señal de referencia  $r = 5 \sin(0.5t) + 10 \cos(5t)$ .

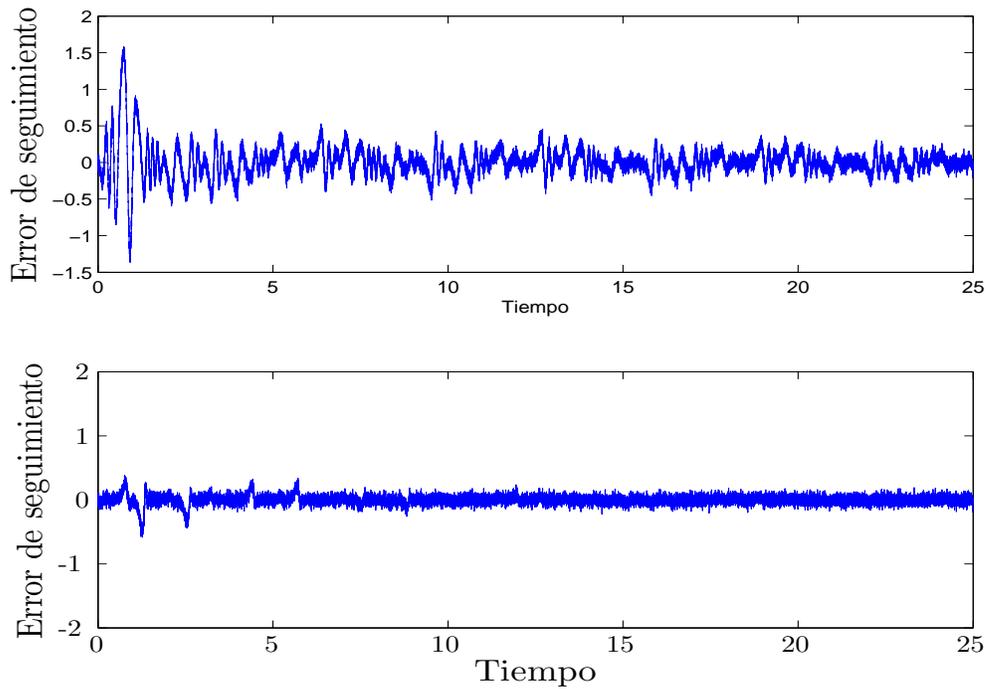
ha agregado una perturbación  $p(t) = 5 \sin(6t)$ , que entra por el canal de entrada de la planta. La Fig. 5.15 muestra el error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para el esquema de CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo). Es claro que los términos no lineales del algoritmo propuesto llevan a un error de seguimiento más pequeño. Más la estimación paramétrica (mostrada en la Fig. 5.16) es más rápida para el algoritmo no lineal que para el clásico. Es interesante notar que el algoritmo no lineal la señal de estimación paramétrica se aproxima más al valor nominal, mientras que la estimación lineal tiene una desviación más grande.

### 5.2.3. Ausencia de excitación persistente

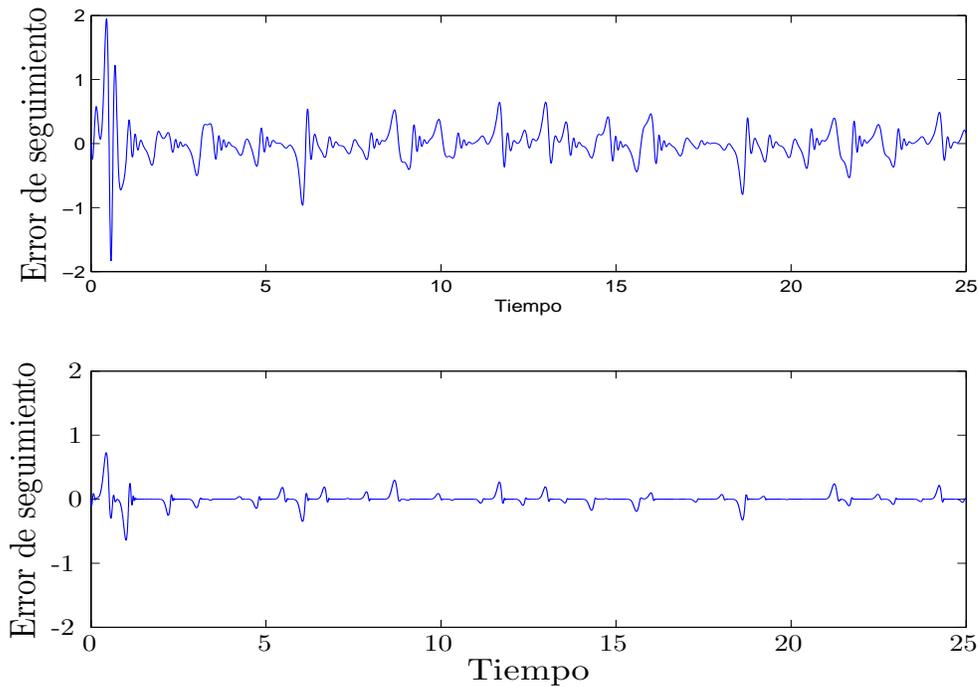
Es bien sabido que las propiedades de CAMR son débiles cuando la condición de excitación persistente no es satisfecha. Para una señal de referencia constante  $r(t) = 1$ , Fig. 5.17, se muestra la referencia de salida dada por el modelo  $y_m$  (línea continua) y la salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el CAMR clásico, mientras en la Fig. 5.18 se muestran los mismos resultados para el esquema no lineal propuesto. La variable de control  $u_p$  se muestra en la Fig. 5.19. Cabe hacer notar que la convergencia del algoritmo no lineal también es más rápida en este caso.



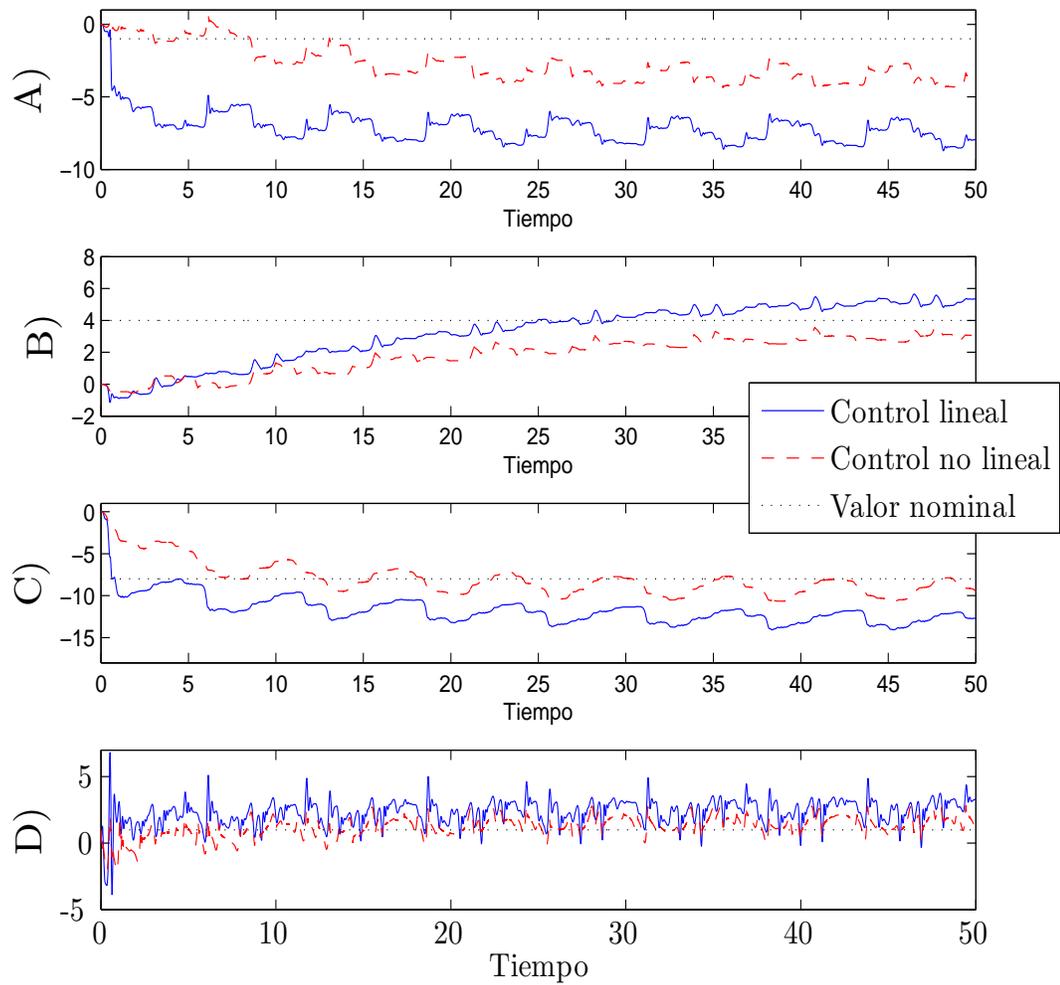
**Figura 5.13:** Convergencia paramétrica a los valores reales con señal de referencia  $r = 5 \sin(0.5t) + 10 \sin(5t)$ . A)  $\theta_1^* = -1$ , B)  $\theta_2^* = 4$ , C)  $\theta_3^* = -8$  and D)  $c_0^* = 1$



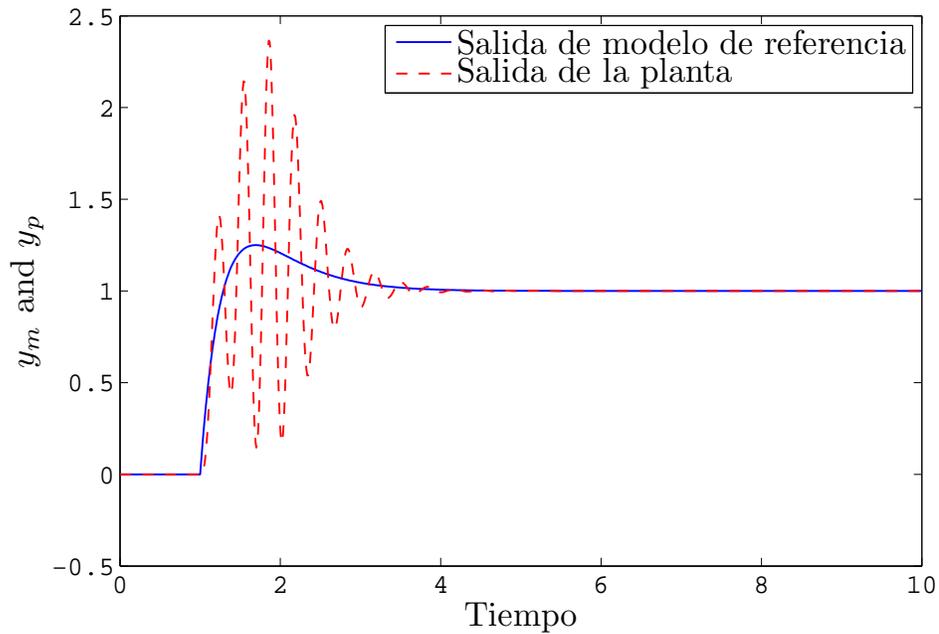
**Figura 5.14:** Error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para el CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo), con una amplitud máxima de ruido 0.25 sumada a la salida de la planta.



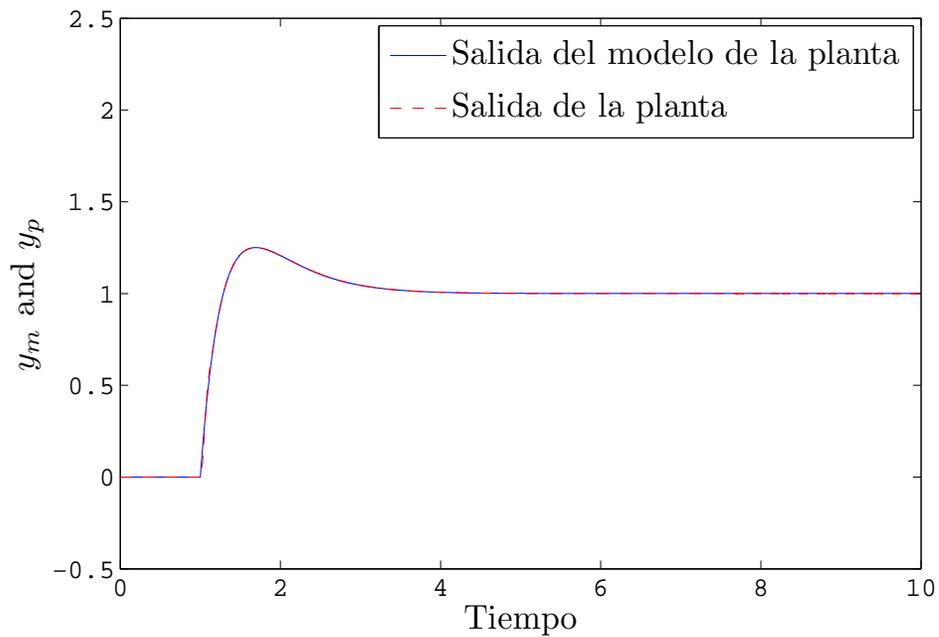
**Figura 5.15:** Error de seguimiento  $e_1 = y_p - y_m$  para el esquema de CAMR clásico (arriba) y el propuesto (abajo), con señal de referencia  $r = 5 \cos(t) + 10 \cos(5t)$ , con perturbación  $p(t) = 5 \sin(6t)$ .



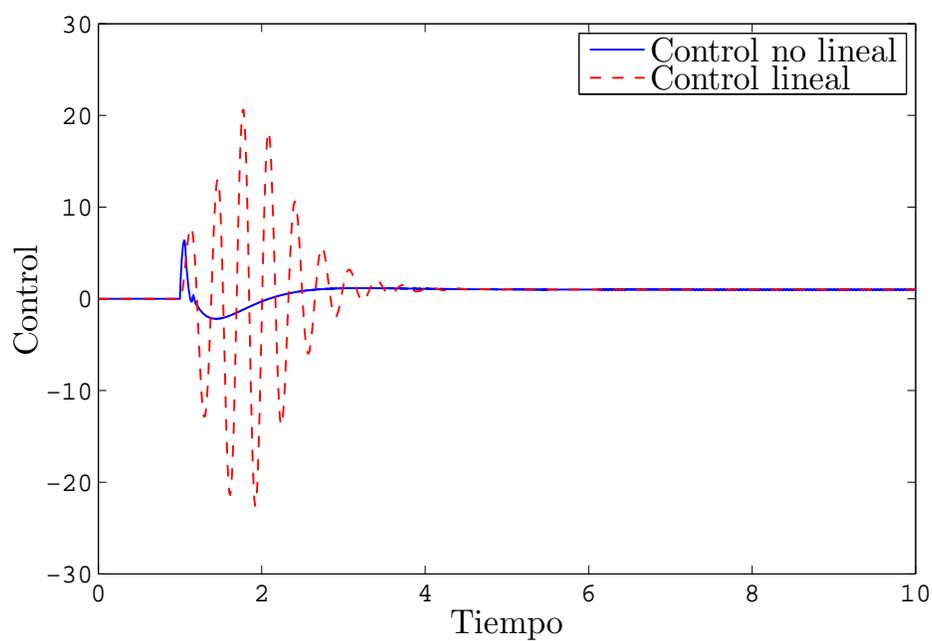
**Figura 5.16:** Convergencia paramétrica a los valores reales con señal de referencia  $r = 5 \sin(t) + 10 \sin(5t)$ , y perturbación  $p(t) = 5 \sin(6t)$ . A)  $\theta_1^* = 0$ , B)  $\theta_2^* = 6$ , C)  $\theta_3^* = -5$  and D)  $c_0^* = 1$ .



**Figura 5.17:** Salida del modelo  $y_m$  (línea continua) y salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el CAMR clásico, y con señal de referencia constante  $r = 1$ .



**Figura 5.18:** Salida del modelo  $y_m$  (línea continua) y salida de la planta  $y_p$  (línea punteada) con el CAMR no lineal, y señal de referencia  $r = 1$ .



**Figura 5.19:** Control  $u_p$  para el CAMR no lineal (línea continua) y el CAMR clásico (línea punteada), con señal de referencia  $r = 1$ .

# Capítulo 6

## Conclusiones

Se diseñaron dos algoritmos con coeficientes variantes en el tiempo, cuyas trayectorias solución son capaces de converger en tiempo finito a valores desconocidos de una sistema. Estos algoritmos encuentran aplicación en el área de estimación paramétrica.

La convergencia en tiempo finito se logra al agregar no linealidades como las utilizadas en el AGSO, a uno de los algoritmos de estimación paramétrica clásicos.

En primer lugar se logró desarrollar un algoritmo estimador de un parámetro variante en el tiempo, el cual también se puede ver como una generalización de observadores para sistemas de segundo orden. Una de las porpieades interesantes de este nuevo sistema es la robustez, ésta es heredada de las no linealidades discontinuas del ST, y permite compensar en ciertos casos las variaciones temporales del parámetro a estimar, haciendo que el nuevo algoritmo converja exactamente y en tiempo finito al parámetro variante desconocido.

La propiedad de convergencia en tiempo finito se mostró a través de dos funciones de Lyapunov, tomando la idea de sistemas híbridos, lo cual es un método novedoso para el estudio de convergencia de sistemas discontinuos. Dicha demostración también enseña que la discontinuidad robustece el algoritmo contra cierto tipo de perturbaciones, las cuales pueden tomarse como variaciones temporales en el caso de estimación de parámetros.

El segundo algoritmo desarrollado es capaz de estimar múltiples parámetros constantes en tiempo finito. El nuevo algoritmo se basó en un sistema clásico de estimación y las no linealidades del AGSO. Para mostrar que las trayectorias del nuevo algoritmo convergen en tiempo finito, y establecer las condiciones bajo las cuales lo hace, se retomó la teoría clásica y se complemento con técnicas para el análisis de convergencia del AGSO. Por medio de simulaciones se logró establecer que el nuevo algoritmo tiene una velocidad de convergencia mayor a la de los algoritmo lineales clásicos. Se mostró que el algoritmo se puede utilizar en el problema de estimación de parámetros constantes, como se ha hecho con uno de los sistemas de estimación clásicos. Siguiendo esta idea se aplicó el nuevo estimador al problema de CAMR, haciendo más veloz la convergencia de la salida de la planta al sistema deseado,

y proporcionando cierta robustez a la entrada de la planta.

# Referencias

- Adetola, V. y Guay, M. (2008). Finite-time parameter estimation in adaptive control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(3), 807–811.
- Anderson, B.D.O. (1977). Homogeneous exponential stability of linear equations arising in adaptive identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(1), 83–88.
- Astrom, K.J. y Furuta, K. (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2), 287–295.
- Baccioti, A. y Rosier, L. (2001a). *Lyapunov functions and stability in control theory*. 2nd Ed. New York. Springer-Verlang.
- Baccioti, A. y Rosier, L. (2001b). *Lyapunov functions and stability in control theory*. 2nd Ed. New York. Springer-Verlang.
- Battista, H., Picó, J., Garelli, F., y Vignoni, A. (2011). Specific growth rate estimation in (fed-) batch bioreactors using second-order sliding observers. *Journal of Process Control.*, 21, 1049–1055.
- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design. *Systems & Control Letters*, 41, 271–280.
- Besançon, G. (2007). *Nonlinear Observers and Application*. Springer-Verlang, Berlin Heidelberg.
- Boyd, S. y Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. Cambridge University Press, Cambridge (UK).
- Branicky, M.S. (1998). Multiple lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(4), 475–482.
- Davila, A., Moreno, J.A., y Fridman, L. (2010). Variable gains super-twisting algorithm: A lyapunov based design. *American Control Conference - ACC 2010, Baltimore, USA*.

- Davila, J., Fridman, L., y Poznyak, A. (2006). Observation and identification of mechanical systems via second order sliding modes. *International Journal of Control*, 79(10), 1251–1262.
- Davila, J., Fridman, L., y Levant, A. (2005). Second-order sliding-mode for mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11), 1785–1789.
- Dochain, D. (2003). State and parameter estimation in chemical and biochemical processes: a tutorial. *Journal of Process Control*, 13(8), 801–818.
- Dong, L. y Leland, R.P. (2005). The adaptive control system of a mems gyroscope with time-varying rotation rate. In *American Control Conference - ACC2005*. Portland, OR, USA.
- Dovifaaz, X., Outbib, R., Rachid, A., y Ouladsine, M. (2002). A theoretical control strategy for a diesel engine. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 128, 453–457.
- Ekramian, M., Sheikholeslam, F., Hosseinnia, S., y Yazdanpanah, M.J. (2013). Adaptive state observer for lipschitz nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 62(4), 319–323.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential Equations with Discontinuous Righthand side*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.
- Fridman, L. y Levant, A. (2002). Higher order sliding modes. In J.P. Barbot y W. Perruquetti (eds.), *Sliding Mode Control in Engineering*, 53–101. Marcel Dekker.
- Gauthier, J.P., Hammouri, H., y Othman, S.A. (1992). A simple observer for nonlinear systems. *Applications to bioreactors*, 37, 2292–2299.
- Gonzalez, T., Moreno, J.A., y Fridman, L. (2012). Variable gain super-twisting sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(8), 2100–2105.
- Hartman, M., Bauer, N., y Teel, A. (2010). A hybrid algorithm for finite time parameter estimation. *American Control Conference*.
- Inouye, Y. (1977). On the observability of autonomous nonlinear systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 60, 236–247.
- Ioannou, P.A. y Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).
- Ioannou, P.A. y Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ.

- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upsaddle River, New Jersey 3rd. edition.
- Krevaris, C., Hahn, J., y Chu, Y. (2013). Advances and selected recent developments in state and parameter estimation. *Computers and Chemical Engineering*, 51, 111–123.
- Levant, A. (1993). Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, 58(6), 1247–1263.
- Levant, A. (1998). Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3), 379–384.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76(9/10), 924–941.
- Levant, A. (2005). Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41, 823–830.
- Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43, 576–586.
- Levy, H. y Lessman, F. (1961). *Finite Difference Equations*. The Macmillan Company, New York.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*. Birkhauser Boston.
- Marino, R. y Tomei, P. (1995). *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive & Robust*. Prentice Hall, London.
- Moreno, J.A. (2009). A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm. *2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE 2009)(Formerly known as ICEEE)*, Toluca, México, 10–13. URL <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5393477>.
- Moreno, J.A. (2011). Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In L. Fridman, J.A. Moreno, y R. Iriarte (eds.), *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*, chapter 4. Springer-Verlag.
- Moreno, J.A. (2012). A Lyapunov approach to output feedback control using second order sliding modes. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*.
- Moreno, J.A. (2013). On discontinuous observers for second order systems: Properties, analysis and design. In B. Bandyopadhyay y S.K. Janardhanan (eds.), *Advances in Sliding*

- Mode Control - Concepts, Theory and Implementation.*, volume 440 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences (LNCIS)*, 243–265. Springer - Verlag.
- Moreno, J.A. y Osorio, M. (2008). A lyapunov approach to second order sliding mode controllers and observers. *47th IEEE Conference on Decision and Control*, CDC, 2856–2861.
- Moreno, J.A. y Osorio, M. (2012). Strict lyapunov functions for super-twisting algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(4), 1035–1040.
- Morgan, A.P. y Narendra, K.S. (1977a). On the stability of nonautonomous differential equations  $\dot{x} = [A + B(t)]x$ , with skew symmetric matrix  $B(t)^*$ . *SIAM J. Control and Optimization*, 15(1), 163–176.
- Morgan, A.P. y Narendra, K.S. (1977b). On the uniform asymptotic stability of certain nonautonomous linear differential equations. *SIAM J. Control and Optimization*, 15, 5–24.
- M'Sirdi, N.K., Rabhi, A., Fridman, L., Davila, J., y Delanne, Y. (2008). Second order sliding mode observer for estimation of vehicle dynamic parameters. *Int. J. Vehicle Design*, 480, 190–207.
- Narendra, K.S. y Annaswamy, A. (1989). *Stable Adaptive Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Nijmeijer, H. y van der Schaft (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-VerlSpringer-Verlag Inc.
- Orlov, Y. (2005). Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 43(4), 1253–1271.
- Orlov, Y. (2009). *Discontinuous Control*. Springer, Berlin.
- Poznyak, A.S. (2008). *Advanced Mathematical Tools for Automatic Control Engineers. Vol 1: Deterministic Techniques*. Elsevier, Amsterdam.
- Raol, J., Giriya, G., y Singh, J. (2004). *Modeling and Parameter Estimation of Dynamic Systems*. Number 65 in Control engineering series. The Institution fo Engineering and Technology, London, United Kingdom.
- Sastry, S. y Bodson, M. (1989). *Adaptive Control Stability. Convergence and Robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Slotine, J.J.E. y Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

- Tyukin, I.Y., Steur, E., Nijmeijer, H., y van Leeuwen, C. (2013). Adaptive observers and parameter estimation for a class of systems nonlinear in the parameters. *Automatica*, 49(8), 2409–2423.
- Vargas, A., Moreno, J., y Zeitz, M. (2002). Order extension of nonlinear systems for observer design under reduced observability. In *IFAC 15th Triennial World Congress*. IFAC, Barcelona, Spain.
- Vargas Casillas, A. (2002). *Diseño de observadores para sistemas no lineales con condiciones reducidas de observabilidad*. Ph.D. thesis, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Villanueva, J. y Alvarez-Icaza, L. (2009). Mode wind turbine mechanical power by friction effects. *International Journal of Modeling, Identification and Control*., 6(3), 205–212.
- Zeitz, M. (1984). Observability canonical (phase-variable) form for nonlinear time-variable systems. *Int. J. Systems Science*, 15, 949–958.