



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EL COMPORTAMIENTO DE LOS  
SOLITONES ÓPTICOS A TRAVÉS DE  
DERIVADAS FRACCIONARIAS  
CENTRADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
MANUEL VELASCO JUAN



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JORGE FUJIOKA ROJAS

Ciudad Universitaria, México, D.F., 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Velasco

Juan

Manuel

57 73 41 01

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

30830078-1

2. Datos del tutor

Dr.

Jorge

Fujioka

Rojas

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Rosalío Fernando

Rodríguez

Zepeda

4. Datos del sinodal 2

Dr.

José Ignacio

Jiménez

Mier y Terán

5. Datos del sinodal 3

Dr.

Roberto Ysacc

Sato

Berrú

6. Datos del sinodal 4

Dra.

Bertha

Molina

Brito

7. Datos del trabajo escrito

El comportamiento de los solitones ópticos a través de derivadas fraccionarias centradas

51 p

2015

# Agradecimientos

---

A mis padres por haberme apoyado a lo largo de toda mi formación académica, es lo que hizo posible este trabajo.

Al Dr. Jorge Fujioka Rojas, por haber dedicado su tiempo y esfuerzo en la dirección de esta tesis.

A mis sinodales, por dedicar su tiempo a la revisión de este trabajo.

A la Facultad de Ciencias y a la Universidad Nacional Autónoma de México, por la formación que me han dado.

# PREFACIO

---

La propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas es un proceso muy interesante, tanto por sus aplicaciones en telecomunicaciones, como por la estructura matemática de las ecuaciones que describen este proceso. La ecuación fundamental en este campo es la llamada “Ecuación no lineal de Schrödinger” por sus siglas en inglés (NLS), la cual tiene una forma engañosamente sencilla:

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2u = 0 \tag{1}$$

en esta ecuación el término  $u_{tt}$  describe la dispersión del pulso, mientras que el término no lineal es una consecuencia de que el índice de refracción del vidrio depende de la intensidad de la luz. Ahora bien, la ecuación 1 describe apropiadamente pulsos del orden de 5ps de duración, pero si queremos describir pulsos más cortos es necesario introducir derivadas de ordenes superiores, tales como  $u_{3t}$  o  $u_{4t}$ .

El caso de varias derivadas temporales para describir la dispersión de los pulsos luminosos es algo bien conocido desde la década de los 80's. Sin embargo fue hasta el 2010 cuando se descubrió que esa dispersión también puede describirse mediante unas derivadas extrañas, conocidas como *derivadas fraccionarias*. En el artículo de J. Fujioka, *Fractional optical solitons* (1), la dispersión de los pulsos luminosos se describe utilizando las derivadas fraccionarias introducidas por Grünwald-Letnikov a mediados del siglo XIX (2), (3). Al igual que en la mayoría de las definiciones de las derivadas fraccionarias, la definición de Grünwald-Letnikov nos presenta dos tipos de derivadas: la derivada izquierda y la derivada derecha. La primera se calcula mediante una integral sobre un intervalo que está a la izquierda del punto en el que se está calculando la derivada, mientras que la derivada derecha involucra una integral sobre un intervalo que está a la derecha del punto en cuestión. Esta “partición” del concepto de *derivada fraccionaria* en dos definiciones “asimétricas” (izquierda y derecha), es una característica que no parece del todo deseable. Para intentar corregir esta situación, el investigador portugués Manuel Duarte Ortigueira introdujo recientemente (4) una *derivada fraccionaria centrada*, que se calcula mediante una suma que contiene valores de la función que están *a ambos lados* del punto en el cual se están evaluando las derivadas.

# Resumen

---

En este trabajo estudiamos las derivadas fraccionarias centradas de Ortigueira, obtenemos algunas relaciones importantes como lo son relaciones de simetría en los coeficientes de estas derivadas, así como también relaciones de recurrencia, también obtenemos relaciones de integración. El objetivo del presente trabajo es investigar cómo evolucionaría un pulso luminoso si utilizamos la derivada fraccionaria de Ortigueira para describir la dispersión del pulso. Entre otras cosas nos interesa saber si existen ecuaciones NLS *fraccionarias*, que utilicen las derivadas de Ortigueira, que tengan soluciones tipo solitón (es decir, pulsos que conservan su forma al avanzar por la fibra óptica). Como veremos a lo largo de este trabajo, hay dos tipos de derivadas de Ortigueira, cada una de las cuales podría incluir un coeficiente complejo (o podría no incluirlo), y existen además múltiples formas de combinar estos 2 tipos de derivadas de Ortigueira. A partir de esta multiplicidad de opciones, en este trabajo examinaremos 8 distintas ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) lineales fraccionarias, y 2 EDPs no lineales. Del examen de las soluciones numéricas de estas 10 ecuaciones podremos concluir cual es la combinación lineal de derivada de Ortigueira más conveniente para describir la propagación de pulsos luminosos en fibras ópticas, y descubriremos si las derivadas de Ortigueira permiten describir la propagación de solitones ópticos, una aclaración importante es que en el sentido estricto estas soluciones no son solitones, ya que no preservan su forma funcional a lo largo de toda la fibra, sin embargo en este trabajo a veces nos referiremos a soluciones solitónicas teniendo en mente que sólo son soluciones tipo solitón y no solitones ópticos en el sentido estricto.

# Índice general

---

<b>Índice de figuras</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Una revolución tecnológica . . . . .	1
1.2. Una revolución físico-matemática . . . . .	2
1.3. La dispersión de los pulsos luminosos . . . . .	3
1.4. Sistemas NLS generalizados y derivadas fraccionarias . . . . .	3
1.5. Estructura de la tesis . . . . .	4
<b>2. Distintos tipos de dispersión</b>	<b>5</b>
2.1. Relaciones de dispersión . . . . .	5
2.2. Un átomo de “juguete” . . . . .	6
2.3. Transformadas de Fourier . . . . .	9
<b>3. Derivadas fraccionarias, dispersión fraccionaria y conservación de la energía</b>	<b>12</b>
3.1. Deducción de las derivadas fraccionarias del tipo par e impar . . . . .	13
3.1.1. Diferencias centradas de orden entero . . . . .	13
3.1.2. Derivadas centradas de orden entero . . . . .	15
3.2. Dispersión fraccionaria . . . . .	16
3.3. Conservación de la energía . . . . .	27
<b>4. Solitones ópticos. Ecuación NLS completa</b>	<b>36</b>
4.1. NLS completa . . . . .	36
<b>5. Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>50</b>

# Índice de figuras

---

2.1. Modelo clásico del átomo . . . . .	7
2.2. Conjunto de guías de onda lineales basadas en polímeros, constituyente de 75 guías de onda de un único modo. . . . .	10
3.1. a) Gráfica del comportamiento de los coeficientes $Wp_k$ , b) Zoom de a) en el intervalo $[0,0.005]$ . . . . .	19
3.2. a) Gráfica del comportamiento de los coeficientes $Wi_k$ , b) Zoom de a) en el intervalo $[0,0.005]$ . . . . .	20
3.3. Gráfica de los perfiles $ u ^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son $A_0 = 0.977267$ , $w_0 = 2.264850$ , $r_0 = 0$ y $\alpha = 2.1$ . . . . .	22
3.4. Gráfica de la altura del solitón para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	23
3.5. Gráfica del coeficiente $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$ . . . . .	24
3.6. Gráfica de los perfiles $ u ^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son $A_0 = 0.977267$ , $w_0 = 2.264850$ , $r_0 = 0$ y $\alpha = 2.9$ . . . . .	25
3.7. Gráfica de la altura del solitón para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	25
3.8. Dos formas simples para ir de la ecuación 3.1 a la 3.2: 1) Lineal, 2) Circular. . . . .	27
3.9. Gráfica de los perfiles $ u ^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son $A_0 = 0.842676$ , $w_0 = 2.62659$ y $r_0 = 0$ , a) $\alpha = 2.1$ ; b) $\alpha = 2.9$ . . . . .	28
3.10. Gráfica de los perfiles $ u ^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son $A_0 = 0.842676$ , $w_0 = 2.62659$ y $r_0 = 0$ , a) $\alpha = 2.1$ ; b) $\alpha = 2.9$ . . . . .	29
3.11. Gráfica de la altura del solitón para distintos valores de $\alpha$ . A) A través de la forma lineal, B) A través de la forma circular. . . . .	30
3.12. Gráfica de la energía del pulso óptico para las propuestas A y B . . . .	34
3.13. Gráfica de la energía del pulso óptico para la propuesta combinada. . . .	35
4.1. Gráfica de los perfiles $ u ^2$ , para una condición inicial de la forma 4.4, $\alpha = 2.9$ . . . . .	37

4.2. Gráfica de los perfiles $ u ^2$ , para una condición inicial de la forma 4.4, $\alpha = 2.5$ . . . . .	38
4.3. Gráfica A) altura ( $ u ^2$ ) del pulso óptico. B) Energía del pulso óptico. Resultados para distintos valores de $\alpha$ . . . . .	39
4.4. Gráfica A) forma circular B) forma lineal de los coeficientes $c(\alpha)$ y $d(\alpha)$ . . . . .	40
4.5. Gráfica A) Altura del solitón óptico B) Energía del solitón óptico. . . . .	41
4.6. Gráfica de la relación que existe entre el avance en $z$ con el avance en $t$ . . . . .	42
4.7. Gráfica de los perfiles del solitón para $\alpha = 2.3$ . . . . .	43
4.8. Gráfica de los perfiles del solitón para $\alpha = 2.1$ . . . . .	43
4.9. Gráfica de las alturas del solitón al sentir la radiación del solitón que viene detrás, $\alpha = 2.7$ . . . . .	44
4.10. Gráfica de las alturas del solitón para los casos en que la altura y el ancho del solitón se ve aumentada al doble o disminuida a la mitad. . . . .	45
4.11. Gráfica de los perfiles del solitón para el caso en que la altura es mayor. . . . .	45
4.12. Gráfica de los perfiles del solitón para el caso en que la altura es menor. . . . .	46

# Introducción

---

## 1.1. Una revolución tecnológica

En 1973 un artículo de Akira Hasegawa y Frederick Tappert (5), que entonces trabajaban en los Laboratorios Bell, inició una revolución que cambiaría radicalmente los sistemas de telecomunicaciones terrestres. En su artículo Hasegawa y Tappert demostraban que era posible que pulsos luminosos de muy corta duración (unos cuantos picosegundos), viajaran largas distancias a lo largo de fibras ópticas delgadas sin distorsionarse (sin dispersarse) demasiado.

Como además, 7 años antes, Charles Kao había descubierto (6) que la atenuación que sufre la luz al viajar por el vidrio no era debida al vidrio mismo, sino a las impurezas que usualmente están presentes en todos los vidrios, para 1973 era ya claro que si se tuvieran fibras de vidrio muy puro los pulsos de luz de Hasegawa y Tappert podrían viajar kilómetros antes de que la atenuación los destruyera. Esto disparó una carrera por construir fibras ópticas de vidrio purísimo, y en 1979 Miya, Terunuma, Hosaka y Miyoshita (7) lograron finalmente obtener fibras ópticas cuya atenuación ( $\alpha$ ) era 5000 veces menor que la de los vidrios existentes en 1966. Si medimos la atenuación de la luz en decibeles por kilómetro, esto quiere decir que se había pasado de  $\alpha = 1000dB/Km$  a  $\alpha = 0.2dB/Km$ , lo cual implicaba que la luz podría viajar  $50Km$  por una fibra óptica antes que su intensidad decayera a un 10 % de su intensidad inicial.

Con los resultados de Hasegawa y Tappert, y las fibras de Miya et al., para 1979 era ya evidente que se podrían construir sistemas de telecomunicaciones hechos con fibras ópticas, en los cuales la información se transmitiría mediante pulsos luminosos, en lugar de corrientes eléctricas.

La coronación de los trabajos de Kao, Hasegawa, Tappert y Miya et al., se produjo en 1980, cuando Mollenaur, Stolen y Gordon (8) lograron transmitir pulsos luminosos de 7 picosegundos de duración a través de las nuevas fibras ópticas de baja atenuación.

En 1983 se tendió el séptimo cable submarino Trasatlántico (el TAT -7) para comunicar telefónicamente América con Europa, y este cable era todavía de metal. Sin embargo, el siguiente cable, (el TAT -8) tendido en 1988, ya era de **fibras ópticas** (9).

A partir de ese momento todos los nuevos sistemas de telecomunicaciones se fabricarían con fibras ópticas: ¡la época de los cables metálicos había terminado!

## 1.2. Una revolución físico-matemática

En el artículo de 1973 de Hasegawa y Tappert (5) se muestra que, bajo ciertas aproximaciones, la evolución de los pulsos luminosos que viajan por una fibra óptica obedecen una ecuación de la forma:

$$i(u_t + u_z + \alpha u) + u_{zz} + |u|^2 u = 0 \quad (1.1)$$

En donde  $\alpha$  es la atenuación, y la variable  $u$  está relacionada con el campo eléctrico de la luz ( $E$ ) a través de la ecuación:

$$E(z, t) = \frac{1}{2} u(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \quad (1.2)$$

Sin embargo en el artículo de Mollenaur, Stolen y Gordon de 1980 (8), se mostró que el comportamiento de los pulsos ópticos se describe mejor mediante la ecuación:

$$iu_z + u_{tt} + |u|^2 u = 0 \quad (1.3)$$

En la cual la variable espacial  $z$  toma el lugar de la variable de evolución, y la  $t$  es el llamado “tiempo retardado”, definido como  $t = T - \beta_1 z$ , donde  $T$  es el tiempo autentico, y  $\beta_1^{-1}$  es la velocidad de grupo de la luz en el vidrio (10).

La ecuación 1.3 se encontró por primera vez en 1961 en un trabajo de Pitaevskii (11), en el cual se estudia el comportamiento del helio a bajísimas temperaturas. En ese trabajo, sin embargo, no se observó nada especialmente interesante en relación con la ecuación 1.3. Sin embargo, 10 años después, Zakharov y Shabat (12) demostraron que el problema de condiciones iniciales para la ecuación 1.3 podía ser resuelto mediante la generalización hecha por Peter Lax (13) por el extraño y novedoso método conocido en inglés como “*inverse scattering*”, desarrollado en 1967 por Gardner, Greene, Kruskal y Miura (14) para resolver a la ecuación Korteweg-de Vries (KdV):

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

En 1971, pues, ya se sabía que la ecuación 1.3 era matemáticamente interesante. De hecho, era la segunda ecuación diferencial parcial no lineal (EDPNL) en la cual se descubrían *auténticos solitones* (es decir, ondas no lineales solitarias que recuperan sus formas y velocidades iniciales después de una colisión, pero presentan un corrimiento en sus posiciones). Sin embargo, en ese momento la ecuación 1.3 parecía más bien ser una curiosidad matemática, sin mucha importancia física o tecnológica.

Las cosas cambiaron radicalmente en 1980, cuando Mollenauer, Stolen y Gordon mostraron que la transmisión de pulsos luminosos de cortísima duración era realmente posible en fibras ópticas, y que esos pulsos (los *solitones ópticos*) se describían mediante

la ecuación 1.3. Así pues, la combinación del interés matemático de la ecuación 1.3, y su importancia en la nueva tecnología de telecomunicaciones, hicieron que la ecuación 1.3 se convirtiera en la EDPNL más importante de la física-matemática.

Con el tiempo a la ec. 1.3 se le empezó a llamar “*ecuación no lineal de Shrödinger*” (NLS), aún cuando en el contexto de las fibras ópticas la ec. NLS no tiene ninguna relación con la mecánica cuántica.

### 1.3. La dispersión de los pulsos luminosos

Las soluciones más interesantes de la ecuación NLS son, sin duda, los *solitones ópticos*, es decir, ondas solitarias que se propagan sin deformarse a lo largo de las fibras ópticas. La existencia de estas ondas es el resultado de un balance entre el efecto *dispersivo* del término  $u_{tt}$ , y el efecto “*auto-enfocante*” (en inglés: “*self-focusing*”) del término no lineal  $|u|^2u$ .

### 1.4. Sistemas NLS generalizados y derivadas fraccionarias

Durante mucho tiempo se creyó que las extensiones de la ecuación no lineal de Schrödinger, las cuales incluyen términos dispersivos de más alto orden, es decir terceras y cuartas derivadas, no tenían solución exacta debido a que los modos de radiación resuenan con la propagación del pulso óptico, lo que ocasiona la destrucción del mismo. Sin embargo en los noventa se encontró evidencia de que podrían existir soluciones tipo solitón en estos sistemas generalizados (15). En los últimos 20 años se ha encontrado que extensiones de la ecuación NLS que incluyen términos dispersivos de más alto orden, y términos no lineales de más alto orden tienen soluciones solitónicas exactas, es decir, donde la radiación no entra en resonancia con el pulso óptico.

En particular se encontró que las ecuaciones:

$$iu_z + u_{tt} + u_{4t} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \quad (1.5)$$

y

$$iu_z - iu_{3t} + u_{4t} + |u|^2u - |u|^4u = 0 \quad (1.6)$$

describen la propagación de pulsos muy cortos (sub-picosegundos) en fibras ópticas con no linealidades saturables, y que tienen soluciones de solitón sin radiación.

Tener soluciones tipo solitón exactas en ambas ecuaciones sugiere que podría existir un caso intermedio entre  $u_{tt}$  y  $u_{3t}$  en el cual se encuentren soluciones de solitón para un parámetro  $\alpha$  entre 2 y 3, es decir  $2 < \alpha < 3$ . Para ello debemos introducir una derivada fraccionaria  ${}_tD^\alpha u$ . Lo interesante aquí es que las derivadas fraccionarias han tenido un creciente desarrollo debido a sus aplicaciones en diversas campos de la ciencias, por ejemplo electromagnetismo, ingeniería en control, y procesamiento de señales.

Sin embargo, existen varias definiciones de derivada fraccionaria que conducen a distintos resultados. Entre ellas están las de Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov y Hadamard (16).

En 2006 Manuel Duarte Ortigueira propuso una definición más para las derivadas fraccionarias (4), la cual se puede obtener a partir de la aproximación del concepto de derivada mediante diferencias finitas centradas, extrapolando el factorial a una función Gamma. Lo interesante en esta definición es que corresponde a un caso centrado, en el cual se ocupan términos a la izquierda y a la derecha, a diferencia de las otras derivadas fraccionarias conocidas, en las cuales existe una definición para la *derivada fraccionaria izquierda*, y otra definición para la *derivada fraccionaria derecha*. Además, en el caso de las derivadas de Ortigueira, existen dos variantes, que en este trabajo llamamos “derivada par” y “derivada impar”, las cuales surgen al extrapolar las aproximaciones de las derivadas “enteras” (es decir, de orden entero) mediante diferencias finitas.

En este trabajo nos enfocaremos en el estudio de estas nuevas derivadas fraccionarias propuestas por Ortigueira, y empezaremos por descubrir el efecto que tienen. Para ello reemplazaremos las derivadas temporales de orden entero que aparecen en la parte lineal de las generalizaciones de la ecuación NLS, por derivadas fraccionarias de Ortigueira. Después averiguamos si estas derivadas permiten la propagación de solitones ópticos, y además verificamos que permiten la conservación de la energía.

Con esto determinaremos con precisión el efecto de estas nuevas derivadas, y dicho conocimiento será útil en cualquier área en la que se quieran introducir estas derivadas fraccionarias.

## 1.5. Estructura de la tesis

Este trabajo está estructurado de la siguiente forma. En el Capítulo 2 veremos cómo a partir de las distintas relaciones de dispersión entre  $k$  y  $\omega$  se puede deducir la ecuación NLS y sus variantes generalizadas con términos de más alto orden, además damos un ejemplo en donde se muestra cómo surge dicha relación de dispersión. En el Capítulo 3 se deducen y definen los dos tipos de derivadas fraccionarias de Ortigueira, tanto la par como la impar, se estudian los efectos de estas derivadas considerando sólo los términos lineales en la ecuación NLS fraccionaria generalizada y se realiza un análisis acerca de la conservación de la energía. En el capítulo 4 estudiamos la ecuación fraccionaria generalizada con sus términos no lineales y observamos para qué parámetros de  $\alpha$  existen soluciones tipo solitón. En el Capítulo 5 mostramos las conclusiones y hacemos un resumen de todos los resultados obtenidos.

## Distintos tipos de dispersión

---

En este trabajo estudiaremos la propagación de pulsos y rayos de luz a través de medios “dispersivos” y medios “dispersivos no lineales” tales como fibras ópticas usadas en los sistemas de telecomunicaciones. Por lo tanto es importante aclarar a qué se refiere el termino “dispersivo”.

Normalmente entendemos por dispersión de un pulso luminoso al fenómeno por el cual el pulso se va ensanchando conforme avanza por la fibra óptica (17), aunque también podemos mencionar otro tipo de dispersión ligeramente distinto el cual está asociado con un cambio de dirección de la luz, A este último tipo de dispersión se le denomina “scattering” en inglés (18).

La importancia de esto es que a partir de diferentes relaciones de dispersión se pueden obtener ecuaciones de la forma:

$$iu_z + i\beta_1 u_t - \frac{\beta_2}{2!} u_{tt} - i\frac{\beta_3}{3!} u_{3t} + \dots = 0 \quad (2.1)$$

$$iu_t + i\gamma_1 u_z - \frac{\gamma_2}{2!} u_{zz} - i\frac{\gamma_3}{3!} u_{3z} + \dots = 0 \quad (2.2)$$

$$iu_z + i\delta_1 u_x - \frac{\delta_2}{2!} u_{xx} - i\frac{\delta_3}{3!} u_{3x} + \dots = 0 \quad (2.3)$$

### 2.1. Relaciones de dispersión

El ejemplo más común de dispersión posiblemente sea aquel en el que un rayo de luz blanca al pasar por un prisma se descompone en varios rayos de distintos colores, que salen del prisma en distintas direcciones (19). Y esto -nos dicen- es la prueba de que el índice de refracción depende de la frecuencia de la luz, es decir:

$$n = n(\omega) \quad (2.4)$$

El índice de refracción ( $n$ ) es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío ( $c$ ) y la velocidad en el medio ( $v$ ):

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.5)$$

Ahora bien, la velocidad de la luz en el medio es igual a la longitud de onda ( $\lambda$ ) entre el periodo ( $\tau$ ) de las oscilaciones del campo eléctrico de la luz:

$$v = \frac{\lambda}{\tau} \quad (2.6)$$

Al combinar las ecuaciones 2.5 y 2.6 obtenemos lo siguiente:

$$n = \frac{c}{v} = c \frac{\tau}{\lambda} = c \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\tau}{2\pi} = c \frac{k}{\omega}$$

En donde  $k = 2\pi/\lambda$  es el llamado número de onda y  $\omega = 2\pi/\tau$  es la frecuencia angular, la cual se mide en radianes/segundo.

Recordando de la ecuación 2.4 que el índice de refracción depende de la frecuencia, podemos escribir al número de onda como sigue:

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \quad (2.7)$$

Esto nos muestra que en un medio dispersivo el número de onda también es función de la frecuencia, es decir:

$$k = k(\omega)$$

Sin embargo esta ecuación se puede invertir de tal forma que se puede afirmar que en un medio dispersivo la frecuencia angular es función del número de onda:

$$\omega = \omega(k)$$

A las funciones  $k(\omega)$  o  $\omega(k)$  se les llama “relaciones de dispersión”.

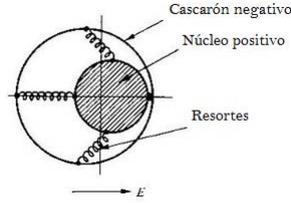
En la siguiente sección presentaremos un argumento sencillo que nos ayudará a comprender por qué el índice de refracción  $n$  es función de la frecuencia  $\omega$ .

Posteriormente en la sección 2.3 mostraremos que con sólo conocer la relación de dispersión, podemos obtener la forma de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de la luz en un medio dispersivo.

## 2.2. Un átomo de “juguete”

Ahora mostraremos que utilizando un modelo simplista del átomo se puede demostrar que el índice de refracción depende de la frecuencia.

Consideremos un modelo de juguete consistente en un núcleo positivo esférico, rodeado de un cascarón negativo también esférico, y supongamos que ambas esferas están unidas por resortes que satisfacen la ley de Hooke (20). En la Fig 2.1 se muestra el modelo.



**Figura 2.1:** Modelo clásico del átomo

Si desplazamos el cascarón negativo una distancia  $x$  de su posición de equilibrio, sentirá una fuerza  $-kx$ , de modo que su movimiento obedecerá la ecuación:

$$m\ddot{x} = -kx \quad (2.8)$$

Es fácil ver que esta ecuación tiene soluciones de la forma:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.9)$$

Siempre y cuando  $\omega_0$  sea tal que:

$$k = m\omega_0^2$$

Supongamos que ahora nuestro “átomo clásico” está bajo el efecto de un campo eléctrico oscilante:

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (2.10)$$

El cascarón negativo, de carga  $q$ , sentirá una fuerza eléctrica:

$$F_e = qE = qE_0 \cos(\omega t) \quad (2.11)$$

Entonces la ecuación de movimiento será:

$$m\ddot{x} = qE_0 \cos(\omega t) - m\omega_0^2 x \quad (2.12)$$

Podemos anticipar que el átomo oscilara a la misma frecuencia que  $E(t)$ , por lo tanto podemos proponer una solución de la forma:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (2.13)$$

Ahora debemos reemplazarla en la ecuación de movimiento 2.12 para calcular la amplitud  $x_0$ . Obtenemos:

$$-m\omega^2 x_0 \cos(\omega t) = qE_0 \cos(\omega t) - m\omega_0^2 x_0 \cos(\omega t) \quad (2.14)$$

Factorizando  $m x_0$  y eliminando  $\cos(\omega t)$

$$m x_0 (\omega_0^2 - \omega^2) = qE_0$$

Despejando  $x_0$  obtenemos

$$x_0 = \frac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0$$

Esto quiere decir que la solución tentativa 2.13 es válida siempre y cuando  $x_0$  cumpla la condición anterior, entonces:

$$x(t) = \frac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos(\omega t) = \frac{q/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \quad (2.15)$$

Por otro lado sabemos que el momento dipolar de un dipolo de cargas  $+q$  y  $-q$  separadas una distancia  $x$  es  $p = qx$ , entonces el momento dipolar de nuestro “átomo clásico” será:

$$p(t) = \frac{q^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \quad (2.16)$$

Considerando que hay  $N$  átomos por unidad de volumen, el momento dipolar por unidad de volumen (que es la polarización eléctrica) será:

$$P = Np = \frac{q^2 N/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E \quad (2.17)$$

Además, tenemos que para la mayoría de los materiales la polarización eléctrica  $P$  y el campo eléctrico  $E$  son proporcionales y pueden relacionarse satisfactoriamente de la siguiente manera:

$$P = \epsilon_0 \chi_e E \quad (2.18)$$

donde  $\chi_e$  es la susceptibilidad eléctrica del material, y  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío.

La permitividad del medio se define como:

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0$$

y la constante dieléctrica (o permitividad relativa) se define como:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = (1 + \chi_e)$$

Finalmente el índice de refracción se relaciona con la permitividad y la susceptibilidad en la forma:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

Entonces  $n^2 = \epsilon_r \mu_r$ , pero para el caso del vidrio  $\mu \approx \mu_0$  ( $i, e, \mu_r \approx 1$ ), tenemos que aproximadamente:

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \chi_e$$

Despejando  $\chi_e$  de 2.18 y sustituyendo la ecuación 2.17 obtenemos que:

$$\chi_e = \frac{q^2 N/m}{\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Con lo cual llegamos a una expresión para  $n$  como función de  $\omega$ , la relación de dispersión es:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{q^2 N/m}{\epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (2.19)$$

## 2.3. Transformadas de Fourier

En cualquier medio dispersivo, la relación de dispersión que vincula el número de onda  $k$  con la frecuencia  $\omega$ , es decir  $k = k(\omega)$ , permite encontrar una ecuación de evolución. Esta relación de dispersión puede ser expresada haciendo un desarrollo en serie de Taylor para una función de una variable alrededor de  $\omega = \omega_0$ , denotando los coeficientes correspondientes a las derivadas respecto a  $\omega$  con  $\beta_i$  de acuerdo al orden de derivación, y tomando  $k(0) = k_0$ , es decir:

$$\beta_i = \left[ \frac{d^i}{d\omega^i} k(\omega) \right]_{\omega_0} \quad (2.20)$$

Entonces la relación toma la forma:

$$k = k_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2!}(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\beta_3}{3!}(\omega - \omega_0)^3 + \dots \quad (2.21)$$

De esta expansión en serie podemos obtener una ecuación diferencial parcial (*PDE*), que gobierna la evolución de los pulsos. Para esto debemos observar que la amplitud  $A(z, t)$  de un pulso monocromático que varía levemente y puede ser escrita como una transformada de Fourier inversa de la forma:

$$A(z, t) = F^{-1} [\tilde{A}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k, \omega) e^{i[(k-k_0)z - (\omega-\omega_0)t]} dk d\omega$$

Debido a esto podemos obtener las siguientes relaciones:

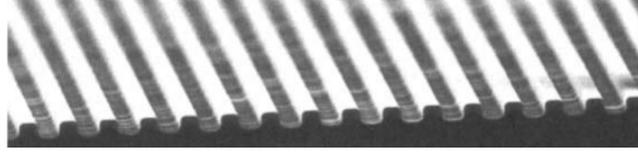
$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -i(\omega - \omega_0) F^{-1} [\tilde{A}] = F^{-1} [-i(\omega - \omega_0) \tilde{A}] \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= i(k - k_0) F^{-1} [\tilde{A}] = F^{-1} [i(k - k_0) \tilde{A}] \end{aligned}$$

Es decir, los factores  $-i(\omega - \omega_0)$  y  $i(k - k_0)$  están directamente relacionados con sacar las derivadas  $\frac{\partial A}{\partial t}$  y  $\frac{\partial A}{\partial z}$  respectivamente. Escrito de una manera más conveniente:

$$(\omega - \omega_0) \longleftrightarrow i \frac{\partial}{\partial t}, \quad (k - k_0) \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.22)$$

Ahora reemplazamos los factores  $(\omega - \omega_0)$  y  $(k - k_0)$  que aparecen en la ecuación 2.21 por los operadores diferenciales correspondientes obtenemos:

$$-i \frac{\partial}{\partial z} = i\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - i \frac{\beta_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} + \dots \quad (2.23)$$



**Figura 2.2:** Conjunto de guías de onda lineales basadas en polímeros, constituyente de 75 guías de onda de un único modo.

Finalmente si nosotros aplicamos estos operadores al campo  $A(z, t) = u(z, t)$

$$iu_z + i\beta_1 u_t - \frac{\beta_2}{2!} u_{tt} - i\frac{\beta_3}{3!} u_{3t} + \dots = 0 \quad (2.24)$$

Y esta es justamente la ecuación 2.1, que aparece al principio de este capítulo.

Ahora bien, si en vez de suponer una relación de dispersión  $k = k(\omega)$  consideramos la relación inversa  $\omega = \omega(k)$ , entonces el desarrollo en serie de Taylor sería alrededor de  $k = k_0$ , denotando los coeficientes correspondientes a las derivadas respecto a  $k$  con  $\gamma_i$  de acuerdo al orden de derivación, y tomando  $\omega(0) = \omega_0$ , es decir:

$$\gamma_i = \left[ \frac{d^i}{dk^i} \omega(k) \right]_{k_0} \quad (2.25)$$

Entonces la relación toma la forma:

$$\omega = \omega_0 + \gamma_1(k - k_0) + \frac{\gamma_2}{2!}(k - k_0)^2 + \frac{\gamma_3}{3!}(k - k_0)^3 + \dots \quad (2.26)$$

En vista de que las variables siguen siendo  $k$  y  $\omega$  las relaciones 2.31 siguen siendo válidas, y por lo tanto podemos reemplazarlos en en la ecuación 2.26

$$i\frac{\partial}{\partial t} = -i\gamma_1 \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\gamma_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + i\frac{\gamma_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \dots \quad (2.27)$$

Finalmente si nosotros aplicamos estos operadores al campo  $A(z, t) = u(z, t)$

$$iu_t + i\gamma_1 u_z + \frac{\gamma_2}{2!} u_{zz} - i\frac{\gamma_3}{3!} u_{3z} - \dots = 0 \quad (2.28)$$

Y esta es justamente la ecuación 2.2, que aparece al principio de este capítulo.

Sin embargo estas no son las únicas relaciones de dispersión que existen, ya que en el caso de solitones espaciales en un medio que no es isotrópico, la propagación de la luz en la dirección  $z$  es diferente a la propagación en la dirección  $x$  (donde  $z$  y  $x$  son dos direcciones perpendiculares), como es el caso de un medio periódico como se muestra en la Fig 2.2. En ese caso la relación de dispersión es:

$$k_z = \beta + 2C \cos(k_x d) \quad (2.29)$$

siendo  $k_z$  el número de onda en la dirección  $z$ ,  $k_x$  el número de onda en la dirección  $x$ ,  $\beta$  es la constante de propagación lineal,  $C$  es el coeficiente de acoplamiento y  $d$  representa la distancia del centro al centro entre las guías de onda en la dirección  $x$ .

Por lo tanto existe una relación de dispersión de la forma:

$$k_z = k_z(k_x)$$

La cual se puede desarrollar en serie de Taylor alrededor de  $k_{x0}$  denotando esta vez los coeficientes con  $\delta_i$ , la relación de dispersión queda como sigue:

$$k_z = k_{z0} + \delta_1(k_x - k_{x0}) + \frac{\delta_2}{2!}(k_x - k_{x0})^2 + \frac{\delta_3}{3!}(k_x - k_{x0})^3 + \dots \quad (2.30)$$

De esta expansión en serie podemos obtener una *PDE*, que gobierna la evolución de los pulsos. Para esto debemos observar que ahora la amplitud  $A(z, x)$  puede ser escrita como una transformada de Fourier inversa de la forma:

$$A(z, x) = F^{-1} [\tilde{A}] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(k_z, k_x) e^{i[(k_z - k_{z0})z + (k_x - k_{x0})t]} dk_z dk_x$$

Debido a esto podemos obtener las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= i(k_x - k_{x0})F^{-1} [\tilde{A}] = F^{-1} [i(k_x - k_{x0})\tilde{A}] \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= i(k_z - k_{z0})F^{-1} [\tilde{A}] = F^{-1} [i(k_z - k_{z0})\tilde{A}] \end{aligned}$$

Es decir, los factores  $i(k_x - k_{x0})$  e  $i(k_z - k_{z0})$  están directamente relacionados con sacar las derivadas  $\frac{\partial A}{\partial x}$  y  $\frac{\partial A}{\partial z}$  respectivamente. Escrito de una manera más conveniente:

$$(k_x - k_{x0}) \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (k_z - k_{z0}) \longleftrightarrow -i \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.31)$$

Sí ahora reemplazamos los factores  $(k_x - k_{x0})$  y  $(k_z - k_{z0})$  que aparecen en la ecuación 2.30 por los operadores diferenciales correspondientes:

$$-i \frac{\partial}{\partial z} = -i\delta_1 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\delta_2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i \frac{\delta_3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots \quad (2.32)$$

Finalmente si nosotros aplicamos estos operadores al campo  $A(z, t) = u(z, t)$

$$iu_z - i\delta_1 u_x - \frac{\delta_2}{2!} u_{xx} + i \frac{\delta_3}{3!} u_{3x} + \dots = 0 \quad (2.33)$$

Y esta es justamente la ecuación 2.3, que aparece al principio de este capítulo.

# Derivadas fraccionarias, dispersión fraccionaria y conservación de la energía

---

En los últimos años el interés en las derivadas fraccionarias ha crecido bastante, ya que estas derivadas tienen aplicaciones en diversas áreas de la física, por ejemplo las podemos encontrar en la mecánica clásica (21)-(23), mecánica cuántica (24)-(26), física de plasmas (27) y difusión anómala (28). Además se han encontrado resultados interesantes cuando reemplazamos derivadas de orden entero por derivadas fraccionarias en ecuaciones de solitones como lo es la Korteweg-de Vries (KdV) (29) y la NLS (30).

En el capítulo presente definimos dos tipos de derivada fraccionaria, las cuales son propuestas por Manuel Duarte Ortigueira (4), una en los casos en que el entero más cercano al orden de derivación es par  $D_{par}^\alpha$  y otra en que el entero más cercano es impar  $D_{impar}^\alpha$ , estas derivadas se obtienen a través de una generalización de las derivadas de orden entero. Una vez definida la derivada fraccionaria estudiamos las siguientes ecuaciones:

$$iu_z + \epsilon_2 D_t^\alpha u = 0 \tag{3.1}$$

$$iu_z + i\epsilon_3 D_t^\alpha u = 0 \tag{3.2}$$

En donde  $D^\alpha u$  representa alguna de las derivadas fraccionarias de Ortigueira donde  $2 < \alpha < 3$ . Estas ecuaciones son la parte lineal de la ecuación NLS extendida a derivadas fraccionarias en donde 3.1 corresponderían al término con  $u_{tt}$  y 3.2 correspondería al término con  $u_{3t}$  en la ecuación NLS “normal”. Probaremos distintas variantes y al final decidiremos cual debería ser la correcta considerando la conservación de la energía.

## 3.1. Deducción de las derivadas fraccionarias del tipo par e impar

### 3.1.1. Diferencias centradas de orden entero

Sea  $\Delta_c$  una diferencia finita centrada definida por:

$$\Delta_c f(t) = f\left(t + \frac{h}{2}\right) - f\left(t - \frac{h}{2}\right) \quad (3.3)$$

Ahora apliquemos este operador dos veces sucesivas obtenemos lo siguiente

$$\Delta_c^2 f(t) = \Delta_c(\Delta_c f(t)) = \Delta_c f\left(t + \frac{h}{2}\right) - \Delta_c f\left(t - \frac{h}{2}\right) \quad (3.4)$$

$$\Delta_c^2 f(t) = f(t+h) - 2f(t) + f(t-h) \quad (3.5)$$

Aplicando una vez más este operador obtenemos que:

$$\Delta_c^3 f(t) = f\left(t + \frac{3}{2}h\right) - 3f\left(t + \frac{1}{2}h\right) + 3f\left(t - \frac{1}{2}h\right) - f\left(t - \frac{3}{2}h\right) \quad (3.6)$$

Aplicándolo 4 veces:

$$\Delta_c^4 f(t) = f(t+2h) - 4f(t+h) + 6f(t) - 4f(t-h) + f(t-2h) \quad (3.7)$$

Al ver esto inmediatamente viene a nuestra mente el teorema del binomio de newton, observemos los resultados y comparemos con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} (x-y)^1 &= x^1 - y^1 \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2x^1y^1 - y^2 \\ (x-y)^3 &= x^3 - 3x^2y^1 + 3x^1y^2 - y^3 \\ (x-y)^4 &= x^4 - 4x^3y^1 + 6x^2y^2 - 4x^1y^3 + y^4 \end{aligned}$$

Notemos que los coeficientes son los mismos, además el exponente entre 2 de  $x$  coincide con el coeficiente que acompaña a  $h$ , mientras que el exponente entre 2 de  $y$  coincide con el coeficiente que acompaña a  $-h$ .

Una vez establecida esta analogía y teniendo en cuenta que el binomio de Newton es el siguiente:

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k \quad (3.8)$$

Es claro que:

$$\Delta_c^N f(t) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k N!}{k!(N-k)!} f\left(t + \left(\frac{N}{2} - k\right)h\right) \quad (3.9)$$

Dependiendo de si  $N$  es par o impar el tratamiento será diferente, ya que para  $N$  par tenemos la función evaluada en  $t - kh$ , y cuando  $N$  es impar la función quedaría evaluada en  $t - kh + \frac{h}{2}$ .

**N par**

Consideremos el caso  $N$  par, además desfasemos la suma  $N/2$  para que sea más evidente el hecho de que es una derivada centrada, tomando en cuenta el siguiente cambio de variable:

$$-k^* = \frac{N}{2} - k$$

tal que:

$$k = \frac{N}{2} + k^*$$

$$N - k = \frac{N}{2} - k^*$$

$$k = 0 \rightarrow k^* = -\frac{N}{2}$$

$$k = N \rightarrow k^* = \frac{N}{2}$$

Entonces obtenemos la siguiente ecuación para las diferencias centradas con  $N$  par como sigue:

$$\Delta_c^N f(t) = \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{(-1)^{\left(\frac{N}{2}+k\right)} N!}{\left(\frac{N}{2}+k\right)! \left(\frac{N}{2}-k\right)!} f(t - kh) \quad (3.10)$$

**N impar**

Consideremos el caso  $N$  impar, además desfasemos la suma  $(N-1)/2$  para que sea más evidente el hecho de que es una derivada centrada, tomando en cuenta el siguiente cambio de variable:

$$-k^* = \frac{N-1}{2} - k$$

tal que:

$$k = \frac{N-1}{2} + k^*$$

$$N - k = \frac{N+1}{2} - k^*$$

$$k = 0 \rightarrow k^* = -\frac{N-1}{2}$$

$$k = N \rightarrow k^* = \frac{N+1}{2}$$

Entonces obtenemos la siguiente ecuación para las diferencias centradas con  $N$  impar como sigue:

$$\Delta_c^N f(t) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N+1}{2}} \frac{(-1)^{\left(\frac{N-1}{2}+k\right)} N!}{\left(\frac{N-1}{2}+k\right)! \left(\frac{N+1}{2}-k\right)!} f\left(t - kh + \frac{1}{2}h\right) \quad (3.11)$$

### 3.1.2. Derivadas centradas de orden entero

Teniendo en cuenta que  $N! = \Gamma(N + 1)$  y las ecuaciones 3.10 y 3.11 se definen las derivadas correspondientes:

$$D_p^N f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_p^N f(t)}{h^N} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{N}{2}} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} (-1)^k \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(\frac{N}{2} + k + 1) \Gamma(\frac{N}{2} - k + 1)} f(t - kh)}{h^N} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} D_i^N f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_i^N f(t)}{h^N} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\frac{N-1}{2}} \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} (-1)^k \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(\frac{N+1}{2} - k + 1) \Gamma(\frac{N-1}{2} + k + 1)} f(t - kh + \frac{h}{2})}{h^N} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sin embargo estas ecuaciones así como están escritas son válidas para cualquier real si reemplazamos  $N$  por  $\alpha$  con la única condición de que  $\alpha > -1$ , esto es usual como lo es el caso de la derivada de Grünwal-Letnikov. Ortigueira define derivadas centradas fraccionarias de dos tipos, en donde uno esperaría que la derivada de tipo  $c_1$  funcionara mejor cuando  $\alpha$  está más cercano de un entero par, y la de tipo  $c_2$  funcionara mejor cuando  $\alpha$  esta más cercano de un entero impar. Las definiciones son la siguientes (4):

$$D_{c_1}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{c_1}^\alpha f(t)}{h^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1) \Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1)} f(t - kh) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} D_{c_2}^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{c_2}^\alpha f(t)}{h^\alpha} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} - k + 1) \Gamma(\frac{\alpha-1}{2} + k + 1)} f(t - kh + \frac{h}{2}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sin embargo debemos aclarar que los términos  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$  para el primer caso y  $(-1)^{\frac{\alpha+1}{2}}$  en el segundo caso, que Duarte Ortigueira removió, nosotros no los hemos eliminado y los tomaremos en cuenta al momento de realizar nuestro estudio, con base en los resultados concluiremos si debemos o no utilizarlos como parte de la derivada.

Una observación adicional que es importante mencionar, es que en nuestra deducción obtuvimos el coeficiente  $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ , sin embargo Ortigueira obtiene  $(-1)^{\frac{\alpha+1}{2}}$ , esto tiene consecuencias en al momento de regresar al caso en que el orden de derivación corresponde a un número entero pues con el exponente  $\frac{\alpha+1}{2}$  la derivada regresa a su correspondiente derivada con un signo menos. Se corroboro regresando a los casos en que  $\alpha = 1, 3$  y  $5$ , se obtuvo que el exponente correcto es  $\frac{\alpha-1}{2}$ . En este trabajo se utiliza el factor  $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ .

---

## 3.2. Dispersión fraccionaria

Para poder escoger y determinar la derivada fraccionaria más consistente con nuestro problema de propagación de pulsos ópticos a través de una fibra óptica, inicialmente hemos tomado en cuenta las siguientes propuestas:

$$\begin{aligned}
A) & D_p \\
B) & (-1)^{\frac{\alpha}{2}} D_p \\
C) & D_i \\
D) & (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} D_i \\
E) & \frac{D_p + D_i}{2} \\
F) & \frac{(-1)^{\frac{\alpha}{2}} D_p + (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} D_i}{2} \\
G) & c(\alpha) D_p + d(\alpha) D_i \\
H) & c(\alpha) (-1)^{\frac{\alpha}{2}} D_p + d(\alpha) (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} D_i
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En donde hemos llamado  $D_p$  a la derivada de tipo 1 y  $D_i$  a la derivada de tipo 2,  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  son factores de peso que asignamos de tal manera que cuando  $\alpha = 2 \rightarrow c(\alpha) = 1$  y  $d(\alpha) = 0$  y cuando  $\alpha = 3 \rightarrow c(\alpha) = 0$  y  $d(\alpha) = 1$ .

Las ocho propuestas anteriores surgen de manera natural, para determinar los efectos de dichas derivadas.

El caso  $A$  se pretende observar el efecto de la derivada par por si sola tal como es propuesta por Duarte Ortigueira.

El caso  $B$  se pretende observar el efecto del coeficiente complejo el cual fue omitido por Duarte Ortigueira.

Los casos  $C$  y  $D$  son respectivos a los  $A$  y  $B$  sólo que tomando en cuenta la derivada impar.

Los casos  $E$  y  $F$  son la combinación más simple de ambas derivadas para crear una sola derivada centrada.

Los casos  $G$  y  $H$  son una combinación un poco más complicada que se puede usar en el caso de que las derivadas no sean compatibles entre si, estos casos toman en cuenta la validez de las derivadas par e impar en una región alrededor de un entero par o impar.

Teniendo estas propuestas en mente, procedemos a resolver la ecuaciones 3.1 y 3.2 de forma numérica.

Lo primero que se hizo fue tomar la ecuación:

$$iu_z(z, t) + \epsilon_2 D_t^\alpha u(z, t) = 0 \tag{3.17}$$

Recordemos que  $u(z, t)$  es una función compleja, por lo tanto se puede escribir como:

$$u(z, t) = R(z, t) + iI(z, t)$$

en donde  $R(z, t)$  es la parte real de  $u$ , mientras que  $I(z, t)$  es la parte imaginaria. Sustituimos en la ecuación 3.17 y llegamos a que:

$$i(R_z + iI_z) + \epsilon_2(D_t^\alpha R + iD_t^\alpha I) = 0$$

$$i(R_z + \epsilon_2 D_t^\alpha I) - I_z + \epsilon_2 D_t^\alpha R = 0$$

de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$R_z + \epsilon_2 D_t^\alpha I = 0 \quad -I_z + \epsilon_2 D_t^\alpha R = 0 \quad (3.18)$$

Donde tanto  $R$  como  $I$  son funciones reales que dependen de  $z$  y  $t$ . para resolver el sistema de ecuaciones se elaboro un programa en lenguaje C. En la variable  $t$  hemos utilizado el algoritmo de las derivadas de Ortigueira (ecuaciones 3.14 y 3.15) para las derivadas temporales, y en la variable  $z$  utilizamos el método de Runge Kutta 4, aplicado a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales.

La forma en que hemos utilizado las definiciones 3.14 y 3.15 es la siguiente:

Primero se consideró que las derivadas fraccionarias se pueden ver de la siguiente forma:

$$\frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1)} f(t - kh) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Wp_k(\alpha) f(t - kh) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} - k + 1)\Gamma(\frac{\alpha-1}{2} + k + 1)} f(t - kh + \frac{h}{2}) \\ = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Wi_k(\alpha) f(t - kh + \frac{h}{2}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Donde los coeficientes que multiplican a la función se definieron de la siguiente forma:

$$Wp_k(\alpha) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1)} \quad (3.21)$$

$$Wi_k(\alpha) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} - k + 1)\Gamma(\frac{\alpha-1}{2} + k + 1)} \quad (3.22)$$

Lo primero que podemos notar es que satisfacen relaciones de simetría:

$$Wp_k(\alpha) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} - k + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} + k + 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{-k} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + (-k) + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} - (-k) + 1)} = Wp_{-k}(\alpha) \\
 Wi_k(\alpha) &= (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} - k + 1)\Gamma(\frac{\alpha-1}{2} + k + 1)} \\
 &= (-1)(-1)^{1-k} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\frac{\alpha-1}{2} + (1-k) + 1)\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} - (1-k) + 1)} = -Wi_{1-k}(\alpha) \\
 Wp_k(\alpha) &= Wp_{-k}(\alpha) \quad Wi_k(\alpha) = -Wi_{1-k}(\alpha) \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

Lo cual era de esperarse, pues en el caso con derivadas enteras los coeficientes cumplen las mismas relaciones, la diferencia es que en este caso tenemos una suma infinita de términos.

También podemos deducir relaciones de recurrencia, para lo cual hemos tomado factoriales para visualizar más fácilmente la deducción, pero sabemos que la función gamma cumple las mismas propiedades.

$$Wp_k(\alpha) = (-1)^k \frac{\alpha!}{(\frac{\alpha}{2} - k)! (\frac{\alpha}{2} + k)!}$$

tomando en cuenta las siguientes relaciones

$$(\frac{\alpha}{2} + k)! = (\frac{\alpha}{2} + k)(\frac{\alpha}{2} + k - 1)!$$

y

$$\frac{1}{(\frac{\alpha}{2} - k)!} = \frac{(\frac{\alpha}{2} - k + 1)}{(\frac{\alpha}{2} - k + 1)!}$$

$$\begin{aligned}
 Wp_k(\alpha) &= (-1)^k \frac{\alpha! (\frac{\alpha}{2} - k + 1)}{(\frac{\alpha}{2} - k + 1)! (\frac{\alpha}{2} + k) (\frac{\alpha}{2} + k - 1)!} \\
 Wp_k(\alpha) &= \frac{(-1)(\frac{\alpha}{2} - k + 1)}{(\frac{\alpha}{2} + k)} (-1)^{k-1} \frac{\alpha!}{(\frac{\alpha}{2} - (k-1))! (\frac{\alpha}{2} + (k-1))!}
 \end{aligned}$$

Con lo que tenemos la siguiente relación de recurrencia para  $Wp$ .

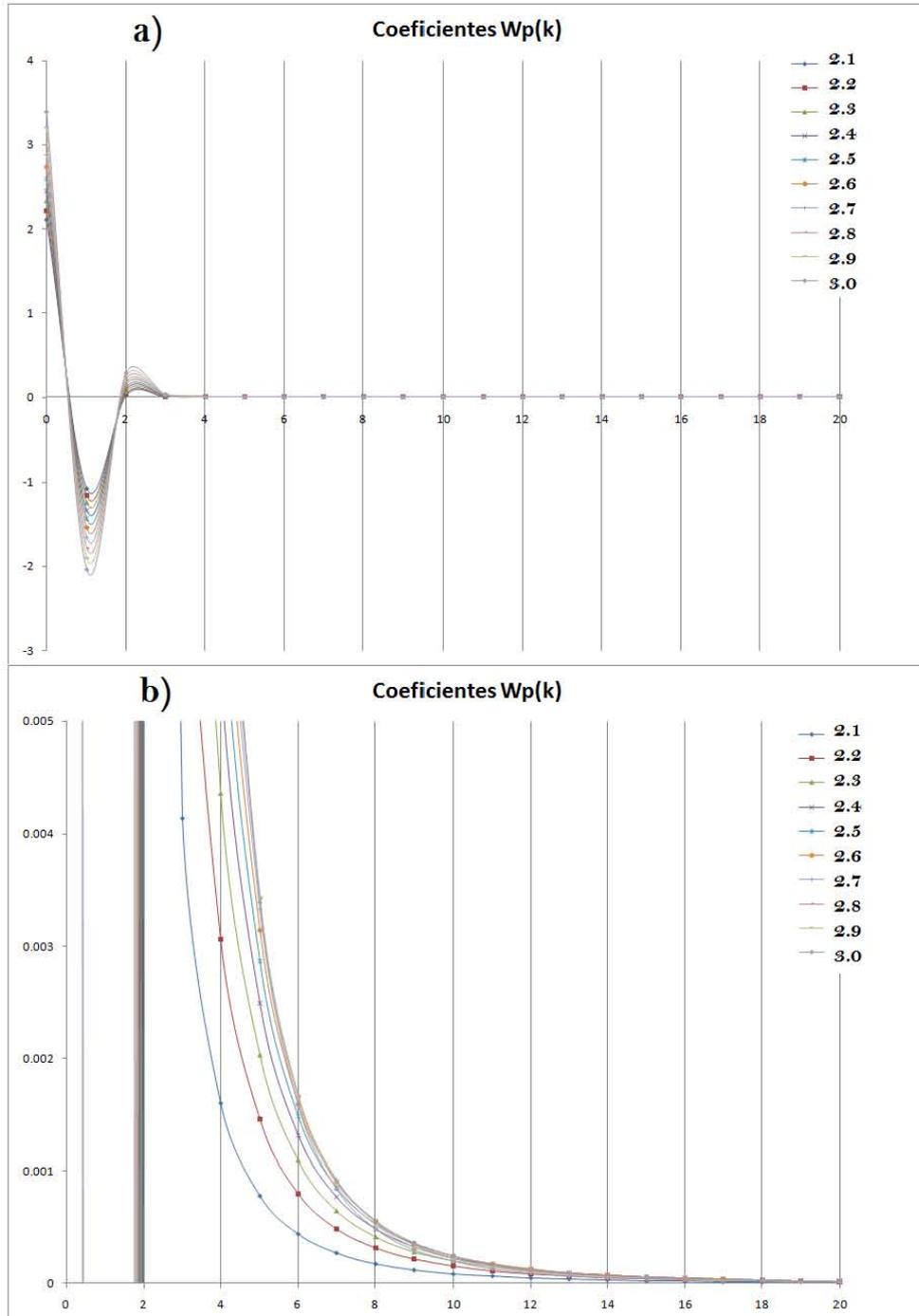
$$Wp_k(\alpha) = \frac{(-1)(\frac{\alpha}{2} - k + 1)}{(\frac{\alpha}{2} + k)} Wp_{k-1}(\alpha) \tag{3.24}$$

Análogamente se encuentra la relación de recurrencia para  $Wi$

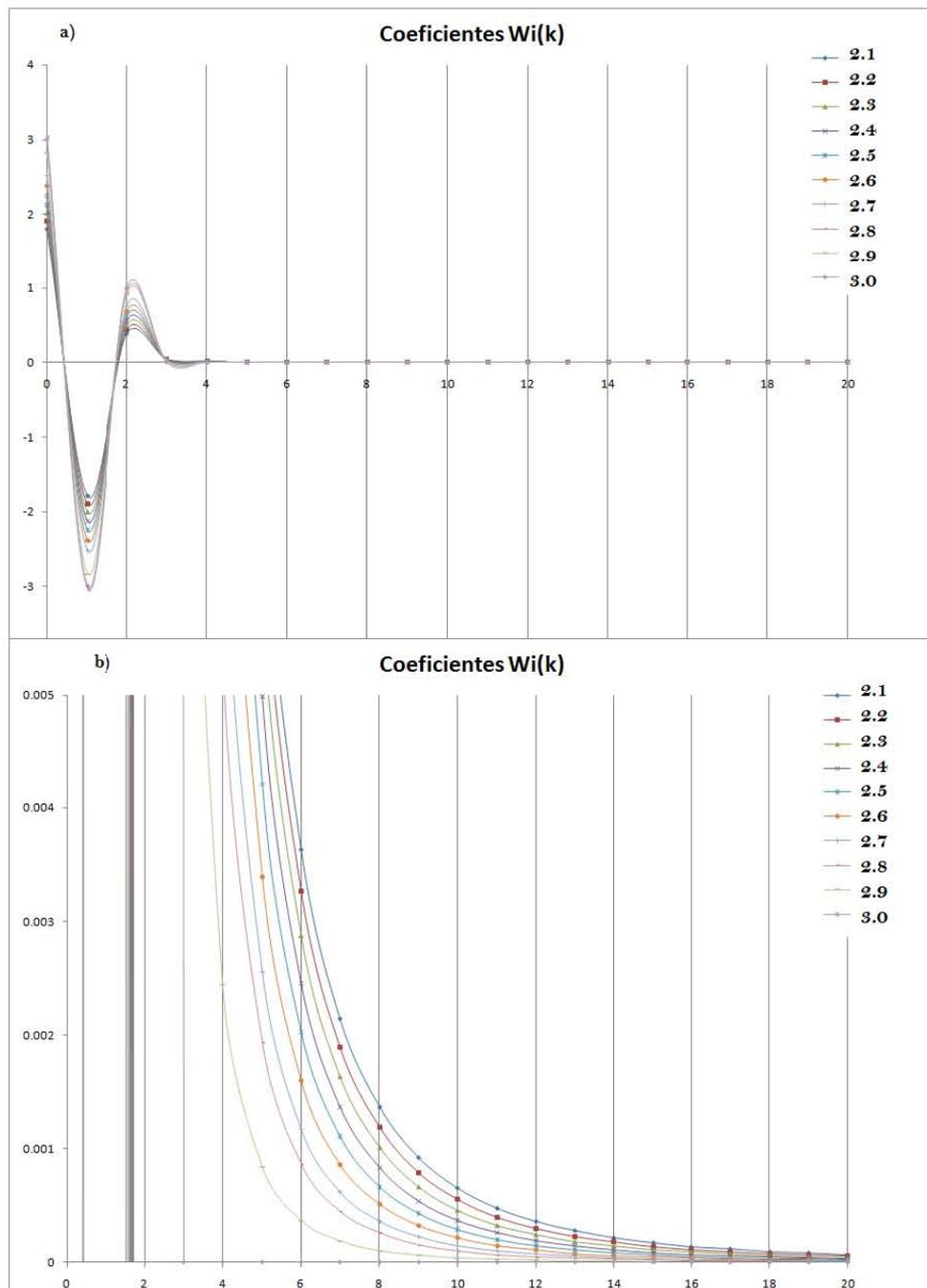
$$Wi_k(\alpha) = \frac{(-1)(\frac{\alpha+1}{2} - k + 1)}{(\frac{\alpha-1}{2} + k)} Wi_{k-1}(\alpha) \tag{3.25}$$

Ahora veamos el comportamiento de estos coeficientes de forma gráfica.

Conforme  $k$  crece (vecinos lejanos) el peso de dicho factor ya no es apreciable comparado con los primeros términos, de hecho resulta que el vecino con  $k = 26$  es del



**Figura 3.1:** a) Gráfica del comportamiento de los coeficientes  $Wp_k$ , b) Zoom de a) en el intervalo  $[0, 0.005]$ .



**Figura 3.2:** a) Gráfica del comportamiento de los coeficientes  $W_{i_k}$ , b) Zoom de a) en el intervalo  $[0, 0.005]$ .

orden de  $10^{-6}$ . En nuestro cálculo numérico tomamos 50 vecinos, 25 de cada lado. Con esto queda considerado de forma apropiada las derivadas fraccionarias.

Para la variable  $z$  sabemos que el método de Runge Kutta aplicado a un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales, esta dado por las siguientes ecuaciones, en donde se considera la integración a lo largo del intervalo  $i$ :

$$y_{l,i+1} = y_{l,i} + \frac{h}{6}(k_{l1} + 2k_{l2} + 2k_{l3} + k_{l4})$$

con:

$$k_{l1} = f_l(z_i, y_{1i}, \dots, y_{ni})$$

$$y_{li}^* = y_{li} + \frac{1}{2}hk_{l1}$$

$$k_{l2} = f_l(z_i + \frac{1}{2}h, y_{1i}^*, \dots, y_{ni}^*)$$

$$\bar{y}_{li} = y_{li} + \frac{1}{2}hk_{l2}$$

$$k_{l3} = f_l(z_i + \frac{1}{2}h, \bar{y}_{1i}, \dots, \bar{y}_{ni})$$

$$\bar{y}_{li}^* = y_{li} + \frac{1}{2}hk_{l3}$$

$$k_{l4} = f_l(z_i + \frac{1}{2}h, \bar{y}_{1i}^*, \dots, \bar{y}_{ni}^*)$$

en donde  $l = 1, \dots, n$ . En nuestro caso particular nuestro sistema está dado por las relaciones 3.18 y se tiene que  $n = 2$ , además, las  $f_l$  no dependen explícitamente de  $z$  por lo que la solución se facilita bastante. En particular tenemos que:

$$f_1(z, R, I) = -\epsilon_2 D_{pt}^\alpha I = -\epsilon_2 \frac{1}{g^\alpha} \sum_{k=-25}^{25} W p_k(\alpha) I(t - kg) \quad (3.26)$$

$$f_2(z, R, I) = \epsilon_2 D_{pt}^\alpha R = \epsilon_2 \frac{1}{g^\alpha} \sum_{k=-25}^{25} W p_k(\alpha) R(t - kg) \quad (3.27)$$

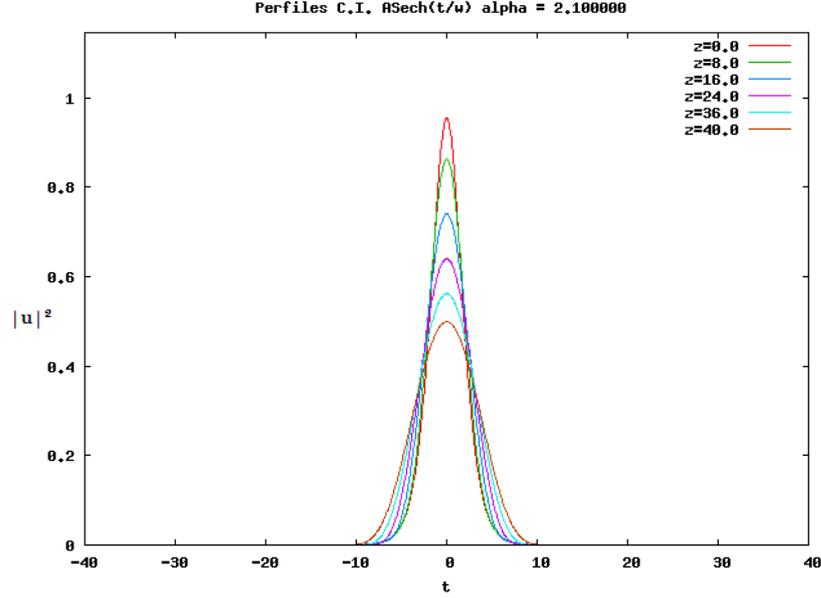
Ahora sí, dada la condición inicial  $u(0, t) = R(0, t) + iI(0, t)$  y tomando condiciones de frontera periódicas, lo cual equivale a pensar en otro solitón que viene detrás y uno más que va delante, o dicho de otra forma en una sucesión de pulsos, el problema está resuelto numéricamente.

Comenzaremos estudiando los casos  $A$  y  $B$  en la siguiente ecuación:

$$iu_z + \epsilon_2 D_t^\alpha u = 0$$

Aquí  $D_t^\alpha$  tiene dos posibilidades, la primera para el caso  $A$  y la segunda para el caso  $B$

$$D_t^\alpha = D_p^\alpha \quad D_t^\alpha = (-1)^{\frac{\alpha}{2}} D_p^\alpha$$



**Figura 3.3:** Gráfica de los perfiles  $|u|^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son  $A_0 = 0.977267$ ,  $w_0 = 2.264850$ ,  $r_0 = 0$  y  $\alpha = 2.1$

En seguida mostramos los resultados obtenidos para el caso  $A$  tomando como condición inicial

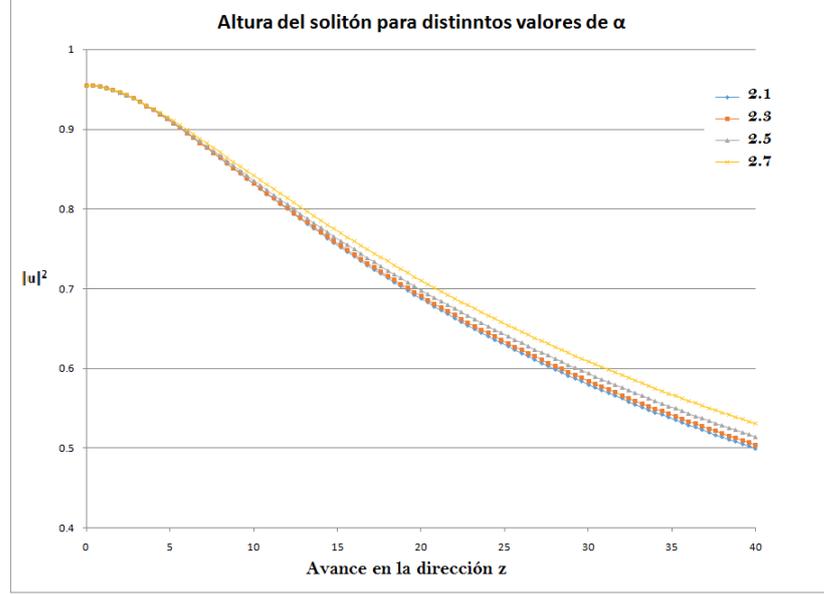
$$u(0, t) = A_0 \operatorname{sech}\left(\frac{t}{w_0}\right) e^{ir_0 t} \quad (3.28)$$

El parámetro  $A_0^2$  mide la amplitud máxima del solitón,  $w_0$  es una medida del ancho de la condición inicial. Para obtener los valores de  $A_0$ ,  $w_0$  y  $r_0$  usamos la ecuación que se presenta en la ecuación 4.2 que corresponden a la solución exacta de la ecuación 4.1, con  $\epsilon_2 = 1$  y  $\epsilon_3 = 0$ . Para nuestra solución numérica tomamos los siguientes parámetros  $h = 0.0000625$ ,  $g = 0.1$  y  $\epsilon_2 = 1.0$ .

La gráfica de la figura 3.3 muestra los perfiles del solitón conforme avanza a lo largo del eje  $z$ , éste resultado es satisfactorio pues en la ecuación  $NLS$  normal el término  $u_{tt}$  es el portador de la parte dispersiva. Además de esto, también notamos que cuando  $\alpha = 3.0$  NO recuperamos los mismos resultados que al utilizar una derivada entera  $u_{3t}$ . Con lo cual podemos concluir que esta *derivada par* funciona de forma aceptable en una vecindad alrededor del entero par más cercano, y no funciona para enteros impares.

Para saber cómo cambia el efecto dispersivo original del término  $u_{tt}$  hemos realizado pruebas para  $\alpha = 2.1, 2.3, 2.5, 2.7$ , con la misma condición inicial y los mismos valores de  $h, g, \epsilon_2$ . En la gráfica de la figura 3.4 se muestra la altura del solitón conforme avanza en el eje  $z$

Notamos que la dispersión se ve disminuida conforme  $\alpha$  se aleja de 2.0, lo cual refuerza que la *derivada par* funciona de forma aceptable en una vecindad alrededor



**Figura 3.4:** Gráfica de la altura del solitón para distintos valores de  $\alpha$ .

del entero par más cercano, y no funciona para enteros impares.

El caso  $B$  tiene un detalle adicional que se debe de tomar en cuenta. Observemos detenidamente el factor  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$ , cuando  $\alpha = 2.0$  este factor es igual a  $-1$ , y cuando  $\alpha = 3.0$  el factor es igual a  $-i$ , sin embargo, cuando  $\alpha$  está entre 2 y 3, este coeficiente es un número complejo de la forma  $a + ib$ , y además no es único ya que la función  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$  es multivaluada. Observemos que  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$  es un número complejo multivaluado. Si consideremos las siguientes 4 opciones:

$$(-1)^{\frac{\alpha}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}\alpha} = e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} = e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} = e^{i\frac{3\pi}{2}\alpha}$$

y analizamos su comportamiento como función de  $\alpha$  (véase la figura 3.5), se obtiene que sólo dos opciones son consistentes con la observación inicial para  $\alpha = 2.0$  el factor es igual a  $-1$ , y para  $\alpha = 3.0$  es igual a  $-i$

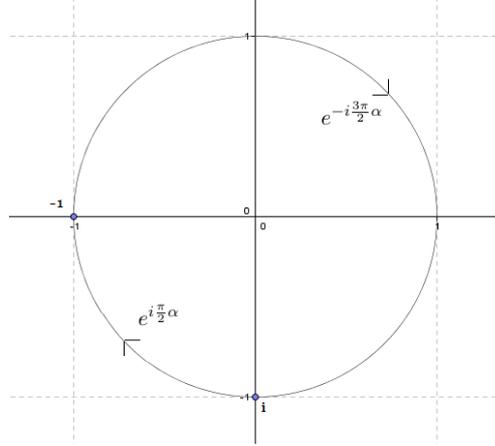
Ahora sí: para resolver el caso  $B$  se tomaron las mismas condiciones iniciales y los mismos parámetros numéricos, expresando el coeficiente  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$  de las dos formas distintas, sin embargo el programa rápidamente diverge. Con lo cual concluimos que la propuesta  $B$  no funciona de forma aceptable.

Los casos  $C$  y  $D$  se estudian con la siguiente ecuación:

$$iu_z - i\epsilon_3 D_t^\alpha u = 0$$

Aquí  $D_t^\alpha$  tiene dos posibilidades, la primera para el caso  $C$  y la segunda para el caso  $D$

$$D_t^\alpha = D_i^\alpha \quad D_t^\alpha = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} D_i^\alpha$$



**Figura 3.5:** Gráfica del coeficiente  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$ .

En seguida mostramos los resultados obtenidos para el caso  $C$  tomando la misma condición inicial propuesta en 3.28.

La gráfica de la figura 3.6 muestra los perfiles del solitón conforme avanza a lo largo del eje  $z$ . Este resultado es satisfactorio pues en la ecuación  $NLS$  normal el término  $u_{3t}$  además de dispersarse comienza a emitir pequeñas onditas a veces llamadas radiación (31)-(33). Además de esto también notamos que cuando  $\alpha = 2.0$ , NO recuperamos los mismos resultados que al utilizar una derivada entera  $u_{tt}$ . Con lo cual podemos concluir que esta *derivada impar* funciona de forma aceptable en una vecindad alrededor del entero impar más cercano, y no funciona para enteros pares.

Para saber como cambia el efecto dispersivo original del término  $u_{3t}$  hemos realizado pruebas para  $\alpha = 2.9, 2.7, 2.5, 2.3$ , con la misma condición inicial y los mismos valores de  $h, g$  y  $\epsilon_3 = 1.0$ . En la gráfica de la figura 3.4 se muestra la altura del solitón conforme avanza en el eje  $z$ .

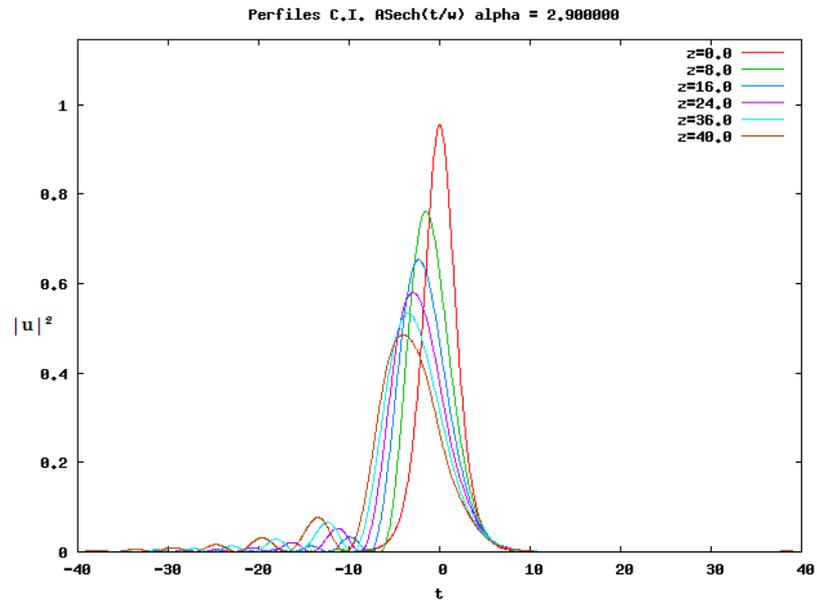
Notamos que la dispersión se ve disminuida conforme  $\alpha$  se aleja de 3.0, lo cual refuerza que la *derivada impar* funciona de forma aceptable en una vecindad alrededor del entero impar más cercano, y no funciona para enteros pares.

El caso  $D$  funciona de forma similar al caso  $B$ , sólo que ahora el coeficiente es  $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$  y cuando  $\alpha = 3.0$  es igual a  $-1$ . Una vez más, de las 4 posibilidades sólo tomamos 2:

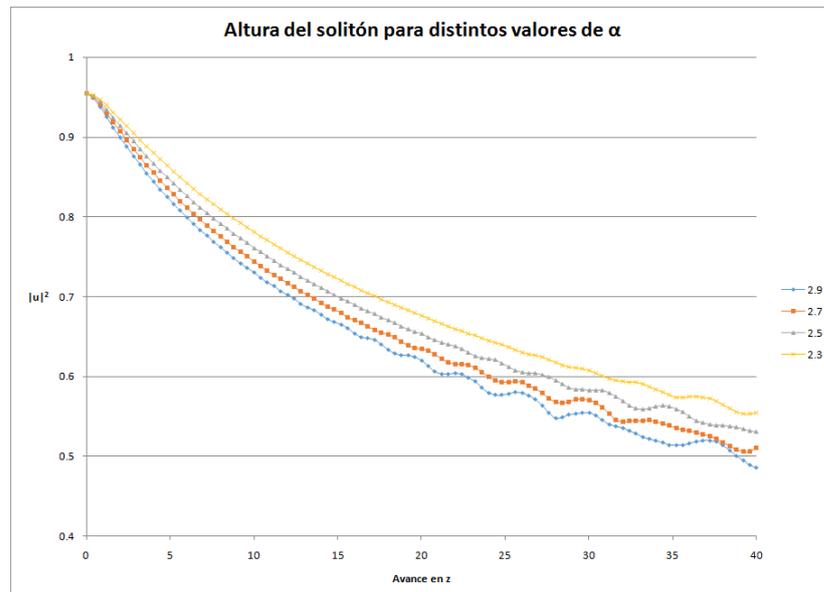
$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} = e^{-i\frac{3\pi}{2}(\alpha-1)} = e^{i\frac{\pi}{2}(\alpha-1)}$$

Para resolver el caso  $D$  se tomaron las mismas condiciones iniciales y los mismos parámetros numéricos, expresando el coeficiente  $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$  de las 2 formas distintas, sin embargo el programa rápidamente diverge. Con lo cual concluimos que la propuesta  $D$  no funciona de forma aceptable.

Ya que hemos observado los resultados de  $A, B, C$  y  $D$ , ya no es natural pensar en los casos  $E$  y  $F$ , o al menos no para todo  $\alpha$ . No obstante aún sería razonable cuando  $\alpha = 2.5$ , sin embargo este podría ser un caso particular de los incisos  $G$  y  $H$ . Además



**Figura 3.6:** Gráfica de los perfiles  $|u|^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son  $A_0 = 0.977267$ ,  $w_0 = 2.264850$ ,  $r_0 = 0$  y  $\alpha = 2.9$



**Figura 3.7:** Gráfica de la altura del solitón para distintos valores de  $\alpha$ .

en vista de que los resultados muestran que las propuestas  $A$  y  $C$  no son compatibles entre sí (ya que la derivada par no recupera los resultados de la derivada impar, y viceversa), en vez de tratar de combinar las derivadas par e impar, para tener una que funcione para cualquier real, consideraremos ambas por separado, en donde cada derivada fraccionaria (ya sea par o impar), reemplaza a su correspondiente derivada de orden entero, tomando en cuenta que sólo funciona en determinada región alrededor de dicho entero.

Para que la generalización sea adecuada, uno esperaría poder regresar al caso entero y obtener las mismas soluciones que usando las derivadas normales, pero notamos que las derivadas por sí solas (sin el coeficiente complejo  $(-1)^{\frac{\alpha}{2}}$  o  $(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}$ ) no regresan a su correspondiente derivada entera cuando  $\alpha = 2$  y  $\alpha = 3$ , pero sí regresan a  $-D_p^\alpha$  y  $-D_i^\alpha$  respectivamente.

El hecho de que regresen a menos la derivada, se debe precisamente a que en la deducción se llega a las relaciones con su respectivo coeficiente, es decir:

$$\alpha = 2 \rightarrow (-1)^{\frac{\alpha}{2}} D_p^\alpha u = u_{tt} \quad \alpha = 3 \rightarrow (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} D_i^\alpha u = u_{3t}$$

Sustituyendo el valor de  $\alpha$  en el exponente de  $(-1)$  se tiene que:

$$\alpha = 2 \rightarrow -D_p^\alpha u = u_{tt} \quad \alpha = 3 \rightarrow -D_i^\alpha u = u_{3t}$$

Con todo lo anterior nuestra propuesta original de  $G$  se ve afectada de la siguiente manera:

$$iu_z + \epsilon_2 c(\alpha) (-_t D_p^\alpha) u - i\epsilon_3 d(\alpha) (-_t D_i^\alpha) u = 0 \quad (3.29)$$

en donde ya se han considerado las dos ecuaciones 3.1 y 3.2 que describen la dispersión del pulso óptico y también se han elegido las propuestas  $A$  y  $C$  cómo válidas, los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  son factores de peso que hacen que la derivada se debilite cuando el orden de derivación se aleja del entero más cercano.

Ahora estudiaremos la ecuación 3.29, pero para elegir los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  tenemos dos posibilidades simples, las cuales se visualizan en la gráfica 3.8.

La forma 1) es a través de una línea recta mientras que la 2) es a través de un arco de circunferencia. Las correspondientes ecuaciones son:

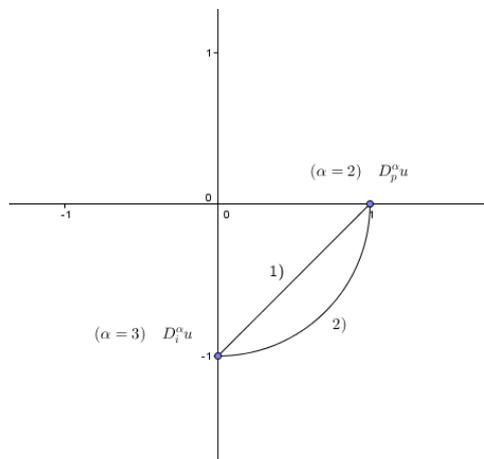
$$c(\alpha) = 3.0 - \alpha \quad d(\alpha) = \alpha - 2.0; \quad (3.30)$$

$$c(\alpha) = -\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \quad d(\alpha) = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right); \quad (3.31)$$

Teniendo todo lo anterior en consideración, hemos realizado pruebas con la ecuación 3.29 para la forma 1) correspondiente a una línea recta cuyos parámetros de  $\alpha$  son 2.1, 2.3, 2.5, 2.7 y 2.9.

En estas pruebas hemos tomado los siguientes parámetros  $h = 0.0001$ ,  $g = 0.1$ ,  $\epsilon_2 = 0.5$  y  $\epsilon_3 = 0.5$

Comenzamos con la prueba lineal. La gráfica de la figura 3.9 muestra los perfiles del solitón para algunos valores de  $\alpha$  conforme avanza a lo largo del eje  $z$ . Como se esperaba,



**Figura 3.8:** Dos formas simples para ir de la ecuación 3.1 a la 3.2: 1) Lineal, 2) Circular.

la solución de esta ecuación combinada tiene la parte dispersiva de la derivada par, y además se desplaza hacia la derecha y emite radiación debido a la derivada impar. Este resultado es satisfactorio porque en nuestra nueva propuesta están combinadas ambas derivadas, tanto la par como la impar, y además ya podemos recuperar los mismos resultados en el caso límite cuando  $\alpha$  es entero, de hecho conforme nos acercamos al entero vemos que hay un efecto dominante.

En el caso circular, el resultado es similar y la diferencia no es notable. Sin embargo más adelante, cuando analicemos la ecuación completa, veremos que sí existe una diferencia entre ambos casos.

Ahora el caso circular. La gráfica de la figura 3.10 muestra los perfiles del solitón para algunos valores de  $\alpha$  conforme avanza a lo largo del eje  $z$

Finalmente en la gráfica de la figura 3.11 mostramos los resultados a través de la forma lineal comparados contra la forma circular, en donde notamos que la diferencia más apreciable consiste en que la forma circular tiene una dispersión mayor en todos los casos.

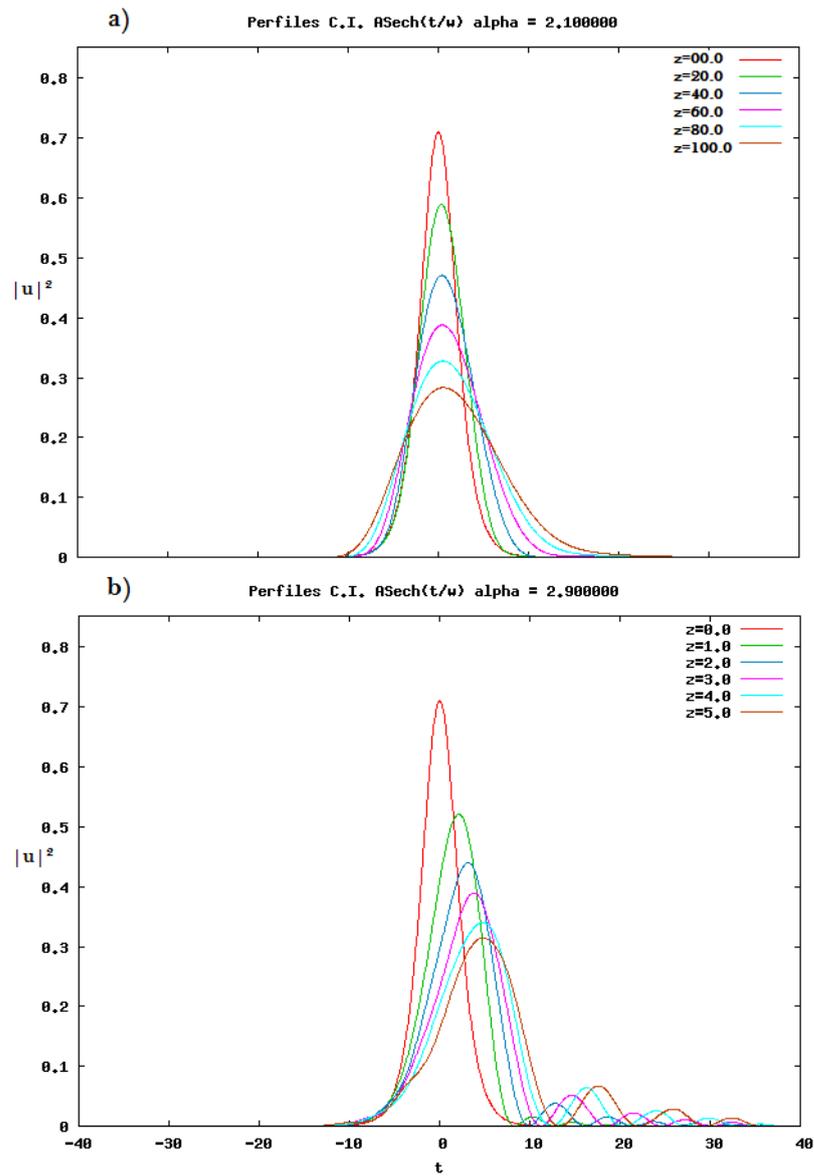
### 3.3. Conservación de la energía

En relación a las unidades de la función  $u(z, t)$  que aparece en la ecuación NLS normal:

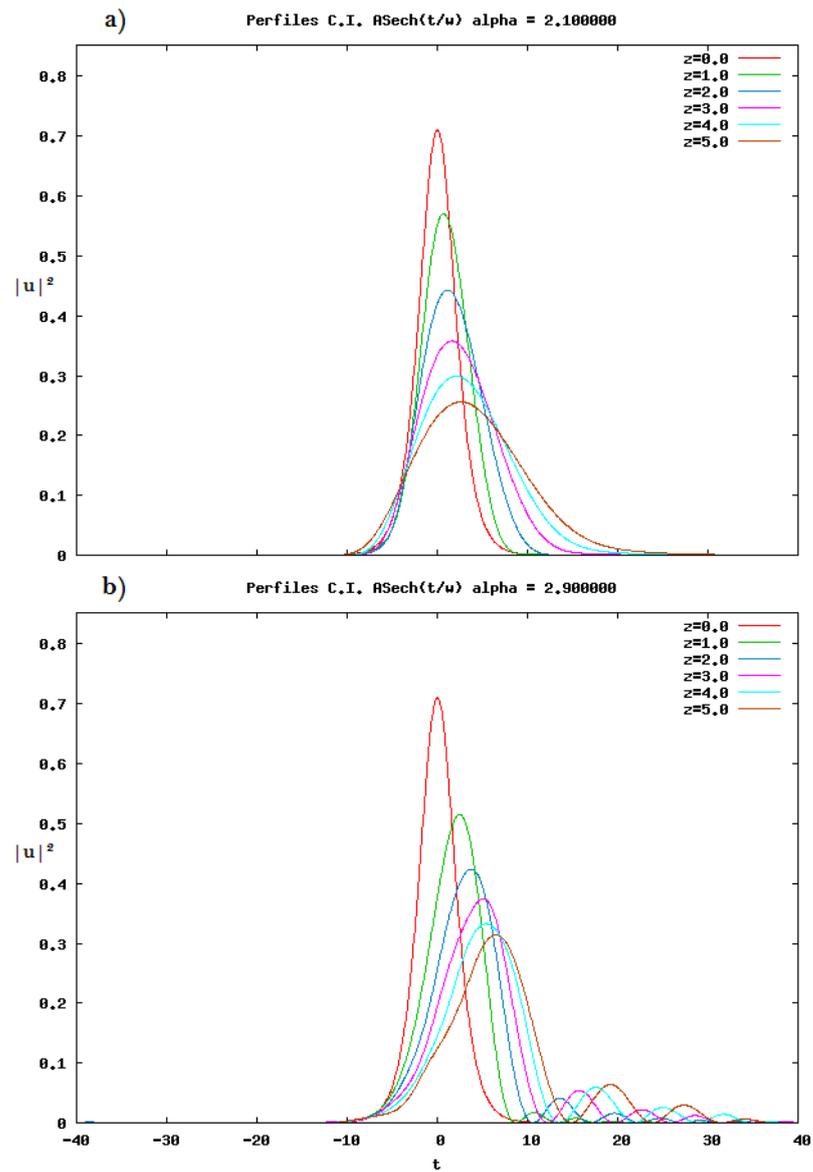
$$iu_z + \epsilon u_t + \gamma |u|^2 u = 0 \tag{3.32}$$

hay dos alternativas (9):

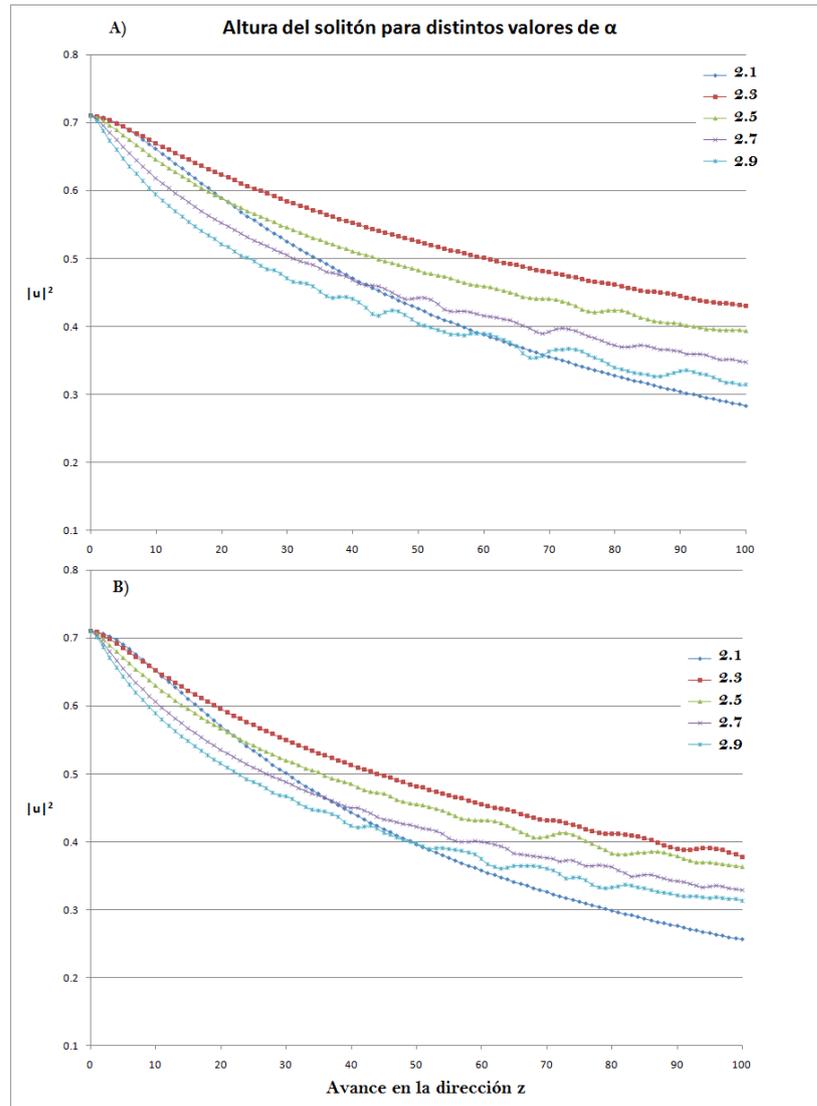
1.  $u$  puede medirse en unidades de campo eléctrico ( $V/m$ ), en cuyo caso  $\epsilon$  se mide en  $(s^2/m)$  y  $\gamma$  se mide en  $(m/V^2)$ ,



**Figura 3.9:** Gráfica de los perfiles  $|u|^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son  $A_0 = 0.842676$ ,  $w_0 = 2.62659$  y  $r_0 = 0$ , a)  $\alpha = 2.1$ ; b)  $\alpha = 2.9$ .



**Figura 3.10:** Gráfica de los perfiles  $|u|^2$ , para una condición inicial de la forma 3.28. Los parámetros usados son  $A_0 = 0.842676$ ,  $w_0 = 2.62659$  y  $r_0 = 0$ , a)  $\alpha = 2.1$ ; b)  $\alpha = 2.9$ .



**Figura 3.11:** Gráfica de la altura del solitón para distintos valores de  $\alpha$ . A) A través de la forma lineal, B) A través de la forma circular.

2.  $u$  puede medirse en  $(W^{\frac{1}{2}})$ , y en ese caso  $\gamma$  estará dado en  $(W^{-1}m^{-1})$

La alternativa más usual es considerar que  $|u|^2$  está en Watts, con lo cual la integral

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dt \quad (3.33)$$

tendrá unidades de energía, y podemos considerar que esta es la energía asociada al campo eléctrico de nuestros pulsos luminosos. Esta no es necesariamente la energía de todo el pulso, pero es fácil demostrar que si  $u(z, t)$  satisface la ecuación 3.32, entonces la integral 3.33 se conserva a lo largo del eje  $z$ , es decir,

$$\frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dt = 0$$

en lo que sigue usaremos la condición  $\frac{d}{dz} E$  para discernir qué modelos son físicamente aceptables (y cuáles no lo son).

Entonces nos preguntamos cómo se comporta la energía del solitón conforme avanza a lo largo de la fibra. Para ello debemos examinar el comportamiento de la derivada

$$\frac{d}{dz} E$$

esperando encontrar que su valor sea cero, lo cual significa que la energía se conserva.

Entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} E &= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 dt \\ \frac{d}{dz} E &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz} (uu^*) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (u_z u^* + u u_z^*) dt \end{aligned}$$

Donde hemos denotado con  $*$  las variables conjugadas. Ahora notemos lo siguiente: si definimos un número complejo  $Y = u_z u^*$ , entonces  $Y^* = u_z^* u$  y por lo tanto el integrando es  $Y + Y^* = 2\text{Re}[Y]$ , con lo que la integral queda como sigue:

$$\frac{d}{dz} E = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[u_z u^*] dt \quad (3.34)$$

Recordemos ahora los casos propuestos en las ecuaciones 3.16, y comencemos con el caso A) correspondiente a la ecuación

$$iu_z + \epsilon_2 D_p^\alpha u = 0$$

de donde podemos despejar  $u_z$  como sigue:

$$u_z = i\epsilon_2 D_p^\alpha u$$

Sustituyendo ahora en la ecuación 3.34 encontramos que:

$$\frac{d}{dz}E = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}[i\epsilon_2 u^* D_p^\alpha u] dt$$

Y usando la siguiente identidad de variable compleja  $\text{Re}[iY] = -\text{Im}[Y]$  entonces:

$$\frac{d}{dz}E = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}[\epsilon_2 u^* D_p^\alpha u] dt$$

Ahora analicemos por separado el producto  $u^* D_p^\alpha u$  separando  $u$  en parte real e imaginaria  $u = u_R + iu_I$ , entonces:

$$\begin{aligned} u^* D_p^\alpha u &= (u_R - iu_I)(D_p^\alpha u_R + iD_p^\alpha u_I) \\ u^* D_p^\alpha u &= u_R D_p^\alpha u_R + u_I D_p^\alpha u_I + i(u_R D_p^\alpha u_I - u_I D_p^\alpha u_R) \end{aligned}$$

con lo que:

$$\frac{d}{dz}E = -2\epsilon_2 \int_{-\infty}^{\infty} (u_R D_p^\alpha u_I - u_I D_p^\alpha u_R) dt \quad (3.35)$$

Ahora notemos que las dos integrales restantes son exactamente la misma cuando usamos la definición de  $D_p^\alpha$  expuesta en la ecuación 3.14, de hecho vamos a deducir una identidad general para la derivada par:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W p_k(\alpha) g(z, t - kh) dt$$

Intercambiando la suma y la integral y reemplazando  $k$  por  $-k$  obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t) W p_{-k}(\alpha) g(z, t + kh) dt$$

Y ahora realizando el siguiente cambio de variable  $t_1 = t + kh$  entonces  $dt_1 = dt$  y usando la relación de simetría para  $Wp$  tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(z, t_1 - kh) W p_k(\alpha) g(z, t_1) dt_1$$

con lo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(z, t) W p_k(\alpha) f(z, t - kh) dt$$

y por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} g D_p^\alpha f dt \quad (3.36)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.35 considerando a  $f = u_R$  y  $g = u_I$  tenemos que:

$$\frac{d}{dz}E = 0 \quad (3.37)$$

y por lo tanto la propuesta A) conserva la energía, lo que hace una propuesta viable para nuestro problema de pulsos ópticos propagándose a través de fibras ópticas.

Un análisis similar para la propuesta B) nos lleva a la siguiente expresión, la cual es la análoga a la ecuación 3.35:

$$\frac{d}{dz}E = -2\epsilon_2 \cos(\theta_p) \int_{-\infty}^{\infty} (u_R D_p^\alpha u_I - u_I D_p^\alpha u_R) dt - 2\epsilon_2 \sin(\theta_p) \int_{-\infty}^{\infty} (u_R D_p^\alpha u_R + u_I D_p^\alpha u_I) dt \quad (3.38)$$

donde  $\theta_p$  representa el argumento de la exponencial en cualquiera de las dos propuestas en la figura 3.5 . El primer sumando en 3.38 es cero debido a la expresión 3.36, pero el segundo no necesariamente es cero, razón por la cual no se conserva la energía y la propuesta B) no resultó útil en la sección anterior.

Un análisis similar para la propuesta C) nos lleva a la siguiente expresión la cual es la análoga a la ecuación 3.35 y 3.38 :

$$\frac{d}{dz}E = 2\epsilon_3 \int_{-\infty}^{\infty} (u_R D_i^\alpha u_R + u_I D_i^\alpha u_I) dt \quad (3.39)$$

sólo que en lugar de  $\epsilon_2$  tenemos  $\epsilon_3$  y en lugar de  $D_p^\alpha$  tenemos  $D_i^\alpha$ . Sin embargo el análogo de la ecuación 3.36 ahora es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_i^\alpha g dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g D_i^\alpha f dt \quad (3.40)$$

Esto debido a que la relación de simetría para  $W_i$  es  $W_i(\alpha) = -W_{i_{1-k}}(\alpha)$ . Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_i^\alpha f dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f D_i^\alpha f dt = 0$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.39 tenemos que:

$$\frac{d}{dz}E = 0 \quad (3.41)$$

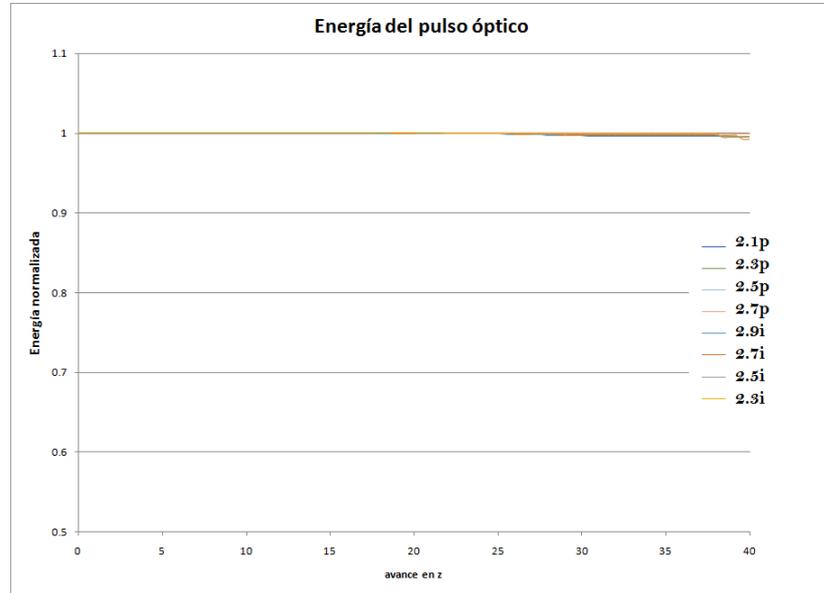
y por lo tanto la propuesta C) conserva la energía, lo que hace una propuesta viable para nuestro problema de pulsos ópticos propagándose a través de fibras ópticas.

Un análisis similar para la propuesta D) nos lleva a la siguiente expresión la cual es la análoga a la ecuación 3.39:

$$\frac{d}{dz}E = 2\epsilon_3 \cos(\theta_i) \int_{-\infty}^{\infty} (u_R D_i^\alpha u_I - u_I D_i^\alpha u_R) dt + 2\epsilon_3 \sin(\theta_i) \int_{-\infty}^{\infty} (u_R D_i^\alpha u_R + u_I D_i^\alpha u_I) dt \quad (3.42)$$

donde  $\theta_i$  representa el argumento de la exponencial en cualquiera de las dos propuestas de la sección anterior.

El segundo sumando en 3.42 es cero debido a la expresión 3.40, pero el primero no necesariamente es cero, razón por la cual no se conserva la energía y la cual explica porqué la propuesta D) no resultó útil en la sección anterior.



**Figura 3.12:** Gráfica de la energía del pulso óptico para las propuestas *A* y *B*

Finalmente nuestra propuesta *G*) modificada, considerada en la ecuación 3.29, también conserva la energía. Esto es natural pues es una combinación de los casos *A*) y *C*) los cuales sí conservan la energía.

Además de analizar esto desde el punto de vista analítico, también se realizó el cálculo numérico para averiguar si el programa realmente estaba conservando la energía, y para ello hicimos lo siguiente:

Primero se calculó la energía del pulso inicial ( $z = 0$ ) sumando sobre todo el intervalo en el eje del tiempo. Después se normalizó la energía tomando este valor como unidad. Y luego se calculó la energía para varios valores de  $z$  fijos, realizando esto un total de 200 veces desde  $z = 0$  hasta  $z = z_{fin}$ . Los resultados obtenidos para los casos *A* y *B* se muestran en la gráfica de la figura 3.12.

Vemos que efectivamente se conserva la energía conforme el pulso avanza a través de la fibra óptica.

Los resultados obtenidos para el caso *G* están en la gráfica de la figura 3.13.

En este caso el efecto de la frontera es más apreciable debido a que en estos casos se dejó correr la simulación hasta  $z = 100$ . Sin embargo se sigue apreciando la conservación de la energía y la solución a este problema consiste en alejar un poco más las fronteras.

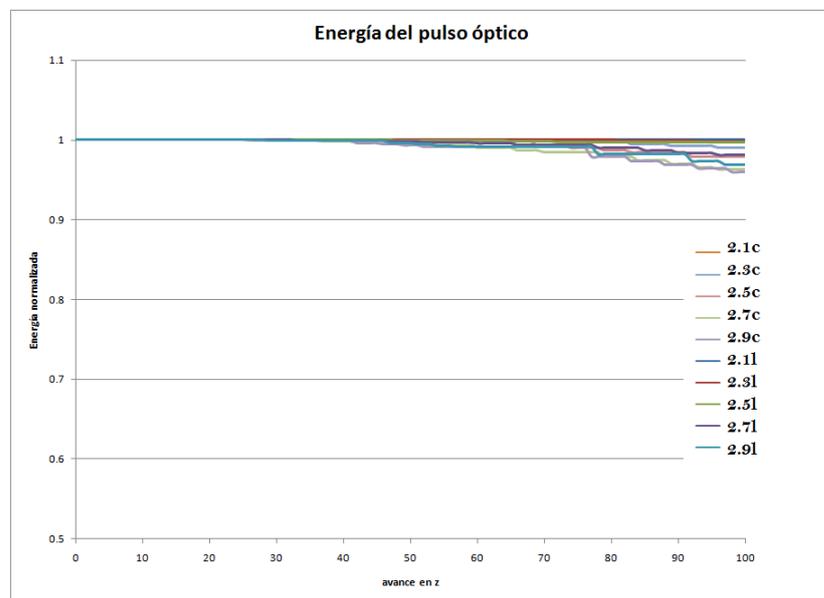


Figura 3.13: Gráfica de la energía del pulso óptico para la propuesta combinada.

# Solitones ópticos. Ecuación NLS

## completa

---

Finalmente estamos listos para estudiar la ecuación No Lineal de Schrödinger completa. En la sección anterior estudiamos los efectos de la parte lineal de la ecuación NLS y en esta sección veremos cómo los efectos no lineales compensan los efectos dispersores de tal manera que el pulso óptico se convierte en un solitón, ya que avanza a través de la fibra sin perder su amplitud.

### 4.1. NLS completa

Sabemos que la ecuación NLS generalizada completa (1):

$$iu_z + \epsilon_2 u_{tt} - i\epsilon_3 u_{3t} + u_{4t} + |u|^2 u - |u|^4 u = 0 \quad (4.1)$$

tiene soluciones tipo solitón de la forma (1):

$$u(z, t) = A_0 \operatorname{sech} \left( \frac{t - a_0 z}{w_0} \right) e^{i(q_0 z + r_0 t)} \quad r_0 = \frac{\epsilon_3}{4}$$

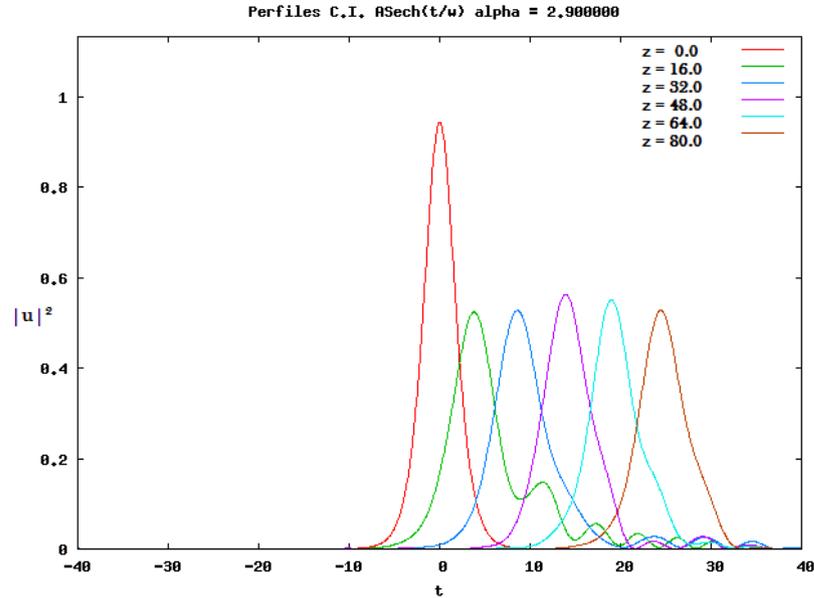
$$A_0 = \left( \frac{6}{5} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( 2\epsilon_2 + \frac{3\epsilon_3^2}{4} \right) 24^{-1/2} \right]^{1/2} \quad w_0 = \frac{24^{1/4}}{A_0} \quad (4.2)$$

Entonces nosotros esperamos que la ecuación:

$$iu_z + \epsilon_2 c(\alpha)(-{}_t D_p^\alpha)u - i\epsilon_3 d(\alpha)(-{}_t D_i^\alpha)u + u_{4t} + |u|^2 u - |u|^4 u = 0 \quad (4.3)$$

también tenga solitones y que sean muy parecidos a los de la ecuación 4.1.

Para resolver el problema de la ecuación NLS completa hemos utilizado el mismo programa que antes, con la modificación de que hemos agregado los términos no lineales.



**Figura 4.1:** Gráfica de los perfiles  $|u|^2$ , para una condición inicial de la forma 4.4,  $\alpha = 2.9$ .

Además, siguiendo la idea del artículo de J. Fujioka, agregamos un término no lineal intermedio entre  $|u|^2u$  y  $|u|^4u$  de la forma:

$$-\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}$$

el cual sirve para restablecer el balance entre los términos dispersivos y los términos no lineales.

Realizamos pruebas para  $\alpha = 2.1, 2.3, 2.5, 2.7$  y  $2.9$ , de las cuales la que tiene más posibilidades de ser un solitón es la ecuación con  $\alpha = 2.9$

Los resultados mostrados en la gráfica de la figura 4.1 se obtienen con  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  de forma circular y una condición inicial de la misma forma usada en el capítulo anterior:

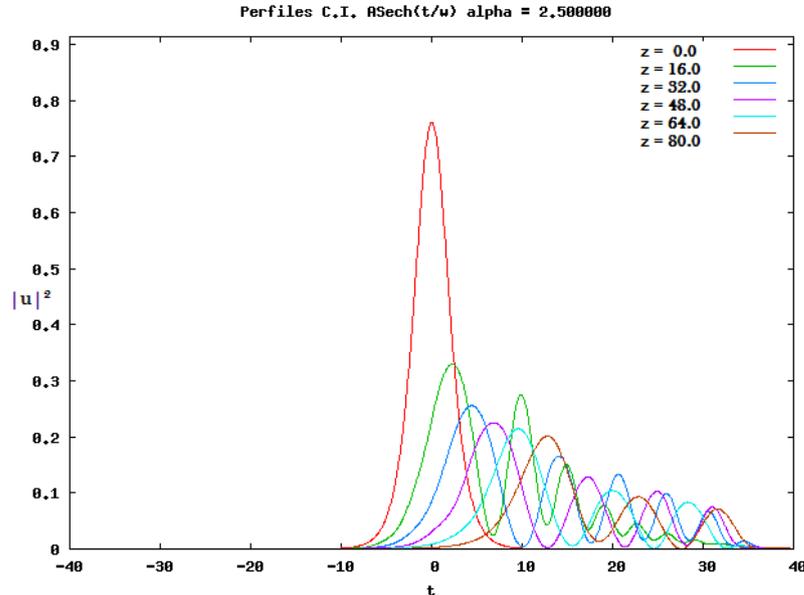
$$u(0, t) = A_0 \operatorname{sech}\left(\frac{t}{w_0}\right) e^{ir_0 t} \quad (4.4)$$

cuyos parámetros  $A_0$ ,  $w_0$  y  $r_0$  se obtienen de la solución exacta 4.2.

Algo que no era de esperarse es que el resto de las soluciones con  $\alpha = 2.1, 2.3, 2.5, 2.7$  se destruyan inmediatamente, todas de forma similar al caso que se muestra en la figura 4.2.

Otro gráfico que nos brinda información relevante acerca del comportamiento de esta ecuación es el que se muestra en la gráfica 4.3. Aquí es evidente que la altura del solitón decae conforme avanza en la fibra, y además su energía también disminuye debido a que la pierde en forma de radiación.

Por todo lo anterior removimos el término no lineal intermedio, es decir estamos resolviendo la ecuación 4.3 tal cual esta escrita, realizamos las pruebas con la condición de solitón exacto.



**Figura 4.2:** Gráfica de los perfiles  $|u|^2$ , para una condición inicial de la forma 4.4,  $\alpha = 2.5$ .

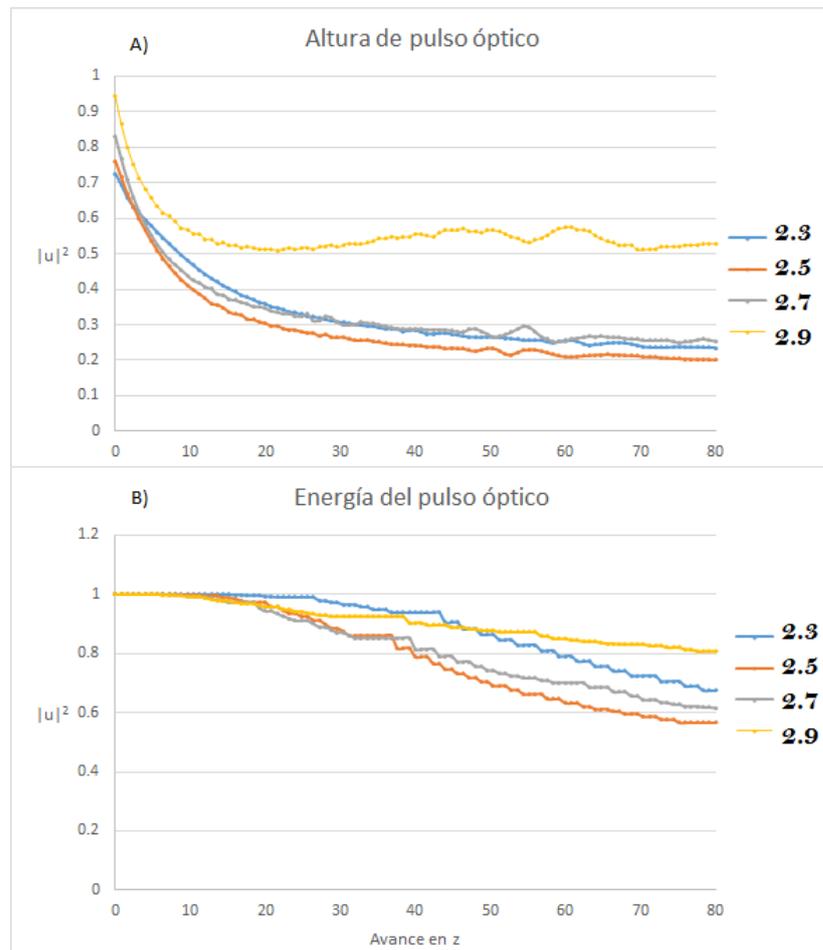
Hecho esto, encontramos satisfactoriamente que los pulsos ópticos sin este término no lineal (intermedio) sí se mantienen, es decir, la ecuación 4.3 sí tiene soluciones tipo solitón. Otra cosa interesante es que ambas formas de escribir los parámetros  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  tanto la circular como la lineal, presentan soluciones de solitón.

Los valores de  $\alpha$  que sí presentaron soluciones de solitón son 2.5, 2.7 y 2.9, mientras que las soluciones para 2.1 y 2.3 son un poco “extrañas”.

La gráfica de la figura 4.4 muestra los resultados para el caso  $\alpha = 2.9$  con los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  de forma circular y lineal respectivamente.

Los casos 2.5 y 2.7 son similares, y para observar las similitudes y diferencias observamos los gráficos de altura y energía del pulso óptico, los cuales se muestran en la gráfica de la figura 4.5. En todos ellos vemos que la altura oscila antes de estabilizarse, de hecho en el momento en que hemos detenido la simulación el solitón aún sigue oscilado en altura. Además se observa que el pulso óptico radía el exceso de energía que tiene, para después estabilizarse y propagarse como un solitón. Hay un caso interesante que salta a la vista de inmediato para el caso lineal con  $\alpha = 2.5$  en el cual vemos que la energía decae hasta el 90%, lo cual se debe a que esta solución emite mayor radiación y esto hace que el pulso se disperse y pierda energía.

Otro aspecto interesante es el movimiento hacia la derecha que presenta el solitón, el cual es diferente para todos los casos. Realizamos un gráfico de avance en  $t$  vs avance en  $z$ , y algo interesante es que los puntos ajustan a una línea recta en la cual al hacer un ajuste de mínimos cuadrados y ajustar una línea recta, presenta una correlación del 99.9%. Lo curioso aquí es que esta recta tiene una pendiente distinta para todos los valores de  $\alpha$ . Además notamos que el caso para  $2.5L$ , el cual ya habíamos visto



**Figura 4.3:** Gráfica A) altura ( $|u|^2$ ) del pulso óptico. B) Energía del pulso óptico. Resultados para distintos valores de  $\alpha$

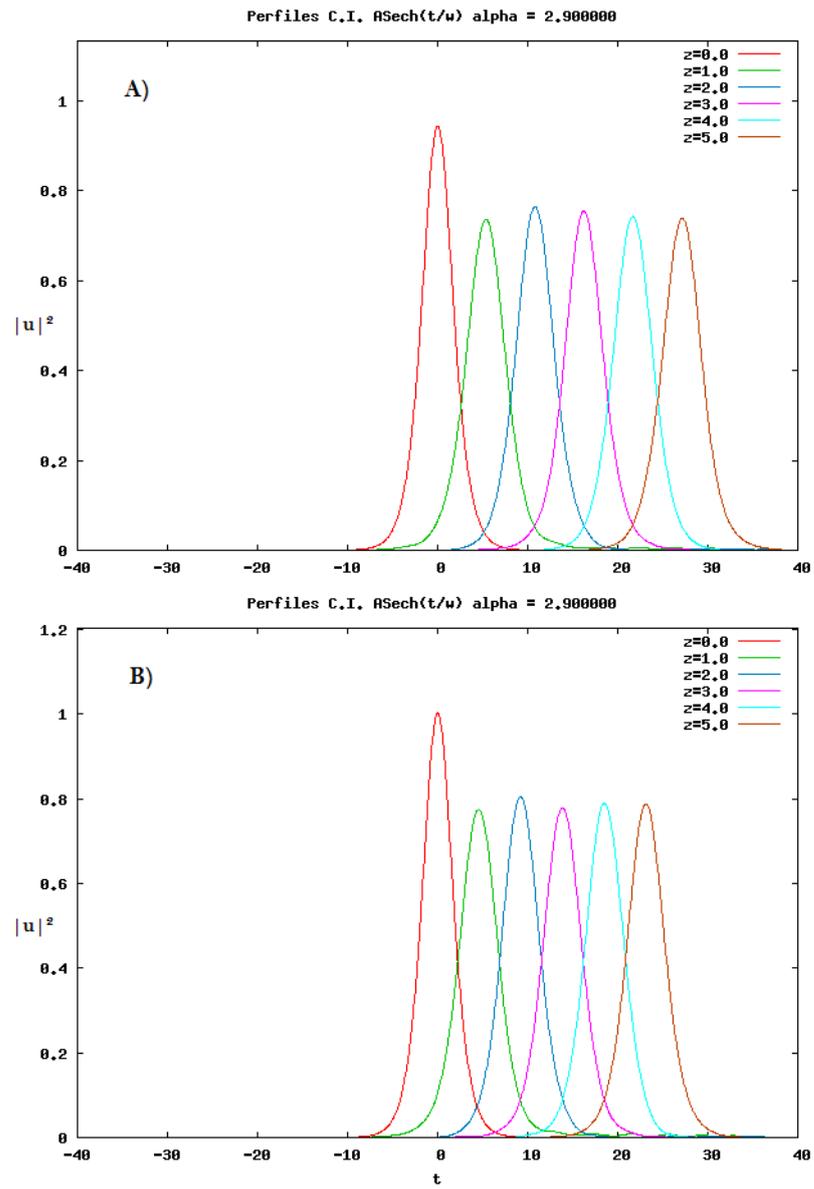


Figura 4.4: Gráfica A) forma circular B) forma lineal de los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$ .

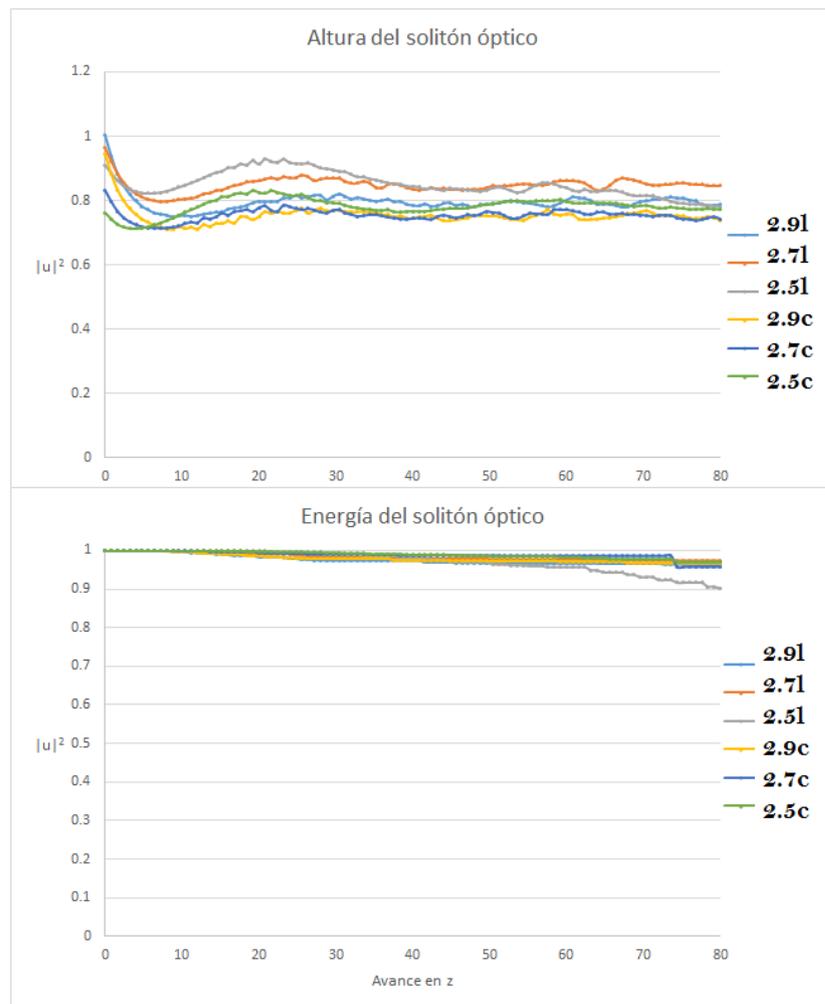
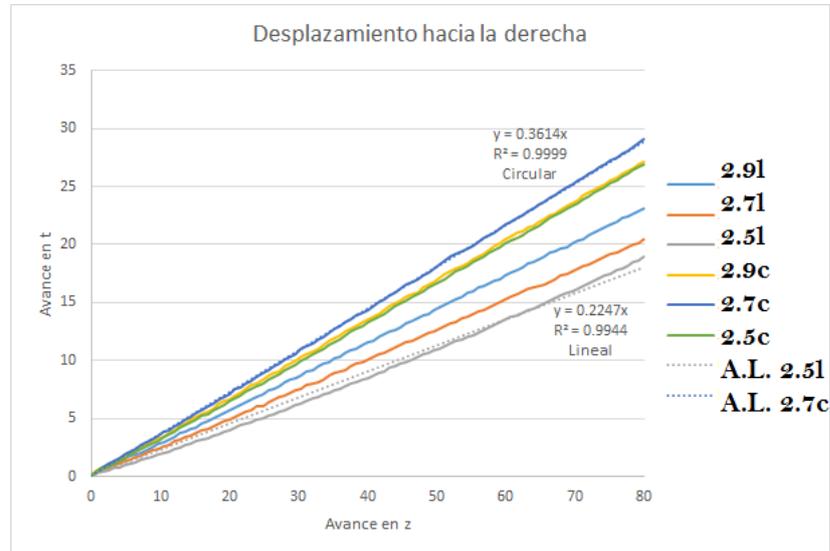


Figura 4.5: Gráfica A) Altura del solitón óptico B) Energía del solitón óptico.



**Figura 4.6:** Gráfica de la relación que existe entre el avance en  $z$  con el avance en  $t$ .

que es una solución que emite mayor radiación, en el gráfico de la energía, también es notable en estos gráficos de avance del solitón, pues justo este valor presenta la menor correlación y además los puntos se separan de la línea de tendencia como se muestra en la gráfica de la figura 4.6

Regresemos a los casos en los que  $\alpha$  es 2.3 y 2.1, los cuales llamamos extraños.

La gráfica de la figura 4.7 muestra el resultado para  $\alpha = 2.3$ , que nos recuerda a los llamados solitones de orden superior, los cuales al avanzar se separan en dos picos para luego regresar a uno y volverse a separar, avanzando de forma periódica. Los solitones de orden superior aparecen en la NLS normal, y en nuestro caso apareció en un problema con una ecuación fraccionaria, podríamos decir que es un solitón de orden superior fraccionario.

La gráfica de la figura 4.8 muestra el resultado para  $\alpha = 2.1$ , la cual es más rara aún, pues el solitón no se desplaza a la derecha notablemente como en los valores cercanos a  $\alpha = 3$  y además aún cuando su altura oscila, su forma no se mantiene.

Algo interesante para realizar en algún futuro es estudiar a detalle el comportamiento de estas soluciones extrañas, y tratar de dar una explicación que justifique este comportamiento, además sería interesante observar que pasa en los casos intermedios, pues la solución para  $\alpha = 2.1$  es diferente a la solución para  $\alpha = 2.3$ .

Una vez que encontramos las soluciones de solitón para distintos valores de  $\alpha$  realizamos algunas variantes a la condición inicial, para ver como reacciona el solitón a estos cambios.

Un caso de interés es ver cómo afectan las condiciones de frontera al solitón. Para ello tomamos la solución solitónica con los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  con  $\alpha = 2.7$  y acercamos las fronteras de tal manera que la radiación emitida por el solitón alcance al

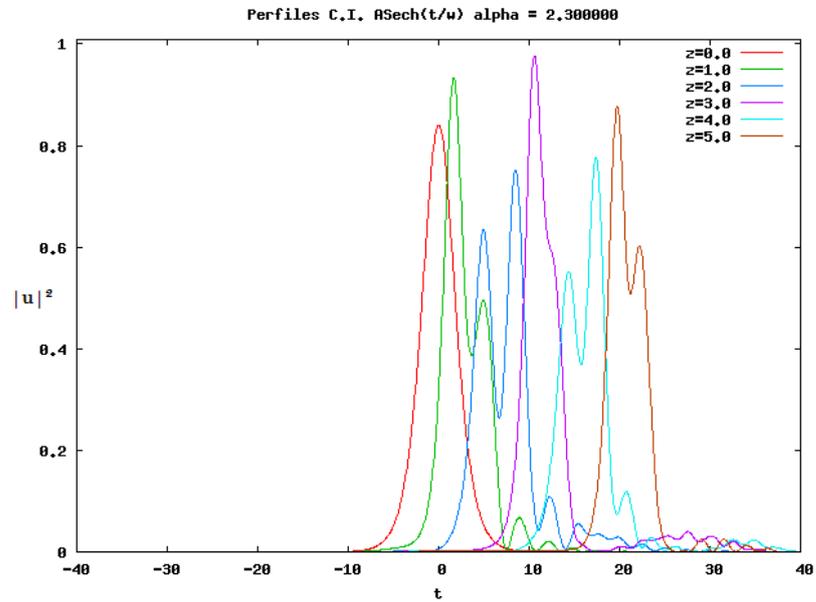


Figura 4.7: Gráfica de los perfiles del solitón para  $\alpha = 2.3$ .

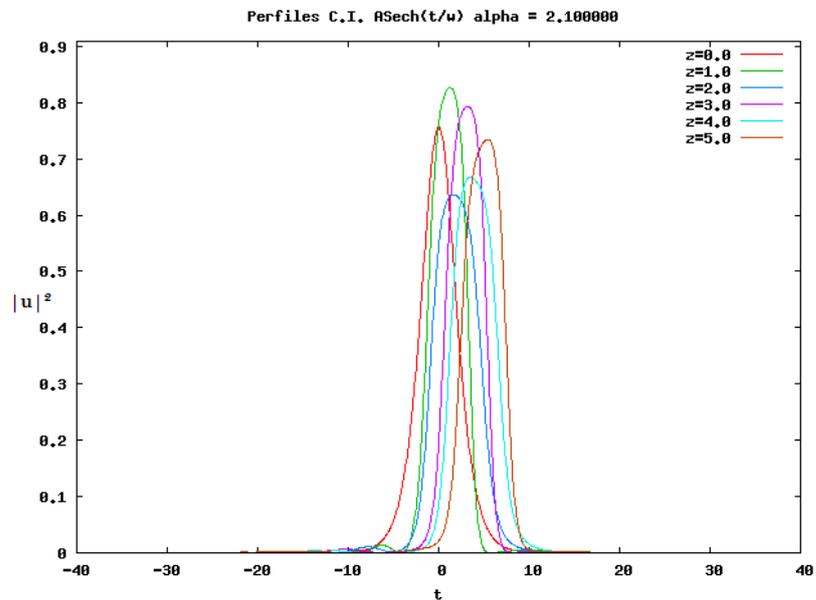
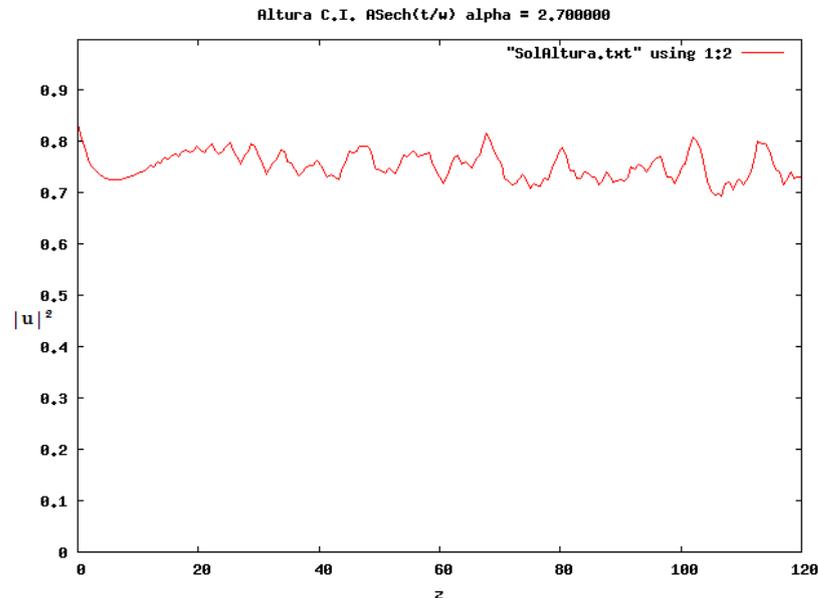


Figura 4.8: Gráfica de los perfiles del solitón para  $\alpha = 2.1$ .



**Figura 4.9:** Gráfica de las alturas del solitón al sentir la radiación del solitón que viene detrás,  $\alpha = 2.7$ .

solitón que está delante de él, y ahora dejamos correr la simulación hasta  $z = 120$ .

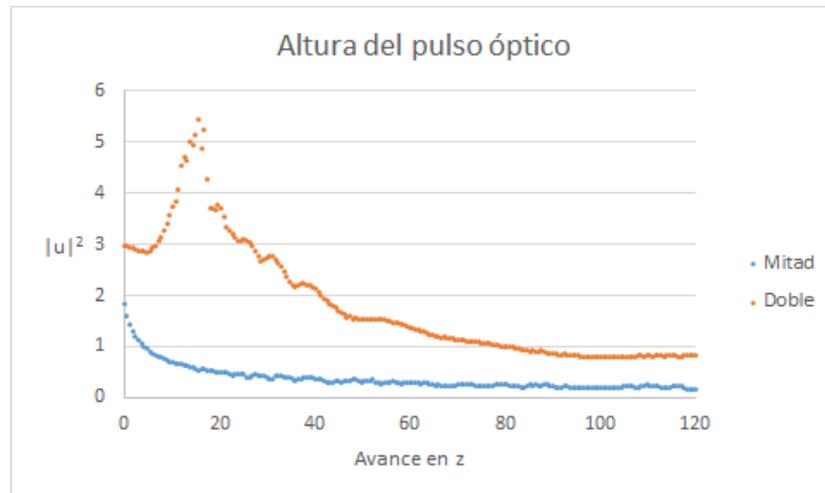
Los resultados para la altura del solitón se muestran en la gráfica 4.9. En ella notamos que el solitón se ve afectado en las oscilaciones que realiza conforme avanza a través de la fibra, pero no se destruye aún cuando se ve afectado por la radiación emitida. Esto también implica que el solitón no resuena con la radiación y por eso se mantiene.

Pensando en que lo que importa es la forma del solitón, es decir, la relación que existe entre el ancho y la altura, realizamos pruebas aumentando la amplitud y el ancho de la condición inicial al doble y disminuyéndolas a la mitad. Sin embargo en ambos casos el solitón se destruye, (en el gráfico se han multiplicado las alturas del caso en que esta disminuido a la mitad, para que se observe con más detalle el decaimiento), ver gráfica de la figura 4.10.

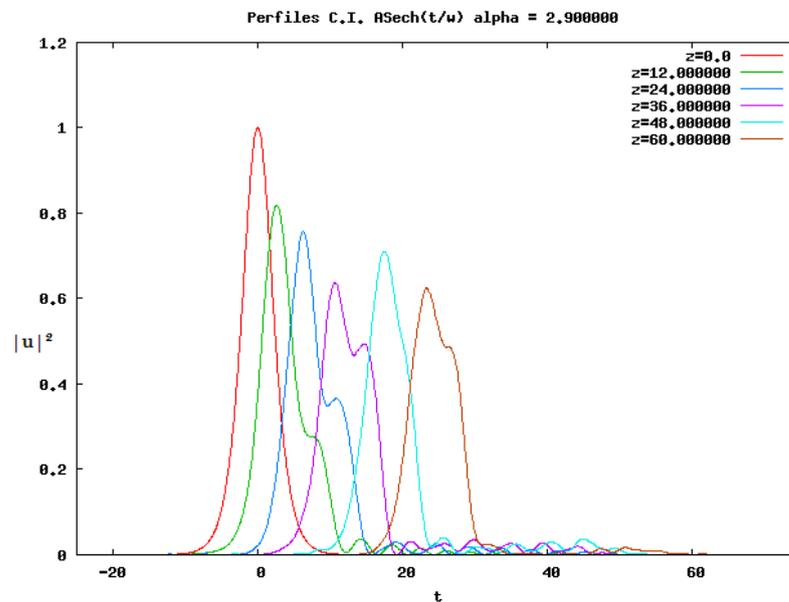
Esto implica que no es únicamente la forma del solitón lo que importa, también el tamaño es esencial.

Otro caso de interés es ver que le pasa al solitón si aumentamos la altura inicial (ver gráfica de la figura 4.11). Aquí una vez más observamos que el solitón tiende a dividirse en 2, es decir, este exceso de energía hace inestable al solitón lo cual induce una división del pulso.

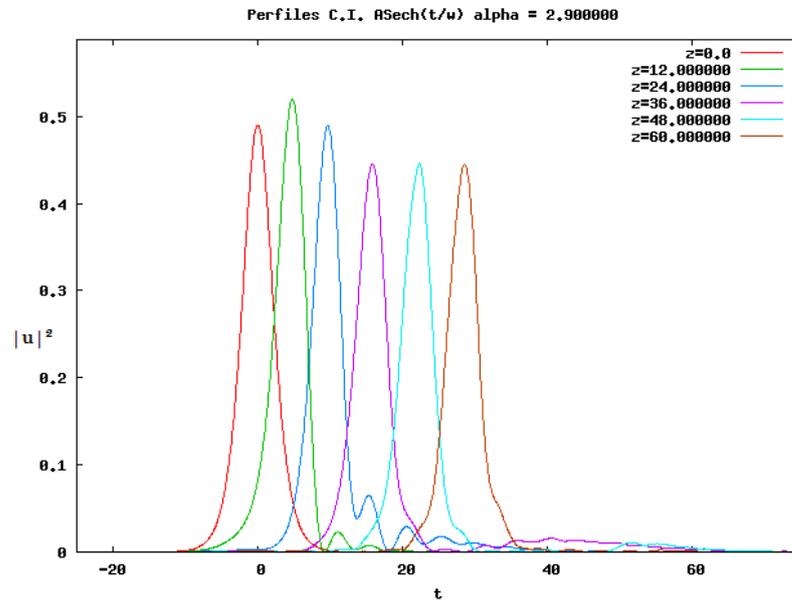
Y finalmente observamos el caso en el que el solitón tiene disminuida la altura inicial, (ver gráfica de la figura 4.12). Aquí observamos que el solitón igual que en el caso sin la altura disminuida emite la energía que no necesita en forma de radiación



**Figura 4.10:** Gráfica de las alturas del solitón para los casos en que la altura y el ancho del solitón se ve aumentada al doble o disminuida a la mitad.



**Figura 4.11:** Gráfica de los perfiles del solitón para el caso en que la altura es mayor.



**Figura 4.12:** Gráfica de los perfiles del solitón para el caso en que la altura es menor.

para después mantenerse. Esto quiere decir que existen solitones a distintas alturas.

## Conclusiones

---

En esta sección hacemos una recopilación de todos los resultados obtenidos en este trabajo.

1. Los coeficientes en las derivadas de Ortigueira satisfacen las siguientes relaciones de simetría:

$$Wp_k(\alpha) = Wp_{p-k}(\alpha)$$

y

$$Wi_k(\alpha) = -Wi_{i_1-k}(\alpha)$$

2. Los coeficientes en las derivadas de Ortigueira, satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$Wp_k(\alpha) = \frac{(-1)\left(\frac{\alpha}{2} - k + 1\right)}{\left(\frac{\alpha}{2} + k\right)} Wp_{k-1}(\alpha)$$

y

$$Wi_k(\alpha) = \frac{(-1)\left(\frac{\alpha+1}{2} - k + 1\right)}{\left(\frac{\alpha-1}{2} + k\right)} Wi_{k-1}(\alpha)$$

3. Las derivadas de Ortigueira satisfacen las siguientes relaciones integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_p^\alpha g dt = \int_{-\infty}^{\infty} g D_p^\alpha f dt$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f D_i^\alpha g dt = - \int_{-\infty}^{\infty} g D_i^\alpha f dt$$

4. La *derivada par de Ortigueira*  ${}_t D_p^\alpha$  funciona de forma aceptable en una vecindad alrededor del entero par más cercano, y no funciona para enteros impares, además esta derivada permite la conservación de la energía.
5. La *derivada par de Ortigueira* con el coeficiente complejo  $(-1)_t^{\frac{\alpha}{2}} D_p^\alpha$  NO funciona de forma aceptable, y no permite la conservación de la energía.

---

6. La *derivada impar de Ortigueira*  ${}_tD_i^\alpha$  funciona de forma aceptable en una vecindad alrededor del entero impar más cercano, y no funciona para enteros pares, además esta derivada permite la conservación de la energía.

7. La *derivada impar de Ortigueira* con el coeficiente complejo  $(-1)_t^{\frac{\alpha-1}{2}} D_p^\alpha$  NO funciona de forma aceptable, y no permite la conservación de la energía.

8. La combinación de la derivada par con la derivada impar por separado incluyendo un factor de peso, describe de forma consistente la dispersión de pulsos ópticos mediante la ecuación:

$$iu_z + \epsilon_2 c(\alpha) (-{}_tD_p^\alpha) u - i\epsilon_3 d(\alpha) (-{}_tD_i^\alpha) u = 0$$

9. Tanto la forma lineal como la forma circular de escoger los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  describen la dispersión de pulsos ópticos, pero la forma circular presenta una dispersión mayor. Forma lineal:

$$c(\alpha) = 3.0 - \alpha \quad d(\alpha) = \alpha - 2.0;$$

Forma circular:

$$c(\alpha) = -\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \quad d(\alpha) = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right);$$

10. Al introducir el término  $-\sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)}$  a la ecuación NLS generalizada completa fraccionaria:

$$iu_z + \epsilon_2 c(\alpha) (-{}_tD_p^\alpha) u - i\epsilon_3 d(\alpha) (-{}_tD_i^\alpha) u + u_{4t} + |u|^2 u - \sin(\alpha\pi)|u|^{2(\alpha-1)} - |u|^4 u = 0$$

el pulso óptico se destruye para cualquier  $\alpha$  entre 2 y 3.

11. La ecuación NLS generalizada completa fraccionaria:

$$iu_z + \epsilon_2 c(\alpha) (-{}_tD_p^\alpha) u - i\epsilon_3 d(\alpha) (-{}_tD_i^\alpha) u + u_{4t} + |u|^2 u - |u|^4 u = 0$$

Sí tiene soluciones tipo solitón, las cuales son muy claras cuando  $\alpha$  está entre 2.5 y 2.9, y un poco dudosas pero con posibilidades de ser solitónicas para  $\alpha = 2.1$  y 2.3

12. Tanto la forma lineal como la forma circular de escribir los coeficientes  $c(\alpha)$  y  $d(\alpha)$  presentan soluciones solitónicas.

13. El desplazamiento a la derecha del solitón es distinto para todas los valores de  $\alpha$  y la relación entre el avance en  $t$  vs el avance en  $z$  ajusta a una línea recta con una correlación del 99.9% para las soluciones solitónicas, mientras que en los casos que el pulso no es estable o se destruye, la correlación disminuye.

14. Algunas condiciones iniciales presentan un comportamiento similar a los solitones de orden superior como en el caso de la NLS normal, los cuales hemos llamado solitones de orden superior fraccionarios.

- 
15. Para el caso de  $\alpha = 2.1$  se encontró un comportamiento que parece solitón en el sentido que no se destruye, pero su forma no se mantiene.
  16. La radiación emitida no resuena con el solitón.
  17. Existen solitones a distintas alturas.

Los resultados anteriores nos revelan muchos aspectos sobre el funcionamiento de las derivadas fraccionarias de Ortigueira. Con estos resultados estamos en condiciones de escribir modelos fraccionarios aceptables, que pueden describir la evolución de pulsos luminosos en fibras ópticas. Un resultado particularmente interesante es que es posible construir una ecuación NLS fraccionaria con estas derivadas, que permite la propagación de solitones, sin la necesidad de añadir términos no lineales adicionales. Esto hace que estas derivadas sean operadores muy interesantes desde el punto de vista de los solitones ópticos, por lo cual sería interesante continuar su estudio. Sería de especial interés, investigar si es posible deducir ecuaciones NLS fraccionarias que contengan estas derivadas a partir de lagrangianas apropiadas, y si eso fuera posible, entonces tratar de formular un teorema de Noether fraccionario aplicable a ese tipo de lagrangianas. Estas posibilidades sugieren una línea de investigación prometedora, que merecería ser explorada.

## Bibliografía

---

- [1] J. Fujioka, A. Espinosa y R.F. Rodríguez, Phys. Lett. A **374** (2010) 1126 – 1134. [II](#), [36](#)
- [2] A.K. Grünwald, Z. Angew. Math. Phys. **12** (1867) 441 – 480. [II](#)
- [3] A.V. Letnikov, Mat. Sb. **3** (1868) 1 – 66. [II](#)
- [4] M. Duarte Ortigueira, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2006** (2006) 1 – 12. [II](#), [4](#), [12](#), [15](#)
- [5] A. Hasegawa and F. Tappert, Appl. Phys. Lett **23** (1973) 142. [1](#), [2](#)
- [6] K.C. Kao and G.H. Hockham, Proc. IEE **113** (1966) 1151. [1](#)
- [7] T. Miya, Y. Terunuma, T. Hosaka and T. Miyoshita, Electron. Lett. **15** (1979) 106. [1](#)
- [8] L.F. Mollenaur, R.H. Stolen and J.P. Gordon, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1095. [1](#), [2](#)
- [9] J.Fujioka, *NLS: Una introducción a la ecuación no lineal de Schrödinger*, Vol. 4 de la serie FENOMECC, UNAM. [1](#), [27](#)
- [10] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Thrid Edition, Academic Press, 2001. [2](#)
- [11] L.P. Pitaevskii, J. Exptl. Theoret. Phys. (USSR)**40** (1961) 646 [Sov. Phys. JETP **13** (1961) 453]. [2](#)
- [12] V.E. Zakharov y A.B. Shabat, Zh. Eksp. Teor. Phys.**61** (1971) 118 [Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62]. [2](#)
- [13] P.D. Lax, Commun. Pure Appl. Math. **21** (1968) 467. [2](#)
- [14] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura, Phys.Rev. Lett. **19** (1967) 1095. [2](#)
- [15] V.I. Karpman, Phys. Lett. A **193** (1994) 355. [3](#)

- [16] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava y J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006 [4](#)
- [17] Jeff Hecht, *Understanding Fiber Optics*, Prentice Hall, New Jersey, 1999 [5](#)
- [18] S. Kumar and M.J. Deen, *Fiber Optic Communications*, John Wiley & Sons, Chichester, 2014 [5](#)
- [19] E. Hecht and A. Zajac, *Optics*, Addison Wesley, Reading MA, 1974 [5](#)
- [20] A. Lipson, S.E. Lipson and H. Lipson, *Optical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2011 [6](#)
- [21] F. Riewe, Phys. Rev. E **55** (1997) 3581 [12](#)
- [22] E.M. Rabei, D.M. Tarawneh, S.I. Muslih, D. Baleanu, J. Vibration Control **13** (2007) 1239
- [23] M. Klimek, Czechoslovak J. Phys. **52** (2002) 1247 [12](#)
- [24] N. Laskin, Phys. Rev. E **62** (2000) 3135 [12](#)
- [25] N. Laskin, Phys. Lett. A **268** (2000) 298
- [26] N. Laskin, Phys. Rev. E **66** (2002) 056108 [12](#)
- [27] B.A. Carreras, V.E. Lynch, G.M. Zaslavsky, Phys. Plasmas **8** (2001) 5096 [12](#)
- [28] V.V Uchaikin, J. Exper. Theor. Phys. **97** (2003) 810 [12](#)
- [29] Z.M. Odibat, Phys. Lett. A **372** (2008) 1219 [12](#)
- [30] S.Z. Rida, H.M. El-Sherbiny, A.A.M. Arafa, Phys. Lett. A **372** (2008) 553 [12](#)
- [31] P.K.A. Wai, H.H. Chen and Y.C. Lee, *Radiations by solitons at the zero group-dispersion wavelength of single-mode optical fibers*, Phys. Rev. A **41** (1990) 426 [24](#)
- [32] N.N.Akhmediev, A.V. Burgak and M.Karlsson, *Radiationless optical solitons with oscillating tails*, Optics Communications **110** (1994) 540
- [33] M.Karlsson and A. Höök, *Soliton-like pulses governed by four-order dispersion in optical fibers*, Optics Communications **104** (1994) 303 [24](#)