



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**REFLECTIVIDAD DE COLOIDES TURBIOS:
TEORÍA-EXPERIMENTO**

**TESIS DE MAESTRÍA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:
GESURI MORALES LUNA**

**TUTOR PRINCIPAL:
RUBÉN GERARDO BARRERA Y PÉREZ
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM**

**CO-TUTOR:
AUGUSTO GARCÍA VALENZUELA
CCADET, UNAM**

**MIEMBRO DEL COMITÉ TUTOR:
NEIL CHARLES BRUCE DAVIDSON
CCADET, UNAM**

México, D.F., 19 DE MAYO DEL 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En esta tesis se analizan las fórmulas extendidas de Fresnel[1] y el Modelo de Esparcimiento Coherente (*Coherent Scattering Model*, CSM)[2], realizando un experimento para obtener las amplitudes de reflexión y comparando los resultados experimentales con las nuevas fórmulas, concluyendo que esta ampliación de las fórmulas de Fresnel son más adecuadas que las fórmulas de Fresnel dos medios. Las fórmulas extendidas de Fresnel fueron obtenidas al considerar un haz coherente cuando una onda electromagnética plana incide sobre un semiespacio de esferas localizadas al azar, para el caso en el cual el tamaño de las partículas es comparable con la longitud de onda incidente. El caso que se está analizando es donde las partículas están inmersas en una matriz semi-infinita. En dicho sistema fue calculada la función de Green del semiespacio para considerar la presencia de las imágenes de las corrientes inducidas. La ecuación integral se resolvió utilizando una solución de onda plana considerando parámetros efectivos, entre ellos, el vector de onda de propagación, vector de polarización y amplitud. Los resultados que se presentan en[1] son fórmulas cerradas para la amplitud de reflexión para coloides turbios en términos de distintas componentes del tensor generalizado de conductividad no local y de la fracción de llenado volumétrica. En el caso que estamos analizando se llegó al resultado en donde nuestra amplitud de reflexión es equivalente a la fórmula de tres medios. Hay que señalar que las fórmulas que se van a utilizar para hacer el análisis numérico y compararlo con el experimento son aproximaciones que se realizaron entre los medios dos y tres. El modelo CSM, se basa en considerar “rebanadas” de un semi-espacio que contiene a las partículas dentro de pequeños bloques, calculando la onda coherente reflejada en la aproximación de esparcimiento simple, y así el coeficiente de reflexión se calculará a partir de considerar múltiple esparcimiento de la onda coherente entre un conjunto semi-infinito de bloques. Presentaremos el arreglo experimental que utilizamos para obtener nuestras amplitudes de reflexión, mostrando los resultados para distintas suspensiones coloidales. Se realizaron diferentes experimentos variando el tamaño de la partícula, y además de diferentes fracciones volumétricas en las suspensiones coloidales.

ABSTRACT

In this thesis we analyze the extension of Fresnel's formulas[1] and the Coherent Scattering Model[2] (CSM), by doing an experiment to obtain the amplitudes of reflection and comparing this experimental results with the new formulas, concluding that this extension of Fresnel's formulas fit better than the Fresnel's formulas in two mediums. The extension of Fresnel's formulas were obtained, considering a coherent beam when an electromagnetic plane wave incident on a half space of spheres randomly located, in the case when the size of the particles are comparable with the incident wavelength. In this case we treat that the particles are immersed in a semi-infinite matrix. In this system, the Green function of the semi-space was calculated by considering the presence of the images of the induced currents. The integral equation was solved using a solution of plane wave considering the effective parameters like, wave vector of propagation, the vector of polarization and amplitude. The results are presented in[1] are closed formulas for the amplitude of reflection for turbid colloids in terms of different components of the generalized nonlocal conductivity tensor and the filling fraction. This case that we are analyze, they reached that the amplitude of reflection it's equivalent to the formula of the three mediums. We need to note that the formulas that we are going to use, to do the numerical analysis and compare with the experiment, are approximations between the mediums two and three. The Coherent Scattering Model (CSM) is based on the slicing of the half-space containing the particles into thin slabs, the coherent reflected wave is calculated in the single-scattering approximation and then, the coherent reflection of the half-space is obtained by taking account of the multiple scattering between the semi-infinite pile of slabs. We are going to present the experimental setup that we use to obtain the amplitudes of reflection, showing results for different types of colloidal suspensions. We did many experiments varying the size of the particle and the filling fraction of the colloidal suspensions.

Agradecimientos

Contenido

Resumen	III
Agradecimientos	V
Contenido	VI
Lista de Figuras	IX
1. Introducción	1
2. Electrodinámica continua	3
2.1. Ley de Snell e índice de refracción	3
2.2. Fórmulas de Fresnel para dos medios con polarización s y p.	6
2.3. Fórmula de Fresnel para 3 medios	9
3. Propiedades ópticas de coloides	11
3.1. ¿Qué es un coloide?	11
3.2. Algunas propiedades importantes de los coloides. Esparcimiento de la radiación	12
4. Matriz de Esparcimiento y Sección Transversal de Esparcimiento	15
4.1. Matriz de esparcimiento	15
4.2. Sección transversal diferencial de esparcimiento	28
4.3. Ejemplos	33
5. Modelos Teóricos	37
5.1. Fórmulas extendidas de Fresnel	37
5.2. La matriz	46
5.3. Modelo de Esparcimiento Coherente (<i>“Coherent Scattering Model, CSM”</i>)	49
5.4. Resultados numéricos	55
5.4.1. Látex (Polimetil-Metacrilato, PMMA), de 120nm de diámetro	55
5.4.2. Látex (PMMA), de 520nm de diámetro	59
5.4.3. Dióxido de Titanio, de 400 nm. de diámetro	61
5.4.4. Cobre, de 500 nm. de diámetro	62
5.5. Espectros de reflectividad	62
5.6. Caso Polidisperso	64

6. Diseño experimental	69
6.1. Refractómetro de Abbe	69
6.2. Dispositivo experimental	70
6.3. Alineación del sistema	73
6.4. Escala angular	78
6.5. Preparación de muestras	80
6.6. Caracterización del estado de polarización de la luz	86
6.6.1. ¿Cómo obtenemos las curvas de reflectividad experimentales?	86
6.7. Mediciones de curvas de reflexión para las diferentes suspensiones coloidales	91
6.7.1. Resultados de Látex de 120 nm de diámetro, alrededor del ángulo crítico	91
6.7.2. Resultados de Látex de 513 nm de diámetro, alrededor del ángulo crítico	94
6.7.3. Resultados de Dióxido de Titanio de 405 nm de diámetro, alrededor del ángulo crítico	97
6.7.4. Resultados de Cobre de 500 nm de diámetro, cerca del ángulo crítico	98
6.7.5. Mediciones fuera del ángulo crítico	100
7. Comparación Teoría-Experimento	103
7.1. Látex (PMMA), de 120 nm de diámetro	103
7.2. Látex (PMMA), de 513 nm de diámetro	106
7.3. Dióxido de Titanio, de 405 nm. de diámetro	108
7.4. Cobre, de 500 nm. de diámetro	110
7.5. Látex (PMMA), de 513 nm de diámetro, con la escala angular total	112
7.6. Predicciones teóricas	114
8. Conclusiones	117
A. Obtención de la parte real del índice de refracción a partir del punto de inflexión:	121
B. Índice de refracción a diferentes longitudes de onda	125
C. Programa en Wolfram Mathematica 9	127
Bibliografía	135

Lista de Figuras

2.1.	<i>Onda incidente \vec{k}, con una intercara en $z = 0$ separando a dos medios con propiedades ópticas diferentes.</i>	4
2.2.	<i>Campo eléctrico incidente perpendicular al plano de incidencia.</i>	6
2.3.	<i>Campo eléctrico incidente paralelo al plano de incidencia.</i>	7
2.4.	<i>Curvas de Reflectancia en porciento para las dos polarizaciones (s y p). En la figura (a) se muestra el ángulo de Brewster considerando como medio uno el aire con un índice de refracción $n_1 = 1.0$ y como medio dos con $n_2 = 1.33$ y en la figura (b) se muestra el ángulo crítico con medio uno con un índice de refracción $n_1 = 1.33$ y el medio dos con $n_2 = 1.0$.</i>	9
2.5.	<i>Diagrama de 3 medios.</i>	9
4.1.	<i>Plano de esparcimiento.</i>	16
4.2.	<i>Partícula de látex de 10 nm de radio con un índice de refracción de 1.515 inmersa en aire con un índice de refracción de 1.0 y una longitud de onda de 630 nm.</i>	33
4.3.	<i>Partícula de látex de 50 nm de radio con un índice de refracción de 1.515 inmersa en aire con un índice de refracción de 1.0 y una longitud de onda de 630 nm.</i>	34
4.4.	<i>Partícula de látex de 100 nm de radio con un índice de refracción de 1.515 inmersa en aire con un índice de refracción de 1.0 y una longitud de onda de 630 nm.</i>	35
5.1.	<i>Diagrama esquemático del sistema coloidal y el sistema de coordenadas utilizado. Siendo a el radio de las partículas.</i>	40
5.2.	<i>Vectores unitarios.</i>	41
5.3.	<i>Ángulo entre los vectores de onda reflejado y transmitido.</i>	44
5.4.	<i>Diagrama que tenemos al considerar partículas inmersas en aire (free-standing colloidal system). Presentando los ángulos que se utilizan en las aproximaciones.</i>	45
5.5.	<i>Curvas del cálculo de la reflectividad comparando los modelos teóricos de Fresnel 2 medios y Heurístico. Utilizamos la escala logarítmica para observar las variaciones que hay en ángulos bajos. Las partículas son de dióxido de titanio con un radio de 200 nm a una longitud de onda de 638 nm y con una fracción de llenado al 2% y 5%.</i>	46
5.6.	<i>Sistema resultante, a partir del análisis realizado, teniendo como medios, aire-matriz-matriz+partículas.</i>	48
5.7.	<i>Sistema diluido de esferas aleatoriamente distribuidas, cuyos centros están dentro del plano.</i>	50

5.8. Modelo de un semi-espacio de un conjunto semi-infinito de hojas en 2D.	52
5.9. Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, con polarización p.	56
5.10. Suspensión coloidal a distintas fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm y polarización p, en una escala logarítmica base 10.	57
5.11. Suspensión coloidal a diferentes fracciones de volumen a dos longitudes de onda: a) y b) a 638 nm y c) y d) a 405 nm todas a polarización p.	58
5.12. Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, polarización p. En una escala angular fuera del ángulo crítico	59
5.13. Suspensión coloidal a diferentes fracciones de volumen a dos longitudes de onda: a) y b) a 638 nm. y c) y d) a 405 nm. todas con polarización p.	60
5.14. Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, polarización p.	61
5.15. Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, polarización p.	61
5.16. Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen distintas a una longitud de onda de 638 nm, polarización p.	62
5.17. Espectros de reflexión para látex de dos tipos de tamaños (120 y 520 nm), variando la longitud de onda incidente y dejamos fijo el ángulo de incidencia de 61 grados con polarización p.	63
5.18. Espectros de reflexión para dióxido de titanio y cobre de 405 nm y 500 nm de diámetro, variando la longitud de onda incidente y dejamos fijo el ángulo de incidencia de 61 grados con polarización p.	63
5.19. Modelos en el caso polidisperso. Donde σ es el ancho de la distribución log normal, este parámetro se propone.	68
5.20. Modelo del CSM, utilizando el caso monodisperso y polidisperso. Con σ el ancho de la distribución.	68
6.1. Diagrama de un refractómetro de Abbe.	70
6.2. Arreglo experimental.	71
6.3. Plano focal de la lente 2 y la alineación de la cámara CCD en el plano focal de la lente.	71
6.4. Dispositivo experimental incluyendo todos los elementos ópticos.	72
6.5. Incidencia normal del láser al prisma.	73
6.6. Prisma desplazado 90° respecto a su eje de giro.	74
6.7. Alineación del prisma plano-cóncavo.	75
6.8. Difusor dinámico.	77
6.9. Diseño del dispositivo experimental para medir curvas de reflectancia.	77
6.10. Desplazamiento angular.	78
6.11. Lente de distancia focal (D_f) de 35mm y longitud efectiva de la cámara CCD.	79
6.12. Coloides de Látex (PMMA) de 120 nm de diámetro a distintas concentraciones.	85
6.13. Coloides de Látex (PMMA) de 513 nm de diámetro a distintas concentraciones.	85
6.14. Coloides de Dióxido de Titanio de 402 nm de diámetro a distintas concentraciones.	86
6.15. Coloides de Cobre de 500 nm de diámetro a distintas concentraciones.	86

6.16. Luz polarizada al pasar por el polarizador.	87
6.17. Graduación del polarizador.	88
6.18. Curva teórica y experimental, considerando BK7-Agua con polarización p	90
6.19. Curva teórica y experimental, considerando BK7-Agua, en una región angular ligeramente fuera del ángulo crítico con polarización p	91
6.20. Curvas experimentales a diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño de partícula, con polarización p	92
6.21. Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos.	93
6.22. Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos.	94
6.23. Curvas experimentales a diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño de partícula con polarización s	95
6.24. Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos, con polarización s	96
6.25. Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos, con polarización s	96
6.26. Curvas experimentales a dos diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño, con polarización s	97
6.27. Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos, con polarización p	98
6.28. Curvas experimentales a dos diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño y polarización s	99
6.29. Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 18 minutos.	99
6.30. Curvas experimentales fuera del ángulo crítico.	100
6.31. Curvas experimentales fuera del ángulo crítico.	101
6.32. Curvas experimentales fuera del ángulo crítico.	101
7.1. Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado. La curva naranja punteada en cada una de las gráficas corresponde a la referencia del agua.	104
7.2. Comparativo entre teoría y experimento para diferentes fracciones de llenado en la región angular fuera del ángulo crítico. La línea punteada naranja en 7.2a y 7.2b son la referencia del agua.	105
7.3. Comparativo entre teoría y experimento para diferentes fracciones de llenado. La curva naranja punteada en cada una de las gráficas corresponde a la referencia del agua.	106
7.4. Comparativo entre teoría y experimento para diferentes fracciones de llenado en la región angular fuera del ángulo crítico, con polarización p	107
7.5. Comparativo entre teoría y experimento. La curva naranja punteada es la referencia del agua, para polarización s	108
7.6. Comparativo entre modelos polidispersos y experimento. La curva naranja punteada es la referencia del agua, para polarización s . Donde σ es el ancho de la distribución log-normal y r_o es el radio más probable proporcionado por el fabricante.	108
7.7. Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado en la región angular fuera del ángulo crítico, con polarización p	109
7.8. Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado. La curva naranja punteada es la referencia del agua, para polarización p	110

7.9. Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado fuera del ángulo crítico, con polarización p.	111
7.10. Muestra de cobre suspendida en alcohol, colocada en un portaobjetos y vista en un microscopio óptico.	111
7.11. Escala utilizada para determinar el tamaño en el microscopio óptico, cada marca corresponden a $2\mu\text{m}$	112
7.12. Escala angular total en donde realizamos las mediciones, donde la flecha roja indica a donde termina una medición y donde inicia la otra medición.	113
7.13. Espectro de reflectividad del oro a un ángulo de incidencia fijo de: (a) 58 grados y (b) 59 grados.	114
7.14. Espectro de reflectividad de la plata a un ángulo de incidencia fijo de: (a) 58 grados y (b) 59 grados.	114
B.1. Parte real e imaginaria del índice de refracción (I.R.) del látex.	125
B.2. Parte real e imaginaria del índice de refracción (I.R.) del dióxido de titanio.	126
B.3. Parte real e imaginaria del índice de refracción (I.R.) para el cobre.	126

Se la dedico a...

Capítulo 1

Introducción

El problema de calcular y medir propiedades ópticas de coloides cuando el tamaño de partículas coloidales son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación incidente, está bien definido, y ha dado lugar a la llamada teoría de medio efectivo. ¿Qué sucede cuando el tamaño de partículas coloidales es comparable con la longitud de onda incidente?. En este caso surge el fenómeno de esparcimiento, haciendo que la luz viaje en todas direcciones. Sin embargo el campo electromagnético total se puede dividir en una componente promedio, conocida como haz coherente que viaja en una sola dirección y otra aleatoria conocida como difusa que viaja en todas direcciones. Ahora, si ignoramos la presencia del campo difuso, podemos introducir el concepto de propiedades ópticas efectivas, las cuales caracterizan el comportamiento del haz coherente. Se ha mostrado [4] que la respuesta óptica efectiva: ϵ_{ef} la permitividad eléctrica y μ_{ef} la permeabilidad magnética, de coloides turbios poseen dispersión espacial, es decir, que dependen tanto de la frecuencia como del vector de onda, y es por ello que no es posible utilizar para el cálculo de las amplitudes de reflexión las bien conocidas fórmulas de Fresnel de la electrodinámica continua. Esta dificultad se ha superado formulando una nueva teoría que parte de una formulación integral de las ecuaciones de Maxwell[3], para obtener expresiones cerradas para las amplitudes de reflexión, las cuales las llamaremos Fórmulas de Fresnel Extendidas.

La solución a esta nueva formulación fue considerando un modelo que consiste en un semiespacio ocupado por un conjunto muy grande de esferas idénticas, colocadas al azar e inmersas en una matriz o medio homogéneo que ocupa el semiespacio. Introduciendo el concepto de conductividad no local generalizado de una esfera aislada, y resolviendo las ecuaciones integrales dentro de una aproximación lineal de límite diluido, se obtienen expresiones para calcular las corrientes inducidas dentro de cada una de las esferas, debidas a la excitación de un campo eléctrico externo. Con esta manera de resolver el problema, se puede obtener[3] el campo eléctrico en cualquier región del espacio tanto

dentro como fuera de la esfera, utilizando la función de Green del campo electromagnético multiplicándola por la corriente inducida e integrando sobre todo el espacio. En[3] se utiliza este enfoque para construir una teoría capaz de calcular las amplitudes de reflexión y transmisión del haz coherente en coloides turbios. Las expresiones que vamos a analizar se obtuvieron al introducir una interfaz plana considerando que la probabilidad de encontrar el centro de una esfera al interior del semiespacio era constante, y cero afuera del semiespacio. El enfoque está basado en la solución a la ecuación integral para el haz coherente, proponiendo una solución de onda plana, con sus respectivos parámetros a determinar, como son: la amplitud de la onda, una polarización efectiva y un vector de polarización efectivo. De esta manera se pudo encontrar una solución relativamente simple utilizando este nuevo enfoque. Esta unificación que se logró en[3], fue gracias a que fue posible calcular el tensor generalizado de conductividad no local, utilizando un método novedoso, análogo a la solución de Mie pero en presencia de corrientes externas que hacen posible mantener la frecuencia y el vector de onda del campo incidente como parámetros independientes, en vez de considerarlo como una onda auto-propagante.

Otro modelo que se va a comparar junto con los ya mencionados, es el llamado “Coherent Scattering Model” (CSM), [2]. Dicho modelo usa la teoría de esparcimiento múltiple para el cálculo de la reflectancia coherente para el mismo modelo de un semiespacio de esferas idénticas colocadas al azar.

El objetivo de esta tesis es poner a prueba la validez de los modelos de reflectancia coherente de la luz de un semiespacio de un coloide turbio comparando las predicciones teóricas con los datos experimentales. Para ello se tuvo que diseñar un dispositivo experimental para medir curvas de reflectividad para diferentes suspensiones coloidales. Se eligió una configuración de reflexión interna y alrededor del ángulo crítico porque es la zona angular en donde apreciaremos mayores diferencias entre los modelos teóricos. Presentaremos resultados experimentales de diferentes muestras, variando el tamaño de la partícula y la fracción de llenado volumétrica. Para el diseño experimental se consideró el montaje de un refractómetro de Abbe modificado[5]. La modificación se debe a que nos interesa medir el haz coherente y no el campo difuso como lo hacen este tipo de refractómetros. La técnica se explicará en el **capítulo 6**, en donde se darán los detalles de la técnica a usar. Con estos resultados experimentales y los resultados teóricos compararemos cada modelo teórico y así identificaremos la validez de los modelos teóricos.

Capítulo 2

Electrodinámica continua

Comenzaremos a hablar acerca de la ley de Snell y el índice de refracción, además mostaremos las fórmulas de Fresnel para dos y tres medios, no se mostrará la deducción de estas fórmulas, la demostración se muestra en diferentes libros de electrodinámica continua[6, 7]. Y de esta manera podemos decir que tenemos las propiedades cinéticas y dinámicas de la luz para nuestro problema. La fórmula de tres medios es una de las expresiones más importantes, debido a que ésta expresión es la que describe más acertadamente las condiciones de nuestro experimento.

2.1. Ley de Snell e índice de refracción

La reflexión y refracción de la luz en superficies planas entre dos medios, de diferentes propiedades ópticas son fenómenos similares. Comenzaremos hablando sobre las propiedades cinéticas, que se rigen por: (a) el ángulo de reflexión igual al ángulo de incidencia y (b) la ley de Snell. Para la deducción de la ley de Snell consideramos el siguiente diagrama:

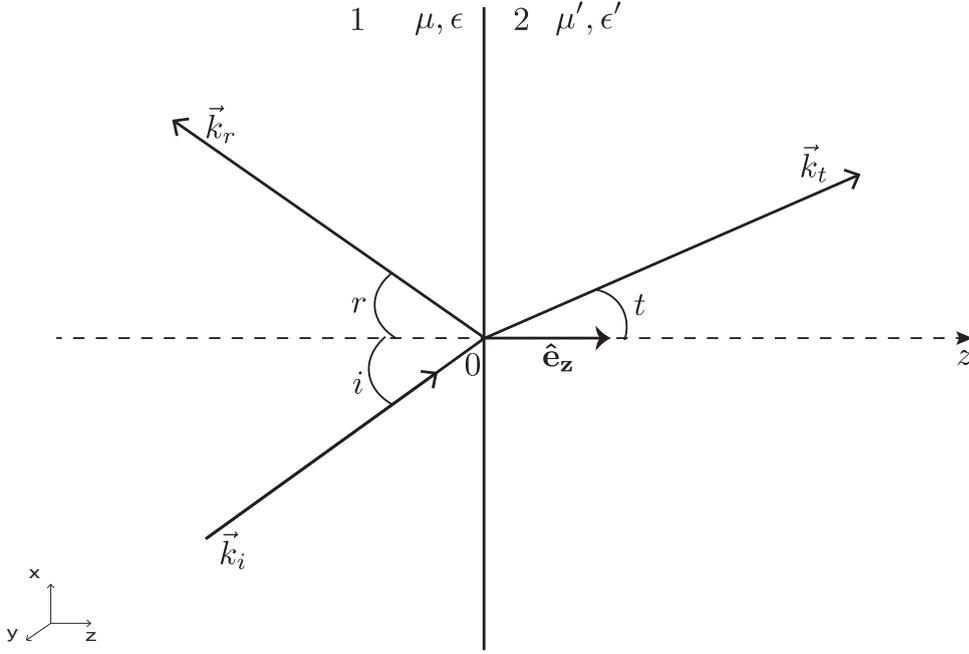


FIGURA 2.1: Onda incidente \vec{k} , con una intercara en $z = 0$ separando a dos medios con propiedades ópticas diferentes.

Tenemos una onda plana con vector de onda \vec{k} y frecuencia ω incidiendo desde un medio con permeabilidad magnética μ , y permitividad eléctrica ϵ (μ_o es la permeabilidad magnética en el vacío y ϵ_o la permitividad eléctrica en el vacío). Las ondas reflejadas y refractadas tienen los vectores de onda \vec{k}_r y \vec{k}_t respectivamente, y \hat{e}_z es un vector unitario con dirección a lo largo del eje z del medio 1 al medio 2. Considerando los siguientes campos: el incidente, el refractado y el reflejado, como ondas planas dadas por

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k}, \quad (2.2)$$

que corresponde al campo electromagnético incidente. Ahora el campo refractado es

$$\vec{E}' = \vec{E}'_o e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad (2.3)$$

$$\vec{B}' = \sqrt{\mu'\epsilon'} \frac{\vec{k}_t \times \vec{E}'}{k_t}, \quad (2.4)$$

y por último el campo reflejado es

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_o e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r} - i\omega t}, \quad (2.5)$$

$$\vec{B}'' = \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}}{k_r}. \quad (2.6)$$

Si ahora utilizamos la relación de dispersión correspondiente a cada medio, tenemos que:

$$|\vec{k}| = |\vec{k}_r| = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}, \quad (2.7)$$

y

$$|\vec{k}_t| = k_t = \omega\sqrt{\mu'\epsilon'}. \quad (2.8)$$

Considerando que deben existir condiciones de frontera para las amplitudes de los campos en $z = 0$, implica que las variaciones espaciales y temporales de todos los campos deben ser iguales en el plano $z = 0$, de tal manera tenemos las siguientes propiedades en la intercara.

$$(\vec{k} \cdot \vec{x})_{z=0} = (\vec{k}_t \cdot \vec{x})_{z=0} = (\vec{k}_r \cdot \vec{x})_{z=0}. \quad (2.9)$$

La expresión 2.9, contiene las condiciones cinemáticas para la reflexión y refracción. Por lo tanto podemos observar que se va a cumplir la siguiente igualdad

$$k \sin i = k_r \sin r = k_t \sin t, \quad (2.10)$$

y como $k = k_r$, encontramos que $i = r$, es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Obtenemos además lo que se le conoce como Ley de Snell:

$$\frac{\sin i}{\sin t} = \frac{k_t}{k_i} = \frac{\sqrt{\mu'\epsilon'}}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

$$\frac{\sin i}{\sin t} = \frac{n'}{n}, \quad (2.11)$$

donde i, t son los ángulos de incidencia y refracción respectivamente, mientras que n' y n son los índices de refracción. El índice de refracción se define como:

$$n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_o\epsilon_o}}. \quad (2.12)$$

Con estas mismas ideas pasemos a obtener las fórmulas de Fresnel.

2.2. Fórmulas de Fresnel para dos medios con polarización s y p.

Partiendo del siguiente diagrama:

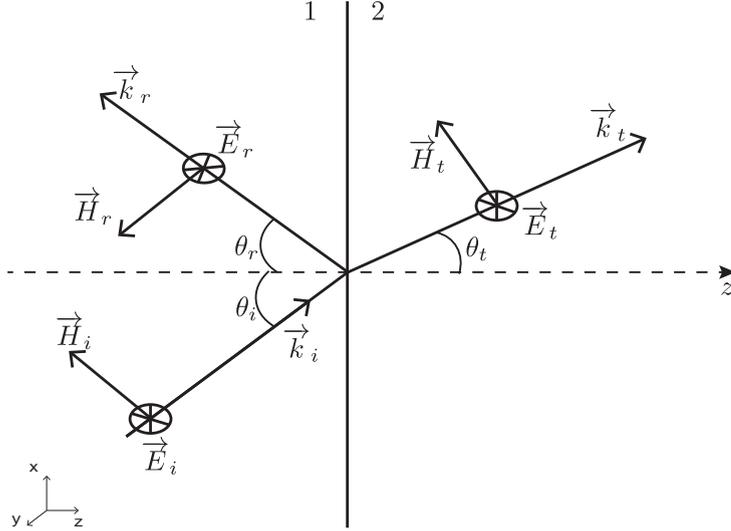


FIGURA 2.2: Campo eléctrico incidente perpendicular al plano de incidencia.

Considerando una onda plana, las ecuaciones de Faraday y Ampere-Maxwell y además un medio lineal. Podemos encontrar los vectores de onda incidente y transmitido, y escribiendo en magnitud ambos vectores obtenemos,

$$k_i^2 = k_{iz}^2 + k_{\parallel}^2, \quad (2.13)$$

$$k_t^2 = k_{tz}^2 + k_{\parallel}^2, \quad (2.14)$$

donde k_{\parallel} es la componente paralela a la intercara del vector de onda. Y por último definiendo las relaciones de las amplitudes de reflexión como:

$$r = \frac{E_r}{E_i}. \quad (2.15)$$

Por lo tanto las fórmulas de Fresnel son[8]:

$$r_s = \frac{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i - \mu_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_t}{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i + \mu_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_t}. \quad (2.16)$$

Pero sabemos que $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ y además que $k_i \cos \theta_i = k_{iz}$, por lo tanto,

$$r_s = \frac{k_{iz} - \frac{\mu_1}{\mu_2} k_{tz}}{k_{iz} + \frac{\mu_1}{\mu_2} k_{tz}}. \quad (2.17)$$

Que es la fórmula de Fresnel con polarización s. De manera análoga se obtiene la polarización p, considerando la siguiente figura:

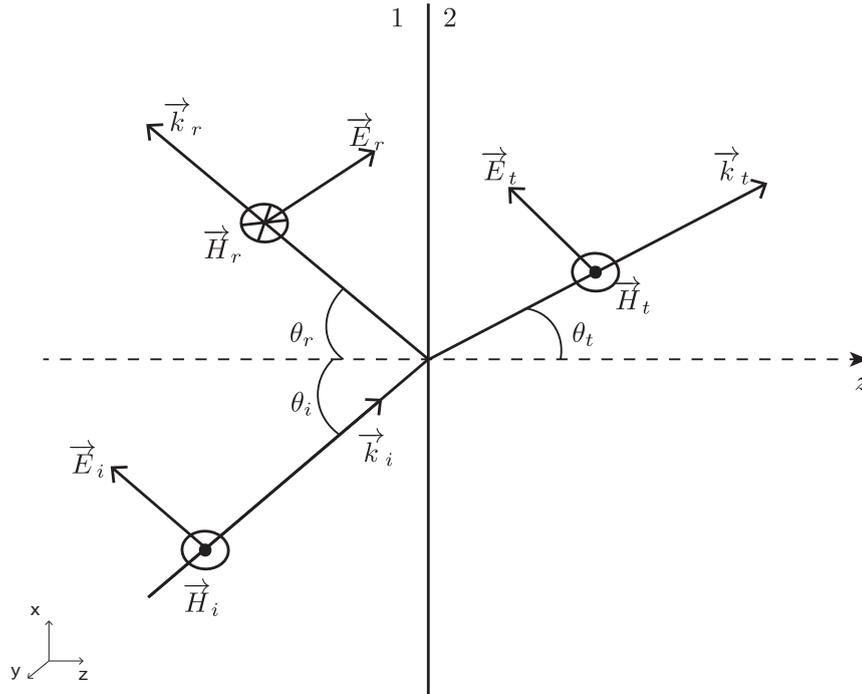


FIGURA 2.3: Campo eléctrico incidente paralelo al plano de incidencia.

Se puede obtener[8] la amplitud de reflexión con polarización p, como

$$r_p = \frac{\epsilon_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_t - \epsilon_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i}{\epsilon_1 \sqrt{\mu_2 \epsilon_2} \cos \theta_t + \epsilon_2 \sqrt{\mu_1 \epsilon_1} \cos \theta_i}, \quad (2.18)$$

y considerando que $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ y que $k_{iz} = k_i \cos \theta_i$, obtenemos:

$$r_p = \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} k_{tz} - k_{iz}}{k_{iz} + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} k_{tz}}. \quad (2.19)$$

Ahora veamos que relación guardan las amplitudes de reflexión r_s , ecuación (2.16) y r_p , ecuación (2.18). Para ello necesitamos ocupar la ley de Snell, ecuación (2.11), de la forma $n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i$. Elevando al cuadrado la ley de Snell, obtenemos que:

$$\cos \theta_t = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}, \quad (2.20)$$

y sustituyendo esta ecuación en la expresión (2.16), obtenemos

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}{n_1 \cos \theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i}}, \quad (2.21)$$

y de forma análoga para la expresión de r_p , utilizando la expresión (2.18), tenemos

$$r_p = \frac{n_2 \sin^2 \theta_t \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_t} - n_1 \cos \theta_i \sin^2 \theta_i}{n_2 \sin^2 \theta_t \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_t} + n_1 \cos \theta_i \sin^2 \theta_i}. \quad (2.22)$$

Si ambos medios son no magnéticos, hay que considerar que $\mu_1 = \mu_2 = \mu_o$ y de la ley de Snell obtenemos que $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2}$, por lo cual, de la expresión (2.21) se obtiene al hacer un poco de algebra que:

$$r_s = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t}, \quad (2.23)$$

y utilizando identidades trigonométricas, obtenemos que:

$$r_s = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)}. \quad (2.24)$$

Utilizando la ecuación (2.22), obtenemos haciendo algebra:

$$r_p = \frac{n_2 \sin^2 \theta_t \cos \theta_t - n_1 \sin^2 \theta_i \cos \theta_i}{n_2 \sin^2 \theta_t \cos \theta_t + n_1 \sin^2 \theta_i \cos \theta_i} = \frac{n_2 \sin^2 \theta_t \cos \theta_t - n_2 \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \theta_t}{n_2 \sin^2 \theta_t \cos \theta_t + n_2 \sin \theta_i \cos \theta_i \sin \theta_t}, \quad (2.25)$$

y utilizando identidades trigonométricas, tenemos:

$$r_p = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}. \quad (2.26)$$

Para ver la relación entre (2.24) y (2.26), escribimos que

$$r_p = \frac{\sin(\theta_t - \theta_i) \cos(\theta_i + \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_t - \theta_i)}, \quad (2.27)$$

y sustituyendo (2.24) en (2.27), tenemos

$$r_p = \frac{\cos(\theta_i + \theta_t)}{\cos(\theta_t - \theta_i)} r_s. \quad (2.28)$$

Que es la relación que existe entre las amplitudes de reflexión. Un ejemplo de las fórmulas (2.17) y (2.19), son las siguientes gráficas:

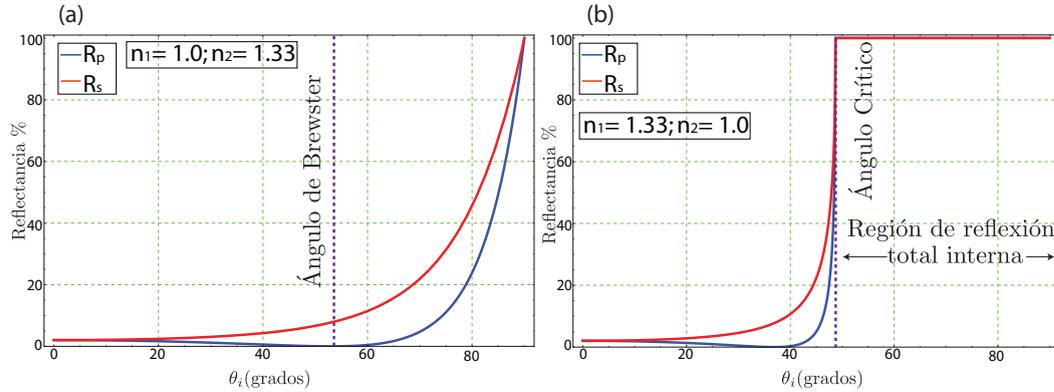


FIGURA 2.4: Curvas de Reflectancia en por ciento para las dos polarizaciones (*s* y *p*). En la figura (a) se muestra el ángulo de Brewster considerando como medio uno el aire con un índice de refracción $n_1 = 1.0$ y como medio dos con $n_2 = 1.33$ y en la figura (b) se muestra el ángulo crítico con medio uno con un índice de refracción $n_1 = 1.33$ y el medio dos con $n_2 = 1.0$.

La figura 2.4(a) muestra curvas de reflectancia en por ciento mostrando el ángulo de Brewster, que es el ángulo donde la reflectancia es cero. En la figura 2.4(b) se muestra el ángulo crítico que es el ángulo donde tendremos el 100 % de reflectancia.

2.3. Fórmula de Fresnel para 3 medios

La deducción de esta expresión se encuentra en[6–8]. La expresión de la fórmula de Fresnel para 3 medios es la misma para la polarización *s* o *p*. El diagrama que se utiliza para deducir la fórmula de los tres medios es la siguiente:

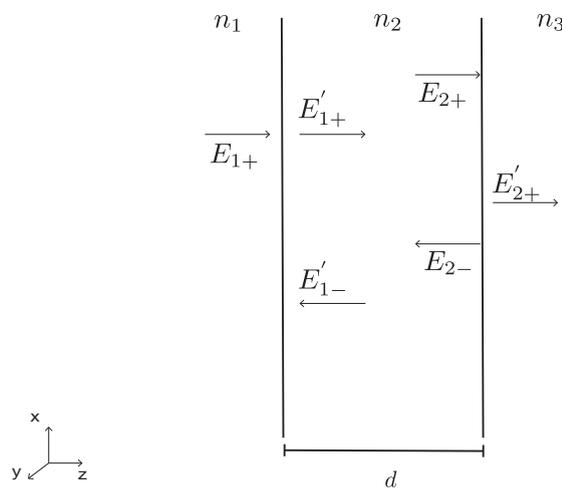


FIGURA 2.5: Diagrama de 3 medios.

Donde E representa las amplitudes del campo (\vec{E} o \vec{H} según cuál de estos dos vectores sea paralelo al plano de la primera interfase) en las ondas incidente y reflejada. Se puede realizar un análisis en cada una de las interfaces y así calcular la relación entre cada una de las amplitudes del campo. El factor de fase que aparece en la fórmula de los tres medios se debe a un cambio de fase de la onda al atravesar el espesor d del segundo medio. El valor de esta fase está dado por:

$$\psi = k_{z2}d, \quad (2.29)$$

donde $k_{z2} = k_o n_2 \cos \theta_{i2}$. Siendo k_o el vector de onda en el medio 1, n_2 el índice de refracción del medio 2 y θ_{i2} es el ángulo de incidencia en el medio dos, el cual puede obtenerse al utilizar la ley de Snell. Por lo tanto la amplitud de reflexión para tres medios, para polarización s o p, es:

$$r_{123} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{2ik_{z2}d}}{1 + r_{12}r_{23}e^{2ik_{z2}d}}, \quad (2.30)$$

donde r_{12} es la amplitud de reflexión entre los medios 1-2, es decir, la amplitud de reflexión en la primera intercara y r_{23} es la amplitud de reflexión entre los medios 2-3. Y r_{123} es la amplitud de reflexión al considerar los tres medios.

Capítulo 3

Propiedades ópticas de coloides

El hablar de coloides involucra una cantidad importante de conocimientos de conceptos físicos y químicos. Un entendimiento fundamental teórico del comportamiento de los coloides es posible únicamente a través de un conocimiento riguroso de áreas de la física, química y matemáticas juntas. Presentaremos las ideas generales de lo que es un coloide además veremos que aparecerá el fenómeno de esparcimiento de la luz y que a partir de este fenómeno es como surge todo el análisis que se va a presentar.

3.1. ¿Qué es un coloide?

El término coloide fue introducido por Thomas Graham, que etimológicamente significa, “parecida a la goma”, esta definición hoy en día es irrelevante. Debido a esto nos enfocaremos a presentar ejemplos donde el término coloide es aplicable. En un inicio los estudios se basaron en sustancias puras, como el conocer los estados de la materia, sólido, líquido y gaseoso, y luego la atención pasó a soluciones que son mezclas homogéneas de especies químicas esparcidas en una escala molecular. Los sistemas coloidales tienen una propiedad muy especial. Esta consiste en una fase dispersa distribuida uniformemente en un estado finamente dividido en una fase homogénea. Ejemplos familiares de este tipo de sistemas coloidales podemos mencionar los siguientes: nubes, humo, que son gotas dispersas en el aire. La leche, que son gotas dispersas muy finas de grasa en una fase acuosa; pinturas, “lodo”, que es la dispersión de partículas sólidas muy finas en un medio líquido, a este tipo de sistemas coloidales, se le conocen como suspensiones coloidales, y serán éstas en las que nos enfocaremos para realizar nuestro trabajo. Existen otro tipo de sistemas coloidales, como son la gelatina, que son macromoléculas en líquido; los vitrales, que es dispersión debida a nanopartículas metálicas, por ejemplo, de oro en el vidrio, a estas se les conoce como esparcidores sólidos. También está la sangre,

membranas celulares, que son conocidos como biocoloides. Ya que nos vamos a enfocar en las suspensiones coloidales lo que tenemos que definir es, ¿A qué nos referimos con partículas muy finas?, lo que podemos decir hasta el momento es que la fase dispersa debe estar dentro del rango de 1-1000 nanómetros (nm). Vamos a considerar dos características de las suspensiones coloidales: el primer tipo es en el cual las partículas son del mismo tamaño, conocido como *monodispersas* y el segundo tipo es cuando existe una distribución de tamaño de partículas, y se le conoce como *polidispersas*. Un fenómeno que suele verse frecuentemente en las suspensiones coloidales, es el fenómeno de floculación, que es la formación de aglomerados de partículas. Generalmente suelen sedimentarse estos aglomerados, pero si no son más densos que el medio matriz, estos aglomerados estarán flotando en el medio homogéneo. A partir de esta sección nos vamos a referir a los coloides como estables o inestables. La manera de observar la estabilidad de nuestras muestras, es en base a un monitoreo en el tiempo de las suspensiones coloidales, y en su momento se presentarán los respectivos resultados.

3.2. Algunas propiedades importantes de los coloides. Esparcimiento de la radiación

La primer teoría de esparcimiento de luz estricta para partículas muy pequeñas fue desarrollada por Rayleigh en 1871. Estos puntos de referencia, fueron la pauta para la evolución de este tema, surgiendo la teoría de Mie en 1908[9], Debye en 1915 y Gans en 1925, cuyo tamaño de partículas se aproxima a la longitud de onda de la luz. Este tipo de teorías involucra el tamaño y forma de las partículas coloidales. De acuerdo a la electrodinámica clásica, la radiación electromagnética debido a la interacción de las partículas con un campo electromagnético, puede ser representada como una propagación de ondas electromagnéticas en la que un campo electromagnético fluctuante, asociada se propaga a través del espacio con la velocidad de la luz. La intensidad de radiación, es proporcional al cuadrado de la amplitud E_o de la onda en movimiento. La radiación interactúa con la materia a través de efectos del vector de campo eléctrico en la distribución de electrones en las moléculas. Como ya mencionamos la teoría de Rayleigh fue desarrollada para partículas pequeñas, ¿Qué tan pequeñas?, la respuesta es para partículas más pequeñas que la longitud de onda de la luz incidente. Debido a que nosotros trabajamos con suspensiones coloidales no de este tamaño, necesitamos otro tipo de teorías, en las cuales se pueda trabajar con partículas mayores, es decir, partículas cuyo tamaño sea aproximadamente igual a la longitud de onda incidente, llamada solución de Mie. Una técnica para conocer el tamaño de las partículas, que utiliza el esparcimiento de luz es la conocida como Esparcimiento de luz dinámica (DLS, mejor conocida como *Dynamic Light Scattering*). Aparatos comerciales como el Zetasizer, utilizan DLS, para medición

de tamaño de partículas, y es conveniente mencionar que éste fue el instrumento que se utilizó para caracterizar nuestras partículas que utilizamos a lo largo de nuestro trabajo.

En el siguiente capítulo vamos a explicar detalladamente el análisis matemático para obtener ciertos conceptos importantes como son: la matriz de esparcimiento, y la sección diferencial transversal.

Capítulo 4

Matriz de Esparcimiento y Sección Transversal de Esparcimiento

Es importante esta sección dado que nuestras fórmulas extendidas de Fresnel y el CSM dependen de las amplitudes de esparcimiento. En este capítulo nos enfocaremos en mostrar la deducción de la matriz de esparcimiento ($S(\theta)$). Obtendremos la solución a la ecuación de onda vectorial, obteniendo así los coeficientes de esparcimiento (a_n y b_n) para el caso particular de una esfera. Con el campo electromagnético en términos de los coeficientes de esparcimiento obtendremos la matriz de esparcimiento cuyos elementos están dados en términos de estos coeficientes. Además obtendremos la sección transversal de esparcimiento, mostrando al final los resultados que obtendríamos al momento de ir variando ya sea el radio o la longitud de onda incidente y veremos el comportamiento del esparcimiento cuando tenemos luz incidiendo sobre una partícula.

4.1. Matriz de esparcimiento

El problema que se va a resolver en esta sección es considerar una partícula iluminada por una onda plana. Presentaremos la relación que existe entre el campo eléctrico incidente y el campo eléctrico esparcido. Será a partir de la matriz de esparcimiento que relacionaremos estos dos campos eléctricos, ver figura 4.1. Considerando esta figura, tenemos que la dirección de propagación de la luz incidente define el eje z , también llamada dirección de incidencia. El vector \hat{e}_r y \hat{e}_z definen el plano de esparcimiento. El plano de esparcimiento está determinado por el ángulo azimutal ϕ excepto cuando \hat{e}_r es paralelo al eje z . Es conveniente resolver el campo eléctrico incidente \vec{E}_i , que está en el plano

xy , en componentes paralela ($E_{i\parallel}$) y perpendicular ($E_{i\perp}$) al plano de esparcimiento; las componentes del campo eléctrico son de la siguiente forma

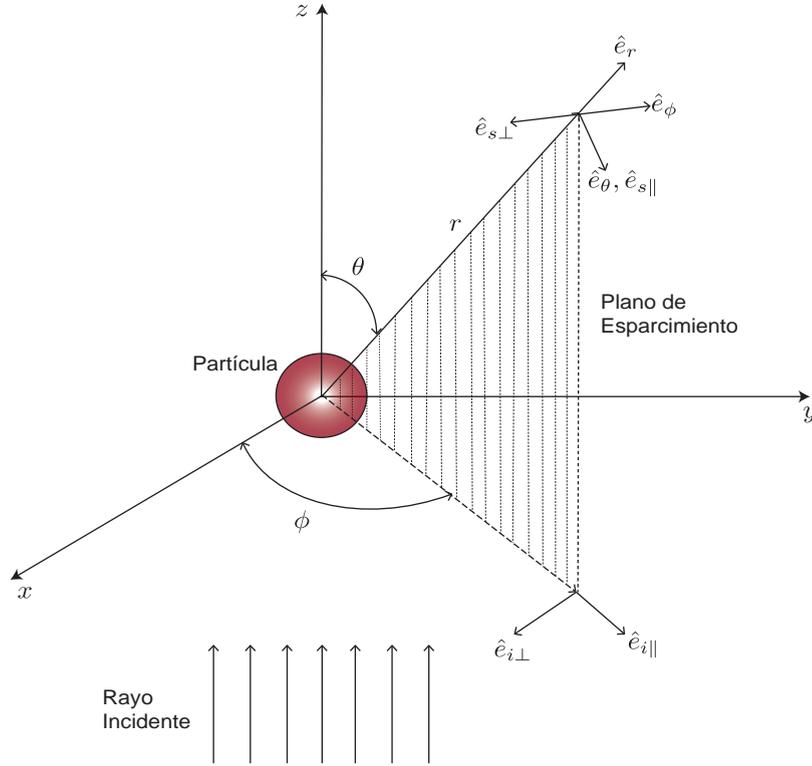


FIGURA 4.1: Plano de esparcimiento.

$$\vec{E}_i = (E_o^{\parallel} \hat{e}_i^{\parallel} + E_o^{\perp} \hat{e}_i^{\perp}) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (4.1)$$

donde $k = \frac{2\pi n_2}{\lambda}$, con λ la longitud de onda en el vacío y n_2 en índice de refracción y con los vectores

$$\hat{e}_i^{\perp} = \hat{e}_x \sin \phi - \hat{e}_y \cos \phi, \quad (4.2)$$

$$\hat{e}_i^{\parallel} = \hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi, \quad (4.3)$$

con la relación $\hat{e}_i^{\perp} \times \hat{e}_i^{\parallel} = \hat{e}_z$. Escribiendo estas últimas expresiones en términos de las coordenadas esféricas obtengo

$$\hat{e}_i^{\perp} = -\hat{e}_\phi; \quad \hat{e}_i^{\parallel} = \hat{e}_r \sin \theta + \hat{e}_\theta \cos \theta. \quad (4.4)$$

Ahora si las componentes x e y del campo incidente son denotadas por E_{ix} y E_{iy} luego:

$$E_i^{\parallel} = \cos \phi E_{ix} + \sin \phi E_{iy}, \quad (4.5)$$

$$E_i^{\perp} = \sin \phi E_{ix} - \cos \phi E_{iy}, \quad (4.6)$$

que se puede escribir la ecuación (4.1) de la siguiente manera

$$\vec{E}_i = \hat{e}_i^{\parallel} E_i^{\parallel} + \hat{e}_i^{\perp} E_i^{\perp} \quad (4.7)$$

A distancias muy lejanas del origen ($kr \gg 1$), definido como el campo lejano, el campo eléctrico esparcido \vec{E}_s es aproximadamente transversal ($\hat{e}_r \cdot \vec{E}_s \approx 0$) y tiene la forma asintótica

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ikr}}{kr} \vec{A}; \quad kr \gg 1, \quad (4.8)$$

donde $\hat{e}_r \cdot \vec{A} = 0$. Por lo tanto el campo eléctrico esparcido en la región de campo lejano puede escribirse como

$$\vec{E}_s = E_s^{\parallel} \hat{e}_s^{\parallel} + E_s^{\perp} \hat{e}_s^{\perp}; \quad \hat{e}_s^{\parallel} = \hat{e}_\theta; \quad \hat{e}_s^{\perp} = -\hat{e}_\phi; \quad \hat{e}_s^{\perp} \times \hat{e}_s^{\parallel} = \hat{e}_r, \quad (4.9)$$

con \hat{e}_s^{\parallel} paralelo al plano de esparcimiento y \hat{e}_s^{\perp} perpendicular a éste. Utilizando las condiciones de contorno en la superficie de la esfera, tenemos:

$$[\vec{E}_s(\vec{x}) - \vec{E}_i(\vec{x})] \times \hat{n} = 0, \quad (4.10)$$

$$[\vec{H}_s(\vec{x}) - \vec{H}_i(\vec{x})] \times \hat{n} = 0, \quad (4.11)$$

que son las condiciones para que las componentes tangenciales de los campos sean continuas. Se puede mostrar[10] que la relación entre campo incidente y esparcido se escribe como:

$$\begin{pmatrix} E_s^{\parallel} \\ E_s^{\perp} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2 & S_3 \\ S_4 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_i^{\parallel} \\ E_i^{\perp} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

La matriz de la ecuación (4.12) es una función de dos ángulos, de esparcimiento θ y el azimutal ϕ y es esta la definición de la matriz de esparcimiento $S(\theta, \phi)$.

Para encontrar los elementos de matriz necesitamos resolver la ecuación de onda vectorial dentro y fuera de la esfera más las condiciones de frontera. Al considerar las ecuaciones

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad y \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = -i\omega\epsilon\vec{E}, \quad (4.13)$$

y al tomar el rotacional de estas expresiones, obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (4.14)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0. \quad (4.15)$$

Considerando una función ψ y un vector constante arbitrario \vec{c} , podemos construir una función vectorial \vec{M} dada por

$$\vec{M} = \vec{\nabla} \times (\vec{c}\psi), \quad (4.16)$$

teniendo como resultado

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0, \quad (4.17)$$

donde \vec{M} tendrá las propiedades de un campo electromagnético, y a partir de esta función obtendremos la función de onda. Nos enfocaremos en el caso particular de una esfera. Utilizando las identidades vectoriales

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}, \quad (4.18)$$

y

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}, \quad (4.19)$$

obtenemos que

$$\nabla^2 \vec{M} + k^2 \vec{M} = \vec{\nabla} \times [c(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)], \quad (4.20)$$

por lo tanto \vec{M} satisface la ecuación de onda vectorial si ψ es solución de la ecuación de onda escalar

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (4.21)$$

Utilizando \vec{M} , para construir un nuevo vector \vec{N} , obtenemos:

$$\vec{N} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}}{k}, \quad (4.22)$$

el cual satisface la ecuación

$$\nabla^2 \vec{N} + k^2 \vec{N} = 0, \quad (4.23)$$

por último si tomamos el rotacional de \vec{N} ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{N} = k \vec{M}. \quad (4.24)$$

Por lo tanto \vec{M} y \vec{N} tienen todas las propiedades de un campo electromagnético. Este problema se reduce al problema de encontrar soluciones a la ecuación de onda escalar. Vamos a llamar a la función escalar ψ como la función generadora de vectores armónicos \vec{M} y \vec{N} .

Aquí es el punto donde nos enfocaremos al caso particular de esparcimiento de una esfera, teniendo a $\vec{c} = \vec{r}$ y una simetría esférica (r, θ, ϕ) . Notemos que \vec{M} es tangencial en cualquier punto de la esfera $\vec{r} = \text{constante}$,

$$\vec{r} \cdot \vec{M} = 0. \quad (4.25)$$

Para la ecuación de onda escalar tenemos

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \quad (4.26)$$

Considerando que $\psi = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, y proponiendo el método de separación de variables la solución [10] a (4.26). Podemos construir las funciones generadoras que satisfacen la ecuación de onda escalar, donde se tendrán dos soluciones: una par (ψ_{mn}^e) y la otra impar (ψ_{mn}^o). Los superíndices indican la solución par (del inglés *even*) y la impar (del inglés *odd*)

$$\psi_{mn}^e = \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \quad (4.27)$$

$$\psi_{mn}^o = \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(kr), \quad (4.28)$$

donde $z_n(kr)$ puede ser cualquier función Bessel esférica de primer o segundo orden o las funciones Hankel.

Por lo tanto los vectores armónicos esféricos generados por ψ_{mn}^e ψ_{mn}^o son

$$\vec{M}_{mn}^e = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \psi_{mn}^e); \quad \vec{N}_{mn}^e = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}_{mn}^e}{r}. \quad (4.29)$$

$$\vec{M}_{mn}^o = \vec{\nabla} \times (\vec{r} \psi_{mn}^o); \quad \vec{N}_{mn}^o = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{M}_{mn}^o}{r}. \quad (4.30)$$

Escribiendo M y N en coordenadas esféricas,

$$M_{mn}^e = \frac{-m}{\sin \theta} \sin(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{e}_\theta - \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{e}_\phi. \quad (4.31)$$

$$M_{mn}^o = \frac{m}{\sin \theta} \cos(m\phi) P_n^m(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{e}_\theta - \sin(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{e}_\phi. \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} N_{mn}^e &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos(m\phi) n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_r + \cos(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{e}_\theta - \\ &- m \sin(m\phi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} N_{mn}^o &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \sin(m\phi) n(n+1) P_n^m(\cos \theta) \hat{e}_r + \sin(m\phi) \frac{dP_n^m(\cos \theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{e}_\theta + \\ &+ m \cos(m\phi) \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Con estas expresiones se puede estudiar el problema de esparcimiento de la luz debido a una esfera arbitraria.

Ahora el problema que nos interesa, es la esparcimiento de una onda plana a lo largo del eje x , la cual consideraremos como la **polarización x** escrita en coordenadas esféricas como:

$$\vec{E}_i = E_o e^{ikr \cos \theta} \hat{e}_x; \quad \hat{e}_x = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_r + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_\theta - \sin \phi \hat{e}_\phi. \quad (4.35)$$

Se puede mostrar[10] que \vec{E}_i se puede desarrollar en base a un vector de armónicos esféricos, obteniendo:

$$\vec{E}_i = E_o \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_{1n}^{o(1)} - iN_{1n}^{e(1)}]. \quad (4.36)$$

Ahora vamos a trabajar con una onda plana a lo largo del eje x , es decir, con polarización x , la cual incide en una esfera homogénea, isotrópica de radio a . Dado que se obtuvo \vec{E}_i en términos de armónicos esféricos y tomando en cuenta que

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{n} \times \vec{E} = \frac{k}{\omega\mu} \hat{n} \times \vec{E}, \quad (4.37)$$

y utilizando el valor obtenido para el campo eléctrico incidente \vec{E}_i , obtenemos la onda transversal para el campo magnético

$$\vec{H}_i = \frac{-k}{\omega\mu} E_o \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [M_{1n}^{(e)1} + iN_{1n}^{(o)1}]. \quad (4.38)$$

De igual forma vamos a desarrollar el campo electromagnético esparcido, E_s y H_s , y el campo dentro de la esfera, E_1 y H_1 , en una base de vectores de armónicos esféricos debido a la geometría del sistema.

Las condiciones de frontera entre la esfera y sus alrededores, están dadas por

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n} = 0, \quad (4.39)$$

y

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = 0, \quad (4.40)$$

teniendo como resultado

$$(\vec{E}_i + \vec{E}_s - \vec{E}_1) \times \hat{e}_r = (\vec{H}_i + \vec{H}_s - \vec{H}_1) \times \hat{e}_r = 0. \quad (4.41)$$

Dado estas expresiones, los coeficientes del desarrollo tanto para la onda esparcida y dentro de la esfera se anulan excepto cuando $m = 1$. Las condiciones de finitud, nos obligan a considerar solo $j_n(k_1 r)$ con k_1 el número de onda dentro de la esfera. Por lo tanto el desarrollo de los campos transversales E_1 y H_1 , son:

$$\vec{E}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} E_o i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [c_n M_{1n}^{(o)1} - i d_n N_{1n}^{(e)1}], \quad (4.42)$$

$$\vec{H}_1 = \frac{-k_1}{\omega\mu_1} \sum_{n=1}^{\infty} E_o i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [d_n M_{1n}^{(e)1} + i c_n N_{1n}^{(o)1}], \quad (4.43)$$

donde μ_1 es la permeabilidad de la esfera y $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_1}$.

Fuera de la esfera j_n y y_n no tienen discontinuidades, se van a considerar en los campos esparcidos. Por lo cual introducimos las funciones Hankel,

$$H_\nu^{(1)}(\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i[\rho - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + \frac{1}{2})}{(2i\rho)^m m! \Gamma(\nu - m + \frac{1}{2})}. \quad (4.44)$$

$$H_\nu^{(2)}(\rho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i[\rho - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + m + \frac{1}{2})}{(2i\rho)^m m! \Gamma(\nu - m + \frac{1}{2})}, \quad (4.45)$$

con $\Gamma(n+1) = n!$ con n entero no negativo, y dado que $\rho = k_I r$, las funciones de Hankel esféricas están dadas asintóticamente

$$h_n^{(1)}(kr) \sim \frac{(-i)^n e^{ikr}}{ikr}; \quad kr \gg n^2, \quad (4.46)$$

$$h_n^{(2)}(kr) \sim \frac{-(i)^n e^{-ikr}}{ikr}; \quad kr \gg n^2, \quad (4.47)$$

$h_n^{(1)}(kr)$ es una onda esférica saliente de la esfera y $h_n^{(2)}(kr)$ es una onda entrante a la esfera. Por razones físicas, el campo esparcido es solo una onda saliente a grandes distancias de la partícula, por lo tanto solo se ocupará $h_n^{(1)}$ para las funciones generadoras. Por lo tanto el campo electromagnético esparcido es:

$$\vec{E}_s = E_o \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [ia_n N_{1n}^{(e)3} - b_n M_{1n}^{(o)3}], \quad (4.48)$$

$$\vec{H}_s = \frac{k}{\omega\mu} E_o \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [ib_n N_{1n}^{(o)3} + a_n M_{1n}^{(e)3}], \quad (4.49)$$

donde el superíndice (3) significa que estamos usando la expresión $h_n^{(1)(k_o r)}$.

Por conveniencia se definen las siguientes funciones

$$\pi_n = \frac{P_n^1}{\sin \theta}, \quad (4.50)$$

y

$$\tau_n = \frac{dP_n^1}{d\theta}, \quad (4.51)$$

con las siguientes relaciones de recurrencia

$$\pi_n = \frac{2n-1}{n-1} \cos \theta \pi_{n-1} - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2}, \quad (4.52)$$

$$\tau_n = n \cos \theta \pi_n - (n + 1)\pi_{n-1}, \quad (4.53)$$

los primeros valores de la expresión 4.77

$$\pi_0 = 0, \quad (4.54)$$

$$\pi_1 = 1, \quad (4.55)$$

y

$$\pi_2 = 3 \cos \theta. \quad (4.56)$$

Ahora escribiendo las funciones \vec{M} y \vec{N} en términos de π_n y τ_n con $m = 1$, obtenemos:

Para el caso impar:

$$M_{1n}^o = \cos \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{e}_\theta - \sin \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{e}_\phi. \quad (4.57)$$

Para el caso par:

$$M_{1n}^e = -\sin \phi \pi_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{e}_\theta - \cos \phi \tau_n(\cos \theta) z_n(\rho) \hat{e}_\phi. \quad (4.58)$$

Para el caso impar:

$$\begin{aligned} N_{1n}^o &= \sin \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_r + \sin \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\theta + \\ &+ \cos \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Y para el caso par:

$$\begin{aligned} N_{1n}^e &= \cos \phi n(n+1) \sin \theta \pi_n(\cos \theta) \frac{z_n(\rho)}{\rho} \hat{e}_r + \cos \phi \tau_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\theta - \\ &- \sin \phi \pi_n(\cos \theta) \frac{[\rho z_n(\rho)]'}{\rho} \hat{e}_\phi. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Necesitamos conocer explícitamente los coeficientes de esparcimiento a_n y b_n ; utilizando las condiciones de frontera, tenemos las siguientes condiciones para la parte de θ y ϕ en $r = a$

$$E_{i\theta} + E_{s\theta} = E_{l\theta}. \quad (4.61)$$

$$H_{i\theta} + H_{s\theta} = H_{l\theta}. \quad (4.62)$$

$$E_{i\phi} + E_{s\phi} = E_{l\phi}. \quad (4.63)$$

$$H_{i\phi} + H_{s\phi} = H_{l\phi}. \quad (4.64)$$

Al sustituir los valores de cada uno de los campos en 4.85 y 4.87, obtenemos

$$j_n(ka) = h_n^{(1)}(ka)b_n + j_n(k_1a)c_n, \quad (4.65)$$

y

$$[k_1aj_n(k_1a)]'d_n + m[ka h_n^{(1)}(ka)]'a_n = m[ka j_n(ka)]', \quad (4.66)$$

donde las funciones primadas son derivadas con respecto al argumento y de las expresiones 4.86 y 4.88, obtenemos

$$\mu[k_1aj_n(k_1a)]'c_n + \mu_1[ka h_n^{(1)}(ka)]'b_n = \mu_1[ka j_n(ka)]', \quad (4.67)$$

y

$$\mu[k_1aj_n(k_1a)]d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(ka)a_n = \mu_1 j_n(ka), \quad (4.68)$$

simplificando un poco la notación definimos que $x = ka$ y $m = \frac{k_1}{k} = \frac{n_1}{n}$, con n_1 el índice de refracción de la partícula y n índice de refracción del medio, de esta manera se tiene

$$j_n(mx)c_n + h_n^{(1)}(x)b_n = j_n(x); \quad (4.69)$$

$$\mu[mx j_n(mx)]'c_n + \mu_1[xh_n^{(1)}(x)]'b_n = \mu_1[xj_n(x)]'; \quad (4.70)$$

$$\mu mj_n(mx)d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(x)a_n = \mu_1 j_n(x); \quad (4.71)$$

$$[mxj_n(mx)]'d_n + m[xh_n^{(1)}]'a_n = m[xj_n(x)]; \quad (4.72)$$

y usando estas expresiones, obtenemos los coeficientes del **campo dentro de la partícula**:

$$c_n = \frac{\mu_1 j_n(x)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[xj_n(x)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}, \quad (4.73)$$

$$d_n = \frac{\mu_1 mj_n(x)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 mh_n^{(1)}(x)[xj_n(x)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}, \quad (4.74)$$

y por último los **coeficientes del campo electromagnético esparcido**

$$a_n = \frac{\mu m^2 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu_1 j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}, \quad (4.75)$$

$$b_n = \frac{\mu_1 j_n(mx)[xj_n(x)]' - \mu j_n(x)[mxj_n(mx)]'}{\mu_1 j_n(mx)[xh_n^{(1)}(x)]' - \mu h_n^{(1)}(x)[mxj_n(mx)]'}. \quad (4.76)$$

Para una n en particular cuando la frecuencia (o radio) es tal que uno de estos denominadores es muy pequeño, el modo normal correspondiente dominará al campo esparcido. El modo a_n es dominante si la condición

$$\frac{[xh_n^{(1)}(x)]'}{h_n^{(1)}(x)} = \frac{\mu_1[mxj_n(mx)]'}{\mu m^2 j_n(mx)}, \quad (4.77)$$

se satisface aproximadamente; de igual forma para el modo b_n

$$\frac{[xh_n^{(1)}(x)]'}{h_n^{(1)}(x)} = \frac{\mu[mxj_n(mx)]'}{\mu_1 m^2 j_n(mx)}. \quad (4.78)$$

Para simplificar a_n y b_n utilizaremos las funciones Ricatti-Bessel

$$\psi_n(\rho) = \rho j_\rho, \quad (4.79)$$

y

$$\xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho), \quad (4.80)$$

llegando al resultado final para los coeficientes de esparcimiento

$$a_n = \frac{m\psi_n(mx)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_n'(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\psi_n'(mx)}, \quad (4.81)$$

$$b_n = \frac{\psi_n(mx)\psi_n'(x) - m\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(mx)}. \quad (4.82)$$

Notando que si m se aproxima a la unidad, los coeficientes se anulan, lo que es correcto, ya que si la partícula desaparece no debe haber campo esparcido. Podemos escribir el campo esparcido en términos de las funciones Ricatti-Bessel, utilizando las ecuaciones 4.72, 4.73 y de la 4.81-4.84, obtenemos

$$E_{s\theta} = \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [i a_n \tau_n \xi_n' - b_n \pi_n \xi_n]. \quad (4.83)$$

$$E_{s\phi} = \frac{\text{sen } \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [b_n \tau_n \xi_n - i a_n \pi_n \xi_n']. \quad (4.84)$$

$$H_{s\theta} = \frac{k \text{ sen } \phi}{\omega \mu \rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [i b_n \tau_n \xi_n' - a_n \pi_n \xi_n]. \quad (4.85)$$

$$H_{s\phi} = \frac{k \cos \phi}{\omega \mu \rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_n [i b_n \pi_n \xi_n' - a_n \tau_n \xi_n]. \quad (4.86)$$

Empezaremos por escribir las componentes transversales del campo eléctrico esparcido ($E_{s\theta}$ y $E_{s\phi}$), considerando los términos anteriores

$$E_{s\theta} = \frac{\cos \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_o i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [i a_n \tau_n \frac{d}{d\rho} (\rho h_n^{(1)}(\rho)) - b_n \pi_n h_n^{(1)}(\rho)], \quad (4.87)$$

y ocupando la parte asintótica, para considerar el campo eléctrico lejano

$$h_n^{(1)}(\rho) \sim \frac{(-i)^n e^{i\rho}}{i\rho}, \quad (4.88)$$

tenemos que el campo eléctrico lejano $E_{s\theta}$ está dado por,

$$E_{s\theta} \sim \frac{\cos \phi}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} E_o \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n) e^{ikr}, \quad (4.89)$$

por lo tanto obtenemos dos resultados importantes, nombrando

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (a_n \tau_n + b_n \pi_n), \quad (4.90)$$

y entonces

$$E_{s\theta} = \frac{\cos \phi}{-ikr} E_o e^{ikr} S_2(\cos \theta). \quad (4.91)$$

Ahora con la otra componente ($E_{s\phi}$), hacemos lo mismo

$$E_{s\phi} = \frac{\sin \phi}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} E_o i^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [b_n \tau_n \rho h_n^{(1)}(\rho) - i a_n \pi_n \frac{d}{d\rho} (\rho h_n^{(1)}(\rho))], \quad (4.92)$$

y volvemos a quitar la parte asintótica, como en el caso anterior

$$E_{s\phi} \sim \frac{\sin \phi}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} E_o \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \left(\frac{b_n \tau_n}{i} + \frac{a_n \pi_n}{i} \right) e^{i\rho}. \quad (4.93)$$

llegando a

$$E_{s\phi} \sim \frac{-\sin \phi}{-ikr} \sum_{n=1}^{\infty} E_o \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (b_n \tau_n + a_n \pi_n) e^{i\rho}. \quad (4.94)$$

y nombrando,

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} (b_n \tau_n + a_n \pi_n), \quad (4.95)$$

y el campo eléctrico en la región lejana, es

$$E_{s\phi} = -E_o \operatorname{sen} \phi \frac{e^{ikr}}{-ikr} S_1(\cos \theta). \quad (4.96)$$

Encontrando así la relación entre los campos esparcidos y los incidentes; escribiendo 4.115 y 4.120, con la notación de campo paralelo y perpendicular al plano de esparcimiento. Considerando que tenemos el campo lejano

$$E_{s\parallel} = \frac{E_{i\parallel}}{-ikr} e^{ik(r-z)} S_2(\cos \theta), \quad (4.97)$$

$$E_{s\perp} = \frac{E_{i\perp}}{-ikr} e^{ik(r-z)} S_1(\cos \theta), \quad (4.98)$$

y escribiendo estas últimas ecuaciones en forma matricial, tenemos el resultado deseado, de los campos esparcidos debido a una esfera.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_{s\parallel} \\ \mathbf{E}_{s\perp} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \begin{pmatrix} S_2(\theta) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_1(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{i\parallel} \\ \mathbf{E}_{i\perp} \end{pmatrix}. \quad (4.99)$$

Comparando esta última ecuación con la ecuación (4.12), tenemos que los elementos de matriz $S_3(\theta)$ y $S_4(\theta)$ son cero debido a la simetría dado que estamos en el caso particular de una esfera. La ecuación (4.99) es muy importante para nuestro trabajo porque las amplitudes de reflexión que presentaremos más adelante dependerán de estos elementos de matriz, y son estos elementos que harán diferencia entre los modelos. Serán elementos importantes para programar las fórmulas extendidas de Fresnel[1] y las fórmulas del *Coherent scattering model*[2].

A continuación se muestra un resultado importante, que es el cálculo del elemento de la matriz $S(\theta)$, en la dirección de incidencia, es decir, a un ángulo θ igual a cero[10]. Dada la relación

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu}, \quad (4.100)$$

y con $m = 1$,

$$P_n(\mu) = \operatorname{sen} \theta \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \Rightarrow \frac{P_n(\mu)}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}, \quad (4.101)$$

recordando las definiciones de π_n y τ_n

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \quad (4.102)$$

y evaluando en $\mu = 1$, tenemos que

$$P_n(1) = 1 \Rightarrow P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (4.103)$$

obteniendo que

$$\pi_n(1) = \tau_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (4.104)$$

y en la dirección de incidencia de la esfera (*forward direction*), es decir, $\theta = 0$

$$S_1(\theta = 0) = S_2(\theta = 0) = S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_n \tau_n + b_n \pi_n]. \quad (4.105)$$

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n(n+1)} [a_n + b_n] \left(\frac{n(n+1)}{2} \right). \quad (4.106)$$

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{2} (a_n + b_n). \quad (4.107)$$

La ecuación (4.107) se utiliza en la relación de dispersión de Foldy-Lax[11, 12] y en el índice de refracción propuesto por Van de Hulst[13].

4.2. Sección transversal diferencial de esparcimiento

La sección transversal es una área efectiva que mide la potencia que pasa a través de una superficie de una esfera ‘imaginaria’ centrada en la partícula. La sección diferencial transversal ($\frac{dC_{sca}}{d\Omega}$) especifica la distribución angular de la luz esparcida debido a una partícula esférica: la cantidad de luz (potencia incidente por unidad de superficie) esparcida dentro de una unidad de ángulo sólido respecto a una dirección dada[10]. Nos interesan estas cantidades físicas para tener una mejor comprensión sobre el esparcimiento de la luz debido a una partícula esférica. Mostraremos algunos resultados de $\frac{dC_{sca}}{d\Omega}$ para diferentes tamaños de partículas.

Retomando lo de la sección anterior, sabemos que el plano de esparcimiento está determinado por el ángulo azimutal (ϕ) excepto cuando \hat{e}_r es paralelo al eje z. En este caso ($\hat{e}_r = \pm \hat{e}_z$) cualquier plano que contenga al eje z es un posible plano de esparcimiento. Es conveniente proyectar el campo eléctrico incidente \vec{E}_i que está en el plano xy, en componentes paralela ($E_{i\parallel}$) y perpendicular ($E_{i\perp}$) al plano de esparcimiento, esto los

vemos en la figura 4.1. Considerando los mismo vectores que en el capítulo anterior, tenemos

$$\vec{E}_i = E_i^{\parallel} \hat{e}_i^{\parallel} + E_i^{\perp} \hat{e}_i^{\perp}, \quad (4.108)$$

y los vectores unitarios

$$\hat{e}_i^{\perp} = \hat{e}_x \sin \phi - \hat{e}_y \cos \phi, \quad (4.109)$$

$$\hat{e}_i^{\parallel} = \hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi. \quad (4.110)$$

Ahora escribamos el campo incidente paralelo al plano de esparcimiento como

$$E_i^{\parallel} \hat{e}_i^{\parallel} = E_i^{\parallel} (\hat{e}_x \cos \phi + \hat{e}_y \sin \phi), \quad (4.111)$$

lo que nos lleva a escribir

$$E_i^{\parallel} = E_{xi} \cos \phi + E_{yi} \sin \phi, \quad (4.112)$$

de igual forma para el campo perpendicular

$$E_i^{\perp} = E_{xi} \sin \phi - E_{yi} \cos \phi. \quad (4.113)$$

Por lo tanto el campo esparcido es de la forma

$$\vec{E}_s = E_s^{\parallel} \hat{e}_s^{\parallel} + E_s^{\perp} \hat{e}_s^{\perp}. \quad (4.114)$$

Utilizando las ecuaciones 4.132 y 4.138, podemos obtener la misma expresión que la ecuación 4.123.

Por conveniencia vamos a considerar el campo eléctrico incidente con polarización x , lo que nos lleva a considerar al campo incidente de la forma $\vec{E}_i = E \hat{e}_x$ y el campo lejano como

$$\vec{E}_s = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E; \quad \vec{H}_s = \frac{k}{\omega \mu} \hat{e}_r \times \vec{E}_s. \quad (4.115)$$

Solo recordemos que la luz incidente tiene polarización x y estamos utilizando \vec{X} para el vector de amplitud de esparcimiento que está relacionada con los elementos de la matriz de esparcimiento S como:

$$\vec{X} = S_2 \cos \phi \hat{e}_s^{\parallel} + S_1 \sin \phi \hat{e}_s^{\perp}. \quad (4.116)$$

Debido a que la sección transversal diferencial ($\frac{dC_{sca}}{d\Omega}$) es una cantidad importante asociada al esparcimiento de la luz, es por ello que mostraremos la deducción de esta cantidad. Dicha sección transversal dependerá del radio de la partícula esférica y/o de la longitud de onda incidente a la partícula. Por lo tanto los resultados que presentaremos en la siguiente sección se observarán estas dependencias con el tamaño y longitud de onda incidente. Para la deducción de esta expresión es necesario definir el vector de Poynting (\vec{S}) como un promedio temporal fuera de la partícula, teniendo que

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_2 \times \vec{H}_2^*) = \vec{S}_i + \vec{S}_s + \vec{S}_{ext}, \quad (4.117)$$

donde \vec{S}_i es el vector de Poynting del campo incidente, \vec{S}_s es el vector de Poynting esparcido, y \vec{S}_{ext} es el vector de Poynting externo debido a la interferencia del campo electromagnético incidente y esparcido. Teniendo cada uno de ellos la siguiente forma

$$\vec{S}_i = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_i \times \vec{H}_i^*). \quad (4.118)$$

$$\vec{S}_s = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*). \quad (4.119)$$

$$\vec{S}_{ext} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_i \times \vec{H}_s^* + \vec{E}_s \times \vec{H}_i^*). \quad (4.120)$$

Lo que nos interesa es la parte esparcida total radiada, que es independiente de la polarización de la onda incidente. Calculando la siguiente integral

$$W_s = \int_A \vec{S}_s \cdot \hat{e}_r dA = \frac{1}{2} \int_A \text{Re}(\vec{E}_s \times \vec{H}_s^*) \cdot \hat{e}_r dA, \quad (4.121)$$

analizando el producto vectorial dentro de la integral, vemos que

$$\vec{E}_s \times \vec{H}_s^* = \frac{e^{ik(r-z)}}{-ikr} \vec{X} E \times \left(\frac{k}{\omega\mu} \hat{e}_r \times \frac{e^{ik(r-z)}}{ikr} \vec{X}^* E^* \right). \quad (4.122)$$

Sustituyendo 4.140 en esta ecuación, y considerando que

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_s^{\parallel} = \cos \theta \hat{e}_\phi, \quad (4.123)$$

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_s^{\perp} = \hat{e}_\theta, \quad (4.124)$$

el producto vectorial se puede escribir como

$$\vec{E}_s \times \vec{H}_s^* = \frac{1}{k\omega\mu r^2} \vec{X} |E|^2 \times (\hat{e}_\phi S_2^* \cos \phi \cos \theta + \hat{e}_\theta S_1^* \sin \phi). \quad (4.125)$$

Volvemos a sustituir el valor de la expresión 4.140 y calculando el producto vectorial,

$$\begin{aligned} \vec{E}_s \times \vec{H}_s^* = \frac{|E|^2}{k\omega\mu r^2} [\hat{e}_r |S_1|^2 \sin^2 \phi - \hat{e}_\theta |S_2|^2 \cos^2 \phi \cos \theta \sin \theta + \\ + \hat{e}_r |S_2|^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \hat{e}_\phi S_2 S_1 \cos \phi \sin \phi \sin \theta] \end{aligned}, \quad (4.126)$$

y calculando el producto punto con el vector unitario en dirección radial, obtenemos

$$\vec{E}_s \times \vec{H}_s^* \cdot \hat{e}_r = \frac{|E|^2}{k\omega\mu r^2} [|S_1|^2 \sin^2 \phi + |S_2|^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta], \quad (4.127)$$

la parte esparcida total radiada como

$$W_s = \frac{1}{2} \int_A Re \left\{ \frac{|E|^2}{k\omega\mu r^2} [|S_1|^2 \sin^2 \phi + |S_2|^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta] \right\} dA, \quad (4.128)$$

y se puede mostrar[10] que:

$$W_s = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\vec{X}|^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (4.129)$$

y la sección transversal de esparcimiento está definida por,

$$C_{sca} = \frac{W_s}{I_i}, \quad (4.130)$$

siendo I_i la irradiancia incidente y que $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, se obtienen dos resultados importantes para polarización x . Por último definiendo a la cantidad $\frac{|X|^2}{k^2}$ como la sección transversal diferencial, tenemos

$$\frac{dC_{sca}}{d\Omega} = \frac{|X|^2}{k^2}, \quad (4.131)$$

por lo tanto tenemos que:

$$\frac{dC_{sca}}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} [|S_1|^2 \sin^2 \phi + |S_2|^2 \cos^2 \phi]. \quad (4.132)$$

Ahora necesitamos hacerlo para luz no polarizada, es decir, el campo va a ser de la forma

$$\vec{E}_i = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y \rightarrow |\vec{E}_i|^2 = E_x E_x^* + E_y E_y^*, \quad (4.133)$$

por lo que el vector de amplitud de esparcimiento está dado por la siguiente expresión

$$\vec{T} = \vec{X} E_x + \vec{Y} E_y, \quad (4.134)$$

donde los vectores \vec{X}, \vec{Y} , están relacionados con los elementos de la matriz de esparcimiento como

$$\vec{X} = \hat{e}_s^{\parallel} S_2 \cos \phi + \hat{e}_s^{\perp} S_1 \sin \phi, \quad (4.135)$$

$$\vec{Y} = \hat{e}_s^{\parallel} S_2 \sin \phi - \hat{e}_s^{\perp} S_1 \cos \phi, \quad (4.136)$$

y por lo tanto si extendemos la expresión (4.130), para este caso tenemos

$$C_{sca} = \int \frac{|\vec{T}|^2}{k^2 |\vec{E}_i|^2} d\Omega. \quad (4.137)$$

Pero sabemos que luz incidente no polarizada se tienen las siguientes propiedades

$$\langle E_x E_x^* \rangle = \langle E_y E_y^* \rangle; \quad \langle E_x E_y^* \rangle = \langle E_x E_y \rangle = 0, \quad (4.138)$$

por lo tanto la ecuación (4.134),

$$|\vec{T}|^2 = (|\vec{X}|^2 + |\vec{Y}|^2) E_x E_x^*, \quad (4.139)$$

y utilizando (4.135) y (4.136) en (4.137), se llega a

$$C_{sca} = \int \frac{[|S_1|^2 + |S_2|^2] |\vec{E}_i|^2}{2k^2 |\vec{E}_i|^2} d\Omega. \quad (4.140)$$

Por lo tanto para una polarización arbitraria, la sección transversal diferencial toma la siguiente forma

$$\frac{dC_{sca}}{d\Omega} = \frac{1}{2k^2} (|S_1|^2 + |S_2|^2). \quad (4.141)$$

Es esta expresión la que utilizaremos para realizar el cómputo de los ejemplos que a continuación presentaremos.

4.3. Ejemplos

Lo que presentaremos en esta sección son resultados teóricos sobre la sección transversal diferencial, y mostraremos, la importancia que tiene el tamaño de partículas cuando estamos estudiando el esparcimiento de la luz. utilizaremos la ecuación (4.141) y utilizando el software: Wolfram Mathematica 9, realizaremos los programas.

Los parámetros que se utilizaron para hacer el siguiente resultado teórico son: La longitud de onda de 630 nm., el radio de la partícula fue de 10 nm., el medio donde está inmersa la partícula es aire con un índice de refracción de 1.0, y estamos considerando una partícula de látex (Polimetil metacrilato, PMMA), con un índice de refracción de 1.515. Los valores del índice de refracción son obtenidos de tablas[14].

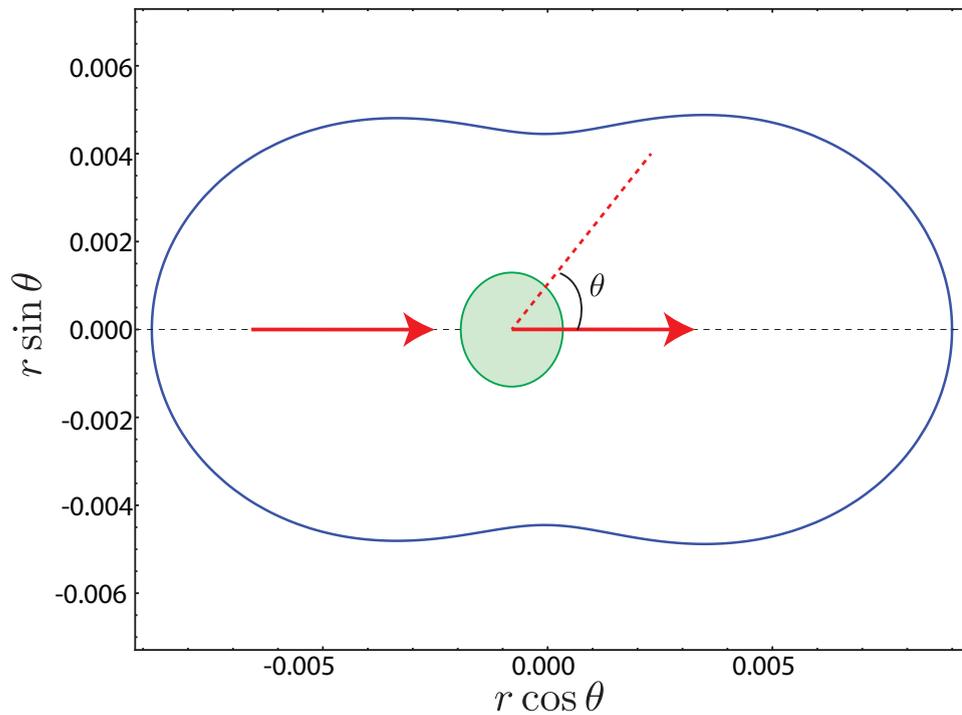


FIGURA 4.2: Partícula de látex de 10 nm de radio con un índice de refracción de 1.515 inmersa en aire con un índice de refracción de 1.0 y una longitud de onda de 630 nm.

La luz esparcida debida a partículas pequeñas comparadas con la longitud de onda se le conoce como esparcimiento de Rayleigh. Es claro que hay una simetría en este

resultado y se debe al tamaño de la partícula, es decir, no hay diferencia entre la luz que sale hacia adelante y la que sale hacia atrás. Veamos que sucede si aumentamos el tamaño de la partícula. Todos los demás parámetros se mantienen al igual que la figura anterior

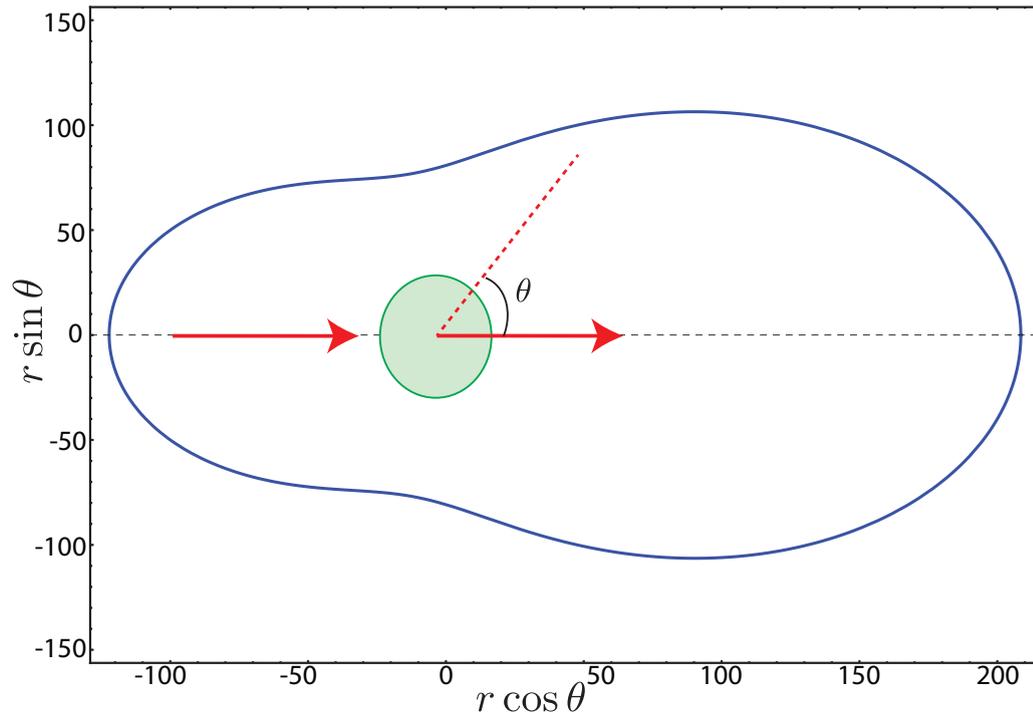


FIGURA 4.3: Partícula de látex de 50 nm de radio con un índice de refracción de 1.515 inmersa en aire con un índice de refracción de 1.0 y una longitud de onda de 630 nm.

En este caso el comportamiento es antisimétrico, dado que el esparcimiento de la luz es distinta, ya que no es lo mismo lo que va al hemisferio de adelante y al hemisferio de atrás. Por último veamos que sucede si aumentamos aún más el tamaño de la partícula a 200 nm de diámetro.

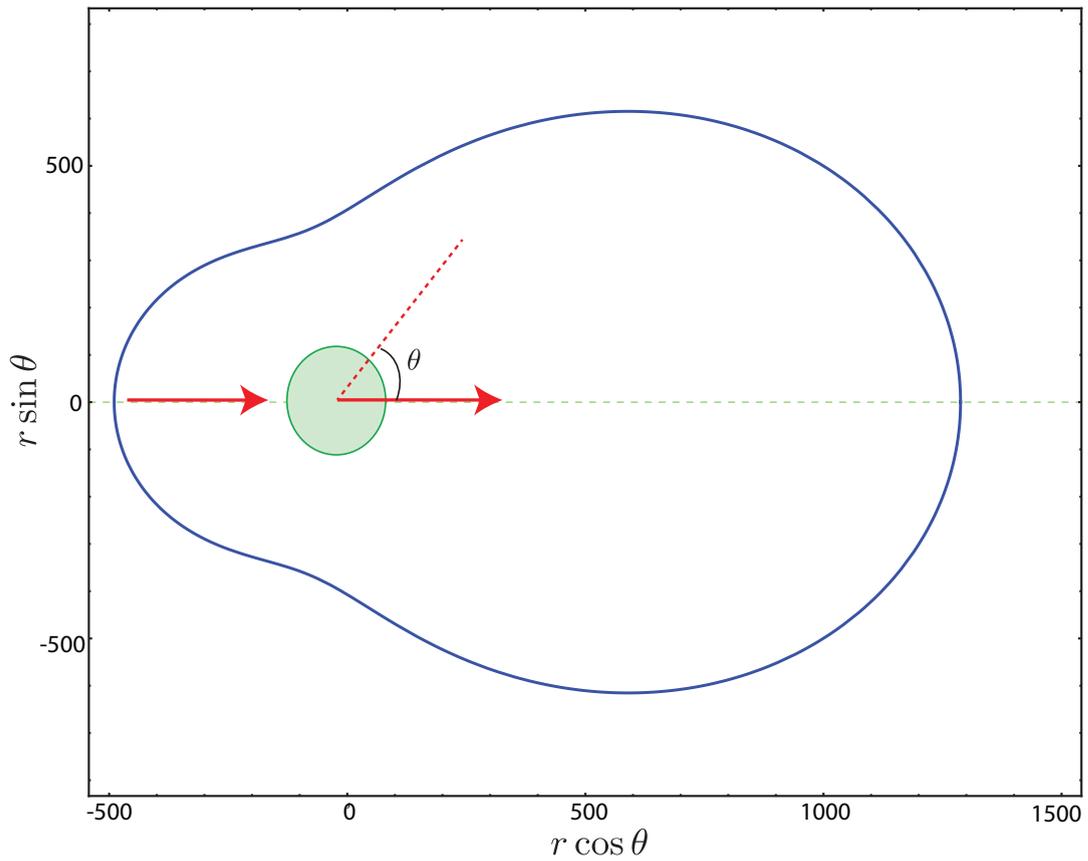


FIGURA 4.4: Partícula de látex de 100 nm de radio con un índice de refracción de 1.515 inmersa en aire con un índice de refracción de 1.0 y una longitud de onda de 630 nm.

Como podemos observar en estos últimos casos el comportamiento es completamente antisimétrico, y es lo que conocemos como esparcimiento de Mie, y es justamente el caso que vamos a tratar en esta tesis.

Capítulo 5

Modelos Teóricos

En este capítulo hablaremos acerca de los modelos teóricos que vamos a ocupar para el cálculo de las amplitudes de reflexión en interfaces planas de coloides inmersos en un medio homogéneo. Deseamos comparar los resultados teóricos con el experimento que se explicará más adelante. Empezaremos a describir el modelo teórico que lleva por nombre, Fórmulas Extendidas de Fresnel, que es un trabajo recientemente publicado[3]. Explicaremos las consideraciones teóricas que se realizaron para obtener las amplitudes de reflexión llamadas Fresnel 3 medios y Heurístico para coloides turbios. Analizaremos otro modelo el cual lleva como nombre, Modelo de Esparcimiento Coherente, y que usaremos a lo largo de este trabajo como el *Coherent Scattering Model* (CSM). Debemos de aclarar que estos modelos teóricos no fueron desarrollados en esta tesis, son trabajos realizados con anterioridad. Lo que nosotros mostraremos son ciertos detalles importantes y nos enfocaremos a realizar los resultados teóricos de estos modelos para nuestro comparativo teórico-experimental.

5.1. Fórmulas extendidas de Fresnel

Hay estudios previos[15], en donde se han encontrado inconsistencias al medir propiedades ópticas de coloides. En el grupo de trabajo se han realizado diferentes trabajos[1–4], en donde dan solución a las inconsistencias que encuentra G. H: Meeten. Las inconsistencias que Meeten encontró fueron al medir las propiedades ópticas de suspensiones absorbentes o en muestras heterogéneas[16–18], al querer obtener las propiedades ópticas usando las fórmulas de Fresnel de dos medios(ecuación (2.17))[6, 7]. Las técnicas para medir las propiedades ópticas de suspensiones coloidales generalmente son el uso del refractómetro tipo Abbe de donde se obtiene la parte real del índice de refracción o utilizando un refractómetro de Abbe modificado[5] de donde se puede obtener el índice de

refracción de la suspensión. Los primeros intentos por dar solución a estos problemas, fue lo que se reportó en el artículo “Nonlocal nature of electrodynamic response of colloidal systems”[4], en donde se encontró que la conductividad efectiva en el bulto del sistema coloidal es no local. La respuesta electromagnética en el bulto para coloides turbios es espacialmente dispersiva, no solo depende de la frecuencia del campo externo, sino además depende del vector de onda. Esto significa que las fórmulas de Fresnel que vienen en los libros de óptica[6] o de electrodinámica continua[7], ya no son válidas, ya que en estas fórmulas se considera que la respuesta electromagnética en el bulto solo depende de la frecuencia y que no se verá modificada al considerar una interfaz en el sistema. El modelo que se utilizó para calcular la no localidad en la respuesta electromagnética, fue proponer un sistema de partículas esféricas idénticas aleatoriamente localizadas e inmersas en una matriz homogénea. Este cálculo se realizó en el bulto. Para sistemas diluidos, la respuesta electromagnética está dada por el promedio del ensamble del tensor de conductividad no local de una esfera aislada. Cuando se habla de conductividad no local se quiere decir que la corriente inducida debido a la excitación de un campo electromagnético externo en algún punto dentro de la esfera depende no solo del valor del campo externo en dicho punto, sino además depende del valor del campo esparcido por las esferas y está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{J}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \int_{V_s} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \cdot \vec{E}^{ext}(\vec{r}'; \omega) d^3r'. \quad (5.1)$$

Donde el volumen de integración es la esfera. Los resultados que se presentan en[3] son resultado de un promedio espacial a través de un promedio de ensamble. La no localidad espacial es equivalente a la dispersión espacial en el espacio de Fourier. Al realizar el promedio, la conductividad efectiva se vuelve invariante translacional y entonces al hacer la transformada de Fourier, sólo depende de k , y se escribe que:

$$\langle \vec{J}^{ind} \rangle(\vec{k}; \omega) = \overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{ef}(\vec{k}; \omega) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{k}; \omega), \quad (5.2)$$

donde $\langle \dots \rangle$ representan el promedio. El valor del tensor generalizado de conductividad en el espacio de Fourier está dado por:

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}_{ef}(\vec{k}; \omega) = n_o \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s(\vec{k}, \vec{k}' = \vec{k}; \omega) \quad (5.3)$$

donde $n_o = \frac{N}{V}$, que es el total de partículas en un volumen. El tensor generalizado de conductividad de una esfera aislada en el espacio de Fourier es:

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s(\vec{k}; \omega) = \int_{V_s} d^3r \int_{V_s} d^3r' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}'}, \quad (5.4)$$

y así podemos considerar que el sistema coloidal, en promedio, es homogéneo e isotrópico. El análisis que se presentó hasta el momento es en el bulto, pero necesitamos la presencia de una interfaz, en[3] se trató este problema, donde se observó que la presencia de una interfaz rompe la invariancia traslacional, por lo que la respuesta electromagnética no dependerá de $\vec{r} - \vec{r}'$, sino de \vec{r}, \vec{r}' por separado, que en el espacio de Fourier, dependerá de \vec{k}, \vec{k}' , es decir,

$$\overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}'; \omega), \longrightarrow \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{k}_{\parallel}; k_z; k'_z; \omega), \quad (5.5)$$

en lugar de la del bulto

$$\overleftrightarrow{\sigma}_{ef}(\vec{k}, \omega), \quad (5.6)$$

hay que mencionar que la invariancia solo se rompió en la dirección z, por lo tanto $\vec{k}_{\parallel} = \vec{k}'_{\parallel}$. Como podemos observar de la ecuación (5.5), están en el espacio de Fourier, y debido a que no hay ninguna teoría macroscópica para este tipo de respuesta es por ello que se calculó directamente de las ecuaciones de Maxwell, es decir, no se relacionó con ninguna propiedad efectiva con significado macroscópico. Trabajando en el espacio de las r's, en la presencia de una interfaz plana, la cual se construyó al considerar que la probabilidad de encontrar el centro de una esfera es cero de un lado y constante del otro lado, tenemos como corriente inducida total a la suma de la corriente inducida en cada esfera cuando está excitada por \vec{E}^{exc} , es decir, por el campo eléctrico externo más el campo dispersado por todas las otras esferas, y este campo esparcido depende de la posición de todas las otras esferas en el semi-espacio.

$$\vec{J}^{ind}(\vec{r}; \omega) = \sum_{p=1}^N \int_{\mathbb{R}^3} \overleftrightarrow{\sigma}^s(\vec{r} - \vec{r}_p, \vec{r}' - \vec{r}_p; \omega) \cdot \vec{E}^{exc}(\vec{r}'; \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{p-1}, \vec{r}_{p+1}, \dots, \vec{r}_N; \omega) d^3r'. \quad (5.7)$$

Donde r_p denota la posición del centro de la esfera. Se utilizó esta corriente inducida para obtener la ecuación integral para el campo eléctrico, y considerando la aproximación de campo efectivo:

$$\vec{E}^{exc} \approx \langle \vec{E} \rangle, \quad (5.8)$$

en donde se identifica al campo promedio como el haz coherente y así se obtendrán las amplitudes de reflexión del haz coherente. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}; \omega) - k_o^2 \vec{E}(\vec{r}; \omega) = i\omega\mu_o(\vec{J}^{exc}(\vec{r}; \omega) + \vec{J}^{ind}(\vec{r}; \omega)), \quad (5.9)$$

se obtiene que

$$\vec{E}(\vec{r}; \omega) = \vec{E}_{ind}(\vec{r}; \omega) + i\omega\mu_o \int_{\mathbb{R}^3} d^3r' \overset{\leftrightarrow}{G}_o(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) \cdot \vec{J}^{ind}(\vec{r}'; \omega), \quad (5.10)$$

donde G_o es la función de Green diádica para el espacio vacío[19]

$$\overset{\leftrightarrow}{G}_o(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \left(\overset{\leftrightarrow}{1} + \frac{1}{k_o^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{ik_o|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}; \quad k_o = \frac{\omega}{c}. \quad (5.11)$$

Sustituyendo la ecuación (5.7) en (5.10) y considerando la aproximación de campo efectivo (ecuación 5.8) y tomando el promedio en el ensamble de la ecuación resultante, se obtiene una ecuación integral para el promedio del campo eléctrico[19, 20]

$$\langle \vec{E} \rangle(\vec{r}) = \vec{E}_{ind}(\vec{r}) + i\omega\mu_o \int \int \int_{\mathbb{R}^3} d^3r_p d^3r' d^3r'' V^{-1} \overset{\leftrightarrow}{G}_o(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \langle \vec{E} \rangle(\vec{r}''). \quad (5.12)$$

El sistema que se está analizando es

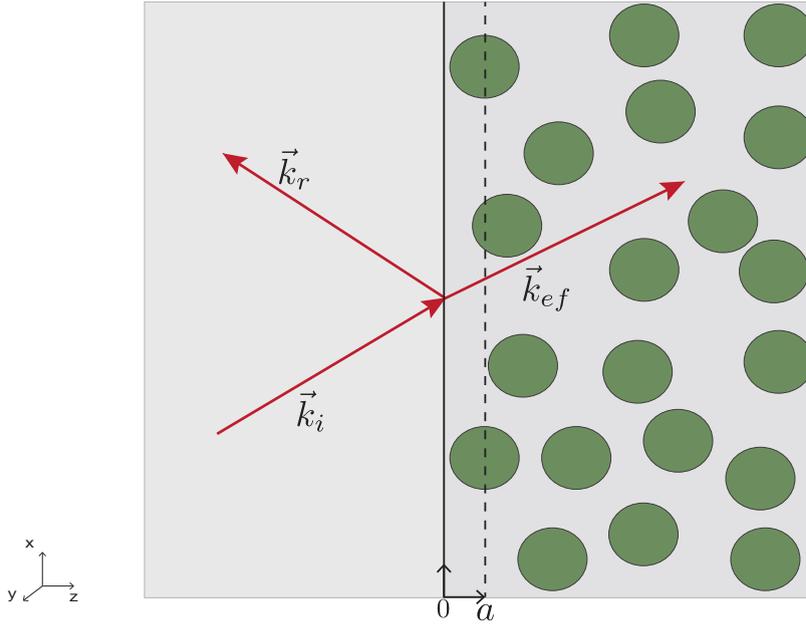


FIGURA 5.1: Diagrama esquemático del sistema coloidal y el sistema de coordenadas utilizado. Siendo a el radio de las partículas.

Debemos señalar que aquí las partículas están inmersas en el aire, es lo que se conoce como un sistema “free-standing”, más adelante se presentarán los resultados para partículas inmersas en una matriz de un material homogéneo, como por ejemplo agua. Al resolver la ecuación (5.12), se obtuvieron expresiones cerradas en términos de las componentes del tensor de conductividad generalizado no local, para una esfera aislada. En la figura 5.2 se introducen dos sistemas coordenados para denotar proyecciones del

tensor de conductividad generalizado no local $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{k}, \vec{k}')$ que se utilizaron para encontrar las amplitudes de reflexión, donde los vectores unitarios cartesianos están orientados con el vector de onda incidente \vec{k}' , mientras que los vectores unitarios de las coordenadas esféricas se refieren al vector de onda esparcido \vec{k} .

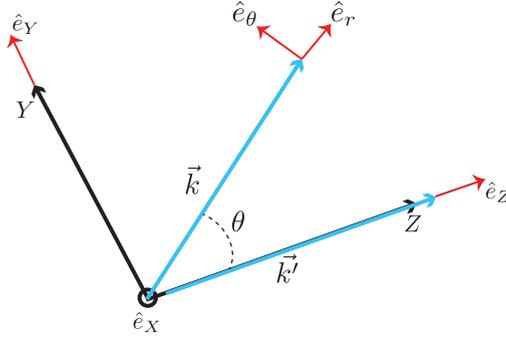


FIGURA 5.2: Vectores unitarios.

Las componentes del tensor de conductividad generalizado no local, para una esfera aislada considerando la base de la figura 5.2, tenemos que,

$$\begin{aligned}\sigma_{XX}^s &= \hat{e}_X \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \hat{e}_X, \\ \sigma_{\theta Y}^s &= \hat{e}_\theta \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \hat{e}_Y, \\ \sigma_{\theta Z}^s &= \hat{e}_\theta \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \hat{e}_Z,\end{aligned}\tag{5.13}$$

obteniendo así

$$r_s = \frac{\sigma_{XX}^s(\vec{k}^r, \vec{k}^t)}{\sigma_{XX}^s(\vec{k}^i, \vec{k}^t)} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} e^{i2ak_z^i},\tag{5.14}$$

$$r_p = \frac{\sigma_{\theta Y}^s(\vec{k}^r, \vec{k}^t)(\hat{e}^t \cdot \vec{k}_\perp^t) + (\hat{e}^t \cdot \vec{k}^t)\sigma_{\theta Z}^s(\vec{k}^r, \vec{k}^t)}{\sigma_{\theta Y}^s(\vec{k}^i, \vec{k}^t)(\hat{e}^t \cdot \vec{k}_\perp^t) + (\hat{e}^t \cdot \vec{k}^t)\sigma_{\theta Z}^s(\vec{k}^i, \vec{k}^t)} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} e^{i2ak_z^i}.\tag{5.15}$$

Lo que vamos a presentar son las aproximaciones que se van a estudiar, para entender un poco mejor la física de las expresiones anteriores y veremos algunos casos de interés en estas aproximaciones. El cálculo de las componentes del tensor generalizado de la conductividad no local es muy elaborado, por lo cual resulta conveniente explorar algunas aproximaciones.

▪ **Aproximación del Cono de Luz (LCA).**

Para encontrar el sentido de esta primera aproximación, lo que necesitamos es la obtención del campo eléctrico esparcido, debido a una esfera, para ello se necesitó encontrar la relación entre el campo eléctrico esparcido y el tensor generalizado de conductividad $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s$. El nombre de cono de luz se debe que para una esfera en el vacío la magnitud del vector de onda \vec{k} , del campo incidente, y del campo esparcido, cualquiera de los dos \vec{k}' o \vec{k} (en dirección de incidencia), son los mismos e iguales a k_o y se dice que se encuentran en el cono de luz. Sabemos que el campo esparcido está dado por,

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \int \overset{\leftrightarrow}{G}_o(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}^{ind}(\vec{r}') d^3r', \quad (5.16)$$

donde el \vec{r} , está fuera de la esfera y \vec{J}^{ind} es la densidad de corriente inducida dentro de las esferas. Calculando el campo eléctrico en el límite de campo lejano, es decir, $r \gg \frac{2\pi}{k_o}$ y desarrollando $\overset{\leftrightarrow}{G}_o$ al orden más bajo y excitando a la esfera por una onda plana transversal externa $\vec{E}^{ext}(\vec{r}') = E_o^i e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}'} \hat{e}^i$, obtenemos,

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = i\omega\mu_o E_o^i \frac{e^{ik_o r}}{4\pi r} (\overset{\leftrightarrow}{1} - \hat{k}^s \hat{k}^s) \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}^s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}^i + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (5.17)$$

Podemos decir a partir de esta expresión que $(\overset{\leftrightarrow}{1} - \hat{k}^s \hat{k}^s)$ es un operador de proyección transversal y como el campo esparcido debe ser perpendicular a \hat{k}^s , se puede hacer la analogía de las componentes transversales del tensor generalizado de conductividad con las componentes de la matriz diagonal de esparcimiento para el caso de una esfera, es decir,

$$\begin{pmatrix} E_{s\parallel} \\ E_{s\perp} \end{pmatrix} = \frac{e^{ik_o r}}{-ik_o r} \begin{pmatrix} S_2(\theta) & 0 \\ 0 & S_1(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{i\parallel} \\ E_{i\perp} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

y comparando las ecuaciones (5.17) y (5.18), obtenemos, los valores de las componentes σ_{XX}^s , $\sigma_{\theta Y}^s$ en términos de los elementos de esparcimiento, ya desarrollados en el capítulo 4

$$i\omega\mu_o \frac{1}{4\pi} \sigma_{XX}^s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) = \frac{1}{-ik_o} S_1(\theta), \quad (5.19)$$

y

$$i\omega\mu_o \frac{1}{4\pi} \sigma_{\theta Y}^s(\vec{k}^s, \vec{k}^i) = \frac{1}{-ik_o} S_2(\theta). \quad (5.20)$$

Utilizando las aproximaciones sobre la magnitud del vector de onda ($k^r = k^i = k_o$) y que son la razón del nombre de esta aproximación, se pueden encontrar las amplitudes de reflexión como

$$r_s = \frac{S_1(\pi - 2\theta_i)}{S_1(0)} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} e^{i2ak_z^i}, \quad (5.21)$$

$$r_p = \frac{S_2(\pi - 2\theta_i)}{S_2(0)} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} e^{i2ak_z^i}. \quad (5.22)$$

Sin embargo, en esta aproximación existe una inconsistencia. La inconsistencia es que en el límite de partícula pequeña, no recuperamos las relaciones de Fresnel, específicamente en polarización p tenemos

$$\lim_{ka \rightarrow 0} r_p = \frac{\hat{k}^r \cdot \hat{k}^i}{\hat{k}^i \cdot \hat{k}^i} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} \neq \frac{\hat{k}^r \cdot \hat{k}^t}{\hat{k}^i \cdot \hat{k}^t} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t}, \quad (5.23)$$

que no coincide con la expresión de la ecuación (2.19) y es por ello que no la ocuparemos en nuestros análisis, por lo que se propone una nueva aproximación a partir de ésta.

- **Aproximación Heurística (HA).**

Para eliminar esta inconsistencia que se tiene en la LCA, lo que se realizó en el trabajo previo, fue seguir en esta misma dirección y lo que se hizo fue considerar que el vector de onda efectivo que excita a la esfera tiene magnitud k_o pero se encuentra a lo largo de la dirección de la onda transmitida k^t . Por lo tanto lo que se cambió fueron los argumentos angulares de la matriz de esparcimiento que están en las ecuaciones (5.21) y (5.22), obteniendo las siguientes expresiones

$$r_s^{HA} = \frac{S_1(\pi - (\theta_i + \theta_t))}{S_1(\theta_i - \theta_t)} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} e^{i2ak_z^i}, \quad (5.24)$$

$$r_p^{HA} = \frac{S_2(\pi - (\theta_i + \theta_t))}{S_2(\theta_i - \theta_t)} \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t} e^{i2ak_z^i}, \quad (5.25)$$

donde θ_t es el ángulo entre el eje z y el vector de onda transmitido \vec{k}^t (ver figura 5.3), como podemos ver, si $\theta_i = \theta_t$ regresamos al LCA, y es así como se llega al nombre de esta aproximación Heurística, dado que no existe una derivación matemáticamente rigurosa, pero se escogieron estos argumentos para obtener en el límite de partícula pequeña las relaciones de Fresnel (ecuación 2.17 y 2.19).

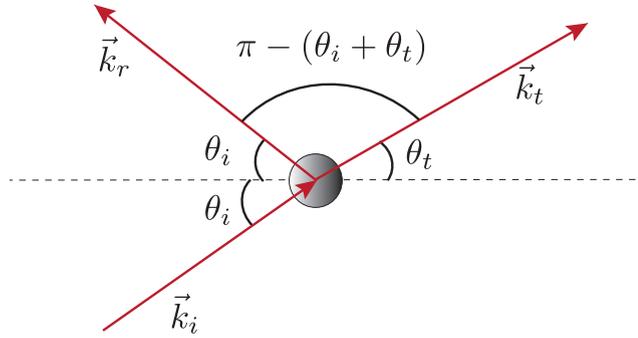


FIGURA 5.3: Ángulo entre los vectores de onda reflejado y transmitido.

Por último presentaremos la última aproximación que se realizó en[3].

- **Aproximación de Fresnel(FA).**

En esta aproximación es simplemente considerar al coloide turbio como un material común caracterizado por un índice de refracción efectivo, teniendo como relación de dispersión[21]

$$k_z^t = k_o(n_{ef}^2 - \sin^2 \theta_i)^{1/2}, \quad (5.26)$$

donde se puede utilizar el índice de refracción propuesto por Van de Hulst[13],

$$n_{ef} = 1 + i\gamma S(0); \quad \gamma = \frac{3f}{2(k_o a)^3}. \quad (5.27)$$

Las relaciones de Fresnel son las expresiones más usadas para la interpretación de experimentos y para mediciones de índice de refracción efectivo pero queremos mostrar que son incorrectas para la descripción de propiedades ópticas para suspensiones coloidales. Por lo tanto las vamos a considerar en nuestro análisis

$$r_s^{FA} = \frac{k_z^i - k_z^t}{k_z^i + k_z^t}, \quad (5.28)$$

$$r_p^{FA} = \frac{\hat{k}^r \cdot \hat{k}^t k_z^i - k_z^t}{\hat{k}^i \cdot \hat{k}^t k_z^i + k_z^t}. \quad (5.29)$$

Las aproximaciones que tenemos hasta el momento son las siguientes:

- **Fresnel 2 medios**
- **Heurístico**

Y que sabemos que la aproximación Heurística, ecuaciones (5.24) y (5.25), cuando tenemos partícula pequeña ($a \rightarrow 0$), obtenemos Fresnel 2 medios. El diagrama del sistema que estamos analizando es el siguiente:

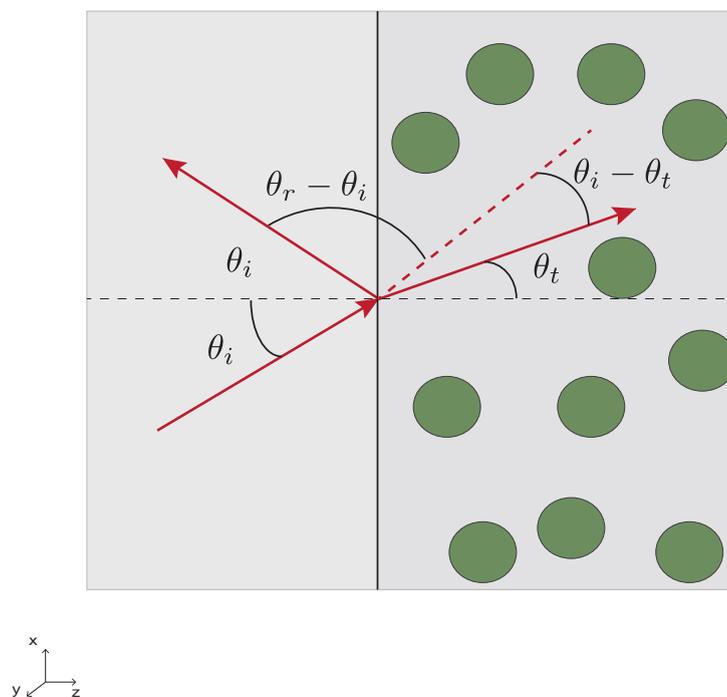


FIGURA 5.4: Diagrama que tenemos al considerar partículas inmersas en aire (free-standing colloidal system). Presentando los ángulos que se utilizan en las aproximaciones.

Algunos resultados teóricos que se tienen en esta sección son los siguientes:

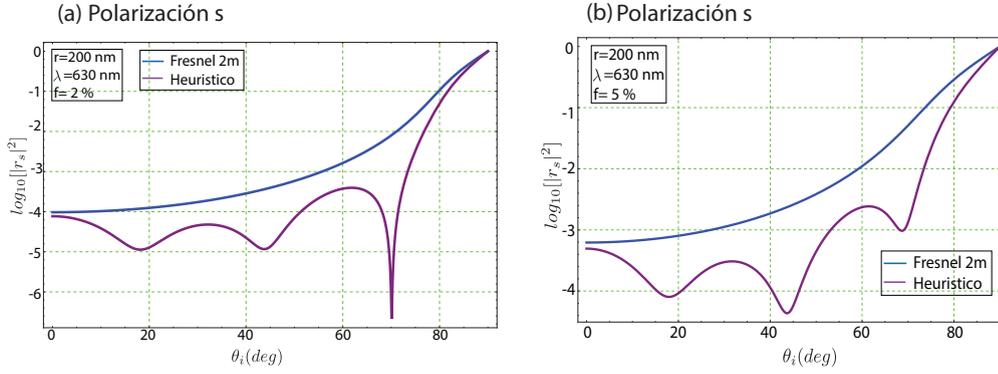


FIGURA 5.5: Curvas del cálculo de la reflectividad comparando los modelos teóricos de Fresnel 2 medios y Heurístico. Utilizamos la escala logarítmica para observar las variaciones que hay en ángulos bajos. Las partículas son de dióxido de titanio con un radio de 200 nm a una longitud de onda de 638 nm y con una fracción de llenado al 2 % y 5 %.

Como podemos observar las diferencias que existen entre estos dos modelos es muy clara, y los mínimos que se observan en la aproximación Heurística, podríamos interpretarlos como una respuesta magnética y que la aproximación de Fresnel no la proporciona. Como hemos observado estos resultados son para partículas inmersas en aire, o lo que se le llama “*free-standing colloidal system*”, pero que sucede si consideramos ahora, que las partículas están inmersas en una matriz homogénea, y será lo que presentaremos a continuación. El siguiente análisis es necesario presentarlo debido a que el experimento que se reportará más adelante se hace así.

5.2. La matriz

La función dieléctrica de la matriz es real $\epsilon_1(\omega)$, en la cual están inmersas las partículas, se encuentra en el mismo semi-espacio en el cual están las partículas aleatoriamente localizadas, con una interfaz plana en $z = 0$. La presencia de esta matriz hace que las corrientes inducidas por el campo externo, polaricen esta matriz induciendo las cargas en la interfaz, dejando como resultado, cargas superficiales inducidas y densidades de corriente superficiales, a lo que se le suele llamar cargas y corrientes imagen. Por lo cual para encontrar el efecto que tienen estas imágenes en las amplitudes de reflexión, se sigue el mismo camino que se utilizó para encontrar la solución para esferas inmersas en el aire (“*free-standing*”), simplemente reemplazando la función de Green del espacio libre $\overset{\leftrightarrow}{G}_o$ por la función de Green del semi-espacio $\overset{\leftrightarrow}{G}_{h,s}$ en la expresión 5.8. El cálculo de $\overset{\leftrightarrow}{G}_{h,s}$ es a lo que se conoce como teoría imagen exacta[22], se puede mostrar que

$$\overset{\leftrightarrow}{G}_{hs}(\vec{r}, \vec{r}') = \overset{\leftrightarrow}{G}_1(\vec{r}, \vec{r}') + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{\parallel} \overset{\leftrightarrow}{R}_I^+(k_{\parallel}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{\parallel}(\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel})} e^{ik_z^1(z+z')}; \quad z > 0, \quad (5.30)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{G}_{hs}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 k_{\parallel} \overset{\leftrightarrow}{R}_I^-(k_{\parallel}) \frac{i}{2k_z^1} e^{i\vec{k}_{\parallel}(\vec{r}_{\parallel} - \vec{r}'_{\parallel})} e^{-ik_z^0 z + ik_z^1 z'}; \quad z < 0, \quad (5.31)$$

donde $\overset{\leftrightarrow}{G}_1$ es igual que $\overset{\leftrightarrow}{G}_o$ pero en lugar de k_o , debemos de usar k_1 que corresponde al vector de onda en la matriz homogénea, con la respectiva función dieléctrica $\epsilon_1(\omega)$. Se define lo siguiente

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} = \hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y, \quad (5.32)$$

$$\vec{k}_{\parallel} = k_x \hat{e}_x + k_y \hat{e}_y, \quad (5.33)$$

$$k_z^1 = \sqrt{k_1^2 - k_{\parallel}^2}, \quad (5.34)$$

$$k_z^0 = \sqrt{k_0^2 - k_{\parallel}^2}, \quad (5.35)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{R}_I^+(k_{\parallel}) = \frac{1}{k_1^2} (\overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} - \frac{1}{k_z^1} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel}) \cdot \overset{\leftrightarrow}{R}(k_{\parallel}) \cdot (k_1^2 \overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} + k_z^1 \vec{k}_{\parallel} \hat{e}_z), \quad (5.36)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{R}_I^-(k_{\parallel}) = \frac{1}{k_1^2} (\overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} + \frac{1}{k_z^0} \hat{e}_z \vec{k}_{\parallel}) \cdot (\overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} + \overset{\leftrightarrow}{R}(k_{\parallel})) \cdot (k_1^2 \overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} - \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel} + k_z^1 \vec{k}_{\parallel} \hat{e}_z), \quad (5.37)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{R}(k_{\parallel}) = r_{12}^s(k_{\parallel}) \overset{\leftrightarrow}{I}_{\parallel} - (r_{12}^s(k_{\parallel}) + r_{12}^p(k_{\parallel})) \frac{1}{k_{\parallel}^2} \vec{k}_{\parallel} \vec{k}_{\parallel}, \quad (5.38)$$

donde r_{12}^s y r_{12}^p son los coeficientes de reflexión entre los medios 1 y 2 y corresponden a las fórmulas de Fresnel ecuaciones (2.17) para polarización s y (2.19) para polarización p. El medio 2 corresponde al medio homogéneo o medio matriz (en nuestro caso es agua). Al igual que en la solución que se presentó anteriormente, se da solución a la ecuación

(5.12) con las expresiones que corresponden a este caso, los detalles de esta solución se encuentran en la tesis[1], obteniendo finalmente las siguientes expresiones

$$r_s = \frac{r_{12}^s + r_{coh}^s e^{i2ak_z^1}}{1 - r_{12}^s r_{coh}^s e^{i2ak_z^1}}, \quad (5.39)$$

$$r_p = \frac{r_{12}^p + r_{coh}^p e^{i2ak_z^1}}{1 - r_{12}^p r_{coh}^p e^{i2ak_z^1}}. \quad (5.40)$$

Como podemos ver la estructura de estas últimas expresiones, son similares a las que se mostraron en el capítulo 2, donde se obtuvo el coeficiente de reflexión para tres medios con interfaces planas y paralelas, considerando electrodinámica continua. En este caso el ancho del medio 2 es de a siendo a el radio de la partícula, entre los planos $z = 0$ y $z = a$ y con la respuesta dieléctrica de la matriz, ϵ_1 , por lo tanto tenemos los siguientes medios: el medio 1 es el medio de incidencia, el medio 2 es el medio finito de la matriz (matriz homogénea), que está entre $0 < z < a$, y el medio 3 es el medio del sistema coloidal.

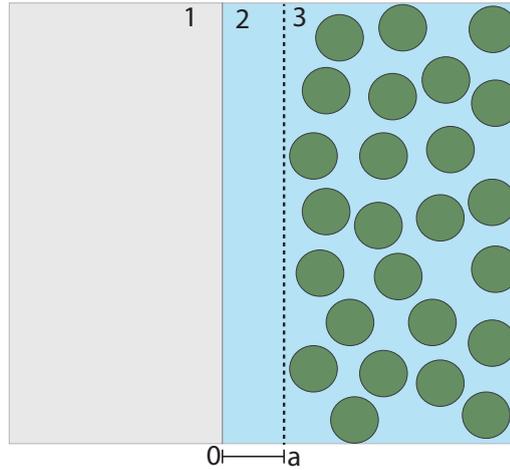


FIGURA 5.6: Sistema resultante, a partir del análisis realizado, teniendo como medios, aire-matriz-matriz+partículas.

Como muestra la figura 5.4, este es el sistema que se tiene, y es un sistema de 3 medios, donde r_{12}^s y r_{12}^p , corresponden a las amplitudes de reflexión entre la interfaz aire-matriz, el medio 1 no necesariamente es aire, en nuestro experimento será vidrio-matriz, y dadas por las fórmulas de Fresnel ecuaciones (2.17 y 2.19), para nuestro caso la matriz será agua; y r_{coh}^s y r_{coh}^p corresponden a las amplitudes de reflexión para los medios 2 y 3, que es matriz-matriz+partículas, donde r_s y r_p corresponde a las aproximaciones, que son las ecuaciones (5.24-5.25) y (5.28-5.29). Por ejemplo para la aproximación Heurística ($r_{coh,HA}$), se tiene

$$r_{coh,HA}^s = r_{HA}^s e^{-i2ak_z^1}, \quad (5.41)$$

$$r_{coh,HA}^p = r_{HA}^p e^{-i2ak_z^1}, \quad (5.42)$$

y de esta manera las expresiones para la aproximación Heurística serían

$$r_s = \frac{r_{12}^s + r_{coh,HA}^s e^{i2ak_z^1}}{1 - r_{12}^s r_{coh,HA}^s e^{i2ak_z^1}}, \quad (5.43)$$

$$r_p = \frac{r_{12}^p + r_{coh,HA}^p e^{i2ak_z^1}}{1 - r_{12}^p r_{coh,HA}^p e^{i2ak_z^1}}. \quad (5.44)$$

Donde r_{HA}^s y r_{HA}^p están dadas por las expresiones (5.24) y (5.25). Para la aproximación de Fresnel, obtendríamos las fórmulas de Fresnel 3 medios, ocupando las fórmulas (5.28) y (5.29), utilizando la relación de dispersión de Foldy-Lax[11, 12, 23]. Las ecuaciones (5.43) y (5.44) formarán parte de las expresiones que se van a programar y obtener resultados numéricos.

5.3. Modelo de Esparcimiento Coherente (“*Coherent Scattering Model, CSM*”)

Este modelo está basado en cortes o rebanadas del semi-espacio[24] que contienen a las partículas dentro de bloques delgados[2]. Lo primero que se realizó en este trabajo[2], fue considerar una distribución aleatoria de partículas esféricas en el vacío, contenidas en un plano con $-\frac{d}{2} < z < \frac{d}{2}$, como se muestra en la figura 5.5, y considerando un campo eléctrico incidente

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_o \hat{e}_i e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r} - \omega t}, \quad (5.45)$$

donde $\vec{k}^i = k_y^i \hat{e}_y + k_z^i \hat{e}_z$, y como podemos ver el vector de onda se encuentra en el plano yz . En el análisis que se presentó en la sección anterior, el plano donde se encuentra el vector de onda era xz . En consecuencia el campo esparcido debido a esta colección de N partículas esféricas, cuyos centros están localizados en $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_p, \vec{r}_N\}$, es

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \sum_{p=1}^N \int d^3r' \int d^3r'' \overset{\leftrightarrow}{G}_o(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'') \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}(\vec{r}' - \vec{r}_p, \vec{r}'' - \vec{r}_p) \cdot \vec{E}^i(\vec{r}''), \quad (5.46)$$

en lugar de $\overset{\leftrightarrow}{T}(\vec{r}', \vec{r}'')$ que es el operador de transición de una esfera se puede utilizar $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{r}' - \vec{r}_p)$. Se sabe que $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ es proporcional a $\overset{\leftrightarrow}{T}$ [4]. Debido a la geometría del bloque delgado, es conveniente trabajar en el espacio de Fourier, es decir, en la representación de onda plana, y de esta manera escribir que el campo esparcido como

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = \frac{i}{8\pi^2} E_o \sum_{p=1}^N \int \int dk_x^s dk_y^s \frac{(\overset{\leftrightarrow}{1} - \hat{k}_\pm^s \hat{k}_\pm^s)}{k_z^s} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{k}_\pm^s, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}^i e^{-i(\vec{k}_\pm^s - \vec{k}^i) \cdot \vec{r}_p} e^{i\vec{k}_\pm^s \cdot \vec{r}}, \quad (5.47)$$

donde $\vec{k}_\pm^s = k_x^s \hat{e}_x + k_y^s \hat{e}_y \pm k_z^s \hat{e}_z$ y $k_z^s = [k^2 - (k_x^s)^2 - (k_y^s)^2]^{1/2}$. El campo esparcido es la suma de ondas planas propagándose a lo largo del vector \vec{k}_\pm^s siendo la componente positiva (+), para ondas propagándose a la derecha, y la componente negativa (-) para ondas propagándose a la izquierda de la partícula.

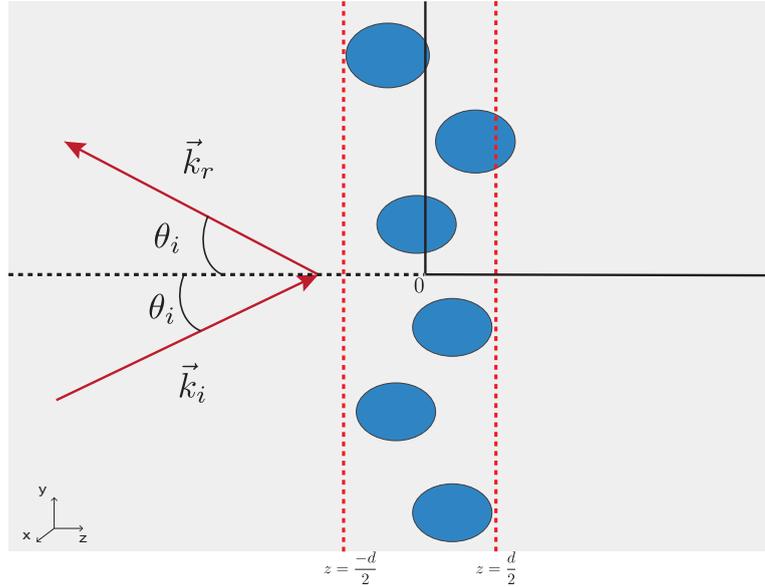


FIGURA 5.7: Sistema diluido de esferas aleatoriamente distribuidas, cuyos centros están dentro del plano.

Dado que nuestro trabajo está enfocado en la componente coherente del campo radiado, vamos a considerar el promedio configuracional de \vec{E}^s , de la ecuación (5.47), la ubicación de cada partícula d^3r_p sobre el volumen de cada bloque delgado, obteniendo que

$$\langle \vec{E}^s(\vec{r}) \rangle_{slab} = \vec{E}_+^s e^{i\vec{k}^i \cdot \vec{r}}; \quad z > \frac{d}{2}, \quad (5.48)$$

$$\langle \vec{E}^s(\vec{r}) \rangle_{slab} = \vec{E}_-^s e^{i\vec{k}^r \cdot \vec{r}}; \quad z < \frac{-d}{2}, \quad (5.49)$$

donde los campos \vec{E}_\pm^s , están relacionados con la conductividad no local de la esfera, como

$$\vec{E}_+^s = i \frac{E_o}{2} \rho \frac{(\hat{1} - \hat{k}^i \hat{k}^i)}{k_z^i} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{k}^i, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_i d, \quad (5.50)$$

$$\vec{E}_-^s = i \frac{E_o}{2} \rho \frac{(\hat{1} - \hat{k}^r \hat{k}^r)}{k_z^i} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{k}^r, \vec{k}^i) \cdot \hat{e}_i \frac{\sin k_z^i d}{k_z^i}, \quad (5.51)$$

donde $\rho = \frac{N}{V}$, número de partículas por unidad de volumen. El campo lejano a su vez está relacionado con la diádica de esparcimiento F definida como

$$(\hat{1} - \hat{k}^i \hat{k}^i) \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{k}^i, \vec{k}^i) = 4\pi \overset{\leftrightarrow}{F}(\hat{k}^i, \hat{k}^i) \quad (5.52)$$

y

$$(\hat{1} - \hat{k}^r \hat{k}^r) \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{k}^r, \vec{k}^i) = 4\pi \overset{\leftrightarrow}{F}(\hat{k}^r, \hat{k}^i) \quad (5.53)$$

obteniendo que,

$$\vec{E}_{lejano}^s(\vec{r}) = E_o \frac{e^{ikr}}{r} \overset{\leftrightarrow}{F}(\hat{k}^s, \hat{k}^i) \cdot \hat{e}^i, \quad (5.54)$$

y utilizando las expresiones (5.17) y (5.18), que nos relacionan el campo lejano con la matriz S y con la conductividad no local, se obtiene[2] que

$$E_+^s = -E_o \gamma \frac{kd}{\cos \theta_i} S(0) \hat{e}_i. \quad (5.55)$$

$$E_-^s = -E_o \gamma \frac{k}{\cos \theta_i} \frac{\sin k_z^i d}{k_z^i} [-(\cos \theta_i \hat{e}_y + \sin \theta_i \hat{e}_z)(\cos \theta_i \hat{e}_y - \sin \theta_i \hat{e}_z) S_2(\pi - 2\theta_i) + \hat{e}_x \hat{e}_x S_1(\pi - 2\theta_i)] \cdot \hat{e}_i, \quad (5.56)$$

en donde $\gamma = \frac{3f}{2(ka)^3}$, y f la fracción de llenado de volumen. Dependiendo de la polarización, se tiene que $\hat{e}_i = \hat{e}_x$ para polarización s y para polarización p que $\hat{e}_i = \cos \theta_i \hat{e}_y - \sin \theta_i \hat{e}_z$.

De esta manera para polarización s , los campos esparcidos, tienen la siguiente forma

$$E_+^S = -E_o \gamma \frac{kd}{\cos \theta_i} S(0) \hat{e}_x. \quad (5.57)$$

$$E_-^S = -E_o \gamma \frac{k}{\cos \theta_i} \frac{\sin k_z^i d}{k_z^i} S_1(\pi - 2\theta_i) \hat{e}_x. \quad (5.58)$$

Para el cálculo de la reflexión coherente lo que se consideró fue una pila semi-infinita de bloques delgados de ancho d , como se muestra en la siguiente figura,

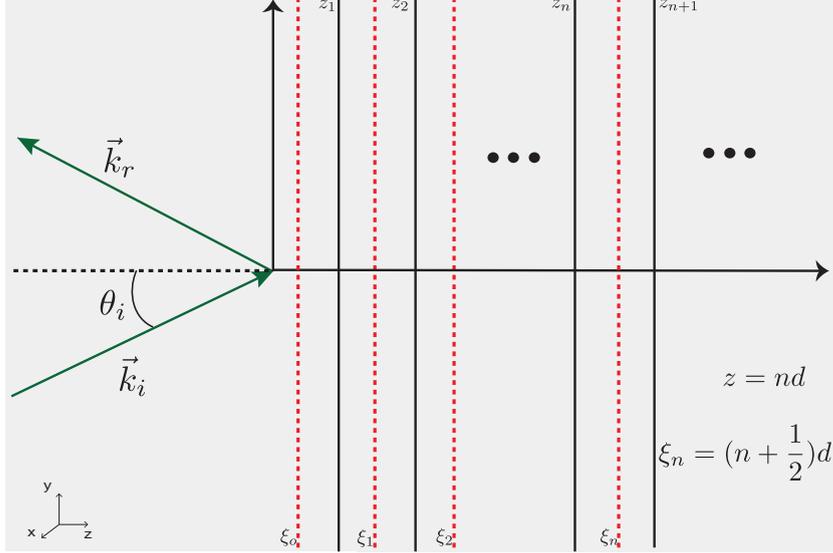


FIGURA 5.8: Modelo de un semi-espacio de un conjunto semi-infinito de hojas en 2D.

Habrà múltiple esparcimiento dentro de la pila de hojas delgadas cuando incida una onda en el semi-espacio. La onda reflejada será la suma de ondas esparcidas debido a las hojas delgadas. Para resolver el problema de múltiple esparcimiento solo consideraremos el campo en los planos que se encuentran a medio camino entre las hojas delgadas. El objetivo en [2] fue calcular los campos entre las hojas en la posición ξ_n (como se muestra en la figura 5.8). Los campos en esa posición se escriben como

$$\vec{E}_n = \vec{E}(\xi_n), \quad (5.59)$$

y se puede escribir como:

$$\vec{E}_n = (E_n^+ \hat{e}_i + E_n^- \hat{e}_r) e^{i(k_x^i x + k_y^i y)} \quad (5.60)$$

donde \hat{e}_i corresponde a la polarización de la onda incidente y \hat{e}_r corresponde a la polarización de la onda reflejada. Además E_n^+ es la amplitud de campo que se propaga hacia la derecha y E_n^- es la amplitud del campo que se propaga hacia la izquierda. Para escribir el campo en cualquier plano, estará dado por la suma del campo incidente y el campo esparcido para todos los planos.

$$E_n^+ = E_n^i + \sum_{m=0}^n (\beta E_m^- + \alpha E_{m-1}^+) e^{ik_z^i(\xi_n - z_m)d}, \quad (5.61)$$

y

$$E_n^- = \sum_{m=0}^n (\beta E_m^+ + \alpha E_{m+1}^-) e^{-ik_z^i(\xi_n - z_{m+1})d}, \quad (5.62)$$

siendo E_n^i la amplitud del campo incidente evaluado en ξ_n . Además α y β son los coeficientes de esparcimiento, y están dados por:

$$\alpha = -\gamma \frac{k}{\cos \theta_i} S(0), \quad (5.63)$$

$$\beta = -\gamma \frac{k}{\cos \theta_i} S_1(\pi - 2\theta_i), \quad (5.64)$$

y para polarización p (TM), lo único que cambia es $S_1(\pi - 2\theta_i) \rightarrow S_2(\pi - 2\theta_i)$. Para obtener los coeficientes de reflexión, consideremos el caso diluido, donde $k_z^i d \ll 1$, las ecuaciones (5.61) y (5.62) se pueden escribir en forma integral[2]. Considerando el caso para $z > 0$ se propone como solución:

$$E^+(z) = E_o e^{ik_z^{ef} \xi_n}, \quad (5.65)$$

y

$$E^-(z) = r_{hs} E_o e^{ik_z^{ef} \xi_n}. \quad (5.66)$$

El coeficiente r_{hs} es el coeficiente de reflexión del semi-espacio. De tal manera que tenemos las siguientes expresiones realizando la integral de la ecuación (5.61):

$$r_{hs} = \frac{i(k_z^{ef} - k_z^i - \alpha)}{\beta}, \quad (5.67)$$

y para la ecuación (5.62):

$$r_{hs} = \frac{\beta}{i(k_z^{ef} + k_z^i + \alpha)}. \quad (5.68)$$

Y utilizando estas dos últimas expresiones, tenemos que la relación de dispersión para el sistema que se resolvió en[2], es

$$k_z^{ef} = [(k_z^i)^2 - 2ik_z^i \alpha - \beta^2 - \alpha^2]^{1/2}, \quad (5.69)$$

y si sustituimos (5.63), (5.64) y (5.66) en (5.68), se obtienen las amplitudes de reflexión para cada una de las polarizaciones.

Teniendo para polarización s ,

$$r_{hs}^s = \frac{\gamma S_1(\pi - 2\theta_i)}{i \cos \theta_i \{ \cos \theta_i + [\cos^2 \theta_i + 2i\gamma S(0) + (\gamma^2 / \cos^2 \theta_i)(S_1^2(\pi - 2\theta_i) - S^2(0))]^{\frac{1}{2}} \} - \gamma S(0)}, \quad (5.70)$$

y para polarización p ,

$$r_{hs}^p = \frac{\gamma S_2(\pi - 2\theta_i)}{i \cos \theta_i \{ \cos \theta_i + [\cos^2 \theta_i + 2i\gamma S(0) + (\gamma^2 / \cos^2 \theta_i)(S_2^2(\pi - 2\theta_i) - S^2(0))]^{\frac{1}{2}} \} - \gamma S(0)}. \quad (5.71)$$

Como se señaló al inicio de la sección estos cálculos corresponden a partículas inmersas en aire, ahora si consideramos que las partículas están inmersas en una matriz homogénea, por ejemplo agua, debemos de hacer cambios en las fórmulas ya presentadas, como son $k \rightarrow n_m k$ y $\theta_i \rightarrow \theta_m$, donde θ_m es el ángulo de refracción en la matriz, definido por la ley de Snell ($\sin \theta_m = (n_1/n_m) \sin \theta_1$) con n_1 , θ_1 el índice de refracción y el ángulo del medio incidente, además de la relación $k_z^{ef} = k[n_{ef}^2 - n_m^2 \sin^2 \theta_m]^{\frac{1}{2}}$, y n_m es el índice de refracción de la matriz. En el artículo[2] se propuso utilizar las fórmulas de los tres medios utilizando como coeficiente de reflexión r_{23} a los coeficientes de reflexión del semi-espacio, ecuaciones (5.70) y (5.71), de tal forma que tenemos:

$$r_s = \frac{r_{12}^s + r_{hs}^s e^{i2ak_z^m n_m}}{1 + r_{12}^s r_{hs}^s e^{i2ak_z^m n_m}}, \quad (5.72)$$

$$r_p = \frac{r_{12}^p + r_{hs}^p e^{i2ak_z^m n_m}}{1 + r_{12}^p r_{hs}^p e^{i2ak_z^m n_m}}, \quad (5.73)$$

y es así como calcularemos las amplitudes de reflexión utilizando el CSM. Por lo tanto los modelos que vamos a utilizar en este trabajo, serán los siguientes modelos:

- **Fresnel 2 medios**
- **Fresnel 3 medios**
- **Heurístico**
- ***Coherent Scattering Model, CSM***

y serán estos los modelos que se utilizarán para la comparación con los resultados experimentales.

5.4. Resultados numéricos

En esta sección presentaremos resultados de cálculos numéricos de las amplitudes de reflexión para los diferentes modelos, dicha curvas se realizaron en Wolfram Mathematica 9, el programa se puede ver en el Apéndice C. La geometría que tenemos y que vamos a simular es la que se presentó en la figura 5.4, y es la geometría que describirá de la mejor manera al sistema experimental, que consiste en un sistema de interfaces: vidrio-agua-agua+partículas. Los valores del índice de refracción fueron obtenidos a partir de tablas[14]. En el Apéndice B se muestran las gráficas de los índices de refracción de las partículas que se utilizaron en este trabajo. El índice de refracción del BK7 (prisma) es de 1.5149 a una longitud de onda de 638 nm. El índice de refracción del agua es de 1.3315 a 638 nm, y el índice de refracción de cada una de las partículas que se presentarán se mencionan en cada una de las gráficas. Con estos índices de refracción el ángulo crítico para la interfaz BK7-agua es de 61.5 grados. Los resultados numéricos que se presentarán son alrededor del ángulo crítico. Nos interesa esta zona debido a que hay una fuerte variación en la reflectividad en un intervalo pequeño de ángulos. Es importante señalar que no podemos anticipar que en esta zona los modelos van a diferir. Debido a la geometría que tenemos nos enfocaremos en presentar las fórmulas de los tres medios utilizando cada una de las aproximaciones presentadas al final de la sección anterior. Fresnel 3 medios, Heurística y *Coherent Scattering Model* y de aquí en adelante solo usaremos CSM para referirnos a este modelo.

5.4.1. Látex (Polimetil-Metacrilato, PMMA), de 120nm de diámetro

Vamos a comenzar con el valor absoluto al cuadrado de las amplitudes de reflexión (coeficiente de reflexión) hechas para látex de 120 nm. Primero vamos a mostrar gráficas como función del ángulo de incidencia de 0 a 90 grados, estas curvas nos van a mostrar un panorama en general del comportamiento de los diferentes modelos, y nos van a proporcionar ciertas zonas de posible interés. En estas curvas teóricas vamos a utilizar parámetros similares a los del experimento que se diseñó para realizar la comparación entre teoría-experimento.

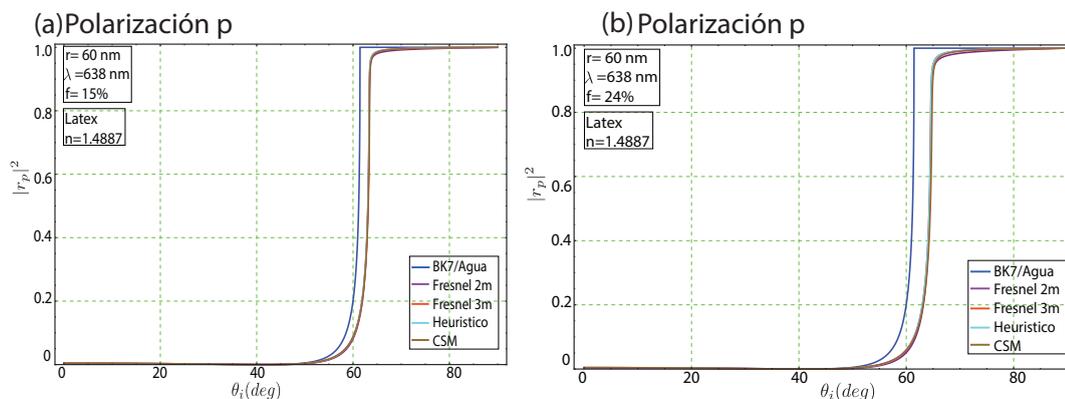


FIGURA 5.9: *Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, con polarización p.*

Se eligió esta longitud de onda, 638 nm, debido a que es el láser que se tiene en el laboratorio. Las letras *BK7* se refieren al material con el cual está hecho el prisma y que es el medio de incidencia. El índice de refracción para el látex que se manejó en esta gráfica se obtuvo de tablas[14]. De la figura 5.9 tenemos que en la polarización *p*, observamos el ángulo de Brewster en todos los modelos que se están utilizando. Las diferencias que podrían existir en los modelos, en este caso no se nota un cambio significativo a pesar de que tenemos fracciones de llenado altas. El corrimiento y la suavización en las curvas de reflectancia que se observa respecto a la referencia (BK7/Agua), se debe a la presencia de las partículas de látex.

Ahora los resultados numéricos de la reflectancia se van a presentar en una escala logarítmica, y esto es debido a que queremos observar que sucede a ángulos bajos, y en base a las curvas anteriores, observamos que la intensidad es muy pequeña, por lo que medir en esa zona sería difícil ya que las intensidades no son muy altas, pero es bueno mostrar estas gráficas para poder observar si en realidad sería adecuado medir en ángulos bajos. Los resultados se muestran en la siguiente figura.

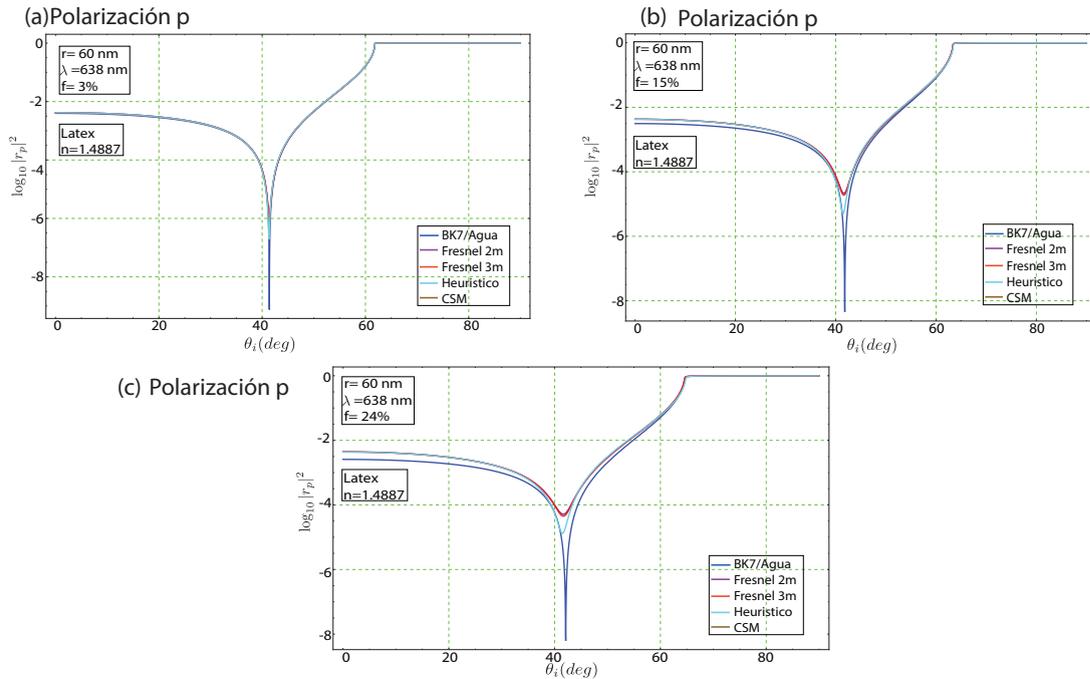


FIGURA 5.10: *Suspensión coloidal a distintas fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm y polarización p, en una escala logarítmica base 10.*

Lo que podemos observar en base a esta gráfica es que de nuevo para fracciones de volumen pequeñas no vamos a observar diferencia alguna entre los modelos y además ahora tenemos un problema adicional ya que tenemos intensidades muy bajas. El mínimo que se presenta en la figura 5.10 hace referencia al ángulo de Brewster que observamos en la figura 5.9.

Ahora vamos a mostrar únicamente la zona alrededor del ángulo crítico a fracciones de volumen altas. En la figura 5.11 se muestran curvas de reflectancia a dos longitudes de onda. En el experimento se trabajó además del láser de 638 nm con un láser de 405 nm básicamente porque son los instrumentos que contamos en el laboratorio para iluminar. Como podemos observar es bastante complicado diferenciar las teorías en esta zona de ángulo crítico, a menos que tengamos una fracción de llenado volumétrica muy alta. Nos tenemos que preguntar qué sucede en otra zona angular, es decir, nos alejamos de la zona de ángulo crítico y veamos que comportamiento es el que vamos a observar.

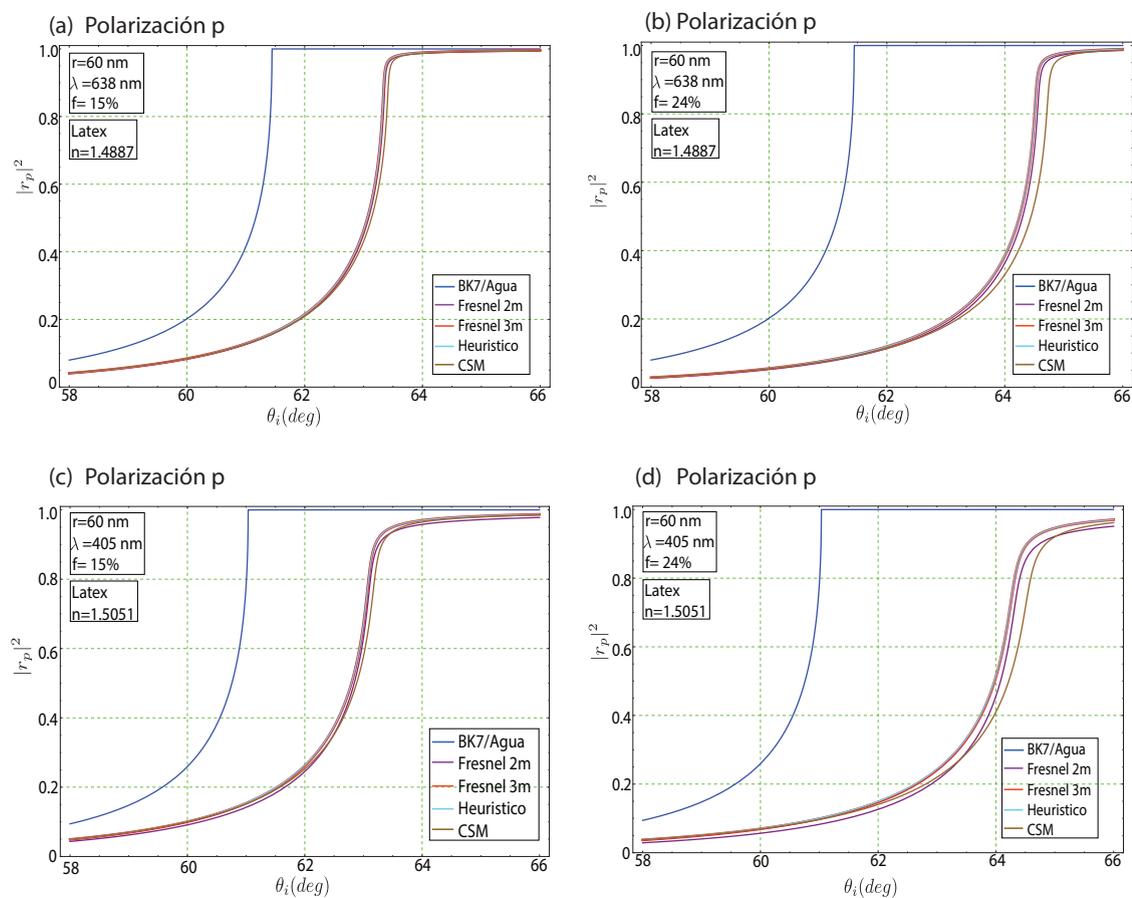


FIGURA 5.11: *Suspensión coloidal a diferentes fracciones de volumen a dos longitudes de onda: a) y b) a 638 nm y c) y d) a 405 nm todas a polarización p.*

En base a la figura 5.12 existen diferencias con respecto a la curva de referencia. La diferencias entre modelos son mínimas pero si se logra diferenciar los comportamientos de cada uno de los modelos. Con esto podemos decir, que si logramos medir en esta zona vamos poder distinguir entre modelo teóricos y que modelo se ajusta mejor al experimento.

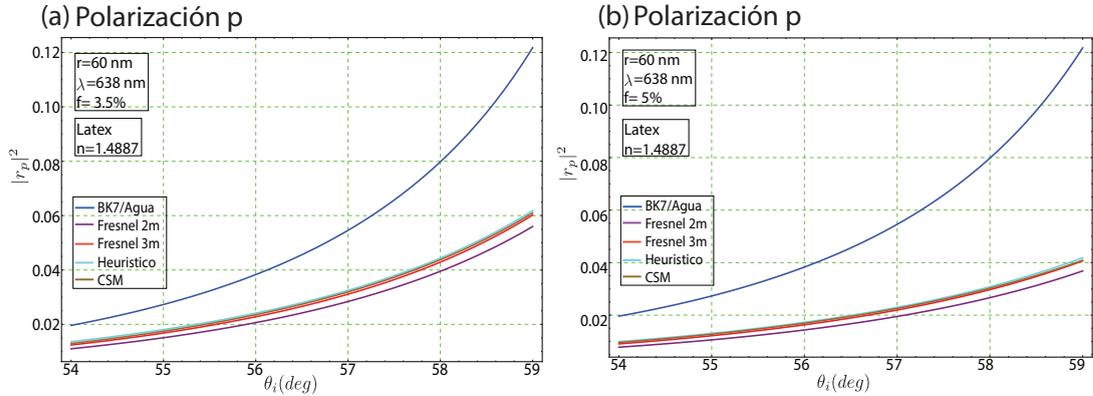


FIGURA 5.12: *Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, polarización p. En una escala angular fuera del ángulo crítico*

5.4.2. Látex (PMMA), de 520nm de diámetro

En esta sección presentaremos únicamente las curvas en las dos zonas angulares de interés, que son la de ángulo crítico y fuera del ángulo crítico. No presentaremos como en la sección anterior la escala angular de 0-90 grados debido a que no se observan diferencias notorias entre los modelos. Comenzamos con las gráficas cerca del ángulo crítico.

Con base en la figura 5.13 es muy claro que Fresnel 2 medios ya tiene un comportamiento completamente diferente comparado con los nuevos modelos teóricos. Va a ser importante la comparación con las mediciones con este tamaño de partículas, y veremos cual de todos los modelos se ajusta mejor al experimento. La diferencia entre Fresnel 2 medios y los modelos Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM, es más notoria cuando usamos una longitud de onda de 405 nm. Es importante señalar que los modelos de Fresnel 3 medios, Heurístico y el CSM se comportan de una manera muy interesante, y es que las curvas entre los ángulos 58 a 60 grados van por arriba de la curva de referencia, comparada con Fresnel 2 medios, que va por debajo de la curva de referencia. Va ha ser importante la comparación de estas curvas con las experimentales para observar si estas diferencias se observan en el experimento y saber cuál de modelo se ajusta de la mejor manera al experimento.

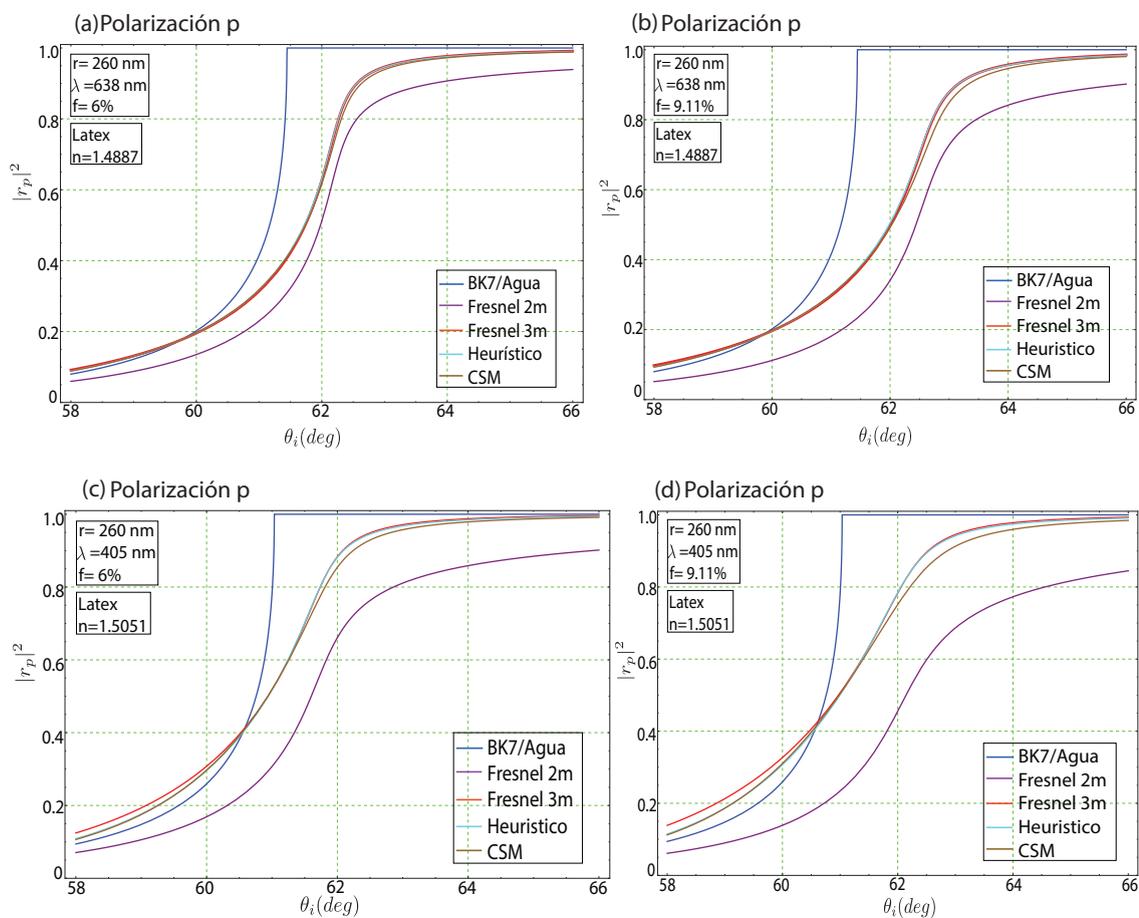


FIGURA 5.13: *Suspensión coloidal a diferentes fracciones de volumen a dos longitudes de onda: a) y b) a 638 nm. y c) y d) a 405 nm. todas con polarización p.*

Ahora observemos la zona angular fuera del ángulo crítico. En la figura 5.14 se observa que sí existen diferencias entre los modelos, lo cual es muy importante, dado el objetivo de nuestro trabajo será la descripción del experimento empleando los modelos en estudio. Necesitamos realizar las comparaciones y ver que es lo que sucede.

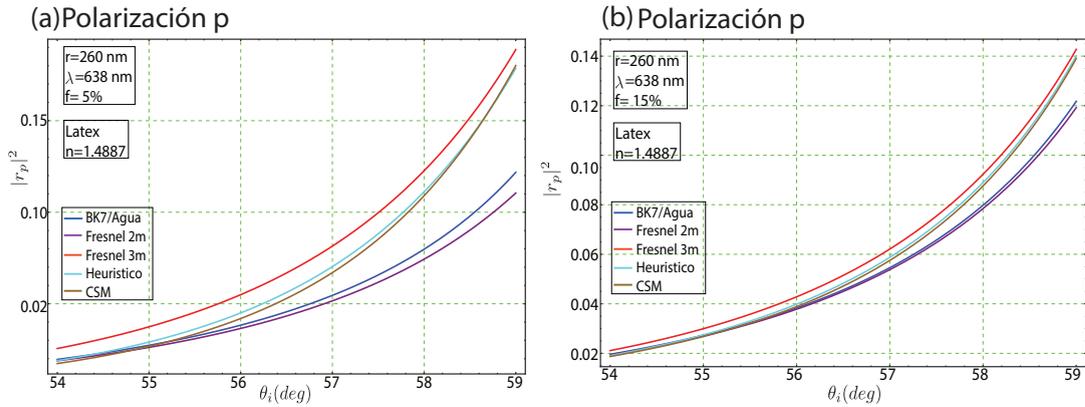


FIGURA 5.14: *Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, polarización p.*

5.4.3. Dióxido de Titanio, de 400 nm. de diámetro

Sigamos en la misma dirección que hemos venido haciendo, y mostremos las curvas de reflectancia como función del ángulo de incidencia en la región del ángulo crítico para ver el comportamiento que tienen los modelos al considerar una nueva suspensión coloidal. Considerando dos fracciones de volumen y el índice de refracción obtenido de tablas[14]. Veamos las diferencias entre los modelos teóricos en la región del ángulo crítico:

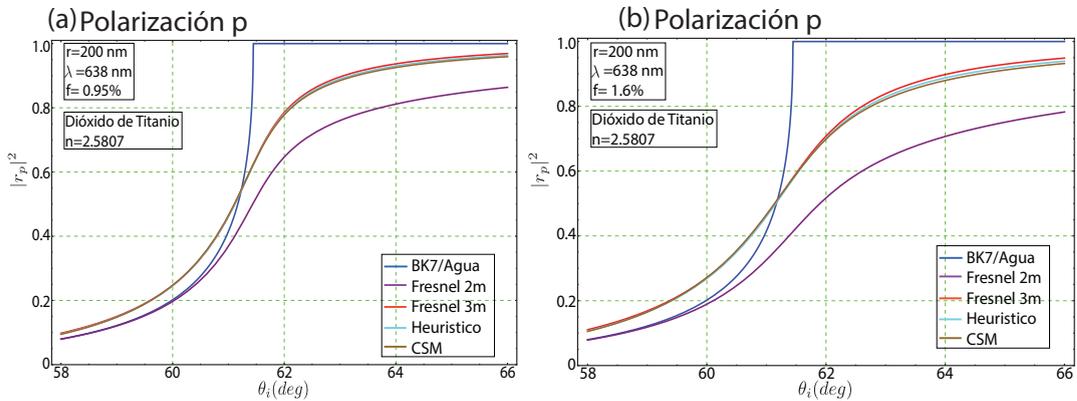


FIGURA 5.15: *Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen a una longitud de onda de 638 nm, polarización p.*

Lo que podemos observar es que a muy bajas fracciones de llenado (figura 5.15a), Fresnel 2 medios se separa de los modelos de Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM, pero no tenemos diferencias importantes entre estos modelos. Lo mismo sucede en la figura 5.15b, distinguiéndose ligeras diferencias entre los modelos. Será complicado distinguir estas diferencias en el experimento. Es importante señalar que aquí se calcularon curvas teóricas para el caso monodisperso. Sabemos que las suspensiones de dióxido de titanio

tienen una distribución de tamaños. Más adelante realizaremos el caso polidisperso (distribución de tamaños) y veremos las diferencias con respecto a la figura 5.15. Por último mostraremos algunas curvas de reflectancia para suspensiones coloidales de Cobre.

5.4.4. Cobre, de 500 nm. de diámetro

Los resultados numéricos en la zona del ángulo crítico para el cobre tomando el índice de refracción de $0.29486+3.4876i$ que se obtuvo de tablas[14].

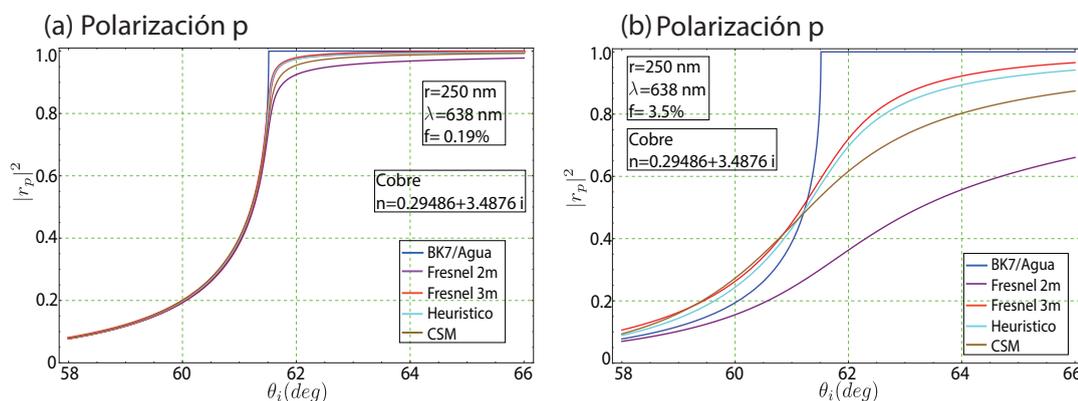


FIGURA 5.16: *Suspensión coloidal a dos fracciones de volumen distintas a una longitud de onda de 638 nm, polarización p.*

En la figura 5.16a no se ven diferencias entre los modelos, excepto con Fresnel 2 medios, pero la diferencia es mínima, de acuerdo a la figura 5.16b las diferencias son notables y Fresnel 2 medios se observa con un comportamiento muy diferente, teniendo en cuenta que es una fracción de volumen alta. No mostraremos la región ligeramente fuera del ángulo crítico ya que para concentraciones bajas no se notaron diferencias.

5.5. Espectros de reflectividad

A continuación mostraremos espectros de reflectividad fijando el ángulo de incidencia. Las gráficas que se mostrarán a continuación son a un ángulo de incidencia de 61 grados. Para partículas de látex de 120 y 520 nm de diámetro, tenemos:

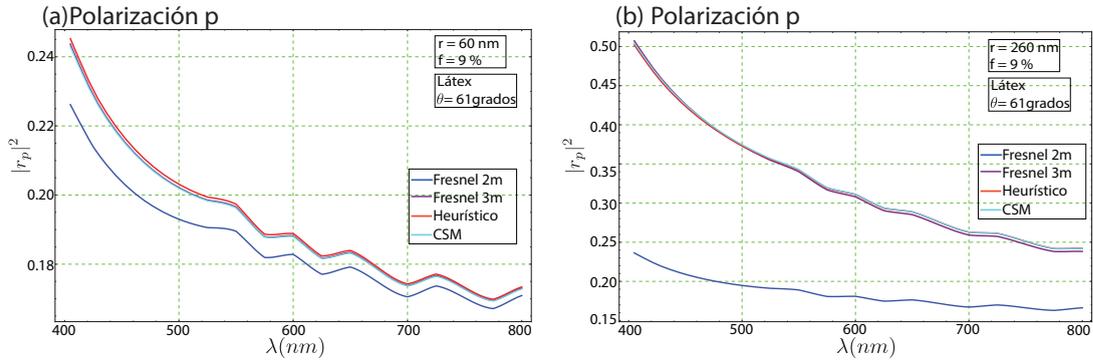


FIGURA 5.17: Espectros de reflexión para látex de dos tipos de tamaños (120 y 520 nm), variando la longitud de onda incidente y dejamos fijo el ángulo de incidencia de 61 grados con polarización p.

De acuerdo a la figura 5.17 tenemos que las amplitudes mayores de reflexión están en 400 nm y esta longitud de onda será la que ocuparemos en nuestros experimentos. La otra longitud de onda que se ocupará será la de 638 nm y de acuerdo a la figura 5.17b no se tiene una amplitud de reflexión como la de 405 nm. Lo importante es que las diferencias entre modelos nos es muy grande excepto con Fresnel 2 medios. Ahora para el caso para del dióxido de titanio y del cobre tenemos:

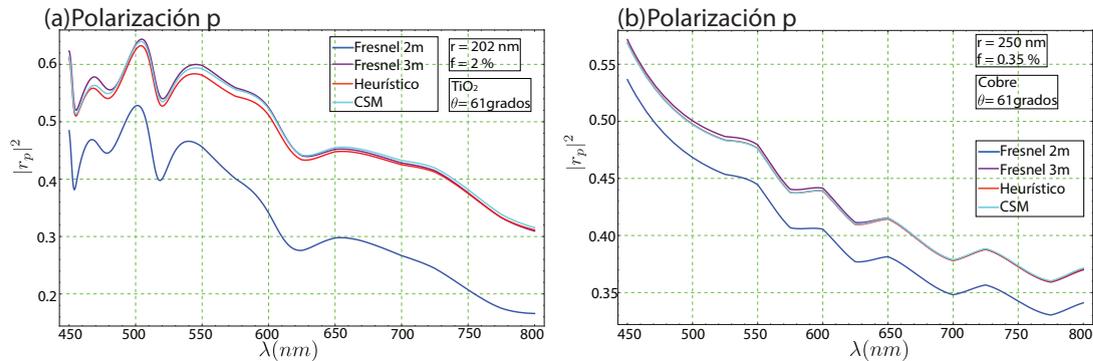


FIGURA 5.18: Espectros de reflexión para dióxido de titanio y cobre de 405 nm y 500 nm de diámetro, variando la longitud de onda incidente y dejamos fijo el ángulo de incidencia de 61 grados con polarización p.

En la figura 5.18a muestra ligeras diferencias a distintas longitudes de onda. De acuerdo a esta gráfica lo adecuado sería iluminar la muestra con una la longitud de onda de 500 nm por el máximo de reflectividad. Para la figura 5.18b no hay muchas diferencias entre modelos teóricos pero lo adecuado sería medir a otra longitud de onda diferente. Nosotros utilizaremos las longitudes de onda de 405 nm y 638 nm para todos nuestros experimentos.

Hasta el momento podemos observar en base a las curvas teóricas las suspensiones coloidales de látex y dióxido de titanio es un poco complicado observar diferencias entre los modelos (Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM), y al momento de compararlos con el experimento será un poco difícil distinguir las diferencias, mientras que para el cobre, existen diferencias entre modelos pero a fracciones de volumen altas. El problema que tenemos con estas muestras será la preparación de estas suspensiones, que más adelante se mencionará la forma como se elaboraron estas suspensiones de cobre. Se obtendrán conclusiones hasta que se tenga una comparación con el experimento. Ahora veamos el caso polidisperso.

5.6. Caso Polidisperso

En esta última sección nos enfocaremos a realizar el caso polidisperso[16], es decir, las curvas que hemos realizado hasta el momento es considerando que las partículas son monodispersas, lo que es posible para las partículas de látex (PMMA), pero lo que sucede es que las partículas en particular las de Dióxido de Titanio, resultan en la práctica ser polidispersas. Me refiero a monodisperso y polidisperso, a la propiedad que tienen las soluciones coloidales respecto a su tamaño, es decir, las partículas de PMMA, se venden como partículas de un mismo tamaño, mientras que las partículas polidispersas son aquellas que su tamaño de partícula es diferente, es decir, siguen una distribución de tamaños teniendo como radio más probable un determinado valor. En general el tamaño de partícula la proporciona el fabricante, y este tamaño de partícula es el que ocupamos para realizar nuestras curvas teóricas. Pero ahora sabemos que las partículas de Dióxido de Titanio no tienen un mismo tamaño pero conocemos el radio más probable de nuestras muestras, es por ello que haremos modificaciones en los programas introduciendo una distribución log normal para realizar el cálculo de las curvas de reflectividad pero ahora utilizando un caso polidisperso. Se han realizado con anterioridad este tipo de correcciones a los modelos[16], pero ahora generalizaremos para todos los modelos de nuestro estudio.

Sabemos que la densidad del número de partículas $\rho(a)$ puede escribirse como $\rho(a) = \rho_T n(a)$, donde ρ_T es la densidad de número total de partículas, independiente de su radio y $n(a)$ es la función de distribución de tamaño, que para nuestro caso será una distribución log normal, que es una distribución de probabilidad de una variable aleatoria cuyo logaritmo está normalmente distribuido. Es decir, si a es una variables aleatoria con una distribución normal, entonces la e^a tiene una distribución log normal.

$$n(a) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi \ln \sigma}} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_\sigma}}{2 \ln^2 \sigma}\right], \quad (5.74)$$

donde a_o es el radio más probable, σ es el ancho de la distribución, a es el radio. Lo que necesitamos es definir la fracción de volumen la cual va a depender del radio, es decir, dependerá de la distribución que acabamos de mostrar, para ello definimos la fracción de volumen como

$$f = \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho(a) da, \quad (5.75)$$

pero sustituyendo esta densidad de número de partículas, utilizando al distribución log normal, tenemos

$$f = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_T}{\sqrt{2\pi} \ln \sigma} \int_0^{\infty} a^2 \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_o}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da. \quad (5.76)$$

Para calcular esta integral lo que debemos hacer es un cambio de variable, tomando $u = \ln \frac{a}{a_o}$, teniendo ahora como expresión

$$f = \frac{4\pi}{3} \frac{a_o^3 \rho_T}{\sqrt{2\pi} \ln \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{3u} e^{-\frac{u^2}{2 \ln^2 \sigma}} du; \quad y \quad \frac{1}{\ln^2 \sigma} > 0, \quad (5.77)$$

tenemos que el resultado de la integración es

$$f = \frac{4\pi a_o^3}{3} \rho_T \exp\left[-\frac{9 \ln^2 \sigma}{2}\right], \quad (5.78)$$

y de esta forma obtener la densidad del número total de partículas como

$$\rho_T = \frac{3 f^{exp}}{4\pi a_o^3} \exp\left[-\frac{1}{2}(3 \ln \sigma)^2\right], \quad (5.79)$$

siendo ahora f la fracción de volumen conocida, es decir, es la fracción de volumen que uno mide en el experimento (ver capítulo 7). Recordando que $f = \rho V_p = \rho \frac{4\pi a^3}{3}$, donde ρ es la densidad de número y V_p es el volumen de una partícula esférica. Por lo tanto, en nuestros programas donde tengamos la fracción de llenado f , vamos a utilizar la ecuación anterior, y sustituirla por

$$f = \frac{4\pi}{3} \rho_T \frac{1}{\sqrt{2\pi} \ln \sigma} \int_0^{\infty} a^2 \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_o}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da. \quad (5.80)$$

Veamos a donde tendríamos que hacer las modificaciones. En el cálculo del *Coherent Scattering Model* de acuerdo a las ecuaciones (5.63) y (5.64) tenemos los siguientes productos

$$\gamma S_a(0) = \frac{3fS_a(0)}{2(k_m a)^3} = \alpha_1, \quad (5.81)$$

$$\gamma S_{1a}(\pi - 2\theta_i) = \frac{3fS_{1a}(\pi - 2\theta_i)}{2(k_m a)^3} = \alpha_2, \quad (5.82)$$

$$\gamma S_{2a}(\pi - 2\theta_i) = \frac{3fS_{2a}(\pi - 2\theta_i)}{2(k_m a)^3} = \alpha_3, \quad (5.83)$$

donde el subíndice a nos indica que depende del radio. Donde α_2 corresponde a la polarización s y α_3 corresponde a la polarización p . Por lo que tendremos que cambiar ahora a las siguientes expresiones

$$\alpha_1 = \frac{3f \exp e^{-\frac{1}{2}(3 \ln \sigma)^2}}{\sqrt{8\pi}(k_2 a_o)^3 \ln \sigma} \int_0^\infty \frac{S_a(0)}{a} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_o}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da, \quad (5.84)$$

$$\alpha_1 = \frac{3f \exp e^{-\frac{1}{2}(3 \ln \sigma)^2}}{\sqrt{8\pi}(k_2 a_o)^3 \ln \sigma} \int_0^\infty \frac{S_{1a}(\pi - 2\theta_i)}{a} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_o}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da, \quad (5.85)$$

$$\alpha_1 = \frac{3f \exp e^{-\frac{1}{2}(3 \ln \sigma)^2}}{\sqrt{8\pi}(k_2 a_o)^3 \ln \sigma} \int_0^\infty \frac{S_{2a}(\pi - 2\theta_i)}{a} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_o}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da. \quad (5.86)$$

Estas integrales necesariamente se tienen que resolver por métodos numéricos, es por ello que necesitamos definir los límites de integración para realizar la integración numérica. Si nos fijamos en la ecuación (5.74), y vemos en que valores esta exponencial es muy pequeña, nosotros proponemos que en el valor de 3 es donde la función $n(a)$ se hace muy pequeña ($n(a) \approx 0$), teniendo el siguiente cálculo

$$\frac{\ln^2 \frac{a}{a_o}}{\sqrt{2} \ln \sigma} = 3^2,$$

$$\frac{a}{a_o} = \exp \pm \sqrt{18} \ln \sigma,$$

obteniendo así los límites inferior y superior

$$a_i = a_o \sigma^{-\sqrt{18}}, \quad (5.87)$$

$$a_s = a_o \sigma^{+\sqrt{18}}. \quad (5.88)$$

Estos límites son indispensables para realizar la integración. Utilizaremos el método del Trapecio para calcular estas integrales. Nos falta hacer lo mismo con el modelo Heurístico y de acuerdo a las expresiones (5.24) y (5.25) en específico a los factores de los elementos de matriz S , se realiza una integral de $n(a)S(argumento)$ donde el argumento de S depende de las ecuaciones (5.24) y (5.25), obteniendo las siguientes integrales que le llamaremos β_i

$$\beta_1 = \frac{6i f^{exp} e^{-\frac{1}{2}(3 \ln \sigma)^2}}{\sqrt{8\pi}(k_2 a_0)^3 \ln \sigma} \int_0^\infty \frac{S_a(0)}{a} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_0}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da, \quad (5.89)$$

$$\beta_2 = \frac{\int_0^\infty \frac{S_{2a}(\pi - \theta_i - \theta_t)}{a} \exp\left[\frac{-\ln^2 \frac{a}{a_0}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da}{\int_0^\infty \frac{S_{2a}(\theta_i - \theta_t)}{a} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_0}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da}, \quad (5.90)$$

$$\beta_3 = \frac{\int_0^\infty \frac{S_{1a}(\pi - \theta_i - \theta_t)}{a} \exp\left[\frac{-\ln^2 \frac{a}{a_0}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da}{\int_0^\infty \frac{S_{1a}(\theta_i - \theta_t)}{a} \exp\left[-\frac{\ln^2 \frac{a}{a_0}}{2 \ln^2 \sigma}\right] da}, \quad (5.91)$$

y es así como sustituimos estas expresiones para hacer el caso Heurístico polidisperso. El objetivo de este procedimiento es sustituir nuestro parámetro fracción de volumen, que antes era una constante, ahora por una expresión dependiente del radio, y del ancho de la distribución log normal.

Mostraremos dos curvas respecto a esta sección solo como comparativo, la primera gráfica que mostraremos será curvas de reflectividad para los modelos que estamos haciendo.

Por último solo por mostrar la diferencia entre considerar un caso polidisperso y un monodisperso, en el caso del CSM.

Como podemos observar en la primera gráfica hay diferencias entre los modelos y será muy sencillo identificar qué modelo es el que está describiendo mejor al experimento, mientras que esa última gráfica es claro que hay diferencias entre considerar el caso monodisperso y polidisperso. Podemos pensar que el caso polidisperso está por debajo del monodisperso debido a que el tamaño de la partícula varía y al considerar la distribución de tamaños hace que se tenga un tamaño mayor que el radio promedio que se ocupa para el caso monodisperso. Veremos que para el caso de Dióxido de Titanio, cual es el caso que describe mejor a nuestro experimento, es decir, si al considerar un caso monodisperso nos ajustaría a nuestras mediciones o si el caso polidisperso que en principio debería tener un ajuste mucho mejor al experimento es el que nos describe mejor los resultados experimentales.

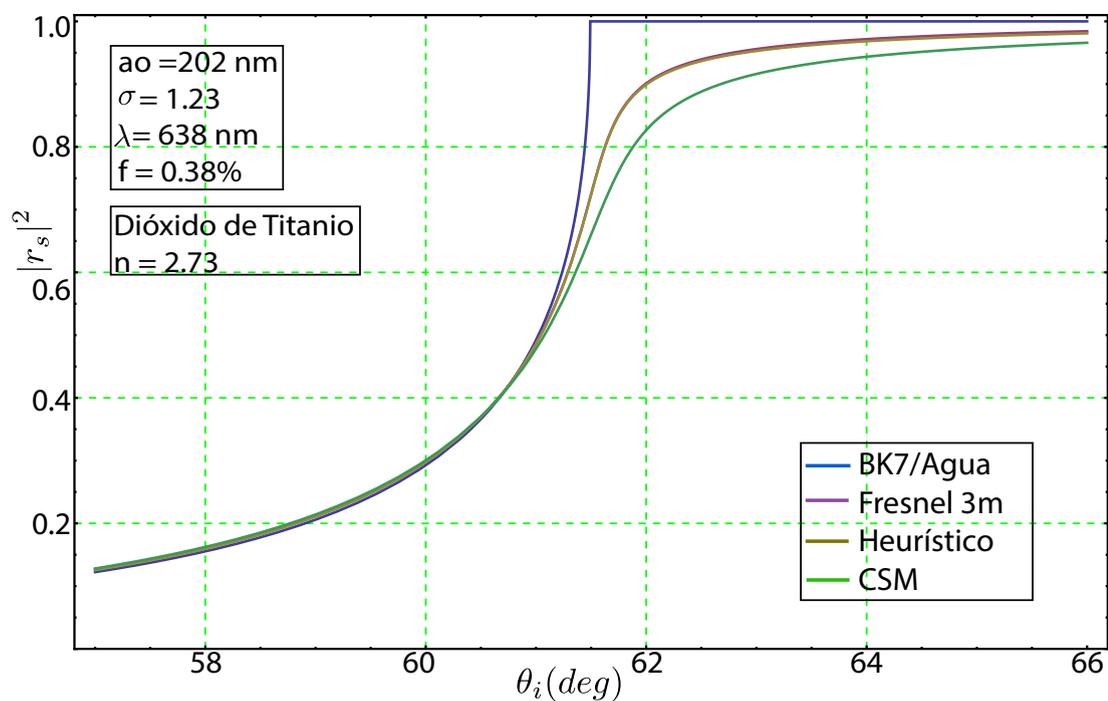


FIGURA 5.19: Modelos en el caso polidisperso. Donde σ es el ancho de la distribución log normal, este parámetro se propone.

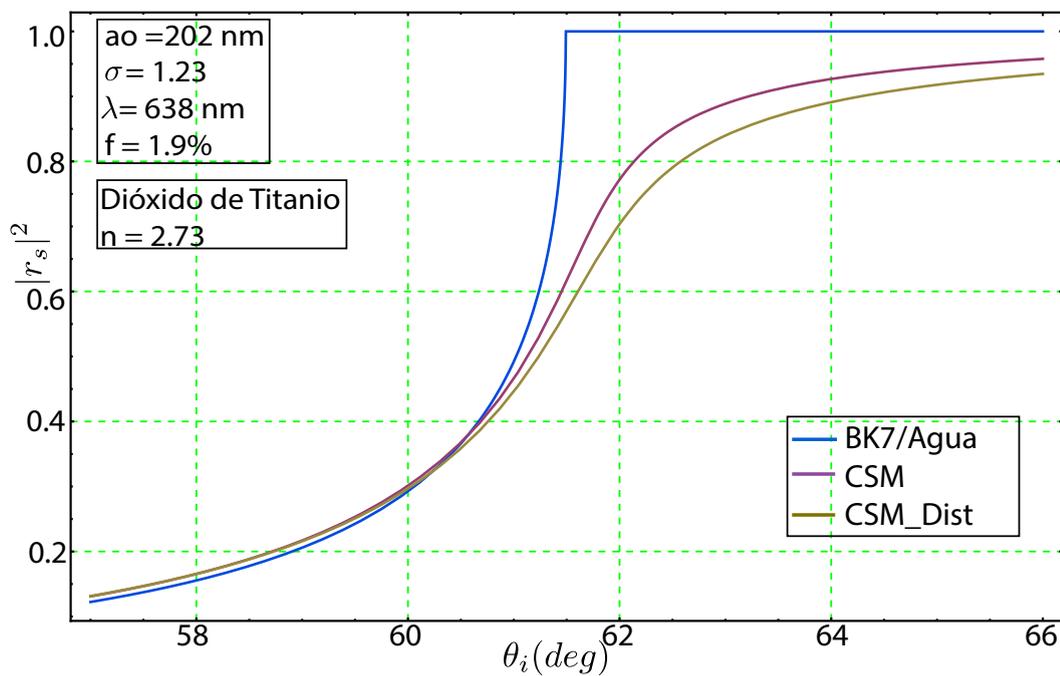


FIGURA 5.20: Modelo del CSM, utilizando el caso monodisperso y polidisperso. Con σ el ancho de la distribución.

Capítulo 6

Diseño experimental

En el siguiente capítulo describiremos el diseño del dispositivo experimental con el cual se realizaron los experimentos para medir reflectancia de suspensiones coloidales en configuración de reflexión interna, explicando cada uno de los elementos ópticos que se ocuparon y su uso. Además de detallarse la manera de como se calibra el sistema y la forma en como debemos de normalizar nuestros resultados. También explicamos la preparación de las suspensiones coloidales, mencionando cómo se determina la fracción de llenado volumétrica para cada una de las suspensiones coloidales. Primero explicaremos brevemente en que consiste la técnica de un refractómetro de Abbe.

6.1. Refractómetro de Abbe

El refractómetro de Abbe consiste de dos prismas, un prisma que ilumina y otro que refracta. Los prismas están hechos de un vidrio con un índice de refracción alto. El refractómetro está diseñado para usarse con muestras que tengan índices de refracción menores al de los prismas. La fuente de luz se proyecta a través del prisma de iluminación, la superficie inferior es rugosa, es decir, es esmerilado de manera que cada punto en esta superficie se puede considerar como la generación de ondas de luz que viajan en todas direcciones. Un observador colocado en la parte trasera del prisma de refracción y viendo hacia la muestra observaría una región iluminada y otra oscura, como se muestra en la figura 6.1. El diagrama de este refractómetro es el siguiente

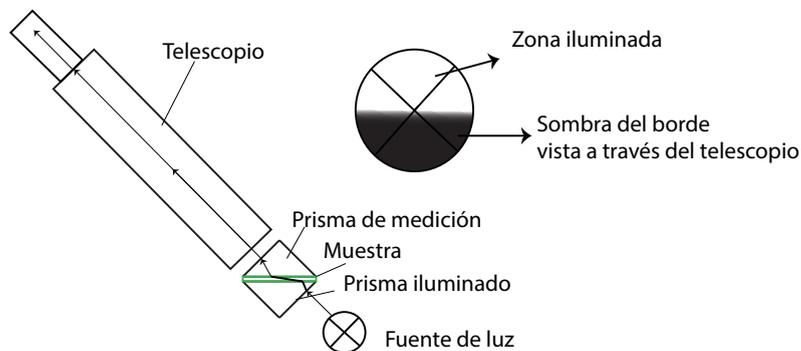


FIGURA 6.1: *Diagrama de un refractómetro de Abbe.*

Nos interesa medir curvas de reflectividad del haz coherente para coloides turbios[25, 26] alrededor del ángulo crítico en una configuración por reflexión interna, dado que los modelos que se pondrán a prueba con el experimento se obtuvieron considerando el campo coherente[27] e ignorando el campo difuso. En la siguiente sección mostraremos el dispositivo que se diseñó para realizar los experimentos en configuración interna.

6.2. Dispositivo experimental

El dispositivo experimental consiste de un prisma-semicircular, fabricado de un vidrio BK7. Por otra parte se ocuparon dos lentes, la lente 1 (ver figura 6.2) tiene una distancia focal de 6cm. Esta distancia focal se escogió para que tuviéramos enfocada la luz en el centro del contenedor (esta distancia fue arbitraria, era la lente que se tenía en el laboratorio). La lente 2 tiene una distancia focal de 3.5 cm. La elección de esta distancia focal fue la misma razón que la lente 1 y además fuera fácil de alinear en el espacio físico del arreglo experimental.

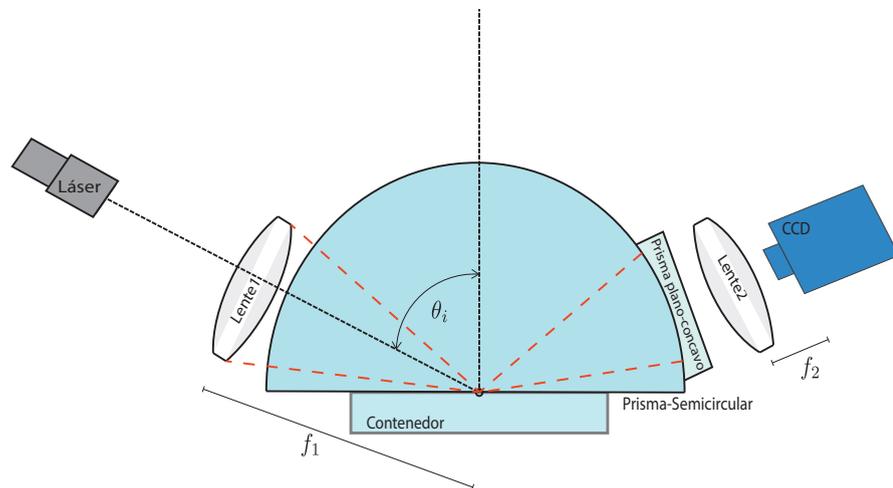


FIGURA 6.2: *Arreglo experimental.*

La lente 1 nos ayuda a enfocar la luz incidente en la base del prisma-semicircular justo en el centro del contenedor. El prisma plano-concavo nos ayuda a eliminar la curvatura del prisma semicircular. La lente 2 se utiliza para transformar una distribución angular de la intensidad de la luz reflejada en una distribución espacial de la intensidad en el plano focal de la lente 2. El plano focal de la lente 2 se ilustra en la figura 6.3. La cámara CCD se coloca en el plano focal de la lente, de tal manera que los rayos de luz que viajan haciendo un ángulo con el eje óptico de la lente se enfocan en el mismo punto en el plano focal. Lo que obtenemos con esta alineación entre lente 2 y CCD, es transformar distribuciones angulares de intensidad en distribuciones espaciales.

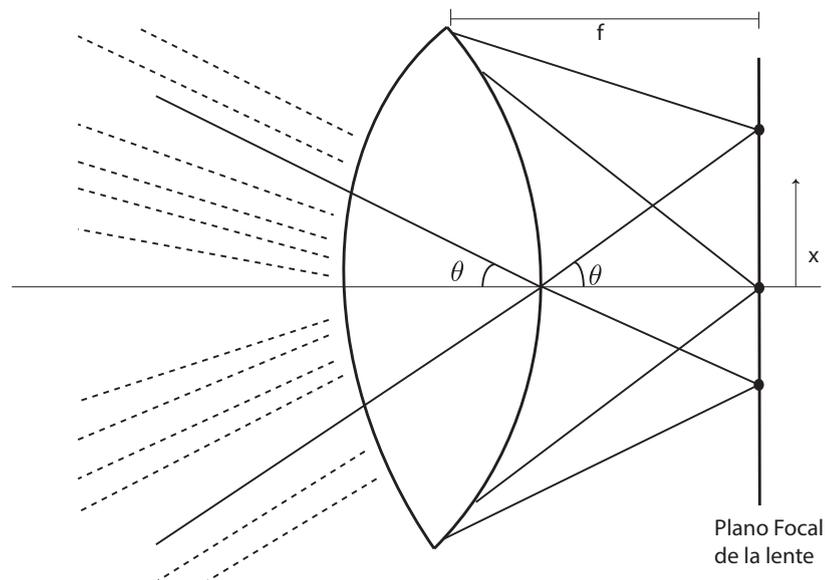


FIGURA 6.3: *Plano focal de la lente 2 y la alineación de la cámara CCD en el plano focal de la lente.*

Un elemento importante es el que llamamos difusor dinámico (ver figura 6.4). Nos ayuda a eliminar el "moteado" (speckle) para obtener una imagen muy limpia, es decir, estamos eliminando los efectos de interferencia aleatoria al realizar los experimentos de reflectancia. También utilizamos un polarizador, el cual nos ayuda a elegir una polarización del haz incidente, ya sea polarización s (perpendicular al plano de incidencia) o polarización p (paralelo al plano de incidencia). La forma de elegir dicha polarización es en base a la graduación de dicho polarizador. Más adelante mencionaremos como determinamos el eje de polarización. El prisma plano-cóncavo nos ayuda a eliminar la interfaz curva que ve la luz al salir del prisma-semicircular. El problema que se elimina es el "desenfoco" al medir la luz que se refleja. Colocar este prisma plano-cóncavo nos ayuda a quitar este desenfoque, y la lente 2 como ya se mencionó transforma la distribución angular en una distribución espacial sobre el área efectiva de la cámara CCD. La cámara utilizada es una CCD modelo 1545M de la marca Thorlabs®), el área sensible de esta cámara es de 6.6 mm^2 . Más adelante se explicará de que manera estamos realizando el análisis de la imagen para obtener las curvas de reflectividad que se compararán con las predichas por las distintas teorías que consideramos. Por último el contenedor que se utilizó, está fabricado de dos piezas, la primera es un cilindro de acero con rosca. La segunda pieza es una tapa que se ocupó para cerrar el contenedor. Esta pieza fue fabricada de teflón. El cilindro de acero fue pegado con pegamento epóxico a la cara plana del prisma-semicircular y con la tapa se cierra el contenedor. El montaje dispositivo es el que se muestra en la siguiente figura.

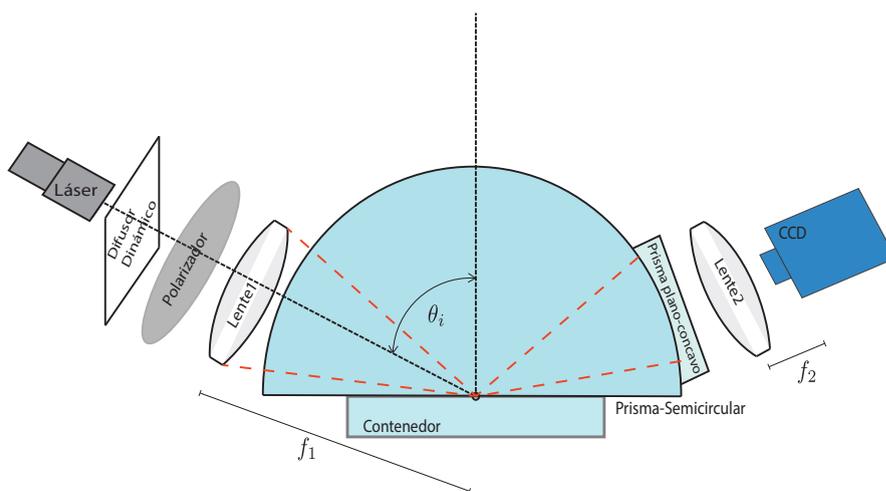


FIGURA 6.4: *Dispositivo experimental incluyendo todos los elementos ópticos.*

6.3. Alineación del sistema

En esta sección presentaremos la forma de alinear nuestro sistema. Tenemos que mencionar que el láser con el que vamos a alinear el sistema únicamente lo utilizaremos para dicha alineación, con este láser no se realizarán las mediciones. El láser con el cual llevaremos acabo las mediciones de reflectancia será alineado alrededor del ángulo crítico para el agua. El láser en incidencia normal se utiliza para medir luz difusa como se hace en[5]. Esta parte es fundamental, debido a que la exactitud de todos nuestros resultados dependen de esta alineación. Una mala alineación sería la principal fuente de error en nuestros resultados.

Lo primero que se debe hacer es localizar el centro de la platina en donde se está montando el sistema prisma-semicircular. Este centro lo obtenemos con la ayuda de una plomada y desplazando angularmente el sistema cada 10 grados para asegurar que el centro de la platina no se mueve con respecto a nuestra referencia (la plomada). Una vez que se localizó el centro de giro, lo que hacemos es colocar el conjunto de prismas en la base de la montura, haciendo coincidir el eje de giro con el centro de la cara plana del prisma-semicircular. Una vez hecho estos pasos, lo que sigue es alinear el prisma-semicircular. Poniendo el prisma-semicircular paralelo al plano de la mesa óptica. El procedimiento que hicimos fue colocar el láser de manera que el haz incida en el centro y normal a la cara circular del prisma, como se muestra en la siguiente figura.

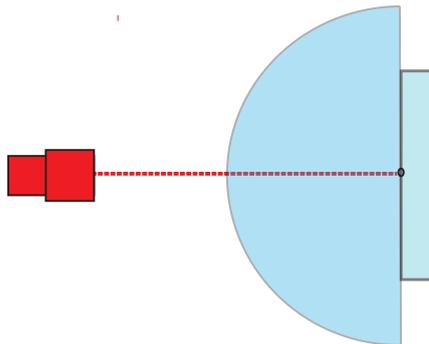


FIGURA 6.5: *Incidencia normal del láser al prisma.*

Una vez colocado el láser y alineado el prisma con respecto a la altura, del tal manera que el haz láser incida en el centro del prisma, lo que debemos hacer es ajustar la posición del láser ajustando su posición lineal y angular de éste. La mejor manera de hacer esta calibración es desplazando angularmente el prisma 90 grados respecto a su eje de giro, de tal manera que el haz láser roce la base del prisma (la parte plana del prisma), como se muestra en la siguiente figura.

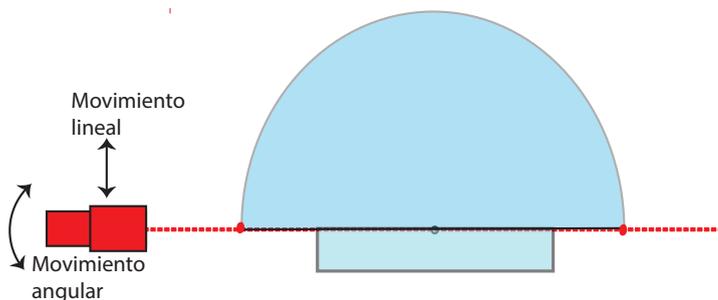


FIGURA 6.6: Prisma desplazado 90° respecto a su eje de giro.

Si después de girar el prisma 90 grados el láser no roza la base del prisma debemos desplazar lateralmente el láser para conseguirlo. Estos dos movimientos se deben realizar encontrando que se vea justo como en la figura 6.6, observando que el haz láser incidente viaje paralelo a la base del prisma. La alineación del sistema de prismas es modificado con la ayuda de una platina la cual cuenta con unos tornillos niveladores, los cuales se moverán de tal manera que el sistema de prismas sea paralelo al plano de la mesa óptica y la luz se mantenga como se ve en la figura 6.6.

Después de realizar esta alineación, podemos regresar a su posición inicial, como se muestra en la figura 6.5. Lo siguiente que debemos de realizar para tener el sistema completamente alineado es colocar la cámara CCD en la posición angular deseada. En nuestro caso viendo alrededor del ángulo crítico del agua. Como se ha mencionado las mediciones serán alrededor del ángulo crítico para el agua dado que nuestras muestras coloidales tienen como medio matriz el agua. Para alinear la CCD al sistema de prismas lo que debemos hacer es desplazar angularmente el sistema alrededor de 61 grados, dado que para la longitud de onda de 638 nm, el ángulo crítico del agua está en 61.5 grados. Esta rotación nos sirve como referencia, no es necesario colocar el sistema justo en el ángulo crítico exacto. Una vez que se giró el sistema, lo que prosigue es hacer incidir el haz láser y ver el haz reflejado. Es importante señalar que no se está utilizando agua, el haz reflejado que estamos observando en este procedimiento es el que se genera debido a las interfaces vidrio-aire. Con ayuda de una hoja colocada en la pared realizamos una marca donde vemos el haz reflejado. Como ya mencionamos, la geometría semicircular del prisma dificulta las mediciones, es por ello que utilizamos un prisma-plano-cóncavo más pequeño para que de esta manera el haz salga del prisma a través de una interfaz plana por una superficie plana, como se muestra en la figura 6.7. Colocamos el prisma

plano-cóncavo de tal manera que la marca que hicimos en el papel inicialmente y después de colocar el prisma plano-cóncavo se mantenga en la misma posición. Las variaciones son bastante perceptibles y podemos modificar la posición de este prisma de tal manera que veamos siempre el mismo el haz reflejado en la misma posición. La lente 2 se debe alinear con la cámara CCD como se muestra en la figura 6.3. La alineación de la lente 2 y la cámara CCD se realiza utilizando el programa de LabView. Para poner la CCD a la distancia focal de la lente 2 se observa la imagen en el programa que esté enfocada. Realizado este procedimiento colocamos la cámara CCD, y como ya sabemos que el haz reflejado está en cierta posición lo que debemos hacer es colocar la CCD de tal manera que quede en uno de los extremos de la cámara, esto es debido a que nosotros podemos medir a partir de la posición la cual fue girado el sistema y sabemos que podemos hacer una medición alrededor de 7 grados, colocamos el haz reflejado de tal manera que se pudo medir ligeramente atrás de los 61 grados y que tengamos suficiente espacio angular para medir corrimientos del ángulo crítico de 61.5 grados en adelante, es por ello que ajustamos la posición de la CCD alrededor de 59 y nos obtendríamos mediciones hasta un corrimiento en el ángulo crítico de 65 grados.

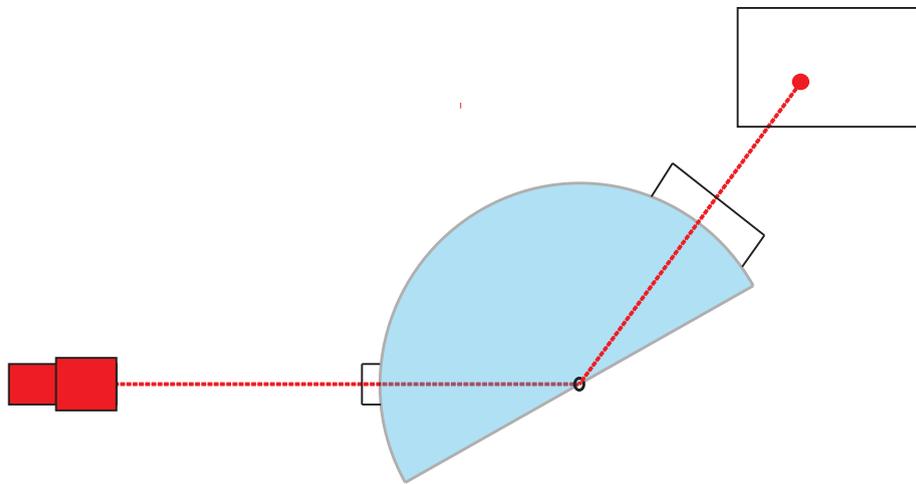


FIGURA 6.7: Alineación del prisma plano-cóncavo.

Ya que se tiene el sistema alineado, falta colocar el láser que vamos a usar para realizar nuestras mediciones de reflectividad. Por último vamos a alinear el láser para realizar las mediciones de reflectividad. Lo que debemos hacer es rotar el sistema 61 grados pero en dirección contraria, es decir, menos 61 grados, de esta manera sabremos que iluminaremos en la zona que nos interesa, que vuelve a ser la del ángulo crítico, ya que nosotros queremos iluminar el centro del contenedor, lo único que debemos hacer es colocar el láser de tal manera que podemos ver claramente como iluminamos el centro del contenedor. Nos ayudamos de una suspensión de dióxido de titanio, muy diluida, y colocamos un poco de esta solución en la cara plana del contenedor, esto es para “ensuciar” la cara y ver si el haz incidente está iluminando solo el centro del contenedor o alguna otra zona no deseada como algún borde del contenedor. El láser fue montado en una platina y sobre un goniómetro los cuales nos ayudan a mover el láser de tal manera que iluminemos el centro del contenedor. La platina nos ayuda a tener movimientos lineales micrométricos y el goniómetro en movimientos angulares de un grado. Ya fijado el láser en la posición donde solo iluminamos el centro del contenedor, lo que debemos hacer ahora es ajustar la lente que llamamos 1, regresando el sistema a cero grados, su posición inicial. Lo que debemos hacer es fijar esta lente en su montura correspondiente. Para ello sabemos que la distancia focal de la lente es de 6 cm, y a esta distancia del centro del contenedor, colocamos la lente. La pregunta es ¿Cómo sabemos que la posición es la adecuada?, esto se resuelve de la misma manera “ensuciando” la superficie plana del contenedor, de manera que uno puede ver la zona que se está iluminando. Desplazamos la lente 1 hasta que enfocamos el haz láser incidente en el centro de nuestro contenedor. La platina que desplaza angularmente todo el sistema, está controlada por un programa que se realizó en LabView. La distribución de la luz sobre la CCD se lee con este mismo programa y despliega la “imagen” en la pantalla de la computadora. Lo único que resta es colocar el difusor dinámico, la posición de esta componente no afecta el arreglo experimental. Solo debemos asegurarnos que no obstruya la luz y que su eje de rotación este paralelo al haz láser. De igual forma se coloca el polarizador paralelo al láser y al difusor dinámico.

El difusor dinámico consiste en un motor variable controlado por un circuito conectado a una batería de 9 V que gira una pantalla circular traslúcida que esparce la luz transmitida. El difusor se construyó, utilizando un ventilador de computadora. Las aspas del ventilador fueron cortadas y sobre el eje de giro se colocaron círculos de papel albanense. De esta manera quitamos la interferencia aleatoria (“moteado” o en inglés *speckle*) que nos afecta en las mediciones. El difusor dinámico es de la siguiente forma.

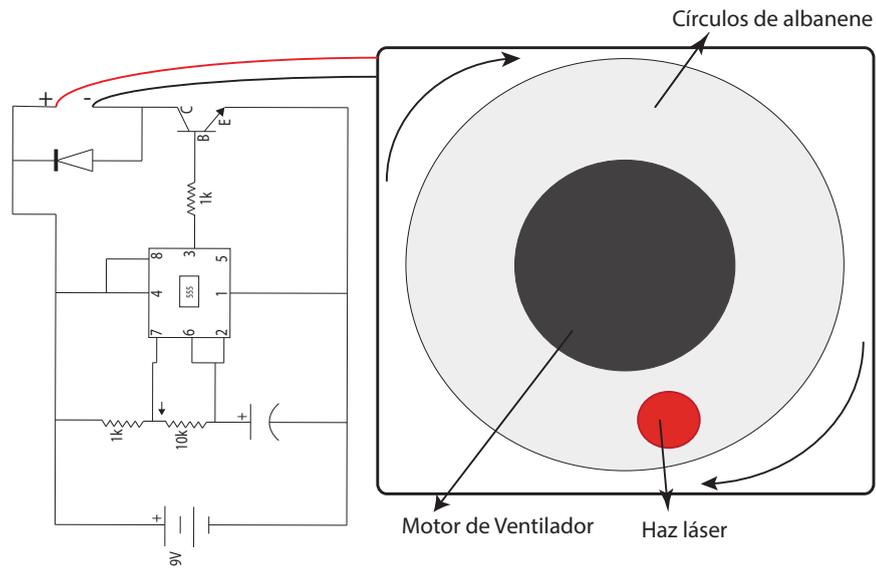


FIGURA 6.8: *Difusor dinámico.*

Una vez colocadas todas las componentes se tiene el siguiente arreglo experimental.

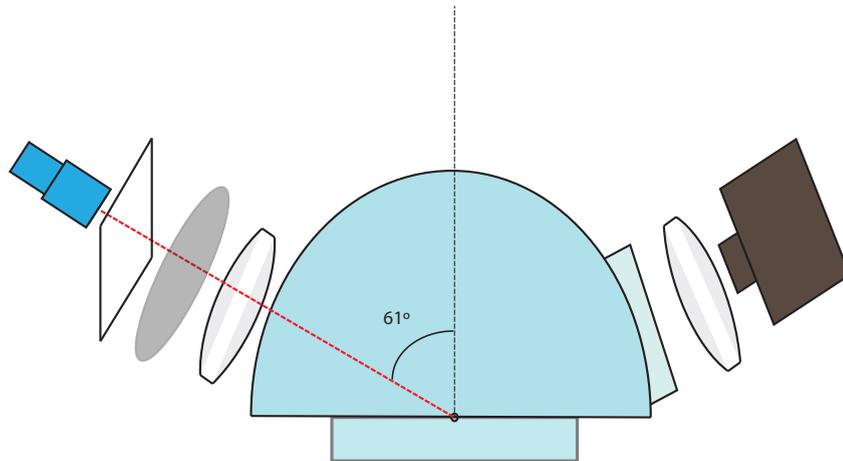


FIGURA 6.9: *Diseño del dispositivo experimental para medir curvas de reflectancia.*

A lo largo de esta sección mostramos la manera de alinear nuestro sistema para que se realizaran mediciones alrededor del ángulo crítico, pero como ya lo mencionamos en los modelos teóricos, también nos interesa otro intervalo angular de medición, antes del ángulo crítico, debido a que entre 50 y 60 grados, los modelos teóricos se separan y muestran diferencias entre sí. La manera en la que procedemos es exactamente la misma que acabamos de explicar. La modificación será mover el ángulo de iluminación, alrededor de 54 grados. También debemos mover la lente 2 junto con la cámara CCD al ángulo de visión especular respecto al ángulo de incidencia. Alineamos el sistema siguiendo el mismo procedimiento descrito anteriormente.

6.4. Escala angular

En esta sección vamos a explicar la manera de construir la escala angular que vamos a utilizar en las curvas de reflectividad. Para ello necesitamos el siguiente diagrama:

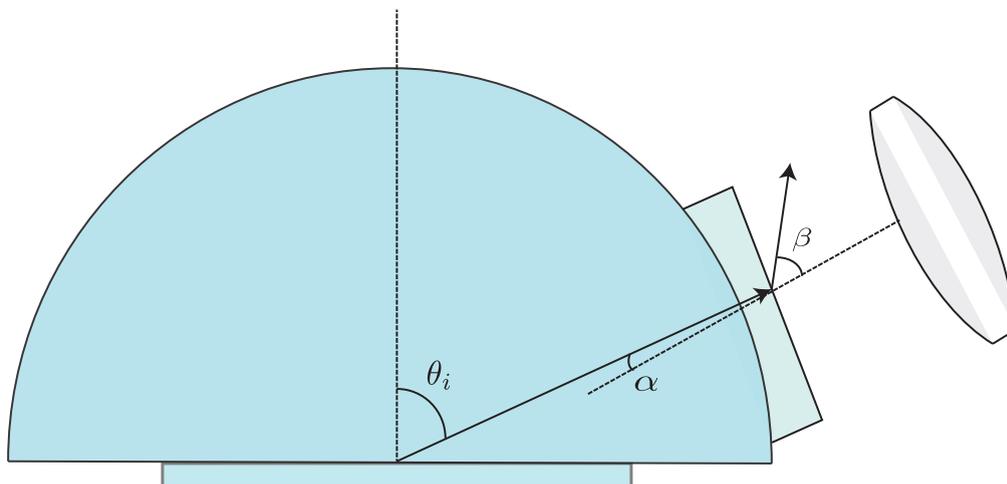


FIGURA 6.10: *Desplazamiento angular.*

Con ayuda de la ley de Snell, tenemos que,

$$n_p \sin \alpha = n_a \sin \beta, \quad (6.1)$$

donde n_p es el índice de refracción del prisma semicilíndrico (BK7), n_a es el índice de refracción del aire, y α y β son los ángulos que se muestran en la figura 6.10. Utilizando la ecuación (6.1) tenemos que,

$$n_p \cos \alpha d\alpha = n_a \cos \beta d\beta. \quad (6.2)$$

Para desplazamientos angulares finitos pero suficientemente pequeños podemos escribir,

$$\Delta\alpha \approx \frac{n_a \cos \beta}{n_p \cos \alpha} \Delta\beta. \quad (6.3)$$

Debido a que no conocemos el ángulo β y queremos conocer $\Delta\alpha$, necesitamos colocar $\Delta\beta$ en términos de variables conocidas.

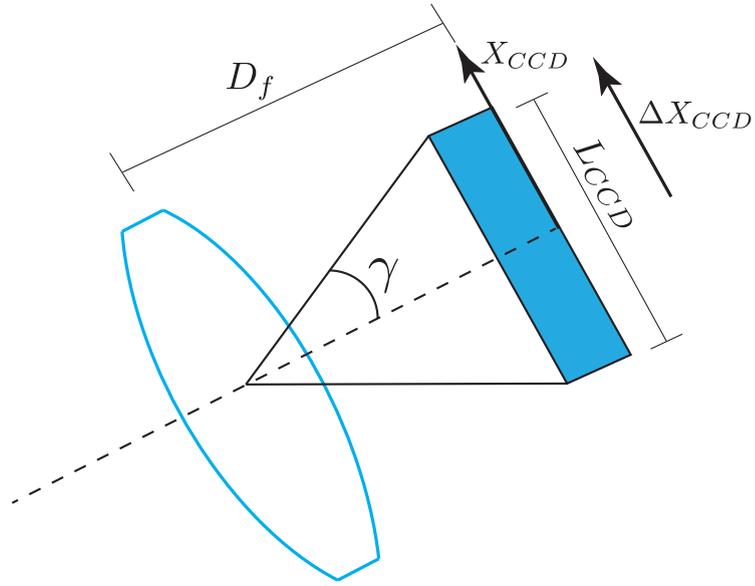


FIGURA 6.11: Lente de distancia focal (D_f) de 35mm y longitud efectiva de la cámara CCD.

Partiendo de la figura 6.11, tenemos que,

$$\tan \gamma = \frac{L_{CCD}}{2 * D_f}, \quad (6.4)$$

y

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{L_{CCD}}{2 * D_f}, \quad (6.5)$$

donde L_{CCD} es la longitud efectiva de la CCD en el plano de incidencia, y D_f es la distancia focal de la lente. El eje X_{CCD} se muestra en la figura 6.13. X_{CCD} es la distancia al eje óptico sobre el plano de la CCD (plano focal, como se definió en la figura 6.3). Ahora si suponemos una refracción muy pequeña en la interfaz prisma plano-cóncavo y aire, podemos escribir la ecuación (6.3) como,

$$\Delta \alpha \approx \frac{1}{n_p} \Delta \beta. \quad (6.6)$$

Retomando la ecuación (6.5), tenemos que

$$\Delta\beta = 2 \tan^{-1} \frac{\Delta X_{CCD}}{2D_f}. \quad (6.7)$$

La expresión necesaria para construir nuestra escala angular es,

$$\Delta\alpha = \frac{2}{n_p} \tan^{-1} \frac{\Delta X_{CCD}}{2D_f}, \quad (6.8)$$

la resolución que se puede alcanzar, $(\Delta\alpha)_{min}$, dependerá del ancho de cada pixel $(\Delta X_{CCD})_{min}$, el cual se conoce a partir del fabricante y es de $5.2\mu m$. Dado el argumento de la ecuación (6.8), podemos hacer un desarrollo en series de Taylor para tener una aproximación y una función más sencilla a programar, quedándonos a primer orden. Lo que obtenemos es

$$\Delta\alpha \approx \frac{\Delta X_{CCD}}{n_p D_f}. \quad (6.9)$$

en términos de la resolución tenemos

$$(\Delta\alpha)_{min} = \frac{(\Delta X_{CCD})_{min}}{n_p D_f}. \quad (6.10)$$

Siendo esta la aproximación a orden lineal que usamos en el programa para calcular la escala angular de los perfiles de reflectividad. Esta aproximación lineal es un incremento angular que sirve para generar la escala angular. En el programa que controla el dispositivo de medición se le asigna un valor inicial de la escala angular, es decir, proponemos un ángulo en el cual va a iniciar la escala angular. Utilizando la ecuación (6.10) obtendremos los valores de los incrementos a la escala angular y de esta manera tendremos la escala angular de las mediciones. La ecuación (6.10) depende de los valores del índice de refracción del prisma y en nuestro caso varían porque usamos dos longitudes de onda de 405 nm y 638 nm, teniendo como valores de índice de refracción de 1.5302 y 1.5149 respectivamente, ya que la distancia focal D_f y el ancho de pixel $(\Delta X_{CCD})_{min}$, son valores fijos. Así obtendremos la escala angular. Por ejemplo si la escala angular comienza en 58 grados, tendremos que llegar a 65 grados con incrementos dados por la ecuación (6.10).

6.5. Preparación de muestras

En esta sección vamos a explicar la manera de preparar las dispersiones coloidales con las que se trabajaron. Las suspensiones son de látex (PMMA, polimetilmetacrilato) de dos diferentes tamaños, de dióxido de titanio, y por último suspensiones coloidales

de cobre. Estas últimas llevan un procedimiento distinto para su fabricación y se usaron dos medios matriz diferentes. Para el látex y el dióxido de titanio se ocupó solo agua como medio matriz y para las de cobre se ocupó agua y alcohol isopropílico como medio matriz.

Empezaremos explicando como se calcula el porcentaje de fracción volumétrica. Esta variable es de suma importancia para el cálculo numérico y la comparación con el experimento. Vamos a comenzar explicando como se calcula teóricamente el valor nominal de la fracción de llenado volumétrica durante la fabricación de las muestras y posteriormente como se determina experimentalmente el valor conseguido. Lo que necesitamos saber es la expresión para el porcentaje en fracción de llenado volumétrica, f , que es

$$\%f = \frac{V_p}{V_{H_2O} + V_p}, \quad (6.11)$$

donde V_p es el volumen de las partículas y V_{H_2O} es el volumen del agua. El fabricante que nos proporcionó las muestras de látex y dióxido de titanio, vienen suspendidas en agua. Lo que nosotros hicimos fueron muestras a partir de estas suspensiones que le llamaremos suspensiones madres. Necesitamos una variación de la expresión (6.11) para considerar el porcentaje en sólidos que tiene la muestra madre, tenemos que,

$$\%f = \frac{V_{mp}}{V_{H_2O} + V_m}, \quad (6.12)$$

donde

- V_{mp} , es el volumen de la muestra pura.
- V_m , es el volumen de la muestra que nos da el fabricante.
- V_{H_2O} , es el volumen de agua que nosotros queremos agregar.

debido a que desconocemos V_m , vamos a sustituir este volumen por variables conocidas. Tenemos que

$$V_{mp} = F_{mp} * V_m = \frac{V_p}{V_{H_2O} + V_p} * V_m. \quad (6.13)$$

Donde F_{mp} es la fracción de llenado de la muestra pura, V_p es el volumen de las partículas y recordemos que la densidad másica es, $\rho = \frac{m}{V}$, donde m es la masa y V es el volumen, y si se conoce el porcentaje en sólidos, que es $\%w = \frac{m_p}{M_T}$, donde M_T es la masa total (partículas más agua) y m_p es la masa de las partículas, tenemos que la fracción de llenado de la muestra pura es,

$$F_{mp} = \frac{\frac{m_p}{\rho_p}}{\frac{m_p}{\rho_p} + \frac{m_{H_2O}^m}{\rho_{H_2O}}} = \frac{\frac{\%w}{\rho_p}}{\frac{\%w}{\rho_p} + (1 - \%w)}. \quad (6.14)$$

Obtenemos que la fracción de llenado volumétrica con las variables conocidas como

$$\%f = \frac{\frac{\%w}{\rho_p} * V_m}{V_m + V_{H_2O}}. \quad (6.15)$$

Con esta expresión vamos a calcular las fracciones de llenado volumétricas teóricas, dado que ya conocemos todas las variables, donde

- $\%w$, es el porcentaje en sólidos de la muestra madre, este dato es proporcionado por el fabricante.
- ρ_p , es la densidad de las partículas a usar, ese dato se conoce de tablas.
- V_m , es el volumen de la muestra madre que nosotros queremos agregar.
- V_{H_2O} , es el volumen de agua que nosotros queremos agregar.

Como ya se mencionó la fórmula (6.15) que se ocupó para calcular las fracciones de volumen, pero debido a que se utilizan probetas para medir los volúmenes las incertidumbres son relativamente grandes ($> 5\%$), por lo que se debe comprobar esta fracción de volumen experimentalmente y tener una fracción de volumen más exacta. Esta última será con la que se trabajará para las comparaciones teoría vs experimento. La forma de medir esta fracción de volumen experimental se describe a continuación.

Primero explicaré como se preparan las muestras y posteriormente explicaré como se mide experimentalmente la fracción de llenado volumétrica. Se prepara agua con un surfactante denominado “Dispers 1” al 4% en peso respecto al agua, para preparar coloides de Dióxido de Titanio. Para preparar coloides de PMMA (látex) se utiliza otro surfactante denominado SDS (del inglés “Sodium Dodecyl Sulfate”) al 2% en peso respecto al agua. Los surfactantes también llamados tensoactivos, se le agregan al agua para evitar que las partículas se aglomeren. Estos tensoactivos no alteran las mediciones apreciablemente, es decir, no alteran notoriamente el índice de refracción del agua ni tampoco el de las partículas del coloide. Se recomienda preparar suficiente volumen de agua con tensoactivo (500 ml. o 1 litro de agua), para que todas las muestras se hagan a partir de esta mezcla. Este fue nuestro caso, y fue la manera de asegurarnos que el medio matriz fuese el mismo para todas las muestras del mismo tipo.

Ya que agregamos el tensoactivo al agua, lo que debemos hacer es mezclarlos utilizando un agitador de imán (conocido como “mosca”) y una parrilla agitadora, la cual

será utilizada para homogeneizar nuestro medio matriz. El proceso de agitación es alrededor de 15 minutos. Una vez que se tiene el agua con el tensoactivo, lo que debemos hacer es utilizar la fórmula (6.15) para calcular la fracción de volumen deseada. Lo que se calcula con la fórmula (6.15) es el volumen de la muestra madre (V_m), ya que nosotros proponemos la fracción de volumen que queremos y el agua que deseamos agregar. Despejamos V_m de la fórmula (6.15) y obtenemos el valor que necesitamos. Dicho volumen se mide con probetas graduadas en mililitros. Una vez que se conoce el volumen V_m se agrega este volumen al volumen del agua con surfactante en un contenedor. Para mezclar estos volúmenes lo que hacemos es utilizar un baño de ultrasonido modelo Branson 200, que genera pulsos continuos por 5 minutos, la muestra está lista al exponerla al ultrasonido alrededor de 15 minutos. En la sección de resultados, mostraremos que al exponer nuestras muestras ya sea de PMMA o Dióxido de Titanio, 10 minutos al ultrasonido es más que suficiente ya que se observa que no hay variaciones de sus propiedades en el tiempo.

Para realizar suspensiones coloidales de partículas de cobre lo que debemos hacer es ligeramente diferente a lo que ya mencionamos, ya que no se suspenden si ocupamos únicamente nuestro medio matriz, agua más tensoactivo. La elaboración de estas suspensiones es la siguiente: Utilizando la fórmula (6.11), es como vamos a conocer el volumen de las partículas (V_p). Nosotros proponemos la fracción de llenado volumétrico ($\%f$) y el volumen de agua (V_{H_2O}) y despejando de (6.11) obtenemos el volumen de partículas. Es importante señalar que las partículas de cobre que utilizamos están inicialmente en polvo, por lo que debemos utilizar guantes de látex y mascarillas para prevenir cualquier tipo de contacto directo con los polvos, ya sea en el cuerpo o en las vías respiratorias. Una vez que se calculó el volumen a agregar de las partículas de cobre, lo que debemos hacer es agregarle alcohol isopropílico. La cantidad no importa, solo la queremos para tratar inicialmente las partículas. En este trabajo utilizamos 20 ml. Posteriormente sonicamos la muestra con un sonicador (en nuestro caso marca QSónica), para suspender las partículas en el alcohol. Debemos de sumergir la punta del sonicador una cierta distancia mínima (aproximadamente 5 cm. de la punta del sonicador). Con es volumen de alcohol, cubríamos las necesidades para utilizar el sonicador. Sonicamos alrededor de 15 veces, con las siguientes características:

- Amplitud 30 %.
- Pulso de 3 segundos.
- Tiempo encendido de 20 segundos.

Ya que hicimos esto, lo que prosigue es evaporar el alcohol isopropílico. El alcohol se evapora alrededor de 2 días dejando la muestra cubierta por un filtro. Ya que se evaporó el alcohol, volvemos a tener el polvo de cobre, y ahora le agregamos el volumen de agua previamente calculado más el tensoactivo necesario para la muestra con la fracción de volumen deseada. Se vuelve a realizar el mismo procedimiento con el sonicador para suspender las partículas en agua. El tensoactivo que se utilizó para estas partículas fue “SDS”, de igual manera al 2 % en peso. Se intentó suspender las nanopartículas agregando simplemente el agua más el tensoactivo al polvo original, pero lo que observamos fue que no se conseguía mezclar los polvos y el medio matriz. Las nanopartículas de cobre tienden a no mezclarse con el agua, pero al agregarles alcohol y después evaporarlo, veíamos que las nanopartículas se suspendían en el medio matriz más fácilmente.

Por último para hacer la medición experimental de la fracción de llenado volumétrica, lo que debemos hacer es medir la fracción de peso del cobre, utilizando una balanza analítica y un portaobjetos. Suponiendo que la densidad másica de las partículas es la del material correspondiente obtenemos la fracción de peso y luego calculamos la fracción de llenado volumétrica. Vamos a colocar el portaobjetos sobre la balanza y la colocamos en ceros. Una vez realizado este procedimiento lo que debemos hacer es agregar cierta cantidad del coloide preparado. Se agrega una cantidad pequeña (por ejemplo 5 ml.) al portaobjetos que se coloca en la balanza y se registra el valor que nos da la balanza. Ese valor será la masa inicial. Después esperamos hasta que se evapore la muestra y queden solo las nanopartículas, (ya sea de PMMA, dióxido de titanio o cobre). Es fácil de saber cuándo registrar el valor correspondiente, ya que este valor no cambia en el tiempo. Esta sería la masa final, y con ello tenemos todo para calcular el volumen de las partículas, utilizando que,

$$V_m = \frac{m^{final}}{\rho_m}. \quad (6.16)$$

La fracción de volumen que ocupan las partículas en la muestra se obtiene como,

$$\%f = \frac{V_m}{V_i} * 100, \quad (6.17)$$

donde V_i es el volumen inicial. Todas las muestras que se midieron, pasaron por este mismo procedimiento, de cálculo y medición experimental, para la determinación exacta de la fracción de llenado volumétrica.

En las siguientes figuras mostramos algunas imágenes de las muestras preparadas.



FIGURA 6.12: Coloides de Látex (PMMA) de 120 nm de diámetro a distintas concentraciones.



FIGURA 6.13: Coloides de Látex (PMMA) de 450 nm de diámetro a distintas concentraciones.



FIGURA 6.14: *Coloides de Dióxido de Titanio de 402 nm de diámetro a distintas concentraciones.*



FIGURA 6.15: *Coloides de Cobre de 500 nm de diámetro a distintas concentraciones.*

6.6. Caracterización del estado de polarización de la luz

Primero presentaremos una parte fundamental para nuestro experimento y que utilizaremos para la caracterización del polarizador.

6.6.1. ¿Cómo obtenemos las curvas de reflectividad experimentales?

Lo que hicimos para obtener las curvas de reflectividad fue: Considerar la reflexión de la interface vidrio-aire, teniendo reflexión total interna. Después agregamos agua al

contenedor y medimos la intensidad de luz reflejada de la interface vidrio-agua. Con los datos que nos genera el programa de LabView, hacemos la siguiente operación:

$$r_{agua} = \frac{I_{vidrio-agua}}{I_{vidrio-aire}}, \quad (6.18)$$

y así obtenemos nuestra curva de reflectividad para cada una de las muestras, sustituyendo $I_{vidrio-agua}$ por $I_{vidrio-muestra}$ y siempre dividiremos todas las mediciones por la intensidad entre la interfaz vidrio-aire. Llamamos a este procedimiento “normalización de las curvas”. Además esta normalización nos corrige por las pérdidas debidas a las otras múltiples interfaces que encuentra la luz en su recorrido desde la fuente hasta el detector.

Debido a que nuestro interés está en la comparación de modelos con el experimento, necesitamos conocer la polarización de la luz que incide en la interfaz prisma-muestra. En principio el láser que ocupamos no está polarizado y necesitamos un polarizador para polarizar la luz incidente. Es necesario determinar el eje de polarización del polarizador, como se muestra en la siguiente figura:

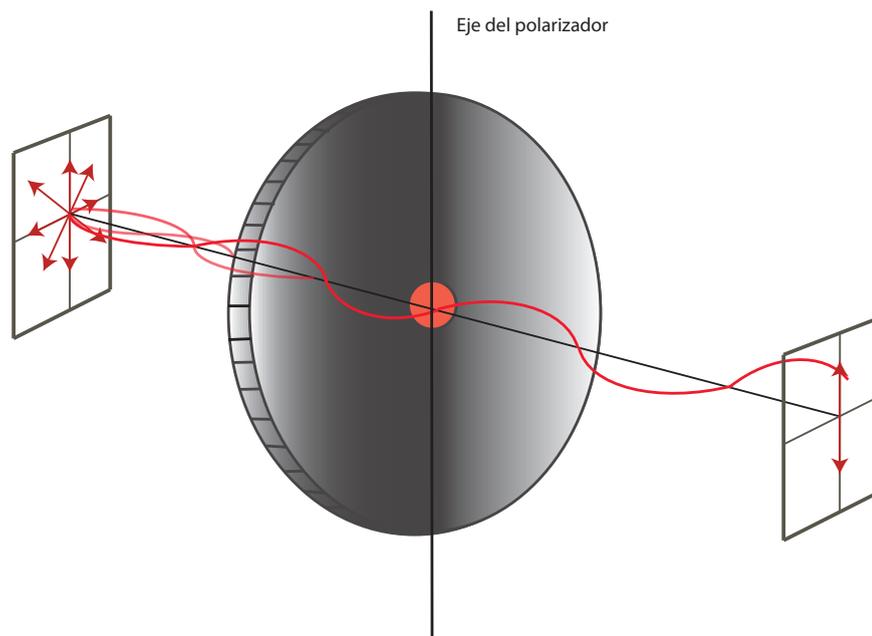


FIGURA 6.16: Luz polarizada al pasar por el polarizador.

Lo primero que hicimos fue graduar nuestro polarizador para tener una escala con la cual determinar la polarización del haz incidente a nuestro dispositivo. La manera de graduar nuestro polarizador, fue dividir el perímetro cada 10 grados. El diámetro del polarizador es de 5 cm. Para tener precisión en nuestras divisiones lo que hicimos fue:

- Trazamos una línea a lo largo del diámetro y se divide en la mitad de partes en la que se vaya a dividir la circunferencia. En nuestro caso se divide en 18 partes ya que nosotros queremos dividir la circunferencia en 36 partes iguales.
- Utilizando un compás con un apertura del tamaño del diámetro se trazan dos arcos haciendo centro en A y en B respectivamente y obtendremos una intersección en un punto V, como se ve en la figura 6.19.
- Trazamos una recta del punto V y que pase por la primera línea que se trazó sobre la línea del diámetro AB.
- Por último la longitud de arco AC es $\frac{1}{36}$ de la circunferencia. De esta manera podremos dividir la circunferencia en 36 partes iguales, repitiendo el punto anterior.

Veamos el diagrama de lo que acabamos de mencionar.

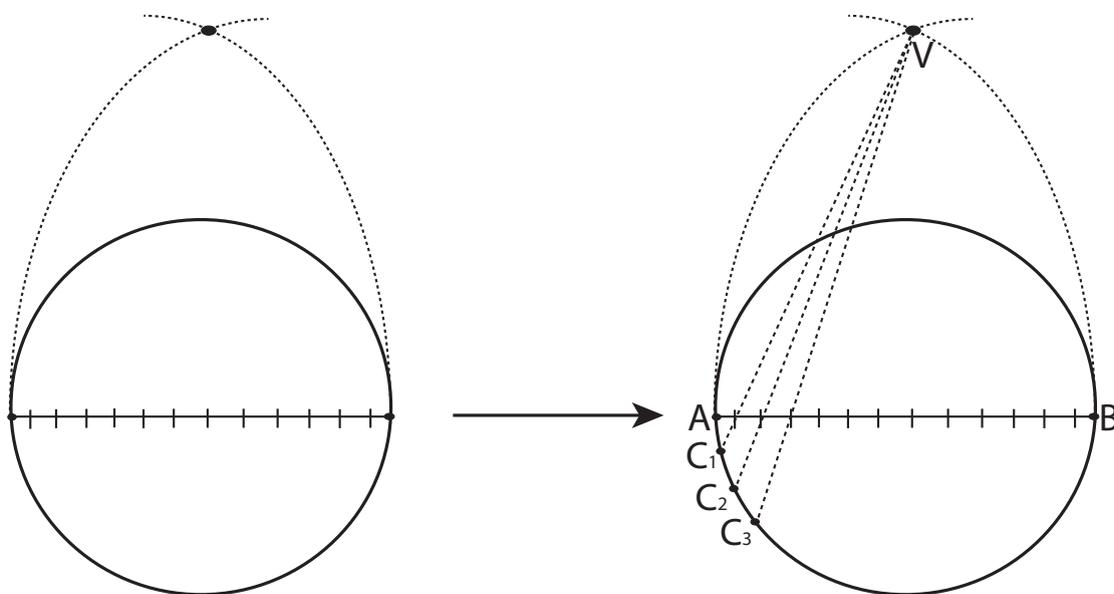


FIGURA 6.17: *Graduación del polarizador.*

Una forma más sencilla para graduar nuestro polarizador, sería calcular el perímetro del polarizador y después dividir este perímetro entre 36 partes iguales. Estas dos formas se utilizaron para comprobar la separación entre las divisiones. Ya que tenemos nuestro polarizador graduado lo que hicimos fue alinearlos como se mencionó en la sección de alineación del sistema. Luego procedimos a realizar las pruebas para ver cual era el eje de polarización. Lo que hicimos fue lo siguiente:

- Sin colocar muestra, registramos la intensidad máxima, que corresponde a la polarización s , de luz reflejada para diferentes ángulos de rotación de nuestro polarizador. La intensidad máxima se observa utilizando el programa de LabView y observando en que punto del polarizador tenemos la intensidad mayor con respecto al ángulo de rotación del polarizador. Este procedimiento se realizó en las 36 divisiones, es decir, fuimos girando el polarizador cada 10 grados. Hay que señalar que nosotros colocamos una escala arbitraria señalando nuestro cero y así sucesivamente hasta llegar a 360 grados. La polarización p estará en el mínimo de intensidad.
- Luego agregamos agua al contenedor y volvemos a realizar las mediciones cada 10 grados. Se repite este procedimiento con el agua, ya que compararemos las curvas de reflectividad experimentales del agua con las curvas teóricas y aseguramos que efectivamente el máximo y mínimo de intensidades corresponden a las polarizaciones p y s respectivamente. Para que se pueda comparar los datos experimentales con las curvas teóricas tenemos que usar la relación (6.18).
- Para las curvas teóricas utilizamos la fórmula de Fresnel 2 medios como se acostumbra usar en los libros de texto[6]. Realizando la comparación entre curva teórica y experimental observamos si existe un ajuste entre ambas curvas, dependiendo de la polarización y así concluimos en qué posición angular del polarizador tenemos polarización s y p .

Veamos un ejemplo de lo que acabamos de mencionar, comparando la curva teórica y el experimento. Solo mostramos la polarización p , pero el comportamiento es el mismo en la polarización s .

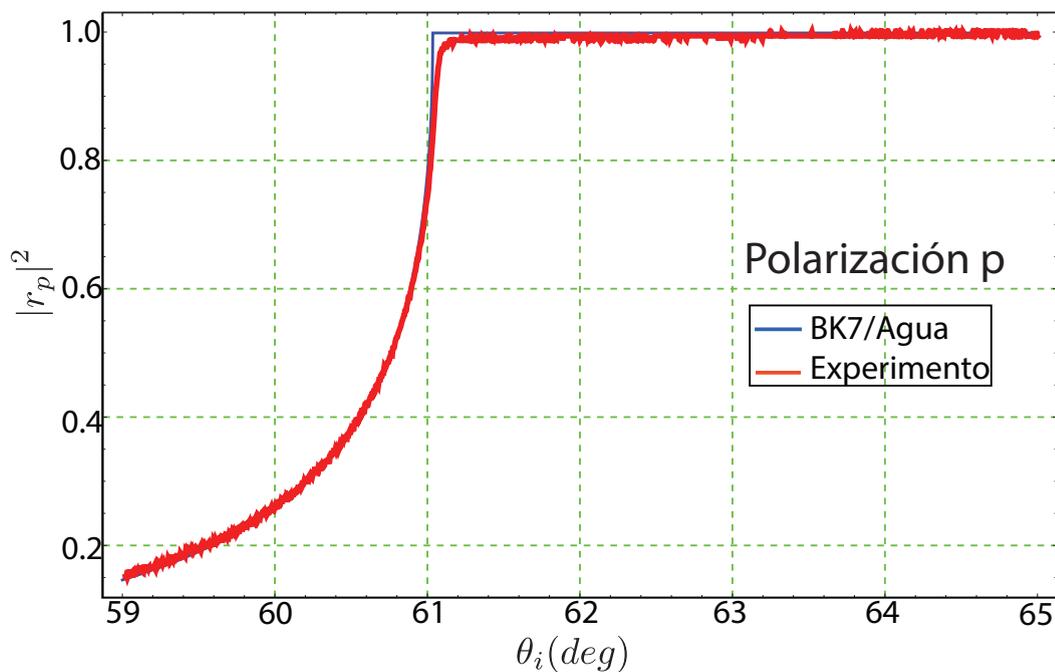


FIGURA 6.18: Curva teórica y experimental, considerando BK7-Agua con polarización p .

Debemos señalar que este mismo procedimiento se realizó en todas las mediciones. La curva de la figura 6.20 es una curva de calibración, y nos proporciona información valiosa sobre nuestro sistema. Por ejemplo, si por alguna razón el sistema ya no está alineado o están sucias algunas de las componentes como el prisma o alguna lente, se percibiría en esta curva y nos indicaría que debemos ajustar el sistema.

La referencia que tenemos para ángulos más bajos (entre 55 y 61 grados), se obtuvo de la misma manera que obtuvimos la calibración en la zona del ángulo crítico.

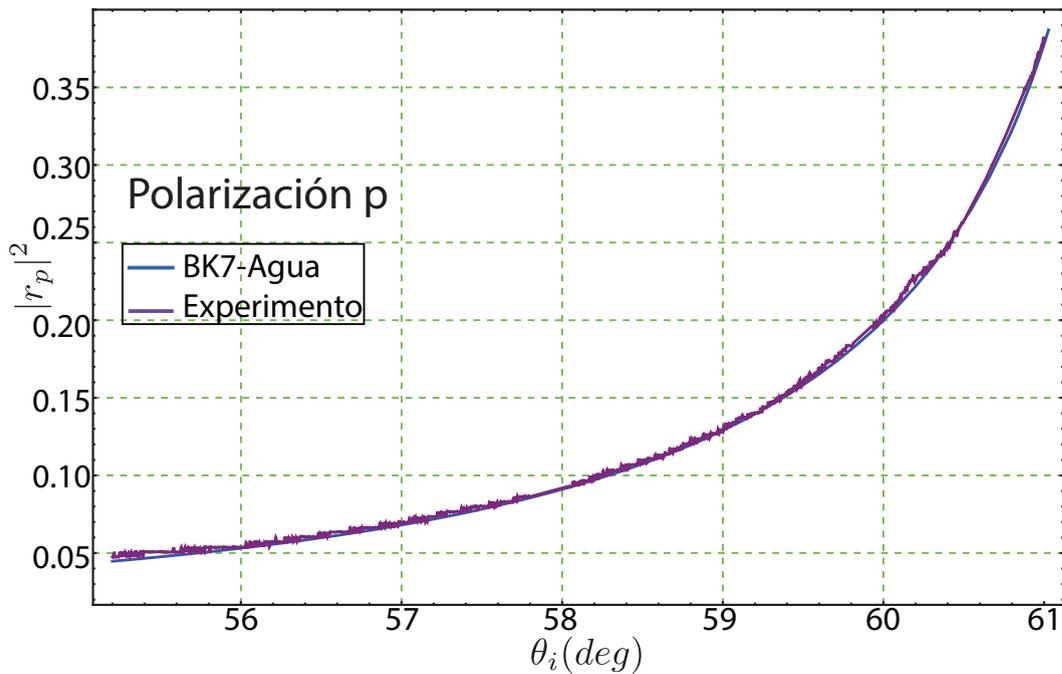


FIGURA 6.19: Curva teórica y experimental, considerando BK7-Agua, en una región angular ligeramente fuera del ángulo crítico con polarización p.

6.7. Mediciones de curvas de reflexión para las diferentes suspensiones coloidales

Lo que vamos a presentar en esta sección serán los resultados experimentales de cada una de las muestras coloidales que se prepararon. Mostrando por separado las muestras para diferentes tamaños en el caso de látex, las muestras de dióxido de titanio y las de cobre. Además vamos a mostrar algunas gráficas experimentales en donde estuvimos registrando cada una de las muestras en el tiempo, con el objetivo de mostrar la estabilidad de las muestras.

6.7.1. Resultados de Látex de 120 nm de diámetro, alrededor del ángulo crítico

Mostraremos las curvas de reflectividad contra ángulo de incidencia para látex de 120 nm de diámetro. Presentaremos solo los resultados que se obtuvieron a una longitud de onda de 405 nm. Ponemos todas las gráficas en una sola figura de tal manera que podemos ver directamente como cambian al aumentar la fracción de llenado volumétrico de partículas.

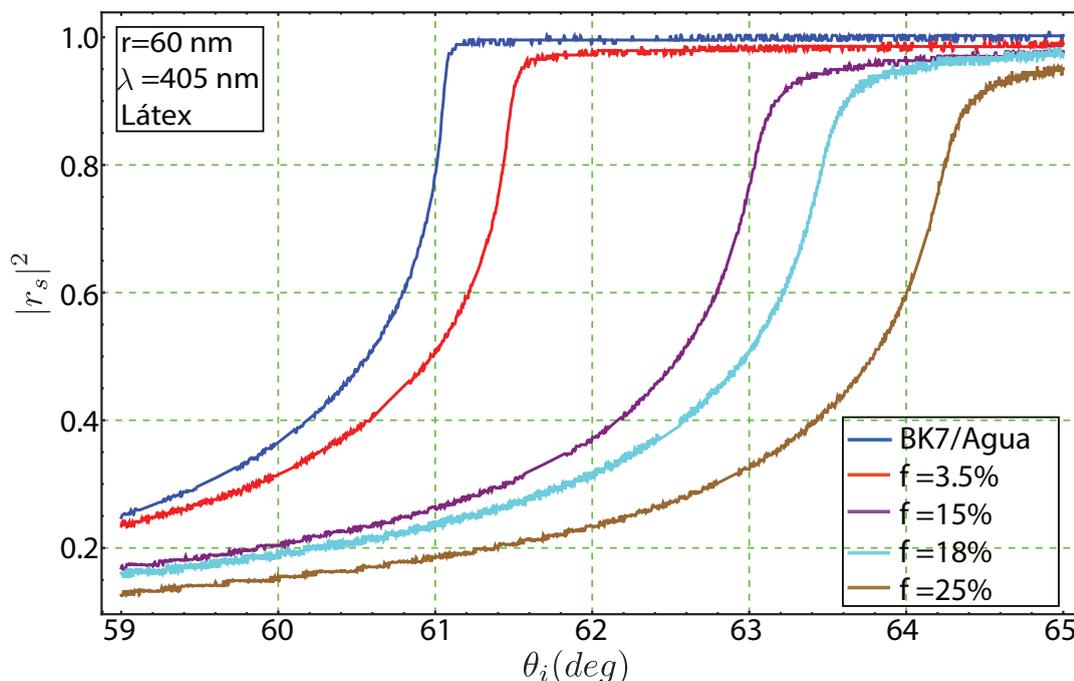


FIGURA 6.20: Curvas experimentales a diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño de partícula, con polarización p .

También incluimos en la figura, la curva de referencia con agua tridestilada. Vemos que al aumentar la concentración de partículas, tenemos un corrimiento y lo podemos interpretar como un ángulo crítico. Tenemos que mencionar que en este trabajo nosotros haremos una extensión de la definición de ángulo crítico y definiremos el ángulo crítico como el punto de inflexión de la curva. El ángulo crítico que tenemos para las interfaces BK7-Agua, es de 61.035, utilizando como índice de refracción para el BK7 de 1.5302 y para el agua de 1.3388, el valor que nos arroja el experimento es exactamente el que estamos mencionando, claramente el corrimiento en este ángulo es notable al aumentar la fracción de volumen hasta 25 %.

Monitoreamos por 30 minutos la curva de reflectancia para una muestra al 15 % en fracción de volumen. Solo mostraremos hasta 20 minutos debido a que no hubo diferencia en 30 minutos.

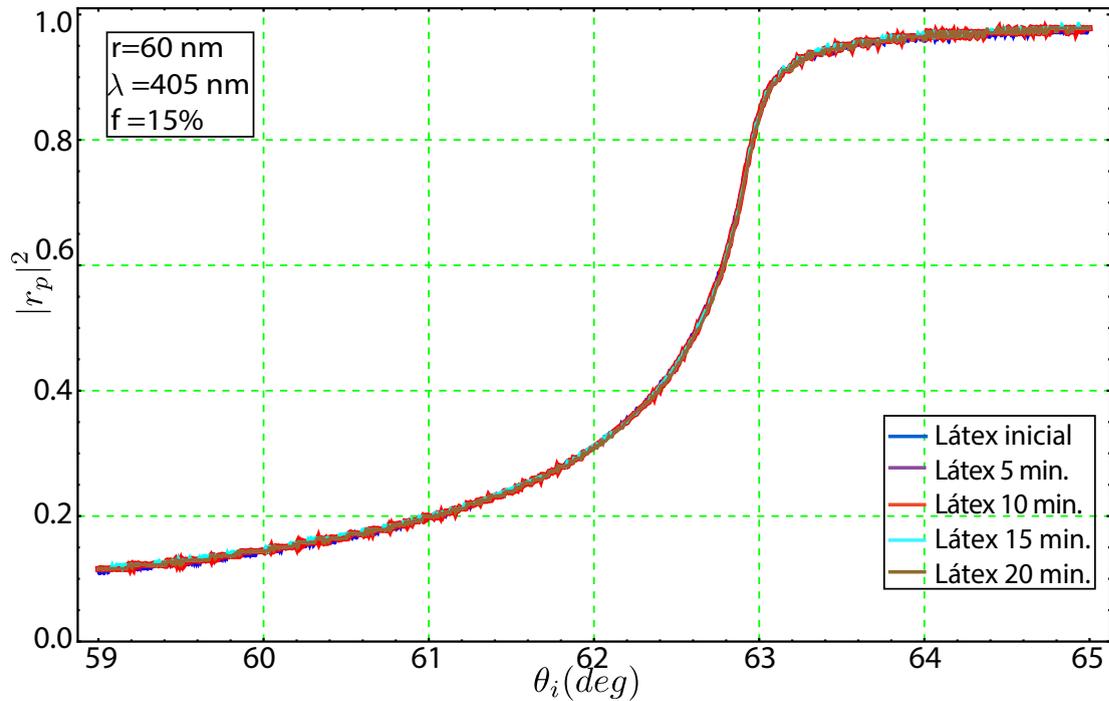


FIGURA 6.21: Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos.

En base a la figura 6.23 se observa que la estabilidad de la muestra es muy alta, es decir, no hay cambios significativos a lo largo de 20 minutos. Como ya se dijo se observó la muestra durante 30 minutos y no se observó diferencia alguna. Señalemos que la obtención de datos no nos toma arriba de 2 minutos. Este tiempo de 2 minutos es considerando desde que se toma la referencia del aire, después al agregar el agua al contenedor y por último la del coloide, midiendo las intensidades reflejadas para cada una de las suspensiones agregadas al contenedor (para agregar el coloide se extrajo el agua del contenedor y después se agregó el coloide). Veamos que sucede con una fracción de volumen ligeramente mayor.

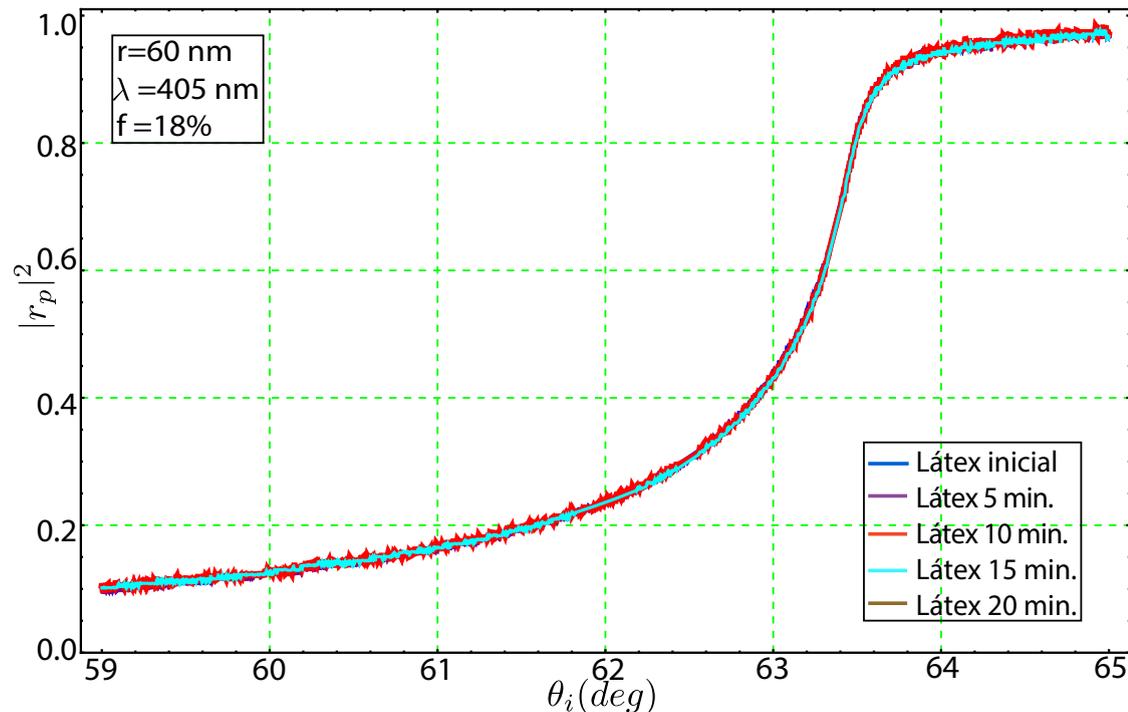


FIGURA 6.22: Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos.

Volvemos a tener el mismo resultado que en el anterior, es decir, no tendremos modificación de la muestra a lo largo de 20 minutos, a pesar de que se consideró una fracción de volumen mayor. Estos resultados nos dan confianza en las siguientes mediciones. Veamos ahora que sucede con las partículas de látex más grandes que son de 513 nm.

6.7.2. Resultados de Látex de 513 nm de diámetro, alrededor del ángulo crítico

Al igual que en la subsección anterior, vamos a mostrar los resultados de algunas de las fracciones de llenado volumétrico para este tipo de partículas, y de igual forma vamos a tener nuestra referencia o curva de calibración para ver el comportamiento que está ocurriendo respecto a la reflexión del Vidrio-Agua.

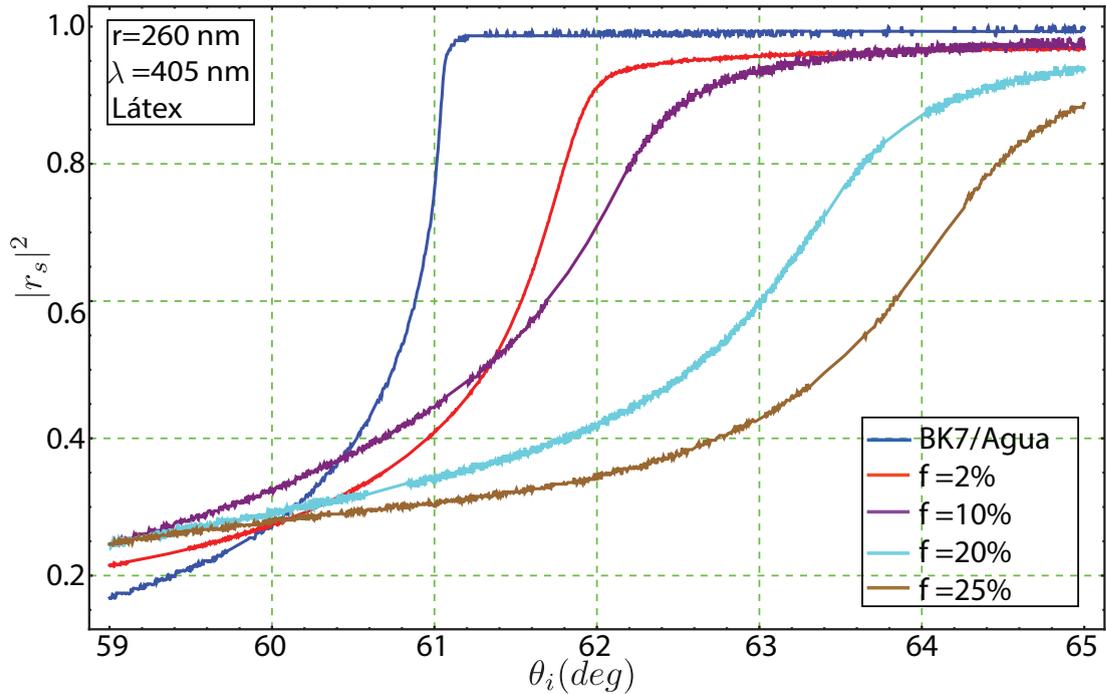


FIGURA 6.23: *Curvas experimentales a diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño de partícula con polarización s.*

Si comparamos la figura 6.22 con la figura 6.25, lo que podemos observar es que el tamaño de partícula influye notoriamente en el comportamiento cualitativo de las curvas. En la figura 6.25 para una fracción de llenado del 2% vemos que el ángulo crítico está muy alejado del de la curva para el agua (de referencia), mientras que en la figura 6.22 la fracción de llenado de 3.5% está más cerca del de la curva de referencia.

Ahora mostraremos la estabilidad de estas suspensiones coloidales. Comenzaremos mostrando curvas para la fracción de llenado del 9.11%

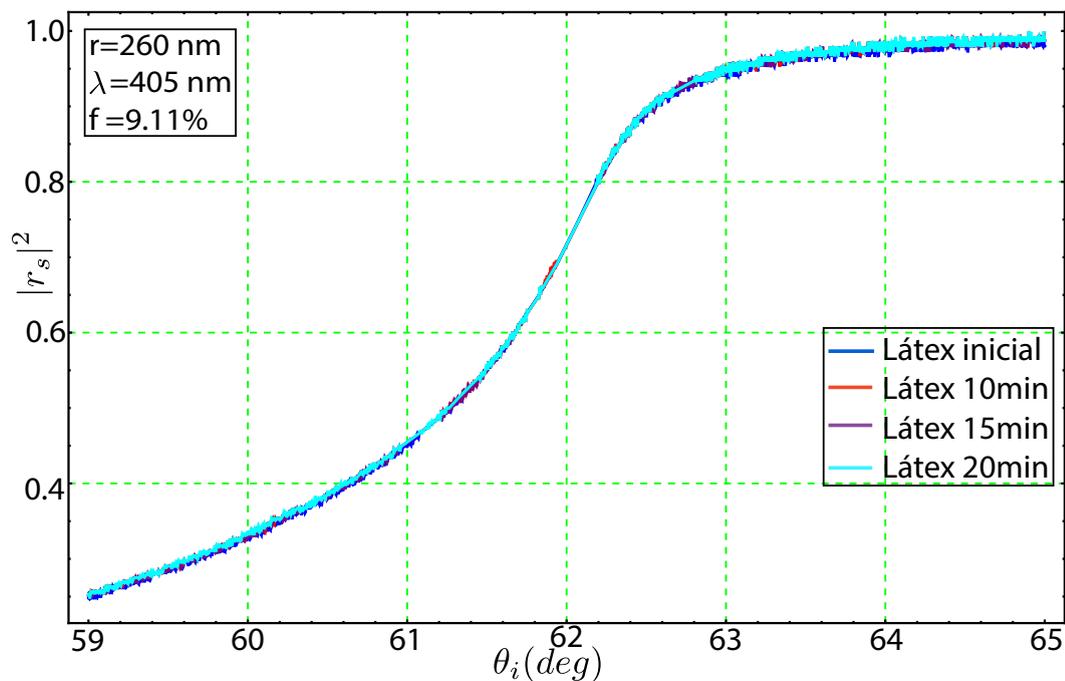


FIGURA 6.24: Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos, con polarización s.

Como podemos observar en la figura 6.26 la curva permanece prácticamente igual durante 20 minutos. Por lo que la estabilidad es suficientemente buena para los experimentos realizados. Ahora para una fracción de llenado mayor se muestra en la siguiente figura.

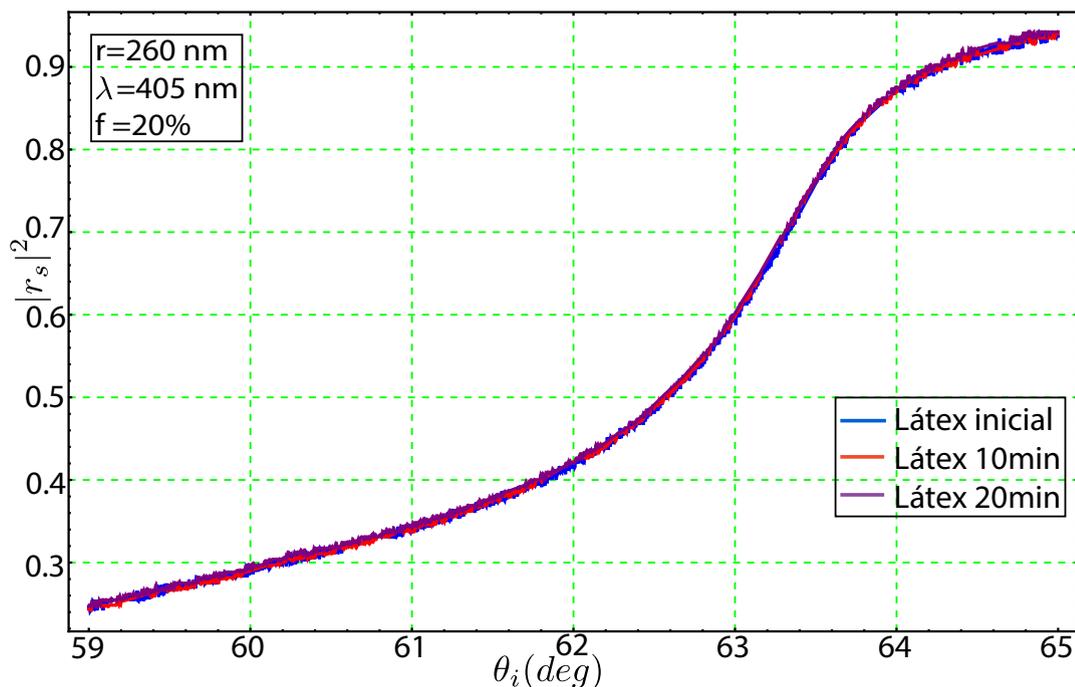


FIGURA 6.25: Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos, con polarización s.

Los resultados sobre la estabilidad de las muestras de látex, no dejan lugar a duda respecto si las partículas se están asentando.

6.7.3. Resultados de Dióxido de Titanio de 405 nm de diámetro, alrededor del ángulo crítico

Ahora presentaremos los resultados obtenidos para el dióxido de titanio

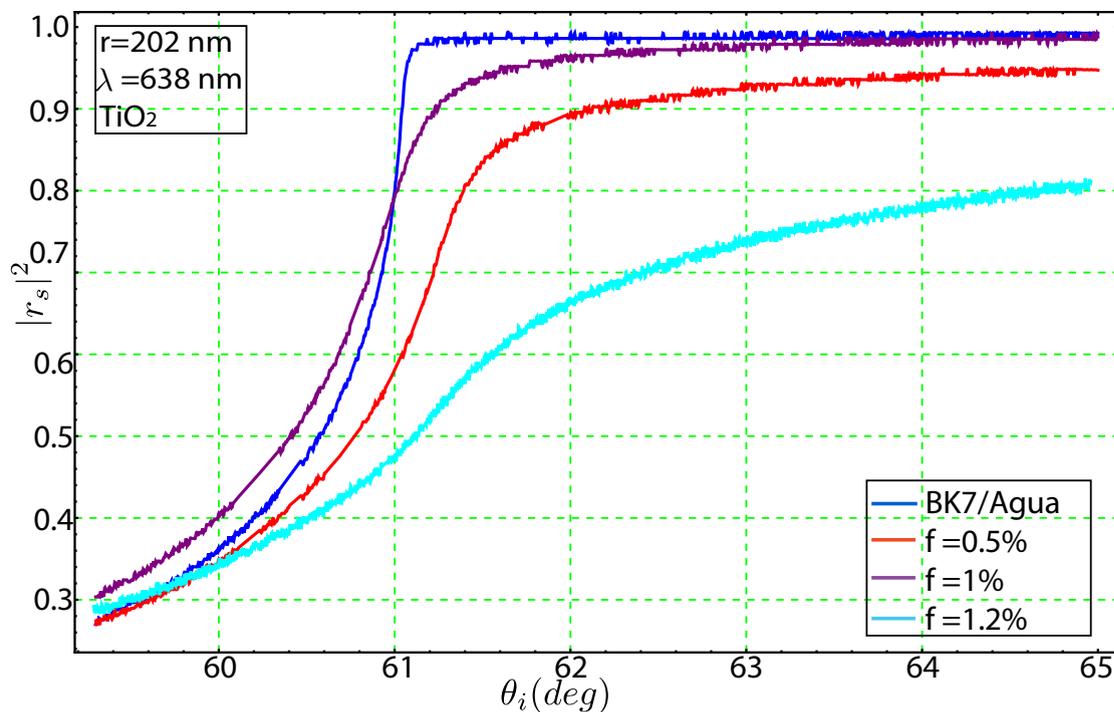


FIGURA 6.26: Curvas experimentales a dos diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño, con polarización s .

Debemos señalar que solo presentamos tres fracciones de llenado distintas debido a que la turbidez de estas suspensiones es muy grande. Se intentaron realizar mediciones a concentraciones más altas pero el corrimiento en el ángulo crítico está fuera de la escala angular con la cual estábamos midiendo.

Ahora el monitoreo de una de las fracciones de llenado, de nuevo monitoreada 20 minutos,

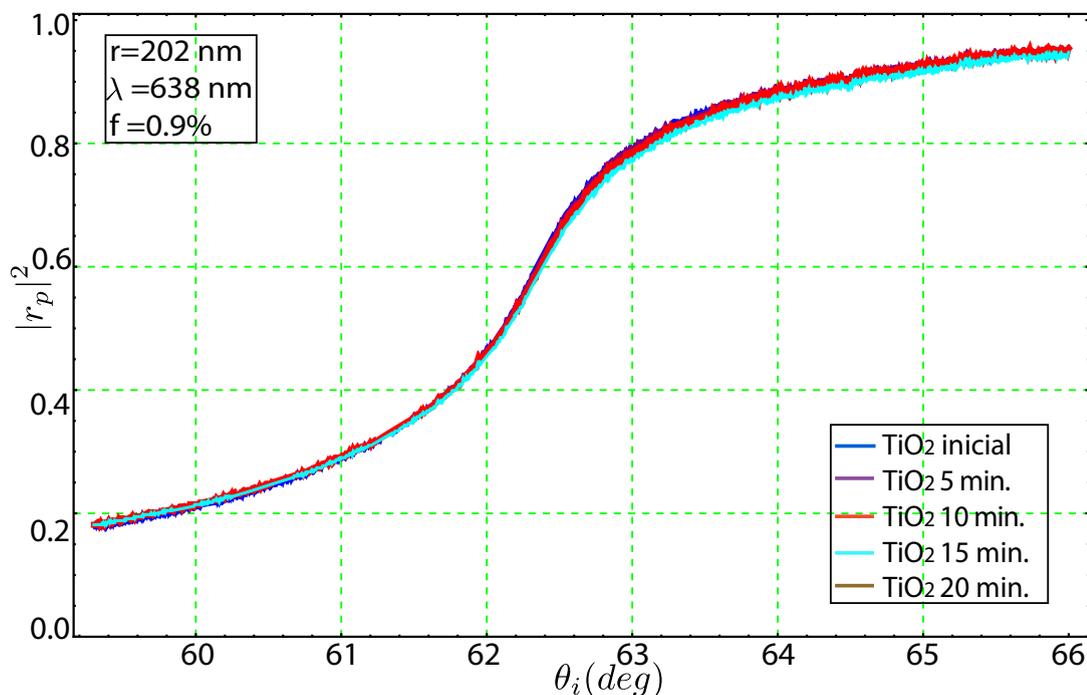


FIGURA 6.27: Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 20 minutos, con polarización p .

Como se puede apreciar, la curva varía muy ligeramente entre 15 y 20 minutos después de iniciada la medición. Las variaciones no son considerables y dado que las mediciones no tardan más de 2 minutos, podemos decir de igual forma que las suspensiones de dióxido de titanio son estables para los propósitos de nuestras mediciones.

6.7.4. Resultados de Cobre de 500 nm de diámetro, cerca del ángulo crítico

Por último mostraremos las mediciones que se hicieron utilizando partículas de cobre de 500 nm de diámetro, utilizando agua como matriz o medio homogéneo. Veamos los primeros resultados que obtuvimos,

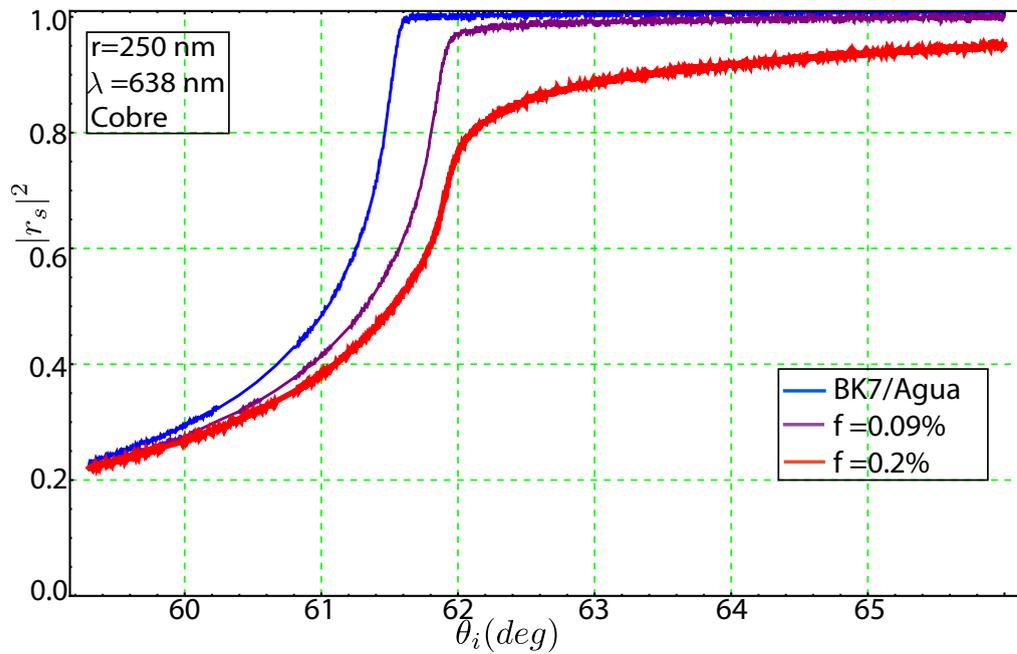


FIGURA 6.28: Curvas experimentales a dos diferentes fracciones de llenado, para un mismo tamaño y polarización s.

De nuevo nos volvemos a limitar a bajas concentraciones como con el dióxido de titanio, ya que la turbidez crece rápidamente con la cantidad de partículas y además hay absorción por la parte imaginaria del índice de refracción de las partículas de cobre. Pero podremos observar la separación que hay entre los modelos. Por último mostraremos la estabilidad de una de las muestras, como se muestra en la siguiente figura.

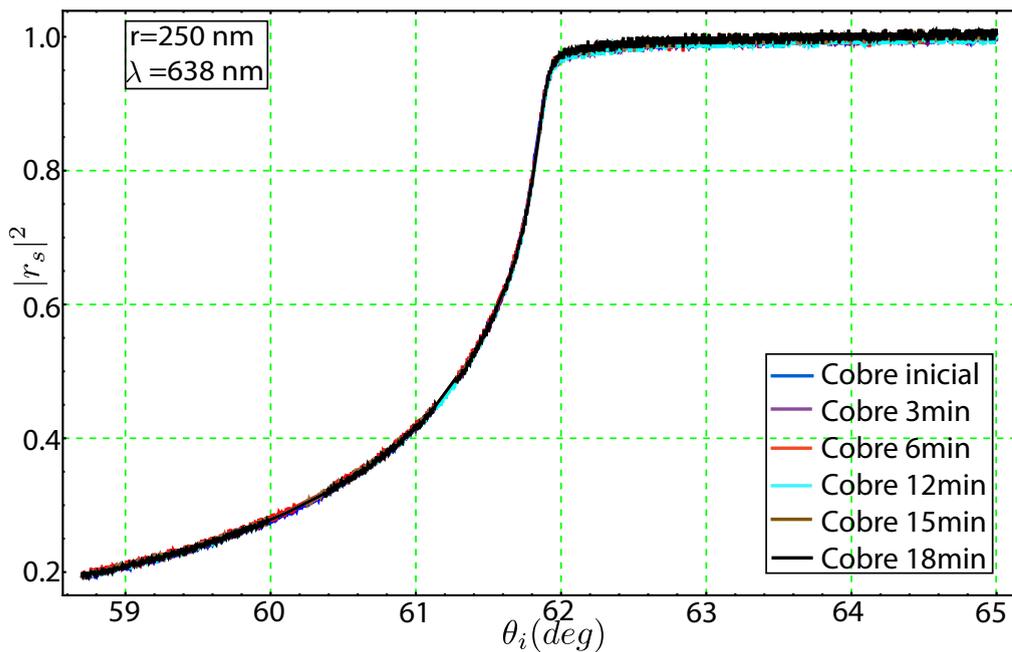


FIGURA 6.29: Curvas experimentales midiendo la muestra a lo largo de 18 minutos.

En este caso el monitoreo fue más continuo, es decir, los intervalos de tiempos fueron menores, debido a que nosotros suponíamos que los cambios iban a notarse en poco tiempo, la sorpresa que tuvimos en esta muestra es que se mantuvo estable alrededor de 18 minutos, después de este tiempo se pierde la estabilidad, pero para nuestros propósitos podemos decir que las muestras fabricadas son bastante confiables.

6.7.5. Mediciones fuera del ángulo crítico

Ahora vamos a presentar los resultados que se obtuvieron en el intervalo de ángulos de incidencia entre 55 y 61 grados. Se escogió este intervalo angular debido que las curvas teóricas muestran cambios significativos y a la vez todavía es posible medir con nuestro dispositivo sin mucha dificultad. Vamos a presentar una serie de resultados que se obtuvieron con cada una de las muestras de látex y dióxido de titanio.

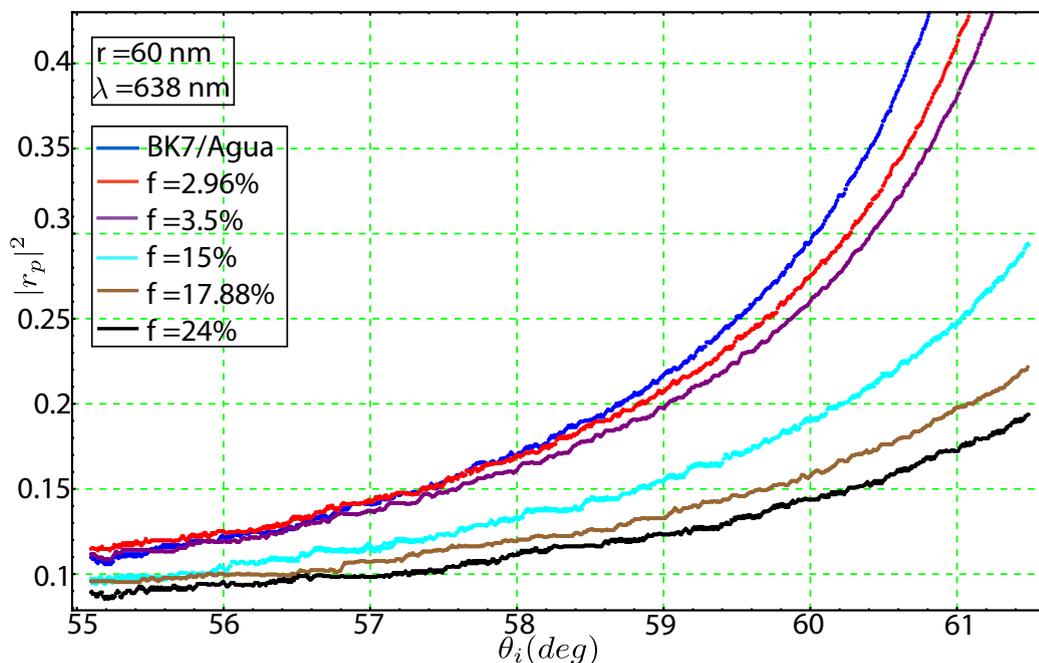


FIGURA 6.30: Curvas experimentales fuera del ángulo crítico.

Como podemos ver en la figura 6.32 para látex de 120 nm, las curvas están por debajo de la curva de referencia. En la figura mostramos solo algunas de las fracciones de llenado con las que trabajamos.

Veamos en la siguiente figura que sucede con las partículas de látex más grandes a diferentes fracciones de volumen.

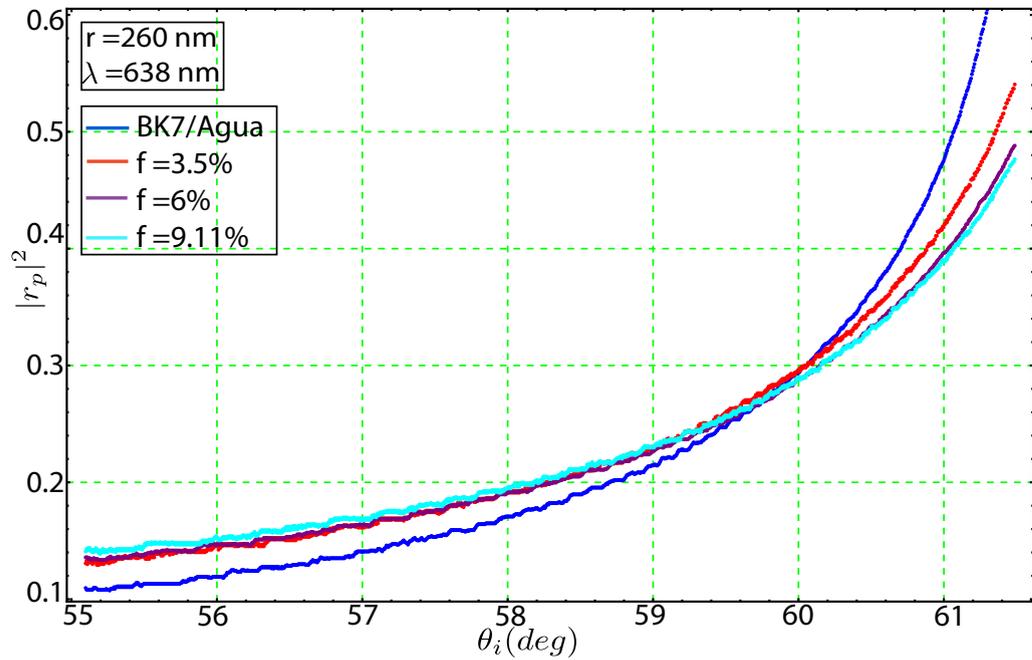


FIGURA 6.31: Curvas experimentales fuera del ángulo crítico.

En este caso las curvas van por encima de la curva de referencia para ángulos menores a 60 grados. Por último los resultados con dióxido de titanio se muestran en la figura 6.34.

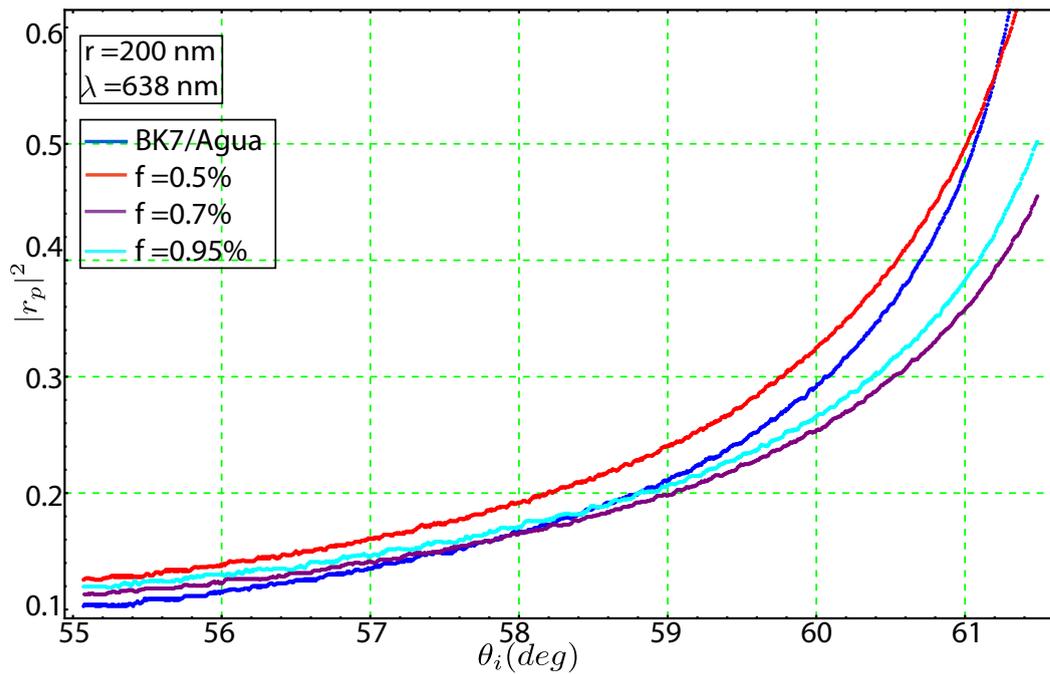


FIGURA 6.32: Curvas experimentales fuera del ángulo crítico.

Los resultados presentados en este capítulo muestran claramente que las curvas de reflectividad se ven afectadas notoriamente por la presencia de las partículas en suspensión. Observamos corrimientos del ángulo crítico respecto a nuestra curva de referencia. Falta comparar las curvas experimentales con las predichas por los modelos teóricos y así discernir que teoría es más adecuada en cada caso.

Capítulo 7

Comparación Teoría-Experimento

En este capítulo mostraremos las predicciones de los modelos teóricos (Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM), y los compararemos con los resultados experimentales que se mostraron en el capítulo anterior. A partir de este comparativo concluiremos que modelo describe mejor al experimento. El primer comparativo es con respecto a las muestras de látex de 120 nm de diámetro.

7.1. Látex (PMMA), de 120 nm de diámetro

Las gráficas que a continuación presentamos son a una longitud de onda de 405 nm. En base a la figura 7.1 es claro que las curvas de reflectividad evidencia la presencia de partículas. Las curvas experimentales se recorren a la derecha respecto a la curva de referencia que es la línea naranja punteada y al aumentar la fracción de volumen el corrimiento es mayor. En base a las gráficas 7.1a y 7.1b, que son fracciones de volumen pequeñas tenemos un comportamiento similar entre los modelos, todos describen al experimento de manera adecuada y no hay diferencia si usamos Fresnel 2 medios o alguno de los otros modelos. Al aumentar la fracción de volumen (gráficas 7.1c-7.1e) el comportamiento de la fórmula de Fresnel 2 medios empieza a despegarse de la curva experimental. En la figura 7.1c se observa que el modelo Heurístico describe de la mejor manera al experimentos, el modelo CSM se separa ligeramente del experimento. En las gráficas restantes los modelos Heurístico, CSM y Fresnel 3 medios, se separan muy poco y son los que mejor se ajustan a la curva experimental. Podemos considerar que Fresnel 2 medios es una buena aproximación para partículas pequeñas, pero debemos tener en cuenta que existen estos nuevos modelos que nos darán una mejor descripción del experimento inclusive para fracciones de volumen muy grandes, que es el caso de la

gráfica 7.1e. La fracción de volumen es muy grande pero los modelos aún la describen adecuadamente.

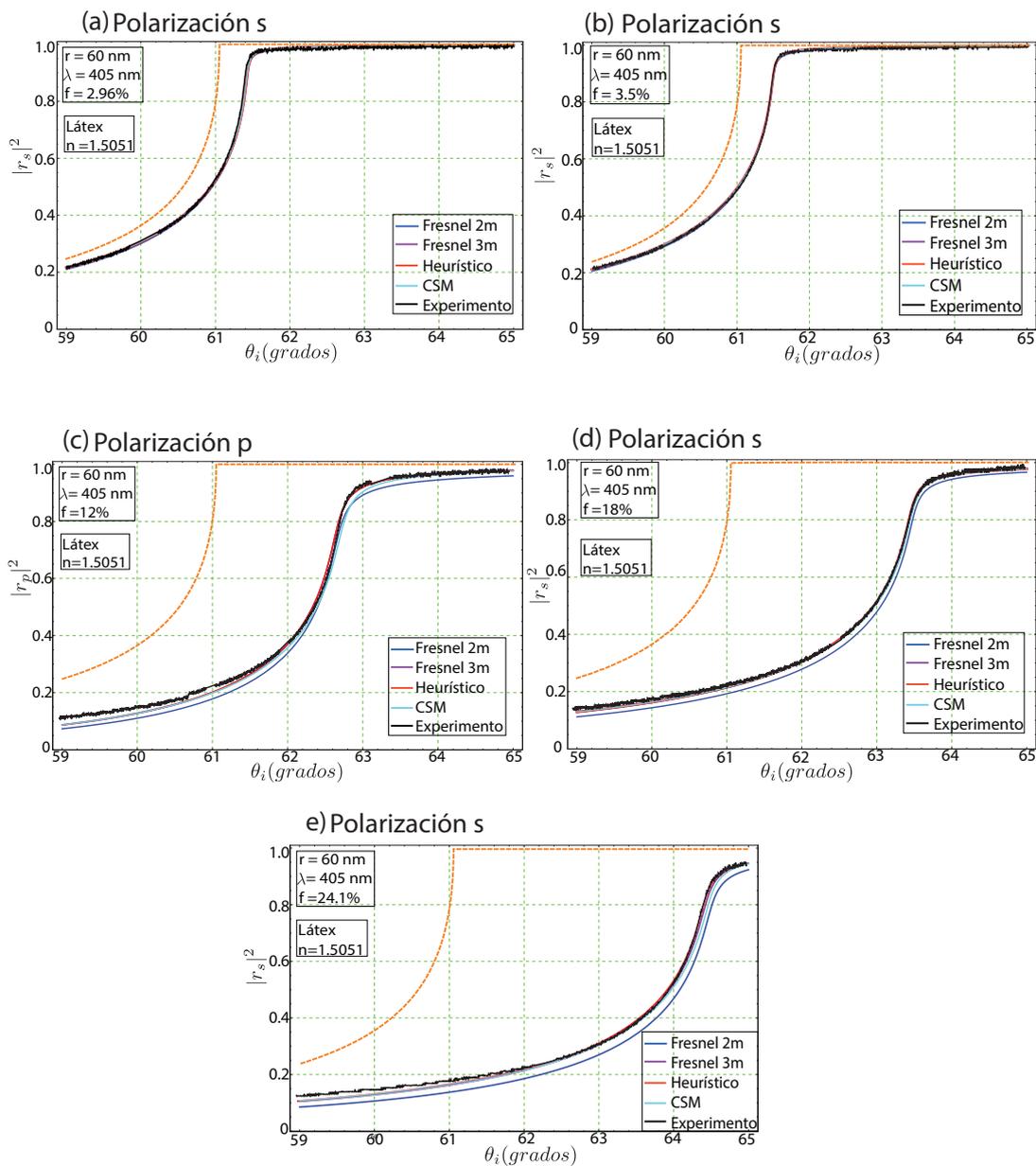


FIGURA 7.1: Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado. La curva naranja punteada en cada una de las gráficas corresponde a la referencia del agua.

Ahora mostraremos en la siguiente figura la región angular fuera del ángulo crítico, para la misma suspensión coloidal de látex de 120 nm. En base a la figura 7.2 podemos observar que para esta suspensión coloidal el modelo Heurístico es el que describe mejor

al experimento. Estas diferencias se observan muy claro en 7.2c, 7.2d y 7.2e. Para bajas concentraciones (7.2a y 7.2b) no se distinguen las diferencias entre modelos.

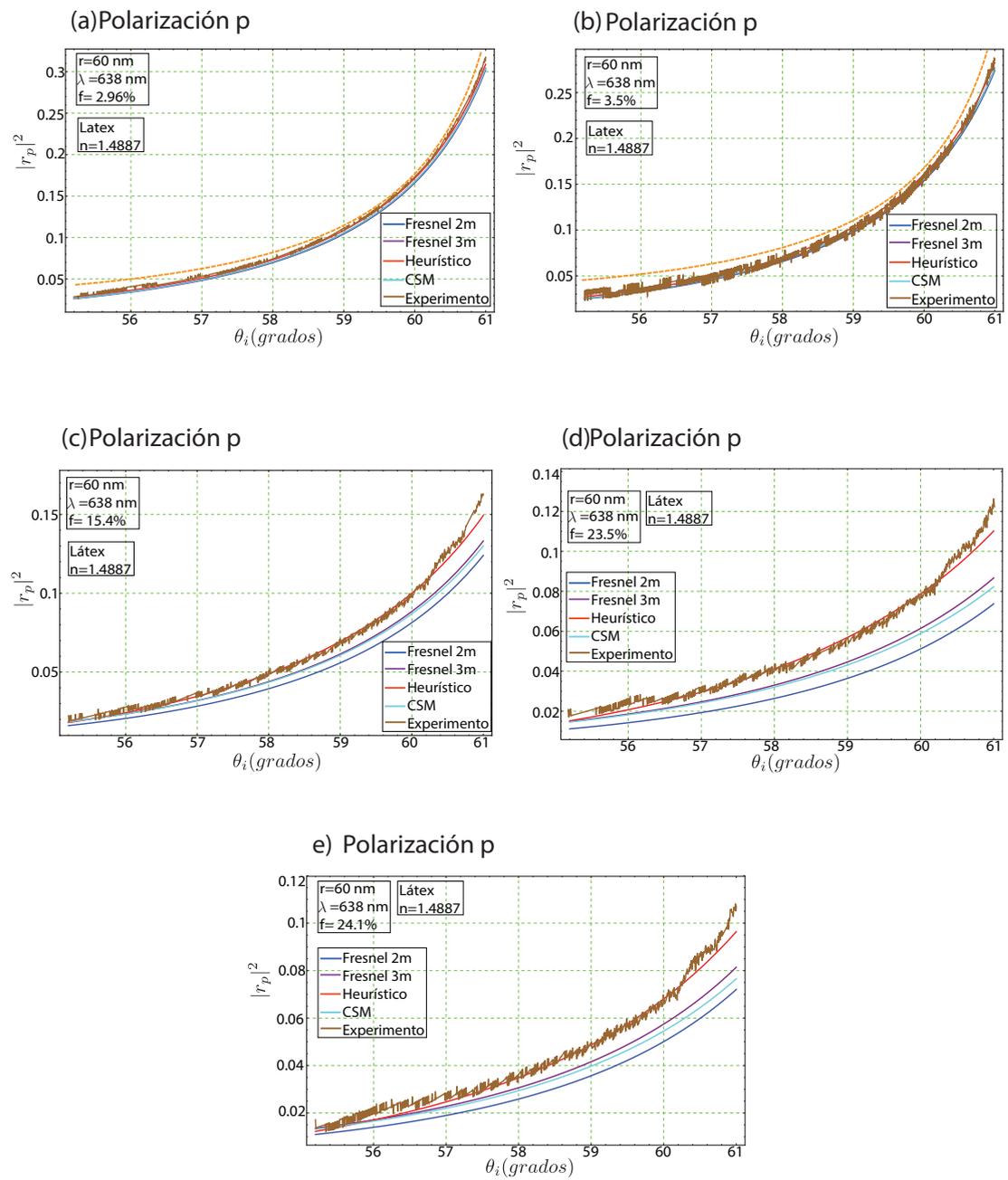


FIGURA 7.2: Comparativo entre teoría y experimento para diferentes fracciones de llenado en la región angular fuera del ángulo crítico. La línea punteada naranja en 7.2a y 7.2b son la referencia del agua.

7.2. Látex (PMMA), de 513 nm de diámetro

Las curvas que a continuación presentaremos son para partículas con un radio de 260 nm. El fabricante nos indicó el tamaño de las partículas. Por lo general la incertidumbre que se tiene en estos casos es del orden de 5% respecto al tamaño de la partícula. Las curvas teóricas que se realizaron fueron con un tamaño un poco mayor. Como ya se mencionó los resultados numéricos se realizaron con un radio de 260 nm, que es ligeramente mayor que el radio que corresponde al tamaño que el fabricante nos proporcionó (de 513 nm de diámetro). El radio de la partícula está dentro de la incertidumbre esperada y resulta un mejor ajuste de la teoría con el experimento. Como se observa en la figura 7.3. Si ocupamos el radio de 256.5 nm que corresponde al tamaño que nos indicó el fabricante tendríamos mayores diferencias entre experimento y teoría.

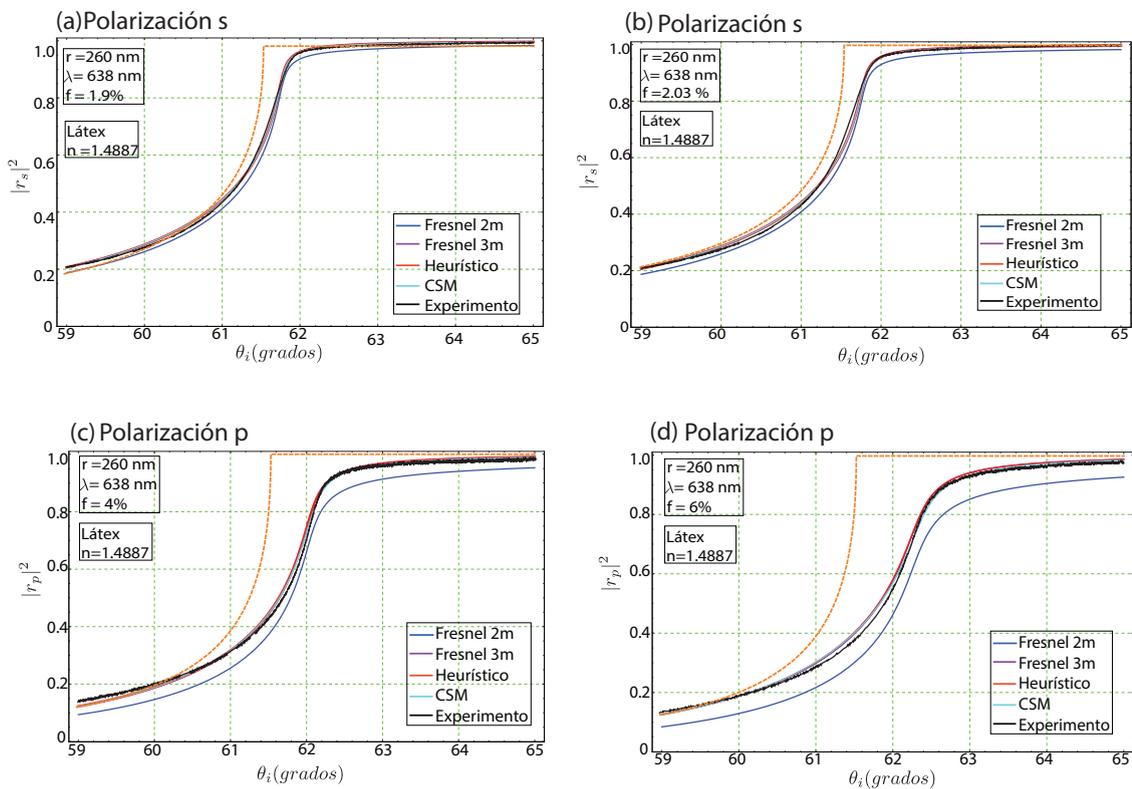


FIGURA 7.3: Comparativo entre teoría y experimento para diferentes fracciones de llenado. La curva naranja punteada en cada una de las gráficas corresponde a la referencia del agua.

De acuerdo a las figuras 7.3a y 7.3b, que corresponden a bajas concentraciones, observamos que la diferencia de los modelos de Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM se diferencian ligeramente de la curva de Fresnel 2 medios. En las figuras 7.3c y 7.3d se observan cambios considerables respecto a Fresnel 2 medios, Fresnel 3 medios, Heurístico

y CSM describen adecuadamente al experimento. En las siguientes gráficas mostraremos los resultados fuera del ángulo crítico.

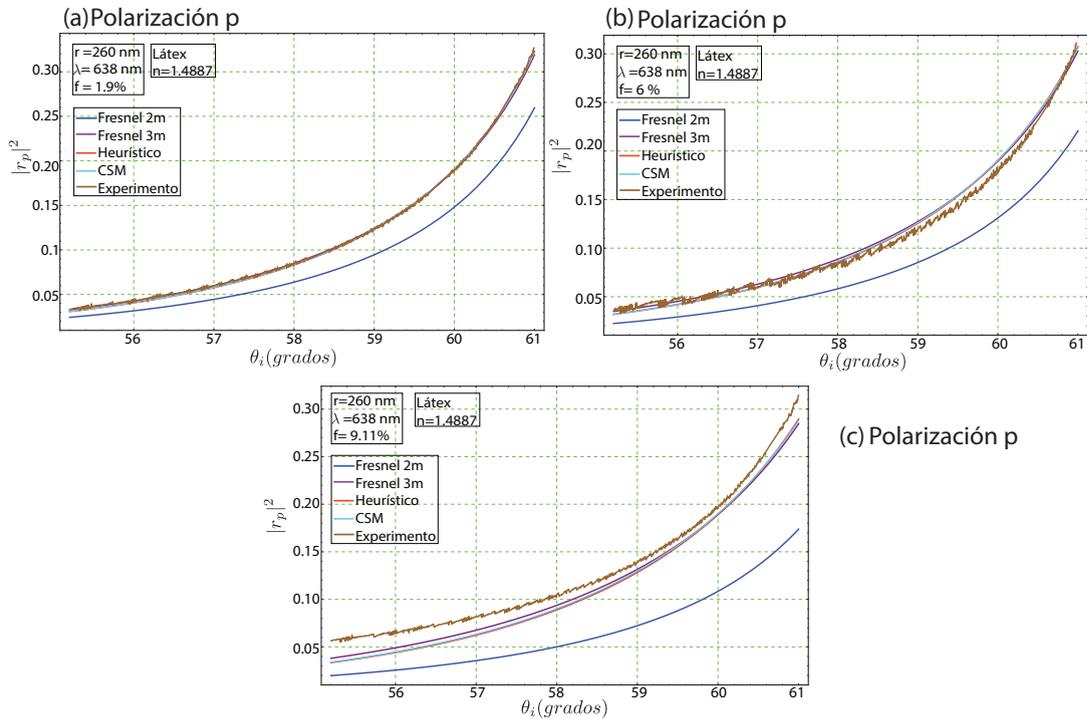


FIGURA 7.4: Comparativo entre teoría y experimento para diferentes fracciones de llenado en la región angular fuera del ángulo crítico, con polarización p .

En base a la figura 7.4 se observa que los modelos Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM se comportan de igual forma que el experimento. Esto es únicamente a fracciones de volumen bajas (menores al 6%) como lo muestra la figura 7.4a. Lo importante es que Fresnel 2 medios se separa considerablemente de la curva experimental y los modelos Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM se comportan en este caso como la curva experimental. En la figura 7.4b sucede el mismo comportamiento pero no podemos tener alguna diferencia entre los modelos que se están proponiendo. Mientras que en la figura 7.4c el experimento se diferencia de los modelos teóricos. Podríamos decir que para este tamaño de partículas y fracciones de volumen mayores al 6% y en esta zona angular, no es adecuado medir curvas de reflectancia.

7.3. Dióxido de Titanio, de 405 nm. de diámetro

En esta sección vamos a mostrar los resultados para el Dióxido de Titanio, pero en este caso vamos a considerar dos casos para los modelos Fresnel 3 medios, Heurísticos y CSM, el caso monodisperso y polidisperso. Aquí se tienen muy pocos resultados debido a la alta turbidez de las muestra. No pudimos realizar mediciones para fracciones de volumen altas, como se mencionó anteriormente. El radio que ocupamos para el comparativo fue de 202 nm. La diferencia era nula si ocupábamos 202.5 nm. o 202 nm. Para el caso monodisperso se muestra a continuación.

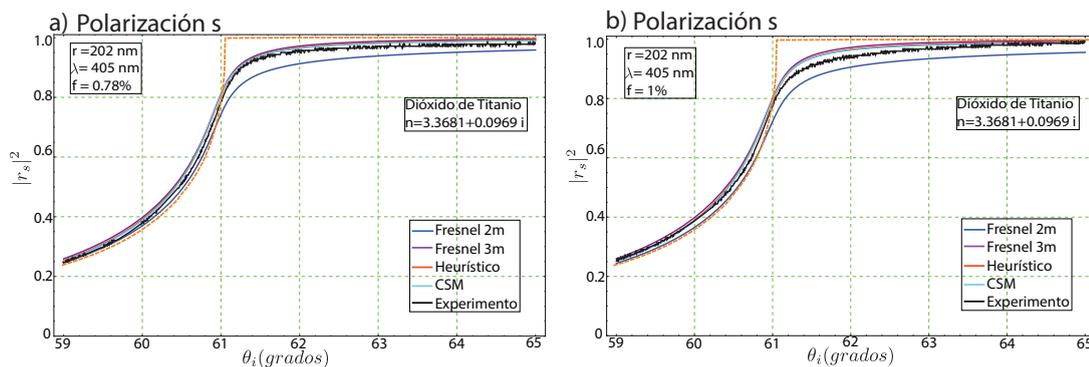


FIGURA 7.5: Comparativo entre teoría y experimento. La curva naranja punteada es la referencia del agua, para polarización s.

En base a la figura 7.5 los modelos teóricos se comportan de igual manera y no se diferencia entre el Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM, excepto Fresnel 2 medios que muestra diferencias con el experimento, es importante que ninguno de los modelos teóricos describe adecuadamente al experimento. Necesitamos analizar que sucede en el caso polidisperso. En el capítulo se mostraron diferencias entre los modelos teóricos cuando realizamos el caso monodisperso y polidisperso (figura 5.20). Para el caso polidisperso lo que se obtuvo se muestra en la figura 7.6.

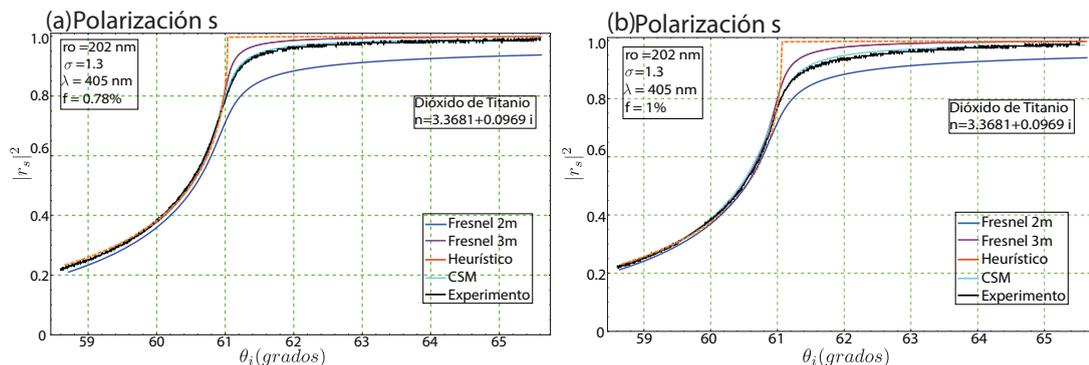


FIGURA 7.6: Comparativo entre modelos polidispersos y experimento. La curva naranja punteada es la referencia del agua, para polarización s. Donde σ es el ancho de la distribución log-normal y r_0 es el radio más probable proporcionado por el fabricante.

En base a la figura 7.6 se tiene una descripción del experimento utilizando el CSM, es un comportamiento idéntico, entre experimento y modelo teórico. Por lo tanto para este tipo de partículas y estas fracciones de volumen podemos decir que el CSM nos describirá al experimento de la mejor manera. Recordemos al lector que los cálculos con modelos polidispersos fueron hechos con una distribución *log-normal* y asumiendo un ancho de la distribución, σ , de 1.3.

Ahora veamos que es lo que sucede para el Dióxido de Titanio en la zona angular fuera del ángulo crítico. En base a la figura 7.7a se observa que el modelo teórico que mejor se ajusta al experimento es el CSM. Pero con las limitaciones de que no es ajuste perfecto. Solo podemos decir que es una buena aproximación al comportamiento de la reflectividad en el intervalo de ángulos de incidencia considerados y para esta fracción de volumen del 0.5 %. Ahora si aumentamos la fracción de volumen casi al doble obtenemos las gráficas que se muestran en la figura 7.7b. Los comportamientos son muy diferentes y no se puede concluir respecto a estas gráficas.

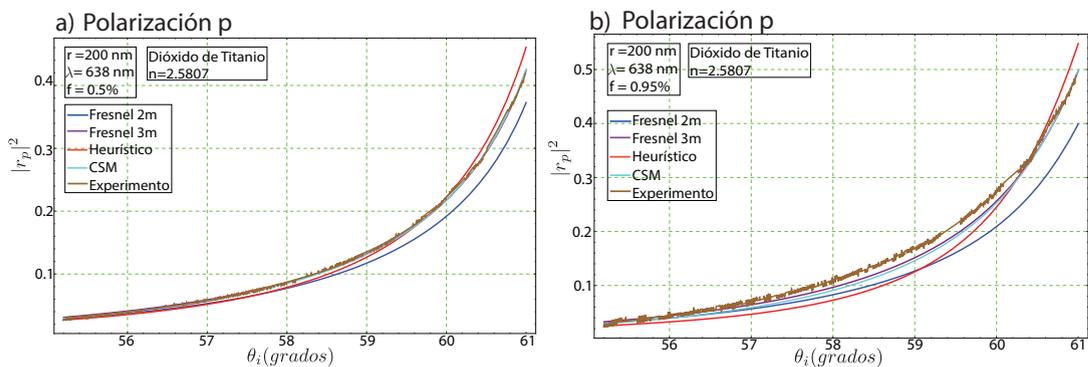


FIGURA 7.7: Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado en la región angular fuera del ángulo crítico, con polarización p.

7.4. Cobre, de 500 nm. de diámetro

Veamos que sucede con las partículas de cobre, de nuevo aquí solo se obtuvimos pocos resultados, por la misma razón que con el Dióxido de Titanio, pero adicionalmente las suspensiones no son estables por mucho tiempo. La siguiente figura muestra las curvas para suspensiones de partículas de cobre con un diámetro de 500 nm y una fracción de volumen del 0.9 %.

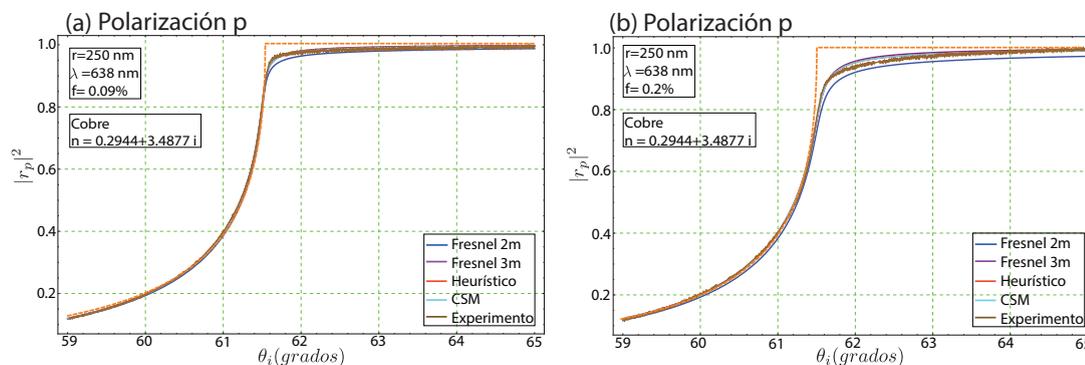


FIGURA 7.8: Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado. La curva naranja punteada es la referencia del agua, para polarización p.

De acuerdo a la figura 7.8a tenemos que a la fracción de llenado de 0.09 % la curva de Fresnel 2 medios se separa ligeramente de la curva experimental y de los modelos Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM. Las teorías se pegan a la curva experimental bastante bien. Es necesario señalar que la parte compleja del índice de refracción es muy alta, el cual se obtuvo de tablas[14] y el tamaño de las partículas de cobre es grande. La figura 7.8b se presenta un ligera diferencia con Fresnel 2 medios. Pero en ambas figuras se tiene una descripción adecuada de la curva de reflectancia experimental por los modelos Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM. Los resultados que se acaban de presentar se calcularon con el modelo monodisperso suponiendo el radio promedio proporcionado por el fabricante. Se exploró usar el caso polidisperso, es decir, con una distribución de tamaños *log-normal* utilizando un ancho $\sigma \leq 1.3$ pero a las concentraciones que se utilizaron en este caso, las diferencias con el caso monodisperso no eran apreciables.

Ahora presentamos la zona angular fuera del ángulo crítico para suspensiones coloidales de cobre. Las fracciones de volumen no coinciden con las fracciones que se tenían con anterioridad. El motivo del porque no se tiene la misma fracción de volumen es la inestabilidad de estas suspensiones en el tiempo. Estas mediciones se realizaron tres meses después de las que se presentaron en la figura 7.8. Cuando se realizó este experimento se volvió a sonicar la muestra como se presentó en el capítulo 6 y se volvió a medir la fracción de volumen. Obteniendo los siguientes resultados.

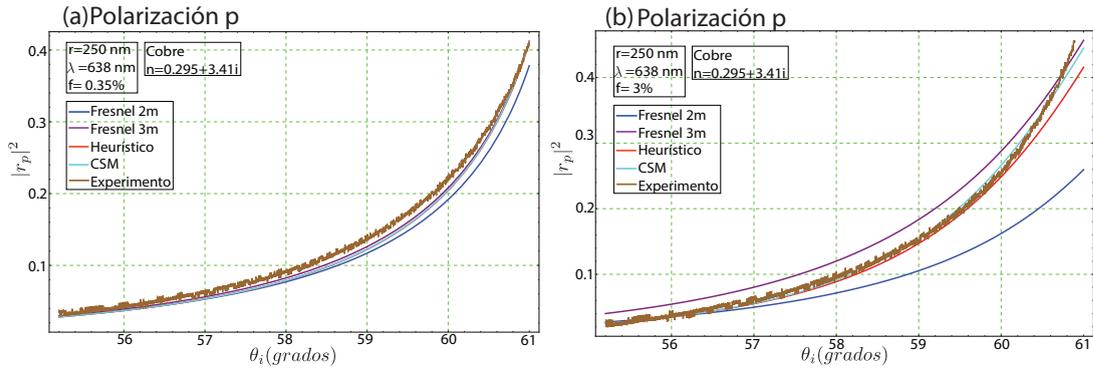


FIGURA 7.9: Comparativo entre teoría y experimento, para diferentes fracciones de llenado fuera del ángulo crítico, con polarización p .

El modelo teórico de las curvas teóricas en las figuras 7.9a y 7.9b que se ajusta de la mejor forma es el CSM. La diferencia entre los modelos es más evidente a la fracción de volumen del 3%. En estas muestras no se realizaron las pruebas de estabilidad.

Todos los experimentos que se han mostrado de partículas de cobre son suspendidas en agua. Se fabricaron suspensiones de cobre cambiando la matriz. La matriz que se ocupó fue el alcohol isopropílico en lugar de agua. No presentamos resultados en esta matriz. El motivo es que observamos formaciones de cúmulos muy grandes, de las partículas de cobre y esto nos darían resultados erróneos, debido a que estaríamos observando partículas mucho muy grandes. Solo mostraremos una fotografía tomada con un microscopio óptico, en donde observamos estos cúmulos.

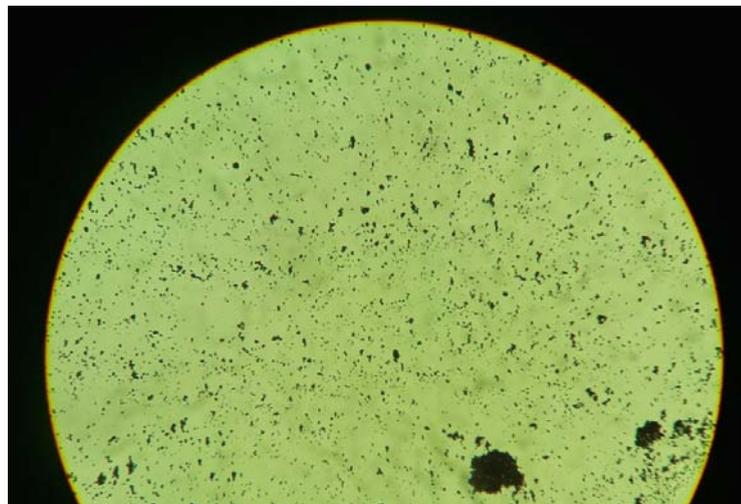


FIGURA 7.10: Muestra de cobre suspendida en alcohol, colocada en un portaobjetos y vista en un microscopio óptico.

La manera de determinar el tamaño de los cúmulos formados, fue en base a la siguiente escala:



FIGURA 7.11: Escala utilizada para determinar el tamaño en el microscopio óptico, cada marca corresponden a $2\mu\text{m}$.

Con lo que podemos decir que el cúmulo más grande que se observa es alrededor de unos $20\ \mu\text{m}$. Se hicieron varias fotografías en distintos lugares y los cúmulos de ese tamaño siempre estaban presentes.

7.5. Látex (PMMA), de 513 nm de diámetro, con la escala angular total

Por último mostraremos, algunas gráficas, juntando las dos zonas angulares en las cuales se realizaron mediciones. Esto se realizó para observar que tan confiables son nuestras muestras y nuestro instrumento de medición, es decir, con esto mostraremos que las muestras son estables en el tiempo (las de látex de 513 nm). Las mediciones en el ángulo crítico y fuera del ángulo crítico se hicieron mucho tiempo después. Las primeras mediciones fueron alrededor del ángulo crítico y después de 3 meses se modificó el sistema para medir fuera del ángulo crítico. Con estos resultados podremos considerar que el sistema de medición es lo suficientemente reproducible y que las muestras de látex guardan el mismo comportamiento en el tiempo. Los resultados que se obtuvieron se presentan a continuación.

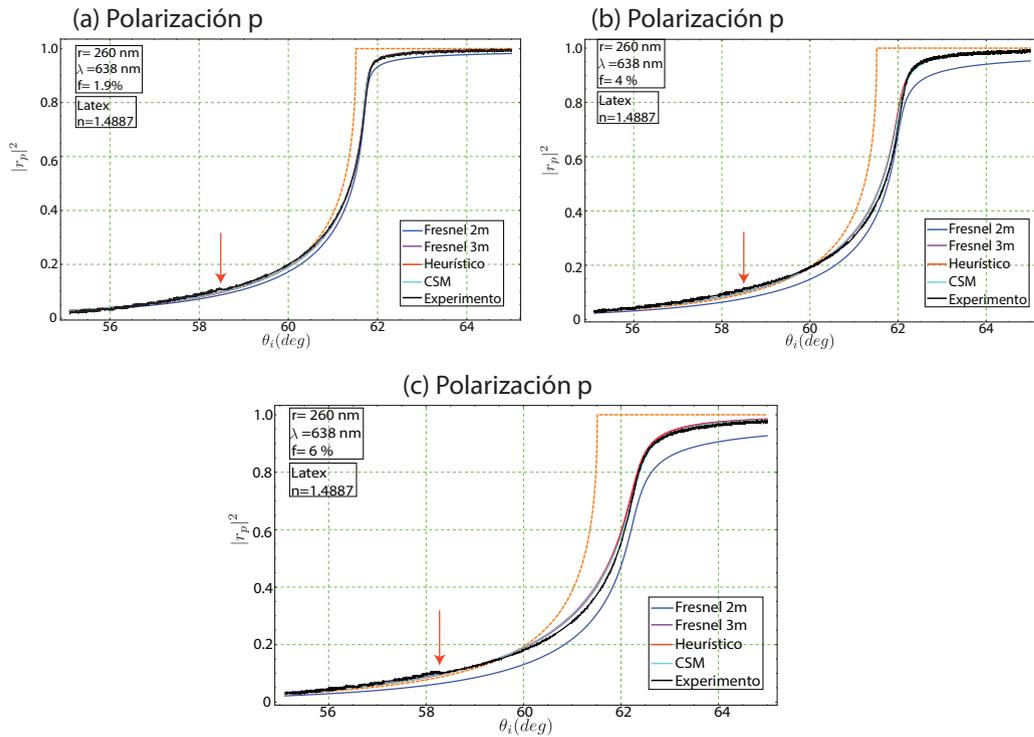


FIGURA 7.12: Escala angular total en donde realizamos las mediciones, donde la flecha roja indica a donde termina una medición y donde inicia la otra medición.

En base a la figura 7.12 tenemos que en los tres casos que presentamos las suspensiones coloidales de látex guardan el mismo comportamiento durante el tiempo. Por lo tanto las muestras son altamente estables. Por otro lado, una alineación adecuada en el dispositivo experimental nos proporciona una reproducibilidad en el experimento. Como se muestra en esta figura las variaciones que existen entre una medición fuera del ángulo crítico y alrededor del ángulo crítico son mínimas, casi nulas. Por lo tanto el dispositivo experimental es confiable para mediciones de curvas de reflectancia a diferentes zonas angulares.

7.6. Predicciones teóricas

Las siguientes figuras muestran los espectros de reflectividad para suspensiones coloidales de oro y plata, fijando los ángulos de incidencia de la fuente de luz. Nos enfocaremos en los ángulos de incidencia de 58 y 59 grados. Los espectros abarcan de 400 a 800 nm en longitudes de onda.

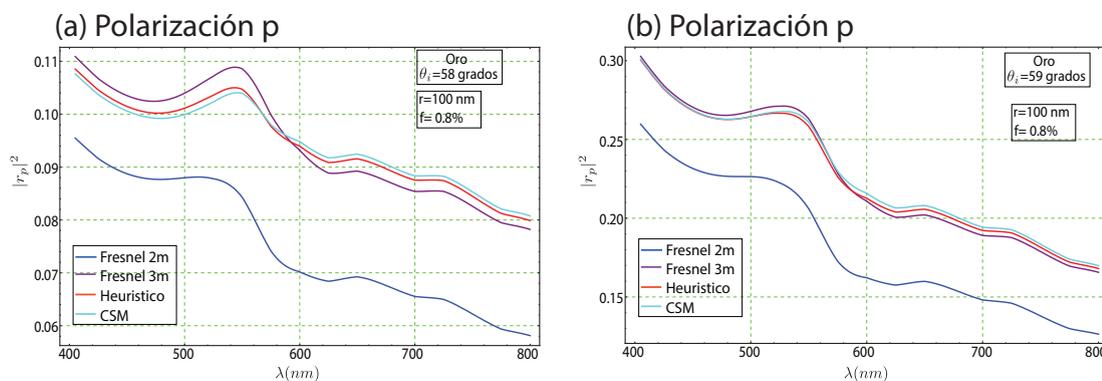


FIGURA 7.13: Espectro de reflectividad del oro a un ángulo de incidencia fijo de: (a) 58 grados y (b) 59 grados.

En la figura 7.13 se observa la resonancia plasmónica del oro, que está alrededor de 550 nm. Lo interesante son las diferencias que se observan entre los modelos (figura 7.13a), y si fuera posible realizar estas mediciones podríamos diferenciar qué modelo describe de la mejor manera el experimento.

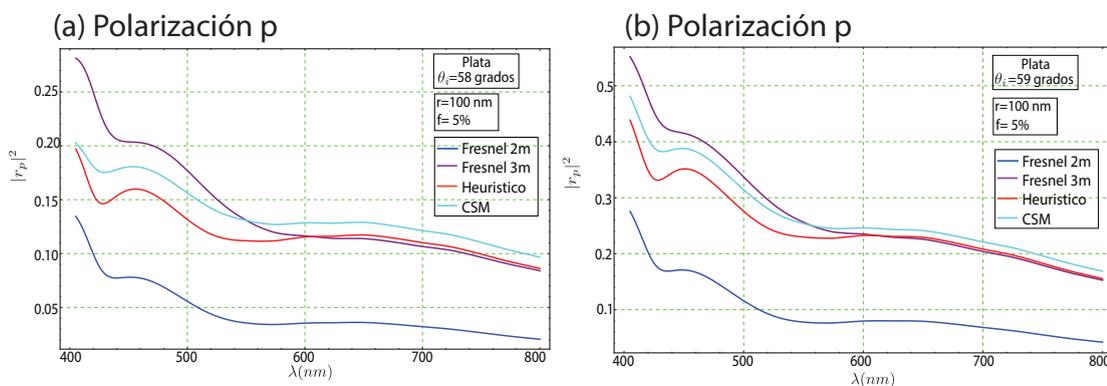


FIGURA 7.14: Espectro de reflectividad de la plata a un ángulo de incidencia fijo de: (a) 58 grados y (b) 59 grados.

En base a la figura 7.14 podemos ver que existen diferencias entre los modelos. Si fuera posible medir estos espectros de reflectancia para suspensiones de plata podríamos diferenciar que modelo se ajusta al experimento. Estos son resultados numéricos son interesantes y que podría ser trabajo a futuro modificando el diseño experimental, iluminando la muestra con una fuente de luz blanca y sustituyendo la cámara CCD por un espectrofotómetro. Este método de medición sería otra forma de distinguir qué modelo describe mejor al experimento.

Utilizando el dispositivo experimental se obtuvieron algunos resultados que son de interés, y que vamos a mostrar en el Apéndice A.

Capítulo 8

Conclusiones

Nuestro objetivo fue diferenciar las teorías que fueron presentadas en los trabajos[2, 3], comparando sus predicciones con datos experimentales, y analizar cuál o cuáles de estos modelos describen mejor el experimento y en que casos. Además queríamos mostrar que Fresnel 2 medios, no es suficiente para calcular con precisión la reflectividad de un coloide cuando se trata de suspensiones de partículas con tamaños del orden de la longitud de onda. Para conseguir el objetivo de esta tesis se desarrollo un dispositivo experimental que permite medir de manera precisa y rápida curvas de reflectividad de suspensiones coloidales. Nuestro diseño experimental resultó ser adecuado para medir reflectividad en configuración de reflexión interna alrededor del ángulo crítico de suspensiones coloidales. La ventana angular que se puede medir es de 7 grados. Este intervalo fue suficiente para obtener datos experimentales y discernir que teorías son más adecuadas en cada caso. Mostramos que la reproducibilidad de nuestro sistema de medición es muy alta. La fabricación de suspensiones coloidales a partir de una muestra “madre”, se pudo realizar sin mayores dificultades. Mostramos que las propiedades ópticas de las muestras se mantienen estables por largos periodos de tiempo.

Las conclusiones son para los dos intervalos de ángulos de incidencia, de 59 a 65 y de 55 a 61 grados. En base al capítulo 7 lo primero que concluimos es que los modelos teóricos analizados: Fresnel 2 medios, Fresnel 3 medios, Heurístico y el CSM, para el caso de partículas de látex de 120 nm. de diámetro coinciden para fracciones de volumen menores a 10 % (Figura 7.1). Para fracciones de volumen al 12 % se pueden apreciar diferencias entre los distintos modelos. En particular la fórmula de Fresnel 2 medios tiene un comportamiento diferente a la del experimento. La diferencia entre experimento y este modelo difieren en un 10 % aproximadamente. El modelo Heurístico muestra claramente un comportamiento más cercano al experimento. El modelo del CSM es una buena aproximación, pero existen ligeras diferencias entre teoría y experimento, la

diferencia entre experimento y modelo es alrededor del 2%. Podemos concluir que para partículas de látex pequeñas y considerando fracciones de volumen desde muy bajas a muy altas, del 3% al 24% respectivamente, el modelo Heurístico es el modelo más preciso, mostrando un comportamiento igual que el experimento. Fresnel 2 medios es útil para bajas concentraciones y partículas pequeñas de látex. Este comportamiento que se acaba de mencionar, también se observa en el intervalo de ángulo de incidencia entre 55 a 61 grados (Figura 7.2), donde el modelo Heurístico se ajusta de la mejor manera al experimento y separándose de los demás modelos teóricos.

Al considerar partículas de látex más grandes con diámetro de 513 nm., los resultados son más interesantes. Observando la figura 7.3, el comportamiento de Fresnel 2 medios no es útil para la descripción a bajas concentraciones. El CSM y el modelo Heurístico son los que mejor se ajustan al experimento pero a fracciones de volumen alrededor del 2%. Para fracciones de llenado mayores (figuras 7.3c y 7.3d), observamos que existe una ligera diferencia entre el CSM, el Heurístico y el experimento, la diferencia es menor al 1%. En este caso la teoría que mejor se ajusta al experimento es el CSM. Es importante mencionar que Fresnel 2 medios es notoriamente menos preciso en este caso que los otros modelos. La zona fuera del ángulo crítico no nos ayuda en este caso a diferenciar las teorías. Existen diferencias considerables entre el experimento y la teoría.

Para el caso de reflectividad de suspensiones de dióxido de titanio, utilizamos suspensiones polidispersas con una distribución de tamaños de tipo log-normal relativamente anchas (el parámetro de anchura de 1.3 a 1.4). Presentamos cálculos con los modelos correspondientes a sistemas monodispersos y polidispersos. En el caso monodisperso se supuso el radio de todas las partículas como el radio más probable (figura 7.5). Podemos observar que ningún modelo teórico se ajusta bien al experimento en este caso. Pero al considerar el caso polidisperso (figura 7.6) es muy interesante el comportamiento de los modelos teóricos. Es claro que ahora el CSM se ajusta bastante bien al experimento mientras que los otros modelos no. El CSM en este caso describe mejor la curva experimental que el modelo Heurístico y Fresnel 3 medios. Las diferencias que existen entre el CSM y el Heurístico son muy claras en el punto de inflexión de la curva. Por lo tanto es importante considerar la distribución de tamaños para describir de la mejor manera las curvas de reflectividad de este tipo de suspensiones coloidales. Fresnel 2 medios en este caso difiere muy notoriamente del experimento. Lo que implica que se incurrirían en errores importantes si usáramos Fresnel 2 medios para interpretar las curvas de reflectividad de suspensiones de dióxido de titanio con el objetivo de inferir las propiedades de las partículas en suspensión.

Por último para el caso del Cobre, pudimos observar (figura 7.8) nuevamente que

Fresnel 2 medios no se ajusta bien a los datos experimentales para este tipo de suspensiones coloidales. El tamaño de las partículas es cercano a una longitud de onda y existe absorción debido a la parte imaginaria del índice de refracción del cobre. Los modelos teóricos Fresnel 3 medios, Heurístico y CSM se comportan muy bien al experimento con diferencias relativas menores al 0.5 %. Por lo tanto se puede utilizar alguno de estos modelos teóricos y describir el experimento con precisión, al menos para concentraciones muy bajas (por debajo del 0.5 %).

En resumen, diseñamos un dispositivo experimental capaz de medir curvas de reflectividad de diferentes tipos de suspensiones coloidales en una configuración de reflexión interna de una manera rápida y eficiente. Encontramos que el modelo Heurístico es muy preciso para partículas pequeñas de látex con diámetros del orden de un $\frac{1}{3}$ de longitud de onda y las fracciones de volumen bajas (menores al 3 %) y altas (hasta un 24 %). Con Fresnel 3 medios se tiene el mismo comportamiento que el modelo Heurístico. El CSM tiene ligeras diferencias al modelo Heurístico y al Fresnel 3 medios, la diferencia entre modelos es menor al 1 % para fracciones de llenado altas (mayores al 10 %). Por lo tanto sería de igual manera una buena aproximación. Para partículas grandes con diámetros del orden de una longitud de onda el CSM reproduce con mayor precisión las curvas experimentales pero el Heurístico no es una mala aproximación. Cuando tenemos una suspensión coloidal polidispersa con partículas altamente esparcidoras de luz, como es el caso del dióxido de titanio, el CSM es el modelo que describe con mayor precisión el experimento.

Fresnel 2 medios predice las curvas de reflectividad con precisión únicamente para partículas de látex de 120 nm de diámetro y bajas densidades (menores al 10 %). Para partículas de látex con diámetros comparables con la longitud de onda Fresnel 2 medios ofrece una aproximación razonable para predecir el punto de inflexión de la curva de reflectividad para fracciones de llenado hasta del 23 %. A partir de este punto de inflexión se puede obtener una aproximación de la parte real del índice de refracción, como se puede observar en el apéndice A.

Por lo tanto los modelos Heurístico y CSM se complementan para describir la reflectividad de coloides turbios. En general para partículas pequeñas el Heurístico es más preciso y para partículas altamente esparcidoras de luz el CSM es más preciso.

Apéndice A

Obtención de la parte real del índice de refracción a partir del punto de inflexión:

En este apéndice, se evaluó el error relativo al obtener la parte real del incremento del índice de refracción efectivo si utilizamos el punto de inflexión de la curva de reflectividad como un ángulo crítico. Es decir si obtenemos la parte real del índice de refracción efectivo experimental (n_{ef}^{exp}) a partir de la siguiente fórmula:

$$n_{ef}^{exp} = n_{BK7} \sin \theta_c^{exp}. \quad (\text{A.1})$$

El índice de refracción efectivo teórico se puede obtener de la fórmula de Van de Hulst,

$$n_{ef}^{teo} = n_2 \left(1 + \frac{3if}{2x^3} * S_a(0) \right), \quad (\text{A.2})$$

donde $x = k_o n_m a$ es el parámetro de tamaño, siendo k_o el vector de onda incidente, n_m el índice de refracción del medio y a el radio de la partícula. $S_a(0)$ es el elemento de matriz de esparcimiento en la dirección de incidencia, y se calcula utilizando la ecuación (4.107). Tomando la parte real de esta expresión obtenemos la parte real del índice de refracción efectivo teórico (n_{ef}^{teo}).

De las curvas de reflectividad presentadas en el capítulo 6 obtuvimos el punto de inflexión y calculamos n_{ef}^{exp} con la ecuación (A.1). Por otro lado calculamos la parte real del índice de refracción teórico con la ecuación (A.2). En las siguientes tablas presentamos los índices de refracción efectivos teóricos y experimentales para cada una de las suspensiones coloidales con las que trabajamos.

Lo que obtuvimos para Látex de 120 nm de diámetro es:

Fracción de volumen $\pm 0.05(\%)$	n_{ef}^{teo} ± 0.0001	n_{ef}^{exp} ± 0.0005	Diferencia relativa en I.R.
3.46	1.3442	1.3448	0.000446
15.35	1.3645	1.3622	0.001686
17.88	1.3696	1.3692	0.000292
24.09	1.3816	1.3777	0.002823

Ahora para las partículas de Látex de 513 nm de diámetro tenemos:

Fracción de volumen $\pm 0.04(\%)$	n_{ef}^{teo} ± 0.0001	n_{ef}^{exp} ± 0.0005	Diferencia relativa en I.R.
3.46	1.3371	1.3365	0.000448
5.94	1.3411	1.3416	0.000373
9.11	1.34596	1.34604	0.00005943
23.28	1.3676	1.3685	0.023744

Para Dióxido de Titanio de 405 nm de diámetro es

Fracción de volumen $\pm 0.01(\%)$	n_{ef}^{teo} ± 0.0001	n_{ef}^{exp} ± 0.0005	Diferencia relativa en I.R.
0.50	1.3384	1.33751	0.000665
0.70	1.33803	1.34105	0.00226
0.948	1.33823	1.3427	0.00334

Para suspensión coloidal de Cobre de 500 nm de diámetro es

Fracción de volumen $\pm 0.05(\%)$	n_{ef}^{teo} ± 0.0001	n_{ef}^{exp} ± 0.0005	Diferencia relativa en I.R.
0.09	1.33156	1.3355	0.00296
0.19	1.33164	1.3358	0.00312

Enseguida presentamos la diferencia del incremento relativo al índice de refracción (es decir, $\frac{\Delta n_{ef}}{\Delta f}$), donde $\Delta n_{ef} = n_{ef}^{exp} - n_{ef}^{teo}$ es la diferencia entre los índices de refracción. Estas diferencias se obtuvieron a partir de la pendiente de la gráfica de n versus f , donde n es el índice de refracción teórico o experimental que se presentó en las primeras tablas y f es la fracción de volumen que se presentó en las tablas anteriores. Obtuvimos los

siguientes resultados.

Para partículas de látex de 120 nm suspendidas en agua,

$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{teo}$	$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{exp}$	Diferencia teórico-experimental	Diferencia del incremento relativo(%)
0.00159	0.00155	0.0002	2.58

Para partículas de látex de 513 nm suspendidas en agua,

$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{teo}$	$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{exp}$	Diferencia teórico-experimental	Diferencia del incremento relativo(%)
0.00156	0.00162	0.00006	3.704

Para partículas de dióxido de titanio de 405 nm suspendidas en agua

$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{teo}$	$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{exp}$	Diferencia teórico-experimental	Diferencia del incremento relativo(%)
$8 \cdot 10^{-4}$	$66 \cdot 10^{-4}$	0.0058	87.87

Para partículas de cobre de 500 nm suspendidas en agua

$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{teo}$	$(\Delta n_{ef}/\Delta f)^{exp}$	Diferencia teórico-experimental	Diferencia del incremento relativo(%)
$7.273 \cdot 10^{-4}$	$27 \cdot 10^{-4}$	0.000197	73.063

Los errores que se reportaron para el dióxido de titanio y para el cobre son debidos a que estas suspensiones coloidales son altamente esparcidoras de luz, mientras que las suspensiones de látex no lo son. Por lo tanto se puede concluir que si utilizamos el índice de refracción propuesto por Van de Hulst obtendremos una muy buena aproximación de la parte real del índice de refracción para suspensiones de látex. Para el caso de dióxido de titanio y cobre no podemos realizar estas aproximaciones en la parte real del índice de refracción.

Apéndice B

Índice de refracción a diferentes longitudes de onda

La siguiente gráfica muestra la parte real e imaginaria del índice de refracción de látex, PMMA, que fueron una de las partículas que se utilizaron en los resultados numéricos y en el experimento.

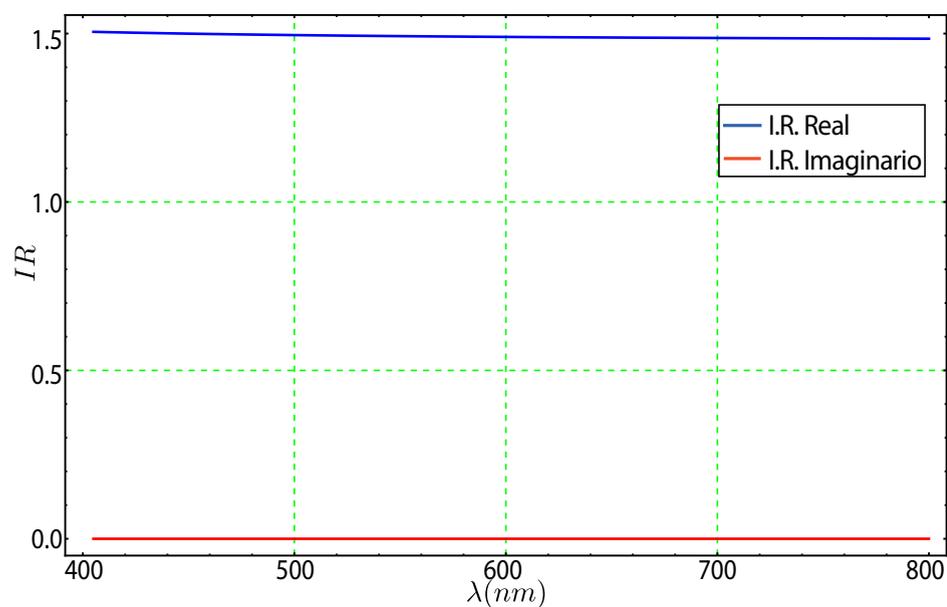


FIGURA B.1: Parte real e imaginaria del índice de refracción (I.R.) del látex.

En este trabajo nos fijamos en el I.R. a dos longitudes de onda, a 405 nm y a 638 nm.

A continuación la gráfica del I.R. del dióxido de titanio.

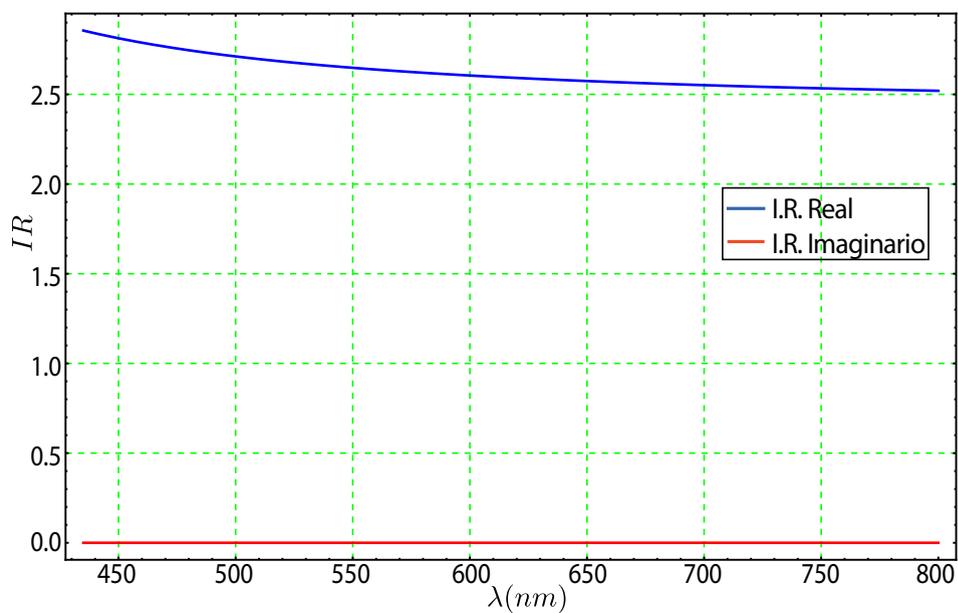


FIGURA B.2: Parte real e imaginaria del índice de refracción (I.R.) del dióxido de titanio.

Por último la gráfica del índice de refracción para el Cobre.

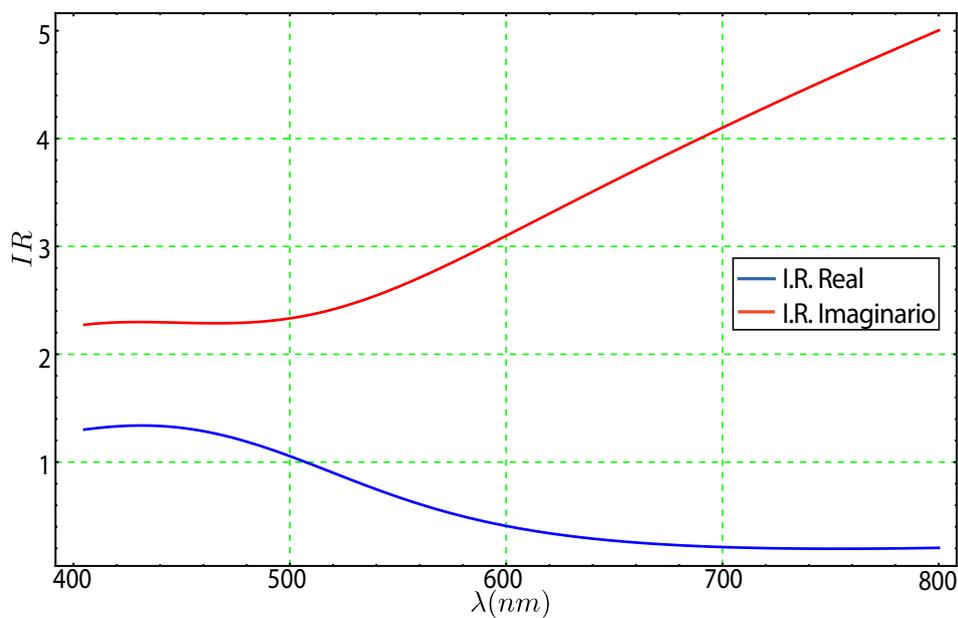


FIGURA B.3: Parte real e imaginaria del índice de refracción (I.R.) para el cobre.

Con estas gráficas se obtuvieron cada uno de los índices de refracción utilizados durante el desarrollo de este trabajo.

Apéndice C

Programa en Wolfram Mathematica 9

Lo que presentaremos en este apéndice es el programa que ocupamos para calcular nuestros modelos. Con este programa fue como hicimos las curvas teóricas, que presentamos en nuestro análisis.

(*PARÁMETROS A UTILIZAR*)

$\lambda = 638$; (*longitud de onda en nm*)

$n1 = 1,5149$; (*Índice del medio 1 VIDRIO BK7*)

$n2 = 1,3315$; (*Índice del medio 2 AGUA*)

$n3 = 1,4887$; (*Índice de refracción de las partículas*)

$K0 = \frac{2\pi}{\lambda}$; (*número de onda el en vacío*)

$K1 = K0 * n1$; (*número de onda del medio*)

$K2 = K0 * n2$; (*número de onda de la partícula*)

$radio = 250$; (*radio de la partícula en nm*)

$m = \frac{n3}{n2}$;

$fv = 0,002$; (*FILLING FRACTION*)

(*PARÁMETROS DE TAMAÑO*)

$q[radio.] := K0radio$

$q1[radio.] := K1radio$

$q2[radio.] := K2radio$

(*Para truncar la serie*)

```
Mayor[radio_]:=Max[q[radio], Abs[q1[radio]], Abs[q2[radio]]];
UT[radio_]:=Ceiling [Abs[Mayor[radio]] + 4,05(Mayor[radio])1/3 + 2] ;
Print["La serie termina en ", UT[radio]];
```

(*Ricatti – Besseldeprimertipo, juntoconsuderivada*)

```
 $\psi[n_-, \rho_-] := \rho \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \text{BesselJ} \left[ n + \frac{1}{2}, \rho \right]$ 
 $\psi\text{Prima}[n_-, \rho_-] := \text{Evaluate}[D[\psi[n, \rho], \rho]];$ 
```

(*Ricatti – Hankel, juntoconsuderivada*)

```
 $\xi[n_-, \rho_-] := \psi[n, \rho] + I \rho \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \text{BesselY} \left[ n + \frac{1}{2}, \rho \right];$ 
 $\xi\text{Prima}[n_-, \rho_-] := \text{Evaluate}[D[\xi[n, \rho], \rho]];$ 
```

(*Definiendo funciones de polinomios asociados de Legendre*)

```
pi[0,  $\theta$ _]:=0;
pi[1,  $\theta$ _]:=1;
pi[2,  $\theta$ _]:=3Cos[ $\theta$ ];
pi[n_,  $\theta$ _]:=  $\left(\frac{2n-1}{n-1}\right) \text{Cos}[\theta] \text{pi}[n-1, \theta] - \left(\frac{n}{n-1}\right) \text{pi}[n-2, \theta];$ 
 $\tau[n_-, \theta_-] := n \text{Cos}[\theta] \text{pi}[n, \theta] - (n+1) \text{pi}[n-1, \theta];$ 
```

(*COEFICIENTES DE DISPERSIÓN*)

```
an[n_, radio_]:=
Evaluate[( $m\psi[n, m\text{q2}[\text{radio}]]\psi\text{Prima}[n, \text{q2}[\text{radio}]] - \psi[n, \text{q2}[\text{radio}]]\psi\text{Prima}[n, m\text{q2}[\text{radio}]]$ )/
( $m\psi[n, m\text{q2}[\text{radio}]]\xi\text{Prima}[n, \text{q2}[\text{radio}]] - \xi[n, \text{q2}[\text{radio}]]\psi\text{Prima}[n, m\text{q2}[\text{radio}]]$ )];
bn[n_, radio_]:=
Evaluate[( $\psi[n, m\text{q2}[\text{radio}]]\psi\text{Prima}[n, \text{q2}[\text{radio}]] - m\psi[n, \text{q2}[\text{radio}]]\psi\text{Prima}[n, m\text{q2}[\text{radio}]]$ )/
( $\psi[n, m\text{q2}[\text{radio}]]\xi\text{Prima}[n, \text{q2}[\text{radio}]] - m\xi[n, \text{q2}[\text{radio}]]\psi\text{Prima}[n, m\text{q2}[\text{radio}]]$ )];
```

(*AMPLITUDES DE DISPERSIÓN*)

(*En la dirección de incidencia tengo*)

$$S0[\text{radio}_.] := S0[\text{radio}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\text{UT}[\text{radio}]} (2n + 1)(\text{an}[n, \text{radio}] + \text{bn}[n, \text{radio}]);$$

(* θ distinto de cero*)

$$S1[\text{radio}_., \theta_.] := S1[\text{radio}, \theta] = \sum_{n=1}^{\text{UT}[\text{radio}]} \left(\frac{2n+1}{n(n+1)} \right) (\text{bn}[n, \text{radio}] \tau[n, \theta] + \text{an}[n, \text{radio}] \text{pi}[n, \theta]);$$

$$S2[\text{radio}_., \theta_.] := S2[\text{radio}, \theta] = \sum_{n=1}^{\text{UT}[\text{radio}]} \left(\frac{2n+1}{n(n+1)} \right) (\text{an}[n, \text{radio}] \tau[n, \theta] + \text{bn}[n, \text{radio}] \text{pi}[n, \theta]);$$

$$B[\text{radio}_.] := B[\text{radio}] = \frac{3f_v}{(K0n2\text{radio})^3};$$

$$k1z[\theta_.] := k1z[\theta] = K0n1 \text{Cos}[\theta]; \text{ (*kz en el medio 1*)}$$

$$k2z[\theta_.] := k2z[\theta] = K0 \sqrt{n2^2 - n1^2 \text{Sin}[\theta]^2}; \text{ (*kz en el medio 2*)}$$

$$k3z[\text{radio}_., \theta_.] := k3z[\text{radio}, \theta] = K0n2 \sqrt{\left(1 - \frac{n1^2}{n2^2} \text{Sin}[\theta]^2 + B[\text{radio}] S0[\text{radio}] \right)}; \text{ (*FOLDY-LAX*)}$$

$$w[\theta_.] := w[\theta] = \frac{n1^2 \text{Sin}[\theta]^2}{n2}; \text{ (* = } n2 \text{Sin}[\theta t[\theta]]^2 \text{*)}$$

$$\alpha[\text{radio}_., \theta_.] := \alpha[\text{radio}, \theta] = k3z[\text{radio}, \theta] * \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n1^2}{n2^2} \right) \text{Sin}[\theta]^2}}{K0n2};$$

$$\beta[\text{radio}_.] := \beta[\text{radio}] = \sqrt{n2^2 + B[\text{radio}] S0[\text{radio}]};$$

$$EE[\text{radio}_., \theta_.] := EE[\text{radio}, \theta] = e^{I2\text{radio}k2z[\theta]};$$

(*ARGUMENTO PARA EL COHERENT SCATTERING*)

$$\text{tetat}[\theta_.] := \text{tetat}[\theta] = \text{ArcSin} \left[\frac{n1}{n2} \text{Sin}[\theta] \right]; \text{ (*} = \theta t \text{*)}$$

(*ARGUMENTOS PARA LAS AMPLITUDES EN EL COHERENT SCATTERING MODEL*)

$$\text{COHarg}[\theta_.] := \text{COHarg}[\theta] = \text{ArcCos} \left[\frac{2n1^2 \text{Sin}[\theta]^2}{n2^2} - 1 \right]; \text{ (*ángulo de incidencia en el medio 2*)}$$

$$\gamma[\text{radio}_.] := \gamma[\text{radio}] = \frac{3f_v}{2(K0n2\text{radio})^3};$$

(*ARGUMENTOS PARA LAS AMPLITUDES EN LA APROXIMACIÓN HEURÍSTICA*)

$$\text{arg2HEU}[\text{radio}_., \theta_.] := \text{arg2HEU}[\text{radio}, \theta] = \text{ArcCos} \left[\frac{w[\theta] - \alpha[\text{radio}, \theta]}{\beta[\text{radio}]} \right]; \text{ (*ArcCos(kr.kt) = } (\pi - \theta_i - \theta_t) \text{*)}$$

$$\text{arg1HEU}[\text{radio}_., \theta_.] := \text{arg1HEU}[\text{radio}, \theta] = \text{ArcCos} \left[\frac{w[\theta] + \alpha[\text{radio}, \theta]}{\beta[\text{radio}]} \right]; \text{ (*ki.kt = cos}(\theta_i - \theta_t) \text{*)}$$

$$\text{AH}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{AH}[\text{radio}, \theta] = \frac{\text{S2}[\text{radio}, \text{arg2HEU}[\text{radio}, \theta]]}{\text{S2}[\text{radio}, \text{arg1HEU}[\text{radio}, \theta]]}; (*\text{amplitud para polarización P}*)$$

$$\text{A1H}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{A1H}[\text{radio}, \theta] = \frac{\text{S1}[\text{radio}, \text{arg2HEU}[\text{radio}, \theta]]}{\text{S1}[\text{radio}, \text{arg1HEU}[\text{radio}, \theta]]}; (*\text{amplitud para polarización S}*)$$

(*ARGUMENTOS PARA LAS AMPLITUDES EN LA APROXIMACIÓN DE FRESNEL*)

$$\text{ipuntotFR}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{ipuntotFR}[\text{radio}, \theta] = \frac{w[\theta] + \alpha[\text{radio}, \theta]}{\beta[\text{radio}]}; (*\text{ki.kt}*)$$

$$\text{rpuntotFR}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{rpuntotFR}[\text{radio}, \theta] = \frac{w[\theta] - \alpha[\text{radio}, \theta]}{\beta[\text{radio}]}; (*\text{kr.kt}*)$$

(*FÓRMULASDEFRESNELDE DOS MEDIOS, VIDRIO – AGUA*)

$$\text{r12s}[\theta_-] := \text{r12s}[\theta] = \frac{k_{1z}[\theta] - k_{2z}[\theta]}{k_{1z}[\theta] + k_{2z}[\theta]}; (*\text{POLARIZACIÓN S}*)$$

$$\text{r12p}[\theta_-] := \text{r12p}[\theta] = \frac{k_{1z}[\theta] - \frac{n_1^2}{n_2^2} k_{2z}[\theta]}{k_{1z}[\theta] + \frac{n_1^2}{n_2^2} k_{2z}[\theta]}; (*\text{POLARIZACIÓN P}*)$$

$$\text{R12S}[\theta_-] := \text{Abs}[\text{r12s}[\theta]]^2 (*\text{COEFICIENTE DE REFLEXIÓN, POLARIZACIÓN S}*)$$

$$\text{R12P}[\theta_-] := \text{Abs}[\text{r12p}[\theta]]^2 (*\text{COEFICIENTE DE REFLEXIÓN, POLARIZACIÓN P}*)$$

(*COEFICIENTE DE REFLEXIÓN P, APROX. FRESNEL*)

$$\text{r23pFR}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{r23pFR}[\text{radio}, \theta] = \left(\frac{\text{rpuntotFR}[\text{radio}, \theta]}{\text{ipuntotFR}[\text{radio}, \theta]} \right) \left(\frac{k_{2z}[\theta] - k_{3z}[\text{radio}, \theta]}{k_{2z}[\theta] + k_{3z}[\text{radio}, \theta]} \right);$$

(*COEFICIENTE DE REFLEXIÓN S, APROX. FRESNEL*)

$$\text{r23sFR}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{r23sFR}[\text{radio}, \theta] = \left(\frac{k_{2z}[\theta] - k_{3z}[\text{radio}, \theta]}{k_{2z}[\theta] + k_{3z}[\text{radio}, \theta]} \right);$$

(*COEFICIENTE DE REFLEXIÓN PARAPOLARIZACIÓN P, HEURÍSTICO*)

$$\text{r23pH}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{r23pH}[\text{radio}, \theta] = \text{AH}[\text{radio}, \theta] \left(\frac{k_{2z}[\theta] - k_{3z}[\text{radio}, \theta]}{k_{2z}[\theta] + k_{3z}[\text{radio}, \theta]} \right);$$

(*COEFICIENTE DE REFLEXIÓN PARAPOLARIZACIÓN S, HEURÍSTICO*)

$$\text{r23sH}[\text{radio}_-, \theta_-] := \text{r23sH}[\text{radio}, \theta] = \text{A1H}[\text{radio}, \theta] \left(\frac{k_{2z}[\theta] - k_{3z}[\text{radio}, \theta]}{k_{2z}[\theta] + k_{3z}[\text{radio}, \theta]} \right);$$

(*COEFICIENTE DE REFLEXIÓN P, COHERENT SCATTERING APPROX.*)

$$\text{kefS}[\text{radio}_-, \theta_-] :=$$

$$\begin{aligned} \text{kefS}[\text{radio}, \theta] &= \\ &\left(\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]]^2 + 2i\gamma[\text{radio}]\text{S0}[\text{radio}] - \left(\frac{\gamma[\text{radio}]^2}{\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]]^2} \right) * (\text{S0}[\text{radio}]^2 - \text{S1}[\text{radio}, (\text{COHarg}[\theta])^2]) \right)^{1/2}; \\ \text{kefP}[\text{radio}_., \theta_.] &:= \\ \text{kefP}[\text{radio}, \theta] &= \\ &\left(\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]]^2 + 2i\gamma[\text{radio}]\text{S0}[\text{radio}] - \left(\frac{\gamma[\text{radio}]^2}{\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]]^2} \right) * (\text{S0}[\text{radio}]^2 - \text{S2}[\text{radio}, (\text{COHarg}[\theta])^2]) \right)^{1/2}; \end{aligned}$$

(*COEFICIENTEDEREFLEXIÓN, COHERENTSCATTERINGCOMPLETE*)

$$\begin{aligned} \text{r23scompCS}[\text{radio}_., \theta_.] &:= \\ \text{r23scompCS}[\text{radio}, \theta] &= (\gamma[\text{radio}]\text{S1}[\text{radio}, (\text{COHarg}[\theta])]) / \\ & (i\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]](\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]] + \text{kefS}[\text{radio}, \theta]) - \gamma[\text{radio}]\text{S0}[\text{radio}]) \end{aligned}$$

(*COEFICIENTEDEREFLEXIÓN P, COHERENTSCATTERINGCOMPLETE*)

$$\begin{aligned} \text{r23pcompCS}[\text{radio}_., \theta_.] &:= \\ \text{r23pcompCS}[\text{radio}, \theta] &= (\gamma[\text{radio}]\text{S2}[\text{radio}, (\text{COHarg}[\theta])]) / \\ & (i\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]](\text{Cos}[\text{tetat}[\theta]] + \text{kefP}[\text{radio}, \theta]) - \gamma[\text{radio}]\text{S0}[\text{radio}]); \end{aligned}$$

(* % % % % % % % % % % % FRESNEL 2 MEDIOS % % % % % % % % % % % % % % % % %*)

$$\text{neff}[\text{radio}_.] := \text{neff}[\text{radio}] = n2 \left(1 + \frac{B[\text{radio}]}{2} \text{S0}[\text{radio}] \right);$$

$$\text{epsilon}[\text{radio}_.] := \text{epsilon}[\text{radio}] = (\text{neff}[\text{radio}])^2;$$

$$\text{keffz}[\text{radio}_., \theta_.] := \text{keffz}[\text{radio}, \theta] = K0 \sqrt{\text{neff}[\text{radio}]^2 - n1^2 \text{Sin}[\theta]^2}; (*kz \text{ en el medio 2}*)$$

$$\begin{aligned} \text{ampP}[\text{radio}_., \theta_.] &:= \\ \text{ampP}[\text{radio}, \theta] &= \left(\left(k1z[\theta] - \frac{n1^2}{\text{neff}[\text{radio}]^2} \text{keffz}[\text{radio}, \theta] \right) / \left(k1z[\theta] + \frac{n1^2}{\text{neff}[\text{radio}]^2} \text{keffz}[\text{radio}, \theta] \right) \right); \end{aligned}$$

$$\text{ampS}[\text{radio_}, \theta_]:= \text{ampS}[\text{radio}, \theta] = \left(\frac{k1z[\theta] - \text{keffz}[\text{radio}, \theta]}{k1z[\theta] + \text{keffz}[\text{radio}, \theta]} \right);$$

$$\text{F2MS}[\text{radio_}, \theta_]:= \text{F2MS}[\text{radio}, \theta] = (\text{Abs}[\text{ampS}[\text{radio}, \theta]])^2;$$

$$\text{F2MP}[\text{radio_}, \theta_]:= \text{F2MP}[\text{radio}, \theta] = (\text{Abs}[\text{ampP}[\text{radio}, \theta]])^2;$$

(*FÓRMULA DE 3 MEDIOS PARA LAS APROXIMACIONES*)

(*COEFICIENTE DEREFLEXIÓN, APROX.FRESNEL*)

$$\text{r123PFR}[\text{radio_}, \theta_]:=$$

$$\text{r123PFR}[\text{radio}, \theta] = \text{Abs}[(\text{r12p}[\theta] + \text{r23pFR}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta]) / (1 + \text{r12p}[\theta]\text{r23pFR}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta])]^2;$$

(*COEFICIENTE DEREFLEXIÓN, APROX.FRESNEL*)

$$\text{r123SFR}[\text{radio_}, \theta_]:=$$

$$\text{r123SFR}[\text{radio}, \theta] = \text{Abs}[(\text{r12s}[\theta] + \text{r23sFR}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta]) / (1 + \text{r12s}[\theta]\text{r23sFR}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta])]^2;$$

(*COEFICIENTE DEREFLEXIÓN S, HEURÍSTICO*)

$$\text{r123PH}[\text{radio_}, \theta_]:=$$

$$\text{r123PH}[\text{radio}, \theta] = \text{Abs}[(\text{r12p}[\theta] + \text{r23pH}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta]) / (1 + \text{r12p}[\theta]\text{r23pH}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta])]^2;$$

(*COEFICIENTE DEREFLEXIÓN P, HEURÍSTICO*)

$$\text{r123SH}[\text{radio_}, \theta_]:=$$

$$\text{r123SH}[\text{radio}, \theta] = \text{Abs}[(\text{r12s}[\theta] + \text{r23sH}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta]) / (1 + \text{r12s}[\theta]\text{r23sH}[\text{radio}, \theta]\text{EE}[\text{radio}, \theta])]^2;$$

(*COEFICIENTE DEREFLEXIÓN P, COHERENT SCATTERING COMPLETE*)

```
r123PcompCS[radio_, θ_]:=
```

```
r123PcompCS[radio, θ] =
```

```
Abs[(r12p[θ] + r23pcompCS[radio, θ]EE[radio, θ])/(1 + r12p[θ]r23pcompCS[radio, θ]EE[radio, θ])]^2;
```

(*COEFICIENTEDEREFLEXIÓN, COHERENTSCATTERINGCOMPLETE*)

```
r123ScompCS[radio_, θ_]:=
```

```
r123ScompCS[radio, θ] =
```

```
Abs[(r12s[θ] + r23scompCS[radio, θ]EE[radio, θ])/(1 + r12s[θ]r23scompCS[radio, θ]EE[radio, θ])]^2;
```


Bibliografía

- [1] E. Gutierrez-Reyes. *Reflexión de la luz por un semiespacio de esferas desordenadas*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, Agosto 2013.
- [2] R. G. Barrera y A. García-Valenzuela. Coherent reflectance in a system of random mie scatterers and its relation to the effective-medium approach. *J. Opt. Soc. Am. A*, 20:296, 2003.
- [3] A. García-Valenzuela E. Gutierrez-Reyes and Rubén G. Barrera. Extension of fresnel's formulas for turbid colloidal suspensions: A rigorous treatment. *J.Phys.Chem.B*, 118:6015–6031, 2014.
- [4] A. García-Valenzuela R. G. Barrera, A. Reyes-Coronado. Nonlocal nature of the electrodynamic response of colloidal systems. *Phys. Rev. B* 75, 184202:1–19, 2007.
- [5] H. Contreras-Tello and A. García-Valenzuela. Refractive index measurement of turbid media by transmission of backscattered light near the critical angle. *Applied Optics*, 53(21), 2014.
- [6] Hecht. *Optics*. Addison Wesley, third edition, 2000.
- [7] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, third edition, 1999.
- [8] Landau y Lifshitz. *Electrodinámica de los medios continuos*, volume 8. Reverté, 1981.
- [9] Helmuth Horvath. Gustav mie and scattering and absorption of light by particles: Historic developments and basics. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative*, 110(21):787–799, 2009.
- [10] Bohren C. y Huffman D. *Absorption and scattering of light by small particles*. Wiley Science Paperback series, 1983.
- [11] L.L. Foldy. The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.*, 67:107–119, 1945.
- [12] M. Lax. Multiple scattering of waves. *Rev. Mod. Phys.*, 23:287–310, 1951.

- [13] H. C. Van de Hulst. *LightScattering in random media*. New York: Academic Press, 1978.
- [14] URL <http://refractiveindex.info>.
- [15] A. N. North G. H. Meeten and F. M. Willmouth. Errors in critical angle measurement of refractive index of optically absorbing materials. *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, 17, 1984.
- [16] García-Valenzuela A; Barrera R.G; Sánchez-Pérez C; Reyes-Coronado A; Méndez E.R. Coherent reflection of light from a turbid suspension of particles in an internal-reflection configuration: Theory versus experiment. *Opt. Express*, 13(6723), 2005.
- [17] Meeten G. H; North A. N. Refractive index measurement of absorbing and turbid fluids by reflection near the critical angle. *Meas. Sci. Technol.*, 6(214), 1995.
- [18] Q; Wang J; Deng Z-Chi; Zhou W. Y Ye. Measurement of the complex refractive index of tissue-mimicking phantoms and biotissue by extended differential total reflection method. *J. Biomed. Opt.*, 16(097001), 2011.
- [19] Tsang L; Kong J; Ding A. *Scattering of Electromagnetic Waves: Advanced topics*, volume 3. John Wiley: New York, 2001.
- [20] Gutierrez-Reyes E; García-Valenzuela A; Barrera R.G. Overview of an effective-medium approach to the reflection and refraction of light at a turbid colloidal half-space. *Phys.Status Solidi B*, 249(1147), 2012.
- [21] García-Valenzuela A; Contreras-Tello H; Olivares J. A; Cuppo F. L. Insights into the dependent-scattering contributions to the extinction coefficient in highly scattering suspensions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 30(1328), 2013.
- [22] I. V. Lindell and E. Alanan. Sommerfeld half-space problem. part i: Vertical magnetic dipole. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 32:1027, 1982.
- [23] M. Lax. Multiple scattering of waves ii. the effective field in dense systems. *Phys. Rev.*, 85:621–629, 1952.
- [24] A. García-Valenzuela and R.G. Barrera. Electromagnetic response of a random half-space of mie scatterers within the effective medium approximation and the determination of the effective optical coefficients. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, -(79-80):627–647, 2003.
- [25] M. A. Barlett and H. Jiang. Effect of refractive index on the measurement of optical properties in turbid media. *Appl. Opt.*, 40(1735-1741), 2001.

-
- [26] W R Calhoun; H. Maeta; A Combs; L M Bali and S Bali. Measurement of the refractive index of highly turbid media. *Opt. Lett.*, 35(1224-1226), 2010.
- [27] A García-Valenzuela and R G Barrera. Optical reflectance of a composite medium with a sparse concentration of large spherical inclusions. *Phys. Status Solidi B*, 240(480), 2003.