



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

No Markovianidad en Cadenas de Espines y Una Nueva Caracterización

TESIS

Que para obtener el grado de: Maestro en Ciencias (Física)
Presenta: David Dávalos González
Director de tesis: Dr. Carlos Pineda

Miembros del Comité Tutoral:
Dr. Carlos Pineda, Dr. Thomas Gorin, y Dr. Pablo Barberis
México D. F., 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

.... nos movemos dentro de dos infinitos concretos: el infinito de los recursos naturales y el infinito del progreso en dirección al futuro..... los dos infinitos son ilusorios....

"La dignidad de la tierra".

Leonardo Boff.

Agradecimientos

Les quiero dar sinceros agradecimientos a mis padres por su infinito apoyo a mi desarrollo profesional, a mis hermanos por siempre estar atentos. A todas las personas que me acompañaron estos dos años y medio. A Carlos por sus invaluable enseñanzas, su amistad y su cuasi-infinita paciencia. A mi compañera de vida, Lorena. A mi estimadísimo amigo Alvaro. A Edgar por sus consejos y sus productivas charlas. A Thomas Gorin, Thomas Seligman, Rolando Castillo, David Sanders, Luis Benet, Diego Wisniacki, Debora Contreras, Ignacio García-mata, Gustavo López, Andrei Klimov, Sergei Chumakov, Bobadilla, Nephtalí, Nacho, Arturo, Antonio, a mi sobrino Thomas y a mis amigos de parranda. Gracias a todos.

Agradezco los apoyos brindados por Conacyt y DGAPA-IN-111015.

RESUMEN

En el presente trabajo se abordan dos proyectos concernientes al estudio de la no Markovianidad cuántica. En la primera parte se estudia la interacción de un qubit con un ambiente cuya dinámica es bien conocida. Este último es una cadena de espines $1/2$ con interacción Ising, pateada por pulsos ultracortos de campo magnético transversal. Se estudia la relación de la No Markovianidad con la localización inicial de los estados y con su dimensión efectiva. En la segunda parte del trabajo se proponen medidas de no Markovianidad que lidian con algunos de los problemas que tienen las medidas más conocidas, además que a una de estas nuevas medidas se le asocia una tarea física en concreto, la de guardar información de manera segura para que esta pueda ser recuperada posteriormente. Se utiliza como modelo de prueba el de Jaynes-Cummings no Markoviano. Al inicio del trabajo se introduce un marco preliminar de manera breve donde se presenta teoría de sistemas abiertos cuánticos, operaciones cuánticas, Markovianidad y medidas de no Markovianidad, además de la introducción de conceptos usados a lo largo del trabajo.

Contenido

1. Introducción	1
2. Preliminares	5
2.1. Sistemas abiertos y canales cuánticos	5
2.2. Canales CP-divisibles, ecuación de Lindblad	7
2.3. Medidas de no-Markovianidad	9
2.4. Algunas Herramientas	11
3. Cadenas de espines y no-Markovianidad	15
3.1. Cadena de espines	15
3.2. Regímenes dinámicos	17
3.3. Cadena de espines como un ambiente mixto	20
3.4. Estados de espín coherentes	22
3.5. Resultados	24
3.6. Discusión	41
4. Hacia una nueva medida de no-Markovianidad	45
4.1. Definición y exploración de algunos casos limite	45
4.2. Modelo Jaynes Cummings y resultados	50
5. Conclusiones	57
Appendices	
A. Artículo	59
Bibliography	69

Capítulo 1

Introducción

El estudio de sistemas cuánticos abiertos, sistemas cuánticos estocásticos, así como el caos en sistemas cuánticos, ha sido de vital importancia en áreas como información, computo y control cuántico. Una aproximación común en el esquema de sistemas abiertos es la bien conocida aproximación de Born-Markov, que da origen a dinámica cuántica Markoviana y a ecuaciones maestras tipo Lindblad. Sin embargo esta no reproduce el comportamiento de muchos sistemas cuánticos. Por lo tanto preguntas validas en este contexto son: *que tanto se desviá una dinámica dada de poder ser descrita como un proceso Markoviano?*, *Lo podemos cuantificar?*. A pesar de no poder llevar de manera integra la definición de Markovianidad al contexto cuántico, muchas definiciones y medidas de no Markovianidad (NM) han sido propuestas, basadas en la violación de la *CP-divisibility* [RHP10], en la no monotonicidad de la *trace distance* [BLP09] entre estados iniciales. Más recientemente, fueron propuestas medidas basadas en la no monotonicidad de capacidades cuánticas de información [BCM14]. Debido a la inevitable perturbación del sistema a la hora de recoger información de un sistema cuántico, no existe un camino fácil para definir no-Markovianidad cuántica. Trabajos donde se discuten a fondo algunas de estas definiciones y teoremas concernientes a Markovianidad cuántica y clásica son [VSL⁺11, ARHP14]. En este trabajo se abordan dos proyectos concernientes a la no Markovianidad, en el primero de ellos se estudia la NM de un qubit inducida por la interacción con un ambiente cuántico cuyos regímenes son conocidos y van desde la dinámica integrable hasta la caótica, utilizando la medida Breuer, Rivas y Plenio [BLP09]. Se estudia la NM y su relación con la localización inicial de los estados, su dimensión efectiva así como de su relación con el caos (existen trabajos donde ya se ha revisado esto último para sistemas con contraparte clásica

[icvcvPGM11, GMPW14]). En el segundo se proponen dos medidas de no Markovianidad que resuelven algunos de los problemas que tienen las medidas conocidas. Una de ellas es relacionada con una tarea física, en particular la de guardar información de manera segura para que esta sea recuperada posteriormente. Como modelo para probar las medidas propuestas y compararlas con algunas de las ya conocidas, utilizamos el modelo de Jaynes-Cummings no Markoviano [BP07, JC63]. Respecto al primer proyecto, cabe mencionar que el sistema que tomamos como ambiente es la cadena pateada espines $1/2$ propuesta por T. Prosen para estudiar correlaciones [PRO00, Pro98], de esta forma se construye el canal cuántico, parametrizado por los estados de espín coherentes.

Sobre la estructura de la tesis

El trabajo esta organizado como sigue, en el capítulo 2, se revisa la teoría de sistemas abiertos cuánticos y se introduce de manera breve el concepto de *complete positive trace-preserving maps*, que describe el modelo matemático general para describir sistemas cuánticos. Se revisa el concepto de *CP-divisibility* que constituye una definición rigurosa de Markovianidad cuántica, además que discutiremos algunas de las medidas que existen. En este capítulo también se resumirán algunas de las herramientas mas importantes que se usarán a lo largo del trabajo, las cuales son Teoría de matrices aleatorias (RMT por sus siglas en ingles), que como se verá mas adelante, ha formado parte fundamental del estudio de sistemas cuánticos caóticos. Se hablará brevemente del *Loschmidt echo* ó fidelidad, que además de ayudar a caracterizar el caos, este aparece directamente relacionado con la NM a lo largo del trabajo. Se discutirá también el *Inverse Participation Ratio* (IPR), que sirve como medida de la localización de los estados en alguna base especifica del espacio de Hilbert en cuestión.

En el capítulo 3 se describe el modelo de la cadena pateada de espines $1/2$, que como se dijo anteriormente, esta juega el papel de ambiente de un qubit, la interacción es de tal forma que se induce sobre este un canal *dephasing*. Respecto a la descripción del modelo, se construye el operador de Floquet que describe la evolución espectroscópica del sistema, además de que se discuten las simetrías de la cadena para así analizar brevemente los regímenes dinámicos en el sentido de RMT (esto ya fue discutido a fondo en la Ref. [PP07]). En el capítulo 3 también se discuten los estados de espín coherentes y se mencionan algunas de sus propiedades, estos también pueden ser encontrados en la literatura como estados coherentes atómicos, haciendo alusión a los átomos de dos niveles. Estos conforman

el conjunto de estados utilizado para construir los canales cuánticos de esta parte del trabajo, es decir, los estados iniciales con los que se propagara la cadena de espines. Por último se presentan los resultados obtenidos de la no Markovianidad, mapeada por los parámetros de los estados iniciales así como un estudio comparativo de esta en relación con la fidelidad asintótica y el IPR.

Por último en el capítulo 4 se discutirá el esquema en el que encajan las medidas comunes de NM, y se introducirán dos nuevos esquemas que definirán dos nuevas clases de medidas de NM. Estos solventan el problema que poseen algunas de las medidas conocidas, que divergen para muchos canales cuánticos. Se mostrara que uno de los esquemas propuestos relaciona la NM con una tarea física, el de guardar información de manera segura por cierto tiempo (a lo largo del trabajo nos referiremos a esto como *quantum-vault*). Se mostrarán algunos casos particulares de esta tarea física y su relación con la NM, y por ultimo el modelo de Jaynes-Cummings no Markoviano [JC63, BP07] como ejemplo físico concreto.

Como nota final y para evitar confusiones, a lo largo del trabajo se tomará $\hbar = 1$, continuamente se referirá a los espines $1/2$ como qubit y viceversa.

Capítulo 2

Preliminares

El propósito de este capítulo es introducir brevemente y a grandes rasgos el formalismo general de un canal cuántico así como la teoría general de sistemas cuánticos abiertos, canales cuánticos Markovianos y no-Markovianos, así como las medidas conocidas que existen de la no-Markovianidad.

2.1. Sistemas abiertos y canales cuánticos

Las operaciones unitarias generalmente representan la evolución de sistemas cuánticos cerrados, ya sean autónomos o no. Para construir la dinámica unitaria de un sistema general, tomemos un Hamiltoniano no-autónomo, $H(t)$, y un estado puro inicial $|\psi_0\rangle$. Es bien conocido que la evolución de este obedece la ecuación de Schrödinger y puede escribirse de la siguiente manera,

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow \mathcal{U}(t)|\psi_0\rangle = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_0^t H(\tau)d\tau\right) |\psi_0\rangle$$

donde \mathcal{T} es el operador de ordenamiento temporal y $\mathcal{U}(t)$ es un operador unitario correspondiente a la propagación del estado hasta el tiempo t . Con el fin de introducir la dinámica de un sistema cuántico abierto, consideramos ahora que el estado $\mathcal{U}(t)|\psi_0\rangle = |\psi(t)\rangle$ describe un sistema cuántico bipartito, donde una de las partes es el sistema de interés S , comúnmente llamado *sistema central*, y la otra es el ambiente E . La fig.2.1 muestra esquemáticamente lo antes dicho. El espacio de Hilbert del sistema total tiene entonces la estructura

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E,$$

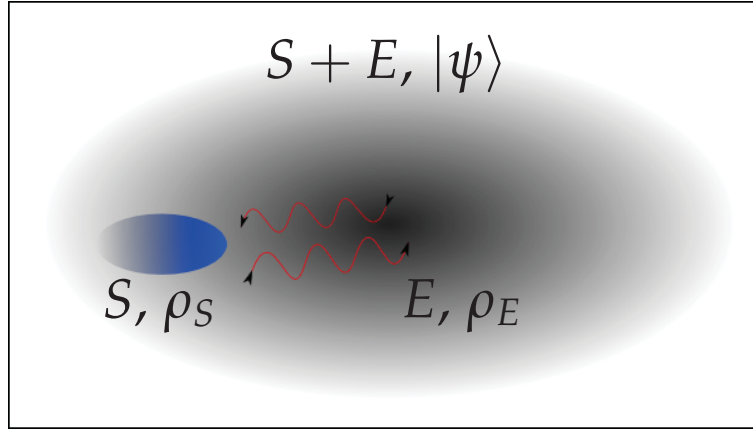


Figura 2.1: Esquema de un sistema cuántico abierto. Se indican los estados reducidos del ambiente y el sistema central, así como el estado global.

y su dimensión es $N_S \times N_E$, donde los factores son las dimensiones de los espacios \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_E respectivamente. El Hamiltoniano del sistema total generalmente tiene la siguiente forma,

$$H = H_S \otimes \mathbb{1}_{N_E} + \mathbb{1}_{N_S} \otimes H_E + V_{\text{int}}, \quad (2.1)$$

donde H_S y H_E son los Hamiltonianos libres del sistema central y el ambiente respectivamente, y V_{int} el Hamiltoniano de interacción. Si el estado inicial del sistema es factorizable, uno puede construir un canal para los estados del sistema central. Dado entonces un estado inicial del ambiente ρ_E , se puede construir lo que es un buen primer ejemplo de canal no unitario y que describe la evolución de un sistema abierto con las condiciones dichas:

$$\rho_0 \longrightarrow \mathcal{E}_t(\rho_0) = \text{tr}_E \left[U(t) \rho_0 \otimes \rho_E U^\dagger(t) \right], \quad (2.2)$$

siendo ρ_0 cualquier estado inicial del sistema central. Dado este primer ejemplo de un canal cuántico, discutiremos ahora lo que típicamente se pide para describir un proceso cuántico general y que define el formalismo de *operación cuántica*. Partiremos con los procesos estocásticos clásicos para estudiar posteriormente la contraparte cuántica. Consideremos un sistema estocástico discreto, cuyo estado está descrito por un vector de probabilidad \vec{p} , i.e. que cumple $p_i > 0$ y $\sum p_i = 1$; y su evolución hasta cierto tiempo t , está dada por una matriz de transferencia $\Lambda(t, 0)$ (también se le suele llamar canal clásico o simplemente propagador), de tal

forma que $\vec{p}(t) = \Lambda(t,0)\vec{p}$. Los componentes de la matriz cumplen lo siguiente,

$$\Lambda(t,0)_{ij} \geq 0, \quad \sum_k \Lambda_{kj} = 1, \quad (2.3)$$

esto es, envía vectores de probabilidad a vectores de probabilidad. Cuánticamente, el análogo de \vec{p} es la matriz de densidad ρ , que describe el estado de los sistemas cuánticos de la manera mas general puesto que permite describir cierta ignorancia sobre el sistema. Dejemos de lado lo que concierne a la parte de la evolución proveniente de las mediciones, puesto que estas son operaciones que pueden reducir la traza del estado. En analogía con lo que cumple el canal clásico Λ , lo que uno pide para un canal cuántico es que conserve la traza y mande operadores positivos a operadores positivos. Hasta este punto se denominan *Positive trace-preserving channels* PTP. En resumen, dado \mathcal{E} PTP,

- si $\sigma \geq 0$, entonces $\mathcal{E}[\sigma] \geq 0$ y,
- $\text{tr}(\mathcal{E}[\sigma]) = \text{tr}(\sigma)$.

Notemos que podemos extender cualquier estado cuántico ρ de nuestro sistema, digamos de dimensión N , a un espacio compuesto más grande de dimensión $N \times k$. Pediremos que se mantenga la positividad, por ejemplo en presencia de enredamiento con el resto del sistema extendido. Entonces, sí para todo operador positivo en ese espacio, $\tilde{\sigma} \geq 0$, se cumple que $(\mathbb{1}_k \otimes \mathcal{E})[\tilde{\sigma}] \geq 0$, se dice que el mapa es k -positivo. Si la condición anterior se cumple para cualquier k entero, el canal se dice que es completamente positivo, *Complete positive trace-preserving channel* CPTP. Estos mapas suelen ser mas fáciles de caracterizar que los PTP [Cho75, Jam72] y admiten ser escritos como una descomposición de Kraus, $\mathcal{E}[\cdot] = \sum_j K_j \cdot K_j^\dagger$ [NC11].

2.2. Canales CP-divisibles, ecuación de Lindblad

Adaptar el concepto de proceso Markoviano en el marco cuántico no es una tarea fácil debido, entre otros, al postulado de la medición. Por ejemplo, partiendo de la definición clásica de Markovianidad [BLN04]:

$$p_{1|n}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_0, t_0) = p_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}), \quad (2.4)$$

donde $p_{n|m}$ es la probabilidad condicional de n puntos dados m . Podemos ver que en el contexto cuántico, es imposible tratar directamente con la

relación dada puesto que su verificación depende de el conocer mediciones en muchos tiempos, algo que en mecánica cuántica indudablemente perturba el sistema de manera irreversible. Una definición deseable de Markovianidad debe ser independiente de lo que es requerido para que esta sea verificada por el experimental. Por lo que una definición rigurosa de Markovianidad cuántica esta construida a nivel de probabilidades clásicas de un punto.

A nivel de probabilidades de un punto los procesos Markovianos son equivalentes a los procesos clásicos P-divisibles [ARHP14] (el prefijo P viene de la positividad de Λ , puesto que envía vectores de probabilidades a vectores de probabilidades). Los canales P-divisibles cumplen la propiedad de que

$$\Lambda(t, s) = \Lambda(t, 0)\Lambda^{-1}(s, 0), \quad (2.5)$$

satisface las propiedades mostradas en 2.3 para todo $t \geq s \geq 0$ [VSL⁺11]. Para introducir esto en el marco cuántico, consideremos un sistema cuyo estado al tiempo t_0 esta dado por una matriz de densidad (no degenerada) con la siguiente descomposición espectral:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.6)$$

Los eigenvalores p_i forman una distribución de probabilidad clásica. Consideremos ahora un mapa cuántico $\mathcal{E}_{(t, t_0)}$ tal que preserva la descomposición espectral. Esto quiere decir que el estado ρ es mapeado en el tiempo t a:

$$\rho(t) = \sum_i p_i(t) |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.7)$$

Este proceso puede ser visto como un proceso estocástico clásico sobre la variable i , si tomamos entonces que las probabilidades $p_i(t)$ evolucionan de acuerdo a un canal clásico P-divisible, entonces se puede demostrar que la dinámica intermedia del canal cuántico es PTP [ARHP14], es decir $\mathcal{E}_{(t, t_1)} = \mathcal{E}_{(t, t_0)}\mathcal{E}_{(t_1, t_0)}^{-1}$ cumple las relaciones mencionadas al final de la sec. 2.1, para todo $t_1 \in [t_0, t]$. Por lo tanto a estos canales cuánticos son llamados *P-divisibles*. Adoptando las mismas consideraciones que se hicieron en la sección anterior para definir canales CPTP, si $\mathcal{E}_{(t, t_1)}$ es CPTP entonces se dice que el canal es *CP-divisible*, esto último constituye una definición de canal cuántico Markoviano. Un resultado importante de esta definición y que además nos servirá para introducir la medida de no Markovianidad más usada en este trabajo, es el siguiente: *Una evolución cuántica $\mathcal{E}_{(t_2, t_1)}$ es Markoviana sí y solo si para todo $t_2 \geq t_1$, se cumple que*

$$\left\| \left[\mathbf{1} \otimes \mathcal{E}_{(t_2, t_1)} \right] (\tilde{\sigma}) \right\|_1 \leq \|\tilde{\sigma}\|_1, \quad (2.8)$$

donde $\|A\|_1 = \text{tr}\sqrt{A^\dagger A}$ es la *trace norm* y $\tilde{\sigma}$ es cualquier operador hermitiano que actúa en el espacio de Hilbert extendido.

2.3. Medidas de no-Markovianidad

Medida RHP

En relación a la definición de Markovianidad cuántica que discutimos en la sección anterior, en la tarea de cuantificar que tan no Markoviana es una evolución cuántica, una ruta valida y bastante interesante es el cuantificar la no positividad (*complete positivity*) de la dinámica intermedia de un proceso cuántico $\mathcal{E}_{(t,t_0)}$. Sin entrar en tantos detalles técnicos dado que no es el objetivo final de este trabajo (estos se pueden consultar por ejemplo en [ARHP14]), hacemos uso del isomorfismo de Choi-Jamiołkowski [Cho75, Jam72] y consideramos el estado máximamente entrelazado entre dos copias de nuestro sistema, $|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=0}^{d-1} |n\rangle|n\rangle$ (d denota la dimensión del espacio de Hilbert) para asociar al proceso cuántico $\mathcal{E}_{(t,t_1)}$ una matriz de Choi-Jamiołkowski,

$$\left[\mathbb{1} \otimes \mathcal{E}_{(t,t_1)} \right] (|\Phi\rangle\langle\Phi|).$$

El teorema de Choi establece que $\mathcal{E}_{(t,t_1)}$ es CPTP si y solo si la matriz anterior es positiva semidefinida. Luego de la ecuación 2.8, dado que $|\Phi\rangle\langle\Phi|$ es un estado, este satura la igualdad cuando la dinámica es CPTP. Entonces la ecuación 2.8 es mayor a 1 cuando esta es no Markoviana:

$$\left\| \left[\mathbb{1} \otimes \mathcal{E}_{(t,t_1)} \right] (|\Phi\rangle\langle\Phi|) \right\|_1 \begin{cases} = 1 & \text{sii } \mathcal{E}_{(t,t_1)} \text{ es CP} \\ > 1 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Lo que nos lleva a definir el siguiente limite para discernir si la dinámica es no Markovianidad dado un instante t :

$$g(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\left\| \left[\mathbb{1} \otimes \mathcal{E}_{(t+\epsilon,t)} \right] (|\Phi\rangle\langle\Phi|) \right\|_1 - 1}{\epsilon}, \quad (2.10)$$

Tenemos entonces que $g(t) > 0$ si y solo si la evolución es no Markoviana en ese instante. Entonces el monto total de no Markovianidad en un intervalo I esta dado por:

$$\mathcal{N}_{\text{RHP}} = \int_I g(t) dt. \quad (2.11)$$

Esta última es una de las medidas de no Markovianidad más conocidas en el medio, “RHP” viene de Rivas, Huela y Plenio [RHP10]. Es fácil ver que esta medida, como muchas otras que veremos más adelante, no está normalizada y diverge para sistemas cuyo espacio de Hilbert tiene dimensión finita.

Medida BLP

Otra medida muy común y que es un caso particular de la ecuación 2.8, y que además establece una definición de no Markovianidad, es la propuesta por Breuer Laine y Piilo [BLP09]. Ellos introdujeron una definición de Markovianidad en términos del comportamiento de la *trace distance*, esto es, una evolución cuántica es Markoviana si la distancia entre cualesquiera dos estados iniciales ρ_1 y ρ_2 decrece monotonamente con el tiempo. De la ecuación 2.8 vemos que esta implica que $\|\mathcal{E}_{(t,t_0)}(\sigma)\|_1 \leq \|\sigma\|_1$ para todo operador hermitiano actuando en el espacio de Hilbert del sistema. Concretamente si se elige entonces $\sigma = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$, la *trace norm* se reduce a la *trace distance* entre los estados ρ_1 y ρ_2 , por lo que tenemos lo siguiente:

$$D(\rho_1(t_2), \rho_2(t_2)) \leq D(\rho_1(t_1), \rho_2(t_1)), \quad (2.12)$$

donde $D(\rho_1, \rho_2) = \frac{1}{2}\|\rho_1 - \rho_2\|_1$ es la *trace distance*. Sin embargo es claro que esto último no implica que se cumpla la ecuación 2.8 puesto que es una reducción de la misma. Por lo que aunque se verifique la eqn.(2.12) puede que la dinámica sea no Markoviana. Esto no es del todo un problema, esta definición es útil para construir una medida *testigo* de no Markovianidad, es decir, una medida que es cero para todas las dinámicas Markovianas y para algunas no Markovianas. Por lo tanto una medida testigo da un valor diferente de cero si la dinámica es no Markoviana. Así que de manera análoga a como se construye la medida RHP, tomamos el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \sigma(\rho_1, \rho_2, t) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{D[\rho_1(t+\epsilon), \rho_2(t+\epsilon)] - D[\rho_1(t), \rho_2(t)]}{\epsilon} \\ &= \frac{dD[\rho_1(t), \rho_2(t)]}{dt}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Entonces, dado cierto intervalo I , si la cantidad,

$$\int_{I, \sigma > 0} dt \sigma(\rho_1, \rho_2, t),$$

es diferente de cero para algún par de estados ρ_1 y ρ_2 aseguramos que la dinámica es no Markoviana en el intervalo I , es decir, se toman todas las contribuciones de $\sigma(\rho_1, \rho_2, t)$ cuando se viola la ecuación 2.12. Breuer, Laine y Piilo se interesaron en el valor máximo de esta cantidad, por lo tanto su medida es construida de la siguiente manera:

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}} = \max_{\rho_{1,2}} \int_{\sigma>0} dt \sigma(\rho_1, \rho_2, t). \quad (2.14)$$

Donde se toma \mathbb{R}^+ como la región de integración. La ecuación anterior puede ser fácilmente reducible a la siguiente fórmula,

$$\mathcal{N}_{\text{BLP}} = \max_{\rho_{1,2}} \sum_i [D(\rho_1(b_i), \rho_2(b_i)) - D(\rho_1(a_i), \rho_2(a_i))], \quad (2.15)$$

donde (a_i, b_i) son todos los intervalos donde $\sigma(\rho_1, \rho_2, t)$ es positivo. Esta fórmula es útil en la implementación numérica de la medida.

2.4. Algunas Herramientas

Esta sección esta dedicada a discutir de manera breve los aspectos más importantes de algunas de las herramientas que se usan a lo largo del trabajo. Estas son el eco de Loschmidt, el *Inverse Participation Ratio* (IPR) y por último teoría de matrices aleatorias.

2.4.1. Eco de Loschmidt

Como es bien sabido, la dinámica de un sistema cuántico cerrado es unitaria y por lo tanto perfectamente reversible, al contrario de lo que uno típicamente encuentra en la mecánica clásica, por lo que en el marco cuántico no pueden ser introducidas herramientas tales como el exponente de Lyapunov para cuantificar la inestabilidad de la dinámica. Sin embargo en la mecánica cuántica puede ser definida una cantidad basada en la sensibilidad del sistema bajo perturbaciones en la dinámica. Este es el *eco de Loschmidt*. Este esta definido de la siguiente manera, supongamos que $|\psi_0\rangle$ es el estado inicial de algún sistema cuántico cuya dinámica esta descrita por un Hamiltoniano H , ahora, sea ϵV una perturbación digamos de prueba. Luego propagando el estado con la dinámica del sistema y con la dinámica perturbada $H + \epsilon V$, el eco de Loschmidt está definido como el valor absoluto al cuadrado del producto interno entre los estados propagados durante un tiempo t [Per84]:

$$|f(t)|^2 = |\langle \psi_0 | \exp(iHt + i\epsilon Vt) \exp(-iHt) | \psi_0 \rangle|^2, \quad (2.16)$$

por lo que este permite cuantificar la sensibilidad de una evolución cuántica a las perturbaciones [GJPW12]. El significado del eco de Loschmidt puede verse de dos maneras, una de ellas es la que acabamos de describir. La otra viene de interpretar la eqn.(2.16) como una medida del resurgimiento cuando se realiza una reversión temporal imperfecta sobre un sistema cuántico, de allí es de donde viene la palabra “eco”. A este se le suele conocer también como fidelidad, por lo que $f(t)$ es la amplitud de la fidelidad. Entre las propiedades interesantes del eco que surgen por ejemplo cuando el sistema es caótico, es la saturación del eco a tiempos largos [GJPW12], promediado con ensambles de Hamiltonianos, perturbaciones o estados, en general se tiene que:

$$\overline{M(t)} \sim N^{-1}, \quad (2.17)$$

donde N es el tamaño efectivo del espacio de Hilbert del sistema, que para sistemas con contraparte clásica, este está dado por el volumen del espacio de fase que está disponible para el estado durante su evolución, dividido por el volumen de una celda de Planck, $(2\pi\hbar)^d$. Cabe mencionar además que N es independiente de la intensidad de la perturbación. Para sistemas con dinámica regular y mixta también se ha observado saturación de la fidelidad. En este trabajo tomaremos el promedio sobre el tiempo para cada estado que se propague con la dinámica dada, por lo que relacionaremos N con la dimensión efectiva del estado en cuestión.

2.4.2. *Inverse Participation Ratio*

A lo largo del trabajo, además de estar interesados en la dimensión efectiva de los estados en el espacio de Hilbert, estudiamos la localización inicial de los estados iniciales, una medida usada para cuantificar la localización es el *inverse participation ratio* (definida por primera vez por Bell et. al [BD70]). Para introducir la definición tomemos un espacio de Hilbert \mathcal{H} de dimensión N y una base ortonormal en ese espacio, $\{|n\rangle\}_{n=0}^{N-1}$, el IPR de un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, está dado como sigue:

$$\text{IPR}(|\psi\rangle) = \sum_n |\langle n|\psi\rangle|^4 \quad (2.18)$$

Es evidente que el IPR depende de la base en consideración, y es común que esta se tome como la eigenbase de algún operador, en particular el Hamiltoniano. Es importante mencionar que con fines de quitar ambigüedades, tal operador no debe ser degenerado puesto que la eigenbase no es única y el IPR no está bien definido. Algunos casos límite del IPR

son (i) cuando el estado esta muy deslocalizado y (ii) muy localizado. Para analizarlos expandimos $|\psi\rangle$ en la base respecto a la cual clacularemos el IPR:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} c_n |n\rangle.$$

En el límite cuando el estado esta totalmente deslocalizado tenemos que $c_n = c_m \forall n, m$, que con ayuda de $\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1$, obtenemos $|c_n|^2 = 1/N$. Por lo tanto el IPR, usando la eqn.(2.18) es $1/N$. Para un estado totalmente localizado tenemos que $c_m = c_n \delta_{nm}$, donde δ_{nm} es la delta de Kronecker, usando nuevamente la normalización del estado y la fórmula para el IPR, este último es igual a N . Entonces para un espacio de dimension N , los limites en los cuales se encuentra el IPR son $[1/N, N]$. Una relación útil para calcular el IPR numéricamente y respecto a la eigenbase del Hamiltoniano, es la siguiente:

$$\begin{aligned} \overline{|C(t)|^2} &= \sum_{n,m} |c_n|^2 |c_m|^2 \overline{\exp(it(E_n - E_m))} \\ &= \sum_n |c_n|^4, \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $|C(t)|^2 = |\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle|^2$ es la función de autocorrelación del estado al tiempo t respecto al estado inicial. Se debe mencionar que esto es valido para $E_n \neq E_m, \forall n \neq m$, lo que esta en acuerdo a la definición del IPR.

2.4.3. Teoría de matrices aleatorias y caos cuántico

Un resultado sorprendente de la física teórica ha sido precisamente Teoría de Matrices Aleatorias, esta encuentra muchas aplicaciones, como lo son en teoría de números (ej: distribución de ceros en la función ζ de Riemann) [Fyo11], análisis numérico, estadística multivariable, etc. Historicamente, en la física nuclear en particular, RMT fue desarrollada para tratar de caracterizar el espectro de los núcleos atómicos pesados [Wig93a, Wig93b, Wig58, Wig67], Wigner postulo que los espaciamientos entre las lineas espectrales deben seguir el comportamiento de los espaciamientos de un ensamble de matrices aleatorias (esto es el *nearest neighbor spacing distribution*, se le suele denotar como $P(s)$), y estos dependen solo de la clase de simetría de la dinámica subyacente. Mas adelante, en el año 1984, Bohigas, Giannoni, y Schmit [BGS84] acuñaron una conjetura que establece que sistemas clásicos caóticos, al ser cuantizados muestran una estadística espectral tipo RMT. Por lo tanto, RMT comenzó a formar

un pilar y una herramienta para el estudio del caos cuántico, a tal grado que establece una definición. Lo anterior dicho constituye un resultado sorprendente dado que define clases de universalidad que dependen solo del grupo de transformaciones canónicas a la cual el sistema es invariante, por lo que tres ensambles son típicamente considerados para matrices hermitianas [Rei04]: *Gaussian Unitary Ensemble* (GUE) para matrices hermitianas invariantes a transformaciones canónicas unitarias, este puede ser considerado como un ensamble de Hamiltonianos no simétricos bajo inversión temporal pero si bajo rotaciones. GOE (*orthogonal*) de manera similar modela Hamiltonianos esta vez invariantes ante transformaciones ortogonales y simétricos ante inversión temporal y rotaciones. Y por último el GSE para matrices hermitianas simplécticas, modela Hamiltonianos simétricos bajo inversión en el tiempo pero sin simetría bajo rotaciones. Existen también ensambles de matrices unitarias (que pueden representar matrices de dispersión y operadores de Floquet), estos son llamados ensambles “circulares” (*Circular Gaussian Ensembles*), que bajo las mismas consideraciones de los ensambles anteriores, se denotan como CUE, COE y CSE. Análogamente para estos últimos ensambles se estudia el espaciamiento de las comúnmente llamadas cuasienergías, en particular en este trabajo. Las *nearest neighbor spacings distributions* para los distintos ensambles discutidos son:

$$P(s) = \begin{cases} (s\pi/2) \exp(s^2\pi/4) & \text{ortogonal} \\ (s^2 32/\pi^2) \exp(s^2 4/\pi) & \text{unitario} \\ (s^4 2^{18}/3^6 \pi^3) \exp(s^2 64/9\pi) & \text{simpléctico.} \end{cases} \quad (2.20)$$

Cabe decir que para s pequeña uno puede notar el exponente de *repulsión* entre los eigenvalores en los distintos ensambles, $P(s) \sim s^\beta$, $\beta = 1, 2, 4$ para el ensamble ortogonal, unitario y simpléctico respectivamente. Para sistemas integrables, típicamente la $P(s)$ imita el comportamiento del *Poissonian unitary (orthogonal, symplectic) ensemble*, es decir, matrices que pueden ser escritas como $H = UDU^\dagger$, donde D es una matriz diagonal con entradas aleatorias bajo la misma distribución y sin correlación alguna, por lo que la $P(s)$ exhibe una distribución de Poisson.

Capítulo 3

Cadenas de espines y no-Markovianidad

3.1. Cadena de espines

En el presente capítulo abordaremos la cadena de espines pateados, propuesta por Tomaz Prosen para estudiar, entre otros, funciones de correlación [Pro98]. El modelo consiste en una cadena de espines 1/2 con interacciones Ising a primeros vecinos, “Pateados” por pulsos ultracortos de campo magnético. En este trabajo consideramos N espines con condiciones periódicas de frontera fig.3.1, el Hamiltoniano esta dado por:

$$H = J \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \delta_\tau(t) \sum_{i=0}^{N-1} b^\perp \sigma_i^x + b^\parallel \sigma_i^z, \quad \delta_\tau(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\tau) \quad (3.1)$$

($\vec{\sigma}_N \equiv \vec{\sigma}_0$). Las componentes del campo b^\perp y b^\parallel denotan la parte transversal y longitudinal respecto a la interacción Ising, J es la intensidad del acoplamiento Ising, que en este trabajo es tomada como constante. Como ya se discutió en el capítulo 2, el operador de evolución para sistemas dependientes del tiempo se escribe como sigue:

$$U(t_2, t_1) = \mathcal{T} \exp \left(-i \int_{t_1}^{t_2} H(t) dt \right), \quad (3.2)$$

donde \mathcal{T} es el operador de ordenamiento temporal. Sin embargo, dado que el Hamiltoniano es periódico ($H(t + \tau) = H(t)$) y la dependencia temporal viene en términos de deltas de Dirac, uno puede simplificar bastante la expresión anterior y lidiar con un mapeo estroboscópico cuántico que se calcula de la siguiente manera: Entre cada patada, el sistema se

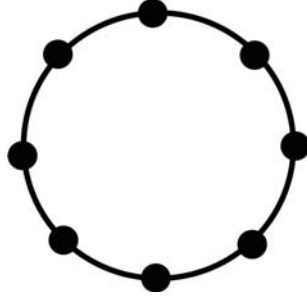


Figura 3.1: Cadena de espines con condición periódica de frontera.

comporta como uno autónomo y el operador de evolución viene dado solo por la parte de Ising, que justo después de una patada y durante un tiempo no mayor al periodo del sistema, la evolución viene dada por (digamos justo después de la n 'ésima patada):

$$U_I(t) = \exp(-itH_I), \quad n\tau < t < (n+1)\tau$$

donde H_I denota solo la parte de Ising del Hamiltoniano total de la cadena. Ahora, en un intervalo de tiempo pequeño alrededor de cuando la patada $m = n + 1$ ocurre, la parte del campo magnético del Hamiltoniano es mucho más fuerte que la parte de Ising y el operador de evolución en la vecindad de la patada esta dado por:

$$\begin{aligned} U_K &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} U_K(m\tau - \epsilon, m\tau + \epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{T} \exp \left(-iH_K \int_{m\tau - \epsilon}^{m\tau + \epsilon} \delta_\tau(t) dt \right) \\ &= \exp(-iH_K), \end{aligned}$$

donde $H_K = \sum_{i=0}^{N-1} b^\perp \sigma_i^x + b^\parallel \sigma_i^z$. Por lo tanto el operador de evolución que mapea estados a justo después de la n 'ésima patada esta dado por:

$$U_{KI}(n\tau) = [U_K U_I(\tau)]^n. \quad (3.3)$$

Por simplicidad, en este trabajo tomamos $\tau = 1$, por lo que el propagador estroboscópico del sistema queda como:

$$U_{KI}(n) = [\exp(-iH_K) \exp(-iH_I)]^n. \quad (3.4)$$

La forma que toma el propagador de la cadena hace al sistema particularmente fácil y eficiente de simular, se puede notar que la parte de la patada se descompone en operaciones de un qubit y la parte de Ising en operaciones de dos. Es conveniente saber que el operador $U_{KI} = U_{KI}(1)$ es comúnmente llamado operador de Floquet, este mapea el estado $|\psi(n)\rangle$ al estado $|\psi((n+1))\rangle$ y contiene todas las propiedades espectrales de la dinámica del sistema.

3.2. Regímenes dinámicos

Para este modelo son bien conocidos sus regímenes dinámicos, este presenta dinámica integrable para $b^{\parallel} = 0$ [PRO00], y trivialmente para $b^{\perp} = 0$. Tiene dinámica totalmente caótica para $b^{\parallel} = b^{\perp} = 1.4$ en el sentido de Teoría de Matrices Aleatorias (RMT, por sus siglas en inglés) [PP07], además de dinámica mixta alrededor de $b^{\parallel} = 1.4$ y $b^{\perp} = 1.0$, donde la $P(s)$ se ajusta a la distribución de Brody [Pin07],

$$P(s) = A \left(\frac{s}{b}\right)^b \exp\left(-a \left(\frac{s}{D}\right)\right), \quad (3.5)$$

donde b es el parámetro de Brody, $a = [\Gamma(2+b)/(2+b)]^{1+b}$ y $A = a(1+b)$ [BFF⁺81, Rei04]

3.2.1. Simetrías de la cadena

La dinámica de la cadena tiene simetría bajo rotación de los qubits debido a la condición periódica de frontera, además de una simetría bajo reflexión externa que también está presente en la cadena no periódica. Sea T el operador de rotación de la cadena, el efecto sobre los elementos de la base computacional para N qubits, $\{|\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}\rangle\}_{\alpha_j \in \{0,1\}}$, es

$$T|\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}\rangle = |\alpha_{N-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{N-2}\rangle.$$

Los eigenvalores de este operador son $\exp(2\pi ik/L)$ donde k se denota como el cuasimomento, este toma valores en \mathbb{Z}/N , por lo que el espacio de Hilbert puede verse estructurado en una suma directa de los subespacios invariantes de cuasimomento, $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}/L} \mathcal{H}_k$. El operador de Floquet cumple entonces $[U_{KI}, T] = 0$. Ahora para la reflexión, sea R el operador de simetría, este transforma los elementos de la base computacional como sigue

$$R|\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-2}, \alpha_{N-1}\rangle = |\alpha_{N-1}, \alpha_{N-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0\rangle,$$

por lo que es fácil mostrar que $[U_{KI}, R] = 0$, R tiene como eigenvalores 1 y -1 . Para ilustrar la correspondencia de la cadena con RMT, nos enfocaremos en los subespacios invariantes de cuasimomento. Aunque generalmente las dos simetrías no conmutan $[T, R] \neq 0$, tenemos que si $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k$, entonces $R|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{-k}$, esto proporciona una nueva simetría en los subespacios \mathcal{H}_0 y $\mathcal{H}_{N/2}$ (N par), por lo que por simplicidad estos simplemente se omiten del cálculo de la $P(s)$. Por último la cadena es simétrica bajo inversión temporal. En la base computacional, el operador

de inversión temporal, K' es simplemente conjugación compleja, tenemos entonces, $K'\sigma_{x,z}K'^{-1} = \sigma_{x,y}$ y $K'\sigma_yK'^{-1} = -\sigma_y$. Usando la versión simetrizada del operador de Floquet, $U'_{KI} = \exp(-iH_I/2)U_{KI}\exp(iH_I/2)$, es fácil comprobar que este es covariante:

$$K'U'_{KI}K'^{-1} = U'^{\dagger}_{KI}. \quad (3.6)$$

Luego teniendo en cuenta que $[T, K] = 0$ tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} K'TU_{KI} &= K'\exp(2\pi ik/N)|k\rangle \\ &= \exp(-2\pi ik/N)K'|k\rangle, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde $|k\rangle$ es eigenestado del operador de rotación. Como es de esperarse, el operador de inversión temporal invierte el cuasimomento, $K|k\rangle = | -k\rangle$. Ahora, dado que $[K', R] = 0$, podemos construir $K = K'R$ tal que $K|k\rangle = |k\rangle$, entonces, tenemos una simetría antiunitaria en cada espacio \mathcal{H}_k . Por lo tanto para el régimen caótico en la cadena tenemos una correspondencia de la $P(s)$ con el resultado del ensamble COE.

3.2.2. $P(s)$ y RMT

Las figuras 3.2 muestran la *nearest neighbor distributions*, $P(s)$ para la cadena con 12 qubits en los regímenes integrable, mixto y caótico. En la estadística se han incluido los sectores $k = 1, \dots, 5$ y las correspondientes curvas teóricas de la $P(s)$ según sea el régimen (COE, Brody o Poisson). En la fig.3.3 se muestra el cambio de las cuasienergías del sector $k = 2$ para la cadena con 8 qubits, se puede notar la aparición de la degeneración conforme aumenta b^\perp , así como la repulsión de los niveles que se hace más notoria conforme se llega al régimen caótico.

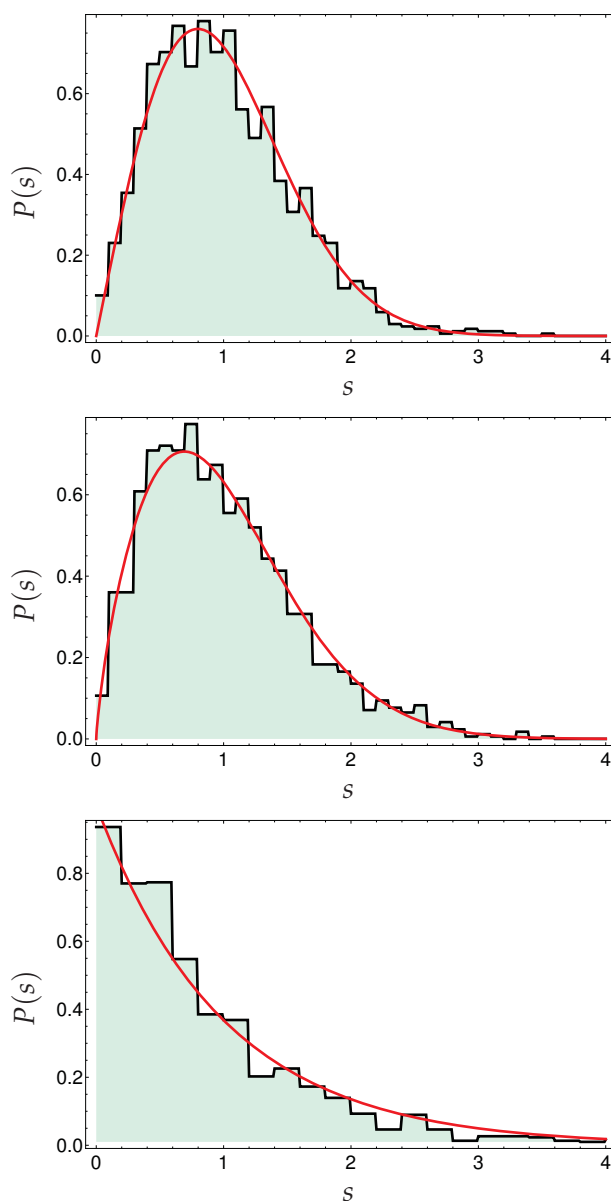


Figura 3.2: Graficas de la $P(s)$ de la cadena con 12 espines en los regímenes caótico (arriba, $b^\perp=1.4$), mixto (en medio, $b^\perp = 1.0$) e integrable (abajo, $b^\perp = 0.1$). Para el régimen caótico se muestra la $P(s)$ del ensamble COE, para el mixto la distribución de Brody con $b = 0.75$ y por último en el integrable la distribución de Poisson.

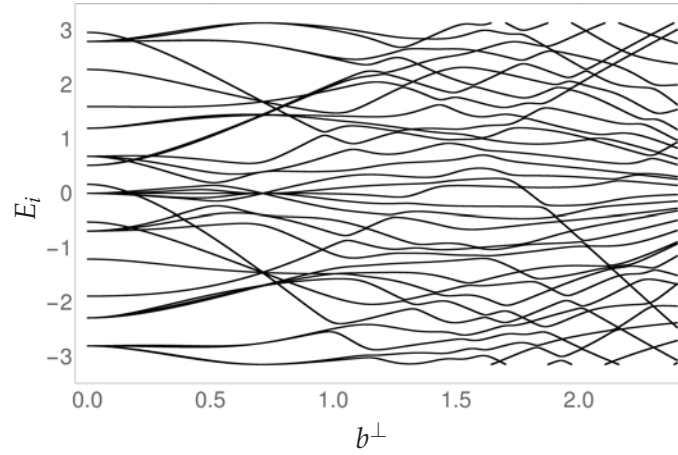


Figura 3.3: Cuasienergías del sector $k = 2$ para la cadena con 8 qubits en función de b^\perp . Se pueden notar el surgimiento de la degeneración así como la repulsión de las cuasienergías debido a la ausencia de una simetría subyacente.

3.3. Cadena de espines como un ambiente mixto

Para el estudio de la no-Markovianidad de un qubit bajo la influencia de la cadena pateada de espines, en este trabajo consideramos una interacción tipo *dephasing* sobre el qubit, un canal dephasing puro se caracteriza por afectar solo las coherencias de los estados cuánticos en una base determinada, comúnmente la de σ_z (en la fig.3.4 se muestra un esquema de la deformación de la esfera de Bloch bajo este canal). El Hamiltoniano del qubit interactuando con la cadena de esta manera se escribe como sigue:

$$H = \frac{\Delta}{2} \sigma_z \otimes \mathbb{1}_k + \mathbb{1}_2 \otimes H_{\text{env}} + \delta \sigma_z \otimes V, \quad (3.8)$$

donde Δ es la frecuencia de Rabi del qubit, H_{env} es el Hamiltoniano libre del ambiente, en este caso la cadena de espines (donde $k = 2^N$, N : no. de qubits), y δ es la intensidad de la interacción del qubit con el ambiente. Dado que el Hamiltoniano libre del qubit conmuta con los términos restantes del Hamiltoniano, este puede ser ignorado ya que solo rota el estado del qubit, por lo que no tiene importancia en el estudio de la No Markovianidad. Una vez removido el Hamiltoniano interno del qubit y

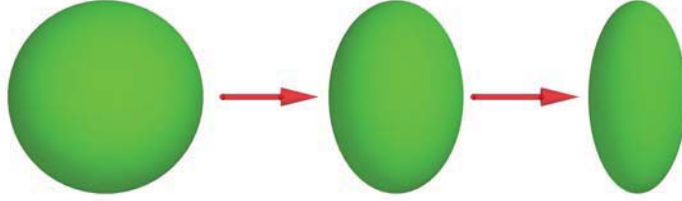


Figura 3.4: Esquema de la deformación de una esfera de Bloch bajo la influencia de un *dephasing channel*.

reacomodando términos tenemos:

$$\begin{aligned} H &= |0\rangle\langle 0| \otimes (H_{\text{env}} + \delta V) + |1\rangle\langle 1| \otimes (H_{\text{env}} - \delta V) \\ &= |0\rangle\langle 0| \otimes H^{(+)} + |1\rangle\langle 1| \otimes H^{(-)}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde los Hamiltonianos $H^{(\pm)}$ son dinámicas perturbadas del ambiente. El operador de evolución queda simplemente como $U(t) = |0\rangle\langle 0| \otimes U_+(t) + |1\rangle\langle 1| \otimes U_-(t)$. Asumiendo que la condición inicial del sistema central y el ambiente es separable, i. e. $\rho_{\text{sys, env}}(0) = \rho_{\text{sys}}(0) \otimes \rho_{\text{env}}(0)$, la dinámica del qubit es obtenida trazando los grados de libertad del ambiente:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{sys}}(t) &= \text{Tr}_{\text{env}} \left[U(t) \rho_{\text{sys}}(0) \otimes \rho_{\text{env}}(0) U^\dagger(t) \right] \\ &= \Lambda(t) (\rho_{\text{sys}}(0)). \end{aligned}$$

Eligiendo la base de las matrices de Pauli $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\mathbb{1}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ con el producto interno de Hilbert-Schmidt tenemos que, el canal cuántico se escribe como sigue:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Re[f(t)] & \Im[f(t)] & 0 \\ 0 & \Im[f(t)] & \Re[f(t)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde

$$f(t) = \text{Tr} [\rho_{\text{env}} U_+(t) U_-(t)]$$

ya que $\Lambda_{jk} = (1/2) \text{Tr} [\sigma_j U(t) \sigma_k \otimes \rho_{\text{env}} U^\dagger(t)]$. Si el estado inicial del ambiente es puro, $|f(t)|^2$ se identifica como el eco de Loschmidt de la cadena bajo los Hamiltonianos $H^{(\pm)}$. Por lo tanto, en el caso de la dinámica *dephasing*, las fluctuaciones de la esfera de Bloch son las fluctuaciones de la fidelidad respecto a los Hamiltonianos $H^{(\pm)}$. Para este canal se utilizó la

medida BLP para cuantificar la no Markovianidad, eligiendo estados iniciales puros para el qubit, $\rho_{\text{env}} = |\psi\rangle\langle\psi|$, los estados con los que se calcula la medida BLP (eqn.(2.14)) se pueden elegir entre cualesquiera dos estados ortogonales del ecuador de la esfera de Bloch. En términos de la fidelidad, la medida queda como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \int_{t=0, |f|>0} d\tau \frac{d|f(\tau)|}{d\tau} \\ &= \sum_i [|f(t_i^{\text{max}})| - |f(t_i^{\text{min}})|]\end{aligned}$$

donde $|f(t)| = |\langle\psi|U_+^\dagger(t)U_-(t)|\psi\rangle|$ es la raíz cuadrada del eco de Loschmidt, y $t_i^{\text{min}} < t_i^{\text{max}}$ corresponden a los tiempos de máximos y mínimos sucesivos locales de $|f(t)|$. El estudio de la No Markovianidad del sistema nos lleva entonces a enfocar el análisis a la fidelidad de la cadena de espines. La parte del Hamiltoniano de interacción que actuó sobre el espacio de Hilbert del ambiente (eqn.(3.8)), se eligió de varias maneras, se consideraron perturbaciones globales y locales. Para las globales se tomo lo siguiente:

$$V_b = \delta_1(t) \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^x, \quad (3.11)$$

$$V_J = \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z, \quad (3.12)$$

en la primera se perturbo de manera homogénea el campo magnético en dirección x y en la segunda todas las interacciones Ising. Como perturbación global se considero también el ensamble de matrices GUE. Para las perturbaciones locales se propusieron:

$$V_{0,1} = \sigma_0^z \sigma_1^z, \quad (3.13)$$

$$V_0 = \delta_1(t) \sigma_0^x, \quad (3.14)$$

En el primero de ellos se perturba solo una interacción Ising y en el segundo el campo magnético en x para un qubit.

3.4. Estados de espín coherentes

El conjunto de estados cuánticos que se usaron para estudiar la cadena de espines, son los estados de espín (ó atómicos) coherentes. Estos estados

fueron introducidos por Radcliffe [Rad71], Gilmore [Gil74] y Perelomov [Per72] para estudiar los estados coherentes de $su(2)$. Estos, de manera similar a los estados coherentes del oscilador armónico, están definidos como un desplazamiento coherente de un estado de momento angular extremo. Típicamente se toma el estado $|j; m_z = j\rangle$, o equivalentemente como el desplazamiento del estado de Dicke con N excitaciones $|N, N\rangle$, donde N el total de átomos de dos niveles en el sistema [KM05]:

$$\begin{aligned} |\vartheta, \varphi\rangle &= \mathcal{D}_{\vartheta, \varphi}^{(j)} |j; j\rangle \\ &= e^{-i\varphi S_z} e^{-i\vartheta S_y} |j; j\rangle, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde $\mathcal{D}_{\vartheta, \varphi}^{(j)}$ es la matriz de rotación de Wigner, ϑ y φ son los ángulos sobre la esfera de Bloch *colectiva*. Es fácil mostrar que estos estados pueden descomponerse en un producto tensorial de estados de Bloch,

$$|\vartheta, \varphi\rangle = \left(\cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} |1\rangle \right)^{\otimes N}. \quad (3.16)$$

Por lo tanto los estados coherentes pueden describir un conjunto de átomos de dos niveles en el mismo estado. Estos estados saturan la relación de incertidumbre

$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2} |\langle J_z \rangle|, \quad (3.17)$$

y tienen la siguiente propiedad

$$\langle \vartheta, \varphi | \vec{S} | \vartheta, \varphi \rangle = (N/2) \hat{S}_{cl}, \quad (3.18)$$

donde \hat{S}_{cl} es el vector unitario en la dirección del momento angular clásico. Estos estados forman una base completa en el subespacio simétrico de N átomos de dos niveles con momento angular total $j = N/2$ ($\mathcal{H}^j \equiv \mathbb{C}^{2j+1}$):

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int_{S^2} |\vartheta, \varphi\rangle \langle \vartheta, \varphi| d\Omega = \mathbb{1}_{2j+1}. \quad (3.19)$$

Cabe señalar que estos estados comparten las simetrías de la cadena puesto que tratan a los espines como indistinguibles.

3.5. Resultados

Para las simulaciones numéricas, se propagó el sistema usando compuertas de uno y dos qubits, con la ayuda de rutinas en *Mathematica* y C++, desarrolladas por el Dr. Carlos Pineda ([Link a github](#)), así como rutinas en CUDA desarrolladas por Eduardo Villaseñor ([Link a github](#)) que fueron de gran ayuda para la propagación del sistema cuando la dimensión es muy grande.

Se calculó la no Markovianidad, el IPR y la fidelidad asintótica del sistema, utilizando los estados coherentes de espín, para las cinco perturbaciones propuestas con la cadena con 10 qubits (excepto para V_{GUE} donde se incluyeron solo 8 qubits debido a que es más complicado propagar este sistema). En adición, usando la perturbación V_b se hizo el cálculo con 16 qubits. La elección de los acoplamientos δ del qubit con el ambiente se eligieron fijando primero $\delta = 0.1$ usando V_b . Para los otros acoplamientos se usó δ para tener aproximadamente en todos los casos acoplamientos igual de intensos (*i.e.* caídas iniciales de la fidelidad iguales). Excepto para la cadena 16 qubits donde se usó $\delta = 0.005$, lo cual lleva a un acoplamiento de intensidad mucho menor a la de los otros casos.

Los resultados se presentan en dos subsecciones, en la primera de ellas se presentan aquellos obtenidos con perturbaciones globales, y en la segunda con perturbaciones locales. Todos los resultados para los distintos parámetros y tipos de perturbación están organizados como sigue, primero se muestran arreglos de 3x3 de gráficas de densidad, en la primera fila se muestra la No Markovianidad en función de los parámetros de los estados coherentes de espín, de manera similar en la segunda fila se muestra la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, al final en la última fila, se muestra el IPR.

Las columnas están organizadas de acuerdo a los regímenes dinámicos de la cadena, a partir de la primera, se muestra el régimen integrable, mixto, y en la última el caótico. Luego para cada conjunto de datos se muestran las relaciones entre la NM, el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, donde cada punto representa los valores arrojados por cada estado coherente.

Cabe señalar que en todos los cálculos se fijó $b^{\parallel} = 1.4$ y $J = 1$. El sistema se propagó hasta $t = 5000$, excepto para la cadena con 16 qubits, para esta usamos $t = 10000$.

3.5.1. Perturbaciones globales

En la figura 3.5 y 3.6 se muestran las gráficas de densidad y las relaciones entre el IPR, la NM y la $\langle f(t) \rangle$ para la cadena con 10 qubits y perturbación Vb (con $\delta = 0.1$), de manera similar en 3.7 y 3.8 se muestran las gráficas usando V_j con $\delta = 0.1$. Cabe mencionar que no se incluye el IPR en el régimen integrable para la cadena con 16 qubits puesto que problemas técnicos estuvieron presentes en la realización del cálculo, y puesto que este requiere de mucho tiempo se optó por omitir este resultado. En las figuras 3.7 y 3.8 se muestran las gráficas de densidad y la relación entre la NM, el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ usando la perturbación global en la interacción Ising respectivamente. De manera similar en las figuras 3.13 y 3.14 se muestran los resultados para la cadena de 8 qubits usando la perturbación de RMT, los cálculos se hicieron sobre un ensamble de 40 matrices $V \in \text{GUE}$.

Perturbaciones globales en el campo magnético, $\delta = 0.1$

10 qubits

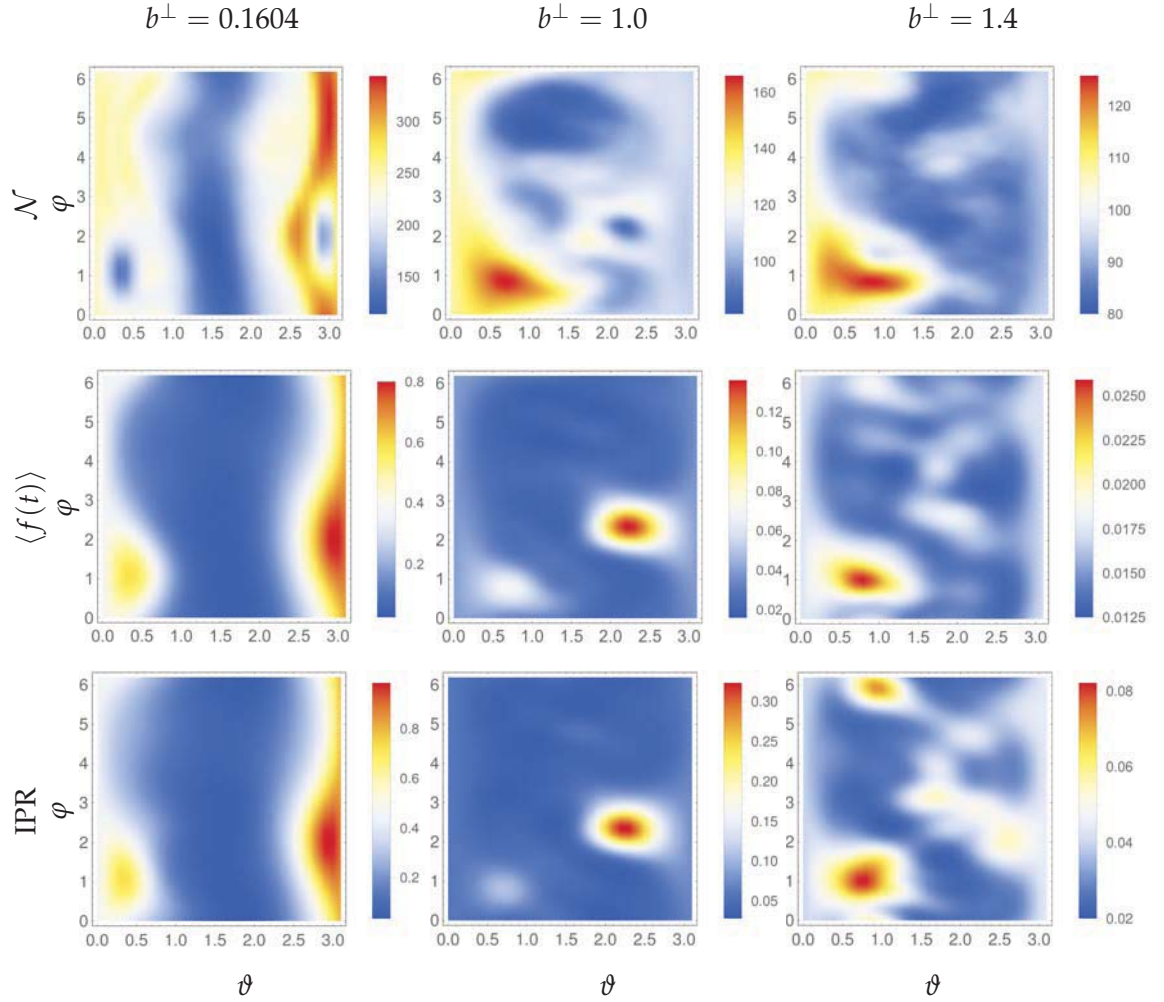


Figura 3.5: Gráficas de densidad de la NM , el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 10 qubits usando una perturbación homogénea en el campo magnético V_b con $\delta = 0.1$. La resolución de la malla es de $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.1$.

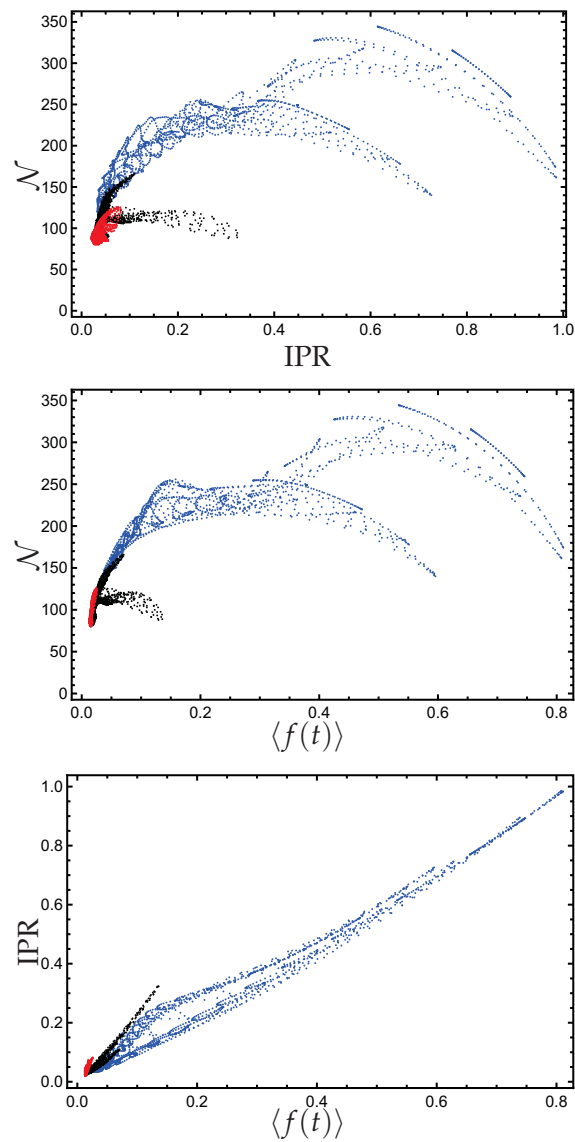


Figura 3.6: Relación entre la NM , el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$ para la cadena con 10 qubits, usando una perturbación homogénea en el campo magnético V_{bs} con $\delta = 0.1$. En azul el régimen integrable, en negro el mixto y por último en rojo el caótico.

Perturbación global en la interacción Ising, $\delta = 0.1$

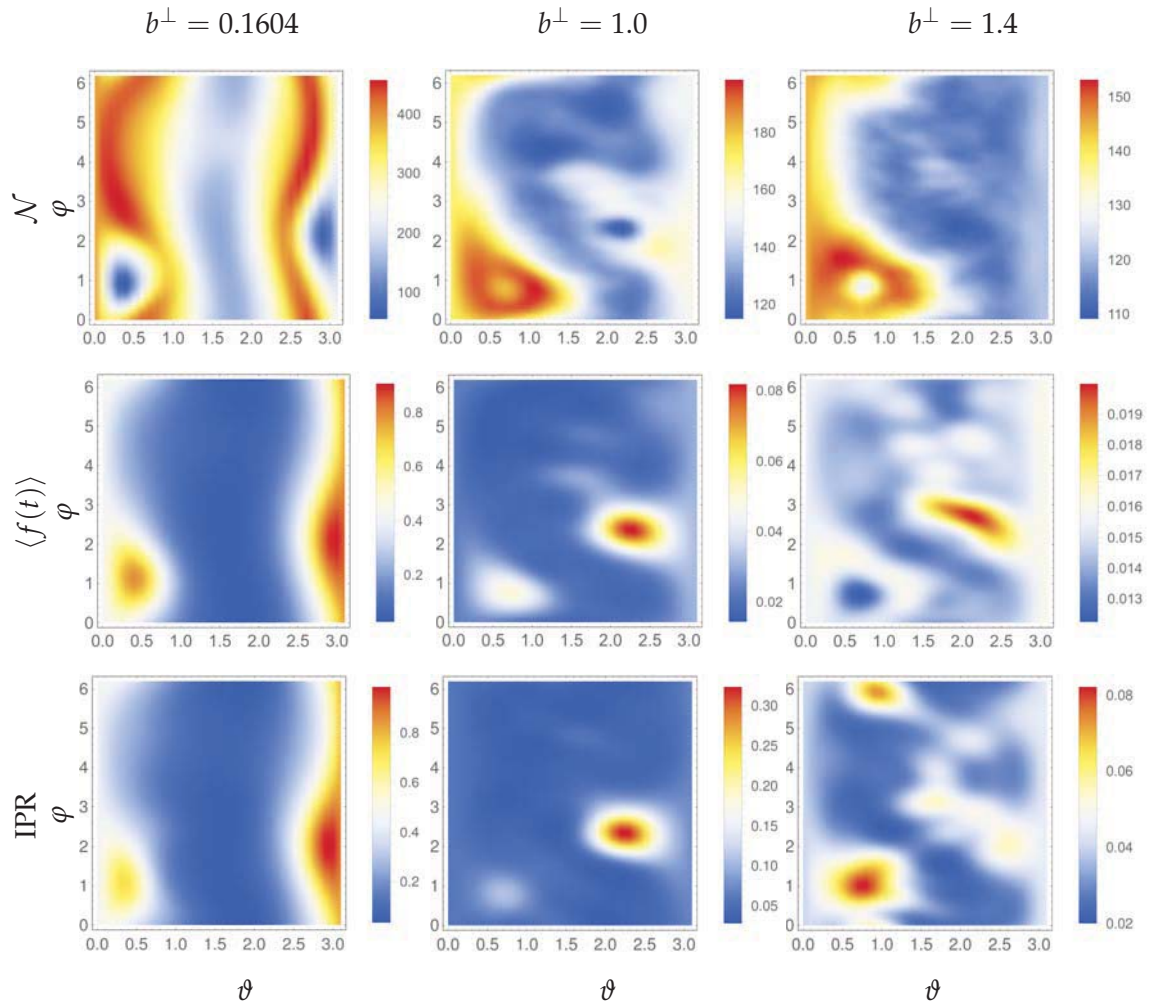


Figura 3.7: Gráficas de densidad de la NM, el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 10 qubits usando una perturbación homogénea en la interacción Ising V_J con $\delta = 0.1$.

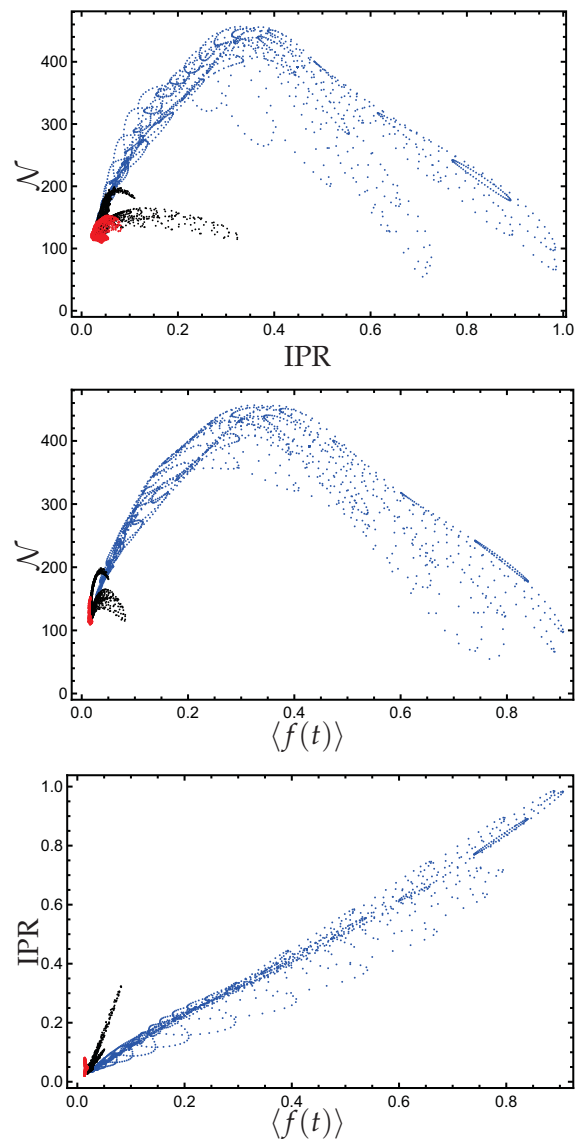


Figura 3.8: Relación entre la NM , el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$ para la cadena con 10 qubits, usando una perturbación homogénea en la interacción Ising V_{js} con $\delta = 0.1$. En azul el régimen integrable, en negro el mixto y por último en rojo el caótico.

Perturbación global en el campo, 10 qubits, $\delta = 0.01$

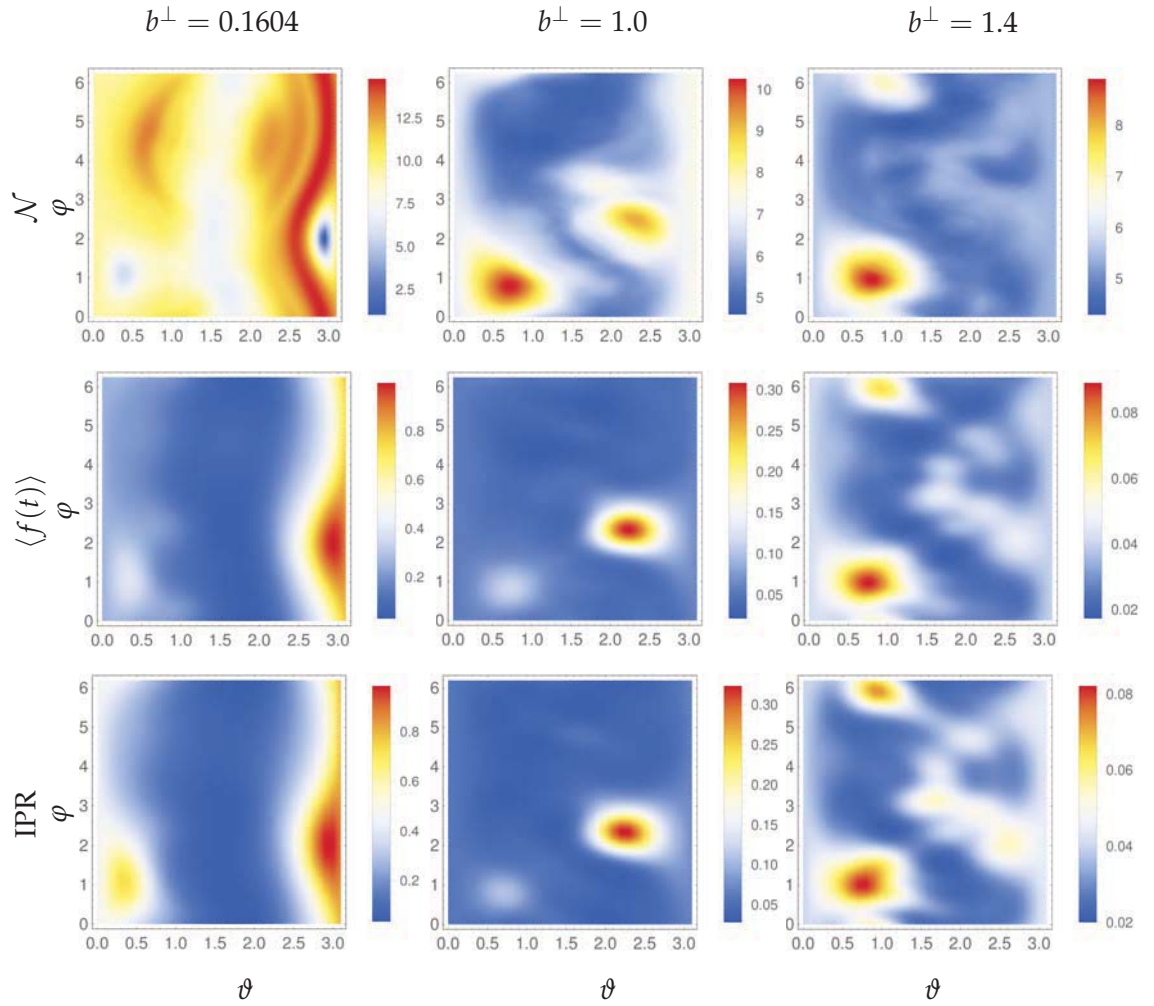


Figura 3.9: Gráficas de densidad de la NM , el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 10 qubits usando una perturbación homogénea en el campo magnético V_b con $\delta = 0.01$. La resolución es $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.05$.

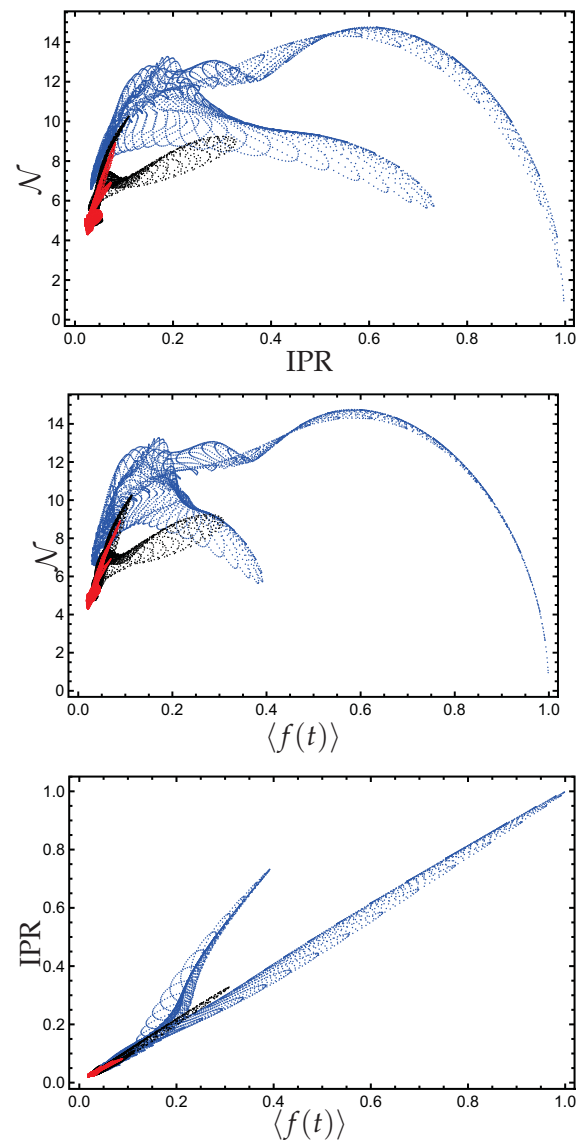


Figura 3.10: Relación entre la NM , el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$ para la cadena con 10 qubits, usando una perturbación homogénea en el campo magnético $V_b s$ con $\delta = 0.01$. En azul el régimen integrable, en negro el mixto y por último en rojo el caótico.

16 qubits, $\delta = 0.005$

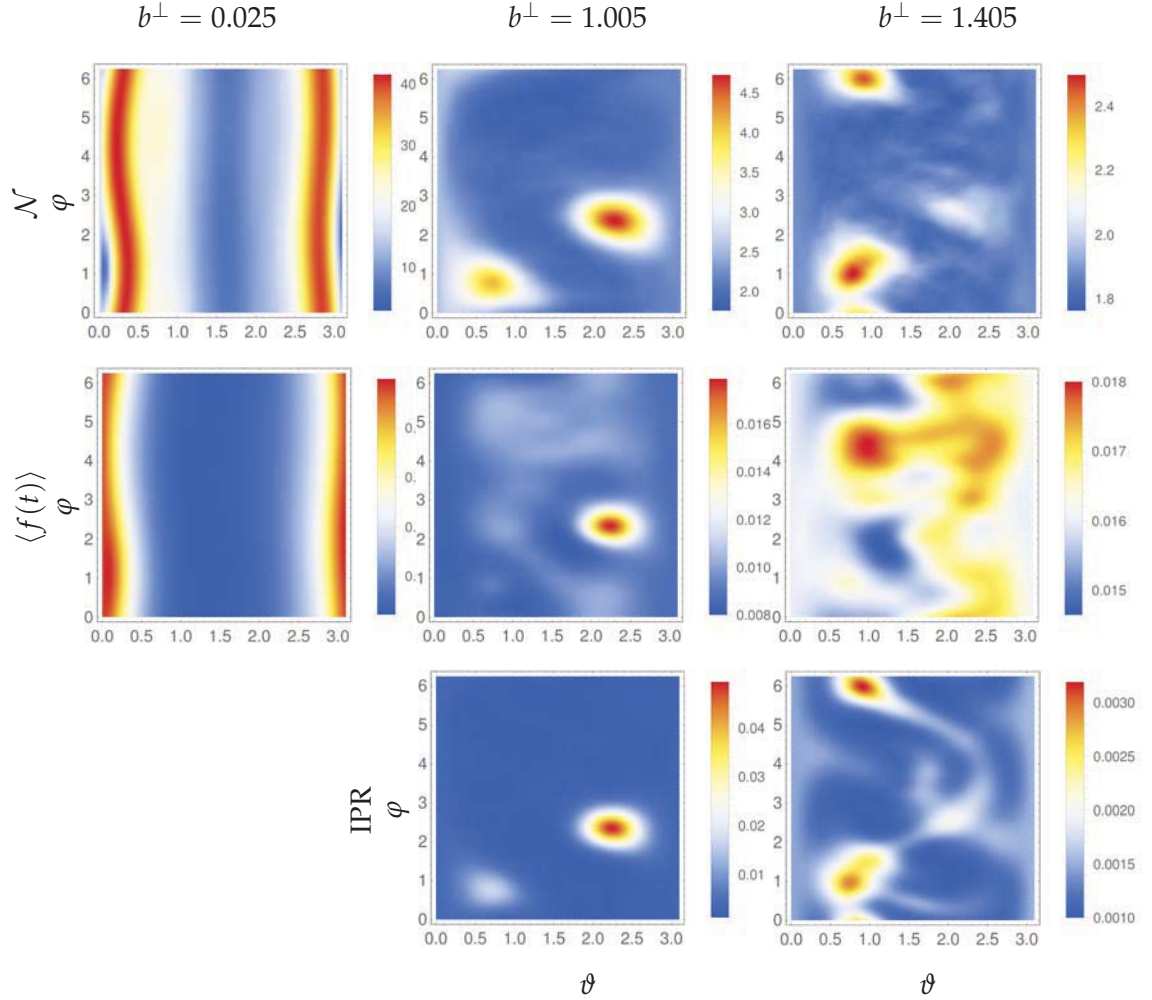


Figura 3.11: Gráficas de densidad de la NM, el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 16 qubits utilizando V_b . La perturbación en el campo es $\delta = 0.005$. La resolución es $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.05$. Se omitió la gráfica del IPR en el régimen integrable por problemas técnicos.

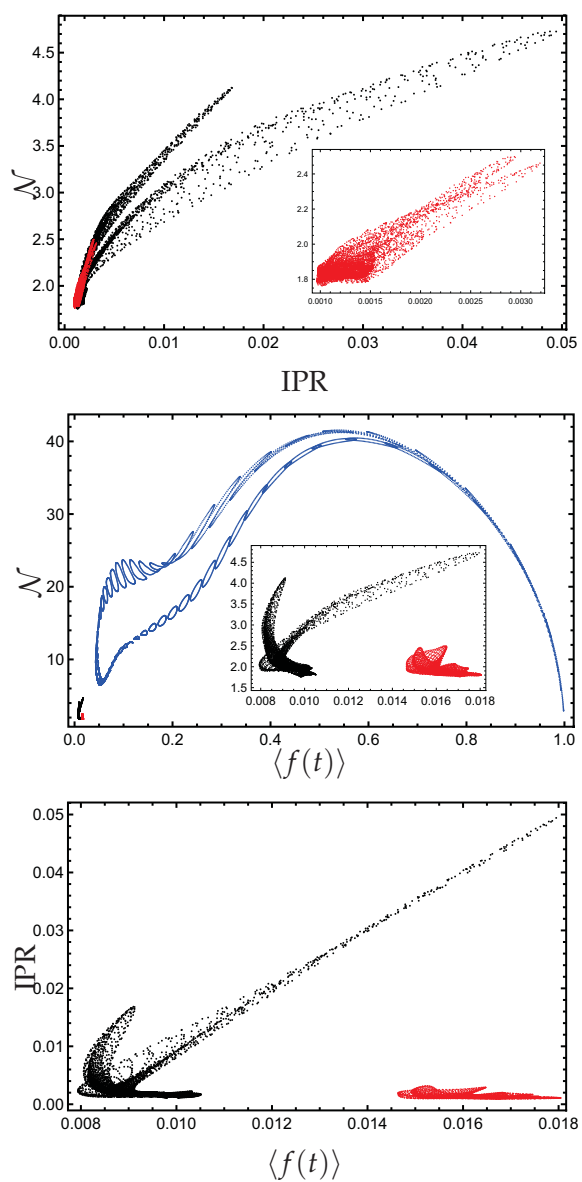


Figura 3.12: Relación entre el IPR y la no Markovianidad para la cadena de 16 qubits utilizando V_b , en azul el régimen integrable, en negro el mixto y por último, en rojo el caótico. En el recuadro presenta un zoom para el régimen caótico. Se omitió el IPR en el régimen integrable por problemas técnicos.

Perturbación global usando RMT

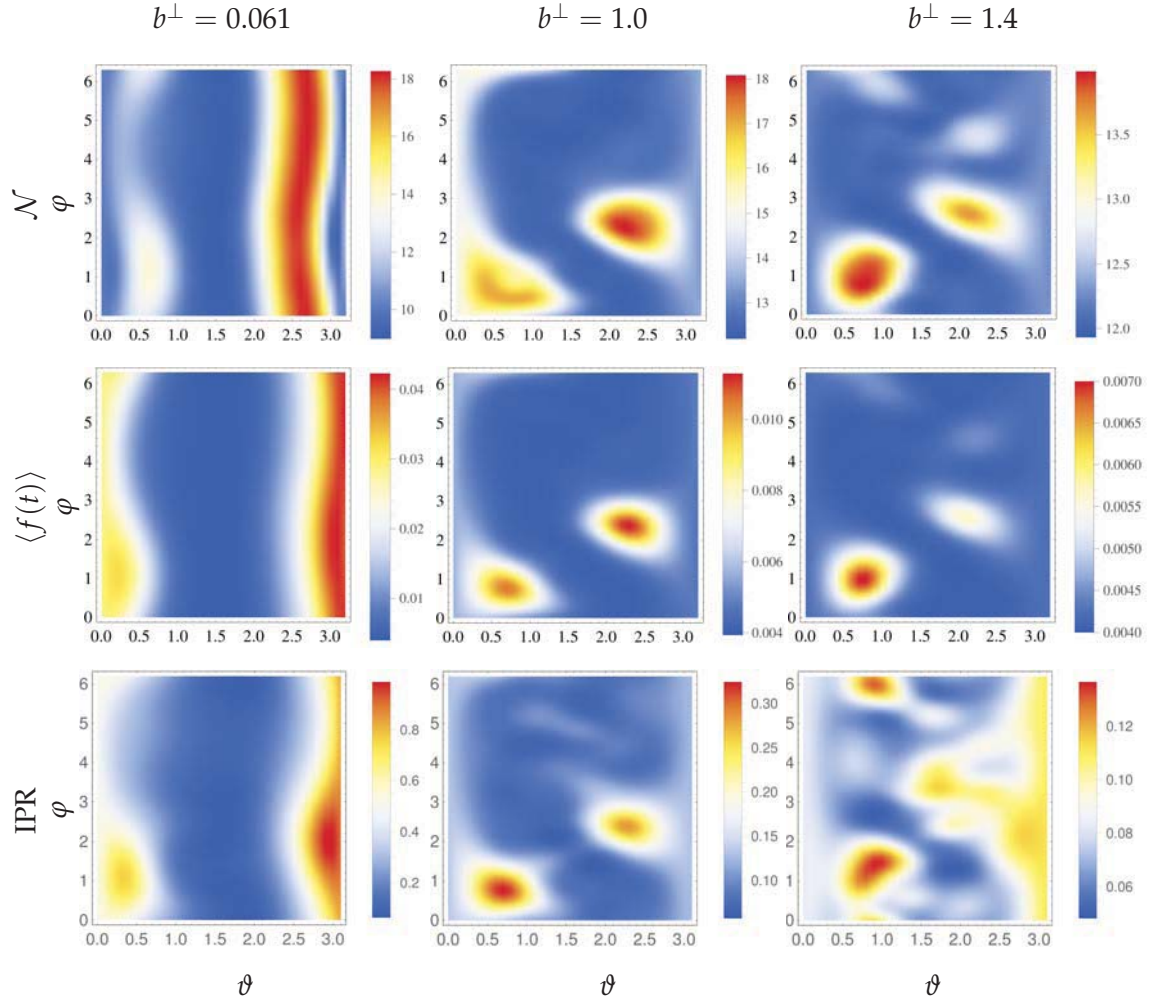


Figura 3.13: Gráficas de densidad de la NM, el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 8 qubits usando una perturbación del ensemble GUE con $\delta = 0.07$. La resolución de la malla es de $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.1$.

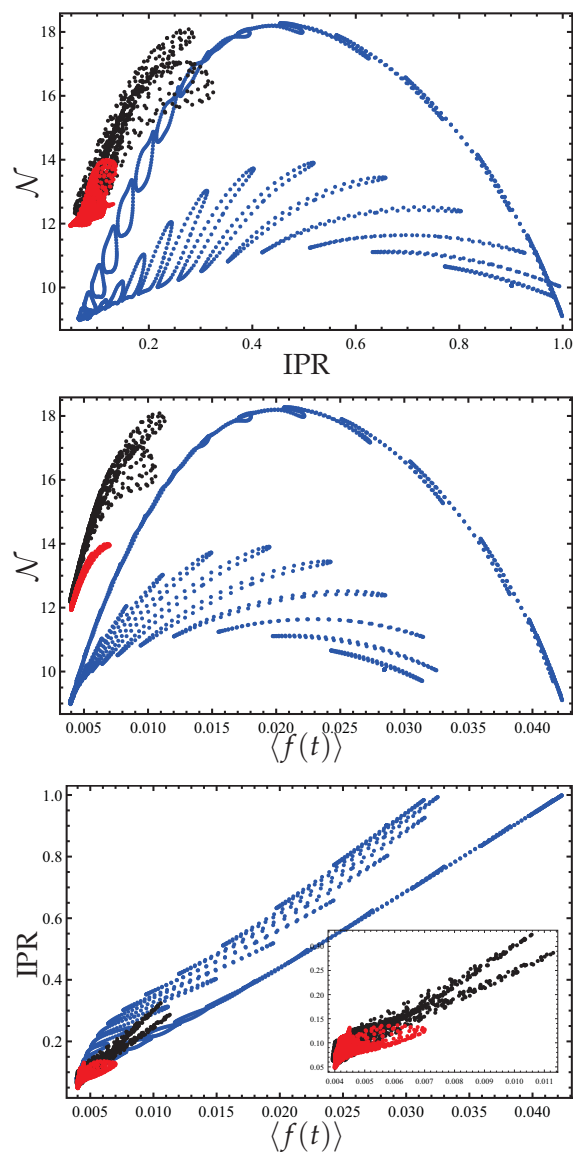


Figura 3.14: Relación entre la NM , el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ para la cadena de 8 qubits usando V_{GUE} . En negro aparece para el régimen mixto y en rojo para el caótico, el recuadro presenta un zoom para el régimen caótico.

3.5.2. Perturbaciones locales

En las figuras 3.15 se muestran las gráficas de densidad de la NM , el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ para la cadena con 10 qubits, con perturbación local en el campo V_0 , en la figura 3.16 la relación entre estas tres cantidades. De manera similar en las figuras 3.17 y 3.18 se muestran las gráficas de densidad y la relación entre las tres cantidades para la cadena de 10 qubits con perturbación local en la interacción Ising $V_{0,1}$.

Perturbación local en el campo, $\delta = 0.32$

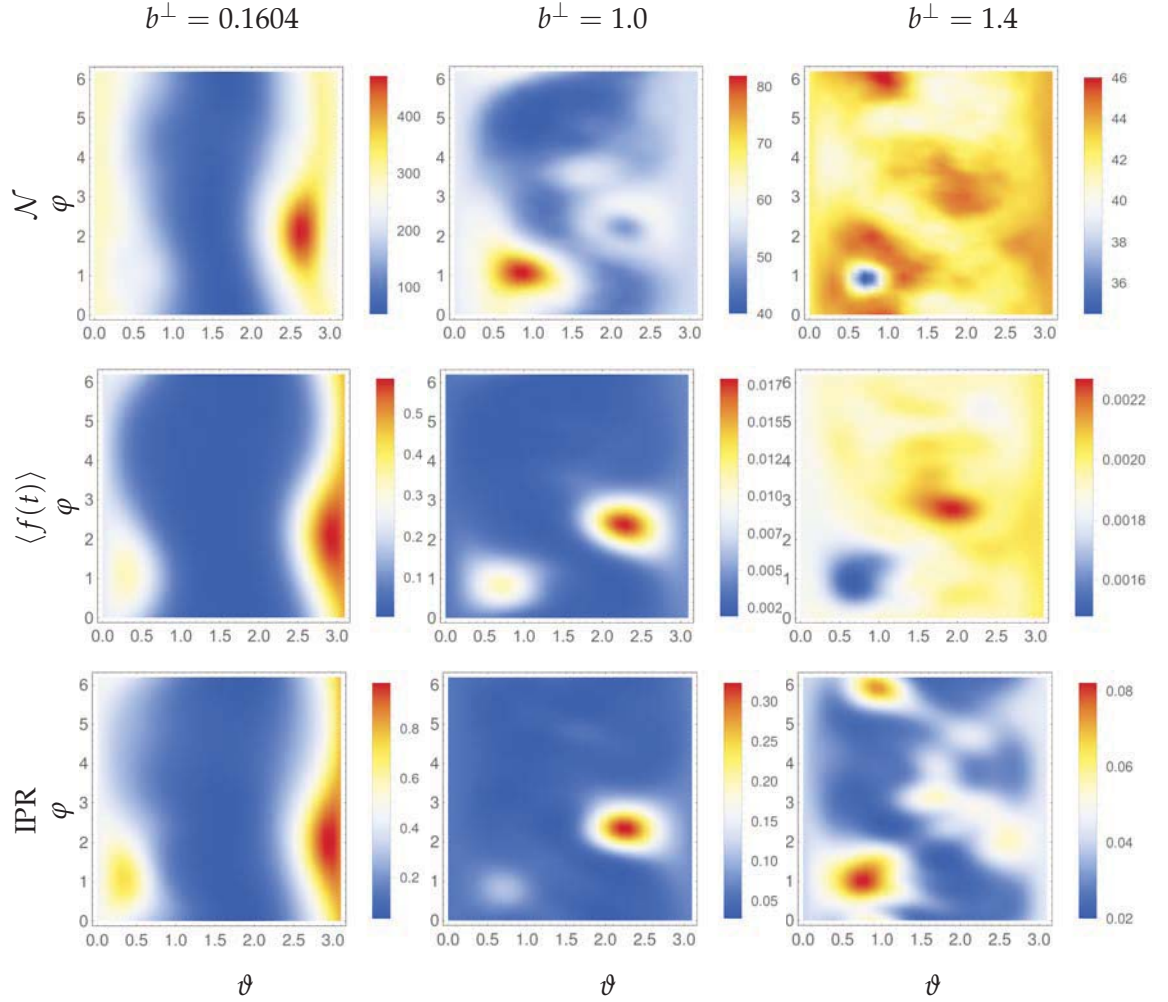


Figura 3.15: Gráficas de densidad de la NM , el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 10 qubits usando una perturbación local en el campo magnético V_0 con $\delta = 0.32$. La resolución de la malla es de $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.1$.

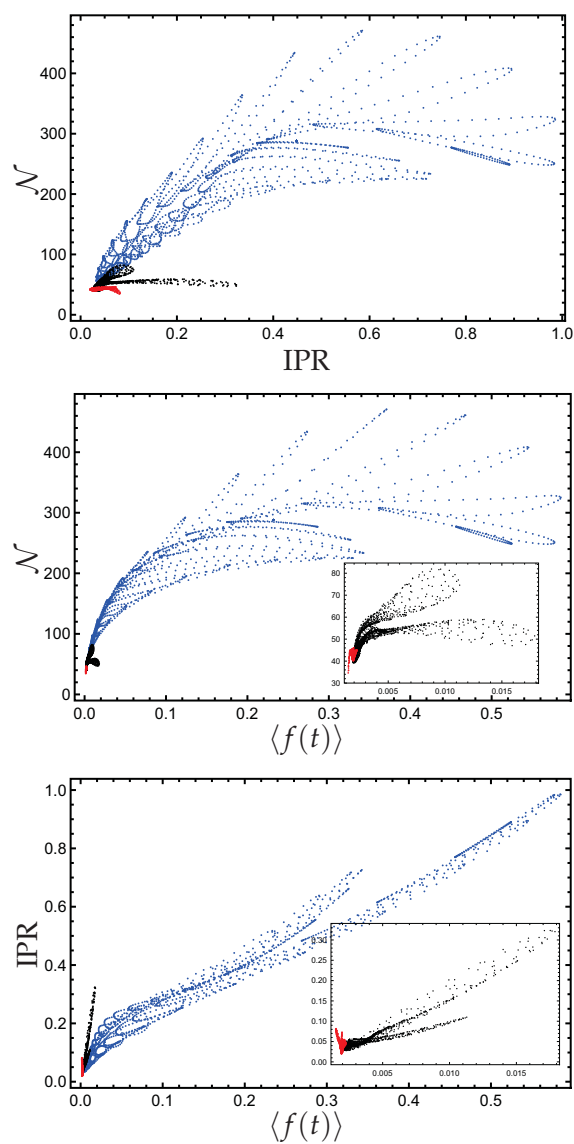


Figura 3.16: Relación entre la NM , el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ para la cadena de 10 qubits usando una perturbación local en el campo magnético V_0 . En negro aparece para el régimen mixto y en rojo para el caótico, el recuadro presenta un zoom para el régimen caótico.

Perturbación local en Ising, $\delta = 0.3$

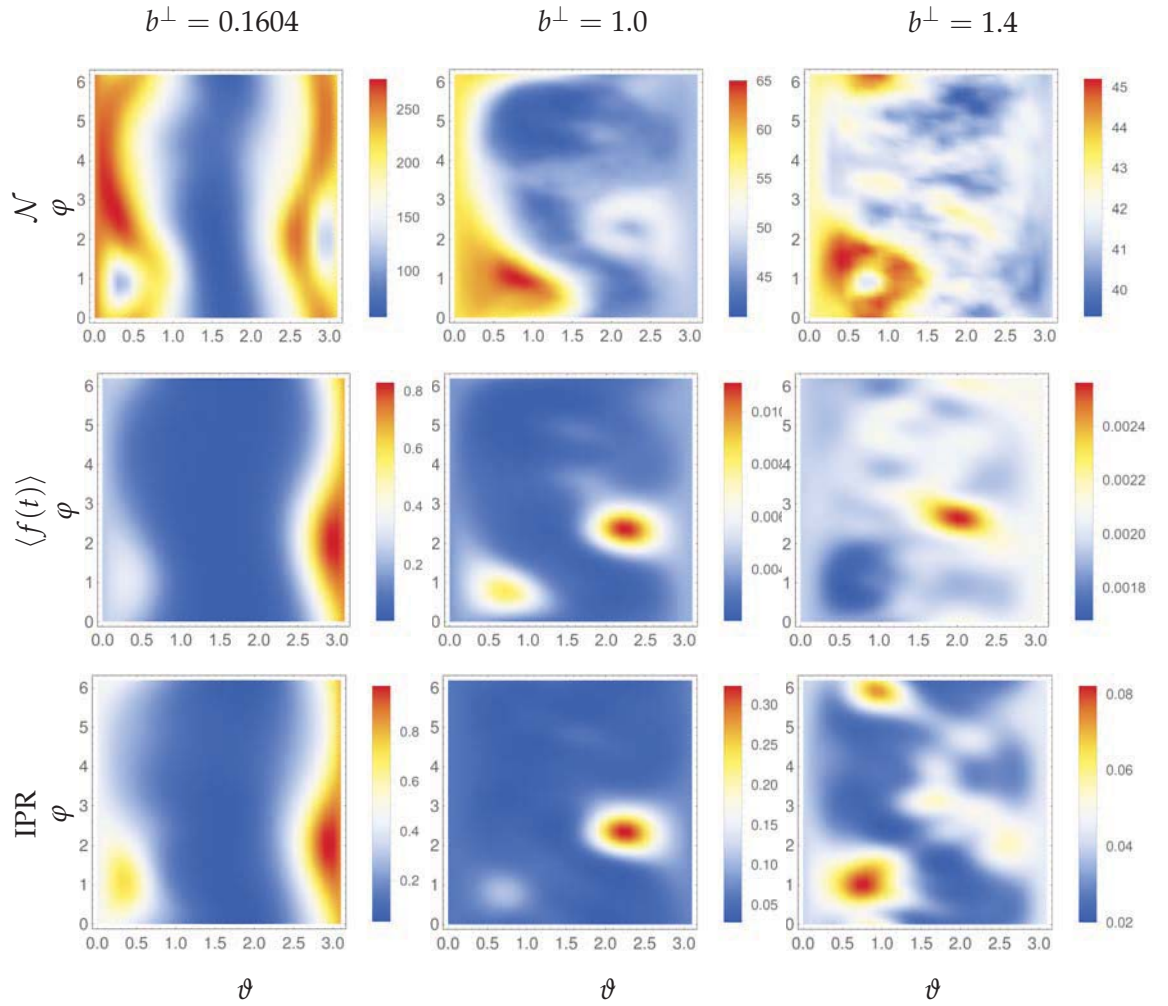


Figura 3.17: Gráficas de densidad de la NM, el IPR y la fidelidad asintótica $\langle f(t) \rangle$, para la cadena con 10 qubits usando una perturbación local en la interacción Ising $V_{0,1}$ con $\delta = 0.3$. La resolución de la malla es de $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.1$.

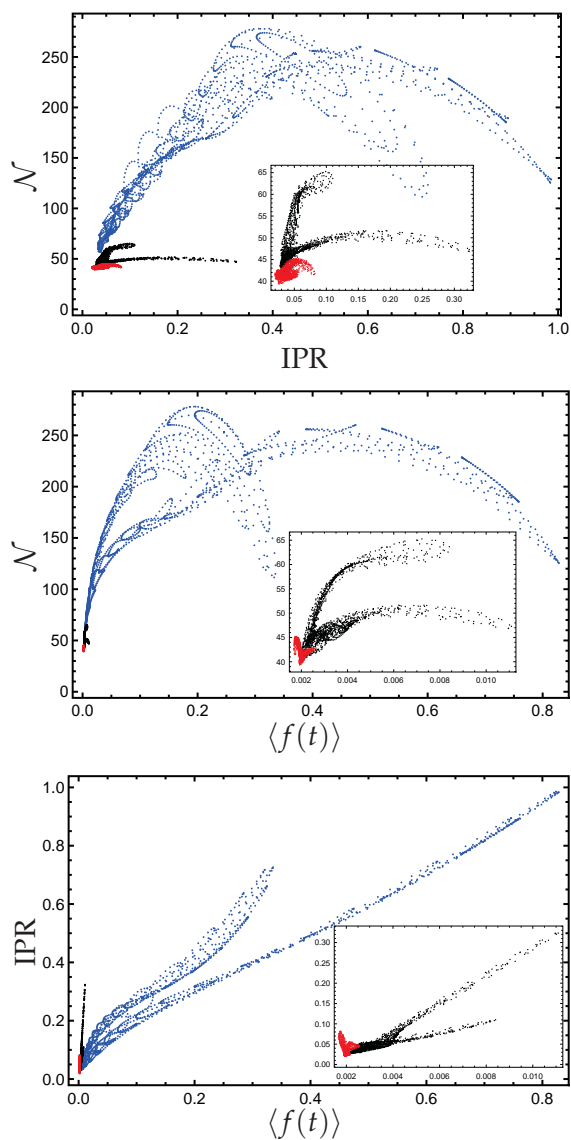


Figura 3.18: Relación entre la NM , el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ para la cadena de 10 qubits usando una perturbación local en la interacción Ising $V_{0,1}$. En negro aparece para el régimen mixto y en rojo para el caótico, el recuadro presenta un zoom para el régimen caótico.

3.6. Discusión

En todos los cálculos es notable que los valores típicos de la No Markovianidad decrecen en los regímenes mixto y caótico en relación a los valores en el régimen integrable, siendo de hasta un orden de magnitud para 16 qubits (fig.3.11). Por lo que el sistema es más Markoviano en la región mixta y caótica. Las regiones de no Markovianidad alta son típicamente muy similares entre todas las perturbaciones y todos los tamaños de sistemas. En particular son notorias las del régimen integrable y mixto, siendo las del caótico un poco más variadas en intensidad. En tanto a las figuras donde se muestra la relación entre la NM, el IPR y la $\langle f(t) \rangle$. Se observa que típicamente en el régimen integrable la relación entre la NM, el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ es complicada, los puntos forman grupos que a su vez dejan notar la tendencia de la NM. Esta última no es monótona y tiende a incrementar con la localización (y dimensión efectiva) de los estados, llegando a un umbral donde comienza a decrecer. Esto es muy notorio cuando se usa perturbación homogénea en la interacción Ising (fig.3.8). Una explicación a la anticorrelación que típicamente surge cuando la NM decrece conforme aumenta el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ es la siguiente: Al estar los estados del ambiente localizados, tienden a crear menos correlaciones entre este y el qubit, entonces, la información del qubit no se distribuye mucho entre este y el sistema total, llevando a que la dinámica sea Markoviana en este sentido, “la información no se va al ambiente”. En los regímenes mixto y caótico la localización de los estados coherentes decrece notablemente, colapsando en general a la nube de puntos en todas las gráficas donde se relacionan la NM, el IPR y la $\langle f(t) \rangle$. En especial en la cadena de 16 qubits (fig.3.11). Es notorio también que los puntos aparecen siempre en dos regiones, estas corresponden a los dos hemisferios de la esfera de Bloch colectiva, comenzando desde el ecuador hasta los polos. En la mayoría de los casos, en todos los regímenes dinámicos, la relación entre el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ es lineal (en cada una de las ramas de la esfera de Bloch colectiva) por lo menos hasta el régimen integrable. En este último se ve claramente que los estados localizados están cerca de los polos de la esfera de Bloch colectiva, esto es esperado puesto que estamos tomando un valor de b^\perp cerca de una región donde una eigenbase es la computacional ($b^\perp = 0$) y los estados de los polos son parte de ella. Encontrando que la región de estados localizados está cerca de los polos. En el régimen integrable siempre es notable la no Markovianidad tiende a disminuir en las regiones de localización más alta (muy cerca de los polos), puesto que como ya se mencionó arriba, estos estados no tienden

a formar muchas correlaciones entre el ambiente y el qubit.

En el régimen integrable, las perturbaciones locales muestran una escala mas grande de la NM respecto a los casos globales. Esto se debe a la poca complejidad que tiene la perturbación, llevando a frecuentes resurgimientos en la fidelidad. Para la perturbación con RMT surge la fenomenología antes dicha, la relación entre el IPR y la $\langle f(t) \rangle$ claramente tiene tendencia lineal. Así como la NM respecto a $\langle f(t) \rangle$ se muestra lineal para valores pequeños de $\langle f(t) \rangle$, lejos del umbral donde la tendencia cambia, formándose la región donde la NM comienza a disminuir con la $\langle f(t) \rangle$ (y el IPR). Cabe señalar que aunque el comportamiento de la NM respecto a la $\langle f(t) \rangle$ se mantiene parecida a la de los otros casos (fig.3.14), la escala de la fidelidad asintótica disminuye considerablemente. Esto es debido a que la perturbación con la que se calcula el eco es muy complicada, por lo que típicamente no hay resurgimientos considerables en la escala de tiempo. Para la perturbación con RMT, en el régimen integrable surge de manera suave la anticorrelación de la NM con la $\langle f(t) \rangle$ y el IPR en una de las ramas, mientras que para la otra el comportamiento es un poco mas complicado. Para la cadena de 16 qubits y acoplamiento muy débil. En el régimen integrable se nota claramente la región de NM justo después de los estados con mayor localización. En el mixto la relación de la NM con el IPR básicamente es monótono (en cada rama) mientras que en función de la fidelidad, una de las ramas de puntos se deforma, mientras que la otra exhibe un comportamiento monótono. Reflejándose esto en la región única de $\langle f(t) \rangle$ alta que aparece en el régimen mixto (fig.3.11). En el régimen caótico la relación entre la NM y la $\langle f(t) \rangle$ se ve carente de estructura, mientras que se mantiene monótono respecto al IPR. Como notas finales, cabe señalar que en el régimen mixto, la región de NM alta suele aparecer en la segunda región mas localizada, encontrando típicamente mínimos locales en las regiones mayormente localizadas (excepto para la cadena con 16 qubits, fig.3.11). En casos la cadena con perturbación local en la interacción Ising V_J , la relación de la NM con el IPR es de tal forma tal que en los máximos de localización aparece repentinamente un mínimo local en la NM, incluso en el régimen caótico (fig.3.17).

Resumen de lo observado:

- Disminución de la NM en función del régimen dinámico, el sistema tiende a ser Markoviano en el régimen caótico.
- La NM disminuye considerablemente en el régimen mixto y caótico cuando aumenta la dimensión del sistema.
- Los puntos en las gráficas de NM vs. IPR (vs. $\langle f(t) \rangle$) se comprimen

al pasar del régimen integrable al caótico. Esta compresión se hace mas notoria conforme aumenta la dimensión del sistema.

- Aparición de anticorrelaciones entre la NM y la localización (y en seguidas ocasiones respecto a $\langle f(t) \rangle$) después de cierto valor máximo de NM , donde esta ultima disminuye al aumentar la localización de los estados.
- El punto anterior se refleja en las gráficas de densidad, puesto que la zona de NM alta suele ser la segunda zona mas localizada en el régimen mixto. Llevando en varios casos a la NM a tener mínimos locales en máximos de localización incluso en los regímenes caóticos.

Capítulo 4

Hacia una nueva medida de no-Markovianidad

4.1. Definición y exploración de algunos casos limite

4.1.1. No Markovianidad medida por el mayor resurgimiento

Como se introdujo en la sección 2.2, las medidas mas conocidas (RHP y BLP) son construidas integrando una medida diferencial de la violación de la *CP-divisibility* o del incremento en la distinguibilidad de los estados, según sea RHP o BLP respectivamente. Construcciones similares se han utilizado para cuantificar NM basada en la no monotonicidad de capacidades cuánticas [BCM14].

Consideremos el espacio convexo de canales cuánticos Λ_t y una curva continua en este, parametrizada por el tiempo $0 \leq t < \infty$ y comenzando con la identidad, $\Lambda_0 = \mathbb{1}$. Llamaremos a esta curva un proceso cuántico. Cualquier recurso de interés será una función en el espacio de los canales cuánticos, Entonces a cualquier proceso cuantico se le puede asignar la función

$$K(t) = \mathcal{K}[\Lambda_t], \quad (4.1)$$

para cuantificar el recurso que el canal provee al tiempo t . Postulando que $K(t)$ no puede incrementar durante un proceso Markoviano, uno define la función

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda] = \int_{\dot{K}>0} \dot{K}(\tau) d\tau, \quad (4.2)$$

como medida de no Markovianidad. Usaremos el superíndice “ ∞ ” para este tipo de medidas puesto que uno tiene que añadir infinito numero

de contribuciones en general (todos los intervalos con $\dot{K} > 0$). Podemos derivar inmediatamente un criterio de no Markovianidad, $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda] > 0$. Entre las medidas que siguen este esquema se encuentran todas las ya mencionadas, en la medida RHP tenemos que $\dot{K} = g(t)$, en la medida BLP, $\dot{K} = D[\rho_1(t), \rho_2(t)]$, y por último en las medidas basadas en la no monotonicidad de las capacidades cuánticas $\dot{K} = \dot{C}(t), \dot{Q}(t)$ según se use la capacidad clásica asistida con enredamiento (*entanglement assisted quantum capacity*) ó la capacidad cuántica. Mas adelante se introducirán estas capacidades. Esta construcción, que incluye la contribución de un numero infinito de intervalos donde $\dot{K} > 0$ puede resultar en propiedades inconvenientes. Por ejemplo $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda]$ tiende a sobrevalorar pequeñas fluctuaciones en $K(t)$, que típicamente ocurren para sistemas con ambiente de dimension finita, estadística finita así como fluctuaciones experimentales. Esto puede llevar a la divergencia en la medida. Como solución a esto se pueden incorporar normalizaciones tal como la discutida en [RHP10], donde los autores consideran una versión de medida de no Markovianidad como $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda](q + \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda])^{-1}$, con $a = 1$. Sin embargo esta normalización es completamente arbitraria, así como cualquier otra escala de a puede ser aceptable.

Consideraremos aquí una modificación simple de la construcción anterior que evita esos problemas y lleva a una interpretación física clara de las medidas de NM resultantes. La modificación consiste de considerar solo el resurgimiento más grande de $K(t)$, ya sea respecto a (i) su valor mínimo antes del resurgimiento ó (ii) respecto al promedio antes del resurgimiento. Entonces tenemos

$$\mathcal{M}^{\text{máx}}[\Lambda_t] = \text{máx}_{\tau \leq t_f} \left[K(\Lambda_{t_f}) - K(\Lambda_{\tau}) \right] \quad (4.3)$$

en el primer caso y

$$\mathcal{M}^{(\cdot)}[\Lambda_t] = \text{máx} \left\{ 0, \text{máx}_{t_f} \left[K(\Lambda_{t_f}) - \langle K(\Lambda_{\tau}) \rangle_{\tau < t_f} \right] \right\} \quad (4.4)$$

en el segundo. $\langle \cdot \rangle_{\tau < t_f}$ denota el promedio en el tiempo hasta t_f . En el primer caso, estamos asumiendo el resurgimiento más grande en el intervalo de tiempo $[0, \tau_{\text{máx}}]$ mientras que en el segundo, medimos el resurgimiento, pero respecto al comportamiento promedio antes de este tiempo. Nótese que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}[\Lambda_t] \leq \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}}[\Lambda_t] \quad (4.5)$$

ya que $\langle K(\tau) \rangle_{\tau < \tau_{\text{máx}}} \geq \text{mín}_{\tau < \tau_{\text{máx}}} K(\tau)$. Por otra parte, nótese también que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t] > 0 \iff \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}}[\Lambda_t] > 0, \quad (4.6)$$

mientras que no se encontró una relación similar para $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$. De hecho, veremos mas adelante que el comportamiento no-monótono garantiza un valor positivo para $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$.

4.1.2. No Markovianidad como recurso: *quantum vault*

Consideremos un sistema cuántico que es usado para guardar y recuperar información en base a la preparación de estados y mediciones. Este sistema esta acoplado a un ambiente inaccesible y su dinámica esta descrita por un proceso cuántico. Para usar el sistema, Alice codifica su información (la cual puede ser clásica o cuántica) en un estado cuántico. Entonces, en algún tiempo posterior Alice trata de recuperar su información una vez propagado el estado. La capacidad del dispositivo depende en el monto de información que puede ser guardada y recuperada fielmente de el. Durante el tiempo en el que la información esta guardada, el dispositivo puede estar expuesto a un ataque por un intruso, Eva. Algunos puntos sobre Eva deben ser señalados. Ella tiene probabilidad finita de atacar, y si lo hace destruirá el estado cuántico. Asumiremos que Alice estará atenta si se produjo un ataque para así descartar el estado. Se considera un buen *quantum vault* aquel que garantiza que Alice puede obtener su información con mucha confianza y que entre la preparación del estado y la medición, la información es difícil de recuperar.

El proceso, hasta la medición de Alice o de Eva, esta descrito por un proceso cuántico Λ_{τ} , mientras que la información estará cuantificada por la capacidad \mathcal{K} . Los tiempos considerados son $0 \leq \tau < t_f$, con t_f siendo el tiempo en que Alice trata de recuperar la información. La información promedio que puede ser obtenida por Eva por cada ataque es entonces $\langle K \rangle$, donde el promedio se toma durante la operación del *quantum vault*. Aquí consideramos que si Eva ataca, solo lo hace una vez, puesto que el ataque destruye el estado de cualquier forma. Si Eva ataca con probabilidad q , en promedio ella obtendrá la información $q\langle K \rangle$. Entonces, la información promedio que puede ser obtenida por Alice será solamente $(1 - q)K(t_f)$. Consideraremos como figura central la diferencia entre la información promedio obtenida por Alice, y la obtenida por Eva:

$$\Delta K_q = (1 - q)K(t_f) - q\langle K \rangle. \quad (4.7)$$

Nótese que esta cantidad puede ser negativa, cuando Eva en promedio obtiene mas información que la que Alice puede recuperar. Finalmente, podemos definir la eficiencia del *quantum vault* como $\eta_q = \Delta K_q / K_{\text{máx}}$, con

$K_{\text{máx}} = \mathcal{K}[\mathbb{1}]$. Un buen *quantu vault* debería tener entonces una eficiencia cercana a 1.

Asumiendo que \mathcal{K} esta normalizada en tal forma que $p = K/K_{\text{máx}}$ es la probabilidad de que el mensaje codificado en el estado sea recuperado. un procedimiento exitoso puede ser definido como aquel en el que, si Eva ataca, ella no ganara información ó aquel en el que simplemente ella no ataca. Alice recupera entonces su información exitosamente. De las consideraciones mencionadas, uno puede ver que la probabilidad de tener un procedimiento exitoso esta dada por

$$P_q = q(1 - \langle p(t) \rangle) + (1 - q)p(t_f) = \eta_q + q. \quad (4.8)$$

Respecto a esta probabilidad, deberíamos asociar un factor de calidad para el canal, como *quantum vault*, esta es simplemente la probabilidad de arriba, pesada por la capacidad del canal, esto es

$$\mathcal{N}_q = K_{\text{máx}}P_q = \Delta K_q + qK_{\text{máx}} \quad (4.9)$$

4.1.3. Algunos casos particulares

Discutiremos ahora ΔK_q y \mathcal{N}_q para algunos ejemplos particulares y así establecer su relación con $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$. Primero examinaremos el escenario menos deseable: $q \approx 1$. Por definición, si Eva ataca ella destruye el estado. Este hecho esta reflejado en ΔK_q , el cual puede ir desde el valor mínimo $-K_{\text{máx}}$ (pero eficiencia η_q) a $\Delta K_q = 0$ (QV pobre), cuando $\langle K(t) \rangle \approx 0$. \mathcal{N}_q por otro lado toma valores desde $\mathcal{N}_q = 0$ (*i.e.* QV malo) a $\mathcal{N}_q = K_{\text{máx}}$. En el último caso, un valor grande de \mathcal{N}_q debido a un valor pequeño de $\langle K \rangle$ evidencia el echo de que Eva esta imposibilitada de obtener algo. En el mejor escenario, $q \ll 1$, evidentemente la eficiencia del la bóveda estará dada por $K_{\text{máx}}$, entre mayor sea, mejor QV .

Analicemos ahora el caso general. Tomaremos solo el caso en el que $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} > 0$, *i.e.* de la ecuación 4.4 hay por lo menos un t_f para el cual $\langle K \rangle < K(t_f)$. La primera relación entre el QV y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ que encontramos es

$$\text{mín}(1 - q, q) \times \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} \leq \Delta K_q \leq \text{máx}(1 - q, q) \times \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}, \quad (4.10)$$

esta relación establece las cotas inferior y superior del QV . Podemos asumir que no tenemos nada información sobre la probabilidad de ataque por parte de Eva, lo cual es razonable, por lo que maximizando la

entropía tenemos $q = 1/2$. Para este caso imparcial tenemos

$$\Delta K_{1/2} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}, \quad \mathcal{N}_{1/2} = \frac{1}{2} (K_{\text{máx}} + \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}) \quad (4.11)$$

Estas ecuaciones relacionan la medida de NM propuesta con la posibilidad de realizar la tarea descrita en la sección anterior. Por lo que esta medida tiene un significado operacional.

En la fig.4.1 se muestran algunos de los ejemplos que uno puede encontrar para $K(t)/K_{\text{máx}}$. En el primero (arriba a la izquierda) tenemos $\langle K \rangle \approx 0$, $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} \approx K(t_f)$, y

$$\Delta K_q \approx (1 - q) \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}, \quad (4.12)$$

entonces, para un valor fijo de q , un valor grande de $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ implica mucha eficiencia. Este es de hecho el escenario ideal para el QV, puesto que la mayor parte del tiempo la información esta escondida e inaccesible para Eva, así al tiempo t_f Alice puede recuperar su información. Si $\langle K \rangle$ es muy grande, cerca de $K_{\text{máx}}$ (e. g. arriba a la derechas), por lo que por definición el canal no es un buen QV: gran proporción de la información esta disponible todo el tiempo antes de t_f . Aquí $K(t_f) < \langle K \rangle$ (por lo tanto la ecuación 4.10 no es valida), sin embargo la única posibilidad de tener una buena eficiencia es en el caso trivial de $q \rightarrow 0$. Si por otro lado, $\langle K \rangle$ y $K(t_f)$ son ambos pequeños (e. g. abajo a la izquierda), nuevamente $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} \approx 0$, hay poca posibilidad de recuperar la información, incluso para q pequeña, arrojando poca eficiencia \mathcal{N}_q . Para q grande, $\mathcal{N}_q \approx q K_{\text{máx}}$ puede ser grande. Esta interpretación del valor grande de \mathcal{N}_q significa que es muy probable que Eva ataque pero sin robar información. Finalmente, consideramos el caso en el que $K(t)$ decae monotonamente excepto por un resurgimiento (figura 4.1 abajo a la derecha). En este caso, si $K(t_f) < \langle K \rangle$, entonces $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} = \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}} = 0$, y no hay conexión entre ΔK_q (o \mathcal{N}_q) y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$. Por otro lado si $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} > 0$, la eficiencia esta acotada por 4.10, que para $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ máximo, el caso es equivalente al de la figura 4.1 (arriba a la izquierda).

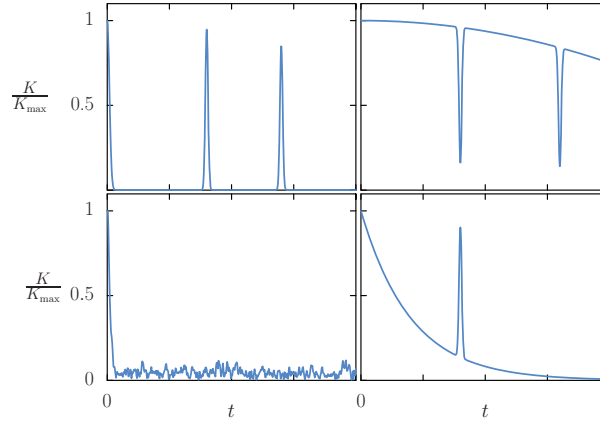


Figura 4.1: Ejemplos esquematicos de K .

4.2. Modelo Jaynes Cummings y resultados

Como ejemplo físico concreto para probar las medidas propuestas, analizaremos el modelo Jaynes-Cummings no Markoviano [JC63]. Este modelo ha sido una herramienta primordial en la óptica cuántica, en el estudio del decaimiento del entrelazamiento, *squeezing* y efectos de memoria entre muchas otras aplicaciones. Tomaremos ventaja de este modelo dado que mucho es conocido analíticamente.

4.2.1. Jaynes-Cummings no Markoviano

En este modelo, un átomo de dos niveles está acoplado a un baño de bosones inicialmente en el estado de vacío. Como veremos más adelante este modelo se describe con un canal cuántico degradable. El Hamiltoniano del sistema se escribe como sigue: $H = H_0 + H_I$, donde H_0 es el Hamiltoniano libre del átomo más el del campo, y H_I es el Hamiltoniano de interacción entre ellos. En particular:

$$H_0 = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k, \quad (4.13)$$

donde σ_\pm son los operadores de “subida” y “bajada” del átomo, ω_0 es la diferencia de energía entre los dos niveles en el átomo, b_k y b_k^\dagger son los operadores de creación y aniquilación del modo k -ésimo del baño, y ω_k su frecuencia. El Hamiltoniano de interacción está dado por:

$$H_I = \sigma_+ \otimes B + \sigma_- \otimes B^\dagger, \text{ con } B = \sum_k g_k b_k \quad (4.14)$$

con $B = \sum_k g_k b_k$ y g_k es el acoplamiento del qubit al modo k . El modelo lleva al siguiente canal:

$$\Lambda_t[\rho(0)] = \begin{pmatrix} 1 - |G(t)|^2 \rho_{ee}(0) & G(t) \rho_{be}(0) \\ G^*(t) \rho_{eb}(0) & |G(t)|^2 \rho_{ee}(0) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

La función $G(t)$ es solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{dG(t)}{dt} = - \int_0^t d\tau f(t-\tau) G(\tau), \quad (4.16)$$

con $G(0) = 1$. $f(t-\tau)$ es la función de correlación de dos puntos del reservorio,

$$f(t-\tau) = \langle 0|B(t)B^\dagger(\tau)|0\rangle e^{i\omega_0(t-\tau)}, \quad (4.17)$$

donde $|0\rangle$ es el estado de vacío del baño de bosones. En este trabajo exploramos el modelo para un baño Lorentziano cuya función de correlación esta dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 \lambda e^{-|t|(\lambda-i\delta)}, \quad (4.18)$$

donde γ_0 es la intensidad del acoplamiento sistema-reservorio, λ es la anchura del espectro, que esta relacionada al tiempo de correlación del reservorio, $\tau_{\text{corr}} = \lambda^{-1}$, y $\delta = \omega_r - \omega_0$ es el desentonamiento, donde ω_r es el pico de frecuencia del reservorio. La expresión para $G(t)$ dada la función de correlación se escribe como sigue:

$$G(t) = e^{-\frac{1}{2}t(\lambda-i\delta)} \left[\frac{(\lambda-i\delta)}{\Omega} \sinh\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right], \quad (4.19)$$

donde $\Omega = \sqrt{-2\gamma\lambda + (\lambda-i\delta)^2}$.

4.2.2. Medidas de NM del canal

Para este canal se calculo el QV y las medidas de NM discutidas en el capítulo 2 y las definidas en [BCM14]. En tanto a estas últimas, K se toma como la capacidad cuántica y la capacidad clásica asistida con enredamiento, \mathcal{Q} y \mathcal{C} respectivamente. La primera establece el monto máximo de información cuántica por uso del canal que puede ser transmitida de manera fiable desde Alice a Bob. La segunda similarmente establece una cota máxima pero de información clásica cuando Alice y Bob pueden compartir un monto ilimitado de enredamiento. La expresión general de la capacidad cuántica esta dada por [Llo97, Dev05, Sho02]

$$\mathcal{Q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{Q}^{(1)}(\Lambda_t^{\otimes n})}{n}, \quad (4.20)$$

donde $Q^{(1)}$ es la capacidad cuántica de un solo uso del canal y esta dada como la maximización de la *información coherente*,

$$Q^{(1)} := \max_{\rho} I_{\text{coh}}(\rho, \Lambda_t).$$

Aunque la definición clama por una *regularización* debido a la superaditividad de la información coherente, los canales degradables tienen la ventaja operacional que la fórmula de un uso del canal es aditiva y coincide con la fórmula general, i. e. $Q = Q^{(1)}$. Para $|G(t)|^2 > 1/2$ el amplitud damping channel es degradable y la capacidad cuántica puede ser calculada con la fórmula [cita 28 de Sabrina]:

$$Q = \max_{p \in [0,1]} \{H_2(|G(t)|^2 p) - H_2((1 - |G(t)|^2)p)\}, \quad (4.21)$$

y 0 en otro caso. La situación es diferente para la capacidad clásica ya que la definición no clama por una regularización debido a la aditividad de la *quantum mutual information*, para el canal en discusión, el cómputo de la capacidad es el siguiente:

$$C = \max_{p \in [0,1]} \{H_2(p) + H_2(|G(t)|^2 p) - H_2((1 - |G(t)|^2)p)\}. \quad (4.22)$$

Además tomamos K como la *trace distance* de los estados que definen la medida BLP, $\mathcal{K} = \mathcal{D}$ (aquellos que maximizan las fluctuaciones en la distancia), para este canal esta distancia está dada en términos de $G(t)$ por []:

$$\sigma(t, \rho_S^{1,2}) = |G(t)| \quad (4.23)$$

	δ/λ	$\mathcal{M}_Q^{(\cdot)}$	\mathcal{M}_Q^{\max}	\mathcal{M}_Q^{∞}
—	0	0.4072	0.6419	1.4322
—	40	0.4301	0.8154	4.4928
--	80	0.2564	0.4963	6.0953
--	150	0.1210	0.2309	4.7588

Cuadro 4.1: La tabla muestra las medidas tratadas en este trabajo utilizando las capacidades cuánticas mostradas en la figura. 4.2.

La figura 4.3 muestra una comparación entre las medidas $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}$, introducidas en este trabajo, y su contraparte $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$. Las medidas con respecto al promedio $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ son notoriamente más pequeñas que

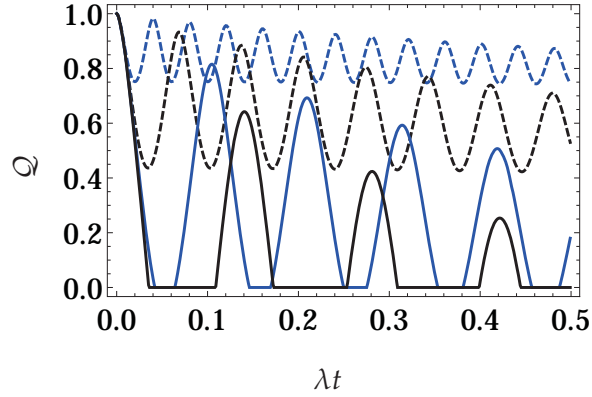


Figura 4.2: Capacidades cuánticas del modelo Jaynes-Cummings con acoplamiento fuerte $\gamma/\lambda = 1000$. Las líneas solidas corresponden a $\delta/\lambda = 0$ (negro), $\delta/\lambda = 40$ (azul). las cruvas discontinuas a $\delta/\lambda = 80$ (negro), $\delta/\lambda = 150$ (azul).

las que otras. De hecho uno encuentra que $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} \leq \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}}$, de acuerdo con (4.6), y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}} \leq \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$.

Las medidas relacionadas con el criterio BLP (líneas punteadas) se comportan de manera similar en los tres casos, decayendo de monotonamente con δ/λ . En el caso de la capacidad clásica asistida con entrelazamiento, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}$, estas también decaen monotonamente. Sin embargo, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)}$ tiene un mínimo en $\delta/\lambda \approx 3$. Más allá de ese punto $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)}$ incrementa un poco más, pero finalmente decae a cero. En esta región, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)} = \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ la cual es mostrada en la fig.4.4. Las medidas relacionadas con la capacidad cuántica (líneas solidas) muestran el comportamiento más complicado. $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\text{máx}}$ son iguales a cero hasta $\delta/\lambda \approx 3$, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ es igual a cero hasta $\delta/\lambda \approx 5$. Mas allá de esos puntos, las medidas incrementan linealmente. Desde $\delta/\lambda \approx 6.5$. Desde $\delta/\lambda \approx 6.5$ hacia adelante, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\text{máx}}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ alcanzan las sus correspondientes curvas para la capacidad clásica. Para algunos valores grandes de δ/λ esto también ocurre para la $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$. El hecho de que para las capacidades cuánticas $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\text{máx}}$ empiecen a ser diferentes de cero al mismo punto, $\delta/\lambda \approx 3$, ilustra la ecuación eq. (4.6). Otra característica interesante que puede ser apreciada en $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$ son las múltiples discontinuidades en la derivada respecto el detuning. Esto es debido por la desaparición de mesetas de mínimos, para los cuales esta medida es sensible. Por otra parte, para la mayoría de los casos de \mathcal{K} , $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$ puede ser discontinua en el espacio de los procesos cuánticos

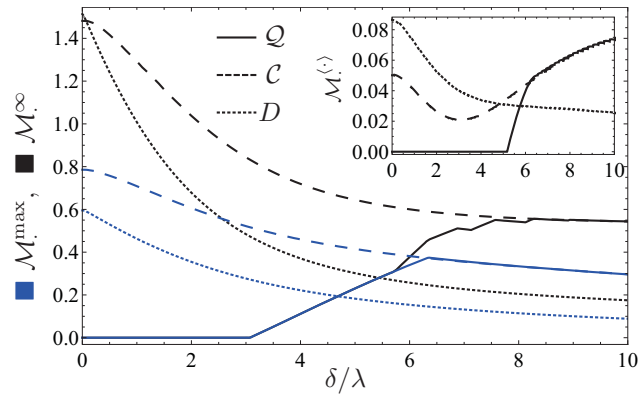


Figura 4.3: Resultados comparativos de las medidas de no Markovianidad cuántica tratadas en este trabajo para el modelo de Jaynes-Cummings. Como función de *detuning* escalado. Con acoplamiento $\gamma = 20\lambda$. Se muestran tres diferentes tipos de medidas, $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$ (azul), $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}$ (negro), y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ (recuadro) para las tres diferentes capacidades: capacidad cuántica, \mathcal{Q} (líneas sólidas), capacidad clásica asistida con enredamiento \mathcal{C} (línea discontinua), y la capacidad basada en distinguibilidad \mathcal{D} (línea punteada).

finitos, sí uno considera la norma máxima, entonces las medidas no son estables respecto a pequeñas desviaciones en la dinámica. En particular, ruido de baja amplitud pero de alta frecuencia puede hacer crecer $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ arbitrariamente, donde este ruido tiene un efecto pequeño (proporcional a la amplitud) en el caso de $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$.

En relación a la capacidad clásica, es de importancia notar que los diferentes casos no muestran la misma tendencia, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ disminuyen con el *detuning* (opuesto a los casos de la capacidad cuántica), pero $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\text{máx}}$ tiene comportamiento no-monótono, imitando la medida BLP hasta $\delta/\lambda \approx 3$ para después alcanzar los valores de la medida basada en la capacidad cuántica. Una consecuencia directa del hecho de que $\mathcal{Q} \leq \mathcal{C}$ es que $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}} \leq \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$, para todos los colores, las líneas discontinuas acotan a las continuas (el punto denota cualquiera entre máx, $\langle \cdot \rangle$, ∞). Como nota general, podemos observar que $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ es mucho menor que $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$. Esto es debido al hecho de que los picos en las diferentes capacidades son anchos, y el sistema, de hecho, no sirve como un buen QV.

La figura 4.2 se muestran varias capacidades cuánticas para el modelo Jaynes-Cummings, variando el *detuning* y dejando fijo el acoplamiento con el baño. La tabla 4.1 muestra los valores asociados a las medidas de no Markovianidad tratadas en este trabajo. Esta muestra que un *detuning* grande no lleva a buenos escenarios para usar el sistema como QV, mientras que para un *detuning* pequeño o igual a cero existen mejores situaciones para el uso del QV. La figura 4.4 muestra una gráfica de densidad de la NM $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$, en función de los parámetros del canal δ y γ . Esta muestra como la región de $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ alta aparece conforme el acoplamiento incrementa mientras que un *detuning* no muy fuerte esta presente (~ 10), esto es debido a que un acoplamiento fuerte induce un decaimiento rápido de la capacidad cuántica, mientras que las oscilaciones provenientes del *detuning* la restauran. Para *detuning* grande hay una probabilidad baja de transición en el átomo, que tiende a dejar la capacidad oscilando cerca de 1. Para acoplamiento débil $\gamma/\lambda < 1/2$ y *detuning* cero, la capacidad decae monotonamente, esto hace todas las medidas discutidas cero y por ende un QV inútil.

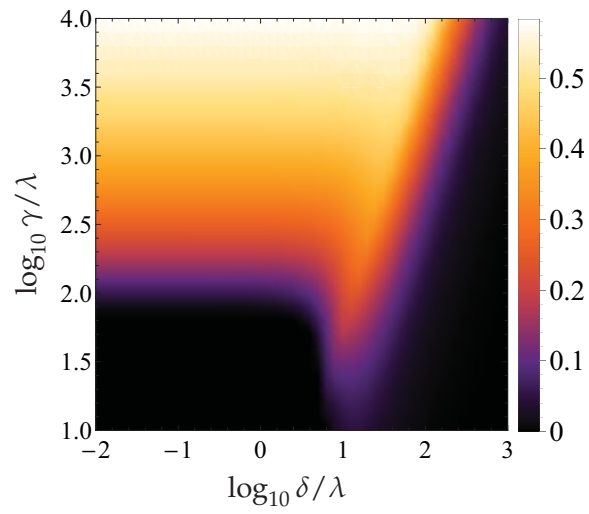


Figura 4.4: Gráfica de densidad de la $M_Q^{(\cdot)}$ para el modelo de Jaynes-Cummings en función del logaritmo de sus parámetros.

Capítulo 5

Conclusiones

A lo largo del trabajo se revisaron conceptos básicos de la Markovianidad cuántica y medidas de no Markovianidad así como algunas herramientas útiles y frecuentemente usadas a lo largo del trabajo. Se hizo notar que definir y cuantificar no Markovianidad en el contexto cuántico no es una tarea fácil.

Se presento el análisis de la No Markovianidad de un qubit sometido a un ambiente cuyos regímenes dinámicos son conocidos y van desde e integrable hasta el caótico en el sentido de RMT, en particular, la cadena de espines pateados. Se estudio la NM a lo largo de los regímenes dinámicos y a lo largo de diferentes acoplamientos de la cadena (el ambiente) con el qubit. También se calculo el *Inverse Participation Ratio* y la fidelidad asintótica de la cadena para cada uno de los estados coherentes y se realizo un estudio comparativo de estas cantidades con la NM. Se construyeron diagramas de las tres cantidades en función de los ángulos de los estados coherentes para todos los regímenes dinámicos, usando varias perturbaciones y tamaños de sistema. Típicamente se observaron estructuras similares a lo largo de las perturbaciones y los tamaños de sistemas usados. Estas estructuras tienen notables regiones de NM alta relacionadas mayormente con el la localización (IPR) de los estados y en seguidas ocasiones también con la $\langle f(t) \rangle$. Se noto la aparición de anticorrelaciones entre la NM y el IPR principalmente cuando los estados están muy localizados, se propuso que una explicación a esto es que el sistema no crea suficientes correlaciones para distribuir la información del qubit en todo el sistema, llevando a la conclusión de que si no hay flujo de información del qubit hacia el ambiente, esta no regresa y por ende no hay registro de flujo de información del ambiente hacia el qubit. En tanto a la anticorrelación observada, esto tambien es notorio en las gráficas de den-

alidad, las zonas de NM alta en el régimen mixto suelen ser las segundas zonas más localizadas (coincidiendo entre las distintas perturbaciones), además que surgen mínimos locales en la NM cuando se tienen máximos en la localización de los estados, este último fenómeno se observó incluso en el régimen caótico.

En la segunda parte del trabajo se propusieron dos nuevas clases de medidas de no Markovianidad ($\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\text{máx}}$ y $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$), estas vienen normalizadas de una forma muy natural y además no divergen para canales cuya dimensión del espacio de Hilbert es finita, problema que presentan muchas de las medidas conocidas, las cuales entran en el esquema de $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$. Las clases de medidas se probaron en el modelo no Markoviano de Jaynes-Cummings, haciendo además un estudio comparativo con algunas de las medidas conocidas. Una de las nuevas clases de medidas propuestas, $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$, se puede relacionar con una tarea física en concreto, llamada aquí *quantum-vault* (o bóveda cuántica), la cual consiste en guardar información de manera segura y fielmente por cierto tiempo t_f , en dicho tiempo el usuario (Alice) recupera su información. Un resultado interesante, es que en el caso en que el usuario no tiene información alguna de la probabilidad de ataque por parte de un espía, en este escenario la relación entre la eficiencia de la bóveda está directamente relacionada con la NM (eqn.(4.11)). Se mostró usando el modelo de Jaynes-Cummings, que medidas recientemente propuestas, basadas en la no monotonía de las capacidades de información arrojan resultados muy diferentes en todos los esquemas cuando se usa la capacidad cuántica \mathcal{Q} , en comparación con las ocasiones en que se usa capacidad clásica con asistencia con enredamiento y la distancia la distinguibilidad \mathcal{D} .

Apéndice A

Artículo

En este apéndice se presenta el *preprint* en el que se basa la última parte de la tesis, este ya fue enviado a arXiv. Fue elaborado en una colaboración con el director de la tesis y tutor principal, el Dr. Carlos Pineda, con Thomas Gorin, quien es miembro de mi comité tutor, así como con los colaboradores argentinos, el Dr. Ignacio García-Mata y el Dr. Diego Wisniacki.

Measuring and using non-markovianity

Carlos Pineda,¹ Thomas Gorin,² David Davalos,¹ Diego Wisniacki,³ and Ignacio García-Mata^{4,5}

¹*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México*

²*Departamento de Física, Universidad de Guadalajara, Guadalajara, Jalisco, México*

³*Departamento de Física “J. J. Giambiagi” and IFIBA, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, 1428 Buenos Aires, Argentina*

⁴*Instituto de Investigaciones Físicas de Mar del Plata (IFIMAR), CONICET-UNMdP, Mar del Plata, Argentina*

⁵*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICET), Argentina**

We construct measures for the non-Markovianity of quantum evolution with a physically meaningful interpretation. We first provide a general setting in the framework of channel capacities and propose two families of meaningful quantitative measures, based on the largest revival of a channel capacity, avoiding some drawbacks of other non-Markovianity measures. We relate the proposed measures to the task of information screening. This shows that the non-Markovianity of a quantum process may be used as a resource. Under these considerations, we analyze two paradigmatic examples, a qubit in a quantum environment with classically mixed dynamics and the Jaynes-Cummings model.

PACS numbers: 03.65.Yz, 03.65.Ta, 05.45.Mt

I. INTRODUCTION

The field of open quantum systems is of paramount importance in quantum theory [1]. It helps to understand fundamental problems as decoherence, the quantum to classical transition, or the measurement problem [2]. Besides, it has been essential to reach an impressive level of control in experiments of different quantum systems, which are the cornerstone in recent development of quantum technologies [3–7].

The usual approach to quantum open systems relies on the assumption that the evolution has negligible memory effects. This supposition is part of the so-called Born-Markov approximation, which also assumes weak system-environment coupling and a large environment. The keystone of Markovian quantum dynamics is the Lindblad master equation [8, 9] which describes the generator of quantum dynamical semigroups. The behavior of several interesting and realistic quantum systems has been studied using the Born-Markov approximation. However, these assumptions (weak coupling or large size of the environment) cannot be applied in many situations, including recent experiments of quantum control. This shows the importance of understanding quantum open systems beyond the Born-Markov approximation.

A great amount of work (see [10, 11] and references therein) has been done to understand and characterize non-Markovian quantum evolutions or non-Markovianity (NM) – as it is generically called. This not only gives us a better understanding of open quantum systems but also provides more efficient ways to control quantum systems. For example, it was recently shown that non-Markovianity is an essential resource in some instances of steady state entanglement preparation [12, 13] or can be exploited to carry out quantum control tasks that

could not be realized in closed systems [14]. Besides, non-Markovian environments can speed up quantum evolutions reducing the quantum speed limit [15].

Unlike other properties, like entanglement, there is not a unique definition of non-Markovianity. There exist different criteria, more or less physically motivated, which in turn can be associated to a measure [10, 11]. The two most popular criteria are based on distinguishability [16] and divisibility [17], from which two corresponding measures can be derived. There exist other measures [18–22] which are basically variations of these two or are very similar. All of these measures present some of the following problems: Lack of a clear and intuitive physical interpretation, they can diverge in very generic cases [23], and they are not directly comparable between them. Another problem is that, even if at least one of them has an intuitive physical interpretation, in terms of information flow [16], neither, to our knowledge, has a direct relation to a resource associated to a task – like entanglement of formation has.

In this work, we pursue two goals. First, we want to construct NM measures without the mentioned drawbacks. We undertake this task within the framework of channel capacities. The proposed measures are based on the maximum revival of the capacities, a characteristic that has a very simple physical interpretation and has a natural time-independent bound. Of course there might – and most likely will – exist many possible measures of quantum non-Markovianity. Thus, we first provide a general setting and then put forward two plausible, meaningful quantitative measures. Our second goal is to outline the theoretical bases for considering NM as a resource.

Consider what we call a quantum vault (QV). Alice shall deposit information, classical or quantum, in a quantum physical system (say in a physical realization of a qubit); during some time, through which the system evolves, the physical system can be subject to an attack by an eavesdropper, Eve; finally, after that time interval,

* carlospgmat03@gmail.com

the information is to be retrieved by Alice from the same physical system. Of course, the system interacts with an environment, to which neither Alice nor Eve can access. Notice that this task can be related with quantum data hiding [24–26]. We show that one of the NM measures proposed is closely related to the efficiency of the quantum vault. Therefore the value of the measure can be considered a resource associated to a specific task.

To illustrate our ideas we analyze two examples of physical systems coupled to non-Markovian environments, and analyze the newly defined measures as well as their quantum vault capabilities. We also explain possible advantages with respect to other NM measures. First we study a qubit, coupled via pure dephasing to an environment whose dynamics are given by a mixed quantum map. Different kinds of dynamics can be explored, changing the initial state of the environment. For the measures proposed in previous works, this sometimes leads to an unexpected behavior. The other example we consider is the well known Jaynes-Cummings model (JCM) [27], a two level atom coupled to a bosonic bath, where we contrast our proposals, with some of the most used NM measures.

The work is organized as follows. In Sec. II we describe the general framework that relates NM with capacities of a quantum channel. Then, we define two NM measures based on the largest revival of the capacities. In Sec. III we introduce the concept of quantum vault and show its relation to the new NM measures. Sec. IV is devoted to analyzing two examples using the ideas presented in the previous sections. We end the paper with some final remarks in Sec. V.

II. NON-MARKOVIANITY MEASURED BY THE LARGEST REVIVAL

The two most widely spread NM measures are, one due to Breuer et al. [16] based on distinguishability (in the following abbreviated by “BLP”), and the other due to Rivas et al. [17] based on divisibility (“RHP”). At the heart of both measures, there is a well defined concept which has been borrowed from classical stochastic systems. In the case of BLP, it is the contraction of probability space under Markovian stochastic processes, while in the case of RHP, it is the divisibility of the process itself. Both concepts can be used as criteria for quantum Markovianity by *defining* that a quantum process is Markovian if the distinguishability between all pairs of evolving states is non-increasing (BLP-property), or if the process is divisible (RHP-property); otherwise the process is called non-Markovian. It has been shown in Ref. [11], that the semigroup property of a quantum process implies the RHP-property and that the RHP-property implies the BLP-property. In order to obtain a non-Markovianity (NM) measure, both groups of authors apply essentially the same procedure: integrate a differential measure for the violation of the corresponding

criterion. The same construction principle has been used in Ref. [22], to quantify NM based on channel capacities.

Consider the convex space of all quantum channels, and in this space a continuous curve Λ_t with $0 \leq t \leq \infty$ starting at the identity $\Lambda_0 = \mathbb{1}$. We will call such a curve a *quantum process*. Any resource \mathcal{K} of interest will be a function on the space of quantum channels. Thus any quantum process comes along with the function

$$K(t) = \mathcal{K}(\Lambda_t), \quad (1)$$

quantifying the resource the quantum channel provides at time t . Postulating that $K(t)$ cannot increase during Markovian dynamics, one defines the function

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t] = \int_{\dot{K}>0} \dot{K}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

as a measure for non-Markovianity. We use the subscript ∞ for this class of measures, as it is possible that one has to add an infinite number of contributions (all intervals where $\dot{K} \not\leq 0$). We use brackets to indicate a functional on the space of quantum processes, and parenthesis when we refer to a functional on the space of quantum channels. One can immediately derive a criterion for non-Markovianity, namely $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t] > 0$. In the case of RHP,

$$\dot{K}(\tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{tr}|C_{\tau+\varepsilon,\tau} - 1|}{\varepsilon}, \quad (3)$$

where $\text{tr}|\hat{A}|$ is the trace-norm and $C_{\tau+\varepsilon,\tau}$ is the Choi representation [28, 29] of the map $\Lambda_{\tau+\varepsilon} \circ \Lambda_{\tau}^{-1}$, which evolves states from time τ to time $\tau + \varepsilon$. In the case of BLP

$$K(t) = D[(\Lambda_t(\rho_1), \Lambda_t(\rho_2))], \quad (4)$$

where $D(\varrho_1, \varrho_2) = \text{tr}|\varrho_1 - \varrho_2|/2$ is the trace distance between the two states ϱ_1 and ϱ_2 . The initial states ρ_1, ρ_2 are chosen to maximize the respective NM measure. The measures defined in Ref. [22], can also be cast in this form. In that case, $K(t)$ is directly defined as the corresponding channel capacity of Λ_t .

For definitiveness, two different channel capacities are considered in this work, that for entanglement assisted communication, and that for quantum communication [30]. Note that also much simpler measures such as average fidelity, purity, or some measure of entanglement, may be cast into that form.

This construction, which includes contributions from a possibly infinite number of intervals where $\dot{K} > 0$, may result in rather inconvenient properties. For instance, $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t]$ tends to overvalue small fluctuations, which typically occur in the case of a finite environment, finite statistics or experimental fluctuations. This might even lead to the divergence of the measure. This can be remedied by normalizing such as in [17], where the authors consider $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t] (a + \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t])^{-1}$ with $a = 1$. However, this normalization is completely arbitrary, as any other scale for a would be equally well acceptable. Even if the measures yield finite values, it is not clear how one should

interpret a statement that one process has a larger value for BLP-NM (RHP-NM) than another. It is even less possible to compare values obtained for different measures. Therefore, these measures should be considered as non-Markovianity criterion.

Here, we will show that a rather simple modification of the construction can avoid these issues, and lead to a clear physical interpretation of the resulting NM measures. The modification consists in considering only the largest revival with respect to either (i) the minimum value of $K(\tau)$ prior to the revival or (ii) to the average value prior to the revival. Thus, we take

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}[\Lambda_t] = \max_{t_f, \tau \leq t_f} [K(t_f) - K(\tau)] \quad (5)$$

in the first case and

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}[\Lambda_t] = \max \left\{ 0, \max_{t_f} [K(t_f) - \langle K(\tau) \rangle_{\tau < t_f}] \right\} \quad (6)$$

in the second. Here, $\langle \cdot \rangle_{\tau < t_f}$ denotes time average until t_f . In the first case, we are measuring the biggest revival during the time interval whereas in the second, we are measuring a revival, but with respect to the average behavior prior to this time. Notice that

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}[\Lambda_t] \leq \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}[\Lambda_t] \quad (7)$$

as $\langle K(\Lambda_\tau) \rangle_{\tau < \tau_{\max}} \geq \min_{\tau < \tau_{\max}} K(\Lambda_\tau)$. Moreover, also notice that

$$\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}[\Lambda_t] > 0 \iff \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}[\Lambda_t] > 0, \quad (8)$$

though no such relation is found for $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$. In fact, we shall see later that non-monotonic behavior *does not* guarantee a positive value for $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$.

III. NON-MARKOVIANITY AS A RESOURCE: QUANTUM VAULT

We consider a quantum system, which is used to store and retrieve information by state preparation and measurement. The quantum system is coupled to an inaccessible environment and we describe its dynamics by a quantum process. In order to use the system, Alice encodes her information (which may be quantum or classical) in a quantum state. Then, at some later time Alice attempts to retrieve the information from the evolved quantum state. Note that this state need not be equal to the initial state, it is sufficient that Alice is able to recover her information from it. The capacity of the device depends on the amount of information which can be stored and faithfully retrieved. During the time in which the information is stored, it might be subject to an attack by an eavesdropper Eve. Some important remarks should be mentioned. Eve has a finite probability of attacking, and her attack destroys the quantum state. We assume that Alice becomes aware if there is an attack and

discards the state. A good quantum vault is such that Alice can obtain her information with high reliability and between state preparation and read-out, the information is difficult to retrieve.

The process, until the measurement by Alice or Eve, shall be described by the quantum process Λ_τ , while the information shall be quantified by a capacity \mathcal{K} . We shall thus have a time dependent value of the capacity, analogous to eq. (1). The times considered range from $0 \leq \tau \leq t_f$, with t_f being the time at which Alice attempts to retrieve the information. The average information that can be obtained by Eve per attack is then $\langle K \rangle$, where the average is taken during the vault operation, namely from 0 until t_f . Here we assume that when Eve attacks, she does only once, as an attack destroys the state anyway. If Eve attacks with a probability q , on average she will obtain the information $q\langle K \rangle$. Thus, the average information successfully retrieved by Alice will be only $(1-q)K(t_f)$. We shall consider as a figure of merit the difference between the average information obtained by Alice, and the one obtained by Eve:

$$\Delta K_q = (1-q)K(t_f) - q\langle K \rangle. \quad (9)$$

Note that this quantity can be negative, when Eve obtains on average more information than Alice can retrieve. Finally, we may define the quantum vault efficiency as $\eta_q = \Delta K_q / K_{\max}$, with $K_{\max} = \mathcal{K}(\mathbb{1})$. A good quantum vault should have an efficiency close to one.

Assume that \mathcal{K} is normalized in such way that $p = K/K_{\max}$ is the probability that the message encoded in the state will be retrieved. A successful run can be defined as a run in which, if Eve attacks, she gains no information, whereas if Eve does not attack, Alice retrieves successfully the information. From the considerations above, one can see that the probability of having a successful run is given by

$$P_q = q(1 - \langle p(t) \rangle) + (1-q)p(t_f) = \eta_q + q. \quad (10)$$

Associated with this probability, we shall associate a quality factor for the channel, as a quantum vault, that is simply the above probability, weighted by the capacity of the channel, that is $\mathcal{N}_q = K_{\max}P_q = \Delta K_q + qK_{\max}$.

Now we shall discuss ΔK_q and \mathcal{N}_q for some particular examples and establish its relation to $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$. We first examine the worst case scenario: $q \approx 1$. By definition, if Eve attacks she destroys the state. This fact is reflected in ΔK_q which can go from minimal value $-K_{\max}$ (worst efficiency η_q) to $\Delta K_q = 0$ (poor QV), when $\langle K(t) \rangle \approx 0$. \mathcal{N}_q on the other hand ranges from $\mathcal{N}_q = 0$ (i.e. bad QV) to $\mathcal{N}_q = K_{\max}$. In the last case large \mathcal{N}_q value due to small $\langle K(t) \rangle$ evidences the fact that Eve is unable to obtain anything. In the best case scenario of $q \ll 1$, evidently, the efficiency of the vault is only tied to $K(t_f)$, the larger the better.

Now let us assess the general case. We will only take into account the case where $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} > 0$, i.e. from Eq. (6) there is at least one t_f for which $\langle K(t) \rangle < K(t_f)$. The

first relation between the QV and $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ that we find is

$$\min(1-q, q) \times \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} \leq \Delta K_q \leq \max(1-q, q) \times \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}, \quad (11)$$

which is easy to derive from the definition, provided t_f is the same for both. This relation sets lower and upper bounds for the QV, depending on q and $\mathcal{M}^{(\cdot)}$ [a corresponding relation with \mathcal{N}_q follows directly from Eq. (10)]. A reasonable assumption is that information about the probability of attack by Eve, q is not known. One can invoke a maximum entropy principle to use the average value of q , namely $q = 1/2$. For this unbiased case, (and $\mathcal{M}^{(\cdot)} > 0$) we have

$$\Delta K_{1/2} = \frac{1}{2} \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}, \quad \mathcal{N}_{1/2} = \frac{1}{2} (K_{\max} + \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}). \quad (12)$$

These equations relate the NM measure proposed, with the possibility to perform the task at hand. In particular, it gives an operational meaning to the measures proposed here, and show that, for the task proposed here, the figure of merit is $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$.

In Fig. 1 we show some examples one could encounter for $K(t)/K_{\max}$. In the first one (Fig. 1, top-left) we have $\langle K(t) \rangle \approx 0$, $\mathcal{M}^{(\cdot)} \approx K(t_f)$, and

$$\Delta K_q \approx (1-q) \mathcal{M}^{(\cdot)} \quad (13)$$

so for a fixed q , a large $\mathcal{M}^{(\cdot)}$ implies high efficiency. This is in fact the ideal scenario for a QV, because most of the time the information is hidden and inaccessible to Eve and at time t_f the information can be retrieved with high accuracy. If $\langle K(t) \rangle$ is very large, close to K_{\max} (e.g. Fig. 1 top-right), then, by definition, the channel is not a good QV: a large proportion of the information is readily available at all times before t_f . Here $K(t_f) < \langle K \rangle$ (so Eq. (11) does not hold), but the only possibility to have good efficiency is the trivial $q \rightarrow 0$ case. If, on the other hand, $\langle K(t) \rangle$ and $K(t_f)$ are both very small (Fig. 1 bottom-left) – again $\mathcal{M}^{(\cdot)} \approx 0$ – there is little chance to retrieve the information, even for small q , yielding poor efficiency and \mathcal{N}_q . For large q , $\mathcal{N}_q \approx q K_{\max}$ can be large. The interpretation of this large value of \mathcal{N}_q is that Eve will likely attack, but unsuccessfully. Here the interpretation of this large value of \mathcal{N}_q is that Eve will likely attack, but unsuccessfully. Finally, we consider the case where $K(t)$ decays monotonously except for one bump (e.g. Fig. 1 bottom-right). The analysis now requires a little more care. If $K(t_f) < \langle K \rangle$, which happens for a small enough bump, then $\mathcal{M}_{\mathcal{K}} = 0$, and there is no connection between ΔK_q (or \mathcal{N}_q) and $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$. The analysis is similar to that of Fig. 1 (top-right). On the other hand if $\mathcal{M}^{(\cdot)} > 0$ the efficiency is bounded by Eq. (11) and for maximum $\mathcal{M}^{(\cdot)}$, the case is equivalent to the first one (top-left).

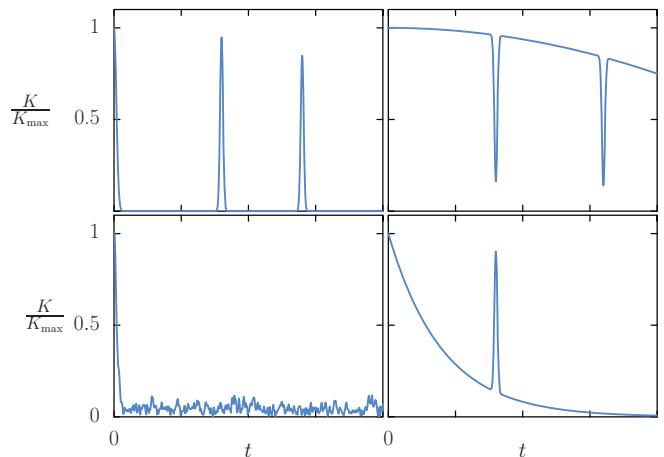


FIG. 1. Schematic examples of $K(t)/K_{\max}$ to be considered as QV. (top-left) Example with large δK_q and $\mathcal{M}^{(\cdot)}$, good QV candidate. (top-right) Worst case scenario. Small δK_q , small (or null) $\mathcal{M}^{(\cdot)}$ and information always available for EVE to grab. (bottom-left) Small $\mathcal{M}^{(\cdot)}$ an ΔK_q (poor in for information retrieval) but decent \mathcal{N}_q (good for information protection). (bottom-right) More general case, strongly depending on $\mathcal{M}^{(\cdot)}$ and the height of the peak at t_f .

IV. EXAMPLES

In this section we present concrete physical examples of quantum channels where we can test the newly proposed measures and their relation with the QV scheme.

A. Environment with mixed dynamics

Let us discuss encoding quantum information in a qubit coupled to an environment in a dephasing manner. We consider that the environment evolves according to a dynamics that in the semiclassical limit is mixed, i.e. has integrable and chaotic regions in phase space.

A simple way to realize such environment is using a controlled kicked quantum map [31, 32]. In this case, the environment evolution is slightly modified depending on the state of the qubit. This is equivalent to having a coupling with the environment that commutes with the Hamiltonians corresponding to the free evolution of each part, qubit and environment.

Here we choose to use the quantum Harper map [33]. The evolution operator, in terms of the discrete conjugate space-momentum variables \hat{q} and \hat{p} is

$$U_k = \exp \left[-i \frac{k}{\hbar} \cos(2\pi \hat{p}) \right] \exp \left[-i \frac{k}{\hbar} \cos(2\pi \hat{q}) \right], \quad (14)$$

$\hbar \equiv 1/(2\pi N)$ being the effective Planck constant and N the dimension of the Hilbert space of the environment. The corresponding classical dynamics ($N \rightarrow \infty$) is given

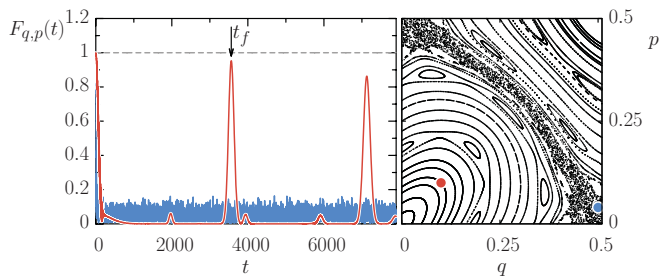


FIG. 2. (left) $F(t)$ as a function of time for two different initial states of an environment modeled by the quantum Harper map. (right) the classical phase space of the environment for the parameters studied (see main text). The two states of the environment in the left figure are coherent pure states centered where the color dots are shown in the phase space portrait, i.e. one in the chaotic region (blue) and the other in the integrable region (red), corresponding to similar colors in the left panel.

by

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n - k \sin(2\pi q_n), \\ q_{n+1} &= q_n + k \sin(2\pi p_{n+1}). \end{aligned} \quad (15)$$

The phase space geometry is a 2-torus, so p_n and q_n are taken modulo 1. For $k = 0.2$, the dynamics is mixed, see Fig. 2. To use this closed system as an environment, we consider that the state of the qubit induces a small change in the parameter k of the map, so the evolution of the whole system for one time step is given by the Floquet operator

$$U = |0\rangle\langle 0|U_k + |1\rangle\langle 1|U_{k+\delta k} \quad (16)$$

and $U(t) = U^t$, for integer t . Throughout this example, we shall set $N = 4000$, $k = 0.2$ and $\delta k = 2\hbar$, unless otherwise stated. The initial state of the whole system is the uncorrelated state $\rho_{\text{sys}} \otimes \rho_{\text{env},q,p}$, where the environment will be taken to be a pure coherent state centered in (q, p) . The state of the qubit, obtained with unitary evolution in the whole system and partial tracing the environment, is given by

$$\rho_{\text{sys}}(t) = \text{tr}_{\text{env}} [U(t)\rho_{\text{sys}} \otimes \rho_{\text{env},q,p}U^\dagger(t)] = \Lambda_t^{q,p}(\rho_{\text{sys}}). \quad (17)$$

In the basis of Pauli matrices $\{\sigma_i\} = \{\mathbb{I}, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}/\sqrt{2}$, the induced channel takes the form

$$\Lambda_{q,p}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}[f_{q,p}(t)] & \text{Im}[f_{q,p}(t)] & 0 \\ 0 & \text{Im}[f_{q,p}(t)] & \text{Re}[f_{q,p}(t)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

where

$$f_{q,p}(t) = \text{tr} [\rho_{\text{env},q,p}U_{k+\delta k}(t)^\dagger U_k(t)] \quad (19)$$

is the expectation value of the echo operator $U_{k+\delta k}(t)^\dagger U_k(t)$ with respect to the corresponding

	$\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$	$\mathcal{M}_F^{\text{max}}$	\mathcal{M}^{BLP}	\mathcal{M}^{RHP}
•	0.899	0.953	6.6	1333.97
•	0.108	0.194	125.84	6274.89

TABLE I. Comparison between different values of measures of non-markovianity for the two situations depicted in fig. 2, with corresponding colors. We cut the integral in eq. (20) in $t = 8000$. The inherent fluctuations present for this finite dimensional environment cause the integrable situation (with larger fluctuations) to reach larger values for the NM measures \mathcal{M}^{BLP} and \mathcal{M}^{RHP} , than the chaotic counterpart. On the other hand, both $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$ and $\mathcal{M}_F^{\text{max}}$ capture well the idea of QV, reporting large values for the integrable case, and small values for the chaotic one.

coherent state (also known as fidelity amplitude). We shall also define the fidelity, $F_{q,p}(t) = |f_{q,p}(t)|$, for later convenience. Notice that the channel depends, up to unitary operations, only on $F_{q,p}(t)$, and thus all capacities will be functions solely of this quantity.

In Fig. 2 (left) we show two examples of $F_{q,p}(t)$, for different initial conditions of the environment (marked with circles in Fig. 2 (right)). One can see that in case the environment starts inside the chaotic sea, the system has very small $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$ and $\mathcal{M}_F^{\text{max}}$ and therefore from Eq. (12), it will be a very bad QV.

An interesting point of Fig. 2 is how $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$ and $\mathcal{M}_F^{\text{max}}$ compare to \mathcal{M}^{BLP} and \mathcal{M}^{RHP} . In terms of $F_{q,p}(t)$ the latter are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{BLP}} &= 2 \int_{0, \dot{F}>0}^{t_{\text{cut}}} d\tau \dot{F}_{q,p}(\tau), \\ \mathcal{M}^{\text{RHP}} &= \int_{0, \dot{F}>0}^{t_{\text{cut}}} d\tau \frac{\dot{F}_{q,p}(\tau)}{F_{q,p}(\tau)}, \end{aligned} \quad (20)$$

where t_{cut} indicates a cutoff time. The $[F_{q,p}(\tau)]^{-1}$ term in \mathcal{M}^{RHP} can be problematic when $F_{q,p}(\tau)$ is very small, which is exactly the case for an initial state located in the chaotic region. In Table I the values of all four measures, based on F , corresponding to Fig. 2 are shown. The values reported in the table highlight important characteristics of all four measures. On the one hand, for non-monotonicity based measures, intuitively we expect that a fast decaying $K(t)$ followed by sharp, and high revivals would yield a larger value of non-Markovianity. This is not the case for \mathcal{M}^{BLP} and \mathcal{M}^{RHP} (at least in this particular example), for different reasons. In the case of \mathcal{M}^{RHP} it is due to the small denominator and in the case of \mathcal{M}^{BLP} it is due to fluctuations (and finite N). These facts are further illustrated in the color density plots of Fig. 3. We see that in all cases the underlying classical structure is clearly outlined. For both $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$ and $\mathcal{M}_F^{\text{max}}$ an additional structure appears that resembles the unstable manifolds. The measures $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$, $\mathcal{M}_F^{\text{max}}$, and \mathcal{M}^{BLP} all seem to peak in the vicinity of the border between chaotic and regular behavior. As stated before,

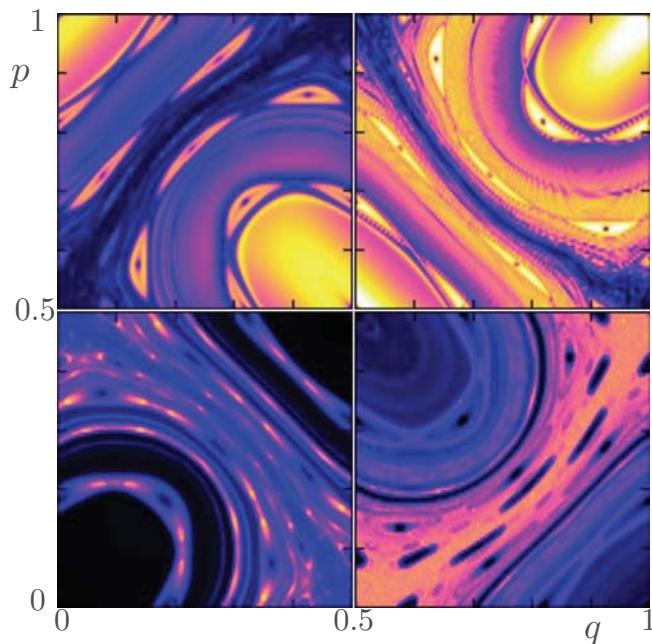


FIG. 3. (Color online) Mapping of classical phase space obtained from the different non-Markovianity measures discussed, for the quantum Harper map with $N = 8000$, $K = 0.2$, $\delta K/\hbar = 2$ and maximum time $t_{\text{cut}} = 16000$. The color code is dark/black=0, light/white=max. The different subfigures correspond to $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$, top left with a maximum value of the measure of 1; $\mathcal{M}_F^{\text{max}}$ on the top right with maximum value of 1; \mathcal{M}^{BLP} , bottom left, with a maximum value of 400; and at the bottom right, \mathcal{M}^{RHP} with a maximum value of 19000.

the \mathcal{M}^{RHP} measure behaves differently, as it is larger in the chaotic region.

Notice that the measure $\mathcal{M}_F^{(\cdot)}$ can be associated with the task of transmitting classical information (without the use of entanglement) encoded initially in the states $|\pm\rangle$.

B. Non markovian Jaynes-Cummings model

In order to explore and compare the different measures of non-Markovianity discussed throughout this work, we now consider the paradigmatic Jaynes-Cummings model [27], which has served as testbed in quantum optics; see e.g. [1]. In this model, a two level atom is coupled to a bosonic bath, which induces a degradable channel in the qubit. We shall take advantage of the fact that a lot is known about this model analytically and we will build upon known results.

The Hamiltonian of the system is $H = H_0 + H_I$, where H_0 is the free Hamiltonian of the atom plus the reservoir and H_I the interaction between them. In particular, $H_0 = \omega_0 \sigma_+ \sigma_- + \sum_k \omega_k b_k^\dagger b_k$, where σ_\pm are the rising and lowering operators in the atom, ω_0 is the energy difference between the two levels in the atom, b_k and b_k^\dagger are creation and

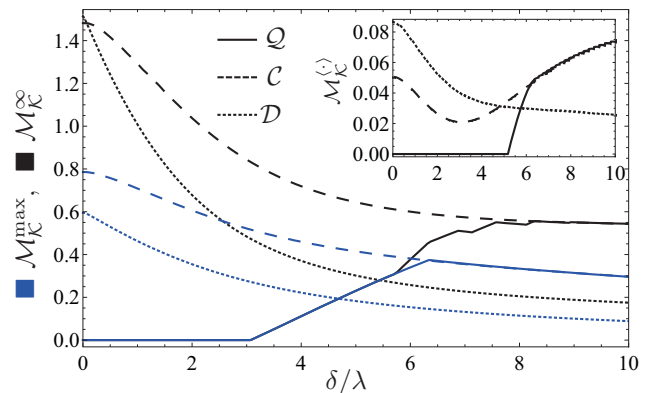


FIG. 4. Comparative results of the measures of quantum non-Markovianity treated in this work for the Jaynes-Cummings model, as a function of the scaled detuning δ/λ , with a coupling of $\gamma = 20\lambda$. We show three different types of measures, \mathcal{M}_K^∞ (black lines), $\mathcal{M}_K^{\text{max}}$ (blue lines), and $\mathcal{M}_K^{(\cdot)}$ (inset) for three different capacities: Quantum capacity \mathcal{Q} (solid lines), classical entanglement assisted capacity \mathcal{C} (dashed lines), and the capacity based on distinguishability \mathcal{D} (dotted lines).

annihilation operators of mode k of the bath, and ω_k its frequency. The interaction Hamiltonian is given by $H_I = \sigma_+ \otimes B + \sigma_- \otimes B^\dagger$, with $B = \sum_k g_k b_k$ and g_k the coupling of the qubit to mode k . In the limit of an infinite number of reservoir oscillators and a smooth spectral density, this model leads to the following channel [1]:

$$\Lambda_t[\rho] = \begin{pmatrix} 1 - |G(t)|^2 \rho_{ee} & G(t) \rho_{ge} \\ G^*(t) \rho_{ge}^* & |G(t)|^2 \rho_{ee} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

where the initial state $\rho = \begin{pmatrix} 1 - \rho_{ee} & \rho_{ge} \\ \rho_{ge}^* & \rho_{ee} \end{pmatrix}$. The function $G(t)$ is the solution to the equation $\dot{G}(t) = -\int_0^t d\tau f(t-\tau)G(\tau)$, with $G(0) = 1$, and $f(t-\tau)$ is the two-point correlation function of the reservoir. For a Lorentzian spectral density

$$f(t) = \frac{1}{2} \gamma_0 \lambda e^{-|t|(\lambda - i\delta)}, \quad (22)$$

we find

$$G(t) = e^{-\frac{1}{2}t(\lambda - i\delta)} \left[\frac{(\lambda - i\delta)}{\Omega} \sinh\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \cosh\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right], \quad (23)$$

where $\Omega = \sqrt{-2\gamma\lambda + (\lambda - i\delta)^2}$. Here, γ_0 is the strength of the system-reservoir coupling, λ is the spectral width, and δ is the detuning between the peak frequency of the spectral density and the transition frequency of the atom [34].

In what follows, we study the NM measures \mathcal{M}_K^∞ , $\mathcal{M}_K^{\text{max}}$, and $\mathcal{M}_K^{(\cdot)}$ for the capacities \mathcal{Q} (quantum capacity), \mathcal{C} (entanglement-assisted classical capacity), and \mathcal{D} (distinguishability of the states $|\pm\rangle$). The quantum capacity is defined as the maximal amount of quantum

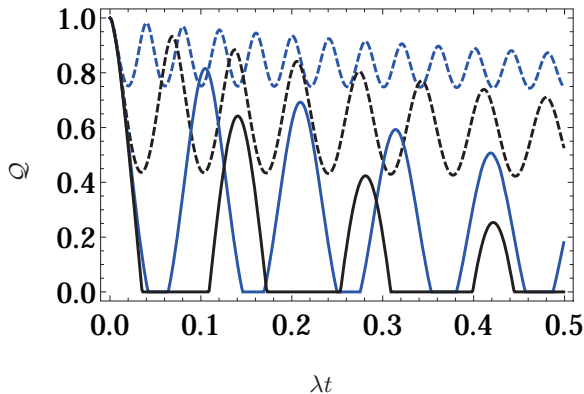


FIG. 5. Quantum capacities of the non markovian Jaynes-Cummings model with a strong coupling $\gamma/\lambda = 1000$. The solid curves correspond to $\delta/\lambda = 0$ (black), $\delta/\lambda = 40$ (blue). The dashed curves are $\delta/\lambda = 80$ (black), $\delta/\lambda = 150$ (blue).

information (per channel use, measured as the number of qubits) that can be reliably transmitted through the channel. It is given explicitly in terms of the following maximization [35]: $\max_{p \in [0,1]} \{H_2(|G(t)|^2 p) - H_2((1 - |G(t)|^2)p)\}$ for $|G(t)|^2 > 1/2$ and 0 for $|G(t)|^2 \leq 1/2$. The entanglement-assisted classical capacity \mathcal{C} is defined as the maximal amount of classical information (per channel use, measured as the number of classical bits) that can be reliably transmitted through the channel, when Alice and Bob are allowed to use an arbitrary number of shared entangled states [30]. For the present channel it is given by [35]: $\mathcal{C} = \max_{p \in [0,1]} \{H_2(p) + H_2(|G(t)|^2 p) - H_2((1 - |G(t)|^2)p)\}$. Finally, we also consider the BLP measure defined in Eq. (4). In this case the initial states which maximize the various types of NM measures may be chosen invariably as the two eigenstates of the Pauli matrix σ_x [10]. Thereby, we obtain $K(t) = |G(t)|$.

Figure 4 shows a comparison between the measures $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}$, introduced in this work, and their counterpart $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$. The measures regarding the average $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ are notoriously smaller than the measures regarding both the maximum revival and the integrated revivals. In fact, we find that $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)} \leq \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}$, in agreement with (7), and $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max} \leq \mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$. The measures related to the BLP criterion (dotted lines) behave similarly in all three cases, decaying monotonously with δ/λ . In the case of the entanglement assisted classical capacity, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\max}$ also decay monotonously. However, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)}$ has a minimum at $\delta/\lambda \approx 3$. Beyond that point $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)}$ increases a bit further, but finally decays to zero. In this region, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)} = \mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ which is shown in Fig. 6. The measures related to the quantum capacity (solid lines) show the most complicated behavior. $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\max}$ are equal to zero until $\delta/\lambda \approx 3$, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ is equal to zero until $\delta/\lambda \approx 5$. Beyond these points, the measures increase linearly. From $\delta/\lambda \approx 6.5$

on, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\max}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ reach the corresponding curves for the classical capacity. For somewhat larger values of δ/λ this also happens for the $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$.

The fact that for quantum capacities, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\max}$ start to deviate from zero at the same point $\delta/\lambda \approx 3$, illustrates eq. (8). Other interesting feature that can be appreciated in $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$ are the multiple discontinuities in the derivative with respect to the detuning. This is due to the sudden appearance of new bumps in the quantum capacity of the channel, to which this measure is sensible. Moreover, for most instances of \mathcal{K} , $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$ can be discontinuous in the space of finite quantum processes, if we consider the maximum-norm, so the measures are not stable with respect to small deviations in the quantum dynamics. In particular, small amplitude high frequency noise can make $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$ increase arbitrarily, whereas, it has a small effect (proportional to the amplitude) in the case of $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}$.

Regarding the classical capacity, it is worth noticing that the different cases do not share the same tendency, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\max}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\infty}$ diminishes with the detuning (as opposed to the quantum capacity cases), but $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)}$ has a non monotonic behavior, mimicking fidelity until $\delta/\lambda \approx 3$, and then resembling the quantum capacity. A direct consequence inherited from the fact that $\mathcal{Q} \leq \mathcal{C}$ is that $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)} \leq \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{(\cdot)}$ as can be seen from the fact that, for all colors, the dashed line bounds the continuous line (here, the dot denotes any of \max , $\langle \cdot \rangle$ or ∞). As a general remark, we also observe that $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{(\cdot)}$ is much smaller than $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\max}$ and $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}^{\infty}$. This is due to the fact that the peaks in the different capacities are thick, and the system, in fact, would not serve as a good quantum vault.

Figure 5 shows the evolution of several quantum capacities for the Jaynes-Cummings model varying the detuning, while keeping the reservoir coupling fixed. The table II shows the values of the corresponding measures of non-Markovianity treated in this work. It shows that large detunings lead to poor scenarios for a quantum vault operation, while for zero and small detuning there are better situations for a usage of the QV. The time when the first peak in the capacity appears can be tuned by choosing the correlation time of the bath. The figure 6 shows a density plot of the non-Markovianity measures, $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$, as a function of the channel parameters δ and γ . It shows how a region of high $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ appears as the coupling increases, as long as the detuning is not too strong (~ 10). This is because large couplings induce a rapid decay in the quantum capacity while the oscillations from the detuning restore the capacity. For large detunings, the probability for transitions in the atom is low, which implies that the capacity initially has small oscillations close to one with and a slow decay. For small couplings $\gamma/\lambda < 1/2$ and zero detuning, the capacity decays monotonically [22], this makes all the measures discussed equal to zero and therefore a useless QV.

	δ/λ	$\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$	$\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\max}$	$\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{\infty}$
—	0	0.4072	0.6419	1.4322
—	40	0.4301	0.8154	4.4928
---	80	0.2564	0.4963	6.0953
---	150	0.1210	0.2309	4.7588

TABLE II. The table shows the measures treated in this work of the quantum capacities shown in figure 5, with $t_{\text{cut}} = \infty$.

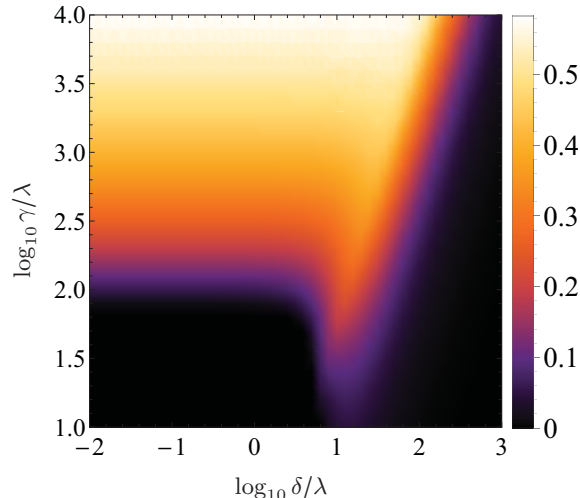


FIG. 6. Density plot of the $\mathcal{M}_{\mathcal{Q}}^{(\cdot)}$ for the non Markovian Jaynes-Cummings model as a function of its parameters.

V. CONCLUSIONS

In the light of considerable advances in the experimental manipulation of quantum systems at the very fundamental level, understanding and controlling how a quantum system interacts with its surroundings is of paramount importance. In this context finite, structure rich environments play an important role, and the challenge has been to understand and control the resulting non-Markovian evolution. In particular, one might wonder whether there is a possibility to take advantage of the flow of information back to the system which is characteristic to non-Markovianity. Defining and quantifying non-Markovianity is a non-trivial task. In this work we have shown that one can define and quantify non-Markovian behavior in a physically meaningful way. One that is insightful and avoids the drawbacks of previous attempts, like divergence in very generic cases, and counter intuitive outcomes. Moreover we could define the new measure with a task in mind: hiding and retrieving classical or quantum information using a quantum channel. The efficiency with which this task is accomplished, is directly related to the NM measure. Finally, we have illustrated the proposed measures with simple physical examples.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge support from the grants UNAM-PAPIIT IN111015, and CONACyT 153190 and 129309, as well as useful discussions with Sabrina Maniscalco and Heinz-Peter Breuer. I.G.M. and D.A.W. received support from ANPCyT (Grant No.PICT 2010-1556), UBA-CyT, and CONICET (Grants No. PIP 114-20110100048 and No. PIP 11220080100728). I.G.M and C.P. share a bi-national grant from CONICET (Grant No. MX/12/02 Argentina) and CONACYT (Mexico).

-
- [1] H. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (OUP Oxford, 2007).
 - [2] M. A. Schlosshauer, *Decoherence and the Quantum-To-Classical Transition* (Springer, 2007).
 - [3] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 565 (2001).
 - [4] D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
 - [5] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
 - [6] A. Furusawa and J. Vuckovic, *Nat. Photonics* **3**, 160402 (2009).
 - [7] T. D. Ladd, F. Jelezko, R. Laflamme, Y. Nakamura, C. Monroe, and J. L. O'Brien, *Nature* **464**, 45 (2010).
 - [8] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
 - [9] V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **17**, 821 (1976).
 - [10] H.-P. Breuer, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys* **45**, 154001 (2012).
 - [11] A. Rivas, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, *Rep. Prog. Phys.* **77**, 094001 (2014).
 - [12] S. F. Huelga, A. Rivas, and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 160402 (2012).
 - [13] C. Cormick, A. Bermudez, S. F. Huelga, and M. B. Plenio, *New J. Phys.* **15**, 073027 (2013).
 - [14] D. M. Reich, N. Katz, and C. P. Koch, arxiv:1409.7497.
 - [15] S. Deffner and E. Lutz, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 010402 (2013).
 - [16] H.-P. Breuer, E.-M. Laine, and J. Piilo, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 210401 (2009).
 - [17] A. Rivas, S. Huelga, and M. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 050403 (2010).
 - [18] X.-M. Lu, X. Wang, and C. P. Sun, *Phys. Rev. A* **82**, 042103 (2010).
 - [19] R. Vasile, S. Maniscalco, M. G. A. Paris, H.-P. Breuer, and J. Piilo, *Phys. Rev. A* **84**, 052118 (2011).
 - [20] S. Luo, S. Fu, and H. Song, *Phys. Rev. A* **86**, 044101 (2012).

- [21] S. Lorenzo, F. Plastina, and M. Paternostro, *Phys. Rev. A* **88**, 020102 (2013).
- [22] B. Bylicka, D. Chruściński, and Maniscalco, *Sci. Rep.* **4**, 5720 (2014).
- [23] M. Žnidarič, C. Pineda, and I. García-Mata, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 080404 (2011).
- [24] D. P. Divincenzo, D. W. Leung, and B. M. Terhal, *IEEE Trans. Inf. Theory* **48**, 580 (2002).
- [25] D. DiVincenzo, P. Hayden, and B. Terhal, *Found. Phys* **33**, 1629 (2003).
- [26] W. Matthews, S. Wehner, and A. Winter, *Commun. Math. Phys.* **291**, 813 (2009).
- [27] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [28] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement* (Cambridge University Press, 2006).
- [29] T. Heinosaari and M. Ziman, *The mathematical language of quantum theory: From uncertainty to entanglement* (Cambridge University Press, 2012).
- [30] G. Smith, arxiv:1007.2855.
- [31] I. García-Mata, C. Pineda, and D. Wisniacki, *Phys. Rev. A* **86**, 022114 (2012).
- [32] I. García-Mata, C. Pineda, and D. A. Wisniacki, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, 115301 (2014).
- [33] P. Leboeuf, J. Kurchan, M. Feingold, and D. Arovav, *Phys.Rev. Lett.* **65**, 3076 (1990).
- [34] The case without detuning is treated in detail in [1]; the present case with detuning has first been solved in Ref. [22] but with a minor mistake. Here, we present the corrected expression.
- [35] V. Giovannetti and R. Fazio, *Phys. Rev. A* **71**, 032314 (2005).

Bibliografía

- [ARHP14] Ángel Rivas, Susana F Huelga, and Martin B Plenio. Quantum non-markovianity: characterization, quantification and detection. *Rep. Prog. Phys.*, 77(9):094001, 2014.
- [BCM14] B. Bylicka, D. Chruściński, and Maniscalco. Non-Markovianity and reservoir memory of quantum channels: a quantum information theory perspective. *Sci. Rep.*, 4:5720, 2014.
- [BD70] R. J. Bell and P. Dean. Atomic vibrations in vitreous silica. *Discuss. Faraday Soc.*, 50:55–61, 1970.
- [BFF⁺81] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong. Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations. *Rev. Mod. Phys.*, 53:385–479, Jul 1981.
- [BGS84] O. Bohigas, M. J. Giannoni, and C. Schmit. Characterization of chaotic quantum spectra and universality of level fluctuation laws. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1–4, Jan 1984.
- [BLN04] Gely P. Basharin, Amy N. Langville, and Valeriy A. Naumov. The life and work of a.a. markov. *Linear Algebra and its Applications*, 386(0):3 – 26, 2004. Special Issue on the Conference on the Numerical Solution of Markov Chains 2003.
- [BLP09] Heinz-Peter Breuer, Elsi-Mari Laine, and Jyrki Piilo. Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems. *Phys. Rev. Lett.*, 103(21):210401, Nov 2009.
- [BP07] H.P. Breuer and F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. OUP Oxford, 2007.

-
- [Cho75] Man-Duen Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 10(3):285–290, 1975.
- [Dev05] I. Devetak. The private classical capacity and quantum capacity of a quantum channel. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 51(1):44–55, Jan 2005.
- [Fyo11] Y. Fyodorov. Random matrix theory. *Scholarpedia*, 6(3):9886, 2011. revision 90306.
- [Gil74] R. Gilmore. On the properties of coherent states. *Rev. Mex. Phys.*, 23:143, 1974.
- [GJPW12] A. Goussev, R. A. Jalabert, H. M. Pastawski, and D. Ariel Wisniacki. Loschmidt echo. *Scholarpedia*, 7(8):11687, 2012. revision 127578.
- [GMPW14] Ignacio García-Mata, Carlos Pineda, and Diego A. Wisniacki. Quantum non-markovian behavior at the chaos border. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 47(11):115301, 2014.
- [icvcvPGM11] Marko Žnidarič, Carlos Pineda, and Ignacio García-Mata. Non-markovian behavior of small and large complex quantum systems. *Phys. Rev. Lett.*, 107:080404, 2011.
- [Jam72] A. Jamiólkowski. Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):275–278, 1972.
- [JC63] E. T. Jaynes and F. W. Cummings. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*, 51:89, 1963.
- [KM05] A. B. Klimov and Chumakov S. M. *Tópicos de óptica cuántica*. Universidad de Guadalajara, 2005.
- [Llo97] S. Lloyd. Capacity of the noisy quantum channel. *Phys. Rev. A*, 55:1613–1622, March 1997.
- [NC11] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 10th edition, 2011.

- [Per72] A. M. Perelomov. Coherent states for arbitrary lie group. *Comm. Math. Phys.*, 26(3):222–236, 1972.
- [Per84] Asher Peres. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems. *Phys. Rev. A*, 30:1610–1615, Oct 1984.
- [Pin07] C. Pineda. One, two, and n qubit decoherente. *arxiv:0711.4642[quant-ph]*, 2007.
- [PP07] Carlos Pineda and Toma ž Prosen. Universal and nonuniversal level statistics in a chaotic quantum spin chain. *Phys. Rev. E*, 76:061127, Dec 2007.
- [Pro98] Tomaz Prosen. A new class of completely integrable quantum spin chains. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(21):L397, 1998.
- [PRO00] Tomaz PROSEN. Exact time-correlation functions of quantum ising chain in a kicking transversal magnetic field : Spectral analysis of the adjoint propagator in heisenberg picture. *Progress of theoretical physics. Supplement*, 139:191–203, jul 2000.
- [Rad71] J M Radcliffe. Some properties of coherent spin states. *Journal of Physics A: General Physics*, 4(3):313, 1971.
- [Rei04] Linda E. Reichl. *The Transition to Chaos*. Springer-Verlag New York, Inc., 2004.
- [RHP10] Ángel Rivas, Susana Huelga, and Martin Plenio. Entanglement and non-markovianity of quantum evolutions. *Phys. Rev. Lett.*, 105(5):050403, July 2010.
- [Sho02] P W Shor. The quantum channel capacity and coherent information. *Lecture notes, MSRI Workshop on Quantum Computation*, 2002.
- [VSL⁺11] Bassano Vacchini, Andrea Smirne, Elsi-Mari Laine, Jyrki Piilo, and Heinz-Peter Breuer. Markovianity and non-markovianity in quantum and classical systems. *New J. Phys.*, 13(9):093004, 2011.
- [Wig58] Eugene P. Wigner. On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices. *Ann. of Math.*, 67(2):325–327, March 1958.

- [Wig67] Eugene P. Wigner. Random matrices in physics. *SIAM Review*, 9(1):1–23, 1967.
- [Wig93a] E.P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions i. In ArthurS. Wightman, editor, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, volume A / 1 of *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 524–540. Springer Berlin Heidelberg, 1993.
- [Wig93b] E.P. Wigner. Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions ii. In ArthurS. Wightman, editor, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, volume A / 1 of *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 541–545. Springer Berlin Heidelberg, 1993.