



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN**

**CRUCES EN CONFIGURACIONES DE PUNTOS**

**T E S I S**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**MAESTRO EN CIENCIAS**

**P R E S E N T A:**

**JORGE CRAVIOTO LAGOS**

**DIRECTOR DE LA TESIS:**

**DR. JORGE URRUTIA GALICIA**

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

**MÉXICO, D.F. AGOSTO 2015**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Quisiera dar un especial agradecimiento al Dr. Jorge Urrutia Galicia por toda su enseñanza y por su importante contribución a los resultados de esta tesis. De la misma manera quiero agradecer a todos los sinodales que contribuyeron en la revisión del trabajo y a todos mis compañeros del cubículo que aportaron ideas para la resolución de los problemas.

Esta tesis se la quiero dedicar a todos mis maestros y amigos de la maestría con los cuales pasé excelentes momentos de risas y desvelos y que han hecho estos dos años muy dignos de recordar.

Agradezco el apoyo de mis dos hermanos y de mis padres que siempre me han tenido mucha confianza y estima. Muchas gracias también a todos los grandes amigos con los que he vivido grandes experiencias y me han dado tantos buenos momentos.

Por último quisiera dar un agradecimiento muy especial a Paulina Deschamps que ha estado conmigo durante todos estos años. Siempre me has tenido mucha confianza y siempre me has impulsado a llegar más lejos de lo que me creo capaz. Muchas gracias por hacerme tan feliz y por apoyarme en cada momento de mi vida.



# Cruces en Configuraciones de Puntos

Jorge Cravioto Lagos

Director de tesis:

Dr. Jorge Urrutia Galicia

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
1. Notación, definiciones y resultados preliminares . . . . .	VIII
2. Estructura de la tesis . . . . .	X
3. Herramientas utilizadas . . . . .	XI
3.1. Equipartición de un conjunto . . . . .	XI
<b>I. Familias cruzantes de ciclos y trayectorias</b>	<b>1</b>
I.1. Familia cruzante de 3-caminos . . . . .	2
I.2. Familia cruzante de $k$ -caminos . . . . .	4
I.3. Familia cruzante de triángulos . . . . .	7
I.4. Familia cruzante de 6-ciclos . . . . .	9
I.5. Familia cruzante de 6-caminos . . . . .	14
<b>II. Subestructuras cruzantes</b>	<b>18</b>
II.1. Subestructuras en familias cruzantes de 2-caminos . . . . .	20
II.2. Subestructuras en familias cruzantes de 3-caminos . . . . .	21
II.3. Subestructuras en familias cruzantes de $k$ -caminos . . . . .	25
II.4. Subestructuras en familias cruzantes de triángulos . . . . .	32
II.5. Subestructuras en familias cruzantes de 6-ciclos . . . . .	38

---

<b>III. Cruces en ciclos hamiltonianos</b>	<b>50</b>
III.1. Primera construcción: $\frac{n^2}{18} - O(n)$ cruces . . . . .	51
III.2. Segunda construcción: $\frac{n^2}{12} - O(n)$ cruces . . . . .	55
<b>IV. Conclusiones y futura investigación</b>	<b>60</b>

# Introducción

Dentro de la *Geometría Computacional* existe una amplia gama de problemas relacionados con conjuntos de puntos en el plano. Las principales interpretaciones que se tienen de este tipo de problemas se relacionan directamente con posiciones geográficas, sean lugares de interés en un mapa o coordenadas de dispositivos de comunicación. En cualquiera de estos dos casos, cada arista entre dos puntos representa una distancia, la cual involucra un costo, el cual probablemente se quiera disminuir. Intuitivamente, un cruce entre dos aristas representa un recorrido no optimizado o un desperdicio de energía ya que las distancias son directamente proporcionales a los costos y aparentemente un cruce involucra mayor distancia. En un recorrido a través de una nube de puntos en el plano, los conceptos de longitud y número de cruces parecen estar relacionados, en apariencia un recorrido sin cruces es más corto que uno con cruces. Esto no es enteramente cierto y existen ejemplos de trayectorias con cruces más cortas, que trayectorias sin cruces que recorren los mismos puntos. De cualquier manera, gran parte de la investigación del área que involucra distintos tipos de recorridos en nubes de puntos en el plano, busca la reducción o la eliminación de cruces.

Uno de los problemas más antiguos de la geometría computacional, *el agente viajero*, trata justamente de generar el recorrido más corto que pase por todos los puntos de un conjunto de posiciones en el plano. Encontrar la solución óptima es un problema NP-duro, sin embargo, se han desarrollado varios intentos para obtener soluciones aproximadas. Acerca de éstas, existen artículos, como [13, 22], que se enfocan en obtener y contar las soluciones sin cruces. Por otro lado, también hay artículos que dentro de las soluciones sin cruces obtienen la más larga [1, 7]. De alguna manera implícita, esto implica que deben existir ciclos hamiltonianos que permitan cruces que sean más largos que aquellos que no tienen cruces.



---

En *Teoría de Gráficas* existe un concepto semejante al de nube de puntos que son las *gráficas geométricas*. Éstas son gráficas en donde los vértices tienen coordenadas y las aristas que los unen son rectas. Aunque existe un mapeo directo entre los conceptos de las distintas disciplinas, hay una diferencia fundamental que los define. Una *gráfica* es un conjunto de vértices y aristas y una *arista* es una relación entre dos vértices del conjunto. Una nube de puntos es un conjunto de posiciones en un plano. En la teoría de gráficas, al ser una disciplina más abstracta, los resultados son más generales y se buscan propiedades de las gráficas a partir de qué contienen: número de aristas y vértices, grado de los vértices, subgráficas completas, etc. Los problemas de nubes de puntos principalmente tratan de qué se puede construir a partir de las posiciones en el plano.

En la teoría de gráficas, a diferencia de la geometría computacional, el tema de los cruces es bastante recurrente, incluso para gráficas geométricas. Existen varios conceptos relacionados con el número de cruces que tiene una gráfica y éstos se pueden revisar en [19]. El *número de cruces* ( $\overline{cr}(G)$ ) de una gráfica  $G$ , es la mínima cantidad de intersecciones de aristas de todos los dibujos planos de  $G$ . El *número de cruces rectilíneo* es una extensión del concepto anterior en donde sólo se permiten dibujos planos de  $G$  y las aristas deben ser rectas.

Existen varios trabajos relacionados con cruces en gráficas geométricas. Los que se mencionan a continuación son aquellos que de alguna manera están relacionados con los resultados de esta tesis. Algunos de estos artículos están enfocados en el área de la *teoría extremal*, que se explica en [5], en donde se busca cuál es el máximo número de aristas que debe contener una gráfica para garantizar: que no exista un conjunto de  $k$  aristas paralelas entre sí [24], que no exista un conjunto de  $k$  aristas que se crucen entre sí [25], que no contenga dos conjuntos disjuntos de aristas que se crucen entre sí [11] o que no contenga ninguna trayectoria de tamaño 3 que se cruce con ella misma [17], y el mínimo número de aristas para garantizar que contenga un ciclo hamiltoniano sin cruces y algunas otras estructuras dentro de las gráficas [10, 12]. Otros artículos están relacionados con el número de cruces que contiene cualquier gráfica geométrica completa ([4, 15, 16, 21]). Por último se menciona un trabajo que relaciona cruces en poligonizaciones a partir del número de cuadriláteros disjuntos en un gráfica geométrica completa [14].

También existen investigaciones previas dentro de la geometría computacional que se enfocan en cruces y en particular existe un artículo que fue

una motivación principal para esta tesis. El resultado que presenta Aronov y colaboradores [3] muestra cómo encontrar, en cualquier nube de puntos en posición general, un conjunto de aristas de cardinalidad  $\sqrt{n/12}$  tal que cualquier pareja dentro del conjunto se cruce. A esta estructura se le da el nombre de *familia cruzante*. La construcción del resultado es muy interesante y utiliza importantes herramientas dentro del área, en particular utiliza la sucesión creciente o decreciente más grande de una permutación [9] y el teorema del *sándwich de jamón* [8].

La investigación realizada en esta tesis se enfoca en el área de la geometría computacional y trata de encontrar familias cruzantes de trayectorias y ciclos, principalmente, para nubes de puntos en posición general.

## 1. Notación, definiciones y resultados preliminares

Antes de continuar es importante definir algunos conceptos que facilitarán la exposición de los resultados. Para los propósitos de esta tesis, una nube de puntos es un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano. La *posición general* implica que no existen 3 puntos colineales y ninguna pareja de puntos tiene la misma coordenada  $x$  o  $y$ <sup>1</sup>. Asimismo  $S$  será un conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano.

Un *punto independiente* es aquel que no pertenece a ninguna arista.

Un *cruce* es la intersección de dos aristas en una posición distinta a los vértices de las mismas. Esto implica que el par de aristas no comparte ningún vértice y debido a la posición general, ningún vértice interseca a una arista en su interior. Dos aristas se *cruzan* si existe un cruce entre ellas.

Un *camino* es el conjunto de aristas formado por las parejas consecutivas de una sucesión de distintos puntos del conjunto  $S$ . Un  $k$ -*camino* es un camino que contiene  $k$  aristas. Indistintamente se le llamará arista o segmento a un  $1$ -*camino*.

---

<sup>1</sup>Existen otras condiciones implícitas en la posición general que no serán revisadas debido a que no se utilizan en la tesis.

Un *ciclo* es el conjunto de aristas formado por las parejas consecutivas de una sucesión de puntos del conjunto  $S$  tal que el primer y último elemento de la sucesión son iguales y todos los demás son distintos. Un  $k$ -*ciclo* es un ciclo que contiene  $k$  aristas. También se le llamará triángulo a un  $3$ -*ciclo*.

Una *familia cruzante* es un conjunto de estructuras similares (formadas por aristas generadas a partir de  $S$ ), tal que cualquier pareja del conjunto se cruza. Una  $k$ -*familia cruzante*, concepto introducido en esta tesis, es una familia cruzante tal que cualquier pareja del conjunto se intersecta  $k$  veces. De no ser necesario especificar se le llamará familia cruzante. En la figura 1 se muestra un ejemplo de una  $3$ -*familia cruzante de 3-caminos*.

El tamaño de una *familia cruzante* se define como la cardinalidad del conjunto. La familia cruzante de la figura 1 tiene tamaño 3.

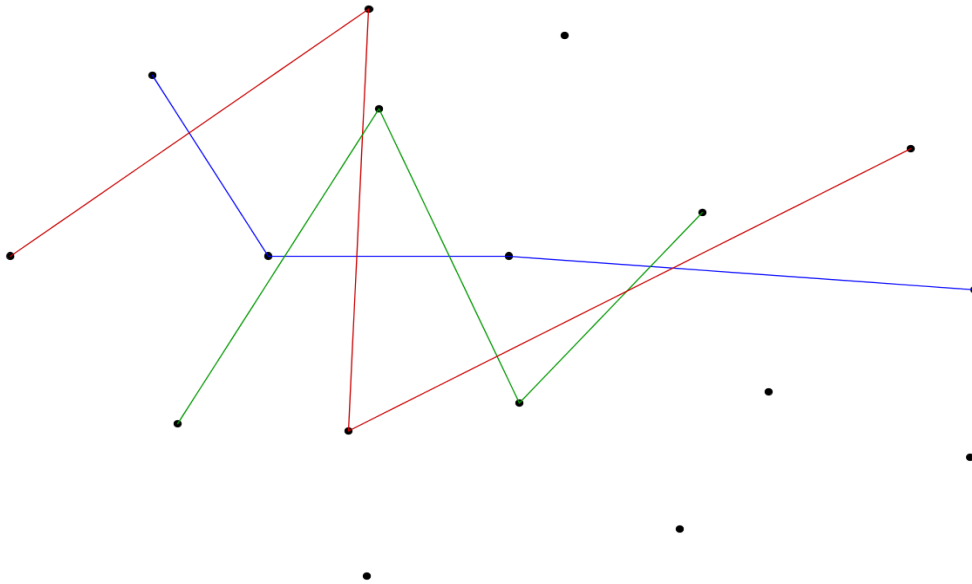


Figura 1: Una 3-familia cruzante de 3-caminos de tamaño 3.

Utilizando la terminología expuesta por las definiciones anteriores, se expresa el resultado de Aronov y colaboradores como el siguiente teorema [3].

**Teorema 0.1.** *Cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición general en el plano contiene una 1-familia cruzante de 1-caminos de tamaño  $\sqrt{n/12}$ .*

Este resultado expone una cota inferior del tamaño de la familia cruzante de segmentos que se puede formar en cualquier nube de puntos. Al realizar la construcción del resultado, Aronov y colaboradores obtienen dos conjuntos de puntos mutuamente excluyentes con los que forman la familia cruzante. Dos conjuntos,  $A$  y  $B$ , son *mutuamente excluyentes* si ninguna línea generada por una pareja de puntos de  $A$  cruza el cierre convexo de  $B$  y viceversa. En el artículo [26] se muestra una nube de puntos que no permite conjuntos mutuamente excluyentes que contengan más de  $11\sqrt{n}$  elementos. De cualquier manera, esta condición es más fuerte que la familia cruzante y es por eso que en [3] también se expresa que en cualquier nube de puntos posiblemente exista una familia cruzante de aristas de tamaño lineal.

## 2. Estructura de la tesis

En el primer capítulo se muestran distintas construcciones para obtener familias cruzantes de 3-caminos,  $k$ -caminos, triángulos, 6-caminos y 6-ciclos. Cada una de éstas representa una cota inferior en los tamaños de familias cruzantes que se pueden obtener para cualquier nube de puntos.

La motivación principal por la que se realizó la investigación del segundo capítulo fue encontrar una construcción que generara una familia cruzante de 2-caminos. Para que el resultado fuera representativo, el tamaño de ésta debía ser mayor a  $O(\sqrt{n})$  ya que sería trivial construir una de tamaño menor utilizando el teorema 0.1. En este capítulo se analiza específicamente qué sucede cuando a una familia cruzante de estructuras de  $k$ -aristas se le retira una o más aristas para formar otra familia cruzante de estructuras de  $l$  aristas, donde  $l < k$ . A éstas últimas se les llamará subestructuras cruzantes. El capítulo muestra principalmente cotas superiores sobre el tamaño de las subestructuras cruzantes.

El tercer capítulo se aparta un poco del tema de las familias cruzantes y extiende algunos resultados del capítulo 1 para mostrar dos construcciones que forman ciclos hamiltonianos con un número cuadrático de cruces. El ciclo

hamiltoniano de  $S$  formado a partir de la segunda construcción asegura que siempre se pueden obtener  $n^2/12$  cruces en dicho ciclo. Respecto a la cota superior, se sabe que un ciclo hamiltoniano a lo más tiene  $\frac{n(n-3)}{2}$  ya que tiene  $n$  aristas y cada una de ellas a lo más cruza a todas las demás exceptuando sus dos aristas adyacentes ( $n - 3$ ). Este ciclo hamiltoniano se puede obtener cuando la configuración de puntos está en posición convexa y el número de puntos es impar [2]. De cualquier manera el resultado obtenido muestra una cota inferior bastante alta y sería interesante desarrollar un poco más este tema para encontrar configuraciones de puntos que tengan a lo más un ciclo hamiltoniano con un número de cruces semejante al expresado anteriormente.

### 3. Herramientas utilizadas

La mayoría de los resultados obtenidos son puramente geométricos y bastante intuitivos por lo que no se requieren mayores herramientas para expresarlos. A continuación se muestra un teorema que es fundamental para las construcciones utilizadas en los algoritmos.

#### 3.1. Equipartición de un conjunto

La herramienta más utilizada dentro de los resultados obtenidos es la partición de una nube de puntos en 6 secciones que contienen el mismo número de puntos [6]. El teorema dice lo siguiente:

**Teorema 0.2.** *Para toda nube de  $n$  puntos existen 3 rectas en el plano que inciden en el mismo punto tal que dividen al conjunto en 6 secciones y cada una de ellas tiene al menos  $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$  puntos.*

*Demostración.* El teorema se demuestra por continuidad. Se sabe bien que una nube de puntos se puede dividir en 2 partes iguales por una recta y en general hay al menos  $n/2$  rectas que realizan esta partición [18]. Se define una recta de entrada que parte el conjunto a la mitad. A continuación se toma cualquier punto en la recta como centro de rotación y se empieza a rotar la recta hasta que choque con un punto del conjunto ya sea superior o inferior. Sin pérdida de generalidad suponemos que el punto con el cual

choca primero es inferior. Entonces se cambia el eje de rotación a este punto y se sigue rotando la recta en el mismo sentido. En este proceso pueden suceder dos cosas: si la recta choca con un punto inferior, se cambia el eje de rotación a ese punto y se continúa con la rotación en el mismo sentido; si la recta choca con un punto superior entonces se traza otra recta que difiera ligeramente en su pendiente de manera que esté en contacto con los puntos superior e inferior encontrados pero que el superior se encuentre por debajo de la recta y el inferior por encima. Esta otra recta también divide el conjunto a la mitad. Si se continúa con este procedimiento, eventualmente se obtendrá la recta divisora de entrada.

A partir de la primera recta,  $L_1$ , que divide el conjunto a la mitad (sin pérdida de generalidad supongamos que es horizontal), trazamos otra recta,  $L_2$ , tal que divida al conjunto superior e inferior en dos partes. Las proporciones que se piden para esta partición, empezando del cuadrante superior izquierdo en el orden definido por las manecillas del reloj, son:  $2/6, 1/6, 2/6$  y  $1/6$ . La recta que genera estas proporciones siempre se puede trazar debido al teorema del *sándwich de jamón* [8] en donde siempre se puede dividir un conjunto de puntos bicolorados en proporciones iguales con una recta.

Adicionales a  $L_2$  se trazan 2 rayos con origen en la intersección de las rectas tales que el primero,  $R_1$ , divida la zona superior mayor a la mitad y el segundo,  $R_2$ , divida la zona inferior mayor a la mitad. Hasta el momento la partición formada por  $L_1, L_2, R_1$  y  $R_2$  divide al conjunto en 6 partes iguales, como se muestra en la figura 2. Posiblemente los dos rayos no formen entre ellos un ángulo de 180 grados para que puedan ser considerados como una recta.

En el caso en que el ángulo inferior entre  $R_1$  y  $R_2$  sea menor a 180 grados (sin pérdida de generalidad) se deberá girar la primera recta, como se explica en el primer párrafo de la demostración, y entre cada paso actualizar  $L_2, R_1$  y  $R_2$ . En el momento en que  $L_1$  llegue a la posición horizontal de nuevo,  $R_1$  va a estar en la posición inicial de  $R_2$  y viceversa de manera que el ángulo definido inicialmente entre los dos rayos será mayor a 180 grados, en particular el conjugado del ángulo inicial. Debido a que los giros y las actualizaciones se realizan de manera continua, hay un momento en la rotación en donde el ángulo entre  $R_1$  y  $R_2$  es de 180 grados y es en ese momento en donde existen 3 rectas que se intersectan en un punto y que parten al conjunto en 6 partes iguales.  $\square$

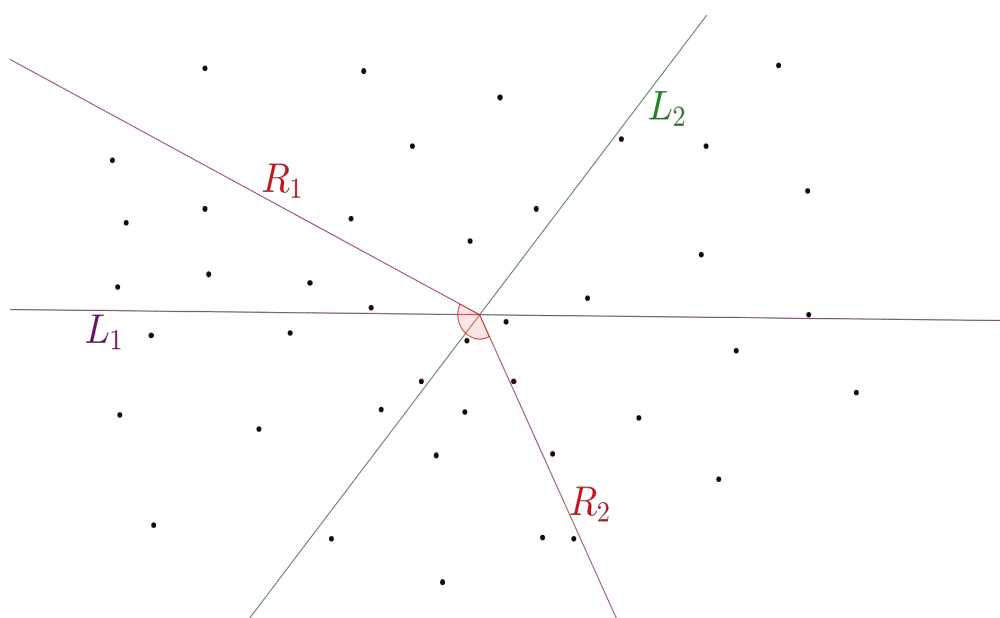


Figura 2: Equipartición del conjunto generada por las rectas  $L_1$  y  $L_2$  y los rayos  $R_1$  y  $R_2$ .

# Capítulo I

## Familias cruzantes de ciclos y trayectorias

Al comenzar a trabajar en el tema de cruces, lo que se buscaba era encontrar una construcción que tuviera un número lineal de aristas y garantizara un número cuadrático de cruces. El primer resultado, expuesto en la tesis de José Luis Álvarez Rebollar [2], muestra una construcción de dos conjuntos ( $P$  y  $Q$ ) de 2-caminos donde  $|P| = |Q| = \frac{n}{12}$  tal que si  $p \in P$  y  $q \in Q$ , entonces  $p$  y  $q$  se cruzan en alguna de sus aristas. Este resultado garantiza que en cualquier nube de puntos se puede obtener  $\frac{n^2}{144}$  cruces.

En ese momento, la idea de una *familia cruzante* de trayectorias no era considerada, pero el resultado anterior dio la pauta para analizar el tipo de construcciones que garantizaban un número cuadrático de cruces.

Poco tiempo después se encontró otra construcción que aumentó el número de cruces significativamente y que a su vez generó una familia cruzante de 3-caminos. Este resultado se muestra en el primer teorema de este capítulo. A partir de esto fue que se adoptó el término de familia cruzante, propuesto por Aronov y colaboradores [3], y se decidió desarrollar a fondo el concepto.

En el capítulo se muestran las cotas inferiores de familias cruzantes de 3-caminos,  $k$ -caminos, 3-ciclos y 6-ciclos que se pueden obtener para cualquier nube de puntos. También se muestra una construcción particular de 6-caminos que tiene un alto número de cruces. Al final se muestra una tabla de los resultados obtenidos y se expone la pregunta principal que dio lugar a la investigación presentada en el capítulo 2.



## I.1. Familia cruzante de 3-caminos

**Teorema I.1.** *Todo conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general contiene una familia cruzante de 3-caminos de tamaño  $\lfloor n/4 \rfloor$ .*

*Demostración.* Comenzamos la construcción de la familia cruzante trazando dos líneas verticales auxiliares,  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , tal que  $\mathcal{L}_1$  deje  $\lfloor n/4 \rfloor$  puntos del conjunto a su izquierda y  $\mathcal{L}_2$  deje  $\lfloor n/4 \rfloor$  puntos a su derecha. De esta manera, la nube de puntos queda dividida en 3 zonas:  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  nombradas de izquierda a derecha. A continuación, unimos cada punto de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  con un punto de  $\mathcal{B}$  de manera que ningún punto de  $\mathcal{B}$  pertenezca a dos aristas. Esto genera  $\lfloor n/4 \rfloor$  aristas que cruzan la recta  $\mathcal{L}_1$  y  $\lfloor n/4 \rfloor$  aristas que cruzan la recta  $\mathcal{L}_2$  como se muestra en la figura I.1.

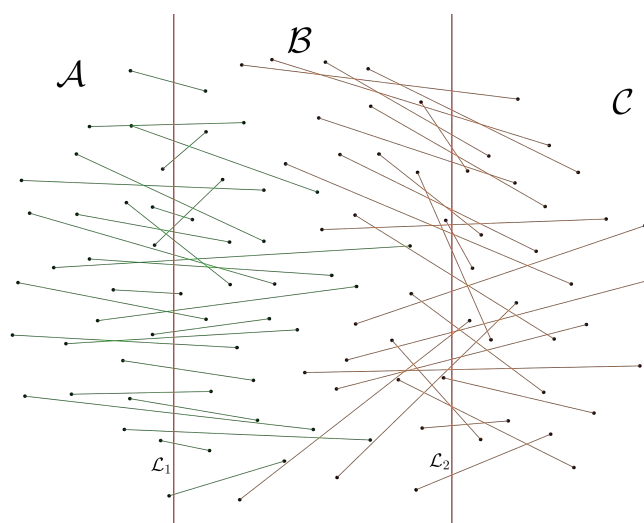


Figura I.1: Construcción de la familia cruzante de 3-caminos.

El siguiente paso es etiquetar las aristas con los números del 1 al  $\lfloor n/4 \rfloor$ , conforme a su intersección con las líneas auxiliares: las aristas que cruzan  $\mathcal{L}_1$  se numeran de arriba hacia abajo y las que cruzan  $\mathcal{L}_2$  de abajo hacia arriba. El último paso consiste en unir las aristas a partir del número asignado en el paso anterior; cada arista a generar debe contener 2 puntos de  $\mathcal{B}$  tal que los dos pertenecen a aristas con el mismo número asignado, como se muestra en la figura I.2.

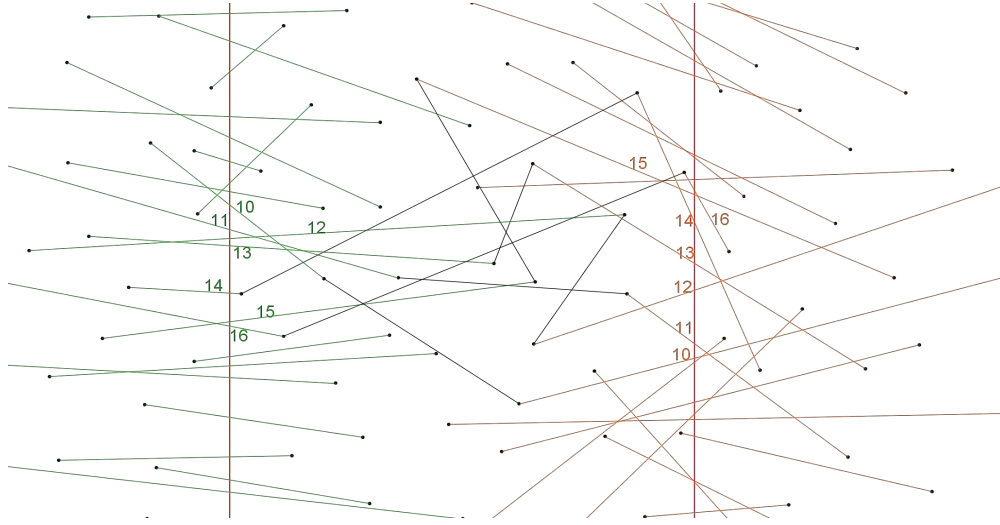


Figura I.2: Unión de segmentos para crear los 3-caminos.

La construcción anterior genera  $\lfloor n/4 \rfloor$  3-caminos y sólo falta probar que cualquier pareja de ellos se intersecta. Sean  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$  dos 3-caminos que contienen a las aristas con número asignado  $i$  y  $j$  respectivamente, donde  $i < j$ . Sean  $P_i^1, P_j^1, P_i^2$  y  $P_j^2$  los puntos de intersección entre los 3-caminos y las líneas auxiliares en donde el subíndice define el 3-camino al que pertenece el punto y el superíndice la línea auxiliar. Debido a que  $i < j$ ,  $P_i^1$  debe estar por encima de  $P_j^1$  sobre  $\mathcal{L}_1$  mientras que  $P_i^2$  debe estar por debajo de  $P_j^2$  sobre  $\mathcal{L}_2$ . Como los 3-caminos describen una trayectoria continua entre las dos rectas auxiliares, por continuidad debe existir un momento entre  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  en donde  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$  se crucen como se muestra en la figura I.3.

A partir de lo anterior, se puede asegurar que cualquier pareja de 3-caminos, del conjunto formado, se cruza en la sección  $\mathcal{B}$ . Con esto se prueba que la construcción anterior forma una familia cruzante de 3-caminos de tamaño  $\lfloor n/4 \rfloor$ .  $\square$

Al mismo tiempo podemos ver que la familia cruzante de 3-caminos obtenida en el teorema anterior es óptima en el sentido de que no se puede conseguir otra de mayor tamaño. Esto es debido a que cada 3-camino contiene a 4 puntos del conjunto, por lo que el mayor número de 3-caminos que se pueden formar es  $\lfloor n/4 \rfloor$ . Esta construcción genera aproximadamente el

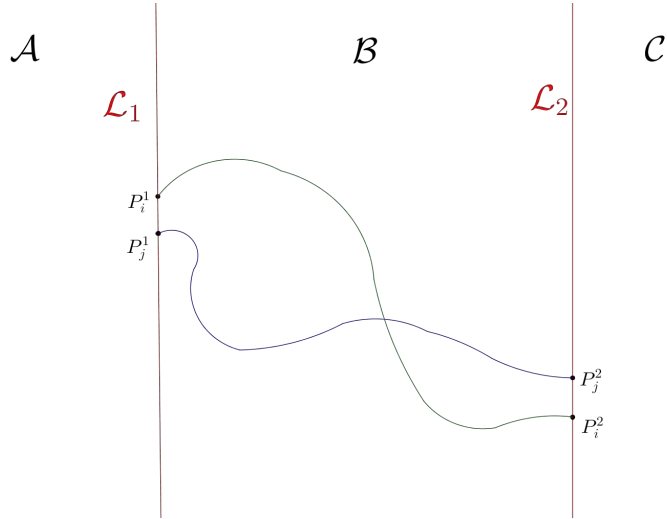


Figura I.3: Cruce entre cualquier pareja de 3-caminos de la construcción. La parte de  $\mathcal{P}_i$  contenida en la sección  $\mathcal{B}$  está representada por la trayectoria verde mientras que la parte de  $\mathcal{P}_j$  contenida en la sección  $\mathcal{B}$  está representada por la trayectoria azul.

siguiente número de cruces:

$$\frac{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor (\lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1)}{2} \approx \frac{n^2}{32} - \frac{n}{8}.$$

## I.2. Familia cruzante de $k$ -caminos

El siguiente teorema para  $k$ -caminos es una extensión del anterior.

**Teorema I.2.** *Sea  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $3 \leq k \leq n$  y sea  $l = \lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$ . Todo conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general contiene una  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ -familia cruzante de  $k$ -caminos de tamaño  $l$ .*

*Demostración.* La construcción de la familia cruzante es muy semejante a la del teorema I.1 y en ésta se utilizarán  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1$  rectas verticales auxiliares:  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1}$ . La primera de ellas se traza dejando  $l$  puntos del

conjunto a su izquierda y del otro lado el resto. A partir de ésta, las demás rectas se trazan de izquierda a derecha cada  $2l$  puntos como se muestra en la figura I.4. En la zona de hasta la derecha posiblemente quedarán más puntos que en las demás secciones debido a los sobrantes de la división  $n/k$  y a la paridad que tiene la construcción en beneficio de las trayectorias de tamaño impar.

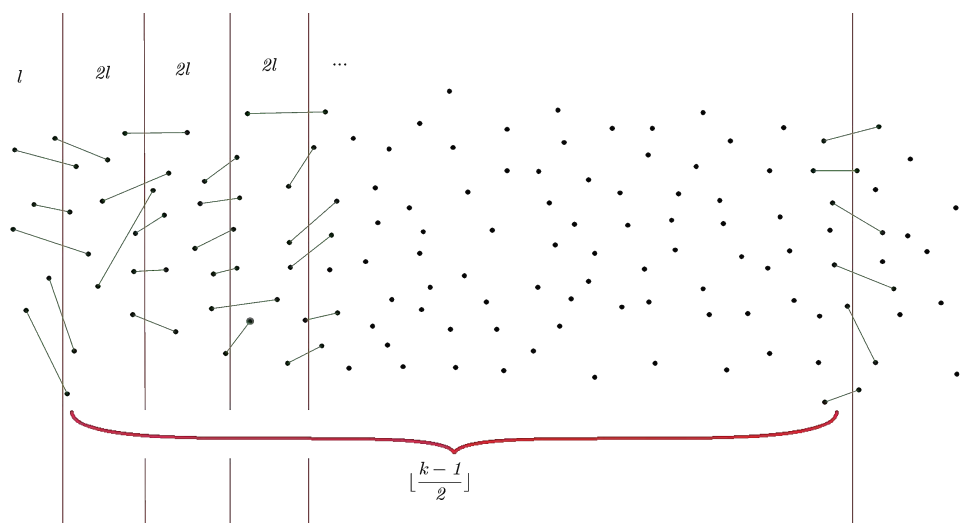


Figura I.4: Estructura auxiliar para la construcción de una familia cruzante de  $k$ -caminos. En la imagen se muestran las aristas impares de los  $k$ -caminos que cruzan las rectas auxiliares.

El siguiente paso es unir con una arista a la mitad de los puntos de cada sección intermedia con un punto independiente de su sección izquierda; y de la misma manera, a la otra mitad de los puntos con puntos independientes de la sección derecha. Al realizar todas las uniones, ningún punto deberá estar contenido en dos aristas. Esto garantiza que cada recta auxiliar intersecta a  $l$  aristas, como se muestra en la figura I.4. A continuación, se numeran todos los segmentos, de 1 a  $l$  dependiendo de la posición vertical en que cruzan las rectas auxiliares: los que cruzan rectas auxiliares impares se numeran de arriba hacia abajo y los que cruzan rectas auxiliares pares se numeran de abajo hacia arriba. Es importante notar que ninguna arista generada hasta el momento cruza a dos líneas auxiliares. El último paso consta de unir dos puntos de cada sección intermedia tal que éstos pertenecen a aristas que

fueron etiquetadas igual por la numeración anterior. Realizando este último paso correctamente, no debe quedar ningún punto independiente en las secciones intermedias y se deben de haber formado  $l$  trayectorias de longitud  $k$ , como se muestra en la figura I.5.

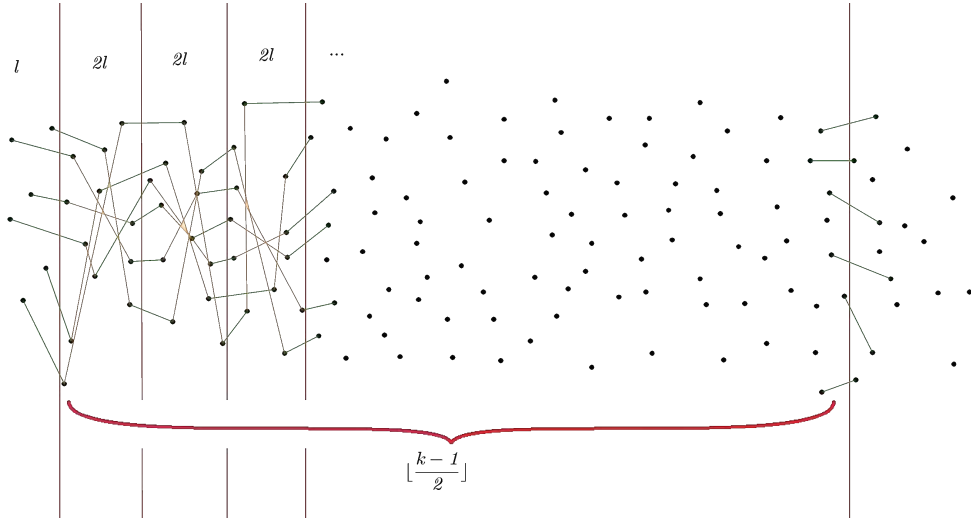


Figura I.5: Construcción de los segmentos pares que forman los  $l$   $k$ -caminos.

La prueba de que la construcción anterior forma una  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ -familia cruzante de  $k$ -caminos de tamaño  $l$  es similar a la prueba del teorema I.1. Lo único que falta es probar que cada pareja de las  $k$ -trayectorias se cruza al menos  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  veces. En total hay  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor + 1$  rectas auxiliares que forman  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  secciones intermedias, lo cual, por razones similares a las de la demostración de teorema I.1, hace que cada pareja de  $k$ -caminos se cruce  $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  veces.  $\square$

El número de cruces generado por la construcción anterior es aproximadamente de:

$$\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor \left( \frac{\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor (\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor - 1)}{2} \right) \approx \frac{n^2}{4} \left( \frac{k-1}{(k+1)^2} \right) - \frac{n}{4} \left( \frac{k-1}{k+1} \right).$$

Este número de cruces es decreciente con respecto a  $k$ .

Claramente, el teorema I.1 es un caso particular del teorema anterior. En la tesis se manejó por separado debido a que cronológicamente el resultado

fue importante para el resto de la investigación, porque genera un mayor número de cruces y por la elegancia y sencillez de la construcción.

### I.3. Familia cruzante de triángulos

En el siguiente teorema se muestra cómo obtener una familia cruzante de triángulos para cualquier nube de puntos.

**Teorema I.3.** *Todo conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general contiene dos familias cruzantes de triángulos de tamaño  $\lfloor n/6 \rfloor$ .*

*Demostración.* La construcción comienza dividiendo la nube de puntos utilizando 3 rectas,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$ , que inciden en un mismo punto, como se menciona en el teorema 0.2. Esto garantiza que cada una de las secciones formadas tiene al menos  $\lfloor n/6 \rfloor$  puntos. Se puede considerar que estas 6 secciones tienen un orden conforme a las manecillas del reloj con respecto al punto de intersección de las rectas al cual llamaremos  $\mathcal{P}$ . Una de las familias cruzantes se obtendrá utilizando los puntos de 3 de las 6 secciones tal que ninguna sea consecutiva y la otra familia cruzante se generará análogamente con las otras 3 secciones.

Nombramos las 3 secciones no consecutivas a utilizar por la primera familia cruzante: sea  $\mathcal{A}$  una de las secciones delimitada por  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , sea  $\mathcal{B}$  la sección delimitada por  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_3$  que no es adyacente a  $\mathcal{A}$  y sea  $\mathcal{C}$  la sección delimitada por  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$  que tampoco es adyacente a  $\mathcal{A}$  (ver figura I.6). Realizamos un emparejamiento entre los puntos de las secciones  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  de manera que ninguna arista se cruce con otra. Esto siempre se puede realizar y se muestra fácilmente de la siguiente manera. En el cierre convexo que forman los puntos de las 3 secciones, existe una arista que contiene un punto de  $\mathcal{B}$  y uno de  $\mathcal{C}$ . Se toma esta arista como la primera del emparejamiento y se retiran estos puntos del conjunto para formar otro cierre convexo. Se continúa con este procedimiento hasta que se tenga el emparejamiento completo. Ninguna de estas aristas se cruza con otra ya que cada una de ellas fue la envolvente de las restantes.

Para continuar con la construcción, analizamos la intersección de  $\mathcal{L}_1$  con las aristas del emparejamiento. Etiquetamos los segmentos con los números

del 1 al  $\lfloor n/6 \rfloor$  empezando por la arista cuya intersección está más alejada de  $\mathcal{P}$ , hasta llegar a la intersección más cercana.

El siguiente paso consiste en etiquetar los puntos de la sección  $\mathcal{A}$  conforme a la distancia que tiene cada punto a la recta  $\mathcal{L}_3$  como se muestra en la figura I.6. Al punto más cercano se le asignará el número 1 y al punto más alejado, el número  $\lfloor n/6 \rfloor$ . El último paso consta de unir los 2 vértices de cada arista del emparejamiento con el punto de la sección  $\mathcal{A}$  que tenga asignado el mismo número. De esta manera se forman  $\lfloor n/6 \rfloor$  triángulos que tienen un punto en cada una de las 3 secciones.

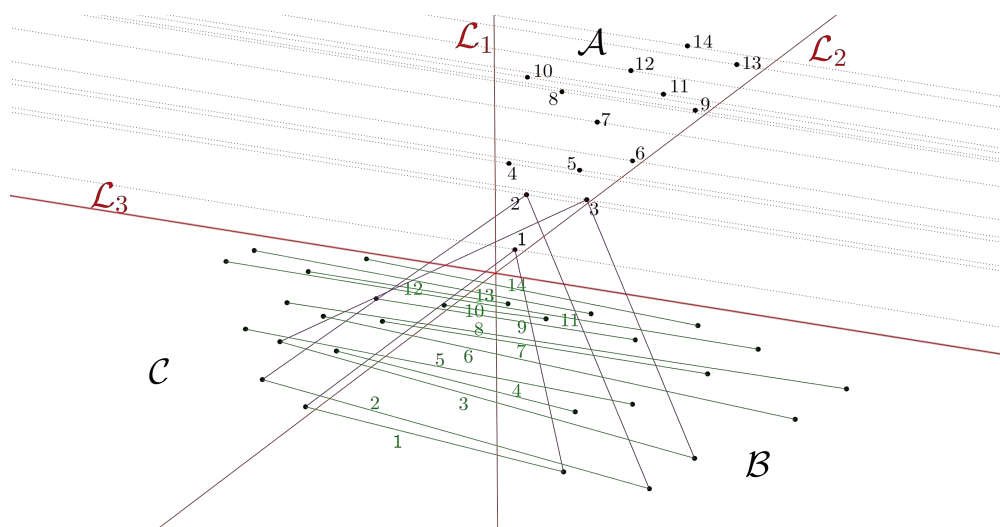


Figura I.6: Construcción de una familia cruzante de triángulos en una nube de puntos.

Lo único que falta es probar que cualquier pareja de triángulos se cruza. Sean  $\mathcal{T}_i$  y  $\mathcal{T}_j$  dos triángulos de la construcción anterior tales que  $i < j$ , donde el subíndice  $i$  corresponde al triángulo que contiene al segmento  $i$  del emparejamiento y al punto  $i$  de la sección  $\mathcal{A}$ . Vamos a considerar la base de los triángulos como el segmento que tiene un punto en  $\mathcal{B}$  y uno en  $\mathcal{C}$ . Las otras dos aristas serán los lados del triángulo. También llamaremos  $A_i$ ,  $B_i$  y  $C_i$  a los vértices de  $\mathcal{T}_i$  de acuerdo a la sección a la que pertenecen. Por construcción, la base de  $\mathcal{T}_i$  está más alejada de  $\mathcal{P}$  que la base de  $\mathcal{T}_j$  y  $A_i$  es más cercano a  $\mathcal{L}_3$  que  $A_j$ . Como todos los triángulos contienen a  $\mathcal{P}$ , vamos a suponer que  $\mathcal{T}_i$  y  $\mathcal{T}_j$  no se cruzan y que por lo tanto  $\mathcal{T}_i$  envuelve a  $\mathcal{T}_j$ . Esto

nos lleva a una contradicción ya que la altura máxima que alcanza  $\mathcal{T}_i$  en la sección  $\mathcal{A}$  es  $A_i$  y existe un punto de  $\mathcal{T}_j$ , en particular  $A_j$  que tiene una altura mayor en la sección  $\mathcal{A}$ . La contradicción nos lleva a que la suposición de que  $\mathcal{T}_i$  y  $\mathcal{T}_j$  no se cruzan es incorrecta.  $\square$

Es importante notar que si dos figuras cerradas, dibujadas en un plano, se cruzan, al menos se deben cruzar 2 veces. En el teorema no se especifica que lo que se obtiene es una 2-familia cruzante por pura simplicidad.

El número de cruces total que tiene la construcción de las 2 familias cruzantes es:

$$2 * \left( 2 \left( \frac{\lfloor n/6 \rfloor (\lfloor n/6 \rfloor - 1)}{2} \right) \right) \approx \frac{n^2}{18} - \frac{n}{3}.$$

## I.4. Familia cruzante de 6-ciclos

El siguiente teorema muestra cómo obtener una 12-familia cruzante de 6-ciclos para cualquier nube de puntos.

**Teorema I.4.** *Todo conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general contiene dos 12-familias cruzantes de 6-ciclos de tamaño  $\lfloor n/12 \rfloor$ .*

*Demostración.* Primeramente se divide la nube de puntos en 6 partes utilizando 3 rectas,  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$ , como se muestra en el teorema 0.2. Se utilizarán 3 secciones no colindantes para formar una familia cruzante, y la otra se formará análogamente con las 3 secciones restantes. Al punto de intersección de las tres rectas se le llamará  $\mathcal{P}$ .

Se nombran las secciones  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  de la misma manera a como se hizo en la demostración del teorema I.3. Cada punto de cada sección será numerado respecto a la distancia que tienen a la recta que no delimita su sección, como se realizó con la sección  $\mathcal{A}$  en la demostración pasada (ver figura I.7). A estos puntos se les llamará con el nombre de la sección a la que pertenecen y como subíndice tendrán el número asignado a ellos; por ejemplo,  $B_4$  sería el cuarto punto más cercano a la recta  $\mathcal{L}_2$  que pertenece a la sección  $\mathcal{B}$ .

Cada 6-ciclo tendrá 2 puntos de cada sección y se forma de la siguiente manera. El 6-ciclo comienza con el punto independiente (que no pertenece



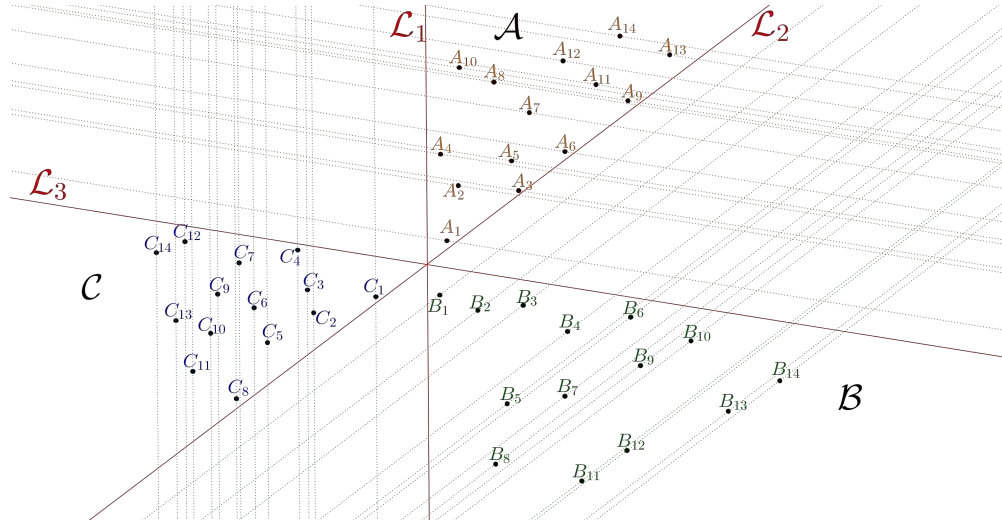


Figura I.7: Estructura auxiliar para la construcción de una 12-familia cruzante de 6-ciclos.

a otro 6-ciclo) con numeración más alta del conjunto  $\mathcal{A}$ . Se une este punto al punto independiente de numeración más baja del conjunto  $\mathcal{B}$ . Este último se une al punto independiente de numeración más alta del conjunto  $\mathcal{C}$ . La trayectoria continúa por el punto independiente de numeración más baja del conjunto  $\mathcal{A}$ , va al independiente más alto del conjunto  $\mathcal{B}$ , después al independiente más bajo del conjunto  $\mathcal{C}$ , para terminar en el punto de inicio, el cual ya no es un punto independiente. En particular el primer 6-ciclo se forma a partir de la sucesión  $(A_{\lfloor n/6 \rfloor}, B_1, C_{\lfloor n/6 \rfloor}, A_1, B_{\lfloor n/6 \rfloor}, C_1)$ .

Este procedimiento de construcción de 6-ciclos se continúa, como se muestra en la figura I.8, hasta obtener  $\lfloor \frac{\lfloor n/6 \rfloor}{2} \rfloor$  6-ciclos. Si  $\lfloor n/6 \rfloor$  es impar, al final quedará un punto en cada sección que al unirse forman un triángulo que en particular cruza a cada 6-ciclo 12 veces.

La construcción anterior genera un conjunto de  $\lfloor n/12 \rfloor$  6-ciclos. Lo que falta demostrar es que cada pareja de 6-ciclos se cruza 12 veces entre sí.

Sean  $\xi_i$  y  $\xi_j$  dos 6-ciclos formados por la construcción anterior. El subíndice corresponde al orden consecutivo en que los ciclos fueron generados.  $\xi_j$  es un ciclo interno de  $\xi_i$  si la construcción de  $\xi_j$  es posterior a la de  $\xi_i$ , es decir,  $i < j$ . De manera equivalente diremos que  $\xi_i$  es un ciclo envolvente de  $\xi_j$ .

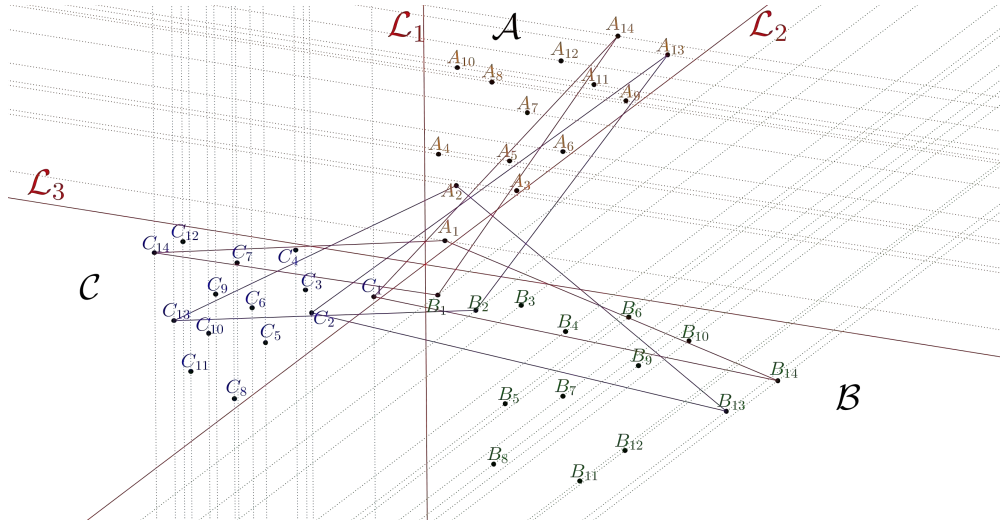


Figura I.8: Los primeros dos 6-ciclos formados por la construcción.

Para facilitar la presentación del resultado, a los puntos de cada 6-ciclo se les asignará un nombre que defina en qué sección están y si son el inferior o el superior con respecto a la numeración dada; por ejemplo,  $B_i^+$  será el punto con mayor numeración de la sección  $\mathcal{B}$  que pertenece a  $\xi_i$ .

Para cada punto del ciclo interno tomaremos el 2-camino formado por sus aristas incidentes. A cada uno de estos 2-caminos se le van a atribuir 2 cruces. Más adelante se mostrará que los cruces no se cuentan dos veces, es decir, que cada cruce se le atribuirá solamente a un 2-camino. Si tenemos seis 2-caminos, uno por cada punto del ciclo interno, y a cada uno se le atribuyen 2 cruces, entonces cada pareja de 6-ciclos se cruzará 12 veces entre sí.

Existen 3 casos que pueden suceder al asignar los 2 cruces a los 2-caminos. Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que estamos analizando el 2-camino de un punto del ciclo interno  $\xi_j$  en la sección  $\mathcal{A}$ , en particular  $A_j^+$  (la prueba es análoga para  $A_j^-$ ). Para visualizar correctamente los casos vamos a analizar el 2-camino asociado al punto  $A_i^+$ , que comienza en el punto  $C_i^-$  y termina en el punto  $B_i^-$ . Vamos a utilizar dos líneas auxiliares:  $\mathcal{L}_{C_i}$  será la línea paralela a  $\mathcal{L}_1$  que pasa por  $C_i^-$  y  $\mathcal{L}_{B_i}$  será la línea paralela a  $\mathcal{L}_2$  que pasa por  $B_i^-$ .

El caso 1 sucede cuando el 2-camino del punto  $A_j^+$ , del ciclo interno  $\xi_j$ ,

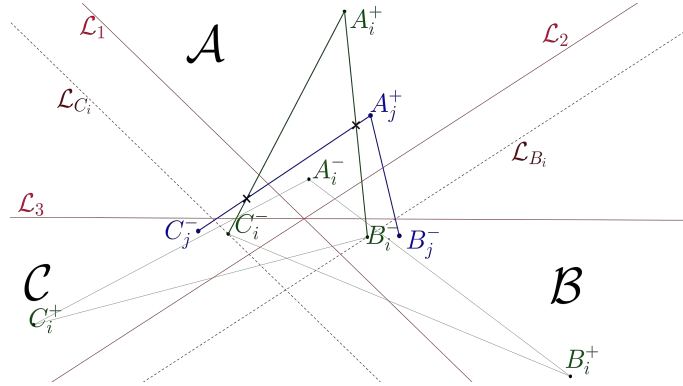


Figura I.9: Representación del caso 1. Los tachos marcan los 2 cruces que se le atribuyen al 2-camino de  $A_j^+$ .

cruza a la recta  $\mathcal{L}_{C_i}$  por encima (mayor coordenada  $y$ ) de  $C_i^-$  y también cruza a la recta  $\mathcal{L}_{B_i}$  por encima de  $B_i^-$ . Es importante notar que el 2-camino de  $A_j^+$  siempre va a cruzar las dos rectas auxiliares ya que por construcción termina y empieza en puntos que están en las regiones exteriores definidas por estas rectas. En este caso, el 2-camino de  $A_j^+$ , debe entrar y salir de la sección delimitada por el 2-camino de  $A_i^+$  y las rectas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , como se muestra en la figura I.9. Esto siempre sucede ya que  $A_j^+$  es el punto de altura máxima de su 2-camino asignado, en la sección  $\mathcal{A}$  y  $A_i^+$  tiene mayor altura por lo que el 2-camino de  $A_j^+$  no puede rodear al 2-camino de  $A_i^+$ . En este caso, la entrada y salida de la región delimitada serán los dos cruces que se le atribuyen al 2-camino de  $A_j^+$ .

El caso 2 sucede cuando una de las aristas del 2-camino de  $A_j^+$  cruza a la recta  $\mathcal{L}_{C_i}$  por debajo de  $C_i^-$  y cruza a  $\mathcal{L}_{B_i}$  por encima de  $B_i^-$  (la demostración es análoga para el caso opuesto). Entonces, sólo se puede garantizar un cruce del 2-camino del ciclo interno con el 2-camino del ciclo externo. Éste se da al salir de la región delimitada por el 2-camino de  $A_i^+$ ,  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ . En este caso, el 2-camino no cruza al segmento  $\overline{A_i^+ C_i^-}$  lo que a su vez implica que el segmento  $\overline{A_j^+ C_j^-}$  debe cruzar el segmento  $\overline{C_i^- B_i^+}$ , como se muestra en la figura I.10. Esto siempre sucede ya que  $C_j^-$  tiene mayor altura a  $C_i^-$  en la sección  $\mathcal{C}$ , y el 2-camino de  $C_i^-$  no puede rodear a  $C_j^-$  como se ha visto anteriormente. Por lo tanto, los dos cruces que se le atribuyen a este 2-camino son el cruce con el 2-camino de  $A_i^+$  y el cruce de los segmentos  $\overline{A_j^+ C_j^-}$  y  $\overline{C_i^- B_i^+}$ .

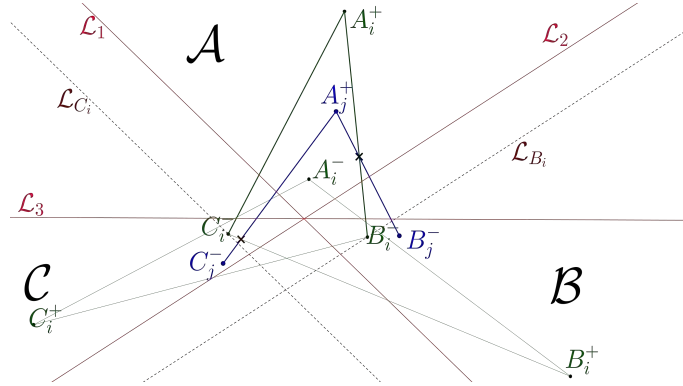


Figura I.10: Representación del caso 2. Los taches marcan los 2 cruces que se le atribuyen al 2-camino de  $A_j^+$ .

El tercer caso sucede cuando el 2-camino del ciclo interno cruza  $\mathcal{L}_{C_i}$  por debajo de  $C_i^-$  y a  $\mathcal{L}_{B_i}$  por debajo de  $B_i^-$ , como se muestra en la figura I.11. Los cruces que se pueden asegurar son el cruce de los segmentos  $\overline{A_j^+ C_j^-}$  y  $\overline{C_i^- B_i^+}$  y el cruce de los segmentos  $\overline{A_j^+ B_j^-}$  y  $\overline{B_i^- C_i^+}$ .

Lo único que falta por demostrar es que ninguno de los cruces es contado dos veces. Esto se muestra fácilmente ya que cada arista del 6-ciclo interno está contenida en dos 2-caminos. Sin pérdida de generalidad vamos a analizar la arista  $\overline{A_j^+ C_j^-}$ . Cuando esta arista pertenece al 2-camino de  $A_j^+$  se le pueden asignar cruces con los segmentos  $\overline{A_i^+ B_i^-}$ ,  $\overline{A_i^+ C_i^-}$  o  $\overline{C_i^- B_i^+}$ . Sin embargo, cuando la arista es asignada al 2-camino de  $C_j^-$  se le pueden asignar cruces con los segmentos  $\overline{C_i^+ A_i^-}$ ,  $\overline{C_i^+ B_i^-}$  o  $\overline{A_i^- B_i^+}$  que justo son las otras 3 aristas de  $\xi_i$ . Por todo lo anterior, queda demostrado que a cada 2-camino de  $\xi_j$  se le pueden asignar 2 cruces distintos con  $\xi_i$ , lo que implica que cualquier pareja de 6-ciclos formada por la construcción anterior se cruza 12 veces.  $\square$

El número total de cruces que genera esta construcción es de:

$$2 * \left( 12 \left( \frac{\lfloor \frac{n}{12} \rfloor (\lfloor \frac{n}{12} \rfloor - 1)}{2} \right) \right) \approx \frac{n^2}{12} - n.$$

Cabe mencionar que cada 6-ciclo también tiene 3 cruces internos. Esto se puede demostrar fácilmente si a cada 2-camino de los puntos con numeración

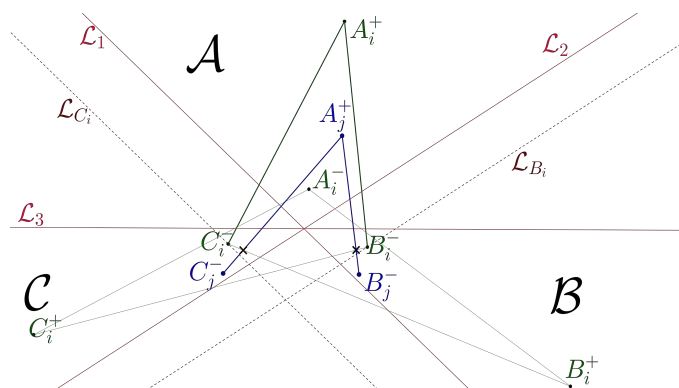


Figura I.11: Representación del caso 3. Los tachos marcan los 2 cruces que se le atribuyen al 2-camino de  $A_j^+$ .

baja del ciclo se le atribuyen 2 cruces siguiendo los mismo pasos que se usaron en la demostración del teorema I.4. En este caso, estos cruces sí se cuentan dos veces por lo que en total sólo se pueden garantizar 3 cruces por ciclo. La suma de los cruces internos agrega  $2 * 3 \lfloor \frac{n}{12} \rfloor \approx \frac{n}{2}$  cruces a la suma total, de tal manera que el número total de cruces es:

$$\frac{n^2}{12} - \frac{n}{2}.$$

## I.5. Familia cruzante de 6-caminos

La última familia cruzante que se muestra en este capítulo es una variación de la familia cruzante de 6-ciclos. En esta ocasión se utilizan 6-caminos tales que cualquier pareja de éstos se intersecta 10 veces entre sí. La demostración es muy parecida a la del teorema I.4.

**Teorema I.5.** *Todo conjunto de  $n$  puntos en el plano en posición general contiene dos 10-familias cruzantes de 6-caminos de tamaño  $\lfloor n/14 \rfloor$ .*

*Demostración.* Dividimos la nube de puntos en 6 partes utilizando el teorema 0.2 y llamaremos a las rectas, secciones y puntos de la misma manera

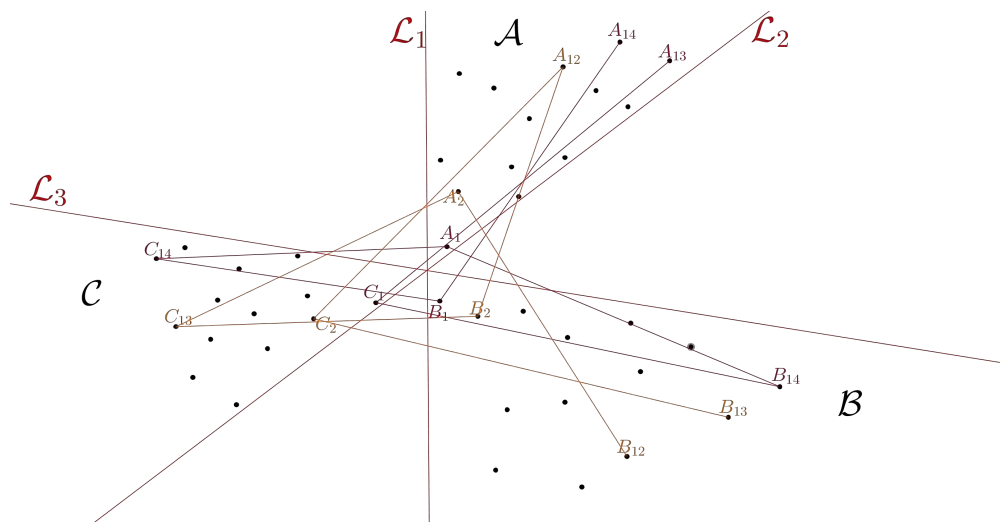


Figura I.12: Los primeros dos 6-caminos formados por la construcción.

que en la prueba del teorema I.4. Se utilizarán 3 secciones no consecutivas para formar una familia cruzante, y la otra se formará análogamente con las 3 secciones restantes. Vamos a definir un orden circular entre las secciones, en donde la sección  $\mathcal{A}$  precede a la sección  $\mathcal{B}$  y ésta precede a la sección  $\mathcal{C}$ .

La formación de cada 6-camino se realiza de la siguiente manera. Como vértice inicial se toma dentro de  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  el punto independiente con mayor numeración. Este punto se une con el punto independiente con menor numeración dentro de la siguiente sección. Se continúa con este procedimiento tomando alternadamente el menor y el mayor punto independiente de la secciones conforme al orden cíclico definido, hasta formar el 6-camino. El camino debe terminar en la misma sección en donde comienza, por lo que contiene a los 2 puntos independientes mayores y al menor punto independiente de esta sección. También contiene al mayor y al menor punto independiente de cada una de las otras 2 secciones (7 puntos en total). Al formar un nuevo 6-camino siempre es importante comenzar con el punto independiente de mayor numeración dentro de la unión de las tres secciones para garantizar que se usen todos los puntos, como se ilustra en la figura I.12. Esta construcción genera  $\lfloor n/14 \rfloor$  6-caminos y sólo falta demostrar que cualquier pareja de ellos se intersecta 10 veces.

Sean  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$  dos 6-caminos formados por la construcción anterior. El

subíndice de cada uno de ellos corresponde al orden en que los caminos fueron construidos.  $\mathcal{P}_j$  es un camino interno de  $\mathcal{P}_i$  si la construcción de  $\mathcal{P}_j$  es posterior a la de  $\mathcal{P}_i$ , es decir,  $i < j$ . A su vez,  $\mathcal{P}_i$  es un camino envolvente de  $\mathcal{P}_j$ . De la misma manera que en la demostración del teorema I.4, a cada punto interior de  $\mathcal{P}_j$  se le puede asignar un 2-camino, al cual se le pueden atribuir 2 cruces con  $\mathcal{P}_i$ . La demostración de los 3 casos se aplica exactamente igual en esta construcción. La única diferencia es que al punto inicial y final de  $\mathcal{P}_j$  no se les puede asignar un 2-camino. Por lo tanto, cada camino interno,  $\mathcal{P}_j$ , tiene 5 puntos interiores, a los cuales se le pueden atribuir 2 cruces distintos con cada uno de los caminos restantes. Esto genera 10 cruces entre cualquier pareja de 6-caminos.  $\square$

El número total de cruces generado por esta construcción es de:

$$2 * \left( 10 \left( \frac{\lfloor \frac{n}{14} \rfloor (\lfloor \frac{n}{14} \rfloor - 1)}{2} \right) \right) \approx \frac{5n^2}{98} - \frac{5n}{7} > \frac{n^2}{20} - \frac{5n}{7}$$

Este procedimiento se podría generalizar para  $k$ -caminos, donde  $k > 6$ , pero el número total de cruces decrece en función de  $k$ . Para  $k < 6$ , no se garantizan muchos cruces entre parejas y en particular para  $k = 2$  no se puede garantizar que siempre se crucen los caminos.

## Tabla de resultados

En la siguiente tabla se muestran los resultados de las familias cruzantes que se han obtenido hasta el momento.

Familias Cruzantes				
<i>i</i> -Familia Cruzante	<i>i</i> -Caminos	Tamaño	Total de Cruces	Teorema
1	1	$\sqrt{\frac{n}{12}}$	$\sqrt{\frac{n}{12}} (\sqrt{\frac{n}{12}} - 1) = \frac{n}{12} - \sqrt{\frac{n}{12}}$	teo. 0.1
1	3	$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$	$\frac{n^2}{32} - \frac{n}{8}$	teo. I.1
$\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$	$k$	$\lfloor \frac{n}{k+1} \rfloor$	$\frac{n^2}{4} \left( \frac{k-1}{(k+1)^2} \right) - \frac{n}{4} \left( \frac{k-1}{k+1} \right)$	teo. I.2
10	6	$\lfloor \frac{n}{14} \rfloor$	$\frac{5n^2}{98} - \frac{5n}{7} *$	teo. I.5
<i>i</i> -Familia Cruzante	<i>i</i> -Ciclos	Tamaño	Total de Cruces	Teorema
2	3	$\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$	$\frac{n^2}{18} - \frac{n}{3} *$	teo. I.3
12	6	$\lfloor \frac{n}{12} \rfloor$	$\frac{n^2}{12} - \frac{n}{2} *$	teo. I.4

Los totales de cruces con asterisco (\*) cuentan los cruces de las dos familias cruzantes que se pueden formar en una nube de puntos.

Se considera que el tema de *familias cruzantes* se puede extender a muchas otras estructuras, como  $k$ -ciclos, polígonos simples, polígonos convexos, etc. Sin embargo, un resultado importante para cerrar el tema sería encontrar una familia cruzante de 2-caminos cuyo tamaño sea mayor a  $\Theta(\sqrt{n})$ . La búsqueda de este resultado dio lugar a la investigación realizada en el capítulo 2.



# Capítulo II

## Subestructuras cruzantes

El tema de las subestructuras en familias cruzantes surgió a partir de la búsqueda de una familia cruzante de 2-caminos, como ya se ha mencionado anteriormente. Sucede que un 2-camino es generado por tres puntos en el plano y estos tres puntos pueden generar tres 2-caminos. Al momento de intentar construir una familia cruzante es complicado decidir cuál de estos 2-caminos es preferible elegir para lograr que muchos de ellos se crucen. Fue a partir de esta idea que surgió la siguiente pregunta: si se tuviera una familia cruzante de triángulos de tamaño lineal y se le quitara de manera inteligente una arista a cada triángulo, ¿cuántos 2-caminos se podrían conservar de manera que se crucen mutuamente entre ellos?

Por otro lado, si se analiza la construcción utilizada en la demostración del teorema I.1, se puede notar que la estructura tiene bastantes libertades al momento de generar las primeras aristas. Si de alguna manera se pudieran concentrar todos los cruces en las aristas centrales para poder remover aristas de las orillas sin perder cruces, ¿cuántos 2-caminos se podrían generar para que se conserven los cruces y formen una familia cruzante?

Estas dos preguntas fueron las que incitaron a estudiar las subestructuras de familias cruzantes y resultó que el tema es bastante amplio e interesante. En el capítulo se presentan, principalmente, cotas superiores del tamaño de las familias cruzantes de subestructuras que se pueden obtener a partir de los conjuntos formados por las construcciones del capítulo 1. Algunos de estos resultados muestran cotas inferiores aunque en general son para casos particulares.

A pesar del esfuerzo invertido, en el capítulo no se muestra una cota inferior relevante para la familia cruzante de 2-caminos que se puede obtener en cualquier nube de puntos, aunque sí se presenta una conjetura al respecto.

Antes de comenzar con las demostraciones vamos a definir qué es una subestructura cruzante. Sea  $\Gamma$  una familia cruzante de  $k$ -estructuras ( $k$ -ciclos o  $k$ -caminos). Una *subestructura cruzante* es una familia cruzante compuesta por subconjuntos similares,  $l$ -caminos ( $l < k$ ), de las  $k$ -estructuras de  $\Gamma$ . Ejemplo: se muestra en la figura II.1 tres subestructuras cruzantes de 2-caminos formadas a partir de una familia cruzante de 3-caminos.

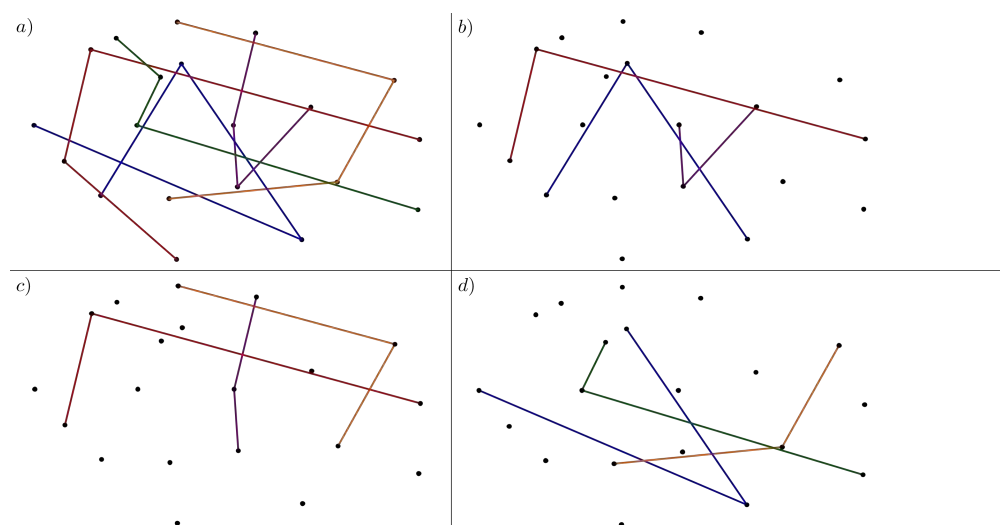


Figura II.1: Ejemplo de subestructura cruzante. La primera imagen, a), muestra una familia cruzante de 3-caminos de tamaño 5. Las siguientes tres imágenes, b), c) y d), muestran algunas de las subestructuras cruzantes de 2-caminos de tamaño 3. Las tres subestructuras mostradas son de tamaño máximo para la familia cruzante del primer inciso.

Con cierto detalle, se puede observar que las subestructuras cruzantes mostradas en la figura II.1 son de máximo tamaño. La investigación realizada en esta tesis no incluye algún algoritmo para encontrar la subestructura cruzante de mayor tamaño de alguna familia cruzante. Esto debe ser bastante complicado y probablemente el problema sea NP-Completo.

## II.1. Subestructuras en familias cruzantes de 2-caminos

El primer resultado que se muestra en el capítulo es muy sencillo y al mismo tiempo representa mucho de lo que sucede con los cruces en las subestructuras. Este resultado se obtuvo de la tesis de José Luis Álvarez Rebollar [2]. Se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema II.1.** *Existe una familia cruzante de 2-caminos de tamaño  $n$  tal que la subestructura cruzante de aristas más grande que se puede obtener es de tamaño 2.*

*Demostración.* Para probar el teorema es necesario mostrar el contraejemplo de la familia cruzante de 2-caminos. La construcción es la siguiente: primero se trazan  $n$  segmentos verticales de izquierda a derecha de manera que todos los puntos superiores comparten la misma altura (coordenada  $y$ ) al igual que los puntos inferiores. En el punto inferior de cada segmento se traza un segundo segmento que tenga un pequeño ángulo con respecto a la horizontal,  $\alpha$ , y una longitud suficientemente grande para cruzar a todos los segmentos verticales que están a la derecha del punto inicial del segmento, como se muestra en la figura II.2. Claramente estos segundos segmentos son paralelos debido a que todos tienen el mismo ángulo con respecto a la horizontal.

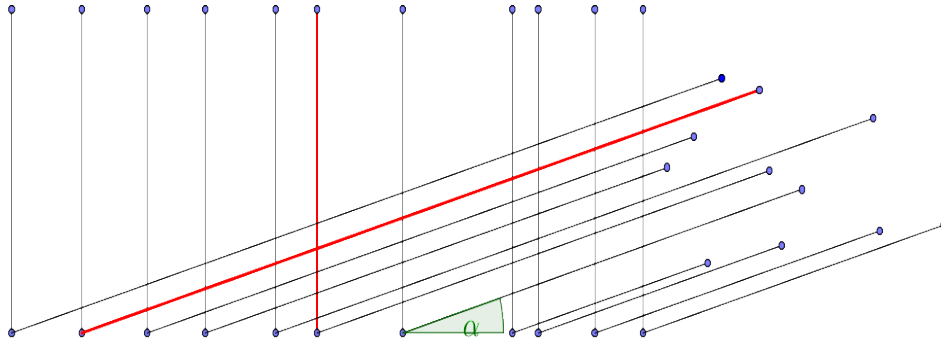


Figura II.2: Familia cruzante de 2-caminos de tamaño  $n$  con máxima subestructura cruzante de aristas de tamaño 2.

Es fácil demostrar que no se puede obtener una subestructura cruzante de aristas de tamaño mayor a 2. Sin pérdida de generalidad, se incorpora a la subestructura cruzante  $\Sigma$ , inicialmente vacía, cualquiera de las aristas verticales. Esto implica que ninguna otra arista vertical va a poder pertenecer a  $\Sigma$ . La arista escogida cruza a un subconjunto de aristas diagonales, las cuales son paralelas entre sí. Por lo tanto, al incorporar una de estas aristas a  $\Sigma$ , se descartan como candidatos a pertenecer a la subestructura cruzante todas las demás aristas diagonales del conjunto. Es por esto que cualquier subestructura cruzante de segmentos que se quiera obtener a partir de la familia cruzante tendrá a lo más 2 elementos.  $\square$

Con el siguiente corolario se definen las cotas para las subestructuras cruzantes de aristas formadas a partir de familias cruzantes de 2-caminos.

**Corolario II.2.** *La máxima y mínima subestructura cruzante de aristas que se puede garantizar para cualquier familia cruzante de 2-caminos es de tamaño 2.*

*Demostración.* La cota superior se obtiene a partir de la construcción presentada en la demostración del teorema II.1. Por otro lado, cualquier cruce involucra a dos elementos, por lo que no existe una subestructura cruzante de tamaño menor a 2.  $\square$

Este corolario nos muestra cómo muchos cruces se pueden perder fácilmente al retirar aristas de las estructuras de familias cruzantes.

## II.2. Subestructuras en familias cruzantes de 3-caminos

Para continuar en el tema, se analizan las cotas superiores de las subestructuras cruzantes que se pueden formar a partir de una familia cruzante de 3-caminos. La familia cruzante que se utiliza es un caso posible generado por la construcción utilizada en el teorema I.1. La particularidad de este ejemplo es que todos los cruces se concentran en la sección central de la construcción.

**Teorema II.3.** *Existe una familia cruzante de 3-caminos de tamaño  $n$ , generada por el algoritmo utilizado en el teorema I.1, tal que la subestructura cruzante de 2-caminos más grande que se puede obtener es de tamaño  $2\sqrt{n}-1$  y la subestructura cruzante de aristas más grande que se puede obtener es de tamaño 2.*

*Demostración.* La construcción que se utiliza es la siguiente: se trazan  $2n$  rectas horizontales en el plano y  $n$  rectas paralelas con pendiente positiva. Después, se trazan dos líneas verticales auxiliares,  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , tal que entre las dos envuelvan a todos los cruces generados por las rectas horizontales y diagonales, como se muestra en la figura II.3. El paso siguiente consiste en numerar las líneas, para colocar los puntos que van a generar los segmentos de los 3-caminos. Los primeros puntos se colocan sobre las  $n$  rectas horizontales inferiores, a la izquierda de la línea auxiliar  $\mathcal{L}_1$ . Tanto las rectas como los puntos se numeran de arriba hacia abajo. Los siguiente puntos se colocan sobre las  $n$  rectas horizontales superiores, del lado derecho de  $\mathcal{L}_2$ , y tanto las rectas como los puntos se numeran de abajo hacia arriba. Las rectas diagonales se numeran utilizando la siguiente fórmula:

$$\left\lceil \frac{i}{\sqrt{n}} \right\rceil \sqrt{n} - (i - 1 \bmod \sqrt{n}),$$

donde  $i$  corresponde al orden que tienen las rectas diagonales de arriba hacia abajo. La numeración dada por la fórmula anterior se puede interpretar como un trenzado en donde se invierte el orden de los 3-caminos en pequeños grupos de  $\sqrt{n}$  elementos. Esta numeración se muestra en la figura II.3.

Los últimos puntos de los 3-caminos se colocan sobre las intersecciones de las rectas que tengan el mismo número asignado y se nombran con ese mismo número. A continuación, los segmentos se generan entre puntos nombrados igual que estén unidos por rectas, sean horizontales o diagonales, como se muestra en la figura II.4.

Esta estructura genera una familia cruzante, ya que los 3-caminos cruzan dos rectas verticales; numerados en la primera de arriba hacia abajo y en la segunda de abajo hacia arriba. La prueba es análoga a la utilizada en la demostración del teorema I.1.

Primeramente, observamos que la máxima subestructura cruzante de aristas que se puede obtener a partir del contraejemplo es de tamaño 2. Si se

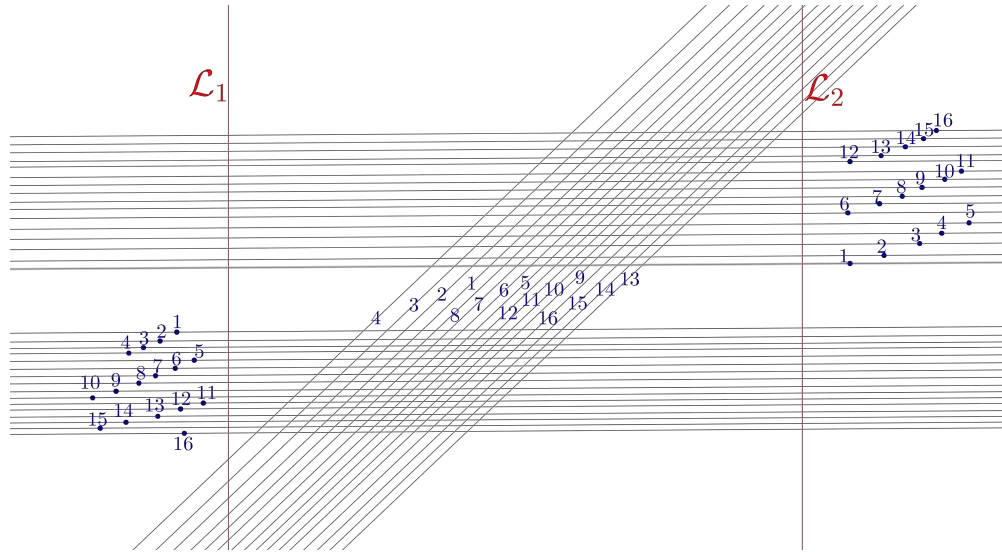


Figura II.3: Construcción de la familia cruzante de 3-caminos de tamaño 16.

agrupan los segmentos por su pendiente, sólo se forman dos grupos de aristas paralelas y la subestructura cruzante a lo más puede tener un elemento de cada uno de estos grupos.

Para demostrar que existe a lo más una subestructura cruzantes de 2-caminos de tamaño  $2\sqrt{n} - 1$  vamos a definir algunas partes de la estructura. Las aristas que cruzan  $\mathcal{L}_1$  serán los primeros segmentos de cada 3-camino, las aristas diagonales serán los segundos segmentos y las aristas que cruzan  $\mathcal{L}_2$  serán los terceros o últimos segmentos. Se agrupan los 3-caminos en clases en donde la clase 1 contendrá a los primeros  $\sqrt{n}$  elementos, la clase 2 a los siguientes  $\sqrt{n}$ , y se continúa esta agrupación hasta obtener  $\sqrt{n}$  clases. A partir de la fórmula definida para la numeración de las rectas diagonales y de la figura II.4, se puede identificar que cada 3-camino se cruza con los de su misma clase en los primeros 2 segmentos y se cruza con todos los demás elementos de la familia en el segundo o tercer segmento.

Vamos a comenzar la demostración introduciendo 2-caminos a la subestructura cruzante  $\Sigma$ , inicialmente vacía. Cada 3-camino tiene dos posibles 2-caminos, dependiendo de cuál de las aristas de los extremos se retira. Primero introducimos un 2-camino al cual se le retiro el último segmento. Se puede observar que a todos los elementos de su clase se les puede retirar su

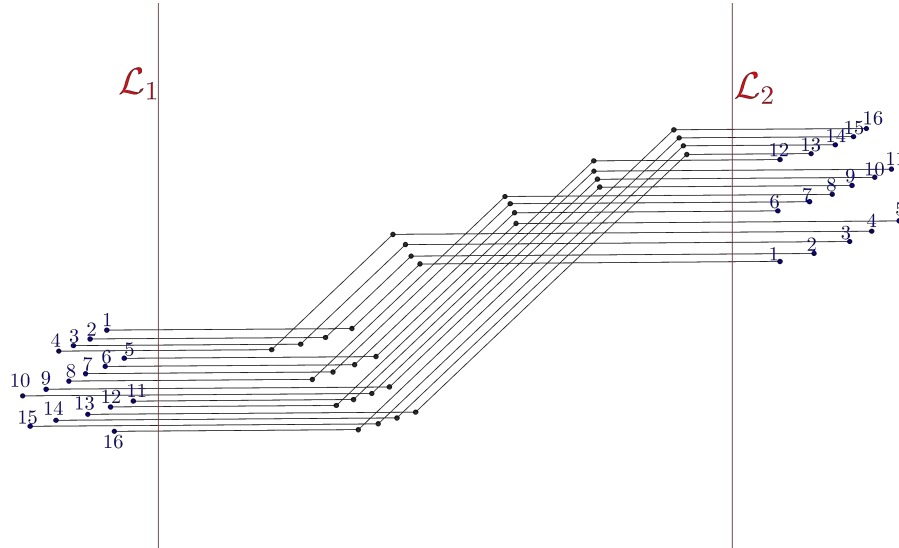


Figura II.4: Construcción de la familia cruzante de 3-caminos de tamaño 16.

tercer segmento 3 para introducirlos a  $\Sigma$  ya que todos se cruzan entre sí. Esto es óptimo ya que cualquier 3-camino restante que no se cruza con el elemento inicial de  $\Sigma$ , tampoco cruzará los 2-caminos ya introducidos..

Existe una clase en la familia cruzante tal que los 2-caminos formados por los segmentos 1 y 2 cruzan a todos los demás 3-caminos, como se muestra en la figura II.5. Por esta razón, introducimos los 2-caminos de esta clase a  $\Sigma$ . Esta clase cruza a todos los demás elementos en su último segmento, por lo que será necesario retirar el primer segmento de algunos de los elementos restantes para introducirlos a  $\Sigma$ . Al retirar el primer segmento de un 3-camino, éste pierde el cruce con aquellos que pertenecen a su clase pero mantiene los cruces con todos los demás elementos de la familia. Por lo tanto, a  $\Sigma$  sólo se puede introducir un elemento de cada clase restante. Esto equivale a  $\sqrt{n} - 1$  elementos adicionales a los  $\sqrt{n}$  elementos de la primera clase introducida.

Debido a cómo se fueron introduciendo los elementos a la subestructura, podemos ver que ningún otro 3-camino puede entrar a  $\Sigma$  ya que cualquier arista que se le retire provoca la pérdida de un cruce con algún elemento que ya pertenece a  $\Sigma$ . Si la subestructura no tuviera algún 2-camino formado con los primeros dos segmentos, a lo más podrá entrar un elemento de cada clase, lo cual implica que el tamaño de  $\Sigma$  sería de a lo más  $\sqrt{n}$ . Por estas razones,

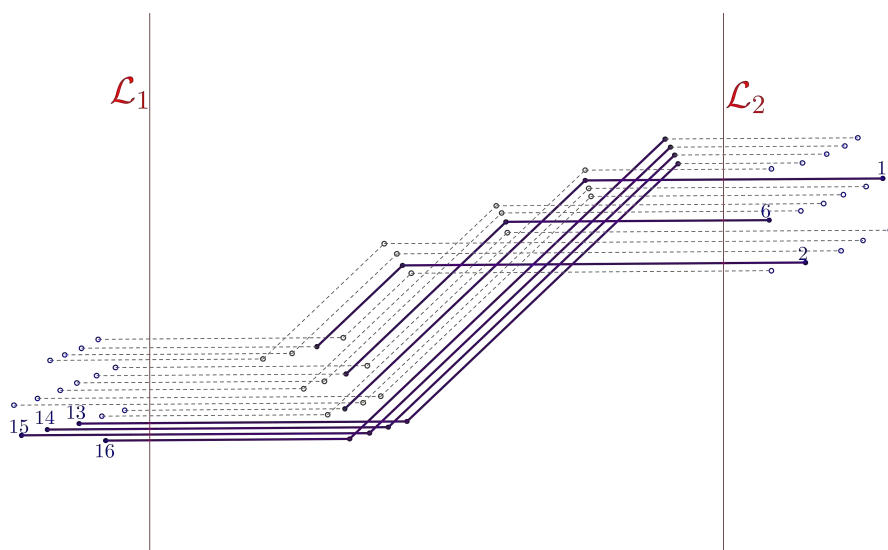


Figura II.5: Construcción de la subestructura cruzante de 2-caminos. Los segmentos morados representan la subestructura cruzante máxima.

la subestructura cruzante de 2-caminos obtenida es óptima y el tamaño de la misma es  $2\sqrt{n} - 1$ .  $\square$

La construcción utilizada para la demostración del teorema es un caso particular que puede suceder en la formación de la familia cruzante de 3-caminos, mostrada en el teorema I.1. Esto implica que, utilizando la técnica de subestructuras, hasta el momento la máxima familia cruzante de 2-caminos que podemos obtener para cualquier nube de puntos es de tamaño  $\Omega(\sqrt{n})$ . Este resultado es trivial debido que en el teorema 0.1, se consigue una familia cruzante de aristas de ese tamaño.

### II.3. Subestructuras en familias cruzantes de $k$ -caminos

El siguiente teorema es más general y no depende de ningún algoritmo del capítulo 1. Supongamos que se tiene una familia cruzante de  $k$ -caminos de tamaño  $n$  y se quiere obtener una subestructura cruzante de  $i$ -caminos.



A continuación se exponen dos construcciones, las cuales proponen dos cotas superiores distintas. Dependiendo de la  $k$  e  $i$  dadas, se utiliza una o la otra para obtener la mínima.

**Teorema II.4.** *Sea  $i < k$ . Existe una familia cruzante de  $k$ -caminos de tamaño  $n$  tal que si  $i < \frac{k-1}{2} + 1$ , la subestructura cruzante de  $i$ -caminos más grande que se puede obtener es de tamaño  $2n^{\frac{i-1}{k-1}} - n^{\frac{i-2}{k-1}}$ . En caso contrario el tamaño de la máxima subestructura cruzante es  $\sqrt{n}$ .*

*Demostración.* La primera construcción es muy sencilla y da una cota superior para cualquier subestructura de  $i$ -caminos. La construcción consiste en cruzar, en pequeños grupos de  $\sqrt{n}$ , los primeros segmentos de los  $k$ -caminos. Los siguientes  $k - 2$  segmentos se conservan rectos para que no haya ningún cruce entre ellos y en el último segmentos se cruzan todos los grupos formados al principio para asegurar de que todos los  $k$ -caminos se crucen entre sí. Esta construcción se muestra en la figura II.6.

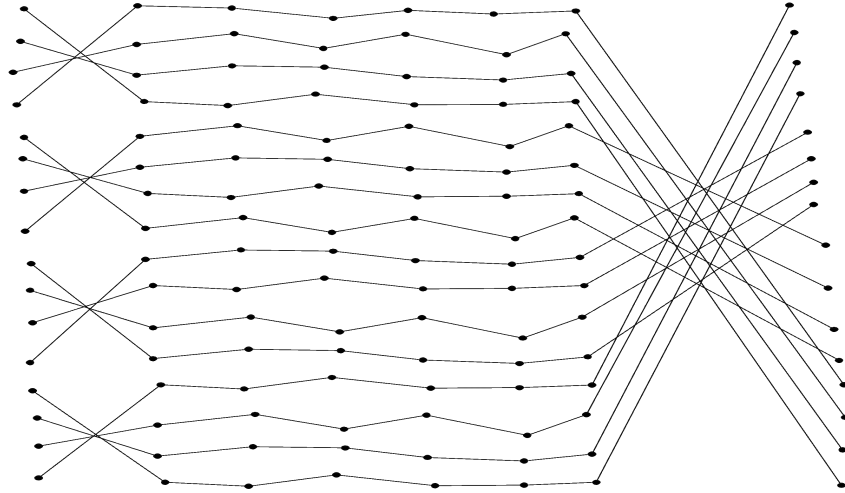


Figura II.6: Construcción de una familia cruzante de  $k$ -caminos de tamaño 16 cuyas subestructuras cruzantes máximas tienen tamaño 4.

Demstrar que cualquier subestructura cruzante máxima tiene tamaño  $\sqrt{n}$  es muy sencillo. Sea  $\mathcal{P}_i$  un  $i$ -camino a introducir a la subestructura cruzante  $\Sigma$ , inicialmente vacía. Si  $\mathcal{P}_i$  comienza después del segmento 1 y termina

antes del segmento  $k$ , no cruza a ningún otro elemento de la familia. Si comienza en el segmento 1,  $\mathcal{P}_i$  se cruza solamente con los elementos de la familia dentro de su grupo de tamaño  $\sqrt{n}$ . En caso de que  $\mathcal{P}_i$  termine en el segmento  $k$ , éste se cruzará con todos los elementos de la familia que no pertenezcan a su grupo. Por lo tanto, se puede incorporar a la subestructura un elemento de cada grupo, en total  $\sqrt{n}$  elementos. Como  $i < k$ , ningún  $i$ -camino tendrá al segmento 1 y al segmento  $k$  al mismo tiempo, lo que implica que los tres casos mencionados anteriormente cubren todas las posibilidades.

La segunda construcción se realiza de la siguiente manera. Se trazan  $kn$  líneas guía:  $\lceil \frac{k}{2} \rceil n$  paralelas con pendiente negativa y  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor n$  paralelas con pendiente positiva. Después se trazan  $k$  líneas auxiliares,  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ , de la siguiente manera. Las líneas auxiliares con subíndice impar deben ser paralelas a las líneas guía de pendiente positiva y se trazan cada  $n$  líneas empezando antes (menor coordenada  $x$ ) de la primera. Las líneas auxiliares con subíndice par deben ser paralelas a las líneas guía con pendiente negativa, se trazan cada  $n$  líneas y comienzan a partir de la  $n$ -ésima, como se muestra en la figura II.7.

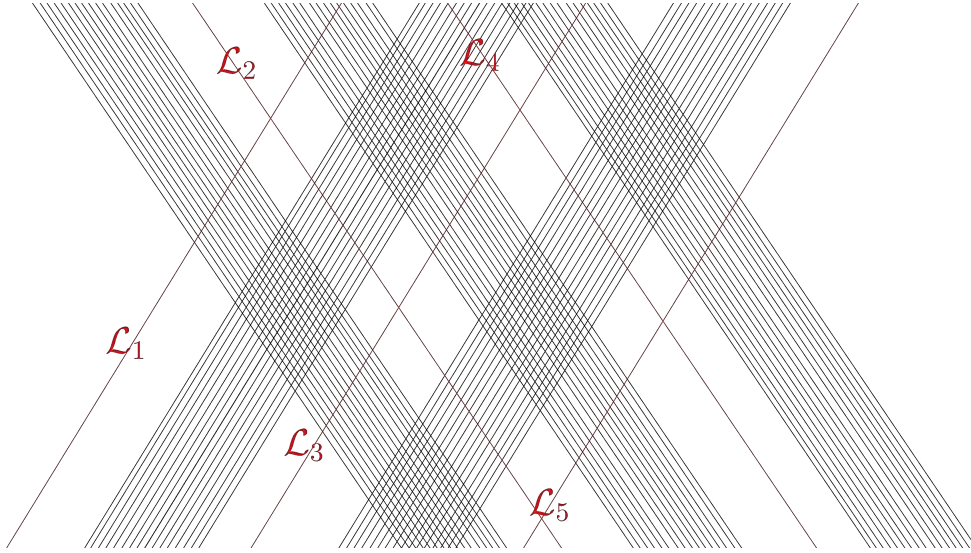


Figura II.7: Construcción de la familia cruzante de 5-caminos para  $n = 16$ .

A continuación se numeran las líneas guía a partir de ciertas intersecciones que tienen con las rectas auxiliares. Cada grupo de  $n$  rectas se interseca

con una línea auxiliar particular; por ejemplo, el primer grupo (de izquierda a derecha) de  $n$  rectas con pendiente negativa se intersecta con la recta auxiliar  $\mathcal{L}_1$ , el siguiente con  $\mathcal{L}_3$  y así sucesivamente. De manera análoga, el primer grupo de  $n$  rectas con pendiente positiva se intersecta con  $\mathcal{L}_2$  y continúa el proceso de la misma manera. Los  $k$ -caminos van ir avanzando por las rectas auxiliares y cada uno de sus segmentos debe cruzar la recta que le corresponde. Por ejemplo, la recta auxiliar  $\mathcal{L}_r$  debe cruzar a todos los segmentos  $r$  de los  $k$ -caminos. Para ubicar los puntos en las intersecciones de las líneas guía se utiliza una fórmula para numerar las rectas y ésta se muestra a continuación:

$$\left[ \begin{array}{c} i \\ \frac{l-1}{n^{\frac{1}{k-1}}} \end{array} \right] n^{\frac{l-1}{k-1}} - \left( i - 1 \bmod n^{\frac{l-1}{k-1}} \right),$$

$i$  corresponde al orden que tienen las rectas diagonales, de abajo hacia arriba, y  $l$  es el subíndice de la recta auxiliar que intersectan. La numeración dada por la fórmula anterior se muestra en la figura II.8 y se puede interpretar como un trenzado. Entre la primera y segunda recta auxiliar se invierte el orden de los  $k$ -caminos en pequeños grupos de  $n^{\frac{1}{k-1}}$  elementos. A partir de ahí, cada línea auxiliar trenza  $n^{\frac{1}{k-1}}$  grupos formados por la línea auxiliar anterior. A estos grupos se les llamará clases. La 1-clase de cualquier  $k$ -camino será el grupo de los elementos con los cuales se intersecta entre  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ . La  $m$ -clase corresponde al grupo de elementos con los que se cruza un  $k$ -camino entre las rectas auxiliares  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_{m+1}$ .

Los puntos iniciales de los  $k$ -caminos corresponden a las intersecciones entre la recta auxiliar  $\mathcal{L}_1$  con las primeras  $n$  rectas con pendiente negativa y los puntos finales corresponden a las intersecciones entre la recta auxiliar  $\mathcal{L}_k$  y las últimas  $n$  rectas con pendiente distinta a ésta. Los puntos intermedios se deben colocar en las intersecciones de rectas con mismo número asignado y se les asigna ese mismo número a los vértices. Los  $k$ -caminos deben tener aristas con pendiente negativa y aristas con pendiente positiva alternadamente y cada segmento  $r$ , de los  $k$ -caminos, debe cruzar la recta auxiliar  $\mathcal{L}_r$ . Por lo tanto, sólo se deben colocar puntos en ciertas intersecciones de las líneas guía. De manera más detallada, se colocan puntos en las intersecciones de los siguientes conjuntos de rectas: las primeras  $n$  rectas con pendiente negativa con las primeras  $n$  rectas con pendiente positiva; las primeras  $n$  rectas positivas con las segundas  $n$  rectas negativas; se continúa con esta secuencia hasta obtener las intersecciones de las últimas  $n$  rectas con pendiente positiva, con

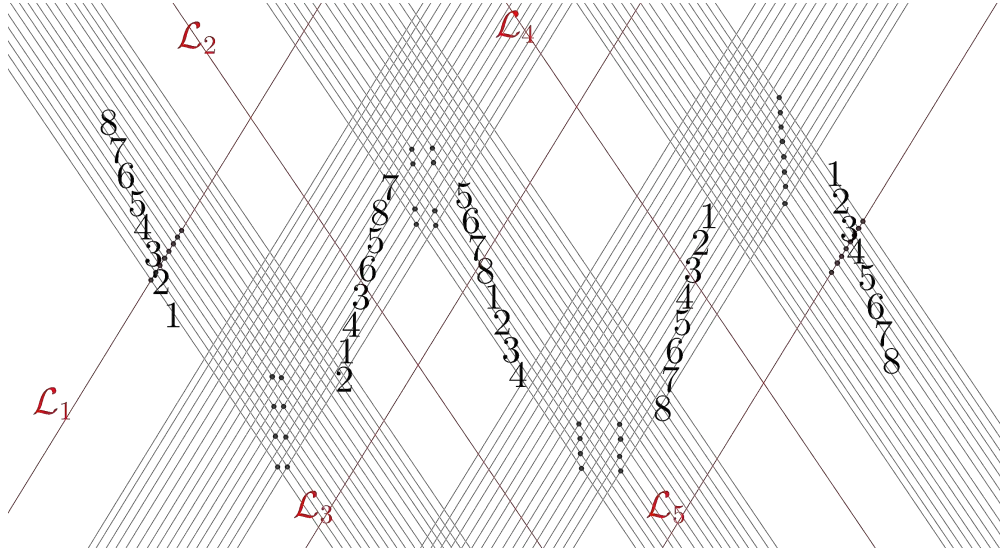


Figura II.8: Construcción de la familia cruzante de 5-caminos para  $n = 16$ . Sólo se muestra la numeración de 8 rectas en cada conjunto en donde el tamaño de los grupos trenzados es igual a  $16^{\frac{1}{5-1}} = 2$ .

las últimas  $n$  rectas con pendiente negativa. El último paso de la construcción es generar los segmentos entre los puntos con mismo número asignado que están unidos por rectas guía, como se muestra en la figura II.9.

Esta estructura genera una familia cruzante ya que los  $k$ -caminos comienzan en orden creciente sobre la recta  $\mathcal{L}_1$  y terminan en orden decreciente sobre la recta auxiliar  $\mathcal{L}_k$  y nunca se salen de la zona delimitada por estas dos rectas. Esto implica que todos los  $k$ -caminos se cruzan entre sí y la prueba es análoga a la utilizada en la demostración del teorema I.1.

A continuación se van a analizar las subestructuras cruzantes que permite este conjunto. Cada pareja de  $k$ -caminos se cruza una sola vez y a partir del cruce los caminos se mantienen paralelos. La construcción es recurrente en el sentido de que un intervalo de  $f$  segmentos consecutivos que comienza en el primer segmento de los  $k$ -caminos, es muy similar al intervalo que comienza en cualquier otro segmento. La única diferencia consiste en identificar qué clases de elementos se cruzan en aristas anteriores, para de esta manera considerarlos como uno solo elemento.

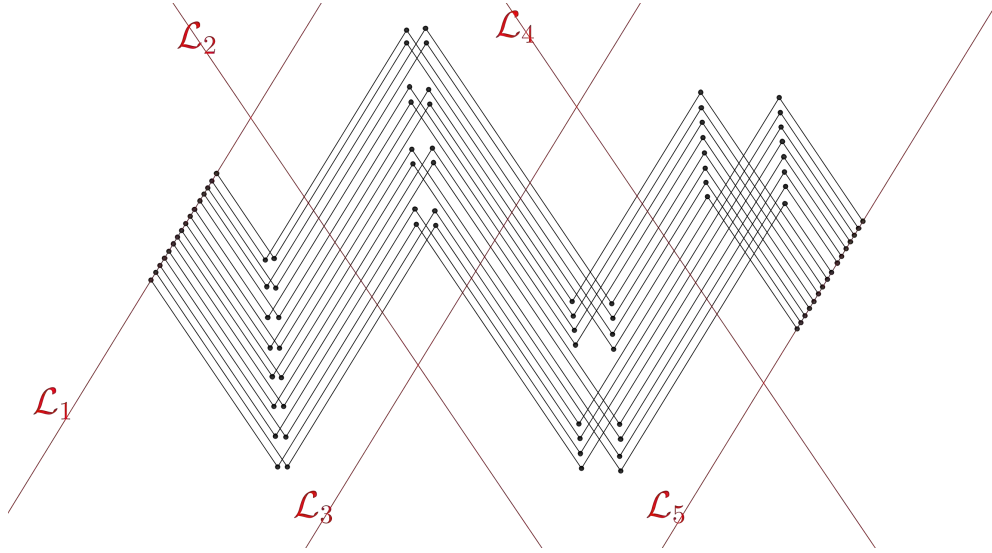


Figura II.9: Construcción de la familia cruzante de 5-caminos para  $n = 16$ .

Sea  $\Sigma$  una subestructura cruzante máxima de  $i$ -caminos dentro del contraejemplo y sea  $\mathcal{P}_1$  el  $i$ -camino que comienza en el segmento  $f$ , antes que ningún otro en la subestructura. Debido a la recurrencia en la estructura vamos a considerar que  $f = 1$ . Esto siempre se puede hacer ya que al ser el primero, no hay dos elementos en la subestructura que pertenezcan a la misma  $(f - 1)$ -clase, ya que cada clase de estas es paralela a partir de la arista  $f$ .

Junto con  $\mathcal{P}_1$  deben también pertenecer a  $\Sigma$  aquellos  $i$ -caminos que conforman su  $i$ -clase y comienzan en la arista 1. La razón es que cualquier elemento de la familia que cruza a  $\mathcal{P}_1$ , cruza a toda su  $i$ -clase, y cualquier elemento de la familia que no cruza a  $\mathcal{P}_1$ , tampoco cruza a los demás. No introducir alguno de estos elementos reduce el tamaño de la subestructura y desplazarlo para que comience en otra arista lo desconecta de aquellos que pertenecen a sus clases inferiores, sin aportar candidatos adicionales a la subestructura.

Cada  $i$ -clase tiene  $(n^{\frac{1}{k-1}})^{i-1}$  elementos ya que por cada arista, excluyendo la primera, cada  $i$ -camino se cruza con  $n^{\frac{1}{k-1}}$  elementos. En particular existe una  $m$ -clase,  $\mathcal{C}_i$ , que comienza en la arista 1 y que cruza a todos los demás elementos de su  $(i + 1)$ -clase en el segmento  $i + 1$ . Esto es debido a que los cruces ocurren entre segmentos de distinta numeración, en particular en seg-

mentos con numeración consecutiva, ya que todos los segmentos con mismo número son paralelos. Esta clase debe estar en alguna subestructura de tamaño máximo, ya que el número de candidatos a introducir es el mayor. En los elementos restantes de la  $(i + 1)$ -clase,  $\mathcal{C}_{i+1}$ , se busca una subestructura cruzante máxima tal que todos sus elementos contengan al segmento  $i + 1$ .

Sea  $\Sigma_i$  una subestructura cruzante máxima que contiene a  $\mathcal{C}_i$ . Consideremos un  $i$ -camino de los elementos restantes de  $\mathcal{C}_{i+1}$  que contiene la arista  $i + 1$ . Todas sus aristas que están después del segmento  $i + 1$  generan cruces con elementos fuera de  $\mathcal{C}_{i+1}$ , por lo que estos cruces no agregan elementos a  $\Sigma_i$ . En cambio, cada arista anterior a  $i + 1$  se cruza con elementos que sí pertenecen a  $\mathcal{C}_{i+1}$ . En este sentido se puede decir que cualquier arista posterior a  $i + 1$  es desperdiciada, mientras que cualquier arista anterior agrega candidatos a la subestructura. A partir de lo anterior, todos los elementos a introducir serán  $i$ -caminos que comiencen en el segmento 2 y terminen en el segmento  $i + 1$ . Debido a que hay  $n^{\frac{1}{k-1}} - 1$   $i$ -clases candidatas dentro de  $\mathcal{C}_{i+1}$ , el número de candidatos a introducir es de  $(n^{\frac{1}{k-1}} - 1)n^{\frac{i-1}{k-1}}$ . Sin embargo, a  $\Sigma_i$  sólo se puede introducir un elemento por cada 1-clase de  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Esto se debe a que al no tener la primera arista, los  $i$ -caminos son paralelos a aquellos que pertenecen a su 1-clase. Cada 1-clase tiene  $n^{\frac{1}{k-1}}$  elementos, por lo que realizando una división se puede obtener que el número de candidatos a introducir es de  $n^{\frac{i-1}{k-1}} - n^{\frac{i-2}{k-1}}$ . Por las condiciones anteriores, se muestra que ningún otro elemento se puede introducir a  $\Sigma_i$ , lo cual lleva a que la subestructura cruzante máxima de  $i$ -caminos, dentro del contraejemplo, es de tamaño

$$2n^{\frac{i-1}{k-1}} - n^{\frac{i-2}{k-1}}.$$

□

La subestructura cruzante máxima se obtiene en un intervalo de  $i + 1$  segmentos por lo que el resultado se puede generalizar para cualquier  $i < k$ . En la figura II.10 se muestra un ejemplo de una subestructura cruzante óptima. Es claro que debido a la recurrencia y a la simetría del contraejemplo, pueden existir varias subestructuras cruzantes de máximo tamaño.

Con el siguiente corolario se define la cota superior para las subestructuras cruzantes de  $i$ -caminos formadas a partir de familias cruzantes de  $k$ -caminos.

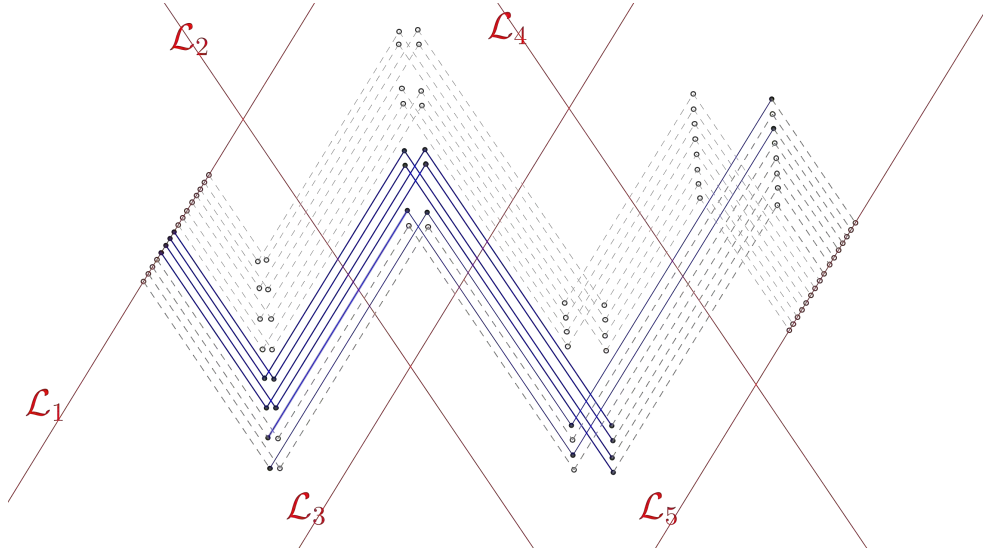


Figura II.10: Subestructura cruzante máxima de 3-caminos para  $k = 5$ .

**Corolario II.5.** *La máxima subestructura cruzante de  $i$ -caminos que se puede garantizar para cualquier familia cruzante de  $k$ -caminos de tamaño  $n$ , es de tamaño  $\min\{2n^{\frac{i-1}{k-1}} - n^{\frac{i-2}{k-1}}, \sqrt{n}\}$ .*

*Demostración.* La cota superior se obtiene a partir de alguna de las construcciones del teorema II.4.  $\square$

## II.4. Subestructuras en familias cruzantes de triángulos

La idea que generó la investigación de las subestructuras cruzantes surgió directamente de la siguiente pregunta: si a una familia cruzante de  $n$  triángulos se le retira, de manera apropiada, una arista por cada elemento, ¿se tendría una familia cruzante de 2-caminos de tamaño lineal? La respuesta tomó bastante tiempo encontrarla, y lo que se obtuvo fue un contraejemplo que no permite una subestructura cruzante de 2-caminos de tamaño mayor a  $O(n^{2/3})$ . La construcción del contraejemplo se muestra en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema II.6.** *Existe una familia cruzante de  $n$  triángulos tal que la subestructura cruzante de 2-caminos más grande que se puede obtener es de tamaño  $3n^{2/3} - 3n^{1/3} + 1$ .*

*Demostración.* La construcción de la familia cruzante utiliza  $n$  triángulos paralelos:  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$ . Esto significa que cada triángulo tiene aristas de respectivas pendientes  $\gamma, \delta$  y  $\theta$ , y el orden cíclico en que se presentan éstas, al circular en el sentido de las manecillas del reloj por el perímetro, es el mismo para todos los triángulos. A las aristas se les llamará por su pendiente y como subíndices tendrán el número del triángulo al que pertenecen. Así,  $\gamma_4$  será la arista con pendiente  $\gamma$  que pertenece a  $\mathcal{T}_4$ .

En particular vamos a construir familias cruzantes de triángulos paralelos en donde  $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \cap \dots \cap \mathcal{T}_n \neq \emptyset$ , equivalente a decir que existe un punto en el plano que es interior a todos los elementos de la familia. A este punto se le llamará  $\mathcal{P}$ . En cualquier pareja de triángulos paralelos que se cruza, uno de los triángulos contiene un vértice adentro del otro triángulo. El triángulo que contiene un vértice del otro triángulo se le llamará *triángulo envolvente* y a la arista del triángulo envolvente que cruza a las dos aristas del otro triángulo se le llamará *arista crítica*. El nombre se le otorga debido a que es la única arista de los dos triángulos tal que al retirarla se pierde el cruce entre ellos.

Para la construcción vamos a analizar un pequeño caso de una familia cruzante de triángulos paralelos en donde la arista crítica entre cualquier pareja, tiene pendiente  $\theta$ . Esta familia cruzante se muestra en la figura II.11. Lo interesante de esta familia cruzante es que si se retiran todas las aristas  $\gamma$  o  $\delta$ , se obtendría una subestructura cruzante de 2-caminos del mismo tamaño que la familia cruzante. Sin embargo, si se retira la arista  $\theta$  de todos los triángulos, no se obtendría ningún cruce entre los 2-caminos formados.

La construcción del contraejemplo se forma extendiendo el ejemplo anterior. Lo primero que se construye es una familia cruzante de triángulos paralelos de tamaño  $n^{1/3}$  tal que  $\theta$  sea la arista crítica de cada pareja. Si cada uno de estos triángulos se compone de una familia cruzante de triángulos paralelos de tamaño  $n^{1/3}$  tal que  $\delta$  sea su arista crítica de cada pareja, se tendría en total una familia cruzante de triángulos paralelos de tamaño  $n^{2/3}$ . Todos estos triángulos se siguen cruzando mutuamente. Ahora, si cada triángulo de este último conjunto se compone de una familia cruzante de triángulos paralelos de tamaño  $n^{1/3}$  tal que  $\gamma$  sea la arista crítica de cada



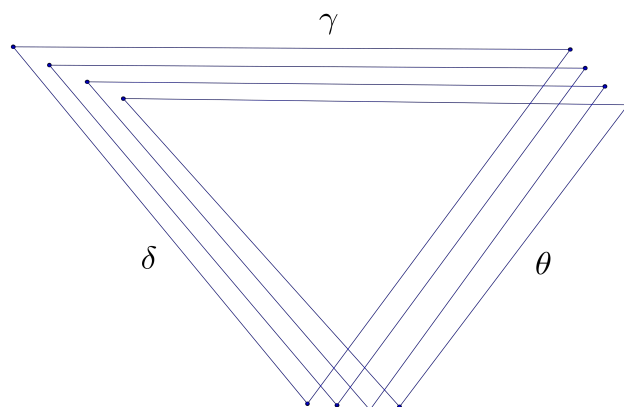


Figura II.11: Familia cruzante de triángulos paralelos en donde  $\theta$  es la arista crítica de cada pareja de triángulos.

pareja, se tendría una familia cruzante de  $n$  triángulos como se muestra en la figura II.12.

Para facilitar la demostración, se definen algunas clases dentro del contraejemplo. Cada triángulo en la construcción va a estar contenido en dos clases y éstas se definen a partir de a qué triángulo pertenecieron. La clase más chica, clase 1, agrupa a los triángulos que surgieron de un triángulo que pertenecía a la familia cruzante que tenía a  $\delta$  como arista crítica. El tamaño de estas clases es de  $n^{1/3}$ . La clase 2 agrupa a los triángulos que surgieron de un triángulo que pertenecía a la familia cruzante que tenía a  $\theta$  como arista crítica por lo que su tamaño es de  $n^{2/3}$ . En la figura II.12 la clase 1 se identifica por los conjuntos con misma tonalidad (9 distintos) mientras que la clase 2 se identifica por los conjuntos con mismo color (azúl, verde y rojo).

Fácilmente se puede observar que si de la familia retiramos todas las aristas  $\gamma$ , cada triángulo se va a desconectar con aquellos que pertenecen a su clase 1, por lo que la subestructura cruzante de 2-caminos a lo más podrá tener un elemento de cada clase 1 ( $n^{2/3}$  elementos). Si se retira la arista  $\delta$ , cada triángulo se seguirá cruzando con los de su clase 1 pero perderá los cruces con los demás que pertenecen a su clase 2. Esto implica que por cada triángulo inicial se podrá escoger una clase 1 para mantener los 2-caminos cruzados. Esto nos produce una subestructura cruzante de tamaño  $n^{2/3}$ . Si

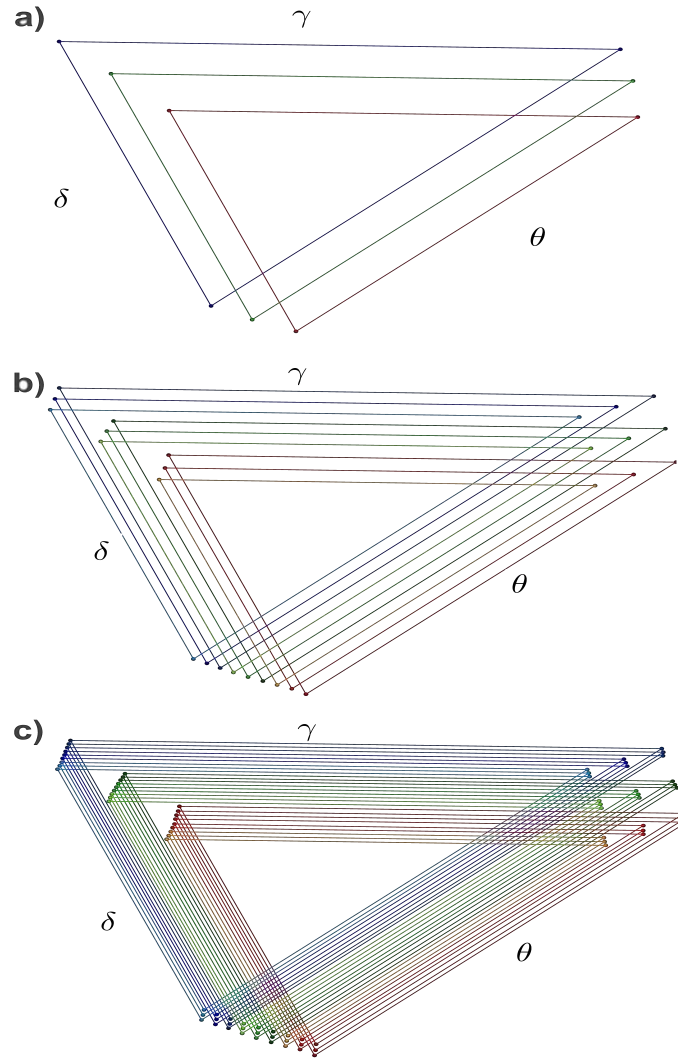


Figura II.12: El inciso *a*) muestra la primera familia cruzante de la construcción. El inciso *b*) muestra como cada uno de los triángulos del inciso *a*) se sustituye por  $n^{1/3}$  triángulos que forman una familia cruzante de triángulos paralelos, con  $\delta$  como arista crítica. El inciso *c*) muestra como cada triángulo del inciso *b*) se sustituye por una familia cruzante de triángulos paralelos de tamaño  $n^{1/3}$ , tal que  $\gamma$  es la arista crítica de cualquier pareja.

se retira la arista  $\theta$ , cada triángulo se seguirá cruzando con todos los de su clase 2 aunque perderá el cruce con todos los demás triángulos. Por lo tanto, el tamaño de esta subestructura cruzante también será de  $n^{2/3}$ .

Lo que es un poco más complicado de visualizar es qué sucede si se retiran aristas distintas dentro de los triángulos. Esta demostración la vamos a realizar formando una subestructura cruzante  $\Sigma$ , inicialmente vacía, que conserva los cruces con el resto de los elementos de la familia. Luego será necesario probar que no se puede agregar ningún 2-camino a  $\Sigma$  sin perder elementos de la misma. También es necesario probar que no se puede formar una subestructura cruzante más grande con el resto de los elementos.

Lo primero que se observa para la construcción de la subestructura es que existe una clase 2 tal que las aristas  $\theta$  no cruzan a ninguna arista fuera de las que pertenecen a esta clase. En la figura II.12 esta clase está representada por el color rojo. Al retirar la arista  $\theta$  de esta clase, se generan  $n^{2/3}$  2-caminos que se cruzan mutuamente que mantienen los cruces con el resto de los triángulos. Éstos se introducen a  $\Sigma$ . Dentro de los triángulos restantes, existe una clase 1, dentro de cada clase 2 restante, a la cual se le puede retirar la arista  $\delta$  sin perder ningún cruce con los demás triángulos. Estas aristas están representadas en la figura II.12 por los tonos claros de cada uno de los colores. Al retirar estas aristas, el número de 2-caminos que se agregan a  $\Sigma$  es de  $n^{1/3}(n^{1/3} - 1) = n^{2/3} - n^{1/3}$ . En los triángulos que restan, existe un triángulo en cada clase 1 que se le puede retirar su arista  $\gamma$  sin perder ningún cruce con los demás. Al quitar estas aristas, se incorporan a  $\Sigma$   $1(n^{1/3} - 1)(n^{1/3} - 1) = n^{2/3} - 2n^{1/3} + 1$  2-caminos. Por lo tanto, retirar todas estas aristas genera una subestructura cruzante de 2-caminos de tamaño  $3n^{2/3} - 3n^{1/3} + 1$  que se muestra en la figura II.13.

Ahora vamos a analizar qué sucede cuando se intenta añadir otro 2-camino a  $\Sigma$ . Si a cualquiera de los triángulos restantes se le retira la arista  $\theta$ , este nuevo 2-camino queda totalmente desconectado de la primera clase 2 que se incorporó. Se podría hacer lo mismo con todos los triángulos que pertenecen a su clase 2 pero varios de estos triángulos ya forman parte de la subestructura. Por lo tanto, de cualquier manera se pierden elementos al intentar incorporarlo. Si a cualquiera de los triángulos que quedan se le retira la arista  $\delta$ , se desconecta por completo de la clase 1, dentro de su clase 2, que se incorporó a  $\Sigma$ . De la misma manera se podría realizar lo mismo con toda su clase 1 pero un elemento de ésta ya pertenece a  $\Sigma$ , por lo que al intentar incorporarla se perderían elementos. Si a cualquiera de los triángulos restantes se le retira la

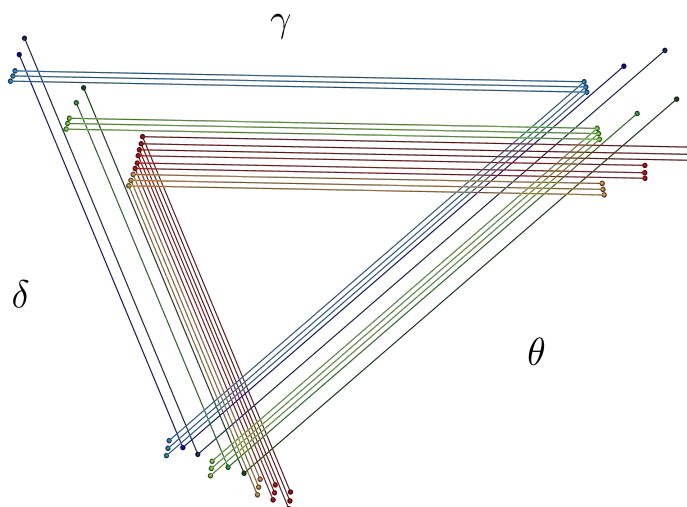


Figura II.13: Subestructura cruzante de 2-caminos a partir de una familia cruzante de triángulos paralelos.

arista  $\gamma$ , éste se desconecta del 2-camino de su clase 1 que ya pertenece a la subestructura. Se podría introducir este 2-camino en vez, lo cual genera otra subestructura cruzante con el mismo tamaño. Por las razones anteriores, no se puede agregar a  $\Sigma$  ninguno de los 2-caminos de los triángulos restantes sin que se reduzca o se mantenga igual su tamaño.

Lo único que falta para la demostración es analizar si en los triángulos restantes se puede generar otra subestructura cruzante de mayor tamaño. En la figura II.14 se muestran los triángulos restantes y se puede observar que la estructura es similar a la original, con la diferencia de que cada etapa de la construcción se generó con  $(n^{1/3} - 1)$  triángulos.

Esto implica que al retirar las aristas se obtiene una estructura recurrente más pequeña, por lo que la subestructura cruzante que se obtenga de aquella debe ser menor.  $\square$

Sobre esta misma construcción de triángulos se puede probar fácilmente que la subestructura cruzante de aristas más grande que se puede obtener es de tamaño 3. Si se agrupan las aristas por pendiente, se tienen tres grupos tal que ningún elemento se puede cruzar con los de su conjunto. Esto implica

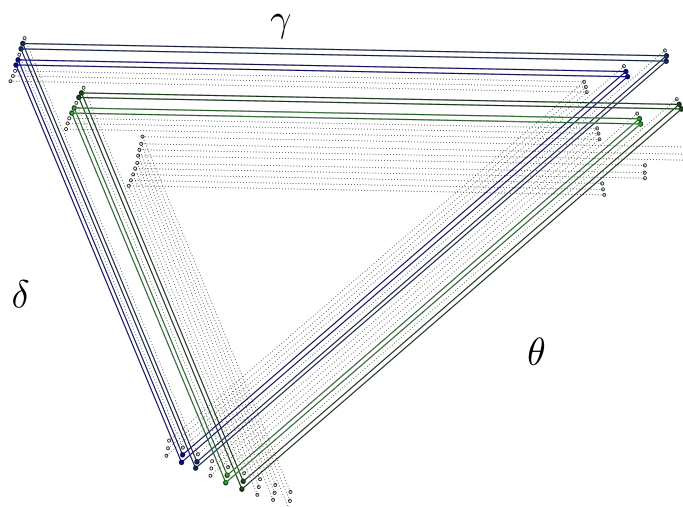


Figura II.14: Triángulos restantes al retirar la subestructura cruzante de 2-caminos. Las líneas negras punteadas representan la subestructura cruzante de 2-caminos.

que la subestructura más grande se forma por un elemento de cada grupo y al sólo tener tres grupos, su máximo tamaño es 3.

Fácilmente se puede observar que el contraejemplo se puede generar a partir del algoritmo del teorema I.3 aplicado a una nube de puntos particular.

## II.5. Subestructuras en familias cruzantes de 6-ciclos

La estructura con mayor cruces que se mostró en el capítulo 1 fue una familia cruzante de 6-ciclos. La pregunta inmediata después de la cota superior obtenida en la sección pasada, es analizar si es posible obtener una subestructura cruzante de 2-caminos de orden mayor a  $O(n^{2/3})$  a partir de la familia cruzante de 6-ciclos. Esta estructura es mucho más robusta que la familia cruzante de triángulos, implica mayores condiciones geométricas y el número de cruces que produce es mucho mayor. A pesar de todas estas condiciones, se encontró un contraejemplo, que se puede generar con el algo-

ritmo del teorema I.4, en donde la subestructura cruzante más grande que se puede obtener es del orden de  $O(n^{2/3})$ .

A partir de los 6-ciclos se pueden obtener distintos tipos de subestructuras cruzantes. Por motivos de interés particular sólo se analizará la subestructura de 2-caminos.

**Teorema II.7.** *Existe una familia cruzante de 6-caminos de tamaño  $n$  que cumple con la construcción del teorema I.4 tal que la subestructura cruzante de 2-caminos más grande que se puede obtener es de tamaño  $5n^{2/3} - 3n^{1/3} + 1$ .*

*Demostración.* La construcción de la familia cruzante es bastante similar a la del teorema II.6 en donde primero se analiza una estructura sencilla y a partir de esa se construye por niveles la familia completa. Se usarán algunos términos y aspectos de la construcción utilizada en el teorema I.4 ya que el contraejemplo se debe poder construir a partir del algoritmo utilizado.

Primero dividimos el plano con tres líneas que inciden en el mismo punto,  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$ . Nombramos  $\mathcal{A}$  al espacio delimitado por  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{B}$  al espacio delimitado por  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{C}$  al espacio delimitado por  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$  de manera que  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  sólo son adyacentes en el punto central. La altura de un punto en una sección se refiere a la distancia que tiene ese punto con respecto a la línea auxiliar que no delimita esa sección. Cualquier punto de la construcción se va a nombrar a partir de la sección a la que pertenece, como subíndice tendrá el número del 6-ciclo al que pertenece y como superíndice tendrá un signo  $+$  si es el punto del ciclo con mayor altura en la sección o un signo  $-$  si es el de menor altura. Por lo tanto,  $B_5^+$  será el punto más alejado de  $\mathcal{L}_2$ , del quinto 6-ciclo que pertenece a la sección  $\mathcal{B}$ . Los 6-ciclos se numeran ascendentemente conforme son creados por el algoritmo. A cada punto del conjunto se le asignará el 2-camino formado por sus dos aristas adyacentes y a éste se le nombrará de la misma manera que al punto. A los puntos y 2-caminos con superíndice  $+$  se les llamará superiores mientras que lo que tienen superíndice  $-$  se les llamará inferiores. Las aristas serán nombradas con la letra minúscula del punto opuesto y el subíndice del 6-ciclo al que pertenecen. Por ejemplo, la arista que une a los puntos  $B_3^+$  y  $C_3^-$  se nombrará  $a_3$ . Cada 6-ciclo tendrá dos aristas con la misma letra y para los propósitos de la construcción no es necesario hacer la distinción.

Los 2-caminos en las familias cruzantes son disjuntos, no comparten vértices, y para generar un 2-camino a partir de un 6-ciclo es necesario retirar 2

aristas nombradas igual, esto es, que unen puntos de las mismas secciones. Esto genera dos 2-caminos que sus puntos centrales comparten la misma sección. Lo anterior implica que cada 6-ciclo puede generar tres parejas distintas de 2-caminos dependiendo de qué pareja de aristas se retire.

La primera etapa de la construcción consiste en construir una familia cruzante como la que se muestra en la figura II.15. Esta puede ser arbitrariamente grande y en particular será de tamaño  $n^{1/3}$ .

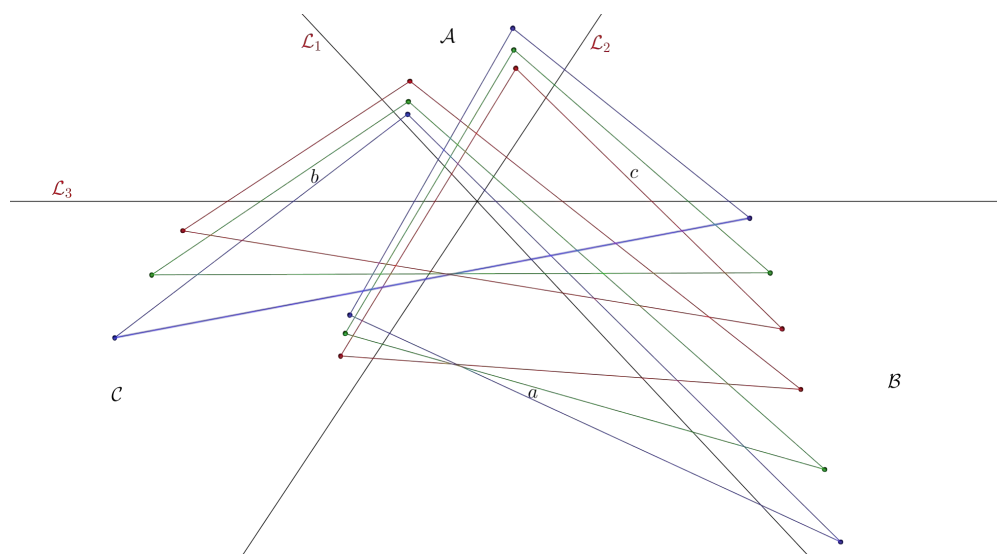


Figura II.15: Primera familia cruzante de 6-ciclos en la construcción del contraejemplo.

Lo primero que hay que revisar del ejemplo es que los 6-ciclos mostrados cumplen con la construcción del algoritmo. Esto es cierto ya que el primer 6-ciclo formado, de color azul, contiene al punto de mayor y menor altura de cada una de las secciones. Análogamente sucede para el 6-ciclo verde y rojo. Se puede observar que las aristas de las cuales dependen los cruces entre los 2-caminos son las aristas  $a$  y a estas aristas se les llamará *aristas críticas*. Sólo retirando estas parejas de aristas se pueden obtener 2-caminos disjuntos. Si se retiran todas las aristas  $a$  del conjunto se obtendrá un conjunto disjunto de 2-caminos superiores y un conjunto disjunto de 2-caminos inferiores en donde cualquier elemento de uno de los conjuntos cruza a todos los demás del otro conjunto. La familia cruzante mostrada en la figura II.15 será nombrada como

la familia cruzante de 6-ciclos que tiene a  $a$  como arista crítica.

Antes de pasar al siguiente paso es necesario destacar un detalle que permite las siguientes etapas de la construcción. En cada sección de la familia cruzante mostrada en la figura II.15, los puntos inferiores se encuentran fuera y del lado izquierdo, con respecto al punto central  $\mathcal{P}$ , de los 2-caminos formados por los puntos superiores. Como todas las secciones cumplen esta propiedad, es posible realizar esta misma familia cruzante para las tres direcciones sin que se pierda la altura de los puntos que utiliza el algoritmo de construcción. Más adelante se hará notar la importancia de lo anterior.

La segunda etapa de la construcción se describe a continuación. De cada uno de estos 6-ciclos se forma una familia cruzante de 6-ciclos de tamaño  $n^{1/3}$  cuya arista crítica sea  $c$ , como se muestra en la figura II.16. Cada uno de estos 6-ciclos formados será descendiente del 6-ciclo que reemplazó.

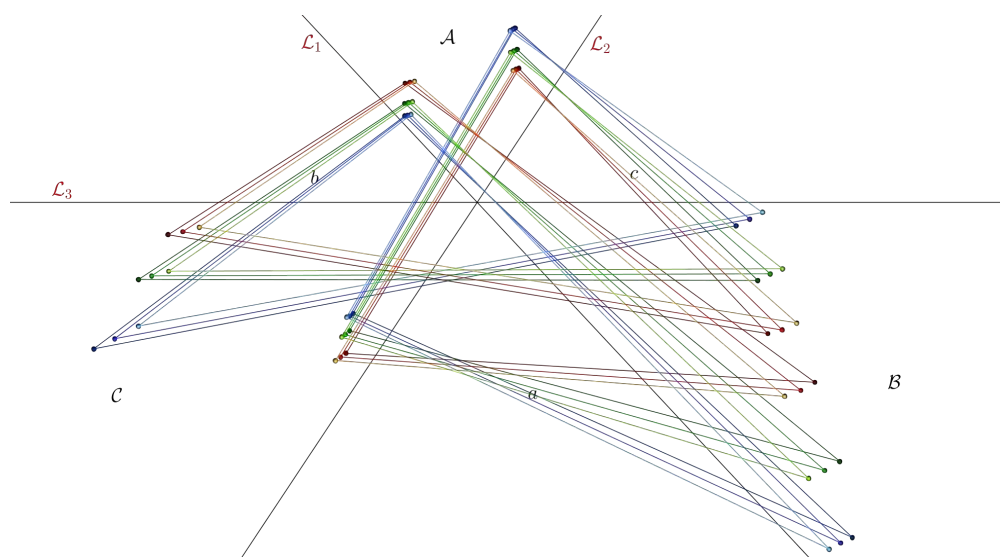


Figura II.16: Segunda etapa de la construcción del contraejemplo.

Al realizar este paso de la construcción es necesario colocar los nuevos 6-ciclos muy cerca del 6-ciclo del cual fueron formados, para cuidar las alturas entre los puntos y que el algoritmo de construcción genere el contraejemplo correctamente. Esto siempre se puede lograr debido al detalle mencionado anteriormente en donde los puntos superiores e inferiores de cada 6-ciclo tienen la misma estructura en cada sección.



La tercera etapa de construcción consiste en sustituir cada uno de los 6-ciclos de la segunda etapa por una familia cruzante de 6-ciclos de tamaño  $n^{1/3}$  que tenga a  $b$  como su arista crítica. De la misma manera, los nuevos 6-ciclos deberán ser colocados muy cerca de su 6-ciclo original para no perder las alturas entre los puntos y que el algoritmo funcione correctamente. En la figura II.17 se muestra esta tercera etapa de construcción en donde cada punto es colocado con cuidado para mantener la altura correspondiente dentro de la sección. Cada 6-ciclo formado será descendiente del 6-ciclo que

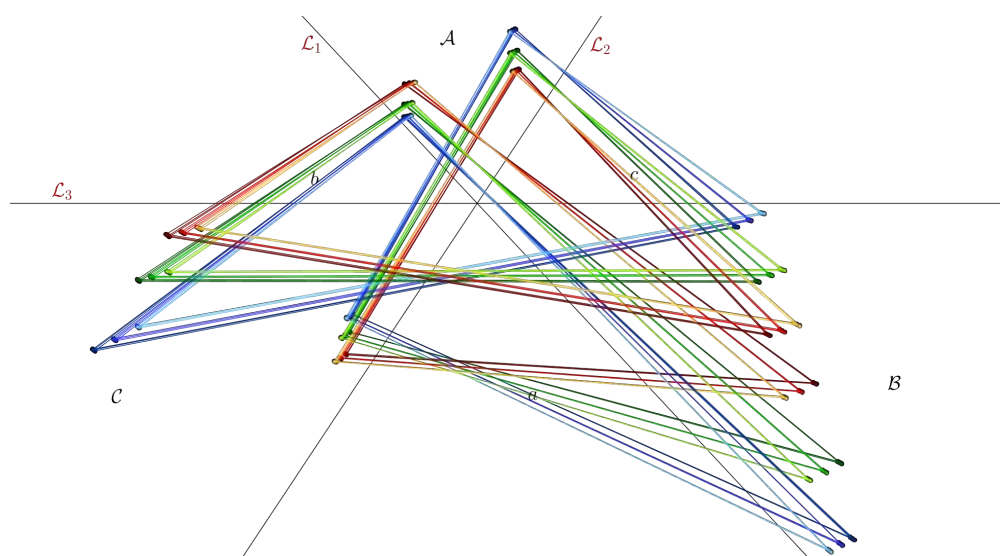


Figura II.17: Tercera etapa de la construcción del contraejemplo.

reemplazó.

De la misma manera que en la demostración del teorema II.6, vamos a definir dos clases para cada 6-ciclo del contraejemplo. La clase 1 agrupará a los descendientes de los 6-ciclos de la segunda etapa de la construcción y la clase 2 agrupará a todos los descendientes de los 6-ciclos de la primera etapa. Primero vamos a analizar qué sucede cuando se retiran puras aristas con la misma letra.

En caso de retirar de la construcción todas las aristas  $a$ , se puede observar que cada 2-camino superior pierde los cruces con los 2-caminos superiores que

no pertenecen a su clase 2. De la misma manera todos los 2-caminos inferiores pierden los cruces con los 2-caminos inferiores que no pertenecen a su clase 2. Por lo tanto la subestructura cruzante mayor de 2-caminos tiene tamaño  $2n^{2/3}$ , como se muestra en la figura II.18.

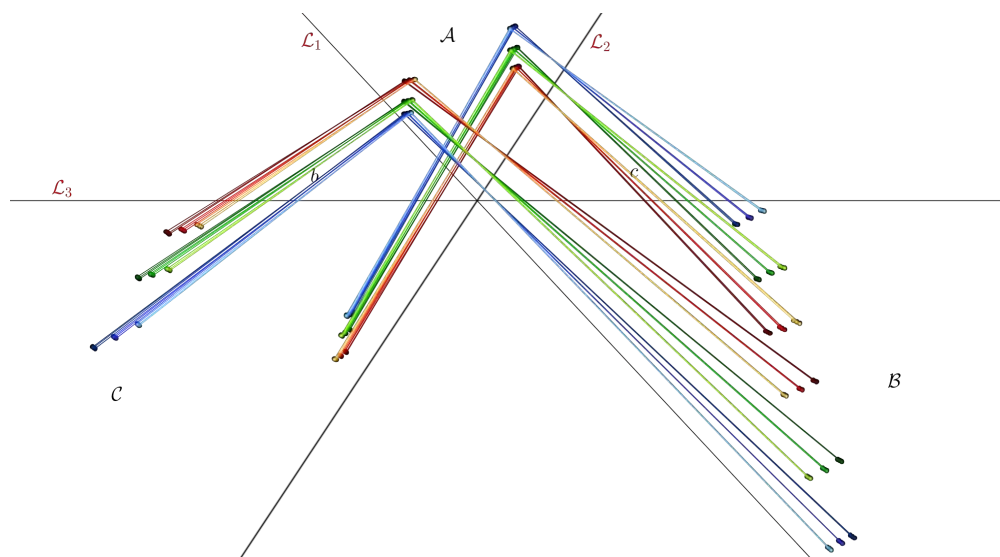


Figura II.18: Construcción de 2-caminos al retirar las aristas  $a$  del conjunto.

Al retirar las aristas  $c$  de la construcción, cada 2-camino superior formado se cruza con aquellos 2-caminos superiores que pertenecen a su clase 1 mas se deja de cruzar con los demás que pertenecen a su clase 2. Con todos los demás elementos se cruza, como se muestra en la figura II.19. Sucede de manera análoga para los 2-caminos inferiores. Para contar los 2-caminos de la subestructura cruzante mayor, se elige una clase 1 por cada clase 2 de los caminos superiores y una clase 1 por cada clase 2 de los 2-caminos inferiores. Por lo tanto el tamaño de la subestructura cruzante de 2-caminos más grande formada es de  $2n^{2/3}$ .

Al retirar las aristas  $b$  de la construcción, cada 2-camino superior no se cruzará con los que pertenecen a su clase 1, como se muestra en la figura II.20. Con todos los demás elementos se cruzará. Sucede de manera análoga para los 2-caminos inferiores. Al momentos de contar los 2-caminos de la subes-

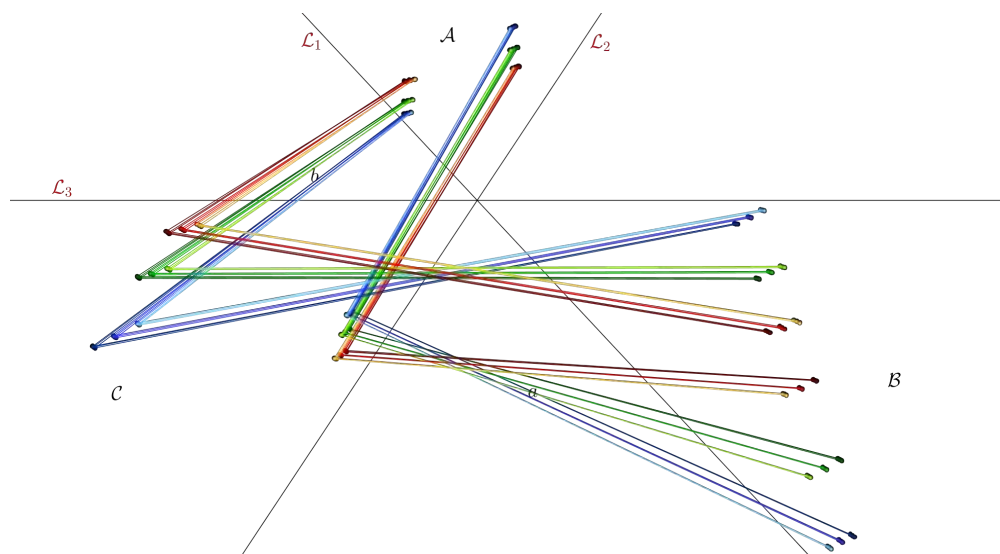


Figura II.19: Construcción de 2-caminos al retirar las aristas  $c$  del conjunto.

estructura mayor se elige un elemento por cada clase 1, tanto en 2-caminos superiores como inferiores. Por lo tanto el tamaño de la subestructura cruzante de 2-caminos más grande formada es de  $2n^{2/3}$ .

Lo siguiente es demostrar que a partir del contraejemplo no se puede obtener una subestructura cruzante de 2-caminos cuyo tamaño sea mayor a  $O(n^{2/3})$  quitando aristas distintas. De la misma manera en que se realizó la prueba del teorema II.6, se forma primero una subestructura cruzante  $\Sigma$ , inicialmente vacía, quitando algunas aristas del conjunto y luego se demuestra que no se puede agregar ningún otro 2-camino a la subestructura sin sacar el mismo o un mayor número de elementos de ella. También se demuestra que en la estructura formada por los elementos restantes no se puede formar una subestructura cruzante de mayor tamaño.

Si quitamos las aristas  $a$  de algún 6-ciclo del contraejemplo e introducimos los dos 2-caminos formados a  $\Sigma$ , se pueden quitar todas las aristas  $a$  de los elementos de su clase 2 para introducir  $2n^{2/3}$  2-caminos a la subestructura. Por construcción, cualquier elemento que no se cruza con los primeros 2-caminos introducidos, tampoco se cruza con aquellos 2-caminos que pertenecen a la clase 2 de los primeros introducidos, por lo que al introducir toda

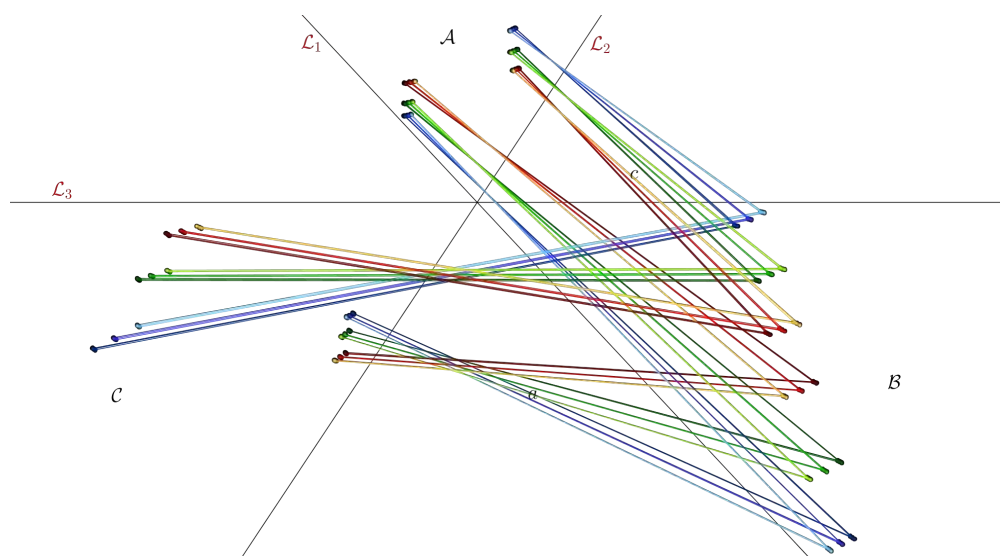


Figura II.20: Construcción de 2-caminos al retirar las aristas  $b$  del conjunto.

la clase 2 no se están descartando candidatos a entrar a  $\Sigma$ . En particular vamos a elegir la clase 2 que contiene los 2-caminos superiores que cruzan las aristas  $a$  de todos los demás 6-ciclos, representada por la clase roja en la figura II.17. La elección de esta clase es relativamente arbitraria ya que la combinación de clases a retirar da la subestructura cruzante óptima.

Cualquier otro elemento de la familia al que se le retire la arista  $a$  perderá el cruce con la clase 2 superior que ya pertenecen a  $\Sigma$ . También sucede que aquellos 6-ciclos que tienen altura menor a la clase 2 elegida en la sección  $\mathcal{A}$ , no podrán retirar su arista  $b$  sin perder cruces con elementos de la subestructura. Por esta razón, se escogió la clase 2 roja ya que mantiene los cruces con todos los 2-caminos superiores y pierde algunos cruces con posibles 2-caminos inferiores.

De los 6-ciclos restantes, se va a analizar qué sucede si se retiran dos aristas  $c$  de un 6-ciclo para incorporar sus 2-caminos formados a  $\Sigma$ . De entrada, cualquier otro ciclo 6-ciclo que pertenece a su clase 2 y no pertenece a su clase 1 no podrá perder sus aristas  $c$  ya que pierde el cruce con los recién introducidos a la subestructura. Sin embargo, a todos los elementos de su clase 1 se les pueden retirar sus aristas  $c$  de manera que todos se incorporen a  $\Sigma$  sin descartar ningún posible candidato adicional de los 6-ciclos restantes.

Realizar esto agrega  $2(n^{1/3} - 1)n^{1/3}$  elementos a la subestructura cruzante. En particular, vamos a retirar las aristas  $c$  de las clases 1 cuyos 2-caminos superiores cruzan las aristas  $c$  de aquellos 6-ciclos que pertenecen a la misma clase 2. En la figura II.17 estos 6-ciclos están representados por los colores con tonalidades claras. Cualquier clase 1 elegida agrega el mismo número de elementos a la subestructura y condiciona a aquellos 6-ciclos dentro de su clase 2 que tienen altura menor en la sección  $\mathcal{C}$  a que no puedan retirar su arista  $b$  para incorporarse a  $\Sigma$ . El número de 6-ciclos condicionados es el mismo para cualquier clase 1 elegida ya que aquellos que tienen mayor altura en los puntos superiores, tienen menor altura en los puntos inferiores.

Por último se va a analizar cuáles son los 6-ciclos restantes a los que se les puede retirar las aristas  $b$  para ser introducidos en la subestructura. De entrada no se pueden quitar las aristas  $b$  de ninguno de los 6-ciclos que son superiores en la sección  $\mathcal{B}$  ya que éstos tiene menor altura en la sección  $\mathcal{A}$  que la clase 2 inferior que se agregó primero a la subestructura. Debido a la cuidadosa elección de clase 2 y clases 1 introducidas en  $\Sigma$ , sucede que aquellos 6-ciclos condicionados de no poder retirar sus aristas  $b$  al introducir la clase 2, son los mismos que los condicionados al introducir las clases 1. Esto sucede ya que los superiores de la sección  $\mathcal{B}$  también están condicionados por tener menor altura que los 6-ciclos de la clase 1 inferior de la sección  $\mathcal{C}$ .

Entonces, analizamos los 6-ciclos restantes inferiores de la sección  $\mathcal{B}$ . De cada una de las clases 1 restantes se puede introducir sólo un elemento ya que  $b$  es la arista crítica de las clases 1. Por lo tanto el número de elementos restantes que se introducen a la subestructura es de  $(n^{1/3} - 1)(n^{1/3} - 1)$ .

El orden utilizado en la demostración para retirar aristas corresponde al óptimo debido al tamaño de las clases y como a ningún otro 6-ciclo se le puede retirar una arista sin perder cruces con un mayor número de elementos ya introducidos, la subestructura cruzante máxima de 2-caminos formada a partir del contraejemplo es de tamaño

$$2n^{2/3} + 2(n^{1/3} - 1)n^{1/3} + (n^{1/3} - 1)(n^{1/3} - 1) = 5n^{2/3} - 3n^{1/3} + 1.$$

En la figura II.21 se muestra la subestructura cruzante generada.

La estructura que forman los 6-ciclos que no aportaron 2-caminos a  $\Sigma$  es equivalente al contraejemplo en donde cada etapa se construye con  $n^{1/3} - 1$  elementos por lo que no se puede obtener una subestructura cruzante mayor a partir de ellos.  $\square$

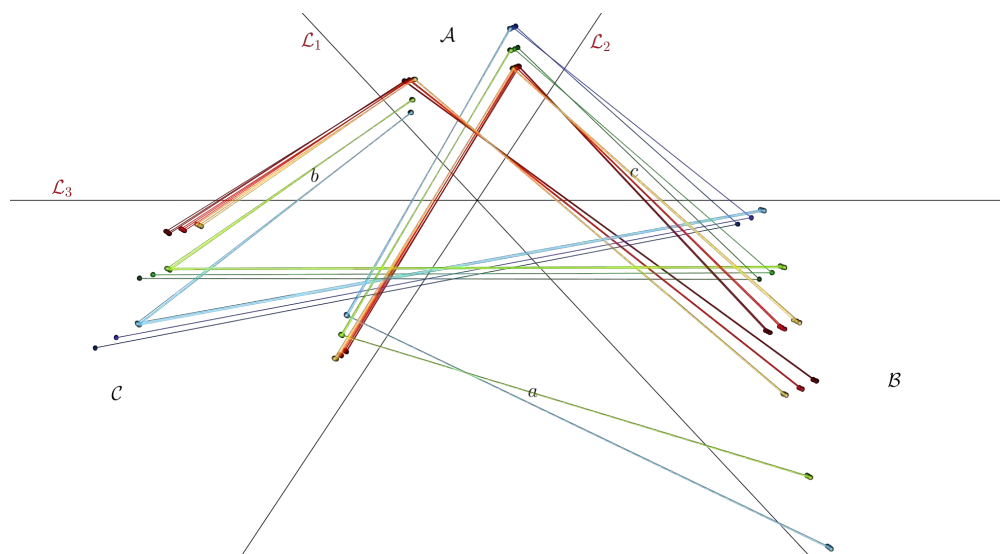


Figura II.21: Subestructura cruzante óptima de 2-caminos formada a partir del contraejemplo.

## Resumen de los resultados obtenidos

El análisis de los dos últimos contraejemplos nos lleva a pensar que si existe una familia cruzante de 2-caminos de tamaño lineal en toda nube de puntos, ésta debe ser obtenida por otro tipo de algoritmo que no tenga que ver con subestructuras cruzantes. De alguna manera las subestructuras pierden muchos de los cruces de las familias cruzantes y se podría comprender que ninguna subestructura garantiza un número lineal de cruces. De la misma manera, estos resultados nos llevan a una conjetura importante que se expone a continuación.

**Conjetura 1.** *Para toda nube de  $n$  puntos en posición general en el plano, existe una familia cruzante de 2-caminos de tamaño  $\Omega(n^{2/3})$ .*

Esta conjetura es más débil que la mostrada en [3] en donde se estipula que para toda nube de puntos existe una familia cruzante de aristas de tamaño lineal. Sin embargo, la obtención de la conjetura propuesta se consigue a partir de la obtención de las cotas justas para los últimos 2 teoremas del capítulo.

En la siguiente tabla se muestran las cotas superiores obtenidas en el capítulo, para las distintas familias cruzantes.

Subestructuras Cruzantes		
<b>Familia cruzante de 2-caminos de tamaño <math>n</math></b>		
$i$ -Caminos	Tamaño	Teorema
1	2	teo. II.1
<b>Familia cruzante de 3-caminos de tamaño <math>n</math></b>		
$i$ -Caminos	Tamaño	Teorema
2	$2\sqrt{n} - 1$	teo. II.3
1	2	teo. II.3
<b>Familia cruzante de <math>k</math>-caminos de tamaño <math>n</math></b>		
$i$ -Caminos	Tamaño	Teorema
$i < \frac{k-1}{2} + 1$	$2n^{\frac{i-1}{k-1}} - n^{\frac{i-2}{k-1}}$	teo. II.4
$i \geq \frac{k-1}{2} + 1$	$\sqrt{n}$	teo. II.4
<b>Familia cruzante de triángulos de tamaño <math>n</math></b>		
$i$ -Caminos	Tamaño	Teorema
2	$3n^{2/3} - 3n^{1/3} + 1$	teo. II.6
1	3	teo. II.6
<b>Familia cruzante de 6-ciclos de tamaño <math>n</math></b>		
$i$ -Caminos	Tamaño	Teorema
2	$5n^{2/3} - 3n^{1/3} + 1$	teo. II.7

Es importante mencionar que el resultado obtenido en la segunda sección del capítulo para la subestructura cruzante de 2-caminos es un caso particular de una familia cruzante de 3-caminos que contiene sus cruces entre las aristas intermedias. Este caso se analizó ya que la construcción es una familia cruzante que puede generar el algoritmo del teorema I.1. Es por esta razón que el tamaño de la subestructura es mayor al del caso generalizado de  $k$ -caminos.

El tema de las subestructuras cruzantes es bastante amplio y por el momento sólo se han obtenido cotas superiores significativas. Me parece de gran interés ampliar estos resultados y conseguir cotas inferiores con respecto al tamaño de las subestructuras que siempre se pueden obtener. Hasta el momento varias proposiciones utilizando órdenes parciales, permutaciones y teoría extremal de gráficas se han intentado y las cotas parecen justas para muchos de los casos. En particular se estudiaron dos artículos de órdenes parciales en donde el tema se relaciona bastante con las estructuras geométricas utilizadas [20] [23].



# Capítulo III

## Cruces en ciclos hamiltonianos

En el capítulo 1 se muestran varias construcciones que obtienen un número cuadrático de cruces utilizando un número lineal de aristas. Por diversas razones, los ciclos hamiltonianos constituyen un tema de mucho interés dentro de la teoría de gráficas y la geometría computacional. A partir de los resultados obtenidos es natural preguntarse si existe algún ciclo hamiltoniano con un número cuadrático de cruces. En algunas de las construcciones, la transformación de caminos a un gran ciclo es inmediata, por lo que la pregunta se debe extender a cuál es el ciclo hamiltoniano con mayor número de cruces que siempre se puede obtener para cualquier nube de  $n$  puntos.

En la introducción se mencionan varios artículos relacionados con ciclos hamiltonianos en nubes de puntos en donde se busca reducir la longitud del ciclo. En algunos se buscan ciclos hamiltonianos sin cruces, pero todos involucran la longitud del mismo. Como se había mencionado anteriormente, la relación entre cruces y longitud no es directa; los cruces no implican mayor longitud en el ciclo, y un ciclo de menor longitud no implica que no tenga cruces. En este capítulo se muestran dos construcciones que generan ciclos hamiltonianos con un alto número de cruces, en donde la longitud del mismo no es relevante.

Un ciclo hamiltoniano en una nube de  $n$  puntos en posición general, a lo más puede tener  $\frac{n(n-3)}{2}$  cruces. Esto es debido a que tiene  $n$  aristas y cada una de ellas puede cruzar a todas las demás, exceptuando a ella misma y a sus dos aledañas. Este ciclo se puede obtener cuando  $n$  es impar y todos los puntos están en posición convexa [2], por lo que ésta es la cota superior. Como

futura investigación, sería interesante buscar nubes de puntos que contengan ciclos hamiltonianos con a lo más  $\frac{n^2}{k}$  cruces, donde  $k > 2$ . Las siguientes construcciones establecen cotas inferiores para ciclos hamiltonianos con alto número de cruces que siempre se pueden obtener, para cualquier nube de puntos.

### III.1. Primera construcción: $\frac{n^2}{18} - O(n)$ cruces

La primera construcción deriva de la familia cruzante de 3-caminos mostrada en el teorema I.1. La familia cruzante genera  $\frac{n^2}{32} - O(n)$  cruces por lo que uniendo los 3-caminos en un solo ciclo, se obtiene un ciclo hamiltoniano con ese mismo número de cruces. Para aumentar los cruces, vamos a modificar un poco la construcción, para que cada punto de las secciones de los extremos pertenezca a dos 3-caminos distintos y así aumentar el número de cruces. De esta manera, las aristas utilizadas para unir los 3-caminos en un gran ciclo ya no son necesarias por lo que esta construcción debe generar más cruces. La construcción se muestra en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema III.1.** *Toda nube de  $n$  puntos tiene un ciclo hamiltoniano con al menos  $\frac{n^2}{18} - \frac{n}{6}$  cruces.*

*Demostración.* Comenzamos la construcción de la familia cruzante trazando dos líneas verticales auxiliares,  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$ , tal que  $\mathcal{L}_1$  deje  $\lfloor n/6 \rfloor$  puntos del conjunto a su izquierda y  $\mathcal{L}_2$  deje  $\lfloor n/6 \rfloor$  puntos a su derecha. De esta manera, la nube de puntos queda dividida en 3 zonas:  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  nombradas de izquierda a derecha, donde  $\mathcal{B}$  contiene el doble de puntos que las secciones  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  juntas. A continuación, unimos cada punto de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  con dos puntos de  $\mathcal{B}$  de manera que ningún punto de  $\mathcal{B}$  pertenezca a dos aristas. Esto genera  $\lfloor n/3 \rfloor$  aristas que cruzan la recta  $\mathcal{L}_1$  y  $\lfloor n/3 \rfloor$  aristas que cruzan la recta  $\mathcal{L}_2$ , como se muestra en la figura III.1.

El siguiente paso es numerar las aristas, de 1 a  $\lfloor n/3 \rfloor$ , conforme a su intersección con las líneas auxiliares: las aristas que cruzan  $\mathcal{L}_1$  se numeran de arriba hacia abajo y las que cruzan  $\mathcal{L}_2$  de abajo hacia arriba, de la misma manera en que se realizó para el teorema I.1. A continuación, se unen las parejas de puntos en  $\mathcal{B}$  que pertenecen a aristas con mismo número asignado, como se muestra en la figura III.2.

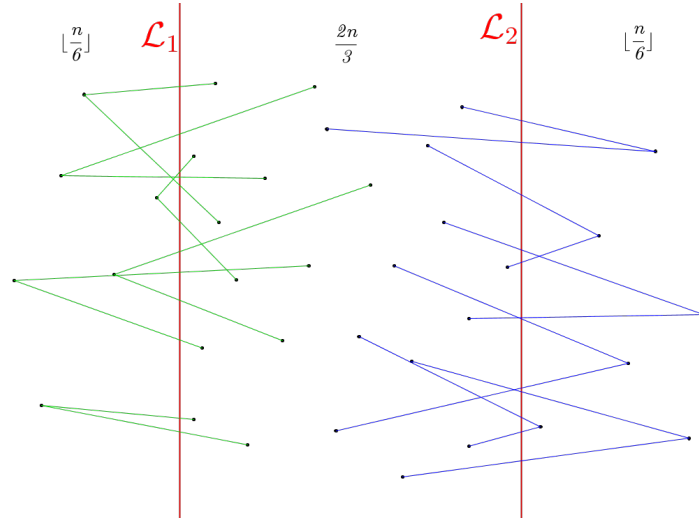


Figura III.1: Construcción de un ciclo hamiltoniano con  $\frac{n^2}{18} - O(n)$  cruces

La construcción anterior genera  $\lfloor n/3 \rfloor$  3-caminos, no disjuntos ya que comparten los puntos de los extremos, tales que cualquier pareja de ellos se cruza. Esto se demuestra de la misma manera en que se hizo para el teorema I.1. En esta construcción, cada punto está contenido en dos aristas y el número de total de cruces es:

$$\frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)}{2} \approx \frac{n^2}{18} - \frac{n}{6}.$$

Debido a que cada punto del conjunto está contenido en 2 aristas, la construcción consiste de un conjunto de ciclos. Por construcción, cada ciclo debe contener un número par de 3-caminos no disjuntos formados. Por lo anterior, el ciclo más pequeño que se puede formar contiene un punto en  $\mathcal{A}$ , un punto en  $\mathcal{C}$  y se forma por dos 3-caminos.

Lo que falta para la construcción del ciclo hamiltoniano es unir estos pequeños ciclos sin perder un número considerable de cruces. La figura III.3 muestra un ejemplo de los ciclos formados hasta este momento de la construcción, en donde cada ciclo está pintado de un color distinto, tres de los ciclos contienen 6 aristas y el ciclo de color rosa contiene 18 aristas.

Para unir estos ciclos es necesario analizar las intersecciones que tienen con las rectas auxiliares. Primero se ordenan las aristas que tienen un punto

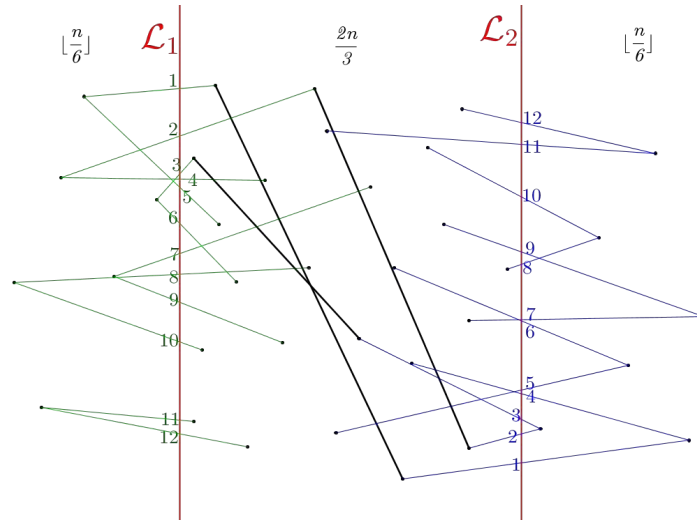


Figura III.2: Unión de puntos que pertenecen a aristas con mismo número asignado en la sección  $\mathcal{B}$ .

en  $\mathcal{A}$  conforme a la altura de su intersección con  $\mathcal{L}_1$  de manera que la intersección con mayor coordenada  $y$  corresponda a la primera del ordenamiento.  $\mathcal{C}_1$  será el ciclo que contiene a la primera arista,  $\mathcal{C}_2$  será el ciclo que contiene a la siguiente arista, que no pertenece a  $\mathcal{C}_1$ , en el ordenamiento. Siguiendo este procedimiento se numeran todos los ciclos. Es importante notar que debido a la construcción, las intersecciones de los ciclos con  $\mathcal{L}_2$  tienen el mismo orden, en sentido opuesto, que las intersecciones de los ciclos con  $\mathcal{L}_1$ .

Dos ciclos,  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{C}_j$ , se pueden unir si tienen aristas,  $a_i$  y  $a_j$ , consecutivas en el ordenamiento de las intersecciones con  $\mathcal{L}_1$ . Para unirlos, se toman los dos 3-caminos que contienen a  $a_i$  y  $a_j$ . Es claro notar que en caso de que haya más de un ciclo en el conjunto, siempre existirán aristas consecutivas. A los 3-caminos elegidos, se les retira la arista que une a dos puntos de la sección  $\mathcal{B}$ . De los cuatro puntos a lo que se les retiró una arista, se unen aquellos que pertenecen a ciclos distintos y están unidos por su otra arista a puntos de secciones distintas, como se muestra en la figura III.4. Este procedimiento junta a  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{C}_j$  en un ciclo de tamaño mayor, ya que al retirar una arista de cada ciclo se forman dos caminos,  $\mathcal{P}_i$  y  $\mathcal{P}_j$  respectivamente. Si se une un extremo de  $\mathcal{P}_i$  con un extremo de  $\mathcal{P}_j$ , se forma un camino que contiene a los dos. Al cerrar los dos extremos de este camino se genera un ciclo que tiene

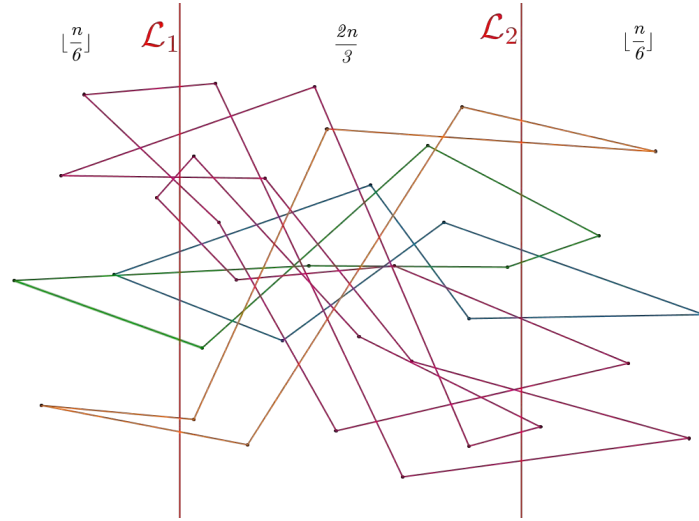


Figura III.3: Pequeños ciclos formados por la construcción.

tantas aristas como la suma de las aristas que tienen  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{C}_j$ .

El intercambio de aristas entre ciclos puede provocar la pérdida de algunos cruces en la construcción, como se muestra en la figura III.4. Lo que falta probar es que por cada unión de ciclos, pierde a lo más un cruce, ya contabilizado, de la construcción. Debido a que los puntos de intersección de los 3-caminos con  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  son consecutivos (entre ellos no hay ningún otro punto de intersección), cualquier otro 3-camino si comienza por debajo de éstos en  $\mathcal{L}_1$ , va a terminar por encima de ambos en  $\mathcal{L}_2$  y viceversa. Esto implica que los cruces de los 3-caminos a unir con cualquier otro 3-camino se conservan. El único cruce que se puede perder es aquel producido por los dos 3-caminos modificados: al intercambiar su arista intermedia, existe la posibilidad de que se mantengan paralelos a lo largo de la sección  $\mathcal{B}$ .

El máximo número de ciclos que puede formar la estructura es de  $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ . Cada unión de ciclos pierde a lo más un cruce ya contabilizado y se necesitan a lo más  $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1$  uniones para formar el ciclo hamiltoniano. Entonces el número total de cruces del ciclo hamiltoniano formado por la estructura es de

$$\frac{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor (\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1)}{2} - (\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1) \approx \frac{n^2}{18} - \frac{n}{3}.$$

□

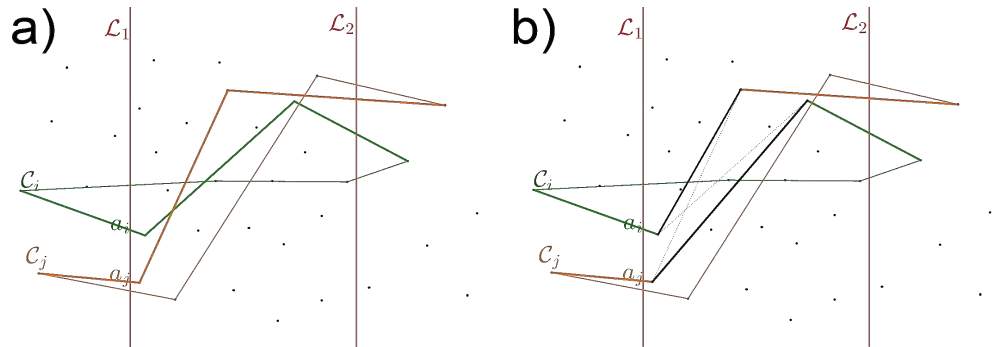


Figura III.4: Unión de ciclos intercambiando la arista intermedia de los 3-caminos.

Es interesante observar cómo este ciclo hamiltoniano tiene la forma de una estrella en donde sus picos se colocan de manera horizontal. Sin duda este ciclo es bastante largo, ya que realiza el recorrido de izquierda a derecha por cada 5 puntos del conjunto. Se menciona la estructura estrellada por su analogía con el ciclo hamiltoniano de mayor número de cruces en un conjunto en posición convexa. Este ciclo hamiltoniano tiene la forma de una estrella, en donde cada arista cruza al conjunto de un extremo al otro. Estas ideas sólo se mencionan por si en algún momento se quieren utilizar las construcciones para identificar ciclos hamiltonianos de máxima longitud.

### III.2. Segunda construcción: $\frac{n^2}{12} - O(n)$ cruces

La construcción realizada en esta sección se obtiene de la demostración del teorema I.4. Esta es la construcción que más cruces genera dentro de los resultados obtenidos en el capítulo 1. El siguiente teorema eleva la cota superior mostrada en el teorema III.1, sin embargo, la construcción anterior se muestra porque se obtuvo antes y el algoritmo de intersección de ciclos es en sí mismo interesante.

**Teorema III.2.** *Toda nube de  $n$  puntos tiene un ciclo hamiltoniano con al menos  $\frac{n^2}{12} - O(n)$  cruces.*

*Demostración.* Dividimos la nube de puntos en 6 partes utilizando el teorema 0.2 y llamaremos a las rectas, secciones y puntos de la misma manera que en el teorema I.4. Se utilizarán 3 secciones no consecutivas para formar la primera mitad del ciclo, y con las otras 3 secciones se formará la otra mitad de manera análoga. Vamos a definir un orden circular entre las secciones, en donde la sección  $\mathcal{A}$  precede a la sección  $\mathcal{B}$  y ésta precede a la sección  $\mathcal{C}$ .

La formación del ciclo es muy similar a la formación de los 6-caminos del teorema I.5, con la diferencia de que aquí el camino no termina sino hasta recorrer todos los puntos de las 3 secciones. Como vértice inicial se toma dentro de  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$  el punto independiente con mayor numeración. Este punto se une con el punto independiente con menor numeración dentro de la siguiente sección. Se continúa con este procedimiento tomando alternadamente el menor y el mayor punto independiente de la secciones conforme al orden cíclico definido, hasta recorrer todos los puntos de las 3 secciones, como se muestra en la figura III.5. De la misma manera se genera un camino

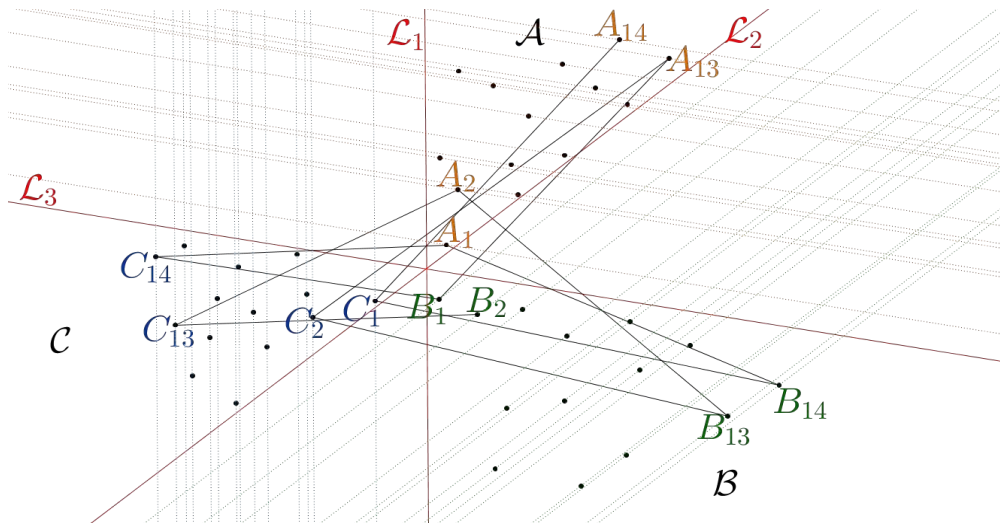


Figura III.5: Construcción de la primera mitad del ciclo hamiltoniano.

con todos los puntos de las otras 3 secciones. Al tener los 2 caminos, se une el punto inicial del primero con el punto final del segundo y viceversa. Esto forma un ciclo hamiltoniano con todos lo puntos del conjunto.

A continuación vamos a analizar cuántos cruces tiene este ciclo hamiltoniano. Por la prueba de los 3 casos que se utiliza en la demostración del

teorema I.4, se puede notar que si a cada punto se le asocia un 2-camino, generado por sus dos aristas incidentes, este 2-camino va a cruzar dos veces con el 4-camino que tiene como centro a cualquier punto de mayor altura en su sección, como se muestra en la figura III.6. Todos estos cruces se cuentan

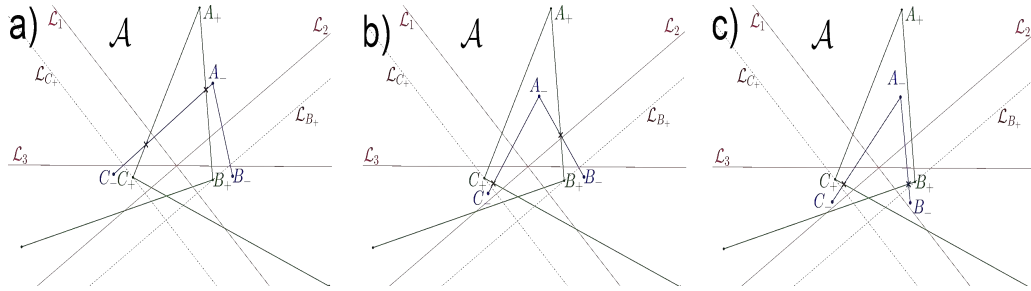


Figura III.6: Tres posibles casos de cruces entre 2 y 4-caminos generados por puntos de la misma sección.

2 veces, ya que cada arista pertenece a dos 2-caminos. Consideramos que en cada sección hay  $m = \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$  puntos. Los cruces que se obtienen de los 2 y 4-caminos de una sección son los siguientes. El 2-camino del punto de menor altura cruza con  $(m - 1)$  4-caminos, el siguiente con  $(m - 2)$ , hasta llegar al último que no cruza con ninguno. Cada relación anterior genera 2 cruces por lo que la suma total es de  $2 \frac{(m-1)m}{2} = m^2 - m$ . Este número de cruces se multiplica por las 6 secciones y se divide entre 2 debido a que los cruces se cuentan dos veces. Entonces, el total de cruces de la construcción es de

$$3(m^2 - m) = 3 \left( \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor \right) \approx \frac{n^2}{12} - \frac{n}{2}.$$

Los dos puntos iniciales y los dos puntos finales de cada camino formado por 3 secciones, no tienen un 4-camino que pueda ser tomado en cuenta para los cruces. Esto reduce el número de cruces en a lo más  $8m$ , por lo que sólo se restaría un número lineal de cruces al total.  $\square$

Es interesante la figura que describe el ciclo hamiltoniano creado por el algoritmo. De la misma manera que en el teorema III.1, se genera una estrella, siendo radial en este caso. También es de interés notar que el ciclo recorre mucha distancia y se utilizan los puntos más cercanos y más lejanos del centro del conjunto, para entrar y salir por cada 2 puntos del ciclo. Esto se



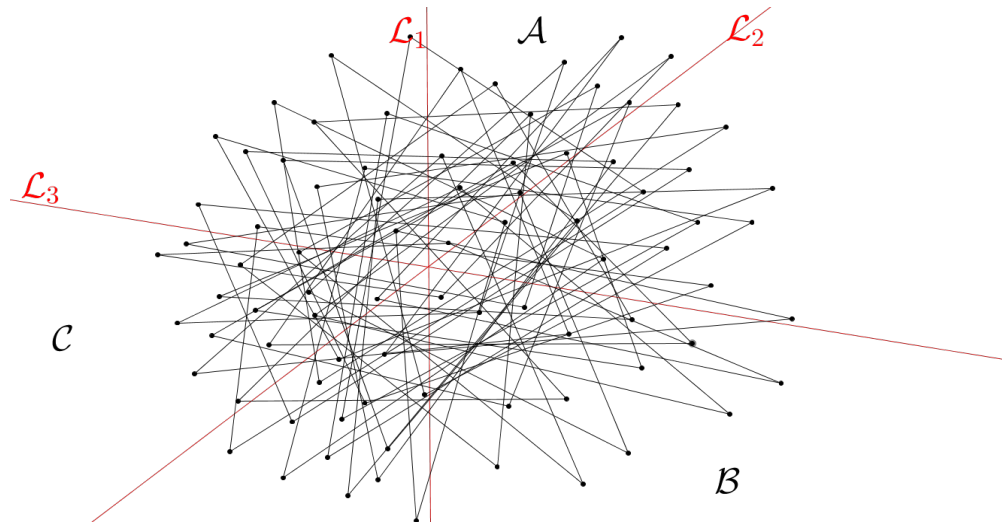


Figura III.7: Ciclo hamiltoniano generado por el algoritmo.

menciona ya que puede ser de interés analizar la longitud del ciclo generado por el algoritmo.

Este último algoritmo se puede aplicar a cualquier nube de puntos y el número total de cruces es muy grande. La equipartición de la nube en 6 partes por tres líneas rectas es única para muchos conjuntos, sin embargo, si se consiguiera una partición por 3 rectas que incidan en un punto, en la cual tres secciones no consecutivas contengan uniformemente un número de puntos mayor a  $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ , el algoritmo generaría un mayor número de cruces. Esto se menciona porque en conjuntos de puntos tales como el que se muestra en la figura III.8, el número de cruces que genera el algoritmo del teorema III.2, utilizando la partición indicada, es de  $\frac{n^2}{6} - O(n)$ . Este número se acerca mucho al de la cota superior, por lo que un tema de mucho interés sería buscar nubes de puntos que tengan ciclos hamiltonianos con la menor cantidad de cruces posibles.

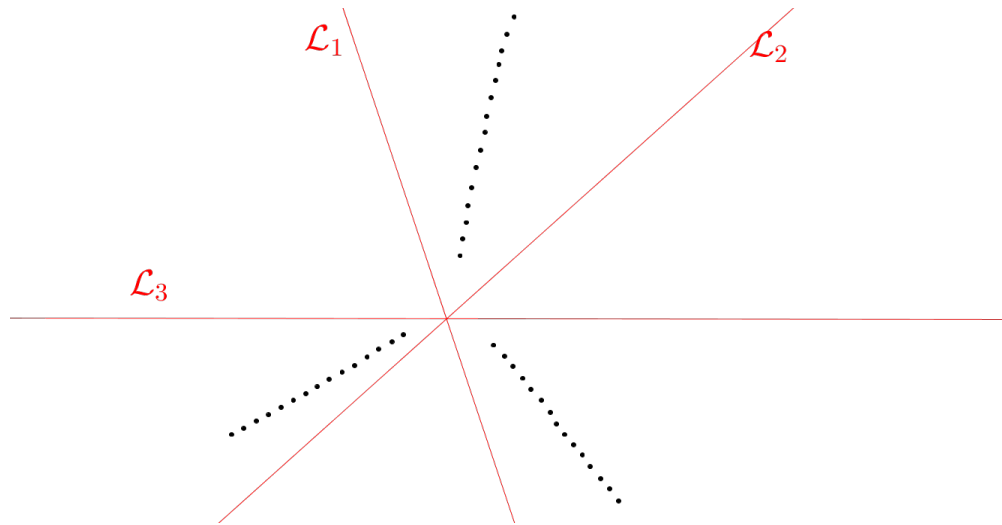


Figura III.8: Conjunto de puntos particular en donde aplicando el algoritmo con una partición conveniente, se genera un mayor número de cruces.

# Capítulo IV

## Conclusiones y futura investigación

Considero satisfactoria la investigación realizada para esta tesis, ya que se propusieron varios problemas nuevos y de varios de ellos se obtuvieron cotas importantes. El trabajo a realizar para ajustar las cotas es inmenso, y pienso que el tema de familias y subestructuras cruzantes puede generar bastante interés en la comunidad dedicada a la geometría computacional. La mayoría de estos problemas se resuelve con algoritmos sencillos e intuitivos y siendo éste un tema nuevo, da lugar a mucha expansión de los conceptos. A continuación se exponen temas para futura investigación que se mencionaron a lo largo de la tesis.

En las subestructuras cruzantes hace falta mucho trabajo para encontrar cotas inferiores. De las cotas mostradas en el capítulo 2, se sugiere que posiblemente algunas de ellas sean justas. Antes de concluir la investigación para esta tesis, se realizaron varios intentos utilizando permutaciones, órdenes parciales y teoría extremal de gráficas para encontrar las cotas inferiores. Aunque no se hayan encontrado los resultados deseados, éstas herramientas funcionan y posiblemente sólo sea necesario un poco más de trabajo para conseguir algún resultado relevante. En particular hay un gran interés en encontrar la cota inferior de la subestructura de 2-caminos en la familia cruzante de triángulos y en la de 6-ciclos.

El resultado más fuerte que se quiso y no se pudo obtener en esta tesis fue el de encontrar una familia cruzante de 2-caminos de tamaño mayor a  $\Omega(\sqrt{n})$

---

para cualquier nube de puntos. Las subestructuras cruzantes posiblemente funcionen como herramientas para obtener este resultado. De cualquier manera, lo que se observó de las subestructuras es que no mantienen un tamaño lineal, es decir, si la familia cruzante original es de tamaño  $n$ , la subestructura tendrá un tamaño menor. Esto no está demostrado pero se menciona, ya que obtener una familia cruzante lineal de 2-caminos posiblemente no se pueda lograr a través de subestructuras cruzantes.

Otro tema ligado con subestructuras es el de encontrar un algoritmo que dada una familia cruzante, obtenga la máxima subestructura cruzante de  $k$ -caminos. Sobre este tema no se ha profundizado mucho, pero el problema parece complicado y posiblemente su complejidad algorítmica sea NP-Completo.

Dentro de las familias cruzantes quedan muchas cotas que buscar para nuevas estructuras. Al final del capítulo 1 se menciona que una posible extensión del tema sea buscar familias cruzantes de polígonos simples y polígonos convexos. Algunas cotas también pueden ser mejoradas, por ejemplo, sería interesante obtener una familia cruzante de triángulos de tamaño mayor a  $n/6$  para cualquier nube de puntos o, en su defecto, un contra ejemplo que muestre la imposibilidad de obtener una mayor. Varias de las estructuras mostradas se pueden mejorar y también faltan las cotas superiores para las ya existentes.

En el tema de los ciclos hamiltonianos con un número cuadrático de cruces también hay mucho por avanzar. El algoritmo obtenido en el capítulo 3 es bastante robusto, por lo que posiblemente el tema de investigación deba estar más enfocado a buscar contraejemplos de nubes de puntos que no permitan ciclos hamiltonianos con un alto número de cruces. Este problema es interesante y posiblemente complicado, ya que no es fácil determinar el ciclo hamiltoniano con máximo número de cruces en una nube de puntos dada. De cualquier manera, ajustar la cota para el máximo número de cruces en ciclos hamiltonianos puede ser un resultado importante.

Otro tipo de problema relacionado es encontrar ciclos hamiltonianos con número cuadrático de cruces en nubes de puntos bicoloradas y tricoloradas. Los ciclos pueden ser alternando colores o monocromáticos disjuntos, donde el interés sea el número de cruces máximo. Cualquiera de los dos problemas parece ser de bastante nivel de dificultad.

Muchos de los temas aquí mencionados no fueron tratados por la nece-

alidad de limitar los alcances de la tesis, la dificultad de los mismos puede variar ampliamente.

La investigación realizada para esta tesis abre un campo de problemas en nubes de puntos que no se había tratado anteriormente. Muy pocos de los resultados muestran cotas justas, por lo que queda mucho trabajo por realizar y los cruces en nubes de puntos pueden ser de gran interés para futuras investigaciones.

# Bibliografía

- [1] N. Alon, S. Rajagopalan, and S. Suri. Long non-crossing configurations in the plane. *Fundam. Inf.*, 22(4):385–394, Dec. 1995.
- [2] J. L. Álvarez Rebollar. *El Problema del Número de Cruces en Poligonizaciones de Puntos en el Plano*. Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Matemáticas, 2015.
- [3] B. Aronov, P. Erdős, W. Goddard, D. Kleitman, M. Klugerman, J. Pach, and L. J. Schulman. Crossing families. *Combinatorica*, 14(2):127–134, 1994.
- [4] J. Balogh and G. Salazar. On  $k$ -sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of  $k_n$ . *Discrete & Computational Geometry*, 35:671–690, 2004.
- [5] B. Bollobás. *Modern Graph Theory*. Number 184 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.
- [6] R. C. Buck and E. F. Buck. Equipartition of convex sets. *Mathematics Magazine*, 22(4):195–198, 1949.
- [7] A. Dumitrescu and C. Tth. Long non-crossing configurations in the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 44(4):727–752, 2010.
- [8] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*, volume 10 of *Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer-Verlac, 1987.
- [9] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math*, 2, 1935.

- 
- [10] J. ern, Z. Dvok, V. Jelnek, and J. Kra. Noncrossing hamiltonian paths in geometric graphs. In G. Liotta, editor, *Graph Drawing*, volume 2912 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 86–97. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [11] R. Fulek and A. Suk. On disjoint crossing families in geometric graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38(0):367 – 375, 2011. The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2011.
- [12] A. Garca, M. Noy, and J. Tejel. Lower bounds on the number of crossing-free subgraphs of  $k_n$ . *Computational Geometry*, 16(4):211 – 221, 2000.
- [13] R. Hayward. A lower bound for the optimal crossing-free hamiltonian cycle problem. *Discrete & Computational Geometry*, 2(1):327–343, 1987.
- [14] K. Hosono and M. Urabe. On the number of disjoint convex quadrilaterals for a planar point set. *Computational Geometry*, 20(3):97 – 104, 2001.
- [15] E. d. Klerk, J. Maharry, D. V. Pasechnik, R. B. Richter, and G. Salazar. Improved bounds for the crossing numbers of  $km,n$  and  $kn$ . *SIAM J. Discret. Math.*, 20(1):189–202, Jan. 2006.
- [16] L. Lovsz, K. Vesztergombi, U. Wagner, and E. Welzl. Convex quadrilaterals and  $k$ -sets. In *Contemporary Mathematics Series, 342*, AMS 2004, pages 139–148.
- [17] J. Pach, R. Pinchasi, G. Tardos, and G. Tth. Geometric graphs with no self-intersecting path of length three. *European Journal of Combinatorics*, 25(6):793 – 811, 2004. Thematic issue on Topological Graph theory.
- [18] J. Pach and J. Solymosi. Halving lines and perfect cross-matchings. 1999.
- [19] R. B. Richter and G. Salazar. Crossing numbers. In J. L. Gross, J. Yellen, and P. Zhang, editors, *Handbook of Graph Theory*, Discrete Mathematics and its applications, chapter 7, pages 912–932. CRC Press, second edition edition, 2014.

- 
- [20] N. Santoro and J. Urrutia. Angle orders, regular  $n$ -gon orders and the crossing number. *Order*, 4(3):209–220, 1987.
- [21] E. R. Scheinerman and H. Wilf. The rectilinear crossing number of a complete graph and sylvester’s ”four point problem.” of geometric probability. *American Mathematical Monthly*, 101:939–943, 1994.
- [22] M. Sharir, A. Sheffer, and E. Welzl. Counting plane graphs: Perfect matchings, spanning cycles, and kasteleyn’s technique. In *Proceedings of the Twenty-eighth Annual Symposium on Computational Geometry, SoCG ’12*, pages 189–198. ACM, 2012.
- [23] J. Sidney, S. Sidney, and J. Urrutia. Circle orders,  $n$ -gon orders and the crossing number. *Order*, 5(1):1–10, 1988.
- [24] P. Valtr. On geometric graphs with no  $k$  pairwise parallel edges.
- [25] P. Valtr. Graph drawing with no  $k$  pairwise crossing edges. In G. DiBattista, editor, *Graph Drawing*, volume 1353 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 205–218. Springer Berlin Heidelberg, 1997.
- [26] P. Valtr. On mutually avoiding sets. In R. Graham and J. Neetil, editors, *The Mathematics of Paul Erds II*, volume 14 of *Algorithms and Combinatorics*, pages 324–328. Springer Berlin Heidelberg, 1997.