



UNAM

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

**EL FILTRO DE KALMAN Y SUS APLICACIONES**

TESIS:

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**ACTUARIO**

PRESENTA:

**ALLAN EDUARDO ROSAS GARCIA**

ASESORA DE TESIS:

**DRA. MARÍA DEL CARMEN GONZÁLEZ VIDEGARAY**

MÉXICO D.F. MAYO, 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# El Filtro de Kalman y sus Aplicaciones

Allan Eduardo Rosas Garcia



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Conceptos fundamentales</b>	<b>1</b>
1.1. Procesos estocásticos . . . . .	1
1.2. Tipos de procesos estocásticos . . . . .	2
1.3. Conceptos del análisis bayesiano . . . . .	11
1.3.1. Distribuciones a priori y a posteriori . . . . .	11
1.3.2. Funciones de pérdida y de riesgo . . . . .	12
1.4. Introducción al filtro de Kalman . . . . .	15
1.5. Modelo espacio estado básico . . . . .	19
<b>2. Modelos espacio estado y el Filtro de Kalman</b>	<b>21</b>
2.1. Modelo de nivel local . . . . .	21
2.2. Modelo de tendencia lineal local . . . . .	22
2.3. Modelo de tendencia lineal local con variación estacional . . .	23
2.4. Modelo de tendencia lineal local con variable explicativa . . .	24
2.5. El modelo espacio estado general y el filtro de Kalman . . . .	25
2.5.1. Distribuciones del filtro de Kalman . . . . .	26
<b>3. Aplicaciones</b>	<b>35</b>
3.1. Modelos ARIMA . . . . .	35
3.2. Coeficientes dinámicos en el modelo CAPM . . . . .	36
<b>4. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Apéndice A. Código en R usado para los cálculos de los coeficientes del CAPM</b>	<b>49</b>
<b>Apéndice B. Tabla de los datos para el CAPM</b>	<b>53</b>

**Apéndice C. Tabla de Resultados de los coeficientes CAPM 59**

# Introducción

El filtro de Kalman regularmente se encuentra en textos avanzados de series de tiempo, reservando el tema para estudiantes graduados, sin embargo, el estudiante de Actuaría cuenta con las bases necesarias para entender e incorporar el Filtro de Kalman al conjunto de herramientas con que le dota la carrera. Su importancia recae principalmente en poder modificar y ajustar más a la realidad varios modelos que son estudiados en diferentes asignaturas, algunos de mayor interés aplicados en la carrera, donde el filtro de Kalman puede ser incorporado, son los siguientes:

- El análisis de regresión lineal para la actualización de modelos, especialmente si las variables no cuentan con la propiedad de regresión a la media, el filtro de kalman les brinda mas libertad.
- Modelos financieros para incorporar coeficientes dinámicos con aplicaciones a la extracción volatilidad.
- Tratamiento de información incompleta para imputar datos por medio del suavizamiento de Kalman.
- Series de tiempo para pronósticos bajo un enfoque estructural.

Otra fuente en donde encontrar información sobre el filtro de Kalman es la literatura relacionada a la ingeniería (dado que el filtro se originó en este campo las fuentes son aun más extensas). Los problemas principales en este tipo de documentación son que la gran mayoría de las veces están enfocados directamente a aplicaciones, omitiendo la parte de la derivación, algunos textos mas profundos en esta literatura derivan el filtro por medio de proyecciones ortogonales y notación matricial bastante compleja, el ejemplo mas claro lo podemos encontrar en el paper original que escribió Kalman [1].

El presente trabajo es un esfuerzo por señalar de manera metódica la forma en que se debe aplicar el filtro de Kalman, ilustrar casos de interés



donde se aplica y derivarlo haciendo uso de un enfoque bayesiano.

Los beneficios que se obtendrán en la lectura del presente trabajo son los siguientes:

- Comprensión de las bases teóricas para derivar el filtro de Kalman.
- Uso del filtro de Kalman para la obtención de parámetros de interés por medio de observaciones indirectas.
- Uso del filtro de Kalman para hacer estimaciones en tiempo real.
- Aplicación recursiva del filtro de Kalman.
- Uso del filtro de Kalman en campos distintos a la Ingeniería (Aplicación del filtro al CAPM).

En el primer capítulo de este trabajo se revisan de manera general los conceptos fundamentales para poder hacer la derivación del filtro.

El segundo capítulo contiene los modelos lineales dinámicos más esenciales y la derivación de las distribuciones del filtro.

El tercer y último capítulo contiene dos aplicaciones que ejemplifican el uso del filtro.

# Capítulo 1

## Conceptos fundamentales

### 1.1. Procesos estocásticos

#### Proceso estocástico

Un proceso estocástico  $\{Y_t : t \in T\}$  es una colección de variables aleatorias parametrizada por un conjunto  $T$ , llamado espacio parametral, y con valores en un conjunto  $E$  llamado espacio de estados.

La relación de dependencia entre las variables aleatorias  $\{Y_t\}$  junto con el espacio parametral y el espacio de estados son los principales elementos que caracterizan a un proceso estocástico

#### Espacio de estados $E$

Es el espacio en el cual se encuentran los posibles valores de  $\{Y_t\}$

- si  $E = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  entonces  $\{Y_t\}$  es un proceso espacio de estados con valores enteros.
- si  $E = (-\infty, \infty)$  entonces  $\{Y_t\}$  es un proceso espacio de estados con valores reales.
- si  $E$  es Euclidiano  $k - dimensional$  entonces  $\{Y_t\}$  se dice que es un proceso espacio  $k$ -vectorial.

En el caso cuando  $E$  es  $k - dimensional$  esto significa que cada valor de  $\{Y_t\}$  podra tomar difernetes valores para un  $t$  fijo, es decir los elementos de  $E$  seran de la forma  $(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{kt})$ , este tipo de esacios es el definido para

variables estocásticas  $k$  – dimensionales.

### Espacio parametral $T$

- si  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  se dice que  $\{Y_t\}$  es un proceso estocástico a tiempo discreto.
- si  $T = [0, \infty)$  entonces  $\{Y_t\}$  es un proceso estocástico a tiempo continuo.

Puede que  $T$  no sea unidimensional por ejemplo podemos considerar las olas en el mar, donde la coordenada de la latitud y la longitud son el valor de  $t$  entonces  $\{Y_t\}$  es el valor de la altura de la ola en la locación  $t$ .

De hecho, el parámetro  $t$  no debe ser necesariamente tiempo.

## 1.2. Tipos de procesos estocásticos

Algunos tipos de procesos estocásticos clásicos caracterizados por la relación de dependencia entre las  $Y_t$  se presentan a continuación:

### Procesos estacionarios

Un proceso estocástico  $\{Y_t\}$  es estrictamente estacionario si las distribuciones conjuntas de las siguientes familias de variables aleatorias

$$(Y_{t_1-k}, Y_{t_2-k}, \dots, Y_{t_n-k}) \text{ y } (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n})$$

son idénticas para toda  $k$  y cualquier selección arbitraria de  $t_1, t_2, \dots, t_n$  en  $T$ .

Sobre esto en S. Karlin y H. Taylor [2, p.30] se señala:

*“Esta condición nos asegura que en esencia el proceso está probabilísticamente en equilibrio y los tiempos particulares en los cuales revisamos el proceso no son tan relevantes. En particular, la distribución de  $Y_t$  es la misma para toda  $t$ ”*

Entonces, marginalmente hablando las  $Y_t$  son idénticamente distribuidas y podemos escribir:

$$\forall t, k \in \mathbb{R} \quad E[Y_t] = E[Y_{t-k}] \text{ y } V[Y_t] = V[Y_{t-k}]$$

entonces la media y la varianza son constantes en el tiempo, de aquí se sigue que;

$$Cov(Y_t, Y_s) = Cov(Y_{t-k}, Y_{s-k}) \quad \forall t, s, k \in \mathbb{R}$$

Si hacemos  $k = s$  y despues  $k = t$

$$\begin{aligned} \gamma_{t,s} &= Cov(Y_{t-s}, Y_0) \\ &= Cov(Y_0, Y_{s-t}) \\ &= Cov(Y_0, Y_{|t-s|}) \\ &= \gamma_{0,|t-s|} \end{aligned}$$

Esto nos indica que la covarianza entre  $Y_t$  y  $Y_s$  depende únicamente en la diferencia de  $|t - s|$  y no de  $t$  o  $s$  en sí.

Para denotar la Autocovarianza y la Autocorrelación se usa la siguiente notación:

- $\gamma_k = Cov(X_t, X_{t-k})$
- $\rho_k = Corr(X_t, X_{t-k})$

Se dice que un proceso estocástico  $\{Y_t\}$  es débilmente estacionario si cumple lo siguiente:

- i  $E[Y_t] = \mu \forall t \in \mathbb{R}$
- ii  $Var(Y_t) = \sigma \forall t \in \mathbb{R}$
- iii  $\gamma_{t,t-k} = \gamma_{0,k} \forall t, k \in \mathbb{R}$

Es decir si su esperanza y varianza es constante y su covarianza depende únicamente de  $t$  y  $k$ .

**Ejemplo 1.1.** *Un proceso estacionario es el ruido blanco  $\{e_t\}$ , este se define como una serie de v.a.i.i.d.<sup>1</sup>, el ruido blanco es un proceso estrictamente estacionario y usualmente se asume que  $E[e_t] = 0$  y  $V[e_t] = \sigma_e^2 \forall t$ .*

*Este ruido no tiene ninguna periodicidad ni patrón reconocible.*

En el artículo *El color del ruido* [3] encontramos algunas razones del porque de este nombre:

*Se le designa ruido blanco por la analogía existente entre el espectro acústico y el espectro óptico, ya que como la luz se puede representar en una gráfica espectral también las características de los sonidos se pueden apreciar en una densidad espectral y así como la luz blanca es la combinación de todos los colores del espectro, de todas las frecuencias, se dice que un ruido es ruido blanco si están presentes todas las frecuencias de los agentes individuales posibles.*

### Cadenas de Markov

Considérese una serie de tiempo  $(Y_t)_{t \geq 0}$  se dice que  $(Y_t)_{t \geq 0}$  es una cadena de Markov si  $\forall t \geq 0$  se cumple la siguiente propiedad:

$$\pi(Y_t | Y_{0:t-1}) = \pi(Y_t | Y_{t-1}) \quad (1.2.1)$$

---

<sup>1</sup>Variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, es decir que cada variable tiene la misma distribución y son independientes entre sí mismas

A esta propiedad se le conoce como la propiedad de Markov y una manera equivalente de expresarla es:

$$\pi(Y_0, Y_1, \dots, Y_n) = \pi(Y_0)\pi(Y_1|Y_0)\dots\pi(Y_n|Y_{n-1}) \quad (1.2.2)$$

La distribución de  $Y_0$  se llama distribución inicial y la denotamos por  $\pi(Y_0)$ .

Entonces la distribución conjunta de las variables  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  es igual a la distribución inicial  $Y_0$  por el producto de las distribuciones condicionadas.

Se dice que la cadena es homogénea si  $\pi(Y_t = y_t | Y_{t-1} = y_{t-1})$  no depende de  $t$ .

La probabilidad de ir en  $m$  pasos o unidades de tiempo de  $x$  a  $y$  se llama probabilidad de transición en  $m$  pasos y se denota por:

$$\pi(Y_{t+m} = y | Y_t = x) \text{ o } P_{x,y}^{(m)}$$

Los valores de  $P_{x,y}$  comunmente se arreglan de forma matricial y a esta matriz se le conocer como matriz de Markov o matriz de probabilidades de transición.

$$\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ p_{i0} & p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene la propiedad de que  $\sum_{y \in E} P_{xy} = 1$

En una cadena de Markov con espacio de estados  $E$  con  $x, y \in E$ , se dice que:

- 1.- De  $x$  se accede a  $y$  y si existe  $n \geq 0$  tal que  $P_{x,y}^n \geq 0$  y se denota por  $(x \rightarrow y)$
- 2.-  $x$  y  $y$  se comunican entre sí, y se denota por  $(x \leftrightarrow y)$ , si se cumplen  $(x \rightarrow y)$  y  $(y \rightarrow x)$

$(x \leftrightarrow y)$  genera una relación de equivalencia, ya que:

- i  $x \leftrightarrow x$
- ii  $x \leftrightarrow y$  si y sólo si  $y \leftrightarrow x$
- iii  $x \leftrightarrow y$  y  $y \leftrightarrow z$  implican que  $x \leftrightarrow z$

Una clase de equivalencia respecto a esta relación de equivalencia se llama clase de comunicación.

Dado  $x \in E$ , su clase de comunicación se denota:

$$C(x) = \{y \in E : x \leftrightarrow y\}$$

Se dice que un subconjunto de estados de  $C \subset E$  es cerrado si ningún estado de  $E - C$  puede ser accedido desde un estado de  $C$ , es decir si:

$$\pi(Y_m = y | Y = x) = 0, \forall x, y, m : x \in C, y \in (E - C), m \in \mathbb{N}$$

**Ejemplo 1.2.** Considere la cadena de Markov con espacio de estados  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  y matriz de transición

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \left( \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{array}$$

Esta cadena se representa en la figura 1.1.

De esta cadena observamos lo siguiente:

- como  $P_{12} = \frac{1}{2}$  y  $P_{21} = 1$  entonces  $1 \longleftrightarrow 2$ .
- como  $P_{34} = \frac{2}{3}$  y  $P_{43} = \frac{1}{2}$  entonces  $3 \longleftrightarrow 4$ .
- si se está en el estado 1 sólo se puede ir a los estados 1 ó 2.
- si se está en el estado 2 sólo se puede ir al estado 1.
- si se está en el estado 3 sólo se puede ir a los estados 3 ó 4.
- si se está en el estado 4 sólo se puede ir a los estado 3 ó 4.
- las clases de comunicación son 2:  $A = \{1, 2\}$  y  $B = \{3, 4\}$
- las clases de comunicación  $A$  y  $B$  son cerradas.

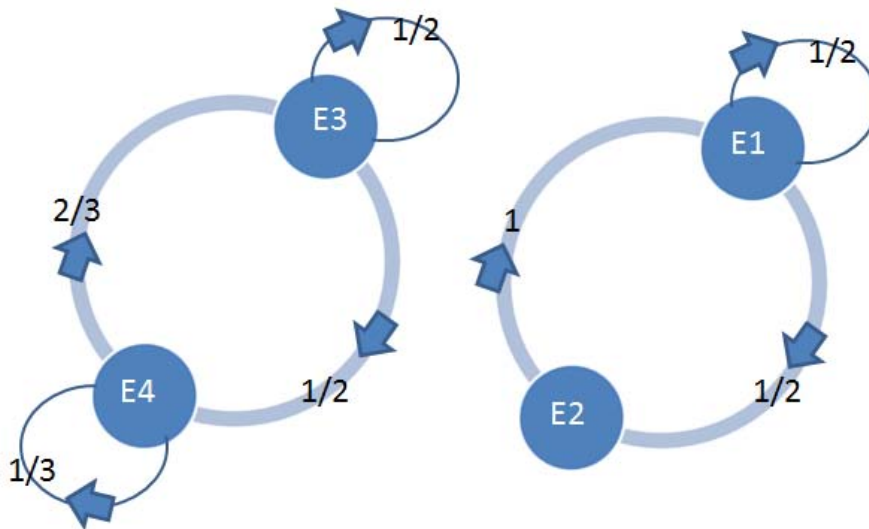


Figura 1.1: Diagrama de transición del ejemplo 1.2.

Se dice que una cadena es irreducible si desde cualquier estado de  $E$  se puede acceder a cualquier otro, es decir todos los estados se comunican entre sí.



En una cadena de Markov  $Y_n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , espacio de estados  $E$ , si  $y \in E$ , se dice que:

- $y$  es estado recurrente si

$$\pi(Y_n = x | Y_0 = x) = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

- $y$  es estado transitorio si

$$\pi(Y_n = x | Y_0 = x) < 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

- $y$  es estado absorbente si

$$\pi(Y_n = x | Y_0 = x) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El estado absorbente puede verse como un caso particular del estado recurrente, donde sólo se sale y se ingresa al mismo estado.

**Ejemplo 1.3.** Considere la cadena de Markov con espacio de estados  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  y matriz de transición

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

De esta cadena observamos lo siguiente:

- *los estados transitorios son*  $\{1, 2, 4\}$
  
- *los estados recurrentes son*  $\{3, 5, 6\}$
  
- *los estados absorbentes son*  $\{3, 5, 6\}$

Ademas de los proces estacionarios y las cadenas de Markov otros procesos importantes son:

- **Procesos con incrementos independientes estacionarios**
  
- **Martingalas**
  
- **Procesos de renovación**
  
- **Procesos punto**

Una descripción mas detallada de cada uno de estos procesos la podemos encontrar en S. Karllin y H. Taylor [2].

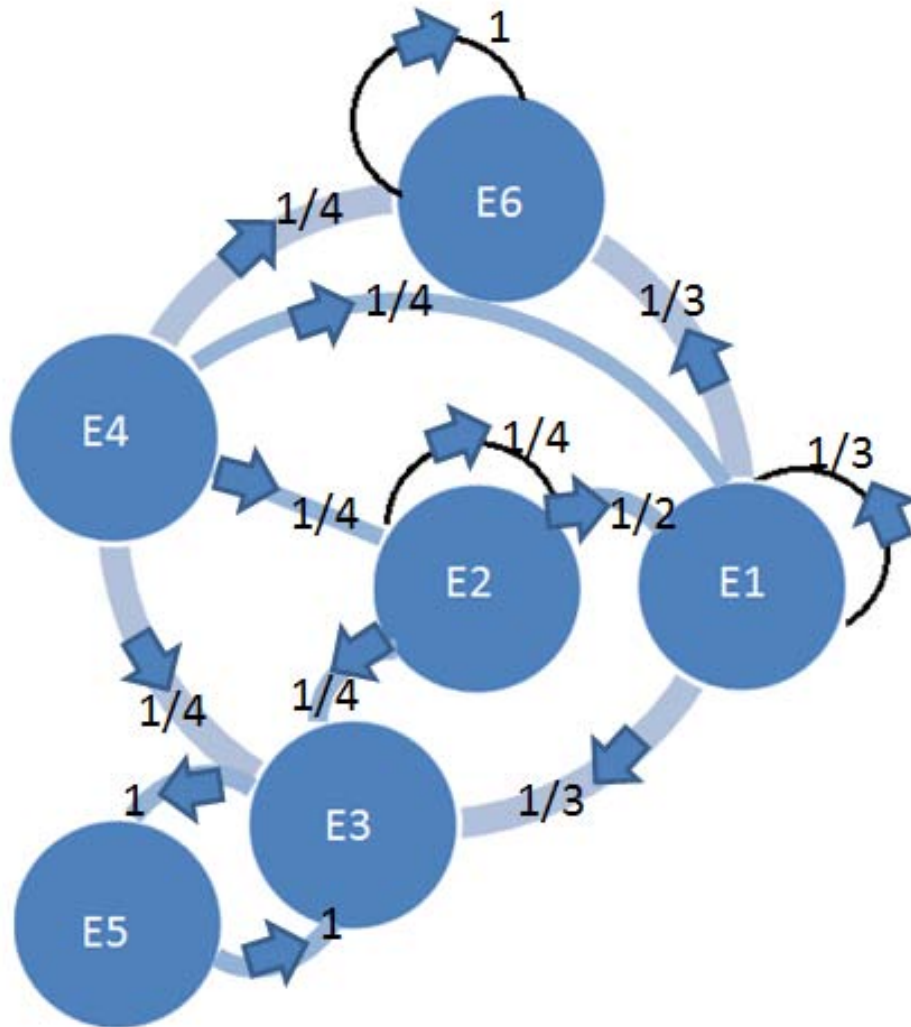


Figura 1.2: Diagrama de transición del ejemplo 1.3.

### 1.3. Conceptos del análisis bayesiano

#### 1.3.1. Distribuciones a priori y a posteriori

Considérese un vector  $Y_{1:n} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$  que contiene las observaciones desde el tiempo  $t = 1$  hasta el tiempo  $t = n$  con densidad  $f_Y(y, \theta), \theta := (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Theta$

En la estimación paramétrica  $\theta$  es el parámetro que nos interesa, el enfoque frecuentista no supone ningún conocimiento previo sobre  $\theta$ , por el contrario el enfoque Bayesiano sí. Este supone que se cuenta con información previa de  $\theta$ , esa información está expresada por medio de una distribución de  $\theta$  llamada distribución a priori.

La distribución a priori se basa en experiencias previas similares o expresa una creencia subjetiva, bajo esta idea a  $\theta$  se le trata como el valor que toma una v.a.  $\Theta$  y una vez observada la muestra  $Y_{1:n} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$  se puede calcular la distribución condicional de  $\Theta$  dado  $Y_{1:n}$ . A ésta se le llama distribución a posteriori

#### Distribución a priori y posteriori.

La densidad  $\pi(\cdot)$  es llamada la distribución a priori de  $\Theta$ . La densidad condicional de  $\Theta$  dado  $Y_{1:n} := (y_1, y_2, \dots, y_n)$  denotada por  $\pi(\theta|y_1, \dots, y_n)$  es llamada la distribución a posteriori de  $\Theta$ .

Usando una generalización del teorema de Bayes podemos obtener la distribución a posteriori (también conocida como distribución a priori o distribución condicional) de  $\Theta$  dado  $Y_{1:n}$  de la siguiente manera

$$\pi(\theta|y) = \frac{\pi(y|\theta)\pi_{\Theta}(\theta)}{\pi(y)}$$

Donde  $\pi(y)$  es la distribución marginal de  $Y$

$$\pi(y) = \int \pi(y|\theta)\pi(\theta) d\theta$$

Para muchas aplicaciones el objetivo principal es pronosticar, por ejemplo la siguiente observación  $Y_{t+1}$ , habiendo observado toda la información al tiempo  $t$ ,  $Y_1 = y_1, \dots, Y_t = y_t$  si somos capaces de especificar la distribución conjunta  $\pi(Y_1, \dots, Y_t) \forall t \geq 1$  el pronóstico bayesiano sería resuelto por:

$$\pi(Y_{t+1}|Y_{1:t})$$

Lograr especificar la distribución conjunta en la realidad es muy difícil, y para que este problema resulte menos complejo se suele condicionar la distribución conjunta en alguna característica  $\theta$  del proceso que genera la información.

Entonces el objeto de interés se vuelve una observación futura  $\hat{Y}$ . Esto se puede lograr con un enfoque Bayesiano calculando la distribución a posteriori de  $\hat{Y}$  dada la información  $y$ , esta distribución es llamada distribución predictiva:

$$\pi(\hat{y}|y) = \int \pi(\hat{y}, \theta|y) d\theta = \int \pi(\hat{y}|\theta, y) \pi(\theta|y) d\theta$$

### 1.3.2. Funciones de pérdida y de riesgo

Se asume que los datos observados  $Y$  son generados por un proceso subyacente  $s$  que no puede ser observado directamente. El objetivo es especificar cómo se generan los datos a partir de sus causas. Esto se expresa en la probabilidad condicional de  $p(Y|s)$  y cualquier información a priori de la distribución sobre las diferentes  $p(s)$ .

Usando el teorema de Bayes podemos especificar esto:

$$\begin{aligned} p(s|Y) &= \frac{p(Y|s)p(s)}{p(Y)} \\ &= \frac{p(Y|s)p(s)}{\int p(Y|s)p(s) ds} \\ &\propto p(Y|s)p(s) \end{aligned}$$

Dadas las observaciones  $Y$ , es necesario dar un  $s$  que mejor describa a los datos, en este sentido la función de pérdida  $l_Y(\hat{s}, s^*)$  cuantifica la pérdida o el costo asociado al usar  $\hat{s}$  cuando la información fue generada por  $s^*$ .

**Ejemplo 1.4.** *Función de pérdida binaria*

$$l_Y(\hat{s}, s^*) = 1 - \delta_{\hat{s}, s^*} = \begin{cases} 1, & \text{si } \hat{s} \neq s^* \\ 0, & \hat{s} = s^* \end{cases}$$

**Ejemplo 1.5.** *Función de pérdida cuadrática*

$$l_Y(\hat{s}, s^*) = (\hat{s} - s^*)^2$$

**Ejemplo 1.6.** *Función de pérdida absoluta*

$$l_Y(\hat{s}, s^*) = |\hat{s} - s^*|$$

La función de pérdida binaria indica que no se pierde nada si se usa el como  $\hat{s}$  el verdadero valor  $s^*$  de otra forma la pérdida sera 1 si se usa un  $\hat{s}$  distinto a  $s^*$ .

La función de pérdida cuadrática y la función de pérdida absoluta incrementaran mientras mas grande sea la magnitud de la diferencia entre  $\hat{s} - s^*$

Asumiendo que se ha hecho una elección apropiada de una función de pérdida, hay que seleccionar  $\hat{s}$  tal que minimice ésta. Dado que no podemos seleccionar un  $\hat{s}$  que considere cada caso particular de la información observada  $Y$ , se selecciona un  $\hat{s}$  que minimice la pérdida promedio.

La función de riesgo es la esperanza de la función de pérdida, en este sentido la pérdida esperada es integrada sobre todas los  $s$  ponderados por sus probabilidades relativas

**Ejemplo 1.7.** *Función de riesgo de pérdida binaria*

$$\begin{aligned} E[1 - \delta_{\hat{s}, s^*}] &= \sum_{s^*} l_Y(\hat{s}, s^*) p(s = s^* | Y) \\ &= \sum_{s^*} (1 - \delta_{\hat{s}, s^*}) p(s = s^* | Y) \\ &= \sum_{s^*} p(s = s^* | Y) - \sum_{s^*} \delta_{\hat{s}, s^*} p(s = s^* | Y) \\ &= 1 - p(s = s^* | Y) \end{aligned}$$

*Esta función es minimizada cuando  $\hat{s}$  es el máximo de  $p(s|Y)$*

**Ejemplo 1.8.** *Función de riesgo de pérdida cuadrática*

$$\begin{aligned}
E[(\hat{s} - s^*)^2] &= \int l_Y(\hat{s}, s^*)p(s = s^*|Y)ds^* \\
&= \int (\hat{s} - s^*)^2p(s = s^*|Y)ds^* \\
&= \hat{s}^2 \int p(s = s^*|Y)ds^* + 2\hat{s} \int s^*p(s = s^*|Y)ds^* + \int s^{*2}p(s = s^*|Y)ds^* \\
&= \hat{s}^2 - 2\hat{s}E[s^*] + E[s^{*2}] \\
&= \hat{s}^2 - 2\hat{s}E[s^*] + E[s^{*2}]^2 + E[(s^* - E[s^*])^2] \\
&= (\hat{s} - E[s^*])^2 + E[(s^* - E[s^*])^2]
\end{aligned}$$

*Esta función es minimizada cuando  $\hat{s}$  es  $E[s]$*

**Ejemplo 1.9.** *Función de riesgo de pérdida absoluta*

$$\begin{aligned}
E[|\hat{s} - s^*|] &= \int l_Y(\hat{s}, s^*)p(s = s^*|Y)ds^* \\
&= \int |\hat{s} - s^*|p(s = s^*|Y)ds^* \\
&= \int_{-\infty}^{\hat{s}} (\hat{s} - s^*)p(s = s^*|Y)ds^* + \int_{\hat{s}}^{\infty} (s^* - \hat{s})p(s = s^*|Y)ds^*
\end{aligned}$$

*Usando el teorema fundamental del cálculo, derivando e igualando a cero encontramos el valor óptimo de  $\hat{s}$*

$$\begin{aligned}
\frac{dE[|\hat{s} - s^*|]}{d\hat{s}} &= \int_{-\infty}^{\hat{s}} p(s^*|Y)ds^* + \int_{\hat{s}}^{\infty} p(s^*|Y)ds^* \\
&= 0
\end{aligned}$$

*Esto implica que esta función es minimizada cuando  $\hat{s}$  es la media de la distribución, es decir  $p(s < s^*|Y) = p(s > s^*|Y)$ .*

## 1.4. Introducción al filtro de Kalman

Un filtro es un término usado para describir un método que permite de manera recursiva la estimación de variables que son inobservables. Algunos filtros son:

- El filtro de Kalman
- El filtro de Hodrick-Prescott <sup>2</sup>
- El filtro de partículas Rao-Blackwell<sup>3</sup>

Sobre el filtro de Kalman, Álvaro Montengro comenta [6, p. 2] *“El filtro de Kalman es un método de estimación cuyos parámetros se corrigen en cada iteración dependiendo del error de predicción que se haya cometido en la iteración anterior.”*

El propósito del filtro es extraer información de una señal, ignorando todo lo demás. La manera de medir qué tan bien se hace esta extracción de información es usando una función de pérdida.

El filtro de Kalman es un estimador lineal y óptimo desde el punto de vista de mínimos cuadrados, ya que si todo el ruido es blanco con media cero entonces el filtro de Kalman minimiza el error cuadrático medio de las variables estimadas.

La teoría del filtrado estocástico comenzó en 1941, sobre esto Petris Petrone y Campagnoli comentan [7, p. 34] *“Kolmogorov(1941) estudió este problema para un proceso estocástico estacionario, usando una representación propuesta por Wold(1938). Wiener(1949) estudió procesos estocásticos a tiempo continuo, reduciendo el problema a la solución de la llamada integral de Wiener-Hopf. Pero los métodos para resolver el problema de Wiener estaban sujetos a muchas limitaciones prácticas y teóricas. Un nuevo enfoque al problema fue dado por Kalman(1960), usando la representación de Bode-Shannon para un proceso aleatorio y el método de estado de transición para analizar sistemas dinámicos. La solución de Kalman, conocida como el*

---

<sup>2</sup>Una descripción de este filtro puede ser encontrada en [4]

<sup>3</sup>Una descripción de este filtro puede ser encontrada en [5, p. 129]



*Filtro de Kalman aplica para procesos aleatorios estacionarios y no estacionarios.”*

El filtro de Kalman y sus variantes han sido aplicadas en sistemas de navegación de misiles, en controles de altitud y ubicación de sistemas satelitales, aprendizaje automático en inteligencia artificial, neurología, etcétera. Pero casi todas las aplicaciones se han dado en el campo de la ingeniería y es hasta mediados de los años ochentas cuando cobra interes entre los estadísticos y empiezan a usarlo, principalmente en campos como la economía y las finanzas.

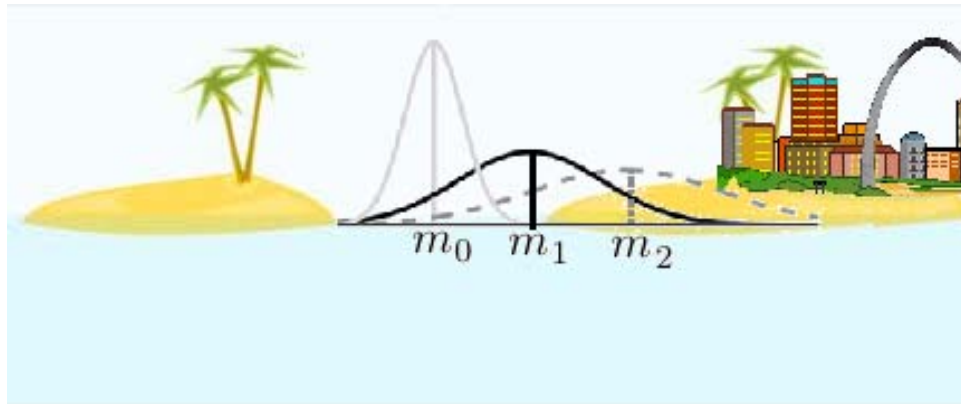


Figura 1.3: Estimaciones iniciales para  $m_t$ ,  $t = 0, 1, 2$  con  $\theta$  estático.

**Ejemplo 1.10.** *Para ilustrar la idea básica del filtro consideraremos el siguiente ejemplo dado en Petris Petrone y Campagnoli [7, p. 35]:*

*Después de un naufragio, hemos quedado en una isla donde  $\theta$  denota la posición de la isla respecto a la costa, afortunadamente por las noches podemos ver las luces de la costa así que tenemos una idea inicial sobre  $\theta$ , entonces queremos saber más sobre  $\theta$  basados en las medidas  $Y_t$  que podamos realizar.*

*Las medidas  $Y_t$  pueden ser modeladas de la siguiente manera:*

$$Y_t = \theta + \epsilon_t \text{ donde las } \epsilon_t \text{ son v.a.i.i.d } \sim N(0, \sigma^2)$$

Ademas suponemos que  $\theta$  y las  $\epsilon_t$  son independientes.

Esta suposición implica que  $Y_t$  es normalmente distribuida ya que la suma de variables aleatorias normales independientes tambien resulta en una distribución normal

Dicho de otra forma:

$Y_1, Y_2, \dots | \theta$  son v.a.i.i.d

Ya que  $E[Y_i] = \theta$  y  $Var[Y_i] = Var[\theta] + \sigma^2$

tambien supongamos que acordamos expresar nuestra idea a priori sobre  $\theta$  como  $\theta \sim N(m_0, C_0)$ , ver Figura 1.1

$m_0$  y  $C_0$  representan los valores iniciales, donde la varianza a priori  $C_0$  puede ser muy grande si la incertidumbre sobre  $m_0$  es demasiada, dadas las observaciones  $y_{1:n}$  que logremos realizar podemos actualizar nuestra opinión sobre  $\theta$  calculando la densidad a posteriori por Bayes:

$$\pi(\theta | y_{1:n})$$

En este sentido, la variable inobservable es  $\theta$ , pero podemos medirla a través de las observaciones  $Y_t$  donde  $\theta$  está contaminada por el error  $\epsilon_t$ .

El filtro de Kalman es la herramienta fundamental para trabajar los modelos dinámicos lineales.

Como Saerkkae lo comenta [5, p. 8] “No es claro si la teoría del filtro de Kalman fue primero o la teoría de los modelos dinámicos lineales llego antes. Y aunque estas teorías fueron originadas a partir de puntos ligeramente distintos, son equivalentes.”

Para ilustrar la idea del componente dinámico, regresemos de nuevo al ejemplo de Petris Petrone y Campagnoli [7, p. 35]:

$\theta$  representa la posición de la isla respecto a la costa, en este ejemplo  $\theta$  es estático, no se mueve en el tiempo, la isla siempre es fija. Pero si consideramos que después del naufragio nos encontramos en un bote salvavidas entonces nos estaríamos moviendo junto con mareas, olas y corrientes y al tiempo  $t$  nos encontraríamos a una posición  $\theta_t$ .

Con este problema especificado bajo un modelo dinámico lineal, al tiempo  $t$  en una iteración el filtro de Kalman se encargará de obtener la siguiente información:

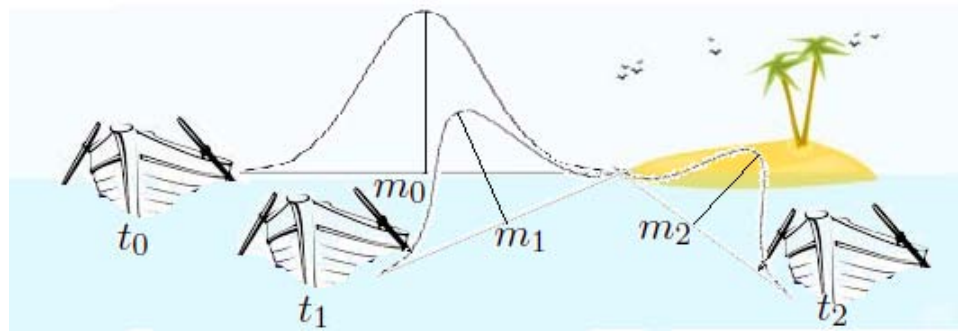


Figura 1.4: Estimaciones iniciales de  $m_t$ ,  $t = 0, 1, 2$ , para  $\theta$  dinámico

- Dada la observación  $Y_{t-1}$  el filtro pronosticará la posición  $\theta_t$
- Dada la observación  $Y_{t-1}$  el filtro pronosticará la siguiente medición para  $Y_t$
- Dada la observación  $Y_t$  el filtro ajustará la posición  $\theta_t$

Los modelos dinámicos lineales son casos especiales de los modelos espacio estado. A pesar de ser conceptualmente simples tienen un margen muy amplio de aplicaciones en series de tiempo.

Respecto a las series de tiempo cabe señalar que el filtro de Kalman junto con los modelos dinámicos lineales ofrecen una perspectiva que contrasta con el enfoque dominante de Box Jenkins, principalmente porque permiten modelar series no estacionarias. Ante lo cual James Durbin menciona las

siguientes diferencias [8, p.7].

Algunas diferencias con la metodología Box Jenkins:

- En la metodología de Box Jenkins los modelos son determinados sólo por los datos sin tener en cuenta su estructura subyacente, los modelos dinámicos lineales ajustan los datos a la estructura del sistema que los generó.
- El enfoque de Box Jenkins necesita eliminar la tendencia y la variación estacional, (estos componentes pueden tener un interés intrínseco) en los modelos dinámicos lineales estos componentes pueden ser estimados directamente.

En Jacques J.F. Commandeur y Siem Jan Koopman [9, p.120] se puede encontrar un análisis muy detallado sobre estos dos enfoques.

## 1.5. Modelo espacio estado básico

El modelo básico de un espacio estado consiste principalmente en las siguientes ecuaciones:

$$y_t = m_t x_t + \epsilon_t \quad (1.5.1)$$

$$x_t = a_t x_{t-1} + w_t \quad (1.5.2)$$

La ecuación (1.3.1) es llamada ecuación de observaciones y la ecuación (1.3.2) es llamada ecuación de transición

Para crear una noción general del uso del filtro se debe ingresar un valor inicial  $x_0$  en la ecuación de transición,  $x_0$  tiene media  $\mu_0$  y desviación estandar  $\sigma_0$ . La ecuación de transición queda como se ve en (1.3.3):

$$x_{1p} = a_1 x_0 + w_1 \quad (1.5.3)$$

Donde  $x_{1p}$  es el valor pronosticado para  $x_1$ .

Ahora  $x_{1p}$  es insertado en la ecuación de medida para obtener un valor pronosticado para  $y_1$  al que llamaremos  $y_{1p}$

$$y_{1p} = m_1(a_1 x_0 + w_1) + \epsilon_1 \quad (1.5.4)$$

En el momento en que  $y_1$  ocurra, se obtendrá el error  $y_{1E}$  apartir de la diferencia  $y_{1E} = y_1 - y_{1p}$ .

El error ahora puede ser incorporado a la predicción de  $x_1$

$$x_{1p-AJUSTADA} = x_{1p} + k_1 y_{1E} \quad (1.5.5)$$

Donde  $k_1$

$$k_1 = \frac{Cov(x_{1p}, y_{1p})}{Var(y_{1p})} \quad (1.5.6)$$

a  $k_1$  se le conoce como la ganancia del filtro.

El siguiente paso es usar  $x_{1p-AJUSTADA}$  en la ecuación de transición y despues empezar el proceso nuevamente.

## Capítulo 2

# Modelos espacio estado y el Filtro de Kalman

### 2.1. Modelo de nivel local

La peculiaridad de este modelo es que cuenta con un componente de nivel al cual se le permite variar en el tiempo. Si este componente fuera fijo en el tiempo para toda  $t$  entonces se le llama modelo de nivel global.

Como el componente de nivel tiene la libertad de variar a través del tiempo, este componente podría ser visto como el equivalente del intercepto en un modelo de regresión lineal clásica. Así como el intercepto determina el nivel de la regresión lineal, el componente de nivel juega el mismo rol en los modelos espacio estado. Su diferencia más importante es que el intercepto en una regresión lineal es constante en el tiempo para todos los puntos es decir es un nivel global que aplica en todo momento y en el modelo de nivel local el componente de nivel está cambiando en el tiempo de manera local y de ahí su nombre.

$$Y_t = \mu_t + v_t \quad v_t \sim N_m(0, V_t) \quad (2.1.1)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + w_t \quad w_t \sim N_p(0, W_t) \quad (2.1.2)$$

La primera ecuación es "la ecuación de observación" la segunda es "la ecuación de medición"

$Y$  es el componente que observamos  $\mu$  es el nivel y es un componente no observabale,  $v$  y  $w$  son los componentes irregulares en el modelos o errores de la observación y el nivel respectivamente.

La ecuación de medición en este modelo es una caminata aleatoria, entonces la dependencia en el tiempo respecto a las observaciones usualmente será más fuerte en  $t$  y  $t + 1$  que en en otros valores

La dependencia con el tiempo se maneja en la ecuación de estado, dejando que al tiempo  $t + 1$  la observación esté en función del estado al tiempo  $t$ . Entonces la observación al tiempo  $t + 1$  es usualmente más similar al valor observado en el tiempo  $t$  que cualquier otro valor previo.

## 2.2. Modelo de tendencia lineal local

El modelo de tendencia lineal local se obtiene apartir del modelo de nivel local pero agregando un componente de pendiente.

Este es un modelo ligeramente más elaborado que tiene dos ecuaciones de estado, una para su componente de nivel y otra para su componente de pendiente  $\beta$ , el cual puede variar en el tiempo y juega el rol de la inclinación de la tendencia en el eje de las abscisas.

Los componentes irregulares  $v_t$ ,  $w_{t,1}$  y  $w_{t,2}$  también se suponen mutuamente independientes, con distribuciones normales y la media respectiva para cada uno es cero.

$$Y_t = \mu_t + v_t \quad v_t \sim N_m(0, V_t) \quad (2.2.1)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + w_{t,1} \quad w_{t,1} \sim N_p(0, \sigma_\mu^2) \quad (2.2.2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{t,2} \quad w_{t,2} \sim N_p(0, \sigma_\beta^2) \quad (2.2.3)$$

El componente de pendiente  $\beta$  puede ser visto como el equivalente al coeficiente de regresión en el modelo de regresión clásico, donde el coeficien-

### 2.3. MODELO DE TENDENCIA LINEAL LOCAL CON VARIACIÓN ESTACIONAL 23

te de regresión determina el ángulo de inclinación de la línea de regresión con respecto al eje de las abscisas, el componente de pendiente también determina el ángulo para este modelo dinámico.

La gran diferencia es que el coeficiente de regresión es fijo, mientras que el componente de pendiente tiene la libertad de cambiar en el tiempo.

### 2.3. Modelo de tendencia lineal local con variación estacional

El efecto estacional puede ser modelado agregando un componente estacional al modelo de nivel local o al modelo de tendencia lineal local.

En contraste con el componente de nivel y el componente de pendiente, donde cada componente requiere una ecuación de estado, el componente de variación estacional requiere  $(s - 1)$  ecuaciones de estado donde  $s$  es la periodicidad de la variación estacional, el primero de los  $(s - 1)$  componentes de estado engloba a todas las demás y los componentes restantes se modelan sin errores.

$$Y_t = \mu_t + \gamma_t + v_t \quad v_t \sim N_m(0, V_t) \quad (2.3.1)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + w_{t,1} \quad w_{t,1} \sim N_p(0, \sigma_\mu^2) \quad (2.3.2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{t,2} \quad w_{t,2} \sim N_p(0, \sigma_\beta^2) \quad (2.3.3)$$

$$\gamma_t = -(\gamma_{t-1} + \gamma_{t-2} + \dots + \gamma_{t-s+2}) + w_t \quad w_t \sim N_p(0, \sigma_\gamma^2) \quad (2.3.4)$$



**Ejemplo 2.1.** *Modelo con un componente trimestral y sin componente de tendencia:*

*el efecto estacional puede ser modelado al agregar un componente de variación estacional a un modelo de nivel local o a un modelo de nivel local con tendencia. en el caso de un efecto trimestral el modelo toma la siguiente forma:*

$$Y_t = \gamma_t + v_t \quad v_t \sim N_m(0, V_t)$$

$$\gamma_{1,t} = -(\gamma_{1,t-1} + \gamma_{2,t-2} + \gamma_{3,t-3}) + w_t \quad w_t \sim N_p(0, \sigma_\gamma^2)$$

$$\gamma_{2,t} = \gamma_{1,t}$$

$$\gamma_{3,t} = \gamma_{2,t}$$

Donde  $\gamma_t = \gamma_{1,t}$  denota el componente de variación estacional y le permite cambiar en el tiempo.

## 2.4. Modelo de tendencia lineal local con variable explicativa

Para incorporar el efecto de una variable de regresión sobre la serie se ocupa el siguiente modelo

$$Y_t = \mu_t + \beta_t x_t + v_t \quad v_t \sim N_m(0, V_t) \quad (2.4.1)$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + w_{t,1} \quad w_{t,1} \sim N_p(0, \sigma_\mu^2) \quad (2.4.2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + w_{t,2} \quad w_{t,2} \sim N_p(0, \sigma_\beta^2) \quad (2.4.3)$$

donde  $x_t$  es la variable de regresión y  $\beta_t$  es su coeficiente para  $t = 1, 2, 3, \dots, n$

Si agregáramos k-variables regresoras entonces tendríamos también que tener una ecuación de estado para cada una

## 2.5. El modelo espacio estado general y el filtro de Kalman

Los modelos espacio estado son especificados por una cadena de estados con distribución normal a priori P-dimensional al tiempo  $t = 0$

$$\theta_0 \sim N_p(m_0, C_0) \quad (2.5.1)$$

y las siguientes ecuaciones apartir de  $t = 1$

$$Y_t = F_t \theta_t + v_t \quad v_t \sim N_m(0, V_t) \quad (2.5.2)$$

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t \quad w_t \sim N_p(0, W_t) \quad (2.5.3)$$

La ecuación (2.5.2) es llamada ecuación de observaciones y la ecuación (2.5.3) es llamada ecuación de transición.

Donde:

- $G_t$  de orden  $p \times p$  es una matriz conocida
- $F_t$  de orden  $m \times p$  es una matriz conocida
- $v_t$  y  $w_t \forall t \geq 1$  son dos secuencias independientes de errores distribuidas normalmente con media cero y matrices de varianzas  $V_t$  y  $W_t$  respectivamente.
- Se asume que  $\theta_0$  es independiente de  $v_t$  y  $w_t$

El modelo también satisface que:

- $\theta_t$  cumple la propiedad de Markov
- Las  $Y_t$  son independientes cuando están condicionadas por  $\theta_t$

-  $Y_t$  sólo depende de  $\theta_t$

Por estos supuestos dados podemos decir entonces que los modelos espacio-estado están completamente especificados por la distribución inicial  $\pi(\theta_0)$  y las distribuciones condicionales  $\pi(\theta_t|\theta_{t-1})$  y  $\pi(y_t|\theta_t) \forall t \geq 1$

$$\pi(\theta_{0:t}, y_{1:t}) = \pi(\theta_0) \prod_{i=1}^t \pi(\theta_i|\theta_{i-1})\pi(y_i|\theta_i) \quad (2.5.4)$$

Observando y retomando los siguientes puntos:

- La distribución inicial de  $\theta_0$  es normal e independiente de  $v_t$  y  $w_t$ .
- Dado que la combinación lineal de variables aleatorias normales, dependientes o independientes, es normal, entonces  $\theta_t$  será normal  $\forall t \geq 1$
- Dado que  $\theta_t$  y  $v_t$  son normales independientes, entonces el vector  $(\theta_t, v_t)$  tiene una distribución normal
- Las  $Y_t$  son independientes condicionadas en  $\theta_t$

Por lo tanto el vector aleatorio  $(\theta_{0:t}, Y_{1:t})$  tiene una distribución normal y tiene la forma de (3.1.4) y consecuentemente cualquier subvector de  $(\theta_{0:t}, y_{1:t})$ , distribuciones marginales y condicionales también serán normales.

### 2.5.1. Distribuciones del filtro de Kalman

Las distribuciones que conforman el filtro de Kalman son las siguientes:

Para la predicción un paso adelante del estado:

$$\pi(\theta_t|y_{1:t-1}) \quad (2.5.5)$$

Para la predicción un paso adelante de una observación:

$$\pi(y_t|y_{1:t-1}) \quad (2.5.6)$$

## 2.5. EL MODELO ESPACIO ESTADO GENERAL Y EL FILTRO DE KALMAN 27

Para la distribución del filtrado del estado:

$$\pi(\theta_t|y_{1:t}) \quad (2.5.7)$$

Todas estas distribuciones son normales por lo visto en la subsección anterior y solo restaría encontrar sus parámetros para tenerlas definidas completamente.

Considérese como distribución inicial  $\theta_{t-1}|y_{1:t-1} \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$

La distribución para la predicción un paso adelante del estado  $\theta_t$  dado  $y_{1:t-1}$  es normal con parámetros.

$$E(\theta_t|y_{1:t-1}) = G_t m_{t-1} = a_t \quad (2.5.8)$$

$$Var(\theta_t|y_{1:t-1}) = G_t C_{t-1} G_t^T + W_t = R_t \quad (2.5.9)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} a_t &= E(\theta_t|y_{1:t-1}) \\ &= E((G_t \theta_{t-1} + w_t)|y_{1:t-1}) \\ &= G_t E(\theta_{t-1}|y_{1:t-1}) \\ &= G_t m_{t-1} \end{aligned}$$

la varianza de la suma de v.a. independientes es la suma de las varianzas de las variables, entonces:

$$\begin{aligned} R_t &= Var(\theta_t|y_{1:t-1}) \\ &= Var(G_t \theta_{t-1} + w_t|y_{1:t-1}) \\ &= Var(G_t \theta_{t-1}|y_{1:t-1}) + Var(w_t|y_{1:t-1}) \\ &= G_t C_{t-1} G_t^T + W_t \end{aligned}$$

la distribución predictiva de  $Y_t$  dado  $y_{1:t-1}$  es normal con parámetros

$$E(Y_t|y_{1:t-1}) = F_t a_t = f_t \quad (2.5.10)$$

$$Var(Y_t|y_{1:t-1}) = F_t R_t F_t^T + V_t = Q_t \quad (2.5.11)$$

Demostración

$$\begin{aligned}
 f_t &= E(Y_t|y_{1:t-1}) \\
 &= E(F_t\theta_t + v_t|y_{1:t-1}) \\
 &= E(F_t\theta_t|y_{1:t-1}) + E(v_t|y_{1:t-1}) \\
 &= F_tE(\theta_t|y_{1:t-1}) \\
 &= F_tG_tm_{t-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_t &= Var(Y_t|y_{1:t-1}) \\
 &= Var(F_t\theta_t + v_t|y_{1:t-1}) \\
 &= Var(F_t\theta_t|y_{1:t-1}) + Var(v_t|y_{1:t-1}) \\
 &= F_tVar(\theta_t|y_{1:t-1})F_t^T + V_t \\
 &= F_t(G_tC_{t-1}G_t^T + W_t)F_t^T + V_t
 \end{aligned}$$

La distribución de filtrado del estado es normal con parámetros

$$E(\theta_t|y_{1:t}) = a_t + R_tF_t^TQ_t^{-1}(Y_t - f_t) = m_t \quad (2.5.12)$$

$$Var(\theta_t|y_{1:t}) = R_t - R_tF_t^TQ_t^{-1}F_tR_t = C_t \quad (2.5.13)$$

Para esta demostración partiremos de la forma que tiene la distribución  $\pi(\theta_t|y_{1:t})$ , ocuparemos la propiedad de Bayes y nos enfocaremos a trabajar con el kernel de la distribución

$$\pi(\theta_t|y_{1:t}) = \pi(\theta_t, y_{1:t})$$

$$\begin{aligned}
\pi(\theta_t | y_{1:t}) &= \frac{\pi(\theta_t, y_{1:t})}{\pi(y_{1:t})} \\
&= \frac{\pi(\theta_t, y_t, y_{1:t-1})}{\pi(y_t, y_{1:t-1})} \\
&= \frac{\pi(y_t | \theta_t, y_{1:t-1}) \pi(\theta_t, y_{1:t-1})}{\pi(y_t | y_{1:t-1}) \pi(y_{1:t-1})} \\
&= \frac{\frac{\pi(y_t, \theta_t, y_{1:t-1})}{\pi(\theta_t, y_{1:t-1})} \pi(\theta_t | y_{1:t-1}) \pi(y_{1:t-1})}{\pi(y_t | y_{1:t-1}) \pi(y_{1:t-1})} \\
&= \frac{\frac{\pi(y_t, y_{1:t-1} | \theta_t) \pi(\theta_t)}{\pi(y_{1:t-1} | \theta_t) \pi(\theta_t)} \pi(\theta_t | y_{1:t-1})}{\pi(y_t | y_{1:t-1})} \\
&= \frac{\frac{\pi(y_t | \theta_t) \pi(y_{1:t-1} | \theta_t)}{\pi(y_{1:t-1} | \theta_t)} \pi(\theta_t | y_{1:t-1})}{\pi(y_t | y_{1:t-1})} \\
&= \frac{\pi(y_t | \theta_t) \pi(\theta_t | y_{1:t-1})}{\pi(y_t | y_{1:t-1})}
\end{aligned}$$

## 30CAPÍTULO 2. MODELOS ESPACIO ESTADO Y EL FILTRO DE KALMAN

Como  $\pi(y_t|y_{1:t-1})$  no depende de  $\theta$  y solo juega el rol de constante normalizadora

$$\pi(\theta_t|y_{1:t}) \propto \pi(y_t|\theta_t)\pi(\theta_t|y_{1:t-1})$$

Donde  $\pi(\theta_t|y_{1:t-1})$  juega el rol de la distribución a priori al tiempo t con una distribución  $N(a_t, R_t)$

$$\begin{aligned}\pi(\theta_t|y_{1:t-1}) &\propto e^{\frac{1}{2}(\theta_t - a_t)^T R_t^{-1} (\theta_t - a_t)} \\ &\propto e^{\frac{1}{2}(\theta_t^T R_t^{-1} \theta_t - 2\theta_t^T R_t^{-1} a_t)}\end{aligned}$$

Y  $\pi(y_t|\theta_t)$  juega el rol de la verosimilitud

$$\begin{aligned}\pi(y_t|\theta_t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |V|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2}(y_t - E[y_t|\theta_t])^T V^{-1} (y_t - E[y_t|\theta_t])} \\ &\propto e^{\frac{1}{2}(y_t - E[y_t|\theta_t])^T V^{-1} (y_t - E[y_t|\theta_t])} \\ &= e^{\frac{1}{2}(y_t - F_t \theta_t)^T V^{-1} (y_t - F_t \theta_t)} \\ &\propto e^{\frac{1}{2}[\theta_t^T (F_t^T V^{-1} F_t) \theta_t - 2\theta_t^T F_t^T V^{-1} y_t]}\end{aligned}$$

Observando la verosimilitud en función de  $\theta_t$  ésta es proporcional a una normal multivariada

$$\pi(y_t|\theta_t) \propto N((F_t^T V^{-1} F_t)^{-1}, (F_t^T V^{-1} F_t)^{-1} F_t^T V^{-1})$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\pi(\theta_t|y_{1:t}) &\propto e^{-\frac{1}{2}[\theta_t^T (F_t^T V^{-1} F_t) \theta_t - 2\theta_t^T F_t^T V^{-1} y_t]} e^{-\frac{1}{2}[\theta_t^T R_t^{-1} \theta_t - 2\theta_t^T R_t^{-1} a_t]} \\ &= e^{-\frac{1}{2}[\theta_t^T (F_t^T V^{-1} F_t) \theta_t - 2\theta_t^T F_t^T V^{-1} y_t + \theta_t^T R_t^{-1} \theta_t - 2\theta_t^T R_t^{-1} a_t]} \\ &= e^{-\frac{1}{2}[\theta_t^T (F_t^T V^{-1} F_t + R_t^{-1}) \theta_t - 2\theta_t^T (F_t^T V^{-1} y_t + R_t^{-1} a_t)]}\end{aligned}$$

De aquí podemos observar el Kernel de una normal multivariada con parámetros:

2.5. EL MODELO ESPACIO ESTADO GENERAL Y EL FILTRO DE KALMAN 31

$$\begin{aligned} C_t &= (R_t^{-1} + F_t^T V^{-1} F_t)^{-1} \\ m_t &= C_t [F_t^T V^{-1} y_t + R_t^{-1} a_t] \end{aligned}$$

$C_t$  puede ser reexpresada de la siguiente manera<sup>1</sup>

$$C_t = R_t - R_t F_t^T (F_t R_t F_t^T + V_t)^{-1} F_t R_t = R_t - R_t F_t^T Q_t^{-1} F_t R_t \quad (2.5.14)$$

Dada esta igualdad y escribiendo el error en el que se incurrió usando la predicción como  $e_t = y_t - f_t$  podemos reescribir  $m_t$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} m_t &= C_t [F_t^T V_t^{-1} y_t + R_t^{-1} a_t] \\ &= C_t [F_t^T V_t^{-1} (F_t F_t^{-1}) y_t + (R_t^{-1} F_t^{-1} y_t - R_t^{-1} F_t^{-1} y_t) + R_t^{-1} a_t] \\ &= C_t [(F_t^T V_t^{-1} F_t + R_t^{-1}) F_t^{-1} y_t - R_t^{-1} F_t^{-1} y_t + R_t^{-1} a_t] \\ &= C_t [C_t^{-1} F_t^{-1} y_t - R_t^{-1} F_t^{-1} y_t + R_t^{-1} a_t] \\ &= F_t^{-1} y_t - C_t R_t^{-1} F_t^{-1} y_t + C_t R_t^{-1} a_t \\ &= F_t^{-1} (e_t + F_t a_t) - C_t R_t^{-1} F_t^{-1} (e_t + F_t a_t) + C_t R_t^{-1} a_t \\ &= F_t^{-1} e_t + F_t^{-1} F_t a_t - C_t R_t^{-1} F_t^{-1} e_t + C_t R_t^{-1} F_t^{-1} F_t a_t + C_t R_t^{-1} a_t \\ &= a_t + F_t^{-1} e_t - C_t R_t^{-1} F_t^{-1} e_t \\ &= a_t + (F_t^{-1} - C_t R_t^{-1} F_t^{-1}) e_t \\ &= a_t + (F_t^{-1} - C_t R_t^{-1} F_t^{-1}) e_t \\ &= a_t + (F_t^{-1} - (R_t - R_t F_t^T Q_t^{-1} F_t R_t) R_t^{-1} F_t^{-1}) e_t \\ &= a_t + R_t F_t^T Q_t^{-1} e_t \\ &= a_t + R_t F_t^T Q_t^{-1} (y_t - F_t a_t) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Sea  $A_{m \times n}$  y  $B_{m \times n}$  matrices no singulares y cualquier  $B_{m \times n}$  entonces se mantiene que  $(A + B E B^t)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (B^T A^{-1} B + E^{-1})^{-1} B^T A^{-1}$



El filtro de Kalman nos permite calcular de manera recursiva estas distribuciones partiendo de la distribución inicial  $\theta_t \sim N(m_0, C_0)$ , después se obtiene  $\pi(\theta_1|y_1)$ , y se procede así recursivamente mientras nuevos datos van llegando.

La distribución condicional de  $\theta_t|y_{1:t}$  resuelve el problema del filtrado, si solo estuviéramos interesados en la estimación puntual de  $\theta_t$  dada la información  $y_{1:t}$ , entonces con respecto a la función cuadrática de pérdida  $L(\theta_t, a) = (\theta_t - a)^T H(\theta_t - a)$  el estimador óptimo es  $m_t$  ya que este minimiza la función de riesgo  $E[(\theta_t - a)^T H(\theta_t - a)|y_{1:t}]$  con respecto a  $a$ . si  $H = I_p$  la pérdida esperada mínima es  $Var(\theta_t|y_{1:t})$ .

La expresión  $m_t$  tiene la forma intuitiva de la media más una corrección dependiendo en qué tanto la nueva observación difiere de la predicción, el ponderador del término de corrección está dado por la siguiente expresión:

$$K_t = R_t F_t^T Q_t^{-1} \quad (2.5.15)$$

A esta expresión se le conoce como la ganancia del filtro, entonces el ponderador de la observación actual  $Y_t$  depende de la varianza de la observación  $V_t$  por medio de  $Q_t$  y  $R_t = Var(\theta_t|y_{1:t-1}) = G_t C_{t-1} G_t^T + W_t$

Sobre los valores iniciales del Filtro en [10, p. 34] se comenta lo siguiente:

*Generalmente, en los modelos espacio estado el valor inicial de la variable no observable es desconocido. Hay dos maneras de resolver este problema. Se puede proveer de esta información basados en consideraciones teóricas, o alguna investigación previa. O estos valores iniciales pueden ser estimados, como usualmente nada se sabe sobre los valores iniciales se usa el inicializado difuso*

2.5. EL MODELO ESPACIO ESTADO GENERAL Y EL FILTRO DE KALMAN 33

El inicializado difuso consiste en tomar  $m_0 = 0$  y  $C_0 = nI_m$  donde  $n$  es un número muy grande

Respecto los valores que toman  $V_t$  y  $W_t$  en J. Durbin y S. J. Koopman [10, p.170] se revisan algunos métodos numéricos, para estos cálculos, desde la simple estimación por máxima verosimilitud a la aplicación el algoritmo EM.

La manera en la que se debe aplicar el filtro de Kalman se describe en la siguiente tabla:

Se ingresan los valores iniciales	$m_0$ y $C_0$
Con los últimos valores de $m_0$ y $C_0$ obtenemos los parámetros pronosticados de las variables no observables	$a_1$ y $R_1$
Con los parámetros pronosticados de la variable no observable se pronostican los parámetros de la siguiente observaciones	$f_1$ y $Q_1$
Cuando la siguiente observación ocurra se calcula inmediatamente el error de medición	$y_1 - f_1$
Dada esta última observación se calibran los parámetros de la variable no observada y empieza el ciclo nuevamente	$m_1$ y $C_1$

Cuadro 2.1: Descripción del uso del filtro de Kalman

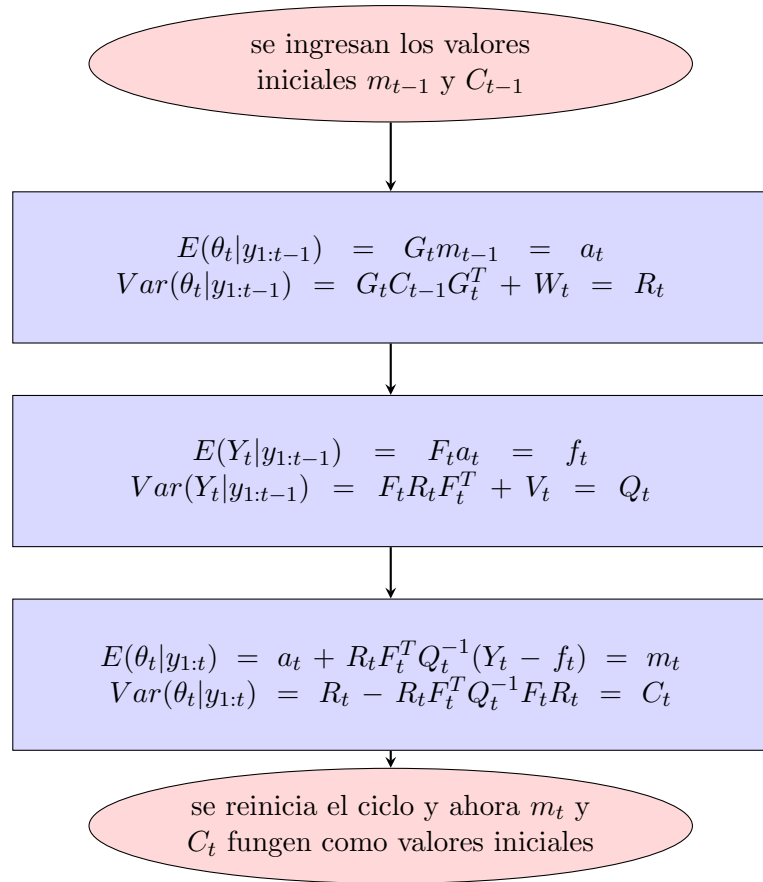


Figura 2.1: Diagrama de uso para el filtro de kalman

## Capítulo 3

# Aplicaciones

### 3.1. Modelos ARIMA

A pesar del contraste de enfoques entre los modelos espacio-estado y los modelos ARIMA, estos últimos pueden ser representados en una forma modelo espacio-estado y por lo tanto se puede hacer uso del filtro de Kalman.

Expresando a un modelo  $ARIMA(p, 0, q)$  en su forma  $ARMA(p, q)$  no estacionaria

$$y_t = \sum_{j=1}^r \phi_j y_{t-j} + \zeta_t + \sum_{j=1}^{r-1} \vartheta_j \zeta_{t-j}, t = 1, \dots, n \quad (3.1.1)$$

donde  $r = \max(p, q + 1)$

$$F_t = (1, 0, 0, 0, \dots, 0) \quad (3.1.2)$$

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^r \phi_j y_{t-j+1} + \zeta_t + \sum_{j=1}^{r-1} \vartheta_j \zeta_{t-j+1} \\ \sum_{j=3}^r \phi_j y_{t-j+2} + \zeta_t + \sum_{j=2}^{r-1} \vartheta_j \zeta_{t-j+2} \\ \vdots \\ \phi_r y_{t-1} + \vartheta_{r-1} \zeta_t \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \phi_1 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & I_{r-1} & \\ \phi_{r-1} & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \phi_r & \vdots & 0 & \end{pmatrix} \theta_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_{r-1} \end{pmatrix} \zeta_t \quad (3.1.4)$$

Esto junto con la ecuación de medición  $y_t = F_t \theta_t$  es equivalente a (3.1.1) pero en su forma espacio estado

### 3.2. Coeficientes dinámicos en el modelo CAPM

El CAPM (Capital Asset Pricing Model) es una de las herramientas para estimar el riesgo y retorno más usadas actualmente, el concepto subyacente del CAPM es que los inversionistas son premiados solo por la porción de riesgo que no es diversificable. Este concepto de riesgo no diversificable está dado por Beta, al cual está ligado el retorno esperado.

En otras palabras el modelo del CAPM infiere que, si el riesgo de una inversión en un activo es mayor, se tendrá un retorno mayor de dicha empresa para compensar el aumento de riesgo, y el exceso de ganancia de un activo se expresa en la función de la ganancia de cierta cartera de mercado, el cual es ajustado por beta que expresa como está relacionado el riesgo del activo con el riesgo de mercado.

En el modelo clásico del CAPM Beta es calculada por mínimos cuadrados y una de las pruebas principales que se le aplican son para verificar su estabilidad en el tiempo.

Si se emplea el filtro de Kalman para estimar Beta, esta beta será una estimación más sensible a los cambios que ocurran en el mercado.

El objetivo principal del siguiente ejercicio es mostrar el uso del algoritmo en la estimación de Beta usando datos reales, para el caso de grupo carso, el índice de mercado usado es el IPC y la tasa libre de riesgo empleada es la tasa CTE28 todas estas series corresponden al periodo 3 de enero del 2008 al 31 de octubre del 2010, para el caso de la tasa CTE28 se usó de manera FLAT actualizándose cada martes dentro de la serie, para contar

con la misma periodicidad de los datos los días donde la bolsa mexicana de valores no abrió fueron retirados de la serie.

La notación usada para el CAPM es la siguiente:

$$E(r_i) = r_f + \beta(E[r_m] - r_f) \quad (3.2.1)$$

donde:

- $E(r_i)$  es la tasa de rendimiento esperada
- $r_f$  es la tasa libre de riesgo
- $r_m$  es la tasa de mercado
- $\beta$  coeficiente beta del instrumento

Usando el exceso de rendimiento

$$R_i = r_i - r_f \quad (3.2.2)$$

$$R_m = r_m - r_f \quad (3.2.3)$$

podemos reescribir el modelo de la siguiente manera:

$$E[R_i] = \beta E[R_m] \quad (3.2.4)$$

Esta beta usualmente es calculada bajo mínimos cuadrados con el siguiente modelo:

$$R_{i,t} = \alpha_{i,t} + \beta_{i,t} R_{m,t} + e_t \quad e_{i,t} \sim N(0, \sigma_e^2) \quad (3.2.5)$$

A esta expresión podemos ajustarle un modelo espacio-estado. En este ejercicio, trabajaremos con 2 ecuaciones de transición, una para  $\alpha_t$  y otra para  $\beta_t$ , quedando definidas las ecuaciones de transición de la siguiente manera:

$$\alpha_t = \alpha_{t-1} + \eta_{1,t} \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.2.6)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_{2,t} \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2) \quad (3.2.7)$$

Para ejemplificar el uso del filtro de Kalman, usaremos los rendimientos de grupo Carso en el 2008, como tasa libre de riesgo usaremos la tasa cetes

28 y como tasa de mercado usaremos el IPC, se ilustrará el uso del algoritmo para la primera iteración y después los cálculos se realizarán con la ayuda de R.

Reescribiendo las ecuaciones (3.1.4),(3.1.5) y (3.1.6) de forma matricial como en (2.5.2) y (2.5.3) podemos escribir el modelo CAPM de la siguiente forma:

$$R_{i,t} = (1 \quad R_{m,t}) \times \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + e_t \quad (3.2.8)$$

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{1,t-1} \\ \eta_{2,t-1} \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

Donde los elementos de (2.5.2) y (2.5.3) estan dados por:

$$Y_t = R_{i,t} \quad (3.2.10)$$

$$\theta_t = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

$$F_t = (1 \quad R_{m,t}) \quad (3.2.12)$$

$$v_t = e_t \quad (3.2.13)$$

$$G_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.14)$$

$$W_t = \begin{pmatrix} \eta_{1,t-1} & 0 \\ 0 & \eta_{2,t-1} \end{pmatrix} \quad (3.2.15)$$

Además para inicializar el filtro supondremos los siguientes valores:

$$W_t = \begin{pmatrix} 5,154963e - 10 & 0 \\ 0 & 9,614411e - 07 \end{pmatrix} \quad (3.2.16)$$

$$V_t = 0,0003015311 \quad (3.2.17)$$

$$m_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

$$c_0 = \begin{pmatrix} 1e+07 & 0 \\ 0 & 1e+07 \end{pmatrix} \quad (3.2.19)$$

Estos valores iniciales fueron estimados en R tomando en cuenta las primeras 11 observaciones y haciendo uso del algoritmo EM.

Por (2.5.8) y (2.5.9) tenemos que:

$$a_1 = G_1 m_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.20)$$

$$R_1 = G_1 C_0 G_1^T + W = \begin{pmatrix} 1e+07 & 0 \\ 0 & 1e+07 \end{pmatrix} \quad (3.2.21)$$

Por (2.5.10) y (2.5.11) tenemos

$$f_1 = F_1 a_0 = (0) \quad (3.2.22)$$

$$Q_1 = F_1 R_1 F_1^T + V = (10000000,213) \quad (3.2.23)$$

Por (2.5.12) y (2.5.13) tenemos

$$m_1 = a_1 + R_1 F_1^T Q_1^{-1} e_1 = \begin{pmatrix} -0,005 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.24)$$

$$C_1 = R_1 - R_1 F_1^T Q_1^{-1} F_1 R_1 = \begin{pmatrix} 0,213 & 1458,890 \\ 1458,890 & 9999999,787 \end{pmatrix} \quad (3.2.25)$$

Esta expresión es la ganancia del filtro  $R_1 F_1^T Q_1^{-1}$

Con los valores de  $m_1$  y  $C_1$  se da inicio a la iteración 2



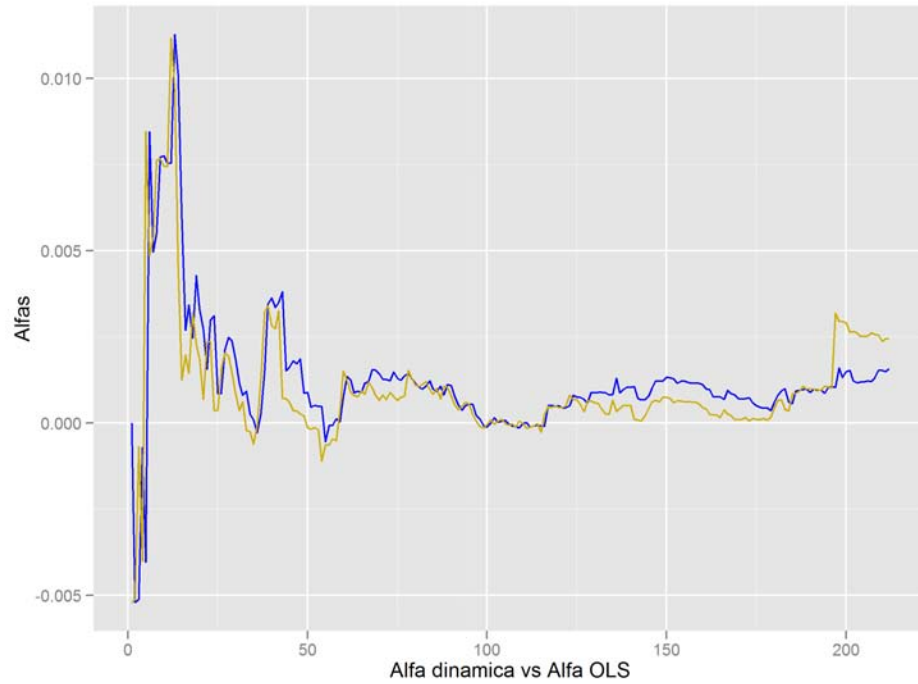


Figura 3.1: Alfas dinamicas y alfas por minimos cuadrados (OLS)

En la figura 3.1 observamos que el alfa dinámico comparado contra el alfa calculado por mínimos cuadrados es muy similar, alfa es el componente de nivel en ambos metodos

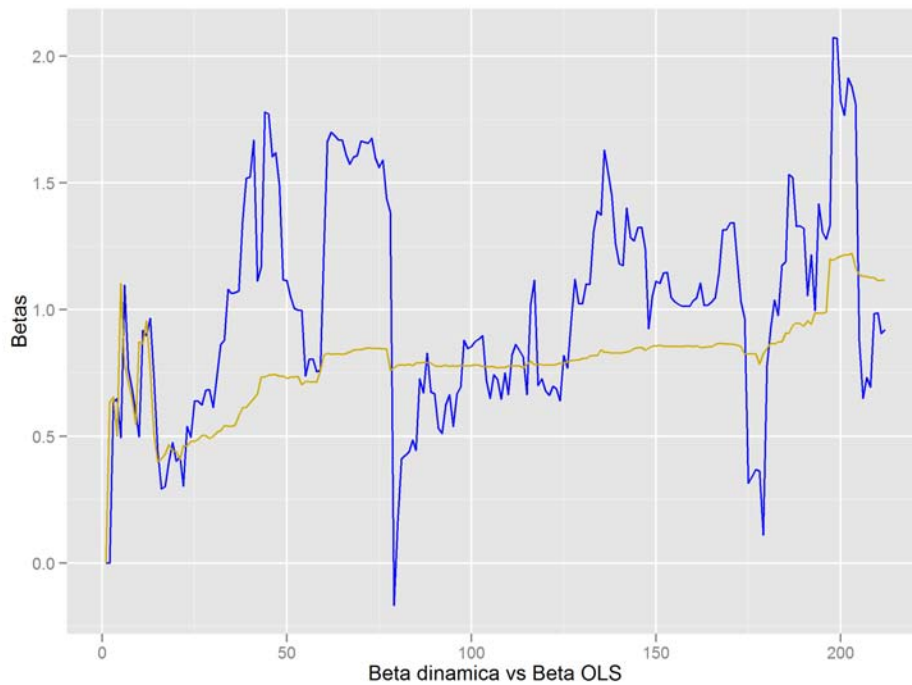


Figura 3.2: betas dinamicas y betas por minimos cuadrados (OLS)

En la figura 3.2 se muestra la beta dinámica contra la beta de los mínimos cuadrados, esta gráfica a diferencia de lo que ocurre con alfa si muestra bastante diferencia entre el cálculo por ambos métodos, la sensibilidad de beta es captada de mejor manera cuando se usa el filtro de Kalman

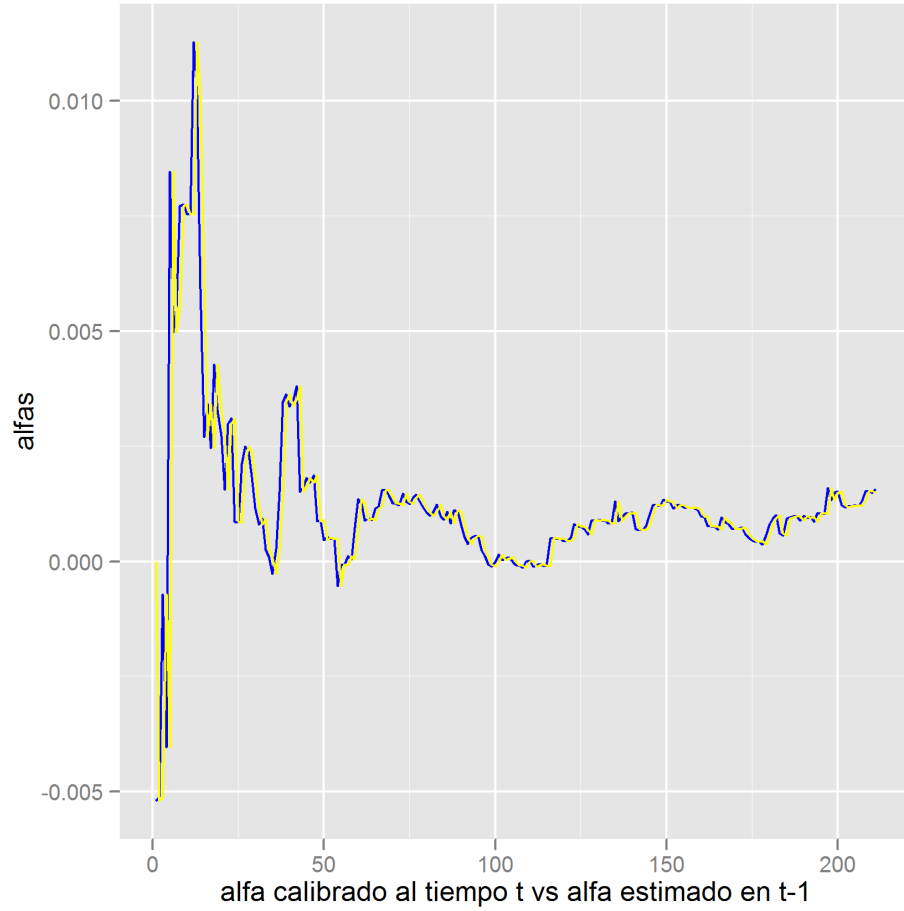


Figura 3.3: Alfa calibrado y alfa estimado

En la figura 3.3 se observa como el alfa estimado al tiempo  $t - 1$  contra el alfa calibrado al tiempo  $t$  muestra muy poca variación

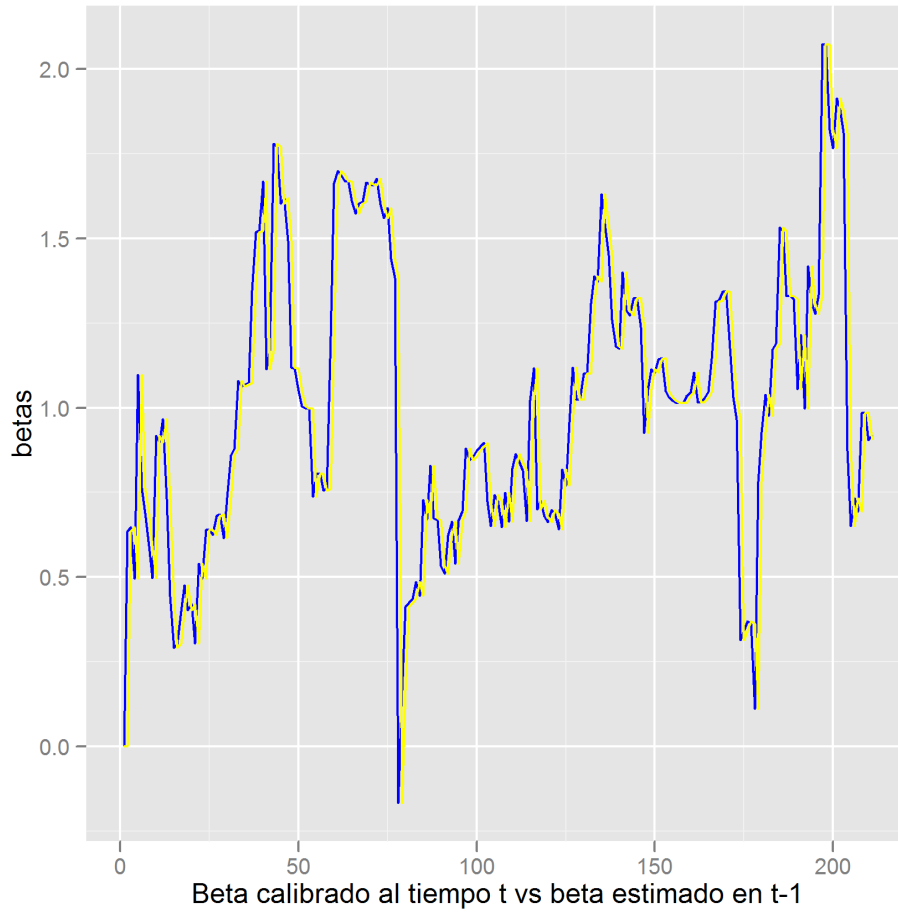


Figura 3.4: beta calibrada y beta estimada

En la figura 3.4 se observa como la beta estimada al tiempo  $t - 1$  contra la beta calibrada al tiempo  $t$  muestra muy poca variación



## Capítulo 4

# Conclusiones

En el desarrollo de este trabajo se revisaron cuidadosamente ciertos temas clave concernientes a las áreas de procesos estocásticos y análisis bayesiano y sin necesidad de abordar profundamente en estas disciplinas (en dónde se encuentran las bases teóricas para la derivación del filtro de Kalman) los conceptos revisados fueron usados para derivar las distribuciones del filtro de Kalman esto se realizó a través del kernel de las distribuciones, en otras palabras haciendo uso de la familia conjugada normal, se dio un énfasis especial en la derivación de la distribución del filtrado del estado ya que esta no es tan simple de entender a primera vista y la literatura existente al respecto obvia esta parte.

Los modelos espacio estado más importantes fueron presentados a modo de que el lector pueda utilizarlos para modelar series con un enfoque estructural dada la flexibilidad y relativa facilidad para poder usarlos esto ejemplificándolo con la adaptación de un modelo box jenkins en la forma espacio estado.

El uso del filtro de Kalman fue ejemplificado haciendo uso de un modelo espacio estado que incorpora una variable explicativa, datos reales fueron trabajados para el modelo del CAPM, de este aprendimos dos puntos de bastante relevancia:

- la aplicación a un modelo financiero bastante extendido.
- la incorporación de dos ecuaciones de transición y su tratamiento siguiendo el camino mostrado en el capítulo 2, para poder estimar la

posición de los parámetros al tiempo  $t$  y poder hacer el mejor pronóstico para el tiempo  $t + 1$ .

Es importante resaltar la incorporación de dos ecuaciones de transición ya que este ejemplo no es trivial y muestra la técnica para incorporar a un modelo  $n$  ecuaciones más de transición.

Aun que el filtro de Kalman fue aplicado al CAPM este algoritmo puede aplicarse a cualquier análisis de datos que incluya un modelado a través del tiempo, los coeficientes dinámicos son una de muchas aplicaciones que puede haber en la utilización del filtro de Kalman.

Los cálculos y gráficas presentados fueron obtenidas en R, aunque SAS y STATA incorporan módulos para poder tratar el filtro de Kalman, R fue usado por que es código abierto, de uso muy extendido y de fácil acceso a la población universitaria.

# Apéndices





## Apéndice A

# Código en R usado para los cálculos de los coeficientes del CAPM

```
library(dlm)
library(ggplot2)

"### lectura del archivo"

tcapm<-read.csv("C:/Users/Documents/CAPM_data.csv", header = TRUE)

"### contiene 6 variables"
"### tcapm$DATE"
"### tcapm$GPO_CARSO"
"### tcapm$IPC"
"### tcapm$CTE28"

"### serie de grupo carso menos cte28 (exceso)"
"### tcapm$A_e"

"### serie del IPC menos cte28 (exceso)"
"### tcapm$M_e"

"### cálculo de la beta por minimos cuadrados"
mc<-coef(lm(tcapm$A_e~tcapm$M_e))

"### cálculo de parámetros por EM"

buildCapm <- function(u) {
  dlmModReg(tcapm$M_e, dV = exp(u[1]), dW = exp(u[2 : 3]))
}

outMLE <- dlmMLE(tcapm$A_e, parm = rep(0, 3), buildCapm)
```

## 50 APÉNDICE A. CÓDIGO EN R USADO PARA LOS CÁLCULOS DE LOS COEFICIENTES D

```

exp(outMLE$par)
outMLE$value
mod <- buildCapm(outMLE$par)

"### modelo ajustado con los parámetros calculados previamente"

mod <- dlmModReg(tcapm$M_e, dV = 0.0005202024,
  dW = c(3.841761e-13, 0.03556805),
  m0 = c(0,0),
  CO = diag(c(1e+07,1e+07)))

outF <- dlmFilter(tcapm$A_e, mod)

"### últimos parámetros estimados"
outF$m[1 + length(tcapm$A_e), ]

"### Elementos del modelo "

"### outF[1] = $y"
"### outF[2] = outF$mod contiene elementos del modelo"
"### outF$mod$FF"
"### outF$mod$V"
"### outF$mod$GG"
"### outF$mod$W"
"### outF$mod$JFF"
"### outF$mod$X"
"### outF$mod$m0"
"### outF$mod$CO"

"### outF[3] = outF$m **** coincide con calculos manuales"
"### outF[4] = outF$U.C"
"### outF[5] = outF$D.C"
"### outF[6] = outF$a **** coincide con calculos manuales"
"### outF[7] = outF$U.R"
"### outF[8] = outF$D.R"
"### outF[9] = outF$f **** coincide con calculos manuales"

write.table(outF$m, file = "capm_dlm_m.csv", sep=",")

"### la siguiente serie contiene los valores de la linea en"
"### donde fueron calculadas las betas por minimos cuadrados"
"### cada vez en el tiempo, es decir cada punto representa"
"### en donde estaria el valor si el tiempo considerado"
"### hubiera sido de 1 a t"

betas_minimos<-rep(1, 212)
alphas_minimos<-rep(1, 212)

for (i in 1:212){
  Mini<-coef(lm(tcapm$A_e[1:i]~tcapm$M_e[1:i]))
  alphas_minimos[i]<-Mini[1]
  betas_minimos[i]<-Mini[2]
}

```

```

betas_minimos[1]<-0
se<-seq(212)

"### se construyen los data frames para poder graficar con ggplot2"

dfa = data.frame(se, outF$m[,1], alphas_minimos)
dfb = data.frame(se, outF$m[,2], betas_minimos)

colnames(dfa)
colnames(dfb)

"### esta grafica muestra los valores de los cof dinámicos vs betas por minimos
cuadrados"

pb<-ggplot(dfb, aes(x=se))+
  geom_line(aes(y=outF$m[,2]), colour="blue")+
  geom_line(aes(y=betas_minimos), colour="gold3")+
  xlab("Beta dinamica vs Beta OLS")+
  ylab("Betas")

pa<-ggplot(dfa, aes(x=se))+
  geom_line(aes(y=outF$m[,1]), colour="blue")+
  geom_line(aes(y=alphas_minimos), colour="gold3")+
  xlab("Alfa dinamica vs Alfa OLS")+
  ylab("Alfas")+
  ylim(-.003, .005)

"### codigo para graficar los valores de los parámetros estimados vs parámetros
calibrados"

se2<-seq(211)
am<-outF$m[2:212,1]
bm<-outF$m[2:212,2]
aa<-outF$a[1:211,1]
ba<-outF$a[1:211,2]

df2=data.frame(se2,am,bm,aa,ba)

p1<-ggplot(df2, aes(x=se2))+
  geom_line(aes(y=am), colour="blue")+
  geom_line(aes(y=aa), colour="yellow")+
  labs(title = "New plot title")

p<-ggplot(df2, aes(x=se2))+
  geom_line(aes(y=bm), colour="blue")+
  geom_line(aes(y=ba), colour="yellow")+
  labs(title = "New plot title")

c<-p + xlab("Beta calibrado al tiempo t vs beta estimado en t-1") + ylab("betas")
c1<-p1 + xlab("alfa calibrado al tiempo t vs alfa estimado en t-1") + ylab("alfas")

```



## Apéndice B

# Tabla de los datos para el CAPM

Los datos para grupo Carso y el IPC corresponden al exceso de retorno.

$t$	FECHA	GPO CARSO	IPC	CTE28	A e	M e
1	03/01/2008	0.000574383	0.005633	0.005778889	-0.005204506	-0.000145889
2	04/01/2008	-0.014925373	-0.01881	0.005778889	-0.020704262	-0.024588889
3	07/01/2008	0.005827506	-0.005839	0.005778889	4.86E-05	-0.011617889
4	08/01/2008	-0.003476246	0.004093	0.005778889	-0.009255135	-0.001685889
5	09/01/2008	0.040116279	0.004734	0.005778889	0.03433739	-0.001044889
6	10/01/2008	0.019005031	0.023518	0.005771111	0.01323392	0.017746889
7	11/01/2008	0.003291278	-0.011894	0.005771111	-0.002479833	-0.017665111
8	14/01/2008	0.025150355	-0.004051	0.005771111	0.019379244	-0.009822111
9	15/01/2008	0.0032	-0.022568	0.005771111	-0.002571111	-0.028339111
10	16/01/2008	-0.038277512	-0.022112	0.005771111	-0.044048623	-0.027883111
11	17/01/2008	-0.011608624	-0.023585	0.005763333	-0.017371957	-0.029348333
12	18/01/2008	0.04082774	0.000568	0.005763333	0.035064407	-0.005195333
13	21/01/2008	-0.02041913	-0.053491	0.005763333	-0.026182463	-0.059254333
14	22/01/2008	0.024136039	0.06359	0.005763333	0.018372706	0.057826667
15	23/01/2008	-0.016068559	0.027055	0.005763333	-0.021831892	0.021291667
16	24/01/2008	0.019052803	0.010311	0.005747778	0.013305025	0.004563222
17	25/01/2008	-0.013888889	-0.018821	0.005747778	-0.019636667	-0.024568778
18	28/01/2008	0.037378115	0.013843	0.005747778	0.031630337	0.008095222
19	29/01/2008	0	0.018193	0.005747778	-0.005747778	0.012445222
20	30/01/2008	-0.002088773	0.001162	0.005747778	-0.007836551	-0.004585778
21	31/01/2008	-0.00837258	0.017558	0.005778889	-0.014151469	0.011779111

22	01/02/2008	0.044854881	0.022098	0.005778889	0.039075992	0.016319111
23	05/02/2008	-0.015151515	-0.045632	0.005778889	-0.020930404	-0.051410889
24	06/02/2008	-0.048205128	-0.005614	0.005778889	-0.053984017	-0.011392889
25	07/02/2008	0.006465517	0.005694	0.005771111	0.000694406	-7.71E-05
26	08/02/2008	0.034261242	0.003451	0.005771111	0.028490131	-0.002320111
27	11/02/2008	0.025879917	0.02144	0.005771111	0.020108806	0.015668889
28	12/02/2008	0.003531786	0.002793	0.005771111	-0.002239325	-0.002978111
29	13/02/2008	0.000502765	0.01513	0.005771111	-0.005268346	0.009358889
30	14/02/2008	-0.018592965	-0.005727	0.005786667	-0.024379632	-0.011513667
31	15/02/2008	-0.020481311	-0.013525	0.005786667	-0.026267978	-0.019311667
32	18/02/2008	0.017773131	0.014869	0.005786667	0.011986464	0.009082333
33	19/02/2008	-0.032357473	-0.009332	0.005786667	-0.03814414	-0.015118667
34	20/02/2008	0.007430998	0.011227	0.005786667	0.001644331	0.005440333
35	21/02/2008	-0.006849315	0.004684	0.005778889	-0.012628204	-0.001094889
36	22/02/2008	0.022811671	0.005704	0.005778889	0.017032782	-7.49E-05
37	25/02/2008	0.054979253	0.014701	0.005778889	0.049200364	0.008922111
38	26/02/2008	0.077679449	0.008851	0.005778889	0.07190056	0.003072111
39	27/02/2008	0.016423358	0.006507	0.005778889	0.010644469	0.000728111
40	28/02/2008	-0.026481149	-0.009673	0.005771111	-0.03225226	-0.015444111
41	29/02/2008	-0.027662517	-0.040223	0.005771111	-0.033433628	-0.045994111
42	03/03/2008	0.036036036	0.021031	0.005771111	0.030264925	0.015259889
43	04/03/2008	-0.124485126	-0.008995	0.005771111	-0.130256237	-0.014766111
44	05/03/2008	0.002613696	0.000555	0.005771111	-0.003157415	-0.005216111
45	06/03/2008	-0.018769552	-0.019138	0.005771111	-0.024540663	-0.024909111
46	07/03/2008	-0.012221041	-0.003632	0.005771111	-0.017992152	-0.009403111
47	10/03/2008	-0.009144701	-0.014171	0.005771111	-0.014915812	-0.019942111
48	11/03/2008	0.032030402	0.04463	0.005771111	0.026259291	0.038858889
49	12/03/2008	-0.005786428	-0.006203	0.005771111	-0.011557539	-0.011974111
50	13/03/2008	-0.002116402	0.014332	0.005794444	-0.007910846	0.008537556
51	14/03/2008	-0.018027572	-0.022037	0.005794444	-0.023822016	-0.027831444
52	18/03/2008	0.01511879	0.016078	0.005794444	0.009324346	0.010283556
53	19/03/2008	-0.014361702	-0.01505	0.005778889	-0.020140591	-0.020828889
54	24/03/2008	-0.024284943	0.01936	0.005778889	-0.030063832	0.013581111
55	25/03/2008	0.032079646	0.011707	0.005778889	0.026300757	0.005928111
56	26/03/2008	0.002679528	0.002541	0.005778889	-0.003099361	-0.003237889
57	27/03/2008	0.010154997	-0.002336	0.005778889	0.004376108	-0.008114889
58	28/03/2008	0	0.00343	0.005778889	-0.005778889	-0.002348889
59	31/03/2008	0.060846561	0.027354	0.005778889	0.055067672	0.021575111
60	01/04/2008	0.077805486	0.028295	0.005778889	0.072026597	0.022516111
61	02/04/2008	-0.024062934	-0.010061	0.005778889	-0.029841823	-0.015839889

62	03/04/2008	-0.012328118	0.007047	0.005786667	-0.018114785	0.001260333
63	04/04/2008	-0.007681229	-0.004552	0.005786667	-0.013467896	-0.010338667
64	07/04/2008	0.003870343	0.005391	0.005786667	-0.001916324	-0.000395667
65	08/04/2008	0.013493976	0.00036	0.005786667	0.007707309	-0.005426667
66	09/04/2008	-0.014265335	-0.00974	0.005786667	-0.020052002	-0.015526667
67	10/04/2008	0.030390738	0.00736	0.005802222	0.024588516	0.001557778
68	11/04/2008	-0.020131086	-0.010948	0.005802222	-0.025933308	-0.016750222
69	14/04/2008	-0.017200191	-0.003517	0.005802222	-0.023002413	-0.009319222
70	15/04/2008	-0.002916869	0.005882	0.005802222	-0.008719091	0.000079778
71	16/04/2008	0.025353486	0.017028	0.005802222	0.019551264	0.011225778
72	17/04/2008	-0.011887779	-0.003893	0.005786667	-0.017674446	-0.009679667
73	18/04/2008	0.01732435	0.000305	0.005786667	0.011537683	-0.005481667
74	21/04/2008	0.001892148	0.009415	0.005786667	-0.003894519	0.003628333
75	22/04/2008	-0.009442871	-0.001724	0.005786667	-0.015229538	-0.007510667
76	23/04/2008	0.0042898	-0.005984	0.005786667	-0.001496867	-0.011770667
77	24/04/2008	0.001898434	-0.003195	0.005786667	-0.003888233	-0.008981667
78	25/04/2008	0.070582662	-0.023222	0.005786667	0.064795995	-0.029008667
79	28/04/2008	-0.027876106	-0.012436	0.005786667	-0.033662773	-0.018222667
80	29/04/2008	-0.026399636	-0.011519	0.005786667	-0.032186303	-0.017305667
81	30/04/2008	-0.000467508	0.000356	0.005778889	-0.006246397	-0.005422889
82	02/05/2008	0.013096352	0.008918	0.005778889	0.007317463	0.003139111
83	05/05/2008	0.018928901	0.013336	0.005778889	0.013150012	0.007557111
84	06/05/2008	-0.008155868	0.008545	0.005778889	-0.013934757	0.002766111
85	07/05/2008	-0.026039287	-0.014773	0.005778889	-0.031818176	-0.020551889
86	08/05/2008	0.018292683	-0.000331	0.005778889	0.012513794	-0.006109889
87	09/05/2008	-0.029018885	-0.002524	0.005778889	-0.034797774	-0.008302889
88	12/05/2008	0.034629981	-0.001206	0.005778889	0.028851092	-0.006984889
89	13/05/2008	0.005960569	0.008161	0.005778889	0.00018168	0.002382111
90	14/05/2008	-0.005013674	0.014542	0.005778889	-0.010792563	0.008763111
91	15/05/2008	-0.012368301	0.006587	0.005786667	-0.018154968	0.000800333
92	16/05/2008	-0.015306122	-0.001776	0.005786667	-0.021092789	-0.007562667
93	19/05/2008	0.017899199	0.009828	0.005786667	0.012112532	0.004041333
94	20/05/2008	0.00740398	-0.008499	0.005786667	0.001617313	-0.014285667
95	21/05/2008	-0.013780432	-0.012691	0.005786667	-0.019567099	-0.018477667
96	22/05/2008	-0.022356777	0.003843	0.005786667	-0.028143444	-0.001943667
97	23/05/2008	-0.024297284	-0.005664	0.005786667	-0.030083951	-0.011450667
98	26/05/2008	-0.006347656	0.007913	0.005786667	-0.012134323	0.002126333
99	27/05/2008	-0.001474201	0.003183	0.005786667	-0.007260868	-0.002603667
100	28/05/2008	0.015748031	0.007411	0.005786667	0.009961364	0.001624333
101	29/05/2008	0.019864341	0.006011	0.005786667	0.014077674	0.000224333



102	30/05/2008	-0.007125891	0.004341	0.005786667	-0.012912558	-0.001445667
103	02/06/2008	0.003349282	-0.01061	0.005786667	-0.002437385	-0.016396667
104	03/06/2008	0.006676204	-0.004538	0.005786667	0.000889537	-0.010324667
105	04/06/2008	-0.014211274	-0.001414	0.005786667	-0.019997941	-0.007200667
106	05/06/2008	0.002883229	0.008837	0.005794444	-0.002911215	0.003042556
107	06/06/2008	-0.006708194	-0.018185	0.005794444	-0.012502638	-0.023979444
108	09/06/2008	-0.015436565	-0.006922	0.005794444	-0.021231009	-0.012716444
109	10/06/2008	0.020088192	-0.001118	0.005794444	0.014293748	-0.006912444
110	11/06/2008	-0.021133525	-0.014649	0.005794444	-0.026927969	-0.020443444
111	12/06/2008	-0.014229637	0.000959	0.00581	-0.020039637	-0.004851
112	13/06/2008	0.003982081	-0.002033	0.00581	-0.001827919	-0.007843
113	16/06/2008	0.003966287	-0.00195	0.00581	-0.001843713	-0.00776
114	17/06/2008	0.001975309	-0.01413	0.00581	-0.003834691	-0.01994
115	18/06/2008	-0.044356826	-0.010264	0.00581	-0.050166826	-0.016074
116	19/06/2008	0.057761733	0.007757	0.00588	0.051881733	0.001877
117	20/06/2008	0.031204291	-0.010534	0.00588	0.025324291	-0.016414
118	23/06/2008	-0.004728132	-0.002333	0.00588	-0.010608132	-0.008213
119	24/06/2008	0.004275534	-0.005869	0.00588	-0.001604466	-0.011749
120	25/06/2008	0.003784295	0.009485	0.00588	-0.002095705	0.003605
121	26/06/2008	-0.008953817	-0.012496	0.00602	-0.014973817	-0.018516
122	27/06/2008	0.012363291	0.003255	0.00602	0.006343291	-0.002765
123	30/06/2008	0.038985439	0.00343	0.00602	0.032965439	-0.00259
124	01/07/2008	-0.021699819	-0.005932	0.00602	-0.027719819	-0.011952
125	02/07/2008	-0.009704251	-0.018489	0.00602	-0.015724251	-0.024509
126	03/07/2008	-0.02939804	-0.007506	0.006027778	-0.035425818	-0.013533778
127	04/07/2008	-0.03125	-0.004477	0.006027778	-0.037277778	-0.010504778
128	07/07/2008	0.042183623	0.001602	0.006027778	0.036155845	-0.004425778
129	08/07/2008	0.005714286	0.005909	0.006027778	-0.000313492	-0.000118778
130	09/07/2008	-0.021780303	-0.015952	0.006027778	-0.027808081	-0.021979778
131	10/07/2008	-0.008228461	-0.007776	0.006035556	-0.014264017	-0.013811556
132	11/07/2008	-0.034651049	-0.009427	0.006035556	-0.040686605	-0.015462556
133	14/07/2008	-0.020728008	-0.003528	0.006035556	-0.026763564	-0.009563556
134	15/07/2008	-0.002581311	-0.002955	0.006035556	-0.008616867	-0.008990556
135	16/07/2008	0.053830228	0.019428	0.006035556	0.047794672	0.013392444
136	17/07/2008	-0.027013752	0.008833	0.006237778	-0.03325153	0.002595222
137	18/07/2008	0.012115093	-0.001633	0.006237778	0.005877315	-0.007870778
138	21/07/2008	0.010972569	-0.006436	0.006237778	0.004734791	-0.012673778
139	22/07/2008	-0.011840158	-0.014157	0.006237778	-0.018077936	-0.020394778
140	23/07/2008	0.005491762	0.001903	0.006237778	-0.000746016	-0.004334778
141	24/07/2008	-0.057596822	0	0.00623	-0.063826822	-0.00623

142	25/07/2008	-0.021601686	-0.020256	0.00623	-0.027831686	-0.026486
143	28/07/2008	-0.016155089	-0.012994	0.00623	-0.022385089	-0.019224
144	29/07/2008	0.033388068	0.021913	0.00623	0.027158068	0.015683
145	30/07/2008	0.031779661	0.005688	0.00623	0.025549661	-0.000542
146	31/07/2008	0.030287474	0.000982	0.006292222	0.023995252	-0.005310222
147	01/08/2008	0.001494768	-0.019703	0.006292222	-0.004797454	-0.025995222
148	04/08/2008	-0.027860697	-0.017486	0.006292222	-0.034152919	-0.023778222
149	05/08/2008	0.030706244	0.018968	0.006292222	0.024414022	0.012675778
150	06/08/2008	0.012413108	0.013049	0.006292222	0.006120886	0.006756778
151	07/08/2008	-0.01814615	-0.012998	0.006307778	-0.024453928	-0.019305778
152	08/08/2008	-0.009490509	0.005403	0.006307778	-0.015798287	-0.000904778
153	11/08/2008	0.006051437	-0.006969	0.006307778	-0.000256341	-0.013276778
154	12/08/2008	-0.009022556	-0.011399	0.006307778	-0.015330334	-0.017706778
155	13/08/2008	0.005563986	0.00903	0.006307778	-0.000743792	0.002722222
156	14/08/2008	0.013581489	0.013781	0.006362222	0.007219267	0.007418778
157	15/08/2008	0.003970223	0.003427	0.006362222	-0.002391999	-0.002935222
158	18/08/2008	-0.019772615	-0.020605	0.006362222	-0.026134837	-0.026967222
159	19/08/2008	-0.006051437	-0.001694	0.006362222	-0.012413659	-0.008056222
160	20/08/2008	-0.011669203	0.004973	0.006362222	-0.018031425	-0.001389222
161	21/08/2008	-0.017967146	-0.012286	0.006385556	-0.024352702	-0.018671556
162	22/08/2008	-0.00627287	0.012831	0.006385556	-0.012658426	0.006445444
163	25/08/2008	-0.016833246	-0.017072	0.006385556	-0.023218802	-0.023457556
164	26/08/2008	-0.013911182	-0.013066	0.006385556	-0.020296738	-0.019451556
165	27/08/2008	-0.007053717	0.002297	0.006385556	-0.013439273	-0.004088556
166	28/08/2008	0.03989071	0.011969	0.006385556	0.033505154	0.005583444
167	29/08/2008	-0.030478192	-0.005791	0.006385556	-0.036863748	-0.012176556
168	01/09/2008	0	0.005086	0.006385556	-0.006385556	-0.001299556
169	02/09/2008	-0.012466125	0.003711	0.006385556	-0.018851681	-0.002674556
170	03/09/2008	-0.004390779	-0.002073	0.006385556	-0.010776335	-0.008458556
171	04/09/2008	-0.003307607	-0.011945	0.006362222	-0.009669829	-0.018307222
172	05/09/2008	0.003871681	-0.009462	0.006362222	-0.002490541	-0.015824222
173	08/09/2008	-0.000550964	0.012677	0.006362222	-0.006913186	0.006314778
174	09/09/2008	0.028114664	-0.022978	0.006362222	0.021752442	-0.029340222
175	10/09/2008	-0.003753351	-0.000268	0.006362222	-0.010115573	-0.006630222
176	11/09/2008	-0.002152853	-0.002748	0.006354444	-0.008507297	-0.009102444
177	12/09/2008	0.007011866	0.001406	0.006354444	0.000657422	-0.004948444
178	15/09/2008	0.010176754	-0.037918	0.006354444	0.00382231	-0.044272444
179	17/09/2008	-0.069459173	-0.047173	0.006354444	-0.075813617	-0.053527444
180	18/09/2008	0.059259259	0.047792	0.006346667	0.052912592	0.041445333
181	19/09/2008	0.059709521	0.045697	0.006346667	0.053362854	0.039350333

182	22/09/2008	-0.011675127	-0.022144	0.006346667	-0.018021794	-0.028490667
183	23/09/2008	-0.065228557	-0.006475	0.006346667	-0.071575224	-0.012821667
184	24/09/2008	-0.008791209	-0.000998	0.006346667	-0.015137876	-0.007344667
185	25/09/2008	0.08037694	0.028113	0.006338889	0.074038051	0.021774111
186	26/09/2008	-0.002052335	-0.002017	0.006338889	-0.008391224	-0.008355889
187	29/09/2008	-0.080205656	-0.064004	0.006338889	-0.086544545	-0.070342889
188	30/09/2008	0.050866406	0.038957	0.006338889	0.044527517	0.032618111
189	01/10/2008	-0.00212766	0.009178	0.006338889	-0.008466549	0.002839111
190	02/10/2008	-0.02771855	-0.043395	0.006315556	-0.034034106	-0.049710556
191	03/10/2008	-0.066337719	-0.043195	0.006315556	-0.072653275	-0.049510556
192	06/10/2008	-0.036406342	-0.053954	0.006315556	-0.042721898	-0.060269556
193	07/10/2008	-0.106032907	-0.039744	0.006315556	-0.112348463	-0.046059556
194	08/10/2008	0.020449898	-0.009853	0.006315556	0.014134342	-0.016168556
195	09/10/2008	-0.018704075	-0.017833	0.006214444	-0.024918519	-0.024047444
196	10/10/2008	-0.034717495	-0.019937	0.006214444	-0.040931939	-0.026151444
197	13/10/2008	0.245416079	0.110052	0.006214444	0.239201635	0.103837556
198	14/10/2008	-0.030577576	0.006731	0.006214444	-0.03679202	0.000516556
199	15/10/2008	-0.073014019	-0.049863	0.006214444	-0.079228463	-0.056077444
200	16/10/2008	-0.052299937	-0.032055	0.006066667	-0.058366604	-0.038121667
201	17/10/2008	-0.06981383	-0.007093	0.006066667	-0.075880497	-0.013159667
202	20/10/2008	0.032880629	0.023304	0.006066667	0.026813962	0.017237333
203	21/10/2008	-0.048442907	-0.028045	0.006066667	-0.054509574	-0.034111667
204	22/10/2008	-0.018909091	-0.070084	0.006066667	-0.024975758	-0.076150667
205	23/10/2008	-0.009636768	-0.052607	0.005895556	-0.015532324	-0.058502556
206	24/10/2008	-0.039670659	-0.046078	0.005895556	-0.045566215	-0.051973556
207	27/10/2008	0.018706157	-0.005172	0.005895556	0.012810601	-0.011067556
208	28/10/2008	0.114766641	0.103102	0.005895556	0.108871085	0.097206444
209	29/10/2008	0.030199039	0.028166	0.005895556	0.024303483	0.022270444
210	30/10/2008	0.043304464	0.054793	0.005615556	0.037688908	0.049177444
211	31/10/2008	0.026819923	0.011793	0.005615556	0.021204367	0.006177444

## Apéndice C

# Tabla de Resultados de los coeficientes CAPM

Los datos para los parámetros estimados

$t$	$a_{1,t}$	$a_{2,t}$	$f_t$	$m_{1,t}$	$m_{2,t}$
1	0	0	0	-0.005204506	7.59E-07
2	-0.005204506	7.59E-07	-0.005204525	-0.005111996	0.634118287
3	-0.005111996	0.634118287	-0.012479112	-0.000709536	0.648333279
4	-0.000709536	0.648333279	-0.001802554	-0.004030873	0.495015274
5	-0.004030873	0.495015274	-0.004548109	0.00845292	1.097061276
6	0.00845292	1.097061276	0.027922345	0.004969702	0.762682765
7	0.004969702	0.762682765	-0.008503174	0.00551009	0.688415221
8	0.00551009	0.688415221	-0.001251601	0.007714688	0.592776364
9	0.007714688	0.592776364	-0.009084067	0.007753253	0.497697509
10	0.007753253	0.497697509	-0.006124101	0.007535794	0.91818759
11	0.007535794	0.91818759	-0.019411481	0.007532507	0.897954099
12	0.007532507	0.897954099	0.002867336	0.01127119	0.966091412
13	0.01127119	0.966091412	-0.045973912	0.010131183	0.730824881
14	0.010131183	0.730824881	0.05239235	0.005923613	0.442585627
15	0.005923613	0.442585627	0.015346999	0.002698179	0.291928936
16	0.002698179	0.291928936	0.004030316	0.003423083	0.302557313
17	0.003423083	0.302557313	-0.004010381	0.002460223	0.399640584
18	0.002460223	0.399640584	0.005695402	0.004275641	0.475708183
19	0.004275641	0.475708183	0.010195934	0.003277944	0.402386549
20	0.003277944	0.402386549	0.001432689	0.00272658	0.420613989
21	0.00272658	0.420613989	0.007681039	0.001562849	0.304137738

60 APÉNDICE C. TABLA DE RESULTADOS DE LOS COEFICIENTES CAPM

22	0.001562849	0.304137738	0.006526107	0.002984014	0.539176319
23	0.002984014	0.539176319	-0.02473552	0.003113284	0.496410458
24	0.003113284	0.496410458	-0.002542265	0.000857968	0.639458999
25	0.000857968	0.639458999	0.000808658	0.000852616	0.639411
26	0.000852616	0.639411	-0.000630888	0.002127367	0.624640511
27	0.002127367	0.624640511	0.01191479	0.002490165	0.681210443
28	0.002490165	0.681210443	0.000461445	0.002381175	0.684785188
29	0.002381175	0.684785188	0.008790003	0.001836176	0.614266484
30	0.001836176	0.614266484	-0.005236283	0.001157492	0.734870865
31	0.001157492	0.734870865	-0.013034089	0.000803511	0.860565278
32	0.000803511	0.860565278	0.008619452	0.000931626	0.878586355
33	0.000931626	0.878586355	-0.012351428	0.000253403	1.080223163
34	0.000253403	1.080223163	0.006130177	9.47E-05	1.063603225
35	9.47E-05	1.063603225	-0.001069785	-0.00027145	1.067356719
36	-0.00027145	1.067356719	-0.000351383	0.000269314	1.073398756
37	0.000269314	1.073398756	0.009846297	0.001508673	1.346186977
38	0.001508673	1.346186977	0.005644309	0.003456608	1.518600541
39	0.003456608	1.518600541	0.004562318	0.003629111	1.522911361
40	0.003629111	1.522911361	-0.019890901	0.003359562	1.667824559
41	0.003359562	1.667824559	-0.073350545	0.003503875	1.113560176
42	0.003503875	1.113560176	0.02049668	0.003811528	1.168305803
43	0.003811528	1.168305803	-0.013439805	0.001513423	1.779764876
44	0.001513423	1.779764876	-0.007770028	0.00161983	1.771186499
45	0.00161983	1.771186499	-0.042498851	0.001804241	1.602768312
46	0.001804241	1.602768312	-0.013266767	0.001715981	1.619798887
47	0.001715981	1.619798887	-0.030586228	0.001865489	1.492893457
48	0.001865489	1.492893457	0.059877671	0.000871127	1.118449586
49	0.000871127	1.118449586	-0.012521313	0.000890418	1.114809316
50	0.000890418	1.114809316	0.010408165	0.000457447	1.050817211
51	0.000457447	1.050817211	-0.028788313	0.000522805	1.005008817
52	0.000522805	1.005008817	0.010857869	0.000486508	0.998500618
53	0.000486508	0.998500618	-0.020311151	0.000488906	0.99718152
54	0.000488906	0.99718152	0.014031739	-0.00053645	0.738452284
55	-0.00053645	0.738452284	0.003841177	-6.61E-05	0.804858083
56	-6.61E-05	0.804858083	-0.002672155	-7.44E-05	0.805540778
57	-7.44E-05	0.805540778	-0.006611226	0.00011791	0.755661468
58	0.00011791	0.755661468	-0.001657055	4.17E-05	0.760910474
59	4.17E-05	0.760910474	0.016458393	0.000744605	1.2096812
60	0.000744605	1.2096812	0.027981921	0.00134868	1.66377323
61	0.00134868	1.66377323	-0.025005303	0.001258005	1.70003257

62	0.001258005	1.70003257	0.003400612	0.000878737	1.686667603
63	0.000878737	1.686667603	-0.016559158	0.000930916	1.668611356
64	0.000930916	1.668611356	0.000270701	0.000893575	1.669047653
65	0.000893575	1.669047653	-0.008163791	0.001150725	1.611201464
66	0.001150725	1.611201464	-0.023865864	0.001198682	1.573907314
67	0.001198682	1.573907314	0.003650481	0.001548757	1.602159438
68	0.001548757	1.602159438	-0.025287769	0.00154226	1.608917656
69	0.00154226	1.608917656	-0.0134516	0.001428196	1.665061151
70	0.001428196	1.665061151	0.001561031	0.001265252	1.659977092
71	0.001265252	1.659977092	0.019899786	0.001258858	1.657017225
72	0.001258858	1.657017225	-0.014780517	0.001224396	1.677016783
73	0.001224396	1.677016783	-0.007968451	0.001476145	1.599121984
74	0.001476145	1.599121984	0.007278292	0.001296337	1.560493568
75	0.001296337	1.560493568	-0.010424011	0.001240882	1.590415792
76	0.001240882	1.590415792	-0.017479372	0.001377897	1.438561937
77	0.001377897	1.438561937	-0.011542787	0.001448839	1.383664151
78	0.001448839	1.383664151	-0.038689413	0.001304924	-0.167376318
79	0.001304924	-0.167376318	0.004354967	0.001160948	0.165284671
80	0.001160948	0.165284671	-0.001699414	0.00104803	0.412277636
81	0.00104803	0.412277636	-0.001187705	0.000993181	0.424530213
82	0.000993181	0.424530213	0.002325828	0.001073113	0.437405543
83	0.001073113	0.437405543	0.004378635	0.001227394	0.485846743
84	0.001227394	0.485846743	0.0025713	0.000982395	0.44498552
85	0.000982395	0.44498552	-0.008162898	0.000912057	0.727113357
86	0.000912057	0.727113357	-0.003530525	0.001073655	0.67113332
87	0.001073655	0.67113332	-0.004498691	0.000818959	0.829344048
88	0.000818959	0.829344048	-0.004973917	0.001117205	0.674401555
89	0.001117205	0.674401555	0.002723704	0.001080353	0.667973446
90	0.001080353	0.667973446	0.006933878	0.000782452	0.533264326
91	0.000782452	0.533264326	0.001209241	0.000531796	0.510948977
92	0.000531796	0.510948977	-0.003332341	0.000377557	0.623806043
93	0.000377557	0.623806043	0.002898565	0.000507391	0.663494194
94	0.000507391	0.663494194	-0.008971066	0.000559745	0.539149574
95	0.000559745	0.539149574	-0.009402481	0.000538057	0.668020318
96	0.000538057	0.668020318	-0.000760352	0.000235322	0.694396797
97	0.000235322	0.694396797	-0.007715984	0.000119764	0.879472449
98	0.000119764	0.879472449	0.001989815	-6.61E-05	0.846174673
99	-6.61E-05	0.846174673	-0.002269253	-0.00011743	0.85495514
100	-0.00011743	0.85495514	0.001271302	-8.04E-06	0.873527485
101	-8.04E-06	0.873527485	0.000187917	0.000153846	0.884485696

62APÉNDICE C. TABLA DE RESULTADOS DE LOS COEFICIENTES CAPM

102	0.000153846	0.884485696	-0.001124826	2.89E-05	0.896577468
103	2.89E-05	0.896577468	-0.01467194	4.87E-05	0.722282015
104	4.87E-05	0.722282015	-0.00740866	8.81E-05	0.651139617
105	8.81E-05	0.651139617	-0.00460054	-1.09E-05	0.743015889
106	-1.09E-05	0.743015889	0.002249815	-7.85E-05	0.724375075
107	-7.85E-05	0.724375075	-0.017448573	-9.11E-05	0.647908126
108	-9.11E-05	0.647908126	-0.008330198	-0.00013603	0.749650304
109	-0.00013603	0.749650304	-0.005317946	-4.16E-06	0.664918903
110	-4.16E-06	0.664918903	-0.013597388	1.45E-05	0.821381721
111	1.45E-05	0.821381721	-0.003970021	-0.000113471	0.863099998
112	-0.000113471	0.863099998	-0.006882764	-8.41E-05	0.838346117
113	-8.41E-05	0.838346117	-0.006589702	-5.76E-05	0.814021713
114	-5.76E-05	0.814021713	-0.016289187	-8.46E-05	0.66536651
115	-8.46E-05	0.66536651	-0.010779698	-9.73E-05	1.021777942
116	-9.73E-05	1.021777942	0.001820608	0.000503907	1.116591297
117	0.000503907	1.116591297	-0.017823823	0.00051587	0.700449581
118	0.00051587	0.700449581	-0.005236922	0.000487454	0.726438472
119	0.000487454	0.726438472	-0.008047471	0.000504642	0.679379516
120	0.000504642	0.679379516	0.002953805	0.000439348	0.662691212
121	0.000439348	0.662691212	-0.011831042	0.000442735	0.698216381
122	0.000442735	0.698216381	-0.001487834	0.000511229	0.687848646
123	0.000511229	0.687848646	-0.001270299	0.000810798	0.641299753
124	0.000810798	0.641299753	-0.006854016	0.000761737	0.818175136
125	0.000761737	0.818175136	-0.019290918	0.00074691	0.770480521
126	0.00074691	0.770480521	-0.009680603	0.000692056	0.956829985
127	0.000692056	0.956829985	-0.009359231	0.000588036	1.11872508
128	0.000588036	1.11872508	-0.004363193	0.000889882	1.02406876
129	0.000889882	1.02406876	0.000768245	0.000878896	1.023464678
130	0.000878896	1.023464678	-0.021616631	0.00089684	1.100947171
131	0.00089684	1.100947171	-0.014308954	0.000896919	1.100602846
132	0.000896919	1.100602846	-0.016121214	0.000880823	1.307836326
133	0.000880823	1.307836326	-0.011626743	0.000819268	1.388449902
134	0.000819268	1.388449902	-0.011663668	0.000832078	1.372321092
135	0.000832078	1.372321092	0.019210812	0.001302701	1.630173457
136	0.001302701	1.630173457	0.005533363	0.000877721	1.541608302
137	0.000877721	1.541608302	-0.011255935	0.000976733	1.450564581
138	0.000976733	1.450564581	-0.0174074	0.001043163	1.259384822
139	0.001043163	1.259384822	-0.02464171	0.001037776	1.181600285
140	0.001037776	1.181600285	-0.004084199	0.00106225	1.173700133
141	0.00106225	1.173700133	-0.006249902	0.000709481	1.400326724

142	0.000709481	1.400326724	-0.036379572	0.000680602	1.286880449
143	0.000680602	1.286880449	-0.024058387	0.000680847	1.271902914
144	0.000680847	1.271902914	0.020628101	0.000777961	1.323948194
145	0.000777961	1.323948194	6.04E-05	0.001008809	1.325287757
146	0.001008809	1.325287757	-0.006028763	0.001225224	1.238643586
147	0.001225224	1.238643586	-0.030973591	0.001215647	0.925391073
148	0.001215647	0.925391073	-0.020788507	0.001211021	1.054449725
149	0.001211021	1.054449725	0.014576992	0.001335724	1.113479147
150	0.001335724	1.113479147	0.008859255	0.001306749	1.103452933
151	0.001306749	1.103452933	-0.019996268	0.001291665	1.143224811
152	0.001291665	1.143224811	0.0002573	0.001154313	1.146539341
153	0.001154313	1.146539341	-0.014068035	0.001216631	1.048681055
154	0.001216631	1.048681055	-0.017352132	0.001221854	1.030444545
155	0.001221854	1.030444545	0.004026953	0.001176093	1.021153969
156	0.001176093	1.021153969	0.008751808	0.001159823	1.013501766
157	0.001159823	1.013501766	-0.001815029	0.001155402	1.014522208
158	0.001155402	1.014522208	-0.026203444	0.001155433	1.013617992
159	0.001155433	1.013617992	-0.007010498	0.001123727	1.035835057
160	0.001123727	1.035835057	-0.000315278	0.000982763	1.045250242
161	0.000982763	1.045250242	-0.018533685	0.00097199	1.10411538
162	0.00097199	1.10411538	0.008088504	0.000758909	1.016158187
163	0.000758909	1.016158187	-0.023077679	0.000758793	1.017769642
164	0.000758793	1.017769642	-0.01903841	0.000756613	1.028932978
165	0.000756613	1.028932978	-0.003450237	0.000688534	1.047420951
166	0.000688534	1.047420951	0.00653675	0.000955376	1.145181235
167	0.000955376	1.145181235	-0.012988988	0.000861217	1.313428139
168	0.000861217	1.313428139	-0.000845656	0.000819012	1.316361546
169	0.000819012	1.316361546	-0.002701671	0.00070501	1.34255494
170	0.00070501	1.34255494	-0.010651066	0.000704421	1.343321426
171	0.000704421	1.343321426	-0.023888062	0.000714015	1.176558919
172	0.000714015	1.176558919	-0.017904114	0.000735831	1.030504886
173	0.000735831	1.030504886	0.00724324	0.000591412	0.965295697
174	0.000591412	0.965295697	-0.027730578	0.000503716	0.314816229
175	0.000503716	0.314816229	-0.001583585	0.000456357	0.341152936
176	0.000456357	0.341152936	-0.002648968	0.000430171	0.368987702
177	0.000430171	0.368987702	-0.001395744	0.000442257	0.363444129
178	0.000442257	0.363444129	-0.015648302	0.000364897	0.110681752
179	0.000364897	0.110681752	-0.005559615	0.000586972	0.781593332
180	0.000586972	0.781593332	0.032980368	0.000808507	0.926651402
181	0.000808507	0.926651402	0.037272548	0.000935185	1.037921322



64APÉNDICE C. TABLA DE RESULTADOS DE LOS COEFICIENTES CAPM

182	0.000935185	1.037921322	-0.028635886	0.000998414	0.976806782
183	0.000998414	0.976806782	-0.011525877	0.000611827	1.173349847
184	0.000611827	1.173349847	-0.008006037	0.00056418	1.189684997
185	0.00056418	1.189684997	0.026468513	0.000933043	1.532708194
186	0.000933043	1.532708194	-0.011874097	0.000956867	1.521575084
187	0.000956867	1.521575084	-0.10607512	0.000981118	1.329471631
188	0.000981118	1.329471631	0.044345971	0.000982585	1.330487751
189	0.000982585	1.330487751	0.004759987	0.000888044	1.321211824
190	0.000888044	1.321211824	-0.06479013	0.000990767	1.055468342
191	0.000990767	1.055468342	-0.051266058	0.000945838	1.216045586
192	0.000945838	1.216045586	-0.07234469	0.000962685	0.997645176
193	0.000962685	0.997645176	-0.044988409	0.000862164	1.417395864
194	0.000862164	1.417395864	-0.02205508	0.001036718	1.307340419
195	0.001036718	1.307340419	-0.030401478	0.001054543	1.277714165
196	0.001054543	1.277714165	-0.032359527	0.001033734	1.332393198
197	0.001033734	1.332393198	0.139386187	0.001594493	2.073814843
198	0.001594493	2.073814843	0.002665734	0.001325751	2.071450649
199	0.001325751	2.071450649	-0.114835907	0.001486569	1.821047217
200	0.001486569	1.821047217	-0.067934786	0.001525562	1.766196665
201	0.001525562	1.766196665	-0.021716998	0.001222604	1.913275735
202	0.001222604	1.913275735	0.034202375	0.001167071	1.879925957
203	0.001167071	1.879925957	-0.062960337	0.001197524	1.812049871
204	0.001197524	1.812049871	-0.136791282	0.001191459	0.873686353
205	0.001191459	0.873686353	-0.049921425	0.001223456	0.651179502
206	0.001223456	0.651179502	-0.032620658	0.001209777	0.732203284
207	0.001209777	0.732203284	-0.006893924	0.001314397	0.693761106
208	0.001314397	0.693761106	0.068752447	0.001525434	0.984407558
209	0.001525434	0.984407558	0.023448628	0.001530382	0.986925947
210	0.001530382	0.986925947	0.050064878	0.001489368	0.90476433
211	0.001489368	0.90476433	0.007078499	0.001574019	0.921492532

# Bibliografía

- [1] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. Series D, pp. 35–45, 1960.
- [2] S. Karlin and H. Taylor, “A first course in stochastic processes, 1975.”
- [3] P. Miramontes, “El color del ruido,” *Ciencias*, no. 054, 1999.
- [4] R. J. Hodrick and E. C. Prescott, “Postwar us business cycles: an empirical investigation,” *Journal of Money, credit, and Banking*, pp. 1–16, 1997.
- [5] S. Särkkä, *Bayesian filtering and smoothing*, vol. 3. Cambridge University Press, 2013.
- [6] A. Montenegro, “Introducción al filtro kalman,” tech. rep., UNIVERSIDAD JAVERIANA-BOGOTÁ, 2005.
- [7] G. Petris, S. Petrone, and P. Campagnoli, *Dynamic linear models with R*. Springer, 2009.
- [8] A. C. Harvey, S. J. Koopman, and N. Shephard, *State space and unobserved component models*. Cambridge University Press, 2004.
- [9] J. J. Commandeur and S. J. Koopman, *An introduction to state space time series analysis*. Oxford University Press, 2007.
- [10] J. Durbin and S. J. Koopman, *Time series analysis by state space methods*. No. 38, Oxford University Press, 2012.
- [11] G. K. Pasricha, “Kalman filter and its economic applications,” 2006.
- [12] N. Thacker and A. Lacey, “Tutorial: The likelihood interpretation of the kalman filter,” *TINA Memos: Advanced Applied Statistics*, vol. 2, 1996.

- [13] P. S. Cowpertwait and A. V. Metcalfe, *Introductory time series with R*. Springer, 2009.
- [14] R. H. Shumway and D. S. Stoffer, *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer, 2010.