UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Grupos Topológicos Libres

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

VICTOR DONJUÁN ARROYO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA
Cd. Universitaria, D.F. 2015

1.- Datos del alumno
Donjuán
Arroyo
Victor
11155824
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
410003976

2.- Datos del tutor
Dr.
Fidel
Casarrubias
Segura

3.- Datos del sinodal 1
Dr.
Sergey
Antonyan

4.- Datos del sinodal 2
Dra.
Natalia
Jonard
Pérez

5.- Datos del sinodal 3
Dr.
Gerardo
Acosta
García

6.- Datos del sinodal 4
Mat.
Ernesto
Mayorga
Saucedo

7.- Datos del trabajo escrito
Grupos topológicos libres
95 p.
2015

18 de junio de 2015

El presente trabajo de tesis fue parcialmente apoyado por una beca de cuatro meses por el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Inovación Tecnológica (PAPIIT) clave IN115312.

Índice general

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Fidel Casarrubias Segura, quien no sólo fue mi tutor durante esta tesis, sino uno de los profesores con los que más clases llevé y de los que más apoyo me brindó. De la misma forma muchas gracias Dr. Sergey Antonyan, Dra. Natalia Jonard, Dr. Gerardo Acosta y Mat. Ernesto Mayorga por ser los sinodales de este trabajo y por su esfuerzo dedicado a la revisión del mismo. Un agradecimiento especial a los cinco por la enorme paciencia durante este tiempo. Les debo bastante.

Agradezco a todos mis profesores y ayudantes de la Facultad de Ciencias. A Claudia y a Erick, que siempre fueron buenos conmigo en las ayudantías y que ahora son buenos amigos e incluso compañeros en la maestría. A mis compañeros de toda la carrera de matemáticas: Fer, Catalina, Axel, Juan y Llouis, porque sin ellos las clases de Álgebra y Análisis nunca hubieran sido lo mismo. A Susana y a Teté, por su amistad incondicional. A Diana, por ser una de mis mejores amigas desde hace varios años, aún cuando la mayoría de las veces provoco que se enoje. A Zuleyca, que siempre ha estado ahí conmigo en tiempos difíciles. A Yuli, por enseñarme a ser fuerte. Y, por supuesto, muchas gracias a Naomi, por el simple hecho de tener su compañía cuando más lo necesitaba.

Muchas gracias a todos mis amigos del fútbol: Capi, Raya, Juan, Hetzel, Miguel, Zurdo, Niño, Marco, Gus, Chino, Pato y Ángel, e incluso Christian, que aunque directamente son responsables de cualquier atraso académico que tuviese (*¡nah!*), también son los responsables de las experiencias más amenas que alguien pudiera tener en la universidad. Sin ellos, mi vida en la universidad no podría haber sido ni la mitad de divertida de lo que fue.

Sobretodo tengo que agradecer a los que han estado ahí durante toda mi vida. Mi familia, que aunque digan que los *abandono*, la verdad es que les tengo muchísimo afecto. A mis hermanos, Carlos y Elena; mis primos, Beto, Bere, Rocío y Nancy; y desde luego a mis padres y a mis tíos, quienes me han apoyado en todo momento desde el día en que nací. Un abrazo enorme a todos.

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es introducir y estudiar los grupos topológicos libres, y grupos topológicos abelianos libres. Informalmente, el concepto de grupo topológico libre unifica los conceptos de grupo topológico y grupo libre.

En el Capítulo 1, establecemos las definiciones y los resultados básicos sobre ambos conceptos. Vamos a definir grupo topológico como un grupo dotado de una topología en el que las funciones multiplicación e inversión con respecto a la operación del grupo son continuas. Desde cursos muy básicos se ha trabajado con el concepto de grupo topológico. Por ejemplo, la operación suma y la operación inverso aditivo usuales en $\mathbb{R}^n$ son funciones continuas. Muchas de las propiedades que tiene $\mathbb{R}^n$ se demuestran a partir del simple hecho de que éste es un grupo topológico (por ejemplo, que las traslaciones son homeomorfismos), y con las mismas ideas se pueden probar algunas de las propiedades que tienen los grupos topológicos. Veremos algunos importantes hechos como que el producto de grupos topológicos, equipado con la topología producto, es un grupo topológico, y lo mismo ocurre con el cociente de grupos topológicos cuando está equipado con la topología cociente.

En el estudio de conceptos abstractos como la teoría algebraica de grupos o de espacios topológicos, se suele hablar de funciones que preservan en su totalidad la estructura de estos objetos. En teoría algebraica de grupos son los isomorfismos y en topología son los homeomorfismos. Estas funciones juegan un papel importante, porque preservan las propiedades algebraicas y topológicas, respectivamente. En nuestro caso, como estamos trabajando con grupos topológicos nos interesa que se preserve tanto la estructura de grupo como la topológica. Las funciones que van a resolver esta cuestión son los isomorfismos topológicos, funciones que vamos a definir como homeomorfismos que sean a su vez isomorfismos de grupos, y entonces si existe dicha función diremos que su dominio y su contradominio son topológicamente isomorfos. También, presentamos el enunciado del Primer Teorema de Isomorfismo para grupos topológicos, cuya demostración no es más que extender la idea que se usa para demostrar su versión en teoría algebraica de grupos. Por otro lado, al final de este capítulo daremos un repaso breve del concepto de grupo libre y su construcción más usual mediante palabras, estableciendo los términos y notaciones que vamos a usar en el resto de este trabajo.

En el Capítulo 2, establecemos la definición de un grupo topológico libre. Como se sabe, la propiedad fundamental de un grupo libre es que toda función definida en una base libre puede extenderse linealmente y de manera única a un homomorfismo que extiende a dicha función. La propiedad fundamental del grupo topológico libre está inspitada en este hecho. Intuitivamente, un grupo topológico libre de un espacio topológico X está caracterizado por la propiedad de que toda función continua con dominio X y contradominio un grupo topológico puede extenderse a un homomorfismo continuo de manera única. La definición de un grupo topológico abeliano libre es esencialmente la misma, salvo que ahora pedimos que dicho grupo sea a su vez abeliano. La demostración de la existencia del grupo topológico libre y del grupo topológico abeliano libre no es evidente, y requiere Axioma de Elección, y además la existencia del grupo topológico libre sólo está garantizada para los espacios de Tychonoff o completamente regulares. En general, pocas veces es fácil exhibir explícitamente un grupo topológico libre (salvo casos triviales, como el grupo topológico libre de un espacio discreto). Sin embargo, en este capítulo se va a demostrar que el grupo topológico libre de un espacio topológico de Tychonoff es algebraicamente isomorfo al grupo libre de dicho espacio. Con esto, sabemos exactamente cómo es la naturaleza de los elementos de un grupo topológico libre, y además también sabemos cómo se comporta algebraicamente. Asimismo, este capítulo tiene como objetivo estudiar un poco la estructura topológica de un grupo topológico libre.

Finalmente, en el Capítulo 3, estudiamos una importante relación con el concepto de grupo topológico libre. No es muy difícil notar que si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces los grupos topológicos libres de esos dos espacios son topológicamente isomorfos. Sin embargo, es posible construir ejemplos de espacios topológicos tales que sus grupos topológicos libres son topológicamente isomorfos, pero esos espacios no son homeomorfos. Esto motiva a introducir una nueva definición. Llamaremos a dos espacios topológicos M-equivalentes si sus grupos topológicos libres son topológicamente isomorfos. Estudiaremos algunas propiedades que se preservan bajo M-equivalencia (conexidad, compacidad, etc.), y llamaremos propiedad M-invariante a aquella que cumple que cada vez que un espacio topológico la tiene, entonces todo espacio topológico M-equivalente a él también tiene dicha propiedad. Similarmente se define A-equivalencia y propiedad A-invariante, es decir, decimos que dos espacios topológicos son A-equivalentes si sus grupos topológicos abelianos libres son topológicamente isomorfos. Además, vamos a probar que la M-equivalencia implica la A-equivalencia, por lo que una propiedad A-invariante es también M-invariante. En las últimas dos secciones hablaremos de dos métodos importantes introducidos por O. G. Okunev para construir espacios M-equivalentes, y veremos en particular que esto nos proporciona ejemplos de propiedades que no son M-invariantes.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

En este capítulo, introducimos los conceptos más básicos para poder entender la definición y para poder establecer las propiedades más básicas de los grupos topológicos libres. Intuitivamente, un grupo topológico libre es un grupo topológico con estructura de grupo libre, este último en el sentido usual en el álgebra abstracta. Recuerde, por ejemplo, que un grupo libre está dotado de una base, y que toda función definida en una base puede ser extendida a todo el grupo libre. Haremos un recordatorio de esto al final de este capítulo. En la primera sección del capítulo, introducimos la noción de grupo topológico y hablaremos de sus propiedas más importantes, mismas que utilizaremos a lo largo de todo este trabajo.

1.2. Grupos topológicos

Intuitivamente, un grupo topológico es un grupo algebraico equipado con una topología, pero dicha topología debe ser compatible con la estructura algebraica de dicho grupo. La manera natural de hacer esto, es relacionar la continuidad con las operaciones del grupo. De esta forma, introducimos la siguiente definición:

1.1 Definición. Sea G un grupo con una operación $*$, y sea τ una topología sobre G tal que (G, τ) es un espacio topológico de Hausdorff. Considere $m : G \times G \to G$ definida por $m(g, h) = g * h$ para cada $(g, h) \in G \times G$, y también $i : G \to G$ definida por $i(g) = g^{-1}$, en donde g^{-1} denota al inverso del elemento $g \in G$ respecto de la operación $*$. Diremos que la terna $(G, *, \tau)$ es un *grupo topológico* si la función m es continua en el espacio producto $(G \times G, \tau_{G\times G})$ y la función i es continua en el espacio (G, τ).

Notemos que m e i son las funciones usuales de multiplicación e inversión de un grupo G. No es difícil ver que la definición anterior equivale a pedir que la función $(g, h) \mapsto g * h^{-1}$, de $G \times G$ en G, sea continua.

Como es usual en álgebra, la frase "grupo" es sinónimo de la frase "grupo algebraico", y por comodidad, cuando G sea un grupo o un grupo topológico, vamos a prescindir de la notación $*$. Esto es, en vez de escribir $g * h$ escribiremos simplemente gh, cuando no haya alguna ambigüedad. Asimismo, en el caso de grupo topológicos también vamos a prescindir en algunas ocasiones de escribir explícitamente τ como la topología del espacio G. De forma que cuando hablemos de un grupo topológico G, debe quedar claro que está equipado con una operación y una topología compatibles entre sí. Una observación casi obvia es la siguiente.

1.2 Observación. Si G es un grupo topológico, entonces la inversión es un homeomorfismo, pues su función inversa es ella misma. En particular, si $U \subseteq G$ es abierto, entonces U^{-1} también lo es, donde U^{-1} denota el conjunto de los u^{-1} tales que $u \in U$.

1.3 Ejemplos.

1. Considere $\mathbb{R}^n$ equipado con la suma usual y su topología usual. Es sabido que la función $(x, y) \mapsto x + y$, de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es continua, y que la función $x \mapsto -x$ también lo es. Así, $\mathbb{R}^n$ es un ejemplo de un grupo topológico.

2. Considere $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{Z} : |z| = 1\}$. Si equipamos a $\mathbb{T}$ con el producto usual entre números complejos, entonces $\mathbb{T}$ es un grupo. Para notarlo, simplemente basta recordar que el producto de dos números complejos de módulo 1 también tiene módulo 1, y que en particular los complejos de módulo 1 admiten inverso multiplicativo. Equipando además a $\mathbb{T}$ con

la topología heredada de $\mathbb{C}$. No es difícil probar que la multiplicación de números complejos también es una función continua, así como la inversión. Entonces $\mathbb{T}$ es un grupo topológico. A menudo, $\mathbb{T}$ es llamado el *grupo círculo* (notemos que $\mathbb{T}$ no es más que la circunferencia de radio 1 centrada en el origen en el plano complejo).

3. Cualquier grupo es evidentemente un grupo topológico, si lo equipamos con la topología discreta.

La definición de grupo topológico puede ser reescrita en términos de abiertos, dejando implícito que en verdad se está hablando de la continuidad de las funciones multiplicación e inversión. Recordemos antes que dado un grupo G y $U, V \subseteq G$, denotamos con UV al conjunto de todos los productos uv tales que $u \in U$ y $v \in V$. Si $g \in G$ está fijo, entonces Ug es el conjunto $U\{g\}$, y análogamente se define gU. Además, usualmente denotaremos e_G como al elemento neutro de G, o simplemente e cuando no haya riesgo de confusión.

1.4 Proposición. Sea G un grupo topológico, $A \subseteq G$ abierto y $x, y \in G$ tales que $xy^{-1} \in A$. Entonces existen $U, V \subseteq G$ abiertos tales que $x \in U, y \in V$ y $UV^{-1} \subseteq A$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi : G \times G \to G$ la función definida por $\phi(g, h) = gh^{-1}$ para cada $(g, h) \in G \times G$. Como G es grupo topológico, ϕ es una función continua. Así pues, como $\phi(x, y) = xy^{-1} \in A$, por la continuidad existe un abierto básico $U \times V$ del producto $G \times G$, donde $U, V \subseteq G$ son abiertos, tal que $(x, y) \in U \times V$ y $UV^{-1} = \phi(U \times V) \subseteq A$. $\square$

No es difícil notar que en la demostración anterior no se hizo más que reescribir la definición de grupo topológico. En otras palabras, la Proposición 1.4 es, en esencia, equivalente a la definición dada en 1.1. A continuación, establecemos esto último como un corolario.

1.5 Corolario. Sea G un grupo, equipado con una topología de Hausdorff. Entonces G es un grupo topológico si y sólo si para cualesquiera $x, y \in G$ y $A \subseteq G$ abierto tales que $xy^{-1} \in A$, se tiene que existen abiertos $U, V \subseteq G$ tales que $x \in U, y \in V$ y $UV^{-1} \subseteq A$.

1.6 Corolario. Sea G un grupo topológico, $A \subseteq G$ abierto y $x, y \in G$.

1. Si $xy \in A$, entonces existen abiertos $U, V \subseteq A$ tales que $x \in U, y \in V$ y $UV \subseteq A$.

2. Si $x^{-1} \in A$, entonces existe un abierto $V \subseteq A$ tal que $x \in V$ y $V^{-1} \subseteq A$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Siguiendo la notación de la Proposición 1.4, notemos que $\phi(x, y^{-1}) = x(y^{-1})^{-1} = xy \in A$. Por la Proposición 1.4, existen $U, V \subseteq G$ abiertos tales que $x \in U, y^{-1} \in V$ y $UV^{-1} \subseteq A$. Llamando $V' = V^{-1}$, se tiene que V' es abierto (por la Observación 1.2), $y \in V'$ y $UV' \subseteq A$.

2. Notemos que $\phi(e, x) = x^{-1} \in A$. Por la Proposición 1.4, se tiene que existen abiertos $U, V \subseteq G$ tales que $e \in U, x \in V$ y $UV^{-1} \subseteq A$. Notemos ahora que $V^{-1} \subseteq UV^{-1}$, ya que si $v \in V$, entonces $v^{-1} = ev^{-1} \in UV^{-1}$. Luego $V^{-1} \subseteq A$. □

Como consecuencia de la definición, la noción de grupo topológico se preserva bajo la operación producto topológico, como demuestra el siguiente teorema. Hay que aclarar que cuando hablemos en general de un producto de espacios $\prod_{i \in I} X_i$, para denotar a sus elementos usaremos la notación coordenada $(x_i)_{i \in I}$, donde cada $x_i \in X_i$. También, si $\{G_i : i \in I\}$ es una familia no vacía de grupos, entonces equipamos de forma natural al producto $\prod_{i \in I} G_i$ con la operación $xy := (x_i y_i)_{i \in I}$, en donde $x = (x_i)_{i \in I}$ y $y = (y_i)_{i \in I}$. No es difícil comprobar que $\prod_{i \in I} G_i$ es efectivamente un grupo.

1.7 Teorema. Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia no vacía de grupos topológicos. Entonces $G := \prod_{i \in I} G_i$ con la topología producto es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos el Corolario 1.5. Sean $x, y \in G$ y $A \subseteq G$ abierto tal que $xy^{-1} \in A$, en donde $x = (x_i)_{i \in I}$ y $y = (y_i)_{i \in I}$. Como A es abierto, podemos hallar un abierto básico, digamos $W = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(A_j)$ tal que $xy^{-1} \in W \subseteq A$, en donde A_j es abierto en G_{i_j} para cada $j \in \{1, ..., k\}$. Entonces, para cada $j \in \{1, ..., k\}$ se tiene que $x_{i_j} y_{i_j}^{-1} \in A_j$, y como por hipótesis todos los G_i son grupos topológicos, entonces existen abiertos $U_{i_j}, V_{i_j} \subseteq G_{i_j}$ tales que $x_{i_j} \in U_{i_j}, y_{i_j} \in V_{i_j}$ y $U_{i_j} V_{i_j}^{-1} \subseteq A_j$.

Considere $U = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ y $V = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_{i_j}^{-1}(V_{i_j})$. Por construcción $x \in U$ y $y \in V$. Demostremos ahora que $UV^{-1} \subseteq A$. Sea $z \in UV^{-1}$, entonces $z = uv^{-1}$ en donde $u = (u_i)_{i \in I} \in U$ y $v = (v_i)_{i \in I} \in V$. Luego, por definición $u_{i_j} \in U_{i_j}$ y $v_{i_j} \in V_{i_j}$, de lo cual se tiene que $u_{i_j} v_{i_j}^{-1} \in U_{i_j} V_{i_j}^{-1} \subseteq A_j$ para cada $j \in \{1, ..., k\}$. Esto muestra que $uv^{-1} \in W \subseteq A$. Por lo tanto $UV^{-1} \subseteq A$. Finalmente, como G es un espacio de Hausdorff entonces G es un grupo topológico. $\square$

1.3. Propiedades de grupos topológicos

A continuacion demostraremos propiedades básicas y útiles de los grupos topológicos. Es normal pensar que los grupos topológicos tengan propiedades que ya hemos visto en cursos básicos de análisis. Por ejemplo, cuando tenemos una transformación lineal entre espacios normados, es suficiente probar que dicha transformación es continua en 0 para demostrar que es continua en todo su dominio. Aquí el papel de las transformaciones lineales lo harán los homomorfismos entre los grupos topológicos. En realidad, éste es un caso particular ya que los espacios normables son grupos topológicos.

Otro ejemplo básico es que en $\mathbb{R}^n$ las traslaciones de conjuntos abiertos también son abiertos. O que las traslaciones de una vecindad del origen son vecidades del punto sobre el cual se está trasladando. Ambas cosas se abstraen en la siguiente proposición.

1.8 Proposición. Sea G un grupo topológico y $g \in G$ fijo. Entonces:

1. Las funciones $x \mapsto xg$ y $x \mapsto gx$ son homeomorfismos. La primera función es llamada traslación derecha de G por g, y la segunda traslación izquierda de G por el punto g.

2. Sea $\mathcal{B}_e$ una base local de G en el punto e. Entonces $\mathcal{B}_g := \{Ug : U \in \mathcal{B}_e\}$ es una base local de G en el punto g. La misma conclusión se obtiene para el conjunto $\mathcal{B}'_g := \{gU : U \in \mathcal{B}_e\}$.

Demostración.

1. Consideremos la traslación derecha $T_g(x) = xg$ para cada $x \in G$. Considere ahora la multiplicación $m : G \times G \to G$, la cual es continua porque G es un grupo topológico. Y considere ahora el homeomorfismo natural $h : G \to G \times \{g\}$ dado por $h(x) = (x, g)$ para cada $x \in G$. Entonces $T_g = m\restriction_{G\times\{g\}} \circ h$, y por lo tanto T_g es continua. Por otro lado, es claro que la inversa de T_g es la función cuya regla es $x \mapsto xg^{-1}$. De la misma forma se prueba que ésta es una función continua (pues es también una traslación derecha), y por ello T_g es un homeomorfismo.

   Análogamente se puede demostrar que la traslación izquierda es un homeomorfismo.

2. Por el inciso anterior, para cada $U \in \mathcal{B}_e$, se tiene que $T_g(U) = Ug$ es vecindad de g. Para probar que $\mathcal{B}_g$ es base local, tomemos $V \subseteq G$ cualquier vecindad de g. Como $e \in Vg^{-1}$ y por un argumento como el anterior, tenemos que Vg^{-1} es vecindad de e. Por lo tanto existe $U \in \mathcal{B}_e$ tal que $e \in U \subseteq Vg^{-1}$. Se sigue entonces que $g \in Ug \subseteq V$. □

El siguiente resultado nos dice que para que un subgrupo de un grupo topológico sea abierto, es necesario y suficiente que contenga un subconjunto abierto (no vacío). Esto implica que si un subgrupo no es abierto, entonces su interior es vacío.

1.9 Corolario. Supongamos que H es un subgrupo de un grupo topológico G. Si existe $\emptyset \neq U \subseteq G$ abierto con $U \subseteq H$ entonces H es abierto en G.

Demostración. Basta notar que $H = \bigcup_{a\in H} Ua$, pues cada Ua es abierto en G por la Proposición 1.8. En efecto, si $a \in H$ y $u \in U$, entonces $a = u(u^{-1}a) \in Uu^{-1}a$ y $u^{-1}a \in H$, por tanto a pertenece a la unión. Recíprocamente, si $a \in H$, es claro que cada elemento de Ua pertenece a H, por ser H subgrupo. Entonces se tiene la igualdad deseada. □

El siguiente resultado, sin embargo, nos dice que todo subgrupo abierto de un grupo topológico es también cerrado.

1.10 Corolario. Supongamos que H es un subgrupo abierto de un grupo topológico G, entonces H es cerrado en G.

Demostración. Considere $\mathcal{U} := \{Ha : a \in G\}$. Por la Proposición 1.8, se tiene que cada elemento de $\mathcal{U}$ es abierto, y por ello $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de G. De hecho, $\mathcal{U}$ es el conjunto de clases laterales derechas, y por ello es una partición de G. En particular, el complemento de cada clase lateral Ha es la unión del resto de clases laterales, y por tanto Ha es cerrado para cada $a \in G$. En particular, para $a = e$, se tiene que $He = H$ es cerrado en G. $\square$

Por definición, un homomorfismo entre grupos topológicos es un homomorfismo en el sentido algebraico, entre los grupos topológicos en cuestión. A continuación establecemos una condición suficiente para que un homomorfismo entre grupos topológicos sea continuo.

1.11 Proposición. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. Si f es continuo en e_G, entonces f es continuo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in G$ y sea $U \subseteq H$ abierto tal que $f(x) \in U$. Entonces $f(e_G) = e_H \in Uf(x)^{-1}$ y $Uf(x)^{-1}$ es abierto en H. Por la continuidad de f en e_G, se tiene que existe V abierto tal que $e_G \in V$ y $f(V) \subseteq Uf(x)^{-1}$. Por ello, $x \in Vx$, Vx es abierto en G y $f(Vx) = f(V)f(x) \subseteq Uf(x)^{-1}f(x) = U$. $\square$

Algo parecido pasa con las funciones abiertas.

1.12 Proposición. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. Si para cada vecindad abierta U del neutro e_G, se tiene que $f(U)$ es vecindad del neutro e_H, entonces f es abierta.

DEMOSTRACIÓN. Sea V un conjunto abierto en G y sea $h \in f(V)$. Entonces existe $v \in V$ tal que $h = f(v)$. Notemos que $v^{-1}V$ es una vecindad abierta de e_G, luego por hipótesis $f(v^{-1}V) = h^{-1}f(V)$ es una vecindad del neutro e_H. Como las traslaciones son homeomorfismos y $hh^{-1}f(V) = f(V)$, se tiene que $f(V)$ es vecindad de h. Por lo tanto existe un abierto $V' \subseteq H$ tal que $h \in V' \subseteq f(V)$, lo cual muestra que h es punto interior de $f(V)$. Por lo tanto f es abierta. $\square$

Dado un grupo topológico G, diremos que G es *precompacto* (también llamado *totalmente acotado*) si para cada vecindad V de e_G se tiene que existe $A \subseteq G$ finito tal que $AV = G = VA$.

1.13 Proposición. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo sobreyectivo entre grupos topológicos. Si G es precompacto, entonces H es precompacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea V una vecindad del neutro e_H. Como f es continua y $e_G \in f^{-1}(V)$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es una vecindad de e_G. Como G es precompacto, existe $A \subseteq G$ finito tal que $Af^{-1}(V) = G = f^{-1}(V)A$. Como f es sobreyectiva, entonces $f(A)V = H = Vf(A)$, y por ser f función se tiene que $f(A)$ es finito. Por lo tanto H es precompacto. □

Las propiedades que vamos a enunciar a continuación serán utilizadas con frecuencia a lo largo de este trabajo. Básicamente, el siguiente teorema nos describe las propiedades que tienen las bases locales en el neutro e de un grupo topológico.

1.14 Teorema. Sean G un grupo topológico y $\mathcal{U}$ una base local formada por vecindades abiertas del neutro $e \in G$. Sea $U \in \mathcal{U}$. Entonces:

1. Existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$.
2. Existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.
3. Para cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $Vx \subseteq U$.
4. Para cada cada $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.
5. Para cada $V \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.
6. $\{e\} = \bigcap \mathcal{U}$.
7. Existe $\mathcal{U}'$ base local formada por abiertos del neutro e tal que $U = U^{-1}$ para cada $U \in \mathcal{U}'$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Notemos que $e = ee \in U$. Por el Corolario 1.6, existen abiertos $U', V' \subseteq G$ tales que $e \in U', e \in V'$ y $U'V' \subseteq U$. Por ello, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U' \cap V'$, y entonces
$$V^2 \subseteq (U' \cap V')(U' \cap V') \subseteq U'V' \subseteq U.$$
2. Esto es inmediato del Corolario 1.6 y del hecho de que $e^{-1} = e \in U$.

3. Sea $x \in U$. Por la continuidad de la función $y \mapsto yx$ y del hecho de que $ex = x \in U$, se sigue que existe un abierto V' tal que $e \in V'$ y $V'x \subseteq U$. Por tanto existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq V'$, y entonces $Vx \subseteq V'x \subseteq U$.

4. No es difícil probar que la función $y \mapsto xyx^{-1}$ es continua, y como $e = xex^{-1} \in U$, entonces existe V' abierto tal que $e \in V'$ y $xV'x^{-1} \subseteq U$. Similarmente al inciso anterior se tiene que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.

5. Sea $V \in \mathcal{U}$. Como $U \cap V$ es un abierto que contiene a e, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subseteq U \cap V$.

6. No es necesario usar aquí alguna propiedad particular de los grupos topológicos. Esto es inmediato del hecho de que G es T_1 y $\mathcal{U}$ una base local del punto e.

7. Si $U \in \mathcal{U}$, defínase $U_0 = U \cap U^{-1}$. Notemos que $U_0 \subseteq U$ es abierto, contiene al neutro y $U_0^{-1} = U$. Luego, basta definir $\mathcal{U}' := \{U \cap U^{-1} : U \in \mathcal{U}\}$. $\square$

Un subconjunto U de un grupo G es llamado simétrico si $U = U^{-1}$. De modo que en el último inciso del teorema anterior se demostró que cada grupo topológico tiene una base local de vecindades abiertas simétricas del neutro e.

Mientras tanto, seguiremos probando más propiedades. Recuerde que en $\mathbb{R}^n$, si A es abierto y B es cualquier subconjunto, entonces $A + B$ también es abierto. Si se recuerda cómo probar esto, entonces la prueba en grupos topológicos debería ser igualmente clara.

1.15 Proposición. Sea G un grupo topológico, $A \subseteq G$ abierto y $B \subseteq G$. Entonces AB y BA son subconjuntos abiertos de G.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición, 1.8, sabemos ya que las traslaciones son homeomorfismos en los grupos topológicos. Así que, si $b \in B$, entonces Ab es abierto en G. Luego, como AB es la unión de abiertos $\bigcup_{b \in B} Ab$, se tiene que AB también es abierto en G. Análogamente BA es abierto en G. $\square$

El siguiente resultado caracteriza la cerradura de cualquier subconjunto de un Grupo Topológico.

1.16 Teorema. Sea G un grupo topológico, $A \subseteq G$ y $\mathcal{B}_e$ una base local de G en el neutro e. Entonces:

1. Para cada $U \in \mathcal{B}_e$, se tiene que $\overline{A} \subseteq AU$.
2. Si $\mathcal{B}_e$ está formada por vecindades simétricas, entonces
$$\overline{A} = \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}_e\}.$$

Demostración.

1. Como $e = e^{-1} \in U$, por el Corolario 1.6 existe un abierto $V \subseteq G$ tal que $e \in V$ y $V^{-1} \subseteq U$. Sea $x \in \overline{A}$. Por la Proposición 1.8, xV es un abierto, y es claro que $x \in xV$. Es decir que $A \cap xV \neq \emptyset$. Sea $a \in A \cap xV$. Entonces existe $v \in V$ tal que $a = xv$, y por ello $x = av^{-1} \in AV^{-1} \subseteq AU$. Esto muestra que $\overline{A} \subseteq AU$.
2. Por el inciso anterior, es claro que $\overline{A} \subseteq \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}_e\}$.

   Para probar la otra contención, supongamos que $x \in G$ es tal que $x \notin \overline{A}$, y vamos a probar que x no está en la intersección de los AU. Por la Proposición 1.8, la familia de los conjuntos de la forma xW con W vecindad abierta del neutro e, forma una base local del punto x. Entonces como $x \notin \overline{A}$ existe una vecindad abierta W del neutro e tal que $(xW) \cap A = \emptyset$. Sea $U \in \mathcal{B}_e$ tal que $U \subseteq W$. Por hipótesis $U = U^{-1}$ y entonces obtenemos que:
$$(xU^{-1}) \cap A = (xU) \cap A \subseteq (xW) \cap A = \emptyset,$$
   lo cual implica que $x \notin AU$. Es decir, $x \notin \bigcap\{AU : U \in \mathcal{B}_e\}$. □

Otro hecho bastante útil es que la cerradura de cualquier subgrupo de un grupo topológico es nuevamente un subgrupo. Notemos la analogía con espacios vectoriales normados, en donde la cerradura de un subespacio vectorial vuelve a ser un subespacio vectorial.

1.17 Proposición. Sea G un grupo topológico, y $H \subseteq G$ un subgrupo. Entonces $\overline{H}$ es un subgrupo de G.

Demostración. Consideremos la función $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = xy^{-1}$, la cual es continua porque G es un grupo topológico. Como H es subgrupo, entonces

$$H \times H \subseteq f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(\overline{H}).$$

Y como $f^{-1}(\overline{H})$ es cerrado, entonces

$$\overline{H} \times \overline{H} = \overline{H \times H} \subseteq f^{-1}(\overline{H}).$$

El hecho de que $\overline{H} \times \overline{H} \subseteq f^{-1}(\overline{H})$ implica que $\overline{H} \cdot \overline{H}^{-1} \subseteq \overline{H}$. Notemos que esto último equivale a decir que $xy^{-1} \in \overline{H}$ para cualesquiera $x, y \in \overline{H}$. Por lo tanto $\overline{H}$ es un subgrupo de G. $\square$

Sea G un grupo topológico con elemento neutro e. Recuerde que la componente conexa del punto e es la unión de todos los subconjuntos conexos de G que contienen al punto e (además, es sabido que las componentes conexas son conjuntos conexos). Dicho de otra forma, la componente conexa de e será siempre el subconjunto conexo de G más grande que contiene al punto e. Un hecho relevante acerca de este conjunto es el siguiente.

1.18 Proposición. Sea G un grupo topológico y H la componente conexa del neutro e. Entonces H es un subgrupo normal de G y cerrado en G.

Demostración. Como ya hemos observado anteriormente, para demostrar que H es subgrupo es suficiente con ver que $H \cdot H^{-1} \subseteq H$. Notemos primero que $H \cdot H^{-1} = \bigcup_{h \in H} hH^{-1}$. Como la función inversión de un grupo topológico es un homeomorfismo y H es conexo, entonces H^{-1} es conexo. Similarmente como las traslaciones izquierdas son homeomorfismos, se tiene que hH^{-1} es conexo para cualquier $h \in H$. Además, para cada $h \in H$ se tiene que $e = hh^{-1} \in hH^{-1}$. Luego, por la definición de componente conexa se tiene que $hH^{-1} \subseteq H$, y por ello $H \cdot H^{-1} \subseteq H$.

Por otro lado, por el mismo argumento se tiene que si $a \in G$ entonces aHa^{-1} es conexo y $e \in aHa^{-1}$, por lo cual $aHa^{-1} \subseteq H$.

Finalmente como la cerradura de cualquier conjunto conexo es conexa y por la propiedad de la componente conexa se tiene que $\overline{H} \subseteq H$, entonces H es cerrado. □

Para terminar esta sección probaremos un resultado bastante útil, que a su vez es un método para generar nuevos grupos topológicos a partir de uno ya dado.

1.19 Teorema. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo sobreyectivo de grupos algebraicos, en donde G es además un grupo topológico. Definamos τ como la colección de todos los conjuntos de la forma $f(U)$ tal que U es un subconjunto abierto de G. Entonces τ es una topología de grupo sobre H, es decir, τ es una topología tal que $(H, *_H, \tau)$ es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN. Claramente $\emptyset \in \tau$, como f es sobreyectiva entonces $f(G) = H \in \tau$. Además, si $U_i \subseteq G$ es abierto para cada $i \in I$, entonces

$$\bigcup_{i\in I} f(U_i) = f\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) \in \tau.$$

Supongamos ahora que $U_1, U_2 \subseteq G$ son abiertos. Afirmamos que $f(U_1) \cap f(U_2) = f(U_1 \cap KU_2)$, en donde K es el núcleo del homomorfismo f. Efectivamente, si $z \in f(U_1) \cap f(U_2)$ entonces $z = f(x_1) = f(x_2)$ para algunos $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$, por lo cual $f(x_1 x_2^{-1}) = e_G$, es decir, $x_1 x_2^{-1} \in K$. Luego $x_1 \in Kx_2 \subseteq KU_2$. Esto muestra que $z = f(x_1) \in f(U_1 \cap KU_2)$. La otra contención es inmediata, porque la imagen directa tiene la siguiente propiedad respecto a intersecciones y porque f es un homomorfismo:

$$f(U_1 \cap KU_2) \subseteq f(U_1) \cap f(KU_2) = f(U_1) \cap f(U_2).$$

Así pues, como $U_1 \cap KU_2$ es abierto en G, se tiene que $f(U_1) \cap f(U_2) \in \tau$. Esto demuestra que τ es una topología sobre H.

Consideremos ahora a la función inversión $i : H \to H$, $i(h) = h^{-1}$. Si $U \subseteq G$ es abierto, es fácil comprobar que $i^{-1}(f(U)) = f(U^{-1}) \in \tau$. Por lo cual i es continua respecto de la topología τ.

Finalmente, consideremos la multiplicación $m : H \times H \to H$, $m(x, y) = xy$. Sea $(h_1, h_2) \in H \times H$ y $f(V) \in \tau$, donde $V \subseteq G$ es abierto, tal que

$m(h_1, h_2) = h_1 h_2 \in f(V)$. Como f es sobreyectiva, existen $g_1, g_2 \in G$ tales que $f(g_1) = h_1$ y $f(g_2) = h_2$. Como f es homomorfismo, entonces $f(g_1 g_2) = h_1 h_2 \in f(V)$. Por lo tanto, $g_1 g_2 \in f^{-1}(f(V)) = VK$. Por ello, existe $k \in K$ tal que $g_1 g_2 k \in V$. Llamemos $g_2' := g_2 k$, de modo que $f(g_1 g_2) = f(g_1 g_2')$ y $g_1 g_2' \in V$. Como V es abierto en G y G es un grupo topológico, existen $V_1, V_2 \subseteq G$ abiertos tales que $g_1 \in V_1$, $g_2' \in V_2$ y $V_1 V_2 \subseteq V$.

Por lo tanto, si $h_1' \in f(V_1)$ y $h_2' \in f(V_2)$ entonces

$$h_1' h_2' \in f(V_1) f(V_2) = f(V_1 V_2) \subseteq f(V).$$

Y esto muestra que:

$$(h_1, h_2) \in f(V_1) \times f(V_2) \subseteq m^{-1}(f(V)).$$

Por ello, (h_1, h_2) es punto interior de $m^{-1}(f(V))$. Entonces $m^{-1}(f(V))$ es abierto en $H \times H$. Es decir que m es continua en (H, τ), como queríamos demostrar.

Finalmente, veamos que (H, τ) es de Hausdorff. Sean $x, y \in H$ distintos. Como f es una función sobreyectiva, $f(x_0) = x$ y $f(y_0) = y$ para algunos $x_0, y_0 \in G$. Necesariamente $x_0 \neq y_0$, luego existen U_1 y U_2 abiertos en G tales que $x_0 \in U_1, y_0 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2$. Entonces $x \in f(U_1), y \in f(U_2)$ y $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$. □

El término usado en el enunciado del Teorema 1.19 será frecuentemente útil en este trabajo. Establecemos formalmente su significado.

1.20 Definición. Sea G un grupo. Si τ es una topología sobre G tal que $(G, *_G, \tau)$ es un grupo topológico, entonces τ será llamada topología de grupo sobre G. También diremos que τ es compatible con la estructura de grupo de G, o simplemente que es compatible con G.

Un resultado importante es que todo grupo topológico es de Tychonoff, y lo enunciamos en el siguiente teorema. La demostracion se sigue de que todo grupo topológico de Hausdorff admite una estructura de espacio uniforme, y todo espacio uniforme es un espacio de Tychonoff. Esto es teoría que no utilizaremos en este trabajo, pero la demostración de estos resultados puede consultarse en [3].

1.21 Teorema. Todo grupo topológico de Hausdorff es un espacio de Tychonoff.

1.4. Cocientes de grupos topológicos

Una manera muy útil de construir nuevos grupos a partir de otros, es realizar un cociente entre un grupo y un subgrupo normal de él. La construcción de cocientes de grupos topológicos en realidad no difiere mucho de esta idea. Recuerde que dado un grupo G y un subgrupo normal de él, digamos H, denotamos por G/H a todas las clases laterales derechas o izquierdas de H, es decir, a todos los conjuntos de la forma aH tal que $a \in H$, o bien los de la forma Ha tal que $a \in H$. No hay una diferencia esencial entre tomar unas clases laterales o las otras. Es fácil notar que si tomamos a las clases laterales derechas se obtienen las mismas propiedades que si tomamos a las clases laterales izquierdas. Usualmente utilizaremos la definición con clases laterales izquierdas. Luego, en G/H definimos una operación natural definida mediante la regla $aH \cdot bH := abH$ (similarmente para clases laterales derechas) y esto resulta en un nuevo grupo llamado el grupo cociente entre G y H. Es claro que en grupos topológicos se puede realizar la misma construcción, pero lo natural sería establecer una topología en dicho grupo para hacer de el cociente un grupo topológico. El siguiente teorema resuelve esta cuestión. Recuerde que, en este contexto, la proyección natural, o bien la proyección canónica es el homomorfismo $\pi : G \to G/H$ definido por la regla $\pi(a) = aH$ para cada $a \in G$. Asimismo, equipamos a G/H con la topología cociente inducida por la función π. Por la definición de topología cociente esta función es continua.

1.22 Lema. Si G un grupo topológico y H un subgrupo normal de G, entonces la proyección natural $\pi : G \to G/H$ es abierta.

DEMOSTRACIÓN. Sea $U \subseteq G$ abierto. Afirmamos que $\pi^{-1}(\pi(U)) = UH$. En efecto. Si $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$ entonces $\pi(x) = xH \in \pi(U) = \{gH : g \in U\}$. Por lo cual, existe $g \in U$ tal que $xH = gH$, es decir, $g^{-1}x \in H$, de donde $x \in gH \subseteq UH$. Recíprocamente, si $u \in U$ y $h \in H$ entonces $\pi(uh) = uhH = uH \in \pi(U)$. Esto demuestra la afirmación.

Como UH es abierto en G (pues U lo es), tenemos que $\pi^{-1}(\pi(U))$ es abierto en G. Entonces por definición de topología cociente se tiene que $\pi(U)$ es abierto en G/H, lo que demuestra que π es una función abierta. $\square$

Una consecuencia casi inmediata del Lema 1.22 es la siguiente.

1.23 Corolario. Si G es un grupo topológico primero numerable y H un subgrupo normal de G, entonces G/H es primero numerable.

Demostración. Sea $xH \in G/H$. Sea $\mathcal{B}_x$ una base local de x numerable. Entonces $\{\pi(U) : U \in \mathcal{B}_x\}$ es una base local numerable del punto xH. En efecto, cada $\pi(U)$ es una vecindad de xH, pues $x \in U$ y π es abierta por el Lema 1.22. Si $V \subseteq G/H$ es un abierto tal que $xH \in V$, entonces $x \in \pi^{-1}(V)$ y por ello existe $U \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in U \subseteq \pi^{-1}(V)$, y por lo tanto $\pi(x) = xH \subseteq \pi(U) \subseteq \pi(\pi^{-1}(V)) = V$. La última igualdad es válida porque π es sobreyectiva. $\square$

1.24 Lema. Sean G un grupo topológico y H un subgrupo normal de G. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. G/H es T_2.
2. G/H es T_1.
3. H es cerrado en G.

Demostración. Claramente si G/H es T_2 entonces G/H es T_1.

Supongamos que G/H es T_1, luego $\{H\}$ es cerrado en G/H, por ello $H = \pi^{-1}(\{H\})$ es cerrado en G.

Finalmente supongamos que H es cerrado en G. Recuerde que para probar que G/H es T_2 es suficiente mostrar que la diagonal D de $G/H \times G/H$ es cerrada en dicho espacio. Notemos ahora que si $(gH, g'H) \in G/H \times G/H$ entonces $gH \neq g'H$ es equivalente a que $g^{-1}g' \notin H$. Definimos U como el conjunto

$$U := (G/H \times G/H) \setminus D = \{(gH, g'H) : g^{-1}g' \notin H\}.$$

Bastará ver entonces que U es abierto en $G/H \times G/H$. Consideremos la función

$$q := \pi \times \pi : G \times G \to G/H \times G/H$$

la cual es abierta porque es el producto de dos funciones abiertas. Notemos ahora que

$$q^{-1}(U) = \{(g, g') : g^{-1}g' \notin H\}.$$

Considere ahora la función $f : G \times G \to G$ dada por $f(x, y) = x^{-1}y$. Es claro que $q^{-1}(U) = f^{-1}(G \setminus H)$, y por ello $q^{-1}(U)$ es abierto en $G \times G$, pues f es continua y H es cerrado. Finalmente, como q es sobreyectiva y abierta, entonces $U = q(q^{-1}(U))$ es abierto en $G/H \times G/H$. □

En Topología General se llama función cociente a una función continua $q : X \to Y$ y sobreyectiva con la siguiente propiedad: para cada $U \subseteq Y$, se tiene que U es abierto en Y si y sólo si $q^{-1}(U)$ es abierto en X. Dos hechos relevantes respecto a las funciones cociente son que el producto de funciones cocientes es una función cociente, y además, si $q : X \to Y$ es una función cociente y $f : Y \to Z$ es una función (donde Z es un espacio topológico arbitrario), entonces f es continua si y sólo si $f \circ q$ lo es. Es claro además que la función $\pi : G \to G/H$ (en el contexto de los lemas anteriores) es una función cociente, pues G/H está equipado con la topología cociente. Con estos hechos a la mano podemos establecer el siguiente resultado.

1.25 Teorema. Si G es un grupo topológico, H es un subgrupo normal y cerrado de G, entonces G/H es un grupo topológico.

Demostración. Sea $m_c : G/H \times G/H \to G/H$ la función dada por

$$m_c(xH, yH) = xyH$$

(la función multiplicación en G/H).

Consideremos $q := \pi \times \pi : G \times G \to G/H \times G/H$. Por lo dicho anteriormente al enunciado de este teorema, se tiene que q es una función cociente. Por ello, para probar que m_c es continua, basta verificar que $m_c \circ q$ es continua. Esto es en realidad inmediato, porque $m_c \circ q = \pi \circ m$, en donde $m : G \times G \to G$ es la función multiplicación en G.

Algo similar ocurre en el caso de la función inversión. En efecto, sea $i_c : G/H \to G/H$ dada por $i_c(xH) = x^{-1}H$. Para probar que i_c es continua es necesario y suficiente verificar que $i_c \circ \pi$ lo es; pero $i_c \circ \pi = \pi \circ i$, en donde $i : G \to G$ es la función inversión en G. Por lo tanto G/H es un grupo topológico.

Finalmente, por el Lema 1.24, G/H es T_2. □

1.5. Isomorfismos topológicos

Tanto en Álgebra como en Topología, es común el estudio de las funciones que preservan la estructura de los objetos de estudio de estas áreas de la matemática. En la teoría de grupos algebraicos, estudiamos isomorfismos porque preservan la estructura de los grupos, sin importar la naturaleza de sus elementos. Grupos isomorfos entre sí tienen las mismas propiedades algebraicas. En Topología también estudiamos los homeomorfismos, porque espacios topológicos homeomorfos entre sí tienen las mismas propiedades topológicas. Mientras que en la teoría de grupos topológicos necesitamos estudiar ambas cosas a la vez, necesitamos introducir funciones que preserven simultáneamente la estructura de grupo y la de espacio topológico. En esta sección, establecemos la importante definición de isomorfismo topológico y enunciamos y demostramos la versión del Teorema de Isomorfismo para grupos topológicos. Más profundamente, podemos considerar a los grupos topológicos como una categoría en donde los morfismos son los homomorfismos continuos y la composición es la composición usual de funciones. Entonces resulta más claro que los homomorfismos continuos cuya función inversa es también un homomorfismo continuo son los isomorfismos en esta categoría.

1.26 Definición. Supongamos que $f : G \to H$ es un homomorfismo entre grupos topológicos. Si f es un isomorfismo de grupos y un homeomorfismo entre los espacios topológicos G y H, entonces f será llamada *isomorfismo topológico* (entre G y H). Si existe un isomorfismo topológico entre G y H, entonces diremos que G y H son topológicamente isomorfos y escribiremos $G \cong H$.

1.27 Teorema (Teorema de Isomorfismo)**.** Sea $f : G \to H$ un epimorfismo (homomorfismo sobreyectivo) continuo entre grupos topológicos. Sea $K = \ker f$. Si f es una función abierta, entonces $G/K \cong H$.

Demostración. Consideremos $\widetilde{f} : G/K \to H$ definida por $\widetilde{f}(xK) = f(x)$ para cada clase lateral izquierda $xK \in G/K$. No es del todo inmediato que $\widetilde{f}$ sea una función. Para comprobar esto, supongamos que $xK = yK$, entonces $y^{-1}x \in K$, por lo que $f(x) = f(y)$, lo que muestra que f está bien definida. Este paso es reversible, es decir si $f(x) = f(y)$ entonces $xK = yK$, por lo que $\widetilde{f}$ es además una función inyectiva.

Notemos ahora que $\widetilde{f} \circ \pi = f$, por lo que, siendo π una función cociente, se tiene que $\widetilde{f}$ es continua.

Por otro lado, $\widetilde{f}$ es un homomorfismo, ya que si $xK, yK \in G/H$ entonces

$$\widetilde{f}(xKyK) = \widetilde{f}(xyK) = f(xy) = f(x)f(y) = \widetilde{f}(xK)\widetilde{f}(yK).$$

Ahora, si $h \in H$ es arbitrario, como f es sobreyectiva existe $x \in G$ tal que $\widetilde{f}(xK) = f(x) = h$, por lo que $\widetilde{f}$ es también sobreyectiva.

Basta probar ahora que $\widetilde{f}$ es una función abierta. Efectivamente, sea $V \subseteq G/K$ abierto. Es decir, $\pi^{-1}(V)$ es abierto en G. Como π es sobreyectiva, se tiene que $V = \pi(\pi^{-1}(V))$. Por lo tanto

$$\widetilde{f}(V) = \widetilde{f}(\pi(\pi^{-1}(V))) = f(\pi^{-1}(V)).$$

Como f es abierta, entonces $f(\pi^{-1}(V))$ es abierto en H. Esto demuestra que $\widetilde{f}$ es abierta. Concluimos que $\widetilde{f}$ es un isomorfismo topológico. $\square$

El Teorema 1.27 es llamado Primer Teorema de Isomorfismo para grupos topológicos. Al igual que su versión en grupos, módulos, etc., este resultado es la clave de muchas demostraciones en teoría de grupos topológicos.

Finalmente, hacemos la siguiente observación.

1.28 Observación. Supongamos que G es un grupo topológico y H un conjunto tal que existe una función biyectiva $f : G \to H$. Entonces existe una única estructura de grupo y una única estructura de espacio topológico sobre H tal que H resulta un grupo topológico y f un isomorfismo topológico.

Demostración. Para heredar una operación algebraica en H, basta definir $h_1 * h_2 := f(g_1 g_2)$ (con esto, H tiene estructura de grupo), en donde $g_1, g_2 \in G$

son los únicos elementos tales que $f(g_1) = h_1$ y $f(g_2) = h_2$ (esta definición hace que f sea homomorfismo). Por otro lado, declaramos los abiertos en H de la siguiente forma: diremos que $A \subseteq H$ es abierto si y sólo si $f^{-1}(A)$ es abierto en G (y finalmente con esto vemos que f es homeomorfismo). Es rutinario probar que H es un grupo topológico. □

1.6. Grupos libres

La idea de grupo libre nos hace recordar la noción de subespacio generado por un conjunto en un espacio vectorial. Informalmente, un grupo libre de un conjunto $X \neq \emptyset$ (o sobre un conjunto X) es un grupo G en el que cada uno de sus elementos se puede escribir de manera única como producto finito de elementos de X, salvo relaciones triviales como $x = xyy^{-1}$. Para evitar este tipo de relaciones triviales se suele optar por reducir la expresión, y entonces el problema de la unicidad queda resuelto. Claramente si dicho grupo G existe, entonces X lo genera algebraicamente, y el hecho de que todo elemento se escriba de manera única nos hace recordar, como hemos dicho, al caso de espacios vectoriales y sus bases. Es por ello que en este contexto el conjunto X será llamado base libre del grupo libre G. Introducimos formalmente la definición de grupo gibre y grupo abeliano libre.

1.29 Definición. Sea X un conjunto no vacío. Supongamos que G es un grupo para el cual existe una función $\sigma : X \to G$ que tiene las siguientes dos propiedades:

1. $\langle \sigma(X) \rangle = G$, en donde $\langle \sigma(X) \rangle$ denota al subgrupo generado por $\sigma(X)$ en el grupo G.

2. Si H es un grupo, entonces para toda función $f : X \to H$ existe un único homomorfismo $\widetilde{f} : G \to H$ tal que $\widetilde{f} \circ \sigma = f$.

Entonces G será llamado el *grupo libre* de X, y será denotado por $F_a(X)$. Si en lo anterior pedimos que G y H sean grupos abelianos, entonces G es llamado el *grupo abeliano libre* de X, y será denotado por $A_a(X)$. En ambos casos llamaremos a X base libre de los grupos libres $F_a(X)$ y $A_a(X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Un resultado sencillo de probar es que la anterior función σ es inyectiva. Por el momento, suponemos la existencia y unicidad (salvo isomorfismos) del grupo libre (o abeliano libre) sobre un conjunto X.

1.30 Proposición. Sea $X \neq \emptyset$ y G el grupo libre (o bien, abeliano libre) de X. Entonces σ es una función inyectiva.

Demostración. Si $|X| = 1$, es claro que σ es inyectiva. Supongamos que $|X| > 1$. Considere $\mathbb{Z}$ equipado con la suma usual. Es claro que $\mathbb{Z}$ es un grupo. Sean $x \neq y$ elementos en X y sea $f : X \to \mathbb{Z}$ la función dada por $f(x) = 1, f(y) = 2$ y $f(a) = 0$ para todo $a \in X \setminus \{x, y\}$. Entonces existe un homomorfismo $\widetilde{f} : F_a(X) \to \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{f} \circ \sigma = f$. Si ocurriera que $\sigma(x) = \sigma(y)$, entonces

$$1 = f(x) = \widetilde{f}(\sigma(x)) = \widetilde{f}(\sigma(y)) = f(y) = 2.$$

Como lo anterior es falso, debe ocurrir que $\sigma(x) \neq \sigma(y)$. $\square$

No es difícil probar que dos grupos libres (respectivamente, abelianos libres) de un mismo conjunto son isomorfos. De hecho, al principio del siguiente capítulo probarems este hecho para el caso de grupos topológicos libres (respectivamente, abelianos libres), y como la prueba de esto es esencialmente la misma, la omitimos en esta sección.

Siendo σ inyectiva, podemos indentificar a X con su imagen $\sigma(X)$. Luego, podemos suponer que $\sigma = i : X \to G$ es la función inclusión, y entonces la primera propiedad equivale a pedir que X genere algebraicamente al grupo G, mientras que la segunda propiedad se traduce en que toda función $f : X \to H$ admite una única extensión a un homomorfismo $\widetilde{f} : G \to H$. Esto permite probar fácilmente que conjuntos de la misma cardinalidad tienen grupos libres isomorfos.

1.31 Proposición. Sean $X, Y \neq \emptyset$ y $\phi : X \to Y$ una función biyectiva. Entonces $F_a(X)$ es algebraicamente isomorfo a $F_a(Y)$. Lo mismo ocurre con $A_a(X)$ y $A_a(Y)$.

Demostración. Como $Y \subseteq F(Y)$, podemos ver a ϕ como una función $\phi : X \to F_a(Y)$. Sea $\widetilde{\phi} : F_a(X) \to F_a(Y)$ un homomorfismo que extiende a ϕ. De la misma forma podemos construir un homomorfismo $\widetilde{\phi^{-1}} : F_a(Y) \to F_a(X)$ que extiende a ϕ^{-1}. Sea $y \in F_a(Y)$. Como Y genera algebraicamente a $F_a(Y)$, existen $y_1, ..., y_n \in Y$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ tales que $y = y_1^{r_1} \cdot ... \cdot y_n^{r_n}$. Por lo tanto:

$$\widetilde{\phi}(\widetilde{\phi^{-1}}(y)) = \widetilde{\phi}(\phi^{-1}(y_1)^{r_1} \cdot ... \phi^{-1}(y_n)^{r_n}) = y_1^{r_1} \cdot ... \cdot y_n^{r_n} = y.$$

Por lo tanto $\widetilde{\phi} \circ \widetilde{\phi^{-1}}$ es la identidad en $F_a(Y)$. Análogamente $\widetilde{\phi^{-1}} \circ \widetilde{\phi}$ es la identidad en $F_a(X)$. En consecuencia, $\widetilde{\phi^{-1}} = \widetilde{\phi}^{-1}$. Por ello, $\widetilde{\phi}$ es isomorfismo de grupos. $\square$

Una construcción formal del grupo libre de un conjunto no vacío puede consultarse en [11].

Dado un conjunto no vacío X, un elemento $x \in F_a(X) \setminus \{e\}$ será llamado *palabra* en $F_a(x)$, o simplemente *palabra*. Si $x = e$, entonces x será llamado *palabra vacía*. Daremos por hecho las siguientes propiedades de un grupo libre. Una palabra x no vacía se puede expresar de manera única como $x = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_n^{\varepsilon_n}$, en donde $x_1, ..., x_n \in X$ y $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$. Esta expresión será llamada la *forma reducida de* x, y el elemento x será llamado *palabra en su forma reducida*. Además, al número n lo llamaremos *longitud de la palabra* x, o simplemente *longitud* de x.

Existe otra forma de expresar a los elementos de $F_a(X)$. Dada una palabra x no vacía, existen únicos $x_1, ..., x_n \in X$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $x = x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}$. En este caso diremos que x está expresado en su *forma normal*, o bien que x es una *palabra en su forma normal*.

Las propiedades anteriores son válidas en el caso del grupo abeliano $A_a(X)$, salvo que en este caso no se tiene unicidad en cuanto al orden de los factores.

Finalmente, hay que notar lo siguiente. Supongamos que tenemos un grupo G y un subconjunto no vacío X de G. La expresión que tiene cada palabra del grupo libre $F_a(X)$ mediante su forma normal, nos hace recordar a los elementos que pertenecen al subgrupo generado de un subconjunto dado de un grupo. Es decir, podría pensarse que $\langle X \rangle$ es algebraicamente, al grupo libre

$F_a(X)$, en donde $\langle X \rangle$ es el subgrupo generado de X dentro de un grupo dado. De hecho, parecería obvio que el isomorfismo tiene que estar dado por

$$x_1^{r_1} *_G ... *_G x_n^{r_n} \mapsto x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}.$$

Sin embargo, observemos que esta función puede no estar bien definida, porque la expresión del lado izquierdo puede no ser única para cada elemento de $\langle X \rangle$. En caso contrario sí tenemos un isomorfismo. El hecho de que los elementos en $\langle X \rangle$ se expresen de manera única en la forma $x_1^{r_1} *_G ... *_G x_n^{r_n}$ es equivalente a que el neutro e no puede escribirse como potencias de elementos de X salvo relaciones triviales. Enunciamos este hecho como el siguiente corolario.

1.32 Corolario. Sea G un grupo y $\emptyset \neq X \subseteq G$. Entonces $\langle X \rangle$ es isomorfo al grupo libre $F_a(X)$ si y sólo si para cualesquiera $x_1, ..., x_n \in X$ con $x_i \neq x_{i+1}^{\varepsilon}$ para toda $i \in \{1, ..., n-1\}, r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ se tiene que $x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n} \neq e_G$.

Capítulo 2

Grupos topológicos libres

2.1. Introducción

La idea fundamental de este capítulo es unir la noción de grupo libre junto con la de grupo topológico para hacerlas compatibles. Como se vio en el capítulo anterior, cualquier conjunto no vacío X está encajado en un grupo $F_a(X)$ de tal forma que X es base libre de $F_a(X)$, y además se vio que la característica más relevante de dicho grupo libre es que toda función $f : X \to G$, en donde G es un grupo arbitrario, se puede extender a un único homomorfismo $\widetilde{f} : F_a(X) \to G$. Recuerde además que si pedimos que los grupos involucrados sean abelianos, entonces obtenemos al grupo abeliano libre $A_a(X)$.

Nos preguntamos ahora si podemos realizar algo similar si añadimos a X una estructura de espacio topológico. De esta manera queremos verificar la existencia de un grupo topológico en el que X esté encajado, y además que tenga la propiedad de que toda función continua $f : X \to G$, en donde G es un grupo topológico arbitrario, se puede extender a un homomorfismo continuo. Dicho grupo topológico será llamado grupo topológico libre de X.

El resto del capítulo servirá para revisar un poco sobre las propiedades básicas que tienen los grupos topológicos libres, mientras que también veremos cómo utilizar esta nueva estructura.

2.2. Existencia de grupo topológico libre

En esta sección, introducimos el concepto de grupo topológico libre.

2.1 Definición.

1. Sea X un espacio topológico (no vacío) y G un grupo topológico. Supongamos que existe una función continua $\sigma : X \to G$ tal que $\langle\sigma(X)\rangle$ es denso en G y además para cada función continua $f : X \to H$ con H un grupo topológico, existe un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : G \to H$ tal que $\widetilde{f} \circ \sigma = f$. Entonces diremos que la terna (G, X, σ) es el *grupo topológico libre* de X, al cual denotaremos de ahora en adelante por $F(X)$.

2. Si en el inciso anterior pedimos la condición de que G y H sean abelianos, entonces diremos que (G, X, σ) es el *grupo topológico abeliano libre* de X y será denotado por $A(X)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & G \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ & H \end{tikzcd}$$

De ahora en adelante, salvo que se diga lo contrario, cuando trabajemos con el grupo $A(X)$ se usará la notación aditiva, tal y como se hace en álgebra cuando se trabaja con grupos abelianos, mientras que en $F(X)$ mantendremos la notación multiplicativa.

Naturalmente, resulta que dos grupos topológicos libres de un mismo espacio topológico son topológicamente isomorfos (en el sentido de grupos topológicos), y lo mismo en el caso abeliano. De esta forma, la definición de grupo topológico libre no es ambigua. Demostramos este hecho con formalidad.

2.2 Teorema. Si (G_1, X, σ_1) y (G_2, X, σ_2) son dos grupos topológicos libres (o abelianos libres) de X, donde X es un espacio topológico no vacío, entonces existe un isomorfismo topológico $\phi : G_1 \to G_2$ tal que $\phi \circ \sigma_1 = \sigma_2$

Demostración. Haremos la prueba en el caso en que G_1 y G_2 son grupos topológicos libres, ya que el caso en que son libres abelianos es completamente análogo.

Como G_2 es una grupo topológico, por la Definición 2.1 existe un homomofismo continuo $\phi_1 : G_1 \to G_2$ tal que $\phi_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2$. De la misma forma, existe $\phi_2 : G_2 \to G_1$ homomorfismo continuo tal que $\phi_2 \circ \sigma_2 = \sigma_1$. Por lo tanto, la función $\psi := \phi_2 \circ \phi_1 : G_1 \to G_1$ es un homomorfismo continuo. Notemos que $\psi\restriction_{\sigma_1(X)}$ es la función identidad, ya que si $x \in X$ entonces $\psi(\sigma_1(x)) = \phi_2(\phi_1(\sigma_1(x))) = \phi_2(\sigma_2(x)) = \sigma_1(x)$. Luego, siendo ψ homomorfismo, se tiene que $\psi\restriction_{\langle\sigma_1(X)\rangle}$ es la identidad, y como ψ es continua en G_1 el cual es de Hausdorff, y $\langle\sigma_1(X)\rangle$ es denso en G_1 entonces $\psi = \phi_2 \circ \phi_1$ es la identidad. De la misma forma se comprueba que $\phi_1 \circ \phi_2$ es la identidad. En particular, $\phi_1^{-1} = \phi_2$, por lo que ϕ_1^{-1} es continua. Por lo tanto ϕ_1 es el isomorfismo topológico buscado. $\square$

Veamos un ejemplo sencillo.

2.3 Ejemplo. Sea X un espacio topológico discreto. Sea G el grupo topológico resultante de equipar a $F_a(X)$ con la topología discreta. Considere una función continua $f : X \to H$, donde H es un grupo topológico, y sea $\widetilde{f} : F_a(X) \to H$ el homomorfismo que resulta de extender a f. Al ser $F_a(X)$ discreto, es claro que $\widetilde{f}$ es continua, y claramente $\widetilde{f} \circ i = f$, donde $i : X \to F_a(X)$ es la función inclusión. Como también es claro que $i(X) = X$ genera algebraicamente a $F_a(X)$. Concluimos que $F_a(X)$ equipado con la topología discreta es el grupo topológico libre de X. Similarmente se comprueba que $A_a(X)$ equipado con la topología discreta es el grupo topológico abeliano libre de X.

En el ejemplo anterior fue fácil intuir qué grupo topológico había que proponer como el grupo topológico libre del espacio discreto. En general no resulta sencillo hacer esto. Sin embargo, es posible demostrar la existencia del grupo topológico libre de espacios topológicos de Tychonoff. Antes de dar la prueba formal de este hecho, establecemos un lema que será de utilidad. Recuerde que ω_0 denota el cardinal de los números naturales.

2.4 Lema. Sea G un grupo y $X \subseteq G$, entonces $|\langle X\rangle| \leq |X| \cdot \omega_0$. Dicho de otra forma, la cardinalidad de un subgrupo generado por X es igual al cardinal de X si X es infinito, y es, a lo más, infinito numerable en el caso en que X es finito.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que

$$\langle X \rangle = \{x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n} : x_1, ..., x_n \in X, r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Consideremos la función $h : \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X^n \times \mathbb{Z}^n) \to \langle X \rangle$ definida por

$$h(x_1, ..., x_n, r_1, ..., r_n) = x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}.$$

Es claro que h es sobreyectiva, pues si $y = y_1^{s_1} \cdot ... \cdot y_k^{s_k} \in \langle X \rangle$ entonces $h(y_1, ..., y_k, s_1, ..., s_k) = y$. Por lo tanto se tiene que

$$|\langle X \rangle| \leq \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X^n \times \mathbb{Z}^n)\right|.$$

Pero además

$$\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X^n \times \mathbb{Z}^n)\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |X^n \times \mathbb{Z}^n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |X|^n \cdot \omega_0 \leq |X| \cdot \omega_0.$$

□

Demostraremos ahora que todo espacio de Tychonoff admite un grupo topológico libre (así como un grupo topológico abeliano libre).

2.5 Teorema (Existencia)**.** Sea X un espacio topológico de Tychonoff. Entonces existe su grupo topológico libre (y su grupo topológico abeliano libre) (G, X, σ). Más aún, $\sigma : X \to G$ es un encaje topológico y $\langle \sigma(X) \rangle = G$.

DEMOSTRACIÓN. Haremos la demostración para el caso del grupo topológico libre $F(X)$. En el caso abeliano la demostración es totalmente análoga.

Sea $\alpha = \max\{2^{\omega_0}, |X|\cdot\omega_0\}$. Consideremos la clase $\mathcal{F}$ de todas las funciones continuas $f : X \to H$ donde H es grupo topológico de Hausdorff y tal que $|H| \leq \alpha$.

Afirmación 1. $\mathcal{F}$ es una clase de funciones que separa puntos de cerrados en X.

Efectivamente. Sea C un subconjunto cerrado de X y $x \notin C$. Como X es un espacio de Tychonoff, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) \notin \overline{f(C)}$. Consideremos ahora a $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, el cual es un grupo topológico abeliano de Hausdorff (con el producto usual entre números complejos), y además $|T| \leq \alpha$. Sea $\phi : [0,1] \to \mathbb{T}$ el encaje topológico natural definido por $\phi(t) = e^{i\pi t}$ y sea $f_0 = \phi \circ f : X \to \mathbb{T}$. Observe que f_0 es continua y por ello f_0 es un elemento de $\mathcal{F}$. Como $f_0(x) = \phi(f(x))$, $\mathrm{cl}_{\phi([0,1])}(f_0(C)) = \mathrm{cl}_{\phi([0,1])}(\phi(f(C))) = \phi(\overline{f(C)})$ y como teníamos que $f(x) \notin \overline{f(C)}$, por la inyectividad de ϕ se sigue que $f_0(x) \notin \mathrm{cl}_{\phi([0,1])}(\phi(f(C)))$. Pero esto implica que $f_0(x) \notin \overline{\phi(f(C))}$, de lo contrario se tendría que para todo abierto $U \subseteq \mathbb{T}$ que contiene a $f_0(x)$, la intersección $\phi(f(C)) \cap U = \phi(f(C)) \cap U \cap \phi([0,1])$ es no vacía, lo cual contradice que $f_0(x) \notin \mathrm{cl}_{\phi([0,1])}(\phi(f(C)))$. Por lo tanto, hemos probado que $f_0(x) \notin \overline{f_0(C)}$, lo cual demuestra la afirmación. ⊠

Consideremos ahora la siguiente relación de equivalencia. Dadas $f, g \in \mathcal{F}$, digamos $f : X \to H_f$ y $g : X \to H_g$, entonces $f \sim g$ si y sólo si existe $\psi : H_f \to H_g$ un isomorfismo topológico tal que $g = \psi \circ f$. Es fácil comprobar que esta relación cumple las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Afirmación 2. $\mathcal{F}/\sim$ es un conjunto.

Efectivamente. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto que contenga exactamente un conjunto de cada cardinal posible menor o igual que α. Sea ahora $[f] \in \mathcal{F}/\sim$ con representante $f : X \to H_f$. Como $|H_f| \leq \alpha$, existe un único $H \in \mathcal{A}$ y una biyección $\psi : H \to H_f$. Equipamos a H con la única estructura de espacio topológico tal que ψ resulta un isomorfismo topológico (ver Observación 1.28). Luego, si $g := \psi^{-1} \circ f$ entonces por definición $g \sim f$. Lo anterior muestra que para cada clase de equivalencia $[f] \in F/\sim$ con $f : X \to H_f$ podemos suponer que $H_f \in \mathcal{A}$. Consideremos ahora a la clase $\mathcal{B}$ de todas las cuádruplas $(f, H, \tau, *)$ tales que $H \in \mathcal{A}$, τ es una topología de Hausdorff en H, $*$ es estructura de grupo en H que convierte a H en un grupo topológico y $f : X \to H$ es continua. Notemos ahora que $\mathcal{B}$ debe ser un conjunto, pues $\mathcal{B}$ es una clase contenido en el conjunto

$$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H^X \times \mathcal{A} \times \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \mathcal{P}(\mathcal{P}(H)) \times \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H^{H \times H}.$$

Finalmente, consideremos a la función entre clases $F : \mathcal{B} \to \mathcal{F}/\sim$ definida por la regla $(f, H, \tau, *) \mapsto [f]$. Entonces F es sobreyectiva, ya que si $[f] \in$

$\mathcal{F}/\sim$, por lo dicho anteriormente podemos suponer que $f : X \to H_f$ con $H_f \in \mathcal{A}$ y si τ_{H_f} y $*_{H_f}$ son sus respectivas topología y operación interna de H_f, entonces $F(f, H_f, \tau_{H_f}, *_{H_f}) = [f]$. Hemos concluido que $\mathcal{F}/\sim$ es imagen de un conjunto, y por ello es un conjunto. ⊠

Sea $\mathcal{F}_0 = \{f_i : X \to H_{f_i} : i \in I\}$ con I un conjunto, una familia de representantes de cada clase de equivalencia.

Afirmación 3. $\mathcal{F}_0$ separa puntos de cerrados de X.

Efectivamente. Esta afirmación se sigue de la Afirmación 1. Sean C un subconjunto cerrado de X y $x \in X$ con $x \notin C$. Como $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados, existe $g : X \to H_g$ un elemento de $\mathcal{F}$ tal que $g(x) \notin \overline{g(C)}$. Sea $i \in I$ tal que existe $\psi : H_g \to H_{f_i}$ isomorfismo topológico con $f_i = \psi \circ g$. Notemos entonces que $f_i(x) = \psi(g(x))$ y que $\overline{f_i(C)} = \overline{\psi(g(C))} = \psi(\overline{g(C)})$, y como teníamos que $g(x) \notin \overline{g(C)}$ de la inyectividad de ψ se obtiene que $f_i(x) \notin \overline{f_i(C)}$. Esto demuestra que $\mathcal{F}_0$ separa puntos de cerrados de X. ⊠

Llamemos $L_i = H_{f_i}$ para cada $i \in I$ y sea $L = \prod_{i \in I} L_i$. Notemos que L es un grupo topológico de Hausdorff por el Teorema 1.7. Sea $\sigma : X \to L$ el producto diagonal de las funciones $f_i : X \to L_i$ con $i \in I$. Debido a que la familia $\mathcal{F}_0$ separa puntos de cerrados de X, tenemos que $\sigma : X \to L$ es un encaje topológico. Sea $G = \langle \sigma(X) \rangle$.

Afirmación 4. (G, X, σ) es el grupo topológico libre de X.

Efectivamente. Claramente $\langle \sigma(X) \rangle$ es denso en G. Sea $f : X \to K$ una función continua, donde K es un grupo topológico. Sea $H_f = \langle f(X) \rangle$, el cual es un subgrupo topológico de Hausdorff de K, y por el Lema 2.4 tenemos que $|\langle f(X) \rangle| \leq |f(X)| \cdot \omega_0 \leq |X| \cdot \omega_0 \leq \alpha$. Por tanto, f vista como función de X en H_f es un elemento de la clase $\mathcal{F}$. Luego, podemos elegir $i \in I$ tal que $f \sim f_i$, es decir que existe $\psi : H_f \to L_i$ isomorfismo topológico tal que $f_i = \psi \circ f$. Consideremos a la función proyección $\pi_i : L \to L_i$, de donde $f_i = \pi_i \circ \sigma$. Definamos $\phi := \psi^{-1} \circ \pi_i$, entonces $\phi : L \to H_f$ es un homomorfismo continuo que satisface $\phi \circ \sigma = \psi^{-1} \circ \pi_i \circ \sigma = \psi^{-1} \circ f_i = f$. Luego, el homomorfismo continuo $\widetilde{f} := \phi\restriction_G$ de G en $H_f \subseteq K$ satisface $\widetilde{f} \circ \sigma = f$. □

2.6 Observación. Si X es un espacio de Tychonoff, el Teorema 2.5 asegura que existe su grupo topológico libre $(F(X), X, \sigma)$ y que $\sigma : X \to F(X)$ es un encaje topológico, por lo que identificaremos a X con el subespacio $\sigma(X)$. Así que de ahora en adelante vamos a suponer que X es un subespacio de $F(X)$ y que σ es la inclusión $i : X \to F(X)$. Además por el Teorema 2.5, X genera algebraicamente a $F(X)$. Y por la definición de grupo topológico libre, obtenemos que si $f : X \to H$ es cualquier función continua, donde H es un grupo topológico, entonces existe un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : F(X) \to H$ tal que $\widetilde{f} \circ i = f$. Esto es, $\widetilde{f}$ es un homomorfismo continuo que extiende a f. Lo mismo es válido para el caso del grupo topológico abeliano libre $A(X)$. Esta identificación es esencialmente la misma que hicimos en el caso de grupos libres en el capítulo anterior.

Como una pequeña convención, de ahora en adelante, usaremos la notación $G(X)$ para referirnos indistintamente a $F(X)$ como a $A(X)$, con el entendimiento de que si un resultado es enunciado para $G(X)$, entonces dicho resultado es válido en ambos casos.

Terminamos esta sección con un resultado útil.

2.7 Proposición. Sea X un espacio de Tychonoff. Sea X^{-1} el subconjunto de $G(X)$ formado por todos los inversos de los elementos de X, es decir, $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ equipado con la topología de subespacio. Entonces $G(X)$ es topológicamente isomorfo a $G(X^{-1})$.

Demostración. Considere la función $f : X \to X\mathbb{X}^{-1}$ dada por $f(x) = x^{-1}$. Si $x, y \in X$ son tales que $x^{-1} = y^{-1}$ en $G(X)$, es claro que $x = y$, por lo que f es inyectiva. Claramente f es una función sobreyectiva. Esta función es continua porque $G(X)$ es un grupo topológico. Finalmente debido a que $f^{-1}(x^{-1}) = x = (x^{-1})^{-1}$ obtenemos que f es un homeomorfismo. En la Observación 3.6 demostraremos que si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos, entonces sus respectivos grupos topológicos libres son topológicamente isomorfos. $\square$

2.3. Isomorfismo entre $G(X)$ y $G_a(X)$

A pesar de haber demostrado que todo espacio de Tychonoff X admite un grupo topológico libre $G(X)$, no es fácil darlo explícitamente (claramente la prueba del Teorema 2.5 utilizó Axioma de Elección). Sin embargo, al menos algebraicamente podemos decir quién es $G(X)$. La respuesta es que $G(X)$, como grupo, es precisamente el grupo libre $G_a(X)$ (o mejor dicho, son isomorfos como grupos). Para probar este hecho, necesitaremos unos cuantos resultados de naturaleza algebraica.

Introducimos la siguiente notación. Sea p un número primo fijo y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos $\Gamma_2(p^k)$ el conjunto de matrices de tamaño 2×2, digamos $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $\det(X) = ad - bc = 1$ y $X \equiv E_2 \pmod{p^k}$, donde E_2 es la matriz identidad de 2×2. Esta última congruencia debe entenderse entrada a entrada, es decir, $a, d \equiv 1 \pmod{p^k}$ y $b, c \equiv 0 \pmod{p^k}$.

2.8 Proposición. El conjunto $\Gamma_2(p^k)$ es un grupo con el producto usual de matrices.

Demostración. Para verificar que el producto es cerrado, sean $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y $Y = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ elementos de $\Gamma_2(p^k)$. Entonces $X \cdot Y = \left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{smallmatrix}\right)$. Claramente se cumple que

$$aa' + bc', cb' + dd' \equiv 1 \pmod{p^k}$$

y

$$ab' + bd', ca' + dc' \equiv 0 \pmod{p^k}$$

y por lo tanto $X \cdot Y \in \Gamma_2(p^k)$.

Como estamos trabajando con el producto usual de matrices, es evidente que E_2 funciona como el neutro. Usando además que X tiene determinante igual a 1, se tiene que su matriz inversa es $X^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ y por ello $X^{-1} \in \Gamma_2(p^k)$. $\square$

2.9 Lema. El grupo $\Gamma_2(p)$ contiene un subgrupo isomorfo al grupo libre $F_a(\mathbb{N})$.

Demostración. Consideremos $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{smallmatrix}\right)$, los cuales son elementos de $\Gamma_2(p)$. Notemos que $U^r = \left(\begin{smallmatrix} 1 & pr \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ y $V^r = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ pr & 1 \end{smallmatrix}\right)$ para cada $r \in \mathbb{Z}$. Afirmamos que $\langle U, V \rangle \cong F_a(U, V)$. Para ello, según el Corolario 1.32, basta verificar que si W es un producto alternante de potencias enteras no nulas de U y V entonces $W \neq E_2$. Notemos que si V^k fuese el primer factor de

W, entonces $W' = V^{-k}WV^k$ tiene una potencia de U como primer factor. Además, observe que $W = E_2$ si y sólo si $W' = E_2$. De este modo podemos suponer sin pérdida de generalidad que el primer factor de W es una potencia de U, digamos $W = U^{r_1} \cdot V^{r_2} \cdot ... \cdot Z^{r_n}$, donde $Z \in \{U, V\}$ (dependiendo de la paridad de n). Para cada $i \in \{1, ..., n\}$ sea W_i el producto de los primeros i factores de W, por lo que, $W_1 = U^{r_1}$, $W_2 = U^{r_1} \cdot V^{r_2}$,...,$W_n = W$. Sea z_i el renglón superior de W_i para cada i. Si $z_{2k-1} = \begin{pmatrix} y_{2k-1} & y_{2k} \end{pmatrix}$ notemos entonces que

$$z_{2k} = z_{2k-1}V^{r_{2k}} = \begin{pmatrix} y_{2k-1} & y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ pr_{2k} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{2k-1} + pr_{2k}y_{2k} & y_{2k} \end{pmatrix}$$

Llamemos $y_{2k+1} = y_{2k-1} + pr_{2k}y_{2k}$, es decir que $z_{2k} = \begin{pmatrix} y_{2k+1} & y_{2k} \end{pmatrix}$, por lo cual tenemos que

$$z_{2k+1} = z_{2k}U^{r_{2k+1}} = \begin{pmatrix} y_{2k+1} & y_{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & pr_{2k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{2k+1} & y_{2k} + pr_{2k+1}y_{2k+1} \end{pmatrix}$$

Llamemos $y_{2k+2} = y_{2k} + pr_{2k+1}y_{2k+1}$. Se sigue que para todo $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ se tiene que $y_{i+2} = y_i + pr_{i+1}y_{i+1}$.

Demostraremos ahora que la sucesión de valores absolutos $|y_1|, |y_2|, ...$ es estrictamente creciente. La prueba será por inducción. Notemos primero que como $U^{r_1} = \begin{pmatrix} 1 & pr_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $|y_1| = 1$ y $|y_2| = |pr_1| \geq p \geq 2$. Si suponemos que para i se cumple que $|y_{i+1}| > |y_i|$ entonces

$$|y_{i+2}| \geq |y_i| + p|r_{i+1}| \cdot |y_{i+1}| \geq p|r_{i+1}| \cdot |y_{i+1}| - |y_i| \geq 2|y_{i+1}| - |y_i| > |y_{i+1}|.$$

Por lo tanto dicha sucesión es estrictamente creciente. En particular, $y_i \neq 0$ para todo i, lo cual muestra que $W \neq E_2$. Concluimos que $\langle U, V \rangle \cong F_a(U, V)$.

Para terminar la demostración es suficiente hallar un subgrupo de $F_a(U, V)$ que sea isomorfo a $F_a(\mathbb{N})$. Para ello, definamos $x_n = V^n U V^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y sea $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F_a(U, V)$. Notemos que si $k_1, ..., k_l \in \mathbb{N}$ y $r_1, ..., r_l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces

$$x_{k_1}^{r_1} \cdot ... \cdot x_{k_l}^{r_l} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=1}^{l}(2k_i pr_i + pr_i) & 1 \end{pmatrix} \neq E_2.$$

Se concluye por tanto (otra vez por el Corolario 1.32) que $\langle X\rangle \cong F_a(X)$ y como X es un conjunto infinito numerable, entonces $F_a(X)$ es isomorfo a $F_a(\mathbb{N})$, por la Proposición 1.31. $\square$

2.10 Lema. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Gamma_2(p^k)$ es un subgrupo normal de $\Gamma_2(p)$ y el grupo cociente $\Gamma_2(p)/\Gamma_2(p^k)$ es finito. Además, $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_2(p^k) = \{E_2\}$.

Demostración. Es claro que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \equiv b \pmod{p^k}$ entonces $a \equiv b \pmod{p}$, y ello implica que $\Gamma_2(p^k) \subseteq \Gamma_2(p)$. Como $\Gamma_2(p^k)$ es un grupo con el producto usual, entonces $\Gamma_2(p^k)$ es un subgrupo de $\Gamma_2(p)$.

Sean ahora $X = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_2(p^k)$ y $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_2(p)$. Debemos probar que $A^{-1}XA \in \Gamma_2(p^k)$. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned} A^{-1}XA &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (dx-bz)a+(dy-bw)c & (dx-bz)b+(dy-bw)d \\ (-cx+az)a+(-cy+aw)c & (-cx+az)b+(-cy+aw)d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$(dx-bz)a+(dy-bw)c = dxa-bza+dyc-bwc \equiv da-bc = 1 \pmod{p^k}$$

$$(dx-bz)b+(dy-bw)d = dxb-bzb+dyd-bwd \equiv db-bd = 0 \pmod{p^k}$$

$$(-cx+az)a+(-cx+aw)c = -cxa+aza-cxc+awc \equiv -ca+ac = 0 \pmod{p^k}$$

$$(-cx+az)b+(-cy+aw)d = -cxb+azb-cyd+awd \equiv -cb+ad = 1 \pmod{p^k}$$

Por lo tanto $A^{-1}XA \in \Gamma_2(p^k)$. Esto prueba que $\Gamma_2(p^k)$ es un subgrupo normal de $\Gamma_2(p)$.

Verifiquemos ahora que el cociente $\Gamma_2(p)/\Gamma_2(p^k)$ es un grupo finito. Supongamos que $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ y $Y = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ son elementos de $\Gamma_2(p)$ tales que $X \equiv Y \pmod{p^k}$, equivalentemente, $a \equiv a', b \equiv b', c \equiv c', d \equiv d' \pmod{p^k}$. Utilizando estas congruencias tenemos que

$$Y^{-1}X = \begin{pmatrix} d'a-b'c & d'b-b'd \\ -c'a+a'c & -c'b+a'd \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p^k}$$

Es decir que $Y^{-1}X \in \Gamma_2(p^k)$, o equivalentemente, las clases laterales son iguales: $X\Gamma_2(p^k) = Y\Gamma_2(p^k)$. Este cálculo muestra que si dos clases laterales son diferentes necesariamente alguna de las congruencias mencionadas falla. Como $\{0, 1, ..., p^k - 1\}$ es un sistema completo de residuos módulo p^k, entonces el orden de $\Gamma_2(p)/\Gamma_2(p^k)$ es acotado superiormente por el número de matrices $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ que se pueden formar con $0 \leq a, b, c, d < p^k$, dicho número es $(p^k)^4$. En particular, $\Gamma_2(p)/\Gamma_2(p^k)$ es finito.

Finalmente, sea $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_2(p^k)$. Esto implica en primer lugar que $a \equiv 1 \pmod{p^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde existe $r_k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 1 + r_k p^k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Necesariamente $r_k = 0$ (para todo k), o de otro modo $|a - 1| = |r_k p^k| \geq p^k$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, lo cual no puede ocurrir. Por lo tanto $a = 1$. Por otro lado, $b \equiv 0 \pmod{p^k}$ implica que $b = s_k p^k$ para algún $s_k \in \mathbb{Z}$ y para todo $k \in \mathbb{Z}$. Nuevamente se sigue que $b = 0$. Análogamente se demuestra que $c = 0$ y $d = 1$. Esto prueba que $X = E_2$. $\square$

Recuerde que si X es un conjunto no vacío, y $\mathcal{F}$ es una familia de funciones con dominio X, decimos que $\mathcal{F}$ *separa puntos* de X si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Notemos que si en el contexto anterior pedimos que dichas funciones sean homomorfismos entre grupos, entonces la última condición puede ser escrita como $f(xy^{-1}) \neq e$, donde e será el neutro del grupo contradominio de f, luego bastará pedir que para cada x distinto del neutro exista un homomorfismo f que mande a x a un elemento distinto del neutro. Esta pequeña observación nos permite formular la siguiente proposición de una forma cómoda.

2.11 Proposición. Sea X un conjunto no vacío. Entonces la familia de todos los homomorfismos de $F_a(X)$ en un grupo finito separa puntos de $F_a(X)$. Esto es, para cada $g \in F_a(X) \setminus \{e\}$ existe un homomorfismo $h : F_a(X) \to K$, con K un grupo finito, tal que $h(g) \neq e_K$.

Demostración. Sea $g \in F_a(X) \setminus \{e\}$, digamos con forma normal $g = x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}$ donde $x_1, ..., x_n \in X$, $x_i \neq x_{i+1}$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Consideremos $X_0 := \{x_1, ..., x_n\}$ y sea $f : X \to X_0$ una función que deje fijos a los puntos de X_0. Como $X_0 \subseteq F_a(X_0)$ entonces f puede ser vista como función de X en $F_a(X_0)$ y por la propiedad de los grupos libres existe un homomorfismo

$\widetilde{f} : F_a(X) \to F_a(X_0)$ con $f = \widetilde{f}\restriction_X$, en particular $Id_{X_0} = \widetilde{f}\restriction_{X_0}$. Por lo tanto

$$\widetilde{f}(g) = \widetilde{f}(x_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot \widetilde{f}(x_n)^{r_1} = g.$$

Notemos ahora que para probar la proposición, será suficiente hallar un grupo finito K y un homomorfismo $h_0 : F_a(X_0) \to K$ con la propiedad de que $h_0(\widetilde{f}(g)) = h_0(g) \neq e_K$, pues claramente $h := h_0 \circ \widetilde{f} : F_a(X) \to K$ será el homorfismo que constata la proposición. Sea p un primo fijo. Por el Lema 2.9 $\Gamma_2(p)$ contiene un subgrupo isomorfo a $F_a(\mathbb{N})$. Notemos que $F_a(X_0) \cong F_a(1, 2, ..., n)$ y este último es un subgrupo de $F_a(\mathbb{N})$, por lo que podemos suponer que $F_a(X_0)$ es un subgrupo de $\Gamma_2(p)$. Por el Lema 2.10

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_2(p^k) = \{E_2\}.$$

Luego debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $g \notin \Gamma_2(p^k)$. Sea $K = \Gamma_2(p)/\Gamma_2(p^k)$, el cual es, por el Lema 2.10, un grupo finito y sea $\pi : \Gamma_2(p) \to K$ la proyección canónica y sea $h_0 = \pi\restriction_{F_a(X_0)}$. Como $g \notin \Gamma_2(p^k)$ es claro que $g \notin Ker(h_0)$, es decir, $h_0(g) \neq e_K$, como quería demostrarse. $\square$

Recordemos que dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $U(n)$ denota a la familia de matrices complejas de tamaño $n \times n$ tales que $AA^* = E_n$, donde E_n es la identidad de tamaño $n \times n$ y A^* es la transpuesta conjugada de A. Es sabido que $U(n)$ es un grupo con el producto usual de matrices. Dicho grupo es llamado Grupo Unitario de Grado n, y cada matriz en este grupo es llamada Matriz Unitaria (o simplemente Unitaria). Observe que si $A \in U(n)$ entonces $A^{-1} = A^*$. Se tiene además la siguiente equivalencia: $A \in U(n)$ si y sólo si los renglones de A forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ (equivalentemente, si las columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$). Si $GL(n, \mathbb{C})$ es el grupo general lineal de grado n, es decir, el grupo de matrices invertibles de $n \times n$ con entradas complejas, podemos equipar naturalmente a $GL(n, \mathbb{C})$ con la topología heredada de $\mathbb{R}^{2n^2}$. Se tiene que $GL(n, \mathbb{C})$ es un grupo topológico y $U(n)$ resulta ser un subgrupo topológico de $GL(n, \mathbb{C})$.

La prueba de la siguiente proposición depende de un hecho conocido en álgebra lineal; toda matriz unitaria $A \in U(n)$ es unitariamente equivalente a una matriz diagonal. Esto significa que existen $U \in U(n)$ y D matriz diagonal de $n \times n$ tales que $UAU^* = D$. En consecuencia también $D \in U(n)$.

2.12 Proposición. Dada $A \in U(n)$, existe $\psi : [0,1] \to U(n)$ continua tal que $\psi(0) = E_n$ y $\psi(1) = A$.

Demostración. Por lo dicho anteriormente, existen $U \in U(n)$ y D matriz diagonal de $n \times n$ tales que $UAU^* = D$. Supongamos que $d_1, ..., d_n$ son las entradas en la diagonal de D. Como $D^{-1} = D^*$ tenemos que $\frac{1}{d_k} = \overline{d_k}$, equivalentemente, $1 = \overline{d_k} \cdot d_k = |d_k|^2$, es decir, $|d_k| = 1$ para toda $k \in \{1, ..., n\}$. Por lo tanto, para cada $k \in \{1, ..., n\}$ existe $\lambda_k \in [0, 1)$ tal que $d_k = e^{2\pi i\lambda_k}$. Definamos $d_k(t) = e^{2\pi it\lambda_k}$ para toda $t \in [0, 1]$ y $k \in \{1, ..., n\}$. Si $t \in [0, 1]$, sea $D(t)$ la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal son $d_1(t), ..., d_n(t)$.

Notemos que $\frac{1}{d_k(t)} = \overline{d_k(t)}$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$, y por tanto $D(t) \cdot D(t)^* = E_n$, es decir $D(t) \in U(n)$. Por construcción $D(0) = E_n$ y $D(1) = D$. Además, se tiene que la función $t \mapsto D(t)$ es continua en $[0, 1]$, ya que cada función coordenada es continua (por la continuidad de la función exponencial). Definimos $\psi : [0, 1] \to U(n)$ dada por $\psi(t) = UD(t)U^*$. Dicha función es continua porque la función que resulta de multiplicar constantes lo es, y por construcción cumple que $\psi(0) = E_n$ y $\psi(1) = UDU^* = A$. □

Tras haber enunciado y demostrado estos resultados, podemos ahora demostrar que el grupo $F(X)$ es isomorfo, como grupo, a $F_a(X)$.

2.13 Teorema. Sea X un espacio de Tychonoff. El grupo topológico libre $F(X)$ es algebraicamente isomorfo a $F_a(X)$. Además, los homomorfismos de $F(X)$ en $U(n)$ separan puntos de $F(X)$.

Demostración. Ya hemos demostrado que el grupo topológico libre $F(X)$ existe y que además podemos suponer que $\langle X \rangle = F(X)$.

La función identidad $Id_X : X \to X$ puede ser vista como una función de X en $F(X)$, y por la propiedad del grupo libre ésta se extiende a un homomorfismo $i : F_a(X) \to F(X)$. Si $x \in F(X) = \langle X \rangle$, existen $z_1, .., z_k \in X$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z}$ tales que $x = z_1^{r_1} \cdot ... \cdot z_n^{r_n}$. Luego, como i es un homomorfismo que actúa como la identidad en los elementos de X, entonces

$$i(z_1^{r_1} \cdot ... \cdot z_n^{r_n}) = i(z_1)^{r_1} \cdot ... \cdot i(z_n)^{r_n} = x.$$

Por tanto i es sobreyectiva. Probaremos ahora que el núcleo de i es trivial, esto probará que i es un isomorfismo algebraico.

Sea $w \in F_a(X) \setminus \{e\}$ una palabra no vacía en su forma reducida. Hallaremos $\phi : F(X) \to U(n)$ un homomorfismo continuo tal que $\phi(i(w)) \neq E_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, ya que esto implicará en particular que $i(w) \neq e$ y el teorema quedará demostrado.

Por la Proposición 2.11 existe un homomorfismo $F_a(X) \to K$ con K un grupo finito tal que $h(w) \neq e_K$. Por el Teorema de Cayley [1], el grupo K es isomorfo a un subgrupo de S_n, con $n = |K|$. Más aún, se tiene que S_n también es isomorfo a un subgrupo de $U(n)$. Efectivamente, para cada $\pi \in S_n$ sea $A_\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ el operador lineal definido por $A_\pi(e_i) = e_{\pi(i)}$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$, donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{C}^n$. Consideremos la función $A : S_n \to U(n)$ definida como sigue. Para cada $\pi \in S_n$, $A(\pi)$ es la matriz cuyos renglones son $A_\pi(e_1), ..., A_\pi(e_n)$ (en este orden). Notemos que A está bien definida, esto es, $A(\pi)$ es una matriz unitaria, ya que sus renglones forman el conjunto $\{e_{\pi(1)}, ..., e_{\pi(n)}\}$ que es la base estándar de $\mathbb{C}^n$, en particular una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$. La relación $A_\pi \cdot A_\mu = A_{\pi\circ\mu}$ para cualesquiera $\pi, \mu \in S_n$ asegura que A es monomorfismo. Luego S_n es isomorfo a subgrupo de $U(n)$. Por todo lo anterior, podemos suponer que K es un subgrupo de $U(n)$.

Supongamos que $w = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_m^{\varepsilon_m}$ con $x_1, ..., x_m \in X$ y $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$. Por lo dicho anteriormente, podemos suponer que $h(x_1), ..., h(x_n) \in U(n)$. Aplicando la Proposición 2.12, para cada $k \in \{1, ..., m\}$ existe $\phi_k : [0, 1] \to U(n)$ continua tal que $\phi_k(0) = E_n$ y $\phi_k(1) = h(x_k)$, si ocurriera que $h(x_i) = h(x_j)$ por simplicidad escogemos $\phi_i = \phi_j$ para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$. Como X es Hausdorff, existen abiertos $V_1, ..., V_m \subseteq X$ tales que $x_i \in V_i$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $x_i \neq x_j$ y $V_i = V_j$ si $x_i = x_j$ para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$. Como X es completamente regular, existen $\psi_1, ..., \psi_m : X \to [0, 1]$ continuas tales que, para cada $k \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $\phi_k(x_k) = 1$, $\psi_k(X \setminus V_k) \subseteq \{0\}$ y $\psi_i = \psi_j$ si $x_i = x_j$ para todos los $i, j \in \{1, ..., m\}$.

Consideremos $F := X \setminus \bigcup_{k=1}^m V_k$, se tiene que $\psi_k(x) = 0$ para todo $x \in F$ y $k \in \{1, ..., m\}$. Para cada $k \in \{1, ..., m\}$ sea $g_k := \phi_k \circ \psi_k$, en particular se tiene que $g_k(x_k) = h(x_k)$ y $g_k(x) = E_n$ si $x \in F$. Sea ahora $f : X \to U(n)$

definida por la regla

$$f(x) = \begin{cases} g_k(x) & \text{si} \quad x \in V_k \\ E_n & \text{si} \quad x \in F \end{cases}$$

Veremos que f es continua. Efectivamente, sea $x \in X$ y sea $U \subseteq U(n)$ un abierto tal que $f(x) \in U$. Si $x \in V_k$ para algún k, entonces $f(x) = g_k(x) \in U$ y por la continuidad de g_k, existe un abierto $U' \subseteq X$ tal que $x \in U$ y $g_k(U') \subseteq U$. Sea $U_0 = U' \cap V_k$ el cual es abierto, entonces $x \in U_0$ y $f(U_0) = g_k(U_0) \subseteq g_k(U') \subseteq U$, lo cual prueba que f es continua en x. Por otro lado, si $x \in F$ entonces $f(x) = E_n \in U$, pero también $g_k(x) = E_n$ para todo $k \in \{1, ..., m\}$, por lo que por la continuidad de cada g_k, existen $U_1, ..., U_m \subseteq X$ abiertos tales que $x \in \bigcap_{k=1}^m U_k$ y $g_k(U_k) \subseteq U$ para cada $k \in \{1, ..., m\}$. Notemos ahora que $f\left(\bigcap_{k=1}^m U_k\right) \subseteq U$. En efecto, sea $y \in \bigcap_{k=1}^m U_k$. Si $y \in F$ es claro que $f(y) = E_n \in U$. Si $y \in V_k$ para algún k, entonces $f(y) = g_k(y) \in g_k(U_k) \subseteq U$, lo cual prueba la contención deseada. Concluimos que f es continua en X. Observe además que $f(x_k) = h(x_k)$ para cada $k \in \{1, ..., m\}$. Ahora, por la propiedad del grupo topológico libre $F(X)$, la función f se extiende a un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : F(X) \to U(n)$.

Notemos entonces que

$$\widetilde{f}(i(w)) = \widetilde{f}(x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_m^{\varepsilon_m}) = h(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot h(x_m)^{\varepsilon_m} = h(w) \neq E_n.$$

En particular, $i(w) \neq e$. Es decir que el núcleo de i es trivial. □

Notemos que la prueba anterior no se puede dualizar al caso del grupo topológico abeliano libre. Para ello, tendríamos que justificar que los grupos con los que se trabajó en la prueba anterior son abelianos, pero esto es falso (es fácil ver que ni $\Gamma_2(p^k)$ ni $U(n)$ son abelianos). Demostraremos sin embargo que el grupo topológico abeliano libre $A(X)$ de X también resulta ser algebraicamente isomorfo a $A_a(X)$, el grupo abeliano libre de X, cuando X es de Tychonoff. La demostración es relativamente más sencilla que en el caso del grupo topológico libre no abeliano. Sólo necesitamos probar un antes lema.

2.14 Lema. El círculo unitario complejo $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ contiene un subgrupo algebraicamente isomorfo al grupo abeliano libre $A_a(2^\omega)$. En particular, $\mathbb{T}$ contiene un subconjunto independiente de cardinalidad 2^ω.

Demostración. Sabemos que el espacio vectorial $\mathbb{R}$ sobre el campo $\mathbb{Q}$ tiene dimensión 2^ω. Sea $X = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ una base de este espacio con $x_0 = 1$. Sea $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ el homomorfismo definido por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$. Notemos que $ker(\pi) = \mathbb{Z}$. Afirmamos que el conjunto $Y = \{\pi(x_\alpha) : 0 < \alpha < 2^\omega\}$ satisface que $\langle Y \rangle \cong A_a(2^\omega)$. Equivalentemente, veremos que $\langle Y \rangle$ no tiene relaciones salvo las triviales.

En efecto. Sean $0 < \alpha_1, ..., \alpha_n < 2^\omega$ tales que $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ para cada $i \in \{1, ..., n-1\}$ y $k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Si $x_{\alpha_i} = x_{\alpha_j}$ en la expresión $k_1 x_{\alpha_1} + ... + k_n x_{\alpha_n}$ podemos factorizar a los sumandos en los que aparezcan $x_{\alpha_i} = x_{\alpha_j}$ para reducirla, de modo que podemos suponer que $x_{\alpha_i} \neq x_{\alpha_j}$ para todos los i, j distintos. Si ocurriera que $k_1 x_{\alpha_1} + ... + k_n x_{\alpha_n} = k \in \mathbb{Z}$, entonces $k_1 x_{\alpha_1} + ... + k_n x_{\alpha_n} - k = 0$, lo cual implicaría que el conjunto $\{x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_n}, 1\}$ es linealmente dependiente, contradiciendo la independencia de X. Por tanto $k_1 x_{\alpha_1} + ... + k_n x_{\alpha_n} \notin \mathbb{Z}$ y así $\pi(\alpha_1)^{k_1} \cdot ... \cdot \pi(x_{\alpha_n})^{k_n} = \pi(k_1 x_{\alpha_1} + ... + k_n x_{\alpha_n}) \neq 1$. □

2.15 Teorema. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces $A(X)$ es algebraicamente isomorfo a $A_a(X)$

Demostración. Recuerde que la existencia de $A(X)$ está garantizada por ser X de Tychonoff. Además $X \subseteq A(X)$ satisface que $\langle X \rangle = A(X)$ por lo que será suficiente demostrar que $\langle X \rangle \cong A_a(X)$, o equivalentemente, que si $x \in \langle X \rangle$ con su expresión normal $x = k_1 x_1 + ... + k_n x_n$ con $x_1, ..., x_n \in X$ distintos por pares y $k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces $x \neq 0$.

Por el Lema 2.14 en $\mathbb{T}$ podemos hallar un conjunto independiente de cardinalidad 2^ω, en particular podemos considerar un conjunto independiente de cardinalidad n, digamos que $\{t_1, ..., t_n\} \subseteq \mathbb{T}$ es uno de los tales conjuntos. Vamos a demostrar que existe una función $f : X \to \mathbb{T}$ continua con $f(x_i) = t_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

Efectivamente, como X es de Tychonoff para cada $j \in \{1, ..., n\}$ existe una función $g_j : X \to [0, 1]$ continua tal que $g_j(x_j) = 1$ y $g_j(x_k) = 0$ si $k \in \{1, ..., n\} \setminus \{j\}$. Como $t_j \in \mathbb{T}$ existe $\lambda_j \in [0, 1)$ tal que $t_j = e^{2i\pi\lambda_j}$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$. Definamos entonces $f : X \to \mathbb{T}$ dada por

$$f(x) = e^{2i\pi \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(x)}.$$

Notemos que f es continua porque es composición de funciones continuas y se cumple que $f(x_i) = t_i$ para toda $i \in \{1, ..., n\}$. Por la propiedad del grupo topológico abeliano libre f se extiende a un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : A(X) \to \mathbb{T}$, de manera que

$$\widetilde{f}(k_1 x_1 + ... + k_n x_n) = f(x_1)^{k_1} \cdot ... \cdot f(x_n)^{k_n} = t_1^{k_1} \cdot ... \cdot t_n^{k_n} \neq 1$$

pues $\{t_1, .., t_n\}$ es independiente. Necesariamente $k_1 x_1 + ... + k_n x_n \neq 0$. Esto demuestra el teorema. $\square$

2.16 Observación. Los Teoremas 2.13 y 2.15 nos permiten concluir que $G(X)$ es isomorfo algebraicamente a $G_a(X)$. Considere un isomorfismo de grupos $\phi : G(X) \to G_a(X)$. Si τ es la topología del grupo topológico libre $G(X)$, podemos inducir una topología en $G_a(X)$ declarando abiertos a los subconjuntos $U \subseteq G_a(X)$ tales que $\phi^{-1}(U)$ es abierto en $G(X)$. Resulta que esta topología sobre $G_a(X)$ es compatible con las operaciones de grupo, de modo que $G_a(X)$ se vuelve un grupo topológico para el cual ϕ es un isomorfismo topológico. Como grupos topológicos que son topológicamente isomorfos tienen las mismas propiedades tanto algebraicas como topológicas, lo anterior nos permite suponer, de ahora en adelante, que el grupo topológico libre es el grupo $G_a(X)$, equipado con la topología del grupo topológico libre.

2.4. Una relación entre $F(X)$ y $A(X)$

Recuerde que, debido al Teorema 2.5, sabemos que X es subespacio $G(X)$. Dicho de otra forma, si $\tau_{G(X)}$ es la topología del espacio $G(X)$, entonces $\tau_{G(X)}\restriction_X = \tau_X$, donde τ_X es la topología del espacio X y

$$\tau_{G(X)}\restriction_X := \{A \cap X : A \in \tau_{G(X)}\}.$$

Es decir, la topología de $G(X)$ induce en X su topología original. Como una consecuencia de la Observación 2.16, demostraremos que la topología de $G(X)$ es la topología de grupo (es decir, compatible con las operaciones de grupo) más fina sobre el grupo libre $G_a(X)$ con la anterior propiedad. En lo que sigue, como hemos hecho anteriormente, denotaremos con τ_Z a la topología de Z, para Z cualquier espacio topológico.

2.17 Teorema. Sea X un espacio y sea $\tau = \tau_{G(X)}$ la topología del grupo topológico libre $G(X)$. Entonces τ es la topología de grupo más fina en $G_a(X)$ tal que $\tau\restriction_X = \tau_X$, donde τ_X es la topología del espacio X.

DEMOSTRACIÓN. Ya hemos explicado porqué $\tau\restriction_X = \tau_X$. Para demostrar la otra parte, sea τ' una topología de grupo en $G_a(X)$ tal que $\tau'\restriction_X = \tau_X$. Como $\tau_X = \tau'\restriction_X$, podemos considerar a la función identidad $i : (X, \tau\restriction_X) \to (X, \tau'\restriction_X)$. Dicha función es claramente continua. Además i puede ser considerada como función de $(X, \tau\restriction_X)$ en $(G_a(X), \tau')$ y la continuidad se conserva. Por la propiedad del grupo topológico libre $G(X)$, i se extiende a un homomorfismo continuo $\widetilde{i} : (G_a(X), \tau) \to (G_a(X), \tau')$, donde hemos usado que el grupo topológico $G(X)$ es precisamente $(G_a(X), \tau)$, por la Observación 2.16.

Verifiquemos ahora que $\widetilde{i}$ es la función identidad. Efectivamente, notemos que si $x \in G_a(X) \setminus \{e\}$, por la estructura de grupo libre sabemos que x se expresa en su forma normal como $x = x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}$, donde $x_1, ..., x_n \in X$ y $r_1, ..., r_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Como $\widetilde{i}$ es homomorfismo e $\widetilde{i}(x_k) = i(x_k) = x_k$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$, se tiene que $\widetilde{i}(x) = x$, lo cual prueba la afirmación. Finalmente, notemos que la continuidad de $\widetilde{i}$ implica que todo abierto de τ' es abierto en τ, esto es, $\tau' \subseteq \tau$. Por tanto τ es la topología de grupo más fina sobre $G_a(X)$ que induce en X su topología original. $\square$

El Teorema 2.17 será usado con frecuencia. Una consecuencia de él es la siguiente. Recuerde que dada una función entre espacios topológicos $f : X \to Y$, diremos que f es una función cociente, o simplemente que es cociente, si f es continua, sobreyectiva y para todo $U \subseteq Y$ tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en X, se tiene que U es abierto en Y.

2.18 Corolario. Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios de Tychonoff. Entonces f admite una extensión a un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : G(X) \to G(Y)$. Más aún, si f es cociente entonces $\widetilde{f}$ es una función abierta.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte de este corolario es una técnica que ya hemos usado unas cuantas veces, pero que vale la pena remarcar: como Y está encajado en $G(Y)$, f puede ser vista como una función continua de X en $G(Y)$, y por la propiedad del grupo topológico libre f se extiende a un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : G(X) \to G(Y)$.

Supongamos ahora que f es cociente y demostremos que $\widetilde{f}$ es una función abierta. Notemos primero que $\widetilde{f}$ debe ser sobreyectiva, ya que si $y \in G(Y)$ con forma normal $y = y_1^{r_1} \cdot ... \cdot y_n^{r_n}$, como f es sobreyectiva existen $x_1, ..., x_n \in X$ tales que $f(x_i) = y_i$ para cada i, y por tanto, como $\widetilde{f}$ es homomorfismo, tenemos que $\widetilde{f}(x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}) = y$. Sea ahora τ_q la familia de las imágenes $\widetilde{f}(U)$ donde U es abierto en $G(X)$. Por el Teorema 1.19, tenemos que τ_q es una topología de grupo en $G_a(Y)$. Notemos además que si $\tau = \tau_{G(Y)}$, entonces se tiene que $\tau \subseteq \tau_q$, ya que si $V \in \tau$ entonces por la continuidad y sobreyectividad de $\widetilde{f}$ se tiene $V = \widetilde{f}(\widetilde{f}^{-1}(V)) \in \tau_q$.

Demostraremos ahora que la contención $\tau_q \subseteq \tau$ también se tiene. Por el Teorema 2.17, bastará demostrar que τ_q induce en Y su topología original, esto es, que $\tau_q\restriction_Y = \tau_Y$. Notemos que como $\tau \subseteq \tau_q$ entonces $\tau\restriction_Y \subseteq \tau_q\restriction_Y$, pero $\tau\restriction_Y = \tau_Y$ y por tanto $\tau_Y \subseteq \tau_q\restriction_Y$, lo cual nos da una contención. Para mostrar la otra contención, consideremos $V \in \tau_q\restriction_Y$. Luego, existe $U \subseteq G(X)$ abierto tal que $V = \widetilde{f}(U) \cap Y$. Sea $N = ker(\widetilde{f})$, afirmamos que $f^{-1}(V) = X \cap NU$. En efecto, $z \in f^{-1}(V)$ entonces $f(z) \in V = \widetilde{f}(U) \cap Y$, por ello existe $u \in U$ tal que $f(z) = f(u)$ y entonces $z \in NU$. Por otro lado, si $w \in X \cap NU$ entonces $w = nu_0$ con $n \in N$ y $u_0 \in U$ y por lo tanto $f(w) = \widetilde{f}(w) = \widetilde{f}(u_0) \in V$, lo cual demuestra la afirmación. Luego, se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en X y como f es cociente, V debe ser abierto en Y, esto es, $V \in \tau_Y$.

De la afirmación se sigue que $\tau_q = \tau$. Pero esto significa que $\widetilde{f}$ es una función abierta, pues si $U \subseteq G(X)$ es abierto entonces $\widetilde{f}(U) \in \tau_q = \tau$. $\square$

Otra versión del corolario anterior se puede enunciar de la siguiente manera.

2.19 Corolario. Sea $f : X \to G$ una función cociente de un espacio de Tychonoff X en un grupo topológico G. Entonces el homomorfismo continuo $\overline{f} : G(X) \to G$ que extiende a f es abierto.

Demostración. Consideremos la identidad $i : G \to G$ y extendámosla a un homomorfismo continuo $\overline{i} : G(G) \to G$. Sea $\widetilde{f} : G(X) \to G(G)$ el homomorfismo continuo del Corolario 2.18, el cual sabemos que es una función abierta. Nótese que $\overline{f} = \overline{i} \circ \widetilde{f}$, pues si $x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n} \in G(X)$ es una palabra en su forma normal, entonces

$$\bar{i}(\widetilde{f}(x_1^{r_n}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n})) = \bar{i}(f(x_1)^{r_1}\cdot\ldots f(x_n)^{r_n}) = f(x_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot f(x_n)^{r_n} = \overline{f}(x_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{r_n})$$

Así que para demostrar que $\overline{f}$ es una función abierta, será suficiente demostrar que $\bar{i} : G(G) \to G$ es una función abierta.

En efecto: por la Proposición 1.12 será suficiente ver que si U es un abierto en $G(G)$ que tiene al neutro e, entonces $\bar{i}(U)$ es una vecindad del neutro en G. Sea $x \in G$ fijo, como $x^{-1}x = e$ entonces existe un abierto V que tiene a x en G tal que $x^{-1}V \subseteq U$. Entonces se tiene que $e \in x^{-1}V = \bar{i}(x^{-1}V) \subseteq \bar{i}(U)$.
□

Podemos establecer ahora una relación entre el espacio $F(X)$ y el espacio $A(X)$.

Recordemos que dado un grupo G, se define el *subgrupo derivado* G' como el subgrupo generado por todos los conmutadores de G, esto es, G' es el subgrupo generado por todos los elementos de la forma $x^{-1}y^{-1}xy$ donde $x, y \in G$. Es fácil demostrar que G' es un subgrupo normal de G y que el cociente G/G' es un grupo abeliano.

2.20 Teorema. Sea K el subgrupo derivado de $F(X)$. Entonces K es cerrado en $F(X)$ y $A(X) \cong F(X)/K$ (es decir, $A(X)$ es topológicamente isomorfo a $F(X)/K$).

Demostración. Sea $i : X \to X$ la función identidad y sea $\phi : F(X) \to A(X)$ el homomorfismo continuo que extiende a i.

Verifiquemos que $ker(\phi) = K$. Efectivamente: notemos que si $x, y \in F(X)$, entonces $\phi(x^{-1}y^{-1}xy) = -\phi(x) - \phi(y) + \phi(x) + \phi(y) = 0$. Luego cada conmutador pertenece al núcleo de ϕ, por lo que al tomar el subgrupo generado obtenemos que $K \subseteq ker(\phi)$. Definamos ahora $\overline{\phi} : F(X)/K \to A(X)$ mediante $\overline{\phi}(xK) = \phi(x)$ para cada clase lateral $xK \in F(x)/K$. Notemos que $\overline{\phi}$ está bien definida, ya que si $xK = yK$ entonces $y^{-1}x \in K \subseteq ker(\phi)$, por lo que $\phi(y^{-1}x) = e$, de donde $\phi(x) = \phi(y)$. Además, es claro que $\overline{\phi}$ es homomorfismo, pues $\overline{\phi}(xKyK) = \phi(xy) = \phi(x) + \phi(y) = \overline{\phi}(xK) + \overline{\phi}(yK)$. Definamos $g : A(X) \to F(X)/K$ mediante $g(k_1x_1 + \ldots + k_nx_n) = (x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n})K$ para cada palabra en su forma normal $k_1x_1 + ... + k_nx_n \in A(X)$. Notemos que si $k_1x_1 + ... + k_nx_n \in A(X)$ entonces

$$\begin{aligned}\overline{\phi}(g(k_1x_1 + ... + k_nx_n)) &= \phi(x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}) \\ &= k_1\phi(x_1) + ... + k_n\phi(x_n) \\ &= k_1x_1 + ... + k_nx_n\end{aligned}$$

Análogamente si $(x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n})K \in F(X)/K$ entonces

$$\begin{aligned}g(\overline{\phi}((x_1^{r_1} \cdot ...x_n^{r_n})K)) &= g(r_1\phi(x_1) + ... + r_n\phi(x_n)) \\ &= g(r_1x_1 + ... + r_nx_n) \\ &= (x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n})K\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que $\overline{\phi}$ es invertible, luego es isomorfismo. Sea ahora $z \in ker(\phi)$, entonces $\overline{\phi}(zK) = \phi(z) = 0$, y como $\overline{\phi}$ es isomorfismo, entonces $zK = K$, es decir, $z \in K$. Esto nos da la otra contención y prueba que $Ker(\phi) = K$. En particular K es cerrado, pues $K = \phi^{-1}(0)$.

Mostraremos que ϕ es una función abierta. En efecto, notemos primero que ϕ es sobreyectiva, ya que si $x = k_1x_1 + ... + k_nx_n \in A(X)$ entonces $\phi(x_1^{k_1} \cdot ... \cdot x_n^{k_n}) = x$. Consideremos τ_q la familia de todas las imágenes $\phi(U)$ con $U \subseteq F(X)$ abierto. Por la Proposición 1.19, τ_q es una topología de grupo sobre $A_a(X)$. Notemos que si $\tau = \tau_{A(X)}$, entonces $\tau \subseteq \tau_q$, ya que si $V \in \tau$ entonces $V = \phi(\phi^{-1}(V)) \in \tau_q$. Para ver que $\tau_q \subseteq \tau$, por el Teorema 2.17 bastará mostrar que $\tau_q\restriction_X = \tau_X$. Como ya sabemos que $\tau \subseteq \tau_q$ entonces $\tau_X = \tau\restriction_X \subseteq \tau_q\restriction_X$. Para ver la otra contención, sea $V \in \tau_q$, digamos $V = X \cap \phi(U)$, siendo $U \subseteq F(X)$ abierto y supongamos que $x \in V$. Sea $z \in U$ tal que $\phi(z) = x$ y definamos $W := X \cap xz^{-1}U$, entonces W es un abierto en X, y además $x \in W$, pues $x = xz^{-1}z$. Además $W = \phi(W) \subseteq X \cap \phi(xz^{-1})\phi(U) = V$. Esto prueba que $V \in \tau_X$. Concluimos que $\tau_q = \tau$, pero esto indica precisamente que ϕ es una función abierta.

En resumen, hemos comprobado que $Ker(\phi) = K$ y que ϕ es una función abierta. Entonces por el Teorema 1.27 (Teorema de Isomorfismo) tenemos que $F(X)/K \cong A(X)$. $\square$

2.5. Propiedades topológicas de $G(X)$

A modo de introducción a esta sección daremos un pequeño ejemplo de dos propiedades que los grupos topológicos libres nunca tienen.

Recordemos que dado un grupo topológico G, decimos que G es *precompacto* (o también conocido como *totalmente acotado*) si para cada vecindad $V \subseteq G$ de e_G existe un subconjunto finito $A \subseteq G$ tal que $AV = G = VA$. Por la Proposición 1.13, sabemos que si $f : G \to H$ es un epimorfismo continuo entre grupos topológicos y G es precompacto, entonces H es precompacto. Considere el grupo abeliano $(\mathbb{Z}, +)$ equipado con la topología discreta, esto resulta ser un ejemplo de un grupo topológico que no es precompacto. En efecto, $\{0\}$ es una vecindad de 0 tal que para todo $A \subseteq \mathbb{Z}$ finito se tiene que $A + \{0\} \neq \mathbb{Z} \neq \{0\} + A$, pues $\mathbb{Z}$ es infinito.

2.21 Proposición. Sea X un espacio topológico. Entonces $G(X)$ no es ni conexo ni precompacto.

Demostración. Consideremos la función $f : X \to \mathbb{Z}$ de X en el grupo topológico $(\mathbb{Z}, +)$ (equipado con la topología discreta) definida por $f(x) = 1$ para todo $x \in X$. Claramente f es continua, porque es una función constante. Sea $\widetilde{f} : G(X) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo continuo que extiende a f. Notemos que si $m \in \mathbb{Z}$ y $x \in X$ es fijo, entonces $\widetilde{f}(x^m) = mf(x) = m$, lo cual muestra que $\widetilde{f}$ es epimorfismo. Por lo mencionado antes de esta proposición, si $G(X)$ fuese precompacto, entonces $\mathbb{Z}$ sería precompacto, lo cual es falso y por lo tanto $G(X)$ no es precompacto. El mismo argumento claramente sirve para la conexidad, ya que $\mathbb{Z}$ no es conexo, pues ésta es una propiedad que se conserva bajo imágenes continuas. $\square$

La proposición anterior fue un ejemplo muy sencillo de dos propiedades que $G(X)$ nunca tiene. Nuestro objetivo es seguir estudiando las propiedades topológicas de dicho espacio topológico.

Introducimos la siguiente notación que será útil para seguir con este objetivo. Recuerde primero que llamamos una palabra (no vacía) reducida en $G_a(X)$ a una expresión de la forma $x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ donde cada $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ y n es llamada la longitud de dicha palabra. Ahora bien, para cada $n \geq 0$, definamos $B_n(X)$ como el subespacio de $G(X)$ que consiste de todas las palabras reducidas de longitud menor o igual que n, con respecto a la base libre X (notemos que $B_0(X) = \{e\}$). Sea $C_n(X) = B_n(X) \setminus B_{n-1}(X)$ para cada $n \geq 1$, esto es, $C_n(X)$ es el subespacio que consiste de todas las palabras reducidas de longitud exactamente n. Definamos también $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$, donde el símbolo $\oplus$ denota la suma topológica usual de los espacios (disjuntos) X, X^{-1} y $\{e\}$, donde $\{e\}$ está equipado (necesariamente) con la topología discreta y X^{-1} está equipado con la topología $\tau_{X^{-1}} := \{U^{-1} : U \in \tau_X\}$. Es fácil notar que X^{-1} resulta un espacio homeomorfo a X, y es por tanto una copia ajena de este espacio. Finalmente, para cada $n \geq 0$, consideremos la función $i_n : \widetilde{X}^n \to G(X)$ definida por $i_n(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$ para cada $(x_1, ..., x_n) \in \widetilde{X}^n$. A menudo la función i_n será llamada *función multiplicación*. Considere también $C_n^*(X) := i_n^{-1}(C_n(X))$. Debido a que i_n está definida en términos del producto en $G(X)$, es normal pensar que es una función continua. Formalizamos este hecho y otro más en el siguiente lema.

2.22 Lema. Sea X un espacio y $n \geq 1$. Entonces la función $i_n : \widetilde{X}^n \to G(X)$ es continua y además $i_n(\widetilde{X}^n) = B_n(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Para ver que i_n es continua, tomamos un punto $(x_1, ..., x_n)$ en el espacio $\widetilde{X}^n$ y un abierto $U \subseteq G(X)$ tal que $i_n(x_1, ..., x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n \in U$. Siendo $G(X)$ un grupo topológico, existen $V_1, ..., V_n \subseteq G(X)$ abiertos tales que $x_k \in V_k$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$ y $V_1 \cdot ... \cdot V_n \subseteq U$. Por la Proposición 2.7, $G(X)$ y $G(X^{-1})$ son topológicamente isomorfos. Identificamos estos dos espacios como uno solo, de modo que podemos aplicar el Teorema 2.17 para obtener que si τ es la topología del espacio $G(X)$, entonces $\tau\restriction_X = \tau_X$ y $\tau\restriction_{X^{-1}} = \tau_{X^{-1}}$, esto implica que si $k \in \{1, ..., n\}$ entonces $V_k \cap X \in \tau_X$ y $V_k \cap X^{-1} \in \tau_{X^{-1}}$. Para cada $k \in \{1, ..., n\}$ definimos W_k como $V_k \cap X$ si $x_k \in X$, o bien $V_k \cap X^{-1}$ si $x_k \notin X$ y $x_k \in X^{-1}$, o bien $\{e\}$ si $x_k = e$. Claramente W_k es un abierto del espacio $\widetilde{X}$ tal que $x_k \in W_k$ para cada k, entonces se cumple que $(x_1, ..., x_n) \in W_1 \times ... \times W_k$ y $i_n(W_1 \times ... \times W_n) = W_1 \cdot ... \cdot W_n \subseteq V_1 \cdot ... \cdot V_n \subseteq U$. Esto prueba la continuidad de i_n.

Demostraremos ahora la igualdad $i_n(\widetilde{X}^n) = B_n(X)$. Sea $x \in i_n(\widetilde{X}^n)$, luego existen $x_1, ..., x_n \in \widetilde{X}$ tal que $x = x_1 \cdot ... \cdot x_n$, por lo cual x es una palabra cuya longitud en su forma reducida es menor o igual que n, esto es, $x \in B_n(X)$. Recíprocamente, sea $z \in B_n(X)$, esto es, z es una palabra reducida de longitud menor o igual que n (con respecto a la base libre X), digamos $z = z_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot z_m^{\varepsilon_m}$ con $m \leq n$. Definimos $z_{m+1} = ... = z_n = e$, entonces se tiene que $i_n(z_1^{\varepsilon_1}, ..., z_m^{\varepsilon_m}, z_{m+1}, ..., z_n) = z$, lo cual nos da la otra contención. $\square$

2.23 Teorema. Sea X un espacio y $n \geq 1$.

1. Los conjuntos $B_n(X)$ y $i_n(X^n)$ son cerrados en $G(X)$. En particular, $i_1(X^1) = X$ es cerrado en $G(X)$
2. En el caso de $F(X)$, la función $i_n\restriction_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \to C_n(X)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Como X es de Tychonoff, podemos considerar su compactación de Stone-Cech βX y considerar a X como un subespacio de dicha compactación. Sea $i : X \to \beta X$ la inclusión, la cual es continua, y sea $\widetilde{i} : G(X) \to G(\beta X)$ una extensión de i a un homomorfismo continuo (recuerde que βX es un espacio de Tychonoff). Debido a que $X \subseteq \beta X$, es fácil notar que $G(X) \subseteq G(\beta X)$. Notemos ahora que $\widetilde{i}$ debe ser la inclusión, ya que si $x = x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n} \in G(X)$ entonces $\widetilde{i}(x) = i(x_1)^{r_1} \cdot ... \cdot i(x_n)^{r_n} = x$. Dicho de otra forma, la propiedad del grupo libre implica que la inclusión de $G(X)$ en $G(\beta X)$ es continua.

1. Sea $K := \beta X \oplus \{e\} \oplus (\beta X)^{-1}$. Para cada $n \geq 1$, sea $i_n^* : K^n \to G(\beta X)$ definida por $i_n^*(y_1, ..., y_n) = y_1 \cdot ... \cdot y_n$. El Lema 2.22 nos garantiza que i_n^* es continua. Además, si $n \geq 1$ se tiene que $i_n^*\restriction_{\widetilde{X}^n} = \widetilde{i} \circ i_n$, ya que si $x_1, ..., x_n \in \widetilde{X}$ entonces $\widetilde{i}(i_n(x_1, ..., x_n)) = x_1 \cdot ... \cdot x_n = i_n^*(x_1, ..., x_n)$. Por el Lema 2.22, para $n \geq 1$ sabemos que $B_n(\beta X) = i_n^*(K^n)$ y como K^n es compacto (pues K es suma de tres espacios compactos y además el producto de espacios compactos es compacto), por la continuidad de i_n^* se tiene que $B_n(\beta X)$ es compacto. En particular, como $G(\beta X)$ es Hausdorff, entonces $B_n(\beta X)$ es cerrado en $G(\beta X)$.

   Afirmamos ahora lo siguiente: $\widetilde{i}(B_n(X)) = \widetilde{i}(G(X)) \cap B_n(\beta X)$. En efecto, sea $z \in \widetilde{i}(B_n(X))$, entonces existe $w \in B_n(X)$, digamos $z = \widetilde{i}(w) = w$. En particular, $z \in \widetilde{i}(G(X))$ y como $z = w \in B_n(X)$, digamos $z = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_m^{\varepsilon_m}$ con $x_1, ..., x_n \in X \subseteq \beta X$, entonces $z \in B_n(\beta X)$. Recíprocamente, sea $x \in \widetilde{i}(G(X)) \cap B_n(\beta X)$, entonces existe $y \in G(X)$ tal que $x = \widetilde{i}(y) = y$ y y tiene forma reducida $y = y_1^{s_1} \cdot ... \cdot y_k^{s_k}$ con $k \in \mathbb{N}$, pero como $x \in B_n(\beta X)$, necesariamente $k \leq n$, lo que muestra que $x \in \widetilde{i}(B_n(X))$.

De la afirmación anterior y como $B_n(\beta X)$ es cerrado en $G(\beta X)$, se sigue que $\widetilde{i}(B_n(X))$ es cerrado en $\widetilde{i}(G(X))$. Siendo $\widetilde{i}$ continua e inyectiva, se sigue que $\widetilde{i}^{-1}(\widetilde{i}(B_n(X))) = B_n(X)$ es cerrado en $G(X)$. Análogamente, se demuestra que $\widetilde{i}(i_n(X^n)) = \widetilde{i}(G(X)) \cap i_n^*((\beta X)^n)$. Siendo $i_n^*((\beta X)^n)$ compacto por ser imagen continua de un compacto, se tiene que $\widetilde{i}(i_n(X^n))$ es cerrado en $\widetilde{i}(G(X))$. Por lo tanto, siendo $\widetilde{i}$ continua e inyectiva se tiene que $i_n(X^n)$ es cerrado en $G(X)$. Finalmente, como $i_1(X^1) = X$, se concluye que éste es cerrado en $G(X)$.

2. Verifiquemos primero que $f := i_n\restriction_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \to C_n(X)$ es biyectiva (ya sabemos que es continua). Notemos primero que $f(C_n^*(X)) = i_n(i_n^{-1}(C_n(X))) \subseteq C_n(X)$. Para ver la otra contención sea $z \in C_n(X)$, y supongamos que $z = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ tiene longitud exactamente n, por lo que $(x_1^{\varepsilon_1}, ..., x_n^{\varepsilon_n}) \in C_n^*(X)$ y $f((x_1^{\varepsilon_1}, ..., x_n^{\varepsilon_n})) = z$. Esto muestra que f es sobreyectiva. Para ver la inyectividad, sean $\overline{x} = (x_1^{\varepsilon_1}, ..., x_n^{\varepsilon_n})$ y $\overline{y} = (y_1^{\delta_1}, ..., y_n^{\delta_n})$ elementos de $C_n^*(X)$ tales que $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, entonces $x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_n^{\varepsilon_n} = y_1^{\delta_1} \cdot ... \cdot y_n^{\delta_n}$. Como estamos trabajando en $F(X)$, tenemos que $x_i = y_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$.

   Finalmente, veamos que f es una función abierta. Utilizando la notación del inciso anterior, como el dominio K^n de i_n^* es compacto, entonces $i_n^* : K^n \to F(\beta X)$ es continua y cerrada. De la misma forma que con f, es fácil notar que la función $g := i_n^*\restriction_{C_n^*(\beta X)} : C_n^*(\beta X) \to C_n(\beta X)$ es biyectiva. Por lo anterior, g es un homeomorfismo. Sea ahora $U \subseteq C_n^*(X)$ abierto y sea $V \subseteq C_n^*(\beta X)$ abierto tal que $U = V \cap C_n^*(X)$. Como g es homeomorfismo y $\widetilde{i} \circ i_n = i_n^*\restriction_{\widetilde{X}^n}$, tenemos que el conjunto

$$\widetilde{i}(i_n(U)) = i_n^*(V) \cap i_n^*(C_n^*(X)) = i_n^*(V) \cap \widetilde{i}(C_n(X))$$

   es abierto en $\widetilde{i}(C_n(X))$. Por tanto su preimagen bajo $\widetilde{i}$ es abierta, es decir, $i_n(U)$ es un abierto de $C_n(X)$. Esto demuestra que f es abierta.

□

Observe que el inciso (2) del Teorema 2.23 anterior no puede generalizarse al caso de $A(X)$. Esto porque si X es un conjunto de al menos dos elementos, entonces la función $i_n : \widetilde{X}^n \to A(X)$ no es inyectiva a menos que $n = 1$. En efecto, si $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $n > 1$ entonces $i_n(x, ..., x, y) = (n-1)x + y = y + (n-1)x = i_n(y, x, ..., x)$. No obstante, la función $i_n \restriction_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \to C_n(X)$ es perfecta y abierta para cada $n \geq 1$ (en el caso de $A(X)$), como vemos en el siguiente resultado:

2.24 Teorema. En el caso de $A(X)$, las funciones $i_n \restriction_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \to C_n(X)$ y $i_n \restriction_{X^n} : X^n \to i_n(X^n)$ son perfectas y abiertas, para cada espacio de Tychonoff X y cada natural $n \geq 1$.

Demostración. Utilizaremos la misma notación que en la demostración del Teorema 2.23. Primero notemos que la función $i_n^* : K^n \to C_n(\beta X)$ es perfecta, donde $K = \beta X \oplus \{e\} \oplus (\beta X)^{-1}$. En efecto, claramente es sobreyectiva y continua, y como cada fibra $f^{-1}(\{y\})$ es cerrada, por ser K^n compacto entonces $f^{-1}(\{y\})$ es compacto. Consideremos ahora $P_n := \widetilde{i}(C_n(X))$. Entonces $P_n \subseteq C_n(\beta X)$ y $(i_n^*)^{-1}(P_n) = C_n^*(X)$, de donde se concluye que $i_n^* \restriction_{C_n^*(X)} = \widetilde{i} \circ i_n \restriction_{C_n^*(X)}$ es también una función perfecta. Siendo esta composición una función perfecta, se tiene que $i_n \restriction_{C_n^*(X)}$ es perfecta.

Verificaremos ahora que las funciones $i_n \restriction_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \to C_n(X)$ y $i_n \restriction_{X^n} : X^n \to i_n(X^n)$ son abiertas. Sea O un subconjunto abierto no vacío de $C_n^*(X)$ y elijamos un punto arbitrario $(x_1^{\varepsilon_1}, ..., x_n^{\varepsilon_n}) \in O$. Como $C_n(X) = B_n(X) \setminus B_{n-1}(X)$, el cual es abierto en $B_n(X)$ (pues $B_{n-1}(X)$ es cerrado en $A(X)$) y i_n es continua, entonces $C_n^*(X) = i_n^{-1}(C_n(X))$ es abierto en $\widetilde{X}^n$. Por lo tanto, podemos hallar abiertos $U_1, ..., U_n$ de X tales que para cada $i, j \leq n$, $x_i \in U_i$, si $x_i \neq x_j$ entonces $U_i \cap U_j = \emptyset$, y $V := U_1^{\varepsilon_1} \times ... \times U_n^{\varepsilon_n} \subseteq U$.

De las propiedades anteriores, se sigue que:

$$i_n^{-1}(i_n(V)) = \bigcup \{U_{\pi(1)} \times ... \times U_{\pi(n)} : \pi \in S_n\}$$

donde S_n es el grupo de funciones biyectivas de $\{1, ..., n\}$ en sí mismo. Por tanto $i^{-1}(i_n(V))$ es abierto en $\widetilde{X}^n$ y en particular en $C_n^*(X)$. Como $i_n : C_n^*(X) \to C_n(X)$ es una función cociente (por ser perfecta [4]), entonces $i_n(V)$ es abierto en $C_n(X)$. Por lo tanto $i_n(O)$ es abierto en $C_n(X)$. Finalmente, como $X^n = i_n^{-1}(i_n(X^n))$, esto implica que $i_n \restriction_{X^n}$ es una función abierta, como quería demostrarse. □

El siguiente corolario del Teorema 2.23 muestra una gran cantidad de grupos topológicos que no son normales:

2.25 Corolario. Si X es un espacio de Tychonoff que no es normal, entonces $F(X)$ y $A(X)$ tampoco son normales.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.23, X es un subespacio cerrado tanto de $F(X)$ como de $A(X)$. Por tanto, si alguno de estos dos fuese normal, entonces X lo sería (recuerde que subespacios cerrados de espacios normales son normales). $\square$

Recuerde que si X es un espacio topológico, entonces se define el *peso de una red* de X como el cardinal infinito más pequeño tal que existe una red sobre X con dicho cardinal. Usaremos $nw(X)$ para denotar el peso de red sobre X.

2.26 Corolario. Para cada espacio X de Tychonoff, $nw(G(X)) = nw(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Como X es un subespacio de $G(X)$, entonces $nw(X) \leq nw(G(X))$. Por otro lado, si $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$, entonces $nw(\widetilde{X}) = nw(X)$ y así $nw(\widetilde{X}^n) = nw(X)$ para cada $n \in \omega$. Como la función $i_n : \widetilde{X}^n \to B_n(X)$ es continua y sobreyectiva, tenemos que $nw(B_n(X)) \leq nw(\widetilde{X}^n) = nw(X)$. Finalmente, como $G(X) = \bigcup_{n\in\omega} B_n(X)$, se sigue que $nw(G(X)) \leq nw(X) \cdot \omega = nw(X)$, lo cual nos da la desigualdad deseada. $\square$

El siguiente resultado caracteriza a los grupos topológicos libres que son Lindelöf.

2.27 Teorema. Sea X un espacio de Tychonoff. Entonces $G(X)$ es un espacio Lindelöf si y sólo si X^n es Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $G(X)$ es Lindelöf. Si $n \in \mathbb{N}$ es fijo, por el Teorema 2.23 $i_n(X^n)$ es un subespacio cerrado en $G(X)$, por lo tanto $i_n(X^n)$ es Lindelöf. También hemos demostrado que la función $i_n\restriction_{X^n} : X^n \to i_n(X^n)$ es perfecta (incluso es homeomorfismo en el caso en que $G(X) = F(X)$, debido a los Teoremas 2.23 y 2.24), y como el contradominio es un espacio Lindelöf, entonces su dominio X^n es Lindelöf. Recíprocamente, supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ el espacio X^n es un espacio Lindelöf. Notemos ahora que, en particular, $\widetilde{X} := X \cup \{e\} \cup X^{-1}$ es Lindelöf por ser suma topológica finita de espacios con esa propiedad (recuerde que $X \cong X^{-1}$). Luego, $\widetilde{X}^n$ es Lindelöf por ser unión finita de copias cerradas de espacios X^k con $k \leq n$. Finalmente, notemos que $G(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(X)$, con $B_n(X) = i_n(\widetilde{X}^n)$ es Lindelöf porque $B_n(X)$ es imagen continua de un espacio con dicha propiedad. Así que $G(X)$ es Lindelöf por ser unión numerable de espacios Lindelöf. $\square$

Los Teoremas 2.23 y 2.24 tienen como consecuencia otra propiedad interesante:

2.28 Corolario. Sea X un espacio de Tychonoff y $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot x_n^{\varepsilon_n}$ una palabra en su forma reducida de $G(X)$. Supongamos que U_i es vecidad abierta de x_i para toda $i \in \{1, ..., n\}$ y que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $x_i \neq x_j$ para cualesquiera $i, j \in \{1, ..., n\}$. Entonces el conjunto $W := U_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot U_n^{\varepsilon_1}$ es una vecidad abierta de g en $B_n(X)$. Más aún, la familia de los conjuntos W definidos de esta forma es una base local de $B_n(X)$ en el punto g.

Demostración. Por el Teorema 2.23, $B_{n-1}(X)$ es un subconjunto cerrado de $G(X)$. Por lo tanto $C_n(X) = B_n(X) \setminus B_{n-1}(X)$ es un subconjunto abierto en el subespacio $B_n(X)$. Llamemos $x := (x_1^{\varepsilon_1}, ..., x_n^{\varepsilon_n}) \in \widetilde{X}^n$. Claramento el conjunto $U := U_1^{\varepsilon_1} \times ... \times U_n^{\varepsilon_n}$ es abierto en $\widetilde{X}^n$, además $x \in U$ y $i_n(U) = U_1^{\varepsilon_1} \cdot ... U_n^{\varepsilon_n} \subseteq C_n(X)$. Por tanto $U \subseteq C_n^*(X)$. Por los Teoremas 2.23 y 2.24 tenemos que la función $i_n\restriction_{C_n^*(X)} : C_n^*(X) \to C_n(X)$ es abierta. Por lo tanto $W = i_n(U)$ es una vecindad abierta de $g = i_n(x)$ en $C_n(X)$, y por tanto en $B_n(X)$. Más aún, como los conjuntos de la forma $U = U_1^{\varepsilon_1} \cdot ... \cdot U_n^{\varepsilon_n}$ forman una base local en $C_n^*(X)$ en el punto x, entonces también los conjuntos $W = i_n(U)$ forman una base local en $C_n(X)$ en el punto $g = x_1^{\varepsilon_1} \cdot ... x_n^{\varepsilon_n}$. Como $C_n(X)$ es abierto en $B_n(X)$, obtenemos la misma conclusión en el espacio $B_n(X)$. $\square$

Las propiedades anteriores que poseen los grupos libres $F(X)$ y $A(X)$ podrían sugerir la idea de que éstas son cercanas a las que posee el espacio original X. Concluimos este capítulo con un claro ejemplo donde esto no sucede.

2.29 Corolario. Sea X un espacio de Tychonoff no-discreto. Entonces $F(X)$ no es primero numerable, y tampoco lo es $A(X)$.

Demostración. Supongamos que x^* es un punto no aislado de X. En el Teorema 2.20 se demostró que $A(X) \cong F(X)/K$, donde K es el subgrupo derivado de $F(X)$. Es decir que $A(X)$ es un cociente de $F(X)$. De esta forma si $F(X)$ fuese primero numerable, también lo sería $F(X)/K$ por el Corolario 1.23. Por tanto es suficiente demostrar que $A(X)$ no es primero numerable. Para ello, será suficiente mostrar que no existe una base de vecindades en el neutro $0 \in A(X)$. Por contradicción, supongamos que $\{U_n : n \in N\}$ es una base de vecindades de e. Como se ha hecho con anterioridad, usaremos la notación aditiva para el grupo abeliano $A(X)$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Debido a que $2^n(x^* - x^*) = 2^n x^* - 2^n x^* = 0 \in U_n$, podemos hallar V_n vecindad abierta de x^* tal que $2^n(V_n - V_n) \subseteq U_n$. Como x^* es un punto aislado, podemos elegir $x_n, y_n \in V_n$ tales que $y_i \neq x_n \neq y_n \neq x_i$ para cualesquiera $n, i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto la sucesión (u_n) definida por $u_n = 2^n(x_n - y_n) \in U_n$ converge a 0. Mostraremos que esto lleva a una contradicción:

En efecto. Siendo X de Tychonoff, podemos construir una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades para cada $n \geq 1$:

1. $|f_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$
2. $f_n(x^*) = f_n(x_k) = f_n(y_k) = f_n(y_n) = 0$ para cada $1 \leq k < n$
3. $f_n(x_n) = \pm\dfrac{1}{2^n}$, donde $f_n(x_n)$ y el número $\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x_n) - f_k(y_n)$ tienen el mismo signo si $n > 1$.

Considere ahora a la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. De 1) se sigue que f es continua (debido al criterio M de Weierstress), pues $|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ para cada $z \in X$. Luego entonces ésta admite una extensión a un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : A(X) \to \mathbb{R}$. Sea $n \geq 1$. Entonces:

$$|\widetilde{f}(u_n)| = 2^n \cdot \left|\sum_{k=1}^{\infty}(f_k(x_n) - f_k(y_n))\right| = 2^n \cdot \left|f_n(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1}(f_k(x_n) - f_k(y_n))\right|$$

De lo cual se sigue que $|\widetilde{f}(u_n)| \geq 2^n \cdot |f_n(x_n)| = 1$. Se sigue entonces que la sucesión $(\widetilde{f}(u_n) : n \in \mathbb{N})$ no puede converger a $\widetilde{f}(0) = 0$, esto contradice la continuidad de $\widetilde{f}$. En conclusión $A(X)$ no es primero numerable. $\square$

Capítulo 3

Espacios M y A-equivalentes

3.1. Introducción

No es muy difícil demostrar que si X y Y son dos espacios topológicos de Tychonoff homeomorfos, entonces $F(X)$ y $F(Y)$ son topológicamente isomorfos. De hecho, el homomorfismo continuo que resulta de extender el homeomorfismo existente entre X y Y resulta ser un isomorfismo topológico (véase Observación 3.6). Sin embargo, es posible construir un ejemplo de que lo anterior no ocurre al revés. Es decir, no es necesariamente cierto que si $F(X)$ y $F(Y)$ son topológicamente isomorfos entonces X y Y son homeomorfos. De esta forma, se dice que dos espacios son M-equivalentes si ocurre que sus grupos topológicos libres son topológicamente isomorfos. Análogamente definiremos espacios A-equivalentes. En este capítulo, estudiaremos la noción de M-equivalencia y de A-equivalencia. Demostraremos las propiedades más básicas de estas relaciones. En la penúltima sección introducimos dos métodos debidos a O. Okunev para construir espacios M-equivalentes. Finalmente, usamos estas construcciones para mostrar ejemplos de propiedades topológicas que no se preservan por la M-equivalencia

3.2. Propiedad del límite directo

En general, decimos que una topología de un espacio X está *determinada* por una familia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si se cumple que todo $F \subseteq X$ es cerrado en X si y sólo si $F \cap C$ es cerrado en C para todo $C \in \mathcal{C}$. No es difícil notar que esta condición es equivalente a que todo $A \subseteq X$ es abierto si y sólo si lo es $A \cap C$ en C para cada $C \in \mathcal{C}$. Dado un espacio de Tychonoff, su grupo topológico libre $G(X)$ es unión creciente de la sucesión $\{B_n(X) : n \in \omega\}$ y además los $B_n(X)$ son cerrados (recuerde que $B_n(X)$ denota al conjunto de los elementos en $G(X)$ cuya forma reducida tiene longitud menor o igual que n respecto de la base X). Por ello, introducimos la siguiente definición.

3.1 Definición. El grupo topológico libre $G(X)$ tiene la propiedad del *límite directo* si la topología de $G(X)$ está determinada por la familia $\{B_n(X) : n \in \omega\}$. Si $G(X)$ tiene la propiedad del límite directo, diremos que $G(X)$ es el límite directo de sus subespacios $B_n(X)$ $(n \in \omega)$.

En general, dado un espacio X que es la unión creciente de una sucesión de subconjuntos compactos $\{X_n : n \in \omega\}$, si la topología de X está determinada por la sucesión $\{X_n : n \in \omega\}$, entonces X es llamado k_ω-espacio, y $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ es una k_ω-descomposición de X. Una observación fácil de notar es que todo k_ω-espacio es σ-compacto, pero la implicación recíproca es falsa. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ con su topología usual es σ-compacto, pero es posible probar que no admite una k_ω-descomposición. En lo que sigue, dado un espacio de Tychonoff X y un subconjunto $Y \subseteq X$, vamos a usar la notación $\langle Y \rangle_n := G(Y,X) \cap B_n(X)$, donde $G(Y,X)$ es el subgrupo de $G(X)$ generado por Y.

3.2 Teorema. Dado un espacio de Tychonoff X, el grupo topológico libre $G(X)$ tiene la propiedad del límite directo si X es un k_ω-espacio. Además, si $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ es una k_ω-descomposición para X, entonces $G(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle X_n \rangle_n$ es una k_ω-descomposición de $G(X)$.

Demostración. Sea $X = \bigcup_{n\in\omega} X_n$ una k_ω-descomposición de X. En lo que sigue, e denotará al neutro del grupo $G(X)$. Para cada $n \geq 1$, consideremos $\widetilde{X}_n = X_n \cup \{e\} \cup X_n^{-1}$ y $K_n = \widetilde{X}_n \cdot \ldots \cdot \widetilde{X}_n$ (el producto n-veces). Notemos que $\langle X_n \rangle_n = K_n$ es un subconjunto compacto de $G(X)$, $K_n^{-1} = K_n$, $K_n \cdot K_n \subseteq K_{2n}$ para cada $n \geq 1$, y $G(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Sea τ^* la topología en $G_a(X)$ determinada por la familia $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada K_n está equipada con la topología heredada de $G(X)$. Dicho de otra forma, $O \subseteq G(X)$ pertenece a τ^* si y sólo si $O \cap K_n$ es abierto en K_n para cada $n \geq 1$. Claramente, τ^* es una topología más fina que τ, donde τ es la topología de $G(X)$, además las restricciones de τ^* y τ en K_n coinciden para cada n. Nuestro objetivo es mostrar que $\tau^* = \tau$. Para ello, verificaremos que la familia τ^* es una topología de grupo sobre $G_a(X)$ y que induce en X su topología original.

Efectivamente, es claro que τ^* es una topología sobre $G_a(X)$. Como $X \subseteq K_1$, de la definición de τ^* es claro que $\tau^*\restriction_X = \tau_X$, donde τ_X es la topología original de X. Además, si $U \in \tau^*$ entonces $U^{-1} \in \tau^*$. En efecto, para cada $n \geq 1$ existe un abierto V_n en $G(X)$ tal que $U \cap K_n = V_n \cap K_n$. Como K_n coincide con K_n^{-1}, entonces

$$U^{-1} \cap K_n = U^{-1} \cap K_n^{-1} = (U \cap K_n)^{-1} = (V_n \cap K_n)^{-1} = V_n^{-1} \cap K_n.$$

Por lo cual, $U^{-1} \cap K_n$ es abierto en K_n, luego $U^{-1} \in \tau^*$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que si $g, h \in G_a(X)$ y $g \cdot h \in U \in \tau^*$, entonces existen $V, W \in \tau^*$ tales que $g \in V, h \in W$ y $V \cdot W \subseteq U$.

Escojamos un $m \geq 1$ tal que $g, h \in K_m$. Construiremos dos sucesiones $\{V_n : n \geq m\}$ y $\{W_n : n \geq m\}$ que cumplan las siguientes tres propiedades para cada $n \geq m$:

1. V_n y W_n son abiertos en K_n
2. $A_n = Cl_{K_n}(V_n) \subseteq V_{n+1}$ y $B_n = Cl_{K_n}(W_n) \subseteq W_{n+1}$
3. $A_n \cdot B_n \subseteq U$.

La contrucción se hará por inducción empezando desde m. Por la continuidad de la multiplicación en $G(X)$, existen abiertos V'_m y W'_m en K_m tales que $g \in V'_m, h \in W'_m$ y $V'_m \cdot W'_m \subseteq U \cap K_{2m}$. Como K_m es regular, podemos encontrar abiertos V_m y W_m en K_m tales que $g \in V_m \subseteq Cl_{K_m}(V_m) \subseteq V'_m$ y $h \in W_m \subseteq Cl_{K_m}(W_m) \subseteq W'_m$.

Suponga ahora que para $n \geq m$ se han definido $V_m, ..., V_n$ y $W_m, ..., W_n$ satisfaciendo las condiciones 1), 2) y 3). Por 3), los conjuntos $A_n = Cl_{K_n}(V_n)$

y $B_n = Cl_{K_n}(W_n)$ satisfacen $A_n \cdot B_n \subseteq U \cap K_{2n}$. Como la multiplicación $\cdot : K_{n+1} \times K_{n+1} \to K_{2n+2}$ es continua, existen abiertos V'_{n+1} y W'_{n+1} en K_{n+1} tales que $A_n \subseteq V'_{n+1}, B_n \subseteq W'_{n+1}$ y $V'_{n+1} \cdot W'_{n+1} \subseteq U$. Usando la normalidad del espacio compacto K_{n+1}, podemos encontrar abiertos V_{n+1} y W_{n+1} en K_{n+1} tales que $A_n \subseteq V_{n+1} \subseteq Cl_{K_{n+1}}(V_{n+1}) \subseteq V'_{n+1}$ y $B_n \subseteq W_{n+1} \subseteq Cl_{K_{n+1}}(W_{n+1}) \subseteq W'_{n+1}$.

Continuando este proceso, obtenemos las sucesiones

$$V_m \subseteq V_{m+1} \subseteq ... \subseteq V_n \subseteq ...$$

y

$$W_m \subseteq W_{m+1} \subseteq ... \subseteq W_n \subseteq ...$$

satisfaciendo las condiciones 1), 2) y 3). Definamos ahora $V = \bigcup_{k=m}^{\infty} V_k$ y $W = \bigcup_{k=m}^{\infty} W_k$. Claramente, $g \in V$ y $h \in W$. De 1) y 2) se sigue que $V \cap K_n = \bigcup_{k=n}^{\infty}(V_k \cap K_n)$ es abierto en K_n para cada $n \geq m$, luego 1) implica que $V \in \tau^*$. Similarmente $W \in \tau^*$. Finalmente, 2) y 3) implican que

$$V \cdot W = \bigcup_{k=m}^{\infty} (V_k \cdot W_k) \subseteq \bigcup_{k=m}^{\infty} (A_k \cdot B_k) \subseteq U.$$

Así, hemos encontrado $V, W \in \tau^*$ tales que $g \in V, h \in W$ y $V \cdot W \subseteq U$. Esto prueba la afirmación. Luego, hemos probado que τ^* induce en X su topología original. Siendo τ (la topología de $G(X)$) la topología más fina sobre $G_a(X)$ que induce en X su topología original, obtenemos que $\tau^* \subseteq \tau$, lo que nos da la igualdad deseada. □

Es claro que si X es compacto entonces es un k_ω-espacio. Basta verlo como unión numerable de copias de él mismo. Luego el Teorema 3.2 nos da la siguiente consecuencia inmediata.

3.3 Corolario. Si X es de Tychonoff y compacto, entonces su grupo topológico libre $G(X)$ tiene la propiedad del límite directo.

Otras dos consecuencias del Teorema 3.2 son las siguientes.

3.4 Corolario. Sean X un espacio de Tychonoff y $C \subseteq G(X)$.

1. Si $C \cap B_n(X)$ es finito para cada $n \in \omega$, entonces C es cerrado y discreto en $G(X)$.

2. Si K es un subespacio numerablemente compacto de $G(X)$, entonces $K \subseteq B_n(X)$ para algún $n \in \omega$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $p : X \to K$ un encaje topológico de X en un espacio compacto K (por ejemplo, puede tomarse $K = \beta X$). Extendemos p a un homomorfismo continuo $\widetilde{p} : G(X) \to G(K)$ y consideremos $Q = \widetilde{p}(D)$, donde D es un subconjunto arbitrario de C. Entonces $Q \cap B_n(X)$ es finito, por tanto cerrado, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema anterior la topología de $G(K)$ está determinada por la familia $\{B_n : n \in \omega\}$, luego Q es cerrado en $G(K)$. Como $\widetilde{p}$ es un monomorfismo continuo, concluimos que D es cerrado en $G(X)$. Por lo tanto todos los subconjuntos de C son cerrados en $G(X)$, luego C es discreto.

2. Suponga lo contrario, es decir que para todo $n \in \omega$ se tiene que K no es subconjunto de $B_n(X)$, o equivalentemente que $K \setminus B_n(X) \neq \emptyset$ para todo $n \in \omega$. Entonces existe un subconjunto infinito C de K tal que $C \cap B_n(X)$ es finito para cada $n \in \omega$. Por el inciso anterior, C es cerrado y discreto en $G(X)$, luego C es cerrado y discreto en K, lo cual es una contradicción. $\square$

Para finalizar la sección, establecemos un resultado que daremos por cierto sin demostración, ya que dicha prueba requiere teoría que no utilizamos en este trabajo. La demostración puede consultarse en [5].

3.5 Proposición. Si K es un subespacio pseudocompacto de $G(X)$, entonces $K \subseteq B_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Espacios topológicos M y A-equivalentes

Para motivar la definición de espacios M y A-equivalentes, tomemos en cuenta la siguiente observación.

3.6 Observación. Suponga que X y Y son espacios topológicos homeomorfos. ¿Será cierto que $F(X)$ y $F(Y)$ son grupos topológicos libres topológicamente isomorfos entre sí? No es muy difícil notar que la respuesta a esta pregunta es positiva. Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre espacios topológicos. Podemos ver a f como una función continua $f : X \to F(Y)$ (recuerde que Y está encajado en $F(Y)$). Llamemos $h_1 : F(X) \to F(Y)$ al homomorfismo continuo que extiende a f. Similarmente, construimos $h_2 : F(Y) \to F(X)$ al homomorfismo continuo que extiende a f^{-1}. Consideremos ahora un elemento típico de $F(X)$, de la forma $x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}$. Notemos ahora que

$$h_2(h_1(x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n})) = [f^{-1}(f(x_1))]^{r_1} \cdot ... \cdot [f^{-1}(f(x_n))]^{r_n} = x_1^{r_1} \cdot ... \cdot x_n^{r_n}$$

Esto es, $h_2 \circ h_1$ es la identidad en $F(X)$. De la misma manera se comprueba que $h_1 \circ h_2$ es la identidad en $F(Y)$. Se concluye que $h_1^{-1} = h_2$. Por lo tanto h_1 es un isomorfismo y su inversa es continua. Por lo tanto, h_1 es un isomorfismo topológico. La misma demostración sirve para probar que $A(X)$ es topológicamente isomorfo a $A(Y)$.

En otras palabras, el hecho de que dos espacios sean homeomorfos es una condición suficientemente potente para que sus respectivos grupos topológicos libres sean topológicamente isomorfos entre sí.

3.7 Definición. Dos espacios X y Y son llamados *M-equivalentes* si $F(X)$ es topológicamente isomorfo a $F(Y)$. Similarmente, dichos espacios son llamados *A-equivalentes* si $A(X)$ es topológicamente isomorfo a $A(Y)$.

Usando la notación de la definición anterior y lo hecho en la Observación 3.6, podemos decir que espacios homeomorfos son tanto M-equivalentes como A-equivalentes. El siguiente resultado nos proporciona una técnica útil para construir espacios que son M-equivalentes.

3.8 Lema. Supongamos que $X = X_1 \oplus X_2$ es la suma topológica de espacios no vacíos X_1 y X_2. Entonces $Y_1 = b_1 a^{-1} X_1 \cup X_2$ y $Y_2 = b_2 a^{-1} X_1 \cup X_2$, considerados como subespacios de $F(X)$ son M-equivalentes, para cualesquiera $a \in X_1$ y $b_1, b_2 \in X_2$.

Demostración. Primeramente, notemos que $a^{-1}X_1 \cup X_2 \subseteq \langle Y_1 \rangle$, donde $\langle Y_1 \rangle$ denota al subgrupo generado por Y_1. En efecto, sea $z \in a^{-1}X_1 \cup X_2$. Si

$z \in a^{-1}X_1$, entonces $z = a^{-1}x_1$ para algún $x_1 \in X_1$. Como $b_1 \in X_2 \subseteq Y_1$, entonces $z = b_1^{-1}b_1a^{-1}x_1 \in \langle Y_1\rangle$. Por otro lado, es claro que si $z \in X_2$ entonces $z \in \langle Y_1\rangle$. Esto muestra la contención deseada.

Mostraremos ahora que $Y_1 \subseteq \langle a^{-1}X_1 \cup X_2\rangle$. Efectivamente, sea $z \in Y_1$. Si $z \in b_1a^{-1}X_1$ entonces $z = b_1a^{-1}x_1$ para algún $x_1 \in X_1$. Como $b_1 \in X_2$, entonces $b_1a^{-1}x_1 \in \langle a^{-1}X_1 \cup X_2\rangle$. Si $z \in X_2$, es claro que $z \in \langle a^{-1}X_1 \cup X_2\rangle$. Esto concluye la contención deseada.

Ambas contenciones nos dan como resultado que $\langle Y_1\rangle = \langle a^{-1}X_1 \cup X_2\rangle$. De la misma forma se puede demostrar que $\langle Y_2\rangle = \langle a^{-1}X_1 \cup X_2\rangle$, y en conclusión $\langle Y_1\rangle = \langle Y_2\rangle$. Luego entonces para demostrar el lema, será suficiente demostrar que $\langle Y_1\rangle$ es topológicamente isomorfo a $F(Y_1)$ y lo mismo para $\langle Y_2\rangle$ y $F(Y_2)$. Por simetría bastará demostrar lo primero.

Sea $h : F(Y_1) \to F(X)$ el homomorfismo continuo que extiende a la identidad en Y_1. Sea ahora $f : Y_1 \to G$ una función continua de Y_1 a un grupo topológico arbitrario G. Afirmamos que f admite una extensión continua a un homomorfismo de $F(X)$ en G. Para ello, considere $g : X \to G$ la función definida por $g(x) = f(x)$ para cada $x \in X_2$, y $g(x) = f(b_1a^{-1}x)$ para cada $x \in X_1$. Como $X = X_1 \oplus X_2$ y las restricciones de g a X_1 y X_2 son continuas, se tiene que g es continua. De la definición de g es claro que $g(b_1) = f(b_1)$, y también $g(a) = f(b_1a^{-1}a) = f(b_1)$, por lo tanto $g(a) = g(b_1)$. Sea $\widetilde{g} : F(X) \to G$ el homomorfismo continuo que extiende a g. Notemos ahora que $\widetilde{g}\restriction_{Y_1} = f$. Es claro que si $x \in X_2$ entonces $\widetilde{g}(x) = f(x)$. Ahora, si $b_1a^{-1}x$ es un elemento típico de $b_1a^{-1}X_1$ y usando el hecho de que $g(a) = g(b_1)$, obtenemos que:

$$\widetilde{g}(b_1a^{-1}x) = g(b_1)g(a)^{-1}g(x) = g(x) = f(b_1a^{-1}x).$$

Concluimos que $\widetilde{g}$ es una extensión continua de f.

Con esta afirmación demostrada, consideramos la inclusión de Y_1 en $F(Y_1)$. Tomando $G = F(Y_1)$ en la afirmación anterior, podemos hallar un homomorfismo continuo $\widetilde{g} : F(X) \to F(Y_1)$ que extiende a la inclusión de Y_1 en $F(Y_1)$. Finalmente, consideremos $g^* := \widetilde{g}\restriction_{\langle Y_1\rangle}$. Del hecho de que $\widetilde{g}$ extiende a la inclusión y de que h extiende a la identidad en Y_1, se comprueba fácilmente que $g^* \circ h = Id_{F(X)}$ y $h \circ g^* = Id_{\langle Y_1\rangle}$. Como ambos homomorfismos son continuos, se sigue que son isomorfismos topológicos (ya que son inversas una de la otra). Esto prueba que $F(Y_1)$ es topológicamente isomorfo a $\langle Y_1 \rangle$. Similarmente se prueba que $F(Y_2)$ es topológicamente isomorfo a $\langle Y_2 \rangle$, como quería demostrarse. $\square$

Demostraremos a continuación que espacios M-equivalentes no son necesariamente homeomorfos.

3.9 Corolario. El intervalo cerrado unitario y la letra T considerada como subespacio del plano $\mathbb{R}^2$, donde $T = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([-1/2, 1/2] \times \{1\})$, son espacios topológicos M-equivalentes, pero no homeomorfos entre sí.

Demostración. Efectivamente. Es claro que dichos espacios no son homeomorfos entre sí, ya que el espacio $T \setminus \{(0,0)\}$ tiene tres componentes conexas, mientras que $[0,1] \setminus \{x\}$ nunca tiene tres componentes conexas sea cual sea el punto $x \in [0,1]$. Por otro lado, sea $X = X_1 \oplus X_2$, donde $X_1 = [0,1]$ y $X_2 = [2,3]$ vistos como subespacios de $\mathbb{R}$. Consideremos ahora b_1 y b_2 un punto final y un punto interior del intervalo X_2, respectivamente. Por el lema anterior, los subespacios $Y_1 = b_1 a^{-1} X_1 \cup X_2$ y $Y_2 = b_2 a^{-1} X_1 \cup X_2$ de $F(X)$ son espacios M-equivalentes para cualquier $a \in X_1$. Ahora, para $i \in \{1,2\}$, considere la función $f_i : X \to Y_i$ definida por $f_i(x) = x$ si $x \in X_2$ y $f_i(x) = b_i a^{-1} x$ para cada $x \in X_1$. Claramente f_i es continua y sobreyectiva. Además, cada fibra de f_i es trivial salvo $f_i^{-1}(f_i(a)) = \{a, b_i\}$. Como X es compacto y Y_i Hausdorff, esto implica que el espacio Y_i es obtenido del espacio X identificando los puntos a y b_i. Por lo tanto, Y_1 es homeomorfo al intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ mientras que Y_2 es homeomorfo a la letra T en $\mathbb{R}^2$. $\square$

El corolario anterior nos brinda un ejemplo de que la M-equivalencia no implica que los espacios sean homeomorfos. A continuación demostraremos que la M-equivalencia implica la A-equivalencia. Notemos que como consecuencia de este hecho, el corolario anterior también es un ejemplo de espacios A-equivalentes que no son homeomorfos.

3.10 Proposición. Sean X y Y espacios M-equivalentes. Entonces X y Y son A-equivalentes.

Demostración. Por hipótesis existe un isomorfismo topológico $\phi : F(X) \to F(Y)$. Denotemos K_X al subgrupo derivado de $F(X)$ y similarmente con K_Y.

Observe ahora que $\phi(K_X) = K_Y$. En efecto, si $z \in \phi(K_X)$, entonces existen $x_1, x_2 \in F(X)$ tales que $z = \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_1)^{-1}\phi(x_2)^{-1} \in K_Y$. Por otro lado, si $y_1y_2y_1^{-1}y_2^{-1} \in K_Y$, como ϕ es una función sobreyectiva existe $x_i \in F(X)$ tal que $\phi(x_i) = y_i$, $i \in \{1, 2\}$, por lo tanto $y_1y_2y_1^{-1}y_2^{-1} = \phi(x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}) \in \phi(K_X)$, como quería verse.

Pero esto implica que $F(X)/K_X$ es topológicamente isomorfo a $F(Y)/K_Y$. Efectivamente, considere $\widetilde{\phi} : F(X)/K_X \to F(Y)/K_Y$ definida por $\widetilde{\phi}(xK_X) = \phi(x)K_Y$. Notemos primeramente que $\widetilde{\phi}$ es función, ya que si $x_1K_X = x_2K_x$, entonces $x_2^{-1}x_1 \in K_X$, luego por la observación anterior se tiene que $\phi(x_2^{-1}x_1) \in \phi(K_X) = K_Y$, o equivalentemente $\phi(x_1)K_Y = \phi(x_2)K_Y$, es decir, $\widetilde{\phi}$ está bien definida. No resulta difícil ver que la biyectividad de ϕ implica la de $\widetilde{\phi}$, y claramente $\widetilde{\phi}$ es un homomorfismo continuo. Para demostrar que es isomorfismo topológico basta observar que su inversa es también un homomorfismo continuo, ya que su regla de asociación es la que está dada por $yK_Y \mapsto \phi^{-1}(y)K_X$. Por lo tanto $\widetilde{\phi} : F(X)/K_X \to F(Y)/K_Y$ es isomorfismo topológico, y por el Teorema 2.20 $A(X)$ es topológicamente isomorfo a $F(X)/K_X$ y similarmente con $A(Y)$, obtenemos que $A(X)$ es topológicamente isomorfo a $A(Y)$, esto es, X y Y son A-equivalentes. □

En Topología General, se dice que una propiedad P es invariante (o que es una propiedad topológica) si cada vez que un espacio topológico X tiene dicha propiedad P, entonces cada espacio topológico Y que sea homeomorfo a X también la tiene. En este contexto resulta natural introducir la siguiente definición.

3.11 Definición. Diremos que una propiedad P es M-invariante (respectivamente, A-invariante), si cada vez que un espacio tiene dicha propiedad, entonces cada espacio M-equivalente (respectivamente, A-equivalente) a él también la tiene.

De la Proposición 3.10 se sigue que toda propiedad A-invariante es M-invariante.

Nuestro objetivo ahora es demostrar que la conexidad es una propiedad A-invariante y M-invariante. Recalcamos el hecho de que es suficiente demostrar que es una propiedad A-invariante. Para demostrar este hecho, consideremos el siguiente espacio:

$$A_0(X) := \{x_1 + ... + x_n - y_1 - ... - y_n \in A(X) : x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in X, n \in \mathbb{N}\}.$$

No resulta difícil notar que $A_0(X)$ es un subgrupo de $A(X)$. Hallaremos cierta relación entre $A_0(X)$ y C_X, donde C_X denotará de ahora en adelante a la componente conexa del neutro $e \in A(X)$. Por otro lado, recordemos la noción de independencia lineal y rango de torsión. Supóngase que A es un subconjunto no vacío de un grupo abeliano G cuyo elemento neutro está denotado por e y que cada elemento de A tiene orden infinito (es decir, que si $m \in \mathbb{Z}$ y $ma = 0$ entonces $m = 0$ para cualquier $a \in A$). En este contexto, el conjunto A es llamado linealmente independiente si para cualesquiera $a_1, ..., a_n \in A$ y $m_1, ..., m_n \in \mathbb{Z}$ tales que $m_1a_1 + ... + m_na_n = e$ se tiene que $m_1 = ... = m_n = 0$. Es posible demostrar que cada subconjunto linealmente independiente de G está contenido en un subconjunto maximal linealmente independiente de G. Luego, denotaremos $r_0(G)$ al cardinal de un conjunto maximal linealmente independiente de G. El cardinal de cualesquiera dos de tales conjuntos es el mismo, entonces el número $r_0(G)$ está bien definido y dicho número es llamando *rango de torsión* (o *rango de libre-torsión*).

3.12 Proposición. Sea X un espacio topológico.

1. El subgrupo $A_0(X)$ de $A(X)$ es normal, abierto y cerrado, y el grupo cociente $A(X)/A_0(X)$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}$ equipado con la topología discreta.

2. Si X es disconexo, entonces el rango de torsión del grupo $A(X)/C_X$ es mayor o igual que 2.

3. El grupo $A_0(X)$ es conexo si y sólo si X es conexo.

4. Si X es conexo, entonces $A_0(X) = C_X$.

Demostración.

1. Considere $f : X \to \mathbb{Z}$ como la función constante 1. Claramente es continua. Sea $\phi : A(X) \to \mathbb{Z}$ el homomorfismo continuo que extiende a f. Afirmamos que $\ker(\phi) = A_0(X)$. Efectivamente, si $g \in \ker(\phi)$,

entonces $\phi(g) = 0$. Supóngase que g se representa en la forma $g = x_1 + ... + x_n - y_1 - ... - y_m$. Luego $\phi(g) = n - m = 0$, es decir $n = m$ y por lo tanto $g \in A_0(X)$. Recíprocamente es claro que si $g = x_1 + ... + x_n - y_1 - ... - y_n \in A_0(X)$, entonces $\phi(g) = n - n = 0$. Esto demuestra que $A_0(X) = \ker(\phi) = \phi^{-1}(\{0\})$. Luego, siendo $\mathbb{Z}$ discreto, obtenemos que $A_0(X)$ es abierto y cerrado, y además es un subgrupo normal al ser el núcleo de un homomorfismo. Finalmente, por el Teorema de Isomorfismo para grupos topológicos (véase Teorema 1.27), obtenemos que $A(X)/A_0(X)$ es topológicamente isomorfo $\mathbb{Z}$.

2. Por la Proposición 1.18 sabemos que C_X es un subgrupo normal de $A(X)$. Supongamos ahora que X es disconexo, entonces podemos suponer que $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados disjuntos no vacíos del espacio X. Sea $D = \{a, b\}$ un espacio discreto de dos elementos. Considere la función $f : X \to D$ definida mediante $f(x) = a$ si $x \in A$ y $f(x) = b$ si $x \in B$. f es continua porque $f^{-1}(\{a\}) = A$ y $f^{-1}(\{b\}) = B$. Luego podemos extender esta función a un homomorfismo continuo $\widetilde{f} : A(X) \to A(D)$. Como $A(D)$ es un grupo topológico discreto, $N := \ker(\widetilde{f})$ es un subgrupo normal abierto y cerrado de $A(X)$. Entonces necesariamente $C_X \subseteq N$, de lo contrario $C_X \cap N$ y $C_X \cap (A(X) \setminus N)$ serían una separación de C_X, contradiciendo su conexidad. Por lo tanto el homomorfismo $h : A(X)/C_X \to A(D)$ definido por $h(xC_X) = \widetilde{f}(x)$ está bien definido, esto porque si $x_1C_X = x_2C_X$, entonces $x_2^{-1}x_1 \in C_X \subseteq N$, por lo cual $\phi(x_2) = \phi(x_1)$. Claramente h es epimorfismo, por lo tanto el rango de torsión de su contradominio es menor o igual que el rango de torsión del dominio [1], es decir, $2 = r_0(A(D)) \leq r_0(A(X)/C_X)$.

3. Supongamos primero que X es conexo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere la función $j_n : X^{2n} \to A(X)$, donde

$$j_n(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) = x_1 + ... + x_n - y_1 - ... - y_n$$

para cada $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n) \in X^{2n}$. Claramente j_n es continua por la continuidad de la suma en un grupo topológico, y por ello $j_n(X^{2n})$ es un subespacio conexo de $A_0(X)$. Finalmente es claro que $A_0(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} j_n(X^{2n})$ y la intersección de estos conjuntos es no vacía, pues $e \in j_n(X^{2n})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $A_0(X)$ es conexo.

Recíprocamente, supongamos que X es disconexo. Vamos a demostrar que $A_0(X)$ debe ser disconexo. Efectivamente, como X es disconexo podemos suponer que $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados disjuntos no vacíos. Como hicimos en el segundo inciso, considere $f : X \to D$ definida de la forma mencionada y sea $\widetilde{f} : A(X) \to A(D)$ su extensión a un homomorfismo continuo. Definamos N como el núcleo de f, el cual es cerrado y abierto. Elijamos $x \in A, y \in B$ y sea $g = 2x - 2y \in A_0(X)$. Notemos que $\widetilde{f}(g) = 2a - 2b \neq e_{A(D)}$ y por tanto $g \notin N$. Es decir, $A_0(X) \cap N$ es un subconjunto propio cerrado y abierto de $A_0(X)$, luego este último es disconexo.

4. Si X es conexo, por el primer y tercer inciso $A_0(X)$ es un subgrupo conexo y abierto de $A(X)$. Luego $A_0(X)$ es la componente conexa del neutro e. □

Con ayuda de los resultados de la proposición anterior, ya podemos probar el hecho que queremos acerca de la conexidad.

3.13 Teorema. La conexidad es una propiedad A-invariante y M-invariante.

Demostración. Ya hemos comentado que es suficiente probar que la conexidad se preserva bajo la A-equivalencia. Sean X y Y espacios A-equivalentes y supongamos que X es conexo. Vamos a probar que Y lo es. Por hipótesis existe un isomorfismo topológico $\phi : A(X) \to A(Y)$. Denotemos por C_X a la componente conexa del elemento neutro en $e_X \in A(X)$, y similarmente con C_Y para el neutro $e_Y \in A(Y)$. Notemos que $e_Y \in \phi(C_X)$ y este último es conexo, así que $\phi(C_X) \subseteq C_Y$. Análogamente, utilizando el hecho de que $e_X \in \phi^{-1}(C_Y)$ obtenemos la otra contención y por tanto $\phi(C_X) = C_Y$. Aplicando la Proposición 3.12 obtenemos que $A(Y)/C_Y \cong \mathbb{Z} \cong A(X)/C_X$. Como $\mathbb{Z}$ tiene rango de torsión igual a 1, entonces también $A(Y)/C_Y$. En particular tiene rango de torsión menor que 2 y por la Proposición 3.12, entonces Y es conexo, como quería demostrarse. □

Otra pregunta es saber cuándo dos espacios no son M-equivalentes (por supuesto sin tener que hacer la tarea de calcular sus grupos topológicos libres correspondientes, que en general no es sencilla). Una posible respuesta se encuentra en un criterio que involucra homotopías. Recordamos un poco los conceptos que vamos a trabajar: dados dos espacios X y Y, denotamos con

$C(X,Y)$ a la familia de todas las funciones continuas $f : X \to Y$. Entonces decimos que dos funciones $f, g \in C(X,Y)$ son homotópicas si existe una función continua $\phi : X \times [0,1] \to Y$ tal que $\phi(x,0) = f(x)$ y $\phi(x,1) = g(x)$ para toda $x \in X$. La función ϕ es llamada homotopía entre f y g, o simplemente homotopía. No es difícil demostrar que la relación ser homotópica es de equivalencia. Denotamos por $[f]$ a la clase de equivalencia de $f \in C(X,Y)$. El conjunto cociente será denotado por $[X,Y]$, es decir:

$$[X,Y] := \{[f] : f \in C(X,Y)\}.$$

Consideremos ahora el caso en que Y es un grupo topológico. Entonces podemos definir una estructura de grupo natural en $[X,G]$, ya que $f, g : X \to G$ son funciones continuas, podemos considerar su producto usual a través de la operación en G, esto es, la función $f \cdot g : X \to G$ definida por $x \mapsto f(x)g(x)$. La cual es continua. Luego tiene sentido definir:

$$[f] * [g] := [f \cdot g].$$

Además, no es difícil demostrar que si f_1 y f_2 son homotópicas, y g_1 y g_2 también lo son, entonces $f_1 \cdot g_1$ y $f_2 \cdot g_2$ son homotópicas entre sí, por ello la operación $*$ está bien definida en el conjunto $[X,G]$. Un argumento rutinario y sin mayor dificultad muestra que $*$ es una operación que hace a $[X,G]$ un grupo.

Nuestro objetivo ahora es demostrar que si dos espacios topológicos compactos X y Y son M-equivalentes, entonces los grupos $[X,G]$ y $[Y,G]$ son isomorfos, para cualquier grupo topológico G.

3.14 Lema. Sea X un espacio compacto y $\phi : X \times [0,1] \to G$ una función continua, donde G es un grupo topológico. Para cada $t \in [0,1]$, sea $\phi_t : X \to G$ la función definida por $\phi_t(x) = \phi(x,t)$ para cada $x \in X$. Sea $\Phi_t : F(X) \to G$ el homomorfismo continuo que extiende a ϕ_t. Entonces la función $\Phi : F(X) \times [0,1] \to G$ definida por $\Phi(g,t) = \Phi_t(g)$ para cada $g \in F(X)$ y $t \in [0,1]$, es continua.

Demostración. Ya sabemos que $F(X)$ tiene la propiedad del límite directo, por el Corolario 3.3. En particular, $F(X) \times [0,1]$ es un k_ω-espacio con la k_ω-descomposición

$$F(X) \times [0,1] = \bigcup_{n \in \omega} B_n(X) \times [0,1].$$

Por lo tanto, es suficiente verificar la continuidad de Φ en el subespacio $B_n(X) \times [0,1]$, con $n \in \omega$ fijo.

Sea pues $h \in B_n(X)$ arbitrario. Sea $t \in [0,1]$ y llamemos $g_0 = \Phi(h,t)$. Sea $O \subseteq G$ un abierto tal que $g_0 \in O$. Supongamos que el punto $y = (y_1, ..., y_n) \in \widetilde{X}^n$ satisface $i_n(y) = h$ (recuerde que $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$, e es el neutro de $F(X)$ y $i_n : \widetilde{X}^n \to B_n(X)$ es la función multiplicación), entonces

$$g_0 = \Phi(h,t) = \Phi(y_1 \cdot ... \cdot y_n, t) = \Phi_t(y_1, ..., y_n) = \Phi_t(y_1) \cdot ... \cdot \Phi_t(y_n).$$

Luego, siendo G un grupo topológico, podemos hallar abiertos O_i tal que $\Phi_t(y_i) \in O_i$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ y $O_1 \cdot ... \cdot O_n \subseteq O$. Por la continuidad de ϕ, existen abiertos $V_i \subseteq \widetilde{X}$ y $U_i \subseteq [0,1]$ tales que $y_i \in V_i$, $t \in U_i$ y $\Phi(V_i \times U_i) \subseteq O_i$, para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Definamos $V_y = V_1 \times ... \times V_n$ y $U_y = \bigcap_{i=1}^n U_i$. Luego entonces $y \in V_y$, $t \in U_y$ y:

$$\Phi(i_n(V_y) \times U_y) = \Phi(V_1 \cdot ... \cdot V_n \times U_y) \subseteq O_1 \cdot ... \cdot O.$$

Aplicando el Teorema de Wallace [4], podemos encontrar abiertos $W \subseteq \widetilde{X}^n$ y $W_t \subseteq [0,1]$ tales que $i_n^{-1}(\{h\}) \subseteq W$ y $t \in W_t$ que satisfacen

$$W \times W_t \subseteq \bigcup \{V_y \times U_y : y \in i_n^{-1}(\{h\})\}.$$

Como la función $i_n : \widetilde{X}^n \to B_n(X)$ es perfecta, en particular cerrada, existe un abierto W_h que tiene a h en $B_n(X)$ tal que $i_n^{-1}(W_h) \subseteq W$. Luego $\Phi(W_h \times W_t) \subseteq O$. Por tanto, Φ es continua en $B_n(X) \times [0,1]$. □

Ahora estamos en condiciones de demostrar lo mencionado acerca de las clases de homotopías.

3.15 Teorema. Si X y Y son espacios compactos M-equivalentes, entonces los grupos $[X, G]$ y $[Y, G]$ son isomorfos, donde G es un grupo topológico.

DEMOSTRACIÓN. Como X y Y son M-equivalentes, entonces existe un isomorfismo topológico $\phi : F(X) \to F(Y)$. Luego, podemos identificar a los grupos $F(X)$ y $F(Y)$ como uno solo. Entonces tanto X como Y son bases de dicho grupo en común, que denotaremos por H. Cada función continua $f : X \to G$ induce una función continua $\phi(f) : Y \to G$ por la regla $\phi(f) = \widetilde{f}\restriction_Y$, donde $\widetilde{f}$ es la extensión de f a un homomorfismo continuo de H en G. De la misma forma, cada función continua $g : Y \to G$ induce una función continua $\psi(g) : X \to G$ por la regla $\psi(g) = \widetilde{f}\restriction_X$. Es claro que $\psi(\phi(f)) = f$ y $\phi(\psi(g)) = g$ para cualesquiera $f \in C(X,G), g \in C(Y,G)$. Más aún, de la definición de ϕ se sigue que $\phi(f_1 \cdot f_2) = \phi(f_1) \cdot \phi(f_2)$ para cualesquiera $f_1, f_2 \in C(X,G)$. Luego tanto ϕ como ψ son homeomorfismos, y como $\psi \circ \phi$ y $\phi \circ \psi$ son la identidad de $C(X,G)$ y $C(Y,G)$ respectivamente, concluimos que ambos son isomorfismos. Finalmente, por el lema anterior tenemos que si f_1 es homotópica a f_2 en $C(X,G)$, y g_1 es homotópica g_2 en $C(Y,G)$, entonces $\phi(f_1)$ es homotópica a $\phi(f_2)$ en $C(Y,G)$, y $\psi(g_1)$ es homotópica a $\psi(g_2)$ en $C(X,G)$. Por tanto, si definimos $\phi^* : [X,G] \to [Y,G]$ mediante $\phi^*([f]) = [\phi(f)]$, obtenemos un isomorfismo de grupos. □

El Teorema 3.15 permite dar un ejemplo de espacios compactos no homeomorfos que no son M-equivalentes.

3.16 Ejemplo. Sea X el intervalo cerrado unitario y sea $Y = S^1$, y (siguiendo la notación del teorema anterior) sea también $G = S^1$. Entonces el grupo $[X,G]$ es trivial, ya que toda función continua del intervalo en S^1 es homotópica a una constante. Sin embargo, $[Y,G] = [S^1,S^1] \cong \mathbb{Z}$. Luego por el teorema anterior, X y Y no son M-equivalentes.

Introducimos ahora una nueva definición, cuya utilidad es de suma importancia para seguir con resultados acerca de espacios M-equivalentes. Para ello, recordemos que dado un espacio X y su grupo topológico libre $G(X)$ (recordar que $G(X)$ denota indistintamente a $F(X)$ o $A(X)$), hemos probado que se tienen las siguientes dos propiedades:

1. $G(X)$ es algebraicamente el grupo libre $G_a(X)$, o equivalentemente, X es base algebraica libre de $G(X)$.
2. La topología de $G(X)$ es la topología de grupo más fina sobre $G_a(X)$ que induce en X su topología original. Esto es, $\tau_{G(X)}\restriction_X = \tau_X$, y si τ es una topología de grupo sobre $G_a(X)$ tal que $\tau\restriction_X = \tau_X$, entonces $\tau \subseteq \tau_{G(X)}$.

Inspirándonos en estas propiedades, podemos extender el concepto de base de modo que ésta no sólo genere las propiedades algebraicas, sino también las topológicas de un grupo topológico libre:

3.17 Definición. Sea Y un subespacio del grupo topológico libre $G(X)$. Diremos que Y es una base topológica libre de $G(X)$ si se cumplen las siguientes dos propiedades:

1. Y es base algebraica libre de $G(X)$, esto es, $G_a(X) = G_a(Y)$.
2. La topología de $G(X)$ es la topología de grupo más fina sobre $G_a(X)$ que induce en Y su topología original. Es decir, $\tau_{G(X)}\restriction_Y = \tau_Y$, y además si τ es una topología de grupo sobre $G_a(X)$ tal que $\tau\restriction_Y = \tau_Y$, entonces $\tau \subseteq \tau_{G(X)}$.

Con esta definición se puede conocer la estructura del grupo topológico libre teniendo cualquier subespacio que cumpla con las definición anterior de base topológica libre. Por ejemplo, notemos que X es trivialmente una base topológica libre de $G(X)$, y por ello si Y es otra base topológica libre de $G(X)$, entonces deberían generar al mismo grupo topológico libre. Veamos que esto sí sucede.

3.18 Proposición. Sea X un espacio topológico y sea Y un subespacio de $G(X)$.

1. Si Y es una base topológica libre de $G(X)$, entonces $G(X)$ y $G(Y)$ coinciden.
2. Si existe un isomorfismo topológico $\phi : G(X) \to G(Y)$, entonces $\phi^{-1}(Y)$ es base topológica libre de $G(X)$.

Demostración.

1. Observe primero que el hecho que $G_a(Y) = G_a(X)$ nos dice que dichos objetos coinciden como grupos, de modo que para probar lo deseado resta verificar que las topologías de sus grupos topológicos libres coinciden. En efecto, como Y es un subespacio de $G(X)$, entonces la inclusión

$i : Y \to G(X)$ es continua, por lo que se extiende a un homomorfismo continuo $\widetilde{i} : G(Y) \to G(X)$. Debido a que $G_a(Y) = G_a(X)$, es fácil verificar que $\widetilde{i}$ es la función identidad, por lo cual todo abierto en $G(X)$ lo es en $G(Y)$. Por otro lado, $\tau_{G(Y)}$ es una topología de grupo sobre $G_a(Y) = G_a(X)$ que induce en Y su topologia original, luego por ser Y base topológica libre de $G(X)$ obtenemos que $\tau_{G(Y)} \subseteq \tau_{G(X)}$, es decir todo abierto en $G(Y)$ es abierto en $G(X)$.

2. Primero verifiquemos que $\phi^{-1}(Y)$ es base libre de $G(X)$. En efecto, sea $x \in G(X)$. Como $\phi(x) \in G(Y)$, entonces $\phi(x)$ tiene una representación única respecto de la base Y, digamos $\phi(x) = y_1^{r_1} \cdot ... \cdot y_n^{r_n}$, luego x tiene una representación única como $x = \phi^{-1}(y_1)^{r_1} \cdot ... \cdot \phi^{-1}(y_n)^{r_n}$. Ahora deseamos demostrar que $\tau_{G(X)}$ es la topología de grupo sobre $G_a(X)$ más fina que induce en $\phi^{-1}(Y)$ su topología original. Sea entonces τ una topología de grupo sobre $G_a(X)$ que induce en $\phi^{-1}(Y)$ su topología original. Considere $\tau' = \{\phi(A) : A \in \tau\}$, entonces por el Teorema 1.19 τ' es una topología de grupo sobre $G_a(Y)$. Mostremos ahora que $\tau'\restriction_Y = \tau_Y$. Sea $\phi(A) \cap Y \in \tau'\restriction_Y$ con $A \in \tau$. Entonces $A \cap \phi^{-1}(Y) \in \tau\restriction_{\phi^{-1}(Y)} = \tau_{\phi^{-1}(Y)}$, siendo $\phi : \phi^{-1}(Y) \to Y$ homeomorfismo, entonces $\phi(A \cap \phi^{-1}(Y)) = \phi(A) \cap Y \in \tau_Y$. Recíprocamente, si $O \in \tau_Y$ entonces $\phi^{-1}(O) \in \tau_{\phi^{-1}(Y)} = \tau\restriction_{\phi^{-1}(Y)}$, luego existe $A \in \tau$ tal que $\phi^{-1}(O) = A \cap \phi^{-1}(Y)$, es decir $O = \phi(A) \cap Y \in \tau'\restriction_Y$. Hemos mostrado entonces que τ' induce en Y su topología original, por lo tanto $\tau' \subseteq \tau_{G(Y)}$, o equivalentemente, si $A \in \tau$, entonces $\phi(A) \in \tau_{G(Y)}$, de donde $A = \phi^{-1}(\phi(A)) \in \tau_{G(X)}$ como quería demostrarse. □

3.19 Corolario. Toda base topológica libre Y del grupo $G(X)$ es cerrada.

Demostración. Y es siempre un subespacio cerrado en $G(Y)$, y por la proposición anterior $G(Y) = G(X)$. □

Ahora veamos una aplicación de la proposición anterior.

3.20 Teorema. La pseudocompacidad es una propiedad A-invariante (y por lo tanto M-invariante).

Demostración. Supongamos que X y Y son espacios A-equivalentes y supongamos que Y es pseudocompacto. Vamos a probar que X también lo es.

Caso 1: Supongamos que Y es una base topológica libre de $A(X)$. Supongamos que X no fuese pseudocompacto, entonces tiene una familia discreta $\gamma = \{U_i : i \in \omega\}$ de abiertos no vacíos. Para cada $i \in \omega$, sea $x_i \in U_i$. Para $g \in A(X)$ y $x \in X$, denotemos con $d(x, g)$ el coeficiente entero k que acompaña a x en la forma normal de g respecto de la base X. Esto es, si $g = kx+k_1x_1+...+k_nx_n$ donde $x, x_1, ..., x_n$ son elementos de X distintos dos a dos y $k, k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$, entonces $d(x, g) = k$. Notemos además que $d(x, g) = 0$ si y sólo si x no aparece en la forma normal de g. Como Y es base libre de $A(X)$, para cada $i \in \omega$ existe $y_i \in Y$ tal que $d(x_i, y_i) \neq 0$. Supongamos que $t_{i,1}, ..., t_{i,n_i}$ son las letras distintas de x_i que aparecen en la forma normal de y_i (si es necesario, puede ocurrir que $n_i = 0$). Escogiendo una subsucesión de $\{y_i : i \in \omega\}$, podemos suponer que $d(x_j, y_i) = 0$ siempre que $i < j$. Por inducción sobre $n \in \omega$, definimos una función $f_n : X \to \mathbb{R}$ continua de la siguiente forma: para $n = 0$, definimos f_0 la función constante cero. Supongamos que para $n \geq 1$ hemos definido las funciones $f_0, ..., f_{n-1}$, entonces definimos $g_n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i$. Como X es de Tychonoff, existe $f_n : X \to \mathbb{R}$ continua tal que toma el valor 0 en $X \setminus U_n$ y en cada punto $t_{i,j}$ con $i \leq n$ que pertenece a U_n, y además satisface:

$$f_n(x_n) = n + \sum_j |b_{n,j} g_n(t_{n,j})|$$

donde $b_{n,j} = d(t_{n,j}, y_n)$ y la suma anterior corre sobre todos los j tales que $t_{n,j} \in U_0 \cup ... \cup U_{n-1}$. Esto completa la contrucción inductiva de las funciones f_n. Como la familia γ es discreta y está formada por abiertos, la función $f = \sum_{n\in\omega} f_n$ es continua en X y las funciones f, f_n, g_{n+1} coinciden en U_n, $n \in \omega$. Además, la definición de f implica que para toda $n \geq 1$ y toda j, se tiene que $f(t_{n,j}) = 0$ siempre que $t_{n,j} \notin U_0 \cup ... \cup U_{n-1}$. Sea $\widetilde{f} : A(X) \to \mathbb{R}$ el homomorfismo continuo que extiende a f. Entonces por lo anterior $|\widetilde{f}(y_n)| \geq n$, para cada $n \in \omega$. Como $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq Y$, la función $\widetilde{f}\restriction_Y$ es no acotada, y por ello Y no puede ser pseudocompacto. Esto termina la demostración para este caso.

Caso 2: Supongamos que Y no es base topológica libre de $A(X)$. Como X y Y son A-equivalentes, existe un isomorfismo topológico $\phi : A(X) \to A(Y)$. Entonces por lo ya demostrado, $\phi^{-1}(Y)$ es base topológica libre de $A(X)$. Por el caso anterior, $\phi^{-1}(Y)$ es pseudocompacto. Y como $\phi^{-1}(Y) \cong Y$, entonces Y es pseudocompacto. $\square$

Notemos que en el Caso 2 de la demostración anterior se ha usado con suma utilidad el hecho de que si $\phi : X \to Y$ es un isomorfismo topológico, entonces $\phi^{-1}(Y)$ es base topológica libre de $G(X)$. En general, si X y Y son M o A-equivalentes y queremos probar que una propiedad es M o A-invariante, entonces por lo anterior basta suponer que Y es base topológica libre de $A(X)$, de hecho, como las bases topológicas libres generan el mismo grupo topológico libre, lo que se está haciendo en realidad es suponer que espacios M y A-equivalentes tienen el mismo grupo topológico libre (en lugar de sólo grupos topológicos libres isomorfos). Vamos a ver un ejemplo más de cómo aplicar este hecho. Antes de seguir, recuerde que un espacio topológico X es llamado *NC-espacio* si, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que X^n es normal y numerablemente compacto.

3.21 Teorema. Sean X y Y espacios A-equivalentes.

1. Si X es compacto, entonces también Y lo es.

2. Si X es compacto y metrizable, entonces también Y lo es.

3. Si X es un NC-espacio, entonces Y lo es.

4. Si X es σ-compacto, entonces Y lo es.

Es decir que la compacidad es una propiedad M y A-equivalente, y la metrizabilidad también cuando la compacidad está presente.

DEMOSTRACIÓN.

1. Como ya hemos observado, es suficiente suponer que Y es base topológica libre de $A(X)$. En particular Y es un subespacio cerrado de $A(X)$. Como X es compacto, entonces es pseudocompacto, luego por el Teorema 3.20 Y es pseudocompacto. Luego, por la Proposición 3.5, $Y \subseteq B_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Además, $B_n(X)$ es compacto por ser la imagen continua de la función $i_n : \widetilde{X}^n \to B_n(X)$. Por lo tanto Y es un subconjunto cerrado del espacio compacto $B_n(X)$, y por ello Y es compacto.

2. Supongamos que X es compacto y metrizable, y que Y es base topológica libre de $A(X)$. Como en el inciso anterior, $Y \subseteq B_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. El espacio $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ es compacto y metrizable por ser suma finita de espacios compactos y metrizables. Asimismo, $\widetilde{X}^n$ es compacto y metrizable por ser producto (finito) de un espacio compacto y metrizable consigo mismo. Luego, $B_n(X)$ es compacto y metrizable por ser la imagen continua de i_n. Por lo tanto Y es compacto y metrizable.

3. Sea X un NC-espacio y suponga que Y es una base topológica libre del grupo $A(X)$. Como X es pseudocompacto, el teorema anterior implica que Y lo es también. Luego $Y \subseteq B_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Además Y es un cerrado en $A(X)$ y también en $B_n(X)$. Como $\widetilde{X}^n$ es un NC-espacio, entonces $B_n(X)$ lo es por ser la imagen continua de i_n. Luego Y es un NC-espacio.

4. Si X es σ-compacto, entonces también $B_n(X)$ lo es para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo cual $A(X)$ es σ-compacto al ser la unión numerable de los subespacios σ-compactos $B_n(X)$, y como podemos suponer que Y es una base topológica libre de $A(X)$, tenemos que Y es un subespacio cerrado de $A(X)$, luego Y tiene que ser σ-compacto. □

3.4. Funciones K-triviales

Una función continua entre espacios topológicos $p : X \to Y$ es llamada *R-cociente* si p es sobreyectiva y cualquier función $\phi : Y \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si $\phi \circ p : X \to \mathbb{R}$ es continua. Es fácil notar que toda función cociente es R-cociente. La siguiente proposición, que daremos por cierta, muestra que las funciones R-cocientes están caracterizadas por la misma propiedad que caracteriza a las funciones cociente, siempre que trabajemos en espacios de Tychonoff. La demostración puede consultarse en [6].

3.22 Proposición. Sean X, Y, Z espacios topológicos con Z de Tychonoff y $p : X \to Y$ una función R-cociente. Dada una función $f : Y \to Z$, se tiene que f es continua si y sólo si $f \circ p$ es continua. En particular, si además p es una biyección y X es de Tychonoff, entonces p es un homeomorfismo.

Dada una función $p : X \to Y$ sobreyectiva, con X un espacio topológico y $Y \neq \emptyset$, se puede demostrar [6] que existe una única topología de Tychonoff sobre Y, conocida como la *Topología R-cociente*, que hace a la función p una función R-cociente. La Topología R-cociente puede ser descrita como la topología más fina de Tychonoff sobre Y que hace a p una función continua. El espacio topológico Y equipado con esta topología es llamado *espacio R-cociente* de X con respecto de la función p. En este contexto, la función p será llamada proyección natural. Estudiaremos el caso específico cuando la función p tenga únicamente una fibra K que contenga más de un punto. Las funciones que cumplen esta propiedad serán llamadas K-triviales, y el espacio R-cociente de X respecto de una función K-trivial será denotado por X/K. No hay que confundir esta notación con la de grupos cocientes. En general, el espacio R-cociente de un espacio de Tychonoff puede que ni siquiera sea Hausdorff, pero la situación con una función K-trivial mejora mucho. Por comodidad, las fibras $p^{-1}(\{y\})$ serán denotadas por $p^{-1}(y)$.

3.23 Proposición. Sea $p : X \to Y$ una función K-trivial. Si X es un espacio de Tychonoff y K es cerrado en X, entonces el espacio R-cociente X/K es de Hausdorff.

Demostración. Sean $y_1 \neq y_2$ puntos en X/K. Como p tiene una única fibra K no trivial, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $p^{-1}(y_2) \neq K$, y por ello $p^{-1}(y_2) = \{x_2\}$ para algún $x_2 \in X$. Como las fibras de una función son conjuntos ajenos, $x_2 \notin K$. Considere ahora $K' = K \cup p^{-1}(y_1)$, el cual es cerrado en X por ser unión de dos cerrados en X, y claramente $x_2 \notin K'$. Como X es de Tychonoff, existe $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x_2) = 0$ y $f(K') \subseteq \{1\}$. Como f es constante en K, podemos hallar una función $g : X/K \to \mathbb{R}$ tal que $f = g \circ p$, la cual es continua porque f es continua y p es R-cociente. Además $g(y_1) = 1$ y $g(y_2) = 0$. Finalmente, notemos que $g^{-1}((1/2, 3/2))$ y $g^{-1}((-1/2, 1/2))$ son abiertos ajenos que separan a y_2 y y_1. □

En lo que sigue, vamos a asumir que todos los espacios topológicos con los que trabajemos serán espacios de Tychonoff.

3.24 Proposición. Si $p : X \to Y$ es una función R-cociente, U es abierto en Y y $V := p^{-1}(U)$, entonces la función $p\restriction_V : V \to U$ es R-cociente.

Demostración. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \circ p\restriction_V : V \to \mathbb{R}$ es continua. Vamos a demostrar que f es un continua en un punto arbitrario $y_0 \in U$. Escojamos una función continua $g : Y \to \mathbb{R}$ tal que $y_0 \in U_1$, en donde U_1 es el interior del conjunto $g^{-1}(1)$, y $Y \setminus U \subseteq U_0$, donde U_0 es el interior de $g^{-1}(0)$. Considere $f_1 : Y \to \mathbb{R}$ definida por la regla $f_1(y) = f(y)g(y)$ si $y \in U$ y $f_1(y) = 0$ si $y \in Y \setminus U$. Notemos que $f_1 \circ p$ es continua en X porque es continua en V y constante en $p^{-1}(U_0)$, y $\{V, p^{-1}(U_0)\}$ es cubierta abierta de X. Por lo tanto, f_1 es continua en Y y la restricción $f\restriction_{U_1} = f_1\restriction_{U_1}$ es continua en la vecindad U_1 de y_0. □

Combinando los resultados de las proposiciones 3.22 y 3.24 obtenemos lo siguiente.

3.25 Corolario. Considere la proyección natural $p : X \to X/K$. Entonces la restricción $p\restriction_{X\setminus K}$ es un homeomorfismo de $X \setminus K$ en $(X/K) \setminus p(K)$.

Ahora, empezamos a relacionar estos resultados con la parte de grupos topológicos libres.

3.26 Proposición. Una función continua y sobreyectiva $p : X \to Y$ es R-cociente si y sólo si $\widetilde{p} : F(X) \to F(Y)$ es abierta, donde $\widetilde{p}$ es un homomorfismo continuo que extiende a p.

Demostración. Supongamos que p es R-cociente. Consideremos $H := \ker \widetilde{p}$, el cual es un subgrupo cerrado y normal de $F(X)$. Consideremos el grupo cociente $G = F(X)/H$ y sea $\pi : F(X) \to G$ la proyección natural. Como p es sobreyectiva, también lo es $\widetilde{p}$. Como se muestra en la demostración del Primer Teorema de Isomorfismo para grupos, se puede construir de manera única un isomorfismo (de grupos) $i : G \to F(Y)$ tal que $\widetilde{p} = i \circ \pi$. Por lo tanto, i es continua porque $\widetilde{p}$ es continua y π es una función abierta. Vamos a demostrar que la inversa $j := i^{-1}$ es también continua. Para ello, verifiquemos primero que $j\restriction_Y$ es continua. Notemos que $j \circ \widetilde{p} = \pi$ y $j\restriction_Y \circ p = \pi\restriction_X$. Como la función p es R-cociente, la continuidad de π implica que $j\restriction_Y$ es continua. Si extendemos a $j\restriction_Y$ a un homomorfismo continuo en $F(Y)$, por unicidad obtenemos a la función original j. Esto muestra que j es continua. Por lo tanto, i es un isomorfismo topológico y $\widetilde{p} = i \circ \pi$ es abierta por ser composición de dos funciones abiertas.

Recíprocamente, supongamos que $\widetilde{p}$ es abierta. Sea $f : Y \to \mathbb{R}$ una función tal que $f \circ p$ es continua. Entonces $\widetilde{f \circ p} : F(X) \to \mathbb{R}$ es continua, donde

$\widetilde{f} : F_a(Y) \to \mathbb{R}$ es el homomorfismo que extiende a f y $\mathbb{R}$ es un grupo topológico considerado con la suma y topología usual. Como $\widetilde{p}$ es abierta, $\widetilde{f}$ es continua y por ello $f = \widetilde{f}\restriction_Y$ es continua. $\square$

Considere ahora dos funciones continuas $f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$. Diremos que f y g son M-equivalentes si existen isomorfismos topológicos $i : F(X_1) \to F(X_2)$ y $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$ tales que $j \circ \widetilde{f} = \widetilde{g} \circ i$, donde $\widetilde{f} : F(X_1) \to F(Y_1)$ y $\widetilde{g} : F(X_2) \to F(Y_2)$ son homomorfismos continuos que extienden a f y g, respectivamente. Notemos que, trivialmente, si f y g son M-equivalentes, entonces sus contradominios son espacios M-equivalentes.

3.27 Corolario. Si $f : X_1 \to Y_1$ y $g : X_2 \to Y_2$ son M-equivalentes, f es R-cociente y g es sobreyectiva, entonces g es R-cociente.

Demostración. Como f y g son M-equivalentes, entonces existen isomorfismos topológicos $i : F(X_1) \to F(X_2)$ y $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$ tales que $j \circ \widetilde{f} = \widetilde{g} \circ i$. Equivalentemente, $\widetilde{g} = j \circ \widetilde{f} \circ i^{-1}$. Por la Proposición 3.26 $\widetilde{f}$ es abierta, porque f es R-cociente, por lo tanto $\widetilde{g}$ es abierta por ser composición de funciones abiertas. Entonces, nuevamente por la Proposición 3.26 tenemos que g es R-cociente. $\square$

De la Proposición 3.26 podemos obtener la siguiente consecuencia importante.

3.28 Teorema. Sean $p_1 : X \to Y_1, p_2 : X \to Y_2$ funciones R-cocientes, y $\widetilde{p_1} : F(X) \to F(Y_1)$, $\widetilde{p_2} : F(X) \to F(Y_2)$ extensiones a homomorfismos continuos. Si existe un automorfismo topológico $i : F(X) \to F(X)$ tal que $i(\ker \widetilde{p_1}) = \ker \widetilde{p_2}$, entonces p_1 y p_2 son M-equivalentes.

Demostración. Considere $j : F(Y_1) \to F(Y_2)$ definido por la fórmula $j(y) = \widetilde{p_2}(i(\widetilde{p_1}^{-1}(y)))$ para cada $y \in F(Y)$. Es fácil notar que j es un isomorfismo de grupos y que además $j \circ \widetilde{p_1} = \widetilde{p_2} \circ i$. Como $\widetilde{p_1}$ es abierta (Proposición 3.26) y la composición $\widetilde{p_2} \circ i$ es continua, tenemos que j es continua. Similarmente se comprueba que j^{-1} es continua. Por ello p_1 y p_2 son M-equivalentes. $\square$

3.5. Retracciones y M-equivalencias

Recuerde que si X es un espacio topológico y A un subespacio de X, una función $r : X \to A$ es llamada *retracción* de X si r es una función continua y $r(a) = a$ para toda $a \in A$. El subespacio A es llamado *retracto* de X. Además, dadas dos retracciones r_1 y r_2 de X, éstas son llamadas *paralelas* si $r_1 \circ r_2 = r_1$ y $r_2 \circ r_1 = r_2$, y a sus contradominios se les llama retractos paralelos. Esta definición proviene del hecho de que una proyección de un plano sobre dos rectas paralelas son retracciones paralelas, en el sentido de la definición anterior. Es fácil observar que K_1 y K_2 son retractos paralelos de un espacio X si y sólo si existe una retracción $r_1 : X \to K_1$ que manda homeomórficamente K_2 en K_1.

Para demostrar el teorema importante de esta sección haremos uso del siguiente lema, cuya demostración puede verse en [7].

3.29 Lema. Sean $K_1, K_2 \subseteq X$, $p_j : X \to Y_j$ funciones K_j-triviales y $\widetilde{p_j} : F(X) \to F(Y_j)$ sus extensiones a homomorfismos continuos, $j = 1, 2$. Sea además $i : F(X) \to F(X)$ un automorfismo topológico tal que $i(K_1) = K_2$. Entonces $i(\ker \widetilde{p_1}) = \ker \widetilde{p_2}$.

3.30 Teorema. Sean K_1 y K_2 retractos paralelos de X, $Y_1 = X/K_1$ y $Y_2 = X/K_2$ espacios R-cocientes con sus respectivas proyecciones naturales $p_1 : X \to Y_1$ y $p_2 : X \to Y_2$. Entonces p_1 y p_2 son M-equivalentes. En particular, Y_1 y Y_2 son M-equivalentes.

Demostración. Sean $r_1 : X \to K_1$ y $r_2 : X \to K_2$ retracciones paralelas. Sea $i_0 : X \to F(X)$ definida por:

$$i_0(x) = r_1(x)x^{-1}r_2(x)$$

para toda $x \in X$. Claramente i_0 es continua. Sea $i : F(X) \to F(X)$ el homomorfismo continuo que extiende a i_0. Debido a que $r_j \circ r_k = r_j$ para $j, k \in \{1, 2\}$ se tiene que $i(K_1) = K_2$ y la función $(i \circ i)\restriction_X$ es la identidad. Por lo tanto $i \circ i$ es el automorfismo identidad de $F(X)$. Finalmente, el resultado se sigue directamente del Lema 3.29 y el Teorema 3.28. $\square$

Notemos que el teorema anterior es una técnica para construir ejemplo de espacios M-equivalentes. Daremos un ejemplo más de una técnica de este tipo. Considere un espacio X_0 con un retracto K, y sea X_0^+ el espacio obtenido apartir de X_0 añadiendo un punto aislado. En lo que sigue usaremos la notación $Y := X_0/K \oplus K$.

3.31 Teorema. Los espacios X_0^+ y Y definidos como arriba son M-equivalentes.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $Z = X_0 \oplus K_1$, donde K_1 es una copia ajena homeomorfa a K. Los conjuntos K y K_1 son retractos paralelos de Z, luego las proyecciones naturales $p_1 : Z \to Z/K_1$ y $p_2 : Z \to Z/K$ son M-equivalentes. El resultado se sigue del hecho de que Z/K_1 es homeomorfo a X_0^+, y Z/K es homeomorfo a Y. $\square$

3.6. Ejemplos de espacios M-equivalentes

Los Teoremas 3.30 y 3.31 nos ayudan a construir ejemplos de espacios M-equivalentes. Veamos cómo.

3.32 Ejemplo. Sea D un espacio discreto, $I = [0,1]$ y $X = (I \times D) \oplus D$. Sea $d \in D$ y sea $K_1 = \{0\} \times D$, $K_2 = D \cup \{(0,d)\}$. Se tiene que K_1 y K_2 son retractos paralelos de X, por tanto por el Teorema 3.30 se tiene que los espacios R-cociente X/K_1 y X/K_2 son M-equivalentes. El espacio X/K_1 contiene $|D|$ puntos aislados, mientras que X/K_2 no contiene ninguno.

3.33 Corolario. Por el Ejemplo 3.32, podemos deducir que la cardinalidad de el conjunto de puntos aislados no es algo que se preserve bajo M-equivalencia.

Recuerde que un espacio topológico X es un *espacio de Baire* si para cada sucesión de subconjuntos abiertos y densos en X se tiene que la intersección de todos ellos es densa en X. Por otro lado, un espacio topológico X es llamado *quasi-regular* si cada subconjunto abierto no vacío de X contiene a la clausura de un subconjunto abierto no vacío de X. Además, llamamos *pseudo-base* de X a una colección $\mathcal{F}(n)$ no vacía de subconjuntos abiertos tal que para cada abierto no vacío $U \subseteq X$ contiene a algún miembro de $\mathcal{F}$. Finalmente, recuerde que un espacio X es llamado *pseudo-completo* si X tiene una sucesión $\{\mathcal{P}(n) : n \in \omega\}$ de pseudo-bases tal que si $P_n \in \mathcal{P}(n)$ y $\mathrm{cl}(P_{n+1}) \subseteq P_n$ para cada $n \in \omega$, entonces $\cap_{n\in\omega} P_n \neq \emptyset$.

3.34 Ejemplo. Sea $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ una sucesión convergente con límite x_0. Definimos una topología en $X_0 = \mathbb{Q} \times C$ de la siguiente forma: todos los puntos (q, x_n) con $q \in \mathbb{Q}$ son aislados en X_0, y un conjunto $U \subseteq X_0$ es vecindad de (q, x_0) si y sólo si U es vecindad de este mismo punto con la topología producto. El espacio X_0 definido así es numerable y metrizable, y contiene un subespacio discreto. Por lo tanto, X_0 es pseudocompleto y por ello también es un espacio de Baire [9]. Claramente, lo mismo es cierto para el espacio $X := X_0^+$.

Considere $Y_0 = X_0 \oplus \mathbb{Q}$ y $Y = Y_0^+$. Se tiene que Y no es un espacio de Baire porque $\mathbb{Q}$ es un subespacio abierto de Y [8]. Vamos a mostrar que X y Y son M-equivalentes. El conjunto $K_1 = \mathbb{Q} \times \{x_0\}$ es un retracto de X_0. Por el Teorema 3.31, X es M-equivalente al espacio $X_1 = (X_0/K_1) \oplus K_1 \cong (X_0/K_1) \oplus \mathbb{Q}$. Similarmente, $K_2 = \mathbb{Q} \times \{x_0\}$ es retracto de Y_0, por lo tanto Y es M-equivalente a $Y_1 = (Y_0/K_2) \oplus K_2 = (X_0/K_1) \oplus \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. Pero los espacios X_1 y Y_1 son homeomorfos porque $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

3.35 Corolario. Las propiedades de que un espacio sea de Baire, pseudocompleto y que contengan un subespacio denso discreto no se preservan bajo M-equivalencia.

Para el siguiente ejemplo, recuerde que dado un espacio topológico X, una *π-base* de X es una colección de abiertos no vacíos $\mathcal{B}$ tal que para cualquier abierto $U \subseteq X$ no vacío existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$. El *π-peso* de un espacio topológico X, denotado por $\pi w(X)$, se define como el mínimo cardinal infinito tal que existe una π-base con dicho cardinal.

3.36 Ejemplo. Sea A un espacio numerable que no contiene una π-base numerable (tómese, por ejemplo, un subespacio denso numerable del cubo de Tychonoff de peso el continuo [10]). Definamos una topología en $X_0 = A \times C$, donde $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ es una sucesión convergente a x_0, mediante la siguiente forma: todos los puntos (a, x_n) de X_0 son aislados, y un subconjunto $U \subseteq X_0$ es vecindad de un punto (a, x_0) si y sólo si U es vecindad del mismo punto en la topología producto. El espacio X_0 resultante es numerable y de Tychonoff, y contiene un subespacio discreto numerable, y por ello contiene una π-base numerable. Claramente, el espacio $X := X_0^+$ también tiene una π-base numerable.

Sea $K = A \times \{x_0\}$ y $Y = (X_0/K) \oplus K$. Claramente, K es retracto de X_0, por lo tanto por el Teorema 3.31 se tiene que X y Y son M-equivalentes. El espacio Y contiene un subespacio abierto K que es homeomorfo a A, y por tanto Y no tiene una π-base numerable.

Hagamos ahora una pequeña modificación del ejemplo dado. Sea $Z_0 = \beta X_0$ y $\overline{K} = Cl_{Z_0}(K)$. La retracción $r : X_0 \to K$ se extiende a una retracción $\overline{r} : Z_0 \to \overline{K}$, por ello $\overline{K}$ es retracto de Z_0. Sea $Z = Z_0^+$ y $Z_1 = (Z_0/\overline{K}) \oplus \overline{K}$. Nuevamente, los espacios Z y Z_1 son M-equivalentes por el Teorema 3.31. El espacio Z contiene un subespacio denso numerable discreto, y por lo tanto contiene una π-base numerable. El espacio Z_1 contiene un subespacio cerrado y abierto $\overline{K}$ con A denso en $\overline{K}$. Como A no contiene una π-base numerable, los espacios $\overline{K}$ y Z_0 tampoco.

3.37 Corolario. La numerabilidad del π-peso no es preservada bajo la M-equivalencia, ni en la clase de los espacios numerables ni en la clase de los espacios compactos.

Finalmente, veremos un ejemplo que muestra que la conexidad local y la conexidad por trayectorias no se preservan bajo M-equivalencia.

3.38 Ejemplos. Sea

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = \text{sen}(1/x)\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}.$

Considere también

$$K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

y

$$K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{1}{2} \leq x \leq 1, y = \text{sen}(1/2)\}.$$

Se tiene entonces que K_1 y K_2 son retractos de X. Más aún, el espacio cociente X/K_1 es homeomorfo al segmento $I = [0, 1]$, mientras que X/K_2 es homeomorfo a X. Por lo tanto, los espacios X e I son M-equivalentes por el Teorema 3.30. Notemos que I es localmente conexo y conexo por trayectorias, pero X no es ni uno ni lo otro.

3.39 Corolario. La conexidad local y la conexidad por trayectorias no se preserva bajo la M-equivalencia.

Bibliografía

[1] J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer, 1995.

[2] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Incorporated, 2000.

[3] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications Inc., 2004.

[4] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[5] V. Arkhangel'skiĭ, M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics Vol. 1, 2008.

[6] S. M. Karnik, S. Willard, *Natural covers and R-quotient mappings*, Canad. Math. Bull., 1982, 456–462.

[7] O.G. Okunev, *A Method For Constructing Examples Of M-Equivalent Spaces*, Chair of Mathematical Methods in Physics, Departament of Mathematics, Kalinin State University, 1989.

[8] R. R. Hernández, *Espacios de Baire*, Topologia y sistemas dinámicos IV, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

[9] J. M. Aarts, D. J. Lutzer, *Pseudo-completeness and the product of Baire spaces*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 48, 1973.

[10] K. Kunen, J. E. Vaughan, *Handbook of Set-theoretic Topology*, Elsevier Science Publishers, 1991.

[11] A. P. Grillet, *Abstract Algebra*, Springer, 2007.