



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

SINCRONIZACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALES INCIERTOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
ILEANA ANGÉLICA GRAVE AGUILAR

TUTOR PRINCIPAL  
DR. YU TANG XU, FI-UNAM  
COMITÉ TUTOR  
DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ, FI-UNAM  
DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ, FI-UNAM  
DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ IIMAS-UNAM

MÉXICO, D. F., JUNIO DE 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez FI-UNAM  
Secretario: Dr. Paul Rolando Maya Ortiz, FI-UNAM  
Vocal: Dr. Yu Tang Xu, FI-UNAM  
1er. Suplente: Luis Agustín Álvarez-Icaza Longoria, II-UNAM  
2o. Suplente: Dr. Héctor Benítez Pérez, IIMAS-UNAM

La tesis se realizó en la Facultad de Ingeniería, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Yu Tang Xu



---

## *Resumen*

El interés de esta tesis se centra en la sincronización de sistemas no lineales. A diferencia de la mayoría de los resultados existentes en la literatura, se permite una parametrización no lineal de la dinámica de los sistemas interconectados. La importancia de esta investigación radica en la dificultad que representa el análisis y diseño de algoritmos para sistemas con dicha parametrización, la cual es intrínseca a muchos sistemas mecánicos, físicos y biológicos. En comparación con los resultados existentes en la literatura, el que se presenta en este trabajo permite la sincronización de sistemas bajo una interconexión más general.

Por otro lado, se explora el efecto de *protección ante el ruido por sincronización* presentado en la literatura, con aplicación al diseño de observadores en la presencia de ruidos fuertes en la medición. En particular, se obtienen observadores con la propiedad de que la señal estimada tiene una respuesta lo más cercana posible al caso libre de ruido. Los resultados teóricos se aplican al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión perspectiva.

La metodología de análisis utilizada es una herramienta reciente en el área de control: la teoría de contracción no lineal. Los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo pueden aplicarse en problemas de control adaptable y en el diseño de observadores adaptables para sistemas con parametrización no lineal.

# *Abstract*

The interest of this thesis is the synchronization of nonlinear systems. The main difference between the existent results in the literature and the ones given in this work are that a nonlinear parameterization of the local dynamics of the interconnected systems is allowed. The importance of this research lies in the algorithm analysis and design difficulty for systems with such parameterization, which is intrinsic to many mechanical, physical and biological systems. In relation with the existent results in the literature, the results in this work provide synchronization of systems with a more general interconnection structure.

On the other hand, the effect of noise reduction by synchronization, which is given in the literature, is explored with particular application in the observer design for strong measurement noise. In particular, observers with the estimated signal closer to the noise-free case are obtained and are applied to the deep estimation problem in perspective vision systems.

The analysis methodology used in this work is a recent tool in the control area: the nonlinear contraction theory. The obtained results can be applied to adaptive control problems and in the design of adaptive-observers for systems with nonlinear parameterization.

## *Agradecimientos*

Al Doctor Yu Tang por su dedicación y compromiso a lo largo de estos años. A la Universidad Nacional Autónoma de México por las facilidades otorgadas las cuales contribuyeron al desarrollo de mis habilidades intelectuales, físicas y culturales. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca proporcionada durante el desarrollo de esta investigación.

# Índice general

Resumen	IV
Abstract	v
Agradecimientos	VI
Lista de Figuras	IX
Notación	XI
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Estado del arte . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	4
1.4. Metodología . . . . .	5
1.5. Contribuciones . . . . .	6
1.6. Organización . . . . .	7
<b>2. Preliminares</b>	<b>9</b>
2.1. Teoría de Contracción . . . . .	9
2.1.1. Generalización del análisis de contracción . . . . .	11
2.2. Sincronización de sistemas idénticos . . . . .	17
2.2.1. Sincronización concurrente . . . . .	19
<b>3. Sincronización Esclavo-Maestro</b>	<b>21</b>
3.1. El problema de Observación . . . . .	23
3.1.1. Observador de orden reducido . . . . .	24
3.2. Identificación de sistemas . . . . .	27
<b>4. Adaptación de la dinámica local como medio para la sincronización</b>	<b>31</b>

4.1. Planteamiento del problema . . . . .	33
4.2. Sincronización a través de la adaptación de la dinámica local . . . . .	34
4.2.1. Sincronización Ideal . . . . .	35
4.2.2. Sincronización Adaptable . . . . .	36
4.3. Aplicación en sistemas biológicos . . . . .	38
4.3.1. Análisis . . . . .	39
4.3.2. Simulación . . . . .	41
<b>5. Sincronización como mecanismo para la reducción de ruido</b>	<b>45</b>
5.1. Resultado analítico . . . . .	50
5.2. Reducción de ruido en observadores . . . . .	53
5.2.1. Observador de orden completo . . . . .	54
5.2.2. Observador sincronizado . . . . .	56
5.2.3. Observadores bajo mediciones ruidosas en la salida y en los parámetros . . . . .	59
5.3. Aplicación al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión . . . . .	61
5.3.1. Planteamiento del problema . . . . .	63
5.3.2. Observador de orden-reducido . . . . .	64
5.3.3. Observador de orden-completo . . . . .	67
5.3.4. Observador sincronizado . . . . .	69
5.3.5. Observadores bajo mediciones ruidosas . . . . .	71
5.3.6. Resultados de simulación . . . . .	73
<b>6. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>77</b>
<b>A. Herramientas matemáticas.</b>	<b>79</b>
A.1. Medidas inducidas de una matriz . . . . .	79
A.2. Número de condición. . . . .	80
A.3. Producto de Kronecker . . . . .	80
<b>B. Observador para el sistema de visión perspectiva con <math>\epsilon \neq 1</math>.</b>	<b>81</b>
B.1. Observador de orden reducido . . . . .	81
<b>Bibliografía</b>	<b>83</b>

# Índice de figuras

3.1. Error paramétrico $\tilde{\theta}$ para un oscilador FN modificado. . . . .	29
4.1. Sincronización de $T$ . . . . .	42
4.2. Error de sincronización $\tilde{T}_i = T_1 - T_i$ . . . . .	43
4.3. Parámetro $\theta_1$ . . . . .	43
4.4. Parámetro $\theta_2$ . . . . .	43
4.5. $\mathbf{d}_i$ . . . . .	44
5.1. Estado $v$ : Señal limpia. . . . .	48
5.2. Estado $v$ : Señal con ruido. . . . .	48
5.3. Estado $v$ : Señal sincronizada, $u_{sinc} = -K(v_i - \bar{v})$ , $K = 50$ . . . . .	49
5.4. Estado $v$ : Señal promediada, $u_{sinc} = 0$ . . . . .	49
5.5. Esquema del sistema de visión perspectiva. . . . .	63
5.6. Coordenada $x_1$ . . . . .	75
5.7. Coordenada $x_2$ . . . . .	75
5.8. Coordenada $x_3$ . . . . .	76
5.9. Error en la estimación de profundidad $x_3 - \hat{x}_3$ . . . . .	76

# Notación

$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+$	denota a los reales positivos
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	define el conjunto $\{t \in \mathbb{R}   t \geq t_0 > 0\}$
$\lambda_{min}(\mathbf{A})$	el valor propio mínimo de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{max}(\mathbf{A})$	el valor propio máximo de $\mathbf{A}$
$\lambda_i(\mathbf{A})$	el $i$ -ésimo valor propio de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inversa de $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^T$	Transpuesta de $\mathbf{A}$
$\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$	la parte simétrica de $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{x}\ _p = (\sum_{i=1}^n  \mathbf{x}_i ^p)^{1/p}$	la norma- $p$ del vector $\mathbf{x}$
$\ \mathbf{A}\ _p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\ \mathbf{A}\mathbf{x}\ _p}{\ \mathbf{x}\ _p}$	Norma inducida de una matriz $\mathbf{A}$
$\mu_p(\mathbf{A}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ \mathbf{I} + \epsilon \mathbf{A}\ _p - 1}{\epsilon}$	Medida inducida de $\mathbf{A}$
$\mathbf{I}$	una matriz identidad

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

En la última década, el fenómeno de sincronización ha sido de gran interés para la comunidad científica [1, 2]. Desde el punto de vista de sistemas, la sincronización<sup>1</sup> es la respuesta idéntica de un conjunto de sistemas interconectados en el mismo instante de tiempo. En general, bajo ciertas suposiciones de suavidad sobre la dinámica de cada sistema local, un conjunto de sistemas *idénticos* se sincroniza si la fuerza de acoplamiento excede cierto umbral [3–5].

A pesar de que mucho trabajo de investigación se ha enfocado en sistemas con dinámica idéntica, surge la necesidad de analizar el problema en que los elementos de la red son distintos, en particular cuando los parámetros de la dinámica local son diferentes.

El interés de este trabajo se centra en la sincronización de sistemas no lineales. A diferencia de la mayoría de los resultados existentes, se permitirá una parametrización no lineal de la dinámica local de los sistemas interconectados. Es importante

---

<sup>1</sup>La palabra sincronización, proviene del Griego *syn* “unido” y de *chronos* “tiempo”.

recalcar que los sistemas con la parametrización antes mencionada son intrínsecos a muchos sistemas mecánicos, físicos y biológicos [6]. Dada la dificultad que representa este tipo de sistemas por sí mismos, existen pocos resultados en la literatura. En [6], se usa una configuración esclavo-maestro para la transmisión de mensajes por sincronización de osciladores, mientras que en [7] se considera el problema de sincronización adaptable de fase de dos osciladores. Cabe recalcar que en ambos, el número de agentes se limita a dos, por lo tanto, son una aplicación directa de la teoría de control adaptable de sistemas con parametrización no lineal. Con base en los resultados anteriores, en este trabajo se buscará la sincronización de sistemas con parámetros inciertos no linealmente parametrizables, bajo una interconexión más general.

Por otro lado, en la tesis se explorará el efecto de *protección ante el ruido por sincronización* presentado en [8], con el fin de buscar su aplicación en el diseño de observadores. Se buscará obtener observadores con la propiedad de que la señal estimada tenga una respuesta lo más cercana posible al caso libre de ruido.

## 1.2. Estado del arte

Como se mencionó anteriormente, los trabajos clásicos en sincronización consideran el caso en el que los agentes en la red son idénticos y el acoplamiento entre ellos es lineal. En la comunidad de control, la sincronización de sistemas con dichas características se analiza a partir de distintas teorías, entre ellas Pasividad [9, 10], Lyapunov [11, 12] y Contracción [4, 13]. Otro trabajo interesante es el realizado por [14] en el que se caracteriza el tipo de interconexión que garantiza sincronización para sistemas disipativos.

En [15, 16], se derivaron condiciones suficientes para la sincronización de sistemas linealmente acoplados. Para un caso particular de modelos de neuro-osciladores,

una cota explícita sobre la fuerza de acoplamiento se presenta en [5, 17]. Se demostró mediante simulaciones numéricas, que si la fuerza de acoplamiento es ligeramente menor que cierto valor crítico, los osciladores no sincronizan.

De la misma manera, es posible garantizar la sincronización de sistemas mediante la sintonización en línea de la ganancia de sincronización o bien de la adaptación de parámetros. Dicho problema se conoce en la literatura como sincronización adaptable.

El problema de la sintonización de la ganancia de acoplamiento mediante un algoritmo de adaptación se ha resuelto desde distintos enfoques. En [18], se presenta una ganancia de acoplamiento adaptable para redes inciertas, en dicho algoritmo se asume que el error de sincronización es conocido, dicha suposición es un tanto restrictiva ya que implica conocer de antemano la solución de sincronización. Un problema más desafiante todavía, es el de desarrollar esquemas de adaptación que buscan la ganancia de acoplamiento sin el conocimiento de la solución de sincronización. Al respecto, varios esquemas de acoplamiento adaptable se han desarrollado en la literatura para sistemas con dinámica idéntica. Para sistemas semi-pasivos en la forma normal, se desarrolla en [19] una ley de adaptación tipo PI (Proporcional Integral) para estimar la ganancia de acoplamiento crítica. Para sistemas con dinámica local QUAD, se estudia la sincronización de osciladores caóticos con acoplamiento lineal y no lineal [20], además, el acoplamiento adaptable se propone basado en los vértices o bordes del grafo de interconexión [21].

Por otra parte, el problema de la adaptación de parámetros ha sido ampliamente analizado en la literatura para sistemas con parametrización lineal, es decir, para sistemas en los que la incertidumbre paramétrica puede escribirse como una relación lineal entre la variable medible y el vector de parámetros desconocidos. De manera paralela a la teoría de control adaptable, se logra la sincronización de sistemas interconectados mediante leyes de adaptación que tienen términos locales,

es decir, únicamente el estado del propio agente [22], de forma más general en [23], [24] se considera también la información propia de la interconexión.

Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se permitirá que la incertidumbre paramétrica tenga una parametrización no lineal. Para sistemas no linealmente parametrizables, se han reportado avances recientes en control adaptable e identificación en [6, 25–28]. En general, la comunidad de control ha estudiado el problema de parametrización no lineal para sistemas con dinámica objetivo inestable [6] y para problemas clásicos como el control adaptable directo [28] e indirecto [27]. Basado en la teoría de contracción, [28] presenta un diseño de control adaptable para una clase de sistemas no lineales con parametrización no lineal.

### 1.3. Objetivos

El objetivo general de esta tesis es estudiar la sincronización en sistemas dinámicos no lineales inciertos. Particularmente, se consideran los siguientes objetivos específicos:

- Lograr la sincronización de sistemas no idénticos mediante la adaptación de los parámetros de la dinámica local de cada agente, en particular, para sistemas no lineales con parametrización no lineal.
- Investigar el efecto de protección de ruido mediante sincronización, así como explorar este resultado en el diseño de observadores para la reducción de ruido en un conjunto de observadores sincronizados.
- Proporcionar una solución novedosa al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión perspectiva.

## 1.4. Metodología

A lo largo de la tesis, los análisis de convergencia y estabilidad se realizan aplicando una herramienta reciente en el área de control: la teoría de contracción no lineal [4, 29]. Una característica importante de esta teoría es que el análisis se centra en la propiedad de convergencia de trayectorias, en lugar del enfoque clásico de convergencia de puntos de equilibrio.

En particular, la teoría de contracción permite analizar la convergencia de trayectorias mediante la aplicación del concepto de contracción parcial [4], dicha noción conduce al concepto de 'sistema virtual'. Para la sincronización de sistemas interconectados, la solución de cada sistema en la red es una solución particular del sistema virtual. Si el sistema virtual es contrayente, entonces todas las soluciones convergen una a la otra exponencialmente. El concepto de contracción parcial permite analizar también la sincronización concurrente de sistemas no lineales<sup>2</sup>. A partir de esta idea, en [13] se presentan condiciones generales para la sincronización de sistemas con acoplamiento lineal. Una aplicación de dichas condiciones de sincronización para relojes biológicos se discute en [30].

Dicho lo anterior, es claro que la teoría de contracción es una herramienta de análisis poderosa para tratar problemas de sincronización. El diseño obtenido en [4] puede ser utilizado para sistemas en general siempre y cuando se pueda garantizar la contracción del sistema virtual en lazo cerrado. A partir de la definición de contracción parcial, el diseño de los algoritmos presentados en esta tesis se realiza aplicando el concepto de sistema virtual. La metodología general utilizada puede resumirse en los siguientes puntos:

- Definición de un sistema virtual que contiene como soluciones particulares a todos los agentes de la red.

---

<sup>2</sup>La sincronización concurrente de sistemas no lineales es la convergencia a subespacios lineales 'no triviales', es decir, espacios distintos al espacio global de sincronización.

- Análisis de la contracción del sistema virtual.
- Dada la incertidumbre en los agentes (en los estados o parámetros), se busca la forma de implementación de los algoritmos con las variables disponibles.

La metodología utilizada para dar una solución al problema de reducción de ruido en observadores está basada en los resultados de [13]. Con base en la sincronización esclavo-maestro de sistemas no lineales, como primera etapa se desarrolla un observador de orden reducido (para el caso libre de ruido) y posteriormente, uno de orden completo. Finalmente, el uso de la sincronización permite obtener una señal aún más limpia. Es decir, el enfoque que se presenta es el de diseño a bloques. Esto permite, mediante el incremento del orden del observador, obtener una señal cada vez más limpia de la variable observada.

## 1.5. Contribuciones

Con base en las soluciones propuestas en esta investigación para el problema de sincronización de sistemas no lineales inciertos, se obtuvieron los siguientes resultados:

1. A partir de la teoría de sincronización esclavo-maestro:
  - a) Se presentó una metodología para el diseño de observadores de orden reducido y completo.
  - b) Se colaboró en el desarrollo de algoritmos de adaptación para sistemas no lineales con parametrización no lineal [31, 32].
2. Se logró la sincronización de sistemas dinámicos no-idénticos con parametrización no lineal de la incertidumbre, a través de la adaptación de la dinámica local [28, 33, 34].

3. Se propuso una metodología de diseño de observadores en presencia de ruidos fuertes. Los observadores obtenidos se aplicaron al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión perspectiva [35].

## 1.6. Organización

La estructura general del resto de la tesis se describe a continuación. En el Capítulo 2 se presentan los conceptos generales para el análisis de sistemas mediante la teoría de contracción. En la sección 2.1, se resumen las definiciones básicas para el análisis de estabilidad bajo distintas medidas de la matriz Jacobiana. Por otra parte, en la sección 2.2 se introducen los resultados existentes sobre sincronización de sistemas con dinámica idéntica.

En el Capítulo 3 se plantea de forma particular la metodología utilizada en este trabajo, con base en el concepto de contracción parcial y el problema de sincronización esclavo-maestro. Como casos particulares se tratan los problemas de observación e identificación de sistemas.

El Capítulo 4 se enfoca en el problema de sincronización adaptable de sistemas no linealmente parametrizados. De forma particular, se busca la sincronización de un conjunto de seguidores interconectados a un líder con parámetros fijos. El análisis se realiza en dos etapas: la primera está basada en los resultados clásicos de sincronización de sistemas con dinámica idéntica, mientras que la segunda se basa en la robustez de sincronización ante una perturbación previamente establecida. El algoritmo de sincronización adaptable que se desarrolla se aplica a una red de sistemas que describe el proceso de Glicolisis en células de levadura.

En el Capítulo 5 se presenta una serie de observadores con el fin de proponer una solución al problema de ruido en la medición. Con base en el diseño de un observador de orden reducido, se propone un observador de orden completo y

---

uno sincronizado. Al incrementar el orden e incluir la sincronización como medio para la reducción de ruido, se obtiene una estimación más limpia de la señal de interés que la que se logra con un sólo observador. Con el fin de ilustrar el efecto de reducción de ruido, los observadores diseñados se aplican al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión 5.3.

Finalmente, las conclusiones y futuras aplicaciones de las herramientas desarrolladas en este trabajo se enlistan en el Capítulo 6.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Teoría de Contracción

En la literatura, existen diferentes métodos para analizar la estabilidad de sistemas. En general, el análisis de sistemas no lineales se realiza mediante el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio con base en los resultados clásicos de la teoría de Lyapunov [36]. Otro camino para analizar la estabilidad de sistemas es el estudio de la convergencia de trayectorias. De esta manera surgen los conceptos de sistemas convergentes [37], contrayentes [29] o la noción de estabilidad incremental [38]. La teoría de contracción permite obtener condiciones simples para garantizar la estabilidad y evita la búsqueda (nada trivial) de una función de Lyapunov.

Se dice que un sistema es contrayente *si todas las soluciones 'olvidan' sus condiciones iniciales o perturbaciones temporales y convergen una a la otra exponencialmente* [39].

A continuación, se presenta un resumen de los resultados principales de la teoría de contracción tomados de [4, 13, 29, 40], los cuales se emplean a lo largo de esta Tesis.

En general, se consideran sistemas no lineales de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial continuamente diferenciable.

A partir de la definición del desplazamiento virtual  $\delta\mathbf{x}$  (desplazamiento infinitesimal en *tiempo fijo*) de dos trayectorias vecinas es posible obtener la relación diferencial

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)\delta\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

donde la tasa de cambio de la distancia al cuadrado  $\delta\mathbf{x}^T\delta\mathbf{x}$  entre dichas trayectorias está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta\mathbf{x}^T\delta\mathbf{x}) &= 2\delta\mathbf{x}^T\delta\dot{\mathbf{x}} \\ &= 2\delta\mathbf{x}^T\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)\delta\mathbf{x} \\ &= 2\delta\mathbf{x}^T\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x} + 2\delta\mathbf{x}^T\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x} \\ &= \leq 2\lambda_{max}(\bar{\mathbf{J}})\delta\mathbf{x}^T\delta\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

para

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right). \quad (2.4)$$

La solución de la ecuación (2.3) es de la forma

$$\|\delta\mathbf{x}\|_2 \leq \|\delta\mathbf{x}_0\|_2 \exp\left(\int_0^t \lambda_{max}(\bar{\mathbf{J}})d\tau\right), \quad (2.5)$$

por lo tanto, si  $\lambda_{max}(\bar{\mathbf{J}}) < 0$ , se dice que el sistema es contrayente y existe convergencia exponencial de dos trayectorias cualquiera. Además, si  $\lambda_{max}(\bar{\mathbf{J}}) \leq 0$  se dice

que el sistema es semi-contrayente y las trayectorias están acotadas.

### 2.1.1. Generalización del análisis de contracción

Es posible generalizar el resultado de la sección anterior mediante una transformación de coordenadas suave

$$\delta \mathbf{z} = \Theta(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{x}, \quad (2.6)$$

para  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  una matriz cuadrada invertible. Por lo tanto, en términos de (2.2), se obtiene la relación diferencial

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{z}} &= \dot{\Theta}(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{x} + \Theta(\mathbf{x}, t) \delta \dot{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \left( \dot{\Theta}(\mathbf{x}, t) + \Theta(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \Theta(\mathbf{x}, t)^{-1}. \quad (2.8)$$

La tasa de cambio de la distancia entre trayectorias

$$\frac{d}{dt} \|\delta \mathbf{z}\|_p \leq \mu_p(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) \|\delta \mathbf{z}\|_p \quad (2.9)$$

permite estudiar la convergencia del sistema (2.1) mediante la introducción de la medida inducida<sup>1</sup>  $\mu_p$  de la matriz Jacobiana generalizada (2.8) para  $p = 1, 2, \infty$ . Si  $\mu_p(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) < 0$  ( $\mu_p(\mathbf{F}) \leq 0$ ), el sistema es (semi)contrayente.

El resultado anterior permite establecer, de manera general, las condiciones suficientes que un sistema debe cumplir para ser contrayente.

<sup>1</sup>En el Apéndice A.1 se presenta la definición general de medida de la matriz y las definiciones de las medidas convencionales (relacionadas con las normas 1, 2,  $\infty$ ).

**Teorema 2.1** (Contracción). *Para el sistema (2.1), si existe una matriz cuadrada invertible  $\Theta = \Theta(\mathbf{x}, t)$ , donde  $\Theta$  es una transformación de coordenadas suave del desplazamiento virtual (2.6), tal que  $\forall \mathbf{x}, \forall t \geq t_0$*

$$\mu_p(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) \leq -\beta, \quad (2.10)$$

para una constante  $\beta > 0$  y una matriz  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  en la forma (2.8), entonces todas las trayectorias del sistema convergen global y exponencialmente rápido a una sola trayectoria sin importar las condiciones iniciales, con una tasa de convergencia dada por  $\beta$ .

**Ejemplo 2.1.** A continuación se presenta un ejemplo, tomado de [40], en el que el uso de la matriz  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  simplifica el análisis de contracción.

Considere el sistema

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= c(y_1 + y_2 - \frac{1}{3}y_1^3 + I) + kN(z - y_1) \\ \dot{y}_2 &= -\frac{1}{c}(y_1 - a + by_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

con constantes  $b$  y  $c$  positivas. Se buscan las condiciones bajo las cuales el sistema es contrayente, es decir, que exista convergencia exponencial de sus trayectorias.

Dicho sistema tiene como matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} c(1 - y_1)^2 - kN & c \\ 1/c & -b/c \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Para fines de comparación, se presentarán las condiciones que el sistema debe cumplir bajo la definición de una matriz  $\Theta(\mathbf{x}, t)$  específica o una identidad.

- $\Theta(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{I}$ . Aplicando la transformación de coordenadas

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

se obtiene la matriz Jacobiana generalizada

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} c(1 - y_1)^2 - kN & 1 \\ -1 & -b/c \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

cuya parte simétrica está dada por

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} c(1 - y_1)^2 - kN & 0 \\ 0 & -b/c \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Si los elementos de la diagonal son negativos, la matriz es negativa definida y el sistema es contrayente. Para garantizar lo anterior, se debe cumplir la condición

$$k > \frac{c}{N}(1 - y_1)^2. \quad (2.16)$$

- $\Theta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{I}$ . Se considera la matriz

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} c(1 - y_1)^2 - kN & \frac{1}{2}(c + 1/c) \\ \frac{1}{2}(c + 1/c) & -b/c \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

la cual es la parte simétrica de (2.12). Para garantizar la negatividad de dicha matriz, además de cumplir con la condición (2.16), se debe satisfacer

$$k < \frac{c}{N} \left( \frac{1}{4} \left( c + \frac{1}{c} \right)^2 + b(1 - y_1)^2 \right). \quad (2.18)$$

En los dos casos analizados anteriormente, se concluye la contracción del sistema. Sin embargo, el uso de la matriz (2.12) hace más sencillo el análisis.

Una condición suficiente para garantizar que un sistema es contrayente, es que la matriz Jacobiana generalizada (2.8) sea negativa definida. Para sistemas retroalimentados, se establece el siguiente resultado en [4].

**Teorema 2.2** (Contracción de sistemas retroalimentados). *La parte simétrica de la matriz Jacobiana generalizada (2.8)*

$$\bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \bar{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

es uniformemente negativa definida si

1.  $\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2$  son uniformemente negativas definidas
2.  $\bar{\mathbf{F}}_2 < \mathbf{G}^T \bar{\mathbf{F}}_1^{-1} \mathbf{G}$

Más allá del concepto estricto de contracción, es posible definir una versión relajada de contracción que permite analizar la convergencia promedio de trayectorias y concluir convergencia exponencial de las soluciones bajo una métrica identidad, a partir de la integral de la matriz Jacobiana. Dicho resultado se presenta en [41] resume en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.3** (Contracción promedio). *Dado el sistema (2.1), se considera que la matriz simétrica*

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T), \quad (2.20)$$

es semi-positiva definida para  $\mathbf{F}$  una matriz en la forma (2.8). Si  $\forall \mathbf{x}, \forall t \geq t_0$  existen  $T > 0$  y una constante  $\beta > 0$ , tales que

$$\int_t^{t+T} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau \leq -\beta \mathbf{I}, \quad (2.21)$$

*existe convergencia exponencial de las trayectorias del sistema.*

*Demostración.* La prueba se basa en demostrar que  $\delta\mathbf{z}(t) = 0$  es una trayectoria exponencialmente estable del sistema

$$\delta\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(t)\delta\mathbf{z}(t). \quad (2.22)$$

Gracias a la semi-positividad de la matriz  $\bar{\mathbf{F}}$ , es posible concluir que  $\delta\mathbf{z}$  y  $\delta\dot{\mathbf{z}}$  están acotadas  $\forall t \geq t_0$ , y por lo tanto dada (2.22) la matriz  $\mathbf{F}$  también lo está uniformemente. Aplicando el Teorema 2 de [42] al sistema anterior, para  $\alpha = 1$  y  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , se obtiene la condición (2.21).  $\square$

Con el fin de analizar la convergencia entre distintos sistemas, se utiliza el concepto de contracción parcial [4] el cual está basado en la definición de un sistema *virtual* o *auxiliar*. Dicho concepto, que es de gran utilidad ya que es una extensión importante de la teoría de contracción, se define a continuación.

**Teorema 2.4** (Contracción parcial [4]). *Considere un sistema lineal suave de la forma  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$  y asuma que el sistema auxiliar  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)$  es contrayente con respecto a  $\mathbf{y}$ . Si una solución particular  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$  del sistema auxiliar  $\mathbf{y}$  verifica una propiedad de suavidad específica<sup>2</sup>, entonces todas las trayectorias del sistema original  $\mathbf{x}$  verifican esta propiedad exponencialmente.*

**Ejemplo 2.2.** A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar el concepto de contracción parcial y las ventajas que presenta en el análisis de la convergencia de sistemas.

Considere el sistema

$$\dot{x} = -(x^2 + 1)x \quad (2.23)$$

---

<sup>2</sup>Dicha propiedad puede ser convergencia a una variedad, a una trayectoria particular o una relación entre variables de estado.

y el sistema virtual

$$\dot{x}_v = -(x^2 + 1)x_v, \quad (2.24)$$

el cual es contrayente ya que

$$\frac{\partial \dot{x}_v}{\partial x_v} = -(x^2 + 1) < 0. \quad (2.25)$$

El sistema virtual tiene como soluciones particulares a  $x_v = x$  y  $x_v = 0$ . Por lo tanto, gracias a la contracción del sistema virtual (2.24) y a la definición de contracción parcial, es posible concluir que el sistema (2.23) es exponencialmente estable y todas sus soluciones convergen al punto de equilibrio  $x = 0$ .

Otro resultado relevante en la teoría de Contracción es el de convergencia exponencial a un subespacio lineal invariante. En particular, para subespacios afines  $\mathbf{m}(t) + \mathcal{M}$ , dicho resultado debe ser aplicado a  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathcal{M}$ .<sup>3</sup>

**Teorema 2.5** (Contracción a un subespacio [13]). *Se considera un subespacio lineal invariante  $\mathcal{M}$  de dimensión  $p$  y una matriz  $\mathbf{V}$  de proyección ortonormal asociada de  $(n-p) \times n$ , donde las filas en  $\mathbf{V}$  forman una base de  $\mathcal{M}^\perp$ . Si  $\Theta \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{V}^T \Theta^{-1}$  es uniformemente negativa definida para  $\Theta$  una matriz invertible constante, todas las trayectorias del sistema (2.1) convergen a  $\mathcal{M}$ .*

Cuando el sistema nominal está perturbado, la distancia entre las trayectorias del sistema contrayente perturbado y el no perturbado tiene una cota dada en el siguiente Lema [43].

**Lema 2.1.** *Asuma que el sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  es contrayente con una matriz de transformación  $\Theta$  y tasa de contracción  $\lambda$ , y considere el sistema perturbado  $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}', t) + \mathbf{d}(\mathbf{x}', t)$  donde  $\mathbf{d}(\mathbf{x}', t)$  está acotado  $\exists d \geq 0, \forall \mathbf{x}', \forall t \geq t_0 \|\mathbf{d}(\mathbf{x}', t)\|_p \leq d$ .*

---

<sup>3</sup>Ver el Comentario 2.2 de [13].

Entonces, cualquier trayectoria del sistema perturbado satisface  $\|\mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t)\|_p \leq \chi e^{-\lambda t} \|\mathbf{x}'(0) - \mathbf{x}(0)\|_p + \frac{d\chi}{\lambda}$ ,  $\chi$  es una cota por arriba en el número de condición de  $\Theta$ .

## 2.2. Sincronización de sistemas idénticos

En general se considera  $N$  sistemas en la forma (2.1)

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t), \quad (2.26)$$

más un término de interconexión

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{K}_{ji}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (2.27)$$

donde  $\mathcal{N}_i$  es el conjunto de vecinos del sistema  $i$  y  $\mathbf{K}_{ji} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz positiva definida que representa la ganancia de acoplamiento entre los mismos. Es decir, cada sistema o agente tiene la dinámica

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{K}_{ji}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (2.28)$$

para  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq t_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Se dice que existe sincronización de los estados entre los agentes de la red si se cumple

$$\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)\|_p \rightarrow 0 \quad \forall i, j = \{1, \dots, N\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

En otras palabras, existe convergencia de trayectorias de todos los agentes en la red a una solución común.

Desde el punto de vista de la teoría de Contracción, es posible analizar la convergencia de trayectorias entre un conjunto de agentes interconectados gracias al concepto de Contracción parcial presentado en el Teorema 2.4, tal como se ejemplifica a continuación.

**Ejemplo 2.3.** Considere tres sistemas en la forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2), \\ \dot{\mathbf{x}}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_3, t) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3),\end{aligned}$$

a continuación, se buscan las condiciones de sincronización en  $\mathbf{K}$  para que exista convergencia exponencial de todos los elementos de la red.

Como primer paso, se define un sistema virtual

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}(\mathbf{x}_v, t) + \sum_{j=1}^N \mathbf{K}\mathbf{x}_j - N\mathbf{K}\mathbf{x}_v, \quad (2.30)$$

que contiene como soluciones particulares a todos los sistemas interconectados.

Para analizar su propiedad de convergencia, se obtiene la matriz Jacobiana

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_v, t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_v} - N\mathbf{K}, \quad (2.31)$$

por lo tanto si

$$\mu_p(\mathbf{J}(\mathbf{x}_v, t)) = \mu_p\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_v} - N\mathbf{K}\right) \leq -\beta, \quad (2.32)$$

para  $\beta > 0$ , el sistema virtual es contrayente. La propiedad de contracción del sistema virtual y el hecho de que tiene como solución particular a todos los elementos de la red, permite concluir que existe convergencia de todas las soluciones a una

sola, es decir, existe sincronización exponencial bajo una matriz  $\mathbf{K}$  suficientemente grande.

La generalización del ejemplo anterior para  $N$  sistemas interconectados da la posibilidad de establecer el siguiente Teorema.

**Teorema 2.6** (Acoplamiento de estados [40]). *Se obtiene sincronización exponencial para sistemas en la forma (2.28), en un acoplamiento todo a todo, i.e.,  $\mathcal{N}_i = \{1, \dots, N\}$ , con  $\mathbf{K}$  una matriz positiva definida, si dada (2.8) se cumplen las siguientes condiciones:*

1. Existe  $\delta \in \mathbb{R}$ , tal que  $\forall \mathbf{x}$  y  $\forall t \geq t_0$

$$\mu_p(\bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}}) := \mu_p(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) \leq \delta, \quad (2.33)$$

2.  $\kappa := \mu_p(N\mathbf{K}) > \delta$ , para  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ .

*Demostración.* El sistema virtual para sistemas en la forma (2.28) bajo un acoplamiento todo a todo es idéntico a (2.31), por lo tanto, bajo las condición 2 de este Teorema se cumple (2.32) □

### 2.2.1. Sincronización concurrente

De forma más general es posible establecer, con base en la teoría de contracción, la sincronización de sistemas bajo distintas matrices de interconexión, además de garantizar la sincronización en subgrupos de sistemas en una misma red. Dicho resultado se resume en el siguiente Teorema.

**Teorema 2.7** (Acoplamiento de estados [13]). *Dada la matriz*

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_1, t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_n, t) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

para sistemas en la forma (2.28), se obtiene sincronización exponencial si  $\forall \mathbf{x}$  y  $\forall t \geq t_0$

1. Existe  $\delta \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\mu_p(\bar{\mathbf{J}}_{\mathbf{x}}) := \mu_p(\mathbf{\Theta} \mathbf{V} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) \mathbf{V}^T \mathbf{\Theta}^{-1}) \leq \delta, \quad (2.35)$$

2. Dada  $\kappa := \mu_p(\mathbf{V} \mathbf{L} \mathbf{V}^T)$ , para  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ , se cumple la condición  $\kappa > \delta$ ,

donde  $\mathbf{L}$  es la matriz Laplaciana<sup>4</sup>  $\mathbf{V}$  es una matriz de proyección y  $\mathbf{\Theta}$  es una matriz de transformación constante, ambas en  $\mathcal{M}^\perp$ .

*Observación 2.1.* Al aplicar el Teorema 2.7 con  $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ , se recupera el resultado de [4], que establece la sincronización de sistemas bajo una interconexión general con base en el concepto de contracción parcial.

*Observación 2.2.* Garantizar la condición de contracción para un número considerable de sistemas bajo una interconexión general puede llegar a ser complejo debido a la dimensión del subespacio de sincronización. Sin embargo, es posible trabajar con una interconexión todo-a-todo en el desarrollo del algoritmo y aplicar el Teorema 2.7 con el fin de realizar una generalización.

---

<sup>4</sup> $\mathbf{L}_{ii} = \sum_{j \neq i} \mathbf{K}_{ij}$ ,  $\mathbf{L}_{ij} = -\mathbf{K}_{ij}$ , para  $j \neq i$ .

# Capítulo 3

## Sincronización Esclavo-Maestro

Como se mencionó en la Sección 2.2, el concepto de contracción parcial proporciona una herramienta simple para analizar la sincronización de sistemas, bajo la definición de un sistema virtual. Dicho sistema, debe contener como soluciones particulares a cada uno de los elementos en la red, además de ser contrayente, para garantizar la convergencia a una trayectoria común.

En el siguiente ejemplo, se ilustra la aplicación del concepto de sistema virtual en la sincronización esclavo-maestro de un par de sistemas.

**Ejemplo 3.1.** Dado un sistema maestro cuya dinámica es de la forma

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_1 = \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_1, t), \quad (3.1)$$

se busca que cualquier solución del sistema esclavo

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_2 = \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_2, t) - K(\boldsymbol{\vartheta}_2 - \boldsymbol{\vartheta}_1). \quad (3.2)$$

se sincronice con la del maestro. Es decir, dada cualquier condición inicial, las soluciones del esclavo converjan a la del maestro,  $\boldsymbol{\vartheta}_2(t) \rightarrow \boldsymbol{\vartheta}_1(t)$ .

A partir de los sistemas anteriores, es posible definir un sistema virtual

$$\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_v = \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_v, t) - K\boldsymbol{\vartheta}_v + K\boldsymbol{\vartheta}_1 \quad (3.3)$$

el cual tiene como soluciones particulares a la solución de (3.1) y la (3.2), es decir  $\boldsymbol{\vartheta}_v(t) = \boldsymbol{\vartheta}_1(t)$  y  $\boldsymbol{\vartheta}_v(t) = \boldsymbol{\vartheta}_2(t)$ . Por lo tanto, si dada la matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_v, t)}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_v} - K\mathbf{I}$$

con medida inducida

$$\begin{aligned} \mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_v, t)}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_v} - K\mathbf{I} \right) &\leq \mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\vartheta}_v, t)}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_v} \right) + K\mu_p(-\mathbf{I}) \\ &\leq \alpha - K \end{aligned} \quad (3.4)$$

se garantiza la siguiente condición

$$K > \alpha, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \boldsymbol{\vartheta}_v, \quad (3.5)$$

el sistema virtual (3.3) es contrayente y todas sus soluciones convergen a una misma.

La mayoría de los problemas básicos de control, tales como regulación, seguimiento, observación, control adaptable e identificación pueden plantearse como casos particulares del problema de sincronización de sistemas, a partir de la definición de un modelo de referencia [44, 45]. En otras palabras, es posible proponer una solución a dichos problemas con base en la sincronización del sistema de interés al modelo de referencia, mediante la definición de un sistema virtual.

A continuación, con base en la sincronización esclavo-maestro de dos sistemas dinámicos, se propone una solución al problema de diseño de observadores para

sistemas no lineales, posteriormente, con este concepto se establecen las bases para la aplicación al problema de identificación en sistemas no lineales.

### 3.1. El problema de Observación

El problema de observación es de suma importancia en el área de control y consiste en, dado un sistema de interés con estados no medibles, encontrar un sistema llamado observador que permita reconstruir los estados internos del sistema original a partir de la medición de la entrada y salidas disponibles.

En la literatura, existen distintas técnicas para el desarrollo de observadores desde la perspectiva de la clase de sistemas a observar. Los sistemas lineales han sido ampliamente estudiados [46], mientras que las técnicas convencionales para la observación de sistemas no-lineales, como el observador de alta-ganancia [47], implican la transformación del sistema y están limitadas a sistemas con ciertas características particulares.

En esta parte de la investigación se desarrolla inicialmente un observador de orden reducido aplicando una metodología de diseño 'top-down' [48]. Como primera etapa de esta metodología se obtiene un observador simple, mediante la introducción de variables intermedias que pueden ser no medibles. El análisis, mediante la sincronización de sistemas, permite garantizar convergencia exponencial de los estados observados. Las variables intermedias son sustituidas por las salidas medibles del sistema no lineal para obtener el diseño final del observador. Con base en la teoría de inmersión e invarianza [25, 49], es posible obtener un observador similar con propiedades de convergencia asintótica, sin embargo, el enfoque presentado en este trabajo es más transparente y garantiza convergencia exponencial de los estados.

### 3.1.1. Observador de orden reducido

Se considera que el sistema a observar tiene la forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (3.6a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (3.6b)$$

donde  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  es la parte medible y  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq m$  la parte no medible del vector de estados  $\mathbf{x}$ .

En general, un observador consiste en una copia del sistema más un término de corrección. Siguiendo esta idea, es posible proponer el siguiente observador de orden reducido para el sistema (3.6)

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{K}(\mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)) \quad (3.7)$$

donde  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es una matriz de ganancia positiva definida y la función vectorial  $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$  representa un grado de libertad en el diseño. Para recuperar el estado  $\mathbf{z}$ , el sistema (3.7) debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. El observador tiene como solución particular a (3.6b).
2. Es contrayente, es decir  $\forall t \geq t_0$ , se satisface la desigualdad

$$\mathbf{J} = \mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} \right) \leq \beta, \beta > 0, \forall \mathbf{y}, \forall \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.8)$$

3. La función  $\mathbf{h}(\cdot)$  es implementable a través de la salida  $\mathbf{y}$ .

El Teorema que se presenta a continuación, está basado en el conjunto de condiciones enlistadas anteriormente.

**Teorema 3.1.** *Dado el sistema (3.6) con dinámica en la parte medible en la forma*

$$\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t), \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{p}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tal que  $\frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\partial \mathbf{z}} \neq 0$ . Se considera que la salida  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  de dicho sistema se puede representar mediante un mapeo  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{y}, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$  con derivada respecto al tiempo

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t}, \quad (3.10)$$

donde

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{p}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t). \quad (3.11)$$

El observador

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{K} \left( \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t} \right) \quad (3.12)$$

con  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  una matriz de ganancia positiva definida, recupera el estado no medible  $\mathbf{z}$  mediante la transformación de coordenadas

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\zeta}. \quad (3.13)$$

Si  $\forall \mathbf{y}, \forall \hat{\mathbf{z}}, \forall t \geq t_0$

$$\mu_p \left( \mathbf{K} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} \right) > \mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{z}}} \right), \quad (3.14)$$

por lo tanto, el error de estimación  $\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)$  tiende a cero exponencialmente.

*Demostración.* Considere como sistema maestro a (3.6b), con dinámica en la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) - \mathbf{K}(\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) - \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)) \quad (3.15)$$

mientras que el esclavo (3.7) está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{K}(\mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)). \quad (3.16)$$

Es posible definir un sistema virtual

$$\dot{\mathbf{z}}_v = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \mathbf{z}_v, t) - \mathbf{K}(\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_v, t) - \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)), \quad (3.17)$$

el cual tiene como soluciones particulares  $\mathbf{z}_v(t) = \mathbf{z}(t)$  y  $\mathbf{z}_v(t) = \hat{\mathbf{z}}(t)$ <sup>1</sup>. Gracias a la aplicación del Teorema 2.1, bajo la condición (3.14), dicho sistema es contrayente. Por lo tanto, el sistema olvida sus condiciones iniciales y existe sincronización exponencial de  $\hat{\mathbf{z}}(t)$  a  $\mathbf{z}(t)$ .

Con el fin de obtener la dinámica de implementación (3.12), se considera que la salida  $\mathbf{y}$  se puede representar mediante la función  $\zeta(\mathbf{y}, t) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^p$  con derivada respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \dot{\mathbf{y}} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{p}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$= \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Por lo tanto, para obtener la dinámica de implementación (3.12), es posible escribir la dinámica (3.7) en la forma

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) - \mathbf{K}\mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t) + \mathbf{K}\dot{\zeta} - \mathbf{K}\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}}\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{K}\frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (3.20)$$

---

<sup>1</sup>En el caso de la sincronización esclavo-maestro, el sistema virtual es por sí mismo el sistema esclavo.

y expresar, en términos de la ecuación anterior y de (3.10), la derivada respecto al tiempo de la variable observada (3.13) .  $\square$

Para satisfacer la condición (3.14), se debe buscar una función  $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{z}}, t)$  cuya derivada parcial con respecto a  $\hat{\mathbf{z}}$  sea positiva definida. Lo anterior, permite establecer el siguiente Corolario.

**Corolario 3.1.** *Si se considera el observador (3.12)-(3.13) con función de acoplamiento*

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \alpha(\mathbf{y}, t)\mathbf{z} \quad (3.21)$$

para  $\alpha(\mathbf{y}, t) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  y  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  una matriz suficientemente grande, se satisface la condición (3.14) y por lo tanto el error de estimación  $\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)$  tiende a cero exponencialmente.

Los resultados obtenidos en esta sección son la base para el análisis del problema de reducción de ruido en observadores, el cual se aborda en el Capítulo 5 y tienen una aplicación directa al problema de visión perspectiva.

*Observación 3.1.* En relación con los observadores desarrollados con la metodología de inmersión e invarianza [50] y [49], el diseño presentado en este trabajo tiene la propiedad de convergencia *exponencial*, en lugar de convergencia *asintótica*, con un procedimiento de diseño más simple.

## 3.2. Identificación de sistemas

El problema de identificación para sistemas con parametrización no lineal desde la perspectiva de análisis de trayectorias, puede formularse de manera similar al problema de observación. Con el fin de ilustrar esta idea, a continuación, se presenta

un ejemplo *simple* de identificación para una forma modificada del oscilador FN [51–53], con un parámetro no linealmente parametrizable, en el que se consideran todos los estados medibles.

**Ejemplo 3.2.** Dado el sistema

$$\dot{\nu} = 3\nu - \nu^3 - \nu^7 + 2 - w + I, \quad (3.22a)$$

$$\dot{w} = c[\alpha(1 + \tanh(\theta^*\nu)) - w], \quad (3.22b)$$

donde  $c$  y  $\alpha$  son constantes positivas, se busca identificar el parámetro  $\theta^*$ .

Con base en la metodología propuesta anteriormente, se define un sistema maestro

$$\dot{\theta}^* = -K \frac{\partial \zeta}{\partial w} c \alpha (\tanh(\theta^*\nu) - \tanh(\theta^*\nu)), \quad (3.23)$$

para  $\zeta = \zeta(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = [\nu, w]^T$ , y un sistema esclavo

$$\dot{\hat{\theta}} = -K \frac{\partial \zeta}{\partial w} c \alpha (\tanh(\hat{\theta}\nu) - \tanh(\theta^*\nu)). \quad (3.24)$$

Los cuales permiten establecer el sistema virtual

$$\dot{\theta} = -K \frac{\partial \zeta}{\partial w} c \alpha (\tanh(\theta\nu) - \tanh(\theta^*\nu)), \quad (3.25)$$

el cual tiene como soluciones particulares  $\theta = \theta^*$  y  $\theta = \hat{\theta}$ . Para analizar la contracción del sistema se obtiene

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = -K \frac{\partial \zeta}{\partial w} c \alpha \operatorname{sech}^2(\theta\nu)\nu. \quad (3.26)$$

Dada la función

$$\zeta = \nu w, \quad (3.27)$$

el sistema es contrayente, ya que

$$\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} = -Kc\alpha \operatorname{sech}^2(\theta\nu)\nu^2 < 0. \quad (3.28)$$

A partir de la transformación de coordenadas

$$\hat{\theta} = \bar{\theta} + K\zeta(\mathbf{x}), \quad (3.29)$$

es posible implementar el algoritmo de identificación (3.24) como

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\theta}} = & -K \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} (3\nu - \nu^3 - \nu^7 + 2 - w + I) \\ & -K \frac{\partial \zeta}{\partial w} (c\alpha(1 - \tanh(\hat{\theta}\nu) - w)). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En la Figura 3.1 se observa que, gracias a la propiedad de contracción establecida para el algoritmo de identificación (3.30), el error paramétrico  $\tilde{\theta}$  entre el parámetro estimado  $\hat{\theta}$  y el valor real  $\theta^* = 4$  tiende a cero. El oscilador (3.22) se implementó con parámetros lineales  $c = .04$ ,  $\alpha = 12$ , corriente de excitación externa  $I = 0.8$ , condiciones iniciales  $v(0) = 1$ ,  $w(0) = 0$  y ganancia de identificación  $K = 10$ .

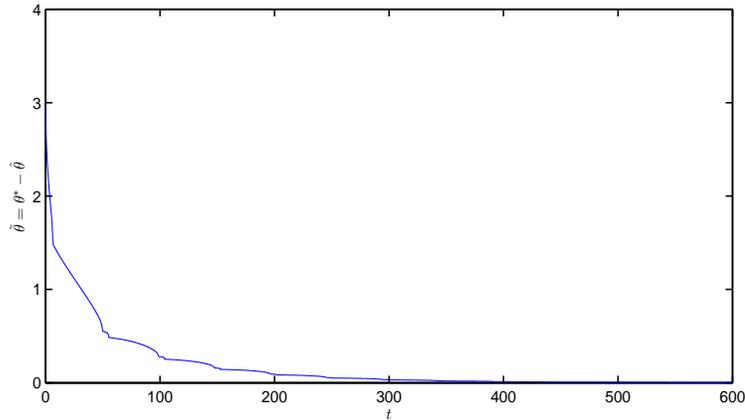


FIGURA 3.1: *Error paramétrico  $\tilde{\theta}$  para un oscilador FN modificado.*

Del ejemplo anterior se observa que de forma análoga a (3.6), es posible considerar como maestro al sistema deseado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^*, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^*, t) \quad (3.31a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}^* = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^*, t) = 0, \quad (3.31b)$$

donde el vector de estados  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  está disponible y  $\boldsymbol{\theta}^* \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq n$ , es el vector de parámetros constantes que se desea estimar.

Mientras que, se considera como esclavo a la dinámica de identificación (no implementable)

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\mathbf{K} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}} \left( \mathbf{p}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) - \mathbf{p}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^*, t) \right) \quad (3.32)$$

la cual tiene como solución particular  $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) = \boldsymbol{\theta}^*(t)$ . Por lo tanto, es posible aplicar directamente el Teorema 3.1 y posteriormente, implementar el algoritmo de identificación con la dinámica

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\mathbf{K} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{p}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \quad (3.33)$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \bar{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{K} \zeta. \quad (3.34)$$

*Observación 3.2.* De forma similar y con base en esta metodología, se desarrollaron algoritmos generales de control adaptable e identificación para sistemas no lineales con parametrización no lineal en [28, 31, 32, 34, 41].

## Capítulo 4

# Adaptación de la dinámica local como medio para la sincronización

De manera general, los trabajos clásicos sobre sincronización analizan el caso en que todos los agentes de la red son idénticos [4, 9–13]. Por otra parte, el problema de sincronización adaptable se ha estudiado en la literatura para sistemas no lineales con parametrización lineal desde diferentes enfoques: el primero, está basado en el control adaptable tradicional, mientras que el segundo se fundamenta en la hipótesis de que existe un mecanismo de adaptación propio de cada sistema.

El primer enfoque, de forma paralela a la teoría de control adaptable, considera que existe incertidumbre paramétrica en la dinámica local de cada agente. Siguiendo esta idea, [22] presenta una ley de adaptación tipo gradiente que contiene únicamente términos locales y cuyo diseño está basado en la teoría de contracción. De manera más general, [23] garantiza la sincronización de sistemas Euler-Lagrange con parámetros desconocidos mediante una ley de adaptación que incluye el error de sincronización de los vecinos.

Por otro lado, desde un punto de vista menos conservador e inspirados por la naturaleza, existen trabajos relevantes en la literatura que sugieren la presencia de

diferentes mecanismos para la sincronización de sistemas. Por ejemplo, las bacterias presentan el mecanismo de quorum-sensing [40] donde una señal del ambiente se usa como mecanismo de acoplamiento. En [54] se presenta un concepto interesante para sistemas desacoplados: la sincronización inducida por un estímulo común.

Otra hipótesis interesante sobre la sincronización adaptable, es la que se introduce en [7], la cual establece que la sincronización se obtiene por la 'adaptación interna' de cultivos neuronales, en particular, se presentan tres posibles mecanismos o esquemas de adaptación para la sincronización de dos osciladores. En la misma línea, dos trabajos interesantes [24], [55] introducen el concepto de una red con un elemento en particular, un líder con parámetros fijos. Para sistemas biológicos, este líder impone cierto comportamiento al resto de los elementos en la red. Este último enfoque está relacionado directamente con el problema de identificación de parámetros en la teoría de control adaptable, bajo la suposición de que es posible cierta adaptación física de los parámetros desconocidos.

El interés de este capítulo se centra en desarrollar un mecanismo de adaptación que permita la sincronización de un conjunto de sistemas biológicos no lineales, en el contexto inherente al problema de sistemas no linealmente parametrizados [6, 25, 26, 28] mediante la aplicación de la teoría de contracción [29]. Para lograr dicho objetivo, se define una red con un conjunto de seguidores y un líder con parámetros fijos.

Como aplicación se considera la sincronización de osciladores biológicos [30], en particular un fenómeno que se ha observado experimentalmente, la sincronización de la concentración de ATP (Adenosín Trifosfato) en células de levadura [56].

## 4.1. Planteamiento del problema

A continuación, se considera el problema de sincronización de un conjunto de seguidores a un líder mediante el desarrollo de un algoritmo de adaptación que permite la sintonización en línea de los parámetros inciertos de los seguidores hacia el líder. Cada sistema se considera con dinámica local en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \quad (4.1)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial suave y  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{\theta_m}$  es el vector de parámetros. Como se especificó anteriormente, se supone la existencia de dos clases de elementos en la red: un *líder* con vector de parámetros fijo  $\boldsymbol{\theta}_l \in \mathbb{R}^{\theta_m}$

$$\dot{\mathbf{x}}_l = \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l) + \mathbf{u}_l, \quad (4.2)$$

y un conjunto de *seguidores*

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}_k) + \mathbf{u}_k, \quad k = \{1, \dots, N\}, \quad (4.3)$$

con vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_k$ . La interconexión entre los elementos de la red se representa por

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_s \mathbf{x}_j - N \mathbf{K}_s \mathbf{x}_i, \quad i = \{1, \dots, k+1\}, \quad (4.4)$$

define una conexión todo a todo entre los  $N + 1$  seguidores de la red, para  $\mathbf{K}_s \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matriz positiva definida.

El objetivo final de este trabajo es desarrollar un algoritmo de adaptación

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_k = \boldsymbol{\Theta}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_k) \quad (4.5)$$

para cada seguidor (4.3) tal que se obtenga sincronización de los  $N + 1$  sistemas interconectados (incluido el líder). Bajo las siguientes suposiciones:

**Suposición 4.1.** El vector de parámetros  $\boldsymbol{\theta}_l$  se asume dentro de un intervalo conocido  $\underline{\boldsymbol{\theta}}_l \leq \boldsymbol{\theta}_l \leq \overline{\boldsymbol{\theta}}_l$ .

**Suposición 4.2.** La ganancia de acoplamiento  $\mathbf{K}_s$  se considera débil, es decir, aquella ganancia mínima para garantizar la sincronización de sistemas idénticos.

*Observación 4.1.* El mecanismo de adaptación de cada seguidor debe ser una función de variables medibles (salidas del sistema) y no puede depender de los parámetros del líder.

*Observación 4.2.* En particular, las ganancias de acoplamiento se pueden obtener si se toma la cota inferior del vector de parámetros y se garantiza la sincronización ideal de dicho sistema.

## 4.2. Sincronización a través de la adaptación de la dinámica local

El desarrollo del mecanismo de sincronización se realiza reescribiendo la dinámica de los elementos en la red (4.2), (4.3) como

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l) + \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_s \mathbf{x}_j - N\mathbf{K}_s \mathbf{x}_i + \mathbf{d}_i, \quad i = \{1, \dots, k+1\}, \quad (4.6)$$

donde

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l). \quad (4.7)$$

Esta definición permite realizar el análisis en dos etapas: en la primera se considera el caso *ideal* con parámetros idénticos y en la segunda el caso *adaptable* con los parámetros inciertos.

### 4.2.1. Sincronización Ideal

A continuación se presenta un Teorema que establece condiciones suficientes para la sincronización de los sistemas en la red, dada  $\mathbf{d}_i = 0$ .

**Teorema 4.3.** *El conjunto de agentes (4.2), (4.6) se sincronizará si  $\forall \mathbf{x}_i$  y  $\forall t \geq t_0$*

1. Existe  $\delta_1 \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\mu \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \leq \delta_1, \quad (4.8)$$

2. Dada  $\kappa_1 := \mu(N\mathbf{K}_s)$ , se cumple

$$\kappa_1 > \delta_1. \quad (4.9)$$

*Demostración.* Se considera como sistema virtual para (4.2), (4.6) con  $\mathbf{d}_i = 0$  a

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}(\mathbf{x}_v, \boldsymbol{\theta}_l) - \mathbf{K}_l(\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_l) + \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_s \mathbf{x}_j - N\mathbf{K}_s \mathbf{x}_v, \quad (4.10)$$

el cual tiene como soluciones particulares  $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{x}_l(t)$  y  $\mathbf{x}_v(t) = \mathbf{x}_k(t)$ . La matriz Jacobiana del sistema anterior está dada por

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_v, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_v} - N\mathbf{K}_s \quad (4.11)$$

bajo la condición (4.9), el sistema (4.10) es contrayente, es decir  $\|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_l(t)\|_p \rightarrow 0$ . □

### 4.2.2. Sincronización Adaptable

A continuación, se presenta el mecanismo de adaptación para cada seguidor en la red, el cual se considera como

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_k = -\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{x}_l} \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_k) - \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial \mathbf{x}_l} \left( \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_s \mathbf{x}_j - N \mathbf{K}_s \mathbf{x}_l \right) \quad (4.12)$$

donde  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}_l)$  es una función particular elegida para garantizar la condición de contracción y el vector de parámetros está dado por

$$\boldsymbol{\theta}_i = \bar{\boldsymbol{\theta}}_i + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}_i). \quad (4.13)$$

El siguiente Teorema establece una serie de condiciones suficientes para garantizar la sincronización de todos los elementos de la red bajo el mecanismo (4.12).

**Teorema 4.4.** *El conjunto de agentes (4.2), (4.6) se sincroniza bajo el mecanismo de adaptación (4.12) si  $\forall \mathbf{x}_i, \forall \boldsymbol{\theta}_i$  y  $\forall t \geq t_0$*

1. *Existe  $\delta_2 \in \mathbb{R}$ , tal que*

$$\mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_k} \right) \leq \delta_2, \quad (4.14)$$

2. *Dadas  $\kappa_s := \mu(N\mathbf{K}_s)$  y  $\delta_1$  en (4.8), se cumple*

$$\kappa_s > \delta_1 + \delta_2, \quad (4.15)$$

3. *Existen una función  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}_l) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\theta_m}$  y una constante  $\beta > 0$  tales que*

$$\int_t^{t+T} \bar{\mathbf{J}}_{\boldsymbol{\theta}}(\tau) d\tau < \beta \mathbf{I}, \quad (4.16)$$

donde  $\bar{\mathbf{J}}_\theta$  está acotada y es la parte simétrica de la matriz

$$\mathbf{J}_\theta = -\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_l} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i}. \quad (4.17)$$

*Demostración.* Considere el sistema (4.6) con  $\mathbf{d}_i = 0$  y mecanismo de adaptación (4.12). Al derivar respecto al tiempo a (4.13), se obtiene la dinámica de análisis

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_k = -\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_l} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l)). \quad (4.18)$$

De forma similar, una dinámica de adaptación  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_l = \mathbf{0}$  se puede definir para el líder en la forma

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_l = -\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_l} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l)), \quad (4.19)$$

Dadas (4.2), (4.19) y (4.6),(4.18), se define el sistema virtual

$$\dot{\mathbf{x}}_v = \mathbf{f}(\mathbf{x}_v, \boldsymbol{\theta}_l) - \left( N\mathbf{K}_s \mathbf{x}_v - \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_s \mathbf{x}_j \right), \quad (4.20a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_v = -\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_l} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_v) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l)), \quad (4.20b)$$

con soluciones particulares  $\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_l(t)$ ,  $\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_k(t)$  y  $\boldsymbol{\theta}_v = \boldsymbol{\theta}_l(t)$ ,  $\boldsymbol{\theta}_v = \boldsymbol{\theta}_k(t)$ . Dicho sistema tiene como matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_\theta \end{bmatrix},$$

para  $\mathbf{J}_x$  y  $\mathbf{J}_\theta$  dadas en (4.11) y (4.17), respectivamente.

Se observa que dicho sistema está desacoplado, por lo tanto, el análisis de convergencia de los estados y los parámetros puede realizarse por separado.

Es posible garantizar la contracción del bloque  $\mathbf{J}_x$  bajo las condiciones del Teorema 4.3. Por otro lado, dada la matriz Jacobiana (4.17) y la condición (4.16),

se concluye convergencia exponencial de los parámetros de los seguidores al líder, gracias a los resultados del Teorema 2.3.

Para el caso  $\mathbf{d}_i \neq 0$ , considere como sistema general a

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l) - N\mathbf{K}_s\mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_s\mathbf{x}_j + \mathbf{d}_i, \quad (4.21a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i = -\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{x}_l} (\mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_i) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_l, \boldsymbol{\theta}_l)), \quad (4.21b)$$

con  $i = 1$ ,  $i = k$  para el líder y el  $k$ ésimo-seguidor, respectivamente.

Ya que el término de perturbación se encuentra en la dinámica de  $\mathbf{x}_i$ , es suficiente con analizar el primer elemento de la matriz Jacobiana para cada  $\mathbf{x}_i$ ,

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_i} - N\mathbf{K}_s + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta})}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_i},$$

con medida  $\nu := \mu_p(\mathbf{J}_x)$

$$\nu \leq \mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_i} - \mathbf{K} \right) + \mu_p \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_i)}{\partial \mathbf{x}_i} - \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \mathbf{x}_i} \right).$$

Gracias a las condición (4.15) la contracción del sistema (4.21) se preserva bajo el término de perturbación  $\mathbf{d}_i$ . Es decir, existe sincronización entre todos los agentes en la red y los parámetros de los seguidores convergen a los del líder  $\|\boldsymbol{\theta}_i(t) - \boldsymbol{\theta}_l(t)\|_p \rightarrow 0$ .  $\square$

### 4.3. Aplicación en sistemas biológicos

A continuación, el mecanismo de adaptación desarrollado en el apartado anterior se aplica a un sistema dinámico que describe el proceso de glicólisis en células de levadura [57]. Varios experimentos han demostrado que bajo ciertas condiciones este tipo de células se sincronizan y más aún, otros trabajos interesantes tratan

de describir este fenómeno y su relación con los parámetros del sistema, ver por ejemplo [57],[30].

La dinámica local para cada elemento en la red se considera en la forma

$$\dot{G} = V_{in} - \tau GT \quad (4.22a)$$

$$\dot{T} = 2\tau GT - \tau_p \frac{T}{\tau_m + T} \quad (4.22b)$$

donde  $G$  y  $T$  representan las concentraciones de glucosa y trifosfato de adenosina (ATP, por sus siglas en inglés), respectivamente. La entrada de glucosa está dada por  $V_{in}$  y se considera como una constante, los parámetros en el sistema son  $\tau$ ,  $\tau_m$  y  $\tau_p$ . El primero representa la actividad de la fosfo-fructokinasa, mientras que el resto está relacionado con el proceso de descomposición de la ATP, en particular,  $\tau_m$  se relaciona con el umbral de activación y  $\tau_p$  con la tasa máxima de inhibición.

El término de acoplamiento para los elementos de la red se representa por

$$u = \sum_{j=1}^{N+1} \epsilon_s (T_j - T) \quad (4.23)$$

para  $\epsilon_s > 0$ .

### 4.3.1. Análisis

El sistema (4.22) con el acoplamiento (4.23) se puede reparametrizar como

$$\dot{G} = V_{in} - \tau GT \quad (4.24a)$$

$$\dot{T} = \tau GT - \frac{T}{\alpha^T \boldsymbol{\theta}} + u, \quad (4.24b)$$

con  $\boldsymbol{\theta} = \left[ \frac{\tau_m}{\tau_p}, \frac{1}{\tau_p} \right]^T$  y  $\boldsymbol{\alpha} = [1, T]^T$ .

Para aplicar el Teorema 4.4 se considera  $\mathbf{x} = [G, T]^T$ , con subíndice  $l$  para el líder y subíndice  $k$  para representar a cada seguidor.

La matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \theta_l)}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{K}$  del sistema (4.24) está dada por

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\tau T & -\tau G \\ 2\tau T & \tau G - N\epsilon_s - \frac{\theta(1)_l}{(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\theta}_l)^2} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

con

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N\epsilon_s \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Si se cumple la siguiente desigualdad, similar a la que se obtiene en [30],

$$G < \frac{p_2}{p_1} T < \left( -G + \frac{N\epsilon_s}{2\tau} + \frac{\theta(1)_l}{(\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\theta}_l)^2} \right) \quad (4.27)$$

para una métrica diagonal positiva definida

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

la medida de la matriz  $\mu_{\infty}(\mathbf{P}_{\mathbf{x}} \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{-1}) < 0 \forall t \geq t_0$ , es decir, la matriz Jacobiana (4.25) es negativa semidefinida. Por lo tanto, con un término  $N\epsilon_s$  suficientemente grande, es posible satisfacer la condición (4.15) en el Teorema 4.4.

En relación con la condición 2 de dicho Teorema, la matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_{\theta}$  está dada por

$$\mathbf{J}_{\theta} = -\frac{\partial \eta}{\partial T_l} \frac{T_l}{(\boldsymbol{\alpha}_l^T \boldsymbol{\theta})^2} \boldsymbol{\alpha}_l^T. \quad (4.29)$$

Se elige la función vectorial

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}_l) = \gamma \begin{bmatrix} T_l \\ \frac{T_l^2}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

con  $\gamma > 0$ , tal que la matriz simétrica

$$\bar{\mathbf{J}}_\theta = -\gamma \frac{T_l}{(\boldsymbol{\alpha}_l^T \boldsymbol{\theta})^2} \boldsymbol{\alpha}_l \boldsymbol{\alpha}_l^T \leq -\epsilon \boldsymbol{\alpha}_l \boldsymbol{\alpha}_l^T, \quad (4.31)$$

es negativa semidefinida, dada cierta constante positiva

$$\epsilon \geq \gamma \frac{\bar{T}_l}{(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_l^T \bar{\boldsymbol{\theta}})^2} \quad (4.32)$$

para  $\bar{T}_l$  una cota por arriba sobre  $T_l$ ,  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_l$  y  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  cotas por abajo sobre  $\boldsymbol{\alpha}_l$  y  $\boldsymbol{\theta}$ . Por lo tanto si

$$\int_t^{t+\delta} -\bar{\mathbf{J}}_\theta \geq \epsilon \int_t^{t+\delta} \boldsymbol{\alpha}_l \boldsymbol{\alpha}_l^T, \quad (4.33)$$

por la condición 3 del Teorema 4.4, existe convergencia exponencial de las trayectorias de los seguidores al líder. Dicha condición se cumple trivialmente ya que los osciladores son de excitación persistente [58], es decir,

$$\int_t^{t+\delta} \boldsymbol{\alpha}_l \boldsymbol{\alpha}_l^T \geq \epsilon_\alpha \mathbf{I}, \quad (4.34)$$

para ciertas  $\delta > 0$  y  $\epsilon_\alpha > 0$ .

### 4.3.2. Simulación

En simulación se consideran  $N = 3$  sistemas interconectados en la red donde los términos de la dinámica local se seleccionan como  $\tau = 0.02$ ,  $\tau_p = 5$ ,  $\tau_m = 13$ . Como se mencionó anteriormente, la ganancia de acoplamiento es débil  $\epsilon = .01$  ya que

no permite la sincronización de los agentes si los parámetros son radicalmente distintos. Las condiciones iniciales se seleccionan como  $G_l(0) = 6.6$ ,  $G_k(0) = [4, 10]^T$ ,  $T_l(0) = 7.6$ ,  $T_k(0) = [5, 1]^T$ ,  $\theta_{1k}(0) = [3, 2]^T$ ,  $\theta_{2k}(0) = [2, 1]^T$ .

A continuación se muestran los resultados obtenidos en simulación. El líder se representa por una línea sólida/azul (—), el primer seguidor por una línea discontinua/verde (---) y el segundo por una línea punteada/roja (- -). Para ilustrar el efecto de la diferencia de parámetros y la falta de sincronización, inicialmente el mecanismo de adaptación se considera inactivo, es decir la ganancia de adaptación  $\gamma$  se fija en 0 los primeros 500 segundos. Posteriormente, el mecanismo de adaptación se activa en  $\gamma = .4$ .

La sincronización y el error de sincronización se observan en las Figuras 4.1 y 4.2, mientras que la evolución del vector parámetros  $\hat{\theta}$  se muestra en las Figuras 4.3, 4.4, respectivamente. Por otra parte, tal como se estableció en la teoría, la perturbación  $\mathbf{d}$  es desvaneciente, dicho efecto se observa en la Figura 4.5.

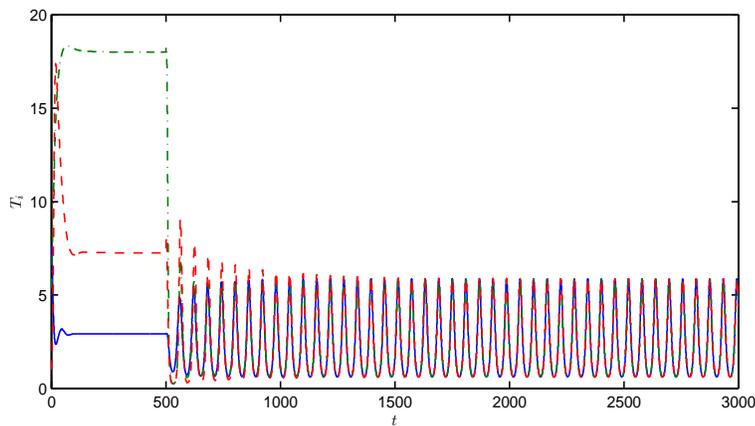


FIGURA 4.1: *Sincronización de T.*

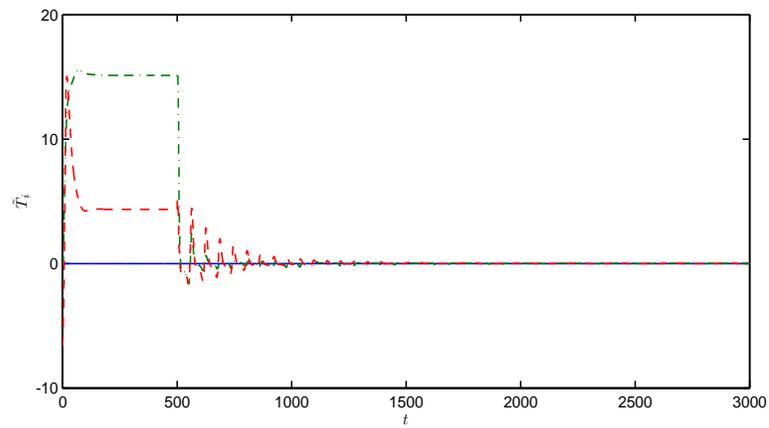


FIGURA 4.2: Error de sincronización  $\tilde{T}_i = T_1 - T_i$ .

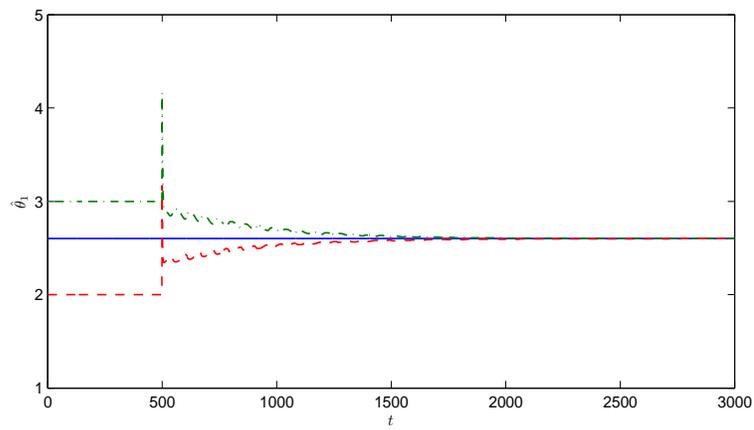


FIGURA 4.3: Parámetro  $\theta_1$ .

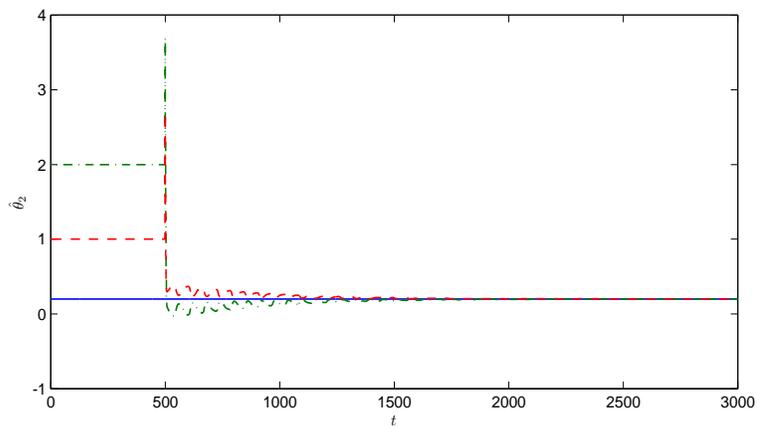
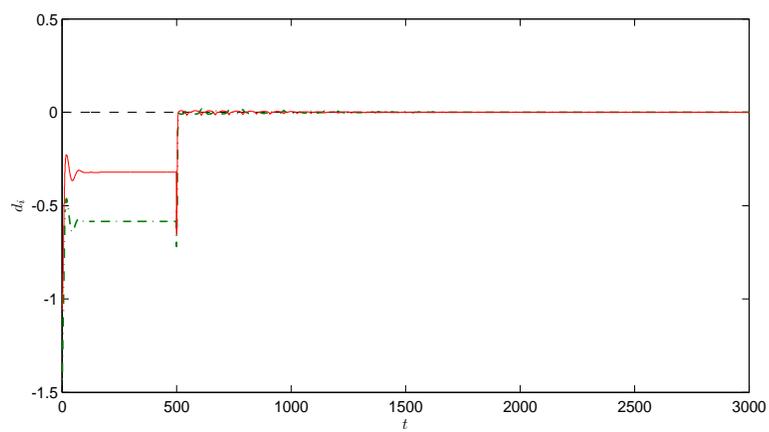


FIGURA 4.4: Parámetro  $\theta_2$ .

FIGURA 4.5:  $\mathbf{d}_i$ .

# Capítulo 5

## Sincronización como mecanismo para la reducción de ruido

Con base en el estudio de los efectos que produce la sincronización en un grupo de sistemas biológicos interconectados, se ha observado experimentalmente que puede existir cierta mejora de la precisión, por ejemplo, en el caso de la sincronización de las células beta del Páncreas [59, 60].

Inspirado en dicho fenómeno, [8] propone una prueba matemática para demostrar que la sincronización de sistemas no lineales provee a los sistemas interconectados de cierta protección ante ruido, bajo las siguientes suposiciones generales:

1. El tipo de interconexión es el de una red balanceada<sup>1</sup>.
2. Existe una cota sobre la no linealidad de la dinámica local  $f$ .
3. Las trayectorias del sistema son robustas ante pequeñas perturbaciones.
4. Los elementos de la red están sincronizados.

---

<sup>1</sup>En teoría de grafos, se dice que una red es balanceada si el número de nodos que entran es igual al número de nodos que salen.

También se demuestra en dicho trabajo, que el efecto producido por la presencia de ruido fuerte en los sistemas no lineales puede llegar a ser sumamente distinto dependiendo de la clase del sistema, y a diferencia de los sistemas lineales, la promediación de distintas señales de salida no logra preservar la señal libre de ruido. Este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo, mediante la simulación de un grupo de osciladores interconectados que presentan el fenómeno de sincronización, y por lo tanto, reducción de ruido bajo mediciones ruidosas. A continuación y a lo largo de este capítulo, se utilizará notación para procesos estocásticos.

**Ejemplo 5.1.** Considere un conjunto de  $N$  osciladores ruidosos con dinámica local

$$\begin{aligned} dv_i &= c \left( v_i - \frac{1}{3}v_i^3 + w_i + I \right) dt + u_{sinc} + \sigma dW_i \\ dw_i &= -\frac{1}{c}(v_i - a + bw_i)dt \\ y_i &= v_i, \end{aligned} \tag{5.1}$$

donde  $dW_i$  es un ruido blanco Gaussiano de intensidad  $\sigma$ , para una entrada de sincronización

$$u_{sinc} = -K(v_i - \bar{v}), \tag{5.2}$$

y una trayectoria promedio

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n v_i/n. \tag{5.3}$$

La Figura 5.1 presenta la trayectoria libre de ruido de uno de los osciladores<sup>2</sup> mientras que el efecto de incluir ruido blanco Gaussiano a dicha trayectoria se puede observar en la Figura 5.2. Como puede observarse en la Figura 5.3, la sincronización mantiene la salida lo más cercana posible a la trayectoria libre de ruido. Por otra parte, la promediación de la salida (5.3) de cada agente desacoplado, es decir

<sup>2</sup>Se considera a cada oscilador (5.1) con parámetros  $a = .3$ ,  $b = .2$ ,  $c = 30$ .

con  $u_{sinc} = 0$ , reduce la intensidad del ruido así como también la señal original, ver Figura 5.4.

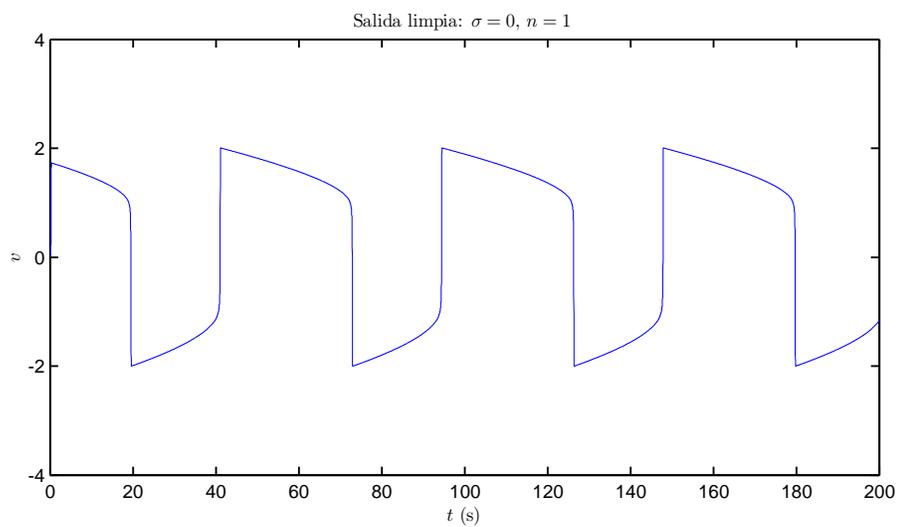


FIGURA 5.1: Estado  $v$ : Señal limpia.

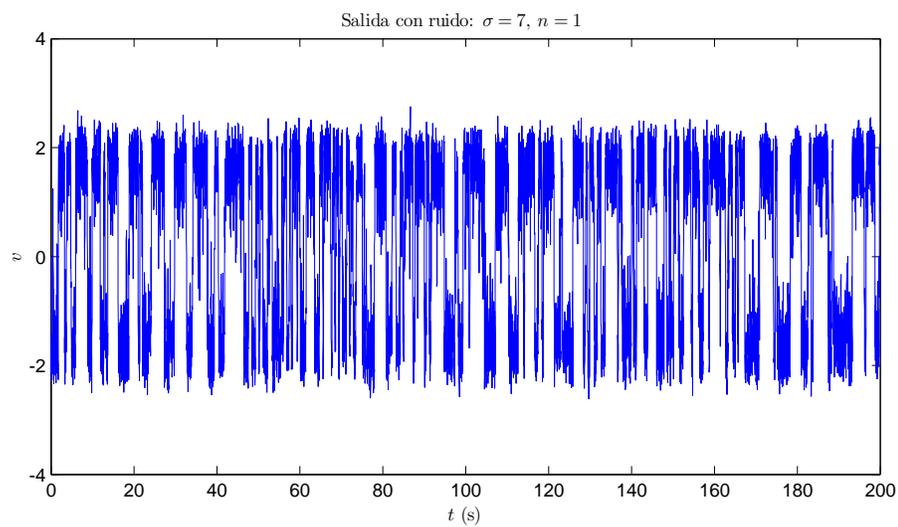


FIGURA 5.2: Estado  $v$ : Señal con ruido.

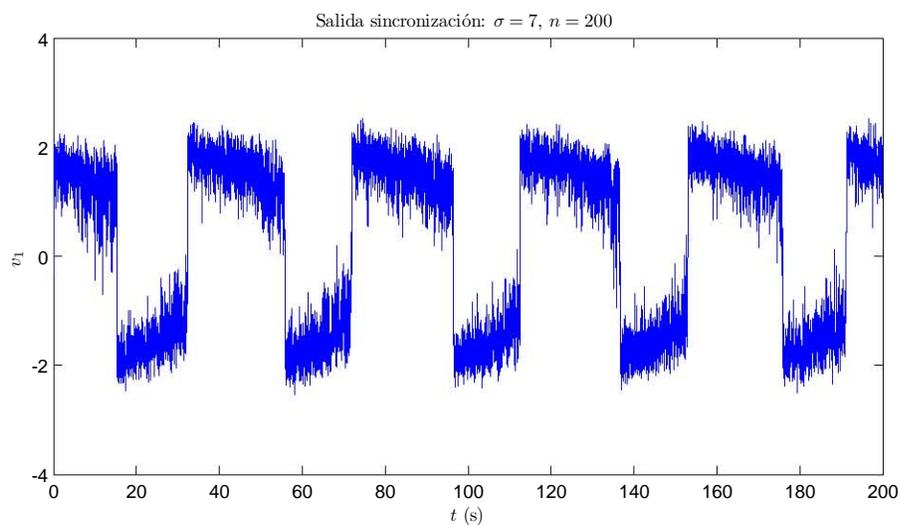


FIGURA 5.3: Estado  $v$ : Señal sincronizada,  $u_{sinc} = -K(v_i - \bar{v})$ ,  $K = 50$ .

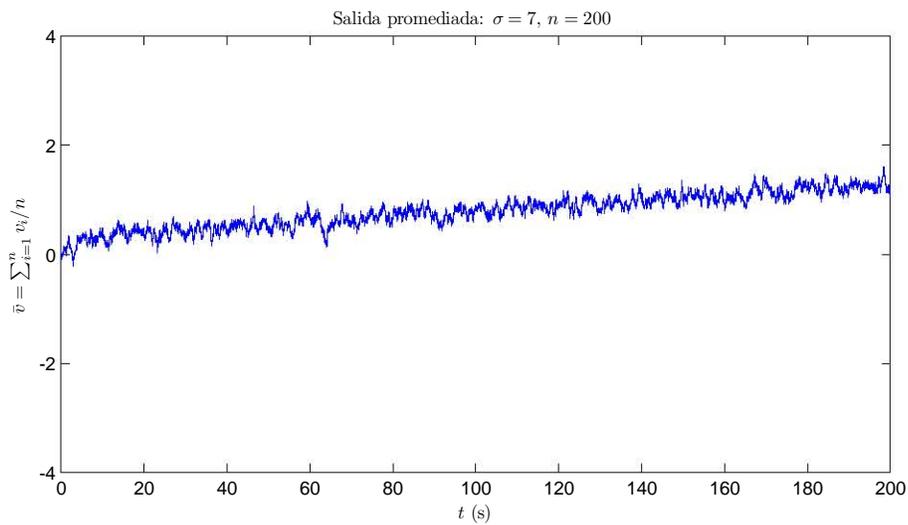


FIGURA 5.4: Estado  $v$ : Señal promediada,  $u_{sinc} = 0$ .

## 5.1. Resultado analítico

Los resultados presentados en [8] permiten garantizar que la protección ante el ruido gracias a la sincronización de sistemas, implica que la respuesta individual de un conjunto de sistemas idénticos con ruido es cercana al comportamiento libre de ruido. El impacto del ruido sobre los sistemas interconectados, se analiza matemáticamente bajo la serie de suposiciones que se establecen a continuación.

Considere un sistema no lineal

$$d\mathbf{x}_i = \left( \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + \sum_j \mathbf{K}_{ji}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \right) dt + \sigma dW_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

bajo las siguientes suposiciones:

**Suposición 5.1** (*Acoplamiento todo a todo*). Cada sistema está conectado a una señal común

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \sum_i \mathbf{x}_i, \quad (5.5)$$

es decir, dada  $\mathbf{K}_{ij} = k/N$ ,  $k > 0$ , el sistema (5.4) puede escribirse en la forma

$$d\mathbf{x}_i = (\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) + k(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i)) dt + \sigma dW_i. \quad (5.6)$$

**Suposición 5.2** (*Cota sobre la no linealidad de  $\mathbf{f}$* ). Dada la matriz Hessiana  $\mathbf{H}_j = \left( \frac{\partial^2 f_j}{\partial \mathbf{x}^2} \right)$ , se asume que  $\forall j$ ,  $\lambda_{max}(\mathbf{H}_j)$  está acotado por arriba uniformemente por una constante  $\frac{1}{\sqrt{d}} H_{bd}$ . Por lo tanto,

$$\forall \mathbf{x}, j, t \quad \mathbf{x}^T \mathbf{H}_j \mathbf{x} \leq \frac{H_{bd}}{\sqrt{d}} \|\mathbf{x}\|_p^2 \quad (5.7)$$

**Suposición 5.3** (*La dinámica de  $\mathbf{f}$  es robusta ante pequeñas perturbaciones*).

Dado el sistema libre de ruido

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c, t) \quad (5.8)$$

y el sistema perturbado

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{perturbado}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{\text{perturbado}}, t) + P, \quad (5.9)$$

entonces si el valor esperado de la distancia de la perturbación  $P$  tiende a cero  $\mathbb{E}\|P\|_2 \rightarrow 0$ , la distancia entre las trayectorias  $\mathbf{x}_c$  y  $\mathbf{x}_{\text{perturbado}}$  tiende a cero,  $\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{\text{perturbado}}\|_p \rightarrow 0$ .

**Suposición 5.4** (*Los sistemas están sincronizados*). Después de transitorios exponenciales,  $\exists \rho > 0$  tal que

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i < j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_p^2 \right) \leq \rho \quad (5.10)$$

En el siguiente Teorema se presenta el resultado general de [8].

**Teorema 5.5.** *Dado el sistema (5.4), bajo las suposiciones 5.1-5.4, con una intensidad de ruido  $\sigma$ , la trayectoria de cualquier elemento sincronizado  $\mathbf{x}_i$  en la red y la del sistema libre de ruido*

$$d\mathbf{x}_c = \mathbf{f}(\mathbf{x}_c, t)dt \quad (5.11)$$

*satisfacen*

$$\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i\|_p \leq \|\mathbf{x}_c - \bar{\mathbf{x}}\|_p + \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_i\|_p, \quad (5.12)$$

donde  $\bar{\mathbf{x}}_i$  se define en (5.5). Es decir,  $\mathbf{x}_i$  y  $\mathbf{x}_c$  son similares, con el impacto del ruido sobre la trayectoria  $\bar{\mathbf{x}}$  como

$$\rho \frac{H_{bd}}{2N^2} + \frac{\sigma}{N}. \quad (5.13)$$

Por lo tanto, la diferencia entre  $\bar{\mathbf{x}}$  y  $\mathbf{x}_c$  se reduce en relación con el número de sistemas interconectados  $N \rightarrow \infty$  y la sincronización entre ellos  $\rho/N^2 \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Dada la trayectoria promedio (5.5), la distancia entre  $\mathbf{x}_i$  y  $\bar{\mathbf{x}}$  puede escribirse como

$$\sum_{i < j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_p^2 = N \sum_i \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_p^2. \quad (5.14)$$

A partir de la suposición 5.1, es posible suponer una cota sobre la suma esperada de las distancias al cuadrado entre los estados (5.10) y obtener una relación entre la trayectoria promedio  $\bar{\mathbf{x}}$  y el estado  $\mathbf{x}_i$

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i < j} \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_p^2 \right) \leq \frac{\rho}{N}. \quad (5.15)$$

La derivada del valor promedio (5.5) está dada por

$$d\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} - \epsilon, t)) dt + \frac{1}{N} \sum_i \sigma dW_i, \quad (5.16)$$

donde

$$\epsilon = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{f}(\mathbf{x}_i, t) \right) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (5.17)$$

Con base en la fórmula de Taylor con residuo integral, se obtiene

$$f_j(\mathbf{x}_i, t) - f_j(\bar{\mathbf{x}}, t) - \mathbf{F}_j(\bar{\mathbf{x}}, t)^T(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) = \quad (5.18)$$

$$\int_0^1 (1-s)(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{H}_j((1-s)\mathbf{x}_i + s\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}) ds \quad (5.19)$$

donde  $\mathbf{F}_j$  es el  $j$ -ésimo vector de la matriz Jacobiana de  $\mathbf{f}$ . Por lo tanto, bajo la suposición 5.2

$$\left| \sum_i (f_j(\mathbf{x}_i, t) - f_j(\bar{\mathbf{x}}, t)) \right| \leq \frac{H_{bd}}{2\sqrt{d}} \sum_i \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_p^2. \quad (5.20)$$

Finalmente, sumando sobre  $j$  y por la condición (5.15)

$$\mathbb{E}(\|\epsilon\|) \leq \frac{\rho H_{bd}}{2N^2}. \quad (5.21)$$

Ya que se considera que el ruido en cada sistema es mutuamente independiente, se tiene

$$\frac{1}{n} \sum_i \sigma dW_i \cong \frac{\sigma}{\sqrt{N}} dW. \quad (5.22)$$

Dadas (5.21) y (5.22), es posible obtener (5.13).  $\square$

El resultado anterior es la herramienta base para el análisis en la siguiente sección en la que se busca reducir el ruido en una serie de observadores interconectados.

## 5.2. Reducción de ruido en observadores

En la práctica, la señal de salida está corrompida por ruido proveniente de los sensores de medición. En esta sección, con base en el resultado presentado en

el apartado 3.1.1, se busca diseñar observadores que permitan obtener el estado estimado  $\hat{\mathbf{z}}$  del observador (3.12) lo más cercano posible a la señal libre de ruido.

Por lo tanto, con el fin de dar una solución al problema de ruido en la medición se considera un observador de orden completo. Este observador presenta mejores resultados bajo un nivel de ruido moderado. Para mejorar aún más el desempeño en presencia de ruidos más fuertes, inspirados por la interesante idea de protección de ruido usando sincronización, se deriva un grupo de observadores sincronizados. El problema de ruido en los parámetros se soluciona incrementando en un orden los observadores propuestos.

Esquemas similares en los que se utiliza un conjunto de observadores interconectados con el objetivo de cuantificar analíticamente el efecto de reducción de ruido en la medición se presentan en [61] y [62].

### 5.2.1. Observador de orden completo

A partir del planteamiento dado en la sección 3.1 para el diseño del observador de orden-reducido, de manera similar se considera que el sistema a observar tiene la forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (5.23a)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (5.23b)$$

donde  $\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{p}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  es la parte medible y  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq m$  la parte no medible del vector de estados  $\mathbf{x} \in [\mathbf{y}, \mathbf{z}]$ .

En presencia de ruido en la medición  $\mathbf{y}$ , el objetivo final de recuperar el estado  $\mathbf{z}$  se obstaculiza al utilizar el observador de orden-reducido (3.12), ya que el estado estimado se calcula a través de (3.13). Si  $\hat{\mathbf{y}}$  se usa en (3.13) en lugar de  $\mathbf{y}$ , un observador contrayente de orden-completo puede ser de ayuda para obtener un

mejor estimado del estado  $\hat{\mathbf{z}}$ . Con el fin de satisfacer dicho objetivo, se propone a continuación un observador de orden-completo.

Inicialmente, la dinámica (3.6) se escribe en términos de  $\mathbf{v}$ ,  $\zeta$  como

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \mathbf{v} + \mathbf{K}\zeta, t) \quad (5.24a)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \mathbf{v} + \mathbf{K}\zeta, t) - \mathbf{K} \left( \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{v} + \mathbf{K}\zeta, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right), \quad (5.24b)$$

dicho sistema permite proponer un observador de orden-completo en la forma

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta, t) - \gamma(\hat{\mathbf{y}}, t) + \gamma(\mathbf{y}, t) \quad (5.25a)$$

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta, t) - \mathbf{K} \left( \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right), \quad (5.25b)$$

donde el estado estimado se obtiene a través de la salida

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta(\hat{\mathbf{y}}, t). \quad (5.26)$$

**Teorema 5.6** (Observador de orden-completo). *Se considera el observador (5.25)-(5.26), con matriz Jacobiana*

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & \mathbf{J}_{1,2} \\ \mathbf{J}_{2,1} & \mathbf{J}_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \gamma(\hat{\mathbf{y}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{y}}} & \frac{\partial \mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} \\ \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}\zeta, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Si existen un par de funciones  $\gamma(\hat{\mathbf{y}}, t)$  y  $\zeta(\mathbf{y}, t)$  tales que

$$\mu_p(\mathbf{J}_c) \leq \delta, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} = [\hat{\mathbf{y}}^T \quad \hat{\mathbf{v}}^T]^T, \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.28)$$

para una constante  $\delta > 0$ , el error de estimación  $\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)$  convergerá a cero exponencialmente.

*Demostración.* El sistema (5.25) tiene como solución particular  $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ , con matriz Jacobiana (5.27). Bajo la condición (5.28) y la aplicación del Teorema

2.1, el sistema (5.25) es contrayente, por lo tanto existe convergencia exponencial entre las trayectorias  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  y  $\mathbf{x}(t)$ . Por continuidad,  $\zeta(\hat{\mathbf{y}}, t) \rightarrow \zeta(\mathbf{y}, t)$  y se obtiene convergencia exponencial de  $\hat{\mathbf{z}}$  a  $\mathbf{z}$ , ya que  $\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z} = (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}) + \mathbf{K} (\zeta(\hat{\mathbf{y}}, t) - \zeta(\mathbf{y}, t)) \rightarrow 0$ .  $\square$

*Observación 5.1.* En la implementación del observador, es importante tomar en cuenta la diferencia entre la función  $\zeta = \zeta(\mathbf{y}, t)$  y la función  $\zeta(\hat{\mathbf{y}}, t)$  utilizada en la salida (5.26).

*Observación 5.2.* El observador de orden-completo (5.25) está construido a partir de la incorporación de la dinámica  $\hat{\mathbf{y}}$  al observador de orden-reducido (3.12). Esta estructura de observador, que corresponde a elegir un sistema virtual apropiado [4], facilita el análisis de contracción.

### 5.2.2. Observador sincronizado

Con base en los resultados presentados en la introducción de esta sección y en los resultados de [8, 63], se busca reducir aún más el ruido en la salida para el observador de orden completo. A continuación se presenta un análisis que permite establecer las condiciones bajo las cuales la sincronización de observadores permite mejorar la respuesta individual de cada observador interconectado y por lo tanto, la salida observada.

Considere un sistema llamado 'el líder',

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \mathbf{v})dt, \\ d\mathbf{v} &= \mathbf{f}_v(\mathbf{y}, \mathbf{v})dt, \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{y} + \sigma_w \mathbf{w}_i, \end{aligned} \tag{5.29a}$$

donde  $\mathbf{y}_i$  denota la  $i$ -ésima medición de la salida  $\mathbf{y}$  corrompida por ruido blanco gaussiano  $\mathbf{w}_i$  con intensidad  $\sigma_w$ ,  $i = 1, \dots, N$ .  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  y  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^p$ ,  $p \leq m$ , representan los estados medibles y no medibles, respectivamente.

Defina un observador, 'el  $i$ -seguidor', en la forma

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{y}}_i &= (\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{K}(t)(\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i) - \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{y}}_j)) dt, \\ d\hat{\mathbf{v}}_i &= (\mathbf{f}_v(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j)) dt, \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde  $\mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j) = K_s \sum_j (\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j)$  representa un término de acoplamiento 'todo a todo' entre los elementos de la red,  $0 < \mathbf{K}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal con elementos positivos y  $K_s > 0$ .

**Teorema 5.7.** *Asuma que el observador libre de ruido*

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{y}} &= (\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}) - \mathbf{K}(t)(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y})) dt, \\ d\hat{\mathbf{v}} &= (\mathbf{f}_v(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}})) dt, \end{aligned} \quad (5.31)$$

es contrayente, es decir, para cierta  $\lambda_f > 0$  la parte simétrica de su matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_s \leq -\lambda_f I$  uniformemente. Sea  $\mathbf{x} = [\mathbf{y} \ \mathbf{v}]^T$ , donde la trayectoria promedio está dada por (5.5).  $\hat{\mathbf{x}}$ , el estimado de  $\mathbf{x}$ , se definen de forma similiar a  $\mathbf{x}$ .

Después de transitorios exponenciales

$$\| \bar{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \|^2 \leq \frac{N(N-1)}{4N^2} \frac{H_{bd}(k_{max}^2 + l_F^2)\sigma_w^2}{\lambda_f + K_s N} + \frac{(k_{max}^2 + l_F^2)\sigma_w^2}{N}, \quad (5.32)$$

donde  $H_{bd} \geq \lambda_{max} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} \right)$  es una cota por arriba de  $\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2}$ ,  $l_F > 0$  es la constante de Lipschitz de  $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}) = [\mathbf{f}_1^T(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}) \ \mathbf{f}_2^T(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}})]^T$  y  $\sup_{t \geq 0} \text{tr}\{\mathbf{K}^T(t)\mathbf{K}(t)\} \leq k_{max}^2$ .

*Demostración.* El sistema (5.30) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{y}}_i &= (\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{K}(t)(\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i) - \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{y}}_j)) dt + \epsilon_{i,1} + \epsilon_{w_i}, \\ d\hat{\mathbf{v}}_i &= (\mathbf{f}_v(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{u}_i(\hat{\mathbf{v}}_i, \hat{\mathbf{v}}_j)) dt + \epsilon_{i,2}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

con  $\epsilon_{i,n} = (\mathbf{f}_n(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{f}_n(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_i)) dt$ ,  $n = 1, 2$ , y  $\epsilon_{w_i} = \mathbf{K}(t)\sigma_w dw_i$ . La derivada del valor promedio (5.5), usando (5.30), está dada por

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{y}} &= (\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{v}}) - \mathbf{K}(t)(\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y})) dt + \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_w + \delta_1, \\ d\bar{\mathbf{v}} &= (\mathbf{f}_v(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{v}})) dt + \bar{\epsilon}_2 + \delta_2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde  $\delta_n = (\frac{1}{N} \sum_i \mathbf{f}_n(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{f}_n(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{v}})) dt$ ,  $\bar{\epsilon}_n = (\frac{1}{N} \sum_i \epsilon_{i,n})$ , y  $\bar{\epsilon}_w = (\frac{1}{N} \sum_i \epsilon_{w_i})$ .

Se observa que si los términos  $\delta_n$ ,  $\bar{\epsilon}_w$  y  $\bar{\epsilon}_n$  para  $n = 1, 2$  se hacen 'pequeños', el comportamiento del valor promedio de los observadores sincronizados permanecerá cercano al caso libre de ruido. La suma esperada de  $\bar{\epsilon}_w$  y  $\bar{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_1 \ \bar{\epsilon}_2]^T$  está acotada [8] por

$$E(\|\bar{\epsilon}_w\|^2) \leq \frac{(k_{max}^2 + l_F^2)\sigma_w^2}{N}, \quad E(\|\bar{\epsilon}\|) = \frac{\rho \mathbf{H}_{bd}}{2N^2}, \quad (5.35)$$

donde  $\rho$  representa una cota en la suma esperada de la diferencia entre los estados de los elementos sincronizados (5.10). Para determinar  $\rho$ , considere la dinámica de dos seguidores

$$\begin{aligned} \sum_1 &: \begin{cases} d\hat{\mathbf{y}}_i = (\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_i) - \mathbf{K}(t)(\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}) - N\mathbf{K}_s(\hat{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}))dt + \epsilon_{i,1} + \epsilon_{w_i}, \\ d\hat{\mathbf{v}}_i = (\mathbf{f}_v(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_i) - N\mathbf{K}_s(\hat{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{v}})) dt + \epsilon_{i,2}, \end{cases} \\ \sum_2 &: \begin{cases} d\hat{\mathbf{y}}_j = (\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_j) - \mathbf{K}(t)(\hat{\mathbf{y}}_j - \mathbf{y}) - N\mathbf{K}_s(\hat{\mathbf{y}}_j - \bar{\mathbf{y}})) dt + \epsilon_{j,1} + \epsilon_{w_j}, \\ d\hat{\mathbf{v}}_j = (\mathbf{f}_v(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}}_j) - N\mathbf{K}_s(\hat{\mathbf{v}}_j - \bar{\mathbf{v}})) dt + \epsilon_{j,2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Por el Teorema 2 de [63] la suma esperada de  $\|\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j\|^2$  está acotada por

$$\mathbb{E} (\|\hat{\mathbf{x}}_i - \hat{\mathbf{x}}_j\|^2) \leq \frac{(k_{max}^2 + l_F^2)\sigma_w^2}{\lambda_{ij}}, \quad (5.37)$$

siendo  $\lambda_{ij} = \lambda_f + K_s N$  una cota en la velocidad de contracción del sistema (5.36).

Por lo tanto  $\rho = \frac{N(N-1)}{2} \frac{(k_{max}^2 + l_F^2)\sigma_w^2}{\lambda_f + K_s N}$ . Como consecuencia de este resultado junto con (5.35), se obtiene la cota (5.32).  $\square$

*Observación 5.3.* Este tipo de algoritmos, tal como lo define la salida (5.29b) requiere de varias mediciones del estado  $\mathbf{y}_i$  corrompidas por ruidos diferentes. Dependiendo de la aplicación, dichas mediciones se pueden obtener de varios sensores en paralelo o para sistemas lentos, de mediciones en distintos intervalos de tiempo.

### 5.2.3. Observadores bajo mediciones ruidosas en la salida y en los parámetros

En la presencia de ruido en las mediciones de salida y en los parámetros, la estimación del estado  $\hat{\mathbf{z}}$  se ve afectada por dos fuentes de ruido en (3.13) (orden-reducido) o por ruido en los parámetros en (5.26) (orden-completo, sincronizado). Para prevenir que estos ruidos se propaguen directamente al estado estimado, los observadores propuestos anteriormente se modifican: en lugar de  $\zeta$  en (3.13) ó (5.26), se usa su versión filtrada. Con este objetivo se define una nueva función  $\xi = \mathbf{K}\zeta$  cuya derivada es de la forma (ver (3.10))

$$\dot{\xi} = \mathbf{K} \left( \mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right). \quad (5.38)$$

A partir de la dinámica anterior y de (5.24), el observador de orden-reducido modificado se define como

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t) - \mathbf{K} \left( \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \quad (5.39a)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}} = \mathbf{K} \left( \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) - \mathbf{K}_z (\hat{\boldsymbol{\xi}} - \boldsymbol{\xi}) \quad (5.39b)$$

donde  $\mathbf{K}_z > 0$ , y el estado estimado se obtiene mediante

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}. \quad (5.40)$$

**Teorema 5.8** (Observador de orden-reducido modificado). *Considere (5.39) como un observador para el sistema (3.6) y (5.38). Si dada la matriz Jacobiana*

$$\mathbf{J}_{mr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} & -\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t)}{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}} \\ \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{v}}} & -\mathbf{K}_z + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\xi}}, t)}{\partial \hat{\boldsymbol{\xi}}} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

$\exists \delta > 0$  tal que la medida de matriz

$$\mu_p(\mathbf{J}_{mr}) \leq \delta, \quad (5.42)$$

$\forall \hat{\mathbf{w}} \in \left[ \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}^T \right]^T$ . El error de estimación  $\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)$  del observador de orden-reducido modificado convergerá exponencialmente a cero.

*Demostración.* El sistema (5.39) tiene como solución particular  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi}$ . Dada la condición  $\mu_p(\mathbf{J}_{mr}) \leq \delta$  sobre la matriz  $\mathbf{J}_{mr}$ , el sistema es contrayente. Por lo tanto, existe convergencia exponencial de  $\hat{\mathbf{v}}$  a  $\mathbf{v}$  y de  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  a  $\boldsymbol{\xi}$ .  $\square$

Bajo la misma idea, a continuación se presentan versiones modificadas de los observadores de orden-completo y sincronizado, con el fin de obtener una estimación más limpia de  $\mathbf{x}$ . Estos resultados se presentan en los siguientes Teoremas, las pruebas son similares a las del Teorema 5.8.

**Teorema 5.9** (Observador de orden-completo modificado). *Se considera (5.25a) y (5.39). Dada la matriz*

$$\mathbf{J}_{mc} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & \mathbf{J}_{1,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{mr} & \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

donde  $\mathbf{J}_{1,1}$ ,  $\mathbf{J}_{1,2}$  y  $\mathbf{J}_{mr}$  se definen en (5.27) y (5.41), respectivamente. Si  $\mu_p(\mathbf{J}_{mc}) < \delta$  para una constante  $\delta > 0$  y  $\forall [\hat{\mathbf{y}}^T \hat{\mathbf{v}}^T \hat{\boldsymbol{\xi}}^T]^T$ , el error de estimación  $\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)$  convergerá exponencialmente a cero.

**Teorema 5.10** (Observador sincronizado modificado). *Considere el observador sincronizado modificado, el cual consiste en un conjunto de observadores de orden-completo modificados más el término de acoplamiento  $-K_s \sum_j (\hat{\mathbf{u}}_i - \hat{\mathbf{u}}_j)$ , donde  $\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{\mathbf{y}}_i^T \hat{\mathbf{v}}_i^T \hat{\boldsymbol{\xi}}_i^T]^T$ ,  $j = 1, \dots, N$  y  $\boldsymbol{\xi}_i = \mathbf{K}\zeta(\mathbf{y}_i, \mathbf{b})$ . Bajo las mismas suposiciones que en el Teorema 5.9, el valor promedio de los observadores sincronizados recupera el estimado de las coordenadas de objeto como en el caso libre de ruido como  $N \rightarrow \infty$ .*

### 5.3. Aplicación al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión

En problemas de visión, la dinámica de un objeto moviéndose en 3D está descrita a través de su imagen proyectada en un plano por un sistema dinámico de perspectiva. Para aplicaciones tales como control de robots, vigilancia e imágenes médicas, la profundidad desconocida del objeto en tres dimensiones debe ser estimada.

La estimación de profundidad ha sido resuelta a lo largo de los años con teoría de sistemas y/o técnicas experimentales. Inspirados por un identificador de parámetros, un observador de alta ganancia llamado IBO por sus siglas en inglés (Identifier Based Observer) es presentado en [64], este observador concluye convergencia

exponencial de los estados estimados. Usando el método de modos deslizantes y técnicas de adaptación, en [65] se diseña un observador discontinuo, el cual es más fácil de implementar y presenta mejor desempeño ante mediciones ruidosas que el IBO. Un observador de cuarto orden se propone en [66], cuyo diseño es menos complejo que el observador discontinuo. Usando la metodología de inmersión e invarianza, se obtiene un observador de primer orden que concluye convergencia asintótica semi-global [50] o global [49], sin embargo, estos observadores son más sensibles al ruido que los presentados en [64]-[66]. En [67] para sistemas de visión perspectiva invariantes en el tiempo, se obtienen otras formas de observador que son fáciles de diseñar.

En el contexto de aplicaciones prácticas, en [68] se desarrollan dos observadores construidos a partir de la teoría de Lyapunov y de técnicas de observadores no lineales para la observación del eje focal y la profundidad. Un vehículo autónomo submarino se implementa en [69] con un observador de orden reducido que garantiza convergencia exponencial global, además, se obtiene una condición de observabilidad menos restrictiva que la que se encuentra usualmente en la literatura.

Los trabajos mencionados con anterioridad, asumen la dinámica de todos los parámetros conocida. El caso en que la profundidad y los parámetros son desconocidos se ha resuelto con técnicas tales como visión estéreo [70] y métodos de homografía [71]. Recientemente, un observador que usa parte de la velocidad lineal y la aceleración para recuperar las coordenadas del objeto se presenta en [72].

En todas las referencias mencionadas, se asume que la medición está limpia en el diseño del observador. El ruido en la medición es importante en los problemas de visión ya que si no se trata adecuadamente, puede afectar el desempeño del sistema. Con los observadores diseñados en la sección anterior, se logra obtener el estado estimado incluso en la presencia de ruidos fuertes en la salida, desde

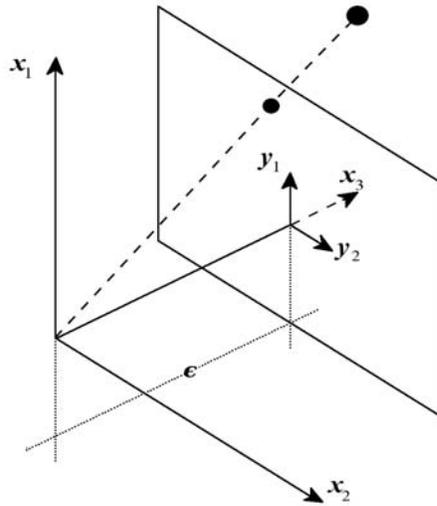


FIGURA 5.5: Esquema del sistema de visión perspectiva.

el punto de vista de análisis se establecen condiciones de convergencia global y semi-global.

### 5.3.1. Planteamiento del problema

La dinámica de un sistema de visión perspectiva está descrita por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad (5.44a)$$

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T = \epsilon \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_3 \end{bmatrix}^T, \quad (5.44b)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  denota las coordenadas no medibles del objeto en un sistema de referencia inercial (Fig. 5.5) y  $a_{ij} = a_{ij}(t)$ ,  $b_i = b_i(t)$ ,  $\forall i, j = 1, 2, 3$ , son los parámetros de movimiento, los cuales son conocidos. La salida medible  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$  es la proyección perspectiva del objeto en el plano de imagen, mientras que el eje

focal de la cámara está dado por  $\epsilon$ . El objetivo en el problema de visión perspectiva es reconstruir las coordenadas  $\mathbf{x}$  a partir de las mediciones de la imagen  $\mathbf{y}$ . Dicho objetivo, se logra bajo las siguientes suposiciones:

**Suposición 5.11.** *Propiedades del sistema de visión perspectiva ([50, 64, 68, 69]).*

1.  $a_{ij}, b_i \in \mathcal{L}_\infty, \forall i, j = 1, 2, 3$  y  $a_{ij}, b_i$  son funciones diferenciables de primer orden. Se asumen conocidas cotas por arriba  $\bar{b}_3, \bar{a}_{3i}$  sobre  $b_3, a_{3i}$ ;
2.  $x_3(t) > \epsilon > 0$ , sin pérdida de generalidad, se asume  $\epsilon = 1$ ;
3. La salida  $\mathbf{y}(t)$  está acotada por constantes conocidas  $\underline{\mathbf{y}} \leq \mathbf{y}(t) \leq \bar{\mathbf{y}}$ .

**Suposición 5.12.** *Observabilidad del sistema(5.44) ([64]).*

$$(b_1 - b_3 y_1)^2 + (b_2 - b_3 y_2)^2 \geq \omega, \quad \omega > 0. \quad (5.45)$$

### 5.3.2. Observador de orden-reducido

Bajo la suposición 1<sup>3</sup>, el sistema (5.44) se puede reescribir como [64]-[50]

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ f_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 - b_3 y_1) \\ (b_2 - b_3 y_2) \end{bmatrix} z \quad (5.46a)$$

$$\dot{z} = f_3(\mathbf{y})z - b_3 z^2, \quad (5.46b)$$

donde

$$f_1(\mathbf{y}) = a_{13} + (a_{11} - a_{33})y_1 + a_{12}y_2 - a_{31}y_1^2 - a_{32}y_1y_2,$$

$$f_2(\mathbf{y}) = a_{23} + a_{21}y_1 + (a_{22} - a_{33})y_2 - a_{31}y_1y_2 - a_{32}y_2^2,$$

$$f_3(\mathbf{y}) = -(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}).$$

---

<sup>3</sup>La transformación para el caso  $\epsilon \neq 1$ , y los observadores asociados, se presentan en el Apéndice B.

El estado  $z = \frac{1}{x_3} < 1/\epsilon$  es no medible. Si un estimado  $\hat{z}$  de  $z$  está disponible, entonces las coordenadas del objeto pueden ser reconstruidas mediante

$$\hat{x}_1 = \frac{y_1}{\hat{z}\epsilon}, \quad \hat{x}_2 = \frac{y_2}{\hat{z}\epsilon}, \quad \hat{x}_3 = \frac{1}{\hat{z}}. \quad (5.47)$$

A partir de los resultados presentados en la sección anterior, es posible aplicar el Corolario 3.1 al sistema (5.46) con el fin de obtener un observador orden-reducido y establecer sus propiedades de convergencia.

**Teorema 5.13** (Observador de orden-reducido). *Dado el sistema (5.46) se considera el observador (3.12)-(3.13), con  $f_z(\mathbf{y}, \hat{z}, t) = f_3(\mathbf{y})\hat{z} - b_3\hat{z}^2$ ,  $\mathbf{g}(\mathbf{y}, t) = [f_1(\mathbf{y}) \ f_2(\mathbf{y})]^T$  y las siguientes características:*

1. El mapeo  $\zeta = \zeta(\mathbf{y}, \mathbf{b})$  está en la forma

$$\zeta = \left(b_1 - \frac{b_3}{2}y_1\right)y_1 + \left(b_2 - \frac{b_3}{2}y_2\right)y_2, \quad (5.48)$$

con derivadas parciales

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} = [(b_1 - b_3y_1) \ (b_2 - b_3y_2)] \quad (5.49a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\dot{b}_1 - \frac{\dot{b}_3}{2}y_1\right)y_1 + \left(\dot{b}_2 - \frac{\dot{b}_3}{2}y_2\right)y_2 \quad (5.49b)$$

2. El acoplamiento entre el observador y el sistema, está dado por (3.21) en términos de la función  $\alpha = \alpha(\mathbf{y}, \mathbf{b})$

$$\alpha = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \zeta^T}{\partial \mathbf{y}} = [(b_1 - b_3y_1)^2 + (b_2 - b_3y_2)^2] \quad (5.50)$$

y la ganancia

$$K > \frac{c(\delta_z)}{w}, \quad c(\delta_z) = \frac{2\bar{b}_3}{\epsilon} + 2\bar{b}_3\delta_z + \bar{a}_{31}\bar{y}_1 + \bar{a}_{32}\bar{y}_2 + \bar{a}_{33}, \quad (5.51)$$

donde  $w$  está dada por la condición (5.45).

Bajo las suposiciones 5.11, 5.12 y  $|\hat{z}(0) - z(0)| \leq \delta_z$ , para cierta  $\delta_z > 0$ , el error de estimación  $\hat{z}(t) - z(t)$  convergerá exponencialmente a cero.

*Demostración.* Dado el Corolario 3.1 y la función de acoplamiento (3.21) con  $\alpha$  definida como (5.50), existe sincronización del estado del observador  $\hat{z}$  al estado no-observable  $z$  si la ganancia  $K$  es suficientemente grande. Por lo tanto, la región de contracción se caracteriza a partir del Jacobiano

$$J_r = \frac{\partial f_z(\mathbf{y}, \hat{z}, t)}{\partial \hat{z}} - K \frac{\partial h(\mathbf{y}, \hat{z}, t)}{\partial \hat{z}} = f_3(\mathbf{y}) - 2b_3\hat{z} - K\alpha \quad (5.52)$$

Por las suposiciones 5.11 y 5.12 y la condición (5.51), existe una  $\lambda_r > 0$  tal que

$$-J_r = K [(b_1 - b_3y_1)^2 + (b_2 - b_3y_2)^2] + 2b_3\hat{z} + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33} \geq \lambda_r, \quad (5.53)$$

pues

$$\begin{aligned} |2b_3\hat{z} + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}| &\leq |2b_3z + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}| + |2b_3(\hat{z} - z)| \\ &\leq \frac{2\bar{b}_3}{\epsilon} + \bar{a}_{31}\bar{y}_1 + \bar{a}_{32}\bar{y}_2 + \bar{a}_{33} + 2\bar{b}_3\delta_z = c(\delta_z). \end{aligned}$$

Si  $\hat{z}(0)$  se inicializa en  $|\hat{z}(0) - z(0)| \leq \delta_z$  entonces  $J_r \leq -\lambda_r$ .  $\square$

*Observación 5.4.* La teoría de contracción provee una metodología simple para diseñar un observador de orden-reducido, y garantiza convergencia exponencial semi-global de las soluciones para el problema de estimación de profundidad en sistemas de visión perspectiva. Bajo la Suposición 5.11, se puede elegir  $0 < \hat{z}(0) \leq \delta_z - 1/\epsilon$  para garantizar la condición  $|\hat{z}(0) - z(0)| \leq \delta_z$  en el Teorema 5.13. Esto implica que, para esta aplicación, es suficiente con garantizar convergencia semi-global.

*Observación 5.5.* De forma similar al observador presentado en [69], la convergencia exponencial puede ser garantizada si se aplica la condición de contracción débil. Esta condición está relacionada con la suposición de observabilidad relajada dada en [69].

*Observación 5.6.* En particular se obtiene la misma forma del observador presentado en [50], donde se aplica la técnica de inmersión e invarianza, si se toma  $\zeta = \beta$ .

### 5.3.3. Observador de orden-completo

**Definición 5.14.** En lo que resta de este escrito, se denotará como *Observador de orden-completo* al observador (5.25)-(5.26), bajo las siguientes características:

1.  $\alpha$ ,  $\zeta$  y  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$  se consideran en la forma (5.50), (5.48) y (5.49b), respectivamente.
2. La función de acoplamiento se tomará como  $h(\mathbf{y}, \hat{v} + K\zeta) = \alpha(\hat{v} + K\zeta)$ , mientras que  $\gamma(\mathbf{y}, t) = \alpha\mathbf{y}$ .
3.  $\mathbf{f}_y(\cdot)$  y  $\mathbf{f}_z(\cdot)$  se definen como

$$\mathbf{f}_y(\mathbf{y}, \hat{v} + K\zeta) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ f_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - b_3 y_1(\mathbf{y}) \\ b_2 - b_3 y_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} (\hat{v} + K\zeta), \quad (5.54)$$

$$\mathbf{f}_z(\mathbf{y}, \hat{v} + K\zeta) = f_3(\mathbf{y})(\hat{v} + K\zeta) - b_3(\hat{v} + K\zeta)^2 \quad (5.55)$$

A partir de la definición anterior, es posible definir el siguiente Teorema.

**Teorema 5.15.** *Considere el Observador de orden-completo, con ganancia  $K$  que satisface*

$$K > \frac{c(\delta_z) + \sqrt{c^2(\delta_z) + w}}{2w} \quad (5.56)$$

y  $c(\delta_z)$  definida en (5.51). Bajo las suposiciones 5.11, 5.12 y para cierta  $\delta_z > 0$ , el error de estimación  $\hat{z}(t) - z(t)$  convergerá a cero exponencialmente siempre y cuando  $\underline{\mathbf{y}} \leq \hat{\mathbf{y}}(0) \leq \bar{\mathbf{y}}$  y  $|\hat{z}(0) - z(0)| \leq \delta_z$ .

*Demostración.* La parte simétrica de la matriz Jacobiana negativa  $-\mathbf{J}_c$  del *Observador de orden-completo* está dada por

$$-\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & \mathbf{J}_{1,2} \\ \mathbf{J}_{2,1} & J_{2,2} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

con  $\mathbf{J}_{1,1} = \alpha \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{J}_{1,2} = [(b_1 - b_3 y_1) \ (b_2 - b_3 y_2)]^T$ ,  $\mathbf{J}_{2,1} = \mathbf{0}^T$  y

$$J_{2,2} = -f_3(\mathbf{y}) + 2b_3(\hat{v} + \zeta) + \alpha. \quad (5.58)$$

Por lo tanto, la parte simétrica de  $\mathbf{J}_c$  es uniformemente negativa definida y el *Observador de orden completo es contrayente* si se cumple la condición (2.2), es decir

$$J_{2,2} > \mathbf{J}_{1,2}^T \mathbf{J}_{1,1}^{-1} \mathbf{J}_{1,2} \quad (5.59)$$

Dicha condición se satisface si

$$4K[\alpha + 2b_3(\hat{v} + \zeta) - f_3(\mathbf{y})] > 1. \quad (5.60)$$

Sea  $\Lambda = \alpha + 2b_3(\hat{v} + \zeta) - f_3(\mathbf{y})$ , dadas (5.50) y las suposiciones 1 y 2 resulta que

$$\begin{aligned} \Lambda &= K [(b_1 - b_3 y_1)^2 + (b_2 - b_3 y_2)^2] + 2b_3(\hat{v} + \zeta) + a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} \\ &\geq Kw + 2b_3(\hat{v} + \zeta) + a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

y

$$\begin{aligned} |2b_3(\hat{v} + \zeta) + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}| &\leq |2b_3z + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}| + |2b_3(\hat{v} - v)| \\ &\leq c(\delta_z). \end{aligned} \quad (5.62)$$

El término  $c(\delta_z)$  está definido en (5.51). Ya que  $\hat{v}(0)$  se inicializa en  $|\hat{v}(0) - v(0)| \leq \delta_z$ , el *Observador de orden-completo* es contrayente. Se observa que la condición (5.60) está implicada por  $4K[Kw - c(\delta_z)] - 1 > 0$ , cuya solución con respecto a  $K$  es (5.56).  $\square$

*Observación 5.7.* Para la implementación práctica, la salida  $\mathbf{y}$  incluye ruido proveniente de la medición, por lo que es posible inicializar el observador en  $\hat{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}(0)$ . Por la propiedad de robustez de los sistemas contrayentes [73], la distancia entre las trayectorias del sistema corrupto y aquellas del *Observador de orden-completo* están acotadas.

### 5.3.4. Observador sincronizado

Siguiendo la idea presentada en la Sección 5.2, donde se establece que un grupo de observadores sincronizados puede mejorar el comportamiento individual de cada uno de sus elementos, en este apartado, se define un conjunto de *Observadores de orden-completo* interconectados con dinámica

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}}_i = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}_i) \\ f_2(\mathbf{y}_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 - b_3y_{1,i}) \\ (b_2 - b_3y_{2,i}) \end{bmatrix} (\hat{v}_i + \zeta_i) \quad (5.63a)$$

$$\begin{aligned} & -\alpha_i(\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i) - K_s \sum_j (\hat{\mathbf{y}}_i - \hat{\mathbf{y}}_j), \\ \dot{\hat{v}}_i &= f_3(\mathbf{y}_i)(\hat{v}_i + \zeta_i) - b_3(\hat{v}_i + \zeta_i)^2 - \alpha_i(\hat{v}_i + \zeta_i) \\ & -K(b_1 - b_3y_{1,i})f_1(\mathbf{y}_i) - K(b_2 - b_3y_{2,i})f_2(\mathbf{y}_i) \\ & -\gamma - K_s \sum_j (\hat{v}_i - \hat{v}_j), \end{aligned} \quad (5.63b)$$

donde  $j = 1, \dots, N$ ,  $\zeta_i = \zeta(\mathbf{y}_i, \mathbf{b})$ ,  $\alpha_i = \alpha(\mathbf{y}_i, \mathbf{b})$  y  $K_s > 0$  es la ganancia de sincronización.

El siguiente Teorema establece las condiciones que permiten garantizar la sincronización de un grupo de observadores.

**Teorema 5.16** (Observador sincronizado). *Bajo las mismas suposiciones que en el Teorema 5.15 el valor promedio (5.5) para  $\hat{\mathbf{x}}_i = [\hat{\mathbf{y}}_i \ \hat{v}_i] \in \mathbb{R}^n$ , de los observadores sincronizados recupera el estimado de las coordenadas del objeto como en el caso libre de ruido cuando  $N \rightarrow \infty$ .*

*Demostración.* La contracción del observador libre de ruido, que corresponde en este caso al *Observador de orden-completo*, se establece en el Teorema 5.15. Además, las suposiciones hechas en el Teorema 5.7 se verifican para la dinámica del sistema de visión perspectiva (5.44). Los resultados se obtienen directamente de la aplicación del Teorema 5.7 tomando en cuenta la dinámica del líder, es decir, el sistema (5.46) escrito en términos de  $v$  y  $\zeta$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ f_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 - b_3 y_1) \\ (b_2 - b_3 y_2) \end{bmatrix} (v + \zeta) - \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{y}) \\ \dot{v} &= f_3(\mathbf{y})(v + \zeta) - b_3(v + \zeta)^2 - \alpha(v + \zeta) \\ &\quad - K(b_1 - b_3 y_1)f_1(\mathbf{y}) - K(b_2 - b_3 y_2)f_2(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (5.64a)$$

y la del observador sincronizado (5.63).  $\square$

*Observación 5.8.* A continuación se mencionan algunos comentarios relacionados con la obtención de las coordenadas de imagen de un punto. En los sistemas de visión perspectiva las coordenadas de un punto se miden por una cámara CCD. Usualmente, mediante técnicas de segmentación [74], se obtiene un conjunto de coordenadas de visión  $\mathbf{y}_i$  (píxeles) de un punto, después se calcula el centro de masa o centroide de este conjunto y se usa como las coordenadas de imagen  $\mathbf{y}$  (para los observadores de orden-reducido y orden-completo). Para el observador

sincronizado, donde se requieren diferentes mediciones, el conjunto de las ( $N$ ) coordenadas de visión  $\mathbf{y}_i$  se utiliza directamente en el grupo de los  $N$  observadores sincronizados omitiendo así el procedimiento de cálculo de centro de masa.

### 5.3.5. Observadores bajo mediciones ruidosas

A continuación, los resultados obtenidos en la sección 5.2.3 se aplican al problema de estimación de profundidad para sistemas de visión perspectiva.

**Teorema 5.17** (Observador de orden-reducido modificado). *Considere el siguiente observador para el sistema (5.46)*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{v}} &= f_3(\mathbf{y})(\hat{v} + \zeta) - b_3(\hat{v} + \zeta)^2 - \alpha(\hat{v} + \hat{\zeta}) \\ &\quad - K(b_1 - b_3 y_1)f_1(\mathbf{y}) - K(b_2 - b_3 y_2)f_2(\mathbf{y}) - \gamma, \end{aligned} \quad (5.65a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\zeta}} &= \alpha(\hat{v} + \zeta) + K(b_1 - b_3 y_1)f_1(\mathbf{y}) \\ &\quad + K(b_2 - b_3 y_2)f_2(\mathbf{y}) + \gamma - K_z(\hat{\zeta} - \zeta) \end{aligned} \quad (5.65b)$$

donde  $K_z > 0$ ,  $\alpha$ ,  $K$  están dadas por (5.50), (5.51), respectivamente, y la estimación de profundidad se obtiene por

$$\hat{z} = \hat{v} + \hat{\zeta} \quad (5.66)$$

Bajo las Suposiciones 5.11, 5.12 y para cierta  $\delta_z > 0$  el error de estimación  $\hat{z}(t) - z(t)$  del observador de orden-reducido modificado convergerá exponencialmente a cero siempre y cuando  $|\hat{v}(0) - v(0)| \leq \delta_z$ .

*Demostración.* A partir de los resultados del Teorema 5.8 si la matriz (5.41) es uniformemente negativa definida, el observador de orden-reducido modificado recobrará el estado  $z$ . Dado el sistema (5.65), la parte negativa simétrica de su matriz

Jacobiana es de la forma

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{J}_{mr} + \mathbf{J}_{mr}^T) = \begin{bmatrix} -J_r & 0 \\ 0 & -K_z \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

donde  $-J_r$ , se define como en (5.58). Bajo las Suposiciones 5.11, 5.12 y  $|\hat{z}(0) - z(0)| \leq \delta_z$  para cierta  $\delta_z > 0$ , el observador de orden-reducido modificado es contrayente y se garantiza convergencia exponencial semi-global de  $\hat{v}$  a  $v$  y de  $\hat{\zeta}$  a  $\zeta$ .  $\square$

**Teorema 5.18** (Observador de orden-completo modificado). *Considere el sistema*

$$\dot{\hat{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{y}) \\ f_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_1 - b_3 y_1) \\ (b_2 - b_3 y_2) \end{bmatrix} (\hat{v} + \zeta) - \alpha(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \quad (5.68a)$$

y el observador de orden-reducido modificado (5.65) con  $K$  dada por (5.56) y  $K_z > 0$ . Bajo las Suposiciones 5.11, 5.12 y para cierta  $\delta_z > 0$ , el error de estimación  $\hat{z}(t) - z(t)$  convergerá exponencialmente a cero siempre y cuando  $\underline{\mathbf{y}} \leq \hat{\mathbf{y}}(0) \leq \bar{\mathbf{y}}$  y  $|\hat{z}(0) - z(0)| \leq \delta_z$ .

**Teorema 5.19** (Observador sincronizado modificado). *Considere el observador sincronizado modificado, el cual consiste en un conjunto de observadores de orden-completo modificados más el término de acoplamiento  $-K_s \sum_j (\hat{\mathbf{u}}_i - \hat{\mathbf{u}}_j)$ , donde  $\hat{\mathbf{u}}_i = [\hat{\mathbf{y}}_i \ \hat{v}_i \ \hat{\zeta}_i]^T$ ,  $j = 1, \dots, N$  y  $\zeta_i = \zeta(\mathbf{y}_i, \mathbf{b})$ . Bajo las mismas suposiciones que en el Teorema 5.18, el valor promedio de los observadores sincronizados recupera el estimado de las coordenadas de objeto como en el caso libre de ruido como  $N \rightarrow \infty$ .*

### 5.3.6. Resultados de simulación

A continuación, mediante simulaciones numéricas, se comprueba el desempeño de los observadores ante ruido en la medición. De manera similar a [69], los parámetros del sistema de visión perspectiva (5.44) se toman como cero excepto para  $a_{1,3} = -\pi/30$  (rad/s),  $a_{3,1} = -a_{1,3}$  y  $\mathbf{b} = [0.3 \ 0.4 + 0.1 \sin(\pi t/4) \ -0.3]$  (m/s), las condiciones iniciales se eligen como  $\mathbf{x}(0) = [10 \ 5 \ 2]^T$  (m).

Para todos los observadores, se incluye a la señal  $\mathbf{y}$  ruido Blanco Gaussiano (WGN, por sus siglas en inglés) con una relación señal-ruido (SNR) de  $20dB$ . Adicionalmente al ruido en las mediciones de visión, las versiones modificadas de los observadores en el apartado 5.2.3 se implementan con un ruido Blanco Gaussiano con una intensidad de 2.5% el valor máximo de los parámetros de movimiento. Las condiciones iniciales se seleccionan como  $\hat{z}(0) = 0.9$ ,  $\hat{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}(0)$  and  $\hat{\zeta}(0) = \zeta(\mathbf{y}(0), \mathbf{b}(0))$ , donde  $\mathbf{y}(0)$ ,  $\mathbf{b}(0)$  son mediciones corrompidas. La ganancia se selecciona como  $K = 5$  para los observadores de orden-reducido, completo y sincronizado y como  $K = 1.3$ ,  $K_z = 20$  en las versiones modificadas.

Se simulan  $N = 50$  observadores interconectados con ganancia de sincronización  $K_s = 750$ . Para emular la situación real en que se presenta ruido en las mediciones de visión (ver Observación 5.8), la entrada  $\mathbf{y}_i$  y las condiciones iniciales  $\hat{\mathbf{y}}_i(0) = \hat{\mathbf{y}}(0)$ ,  $\hat{v}_i(0) = \hat{v}(0)$ ,  $\hat{\zeta}_i(0) = \hat{\zeta}(0)$  se forman por la señal  $\mathbf{y}$  corrompida por  $N$  diferentes fuentes de ruido Blanco Gaussiano. Con el objetivo de comparar con el caso de los observadores no sincronizados,  $\bar{\mathbf{x}}$  (5.5) se toma como salida.

Para contrastar los resultados presentados en esta sección con los existentes en la literatura, se eligió al observador de orden discontinuo en [65] ya que presenta el mejor desempeño ante mediciones ruidosas en comparación con otros diseños relevantes. Los errores de estimación cuadráticos medios (RMS) de los observadores de orden-reducido, completo, sincronizado y discontinuo se enlistan en la Tabla 5.1. Con el fin de enfatizar el efecto de reducción de ruido, el error RMS se cuantifica

TABLA 5.1: Errores RMS de los observadores para  $t \in [1.3, 2]$  (sec)\*

Error	No modificados			Discontinuo
	Reducido	Completo	Sincronizado	
$x_1 - \hat{x}_1$	2180	0.384	0.153	0.336
$x_2 - \hat{x}_2$	1257	0.221	0.083	0.358
$x_3 - \hat{x}_3$	716	0.125	0.047	0.119

\*La señal  $\mathbf{y}$  incluye un ruido Blanco Gaussiano con SNR de 20dB

 TABLA 5.2: Errores RMS de los observadores para  $t \in [1.3, 2]$  (sec)\*\*

Error	Reducido	Completo	Sincronizado	Discontinuo
$x_1 - \hat{x}_1$	1.153	1.103	0.388	0.562
$x_2 - \hat{x}_2$	0.736	0.632	0.219	0.421
$x_3 - \hat{x}_3$	0.354	0.354	0.129	0.192

\*\*La señal  $\mathbf{y}$  incluye WGN con SNR de 20dB y 2.5% de ruido se incluye  $a_{ij}, b_i$

prácticamente en estado estacionario  $t \in [1.3, 2]$  (seg). Para el caso en el que existe presencia de ruido en las mediciones de visión y en los parámetros de movimiento, se implementan las versiones modificadas de los observadores, sección 5.2.3. El valor RMS del error de estimación se muestra en la Tabla 5.2.

Las coordenadas del objeto  $\mathbf{x}$  se observan en las Figuras 5.6, 5.7, 5.8, mientras que el error de observación  $x_3 - \hat{x}_3$  se muestra en la Figura 5.9. En particular, las líneas discontinuas (verde), sólidas (azul) y punteadas (rojo) representan a los observadores de orden completo modificado, sincronizado y discontinuo, respectivamente.

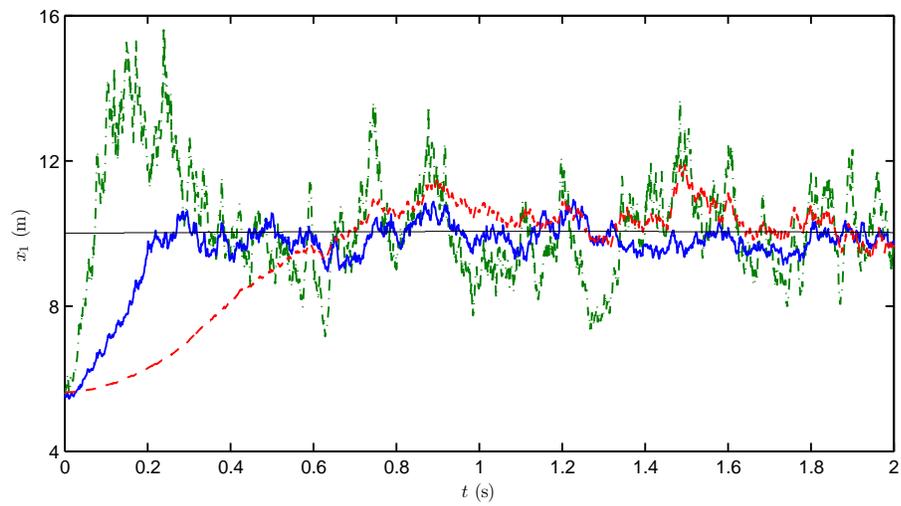


FIGURA 5.6: Coordenada  $x_1$

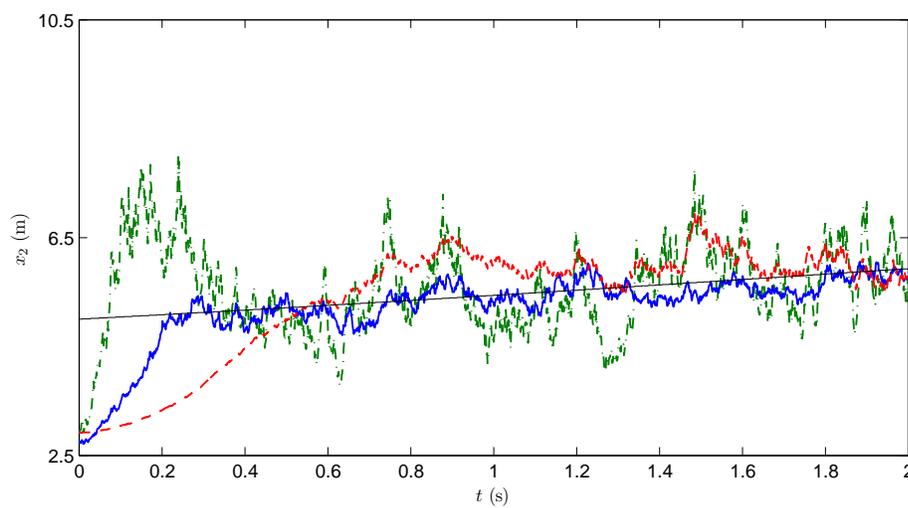


FIGURA 5.7: Coordenada  $x_2$

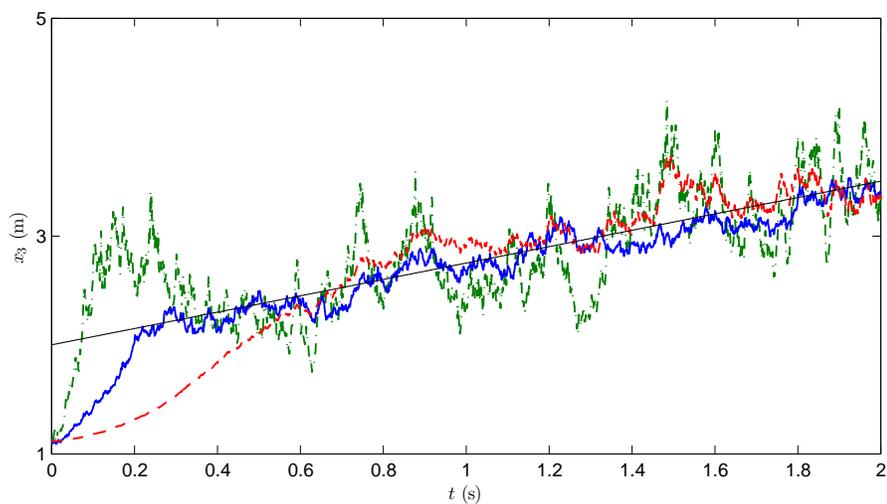


FIGURA 5.8: Coordenada  $x_3$

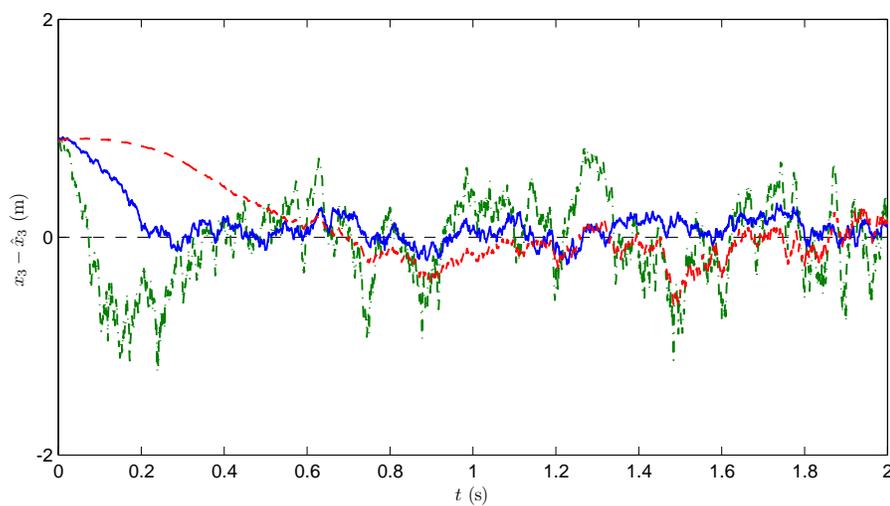


FIGURA 5.9: Error en la estimación de profundidad  $x_3 - \hat{x}_3$

# Capítulo 6

## Conclusiones y Trabajo Futuro

El trabajo de esta tesis es una contribución al problema de sincronización de sistemas no lineales, desde el punto de vista de teoría de sistemas, en el que se consideran de forma particular dos tipos de incertidumbre: en el estado y en los parámetros.

Los algoritmos desarrollados están basados en una herramienta de diseño poco convencional y que está relacionada con la convergencia de trayectorias, la teoría de contracción, además de presentar un procedimiento de diseño simple.

Con base en dicha teoría y en el concepto de contracción parcial se desarrollaron un algoritmo de adaptación para la sincronización de sistemas, con aplicación particular en sistemas biológicos, así como también una serie de observadores con el fin de reducir el efecto del ruido en la medición, con aplicación final al problema de estimación de profundidad en sistemas de visión perspectiva. Por otra parte, gracias a la metodología presentada en esta tesis se logró colaborar en el diseño de algoritmos para el problema de control adaptable e identificación en sistemas no linealmente parametrizados.

El mecanismo de adaptación que logra la sincronización de los sistemas se desarrolló para sistemas no lineales con parametrización no lineal y se validó mediante simulación. Como resultados, se obtuvo la sincronización de un conjunto de seguidores a un líder con parámetros fijos en la red. Este resultado puede aplicarse directamente a un conjunto de algoritmos de adaptación interconectados con el fin de obtener robustez ante ruido en la medición, con base en los resultados presentados en el Capítulo 4 para el problema de observación.

Por otra parte, los observadores diseñados presentan la flexibilidad de que incluso cuando los parámetros presentan ruido en la medición, es posible utilizar sus versiones modificadas para reducir el efecto del mismo. Con el objetivo final de comparar los resultados obtenidos con los existentes en la literatura para el problema de visión, se presentan simulaciones y mediciones cuantitativas del desempeño de los observadores diseñados en comparación con un observador discontinuo.

Como trabajo futuro, se contempla el diseño de observadores-adaptables para sistemas no lineales con parametrización no lineal (con posible aplicación al problema de Parkinson), así como la extensión del efecto de reducción de ruido por sincronización al problema de sincronización adaptable y la implementación experimental de los observadores para el problema de visión.

# Apéndice A

## Herramientas matemáticas.

### A.1. Medidas inducidas de una matriz

Para una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existen distintas matrices estándar inducidas por su respectiva norma vectorial, las cuales se enlistan a continuación.

- Norma-1  $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |\mathbf{x}_j|$ .

$$\mu_1(\mathbf{A}) = \max_j \left( a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right), \quad (\text{A.1})$$

- Norma-2  $\|\mathbf{x}\|_2 = \left( \sum_{j=1}^n |\mathbf{x}_j|^2 \right)^{1/2}$ .

$$\mu_2(\mathbf{A}) = \max_i \left( \lambda_i \left\{ \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^T}{2} \right\} \right), \quad (\text{A.2})$$

- Norma- $\infty$   $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |\mathbf{x}_j|$ .

$$\mu_\infty(\mathbf{A}) = \max_i \left( a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right), \quad (\text{A.3})$$

- Norma-p  $\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$

$$\mu(\mathbf{A}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{A}\|_i - 1}{\epsilon} \quad (\text{A.4})$$

## A.2. Número de condición.

El número de condición de una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está dado por

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\|\mathbf{A}\|\| \cdot \|\|\mathbf{A}^{-1}\|\| \quad (\text{A.5})$$

donde

$$\|\|\mathbf{A}\|\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}. \quad (\text{A.6})$$

## A.3. Producto de Kronecker

Del álgebra lineal, el producto de Kronecker de dos matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  se define como

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times np} \quad (\text{A.7})$$

Una propiedad importante para  $\mathbf{A}, \mathbf{B} > 0$ , matrices positivas definidas, es que el producto de Kronecker  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  es positivo definido.

# Apéndice B

## Observador para el sistema de visión perspectiva con $\epsilon \neq 1$ .

### B.1. Observador de orden reducido

Dada la salida (5.44b) con  $\epsilon \neq 1$ , el observador de orden reducido está dado por la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{\hat{v}} &= f_{3\epsilon}(\mathbf{y})(\hat{v} + \zeta_\epsilon) - b_3(\hat{v} + \zeta_\epsilon)^2 - \alpha_\epsilon(\hat{v} + \zeta_\epsilon) \\ &\quad - K(\epsilon b_1 - b_3 y_1)f_{1\epsilon}(\mathbf{y}) - K(\epsilon b_2 - b_3 y_2)f_{2\epsilon}(\mathbf{y}) - \gamma_\epsilon,\end{aligned}\tag{B.1a}$$

$$\hat{z} = \hat{v} + \zeta_\epsilon,\tag{B.1b}$$

donde la ganancia del observador es de la forma

$$\alpha_\epsilon = K [(\epsilon b_1 - b_3 y_1)^2 + (\epsilon b_2 - b_3 y_2)^2].\tag{B.2}$$

El resto de los términos se define como

$$\begin{aligned} f_{1\epsilon}(\mathbf{y}) &= \epsilon a_{13} + (a_{11} - a_{33})y_1 + a_{12}y_2 - \frac{a_{31}}{\epsilon}y_1^2 - \frac{a_{32}}{\epsilon}y_1y_2, \\ f_{2\epsilon}(\mathbf{y}) &= \epsilon a_{23} + a_{21}y_1 + (a_{22} - a_{33})y_2 - \frac{a_{31}}{\epsilon}y_1y_2 - \frac{a_{32}}{\epsilon}y_2^2, \\ f_{3\epsilon}(\mathbf{y}) &= -\left(\frac{a_{31}}{\epsilon}y_1 + \frac{a_{32}}{\epsilon}y_2 + a_{33}\right), \end{aligned}$$

mientras que las funciones  $\zeta_\epsilon$  y  $\gamma_\epsilon$  están dadas por

$$\zeta_\epsilon = \zeta_\epsilon(\mathbf{y}, \mathbf{b}) = K \left( \epsilon b_1 - \frac{b_3}{2}y_1 \right) y_1 + K \left( \epsilon b_2 - \frac{b_3}{2}y_2 \right) y_2, \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma_\epsilon = \gamma_\epsilon(\mathbf{y}, \mathbf{b}) = K \left( \epsilon \dot{b}_1 - \frac{\dot{b}_3}{2}y_1 \right) y_1 + K \left( \epsilon \dot{b}_2 - \frac{\dot{b}_3}{2}y_2 \right) y_2. \quad (\text{B.4})$$

# Bibliografía

- [1] Pikovsky, Arkady, Rosenblum, Michael y Kurths, Jürgen: *Synchronization a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge Nonlinear Science. 2001.
- [2] Strogatz, S. H.: *SYNC: The Emerging Science of Spontaneous Order*. New York Hyperon, 2003.
- [3] Pogromsky, Alexander, Glad, Torkel y Nijmeijer, Henk: *On diffusion driven oscillations in coupled dynamical systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 09(04):629–644, 1999.
- [4] Wang, Wei y Slotine, Jean Jacques E.: *On partial contraction analysis for coupled nonlinear oscillators*. Biological Cybernetics, 92(1):38–53, Enero 2005.
- [5] Steur, Erik, Tyukin, Ivan y Nijmeijer, Henk: *Semi-passivity and synchronization of diffusively coupled neuronal oscillators*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 238(21):2119–2128, 2009.
- [6] Tyukin, I.Yu., Prokhorov, D.V. y Leeuwen, C. van: *Adaptation and parameter estimation in systems with unstable target dynamics and nonlinear parameterization*. IEEE Trans. Autom. Control, 52(9):1543–1559, 2007.
- [7] Tyukin, Ivan y Kazantsev, Viktor B.: *Natural frequency adaptation as a mechanism for phase synchronization in neural systems*. 2011.

- 
- [8] Tabareau, Nicolas, Slotine, Jean Jacques E. y Pham, Quang Cuong: *How synchronization protects from noise*. PLoS Comput Biol, 6(1):e1000637, Enero 2010.
- [9] Chopra, N. y Spong, M. W.: *Passivity-based control of multi-agent systems*. Advances in Robot Control: From Everyday Physics to Human-like Movements. Springer-Verlag, 2006.
- [10] Arcak, M.: *Passivity as a design tool for group coordination*. IEEE Transactions on Automatic Control, 52(8):1380–1389, Agosto 2007.
- [11] Rodriguez-Angeles, A. y Nijmeijer, H.: *Mutual synchronization of robots via estimated state feedback: a cooperative approach*. IEEE Trans. Control Syst. Technol., 12(4):542–554, Julio 2004.
- [12] Ren, W.: *Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems*. International Journal of Control, 82(11):2137–2149, Noviembre 2009.
- [13] Pham, Quang Cuong y Slotine, Jean Jacques E.: *Stable concurrent synchronization in dynamic system networks*. Neural Networks, 20(1):62–77, 2007.
- [14] Hirche, S. y Hara, S.: *Stabilizing interconnection characterization for multi-agent systems with dissipative properties*. En *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, páginas 1571–1577, 2008.
- [15] Wu, C.W. y Chua, L.O.: *On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, 43(2):161–165, 1996.
- [16] Pogromsky, A. y Nijmeijer, H.: *Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems*. 48(2):152–162, Febrero 2001.

- 
- [17] Oud, T. Ward y Tyukin, Ivan: *Sufficient conditions for synchronization in an ensemble of Hindmarsh and Rose neurons: passivity-based approach*. Septiembre 2004.
- [18] Zhou, Jin, Lu, Junan y Lü, Jinhua: *Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network*. IEEE Trans. Autom. Control, páginas 652–656, 2006.
- [19] Pogromsky, A. Yu.: *Passivity based design of synchronizing systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 08(02):295–319, 1998.
- [20] Tianping Chen, Xiwei Liu: *Network Synchronization with an Adaptive Coupling Strength*. ArXiv Mathematics e-prints, Octubre 2006.
- [21] Lellis, Pietro, Bernardo, Mario y Garofalo, Francesco: *Decentralized adaptive control for synchronization and consensus of complex networks*. En Chiuso, Alessandro y cols. (editores): *Modelling, Estimation and Control of Networked Complex Systems*, Understanding Complex Systems, páginas 27–42. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [22] Chung, S. J. y Slotine, Jean Jacques E.: *Cooperative robot control and concurrent synchronization of Lagrangian systems*. IEEE Trans. Robot., 25(3):686–700, Junio 2009.
- [23] Nuño, E., Ortega, R., Basañez, L. y Hill, D.: *Synchronization of networks of nonidentical Euler-Lagrange systems with uncertain parameters and communication delays*. IEEE Trans. Autom. Control, 56(4):935–941, Abril 2011.
- [24] Wang, Wei y Slotine, J. J.E.: *A theoretical study of different leader roles in networks*. IEEE Trans. Autom. Control, 51(7):1156–1161, Julio 2006.
- [25] Astolfi, A. y Ortega, R.: *Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 48(4):590–606, 2003.

- 
- [26] Qu, Zhihua, Hull, R.A. y Wang, Jing: *Globally stabilizing adaptive control design for nonlinearly-parameterized systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 51(6):1073–1079, 2006.
- [27] Liu, Xiangbin, Ortega, R., Su, Hongye y Chu, Jian: *Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 55(9):2209–2214, Septiembre 2010.
- [28] Flores-Perez, A., Grave, I. y Tang, Yu: *Contraction based adaptive control for a class of nonlinearly parameterized systems*. En *American Control Conference (ACC), 2013*, páginas 2649–2654, Junio 2013.
- [29] Lohmiller, Winfried y Slotine, Jean Jacques E: *On contraction analysis for non-linear systems*. Automatica, 34(6):683–696, 1998.
- [30] Russo, Giovanni y Bernardo, M. di: *How to synchronize biological clocks*. Journal of Computational Biology, 16:379–393, 2009.
- [31] Flores-Perez, A., Grave, I. y Tang, Yu: *Estimation and indirect adaptive control for nonlinearly parameterized systems*. En *European Control Conference (ECC), 2014*, páginas 2078–2083, Junio 2014.
- [32] Flores-Perez, A., Grave, I. y Tang, Yu: *Identification of nonlinear systems with nonlinear parameterization*. En *European Control Conference (ECC), 2015*, Julio 2015.
- [33] Grave, Ileana y Tang, Yu: *Adaptation in biological networks*. En *IEEE International Conference on Control Science and Systems Engineering (CCSSE)*, Diciembre 2014.
- [34] Flores-Perez, A. Grave Ileana y Tang, Yu: *Adaptive control for systems with nonlinear parameterizations: a top-down approach (sometido)*. IEEE Trans. Autom. Control, 2015.

- [35] Grave, I. y Tang, Yu: *A new observer for perspective vision systems under noisy measurements*. IEEE Trans. Autom. Control, 60(2):503–508, Febrero 2015.
- [36] Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [37] Pavlov, Alexey, Wouw, Nathan van de y Nijmeijer, Henk: *Convergent Systems: Analysis and Synthesis*. En Meurer, Thomas y cols. (editores): *Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems*, volumen 322 de *Lecture Notes in Control and Information Science*, páginas 131–146. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [38] Angeli, D.: *A Lyapunov approach to incremental stability properties*. IEEE Trans. Autom. Control, 47(3):410–421, Marzo 2002.
- [39] Slotine, Jean Jacques E.: *Modularity, Synchronization, and What Robotics May Yet Learn from the Brain*. En Kawamura, Sadao y Svinin, Mikhail (editores): *Advances in Robot Control*, páginas 181–200. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [40] Russo, Giovanni y Slotine, Jean Jacques E.: *Global convergence of quorum-sensing networks*. Phys. Rev. E, 82(4):041919, Oct 2010.
- [41] Flores-Pérez, Anahí, Grave, Ileana y Tang, Yu: *Contraction based identification for nonlinear systems*. En *17th IFAC Symposium on System Identification*, Octubre 2015.
- [42] Aeyels, Dirk y Peuteman, Joan: *On exponential stability of nonlinear time-varying differential equations*. Automatica, 35(6):1091–1100, 1999.
- [43] Del Vecchio, D. y Slotine, J.E.: *A contraction theory approach to singularly perturbed systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 58(3):752–757, 2013.
- [44] Landau ID.: *Model reference adaptive systems—a survey (MRAS)—what is possible and why?* 94:119–132, 1972.

- 
- [45] Jouffroy, J. y Slotine, J. J.E.: *Methodological remarks on contraction theory*. En *IEEE Conference on Decision and Control, 2004. CDC. 43rd*, volumen 3, páginas 2537–2543, Diciembre 2004.
- [46] Luenberger, D.G.: *An introduction to observers*. *IEEE Trans. Autom. Control*, 16(6):596–602, Diciembre 1971.
- [47] Khalil, Hassan K. y Praly, Laurent: *High-gain observers in nonlinear feedback control*. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6):993–1015, 2014.
- [48] Lohmiller, W. y Slotine, Jean Jacques E.: *On metric observers for nonlinear systems*. En *Proc. IEEE Int. Conf. Control Applications, Dearborn, MI*, páginas 320–326, Septiembre 1996.
- [49] Karagiannis, D., Carnevale, D. y Astolfi, A.: *Invariant manifold based reduced-order observer design for nonlinear systems*. *IEEE Trans. Autom. Control*, 53(11):2602–2614, Diciembre 2008.
- [50] Karagiannis, D. y Astolfi, A.: *A new solution to the problem of range identification in perspective vision systems*. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(12):2074–2077, Diciembre 2005.
- [51] Fitz-Hugh, Richard: *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*. *Biophysical Journal*, 1(6):445–466, 1961.
- [52] Nagumo, J., Arimoto, S. y Yoshizawa, S.: *An active pulse transmission line simulating nerve axon*. *Proceedings of the IRE*, 50(10):2061–2070, Octubre 1962.
- [53] Yu, G. y Slotine, Jean Jacques E.: *Visual grouping by neural oscillator networks*. *IEEE Trans. Neural Netw.*, 20(12):1871–1884, Diciembre 2009.

- 
- [54] Li, Chunguang, Luonan, Chen y Kazuyuki, Aihara: *Transient resetting: a novel mechanism for synchrony and its biological examples*. PLoS Comput Biol, 2(8):e103, Agosto 2006.
- [55] Chang, I. y Chung, S. J.: *Bio-Inspired adaptive cooperative control of heterogeneous robotic networks*. En *AIAA Guidance, navigation and control Conference (GNC)*, páginas 2794–2813, Agosto 2009.
- [56] Tu, Benjamin P., Kudlicki, Andrzej, Rowicka, Maga y McKnight, Steven L.: *Logic of the yeast metabolic cycle: temporal compartmentalization of cellular processes*. Science, 310(5751):1152–1158, 2005.
- [57] Bier Martin, Bakker Barbara M. y Westerhoff Hans V.: *How yeast cells synchronize their glycolytic oscillations: a perturbation analytic treatment*, Marzo 2000.
- [58] Panteley, E., Loria, A. y Teel, A.: *Relaxed persistency of excitation for uniform asymptotic stability*. IEEE Trans. Autom. Control, 46(12):1874–1886, Diciembre 2001.
- [59] Sherman A., Rinzel J. y Keizer J.: *Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing*. Biophysical Journal, 54(3):411–425, Abril 2015.
- [60] Sherman A. y Rinzel J.: *Model for synchronization of pancreatic beta-cells by gap junction coupling*. Biophysical Journal, 59(3):547–559, Abril 2015.
- [61] Stannæs, Øyvind Nistad, Aamo, Ole Morten y Kaasa, Glenn Ole: *Redesign of adaptive observers for improved parameter identification in nonlinear systems*. Automatica, 47(2):403–410, 2011.
- [62] Sanfelice, Ricardo G. y Praly, Laurent: *On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise*. Automatica, 47(10):2165–2176, 2011.

- 
- [63] Pham, Quang Cuong, Tabareau, N. y Slotine, J. J. E.: *A contraction theory approach to stochastic incremental stability*. IEEE Trans. Autom. Control, 54(4):816–820, Abril 2009.
- [64] Jankovic, Mrdjan y Ghosh, Bijoy K.: *Visually guided ranging from observations of points, lines and curves via an identifier based nonlinear observer*. Syst. & Control Lett., 25(1):63–73, 1995.
- [65] Chen, Xinkai y Kano, H.: *A new state observer for perspective systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 47(4):658–663, Abril 2002.
- [66] Dixon, W.E., Fang, Y., Dawson, D.M. y Flynn, T.J.: *Range identification for perspective vision systems*. IEEE Trans. Autom. Control, 48(12):2232–2238, Diciembre 2003.
- [67] Dahl, Ola, Wang, Yebin, Lynch, Alan F. y Heyden, Anders: *Observer forms for perspective systems*. Automatica, 46(11):1829–1834, Noviembre 2010.
- [68] De Luca, Alessandro, Oriolo, Giuseppe y Robuffo Giordano, Paolo: *Feature depth observation for image-based visual servoing: theory and experiments*. Int. J. Rob. Res., 27(10):1093–1116, Octubre 2008.
- [69] Dani, A.P., Fischer, N.R., Kan, Z. y Dixon, W.E.: *Globally exponentially stable observer for vision-based range estimation*. Mechatronics, 22(4):381–389, 2012.
- [70] Chen, Xinkai y Kano, H.: *State observer for a class of nonlinear systems and its application to machine vision*. IEEE Trans. Autom. Control, 49(11):2085–2091, Noviembre 2004.
- [71] Chitrakaran, Vilas K., Dawson, Darren M., Dixon, Warren E. y Chen, Jian: *Identification of a moving object's velocity with a fixed camera*. Automatica, 41(3):553–562, 2005.

- 
- [72] Dani, A.P., Fischer, N.R. y Dixon, W.E.: *Single camera structure and motion*. IEEE Trans. Autom. Control, 57(1):238–243, Enero 2012.
- [73] Lohmiller, W. y Slotine, Jean Jacques E.: *On contraction analysis for nonlinear systems*. Automatica, 34(6):683–696, Junio 1998.
- [74] Spong, M.W. y Vidyasagar, M.: *Robot dynamics and control*. Wiley-India, 2008.