



Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo



GEOMETRÍA EN LOS INESCINDIBLES
DE UN ÁLGEBRA HEREDITARIA

Tesis que para optar por el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

P R E S E N T A

Jesús Arturo Jiménez González
jejim@matmor.unam.mx

DIRECTOR DE TESIS

Doctor en ciencias matemáticas
Raymundo Bautista Ramos
raymundo@matmor.unam.mx

Morelia, Michoacán.

Febrero de 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.
A mis hermanas.
A toda mi familia.

Escribir es tratar de entender, es tratar de reproducir lo irreproducible.
C. Lispector

Agradecimientos.

A todas las instituciones participantes en el **Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH** por alojarme en el programa de doctorado.

Al CONACyT por la Beca Financiera Nacional No. 308011.

A los miembros del comité tutor y mesa de sinodales: Dr. Raymundo Bautista, Dr. Micho Durdevich, Dr. Gerardo Raggi, Dr. José Antonio de la Peña, Dra. Corina Sáenz, Dr. Leonardo Salmerón, Dr. Luis Valero y Dr. Abel Castorena.

Agradecimientos.

Primero quisiera expresar el más sincero agradecimiento a mi asesor, Profesor Raymundo Bautista Ramos, por su paciencia y consejo durante mis estudios doctorales. Su ímpetu, entusiasmo e infalible orientación son el pilar decisivo de este trabajo. Ha sido un honor trabajar con él y conocer un poco su percepción de la belleza matemática.

También quiero agradecer a mis padres y a toda mi familia por su apoyo y empuje incondicional durante mis estudios profesionales. Ustedes son el fundamento en el que se asienta mucho de lo logrado.

Un especial agradecimiento al Profesor Humberto Cárdenas por su motivación y ejemplo, y por inducirme el gusto de programar en álgebra. Al Dr. Leonardo Salmerón por su interés en este trabajo, por las discusiones y por sus minuciosas y útiles observaciones.

Quisiera agradecer a mis amigos, en especial a Graciela Reyes y Abel Castorena quienes me acompañaron cercanamente en este proceso, en las zonas más pantanosas pero sobre todo en las más altas.

Finalmente, me gustaría agradecer al Centro de Ciencias Matemáticas por su apoyo financiero para viajes a congresos, y a su personal técnico y administrativo por la cálida estancia que me proporcionaron durante estos años en Morelia.

Contenido

Introducción	xi
1 Preliminares.	1
1.1 Carcajes y álgebras.	1
1.2 Reflexiones y matriz de Coxeter.	8
1.3 Reducciones elementales.	12
1.4 Reducción a través de módulos admisibles	16
1.5 Representaciones excepcionales.	21
1.6 Sucesiones que casi se dividen.	27
1.7 Carcaj de traslación y secciones.	30
1.8 Componentes posproyectiva y preinyectiva.	38
2 Álgebras de Kronecker.	43
2.1 Álgebra de Kronecker clásica $n = 2$	43
2.2 Primer caso generalizado $n = 3$	51
2.3 Gráfica de A.R. de un carcaj de Dynkin.	58
3 Diagramas de Dynkin extendido.	67
3.1 Extensión de un punto y reducción.	68
3.2 Elección de módulos de extensión.	76
3.3 Levantamiento de sucesiones.	79
3.4 Levantamiento de funtores.	86
3.5 Mapeos universales y rango.	92
3.6 Reducción de álgebras de Dynkin extendido.	108
3.7 Familias de \mathcal{A}^Y -módulos excepcionales.	120
4 Construcción de módulos excepcionales.	129
4.1 Representaciones de $\widetilde{\mathbf{A}}_n$	129
4.2 Representaciones de $\widetilde{\mathbf{D}}_n$	133
4.3 Ditálgebras reducidas para los casos $\widetilde{\mathbf{E}}_m$	141
A Álgebras tensoriales con diferencial.	145
A.1 Ditálgebras y sus módulos.	145
A.2 Estratos, triangularidad y extensiones.	148
A.3 Algunas propiedades de bimódulos y sus duales.	153
A.4 Reducción a través de módulos admisibles.	155
Bibliografía	159

Resumen.

Mostramos que los procesos de reducción entre álgebras tensoriales con diferencial, como se desarrolla por Bautista, Salmerón y Zuazua [8], son herramientas prácticas para estudiar y construir explícitamente representaciones inescindibles de carcaj. En concreto exhibimos dos aspectos de la reducción: por un lado, el funtor de reducción preserva muchas propiedades de las bases elegidas, lo cual permite generalizar al contexto de carcajes con diferencial algunos resultados conocidos en la teoría de representaciones de carcaj (los módulos excepcionales son módulos árbol, ver Ringel [26]). Por otro lado, los procesos reductivos son herramientas implementables y eficientes para el cálculo sistemático de representaciones inescindibles de carcaj. Como ejemplo se analizan dos casos particulares importantes, las álgebras de Kronecker y las álgebras de Dynkin extendido.

Palabras clave: Ditalgebra; Carcaj; Representación excepcional; Reducción; Carcaj de Coeficientes.

Abstract.

We show that the reduction processes between differential tensor algebras, as developed by Bautista, Salmerón and Zuazua [8], are practical mechanisms for the study and explicit construction of indecomposable quiver representations. Specifically we exhibit two aspects of the reduction: on the one hand, the reduction functors preserve many properties of the chosen bases. This enables us to generalize to the context of differential quivers some known results in the theory of quiver representations (exceptional modules are tree modules, cf. Ringel [26]). On the other hand, the reduction process is an implementable and efficient tool for the systematic computation of indecomposable quiver modules. For instance we analyze two important particular cases, Kronecker algebras and extended Dynkin algebras.

Keywords: Ditalgebra; Quiver; Exceptional representation; Reduction; Coefficient quiver.

Introducción.

Sea k un campo arbitrario y consideremos la k -álgebra de caminos A de un carcaj finito Q . Un problema básico de la teoría de representaciones de álgebras asociativas es dar de manera explícita, mediante colecciones de matrices, representaciones inescindibles de A de dimensión finita. En general este es un problema difícil que ha estimulado la teoría y que se encuentra lejos de encontrar respuesta satisfactoria. Cuando Q corresponde a un diagrama de Dynkin (con una orientación establecida de sus flechas), Gabriel exhibe representaciones cuyas clases de isomorfismo son una lista completa de A -módulos inescindibles [11, 1972]. El problema fue complementado por Ringel en 1998 [26]. Para los diagramas de Dynkin extendidos, tema principal de esta tesis, se encuentran los siguientes resultados parciales. En 1890, al resolver un problema propuesto por Weierstrass, Kronecker clasificó lo que en el lenguaje actual son las representaciones del carcaj con dos flechas $\cdot \rightrightarrows \cdot$ (correspondiente al diagrama $\widetilde{\mathbf{A}}_1$) cuya álgebra de caminos es llamada álgebra de Kronecker. El problema de cuatro subespacios, que puede interpretarse en términos de representaciones de un carcaj del diagrama $\widetilde{\mathbf{D}}_4$, ha sido analizado por Nazarova en 1967 [22], Gelfand y Ponomarev en 1972 [15], y Medina y Zavadskij en 2004 [21]. El caso $\widetilde{\mathbf{A}}_n$ fue descrito por Gabriel y Roiter en 1997 [13], quienes dan también un algoritmo para determinar representaciones regulares de $\widetilde{\mathbf{E}}_6$ (para campos algebraicamente cerrados). Este método puede ser adaptado fácilmente a cualquier diagrama de Dynkin extendido $\widetilde{\Delta}$. Las representaciones posproyectivas y preinyectivas de $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ fueron dadas por Kussin y Meltzer en 2006 [19], así como las series de representaciones de rango tres en $\widetilde{\mathbf{E}}_6$. Su método hace uso de la teoría de inclinación y el conocimiento explícito de representaciones de las álgebras canónicas domésticas (como define Ringel en [24]) dado por Komoda, Kussin y Meltzer en [20] y [18]. Con el mismo método Kedzierski y Meltzer describen en 2011 las series de representaciones de rango máximo (seis) de $\widetilde{\mathbf{E}}_8$ [17].

Por otro lado, los módulos excepcionales (representaciones inescindibles sin auto-extensiones) han sido objeto de estudio desde diferentes perspectivas y con diferentes propósitos. Las sucesiones excepcionales, las particiones que no se cruzan, la teoría de inclinación y los procesos de reducción de este trabajo son ejemplos donde los módulos excepcionales juegan un papel principal. Como es bien sabido, las clases de isomorfismo de módulos excepcionales quedan determinadas por la dimensión vectorial. Además Ringel ha mostrado [26] que las representaciones excepcionales pueden ser dadas con matrices tales que el número de coeficientes distintos de cero son el mínimo esperado (módulos árbol). En tal caso se pueden exhibir representaciones con matrices formadas solamente con coeficientes 0 y 1.

Una manera de enfrentar el problema de exhibir representaciones de carcaj es ampliar el contexto algebraico del que se toman representaciones. Para ello, y por la importancia propia de estos temas, se han considerado representaciones explícitas de carcajes con relaciones (Kussin y Meltzer con sus representaciones de álgebras canónicas), de conjuntos parcialmente ordenados (a partir de trabajos iniciados por Zavadskij), problemas matriciales (Nazarova) entre otros. Como propone el Profesor Bautista, director de esta tesis, dentro del contexto de ditálgebras la *reducción a través de módulos admisibles* (como se desarrolla por Bautista, Salmerón y Zuazua en [8]) resulta ser una herramienta práctica para dar de manera sistemática representaciones de carcaj. De interés particular, considerando los antecedentes de los párrafos anteriores, es el caso de diagramas de Dynkin extendidos y sus componentes posproyectiva y preinyectiva. En respuesta a este interés se establecen los objetivos del presente trabajo. Sean A_0 el álgebra de caminos de un carcaj de Dynkin y A la extensión de un punto de A_0 .

Objetivos. Describir las restricciones a A_0 -mod de A -módulos posproyectivos y preinyectivos inescindibles en términos de sus posiciones dentro de la gráfica de Auslander-Reiten. Además, determinar ciertas reducciones del algebra A con respecto a A_0 -módulos admisibles y mostrar cómo mediante el uso del funtor asociado a la reducción se construyen explícitamente series de A -módulos excepcionales.

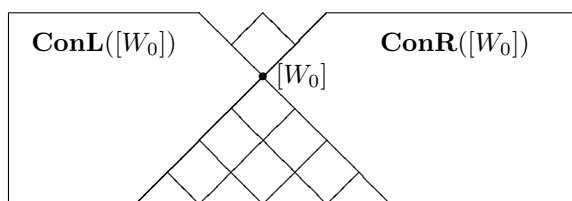
En términos generales, en el capítulo uno se prueban resultados preliminares en el contexto de ditálgebras y se comentan aspectos generales de la teoría de Auslander-Reiten. En el capítulo dos se analizan dos elementos clave en la construcción de A -módulos: la categoría de representaciones del álgebra de Kronecker y la categoría de A_0 -módulos. En los capítulos tres y cuatro se estudia la extensión de un punto, se define y analiza el rango de una A -representación y se construyen A -módulos excepcionales a partir de ciertas representaciones reducidas de rango menor. En el apéndice se dan algunas definiciones y resultados fundamentales de la teoría de ditálgebras y sus categorías de módulos, como se expone por Bautista, Salmerón y Zuazua [8]. Enseguida se da una descripción detallada por capítulos.

Capítulo 1. En la sección 1.1 se muestran algunas relaciones entre formas bilineales enteras y la categoría de módulos de un (bi)carcaj con diferencial. Se establecen nociones y resultados necesarios para el resto del trabajo.

En particular se define la característica de Euler y se extiende la noción de matriz de Cartan a álgebras positivamente graduadas. Esta noción es compatible con la característica de Euler (lemas 1.3 y 1.4) y como se muestra en la sección 1.2, con la construcción de la matriz de Coxeter dada a través de reflexiones (corolario 1.7). En las secciones 1.3 y 1.4 se presentan herramientas elementales para la construcción de ditálgebras, como la regularización y reducción de eje. Además, se generalizan propiedades conocidas de módulos excepcionales al contexto de ditálgebras (por ejemplo, todo módulo excepcional es árbol, teorema 1.17). En la sección 1.6 se exponen resultados clásicos de la teoría de Auslander-Reiten en base a Ringel [24]. En 1.7 se muestran definiciones y resultados sobre carcajes de traslación, secciones y cosecciones. Estos resultados son fundamentales en las pruebas de la sección 3.5. Por último en 1.8 se describen

las componentes posproyectiva y preinyectiva en la gráfica de Auslander-Reiten de la categoría de representaciones de carcaj.

Capítulo 2. Se construyen representaciones excepcionales del álgebra de Kronecker clásica (sección 2.1) y el primer caso generalizado (sección 2.2). Los demás casos generalizados se obtienen mediante una simple adaptación del caso $n = 3$. Aunque estas representaciones son conocidas (ver Ringel [26] y [28]), damos pruebas sistemáticas que ilustran las herramientas presentadas en el capítulo de preliminares. Además, el conocimiento explícito de la gráfica de Auslander-Reiten del álgebra de Kronecker clásica es esencial para la construcción de la categoría extendida A -mod. En la sección 2.3 se estudia la gráfica de Auslander-Reiten de A_0 -mod siguiendo el trabajo de Ringel [24].



Se prueba que la clase de isomorfismo de un módulo inescindible W_0 correspondiente a la raíz máxima del diagrama de Dynkin es un vértice ala en la gráfica de Auslander-Reiten (finita) de A_0 -mod. Las alas de $[W_0]$ (parte central de la figura anterior) separan el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$ (ver lema 2.12).

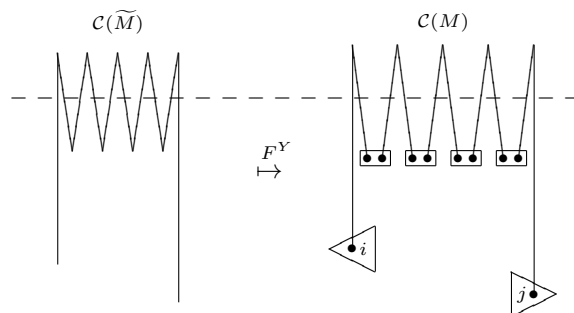
Capítulo 3. El primer paso en la descripción de la categoría A -mod es identificarla con la categoría de subespacios $\mathcal{U}(A_0\text{-mod}, | - |)$ con respecto al funtor

$$| - | = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, -) : A_0\text{-mod} \longrightarrow k\text{-mod},$$

donde R es el módulo de extensión $A = A_0[R]$ (sección 3.1). De esta manera un A -módulo $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ consiste en un A_0 -módulo M_0 , un k -espacio vectorial M_ω y una transformación lineal $\gamma_M : M_\omega \rightarrow |M_0|$. En la proposición 3.6 se analiza la reducción a través de módulos admisibles de extensiones de un punto. El lema del levantamiento (lema 3.11) relaciona las sucesiones que casi se dividen en A_0 -mod y A -mod. Uno de nuestros objetivos es probar de manera directa, sin hacer uso de las componentes regulares, que el levantamiento de las sucesiones que casi si dividen en $\mathbf{ConL}([W_0])$ y $\mathbf{ConR}([W_0])$ (ver figura anterior) cae en las componentes posproyectiva y preinyectiva de A -mod respectivamente. Esto se muestra en el teorema 3.27. En la sección 3.4 se dan propiedades functoriales de los mapeos universales y sus levantamientos a A -mod, usados por Ringel [24] en el punto (17) de su teorema principal 3.4. En la sección 3.5 exhibimos (a través del proceso de reducción) la subcategoría de Kronecker contenida en A -mod determinada por los objetos de A -mod cuya restricción a A_0 -mod es suma directa de copias de W_0 . También se da respuesta al primero de nuestros objetivos mediante el uso de los funtores de la sección 3.4 (proposiciones 3.25 y 3.28, ver también la tabla al final de la sección 3.5). Finalmente se usan los módulos determinados por los costados izquierdo $\mathbf{ConL}_0([W_0])$ y derecho $\mathbf{ConR}_0([W_0])$ de las alas de $[W_0]$, para construir ditálgebras reducidas \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y del álgebra de Dynkin extendido A (sección 3.6). Su interés radica en que casi todas las clases de isomorfismo (salvo un número finito) de módulos posproyectivos y preinyectivos inescindibles caen en la imagen de los funtores asociados a las reducciones

F^X y F^Y respectivamente (teorema 3.27). Además, las álgebras tensoriales reducidas A^X y A^Y solo dependen del tipo tubular de A , y sus formas cuadráticas asociadas coinciden q^{xy} . Al final de la sección 3.6 y en la sección 3.7 se encuentran listas de raíces positivas de las formas reducidas y algunas representaciones excepcionales correspondientes.

Capítulo 4. Este último capítulo se dedica a la presentación de módulos excepcionales de álgebras de Dynkin extendido mediante el functor asociado a la reducción. Comenzando con el conocimiento de la restricción a A_0 -mod de un A -módulo $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$, se construye directamente un carcaj de coeficientes de M a partir de los carcajes de coeficientes de los sumandos directos Z_0 de la restricción M_0 (representados mediante las figuras $\square \bullet$, $\triangleleft \bullet i$ y $\triangleright j \bullet$; los puntos marcados corresponden a una base del k -espacio vectorial $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Z_0)$, que tiene dimensión dos cuando $Z_0 \cong W_0$ y uno en los demás casos) y de las matrices correspondientes a la transformación γ_M . Las matrices que conforman a γ_M se encuentran almacenadas en la representación reducida \widetilde{M} (es decir, \widetilde{M} es una representación de la ditálgebra reducida \mathcal{A}^Y tal que $F^Y(\widetilde{M}) \cong M$). Como ejemplo, en la siguiente figura se muestra el carcaj de coeficientes $\mathcal{C}(\widetilde{M})$ de una \mathcal{A}^Y -representación reducida \widetilde{M} (izquierda). Ya que la restricción a A_0 -mod de $M = F^Y(\widetilde{M})$ tiene la forma $Y \otimes \widetilde{M}$, el carcaj de coeficientes de M se obtiene al sustituir en $\mathcal{C}(\widetilde{M})$ los carcajes de coeficientes elegidos para los sumandos directos del A_0 -módulo de reducción Y (derecha).



Las flechas que cruzan la línea punteada corresponden a las matrices de la transformación γ_M . Eliminando estas flechas se obtienen, del lado izquierdo seis puntos aislados (correspondientes al carcaj de coeficientes de un módulo sobre un álgebra semi-simple S), y del derecho el carcaj de coeficientes de la restricción M_0 . Se observa que la representación reducida \widetilde{M} contiene un módulo preinyectivo de Kronecker (en el ejemplo mostrado de dimensión vectorial $(4, 5)$). Carcajes de coeficientes correspondientes para dimensiones vectoriales de la forma $(\ell, \ell + 1)$ producen una serie de A -módulos preinyectivos inescindibles (de rango uno). En la sección 4.1 se muestra el caso $\widetilde{\mathbf{A}}_n$ para una orientación arbitraria (no cíclica) de las flechas (comparar con el teorema 11.1 de Gabriel y Roiter [13]). En la sección 4.2 se analiza el caso $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ para una orientación particular de flechas (aquella usada por Kussin y Meltzer en [19]), mientras que en la sección 4.3 se muestran las ditálgebras reducidas para los casos $\widetilde{\mathbf{E}}_m$ ($m = 6, 7, 8$).

Capítulo 1

Preliminares.

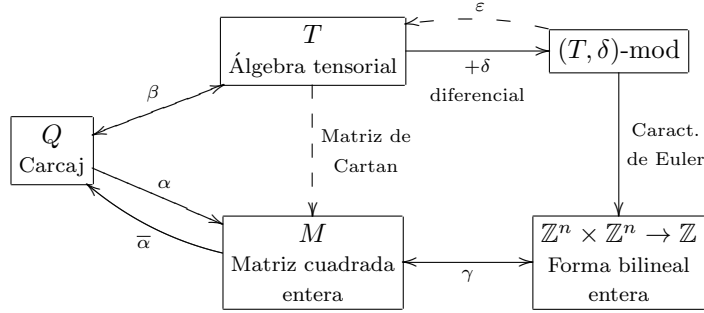
El contexto general de este trabajo es el de álgebras tensoriales con diferencial, como se desarrolla por Bautista, Salmerón y Zuazua en [8]. En este capítulo se establecen algunos resultados preliminares. El material de las siguientes secciones es conocido al menos para el caso clásico. En el apéndice se pueden consultar definiciones y resultados de la teoría de álgebras tensoriales con diferencial y sus representaciones.

1.1 Carcajes y álgebras.

La estructura combinatoria básica en esta tesis es la gráfica orientada con dos tipos de flechas, o bicarcaj, que en este trabajo será llamada simplemente carcaj. Un **carcaj** $Q = (Q_0, Q_1, s, t, |\cdot|)$ consiste en dos conjuntos, uno de **vértices** Q_0 y otro de **flechas** Q_1 , junto con funciones $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$ de **origen** y **destino** respectivamente, y una función de **grado** $|\cdot| : Q_1 \rightarrow \{0, 1\}$. Un **morfismo** f entre dos carcajes Q y Q' consiste en funciones $f_0 : Q_0 \rightarrow Q'_0$ y $f_1 : Q_1 \rightarrow Q'_1$ que conmutan con las funciones origen y destino y que preservan grados. Usualmente damos un carcaj de forma gráfica mediante una flecha sólida $s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ para cada $\alpha \in Q_1$ con $|\alpha| = 0$ y una flecha punteada $s(\alpha) \dashrightarrow t(\alpha)$ si $|\alpha| = 1$. Un carcaj con todas sus flechas de grado cero será llamado **carcaj sólido**. Un carcaj es **finito** si Q_0 y Q_1 son conjuntos finitos. Los **sucesores directos** de un vértice i es el conjunto de vértices j para los que existe una flecha de i a j . Sus **predecesores directos** j son aquellos vértices para los que existe una flecha de j a i . Un **árbol** es un carcaj que no contiene ciclos. Diremos que un carcaj es **regular** si no contiene subcarcajes de los siguientes tipos



Una ordenación del conjunto de vértices $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ será **admisibile** si para cualquier flecha α se tiene que $s(\alpha) > t(\alpha)$. Es claro que todo árbol tiene una ordenación admisible de sus vértices. A cada carcaj Q asociamos dos estructuras algebraicas, una k -álgebra kQ (para un campo arbitrario k) y una forma bilineal entera $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Un resultado fundamental en la teoría de representaciones de álgebras asociativas establece que la categoría de módulos de kQ está controlada por la forma bilineal de Q (ver por ejemplo [24]). Enseguida damos un esbozo de esta relación.



Asociamos a toda matriz entera $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ un carcaj finito $Q(M)$ de la siguiente manera. El conjunto de vértices $Q(M)_0$ son los enteros $\{1, \dots, n\}$. Para $i \neq j$, si $m_{ij} > 0$ se agregan m_{ij} flechas punteadas de i a j y si $m_{ij} < 0$ se agregan $-m_{ij}$ flechas sólidas de i a j . Además, si $m_{ii} > 1$ se agregan $m_{ii} - 1$ lazos punteados en el vértice i , y si $m_{ii} < 1$ se agregan $1 - m_{ii}$ lazos sólidos en i . Observamos que $Q(M)$ es siempre un carcaj regular.

Por otro lado, la **matriz de incidencias** de un carcaj finito Q es la matriz cuadrada $M_Q = (m_{ij})$ con entradas dadas por

$$m_{ij} = \begin{cases} -\sum_{\alpha:i \rightarrow j} (-1)^{|\alpha|}, & \text{si } i \neq j, \\ 1 - \sum_{\alpha:i \rightarrow i} (-1)^{|\alpha|}, & \text{si } i = j, \end{cases}$$

(si el conjunto de flechas de i a j es vacío la suma $\sum_{\alpha:i \rightarrow j}$ toma el valor cero). Claramente cualquier matriz cuadrada entera M es la matriz de incidencias de un carcaj, específicamente, $M = M_{Q(M)}$.

Lema 1.1 Si Q es un carcaj regular finito entonces $Q \cong Q(M_Q)$.

Demostración. Por construcción de $Q(M_Q)$ se tiene una biyección entre los conjuntos de vértices

$$f_0 : Q(M_Q)_0 \rightarrow Q_0.$$

Daremos por casos una biyección f_1 entre los conjuntos de flechas de $Q(M_Q)$ y Q correspondientes a una entrada m_{ij} de la matriz M_Q .

Caso $i \neq j$. Supongamos que $m_{ij} > 0$, por lo que hay m_{ij} flechas punteadas en $Q(M_Q)$ de i a j . Como Q es regular y $m_{ij} = -\sum_{\alpha:i \rightarrow j} (-1)^{|\alpha|}$, hay exactamente m_{ij} flechas de i a j en Q y todas ellas son punteadas. El caso $m_{ij} < 0$ se argumenta de manera similar. Por lo tanto podemos tomar una biyección f_1 entre las flechas en $Q(M_Q)$ que van de i a j y las flechas en Q de i a j .

Caso $i = j$. Supongamos ahora que $i = j$ y que $m_{ij} > 1$. Entonces hay $m_{ii} - 1$ lazos punteados en $Q(M_Q)$ sobre el vértice i . Como Q es regular y $m_{ii} = 1 - \sum_{\alpha:i \rightarrow i} (-1)^{|\alpha|}$, hay exactamente m_{ii} lazos sobre i en el carcaj Q y todos ellos son punteados. El caso $m_{ii} < 1$ es similar. Por lo tanto podemos tomar una biyección f_1 entre los lazos en $Q(M_Q)$ de vértice i y los lazos en Q sobre i .

Ya que no hay más flechas en el carcaj $Q(M_Q)$, esto termina la prueba. \square

La **forma bilineal entera** asociada a una matriz M de $n \times n$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_M : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z},$$

está dada por $\langle x, y \rangle = x^t M y$. La matriz asociada a una forma bilineal entera tiene por coeficientes los valores $m_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle$ para $i, j = 1, \dots, n$, donde \mathbf{e}_i es la base canónica de \mathbb{Z}^n . También es claro que las formas bilineales están determinadas por sus matrices asociadas (relación γ de la figura). Su **simetrización** es $(x, y) = (1/2)(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle)$ y la **forma cuadrática asociada** es $q(x) = \langle x, x \rangle$. Un vector entero x tal que $q(x) = 1$ es llamado **raíz** de q . Un vector es **positivo** si no es cero y todas sus entradas son no negativas.

Sea k un campo arbitrario. Las álgebras graduadas $T = \bigoplus T_i$ a considerar son libremente generadas por $A = T_0$ y $V = T_1$ (definición A.1 del apéndice). Entonces T es isomorfa al álgebra tensorial $T_A(V)$. Usualmente identificaremos a T con el álgebra $T_A(V)$. Pediremos además que $A \cong T_R(W_0)$ y $V \cong A \otimes_R W_1 \otimes_R A$ (es decir, $(R, W_0 \oplus W_1)$ es un **estrato** de T , ver definición A.7) para alguna k -álgebra trivial R (producto finito de copias del campo) y R - R -bimódulos finitamente generados W_0 y W_1 con acción central del campo. Tales álgebras serán llamadas **elementales**. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ el conjunto de idempotentes centrales primitivos ortogonales de R . Un elemento w de un R - R -bimódulo W es llamado **legible** si existen e_i, e_j tales que $w = e_j w e_i$. Un R - R -bimódulo W puede ser considerado como un $R^{op} \otimes R$ -módulo izquierdo, y como esta es una álgebra semi-simple, W tiene una base dual finita de elementos legibles. El carcaj $Q(T)$ asociado a una base de elementos legibles $\{z\}_{z \in I}$ de los bimódulos del estrato $(R, W_0 \oplus W_1)$ tiene por vértices el conjunto de idempotentes $Q(T)_0 = \{e_i\}_{i=1}^n$. Las flechas $Q(T)_1$ son los elementos de la base $\{z\}_{z \in I}$. El origen y destino de un elemento legible $z = e_j z e_i$ son los vértices e_i y e_j respectivamente. El grado corresponde al grado de W_0 y W_1 .

Por otro lado, un **camino** de i a j de un carcaj finito Q es un conjunto ordenado de flechas $\gamma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ tal que $s(\alpha_1) = i$, $t(\alpha_r) = j$ y $t(\alpha_\ell) = s(\alpha_{\ell+1})$ para $\ell = 1, \dots, r-1$. El grado del camino γ está dado por $|\gamma| = \sum |\alpha_\ell|$. Usamos la notación $\gamma = \alpha_r \alpha_{r-1} \dots \alpha_2 \alpha_1$. Se consideran los idempotentes e_i como caminos triviales. El **álgebra de caminos** kQ de un carcaj finito Q es el k -espacio vectorial con base los caminos de Q y producto dado por la concatenación. Observamos que el subespacio R de kQ generado por los caminos triviales es subálgebra trivial de kQ . Denotemos con W_i al subespacio de kQ generado por las flechas de grado i ($i \in \{0, 1\}$). Entonces W_i es un R - R -bimódulo finitamente generado y con acción central del campo y kQ es libremente generada por $(R, W_0 \oplus W_1)$, por lo que identificamos a kQ con el álgebra tensorial $T_R(W_0 \oplus W_1)$. Es claro que $T \cong k(Q(T))$ y $Q = Q(kQ)$ (relación β de la figura) y que el álgebra de caminos de un carcaj finito Q es de dimensión finita sobre el campo k si y solo si Q no contiene caminos cerrados o **ciclos orientados**.

Un **álgebra tensorial con diferencial** o **ditálgebra** (T, δ) consiste en un álgebra graduada $T = \bigoplus T_i$ libremente generada por (T_0, T_1) y una diferencial $\delta : T \rightarrow T$, es decir, una transformación k -lineal con $\delta^2 = 0$ tal que $\delta(T_i) \subset T_{i+1}$ y que satisface la regla de Leibniz:

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{|a|} a\delta(b),$$

para todo par a, b de elementos homogéneos de T . Se define la **categoría de (T, δ) -módulos de dimensión finita** $(T, \delta)\text{-mod}$ de la siguiente manera. Los objetos están dados por T_0 -módulos de dimensión finita. El grupo de morfismos $\mathbf{Hom}_{(T, \delta)}(M, N)$ entre dos módulos M y N se identifica con el núcleo de la

siguiente asignación (ver definición A.5 en el apéndice)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_R(M, N) & & \\ \oplus & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \\ \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) & & \end{array} \quad (1.1)$$

$$(f^0, f^1) \longmapsto \left[\begin{array}{c} w \otimes m \mapsto wf^0(m) \\ -f^0(wm) - \widehat{f^1}(\delta(w))(m) \end{array} \right],$$

donde $\widehat{f^1}$ es el correspondiente a f^1 bajo el isomorfismo

$$\mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \cong \mathbf{Hom}_{T_0, T_0}(T_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)),$$

(consultar el lema A.8). Decimos que una diferencial es **triangular en flechas sólidas** si existe una ordenación de tales flechas de manera que la diferencial de una flecha sólida α involucra solamente flechas sólidas estrictamente menores que α . De manera análoga se define **triangularidad en flechas punteadas** y se dice que una diferencial es **triangular** si es triangular en flechas sólidas y punteadas (comparar con la definición A.9). Un (T, δ) -módulo M es **inescindible** si cada vez que $M = M_1 \oplus M_2$ entonces una (y solo una) de las representaciones M_1 ó M_2 es cero. Denotamos mediante $\mathbf{ind}(T, \delta)$ al conjunto de clases de isomorfismo de (T, δ) -módulos inescindibles. Si la diferencial δ es triangular entonces $(T, \delta)\text{-mod}$ es una categoría **Krull-Schmidt** (es decir, una k -categoría aditiva tal que el anillo de endomorfismos de todo módulo inescindible es local, consultar la sección 2.2 de Ringel [24] y definición 5.10 y teorema 5.13 de Bautista, Salmerón y Zuazua [8]). Una subcategoría plena de una categoría Krull-Schmidt \mathcal{K} , que es cerrada bajo isomorfismos, sumas directas y sumandos directos, es llamada **clase de objetos** en \mathcal{K} . Para subconjuntos \mathcal{S} y \mathcal{S}' de $\mathbf{ind}\mathcal{K}$ denotemos con $\langle \mathcal{S} \rangle$ y $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$ a las clases de objetos en \mathcal{K} más pequeñas que contienen a representantes de \mathcal{S} y $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'$ respectivamente (y de manera similar cuando \mathcal{S} es un objeto de \mathcal{K}).

La categoría $(T, \delta)\text{-mod}$ tiene una **estructura exacta** \mathcal{E} [8, definición 6.3] como se describe a continuación. Para dos (T, δ) -módulos M y N se define la colección $\mathcal{E}(M, N)$ de pares de morfismos (f, g) que se pueden componer $N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$, tales que $gf = 0$ y la sucesión de R -módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \longrightarrow 0,$$

es exacta que se divide. Se define además en $\mathcal{E}(N, M)$ la relación $(f, g) \sim (f', g')$ siempre que existe un isomorfismo $h : E \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ N & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M \end{array}$$

Sea $\mathbf{Ext}_{(T, \delta)}^1(M, N) = \mathcal{E}(M, N) / \sim$ el grupo de extensiones de M a N . Entonces $\mathbf{Ext}_{(T, \delta)}^1(M, N)$ es isomorfo al conúcleo de la transformación σ (lema A.13 del apéndice).

Se dice que un (T, δ) -módulo M es **rígido** si $\mathbf{Ext}_{(T, \delta)}^1(M, M) = 0$. Un módulo inescindible y rígido es llamado **excepcional**. En algunas ocasiones el álgebra tensorial T puede recuperarse de la categoría (T, δ) -mod (relación ε de la figura) como se muestra en el siguiente lema. Para cada vértice i denotemos con $S(i)$ al T_0 -módulo simple de vértice i . Es claro que $S(i)$ sigue siendo simple como (T, δ) -módulo.

Lema 1.2 *Si (T, δ) es una ditálgebra cuya diferencial satisfice*

$$\delta(W_0) \subseteq \bigoplus_{m \geq 2} (W_0 \oplus W_1)^{\otimes m}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{Ext}_{(T, \delta)}^1(S(i), S(j)) &\cong e_j W_0 e_i, \\ \mathbf{Hom}_{(T, \delta)}(S(i), S(j)) &\cong \begin{cases} e_j W_1 e_i, & \text{si } i \neq j, \\ k \oplus e_i W_1 e_i, & \text{si } i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Demostración. Como las acciones de W_0 en los módulos simples $M = S(i)$ y $N = S(j)$ son nulas, la transformación σ dada por la asignación (1.1) tiene la forma

$$\begin{aligned} &\mathbf{Hom}_R(S(i), S(j)) \\ &\oplus \\ &\mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(S(i), S(j))) \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R S(i), S(j)) \\ &(f^0, f^1) \longmapsto \left[w \otimes m \mapsto -\widehat{f^1}(\delta(w))(m) \right]. \end{aligned}$$

Por la hipótesis y definición de $\widehat{f^1}$ (ver lema A.8 en el apéndice) tenemos que $\widehat{f^1}(\delta(w))(m)$ es cero para cualquier $m \in M$, de nuevo porque M es simple. Entonces σ es la transformación cero y por lo tanto su núcleo y conúcleo coinciden con su dominio y codominio respectivamente. Por otro lado es claro que $\mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R S(i), S(j)) \cong e_j W_0 e_i$ y que $\mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(S(i), S(j))) \cong e_j W_1 e_i$. Entonces $\mathbf{Ext}_{(T, \delta)}^1(S(i), S(j)) \cong e_j W_0 e_i$ y

$$\mathbf{Hom}_{(T, \delta)}(S(i), S(j)) \cong \mathbf{Hom}_R(S(i), S(j)) \oplus e_j W_1 e_i.$$

La afirmación es ahora evidente pues

$$\mathbf{Hom}_R(S(i), S(j)) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ k, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

□

Sean Q un carcaj finito. Estamos principalmente interesados en ditálgebras de la forma (kQ, δ) . En tal caso se pide que $\delta(R) = 0$ donde R es la subálgebra de kQ generada por los caminos triviales. Un (kQ, δ) -módulo M está determinado por los espacios vectoriales $M_i = e_i M$ para cada $i \in Q_0$ y las transformaciones lineales

$$\begin{aligned} M_\alpha : M_i &\longrightarrow M_j \\ m &\longmapsto \alpha m = e_j \alpha e_i m \end{aligned}$$

para cada flecha sólida $\alpha : i \rightarrow j$. En lo sucesivo identificamos los (kQ, δ) -módulos M con sus representaciones $(M_i; M_\alpha)_{i \in Q_0}^{|\alpha|=0}$.

Para una k -álgebra graduada $T = \bigoplus_m T_m$ de dimensión finita con idempotentes primitivos ortogonales $\{e_i\}_{i=1}^n$ definimos la **matriz de Cartan** C_T como la matriz cuadrada con coeficientes los enteros $m_{ji} = \mathbf{dimGr}_k(e_j T e_i)$, donde

$$\mathbf{dimGr}_k(e_j T e_i) = \sum_m (-1)^m \mathbf{dim}_k(e_j T_m e_i).$$

Si T es el álgebra de caminos de un carcaj finito Q sin ciclos orientados, entonces los coeficientes de $C_T = (m_{ji})$ están dados por

$$m_{ji} = \mathbf{dimGr}_k(e_j T e_i) = \sum (-1)^{|\gamma|},$$

donde la suma se toma sobre todos los caminos γ en Q que inician en el vértice i y terminan en el vértice j .

Lema 1.3 *Si Q es un carcaj finito con ordenación admisible de sus vértices, entonces*

$$Id = M_Q^t C_{kQ}.$$

Demostración. Sean i un vértice arbitrario de Q e i_1, \dots, i_r sus predecesores directos (como el orden es admisible $i_j > i$ para cada j). Denotemos con r_i al i -ésimo renglón de M_Q^t . Entonces r_i tiene un 1 en la posición i y el entero $a_j - b_j$ en el lugar i_j donde a_j es el número de flechas punteadas de i_j a i y b_j el número de flechas sólidas de i_j a i ($j = 1, \dots, r$). Las demás entradas de r_i son cero. Sea c_ℓ la ℓ -ésima columna de C_{kQ} . Por lo tanto el producto $r_i c_\ell$ tiene la forma

$$r_i c_\ell = \mathbf{dimGr}_k[e_i(kQ)e_\ell] + \sum_{j=1}^r (a_j - b_j) \mathbf{dimGr}_k[e_{i_j}(kQ)e_\ell].$$

Si $i \geq \ell$ entonces $e_{i_j}(kQ)e_\ell = 0$ para cada j , por lo que

$$r_i c_\ell = \begin{cases} 0, & \text{si } i > \ell, \\ 1, & \text{si } i = \ell. \end{cases}$$

Supongamos que $i < \ell$ y que hay t_j caminos de ℓ a i_j , digamos $\gamma_1^j, \dots, \gamma_{t_j}^j$. Observamos que para una flecha $\alpha : i_j \rightarrow i$ se tiene que o bien $|\alpha \gamma_u^j| = |\gamma_u^j|$ ó $|\alpha \gamma_u^j| = |\gamma_u^j| + 1$, dependiendo si α es sólida o punteada respectivamente. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{dimGr}_k[e_i(kQ)e_\ell] &= \sum_{j=1}^r \left(-a_j \sum_{u=1}^{t_j} (-1)^{|\gamma_u^j|} + b_j \sum_{u=1}^{t_j} (-1)^{|\gamma_u^j|} \right) = \\ &= - \sum_{j=1}^r (a_j - b_j) \sum_{u=1}^{t_j} (-1)^{|\gamma_u^j|} = \\ &= - \sum_{j=1}^r (a_j - b_j) \mathbf{dimGr}_k[e_{i_j}(kQ)e_\ell]. \end{aligned}$$

Entonces $r_i c_\ell = 0$. Esto termina la prueba pues $r_i c_\ell = \delta_{i,\ell}$. \square

La **dimensión vectorial** de una representación M es un elemento de \mathbb{Z}^{Q_0} dado por $\underline{\dim} M = (\dim_k M_i)_{i \in Q_0}$. La **característica de Euler** de (kQ, δ) -mod está dada, para dos (kQ, δ) -módulos M y N , por la diferencia

$$E(M, N) = \dim_k \mathbf{Hom}_{(kQ, \delta)}(M, N) - \dim_k \mathbf{Ext}_{(kQ, \delta)}^1(M, N).$$

La siguiente expresión de la forma bilineal asociada al carcaj Q en términos de sus flechas será de utilidad. Para vectores $m = (m_i)$ y $n = (n_i)$ en \mathbb{Z}^{Q_0} se tiene

$$\begin{aligned} \langle m, n \rangle_Q &= m^t M_Q n = \sum_{i, j \in Q_0} m_i n_j m_{ij} = \\ &= \sum_{i \in Q_0} m_i n_i m_{ii} + \sum_{\substack{i, j \in Q_0 \\ i \neq j}} m_i n_j m_{ij} = \\ &= \sum_{i \in Q_0} m_i n_i \left(1 - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \alpha: i \rightarrow i}} (-1)^{|\alpha|} \right) + \sum_{i, j \in Q_0} m_i n_j \left(- \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \alpha: i \rightarrow j}} (-1)^{|\alpha|} \right) \\ &= \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ |\alpha|=0}} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} + \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ |\gamma|=1}} m_{s(\gamma)} n_{t(\gamma)}. \end{aligned}$$

Lema 1.4 *Para cualquier diferencial triangular δ de kQ , la característica de Euler de (kQ, δ) coincide, a través de la dimensión vectorial, con la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ asociada a la matriz de incidencias M_Q , es decir,*

$$\langle \underline{\dim}(M), \underline{\dim}(N) \rangle_Q = \dim_k \mathbf{Hom}_{(kQ, \delta)}(M, N) - \dim_k \mathbf{Ext}_{(kQ, \delta)}^1(M, N).$$

Demostación. La transformación σ dada en (1.1) genera una sucesión exacta de la forma

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{(kQ, \delta)}(M, N) \rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{Hom}_R(M, N) \\ \oplus \\ \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \end{array} \xrightarrow{\sigma} \\ \xrightarrow{\sigma} \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \xrightarrow{\eta} \mathbf{Ext}_{(kQ, \delta)}^1(M, N) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

(consultar el lema A.13 del apéndice). Por otro lado, por la expresión dada de la forma bilineal en los vectores $m = \underline{\dim} M$ y $n = \underline{\dim} N$ se tiene

$$\langle m, n \rangle_Q = \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ |\alpha|=0}} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)} + \sum_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ |\gamma|=1}} m_{s(\gamma)} n_{t(\gamma)}.$$

Claramente $\dim_k \mathbf{Hom}_R(M, N) = \sum_{i \in Q_0} m_i n_i$. Como

$$\mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \cong \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ |\alpha|=0}} \mathbf{Hom}_k(M_{s(\alpha)}, N_{t(\alpha)}),$$

tenemos que $\dim_k \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) = \sum_{|\alpha|=0} m_{s(\alpha)} n_{t(\alpha)}$. Además se tiene un isomorfismo

$$\mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \cong \bigoplus_{\substack{\gamma \in Q_1 \\ |\gamma|=1}} \mathbf{Hom}_k(M_{s(\gamma)}, N_{t(\gamma)})$$

lo cual implica que $\dim_k \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) = \sum_{|\gamma|=1} m_{s(\gamma)} n_{t(\gamma)}$, con lo que terminamos la prueba. \square

1.2 Reflexiones y matriz de Coxeter.

Supongamos que Q es un carcaj finito con ordenación admisible de sus vértices. Entonces la matriz de Cartan C_{kQ} de Q es triangular superior con solo unos en la diagonal. En particular Q no tiene lazos y los vectores canónicos \mathbf{e}_i son raíces de la forma cuadrática q_Q de Q .

La **matriz de Coxeter** de Q está dada por

$$\Phi_Q = -C_{kQ}^t C_{kQ}^{-1}.$$

En esta sección se da una expresión alternativa para Φ_Q en términos de reflexiones. Si $n = |Q_0|$ se definen las **reflexiones simples** $\sigma_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ como

$$\sigma_i(x) = x - 2(x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i,$$

donde $(a, b) = (1/2)[\langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle]$ es la simetrización de la forma bilineal asociada a Q . Como $q_Q(\mathbf{e}_i) = 1$ se tiene que $\sigma_i(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{e}_i$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto para cualquier $x \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(x) &= \sigma_i(x - 2(x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i) = [\sigma_i(x)] - 2(x, \mathbf{e}_i)\sigma_i(\mathbf{e}_i) = \\ &= [x - 2(x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i] + 2(x, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = \\ &= x, \end{aligned}$$

es decir, $\sigma_i^2 = Id_{\mathbb{Z}^n}$. Si denotamos también con σ_i a la matriz correspondiente a la transformación σ_i respecto a la base canónica $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$, queremos probar que

$$\Phi_Q = \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1.$$

Para ello definimos vectores $p_{i,j}$ para $1 \leq i \leq j \leq n$ de la siguiente manera. Tomamos primero $p_{i,i} = \mathbf{e}_i$ para $1 \leq i \leq n$. Si tenemos $1 \leq i < j \leq n$ hacemos

$$p_{i,j} = \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1} \mathbf{e}_j.$$

Notamos que la i -ésima entrada x_i de un vector $x \in \mathbf{Z}^n$ se obtiene con el producto $\mathbf{e}_i^t x$. La siguiente igualdad, que se sigue directamente de la definición de σ_ℓ , será de utilidad en la prueba del siguiente lema,

$$\mathbf{e}_k^t \sigma_\ell(x) = \begin{cases} \mathbf{e}_k^t x = x_k, & \text{si } k \neq \ell, \\ x_\ell - 2(x, \mathbf{e}_\ell), & \text{si } k = \ell. \end{cases} \quad (1.2)$$

Lema 1.5 *Si $1 \leq i \leq j \leq n$ entonces*

$$\mathbf{e}_k^t p_{i,j} = \begin{cases} \sum_{\text{caminos } \gamma \text{ de } j \text{ a } k} (-1)^{|\gamma|}, & \text{si } i \leq k \leq j, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Demostración. Por la igualdad (1.2) es claro que si $k < i$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^t p_{i,j} &= \mathbf{e}_k^t \sigma_i(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}(\mathbf{e}_j)) = \mathbf{e}_k^t \sigma_{i+1}(\sigma_{i+2} \cdots \sigma_{j-1}(\mathbf{e}_j)) = \\ &= \mathbf{e}_k^t \sigma_{i+2}(\sigma_{i+3} \cdots \sigma_{j-1}(\mathbf{e}_j)) = \dots = \mathbf{e}_k^t \sigma_{j-1}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_k^t \mathbf{e}_j = \\ &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

y de forma similar cuando $j < k$ se tiene $\mathbf{e}_k^t p_{i,j} = 0$. Nos restringimos entonces al caso $i \leq k \leq j$ y hacemos inducción sobre la diferencia $j - i$. Cuando $i = j$ se tiene

$$\mathbf{e}_i^t p_{i,i} = \mathbf{e}_i^t \mathbf{e}_i = 1 = \sum_{\substack{\text{caminos } \gamma \\ \text{de } i \text{ a } i}} (-1)^{|\gamma|},$$

pues como el orden en los vértice es admisible el único camino de i en i es el trivial, que tiene grado cero. Esta es la base de inducción. Supongamos entonces que el enunciado del lema es cierto para los vectores $p_{i',j'}$ con $j' - i' \leq \ell$ y sean $1 \leq i < j \leq n$ con $j - i = \ell + 1$. Notamos primero que si $i < k \leq j$ entonces de nuevo por la igualdad (1.2) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^t p_{i,j} &= \mathbf{e}_k^t \sigma_i(\sigma_{i+1} \cdots \sigma_{j-1}(\mathbf{e}_j)) = \dots = \\ &= \mathbf{e}_k^t \sigma_k(\sigma_{k+1} \cdots \sigma_{j-1}(\mathbf{e}_j)) = \\ &= \mathbf{e}_k^t p_{k,j}, \end{aligned}$$

y como $j - k \leq \ell$, por hipótesis de inducción

$$\mathbf{e}_k^t p_{i,j} = \mathbf{e}_k^t p_{k,j} = \sum_{\substack{\text{caminos } \gamma \\ \text{de } j \text{ a } k}} (-1)^{|\gamma|}.$$

Por lo tanto basta analizar el caso $k = i$. Como $\mathbf{e}_i^t p_{i+1,j} = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i^t p_{i,j} &= \mathbf{e}_i^t \sigma_i(p_{i+1,j}) = \mathbf{e}_i^t [p_{i+1,j} - 2(p_{i+1,j}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i] = \\ &= -2(p_{i+1,j}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i^t \mathbf{e}_i = \\ &= -(\langle p_{i+1,j}, \mathbf{e}_i \rangle + \langle \mathbf{e}_i, p_{i+1,j} \rangle). \end{aligned}$$

Como el orden de los vértices es admisible, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_m \rangle = 0$ si $i < m$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}_i, p_{i+1,j} \rangle &= \langle \mathbf{e}_i, \sum_{m=1}^n (\mathbf{e}_m^t p_{i+1,j}) \mathbf{e}_m \rangle = \\ &= \sum_{m=1}^n \mathbf{e}_m^t p_{i+1,j} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_m \rangle = \\ &= \sum_{m=1}^i \mathbf{e}_m^t p_{i+1,j} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_m \rangle = 0, \end{aligned}$$

pues por lo visto en la igualdad (1.3), $\mathbf{e}_m^t p_{i+1,j} = 0$ para $m = 1, \dots, i$. Por otro lado recordamos que, para $m \neq i$, $\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i \rangle = \mathbf{e}_m^t M_Q \mathbf{e}_i = -\sum_{\substack{\text{flechas } \alpha \\ \text{de } m \text{ a } i}} (-1)^{|\alpha|}$. Por la hipótesis inductiva en el vector $p_{i+1,j}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle p_{i+1,j}, \mathbf{e}_i \rangle &= \sum_{m=1}^n \mathbf{e}_m^t p_{i+1,j} \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{m=i+1}^n \mathbf{e}_m^t p_{i+1,j} \langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_i \rangle = \\ &= \sum_{m=i+1}^n \left(\sum_{\substack{\text{caminos } \gamma \\ \text{de } j \text{ a } m}} (-1)^{|\gamma|} \right) \left(-\sum_{\substack{\text{flechas } \alpha \\ \text{de } m \text{ a } i}} (-1)^{|\alpha|} \right) = \\ &= -\sum_{\substack{\text{caminos } \gamma \\ \text{de } j \text{ a } i}} (-1)^{|\gamma|}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbf{e}_i^t p_{i,j} = -(\langle p_{i+1,j}, \mathbf{e}_i \rangle + \langle \mathbf{e}_i, p_{i+1,j} \rangle) = \sum_{\substack{\text{caminos } \gamma \\ \text{de } j \text{ a } i}} (-1)^{|\gamma|}$, lo que termina la prueba. \square

Denotemos con p_i al vector $p_{1,i}$, para $i = 1, \dots, n$. El siguiente corolario es consecuencia directa del resultado anterior.

Corolario 1.6 *Si Q es un carcaj finito con ordenación admisible de sus vértices entonces la matriz de Cartan C_{kQ} tiene como columnas los vectores p_1, \dots, p_n .*

Demostración. Por el lema anterior 1.5 las entradas del vector $p_i = p_{1,i}$ están dadas por

$$(p_i)_k = \mathbf{e}_k^t p_{1,i} = \sum_{\substack{\text{caminos } \gamma \\ \text{de } i \text{ a } k}} (-1)^{|\gamma|},$$

donde la suma se considera cero cuando el conjunto de caminos de i a k es vacío (en particular cuando $k > i$). Esta es justo la definición de la entrada k, i en la matriz C_{kQ} . \square

En particular, si Q solo tiene flechas sólidas entonces $p_i = \underline{\dim} P(i)$, donde $P(i) = kQ\mathbf{e}_i$ es el kQ -módulo proyectivo inescindible que es cubierta del simple de vértice i . En este caso, usando la dualidad estandar, el vector $q_i = C_{kQ}^t \mathbf{e}_i$ es la dimensión vectorial de la envolvente inyectiva del simple de vértice i . En general, con argumentos duales al caso de los vectores p_i , se prueba que

$$q_i = \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_{i+1}(\mathbf{e}_i).$$

Observamos que el conjunto p_1, \dots, p_n es base del grupo libre \mathbb{Z}^n . Por inducción mostramos que $\langle p_1, \dots, p_i \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i \rangle$ para $1 \leq i \leq n$. El caso $i = 1$ es claro pues $p_1 = \mathbf{e}_1$. Supongamos entonces que

$$G = \langle p_1, \dots, p_{\ell-1} \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{\ell-1} \rangle.$$

Notamos que si $i = 1, \dots, \ell-1$ entonces $\sigma_i(G) \subset G$ y $\sigma_i(\mathbf{e}_\ell) = \mathbf{e}_\ell + a$ para algún

elemento $a \in G$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} p_\ell &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-1}(\mathbf{e}_\ell) = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-2}(\mathbf{e}_\ell + a_2) = \\ &= \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{\ell-3}(\mathbf{e}_\ell + a_3) = \dots = \\ &= \sigma_1(\mathbf{e}_\ell + a_{\ell-1}) = \\ &= \mathbf{e}_\ell + a_\ell, \end{aligned}$$

para ciertos elementos a_1, \dots, a_ℓ de G . Entonces $\langle p_1, \dots, p_\ell \rangle = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_\ell \rangle$ lo que completa el paso inductivo.

Corolario 1.7 *Sea Q un carcaj finito con ordenación admisible de sus vértices. Denotemos con σ_i a la matriz correspondiente a la transformación σ_i respecto a la base canónica $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$. Entonces*

$$\Phi_Q = -C_{kQ}^t C_{kQ}^{-1} = \sigma_n \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1.$$

Demostración. Como comentamos arriba la matriz C_{kQ} satisface $C_{kQ} \mathbf{e}_i = p_i$ y $C_{kQ}^t \mathbf{e}_i = q_i$, por lo que

$$\begin{aligned} \Phi_Q p_i &= -C_{kQ}^t C_{kQ}^{-1} (C_{kQ} \mathbf{e}_i) = -C_{kQ}^t \mathbf{e}_i = \\ &= -q_i. \end{aligned}$$

Lo mismo es cierto para la composición $\sigma_n \cdots \sigma_1$, pues ya que $\sigma_i^2 = Id_{\mathbb{Z}^n}$ y $\sigma_i(\mathbf{e}_i) = -\mathbf{e}_i$ se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_n \cdots \sigma_1 p_i &= \sigma_n \cdots \sigma_1 (\sigma_1 \cdots \sigma_{i-1}(\mathbf{e}_i)) = \\ &= \sigma_n \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i(\mathbf{e}_i) = -\sigma_n \cdots \sigma_{i+1}(\mathbf{e}_i) = \\ &= -q_i. \end{aligned}$$

Como el conjunto $\{p_i\}_{i=1}^n$ es generador de \mathbb{Z}^n se concluye que las transformaciones Φ_Q y $\sigma_n \cdots \sigma_1$ coinciden. \square

Lema 1.8 *Sea Q un carcaj finito con ordenación admisible de sus vértices. Sean $(\cdot, \cdot)_Q$ la forma bilineal simétrica asociada a Q , σ_i la reflexión simple respecto al vértice i y Φ_Q la matriz de Coxeter de Q . Para un vector $x \in \mathbb{Z}^n$ son equivalentes*

- a) $\Phi_Q x = x$,
- b) $\sigma_i x = x$ para cada $i \in Q_0$,
- c) $(x, y)_Q = 0$ para cada vector $y \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración. Claramente (b) es equivalente a que $(x, \mathbf{e}_i)_Q = 0$ para todos los vectores canónicos \mathbf{e}_i , lo cual a su vez es equivalente a (c). También es claro, por el corolario 1.7, que (b) implica (a). Por lo tanto basta mostrar que (a) implica (b). Primero, como $\Phi_Q x = x$, la primera entrada x_1 del vector x ($x_1 = \mathbf{e}_1^t x$) satisface, por la igualdad (1.2) anterior,

$$\mathbf{e}_1^t x = \mathbf{e}_1^t \Phi_Q x = \mathbf{e}_1^t \sigma_n \cdots \sigma_1(x) = \mathbf{e}_1^t \sigma_1(x),$$

por lo que $\sigma_1 x = x$. Supongamos que hemos mostrado que $\sigma_i x = x$ para $i = 1, \dots, \ell - 1$. Entonces

$$\mathbf{e}_\ell^t x = \mathbf{e}_\ell^t \Phi_Q x = \mathbf{e}_\ell^t \sigma_\ell \sigma_{\ell-1} \cdots \sigma_1 x = \mathbf{e}_\ell^t \sigma_\ell x,$$

por lo que $\sigma_\ell x = x$. Esto termina la prueba. \square

1.3 Reducciones elementales.

Las siguientes operaciones sobre una ditálgebra $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$, llamadas reducciones elementales, han sido usadas en diferentes contextos para dar pruebas inductivas. Sus funtores de reducción asociados F^z ($z \in \{c, r, d\}$) son siempre fieles y plenos.

(c) Cambio de base, $F^c : \mathcal{A}^c\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$.

(r) Regularización, $F^r : \mathcal{A}^r\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$.

(d) Eliminación de idempotentes, $F^d : \mathcal{A}^d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$.

Los funtores asociados F^z son inducidos por morfismos de ditálgebras $\varphi^z : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^z$, esto es, morfismos de álgebras graduadas $\varphi : T \rightarrow T'$ que conmutan con diferenciales

$$\varphi \delta_{\mathcal{A}} = \delta_{\mathcal{A}'} \varphi.$$

Entonces F^z es dado en objetos por restricción de escalares [8, lema 2.4]. Recordamos que un functor F entre categorías k -aditivas \mathcal{C} y \mathcal{C}' con estructuras exactas \mathcal{E} y \mathcal{E}' respectivamente es llamado **functor exacto** si determina un mapeo de \mathcal{E} en \mathcal{E}' [8, definición 6.3]. Observamos que los funtores inducidos por morfismos de ditálgebras son exactos.

Lema 1.9 *Sea $F : (\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{E}')$ un functor exacto. Entonces para cada par de objetos M, N en \mathcal{C} el functor F induce una transformación*

$$F^* : \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}'}^1(F(M), F(N)).$$

Si F es fiel y pleno entonces F^ es monomorfismo.*

Demostración. Consideremos dos pares exactos $e_1 = (f_1, g_1)$ y $e_2 = (f_2, g_2)$ en \mathcal{E} que son equivalentes $e_1 \sim e_2$, y la imagen de esta equivalencia bajo el functor F ,

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{f_1} & E & \xrightarrow{g_1} & M \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ N & \xrightarrow{f_2} & E' & \xrightarrow{g_2} & M \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccc} F(N) & \xrightarrow{F(f_1)} & F(E) & \xrightarrow{F(g_1)} & F(M) \\ \parallel & & \downarrow F(h) & & \parallel \\ F(N) & \xrightarrow{F(f_2)} & F(E') & \xrightarrow{F(g_2)} & F(M). \end{array}$$

Ya que F es exacto y $F(h)$ es un isomorfismo si h lo es, tenemos que $F(e_1)$ es equivalente a $F(e_2)$ en la estructura exacta \mathcal{E}' . De esta manera F induce una función en los cocientes

$$F^* : \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}'}^1(F(M), F(N)).$$

Observamos que F^* es de hecho una transformación de espacios vectoriales, pues F conmuta con los morfismos diagonal Δ y codiagonal ∇ de la definición de sumas de Baer (ver [8, proposición 6.11]).

Supongamos ahora que F es fiel y pleno, y que $e = (f, g)$ es un par exacto tal que $F^*([e]) = 0$,

$$N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$$

$$F(N) \xrightarrow{F(f)} F(E) \xrightarrow{F(g)} F(M).$$

Entonces $F(g)$ es una retracción en \mathcal{C}' , por lo que existe $h' : F(M) \rightarrow F(E)$ tal que $F(g)h' = Id_{F(M)}$. Ya que F es pleno existe un morfismo $h : M \rightarrow E$ tal que $F(h) = h'$. Así

$$F(Id_M) = Id_{F(M)} = F(g)h' = F(g)F(h) = F(gh),$$

y como F es fiel se tiene que $gh = Id_M$. Por lo tanto g es una retracción y $[e] = 0$, es decir, F^* es monomorfismo. \square

Diremos que un functor exacto $F : (\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathcal{C}', \mathcal{E}')$ es **rígido** si para cada par de objetos M y N en \mathcal{C} el morfismo inducido

$$F^* : \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{C}'}^1(FM, FN)$$

es un isomorfismo.

Se define la **norma** $\|M\|$ de un \mathcal{A} -módulo M como

$$\|M\| = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ |\alpha|=0}} (\mathbf{dim}_k M_{s(\alpha)}) (\mathbf{dim}_k M_{t(\alpha)}).$$

Estaremos interesados en cómo se comportan los funtores de reducción F^z respecto a la dimensión vectorial, norma y grupos de extensiones.

Cambio de base.

Sean Q un carcaj finito y (kQ, δ) una ditálgebra con diferencial triangular. Consideremos un conjunto de flechas de grado uno $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ con mismo origen y mismo destino y tales que $1 \leq i < j \leq r$ implica que γ_i es menor que γ_j en la ordenación de flechas punteadas donde δ es triangular. Sean c_1, \dots, c_r escalares no cero y Q^c una copia de Q . Sean W y W^c los bimódulos de flechas de Q y Q^c y consideremos las funciones $g_1 : Q_1 \rightarrow W^c$ y $\tilde{g}_1 : Q_1^c \rightarrow W$ dadas por

$$g_1(\beta) = \begin{cases} \beta^c, & \text{si } \beta \neq \gamma_r, \\ \frac{1}{c_r} \left(\gamma_r^c - \sum_{i=1}^{r-1} c_i \gamma_i^c \right), & \text{si } \beta = \gamma_r; \end{cases}$$

$$\tilde{g}_1(\beta^c) = \begin{cases} \beta, & \text{si } \beta^c \neq \gamma_r^c, \\ \sum_i c_i \gamma_i, & \text{si } \beta^c = \gamma_r^c. \end{cases}$$

Por lo tanto g_1 y \tilde{g}_1 se extienden a morfismos de bimódulos $W \xrightleftharpoons[\tilde{g}_1]{g_1} W^c$ que son inversos uno de otro. Sean R y R^c las subálgebras de caminos triviales de

kQ y kQ^c y denotemos con $g_0 : R \rightarrow R^c$ al isomorfismo de álgebras dado por la correspondencia de vértices en Q y vértices en Q^c , y con \tilde{g}_0 a su inversa. Entonces los isomorfismos g_0 y g_1 se extienden a un isomorfismo de álgebras tensoriales $g : T_R(W) \rightarrow T_{R^c}(W^c)$, con inversa dada por la extensión tensorial \tilde{g} de los morfismos \tilde{g}_0 y \tilde{g}_1 . Ya que hemos identificado las álgebras $T_R(W)$ y kQ tenemos un isomorfismo

$$g : kQ \longrightarrow kQ^c,$$

con inversa \tilde{g} . Definamos $\delta^c = g\delta\tilde{g}$, que claramente es una diferencial. Damos el mismo orden en las flechas de Q^c que en Q . Ya que las funciones \tilde{g}_1 y g_1 envían una flecha β a una combinación lineal de flechas menores o iguales que β , entonces δ^c es una diferencial triangular en flechas sólidas y punteadas. Así (kQ^c, δ^c) es una ditálgebra con diferencial triangular y $g : (kQ, \delta) \rightarrow (kQ^c, \delta^c)$ es un isomorfismo. El functor que induce F^c es una equivalencia de categorías [8, lema 2.4]

$$F^c : \mathcal{A}^c\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}\text{-mod}.$$

Notamos que si α es una flecha sólida en Q con $\delta(\alpha) = \sum_{i=1}^r c_i \gamma_i$, entonces su correspondiente α^c satisface

$$\delta^c(\alpha^c) = g\delta\tilde{g}(\alpha^c) = g(\delta(\alpha)) = g\left(\sum_{i=1}^r c_i \gamma_i\right) = g(\tilde{g}(\gamma_r^c)) = \gamma_r^c.$$

Claramente el functor F^c preserva la dimensión vectorial $\underline{\dim} M = \underline{\dim} F^c(M)$ y la norma $\|M\| = \|F^c(M)\|$. Ya que el functor F^c es exacto, por el lema 1.9 induce inyecciones $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}^c}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(F^c(M), F^c(N))$ en grupos de extensiones. Como lo mismo es cierto para el functor inducido por el inverso g^{-1} , se concluye que F^c es un functor rígido.

Regularización.

Supongamos que α y γ son flechas tales que $\delta(\alpha) = \gamma$. La ditálgebra \mathcal{A}^r que se obtiene al regularizar las flechas α y γ es isomorfa a una ditálgebra de la forma (kQ^r, δ^r) [8, lema 23.18]. El carcaj Q^r se obtiene al quitar las flechas α y γ de Q . El morfismo de ditálgebras asociado $\varphi : (kQ, \delta) \rightarrow (kQ^r, \delta^r)$ induce una equivalencia de categorías

$$F^r : \mathcal{A}^r\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}\text{-mod},$$

tal que $\|M\| \leq \|F^r(M)\|$ [8, lema 25.3]. Además $\underline{\dim} M = \underline{\dim} F^r(M)$ y como F^r es un functor exacto, por el lema 1.9 induce una inclusión en grupos de extensiones $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}^r}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(F^r(M), F^r(N))$. Mostramos que es suprayectiva.

Pues si $F^r(N) \xrightarrow{u'} E' \xrightarrow{v'} F^r(M)$ es un par exacto, como F^r es denso existen un \mathcal{A}^r -módulo E y un isomorfismo $h : E' \rightarrow F^r(E)$. Entonces se tienen pares exactos equivalentes

$$\begin{array}{ccccc} F^r(N) & \xrightarrow{u'} & E' & \xrightarrow{v'} & F^r(M) \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ F^r(N) & \xrightarrow{u} & F^r(E) & \xrightarrow{v} & F^r(M). \end{array}$$

Como F^r es pleno existen $f : N \rightarrow E$ y $g : E \rightarrow M$ tales que $F^r(f) = u$ y $F^r(g) = v$. Verificamos finalmente que $N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M$ es un par exacto en \mathcal{A}^r . Por un lado $gf = 0$, pues $F^r(gf) = F^r(g)F^r(f) = vu = 0$ y F^r es fiel. Por otro lado la sucesión de R^r -módulos dada por restricción

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f_0} E \xrightarrow{g_0} M \longrightarrow 0,$$

es exacta, pues F^r está dado por restricción de escalares. Luego, F^r es rígido.

Eliminación de idempotentes.

Consideremos una ditálgebra con diferencial triangular (kQ, δ) y sea Q^d el subcarcaj pleno de Q determinado por un subconjunto de vértices $Q'_0 \subset Q_0$. Entonces existe una diferencial triangular δ^d en kQ^d tal que (kQ^d, δ^d) es una ditálgebra [8, lema 23.14] y la proyección canónica

$$\varphi^d : \mathcal{A} = (kQ, \delta) \longrightarrow \mathcal{A}^d = (kQ^d, \delta^d),$$

induce un funtor fiel y pleno $F^d : \mathcal{A}^d\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$. Un \mathcal{A} -módulo N es isomorfo a un objeto en la imagen de F^d si y solo si el soporte de N está contenido en Q'_0 . De nuevo por el lema 1.9 se tienen inclusiones

$$\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}^d}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(F^d(M), F^d(N)),$$

para cada par de \mathcal{A}^d -módulos M y N . Si se tiene un par exacto

$$e = F^d(N) \xrightarrow{u'} E' \xrightarrow{v'} F^d(M),$$

entonces el soporte de E' está contenido en Q'_0 , por lo que existe un isomorfismo $h : E' \rightarrow F^d(E)$ para algún \mathcal{A}^d -módulo E . Repitiendo el argumento dado en la regularización se tiene que el par exacto e es equivalente a la imagen de un par exacto en la categoría \mathcal{A}^d , y por lo tanto F^d es rígido. Además, si M es un \mathcal{A}^d -módulo y denotamos con $I_{Q'_0}$ a la matriz con $|Q'_0|$ columnas, $|Q_0|$ renglones y coeficientes dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \in Q'_0, \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

entonces $\underline{\dim} F^d(M) = I_{Q'_0} \underline{\dim} M$ y por lo tanto $\|M\| = \|F^d(M)\|$ [8, lema 25.4].

Lema 1.10 Sean Q un carcaj finito y (kQ, δ) una ditálgebra con diferencial triangular. Entonces existe un subcarcaj Q' de Q con $Q'_0 = Q_0$, una diferencial triangular δ' en kQ' y un morfismo de ditálgebras

$$\varphi : \mathcal{A} = (kQ, \delta) \longrightarrow \mathcal{A}' = (kQ', \delta'),$$

tales que el funtor inducido $F_\varphi : \mathcal{A}'\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ es una equivalencia de categorías y el carcaj Q' o bien no tiene flechas sólidas o tiene al menos una flecha sólida α con $\delta'(\alpha) = 0$. Además, el funtor F_φ es rígido y para cualquier \mathcal{A}' -módulo M se tiene $\underline{\dim} M = \underline{\dim} F_\varphi(M)$ y $\|M\| \leq \|F_\varphi(M)\|$.

Demostración. Comenzamos con una ditálgebra (kQ, δ) que tiene flechas sólidas pero ninguna de ellas tiene diferencial cero. Por triangularidad tenemos que la menor de las flechas sólidas α_0 satisface $\delta(\alpha_0) = \sum_{i=0}^r c_i \gamma_i$ para algunas flechas punteadas γ_i y algunos escalares no cero c_i . Haciendo un cambio de base si es necesario podemos suponer que $r = 0$ y $c_0 = 1$.

Sea (kQ^1, δ^1) la regularización de las flechas α_0 y γ_0 y sea $\varphi^1 : (kQ, \delta) \rightarrow (kQ^1, \delta^1)$ el morfismo asociado, compuesto con el morfismo de cambio de base si este fue realizado. Entonces el funtor inducido $F_{\varphi^1} : (kQ^1, \delta^1)\text{-mod} \rightarrow (kQ, \delta)\text{-mod}$ es una equivalencia de categorías.

Si (kQ^1, δ^1) no tiene flechas sólidas o al menos una flecha sólida α con $\delta(\alpha) = 0$ tomemos $(kQ', \delta') = (kQ^1, \delta^1)$. De lo contrario repetimos el argumento inicial en la ditálgebra (kQ^1, δ^1) para obtener (kQ^2, δ^2) y un morfismo de ditálgebras $\varphi^2 : (kQ^1, \delta^1) \rightarrow (kQ^2, \delta^2)$ tales que el funtor inducido F_{φ^2} es una equivalencia. Ya que Q es un carcaj finito, después de un número finito de repeticiones obtenemos una ditálgebra (kQ^ℓ, δ^ℓ) que no tiene flechas sólidas o que tiene al menos una flecha sólida con diferencial cero y un morfismo de ditálgebras $\varphi = \varphi^\ell \circ \dots \circ \varphi^1$ tal que el funtor inducido F_φ es una equivalencia de categorías. Tomamos entonces $(Q', \delta') = (Q^\ell, \delta^\ell)$.

Ahora, los funtores asociados a las reducciones elementales cambio de base y regularización son rígidos, preservan dimensión vectorial y no disminuyen la norma. Por lo tanto lo mismo es cierto para los funtores $F_{\varphi^1}, \dots, F_{\varphi^\ell}$ y para su composición F_φ . \square

1.4 Reducción a través de módulos admisibles

La herramienta principal de este trabajo es un caso particular de la reducción a través de módulos admisibles como se desarrolla por Bautista, Salmerón y Zuazua en [8, capítulo 12]. Supongamos que A es una k -álgebra de dimensión finita y sea P su radical. Supongamos además que existe una subálgebra S de A con $A = S \oplus P$ como S - S -bimódulos. Entonces decimos que A **se divide sobre su radical** (ver definición A.16).

Sean Q un carcaj finito y $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$ una ditálgebra con diferencial triangular. Supongamos además que Q'_1 es un subconjunto de flechas sólidas de diferencial cero de Q y denotemos con B a la subálgebra de kQ generada por las flechas de Q'_1 y los caminos triviales e_1, \dots, e_n . Sea X un B -módulo izquierdo de dimensión finita y consideremos su álgebra opuesta de endomorfismos $\Gamma = \mathbf{End}_B(X)^{op}$. Diremos que X es un B -módulo **admisibile** (ó de reducción) si Γ se divide sobre su radical $\Gamma = S \oplus P$. En este trabajo supondremos además que S es una k -álgebra trivial (consultar definiciones A.18 y A.19). Denotemos con $M^* = \mathbf{Hom}_S(M_S, S_S)$ al S -dual derecho de un S -módulo derecho M_S . La **reducción de \mathcal{A} a través de X** está dada por $\mathcal{A}^X = ((kQ)^X, \delta^X)$, donde $(kQ)^X$ es el álgebra tensorial

$$T_S(X^* \otimes_R W'' \otimes_R X \oplus P^*),$$

y W'' es el bimódulo de flechas determinado por el complemento de Q'_1 en Q_1 (definición A.20). La diferencial δ^X es descrita en [8, lema 12.9] (consultar los lemas A.21 y A.22 del apéndice). Los elementos de P^* tienen grado uno,

mientras que los de $X^* \otimes W'' \otimes X$ heredan el grado de Q . La construcción anterior viene acompañada por el **functor de reducción** F^X ,

$$((kQ)^X, \delta^X)\text{-mod} \xrightarrow{F^X} (kQ, \delta)\text{-mod},$$

cuya descripción explícita puede verse en la proposición A.23. El lema 13.3 y la proposición 13.5 en [8] afirman que cuando X es admisible de dimensión finita el funtor F^X es fiel y pleno (A.25 y A.26 en el apéndice). Además, para cada par de \mathcal{A}^X -módulos M y N , el funtor F^X induce una sucesión exacta en grupos de extensiones (ver A.28),

$$0 \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}^X}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(F^X(M), F^X(N)) \rightarrow \mathbf{Ext}_B^1(F^X(M), F^X(N)) \rightarrow 0.$$

Lema 1.11 *Sean Q un carcaj finito, $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$ una ditálgebra con diferencial triangular y B una subálgebra de kQ como arriba. Sea X un B -módulo rígido, admisible, con descomposición en inescindibles $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_r$ no isomorfos entre sí y tales que $\mathbf{End}_B(X_i) \cong k$ para cada i . Sean T la matriz cuyas columnas son las dimensiones vectoriales $\mathbf{dim} X_i$ y Q^x el carcaj correspondiente a la matriz entera $T^t M_Q T$. Entonces $\mathbf{dim} F^X(M) = T \mathbf{dim} M$ y la característica de Euler de \mathcal{A}^X coincide, a través de la dimensión vectorial, con la forma bilineal asociada al carcaj Q^x . Además, si el carcaj $Q((kQ)^X)$ asociado al álgebra tensorial graduada*

$$(kQ)^X = T_S(X^* \otimes W'' \otimes X \oplus P^*)$$

es regular, entonces es isomorfo a Q^x , y por lo tanto existe un isomorfismo de álgebras tensoriales $(kQ)^X \cong kQ^x$.

Demostración. Mostramos primero que $\mathbf{dim} F^X(M) = T \mathbf{dim} M$. Observamos que $\mathbf{dim} F^X(M)$ coincide con la dimensión vectorial del B -módulo $X \otimes_S M$. Entonces si M es un simple de vértice $S(j)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{dim} F^X(S(j)) &= \mathbf{dim} X \otimes_S S(j) = \mathbf{dim} \left(\bigoplus_{i=1}^r X_i \right) \otimes_S S(j) = \\ &= \mathbf{dim} X_j = T \mathbf{dim} S(j), \end{aligned}$$

pues $\mathbf{dim} S(j)$ es el vector canónico e_j . En general, ya que todo S -módulo derecho M es de la forma $M \cong \bigoplus_{i=1}^n m_i S(i)$ para algunos enteros no negativos m_i , notamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{dim} F^X(M) &= \mathbf{dim} X \otimes_S \left(\bigoplus_{i=1}^n m_i S(i) \right) = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{dim} X \otimes_S S(i) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i T \mathbf{dim} S(i) = T \mathbf{dim} \left(\bigoplus_{i=1}^n m_i S(i) \right) = \\ &= T \mathbf{dim} M. \end{aligned}$$

Ya que F^X es fiel y pleno e induce un isomorfismo en extensiones (pues X es rígido y por lo tanto $\mathbf{Ext}_B^1(F^X(M), F^X(N)) = 0$) y haciendo uso del lema 1.4,

se tienen igualdades

$$\begin{aligned}
\mathbf{dimHom}_{\mathcal{A}^X}(M, N) - \\
-\mathbf{dimExt}_{\mathcal{A}^X}^1(M, N) &= \mathbf{dimHom}_{\mathcal{A}}(F^X(M), F^X(N)) - \\
&\quad -\mathbf{dimExt}_{\mathcal{A}}^1(F^X(M), F^X(N)) = \\
&= \langle \mathbf{dim}F^X(M), \mathbf{dim}F^X(N) \rangle_Q = \\
&= \langle T\mathbf{dim}M, T\mathbf{dim}N \rangle_Q = \\
&= (\mathbf{dim}M)^t T^t M_Q T(\mathbf{dim}N) = \\
&= \langle \mathbf{dim}M, \mathbf{dim}N \rangle_{Q^x}.
\end{aligned}$$

Esto muestra que la característica de Euler de \mathcal{A}^X corresponde a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q^x}$, es decir, $M_{Q((kQ)^X)} = T^t M_Q T$. Si el carcaj de $(kQ)^X$ es regular, por el lema 1.1 tenemos que $Q(M_{Q((kQ)^X)}) \cong Q((kQ)^X)$. Por lo tanto

$$Q^x = Q(T^t M_Q T) = Q(M_{Q((kQ)^X)}) \cong Q((kQ)^X).$$

Usando el isomorfismo $kQ(A) \cong A$ para un álgebra tensorial elemental A se tiene

$$kQ^x \cong kQ((kQ)^X) \cong (kQ)^X,$$

lo que termina la prueba. \square

En general, si el carcaj $Q((kQ)^X)$ no es regular entonces las álgebras tensoriales kQ^x y $(kQ)^X$ no son isomorfas. Ejemplos de esto pueden encontrarse en las pruebas de los lemas 2.3 y 2.7 del siguiente capítulo.

El primer ejemplo de reducción consiste en suponer que B es la subálgebra de kQ generada por los caminos triviales y que X es suma directa de los simples $S(i)$ de vértice i . Entonces $\Gamma \cong R$, $(kQ)^X \cong kQ$ y $\delta^X \cong \delta$. Uno de los ejemplos de reducción no trivial más sencillos, llamado **reducción de eje**, se describe a continuación.

Reducción de eje.

Supongamos que Q'_1 consiste en una flecha $\alpha : i_0 \rightarrow j_0$ ($i_0 \neq j_0$) sólida y de diferencial cero. Entonces B es el álgebra de caminos del carcaj

$$\mathbf{A}_2 = i_0 \xrightarrow{\alpha} j_0$$

más cierto número de vértices aislados. Denotemos con X_i al B -módulo simple de vértice $S(i)$ y fijemos un vector no cero x_i^i de X_i . Sea $X_z = E$ el \mathbf{A}_2 -módulo excepcional $E = kx_{i_0}^z \xrightarrow{1} kx_{j_0}^z$ visto como B -módulo, y notemos que $\mathbf{End}_B(E) \cong k$. Tomemos por B -módulo de reducción X a la suma directa

$$X = \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right) \oplus X_z.$$

Además de los endomorfismos de los inescindibles de X se tienen los morfismos no cero $X_{j_0} \xrightarrow{\mu} X_z \xrightarrow{\nu} X_{i_0}$ dados por

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & E_{i_0} & \xrightarrow{1} & S(i_0)_{i_0} \\ \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ S(j_0)_{j_0} & \xrightarrow{1} & E_{j_0} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Consideramos el álgebra de endomorfismos opuesta Γ del B -módulo X como álgebra de matrices $[\mathbf{Hom}_B(X_i, X_j)]$ para $i, j \in \{1, \dots, n, z\}$. Entonces Γ se divide sobre su radical $\Gamma = S \oplus P$, donde la diagonal S consiste en copias del campo (pues $\mathbf{End}_B(X_i) \cong k$ para cada i) y P es generado por los morfismos μ, ν vistos como elementos de Γ . Así el B -módulo X es admisible y la reducción de $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$ respecto a X es denotada mediante $\mathcal{A}^e = ((kQ)^X, \delta^e)$.

El álgebra tensorial reducida $(kQ)^X$ es isomorfa al álgebra de caminos de un carcaj Q^e que puede ser descrito de la siguiente manera. Consideremos la siguiente partición en el conjunto de flechas Q_1 ,

$$Q_1 = \{\alpha\} \sqcup Q_1(\emptyset) \sqcup Q_1(s) \sqcup Q_1(t) \sqcup Q_1(s, t),$$

donde

$$Q_1(\emptyset) = \{\beta \in Q_1 \mid s(\beta) \notin \{i_0, j_0\}, t(\beta) \notin \{i_0, j_0\}\},$$

$$Q_1(s) = \{\beta \in Q_1 \mid s(\beta) \in \{i_0, j_0\}, t(\beta) \notin \{i_0, j_0\}\},$$

$$Q_1(t) = \{\beta \in Q_1 \mid s(\beta) \notin \{i_0, j_0\}, t(\beta) \in \{i_0, j_0\}\},$$

$$Q_1(s, t) = \{\beta \in Q_1 \mid \beta \neq \alpha, s(\beta) \in \{i_0, j_0\}, t(\beta) \in \{i_0, j_0\}\}.$$

El conjunto de vértices del carcaj reducido Q^e es $Q_0^e = Q_0 \sqcup \{z\}$. El conjunto de flechas está dado por

$$Q_1^e = Q_1^e(\emptyset) \sqcup Q_1^e(s) \sqcup Q_1^e(t) \sqcup Q_1^e(s, t) \sqcup \{\alpha_\mu, \alpha_\nu\},$$

donde las flechas $\alpha_\mu : j_0 \rightarrow z$ y $\alpha_\nu : z \rightarrow i_0$ corresponden a los elementos μ^* y ν^* de P^* respectivamente, y

$$Q_1^e(\emptyset) = Q_1(\emptyset),$$

$$Q_1^e(s) = Q_1(s) \sqcup Q_1(s)^z,$$

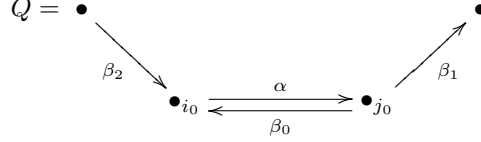
$$Q_1^e(t) = Q_1(t) \sqcup {}^z Q_1(t),$$

$$Q_1^e(s, t) = Q_1(s, t) \sqcup Q_1(s, t)^z \sqcup {}^z Q_1(s, t) \sqcup {}^z Q_1(s, t)^z.$$

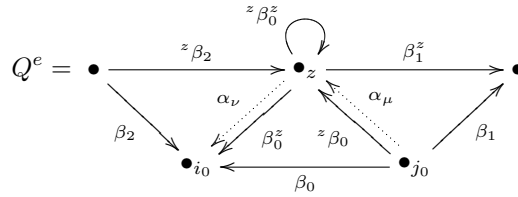
En la notación anterior, si D es un subconjunto de Q_1 y s^e, t^e son las funciones origen y destino de Q^e , entonces D^z denota una copia de D donde cada flecha $\beta^z \in D^z$, copia de $\beta \in D$, satisface $s^e(\beta^z) = z$ y $t^e(\beta^z) = t(\beta)$. De manera análoga ${}^z D$ es una copia de flechas de D que consiste en flechas ${}^z \beta \in {}^z D$, copia de $\beta \in D$, con $s^e({}^z \beta) = s(\beta)$ y $t^e({}^z \beta) = z$. Similarmente se define ${}^z D^z$. Las flechas α_μ y α_ν tienen grado uno. El resto de las flechas heredan el grado del carcaj Q [8, lema 23.18]. La diferencial triangular δ^e , así como el funtor asociado

$F^e : \mathcal{A}^e\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$, son descritos en [8, lema 12.10]. El funtor F^e es una equivalencia de categorías [8, lema 25.8].

En el siguiente ejemplo $Q_1(\emptyset)$ es un conjunto vacío, $Q_1(s) = \{\beta_1\}$, $Q_1(t) = \{\beta_2\}$ y $Q_1(s, t) = \{\beta_0\}$,



Su carcaj reducido Q^e tiene un lazo y no es regular,



Sean M^e un módulo de la ditálgebra reducida \mathcal{A}^e y $M = F^e(M^e)$. Damos explícitamente las transformaciones que conforman a M en términos de las transformaciones M_{β^e} (para β^e flecha sólida de Q^e). Sea β una flecha sólida en Q . Entonces la transformación M_β está dada por

$$M_\beta = \begin{cases} M_\beta^e, & \text{si } \beta \in Q_1(\emptyset), \\ \begin{bmatrix} M_\beta^e & M_{\beta^z}^e \end{bmatrix}, & \text{si } \beta \in Q_1(s), \\ \begin{bmatrix} M_\beta^e \\ M_{z\beta}^e \end{bmatrix}, & \text{si } \beta \in Q_1(t), \\ \begin{bmatrix} M_\beta^e & M_{\beta^z}^e \\ M_{z\beta}^e & M_{z\beta^z}^e \end{bmatrix}, & \text{si } \beta \in Q_1(s, t), \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{M_z^e} \end{bmatrix}, & \text{si } \beta = \alpha. \end{cases} \quad (1.4)$$

Esta descripción se obtiene de analizar la receta de F^e .

Consideremos ahora los vectores $\underline{\dim} M^e = (m_i^e) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ y $\underline{\dim} M = (m_i) \in \mathbb{Z}^n$. Observamos que el S -módulo izquierdo M^e tiene la forma

$$M^e = \left(\bigoplus_{i=1}^n m_i^e S(i) \right) \oplus m_z^e S(z).$$

Entonces $\underline{\dim} E \otimes_S M^e = m_z^e \underline{\dim} X_{i_0} + m_z^e \underline{\dim} X_{j_0}$ (recordamos que $X_z = E = kx_{i_0}^z \xrightarrow{1} kx_{j_0}^z$ es el \mathbf{A}_2 -módulo excepcional no simple) y por lo tanto

$$\begin{aligned} \underline{\dim} F^e(M^e) &= \underline{\dim} X \otimes_S M^e = \sum_{i=1}^n \underline{\dim} X_i \otimes_S M^e + \underline{\dim} X_z \otimes_S M^e = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i^e \underline{\dim} X_i \otimes_S S(i) + \underline{\dim} E \otimes_S M^e = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i^e \underline{\dim} X_i + m_z^e \underline{\dim} X_{i_0} + m_z^e \underline{\dim} X_{j_0}, \end{aligned}$$

es decir,

$$m_i = \begin{cases} m_i^e, & \text{si } i \neq i_0, j_0, \\ m_i^e + m_z^e, & \text{si } i = i_0, j_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Usando esta igualdad y la partición de las flechas Q_1 es posible comparar las normas de M^e y M ,

$$\begin{aligned} \|M\| &= \sum_{\substack{\beta \in Q_1 \\ |\beta|=0}} m_{s(\beta)} m_{t(\beta)} = \\ &= m_{i_0} m_{j_0} + \sum_{\substack{\beta \in Q_1(\emptyset) \\ |\beta|=0}} m_{s(\beta)}^e m_{t(\beta)}^e + \sum_{\substack{\beta \in Q_1(s) \\ |\beta|=0}} (m_{s(\beta)}^e + m_z^e) m_{t(\beta)}^e + \\ &+ \sum_{\substack{\beta \in Q_1(t) \\ |\beta|=0}} m_{s(\beta)}^e (m_{t(\beta)}^e + m_z^e) + \sum_{\substack{\beta \in Q_1(s,t) \\ |\beta|=0}} (m_{s(\beta)}^e + m_z^e) (m_{t(\beta)}^e + m_z^e). \end{aligned}$$

Considerando la partición del conjunto de flechas de Q_1^e se obtiene

$$\begin{aligned} \|M\| &= m_{i_0} m_{j_0} + \left(\sum_{\substack{\beta \in Q_1(\emptyset) \\ |\beta|=0}} m_{s^e(\beta)}^e m_{t^e(\beta)}^e \right) + \\ &+ \left(\sum_{\substack{\beta \in Q_1(s) \\ |\beta|=0}} m_{s^e(\beta)}^e m_{t^e(\beta)}^e + \sum_{\substack{\beta^z \in Q_1(s)^z \\ |\beta^z|=0}} m_{s^e(\beta^z)}^e m_{t^e(\beta^z)}^e \right) + \\ &+ \left(\sum_{\substack{\beta \in Q_1(t) \\ |\beta|=0}} m_{s^e(\beta)}^e m_{t^e(\beta)}^e + \sum_{\substack{z \beta \in Q_1(t) \\ |z \beta|=0}} m_{s^e(z \beta)}^e m_{t^e(z \beta)}^e \right) + \\ &+ \left(\sum_{\substack{\beta \in Q_1(s,t) \\ |\beta|=0}} m_{s^e(\beta)}^e m_{t^e(\beta)}^e + \sum_{\substack{\beta^z \in Q_1(s,t)^z \\ |\beta^z|=0}} m_{s^e(\beta^z)}^e m_{t^e(\beta^z)}^e + \right. \\ &\left. + \sum_{\substack{z \beta \in Q_1(s,t) \\ |z \beta|=0}} m_{s^e(z \beta)}^e m_{t^e(z \beta)}^e + \sum_{\substack{z \beta^z \in Q_1(s,t)^z \\ |z \beta^z|=0}} m_{s^e(z \beta^z)}^e m_{t^e(z \beta^z)}^e \right) \\ &= m_{i_0} m_{j_0} + \|M^e\|, \end{aligned}$$

es decir, $\|F^e(M^e)\| = \|M\| = m_{i_0} m_{j_0} + \|M^e\|$. En particular si $m_{i_0} \neq 0$ y $m_{j_0} \neq 0$ entonces $\|M^e\| < \|M\|$.

1.5 Representaciones excepcionales.

Sean Q un carcaj finito y δ una diferencial triangular de kQ . Enseguida damos algunas propiedades de representaciones excepcionales de (kQ, δ) .

Lema 1.12 *Sea Q' un subcarcaj sólido con diferencial cero de Q . Si M es un (kQ, δ) -módulo rígido entonces su restricción $M|_{Q'}$ es rígida como kQ' -módulo. En particular para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ de grado y diferencial cero, la transformación lineal M_α es inyectiva o suprayectiva. Y si $\alpha : i \rightarrow i$ es un lazo con diferencial cero entonces $M_i = 0$.*

Demostración. Sea Q'' el carcaj obtenido al agregarle a Q' todos los vértices de Q que no están en Q'_0 , de manera que se obtiene una inclusión de álgebras $kQ'' \rightarrow kQ$. Claramente un Q'' -módulo N es rígido si y solo si su restricción $N|_{Q'}$ lo es, por lo que podemos suponer que $Q'' = Q'$. Sean W_0 y W'_0 los bimódulos de flechas de grado cero de Q y Q' y denotemos con $i : W'_0 \rightarrow W_0$ a la inclusión de bimódulos. Notamos entonces que la inclusión i hace conmutar el siguiente diagrama, donde σ es la transformación dada en (1.1).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_R(M, N) & & \\ \oplus & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \\ \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) & & \downarrow \mathbf{Hom}(i \otimes M, N) \\ [I \ 0] \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Hom}_R(M, N) & \xrightarrow{\sigma'} & \mathbf{Hom}_R(W'_0 \otimes_R M, N). \end{array}$$

En efecto, por un lado $\sigma'[I \ 0](f^0, f^1) = \sigma'(f^0, 0) : w' \otimes m \mapsto w' f^0(m) - f^0(w' m)$. Por otro lado $\mathbf{Hom}(i \otimes M, N)\sigma(f^0, f^1)$ es el morfismo que manda $w' \otimes m$ en $w' f^0(m) - f^0(w' m) - \widehat{f^1}(\delta(w'))(m)$. Esto es igual a $w' f^0(m) - f^0(w' m)$ pues los elementos de W'_0 tienen diferencial cero. Entonces el diagrama es conmutativo y pasando a conúcleos se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{Ext}_{(kQ, \delta)}^1(M, N) & \longrightarrow & 0 \\ \mathbf{Hom}(i \otimes M, N) \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{Hom}_R(W'_0 \otimes_R M, N) & \xrightarrow{\eta} & \mathbf{Ext}_{kQ'}^1(M|_{Q'}, N|_{Q'}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Más aún, el morfismo $\mathbf{Hom}(i \otimes M, N)$ es suprayectivo pues i es inyectivo y R es semi-simple. Por lo tanto el inducido en conúcleos también es suprayectivo y $\mathbf{Ext}_{(kQ, \delta)}^1(M, M) = 0$ implica $\mathbf{Ext}_{kQ'}^1(M|_{Q'}, M|_{Q'}) = 0$.

Para la segunda afirmación supongamos que $i \neq j$. Lo anterior implica que la \mathbf{A}_2 -representación

$$M|_{\mathbf{A}_2} = (M_i, M_j; M_\alpha)$$

es rígida. Si la transformación M_α no es ni inyectiva ni suprayectiva, entonces $M|_{\mathbf{A}_2}$ contiene como sumando directo a $S(i) \oplus S(j)$. Pero esto es imposible ya que $S(i) \oplus S(j)$ no es rígido (pues $\langle e_i, e_j \rangle_{\mathbf{A}_2} = -1$, ver lema 1.4).

Supongamos ahora que $i = j$ y sea L el subcarcaj de Q dado por el vértice i y el lazo α . Entonces $M|_L = (M_i; M_\alpha)$ es un kL -módulo rígido, y como la forma bilineal de L es idénticamente cero, de nuevo por el lema 1.4 se tiene

$$0 = \langle \underline{\dim} M|_L, \underline{\dim} M|_L \rangle_L = \underline{\dim}_k \mathbf{Hom}_{kL}(M|_L, M|_L).$$

Así $\mathbf{End}_{kL}(M|_L) = 0$ por lo que $M_i = 0$. □

Se dice que un módulo M es **sincero** si todas las entradas del vector $\underline{\dim} M$ son mayores que cero.

Lema 1.13 Sean Q un carcaj finito y $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$ una ditálgebra con diferencial triangular. Si M y N son representaciones excepcionales de \mathcal{A} con $\underline{\dim}M = \underline{\dim}N$ entonces $M \cong N$.

Demostración. Eliminando los vértices de Q donde $M_i = 0$ podemos suponer que M (y por lo tanto N) es una representación sincera. Procedemos por inducción sobre la norma $\|M\|$ del módulo M . Como $\underline{\dim}M = \underline{\dim}N$ se tiene que $\|M\| = \|N\|$. Además $\|M\| = 0$ si y sólo si M y N son simples correspondientes a un vértice i , y por lo tanto el enunciado se satisface para módulos de norma cero. Supongamos que es válido para representaciones de norma menor o igual a ℓ y sea M un módulo con $\|M\| = \ell + 1$. Ya que $\|M\| > 0$ por el lema 1.10 podemos suponer que existe una flecha $\alpha : i_0 \rightarrow j_0$ con diferencial cero (la equivalencia F_φ del lema 1.10 preserva módulos excepcionales y no disminuye la norma). Como consecuencia del lema 1.12 la transformación M_α no es cero, pues M es un módulo sincero. En particular α no es un lazo y la reducción de eje M^e respecto a α del módulo M (es decir, M^e es un \mathcal{A}^e -módulo tal que $F^e(M^e) \cong M$) satisface $\|M^e\| \leq \ell$. Además M^e y N^e son excepcionales por la sucesión exacta antes del lema 1.11. Mostramos que $\underline{\dim}M^e = \underline{\dim}N^e$. Por la igualdad (1.5) anterior se tiene

$$(m_1, \dots, m_{i_0}, \dots, m_{j_0}, \dots, m_n) = (m_1^e, \dots, m_{i_0}^e + m_z^e, \dots, m_{j_0}^e + m_z^e, \dots, m_n^e),$$

$$(n_1, \dots, n_{i_0}, \dots, n_{j_0}, \dots, n_n) = (n_1^e, \dots, n_{i_0}^e + n_z^e, \dots, n_{j_0}^e + n_z^e, \dots, n_n^e).$$

Por el lema 1.12, la transformación M_α es inyectiva o suprayectiva (dependiendo del valor de $m_{i_0} - m_{j_0}$, ver la descripción de M_α en 1.4) y lo mismo es cierto para N_α . Entonces, puesto que $\underline{\dim}M = \underline{\dim}N$, se tiene $\underline{\dim}M^e = \underline{\dim}N^e$. Así, por hipótesis de inducción $M^e \cong N^e$, y como F^e es una equivalencia se tiene que $M \cong N$. \square

Lema 1.14 Si Q es un carcaj finito, sólido y con ordenación admisible de sus vértices entonces el álgebra de endomorfismos de cualquier kQ -módulo excepcional es isomorfa al campo k .

Demostración. Consultar el corolario 1 de Ringel [25]. \square

En tal caso, como consecuencia del lema 1.13, la dimensión vectorial $\underline{\dim}$ induce una función inyectiva entre el conjunto de clases de isomorfismo de módulos excepcionales y el conjunto de raíces positivas de Q .

Dada una (kQ, δ) -representación M fijamos bases \mathcal{B}_i para cada uno de los k -espacios vectoriales M_i , $i \in Q_0$. Decimos que la unión disjunta $\mathcal{B} = \bigsqcup \mathcal{B}_i$ es **base del módulo** M . Se define el **carcaj de coeficientes** $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$ de M respecto a la base \mathcal{B} como el carcaj sólido con conjunto de vértices \mathcal{B} y flechas dadas de la siguiente manera. Para cada flecha sólida $\alpha : i \rightarrow j$ en Q se agrega una flecha (sólida) de $e^i \in \mathcal{B}_i$ a $e^j \in \mathcal{B}_j$ en $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$ si el coeficiente de la matriz M_α correspondiente a la posición (e^i, e^j) es diferente de cero.

Lema 1.15 Un (kQ, δ) -módulo M es inescindible si y solo si para cualquier base \mathcal{B} de M , el carcaj de coeficientes $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$ es conexo.

Demostración. Mostramos primero que si $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$ es desconexo para alguna base \mathcal{B} de M , entonces M se escinde. Sea \mathcal{C}_1 una componente conexa de $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$ (no vacía y distinta del total) y sea $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1^c$ su complemento. Vamos a definir un endomorfismo f de M en (kQ, δ) -mod, que es un idempotente no trivial. Consideremos la asignación $f^0 : \mathcal{B} \rightarrow M$ dada por

$$f^0(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathcal{C}_1, \\ 0, & \text{si } x \in \mathcal{C}_2. \end{cases}$$

Sea A la subálgebra de grado cero de kQ . Mostraremos que la extensión lineal de f^0 a M , que denotamos con el mismo símbolo f^0 , es un morfismo de A -módulos. Sea α una flecha sólida de Q . Si $x \in \mathcal{C}_1$ entonces $M_\alpha x = \sum_{i=1}^r a^i x_1^i$ con $x_1^i \in \mathcal{C}_1$ y $a^i \in k$, pues \mathcal{C}_1 es una componente del carcaj de coeficientes $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$. Entonces

$$\alpha f^0(x) = \alpha x = \sum_{i=1}^r a^i x_1^i = \sum_{i=1}^r a^i f^0(x_1^i) = f^0\left(\sum_{i=1}^r a^i x_1^i\right) = f^0(\alpha x).$$

Por otro lado, si $x \in \mathcal{C}_2$ entonces $M_\alpha x = \sum_{j=1}^u b^j x_2^j$ con $x_2^j \in \mathcal{C}_2$ y $b^j \in k$, por lo que $\alpha f^0(x) = \alpha 0 = 0$ y

$$f^0(\alpha x) = f^0\left(\sum_{j=1}^u b^j x_2^j\right) = \sum_{j=1}^u b^j f^0(x_2^j) = 0.$$

De esta manera f^0 es un morfismo de A -módulos, por lo que $f = (f^0, 0)$ es un endomorfismo del (kQ, δ) -módulo M . Claramente f es un idempotente no trivial. Como los idempotentes se dividen en (kQ, δ) -mod [8, lema 5.12], concluimos que M se escinde.

Supongamos ahora que M se escinde como (kQ, δ) -módulo. Queremos mostrar que existe una base \mathcal{B} de M tal que $\mathcal{C}(M, \mathcal{B})$ es desconexo. Para ello verificamos que M se escinde como A -módulo. En efecto, si M se escinde como (kQ, δ) -módulo, entonces existe un endomorfismo g de M que es idempotente no trivial. Por el lema 5.7 de [8] podemos suponer que $g = (g^0, 0)$. Entonces g^0 es un endomorfismo de A -módulos, que es un idempotente no trivial. Así, M se escinde como A -módulo, es decir, existe una descomposición no trivial $M = M_1 \oplus M_2$. Sean \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 bases de M_1 y M_2 . Verificamos que las subgráficas plenas \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 del carcaj de coeficientes $\mathcal{C} = \mathcal{C}(M, \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2)$ determinadas por la partición $\mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2$ separan a \mathcal{C} . Pues como M_1 y M_2 son submódulos de M , si existe una flecha $\alpha : x \rightarrow y$ en \mathcal{C} entonces $x \in \mathcal{C}_i$ implica $y \in \mathcal{C}_i$ para $i \in \{1, 2\}$. \square

Un (kQ, δ) -módulo M es llamado **módulo árbol** si tiene una base \mathcal{B} (llamada árbol) respecto a la cual el carcaj de coeficientes de M es tipo árbol. Como Ringel ha indicado [26, propiedad 2], en tal caso las bases pueden ser reajustadas de manera que las matrices M_α exhiban solo coeficientes 0 y 1.

Lema 1.16 Sean Q un carcaj finito y $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$ una ditálgebra con diferencial triangular. Supongamos que Q'_1 es un subconjunto de flechas sólidas con diferencial cero de Q y denotemos con B a la subálgebra de kQ generada por las flechas de Q'_1 y los caminos triviales e_1, \dots, e_n . Consideremos B -módulos

X^1, \dots, X^r no isomorfos entre sí con $\mathbf{End}_B(X^i) \cong k$ y tales que el álgebra de endomorfismos de $X = X^1 \oplus \dots \oplus X^r$, vista como álgebra de matrices, es triangular superior (en particular el B -módulo X es admisible). Entonces existe un carcaj finito Q^x tal que el álgebra tensorial reducida $(kQ)^X$ es isomorfa al álgebra de caminos kQ^x . Supongamos además que cada X^i es un B -módulo árbol. Entonces para cada \mathcal{A}^X -módulo árbol N , la \mathcal{A} -representación $F^X(N)$ también es árbol.

Demostración. Sea $kQ = T_R(W_0 \oplus W_1)$ donde R es la subálgebra de caminos triviales y W_i es el bimódulo de flechas de grado i de Q ($i \in \{0, 1\}$). Denotemos con Q_0'' al conjunto de flechas sólidas de Q que no están en Q_0' . Por hipótesis el álgebra opuesta de endomorfismos $\mathbf{End}_B(X)^{op} \cong S \oplus P$ se divide trivialmente sobre su radical. Entonces $(kQ)^X = T_S(W_0^X \oplus W_1^X)$ donde $S = S_1 \times \dots \times S_r$, $S_i \cong k$ es el álgebra opuesta de endomorfismos de X^i y

$$W_0^X \cong X^* \oplus_R W_0'' \oplus_R X, \quad \text{y} \quad W_1^X \cong [X^* \oplus_R W_1 \oplus_R X] \oplus P^*,$$

donde W_0'' denota al bimódulo de flechas determinado por Q_0'' (consultar la definición A.20). Sea $U = Q_0''$ y sea V el conjunto de flechas punteadas de Q . Sea f_i la identidad de X^i considerada como elemento de $\mathbf{End}_B(X^i)$. Tomamos como vértices del carcaj Q^x el conjunto $\{f_i\}_{i=1}^r$. Consideremos bases $\mathcal{B}(X^i)$ y $\mathcal{B}((X^i)^*)$ de los k -espacios vectoriales X^i y $(X^i)^*$, que consisten en elementos legibles como S_i - S_i -bimódulos. Para cada par de índices $i, j \in \{1, \dots, r\}$ y cada flecha $\beta : i_0 \rightarrow j_0 \in U$ tomamos

$$U_\beta^X(j, i) = \{\lambda^j \otimes \beta \otimes x^i \mid \lambda^j \in \mathcal{B}((X^j)^*), x^i \in \mathcal{B}(X^i), \lambda^j e_{j_0} = \lambda^j \text{ y } e_{i_0} x^i = x^i\},$$

y para una flecha punteada $\gamma : i_0 \rightarrow j_0 \in V$ hacemos

$$V_\gamma^X(j, i) = \{\lambda^j \otimes \gamma \otimes x^i \mid \lambda^j \in \mathcal{B}((X^j)^*), x^i \in \mathcal{B}(X^i), \lambda^j e_{j_0} = \lambda^j \text{ y } e_{i_0} x^i = x^i\}.$$

Además fijamos base $E^X(j, i)$ del S_i - S_j -bimódulo $\mathbf{Hom}_B(X_i, X_j)^{op}$. Tomamos

$$U_\beta^X = \bigcup_{i,j=1}^r U_\beta^X(j, i), \quad V_\gamma^X = \bigcup_{i,j=1}^r V_\gamma^X(j, i) \quad \text{y} \quad E^X = \bigcup_{i,j=1}^r E^X(j, i).$$

Por construcción se tienen isomorfismos de S - S -bimódulos

$$W_0^X \cong \bigoplus_{\substack{\beta \in U \\ \bar{\beta} \in U_\beta^X}} S\bar{\beta}S, \quad X^* \otimes_R W_1 \otimes_R X \cong \bigoplus_{\substack{\gamma \in V \\ \bar{\gamma} \in V_\gamma^X}} S\bar{\gamma}S \quad \text{y} \quad P^* \cong \bigoplus_{\bar{\varepsilon} \in E^X} S\bar{\varepsilon}S.$$

Por lo tanto, tomando como flechas sólidas de Q^x al conjunto $U^X = \bigcup_{\beta \in U} U_\beta^X$ y flechas punteadas a $(\bigcup_{\gamma \in V} V_\gamma^X) \cup E^X$, se tiene que el álgebra tensorial $(kQ)^X$ es isomorfa al álgebra de caminos kQ^x del carcaj Q^x .

Supongamos ahora que en las bases elegidas $\mathcal{B}(X^i)$ el carcaj de coeficientes de X^i es árbol y sea N un \mathcal{A}^X -módulo inescindible árbol con dimensión vectorial $\mathbf{dim} N = (n_1, \dots, n_r)$ y base tipo árbol $\mathcal{B}(N)$. Para una matriz C denotamos con $\mathbf{cf}(C)$ al número de coeficientes no cero de C . Sea $M = F^X(N)$. Ya que la acción de B en M está dada por la acción de B en $X \otimes_S N$, es claro que para cada flecha $\alpha \in Q_0'$ se tiene

$$\mathbf{cf}(M_\alpha) = \sum_{i=1}^r \mathbf{cf}(X_\alpha^i) n_i. \quad (1.6)$$

Por otro lado, la acción de $\beta \in U = Q_0''$ en M tiene la siguiente forma (ver A.23)

$$\begin{aligned}
B\beta B \otimes_B (X \otimes_S N) &\longrightarrow (X \otimes_S X^*) \otimes_B B\beta B \otimes_B (X \otimes_S N) \\
&\downarrow \cong \\
X \otimes_S [(X^* \otimes_R R\beta R \otimes_R X) \otimes_S N] & \\
&\downarrow \cong \\
X \otimes_S \left[\left(\bigoplus_{\bar{\beta} \in U_{\bar{\beta}}^X} S\bar{\beta}S \right) \otimes_S N \right] & \\
&\downarrow 1 \otimes \star \\
X \otimes_S N, &
\end{aligned}$$

donde \star es la acción de $\bigoplus_{\bar{\beta} \in U_{\bar{\beta}}^X} S\bar{\beta}S$ en N . Por lo tanto, si dotamos a $X \otimes_S N$ con la base $\{x \otimes n \mid n \in \mathcal{B}(N) \text{ y } x \in \mathcal{B}(X^i) \text{ para algún } i\}$ se tiene que

$$\mathbf{cf}(M_{\beta}) = \sum_{\bar{\beta} \in U_{\bar{\beta}}^X} \mathbf{cf}(N_{\bar{\beta}}). \quad (1.7)$$

Denotamos con $\mathbf{cf}(M)$ a la suma de los valores $\mathbf{cf}(M_{\alpha})$ sobre todas las flechas sólidas α que conforman a una representación M . Como M es inescindible, por el lema 1.15 debemos mostrar que $\mathbf{dim}_k M + 1 = \mathbf{cf}(M)$. Usando los puntos 1.6 y 1.7 arriba tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{cf}(M) &= \sum_{\alpha \in Q_0'} \mathbf{cf}(M_{\alpha}) + \sum_{\beta \in Q_0''} \mathbf{cf}(M_{\beta}) = \\
&= \sum_{\alpha \in Q_0'} \left(\sum_{i=1}^r \mathbf{cf}(X_{\alpha}^i) n_i \right) + \sum_{\beta \in U} \left(\sum_{\bar{\beta} \in U_{\bar{\beta}}^X} \mathbf{cf}(N_{\bar{\beta}}) \right) = \\
&= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\alpha \in Q_0'} \mathbf{cf}(X_{\alpha}^i) \right) n_i + \sum_{\bar{\beta} \in U^X} \mathbf{cf}(N_{\bar{\beta}}) = \\
&= \sum_{i=1}^r \mathbf{cf}(X^i) n_i + \mathbf{cf}(N).
\end{aligned}$$

Ya que tanto X^i como N son módulos árbol tenemos que $\mathbf{dim}_k(X^i) = \mathbf{cf}(X^i) + 1$ para cada i y $\mathbf{dim}_k N = \mathbf{cf}(N) + 1$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{cf}(M) &= \sum_{i=1}^r (\mathbf{dim}_k(X^i) - 1) n_i + \mathbf{dim}_k N - 1 = \\
&= \sum_{i=1}^r (\mathbf{dim}_k X^i) n_i - \sum_{i=1}^r n_i + \sum_{i=1}^r n_i - 1 = \\
&= \sum_{i=1}^r (\mathbf{dim}_k X^i) n_i - 1,
\end{aligned}$$

lo que termina la prueba pues $\mathbf{dim}_k M = \mathbf{dim}_k X \otimes_S N = \sum_{i=1}^r (\mathbf{dim}_k X^i) n_i$. \square

De la prueba del lema anterior es claro que si se fijan bases tipo árbol $\mathcal{B}(X)$ para el B -módulo de reducción X y $\mathcal{B}(N)$ para la \mathcal{A}^X -representación N , entonces el conjunto

$$\mathcal{B}(X \otimes_S N) = \{x \otimes n \mid x \in \mathcal{B}(X) \text{ y } n \in \mathcal{B}(N)\}$$

es base tipo árbol para el \mathcal{A} -módulo $F^X(N)$. El siguiente resultado es una generalización a ditálgebras de un teorema de Ringel [26].

Teorema 1.17 *Sean Q un carcaj finito y $\mathcal{A} = (kQ, \delta)$ una ditálgebra con diferencial triangular. Si M es una representación excepcional de \mathcal{A} entonces M es un módulo árbol.*

Demostración. Eliminando los vértices adecuados podemos suponer que M es una representación sincera. Procedemos de nuevo por inducción sobre la norma de M . La afirmación es evidente para módulos excepcionales de norma cero (módulos simples $S(i)$). Supongamos que el enunciado es cierto para módulos excepcionales de norma menor o igual a ℓ . Sea M excepcional con $\|M\| = \ell + 1$. Ya que $\|M\| > 0$, por el lema 1.10 podemos suponer que existe una flecha $\alpha : i_0 \rightarrow j_0$ con diferencial cero. Como consecuencia del lema 1.12 la transformación M_α no es cero, pues M es un módulo sincero. En particular α no es un lazo y la reducción M^e del módulo M , que también es excepcional, satisface $\|M^e\| \leq \ell$. Por hipótesis de inducción M^e es un módulo árbol, y ya que el módulo de la reducción de eje X consiste en módulos árbol, por el lema 1.16 concluimos que $M = F^e(M^e)$ es árbol. \square

1.6 Sucesiones que casi se dividen.

Sea \mathcal{K} una categoría Krull-Schmidt. Para dos objetos inescindibles M y N se define el **radical** de $\mathbf{Hom}(M, N)$ como el conjunto $\mathbf{rad}(M, N)$ de morfismos no invertibles de M a N . Para sumas directas $M = \bigoplus_i M_i$, $N = \bigoplus_j N_j$ se consideran los morfismos $f : M \rightarrow N$ como matrices con entradas $f_{i,j} : M_i \rightarrow N_j$ (para ser precisos $f_{i,j} = \mu_j f \sigma_i$ donde μ_j, σ_i son la proyección e inclusión correspondientes). Por definición el radical $\mathbf{rad}(M, N)$ está dado por las matrices cuyas entradas $f_{i,j}$ pertenecen al radical $\mathbf{rad}(M_i, N_j)$. Se define el radical cuadrado $\mathbf{rad}^2(M, N)$ como el conjunto de morfismos de la forma gf donde $f \in \mathbf{rad}(M, X)$ y $g \in \mathbf{rad}(X, N)$ para algún objeto X . Se define el **$\mathbf{End}_{\mathcal{K}}(N)$ - $\mathbf{End}_{\mathcal{K}}(M)$ -bimódulo de morfismos irreducibles** de M a N como

$$\mathbf{Irr}(M, N) = \mathbf{rad}(M, N) / \mathbf{rad}^2(M, N).$$

Un morfismo $f : M \rightarrow N$ es llamado **irreducible** si no es sección ni retracción, y para cada factorización $f = f'f''$ entonces o bien f' es retracción o f'' es sección. Cuando M y N son inescindibles, f es irreducible si y solo si $f \in \mathbf{rad}(M, N) - \mathbf{rad}^2(M, N)$ (ver Ringel [24, 2.2]).

Se dice que un morfismo $f : M \rightarrow E$ **casí se divide por la izquierda** si satisface las siguientes propiedades

- a) f no es sección;
- b) si $h : M \rightarrow Z$ no es sección, existe $h' : E \rightarrow Z$ tal que $h = h'f$.

El morfismo f es **minimal izquierdo** si

- c) para cada $\gamma \in \mathbf{End}(E)$ tal que $\gamma f = f$ entonces γ es un automorfismo.

Notamos que si f casi se divide por la izquierda entonces M es inescindible. Los morfismos minimales que casi se dividen por la izquierda quedan determinados, salvo isomorfismo, por el inescindible M . Dualmente un morfismo $g : E \rightarrow N$ **casi se divide por la derecha** si satisface

- a') g no es retracción;
 b') si $h : Z \rightarrow N$ no es retracción, existe $h' : Z \rightarrow E$ tal que $h = gh'$.

El morfismo g es **minimal derecho** si

- c') para cada $\gamma \in \mathbf{End}(E)$ tal que $g\gamma = g$ entonces γ es un automorfismo.

De nuevo, si g casi se divide por la derecha entonces N es inescindible. Los morfismos minimales que casi se dividen por la derecha quedan determinados, salvo isomorfismo, por el inescindible N . El siguiente resultado es bien conocido. Ver por ejemplo Ringel [24]2.2(lema 3).

Lema 1.18 *Supongamos que existe un morfismo minimal de \mathcal{K} que casi se divide por la izquierda que inicia en M . Sean E_1, \dots, E_r objetos inescindibles no isomorfos a pares, y supongamos que tenemos morfismos $f_{ij} : M \rightarrow E_i$ para $j = 1, \dots, d_i$ con clases residuales $\overline{f_{ij}}$ en $\mathbf{Irr}(M, E_i)$. Entonces el morfismo*

$$f = (f_{ij})_{ij} : M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r d_i E_i$$

es minimal que casi se divide por la izquierda si y solo si el conjunto $\{\overline{f_{ij}}\}_{j=1}^{d_i}$ es base de $\mathbf{Irr}(M, E_i)$ para cada $i = 1, \dots, r$, y cualquier objeto inescindible E' tal que $\mathbf{Irr}(M, E') \neq 0$ es isomorfo a E_i para algún i .

La siguiente observación será usada en la sección 3.5.

Lema 1.19 *Sea Q un carcaj finito, sólido y con ordenación admisible de sus vértices.*

- a) *Si $g : E \rightarrow N$ es un morfismo que casi se divide por la derecha en kQ -mod entonces existe una descomposición de la forma*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & N \\ \cong \uparrow & \nearrow [g' \ 0] & \\ E' \oplus E'' & & \end{array}$$

donde $g' : E' \rightarrow N$ es un morfismo minimal que casi se divide por la derecha.

- b) *Dualmente, si $f : M \rightarrow E$ es un morfismo que casi se divide por la izquierda en kQ -mod entonces existe una descomposición de la forma*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & E \\ \searrow [f' \ 0] & & \cong \uparrow \\ & & E' \oplus E'' \end{array}$$

donde $f' : M \rightarrow E'$ es un morfismo minimal que casi se divide por la izquierda.

Demostración. Mostramos (a), la prueba de (b) es análoga. Supongamos que $g : E \rightarrow N$ es un morfismo que casi se divide por la derecha. Sea \mathbb{E} la clase de subobjetos $\sigma_{E'} : E' \rightarrow E$ de E para los que existe un epimorfismo $h_{E'} : E \rightarrow E'$ tal que $g = g\sigma_{E'}h_{E'}$. La colección \mathbb{E} es no vacía pues contiene a E . Sea E' un elemento en \mathbb{E} . Entonces $g\sigma_{E'}$ casi se divide por la derecha. En efecto, $g\sigma_{E'}$ no es retracción pues g no lo es. Supongamos que $v : Z \rightarrow N$ no es retracción. Entonces existe $t : Z \rightarrow E$ tal que $v = gt$ y por lo tanto $v = gt = g\sigma_{E'}h_{E'}t$, es decir, $g\sigma_{E'}$ casi se divide por la derecha.

Supongamos ahora que E' es un elemento de \mathbb{E} de dimensión mínima sobre k . Entonces $g' = g\sigma_{E'}$ es minimal. Pues si $h' : E' \rightarrow E''$ es un epimorfismo tal que $g' = g'\sigma'_{E''}h'$ (donde $\sigma'_{E''} : E'' \rightarrow E'$ es la inclusión) entonces $(h'h)$ satisface $g\sigma_{E''}(h'h) = g\sigma_{E'}\sigma'_{E''}(h'h) = (g'\sigma'_{E''}h')h = g'h = g$. De esta manera E'' es un elemento de \mathbb{E} , y por minimalidad $\mathbf{dim}_k E'' \geq \mathbf{dim}_k E'$. Por lo tanto h' es un automorfismo.

Sea entonces $E' \in \mathbb{E}$ minimal. Así el morfismo $g' = g\sigma_{E'}$ es irreducible (lema 1.18) por lo que $\sigma_{E'}$ es sección (pues g no es retracción). Sean E'' sumando directo de E tal que $E \cong E' \oplus E''$ y $g'' = g\sigma_{E''}$. Entonces g tiene la forma $g = (g' \ g'')$ y g'' no es retracción pues g no lo es. Así existe $h'' : E'' \rightarrow E'$ tal que $g'' = g'h''$, por lo que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E' \oplus E'' & & N \\ \left(\begin{array}{cc} I_{E'} & h'' \\ 0 & I_{E''} \end{array} \right) \downarrow & \begin{array}{c} \nearrow (g' \ g'h'') \\ \searrow (g' \ 0) \end{array} & \\ E' \oplus E'' & & \end{array}$$

Esto termina la prueba. \square

La pareja $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ es llamada una **categoría Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas** si \mathcal{K} es una categoría Krull-Schmidt y \mathcal{E} es una colección de pares (f, g) de morfismos en \mathcal{K} tales que f es núcleo de g y g es conúcleo de f . Por ejemplo, si Q es un carcaj finito, (kQ, δ) es una ditálgebra con diferencial triangular y \mathcal{E} es la estructura exacta asociada a (kQ, δ) -mod, entonces $((kQ, \delta)$ -mod, $\mathcal{E})$ es una categoría Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas. Decimos que una pareja exacta (f, g) **casi se divide** si f es minimal que casi se divide por la izquierda y g es minimal que casi se divide por la derecha.

Lema 1.20 *Sea Q un carcaj finito, sólido y con ordenación admisible de sus vértices. Para una sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ en kQ -mod son equivalentes*

- a) (f, g) es un par exacto que casi se divide.
- b) g es un morfismo minimal que casi se divide por la derecha.
- b') f es un morfismo minimal que casi se divide por la izquierda.

c) g es un morfismo que casi se divide por la derecha y M es inescindible.

c') f es un morfismo que casi se divide por la izquierda y N es inescindible.

Demostración. Ver por ejemplo el teorema IV.1.13 de [1]. \square

Sea $(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ una categoría Krull-Schmidt con sucesiones exactas cortas. Dada una pareja que casi se divide $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ se observa que la clase de isomorfismo $[M]$ está determinada por $[N]$, y la clase de isomorfismo $[N]$ está determinada por $[M]$. Entonces denotamos a $[M]$ con $\tau[N]$ y llamamos a $\tau[N]$ la **traslación de Auslander-Reiten** de $[N]$. Si se descompone a E en inescindibles $E = \bigoplus_{i=1}^r d_i E_i$ (con los E_i inescindibles no isomorfos entre sí) entonces por el lema 1.18

$$\dim_k \mathbf{Irr}(E_i, N) = d_i = \dim_k \mathbf{Irr}(M, E_i).$$

Se define el **carcaj de Auslander-Reiten** $\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{E})$ de la siguiente manera. Los vértices son las clases de isomorfismo de objetos inescindibles. Para cada morfismo minimal que casi se divide por la derecha $g : \bigoplus d_i E_i \rightarrow N$ se agregan $\dim_k \mathbf{Irr}(E_i, N) = d_i$ flechas sólidas de $[E_i]$ a $[N]$. De manera similar, para cada morfismo minimal que casi se divide por la izquierda $f : M \rightarrow \bigoplus d_i E_i$ se agregan $\dim_k \mathbf{Irr}(M, E_i) = d_i$ flechas sólidas de $[M]$ en $[E_i]$. Claramente $(\Gamma(\mathcal{K}, \mathcal{E}), \tau)$ es un carcaj de traslación, como se define enseguida.

1.7 Carcaj de traslación y secciones.

Sea Γ un carcaj sólido. Para cada vértice x denotamos con x^- al conjunto de predecesores directos de x y con x^+ al conjunto de sus sucesores directos. Un carcaj es **localmente finito** si para cada vértice x el número de flechas entre x y sus **vecinos** (sucesores y predecesores directos de x) es finito. Una **traslación** τ del carcaj Γ es una biyección entre dos subconjuntos Γ'_0 y Γ''_0 de Γ_0 , tal que para cada $x \in \Gamma'_0$ y cada $y \in \Gamma_0$ el número de flechas de y a x es igual al número de flechas de $\tau(x)$ a y . En particular $x^- = \tau(x)^+$. Un **carcaj de traslación** (Γ, τ) consiste en un carcaj sólido localmente finito Γ junto con una traslación τ de Γ . Los vértices en $\Gamma_0 - \Gamma'_0$ son llamados **proyectivos** y los de $\Gamma_0 - \Gamma''_0$ **inyectivos**. Un carcaj de traslación (Γ, τ) se llama **hereditario** si los predecesores directos de un vértice proyectivo son proyectivos y los sucesores directos de un vértice inyectivo son inyectivos. La motivación principal de estas definiciones es el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A)$ de la categoría de A -módulos de una k -álgebra de dimensión finita A junto con las traslaciones de Auslander-Reiten.

Para cada vértice x de un carcaj de traslación (Γ, τ) existe un intervalo I_x de \mathbb{Z} que contiene al cero tal que $\tau^i x$ está definido si y solo si $i \in I_x$. La **órbita** de x se define entonces como el subconjunto de Γ_0 dado por $\mathcal{O}_x = \{\tau^i x\}_{i \in I_x}$. Observamos que cada órbita \mathcal{O}_x contiene a lo más un vértice proyectivo y a lo más un vértice inyectivo. Si y es un elemento en \mathcal{O}_x , es decir, si existe $i_0 \in I_x$ tal que $y = \tau^{i_0} x$, entonces $I_y = I_x - i_0$. Por lo tanto

$$\mathcal{O}_y = \{\tau^j y\}_{j \in I_y} = \{\tau^{j-i_0} (\tau^{i_0} x)\}_{j \in I_x} = \mathcal{O}_x,$$

y el conjunto de órbitas de (Γ, τ) determina una partición de los vértices de Γ . Se distinguen cuatro tipos de órbitas.

- Una órbita \mathcal{O} es **inyectivo-proyectiva** si contiene un vértice inyectivo q y un vértice proyectivo p . En tal caso $\mathcal{O} = \{\tau^i q\}_{i=0}^n$ (con $\tau^n q = p$) es un conjunto finito.
- Una órbita \mathcal{O} es **inyectiva** si contiene un vértice inyectivo q pero no contiene vértices proyectivos. Entonces $\mathcal{O} = \{\tau^i q\}_{i=0}^\infty$ es un conjunto infinito.
- Una órbita \mathcal{O} es **proyectiva** si contiene un vértice proyectivo p pero no contiene vértices inyectivos. Entonces $\mathcal{O} = \{\tau^{-i} p\}_{i=0}^\infty$ es un conjunto infinito.
- Una órbita \mathcal{O} es **estable** si no contiene vértices inyectivos ni proyectivos. Las órbitas estables finitas son llamadas **periódicas**.

La **gráfica de órbitas** $G_{ob}(\Gamma, \tau)$ de un carcaj de traslación (Γ, τ) tiene por vértices el conjunto de órbitas de (Γ, τ) y hay una arista entre \mathcal{O} y \mathcal{O}' si existen elementos $x \in \mathcal{O}$ y $y \in \mathcal{O}'$ que son vecinos en Γ . Claramente $G_{ob}(\Gamma, \tau)$ es una gráfica conexa siempre que Γ sea un carcaj conexo. Un carcaj de traslación (Γ, τ) se llama **preinyectivo**, **posproyectivo** o **estable** si todas sus órbitas son inyectivas, proyectivas o estables respectivamente. Se dice que un carcaj de traslación (Γ, τ) es **propio** si para cualquier vértice no proyectivo x el conjunto x^- es no vacío, y es llamado **dirigido** si Γ no contiene ciclos orientados.

Lema 1.21 *Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación propio.*

- Si $x_0 = \tau^n(x_0)$ con $n > 0$ entonces existe un camino de $\tau^n(x_0)$ a x_0 en Γ .*
- Si Γ es un carcaj dirigido entonces (Γ, τ) no tiene órbitas periódicas.*

Demostración. Tomemos $x_i = \tau^i(x_0)$ para $i = 1, \dots, n$. Ninguno de los vértices x_0, \dots, x_{n-1} es proyectivo, por lo que existen vértices y_i ($0 \leq i < n$) y flechas $\alpha_i : y_i \rightarrow x_i$ para cada i . Como (Γ, τ) es de traslación, existen flechas $\beta_i : x_{i+1} \rightarrow y_i$, y la concatenación $\alpha_0 \beta_0 \cdots \alpha_{n-1} \beta_{n-1}$ es un camino de $\tau^n(x_0)$ a x_0 ,

$$\tau^n x_0 \xrightarrow{\beta_{n-1}} y_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \tau^{n-1} x_0 \xrightarrow{\beta_{n-2}} y_{n-2} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\beta_0} y_0 \xrightarrow{\alpha_0} x_0,$$

Para (b), si existe una órbita periódica por lo anterior existen caminos cíclicos, por lo que Γ no es dirigido. \square

Una **sección** \mathcal{S} de un carcaj de traslación (Γ, τ) es un subconjunto no vacío de vértices $\mathcal{S} \subset \Gamma_0$ tal que

- si $x \in \mathcal{S}$ no es un vértice proyectivo entonces $\tau(x) \notin \mathcal{S}$,
- si $x \in \mathcal{S}$ y $x \rightarrow m$ es una flecha en Γ entonces m ó $\tau(m)$ está en \mathcal{S} .

Dualmente una **cosección** \mathcal{S} de un carcaj de traslación (Γ, τ) es un subconjunto no vacío de vértices $\mathcal{S} \subset \Gamma_0$ tal que

- si $y \in \mathcal{S}$ no es un vértice inyectivo entonces $\tau^{-1}(y) \notin \mathcal{S}$,
- si $y \in \mathcal{S}$ y $n \rightarrow y$ es una flecha en Γ entonces n ó $\tau^{-1}(n)$ está en \mathcal{S} .

Lema 1.22 Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación propio, dirigido y hereditario.

- a) Toda sección de (Γ, τ) que no contiene inyectivos es una cosección.
 b) Toda cosección de (Γ, τ) que no contiene proyectivos es una sección.

Demostración. Mostramos (b), la prueba de (a) se obtiene con argumentos duales. Por el lema anterior (Γ, τ) no tiene órbitas periódicas. Sean \mathcal{S} una cosección de (Γ, τ) que no contiene proyectivos y x un elemento de \mathcal{S} . Como x no es proyectivo entonces $\tau(x)$ no es inyectivo y $\tau(x) \notin \mathcal{S}$ (pues al ser \mathcal{S} cosección, si $\tau(x) \in \mathcal{S}$ entonces $x = \tau^{-1}(\tau(x)) \notin \mathcal{S}$, contradicción). Así \mathcal{S} satisface la condición (i) de la definición de sección. Por otro lado sea $x \rightarrow m$ una flecha en Γ . El vértice m no puede ser proyectivo pues (Γ, τ) es hereditario y x no es proyectivo. Entonces hay una flecha $\tau(m) \rightarrow x$, por lo que $\tau(m)$ ó $m = \tau^{-1}(\tau(m))$ es un elemento en \mathcal{S} . Entonces \mathcal{S} satisface (ii) y es una sección. \square

Lema 1.23 Sean (Γ, τ) un carcaj de traslación propio, dirigido y hereditario y \mathcal{S} una sección (cosección) que interseca cada órbita de (Γ, τ) en exactamente un vértice. Entonces hay una partición $\Gamma_0 = A \sqcup \mathcal{S} \sqcup B$ de los vértices de Γ , donde

$$A = \{x \mid \tau^{-i}(x) \in \mathcal{S} \text{ para algún } i \geq 1\},$$

$$B = \{y \mid \tau^i(y) \in \mathcal{S} \text{ para algún } i \geq 1\}.$$

Además todo camino γ de Γ que inicia en A y termina en B pasa por un elemento de \mathcal{S} .

Demostración. Mostramos el caso de una sección, la prueba para cosecciones es similar. La partición es clara pues (Γ, τ) no tiene órbitas periódicas (lema 1.21). Para probar la segunda afirmación supongamos que γ es un camino que inicia en A , termina en B y tal que ninguna de las flechas que lo componen inicia en un elemento de \mathcal{S} . Entonces una de las flechas de γ es de la forma $\alpha : x \rightarrow y$ con $x \in A$ y $y \notin A$. Mostraremos que $y \in \mathcal{S}$.

Supongamos de lo contrario que $y \in B$, es decir, que existe $j \geq 1$ tal que $\tau^j(y) \in \mathcal{S}$. Notamos primero que $\tau^{j-2}(x)$ no puede ser proyectivo, pues Γ es hereditario y $\tau^{j-1}(y)$ no es proyectivo.

$$\begin{array}{ccccccc} \tau^j(y) & \tau^{j-1}(y) & \dots & & y \\ \searrow & \nearrow & \searrow & & \nearrow \\ \tau^{j-1}(x) & \tau^{j-2}(x) & \dots & & x \end{array}$$

Así $\tau^{j-1}(x)$ está definido y tenemos una flecha $\tau^j(y) \rightarrow \tau^{j-1}(x)$. Ya que $\tau^j(y) \in \mathcal{S}$ y \mathcal{S} es sección, o bien $\tau^{j-1}(x) \in \mathcal{S}$ ó $\tau(\tau^{j-1}(x)) = \tau^j(x) \in \mathcal{S}$. Esto contradice el que \mathcal{S} interseque cada órbita en exactamente un vértice (pues $\tau^{-i}(x) \in \mathcal{S}$). Por lo tanto $y \in \mathcal{S}$, lo que concluye la prueba. \square

Lema 1.24 Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación conexo y hereditario.

- a) Si (Γ, τ) contiene un vértice proyectivo entonces toda órbita de (Γ, τ) contiene un vértice proyectivo.

- b) Si (Γ, τ) contiene un vértice inyectivo entonces toda órbita de (Γ, τ) contiene un vértice inyectivo.

Demostración. Mostramos (a), la prueba de (b) es similar. Sea B el subconjunto de Γ_0 dado por los vértices x tales que $\tau^i(x)$ es proyectivo, para algún $i \geq 0$. Por hipótesis B es no vacío. Supongamos que B no es el total de vértices de Γ . Por conexidad existen $y \notin B$ y $x \in B$ tales que y y x son vecinos en Γ . Como $y \notin B$ de hecho podemos suponer que se tiene una flecha $y \rightarrow x$. Sea $i \geq 0$ tal que $\tau^i(x)$ es proyectivo. Ya que $\tau^j(y)$ existe, para todo $j \geq 0$ tenemos una flecha $\tau^i(y) \rightarrow \tau^i(x)$. Como (Γ, τ) es hereditario $\tau^i(y)$ es proyectivo, lo cual contradice el que $y \notin B$. Por lo tanto $B = \Gamma_0$ y se tiene el resultado. \square

Sea $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau)$ un carcaj de traslación. El **subcarcaj de traslación pleno** $\widehat{\Gamma} = (\widehat{\Gamma}_0, \widehat{\Gamma}_1, \widehat{\tau})$ determinado por un subconjunto de vértices $\widehat{\Gamma}_0$ consiste en el subcarcaj pleno $\widehat{\Gamma} = (\widehat{\Gamma}_0, \widehat{\Gamma}_1)$ definido sobre $\widehat{\Gamma}_0$ y la restricción $\widehat{\tau}$ de τ al subconjunto de vértices no proyectivos $\widehat{\Gamma}'_0$ dado por

$$\widehat{\Gamma}'_0 = \{x \in \widehat{\Gamma}_0 \cap \Gamma'_0 \mid \tau(x) \in \widehat{\Gamma}_0\}.$$

Los vértices no inyectivos de $\widehat{\Gamma}$ están dados por

$$\widehat{\Gamma}''_0 = \{y \in \widehat{\Gamma}_0 \cap \Gamma''_0 \mid \tau^{-1}(y) \in \widehat{\Gamma}_0\}.$$

Si x es un vértice no proyectivo de un carcaj de traslación $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau)$ entonces el subcarcaj pleno determinado por el conjunto $\{x, \tau(x)\} \cup x^-$ es llamado **mallá** de (Γ, τ) . Un subcarcaj de traslación pleno $\widehat{\Gamma}$ de Γ es **cerrado por mallas** si para cualquier vértice no proyectivo x de $\widehat{\Gamma}$ el conjunto $x_{\widehat{\Gamma}}^-$ (predecesores directos de x en el carcaj $\widehat{\Gamma}$) coincide con el conjunto x_{Γ}^- (predecesores directos de x respecto a Γ).

Lema 1.25 *Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación y $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\tau})$ un subcarcaj de traslación pleno cerrado por mallas de (Γ, τ) .*

- a) Si (Γ, τ) es propio entonces $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\tau})$ es propio.
b) Si (Γ, τ) es hereditario entonces $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\tau})$ es hereditario.
c) Si (Γ, τ) tiene una ordenación admisible de sus vértices entonces $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\tau})$ admite una ordenación admisible de sus vértices.

Demostración. El inciso (a) es claro pues si x es un vértice no proyectivo de $\widehat{\Gamma}$ entonces x no es proyectivo en Γ y $x_{\widehat{\Gamma}}^- = x_{\Gamma}^- \neq \emptyset$. Para probar (b) sean p y q vértices en $\widehat{\Gamma}_0$ con una flecha $q \rightarrow p$. Supongamos que q no es proyectivo en $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\tau})$. En particular q no es proyectivo en (Γ, τ) . Como (Γ, τ) es un carcaj hereditario, p no es proyectivo en (Γ, τ) . Así $\tau(p) \in q_{\Gamma}^- = q_{\widehat{\Gamma}}^-$, por lo que p tampoco es proyectivo en $(\widehat{\Gamma}, \widehat{\tau})$. Finalmente la afirmación (c) es evidente para cualquier subcarcaj de Γ . \square

Decimos que un vértice x de Γ **precede** al vértice y , lo cual es denotado mediante $x \preceq y$, si existe un camino $\gamma : x \rightarrow y$ en Γ . Observamos que si Γ es un carcaj sin ciclos orientados, entonces la relación de precedencia \preceq es un

orden parcial. En efecto, \leq es una relación reflexiva por la existencia de caminos triviales, transitiva por concatenación de caminos y antisimétrica pues en Γ no hay ciclos orientados.

Dado un carcaj finito y sólido Q se define el **carcaj de traslación (admisibile)** $\mathbb{Z}Q$, y que se dibuja con la parte positiva a la izquierda, de la siguiente manera. El conjunto de vértices son las parejas (x, ℓ) con $x \in Q_0$ y $\ell \in \mathbb{Z}$. A cada flecha $a : x \rightarrow y$ de Q le corresponden dos series de flechas en $\mathbb{Z}Q$,

$$(a, \ell) : (x, \ell) \rightarrow (y, \ell) \quad \text{y} \quad \sigma(a, \ell) : (y, \ell) \rightarrow (x, \ell - 1).$$

Claramente la biyección $\tau : (x, \ell) \mapsto (x, \ell + 1)$ es una traslación. Cada intervalo $I \subset \mathbb{Z}$ define un subcarcaj pleno IQ de $\mathbb{Z}Q$ a través de los vértices de la forma (x, ℓ) con ℓ en I . En particular \mathbb{N}_0Q y $(-1)\mathbb{N}_0Q$ son carcajes de traslación preinyectivos y posproyectivos respectivamente. Para nuestros propósitos los carcajes de traslación de interés son subcarcajes cerrados por mallas de algún $\mathbb{Z}Q$. El lema anterior 1.25 junto con el siguiente lema dan cuenta de algunas de sus propiedades.

Lema 1.26 *Sea Q un carcaj finito, sólido, conexo, con más de un vértice y con una ordenación admisible de sus vértices. Entonces $\mathbb{Z}Q$ es un carcaj de traslación conexo, propio y hereditario que admite una ordenación admisible de sus vértices. En particular $\mathbb{Z}Q$ es un carcaj dirigido.*

Demostración. Que $\mathbb{Z}Q$ es conexo, propio y hereditario es claro. Fijamos una ordenación admisible x_1, \dots, x_n de los vértices de Q y definimos la siguiente relación en $Q_0 \times \mathbb{Z}$: dos elementos están relacionados $(x_i, \ell) \leq (x_j, m)$ si cumplen una de las siguientes dos condiciones

- i) $\ell < m$ en \mathbb{Z} , ó
- ii) $\ell = m$ y $i \leq j$ en Q .

Entonces \leq es un orden lineal en los vértices de $\mathbb{Z}Q$. En efecto, es transitivo, pues si $(x_{i_1}, \ell_1) \leq (x_{i_2}, \ell_2) \leq (x_{i_3}, \ell_3)$ y $\ell_1 < \ell_2$ ó $\ell_2 < \ell_3$ entonces $\ell_1 < \ell_3$, por lo que $(x_{i_1}, \ell_1) \leq (x_{i_3}, \ell_3)$. En el caso $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$ se tiene $i_1 \leq i_2 \leq i_3$, y de nuevo $(x_{i_1}, \ell_1) \leq (x_{i_3}, \ell_3)$. Es antisimétrico, pues si $(x_i, \ell) \leq (x_j, m) \leq (x_i, \ell)$ entonces $\ell = m$ e $i \leq j \leq i$. Además es claro que dos vértices cualesquiera (x_i, ℓ) y (x_j, m) están relacionados, por lo que \leq es un orden lineal.

Con la definición de flechas en $\mathbb{Z}Q$ dada arriba es claro que el orden \leq definido en los vértices $Q_0 \times \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}Q$ es admisible. \square

Por los lemas 1.22 y 1.26, en el contexto del siguiente lema podemos reemplazar el concepto de sección por el de cosección.

Lema 1.27 *Sea Q un carcaj finito, sólido, conexo y con ordenación admisible de sus vértices. Para un subconjunto \mathcal{S} de vértices de $\mathbb{Z}Q$ son equivalentes*

- a) \mathcal{S} es una sección conexa de $\mathbb{Z}Q$,
- b) \mathcal{S} interseca cada órbita de $\mathbb{Z}Q$ en exactamente un vértice, y dos elementos $(x, \ell), (y, m)$ de \mathcal{S} son vecinos en $\mathbb{Z}Q$ si y solo si x, y son vértices vecinos en Q .

En particular la gráfica subyacente de una sección conexa \mathcal{S} de $\mathbb{Z}Q$ es isomorfa a la gráfica subyacente de Q .

Demostración. Podemos suponer que Q tiene más de un vértice, por lo que $\mathbb{Z}Q$ es un carcaj de traslación propio.

Paso 1. Probamos que (b) implica (a). La primera condición (i) de la definición de sección se satisface por hipótesis. Para mostrar la condición (ii) sea $(x_i, \ell_i) \rightarrow (y, m)$ una flecha en $\mathbb{Z}Q$ con (x_i, ℓ_i) en \mathcal{S} . Por construcción de las flechas en $\mathbb{Z}Q$ los vértices y y x_i son vecinos en Q . Se observa que (x_i, ℓ_i) tiene solamente dos vecinos en la órbita de (y, m) ,

$$\begin{array}{ccc} \text{cuando } x_i \rightarrow y \text{ en } Q, & & \text{cuando } y \rightarrow x_i \text{ en } Q, \\ \begin{array}{ccc} & (x_i, \ell_i) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (y, \ell_i + 1) & & (y, \ell_i) \end{array} & & \begin{array}{ccc} & (x_i, \ell_i) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (y, \ell_i) & & (y, \ell_i - 1) \end{array} \end{array}$$

por lo que la implicación (\Rightarrow) dentro del inciso (b) siempre es válida. En el primer caso se tiene que $m = \ell_i$ y por lo tanto o bien $(y, \ell_i) = (y, m) \in \mathcal{S}$ ó $(y, \ell_i + 1) = (y, m + 1) = \tau(y, m) \in \mathcal{S}$, pues por hipótesis un elemento de la órbita de (y, m) que es vecino de (x_i, ℓ_i) pertenece a \mathcal{S} . En el segundo caso tenemos que $m = \ell_i - 1$ y por la misma razón o bien $(y, \ell_i - 1) = (y, m) \in \mathcal{S}$ ó $(y, \ell_i) = (y, m + 1) = \tau(y, m) \in \mathcal{S}$. Por lo tanto \mathcal{S} es sección. Su conexidad es consecuencia directa de la hipótesis en (b).

Paso 2. Mostramos que si \mathcal{S} es una sección conexa que no contiene inyectivos y $\tilde{\mathcal{S}}$ es un subconjunto de \mathcal{S} que también es sección, entonces $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$. Supongamos que $\tilde{\mathcal{S}} \neq \mathcal{S}$. Entonces por conexidad existen $x \in \mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}$ y $y \in \tilde{\mathcal{S}}$ que son vecinos. En el caso $y \rightarrow x$ como $\tilde{\mathcal{S}}$ es sección y $x \notin \tilde{\mathcal{S}}$ se tiene $\tau(x) \in \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$, lo cual es imposible pues $x \in \mathcal{S}$ y \mathcal{S} es sección. En el caso $x \rightarrow y$ se tiene una flecha $y \rightarrow \tau^{-1}(x)$, por lo que $\tau^{-1}(x) \in \tilde{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{S}$ de nuevo porque $\tilde{\mathcal{S}}$ es sección y $x \notin \tilde{\mathcal{S}}$. Esto es también imposible pues en tal caso x y $\tau^{-1}(x)$ son ambos elementos de $\tilde{\mathcal{S}}$. Por lo tanto $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

Paso 3. Probamos que (a) implica (b). Probamos que si \mathcal{S} es una sección conexa de $\mathbb{Z}Q$ entonces \mathcal{S} tiene un subconjunto \mathcal{S}_n que satisface las hipótesis de (b). Para dar \mathcal{S}_n se construyen conjuntos \mathcal{S}_i sucesivamente para $1 \leq i \leq n$. Sea u_1 un elemento arbitrario de \mathcal{S} y hagamos $\mathcal{S}_1 = \{u_1\}$. Supongamos que se ha construido un subconjunto \mathcal{S}_i ($i = |\mathcal{S}_i|$) que interseca cada órbita en a lo más un vértice y tal que dos de sus elementos (x_{i_1}, ℓ_1) y (x_{i_2}, ℓ_2) son vecinos si y solo si x_{i_1} y x_{i_2} son vecinos en Q . Si \mathcal{S}_i no interseca todas las órbitas de $\mathbb{Z}Q$ entonces existen un vértice v de $\mathbb{Z}Q$ tal que $\tau^\ell(v) \notin \mathcal{S}_i$ para todo $\ell \in \mathbb{Z}$ y una flecha $u_s \rightarrow v$ con $u_s \in \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}$. Ya que \mathcal{S} es una sección, o bien $v \in \mathcal{S}$ ó $\tau(v) \in \mathcal{S}$. Tomamos $u_{i+1} = u$ ó $u_{i+1} = \tau(v)$ dependiendo del caso y hacemos $\mathcal{S}_{i+1} = \mathcal{S}_i \cup \{u_{i+1}\}$. Observamos que por construcción de $\mathbb{Z}Q$, ya que $u_s = (x, \ell)$ y $u_{i+1} = (y, m)$ son vecinos en $\mathbb{Z}Q$ entonces x y y son vecinos en Q , por lo que \mathcal{S}_{i+1} tiene las mismas propiedades que \mathcal{S}_i . Por lo tanto, si $\mathbb{Z}Q$ tiene n órbitas ($n = |Q_0|$), entonces podemos construir sucesivamente un subconjunto \mathcal{S}_n que satisface la hipótesis de (b). Así por el paso 1, \mathcal{S}_n es una sección conexa y por el paso 2, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$, es decir, \mathcal{S} satisface (b). \square

Supongamos que (Γ, τ) es un carcaj de traslación y que $f : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ es una función. Se dice que f es una **función aditiva** si para cada malla $\{x, \tau(x)\} \cup x^-$

en Γ se satisface

$$f(x) + f(\tau(x)) = \sum_{y \in x^-} f(y)(-m_{y,x}),$$

donde $(-m_{y,x})$ es el número de flechas de y a x en Γ . Para una sección (cosección) finita $\mathcal{S} = \{x_i\}_{i=1}^n$ de (Γ, τ) denotamos con $f(\mathcal{S})$ al vector entero $(f(x_i))_{i=1}^n$.

Lema 1.28 *Sea (Γ, τ) un carcaj de traslación propio, dirigido y hereditario.*

- a) *Supongamos que \mathcal{S} es una sección de (Γ, τ) tal que el subcarcaj pleno $Q = Q_{\mathcal{S}}$ de Γ determinado por \mathcal{S} es finito y admite una ordenación admisible de sus vértices. Supongamos además que \mathcal{S} no contiene inyectivos y que interseca a cada órbita de (Γ, τ) en a lo más un vértice. Entonces $\tau^{-1}\mathcal{S} = \{\tau^{-1}(x)\}_{x \in \mathcal{S}}$ también es sección de (Γ, τ) , $Q_{\tau^{-1}\mathcal{S}} \cong Q_{\mathcal{S}}$ y para cualquier función aditiva f de (Γ, τ) se tiene*

$$f(\tau^{-1}\mathcal{S}) = \Phi_Q^{-1}f(\mathcal{S}),$$

donde Φ_Q^{-1} es la inversa de la matriz de Coxeter de Q respecto al orden admisible de sus vértices.

- b) *Supongamos que \mathcal{S} es una cosección de (Γ, τ) tal que el subcarcaj pleno $Q = Q_{\mathcal{S}}$ de Γ determinado por \mathcal{S} es finito y admite una ordenación admisible de sus vértices. Supongamos además que \mathcal{S} no contiene proyectivos y que interseca a cada órbita de (Γ, τ) en a lo más un vértice. Entonces $\tau\mathcal{S} = \{\tau(x)\}_{x \in \mathcal{S}}$ también es cosección de (Γ, τ) , $Q_{\tau\mathcal{S}} \cong Q_{\mathcal{S}}$ y para cualquier función aditiva f de (Γ, τ) se tiene*

$$f(\tau\mathcal{S}) = \Phi_Q f(\mathcal{S}),$$

donde Φ_Q es la matriz de Coxeter de Q respecto al orden admisible de sus vértices.

Demostración. Vamos a probar (b), la prueba de (a) es análoga. Fijamos una función aditiva f . Probamos primero la siguiente afirmación.

Paso 1. *Supongamos que x es un elemento no proyectivo de una cosección \mathcal{S}_0 y que x es pozo en el subcarcaj pleno $Q_{\mathcal{S}_0}$ que esta determina (es decir, si existe una flecha $x \rightarrow m$ en Γ entonces $m \notin \mathcal{S}_0$). Denotemos con $\sigma_x\mathcal{S}_0$ al subconjunto de Γ_0 que se obtiene de \mathcal{S}_0 al reemplazar x por $\tau(x)$,*

$$\sigma_x\mathcal{S}_0 = \{\tau(x)\} \cup (\mathcal{S}_0 - \{x\}),$$

y manteniendo el mismo orden de vértices. Entonces $\sigma_x\mathcal{S}_0$ es cosección. Por un lado si \mathcal{S}_0 tiene a lo más un elemento de cada órbita, entonces $\sigma_x\mathcal{S}_0$ cumple la misma condición. Por lo tanto para cada elemento no inyectivo y de $\sigma_x\mathcal{S}_0$ se tiene $\tau^{-1}(y) \notin \sigma_x\mathcal{S}_0$. Por otro lado supongamos que $n \rightarrow y$ es una flecha en Γ y que $y \in \sigma_x\mathcal{S}_0$. Consideremos primero el caso $y \neq \tau(x)$. Entonces $y \in \mathcal{S}_0$, y como \mathcal{S}_0 es cosección, o bien $n \in \mathcal{S}_0$ ó $\tau^{-1}(n) \in \mathcal{S}_0$. Si $n \in \mathcal{S}_0$ entonces $n \neq x$ pues x es pozo en $Q_{\mathcal{S}_0}$, por lo que $n \in \sigma_x\mathcal{S}_0$. Supongamos entonces que $n \notin \mathcal{S}_0$, por lo que $\tau^{-1}(n) \in \mathcal{S}_0$. Si $\tau^{-1}(n) \neq x$ entonces $\tau^{-1}(n) \in \sigma_x\mathcal{S}_0$. Y si $\tau^{-1}(n) = x$ entonces $n = \tau(\tau^{-1}(n)) = \tau(x) \in \sigma_x\mathcal{S}_0$. En cualquier caso uno de los vértices n ó $\tau^{-1}(n)$ pertenece a $\sigma_x\mathcal{S}_0$. Consideremos finalmente el caso

$y = \tau(x)$, es decir, cuando se tiene una flecha $n \rightarrow \tau(x)$ en Γ . Notamos primero que n no es inyectivo, pues (Γ, τ) es hereditario y $\tau(x)$ no es inyectivo. Entonces existe una flecha $\tau^{-1}(n) \rightarrow x$. Como \mathcal{S}_0 es cosección y $\tau^{-2}(n)$ no puede estar en \mathcal{S}_0 (de nuevo por ser x pozo en $Q_{\mathcal{S}_0}$) concluimos que $\tau^{-1}(n)$ pertenece a \mathcal{S}_0 . Como Γ es dirigido, $\tau^{-1}(n)$ es diferente de x por lo que $\tau^{-1}(n)$ es un elemento de $\sigma_x \mathcal{S}_0$. Esto prueba que $\sigma_x \mathcal{S}_0$ es cosección. Observamos que el carcaj $Q_{\sigma_x \mathcal{S}_0}$ se obtiene de $Q_{\mathcal{S}_0}$ al cambiar de orientación todas las flechas que entran a x (ninguna flecha sale pues x es pozo en $Q_{\mathcal{S}_0}$).

Paso 2. Si x es un elemento no proyectivo de una cosección \mathcal{S}_0 tal que x es pozo del subcarcaj pleno $Q_{\mathcal{S}_0}$, y $Q_{\mathcal{S}_0}$ admite una ordenación admisible de sus vértices, entonces

$$f(\sigma_x \mathcal{S}_0) = \sigma_x(f(\mathcal{S}_0)),$$

donde el σ_x del lado derecho es la reflexión simple de vértice x asociada a $Q_{\mathcal{S}_0}$. Como el cambio $\mathcal{S}_0 \mapsto \sigma_x \mathcal{S}_0$ solo modifica el vértice x , al igual que la reflexión σ_x solo cambia la entrada x , nos podemos concentrar en esta componente. Ya que $\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x \rangle = 1$ pues $Q_{\mathcal{S}_0}$ no tiene ciclos orientados, notamos que

$$\begin{aligned} \sigma_x(f(\mathcal{S}_0))_x &= f(\mathcal{S}_0)_x - 2\langle f(\mathcal{S}_0), \mathbf{e}_x \rangle = \\ &= f(x) - \sum_{y \in \mathcal{S}_0} f(y) 2\langle \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x \rangle = \\ &= f(x) - 2f(x) - \sum_{y \in \mathcal{S}_0 - \{x\}} f(y) (\langle \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x \rangle + \langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \rangle). \end{aligned}$$

Ahora, como x es pozo en $Q_{\mathcal{S}_0}$ tenemos que $\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \rangle = m_{x,y} = 0$ para todo $y \in \mathcal{S}_0 - \{x\}$ y como \mathcal{S}_0 es cosección se tiene que si $y \in \mathcal{S}_0 - \{x\}$ entonces $\langle \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x \rangle = m_{y,x} \neq 0$ si y solo si $y \in x^-$, por lo que

$$\begin{aligned} \sigma_x(f(\mathcal{S}_0))_x &= -f(x) - \sum_{y \in \mathcal{S}_0 - \{x\}} f(y) \langle \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x \rangle = \\ &= -f(x) + \sum_{y \in x^-} f(y) (-m_{y,x}) = \\ &= f(\tau(x)). \end{aligned}$$

De esta manera tenemos $f(\sigma_x \mathcal{S}_0) = \sigma_x f(\mathcal{S}_0)$.

Paso 3. Probamos (b). Sea \mathcal{S} una cosección como en el enunciado del lema y fijemos un orden admisible $\{x_1, \dots, x_n\}$ de los vértices de $Q_{\mathcal{S}}$. Entonces x_1 es pozo y por lo anterior $\mathcal{S}_1 = \sigma_{x_1} \mathcal{S}$ es una cosección. El subcarcaj pleno de Γ que determina \mathcal{S}_1 admite un orden admisible (haciendo $\tau(x_1)$ mayor que el resto de los elementos de \mathcal{S}) y tiene a x_2 como pozo no proyectivo. Podemos entonces construir $\mathcal{S}_2 = \sigma_{x_2} \mathcal{S}_1$. Supongamos que hemos construido de esta manera la cosección \mathcal{S}_i donde x_{i+1} es un pozo no proyectivo. Entonces $\mathcal{S}_{i+1} = \sigma_{x_{i+1}} \mathcal{S}_i$ es cosección. Sucesivamente obtenemos una cosección $\mathcal{S}_n = \sigma_{x_n} \mathcal{S}_{n-1}$, y por el paso 2 y el corolario 1.7 tenemos

$$f(\mathcal{S}_n) = \sigma_{x_n} f(\mathcal{S}_{n-1}) = \dots = \sigma_{x_n} \sigma_{x_{n-1}} \dots \sigma_{x_2} \sigma_{x_1} (f(\mathcal{S})) = \Phi_Q f(\mathcal{S}).$$

Como se han usado todas las reflexiones simples σ_x exactamente una vez, es claro que $\mathcal{S}_n = \tau \mathcal{S}$ y que $Q_{\tau \mathcal{S}} \cong Q_{\mathcal{S}}$. Esto termina la prueba. \square

1.8 Componentes posproyectiva y preinyectiva.

Finalizamos este capítulo estudiando las componentes del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(kQ)$ que contienen a los kQ -módulos proyectivos (inyectivos), donde Q es un carcaj finito, sólido, con ordenación admisible de sus vértices que no es un diagrama de Dynkin. El siguiente resultado es bien conocido, ver por ejemplo [2, teorema V.7.8].

Lema 1.29 *Sea A una k -álgebra de dimensión finita y de tipo de representación finito. Si M y N son A -módulos inescindibles no isomorfos entonces todo morfismo no cero $f : M \rightarrow N$ es suma de composiciones de morfismos irreducibles entre A -módulos inescindibles. En particular, existe un camino de $[M]$ en $[N]$ en la gráfica de Auslander-Reiten $\Gamma(A)$ de A -mod.*

Lema 1.30 *Sea $A = kQ$ el álgebra de caminos de un carcaj finito sólido Q con ordenación admisible de sus vértices y denotemos con $P(i)$ al A -módulo proyectivo inescindible Ae_i (con e_i el camino trivial sobre el vértice $i \in Q_0$). Para cada camino $\gamma : i \rightarrow j$ en Q la asignación $g_\gamma : P(j) \rightarrow P(i)$ dada por $ae_j \mapsto ae_j\gamma e_i$ es un monomorfismo de A -módulos.*

i) El conjunto $\{g_\gamma \mid \gamma \text{ es camino de } i \text{ a } j\}$ es base de $\mathbf{Hom}_A(P(j), P(i))$.

ii) Sea $P'(i) = \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} P(t(\alpha))$ y consideremos el morfismo $g : P'(i) \rightarrow P(i)$ dado por $g = [g_\alpha]_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}}$ donde $g_\alpha : P(t(\alpha)) \rightarrow P(i)$. Si $j \neq i$ entonces todo morfismo no cero $f : P(j) \rightarrow P(i)$ se factoriza a través de g .

iii) $\mathbf{Im} g$ es el único submódulo maximal de $P(i)$.

Demostración. Recordamos que si M es un A -módulo y e es un idempotente en A , entonces hay un isomorfismo de k -espacios vectoriales

$$\Phi : \mathbf{Hom}_A(Ae, M) \rightarrow eM,$$

definido por $f \mapsto f(e)$. Su inverso está dado por $\Psi(m) : a \mapsto am$. Así

$$\mathbf{Hom}_A(P(j), P(i)) = \mathbf{Hom}_A(Ae_j, Ae_i) \cong e_j Ae_i,$$

y cada morfismo g_γ definido arriba corresponde a $\Psi(\gamma)$. Así, si ordenamos los caminos de i a j en Q , $\gamma_1, \dots, \gamma_r$, entonces el conjunto $g_{\gamma_1}, \dots, g_{\gamma_r}$ es base de $\mathbf{Hom}_A(P(j), P(i))$. Esto prueba (i). Más aún, si $\gamma\tilde{\gamma}$ es un camino en Q , entonces $g_{\tilde{\gamma}}(g_\gamma(a)) = g_{\tilde{\gamma}}(a\gamma) = a\gamma\tilde{\gamma} = g_{\gamma\tilde{\gamma}}(a)$. Supongamos entonces que $g : P'(i) \rightarrow P(i)$ es como en (ii) y que $f : P(j) \rightarrow P(i)$ es un morfismo no cero con $j \neq i$. Por (i) existe una combinación lineal no cero $\sum_{\ell=1}^r c_\ell \gamma_\ell$ tal que $f = \Psi(\sum_{\ell=1}^r c_\ell \gamma_\ell) = \sum_{\ell=1}^r c_\ell g_{\gamma_\ell}$. Para cada flecha α de origen i sea

$$I_\alpha = \{\ell \in \{1, \dots, r\} \mid \gamma_\ell = \tilde{\gamma}_\ell \alpha \text{ para algún camino } \tilde{\gamma}_\ell\},$$

y definamos $h_\alpha : P(j) \rightarrow P(t(\alpha))$ como $h_\alpha = \sum_{\ell \in I_\alpha} c_\ell g_{\tilde{\gamma}_\ell}$. Hacemos entonces $h = [h_\alpha]_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}}^t : P(j) \rightarrow P'(i)$ y notamos que

$$gh = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} g_\alpha h_\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \sum_{\ell \in I_\alpha} c_\ell g_\alpha g_{\tilde{\gamma}_\ell} = \sum_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ s(\alpha)=i}} \sum_{\ell \in I_\alpha} c_\ell g_{\tilde{\gamma}_\ell \alpha} = \sum_{\ell=1}^r c_\ell g_{\gamma_\ell} = f,$$

ya que el conjunto $\{I_\alpha \mid \alpha \in Q_1, s(\alpha) = i\}$ es una partición de $\{1, \dots, r\}$. Esto muestra (ii). Finalmente supongamos que M es un submódulo propio de $P(i)$. Como el álgebra A es hereditaria, todo sumando directo inescindible de M es isomorfo a $P(j)$ para algún $j \neq i$. Por el inciso anterior la composición $f : P(j) \rightarrow M \rightarrow P(i)$ se factoriza a través de g . Como esto es cierto para cualquier sumando directo de M , se concluye que M está contenido en $\mathbf{Im} g$. Esto termina la prueba. \square

Lema 1.31 Sean Q un carcaj finito, sólido, con ordenación admisible de sus vértices y $A = kQ$ la k -álgebra de caminos de Q .

- a) Sea P un A -módulo proyectivo inescindible. Un morfismo de A -módulos $g : M \rightarrow P$ es minimal derecho que casi se divide si y solo si g es un monomorfismo y su imagen es igual a $\mathbf{rad}P$.
- b) Sea I un A -módulo inyectivo inescindible. Un morfismo de A -módulos $f : I \rightarrow M$ es minimal izquierdo que casi se divide si y solo si f es un epimorfismo y su núcleo es igual a $\mathbf{soc}I$.
- c) El carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A)$ de $A\text{-mod}$ es un carcaj de traslación hereditario.

Demostración. Probamos (a), la prueba de (b) es similar (consultar la proposición IV.3.5 en [1]). Por unicidad basta probar que $g : \mathbf{rad}P \rightarrow P$ es un morfismo minimal derecho que casi se divide. Así, si $h : \mathbf{rad}P \rightarrow \mathbf{rad}P$ es tal que $gh = g$, entonces $g(h - Id_{\mathbf{rad}P}) = 0$ y como g es inyectivo, $h = Id_{\mathbf{rad}P}$. Por lo tanto g es minimal derecho. Supongamos entonces que $v : V \rightarrow P$ no es retracción. Entonces v no es epimorfismo (pues P es proyectivo), por lo que $\mathbf{Im} v$ es un submódulo propio de P . En vista del punto (iii) del lema 1.30, el proyectivo P tiene un único maximal $\mathbf{rad}P$, por lo que v se factoriza a través de g . Esto muestra que g es un morfismo que casi se divide por la derecha.

Probamos ahora (c). Recordamos que $\Gamma(A)_0 = \mathbf{ind}A$. Además para cada morfismo minimal que casi se divide por la derecha $g : \bigoplus d_i E_i \rightarrow N$ (con los E_i inescindibles no isomorfos entre sí) hay $d_i = \mathbf{dim}_k \mathbf{Irr}(E_i, N)$ flechas sólidas de $[E_i]$ en $[N]$, y para cada morfismo minimal que casi se divide por la izquierda $f : M \rightarrow \bigoplus d_i E_i$ se agregan $d_i = \mathbf{dim}_k \mathbf{Irr}(M, E_i)$ flechas sólidas de $[M]$ en $[E_i]$.

Por construcción $\Gamma(A)$ es un carcaj sólido que claramente es localmente finito. Sean ahora $\Gamma(A)'_0$ el conjunto de vértices $[N]$ para los que existe una pareja exacta (f, g) que casi se divide de la forma

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0,$$

y $\Gamma(A)''_0$ el conjunto de elementos $[M]$ determinados por tales parejas. Por definición, la traslación de Auslander-Reiten es una biyección de $\Gamma(A)'_0$ en $\Gamma(A)''_0$. Por las equivalencias (a), (b') y (c') en el lema 1.20 y de la definición de flechas en $\Gamma(A)$ se sigue que la traslación de Auslander-Reiten es en efecto una traslación de carcaj. Más aún, del teorema de existencia de sucesiones que casi se dividen (A es una k -álgebra artiniana) el conjunto $\Gamma(A)_0 - \Gamma(A)'_0$ consiste en las clases de isomorfismo de A -módulos proyectivos inescindibles, y $\Gamma(A)_0 - \Gamma(A)''_0$ en las clases de isomorfismo de inyectivos inescindibles.

Para verificar que $\Gamma(A)$ es un carcaj hereditario supongamos que tenemos una flecha $[E_i] \rightarrow [P]$ donde $[P]$ es un vértice proyectivo. Entonces existe un A -módulo E del cual E_i es sumando directo y un morfismo minimal que casi se divide por la derecha $g : E \rightarrow P$. Por el inciso (a) el módulo E es isomorfo al radical $\mathbf{rad}P$. Por el lema 1.30(ii) todos los sumandos de E son proyectivos y en particular $[E_i]$ es un vértice proyectivo. Usando el inciso (b) y una versión dual del lema 1.30 se muestra que si $[I] \rightarrow [E_i]$ es una flecha con $[I]$ un vértice inyectivo, entonces $[E_i]$ también es inyectivo. \square

Lema 1.32 *Sean Q un carcaj finito, sólido, conexo, con ordenación admisible de sus vértices y $A = kQ$ la k -álgebra de caminos de Q . Son equivalentes*

- a) *A es de tipo de representación finito.*
- b) *Existen un A -módulo proyectivo inescindible P y un entero $n \geq 0$ tales que $\tau^{-n}P$ es inyectivo.*
- c) *Existen un A -módulo inyectivo inescindible I y un entero $n \geq 0$ tales que $\tau^n I$ es proyectivo.*

Demostración. La equivalencia de (b) y (c) es evidente. Por el lema anterior 1.31(c) el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A)$ de A -mod es un carcaj de traslación hereditario. Observamos que, debido a los lemas 1.30 y 1.31, el subcarcaj pleno \mathcal{C}_P de $\Gamma(A)$ determinado por los vértices proyectivos es conexo. De forma análoga se muestra que el subcarcaj pleno de $\Gamma(A)$ determinado por los vértices inyectivos también es conexo.

Si A es de tipo de representación finito, ya que todo A -módulo inescindible M tiene una cubierta proyectiva $P \rightarrow M$, del lema 1.29 se sigue que $\Gamma(A)$ es un carcaj conexo. Por la descripción de órbitas dada al inicio de la sección 1.7, ya que toda órbita de $\Gamma(A)$ es finita, entonces toda órbita es o bien periódica o contiene un proyectivo y un inyectivo. Esto, el lema 1.24 y la existencia de proyectivos e inyectivos en A -mod muestra que (a) implica (b) y (c).

Probamos ahora que (b) implica (a). Sea \mathcal{C} la componente conexa de $\Gamma(A)$ que contiene a los vértices proyectivos, y que por 1.25(b) es propio y hereditario. Por 1.21, \mathcal{C} contiene todas las órbitas de sus elementos, y por hipótesis (b) alguna de estas órbitas contiene un inyectivo. Por conexidad, \mathcal{C} contiene a todos los inyectivos. Luego, el lema 1.24 indica que todas las órbitas de \mathcal{C} son proyectivo-inyectivas, y por lo tanto \mathcal{C} es un conjunto finito. Se observa finalmente que para cualquier A -módulo inescindible M existe un elemento $[N]$ de \mathcal{C} tal que $\mathbf{Hom}_A(M, N) \neq 0$ (ya que \mathcal{C} contiene las clases de isomorfismo de todos los inyectivos inescindibles). Del lema 6 en la sección 2.2 de [24] se sigue que $[M]$ pertenece a \mathcal{C} , y por lo tanto $\Gamma(A)_0 = \mathcal{C}$ es un conjunto finito. \square

Como referencia para el siguiente lema citamos la proposición 10.2 de Gabriel y Roiter [13].

Lema 1.33 *Sean Q un carcaj finito, sólido, conexo, con ordenación admisible de sus vértices y $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q . Supongamos que kQ -mod es de tipo de representación infinito .*

- a) Existe una componente conexa \mathcal{P} del carcaj de Auslander-Reiten de kQ -mod que contiene a los proyectivos (llamada **componente posproyectiva**). Esta componente es isomorfa al carcaj de traslación $(-\mathbb{N}_0)Q^{op}$, por lo que \mathcal{P} es un carcaj dirigido posproyectivo.
- b) Existe una componente conexa \mathcal{I} del carcaj de Auslander-Reiten de kQ -mod que contiene a los inyectivos (llamada **componente preinyectiva**). La componente \mathcal{I} es ahora isomorfa al carcaj de traslación \mathbb{N}_0Q^{op} , por lo que \mathcal{I} es un carcaj dirigido preinyectivo.

Demostración. Mostramos (a). Sean $P(i) = Ae_i$ el A -módulo proyectivo donde e_i es el camino trivial (idempotente) de vértice $i \in \{1, \dots, n\}$. Por la definición del carcaj de Auslander-Reiten de A -mod y como consecuencia de los lemas 1.30(iii) y 1.31(a), el subcarcaj pleno de $\Gamma(kQ)$ determinado por $[P(1)], \dots, [P(n)]$ es isomorfo a Q^{op} .

Sea entonces \mathcal{P} la componente conexa de $\Gamma(kQ)$ que contiene a los proyectivos. Como $\Gamma(A)$ es hereditario (1.31(c)), por el lema 1.25(b) el subcarcaj \mathcal{P} también es hereditario. Por el lema 1.24 para todo vértice $[M]$ de \mathcal{P} existe $\ell \geq 0$ tal que $\tau^\ell[M]$ es proyectivo. Además, por el lema 1.32 para cada proyectivo $P(i)$ existen las traslaciones $\tau^{-\ell}[P(i)]$ para todo $\ell \geq 0$. Entonces hay una biyección entre los vértices de \mathcal{P} y los de $(-\mathbb{N}_0)Q^{op}$ dada por $\tau^{-\ell}[P(i)] \mapsto (i, -\ell)$ para i en Q_0 y $\ell \geq 0$. Ya que el carcaj determinado por los proyectivos es isomorfo a Q^{op} y por definición de traslación, la biyección anterior es un isomorfismo de carcajes de traslación. En particular \mathcal{P} es un carcaj dirigido posproyectivo. \square

Lema 1.34 Sean Q un carcaj finito, sólido, conexo, con ordenación admisible de sus vértices y $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q .

- a) Si A es de tipo de representación finito entonces todo A -módulo inescindible es excepcional.
- b) Si A es de tipo de representación infinito entonces todo A -módulo posproyectivo y preinyectivo inescindible es excepcional.

Demostración. Supongamos que M y N son A -módulos inescindibles que no son proyectivos. Por las fórmulas de Auslander-Reiten en el caso hereditario se tiene

$$\mathbf{Ext}_A^1(\tau M, \tau N) \cong D\mathbf{Hom}_A(N, \tau M) \cong \mathbf{Ext}_A^1(M, N),$$

y si M y N no son inyectivos entonces

$$\mathbf{Ext}_A^1(\tau^{-1}M, \tau^{-1}N) \cong D\mathbf{Hom}_A(\tau^{-1}N, M) \cong \mathbf{Ext}_A^1(M, N).$$

Ya que los A -módulos proyectivos e inyectivos inescindibles son excepcionales, por lo anterior todos sus trasladados también lo son. Esto prueba (b) por el lema 1.33 y (a) es consecuencia del lema 1.34. \square

El siguiente lema es un caso particular del corolario IV.2.9 en [1].

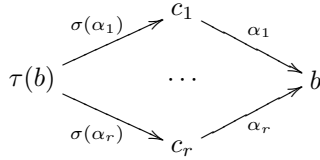
Lema 1.35 Sean Q un carcaj finito, sólido, conexo, con ordenación admisible de sus vértices y $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q . Supongamos que kQ -mod es de tipo de representación infinito. Sea Φ_Q la matriz de Coxeter asociada a Q .

a) Si M es un kQ -módulo preinyectivo entonces $\underline{\dim} \tau M = \Phi_Q \underline{\dim} M$.

b) Si N es un kQ -módulo posproyectivo entonces $\underline{\dim} \tau^{-1} N = \Phi_Q^{-1} \underline{\dim} N$.

Sea Γ un carcaj de traslación (localmente finito) y supongamos que Γ no tiene flechas múltiples. Entonces existe un mapeo inyectivo $\sigma : \widehat{\Gamma}_1 \rightarrow \Gamma_1$ entre flechas de Γ donde $\widehat{\Gamma}_1$ es el subconjunto de flechas $\alpha : a \rightarrow b$ con b no proyectivo, tal que $\sigma(\alpha) : \tau b \rightarrow a$ (la función σ es llamada **polarización** en Ringel [24, 2.1(6)]). La k -categoría de caminos $k\Gamma$ tiene como objetos el conjunto de vértices Γ_0 mientras que $\mathbf{Hom}_{k\Gamma}(a, b)$ es el k -espacio vectorial con base las flechas de a en b . Para cada vértice no proyectivo b se define la **suma de malla** $\sigma_b = \sum_{\alpha} \alpha \sigma(\alpha) \in k\Gamma$ donde la suma corre sobre todas las flechas α con destino b . El ideal I de $k\Gamma$ generado por las sumas de malla σ_b cuando b corre por todos los vértices no proyectivos es llamado **ideal de mallas**. La **categoría de mallas** $k_{\tau}\Gamma = k\Gamma/I$ es la k -categoría residual asociada. Ver Gabriel y Roiter [13, teorema 10.3] para el siguiente resultado.

Lema 1.36 Sean Q un carcaj finito, sólido, conexo, sin flechas múltiples y con ordenación admisible de sus vértices, y sea $A = kQ$ el álgebra de caminos de Q . Supongamos que $kQ\text{-mod}$ es de tipo de representación infinito (resp. finito). Si \mathcal{P} es la componente posproyectiva de $\Gamma(A)$ (resp. $\mathcal{P} = \Gamma(A)$), entonces existe un funtor $\Xi : k\Gamma \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}$, que induce una equivalencia entre la categoría de mallas $k_{\tau}\mathcal{P}$ y $\mathcal{S}\mathcal{P}$, la subcategoría plena de $A\text{-mod}$ determinada por representantes $N(b)$ de elementos b en \mathcal{P} . Más aún, para cada malla $\{b, \tau(b)\} \cup b^-$ con $b^- = \{c_1, \dots, c_r\}$,



existe una sucesión que casi se divide de la forma

$$0 \longrightarrow N(\tau(b)) \xrightarrow{\begin{bmatrix} \Xi(\sigma(\alpha_1)) \\ \vdots \\ \Xi(\sigma(\alpha_r)) \end{bmatrix}} \bigoplus_{i=1}^r N(c_i) \xrightarrow{[\Xi(\alpha_1) \ \dots \ \Xi(\alpha_r)]} N(b) \longrightarrow 0.$$

Capítulo 2

Álgebras de Kronecker y diagramas de Dynkin.

Para $n \geq 2$ consideramos el carcaj K_n con dos vértices y n flechas en la misma dirección y su matriz de incidencias M_{K_n} ,

$$K_n = \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \downarrow \dots \downarrow \\ a_1 \quad \dots \quad a_n \\ \bullet_1 \end{array} \quad M_{K_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}.$$

La **n-álgebra de Kronecker generalizada** es el álgebra de caminos $A_n = kK_n$ del carcaj K_n . El propósito de las secciones 2.1 y 2.2 es exhibir algoritmos de construcción de módulos excepcionales para las álgebras de Kronecker clásica A_2 y el primer caso generalizado A_3 respectivamente. Los demás casos pueden ser tratados de forma similar. Aunque estas representaciones son bien conocidas (ver Ringel [26] y [28]), el método usado ilustra las nociones presentadas en el capítulo de preliminares. Además la categoría de representaciones del álgebra de Kronecker clásico es fundamental para la construcción de representaciones de los demás carcajes de Dynkin extendido. En este capítulo denotamos con I a los morfismos identidad.

2.1 Álgebra de Kronecker clásica $n = 2$.

Consideremos primero el caso clásico A_2 .

$$K_2 = \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \downarrow \downarrow \\ a_1 \quad a_2 \\ \bullet_1 \end{array} \quad M_{K_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La forma cuadrática correspondiente está dada por $q_{K_2}(d_1, d_2) = (d_1 - d_2)^2$. Por lo tanto el conjunto de raíces positivas de K_2 consiste en los vectores

$$p_2^t = (t + 1, t) \quad \text{y} \quad q_2^t = (t, t + 1),$$

para t mayor o igual a cero. Vamos a hacer dos reducciones en el álgebra de Kronecker A_2 , cada una de ellas producirá representaciones excepcionales de vector dimensión p_2^t y q_2^t . Necesitaremos el siguiente lema técnico. Recordamos que un funtor es rígido si es exacto e induce isomorfismos en grupos de extensiones.

Lema 2.1 *Sea B la subálgebra de A_2 generada por la flecha a_1 y consideremos los B -módulos admisibles $X = X^1 \oplus X^\omega$ y $Y = Y^\omega \oplus Y^2$, donde X^1, Y^2 son los simples de vértice 1, 2 y X^ω, Y^ω son copias de la B -representación excepcional $k \xrightarrow{1} k$. Fijamos bases $\{x_1^1\}$ de X^1 , $\{x_1^\omega = y_1^\omega, x_2^\omega = y_2^\omega\}$ de $X^\omega = Y^\omega$ y $\{y_2^2\}$ de Y^2 tales que $a_1 x_2^\omega = x_1^\omega$ y $a_1 y_2^\omega = y_1^\omega$. Se tienen morfismos irreducibles $X^1 \xrightarrow{\sigma} X^\omega = Y^\omega \xrightarrow{\pi} Y^2$ dados por*

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & kx_2^\omega & & ky_2^\omega & \xrightarrow[\pi_2]{1} & ky_2^2 \\ & & \downarrow X_{a_1}^\omega & & \downarrow Y_{a_1}^\omega & & \downarrow \\ kx_1^1 & \xrightarrow[\sigma_1]{1} & kx_1^\omega & & ky_1^\omega & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Las álgebras de endomorfismos opuestas de X y Y se dividen sobre el radical,

$$\mathbf{End}_B(X)^{op} \cong S \oplus P \quad y \quad \mathbf{End}_B(Y)^{op} \cong S' \oplus P',$$

donde $P = k\sigma$, $P' = k\pi$, $S = \mathbf{End}(X^1) \oplus \mathbf{End}(X^\omega) \cong kf_1 \times kf_\omega$ y $S' = \mathbf{End}(Y^\omega) \oplus \mathbf{End}(Y^2) \cong kf'_\omega \times kf'_2$. Las matrices de dimensiones vectoriales de X y Y están dadas por

$$T^X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad T^Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la base dual $\{x_1^1, x_1^\omega, x_2^\omega; (x_1^1)^*, (x_1^\omega)^*, (x_2^\omega)^*\}$ de X las coacciones izquierda $\lambda : X^* \rightarrow P^* \otimes_S X^*$ y derecha $\rho : X \rightarrow X \otimes_S P^*$ tienen la siguiente forma,

$$\lambda(u) = \begin{cases} \sigma^* \otimes (x_1^1)^*, & \text{si } u = (x_1^\omega)^*, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

$$\rho(z) = \begin{cases} x_1^\omega \otimes \sigma^*, & \text{si } z = x_1^1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Por otro lado, en la base dual $\{y_1^1, y_1^\omega, y_2^\omega; (y_1^1)^*, (y_1^\omega)^*, (y_2^\omega)^*\}$ de Y las coacciones izquierda $\lambda' : Y^* \rightarrow (P')^* \otimes_{S'} Y^*$ y derecha $\rho' : Y \rightarrow Y \otimes_{S'} (P')^*$ tienen la siguiente forma

$$\lambda'(u) = \begin{cases} \pi^* \otimes (y_2^\omega)^*, & \text{si } u = (y_2^2)^*, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

$$\rho'(z) = \begin{cases} y_2^\omega \otimes \pi^*, & \text{si } z = y_2^\omega, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Más aún, los B -módulos X y Y son rígidos, por lo que los funtores de reducción $F^X : A_2^X\text{-mod} \rightarrow A_2\text{-mod}$ y $F^Y : A_2^Y\text{-mod} \rightarrow A_2\text{-mod}$ son funtores rígidos.

Demostración. Para la expresión de las coacciones consultar fórmulas en el lema A.17 del apéndice. Para verificar que el funtor F^X es rígido recordamos la sucesión exacta de grupos de extensiones inducida por la reducción a través de X ,

$$0 \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}^X}^1(M, N) \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(F^X(M), F^X(N)) \rightarrow \mathbf{Ext}_B^1(F^X(M), F^X(N)) \rightarrow 0.$$

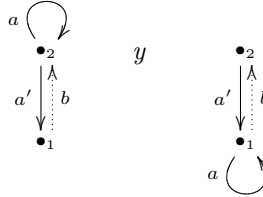
Ya que los módulos $F^X(M)$ y $F^X(N)$ considerados como B -módulos tienen la forma $X \otimes_S M$ y $X \otimes_S N$, y estos son módulos rígidos por hipótesis, se concluye que F^X es un funtor rígido. El caso F^Y es análogo. Las demás afirmaciones del enunciado son claras. \square

Con la notación del lema anterior, consideramos los cambios de base

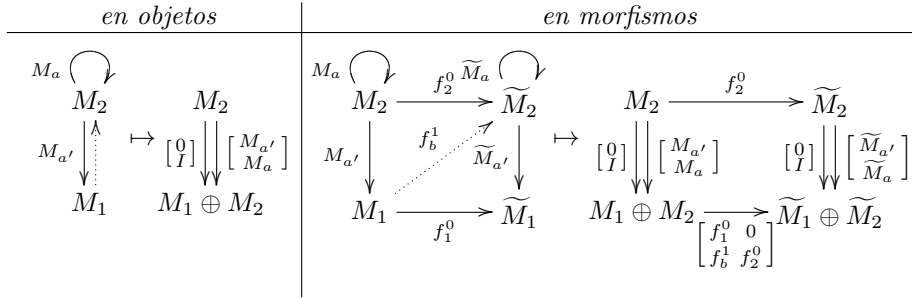
$$(T^X)^t M_{K_2} T^X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (T^Y)^t M_{K_2} T^Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus carcajes correspondientes, que denotaremos con K_2^x y K_2^y , son dados en el siguiente lema.

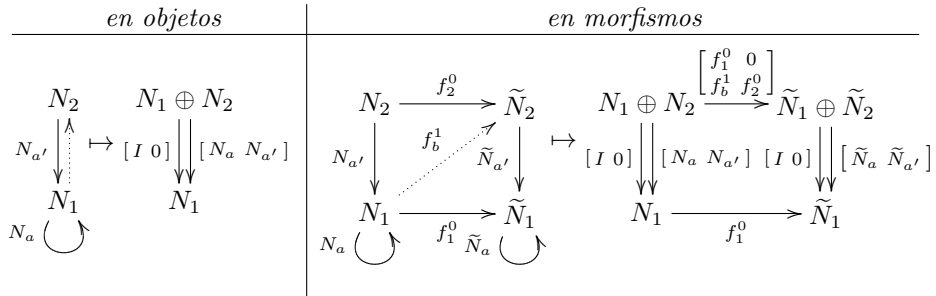
Lema 2.2 *Las ditálgebras reducidas A_2^X y A_2^Y del álgebra de Kronecker A_2 son isomorfas a (kK_2^x, δ^x) y (kK_2^y, δ^y) , donde los carcajes K_2^x y K_2^y son respectivamente*



las diferenciales en flechas están dadas por $\delta^x(a) = ba'$, $\delta^y(a) = -a'b$ y cero en las demás flechas. El funtor de reducción $F^X : A_2^X\text{-mod} \rightarrow A_2\text{-mod}$ tiene la siguiente forma explícita



mientras que el funtor $F^Y : A_2^Y\text{-mod} \rightarrow A_2\text{-mod}$ está dado por



Demostración. Es fácil ver que las álgebras tensoriales reducidas

$$T_S(X^* \otimes_R ka_2 \otimes_R X \oplus k\sigma^*) \quad \text{y} \quad T_{S'}(Y^* \otimes_R ka_2 \otimes_R Y \oplus k\pi^*),$$

$$\begin{array}{ccc} (x_1^\omega)^* \otimes_{a_2} \otimes_{x_2^\omega} & & (y_1^\omega)^* \otimes_{a_2} \otimes_{y_2^\omega} \\ \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet_\omega \\ \uparrow \sigma^* \\ \bullet_1 \end{array} & & \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \uparrow \pi^* \\ \bullet_\omega \\ \curvearrowright \end{array} \end{array}$$

son de carcaj regular. Por el lema 1.11 estas álgebras son isomorfas a kK_2^x y kK_2^y respectivamente. Calculamos ahora sus diferenciales. Ya que la diferencial del álgebra de Kronecker A_2 es cero, las diferenciales reducidas tienen la siguiente forma,

$$\begin{aligned} \delta^x(x^* \otimes a_2 \otimes x) &= \lambda(x^*) \otimes a_2 \otimes x - x^* \otimes a_2 \otimes \rho(x), \\ \delta^y(y^* \otimes a_2 \otimes y) &= \lambda'(y^*) \otimes a_2 \otimes y - y^* \otimes a_2 \otimes \rho'(y). \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las coacciones y considerando que los coproductos μ y μ' en P^* y $(P')^*$ son cero, se tiene el resultado.

Para justificar el algoritmo de recuperación correspondiente a la reducción por el módulo X descrito en el enunciado del lema, consideramos una A_2^X -representación $M = (M_1, M_2; M_a, M_{a'})$. Sean e_1, e_2 los caminos triviales de A_2 . Entonces $F^X(M)$ considerado como B -módulo es $X \otimes_S M$, y está constituido por los espacios

$$e_1(X \otimes_S M) \cong e_1(x_1^1 \otimes M_1 \oplus e_1^\omega \otimes_S M_2 \oplus x_2^\omega \otimes_S M_2) \cong M_1 \oplus M_2,$$

$$e_2(X \otimes_S M) \cong e_2(x_1^1 \otimes M_1 \oplus e_1^\omega \otimes_S M_2 \oplus x_2^\omega \otimes_S M_2) \cong M_2.$$

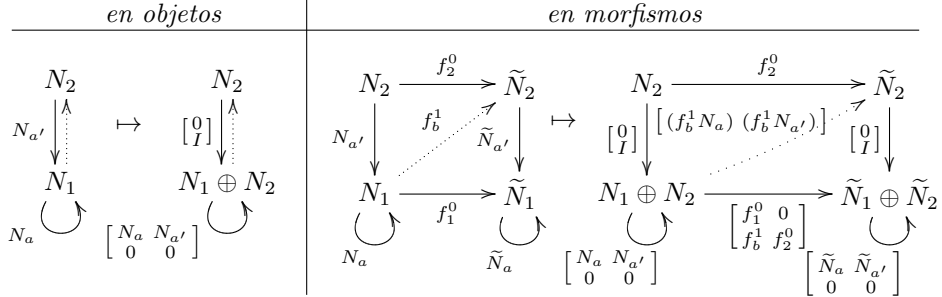
La acción de a_1 en $F^X(M)$ está dada por la acción de a_1 en X^ω , es decir, por la matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ver A.23). La acción de a_2 se obtiene de las acciones de a y a' en M , por lo que corresponden a la acción de la matriz $\begin{bmatrix} M_{a'} \\ M_a \end{bmatrix}$. De manera similar se describe la reducción respecto a Y . La descripción de los funtores en morfismos se puede calcular usando las fórmulas de la proposición A.23. \square

Damos ahora algoritmos para la construcción de A_2^X y A_2^Y representaciones excepcionales.

Lema 2.3 a) *Existe un functor fiel, pleno y rígido $G^X : A_2^X\text{-mod} \rightarrow A_2^X\text{-mod}$ que incrementa dimensiones y cuya forma explícita es*

en objetos		en morfismos
$\begin{array}{ccc} M_a \curvearrowright & & \begin{bmatrix} 0 & M_{a'} \\ 0 & M_a \end{bmatrix} \curvearrowright \\ M_2 & & M_1 \oplus M_2 \\ \uparrow M_{a'} & \mapsto & \uparrow [I \ 0] \\ M_1 & & M_1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} M_a \curvearrowright & & \begin{bmatrix} 0 & M_{a'} \\ 0 & M_a \end{bmatrix} \curvearrowright \\ M_2 & \xrightarrow{f_2^\omega \widetilde{M}_a} & \widetilde{M}_2 \\ \uparrow M_{a'} & \nearrow f_b^1 & \uparrow \widetilde{M}_{a'} \\ M_1 & \xrightarrow{f_1^0} & \widetilde{M}_1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 0 & M_{a'} \\ 0 & M_a \end{bmatrix} \curvearrowright & & \begin{bmatrix} f_1^0 & 0 \\ f_b^1 & f_2^0 \end{bmatrix} \curvearrowright \\ M_1 \oplus M_2 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & \widetilde{M}_{a'} \\ 0 & \widetilde{M}_a \end{bmatrix}} & \widetilde{M}_1 \oplus \widetilde{M}_2 \\ \uparrow [I \ 0] & \nearrow \begin{bmatrix} (\widetilde{M}_{a'} f_b^1) \\ (\widetilde{M}_a f_b^1) \end{bmatrix} & \uparrow [I \ 0] \\ M_1 & \xrightarrow{f_1^0} & \widetilde{M}_1 \end{array}$

b) Existe un functor fiel, pleno y rígido $G^Y : A_2^Y\text{-mod} \rightarrow A_2^Y\text{-mod}$ que incrementa dimensiones y cuya forma explícita es



Demostración. Mostramos (a), la prueba de (b) es análoga. Tomamos B la subálgebra de A^X generada por la flecha a' y usamos el lema 2.1. Observamos primero que

$$(T^Y)^t M_{K^x} T^Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{K^x},$$

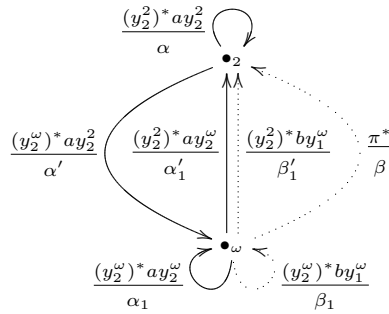
por lo que se espera una equivalencia de categorías

$$(A_2^X)^Y\text{-mod} \longrightarrow A_2^X\text{-mod}.$$

Para ser precisos daremos funtores fieles, plenos y rígidos

$$A_2^X\text{-mod} \xrightarrow{F_3} (A_2^X)^Y\text{-mod} \xrightarrow{F_2} (A_2^X)^Y\text{-mod} \xrightarrow{F_1} A_2^X\text{-mod},$$

donde $F_1 = F^Y$ es el functor asociado a la reducción de A_2^X usando Y , $F_2 = F^c$ es inducido por un cambio de base y $F_3 = F^r$ es una regularización. Para describir F_1 observamos que el carcaj del álgebra tensorial graduada $(kK^X)^Y$ es de la forma



en donde por claridad suprimimos los signos \otimes del producto tensorial y damos una notación alternativa para cada flecha (escrita en forma de denominadores en la figura). Usando las fórmulas de coacciones dadas en el lema 2.1 se calcula la diferencial. Los valores de la diferencial en flechas son

Flecha	Diferencial	Flecha	Diferencial
α	$\beta \otimes \alpha'$,	β	0 ,
α'	0 ,	β_1	0 ,
α_1	$\beta_1 - \alpha' \otimes \beta$,	β'_1	$\beta \otimes \beta_1$.
α'_1	$\beta'_1 + \beta \otimes \alpha_1 - \alpha \otimes \beta$,		

Proposición 2.4 Para $t \in \mathbb{N}_0$ denotamos con P_2^t y Q_2^t a las representaciones de A_2 dadas respectivamente por las matrices

$$P_2^t = \begin{array}{ccc} & k^t & \\ I^\downarrow \downarrow & & \\ & k^{t+1} & \end{array} \quad y \quad Q_2^t = \begin{array}{ccc} & k^{t+1} & \\ I^\leftarrow \downarrow & & \\ & k^t & \end{array}.$$

Las representaciones P_2^t y Q_2^t ($t \geq 0$) son excepcionales y forman listas completas de A_2 -módulos posproyectivos y preinjectivos respectivamente.

Para describir los grupos de morfismos recordemos que, para $t_1, t_2 \in \mathbb{N}_0$, un morfismo $f : P_2^{t_1} \rightarrow P_2^{t_2}$ ó $f : Q_2^{t_1} \rightarrow Q_2^{t_2}$ está dado por una pareja de matrices $f = (f^1, f^2)$ de tamaños $(t_2 + 1) \times (t_1 + 1)$ (para f^1) y $t_2 \times t_1$ (para f^2). Para describir el espacio $\mathbf{Hom}_{A_2}(P_2^{t_1}, P_2^{t_2})$ para $m \geq n$ e $i = 0, \dots, m - n$ denotemos con $A_{m \times n}(i) = (a_{k, \ell})$ a la matriz (vertical) con entradas dadas por $a_{k, \ell} = 1$ si $k - \ell = i$ y cero de otra forma. Entonces

$$\mathbf{Hom}_{A_2}(P_2^{t_1}, P_2^{t_2}) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^{t_2-t_1} x_i A_{t_2+1, t_1+1}(i), \sum_{i=0}^{t_2-t_1} x_i A_{t_2, t_1}(i) \right) \right\}_{x_i \in k}$$

(la suma se toma cero cuando $t_2 - t_1 < 0$).

Para describir el espacio $\mathbf{Hom}_{A_2}(A_2^{t_1}, A_2^{t_2})$ para $m \leq n$ e $i = 0, \dots, n - m$ denotemos con $B_{m \times n}(i) = (b_{k, \ell})$ a la matriz (horizontal) con entradas dadas por $b_{k, \ell} = 1$ si $\ell - k = i$ y cero de otra forma. Entonces

$$\mathbf{Hom}_{A_2}(Q_2^{t_1}, Q_2^{t_2}) = \left\{ \left(\sum_{i=0}^{t_1-t_2} x_i B_{t_2+1, t_1+1}(i), \sum_{i=0}^{t_1-t_2} x_i B_{t_2, t_1}(i) \right) \right\}_{x_i \in k}$$

(la suma se toma cero cuando $t_1 - t_2 < 0$).

Demostración. Aplicando iteradamente los funtores G^X y G^Y al A_2^X -simple $S(1)$ y al A_2^Y -simple $S(2)$ respectivamente se obtienen las siguientes representaciones excepcionales (ver lema 2.3), que denotamos con \widetilde{P}_2^t y \widetilde{Q}_2^t . A la derecha de cada representación se dibuja el carcaj de coeficientes correspondiente a la base canónica.

$$\begin{array}{l} \widetilde{P}_2^t = \begin{array}{c} (I^\leftarrow)^\downarrow \curvearrowright \\ \downarrow \\ k^t \\ \downarrow \wedge \\ [1 \ 0 \dots 0] \\ \downarrow \vdots \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet_1 \leftarrow \bullet_2 \leftarrow \bullet_3 \cdots \bullet_{t-1} \leftarrow \bullet_t \\ \swarrow \\ \bullet_0 \end{array} \\ \\ \widetilde{Q}_2^t = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \downarrow \wedge \\ k \\ \downarrow \vdots \\ k^t \\ (I^\leftarrow)^\downarrow \curvearrowright \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet_0 \\ \swarrow \\ \bullet_1 \leftarrow \bullet_2 \leftarrow \bullet_3 \cdots \bullet_{t-1} \leftarrow \bullet_t \end{array} \end{array}$$

Usamos ahora los funtores de reducción F^X y F^Y del lema 2.2 para producir módulos excepcionales del álgebra de Kronecker clásica A_2 , $P_2^t = F^X(\widetilde{P}_2^t)$ y

$Q_2^t = F^Y(\widetilde{Q}_2^t)$ para $t \geq 0$. Mostramos sus carcajes de coeficientes correspondientes,

$$\begin{array}{c}
 P_2^t = \begin{array}{c} k^t \\ \begin{array}{c} I^\downarrow \parallel I^\uparrow \\ \downarrow \uparrow \\ k^{t+1} \end{array} \end{array} \begin{array}{ccccccc} \bullet_1 & \bullet_2 & \bullet_3 & \dots & \bullet_{t-1} & \bullet_t & \\ \swarrow \downarrow \swarrow \downarrow \swarrow \downarrow \dots \swarrow \downarrow \swarrow \downarrow & & & & & & \\ \bullet_0 & \bullet_1 & \bullet_2 & \bullet_3 & \dots & \bullet_{t-1} & \bullet_t \end{array} \\
 \\
 Q_2^t = \begin{array}{c} k^{t+1} \\ \begin{array}{c} I^\leftarrow \parallel I^\rightarrow \\ \downarrow \uparrow \\ k^t \end{array} \end{array} \begin{array}{ccccccc} \bullet_1 & \bullet_2 & \bullet_3 & \dots & \bullet_{t-1} & \bullet_t & \bullet_0 \\ \downarrow \swarrow \downarrow \swarrow \downarrow \dots \downarrow \swarrow \downarrow \swarrow & & & & & & \\ \bullet_1 & \bullet_2 & \bullet_3 & \dots & \bullet_{t-1} & \bullet_t & \bullet_0 \end{array}
 \end{array}$$

Observamos que sus dimensiones vectoriales son $\dim P_2^t = p_2^t$ y $\dim Q_2^t = q_2^t$. Por los lemas 1.13 y 1.14 existe una inclusión de las clases de isomorfismo de A_2 -módulos excepcionales al conjunto de raíces positivas de la forma cuadrática q_{K_2} . Por lo tanto la colección de módulos P_2^t y Q_2^t ($t \geq 0$) es la lista completa de las representaciones excepcionales de A_2 . Más aún, si calculamos las matrices de Cartan C_{A_2} y de Coxeter Φ_{K_2} correspondientes al carcaj de Kronecker K_2 ,

$$C_{A_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{K_2} = -C_{A_2}^t C_{A_2}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \Phi_{K_2}^{-1} = -C_{A_2} C_{A_2}^{-t} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

notamos que

$$\Phi_{K_2} q_2^{t-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ t+2 \end{pmatrix} = q_2^{t+1},$$

y de manera similar

$$\Phi_{K_2}^{-1} p_2^{t-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2 \\ t+1 \end{pmatrix} = p_2^{t+1}.$$

Usando el lema 1.35 y observando que P_2^0 y P_2^1 son A_2 -módulos proyectivos inescindibles se concluye que el conjunto $\{P_2^t\}_{t \geq 0}$ constituye una lista completa de A_2 -módulos posproyectivos. De manera análoga, como Q_2^0 y Q_2^1 son A_2 -módulos inyectivos inescindibles, el conjunto $\{Q_2^t\}_{t \geq 0}$ es una lista completa de A_2 -módulos preinjectivos.

Las afirmaciones sobre los morfismos se pueden probar usando las descripciones de los funtores de reducción en morfismos dados en los lemas 2.2 y 2.3. \square

Por el lema 1.33 la componente posproyectiva \mathcal{P} del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A_2)$ tiene la forma (orden opuesto al admisible, para evitar subíndices negativos en la componente posproyectiva $(-\mathbb{N}_0)Q^{op}$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 [P_2^0] & \text{---} & [P_2^2] & \text{---} & [P_2^4] & \dots & \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 [P_2^1] & \text{---} & [P_2^3] & \text{---} & [P_2^5] & \dots & \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

mientras que la componente preinjectiva \mathcal{I} tiene la siguiente forma (orden admisible),

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & [Q_2^5] & \text{---} & [Q_2^3] & \text{---} & [Q_2^1] & \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 \dots & [Q_2^4] & \text{---} & [Q_2^2] & \text{---} & [Q_2^0] & \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

2.2 Primer caso generalizado $n = 3$.

Pasamos ahora al primer caso generalizado A_3 .

$$K_3 = \begin{array}{c} \bullet_2 \\ \downarrow a_1 \quad \downarrow a_2 \quad \downarrow a_3 \\ \bullet_1 \end{array} \quad M_{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.5 Sea C la subálgebra de A_3 generada por las flechas a_2 y a_3 ($C \cong A_2$). Sea $Z = {}_C C = Z^1 \oplus Z^2$ el C -módulo regular, es decir, $Z^1 = Ce_1$ es

el proyectivo simple $S(1)$ y $Z^2 = Ce_2$ está dado por $k \begin{matrix} [1] \\ \xrightarrow{\quad} \\ [0] \end{matrix} \cong k^2$. Fijamos

bases $\{z_1^1\}$ de Z^1 y $\{z_1^2, \bar{z}_1^2, z_2^2\}$ de Z^2 tales que $a_2 z_2^2 = z_1^2$ y $a_3 z_2^2 = \bar{z}_1^2$. El álgebra de endomorfismos opuesta $\Gamma = \mathbf{End}_C(Z)^{op}$ se divide sobre su radical $\Gamma = S'' \oplus P''$, donde $S'' \cong \mathbf{End}(Z^1) \oplus \mathbf{End}(Z^2) = kf_1'' \times kf_2''$ y el radical $P'' \cong \mathbf{Hom}_C(Z^1, Z^2)^{op}$ es generado por un par de morfismos $\nu, \bar{\nu} : Z^1 \rightarrow Z^2$ determinados por $z_1^1 \mapsto z_1^2$ y $z_1^1 \mapsto \bar{z}_1^2$. Entonces Z es un C -módulo rígido y admisible. La matriz de dimensiones vectoriales de Z está dada por

$$T^Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las coacciones de Z en términos de las bases elegidas tienen la siguiente forma,

$$\lambda(u) = \begin{cases} \nu^* \otimes (z_1^1)^*, & \text{si } u = (z_1^2)^*, \\ \bar{\nu}^* \otimes (z_1^1)^*, & \text{si } u = (\bar{z}_1^2)^*, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} z_1^2 \otimes \nu^* + \bar{z}_1^2 \otimes \bar{\nu}^*, & \text{si } x = z_1^1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

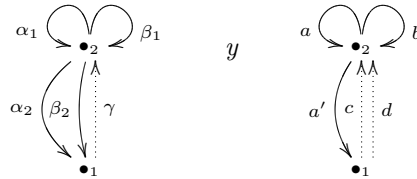
Demostración. Todas las afirmaciones son inmediatas. □

Sean B la subálgebra de A_3 generada por la flecha a_1 y X, Y los B -módulos descritos en el lema 2.1. Haremos reducciones respecto los módulos X, Y y Z . Consideramos los cambios de base

$$(T^X)^t M_{K_3} T^X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (T^Z)^t M_{K_3} T^Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sus carcajes correspondientes K_3^x y K_3^z son descritos en el siguiente lema.

Lema 2.6 Las ditálgebras reducidas A_3^X y A_3^Z del álgebra de Kronecker A_3 son isomorfas a (kK_3^x, δ^x) y (kK_3^z, δ^z) , donde los carcajes K_3^x y K_3^z tienen respectivamente la forma



con diferenciales no zero en flechas dadas por

$$\delta^x(\alpha_1) = \gamma\alpha_2 \quad y \quad \delta^x(\beta_1) = \gamma\beta_2.$$

$$\delta^z(a) = ca' \quad y \quad \delta^z(b) = da'.$$

a) La descripción explícita del funtor de reducción en objetos $M \mapsto F^X(M)$ tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} M_{\alpha_1} \curvearrowright M_2 \curvearrowleft M_{\beta_1} \\ \downarrow M_{\beta_2} \\ M_1 \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} M_2 \\ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} I \\ 0 \end{array} \right] \downarrow \left[\begin{array}{c} M_{\alpha_1} \\ M_{\alpha_2} \end{array} \right] \downarrow \left[\begin{array}{c} M_{\beta_1} \\ M_{\beta_2} \end{array} \right] \downarrow \\ M_2 \oplus M_1 \end{array} \end{array}$$

b) La descripción explícita del funtor de reducción en objetos $N \mapsto F^Z(N)$ tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} N_a \curvearrowright N_2 \curvearrowleft N_b \\ \downarrow N_{a'} \\ N_1 \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} N_2 \\ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} N_a \\ N_b \\ N_{a'} \end{array} \right] \downarrow \left[\begin{array}{c} 0 \\ I \end{array} \right] \downarrow \left[\begin{array}{c} I \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \downarrow \\ N_2 \oplus N_2 \oplus N_1 \end{array} \end{array}$$

Demostración. Consideramos primero la reducción A_3^X . Como en el caso A_2^X observamos que el álgebra tensorial $T_S(X^* \otimes (ka_2 \oplus ka_3) \otimes X \oplus k\sigma^*)$ es de carcaj regular, y por el lema 1.11 es isomorfa a kK_3^x .

$$\begin{array}{ccc} \frac{(x_1^\omega)^* a_2 x_2^\omega}{\alpha_1} \curvearrowright \omega \curvearrowleft \frac{(x_1^\omega)^* a_3 x_2^\omega}{\beta_1} \\ \downarrow \sigma^* \\ \frac{(x_1^1)^* a_2 x_2^\omega}{\alpha_2} \curvearrowright \beta_2 \curvearrowleft \frac{(x_1^1)^* a_3 x_2^\omega}{\beta_2} \\ \downarrow \gamma \\ \bullet_1 \end{array}$$

Usando las coacciones λ y ρ de X dadas en el lema 2.1 y considerando que A_3 tiene diferencial idénticamente cero, la diferencial reducida δ^X es como en el enunciado. Por lo tanto $A_3^X \cong (kK_3^x, \delta^x)$.

Consideramos ahora la reducción A_3^Z . De manera análoga se observa directamente el isomorfismo de álgebras tensoriales

$$A_3^Z = T_{S''}(Z^* \otimes ka_1 \otimes Z \oplus (P'')^*) \cong kK_3^Z,$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{(\bar{z}_1^2)^* a_1 z_2^2}{a} \curvearrowright \bullet_2 \curvearrowleft \frac{(z_1^2)^* a_1 z_2^2}{b} \\ \downarrow \nu^* \quad \downarrow \bar{\nu}^* \\ \frac{(z_1^1)^* a_1 z_2^2}{a'} \curvearrowright \bullet_1 \curvearrowleft \frac{(z_1^1)^* a_1 z_2^2}{d} \\ \downarrow c \end{array}$$

Para calcular la diferencial reducida δ^Z usamos las coacciones de Z descritas en el lema 2.5. Entonces

$$\begin{aligned}\delta^Z((z_1^2)^* \otimes a_1 \otimes z_2^2) &= \lambda((z_1^2)^*) \otimes a_1 \otimes z_2^2 - (z_1^2)^* \otimes a_1 \otimes \rho(z_2^2) = \\ &= \nu^* \otimes (z_1^1)^* \otimes a_1 \otimes z_2^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^Z((\bar{z}_1^2)^* \otimes a_1 \otimes z_2^2) &= \lambda((\bar{z}_1^2)^*) \otimes a_1 \otimes z_2^2 - (\bar{z}_1^2)^* \otimes a_1 \otimes \rho(z_2^2) = \\ &= \bar{\nu}^* \otimes (z_1^1)^* \otimes a_1 \otimes z_2^2,\end{aligned}$$

y

$$\delta^Z((z_1^1)^* \otimes a_1 \otimes z_2^2) = \lambda((z_1^1)^*) \otimes a_1 \otimes z_2^2 + (z_1^1)^* \otimes a_1 \otimes \rho(z_2^2) = 0.$$

Es claro entonces que $A_3^Z \cong (kK_3^z, \delta^z)$ con δ^z como se describe en el enunciado. \square

Lema 2.7 *La subálgebra de A_3^Z generada por el eje a' es isomorfa a B por lo que es posible reducir A_3^Z respecto al B -módulo Y . Entonces existe una equivalencia rígida de categorías $H : A_3^X\text{-mod} \rightarrow (A_3^Z)^Y\text{-mod}$. La composición $F^Y H : A_3^X\text{-mod} \rightarrow A_3^Z\text{-mod}$ tiene la siguiente descripción explícita en objetos,*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} M_{\alpha_1} \curvearrowright M_2 \curvearrowleft M_{\beta_1} \\ \downarrow M_{\beta_2} \uparrow \\ M_1 \end{array} & M \mapsto F^Y H(M) & \begin{array}{c} \begin{bmatrix} M_{\alpha_1} & 0 \\ M_{\alpha_2} & 0 \end{bmatrix} \curvearrowright M_2 \oplus M_1 \curvearrowleft \begin{bmatrix} M_{\beta_1} & 0 \\ M_{\beta_2} & 0 \end{bmatrix} \\ \downarrow [0 \ I] \\ M_1 \end{array} \end{array}$$

Demostración. Daremos equivalencias de categorías

$$A_3^X\text{-mod} \xrightarrow{F_2} (A_3^Z)^Y\text{-mod} \xrightarrow{F_1} (A_3^Z)^Y\text{-mod},$$

donde F_1 es un cambio de base y F_2 es el funtor asociado a regularizaciones. Notamos que el álgebra tensorial reducida $(A_3^Z)^Y$ puede ser descrita como sigue

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \frac{(y_2^2)^* a y_2^2}{\alpha_1} & \curvearrowright & \frac{(y_2^2)^* b y_2^2}{\beta_1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{(y_2^\omega)^* a y_2^\omega}{\alpha_2} & \frac{(y_2^\omega)^* b y_2^\omega}{\beta_2} & \frac{(y_2^\omega)^* b y_2^\omega}{\beta'_2} & \frac{(y_2^\omega)^* a y_2^\omega}{\alpha'_2} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{(y_2^\omega)^* a y_2^\omega}{\alpha'_1} & \frac{(y_2^\omega)^* b y_2^\omega}{\beta'_1} & \frac{(y_2^\omega)^* d y_1^\omega}{\varepsilon_1} & \frac{(y_2^\omega)^* c y_1^\omega}{\gamma_1} \end{array} \end{array}$$

donde las tres flechas punteadas del centro corresponden a los elementos $\gamma = \pi^*$, $\gamma_2 = (y_2^2)^* \otimes c \otimes y_1^\omega$ y $\varepsilon_2 = (y_2^2)^* \otimes d \otimes y_1^\omega$. Usamos las coacciones λ' y ρ' de

Y dadas en el lema 2.1 y consideramos la expresión general de la diferencial reducida δ^{zy} de $(A_3^Z)^Y$,

$$\delta^{zy}(u \otimes w \otimes x) = \lambda'(u) \otimes w \otimes x + \sigma_{u,x}(\delta^z(w)) + (-1)^{|w|+1} u \otimes w \otimes \rho'(x),$$

para flechas w de A_3^Z (consultar el lema A.21 en el apéndice para la definición de $\sigma_{u,x}$). Obtenemos los siguientes valores de la diferencial de $(A_3^Z)^Y$,

Flecha	Diferencial	Flecha	Diferencial
α_1	$\gamma \otimes \alpha_2$,	γ	0,
β_1	$\gamma \otimes \beta_2$,	γ_1	0,
α'_1	$\gamma_1 - \alpha_2 \otimes \gamma$,	ε_1	0,
β'_1	$\varepsilon_1 - \beta_2 \otimes \gamma$,	γ_2	$\gamma \otimes \gamma_1$,
α_2	0,	ε_2	$\gamma \otimes \varepsilon_1$.
β_2	0,		
α'_2	$\gamma_2 + \gamma \otimes \alpha'_1 - \alpha_1 \otimes \gamma$,		
β'_2	$\varepsilon_2 + \gamma \otimes \beta'_1 - \beta_1 \otimes \gamma$,		

Definimos una copia \widehat{Q} del carcaj Q del álgebra reducida $(A_3^Z)^Y$ y funciones $g_1 : \widehat{Q} \rightarrow kQ$ y $h_1 : Q \rightarrow k\widehat{Q}$ dadas por

$$g_1(\widehat{x}) = \begin{cases} x, & \text{si } \widehat{x} \neq \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \widehat{\varepsilon}_1, \widehat{\varepsilon}_2, \\ \gamma_1 - \alpha_2 \otimes \gamma, & \text{si } \widehat{x} = \widehat{\gamma}_1, \\ \varepsilon_1 - \beta_2 \otimes \gamma, & \text{si } \widehat{x} = \widehat{\varepsilon}_1, \\ \gamma_2 + \gamma \otimes \alpha'_1 - \alpha_1 \otimes \gamma, & \text{si } \widehat{x} = \widehat{\gamma}_2, \\ \varepsilon_2 + \gamma \otimes \beta'_1 - \beta_1 \otimes \gamma, & \text{si } \widehat{x} = \widehat{\varepsilon}_2, \end{cases}$$

$$h_1(x) = \begin{cases} \widehat{x}, & \text{si } x \neq \gamma_1, \gamma_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \\ \widehat{\gamma}_1 + \widehat{\alpha}_2 \otimes \widehat{\gamma}, & \text{si } x = \gamma_1, \\ \widehat{\varepsilon}_1 + \widehat{\beta}_2 \otimes \widehat{\gamma}, & \text{si } x = \varepsilon_1, \\ \widehat{\gamma}_2 - \widehat{\gamma} \otimes \widehat{\alpha}'_1 + \widehat{\alpha}_1 \otimes \widehat{\gamma}, & \text{si } x = \gamma_2, \\ \widehat{\varepsilon}_2 - \widehat{\gamma} \otimes \widehat{\beta}'_1 + \widehat{\beta}_1 \otimes \widehat{\gamma}, & \text{si } x = \varepsilon_2. \end{cases}$$

Entonces g_1 y h_1 se extienden a morfismos g y h de álgebras graduadas que preservan el grado y que son inverso el uno del otro. Por lo tanto $\widehat{\delta} = h\delta g$ es una diferencial y el isomorfismo de ditálgebras $h : (kQ, \delta) \rightarrow (k\widehat{Q}, \widehat{\delta})$ induce una equivalencia de categorías F_1 . La nueva diferencial tiene la siguiente forma

Flecha	Diferencial	Flecha	Diferencial
$\widehat{\alpha}_1$	$\widehat{\gamma} \otimes \widehat{\alpha}_2$,	$\widehat{\gamma}$	0,
$\widehat{\beta}_1$	$\widehat{\gamma} \otimes \widehat{\beta}_2$,	$\widehat{\gamma}_1$	0,
$\widehat{\alpha}'_1$	$\widehat{\gamma}_1$,	$\widehat{\varepsilon}_1$	0,
$\widehat{\beta}'_1$	$\widehat{\varepsilon}_1$,	$\widehat{\gamma}_2$	0,
$\widehat{\alpha}_2$	0,	$\widehat{\varepsilon}_2$	0.
$\widehat{\beta}_2$	0,		
$\widehat{\alpha}'_2$	$\widehat{\gamma}_2$,		
$\widehat{\beta}'_2$	$\widehat{\varepsilon}_2$,		

por lo que es posible regularizar las flechas $(\widehat{\alpha}'_1, \widehat{\gamma}_1)$, $(\widehat{\beta}'_1, \widehat{\varepsilon}_1)$, $(\widehat{\alpha}'_2, \widehat{\gamma}_2)$ y $(\widehat{\beta}'_2, \widehat{\varepsilon}_2)$. Obtenemos así una ditálgebra isomorfa a A_3^X y una equivalencia de categorías $F_2 : A_3^X\text{-mod} \rightarrow (k\widehat{Q}, \widehat{\delta})\text{-mod}$. La equivalencia buscada H es la composición de los funtores $F_1 \circ F_2$. \square

Por los lemas anteriores tenemos funtores fieles, plenos y rígidos

$$\begin{array}{ccc} A_3^X\text{-mod} & \xrightarrow{F^X} & A_3\text{-mod} \\ H \downarrow & & \\ (A_3^Z)^Y\text{-mod} & \xrightarrow{F^Y} A_3^Z\text{-mod} \xrightarrow{F^Z} & A_3\text{-mod}. \end{array}$$

La evaluación de los funtores anteriores en un objeto M de $A_3^X\text{-mod}$, seguida de la dimensión vectorial, tiene la forma (ver el lema 1.11)

$$\begin{array}{ccc} \underline{\dim} M & \xrightarrow{\quad} & T^X \underline{\dim} M \\ \downarrow & & \\ \underline{\dim} M & \xrightarrow{\quad} & T^Y \underline{\dim} M \xrightarrow{\quad} T^Z T^Y \underline{\dim} M. \end{array}$$

Por lo tanto, si \widehat{M} es un A_3 -módulo excepcional de dimensión vectorial (a, b) y M es un A_3^X -módulo con $F^X(M) \cong \widehat{M}$, entonces $F^Z F^Y H(M)$ también es una A_3 -representación excepcional, con dimensión vectorial

$$\begin{aligned} \underline{\dim} F^Z F^Y H(M) &= T^Z T^Y (T^X)^{-1} \underline{\dim} \widehat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \underline{\dim} \widehat{M} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\dim} \widehat{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\dim} \widehat{M}, \end{aligned}$$

de manera que el algoritmo $F^X(M) \mapsto F^Z F^Y H(M)$ produce una A_3 -representación excepcional de dimensión vectorial $(3a - b, a)$.

En la demostración de la siguiente proposición seguiremos el proceso anterior para construir representaciones excepcionales de A_3 . Hacemos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{t+1} = 3a_t - a_{t-1}$ para $t \geq 1$ y tomamos los vectores

$$p_3^t = (a_{t+1}, a_t), \quad \text{para } t \geq 0.$$

Ya que la forma cuadrática q_{K_3} está dada por $q_{K_3}(a, b) = a^2 + b^2 - 3ab$, observamos que

$$\begin{aligned} q_{K_3}(a_{t+1}, a_t) &= a_{t+1}^2 + a_t^2 - 3a_{t+1}a_t = \\ &= (3a_t - a_{t-1})^2 + a_t^2 - 3(3a_t - a_{t-1})a_t = \\ &= 9a_t^2 - 6a_t a_{t-1} + a_{t-1}^2 + a_t^2 - 9a_t^2 + 3a_t a_{t-1} = \\ &= a_t^2 + a_{t-1}^2 - 3a_t a_{t-1} = \\ &= q_{K_3}(a_t, a_{t-1}). \end{aligned}$$

Como $q_{K_3}(p_3^0) = q_{K_3}(1, 0) = 1$ entonces todos los vectores p_3^t ($t \geq 0$) son raíces de la forma cuadrática q_{K_3} . Notamos inductivamente que $a_{t+1} > 2a_t$, pues

$$a_{t+1} - 2a_t = (3a_t - a_{t-1}) - 2a_t = a_t - a_{t-1} \geq a_t - 2a_{t-1}.$$

En la presentación de A_3 -módulos posproyectivos usaremos la siguiente notación. Sea $Z(a) = Z_b(a)$ la matriz cero de dimensiones $a \times b$. Sea $E(a) = E_b(a)$ la matriz de $a \times b$ con elementos diagonales $E(a)_{ii} = 1$ y todas las demás entradas iguales a cero. Si $b \leq a$ entonces $E(a)$ tiene la forma $\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$. Consideramos la concatenación vertical de matrices $C_b(a) = C(a) = \begin{bmatrix} E(a) \\ Z(a) \end{bmatrix}$ de dimensión $2a \times b$.

Proposición 2.8 Para $t \in \mathbb{N}$ denotamos con P_3^t a la representación de A_3 dada por las matrices (con a_{t+1} renglones y a_t columnas)

$$\begin{array}{ccc} & k^{a_t} & \\ \left[\begin{array}{c} Z(a_{t-1}) \\ C(a_{t-1}) \\ \vdots \\ C(a_1) \\ Z(2) \\ E(a_t) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} Z(a_t) \\ E(a_t) \\ Z(a_{t+1}-2a_t) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} E(a_t) \\ Z(a_{t+1}-a_t) \end{array} \right] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & k^{a_{t+1}} & \end{array}$$

Si P_3^0 denota al A_3 -simple proyectivo, entonces para $t \geq 0$ las representaciones P_3^t son excepcionales y forman una lista completa de A_3 -módulos posproyectivos.

Demostración. Primero probamos que todas las representaciones dadas son excepcionales. Es claro que P_3^0 es excepcional, por lo que procedemos por inducción sobre $t \geq 1$. Como base inductiva, la representación P_3^1 tiene la forma

$$\begin{array}{ccc} & k^{a_1} & \\ \left[\begin{array}{c} Z(2) \\ E(a_1) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} Z(a_1) \\ E(a_1) \\ Z(a_2-2a_1) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} E(a_1) \\ Z(a_2-a_1) \end{array} \right] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & k^{a_2} & \end{array} = \begin{array}{ccc} & k & \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & k^3 & \end{array}$$

y es fácil ver que $\mathbf{End}_{A_3}(P_3^1) \cong k$, por lo que P_3^1 es un módulo excepcional (su vector dimensión $\underline{\dim} P_3^1 = p_3^1$ es una raíz de q_{K_3}). Supongamos que el módulo P_3^t es excepcional y sean $M(t)_1$, $M(t)_2$ y $M(t)_3$ las matrices, de izquierda a derecha, que conforman a P_3^t . Consideremos la representación \widehat{P}_3^t , isomorfa a P_3^t , que se obtiene al intercambiar de posición las matrices $M(t)_1$ y $M(t)_3$,

$$\widehat{P}_3^t = \begin{array}{ccc} & k^{a_t} & \\ \left[\begin{array}{c} E(a_t) \\ Z(a_{t+1}-a_t) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} Z(a_t) \\ E(a_t) \\ Z(a_{t+1}-2a_t) \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} Z(a_{t-1}) \\ E(a_{t-1}) \\ Z(a_{t-1}-a_{t-2}) \\ Z(a_{t-2}) \\ C(a_{t-2}) \\ \vdots \\ C(a_1) \\ Z(2) \\ E(a_t) \end{array} \right] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & k^{a_t} \oplus k^{2a_t-a_{t-1}} & \end{array}$$

con la representación P_3^{t+1} dada por

$$\begin{array}{ccc}
 & k^{a_{t+1}} & \\
 \left[\begin{array}{c} Z(a_t) \\ C(a_t) \\ C(a_{t-1}) \\ \vdots \\ C(a_1) \\ Z(2) \\ E(a_{t+1}) \end{array} \right] & \begin{array}{c} \downarrow \\ \left[\begin{array}{c} Z(a_{t+1}) \\ E(a_{t+1}) \\ Z(a_{t+2}-2a_{t+1}) \end{array} \right] \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \left[\begin{array}{c} E(a_{t+1}) \\ Z(a_{t+2}-a_{t+1}) \end{array} \right] \\ \downarrow \end{array} \\
 & k^{a_{t+2}} &
 \end{array}$$

por lo que P_3^{t+1} también es un A_3 -módulo excepcional. Lo anterior termina con el paso inductivo.

Calculamos ahora la matriz de Cartan C_{A_3} y la inversa de la matriz de Coxeter $\Phi_{K_3}^{-1}$ correspondientes al carcaj de Kronecker generalizado K_3 ,

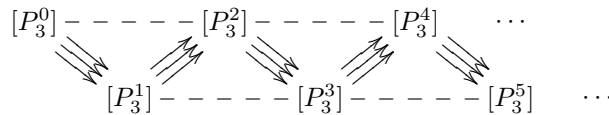
$$C_{A_3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Phi_{K_3}^{-1} = -C_{A_2} C_{A_2}^{-t} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notamos que

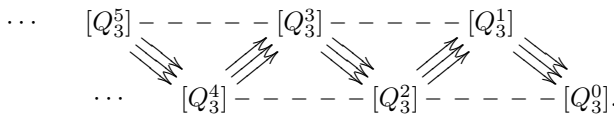
$$\Phi_{K_3}^{-1} p_3^{t-1} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ a_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a_t - 3a_{t-1} \\ 3a_t - a_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_{t+1} - a_t \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{t+2} \\ a_{t+1} \end{pmatrix} = p_3^{t+1}.$$

Usando el lema 1.35 y observando que P_3^0 y P_3^1 son A_3 -módulos proyectivos inescindibles, se concluye que el conjunto $\{P_3^t\}_{t \geq 0}$ constituye una lista completa de A_3 -módulos posproyectivos. \square

La componente preinyectiva puede tratarse de forma análoga cambiando Z por la suma directa de A_3 -módulos inyectivos. Por el lema 1.33 las componentes posproyectiva \mathcal{P} y preinyectiva \mathcal{I} del carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A_3)$ tienen respectivamente la forma (orden opuesto al admisible, para evitar subíndices negativos en la componente posproyectiva $(-\mathbb{N}_0)Q^{op}$)



y (orden admisible)



Las presentaciones de los A_3 -módulos posproyectivos corresponden con aquellas dadas por Ringel en la proposición 3 de [26]. Los carcajes de coeficientes para los casos P_3^1 , P_3^2 y P_3^3 se encuentran en [26] después de tal proposición.

2.3 Gráfica de Auslander-Reiten de un carcaj de Dynkin.

Se dice que un carcaj finito y sólido Q es un **carcaj de Dynkin** (simplemente enlazado) si la gráfica subyacente de Q es isomorfa a uno de los diagramas de

la tabla 2.1. Sea Q un carcaj finito, conexo y sólido. Un resultado fundamental en la teoría de representaciones de carcaj señala que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- a) El carcaj Q es de Dynkin.
- b) La categoría $kQ\text{-mod}$ es de tipo de representación finito.
- c) La forma cuadrática q_Q es positiva definida.

Además, **dim** da una biyección entre clases de isomorfismo de A -módulos inescindibles y las raíces positivas de q_Q (teorema 13 en [24, sección 2.4]).

Notación	Gráfica valuada
\mathbf{A}_n ($n \geq 1$)	$\textcircled{1} \text{---} 1 \text{---} 1 \cdots 1 \text{---} \textcircled{1}$
\mathbf{D}_n ($n \geq 4$)	$\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 1 \end{array} \text{---} 2 \text{---} 2 \cdots 2 \text{---} \textcircled{2} \text{---} 1$
\mathbf{E}_6	$\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \text{---} 2 \text{---} 1 \end{array}$
\mathbf{E}_7	$\begin{array}{c} 2 \\ \\ \textcircled{2} \text{---} 3 \text{---} 4 \text{---} 3 \text{---} 2 \text{---} 1 \end{array}$
\mathbf{E}_8	$\begin{array}{c} 3 \\ \\ 2 \text{---} 4 \text{---} 6 \text{---} 5 \text{---} 4 \text{---} 3 \text{---} \textcircled{2} \end{array}$

Tabla 2.1: Diagramas de Dynkin simplemente enlazados Δ . El vector entero indicado por los vértices es la raíz positiva máxima w_0 de la forma cuadrática correspondiente (respecto al orden parcial en \mathbb{Z}^n dado por $x > y$ siempre que $x - y$ sea un vector positivo). Se marcan en círculo los vértices excepcionales de w_0 , es decir, los vértices i tales que la derivada parcial $(\partial/\partial_i)q_\Delta(w_0)$ es cero.

En esta sección describimos la categoría de módulos de un carcaj de Dynkin. Sea $A_0 = k\Delta$ el álgebra de caminos de un carcaj de Dynkin Δ y consideremos la gráfica de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$ de la categoría de A_0 -módulos.

Lema 2.9 *Existe una partición en secciones de la gráfica de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$,*

$$\Gamma(A_0) = \mathcal{S}_0 \sqcup \mathcal{S}_1 \sqcup \dots \sqcup \mathcal{S}_n,$$

tal que \mathcal{S}_0 está formada por las clases de isomorfismo de A_0 -módulos proyectivos inescindibles, $\tau\mathcal{S}_{i+1} \subseteq \mathcal{S}_i$ para $0 \leq i < n$ y todo vértice en \mathcal{S}_n es la clase de isomorfismo de algún A_0 -módulo inyectivo inescindible. En particular $\Gamma(A_0)$ se puede identificar con una subgráfica cerrada por mallas de $\mathbb{N}_0\Delta^{op}$.

Demostración. Sea \mathcal{S}_0 el conjunto de clases de isomorfismo de A_0 -módulos proyectivos inescindibles. Tomamos por representantes los módulos $P(x) = Ae_x$, donde e_x es el camino trivial de vértice x .

Paso 1. *El subconjunto de vértices \mathcal{S}_0 es una sección de $\Gamma(A_0)$.* La primera

condición (i) se satisface por vacuidad, pues \mathcal{S}_0 no contiene vértices no proyectivos. Sea entonces $[P] \rightarrow [M]$ una flecha en con $[P]$ en \mathcal{S}_0 y supongamos que $[M]$ no está en \mathcal{S}_0 . Entonces existe una flecha $\tau[M] \rightarrow [P]$, y como $\Gamma(A_0)$ es hereditario, $\tau[M]$ pertenece a \mathcal{S}_0 .

Supongamos ahora que se han construido secciones $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_i$ tales que $\tau\mathcal{S}_{\ell+1} \subseteq \mathcal{S}_\ell$ para cada $0 \leq \ell < i$.

Paso 2. Definimos $\mathcal{S}_{i+1} = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid \tau[M] \in \mathcal{S}_i\}$ y probamos que \mathcal{S}_{i+1} es sección. Primero, si $[M] \in \mathcal{S}_{i+1}$ entonces $\tau[M] \in \mathcal{S}_i$, por lo que $\tau(\tau[M]) \notin \mathcal{S}_i$, es decir, $\tau[M] \notin \mathcal{S}_{i+1}$. Segundo, sea $[M] \rightarrow [X]$ una flecha con $[M] \in \mathcal{S}_{i+1}$. Como $[M]$ no es vértice proyectivo (pues $\tau[M] \in \mathcal{S}_i$) entonces $[X]$ no es proyectivo (por ser $\Gamma(A_0)$ hereditario). Por lo tanto tenemos una flecha $\tau[M] \rightarrow \tau[X]$ con $\tau[M] \in \mathcal{S}_i$, que es sección. Así, o bien $\tau[X] \in \mathcal{S}_i$ (y en tal caso $[X] \in \mathcal{S}_{i+1}$) o bien $\tau(\tau[X]) \in \mathcal{S}_i$ (en cuyo caso $\tau[X] \in \mathcal{S}_{i+1}$).

Como $\Gamma(A_0)$ tiene un número finito de vértices se construyen de esta manera secciones

$$\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{n-1}, \mathcal{S}_n,$$

donde \mathcal{S}_n consiste solo en clases de isomorfismo de A_0 -módulos inyectivos inescindibles.

Paso 3. Las secciones $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_n$ son una partición del conjunto de vértices de $\Gamma(A_0)$. Se muestra por inducción en i que $\mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$ para $0 \leq i < j \leq n$. La base inductiva $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_j = \emptyset$ para $0 < j \leq n$ es clara por definición. Si $[M] \in \mathcal{S}_{i+1} \cap \mathcal{S}_j$ entonces $\tau[M] \in \mathcal{S}_i \cap \mathcal{S}_{j-1}$, que es un conjunto vacío por hipótesis inductiva. Se observa finalmente que todo $[M] \in \mathbf{ind}A_0$ pertenece a \mathcal{S}_i para algún $0 \leq i \leq n$. Pues por la existencia de cubiertas proyectivas existen un proyectivo inescindible P y un morfismo no cero $P \rightarrow M$. Por el lema 1.29 existe un camino de $[P]$ a $[M]$ en $\Gamma(A_0)$. Por lo tanto $[M]$ pertenece a la componente conexa que contiene a los proyectivos, y por el lema 1.24, $[M] = \tau^{-i}[P']$ para algún entero no negativo i y un proyectivo inescindible P' , es decir, $[M] \in \mathcal{S}_i$. \square

Si w es un vértice del carcaj de traslación (Γ, τ) denotamos con $\mathbf{ConL}(w)$ al conjunto de vértices x en Γ tales que $x \prec w$ y con $\mathbf{ConR}(w)$ al conjunto de vértices y en Γ tales que $w \prec y$. Además denotamos con $\mathbf{ConL}_0(w)$ al conjunto de vértices x en $\mathbf{ConL}(w)$ tales que o bien x es inyectivo ó $\tau^{-1}(x) \notin \{w\} \cup \mathbf{ConL}(w)$. De forma análoga $\mathbf{ConR}_0(w)$ es el conjunto de vértices y en $\mathbf{ConR}(w)$ tales que o bien y es proyectivo ó $\tau(y) \notin \{w\} \cup \mathbf{ConR}(w)$.

Lema 2.10 Sea Q un carcaj finito, sólido, conexo, con una ordenación admisible de sus vértices y sea Γ un subcarcaj de traslación conexo cerrado por mallas de $\mathbb{Z}Q$. Sea w un vértice de Γ .

- a) El conjunto $\mathcal{S}^L = \{w\} \cup \mathbf{ConL}_0(w)$ es la única cosección conexa contenida en $\{w\} \cup \mathbf{ConL}(w)$ que contiene el vértice w .
- b) El conjunto $\mathcal{S}^R = \{w\} \cup \mathbf{ConR}_0(w)$ es la única sección conexa contenida en $\{w\} \cup \mathbf{ConR}(w)$ que contiene el vértice w .

Demostración. Mostramos (a), la prueba de (b) es similar. Notamos que Γ es un carcaj hereditario por los lemas 1.25 y 1.26.

Paso 1. Verificamos primero que \mathcal{S}^L es cosección. La condición (i) en la definición de cosección dice que si $x \in \mathcal{S}^L$ y x no es inyectivo entonces $\tau^{-1}(x) \notin$

\mathcal{S}^L . Esta condición es evidente en el conjunto $\mathcal{S}^L = \{w\} \sqcup \mathbf{ConL}_0(w)$ por su definición. Para mostrar la condición (ii) consideramos una flecha $x \rightarrow s$ con $s \in \mathcal{S}^L$. Debemos mostrar que uno de los vértices x ó $\tau^{-1}(x)$ pertenece a \mathcal{S}^L . Caso $s = w$. Si x es inyectivo entonces $x \in \mathbf{ConL}_0(w)$. Si x no es inyectivo se tiene que $\tau^{-1}(x) \notin \mathbf{ConL}(w)$ pues el carcaj Γ es dirigido (lemas 1.25 y 1.26). Por definición de $\mathbf{ConL}_0(w)$ se tiene entonces $x \in \mathbf{ConL}_0(w) \subset \mathcal{S}^L$. Caso $s \neq w$. Por hipótesis $s \prec w$ y por transitividad $x \prec w$, es decir, $x \in \mathbf{ConL}(w)$. Supongamos que $x \notin \mathcal{S}^L$, por lo que x no es inyectivo y $\tau^{-1}(x) \in \mathbf{ConL}(w)$. Si $\tau^{-1}(x)$ es inyectivo entonces pertenece a \mathcal{S}^L y terminamos. Si no es inyectivo entonces s no es inyectivo (pues Γ es hereditario) y $\tau^{-1}(s)$ no pertenece a $\mathbf{ConL}(w)$ (pues $s \in \mathcal{S}^L$). Por lo tanto, como $\tau^{-1}(s) \prec \tau^{-2}(x)$, se concluye que $\tau^{-2}(x) \notin \mathbf{ConL}(w)$ y entonces $\tau^{-1}(x) \in \mathcal{S}^L$.

Paso 2. Mostramos ahora la conexidad. Si $\gamma : u \rightarrow w$ es un camino no trivial en Γ que inicia en $\mathbf{ConL}_0(w)$, entonces todos los vértices de γ distintos de w están contenidos en el conjunto $\mathbf{ConL}_0(w)$. En efecto, como $u \neq w$ el camino γ se factoriza como $\gamma = \gamma' \alpha$, donde $\alpha : u \rightarrow u'$ es una flecha y $\gamma' : u' \rightarrow w$ es un camino (posiblemente trivial). Si $u' = w$ no hay nada que hacer. Si $u' \neq w$ entonces $u' \in \mathbf{ConL}(w)$. Si u' es inyectivo, todos los puntos de γ' también lo son (por ser Γ hereditario) y entonces están en $\mathbf{ConL}_0(w)$. Si no, tampoco u lo es. Luego $\tau^{-1}(u')$ no puede pertenecer a $\mathbf{ConL}(w)$, pues en tal caso $\tau^{-1}(u') \prec w$, lo cual es imposible ya que $\tau^{-1}(u) \prec \tau^{-1}(u')$ y $u \in \mathbf{ConL}_0(w)$. Por lo tanto u' pertenece a $\mathbf{ConL}_0(w)$. Aplicando este argumento sucesivamente se tiene que todo camino que inicia en $\mathbf{ConL}_0(w)$ y termina en w está contenido en $\mathbf{ConL}_0(w)$. En particular \mathcal{S}^L es una cosección conexa.

Paso 3. Probamos finalmente la unicidad. Supongamos que \mathcal{S} es una cosección conexa contenida en $\{w\} \cup \mathbf{ConL}(w)$. Por el lema 1.27 tanto \mathcal{S} como \mathcal{S}^L intersecan cada órbita de Γ en exactamente un vértice. Por la construcción de \mathcal{S}^L , para cada $s \in \mathcal{S}$ existe un entero no negativo $h(s)$ tal que $\tau^{-h(s)}(s) \in \mathcal{S}^L$. Sea s_w el elemento de \mathcal{S} tal que

$$\tau^{-h(s_w)}(s_w) = w.$$

Mostraremos por inducción que $h(s) \leq h(s_w)$ para cualquier $s \in \mathcal{S}$. Por los lemas 1.26 y 1.27 podemos ordenar los elementos s_1^L, \dots, s_n^L de \mathcal{S}^L (y en consecuencia las órbitas de Γ y los elementos s_1, \dots, s_n de \mathcal{S}) de manera que el orden así dado al subcarcaj pleno $Q_{\mathcal{S}^L}$ determinado por \mathcal{S}^L es admisible. Por definición, $\tau^{-h(s_i)}(s_i) = s_i^L$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Como w es el único pozo en \mathcal{S}^L se tiene que $w = s_1^L$ es el menor elemento de \mathcal{S}^L , y así $s_1 = s_w$ es el menor elemento de \mathcal{S} y $h(s_1) = h(s_w)$. Supongamos que la afirmación es cierta para s_1, \dots, s_ℓ con $\ell < n$. Ya que \mathcal{S}^L es conexo y $s_{\ell+1}^L$ no es pozo de \mathcal{S}^L , existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $s_{\ell+1}^L$ está conectado con s_i^L por una flecha $s_{\ell+1}^L \rightarrow s_i^L$. Como el orden en $Q_{\mathcal{S}^L}$ es admisible, $i \leq \ell$. De nuevo por el lema 1.27 se tiene entonces que $s_{\ell+1}$ está conectado con s_i por una flecha dentro de \mathcal{S} .

Caso $s_{\ell+1} \rightarrow s_i$. Ya que Γ es hereditario y $\tau^{-h(s_i)}(s_i)$ está definido, existe una flecha $\tau^{-h(s_i)}(s_{\ell+1}) \rightarrow \tau^{-h(s_i)}(s_i) = s_i^L$. Como s_i^L pertenece a la cosección \mathcal{S}^L , o bien $\tau^{-h(s_i)}(s_{\ell+1}) \in \mathcal{S}^L$ ó $\tau^{-h(s_i)-1}(s_{\ell+1}) \in \mathcal{S}^L$. En el segundo caso se tendría una flecha $s_i^L \rightarrow s_{\ell+1}^L$, lo cual es imposible pues tenemos una flecha $s_{\ell+1}^L \rightarrow s_i^L$ y Γ es dirigido. Entonces $s_{\ell+1}^L = \tau^{-h(s_i)}(s_{\ell+1})$, es decir, $h(s_{\ell+1}) = h(s_i)$ y por hipótesis inductiva $h(s_{\ell+1}) = h(s_i) \leq h(s_w)$.

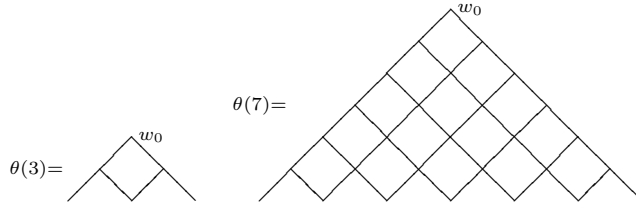
Caso $s_i \rightarrow s_{\ell+1}$. En este caso existe una flecha $\tau^{-h(s_{\ell+1})}(s_i) \rightarrow \tau^{-h(s_{\ell+1})}(s_{\ell+1})$,

de nuevo pues $\tau^{-h(s_{\ell+1})}(s_{\ell+1}) = s_{\ell+1}^L$ está definido y Γ es hereditario. Como $s_{\ell+1}^L$ está en la cosección \mathcal{S}^L , entonces o bien $\tau^{-h(s_{\ell+1})}(s_i) \in \mathcal{S}^L$ ó $\tau^{-h(s_{\ell+1})-1}(s_i) \in \mathcal{S}^L$. Ahora el primer caso es imposible pues se tendría un flecha $s_i^L \rightarrow s_{\ell+1}^L$. Entonces $\tau^{-h(s_{\ell+1})-1}(s_i) = s_i^L$ por lo que $h(s_{\ell+1}) + 1 = h(s_i) \leq h(s_w)$, es decir, $h(s_{\ell+1}) < h(s_w)$, lo cual termina el paso inductivo.

Supongamos entonces que \mathcal{S} es una cosección conexa contenida en $\{w\} \cup \mathbf{ConL}(w)$ y tal que contiene a w . Por lo anterior, para cualquier $s \in \mathcal{S}$ se tiene que $0 \leq h(s) \leq h(s_w) = 0$, es decir, $\mathcal{S} = \mathcal{S}^L$. Esto termina la prueba. \square

Dados un conjunto $\Lambda = \{1, \dots, z\}$ y una función $r : \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ se introduce el carcaj **estrella** (ver Ringel [24]) \mathbb{T}_r cuyos brazos se indexan sobre Λ , el brazo de índice ℓ de longitud $r(\ell)$. Se obtiene de copias disjuntas de carcajes de tipo $\mathbf{A}_{r(\ell)}$ ($\ell \in \Lambda$) escogiendo un vértice final de cada $\mathbf{A}_{r(\ell)}$ e identificando todos estos puntos en un único vértice, el **centro** de estrella. Usualmente se denota \mathbb{T}_r mediante $\mathbb{T}_{r(1), \dots, r(z)}$ y el conjunto de enteros $r(1), \dots, r(z)$ es llamado **orden** de la estrella. Si $r(\ell) = 1$ para algún $\ell \in \Lambda$ entonces el brazo correspondiente es invisible, por lo que nos interesan brazos de longitud mayor o igual a dos.

Diremos que un carcaj de tipo \mathbf{A}_n es linealmente orientado si todas las flechas apuntan en la misma dirección. Un **ala** de vértice w_0 en un carcaj de traslación (Γ, τ) es un subcarcaj cerrado por mallas $\theta(n)$ isomorfo a la gráfica de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathbf{A}_n)$ del carcaj \mathbf{A}_n linealmente ordenado con $n \geq 2$, en el cual w_0 es el único vértice proyectivo-inyectivo. En la siguiente figura se muestran alas de orden 3 y 7.



Un vértice x de (Γ, τ) es llamado **vértice ala** si todo vecino de x pertenece a un ala de (Γ, τ) de vértice x .

Lema 2.11 *Sea Q un carcaj finito, sólido, conexo y con una ordenación admisible de sus vértices. Entonces el vértice (x, i) de $\mathbb{Z}Q$ es ala si y solo si Q es isomorfo a un carcaj estrella con centro x .*

Demostración. Por el lema 2.10 el subconjunto $\mathcal{S}^L = \{(x, i)\} \cup \mathbf{ConL}_0((x, i))$ es una cosección conexa de $\mathbb{Z}Q$. Por el lema 1.27 la subgráfica plena $Q_{\mathcal{S}^L}$ determinada por \mathcal{S}^L tiene la misma gráfica subyacente que Q . Si (x, i) es un vértice ala entonces $Q_{\mathcal{S}^L}$ es un carcaj estrella (con todas la flechas en dirección al centro de estrella (x, i)), por lo que Q es también carcaj estrella con centro x . Para la otra implicación supongamos que Q es un carcaj estrella $\mathbb{T}_{r(1), \dots, r(z)}$ con centro x . Sea i un entero arbitrario. A un brazo de índice ℓ le corresponde un subcarcaj de traslación pleno $\mathbb{Z}\mathbf{A}_{r(\ell)}$ de $\mathbb{Z}Q$, correspondiente al carcaj de tipo $\mathbf{A}_{r(\ell)}$, y por lo tanto un ala $\theta(r(\ell))$ de vértice (x, i) . Si (y, j) es vecino de (x, i) en $\mathbb{Z}Q$, entonces y es vecino de x en Q , por lo que y pertenece a algún brazo de Q , digamos de índice ℓ . Por lo tanto (y, j) pertenece al ala $\theta(r(\ell))$ y el vértice (x, i) es ala. \square

Como puede observarse todo carcaj de Dynkin Δ es un carcaj estrella. El orden de la estrella, llamado también **tipo (tubular) del diagrama** de Dynkin Δ , se muestra en la siguiente tabla. Solo en el caso \mathbf{A}_n ($n \geq 2$) el tipo depende de la orientación de las flechas. Fijando un punto extremo x de \mathbf{A}_n se cuenta el número de flechas p de \mathbf{A}_n que apuntan en dirección a x y sea q el número de flechas que apuntan en la otra dirección. Cambiando de elección de punto extremo si es necesario podemos suponer que $p \geq q$. Entonces $n = p + q + 1$ y el tipo tubular de \mathbf{A}_n se define como $(p + 1, q + 1)$. El **centro de estrella** de un carcaj de Dynkin Δ es el centro de Δ visto como carcaj estrella \mathbb{T} .

Diagrama de Dynkin	Tipo del diagrama
$\mathbf{A}_{n_1+n_2-1}$	\mathbb{T}_{n_1, n_2}
\mathbf{D}_{n+2}	$\mathbb{T}_{n, 2, 2}$
\mathbf{E}_6	$\mathbb{T}_{3, 3, 2}$
\mathbf{E}_7	$\mathbb{T}_{4, 3, 2}$
\mathbf{E}_8	$\mathbb{T}_{5, 3, 2}$

Tabla 2.2: Diagramas de Dynkin **ADE**, $n \geq 2$ y $n_1, n_2 \geq 1$. A la derecha sus tipos tubulares correspondiente, $n_2 \geq n_2 \geq n_1 \geq 1$. Recordamos que T_{n_1} es notación alternativa a T_{n_1, n_2} si $n_2 = 1$, así como T_{n_1, n_2} es alternativa a $T_{n_1, n_2, 1}$.

Recordamos que un A -módulo M se dice que es **generado** por un A -módulo W si existe un epimorfismo $\bigoplus_{i=1}^r W \rightarrow M$ para una suma directa finita de copias de W , y **cogenerado** por W si existe un monomorfismo $M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r W$.

Lema 2.12 *Sea A_0 el álgebra de caminos de un carcaj de Dynkin Δ . Sea W un A_0 -módulo inescindible sincero, tal que la clase de isomorfismo $[W]$ es arbitraria en los casos \mathbf{A}_n y en los casos \mathbf{D}_n ($n \geq 4$) y \mathbf{E}_m ($m = 6, 7, 8$) pertenece a la órbita de $\Gamma(A_0)$ correspondiente al centro de estrella de Δ . Entonces $[W]$ es un vértice ala de $\Gamma(A_0)$. Además todo A_0 -módulo en $\mathbf{ConL}([W])$ es cogenerado por W y todo módulo en $\mathbf{ConR}([W])$ es generado por W .*

Demostración. Por el lema 2.9 el carcaj $\Gamma(A_0)$ está contenido en $\mathbb{Z}\Delta^{op}$. Por hipótesis y el lema 2.11, $[W]$ es un vértice ala en $\mathbb{Z}\Delta^{op}$. Basta observar entonces que las alas de $[W]$ en $\mathbb{Z}\Delta^{op}$ están contenidas en $\Gamma(A_0)$. Esto es consecuencia del lema 1.29, pues W es un A_0 -módulo sincero por lo que existen morfismos no cero de cada proyectivo inescindible P en W , y por lo tanto caminos de $[P]$ en $[W]$ contenidos en $\Gamma(A_0)$.

Queremos ahora probar que todo A_0 -módulo en $\mathbf{ConR}([W])$ es generado por W (la prueba de que todo A_0 -módulo en $\mathbf{ConL}([W])$ es cogenerado por W es dual). Procedemos por pasos. Primero mostraremos que basta con verificar la siguiente afirmación (*), después se muestra que la afirmación es cierta en los carcajes ala y por último usamos el que $[W]$ es vértice ala para mostrar que la afirmación se satisface en el caso general.

- *) Sea P un A_0 -módulo proyectivo inescindible y supongamos que se tiene un morfismo no cero $f : P \rightarrow N$ donde $[N]$ es un vértice en $\mathbf{ConR}([W])$. Entonces existen morfismos $P \xrightarrow{h} \bigoplus_{i=1}^r W \xrightarrow{g} N$ tales que $f = gh$.

Paso 1. Supongamos que la afirmación (*) es cierta y que N es un A_0 -módulo tal que $[N]$ es un vértice en $\mathbf{ConR}([W])$. Entonces N es generado por W . Consideremos una cubierta proyectiva de N ,

$$\bigoplus_{j=1}^z P^j \xrightarrow{f=[f_1 \dots f_z]} N,$$

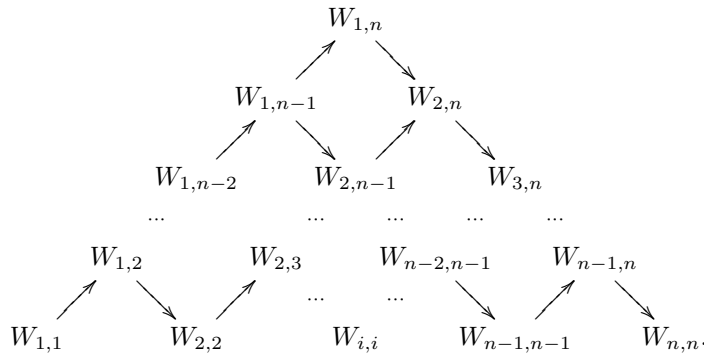
donde cada P^j es proyectivo inescindible. Por hipótesis cada morfismo f_j se factoriza a través de alguna suma directa $\bigoplus_{i=1}^{r_j} W$, digamos $f_j = g_j h_j$ (con $j \in \{1, \dots, z\}$), por lo que si definimos los siguientes morfismos,

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{j=1}^z P^j & \xrightarrow{f=[f_1 \dots f_z]} & N \\ & \searrow & \nearrow \\ h = \begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_z \end{bmatrix} & \bigoplus_{j=1}^z \left(\bigoplus_{i=1}^{r_j} W \right) & \xrightarrow{g=[g_1 \dots g_z]} & N \end{array}$$

se tiene que $f = gh$. Ya que f es epimorfismo, g es también epimorfismo por lo que N es generado por W .

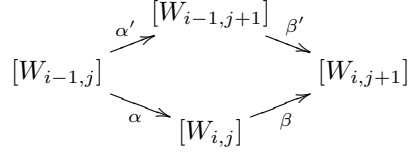
Para un camino $\gamma = \alpha_r \cdots \alpha_1$ en $\Gamma(A)$ denotemos con $\Xi(\sigma)$ a la composición $\Xi(\alpha_r) \cdots \Xi(\alpha_1)$, donde Ξ es el funtor dado en 1.36.

Paso 2. Consideremos un ala $\theta(n)$ de vértice $[W]$ en la gráfica de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$. Entonces todo morfismo entre representantes de un vértice proyectivo de $\theta(n)$ y un vértice inyectivo de $\theta(n)$ de la forma $\Xi(\gamma)$ se factoriza a través de W . En el siguiente diagrama damos un ala $\theta(n)$ de orden n de vértice $W = W_{1,n}$. Para cada vértice se ha elegido un representante de clase $W_{i,j}$ con $1 \leq i \leq j \leq n$, elección que es usada en el lema 1.36. La diferencia $\ell = j - i$, que será llamada nivel del vértice $[W_{i,j}]$, corresponde al ℓ -ésimo renglón de $\theta(n)$, enumerados de 0 a $n - 1$ de abajo hacia arriba. Diremos además que la suma de los niveles de los vértices por los que pasa un camino γ contenido en $\theta(n)$ es el nivel del camino γ .



Supongamos que f es un morfismo no cero $f : W_{1,i_0} \rightarrow W_{j_0,n}$ (para algunos $1 \leq i_0, j_0 \leq n$) de la forma $\Xi(\gamma)$ para algún camino γ de $[W_{1,i_0}]$ en $[W_{j_0,n}]$. Observamos que si $i_0 = n$ ó $j_0 = 1$ no hay nada que hacer (pues $W = W_{1,n}$), por lo que podemos suponer que $1 \leq i_0 < n$ y $1 < j_0 \leq n$. Supongamos que $[W_{i,j}]$ con $1 < i \leq j < n$ es un vértice de nivel minimal por el que pasa el

camino γ . Por minimalidad $[W_{i,j}]$ pertenece a una malla de la forma



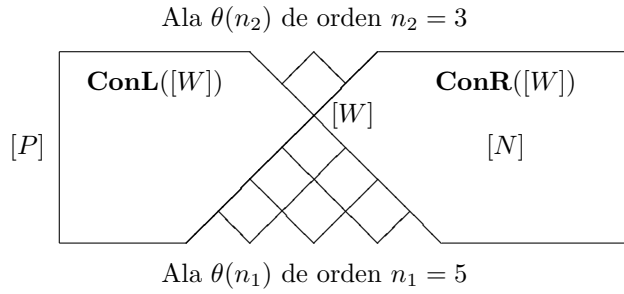
donde la composición $\beta\alpha$ es un subcamino de γ . Como $\theta(n)$ es un subcarcaj cerrado por mallas de la gráfica de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$, a esta malla le corresponde una sucesión que casi se divide en A_0 -mod de la forma

$$0 \longrightarrow W_{i-1,j} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \Xi(\alpha') \\ \Xi(\alpha) \end{bmatrix}} W_{i-1,j+1} \oplus W_{i,j} \xrightarrow{[\Xi(\beta') \ \Xi(\beta)]} W_{i,j+1} \longrightarrow 0.$$

Ya que $f = \Xi(\gamma')[\Xi(\beta)\Xi(\alpha)]\Xi(\gamma'')$ para algunos caminos γ' y γ'' , se tiene que $f = (-1)\Xi(\gamma')[\Xi(\beta')\Xi(\alpha')]\Xi(\gamma'')$, por lo que $f = (-1)\Xi(\tilde{\gamma})$ donde $\tilde{\gamma}$ se obtiene de γ cambiando el subcamino $\beta\alpha$ por $\beta'\alpha'$. Observamos que el nivel $\tilde{\mathcal{S}}$ de $\tilde{\gamma}$ es mayor estricto que el nivel \mathcal{S} de γ (de hecho $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} + 2$).

Por lo anterior un camino $\tilde{\gamma} : [W_{1,i_0}] \rightarrow [W_{j_0,n}]$ tiene nivel máximo entre todos los caminos de $[W_{1,i_0}]$ a $[W_{j_0,n}]$ si y solo si ninguno de los vértices $[W_{i,j}]$ con $1 < i \leq j < n$ por los que pasa $\tilde{\gamma}$ tiene nivel minimal. Claramente esto es equivalente a que el camino $\tilde{\gamma}$ sea el único camino de $[W_{1,i_0}]$ a $[W_{j_0,n}]$ que pasa por $[W]$. Así, por el cambio de factorización $f = \Xi(\gamma) = (-1)\Xi(\tilde{\gamma})$ asociado al cambio de caminos $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$, se tiene que el morfismo f es de la forma $f = \pm\Xi(\tilde{\gamma})$ para el camino $\tilde{\gamma}$ de nivel máximo. En particular f se factoriza a través de W .

Paso 3. Mostramos finalmente la afirmación (*). Sea $f : P \rightarrow N$ un morfismo no cero con P proyectivo inescindible y $[N] \in \mathbf{ConR}([W])$. Por los lemas 1.29 y 1.36 existen caminos $\gamma_1, \dots, \gamma_r : P \rightarrow N$ tales que f es una combinación lineal $f = a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ donde $f_i = \Xi(\gamma_i)$.



Como se muestra en el lema 2.10 el conjunto $\mathcal{S}^L = \{[W]\} \cup \mathbf{ConL}_0([W])$ es cosección conexa de $\Gamma(A_0)$ y $\mathcal{S}^R = \{[W]\} \cup \mathbf{ConR}_0([W])$ es sección conexa de $\Gamma(A_0)$. Ya que $\Gamma(A_0)$ es propio, dirigido y hereditario, por el lema 1.23 cada camino γ_i de $\Gamma(A_0)$ pasa por un vértice de la cosección \mathcal{S}^L y un vértice de la sección \mathcal{S}^R . Por lo tanto el camino γ_i entra y sale de un ala $\theta(n_i)$ de vértice $[W]$, y por el paso 2 el morfismo f_i se factoriza a través de W , digamos $f_i = g_i h_i$. Definiendo los morfismos g y h como en el siguiente diagrama se concluye que

$$gh = a_1 g_1 h_1 + \cdots + a_r g_r f_r = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r = f,$$

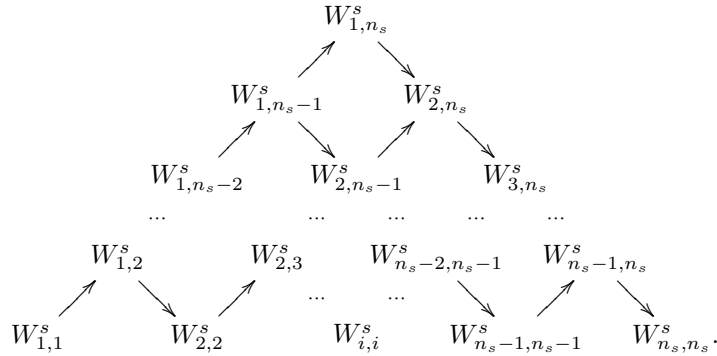
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow & \nearrow \\ & \oplus_{i=1}^r W & \\ h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_r \end{bmatrix} & & g = [a_1 g_1 \ \dots \ a_r g_r] \end{array}$$

Esto termina la prueba. \square

Lema 2.13 *Sea W_0 un A_0 -módulo inescindible correspondiente a la raíz máxima del carcaj de Dynkin Δ . Consideramos el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$ de A_0 -mod. Entonces W_0 es sincero y en los casos \mathbf{D}_n ($n \geq 4$) y \mathbf{E}_m ($m = 6, 7, 8$) la clase de isomorfismo $[W_0]$ pertenece a la órbita del centro de estrella de $\Delta = \mathbb{T}_r$.*

Demostración. Claramente W_0 es sincero, pues su dimensión vectorial $\dim W_0$ es la descrita en la tabla 2.1 (página 59). La segunda afirmación es consecuencia de la proposición 6.3 en Ringel [24, pág. 326], donde se prueba que si la órbita de $[W_0]$ no coincide con el centro de estrella (es decir, tiene menos de tres vecinos), entonces o bien W_0 es proyectivo-inyectivo ó W_0 tiene dos vértices excepcionales. Ambos casos son imposibles para la representación excepcional máxima W_0 en los casos \mathbf{D}_n ($n \geq 4$) y \mathbf{E}_m ($m = 6, 7, 8$) (ver tabla 2.1). \square

Entonces el vértice $[W_0]$ correspondiente a un A_0 -módulo inescindible W_0 de dimensión vectorial máxima es un vértice ala con a lo más tres alas vecinas, $\theta(n_1), \dots, \theta(n_t)$ para $1 \leq t \leq 3$,



Capítulo 3

Diagramas de Dynkin extendido.

Notación	Gráfica
$\tilde{\mathbf{A}}_n$ ($n \geq 2$)	
$\tilde{\mathbf{D}}_n$ ($n \geq 4$)	
$\tilde{\mathbf{E}}_6$	
$\tilde{\mathbf{E}}_7$	
$\tilde{\mathbf{E}}_8$	

Tabla 3.1: Carcajes de Dynkin extendidos $\tilde{\Delta}$ (simplemente enlazados). La orientación de las flechas es arbitraria. El diagrama de Dynkin Δ del que se extiende se obtiene de $\tilde{\Delta}$ al borrar la(s) flecha(s) α_0 (y α_0' para el caso \mathbf{A}_n) y el vértice aislado que se obtiene. En círculo los vértices excepcionales de la raíz positiva máxima w_0 de Δ . El vector entero dado es el generador del radical de la forma cuadrática asociada a $\tilde{\Delta}$.

3.1 Extensión de un punto y reducción.

En esta sección se realizan reducciones a través de módulos admisibles sobre extensiones de un punto, como define Ringel en [24].

Definiciones y equivalencias. Sean A_0 una k -álgebra con uno e_0 y R un A_0 -módulo, ambos de dimensión finita sobre k . La **extensión de un punto** $A_0[R]$ de A_0 sobre R está dada por el conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & r \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con $a \in A_0$, $r \in R$ y $\lambda \in k$, con la suma y multiplicación matriciales. Identificamos a los elementos a de A_0 con las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $A_0[R]$ y denotamos con e_ω al idempotente $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se tienen entonces identificaciones

$$A_0 = e_0(A_0[R])e_0, \quad k = e_\omega(A_0[R])e_\omega \quad \text{y} \quad R = e_0(A_0[R])e_\omega.$$

Consideramos la **categoría de subespacios** $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod}, |-\cdot|)$ de $A_0\text{-mod}$ a través de un k -functor $|-\cdot| : A_0\text{-mod} \rightarrow k\text{-mod}$. Sus objetos son ternas

$$M = (M_0, M_\omega, \gamma_M),$$

con M_0 un A_0 -módulo, M_ω un k -espacio vectorial y γ_M una transformación lineal $M_\omega \rightarrow |M_0|$. Un morfismo $f = (f_0, f_\omega) : M \rightarrow N$ está dado por una transformación lineal $f_\omega : M_\omega \rightarrow N_\omega$ y un morfismo de A_0 -módulos $f_0 : M_0 \rightarrow N_0$ tales que $\gamma_N f_\omega = |f_0| \gamma_M$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} M_\omega & \xrightarrow{f_\omega} & N_\omega \\ \gamma_M \downarrow & & \downarrow \gamma_N \\ |M_0| & \xrightarrow{|f_0|} & |N_0|. \end{array}$$

Lema 3.1 *Existe una equivalencia de categorías*

$$A_0[R]\text{-mod} \xrightarrow{G} \check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod}, \mathbf{Hom}_{A_0}(R, -)).$$

Demostración. Si M es un $A_0[R]$ -módulo entonces los espacios vectoriales $M_0 = e_0M$ y $M_\omega = e_\omega M$ descomponen a M como suma directa $M = M_0 \oplus M_\omega$. Notamos que M_0 es un A_0 -módulo mediante la identificación $A_0 = e_0(A_0[R])e_0$. La acción de $A_0[R]$ en M está dada por

$$\begin{pmatrix} a & r \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am_0 + rm_\omega \\ \lambda m_\omega \end{pmatrix}.$$

Para cada $m = e_\omega m \in M_\omega$ consideramos la asignación $R = e_0 R e_\omega \rightarrow M_0$ dada por $\gamma_M(m) : e_0 r e_\omega \mapsto e_0 r e_\omega m$. Claramente $\gamma_M(m)$ es un morfismo de A_0 -módulos y de hecho la asignación $M_\omega \xrightarrow{\gamma_M} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, M_0)$ dada por $m \mapsto \gamma_M(m)$ es k -lineal. De esta manera definimos $G(M) = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$. Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo de $A_0[R]$ -módulos entonces $f_0 = e_0 f : M_0 \rightarrow N_0$ es un morfismo de A_0 -módulos y $f_\omega = e_\omega f : M_\omega \rightarrow N_\omega$ es una transformación lineal tales que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_\omega & \xrightarrow{f_\omega} & N_\omega \\ \gamma_M \downarrow & & \downarrow \gamma_N \\ \mathbf{Hom}_{A_0}(R, M_0) & \xrightarrow{\mathbf{Hom}(1, f_0)} & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, N_0), \end{array}$$

pues si $m = e_\omega m \in M_\omega$ y $r = e_0 r_\omega \in R$ se tiene

$$\gamma_N(f_\omega(m))(r) = e_0 r_\omega f(m) = e_0 f(e_0 r_\omega m) = [f_0 \circ \gamma_M(m)](r).$$

Entonces $G(f) = (f_0, f_\omega)$ es un funtor, ya que

$$G(f \circ g) = (e_0(f \circ g), e_\omega(f \circ g)) = (e_0 f, e_\omega f) \circ (e_0 g, e_\omega g) = G(f) \circ G(g),$$

y $G(I_M) = I_{G(M)}$. El inverso de G asigna a cada objeto $(M_0, M_\omega, \gamma_M)$ el espacio vectorial $M = M_0 \oplus M_\omega$ con acción de $A_0[R]$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & r \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am_0 + \gamma_M(m_\omega)[r] \\ \lambda m_\omega \end{pmatrix},$$

y a cada morfismo $(f_0, f_\omega) : (M_0, M_\omega, \gamma_M) \rightarrow (N_0, N_\omega, \gamma_N)$ el mapeo

$$e_0 f_0 \oplus e_\omega f_\omega : e_0 M_0 \oplus e_\omega M_\omega \rightarrow e_0 N_0 \oplus e_\omega N_\omega.$$

□

Usaremos el funtor G para identificar los objetos de $A_0[R]$ -mod con los de $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod}, \mathbf{Hom}_{A_0}(R, -))$. Ya que el funtor $|-| = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, -)$ permanecerá fijo, cuando el contexto lo permita será omitido de la notación. Para una clase de objetos \mathcal{Z} de A_0 -módulos (cerrada bajo isomorfismos, sumas directas y sumandos directos) denotamos con $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$ a la subcategoría plena de $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$ cuyos objetos $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ satisfacen $M_0 \in \mathcal{Z}$.

Para una k -álgebra S_0 definimos la **extensión de un punto tensorial** de $A_0 = T_{S_0}(L'_0)$ sobre un S_0 - k -bimódulo L''_0 como el álgebra tensorial $T_S(L)$, donde S es la k -álgebra $\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ con operaciones matriciales y L es el S - S -bimódulo $\begin{pmatrix} L'_0 & L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con acciones de S dadas por el producto de matrices.

Sean S_1 y S_2 k -álgebras y consideremos bimódulos ${}_i(M_{i,j})_{S_j}$, ${}_i(N_{i,j})_{S_j}$ (con $i, j \in \{1, 2\}$). Tomando $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$ con producto

$$\begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s'_1 & 0 \\ 0 & s'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 s'_1 & 0 \\ 0 & s_2 s'_2 \end{pmatrix},$$

se tiene que $\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \end{pmatrix}$ son S - S -bimódulos. Existe un morfismo φ de S - S -bimódulos,

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \end{pmatrix} \\ \downarrow \varphi \\ \begin{pmatrix} M_{1,1} \otimes_{S_1} N_{1,1} \oplus M_{1,2} \otimes_{S_2} N_{2,1} & M_{1,1} \otimes_{S_1} N_{1,2} \oplus M_{1,2} \otimes_{S_2} N_{2,2} \\ M_{2,1} \otimes_{S_1} N_{1,1} \oplus M_{2,2} \otimes_{S_2} N_{2,1} & M_{2,1} \otimes_{S_1} N_{1,2} \oplus M_{2,2} \otimes_{S_2} N_{2,2} \end{pmatrix} (*) \end{array}$$

dado por el **producto matricial** ,

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} \\ n_{2,1} & n_{2,2} \end{pmatrix} \\ \downarrow \varphi \\ \begin{pmatrix} m_{1,1} \otimes n_{1,1} + m_{1,2} \otimes n_{2,1} & m_{1,1} \otimes n_{1,2} + m_{1,2} \otimes n_{2,2} \\ m_{2,1} \otimes n_{1,1} + m_{2,2} \otimes n_{2,1} & m_{2,1} \otimes n_{1,2} + m_{2,2} \otimes n_{2,2} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Entonces φ es un isomorfismo si los $M_{i,j}$ y $N_{i,j}$ son tales que en (*) no hay sumandos directos.

Lema 3.2 *Sea S la k -álgebra $\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ y supongamos que A y L' son S_0 - S_0 -bimódulos, que B y L'' son S_0 - k -bimódulos y que A' es un k -espacio vectorial. Entonces existen isomorfismos de S - S -bimódulos*

$$\begin{aligned} \varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A' \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} A \otimes_{S_0} L' & A \otimes_{S_0} L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \psi : \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} L' \otimes_{S_0} A & L'' \otimes_k A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dados por el producto tensorial.

Demstración. Observamos que se tienen isomorfismos

$$\begin{aligned} a) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\cong \begin{pmatrix} A \otimes_{S_0} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ b) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} 0 & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\cong \begin{pmatrix} 0 & A \otimes_{S_0} L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ c) \begin{pmatrix} 0 & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} &\cong \begin{pmatrix} 0 & L'' \otimes_k A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mostramos el inciso (a) como ejemplo. Primero notamos que, si \times denota el producto cartesiano, se tiene una biyección entre los conjuntos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} A \times L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] &\mapsto \begin{pmatrix} (a, \ell) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta biyección se extiende a un isomorfismo entre los k -espacios vectoriales generados por los conjuntos correspondientes $F_k [\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \longrightarrow F_k \begin{pmatrix} A \times L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Notamos que este isomorfismo establece una correspondencia entre generadores del ideal para el producto tensorial

$$[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] - [\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \mapsto \begin{pmatrix} (as, \ell) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a, s\ell) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con $a \in A$, $\ell \in L'$, $s \in S_0$ y $\lambda \in k$. Su inducción al cociente es el isomorfismo buscado. El isomorfismo φ del enunciado se deduce de la siguiente manera. Primero usamos (a), (b) y la distributividad del tensor para dar isomorfismos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\cong \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S [\begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \cong \\ &\cong [\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \oplus [\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} 0 & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} A \otimes_{S_0} L' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & A \otimes_{S_0} L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A \otimes_{S_0} L' & A \otimes_{S_0} L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A' \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A' \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L' & L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} A \otimes_{S_0} L' & A \otimes_{S_0} L'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene el isomorfismo ψ . \square

Lema 3.3 Si A_0 es un álgebra tensorial de la forma $T_{S_0}(L'_0)$ entonces la extensión de un punto $A_0[R]$ a través de un A_0 -módulo proyectivo $R = A_0 \otimes_{S_0} L''_0$ es isomorfa al álgebra tensorial $T_{\begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} L'_0 & L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Demostración. Sea $S = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ y consideremos el S - S -bimódulo

$$L = \begin{pmatrix} L'_0 & L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} L'_0 & S_0 \otimes_{S_0} L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por el isomorfismo φ del lema anterior tenemos que

$$L^{\otimes 2} = L \otimes_S L \cong \begin{pmatrix} L'_0 \otimes_{S_0} L'_0 & L'_0 \otimes_{S_0} L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e inductivamente para $m \geq 1$

$$\begin{aligned} L^{\otimes(m+1)} &\cong L \otimes_S L^{\otimes m} \cong \begin{pmatrix} L'_0 & L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_S \begin{pmatrix} L'_0{}^{\otimes m} & L'_0{}^{\otimes(m-1)} \otimes_{S_0} L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} L'_0{}^{\otimes(m+1)} & L'_0{}^{\otimes m} \otimes_{S_0} L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dados por el producto de matrices. De esta manera, considerando que $L'_0{}^{\otimes 0} = S_0$, se tiene

$$\begin{aligned} T_S(L) &= S \oplus \bigoplus_{m \geq 1} L^{\otimes m} \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \oplus \left(\bigoplus_{m \geq 1} \begin{pmatrix} L'_0{}^{\otimes m} & \\ 0 & \end{pmatrix} \left[\bigoplus_{m \geq 1} \begin{pmatrix} L'_0{}^{\otimes(m-1)} & \\ 0 & \end{pmatrix} \otimes_{S_0} L''_0 \right] \right) = \\ &= \begin{pmatrix} T_{S_0}(L'_0) & [T_{S_0}(L'_0)] \otimes_{S_0} L''_0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \\ &= A_0[R], \end{aligned}$$

pues el isomorfismo anterior viene dado por el producto matricial. \square

La prueba del siguiente lema es directa.

Lema 3.4 Sean A_0 y R como en el lema anterior y supongamos que X_0 es un A_0 -módulo admisible como en A.19, con escisión (Z_0, P_0) de su álgebra de endomorfismos opuesta. Entonces existe un morfismo ε de Z_0 -módulos derechos,

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \otimes_{Z_0} P_0 &\xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \\ h \otimes p &\longmapsto hp = p \circ h. \end{aligned}$$

Su Z_0 -dual derecho ε^* está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* &\xrightarrow{\varepsilon^*} (\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \otimes_{Z_0} P_0)^* \\ F &\longmapsto [h \otimes p \mapsto F(hp)]. \end{aligned}$$

Lema 3.5 Con la notación del lema anterior, si R es un A_0 -módulo proyectivo finitamente generado, entonces la asignación

$$\begin{aligned} X_0^* \otimes_{A_0} R &\xrightarrow{\eta} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ g \otimes r &\longmapsto [f \mapsto g(f(r))], \end{aligned}$$

es un isomorfismo de Z_0 -módulos izquierdos.

Demostración. Claramente la asignación es un morfismo bien definido. Mostraremos la afirmación para el caso $R = A_0e$, $e \in A_0$ idempotente. El caso general $R = \bigoplus_i d_i(A_0e_i)$ se sigue por aditividad. Observamos primero que el dual del isomorfismo de Z_0 -módulos derechos

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{A_0}(A_0e, X_0) &\xrightarrow{\varphi} eX_0 \\ f &\longmapsto f(e), \end{aligned}$$

está dado por

$$\begin{aligned} (eX_0)^* &\xrightarrow{\varphi^*} \mathbf{Hom}_{A_0}(A_0e, X_0)^* \\ g &\longmapsto [f \mapsto g(f(e))]. \end{aligned}$$

Seguimos entonces los isomorfismos

$$X_0^* \otimes_{A_0} R = X_0^* \otimes_{A_0} A_0e \cong X_0^*e \cong (eX_0)^* \cong \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*.$$

Haciendo $r \in R = A_0e$ se tiene

$$g \otimes r \mapsto g \cdot r \mapsto [f \mapsto g(f(r))],$$

es decir, el morfismo dado en el enunciado es un isomorfismo. \square

Sea $\psi : P_0^* \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \rightarrow (\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \otimes_{Z_0} P_0)^*$ el isomorfismo natural, dado por $\psi(\gamma \otimes F)[h \otimes p] = \gamma(F(h)p)$. Ver el lema A.15 en el apéndice para una descripción de la inversa ψ^{-1} en términos de bases duales de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ y P_0 .

Proposición 3.6 Sean A_0 un álgebra tensorial de la forma $T_{S_0}(L'_0)$ y R un A_0 -módulo proyectivo $R = A_0 \otimes_{S_0} L''_0$. Supongamos que X_0 es un A_0 -módulo admisible, con escisión (Z_0, P_0) de su álgebra de endomorfismos opuesta. Consideremos $\mathcal{A}_0 = (A_0, 0)$ y sea $\mathcal{A}_0^{X_0} = (A_0^{X_0}, \delta^{X_0})$ la ditálgebra reducida de A_0 por el A_0 -módulo admisible X_0 , con $A_0^{X_0} = T_{Z_0}(P_0^*)$ y con diferencial δ^{X_0} determinada por el coproducto $\mu : P_0^* \rightarrow P_0^* \otimes_{Z_0} P_0^*$. Sea A la extensión de un punto $A_0[R]$ y tomemos la subálgebra B de A dada por $B = A_0[0]$. Consideremos la ditálgebra $\mathcal{A} = (A, 0)$ con diferencial cero. Sea $S(\omega)$ el B -módulo simple correspondiente al vértice de extensión. Entonces el B -módulo $X = X_0 \oplus S(\omega)$ es admisible, con escisión de su álgebra de endomorfismos opuesta $(Z = \begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$. La ditálgebra reducida \mathcal{A}^X es isomorfa a la ditálgebra $(A_0^{X_0}[R^{X_0}], \delta^X)$ con estrato $(Z, L_0^X \oplus L_1^X)$, donde R^{X_0} es el $A_0^{X_0}$ -módulo dado por $A_0^{X_0} \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$ y

$$L_0^X \cong \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad L_1^X \cong \begin{pmatrix} P_0^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damos la diferencial δ^x sobre el estrato [8, lema 4.4]: cero en Z y en $L_0^X \oplus L_1^X$ el morfismo de Z - Z -bimódulos

$$\begin{pmatrix} P_0^* & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta^x} \begin{pmatrix} P_0^* \otimes_{Z_0} P_0^* & P_0^* \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & H \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mu(\gamma) & \widehat{\delta}(H) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

donde $\widehat{\delta} = \psi^{-1}\varepsilon^* : \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \rightarrow P_0^* \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$. Supongamos que se tienen bases duales finitas $\{(p_j, \gamma_j)\}_{j \in J}$ de P_0 y $\{(a_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$ de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$. Para un elemento $H \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$ la transformación $\widehat{\delta}$ tiene la forma explícita

$$\widehat{\delta}(H) = \sum_{i \in I, j \in J} H(a_i p_j) \gamma_j \otimes \lambda_i.$$

Demostración. Observamos que $B = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ y que se tiene una descomposición del álgebra de endomorfismos opuesta

$$\mathbf{End}_B(X)^{op} = \begin{pmatrix} \mathbf{End}_{A_0}(X_0)^{op} & 0 \\ 0 & \mathbf{End}_k(S(\omega))^{op} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que determina una escisión $(Z = \begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ de $\mathbf{End}_B(X)^{op}$. Notemos además que el Z -módulo X_Z tiene una base dual finita, pues $(X_0)_{Z_0}$ la tiene como Z_0 -módulo, por lo que X es admisible. También Z es semi-simple si Z_0 lo es y Z es trivial si Z_0 lo es.

Como se prueba en el lema 3.3 existe un isomorfismo

$$A_0[R] \cong T_S(L), \quad \text{con } L = L' \oplus L'',$$

donde $S = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$, $L' = \begin{pmatrix} L'_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L'' = \begin{pmatrix} 0 & L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $R = A_0 \otimes_{S_0} L''_0$. Además es claro que $B \cong T_S(L')$. Siguiendo las definiciones A.18 y A.20 del apéndice se tiene

$$\underline{L} = BL''B = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L''_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y usando el lema 3.5 y A.20, tenemos isomorfismos de Z - Z -bimódulos

$$\begin{aligned} L_0^X &= X^* \otimes_B \underline{L} \otimes_B X \cong \begin{pmatrix} X_0^* & 0 \\ 0 & S(\omega)^* \end{pmatrix} \otimes_B \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_B \begin{pmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & S(\omega) \end{pmatrix} \cong \\ &\cong \begin{pmatrix} 0 & X_0^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y $L_1^X = P^* \cong \begin{pmatrix} P_0^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. El álgebra tensorial reducida A^X se define como

$$A^X = T_Z(L_0^X \oplus L_1^X) \cong T_{\begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} P_0^* & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y de nuevo por el lema 3.3, notando que $A_0^{X_0} = T_{Z_0}(P_0^*)$ y recordando la notación $R^{X_0} = A_0^{X_0} \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$, tenemos que $A^X \cong A_0^{X_0}[R^{X_0}]$.

Por otro lado, la diferencial reducida δ^X está determinada por el morfismo de S - S -bimódulos

$$[X^* \otimes_B \underline{L} \otimes_B X] \oplus P^* \cong \begin{pmatrix} P_0^* & X_0^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^X,$$

dado por el coproducto en P^* y la asignación establecida en el apéndice A.22,

$$\delta^X(g \otimes r \otimes x^\omega) = \lambda(g) \otimes r \otimes x^\omega + \sigma_{g, x^\omega}(\delta(r)) + (-1)^{|r|+1} g \otimes r \otimes \rho(x^\omega),$$

donde x^ω es un generador del simple $S(\omega)$, $r \in R$, $g \in X_0^*$ y λ, ρ son las coacciones izquierda y derecha de X (definición A.17). Observamos que el morfismo m_r de la definición de ρ es cero en $S(\omega)$, pues para cualquier p en P_0 ,

$$m_r \begin{pmatrix} 0 \\ x^\omega \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, ya que la diferencial δ de la ditálgebra \mathcal{A} es cero, la diferencial δ^X tiene la forma

$$\delta^X(g \otimes r \otimes x^\omega) = \lambda(g) \otimes r \otimes x^\omega.$$

En particular la imagen de δ^X está contenida en $P_0^* \otimes_{Z_0} [X_0^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega)]$. Considerando el isomorfismo natural $F : X_0^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega) \rightarrow X_0^* \otimes_{A_0} R$ y el isomorfismo η del lema 3.5, queremos mostrar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & X_0^* \otimes_{A_0} R & \\ & \nearrow F & \searrow \eta \\ X_0^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega) & & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ \downarrow \delta^X & & \downarrow \varepsilon^* \\ P_0^* \otimes_{Z_0} [X_0^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega)] & \xrightarrow{Id_{P_0^*} \otimes (\eta \circ F)} & P_0^* \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ & & \uparrow \psi \\ & & (\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \otimes_{Z_0} P_0)^* \end{array}$$

\(\widehat{\delta} = \psi^{-1} \varepsilon^*\)

Para calcular $\psi \circ [Id_{P_0^*} \otimes (\eta \circ F)] \circ \delta^X$ fijamos bases duales derechas $(x_i, \nu_i)_i$ y $(p_j, \gamma_j)_j$ de $(X_0)_{Z_0}$ y $(P_0)_{Z_0}$ respectivamente. Así, para un elemento $g \otimes r \otimes x^\omega$ de $X^* \otimes_{A_0} R \otimes_k S(\omega)$ se tiene a $[Id_{P_0^*} \otimes (\eta \circ F)](\delta^X(g \otimes r \otimes x^\omega))$ dado por

$$[Id_{P_0^*} \otimes (\eta \circ F)] \left(\sum_{i,j} g(x_i p_j) \gamma_j \otimes (\nu_i \otimes r \otimes x^\omega) \right) = \sum_{i,j} g(x_i p_j) \gamma_j \otimes F_i^r,$$

donde $F_i^r(f) = \nu_i(f(r))$. Evaluamos ψ en la última expresión,

$$\psi \left(\sum_{i,j} g(x_i p_j) \gamma_j \otimes F_i^r \right) = [h \otimes p \mapsto \sum_{i,j} g(x_i p_j) \gamma_j (F_i^r(h)p)].$$

Por lo tanto, para un elemento $h \otimes p$ de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \otimes_{Z_0} P_0$ tenemos

$$\begin{aligned} \psi[Id_{P_0^*} \otimes (\eta \circ F)]\delta^X(g \otimes r \otimes x^\omega)(h \otimes p) &= \sum_{i,j} g(x_i p_j) \gamma_j (F_i^r(h)p) = \\ &= \sum_{i,j} g(x_i p_j) \gamma_j (\nu_i[h(r)]p) = \\ &= \sum_i g \left(x_i \sum_j p_j \gamma_j (\nu_i[h(r)]p) \right) = \\ &= \sum_i g(x_i \nu_i[h(r)]p) = \\ &= g \left(\sum_i x_i \nu_i[h(r)]p \right) = \\ &= g(h(r)p) = g(p(h(r))). \end{aligned}$$

Por otro lado, por las expresiones anteriores de ε^* (lema 3.4) y η (lema 3.5) observamos que

$$\begin{aligned} \varepsilon^*[(\eta \circ F)(g \otimes r \otimes x^\omega)](h \otimes p) &= \varepsilon^*[\eta(g \otimes r)](h \otimes p) = \\ &= \eta(g \otimes r)[hp] = g[(hp)(r)] = \\ &= g(p(h(r))). \end{aligned}$$

Entonces el diagrama anterior es conmutativo. Por definición la restricción de δ^x a L_0^X es isomorfa a $\widehat{\delta}$, mientras que la restricción de δ^x a L_1^X es isomorfa a la comultiplicación μ . Por lo anterior lo mismo es cierto para la diferencial δ^X , por lo que δ^x es isomorfa a la diferencial δ^X . Para finalizar observamos que la forma explícita de $\widehat{\delta}$ se obtiene de la forma dada para ε^* en el lema 3.4 y la del inverso ψ^{-1} en el lema A.15 del apéndice. \square

La ditálgebra \mathcal{A}^X del resultado anterior tiene como estrato la pareja

$$\left(\left(\begin{pmatrix} Z_0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_0^* & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right),$$

donde los elementos de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$ tienen grado cero y los de P_0^* tienen grado uno.

3.2 Elección de módulos de extensión.

Sean Δ un carcaj de Dynkin con orientación arbitraria y $\tilde{\Delta}$ su extensión (a nivel de gráficas) tal que el vértice agregado es una fuente. El propósito del resto de esta sección es determinar un Δ -módulo proyectivo R tal que $k\tilde{\Delta}$ es isomorfa a la extensión de un punto $k\Delta[R]$, tal como describe Ringel en [24, 3.6(4)].

Supongamos que A_0 es la k -álgebra de caminos de un carcaj finito, sólido y con ordenación admisible de sus vértices Q y sea $A = A_0[R]$ la extensión de un punto de A_0 a través de un A_0 -módulo proyectivo R . Sea C_0 la matriz de Cartan de A_0 , es decir, las columnas de C_0 están dadas por los vectores dimensión de los inescindibles proyectivos (corolario 1.6) $P(i) = Ae_i$. Ya que $A \cong Ae_0 \oplus Ae_\omega$ y $Ae_\omega \cong R \oplus k$, la matriz de Cartan de A tiene la forma

$$C = \begin{pmatrix} C_0 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $r = \underline{\dim}R$. Como C_0 es invertible, C tiene por inversa a

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} C_0^{-1} & -C_0^{-1}r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así la matriz de Coxeter de A es

$$\Phi = -C^t C^{-1} = \begin{pmatrix} -C_0^t C_0^{-1} & C_0^t C_0^{-1} r \\ -r^t C_0^{-1} & r^t C_0^{-1} r - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0 & -\Phi_0 r \\ -r^t C_0^{-1} & q_0(r) - 1 \end{pmatrix},$$

donde Φ_0 es la matriz de Coxeter de A_0 . Por el lema 3.3, $A = A_0[R]$ es el álgebra de caminos de un carcaj \tilde{Q} . Sean $\langle x, y \rangle$ y $\langle x, y \rangle_0$ las formas bilineales asociadas a los carcajes de \tilde{Q} y Q respectivamente. Recordamos que $\langle x, y \rangle = x^t M_{\tilde{Q}} y$ donde $M_{\tilde{Q}}$ es la matriz de incidencias del carcaj \tilde{Q} . Por el lema 1.3, $M_{\tilde{Q}} = C^{-t}$, pues el orden de los vértices de \tilde{Q} es admisible. Sean $(x, y) = \frac{1}{2}(\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle)$ la simetrización de $\langle x, y \rangle$ y $q(x) = \langle x, x \rangle$ su forma cuadrática entera asociada. De forma análoga se definen $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, $(\cdot, \cdot)_0$ y q_0 respecto al carcaj Q y su matriz asociada $M_Q = C_0^{-t}$. Recordamos que un vector entero x está en el radical de la forma simétrica (\cdot, \cdot) si $(x, y) = 0$ para todo vector entero y .

Lema 3.7 *Para un vector entero $w_0 \in \mathbb{Z}^Q$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

- i) $w_0 + \mathbf{e}_\omega$ es un vector radical de (\cdot, \cdot) .
- ii) $r = (I - \Phi_0^{-1})w_0$ y $q_0(w_0) = 1$.
- iii) La formas lineales $\langle r, - \rangle_0$ y $2(w_0, -)_0$ coinciden y $q_0(w_0) = 1$.

Demostración. Repetimos la prueba de Ringel [24, 2.5 punto (11)]. Para mostrar la equivalencia de (ii) y (iii) notamos que las formas $\langle r, - \rangle_0$ y $2(w_0, -)_0$ corresponden a los vectores $r^t C_0^{-t}$ y $w_0^t (C_0^{-t} + C_0^{-1})$, respectivamente. Por lo tanto las formas $\langle r, - \rangle_0$ y $2(w_0, -)_0$ coinciden si y solo si

$$r^t C_0^{-t} = w_0^t (C_0^{-t} + C_0^{-1}),$$

y transponiendo

$$C_0^{-1}r = (C_0^{-t} + C_0^{-1})w_0.$$

Esto a su vez sucede si y solo si $r = (I + C_0C_0^{-t})w_0 = (I - \Phi_0^{-1})w_0$. Para la equivalencia de (i) y (iii) calculamos la forma lineal $2(-, w_0 + \mathbf{e}_\omega)$,

$$\begin{pmatrix} C_0^{-1} + C_0^{-t} & -C_0^{-1}r \\ -r^t C_0^{-t} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_0^{-1} + C_0^{-t})w_0 - C_0^{-1}r \\ -r^t C_0^{-t}w_0 + 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $w_0 + \mathbf{e}_\omega$ está en el radical de (\cdot, \cdot) si y solo si las formas $\langle r, - \rangle_0$ y $2(w_0, -)_0$ coinciden y $\langle r, w_0 \rangle_0 = 2(w_0, w_0)_0 = 2$. \square

Supongamos ahora que $Q = \Delta$ es un carcaj de Dynkin y hagamos $A_0 = k\Delta$. Sea w_0 la raíz positiva máxima del sistema de raíces de Δ . Sea d_i la derivada parcial de la forma cuadrática q_Δ evaluada en la raíz máxima w_0 ,

$$d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} q_\Delta(w_0).$$

La expresión de $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Delta$ dada inmediatamente antes del lema 1.4 tiene la forma

$$\langle x, y \rangle_\Delta = \sum_{i \in \Delta_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in \Delta_1} (-1)^{|\alpha|} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)},$$

por lo que

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{e}_i, x)_\Delta &= \langle \mathbf{e}_i, x \rangle + \langle \Delta x, \mathbf{e}_i \rangle_\Delta = \\ &= \left(x_i - \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_1 \\ t(\alpha)=i}} (-1)^{|\alpha|} x_{s(\alpha)} \right) + \left(x_i - \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_1 \\ t(\alpha)=i}} (-1)^{|\alpha|} x_{s(\alpha)} \right) = \\ &= 2x_i - \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_1 \\ t(\alpha)=i}} (-1)^{|\alpha|} x_{s(\alpha)} - \sum_{\substack{\alpha \in \Delta_1 \\ s(\alpha)=i}} (-1)^{|\alpha|} x_{t(\alpha)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle x, x \rangle_\Delta. \end{aligned}$$

En particular $d_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, pues la reflexión simple $\sigma_i(w_0)$ tiene la forma $\sigma_i(w_0) = w_0 - d_i \mathbf{e}_i$, y por maximalidad de w_0 se tiene $d_i \geq 0$.

Lema 3.8 Sean Δ un carcaj de Dynkin y w_0 la raíz positiva máxima de Δ . Sea $\tilde{\Delta}$ el carcaj de Dynkin extendido donde el vértice agregado es fuente y sea R el Δ -módulo proyectivo $R = \bigoplus_i d_i P(i)$ donde $P(i)$ es cubierta proyectiva del simple de vértice i y $d_i = \frac{\partial}{\partial x_i} q_\Delta(w_0)$. Entonces $k\tilde{\Delta} \cong k\Delta[R]$.

Demostración. Sea $A_0 = k\Delta$. Como $\tilde{\Delta}$ se obtiene de Δ al agregar el vértice ω y flechas de ω a ciertos vértices de Δ llamados excepcionales (que se marcan con un círculo en la tabla 3.1), es claro que $k\tilde{\Delta} = A_0[R']$ para algún Δ -módulo proyectivo R' . Como es bien sabido $w_0 + \mathbf{e}_\omega$ es generador del radical de $q_{\tilde{\Delta}}$, por lo que la equivalencia de (i) y (ii) en el lema anterior implica que $r' = \mathbf{dim} R' = (I - \Phi_0^{-1})w_0$.

Por otro lado, si $r = \underline{\dim}R = \sum_i d_i p_i$ (con $p_i = \underline{\dim}P(i)$) se muestra que las formas bilineales $\langle r, - \rangle_0$ y $2(w_0, -)_0$ coinciden. Para ello basta ver que las formas son iguales en la base canónica

$$\langle r, \mathbf{e}_j \rangle_0 = \sum_i d_i \langle p_i, \mathbf{e}_j \rangle_0 = d_j = 2(w_0, \mathbf{e}_j)_0,$$

pues $\langle p_i, \mathbf{e}_j \rangle_0 = p_i^t C_0^{-t} \mathbf{e}_j = (C_0 \mathbf{e}_i)^t C_0^{-t} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^t (C_0^t C_0^{-t}) \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^t \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$. Así las formas $\langle r, - \rangle_0$ y $2(w_0, -)_0$ son iguales, y por la equivalencia (ii) y (iii) del lema anterior $r = (I - \Phi_0^{-1})w_0$. Entonces $r = r'$. Como $R' = \bigoplus_i P(i)^{d'_i}$ para algunos enteros no negativos d'_i y el conjunto de vectores $\{p_i\}$ es linealmente independiente se tiene que $d_i = d'_i$ para cada vértice i . Por lo tanto $R' = R$ y $k\tilde{\Delta} \cong A_0[R]$. \square

Se finaliza esta sección con el siguiente lema que puede encontrarse en Ringel [24, sección 3.4(4)] y que es fundamental para la descripción de las reducciones que haremos al final de este capítulo.

Lema 3.9 *Sea W_0 un A_0 -módulo inescindible correspondiente a la raíz máxima de Δ . Consideramos el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$ de $A_0\text{-mod}$ y los siguientes subconjuntos de vértices determinados por $[W_0]$,*

$$\mathcal{X}^0 = \mathbf{ConL}_0([W_0]) = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [M] \prec [W_0] \text{ pero } \tau^{-1}[M] \not\prec [W_0]\},$$

$$\mathcal{Y}^0 = \mathbf{ConR}_0([W_0]) = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [W_0] \prec [M] \text{ pero } [W_0] \not\prec \tau[M]\},$$

$$\mathcal{W}^0 = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [M] \not\prec [W_0] \not\prec [M]\}.$$

Entonces para un A_0 -módulo inescindible M se tiene

$$\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, M) = \begin{cases} 2, & \text{si } [M] = [W_0], \\ 1, & \text{si } [M] \in \mathcal{X}^0 \cup \mathcal{Y}^0, \\ 0, & \text{si } [M] \in \mathcal{W}^0. \end{cases}$$

Demostración. Ya que R es proyectivo se tiene que $\mathbf{Ext}_{A_0}^1(R, M) = 0$, por lo que usando el lema 1.4 y el punto (iii) del lema 3.7 se tiene

$$\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, M) = \langle \underline{\dim}R, \underline{\dim}M \rangle_0 = 2(\underline{\dim}W_0, \underline{\dim}M)_0.$$

Por lo tanto $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0) = 2$. Supongamos ahora que $[M] \in \mathcal{W}_0$, \mathcal{X}_0 ó \mathcal{Y}_0 . Entonces usando las fórmulas de Auslander-Reiten en el caso hereditario y ya que no existen caminos de M a τW_0 ni de $\tau^{-1}W_0$ a M , se tiene que

$$\mathbf{Ext}_{A_0}^1(W_0, M) \cong D\mathbf{Hom}_{A_0}(M, \tau W_0) = 0, \quad \text{y}$$

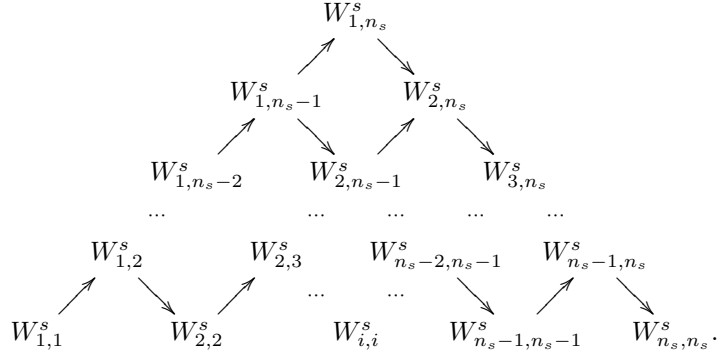
$$\mathbf{Ext}_{A_0}^1(M, W_0) \cong D\mathbf{Hom}_{A_0}(\tau^{-1}W_0, M) = 0,$$

por lo que

$$2(\underline{\dim}W_0, \underline{\dim}M)_0 = \mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M) + \mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(M, W_0).$$

Así $[M] \in \mathcal{W}_0$ implica que $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, M) = 0$.

Recordamos que $[W_0]$ es un vértice ala de $\Gamma(A_0)$ (lemas 2.12 y 2.13). La notación para las alas $\theta(n_s)$ de $[W_0]$ dada al final de la sección 2.3 es, para $1 \leq s \leq t$,



Entonces el conjunto $\mathcal{X}_0 = \mathbf{ConL}_0([W_0])$ consiste en las clases de isomorfismo de los módulos $W_{1,i}^s$ con $i = 1, \dots, n_s - 1$ para $s = 1, \dots, t$ y $\mathcal{Y}_0 = \mathbf{ConR}_0([W_0])$ está formado por el conjunto $\{[W_{i,n_s}^s]\}$ con $i = 1, \dots, n_s - 1$ y $s = 1, \dots, t$. Además \mathcal{W}_0 está dado por los elementos de la forma $[W_{i,j}^s]$ para $1 < i \leq j < n_s$, y $s = 1, \dots, t$. Supongamos que $[M] \in \mathcal{X}_0$, por lo que $\mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M) = 0$. Del lema 1.36 se sigue que $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_{1,i}^s, W_{1,i+1}^s) = 1$ para $i = 1, \dots, n_s - 1$. Ya que cada $W_{1,i}^s$ es cogenerado por W_0 (lema 2.12), $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_{1,i}^s, W_0) = 1$ para cada $i = 1, \dots, n_s - 1$. Así, si $M = W_{1,i}^s$ tenemos $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, M) = 1$. Un argumento análogo para $[M] \in \mathcal{Y}_0$ termina la prueba. \square

3.3 Levantamiento de sucesiones.

Sea A_0 una k -álgebra de dimensión finita y R un A_0 -módulo proyectivo. Se considera la categoría de A_0 -módulos incluida en la categoría de subespacios $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$ respecto al funtor $|-| = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, -)$ de dos maneras,

$$A_0\text{-mod} \longrightarrow \check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod}),$$

mediante los funtores (fieles y plenos) inclusión $M_0 \mapsto M_0 = (M_0, 0, 0)$ e inducción $M_0 \mapsto \overline{M_0} = (M_0, |M_0|, I_{|M_0|})$. Los **levantamientos** M_0 y $\overline{M_0}$ coinciden siempre que $|M_0| = 0$. Para cada camino trivial e_i de A_0 denotemos también con e_i al elemento de A dado por $\begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sea $e_\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lema 3.10 Denotemos con $P(i)$ y $J(i)$ ($i \in \{1, \dots, n, \omega\}$) a los A -módulos inescindibles proyectivos e inyectivos dados por Ae_i y $D(e_i A)$ respectivamente.

a) Para $1 \leq i \leq n$ se tiene $P(i) \cong A_0 e_i$ en $A\text{-mod}$ (considerando que $A_0 e_i = (A_0 e_i, 0, 0)$ en $A\text{-mod}$) y $P(\omega) \cong (R, k, \gamma_{P(\omega)} : 1 \mapsto Id_R)$.

b) Para $1 \leq i \leq n$ se tiene $J(i) \cong \overline{D(e_i A_0)}$ y $J(\omega) \cong S(\omega)$.

Demostración. La prueba de (a) es directa usando productos matriciales. Por un lado,

$$\begin{pmatrix} A_0 & R \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} A_0 e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong (A_0 e_i, 0, 0),$$

por otro lado, $P(\omega)$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A_0 & R \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & R \\ 0 & k \end{pmatrix} \cong (R, k, \gamma_{P(\omega)}),$$

donde por construcción (lema 3.1), $\gamma_{P(\omega)}(1) = Id_R \in |R| = \mathbf{End}_{A_0}(R)$.

Para probar (b) observamos primero que si Z_0 es un A_0 -módulo inyectivo entonces $\overline{Z_0}$ es un A -módulo inyectivo. En efecto, si $u : L \rightarrow M$ es un monomorfismo en $A\text{-mod}$ y $g : L \rightarrow \overline{Z_0}$ es un morfismo cualquiera como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & L_\omega & \xrightarrow{u_\omega} & M_\omega \\ & \swarrow g_\omega & \downarrow \gamma_L & \dashrightarrow & \downarrow \gamma_M \\ |Z_0| & & & & |M_0| \\ \parallel & \swarrow |g_0| & |L_0| & \xrightarrow{|u_0|} & \\ |Z_0| & & & \swarrow |g'_0| & \end{array}$$

entonces existe $g'_0 : M_0 \rightarrow Z_0$ tal que $g_0 = g'_0 u_0$ y el triángulo inferior es conmutativo (pues u_0 es monomorfismo y Z_0 es inyectivo en $A_0\text{-mod}$), por lo que definiendo $g' = (g'_0, |g'_0| \gamma_M) : M \rightarrow \overline{Z_0}$ se tiene que $g = g' u$, y por lo tanto $\overline{Z_0}$ es inyectivo.

Observamos que $J(i) = D \left(\begin{pmatrix} e_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & R \\ 0 & k \end{pmatrix} \right) \cong \begin{pmatrix} D(e_i A_0) & 0 \\ D(e_i R) & 0 \end{pmatrix}$, por lo que $J(i)|_{A_0} \cong D(e_i A_0)$ (y de hecho $D(e_i R) \cong |D(e_i A_0)|$). Considerando que

$$J(\omega) = D \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 & R \\ 0 & k \end{pmatrix} \right) \cong S(\omega),$$

y que $J(i)|_{A_0} \cong \overline{D(e_i A_0)}|_{A_0}$ observamos que $J(i) \cong \overline{D(e_i A_0)}$ para $1 \leq i \leq n$. \square

El siguiente resultado (Ringel, [24]2.5(6)) relaciona las sucesiones que casi se dividen de $A_0\text{-mod}$ y $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$.

Lema 3.11 a) Si $\varepsilon_0 = 0 \longrightarrow X_0 \xrightarrow{f} Y_0 \xrightarrow{g} Z_0 \longrightarrow 0$ es una sucesión de A_0 -módulos que casi se divide, entonces

$$\overline{\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow \overline{X_0} \xrightarrow{(f, |I_{X_0}|)} (Y_0, |X_0|, |f|) \xrightarrow{(g, 0)} Z_0 \longrightarrow 0$$

es una sucesión que casi se divide en $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$, llamada levantamiento de ε_0 .

b) Sea $\varepsilon = 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ una sucesión que casi se divide en la categoría $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$. Si $Z_\omega \neq 0$ la restricción $\varepsilon|_{A_0}$ es trivial. Si $Z_\omega = 0$ entonces Z_0 no es un A_0 -módulo proyectivo y $\varepsilon|_{A_0}$ es una sucesión que casi se divide.

Demostración. Para (a) consultamos Ringel [24]2.5(lemas 5 y 6). Primero observamos que $\bar{\varepsilon}_0$ es una sucesión exacta, pues $|-| = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, -)$ es un funtor exacto (R es proyectivo), y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & |X_0| & \xlongequal{\quad} & |X_0| & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow |f| & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & |X_0| & \xrightarrow{|f|} & |Y_0| & \xrightarrow{|g|} & |Z_0| \longrightarrow 0. \end{array}$$

Por otro lado, $(f, |I_{X_0}|)$ no es sección pues f no lo es. Supongamos que $v = (v_0, v_\omega) : \bar{X}_0 \rightarrow V$ es un morfismo que no es sección. Si existe $v'_0 : V_0 \rightarrow X_0$ tal que $v'_0 v_0 = I_{X_0}$, tomando el morfismo $v' = (v'_0, |v'_0| \gamma_V) : V \rightarrow |\bar{X}_0|$ se tiene que $v'v = I_{\bar{X}_0}$, por lo que v_0 no es sección. Ya que f casi se divide por la izquierda, existe $\eta_0 : Y_0 \rightarrow V_0$ tal que $v_0 = \eta_0 f$.

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_0 & \xrightarrow{(f, |I_{X_0}|)} & (Y_0, |X_0|, |f|) \\ (v_0, v_\omega) \downarrow & \swarrow (\eta_0, v_\omega) & \\ (V_0, V_\omega, \gamma_V) & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f} & Y_0 \\ v_0 \downarrow & \swarrow \eta_0 & \\ V_0 & & \end{array}$$

Notamos entonces que $(\eta_0, v_\omega)(f, |I_{X_0}|) = (v_0, v_\omega)$. Finalmente, si $\xi = (\xi_0, \xi_\omega) \in \mathbf{End}(Y_0, |X_0|, |f|)$ satisface $\xi(f, |I_{X_0}|) = (f, |I_{X_0}|)$ entonces $\xi_0 f = f$ y $\xi_\omega = |I_{X_0}|$. Por lo tanto ξ es un automorfismo y $(f, |I_{X_0}|)$ es un morfismo minimal que casi se divide por la izquierda. Por el lema 1.20 la sucesión $\bar{\varepsilon}_0$ casi se divide.

Mostramos ahora (b). Como el vértice agregado ω es fuente, Z_0 es submódulo de Z en $\tilde{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$. Si $Z_\omega \neq 0$ entonces la inclusión $i : Z_0 \hookrightarrow Z$ no es retracción, y como g casi se divide por la derecha, existe $t : Z_0 \rightarrow Y$ tal que $i = gt$. Así $I_{Z_0} = g_0 t_0$ y g_0 es retracción. Por otro lado, si $Z_\omega = 0$ entonces Z_0 no puede ser un A_0 -módulo proyectivo (por el lema 3.10, pues Z_0 no es A -proyectivo). De esta manera, si ε_0 es la sucesión que casi se divide en $A_0\text{-mod}$ que termina en Z_0 , entonces por el inciso anterior ε y $\bar{\varepsilon}_0$ son sucesiones que casi se dividen que terminan en Z . Por unicidad estas sucesiones son isomorfas, y por lo tanto $\varepsilon|_{A_0} \cong \bar{\varepsilon}_0|_{A_0} = \varepsilon_0$ es una sucesión que casi se divide en $A_0\text{-mod}$. \square

Regresamos al caso en que A_0 es el álgebra de caminos de un carcaj de Dynkin Δ , W_0 es un A_0 -módulo inescindible de dimensión vectorial máxima $\dim W_0 = w_0$ y R es el A_0 -módulo proyectivo descrito en el lema 3.8. Para cada morfismo no nulo $\rho \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ denotamos con $W_0(\rho)$ al objeto en $\tilde{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$ dado por

$$W_0(\rho) = (W_0, k, \rho),$$

es decir, $\gamma_{W_0(\rho)}$ es la transformación que asigna al $1 \in k$ el morfismo ρ . Como el álgebra de endomorfismos de W_0 es isomorfa al campo k , los morfismos $f : W_0(\rho) \rightarrow W_0(\rho')$ están dados por parejas de escalares $f = (aId_{W_0}, bId_k)$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{b} & k \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho' \\ |W_0| & \xrightarrow{|aI_{W_0}|} & |W_0|. \end{array}$$

Por lo tanto hay un morfismo no cero $f : W_0(\rho) \rightarrow W_0(\rho')$ si y solo si $a, b \neq 0$ y $\rho' = (a/b)\rho$. En este caso f es un isomorfismo. Claramente $W_0(\rho)$ es inescindible si $\rho \neq 0$. Entonces se tiene una familia de A -módulos inescindibles $W_0(\rho)$ no isomorfos entre sí parametrizada por el espacio proyectivo $\mathbb{P}\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$. Todos ellos tienen por vector dimensión al generador positivo $w_0 + e_\omega$ del radical de la forma cuadrática de A .

Lema 3.12 Sean A_0 el álgebra de caminos de un carcaj de Dynkin Δ , W_0 un A_0 -módulo inescindible de dimensión vectorial máxima $\underline{\dim}W_0 = w_0$, R el A_0 -módulo proyectivo de la extensión y $A = A_0[R]$ como se describen en el lema 3.8. Para cualquier morfismo no nulo $\rho \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ el A -módulo inescindible $W_0(\rho)$ no es ni posproyectivo ni preinyectivo.

Demostración. Supongamos que $W_0(\rho)$ es un A -módulo posproyectivo. Por el lema 1.34 el módulo $W_0(\rho)$ es excepcional, y por los lemas 1.8 y 1.35(b), ya que $\underline{\dim}W_0(\rho)$ está en el radical de la forma cuadrática de A , se tiene que

$$\underline{\dim}\tau^{-1}W_0(\rho) = \underline{\dim}W_0(\rho).$$

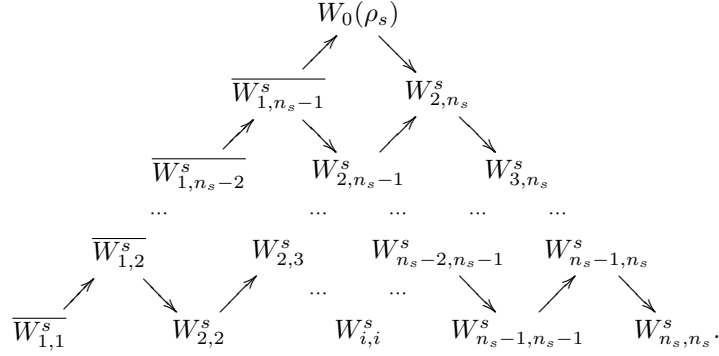
Como $\tau^{-1}W_0(\rho)$ también es excepcional (pues también es posproyectivo inescindible), por el lema 1.13 existe un isomorfismo $W_0(\rho) \cong \tau^{-1}W_0(\rho)$. Esto es una contradicción, pues la componente posproyectiva de A -mod no tiene órbitas periódicas (lemas 1.33 y 1.21). De manera análoga se muestra que $W_0(\rho)$ no es un A -módulo preinyectivo. \square

Consideremos un ala $\theta(n_s)$ de vértice $[W_0]$ en el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(A_0)$, como en la sección 2.3 y recordemos la notación $[W_{i,j}^s]$ para los vértices de $\theta(n_s)$ dada en tal sección. Fijamos un morfismo no cero $\rho'_s : R \rightarrow W_{1,n_s-1}^s$ (por 3.9 el grupo de homomorfismos $|W_{1,n_s-1}^s| = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_{1,n_s-1}^s) \cong k$ tiene dimensión uno). Fijando un morfismo irreducible $f : W_{1,n_s-1}^s \rightarrow W_0$ y definiendo $\rho_s = f\rho'_s$ se tiene un morfismo $\overline{W_{1,n_s-1}^s} \longrightarrow W_0(\rho_s)$ en la categoría A -mod como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & W_0 \\ & \nearrow \rho_s & \uparrow f \\ R & \longrightarrow & W_{1,n_s-1}^s \\ & \searrow \rho'_s & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} |W_{1,n_s-1}^s| & \xrightarrow{\rho'_s \mapsto 1} & k \\ \parallel & & \downarrow \\ |W_{1,n_s-1}^s| & \xrightarrow{\rho'_s \mapsto \rho_s} & |W_0|. \end{array}$$

Iniciando de esta manera Ringel muestra [24, 3.4 punto (5)] que el ala $\theta(n_s)$ se levanta de manera completa a una subgráfica de $\Gamma(A)$, como se muestra en el siguiente diagrama. El módulo proyectivo-inyectivo corresponde el módulo

$W_0(\rho_s)$,



Lema 3.13 Sean A_0 , W_0 , R y $A = A_0[R]$ como en el lema 3.12. Existe una ordenación de representantes N_i ($i \in \mathbb{N}_0$) de las clases de isomorfismo de A -módulos posproyectivos inescindibles \mathcal{P} , de manera que si $f : N_j \rightarrow N_i$ es un morfismo irreducible entonces $j < i$ (orden opuesto al admisible). Además,

- a) para $\ell \geq 0$, si Z_0 es un A_0 -módulo inescindible que es isomorfo a un sumando directo de la restricción $N_\ell|_{A_0}$, entonces existe $j \leq \ell$ y un isomorfismo de A -módulos $N_j \cong Z_0$. Si además Z_0 es no proyectivo entonces existe $i < j$ tal que $N_i \cong \tau_0(Z_0)$.

Por otro lado, existe una ordenación de representantes M_i ($i \in \mathbb{N}_0$) de las clases de isomorfismo de A -módulos preinyectivos inescindibles \mathcal{I} , de manera que si $f : N_j \rightarrow N_i$ es un morfismo irreducible entonces $i < j$. Además,

- a') para $\ell \geq 0$, si Z_0 es un A_0 -módulo inescindible que es isomorfo a un sumando directo de la restricción $M_\ell|_{A_0}$, entonces existe $j \leq \ell$ y un isomorfismo de A -módulos $M_j \cong Z_0$. Si además Z_0 es no inyectivo entonces existe $i < j$ tal que $M_i \cong \tau_0^{-1}(Z_0)$.

Demostración. Por los lemas 1.33 y 3.8 la componente posproyectiva \mathcal{P} de $\Gamma(A)$ es isomorfa a $(-\mathbb{N}_0)\tilde{\Delta}^{op}$. Por los lemas 1.26 y 1.25 esta componente tiene una ordenación admisible. Se usa el orden opuesto para evitar subíndices negativos.

Damos una prueba de (a) por inducción doble ℓ . Como los primeros módulos en la lista N_1, N_2, \dots, N_n son proyectivos, y la restricción de un A -módulo proyectivo es A_0 -proyectivo (lema 3.10), la base de inducción se cumple por vacuidad. Supongamos que la condición (a) es cierta para A_0 -módulos isomorfos a sumandos directos de la restricción $N_i|_{A_0}$ para $0 \leq i \leq \ell$ y supongamos que Z_0 es sumando directo de $N_{\ell+1}|_{A_0}$. Si además Z_0 es isomorfo a un sumando directo de la restricción de $N_{\ell'}$ para algún $\ell' \in \{1, \dots, \ell\}$, por inducción existen $i < j \leq \ell' < \ell + 1$ con $N_i \cong \tau_0(Z_0)$ y $N_j \cong Z_0$. De lo contrario la sucesión que casi se divide que termina en $N_{\ell+1}$,

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow \tau(N_{\ell+1}) \longrightarrow E \longrightarrow N_{\ell+1} \longrightarrow 0,$$

tiene restricción $\varepsilon|_{A_0}$ no trivial, pues Z_0 es sumando directo de $N_{\ell+1}|_{A_0}$ pero no de $E|_{A_0}$. Entonces por el lema 3.11(b) se tiene que $(N_{\ell+1})_\omega = 0$ por lo que

$Z_0 \cong N_{\ell+1}$. Consideremos ahora la sucesión que casi se divide en A_0 -mod que termina en Z_0 ,

$$\varepsilon_0 : 0 \longrightarrow \tau_0(Z_0) \longrightarrow F \longrightarrow Z_0 \longrightarrow 0.$$

Por el lema 3.11(a) el levantamiento $\overline{\varepsilon_0}$ y ε son ambas sucesiones de Auslander-Reiten en A -mod que terminan en $N_{\ell+1}$, por lo que $\overline{\tau_0(Z_0)} \cong \tau(N_{\ell+1}) \cong N_i$ con $i < \ell + 1$. Es decir, $N_{\ell+1} \cong Z_0$ y $N_i \cong \tau_0(Z_0)$.

Probamos ahora las afirmaciones sobre la componente preinyectiva \mathcal{I} . La ordenación de representantes M_i para $i \geq 0$, en este caso admisible, se obtiene de manera similar que en el caso anterior.

Probamos (a') por inducción sobre ℓ . Como los primeros módulos en la lista M_1, M_2, \dots son inyectivos, la base de inducción se cumple por vacuidad. Supongamos que la condición (a') es cierta para módulos que están en la restricción $M_i|_{A_0}$ de algún preinyectivo M_i con $1 \leq i \leq \ell$ y supongamos que Z_0 es sumando directo de $M_{\ell+1}|_{A_0}$. Si Z_0 es isomorfo a un sumando directo de la restricción $M_{\ell'}$ para algún $\ell' \in \{1, \dots, \ell\}$, por hipótesis de inducción existen $i < j \leq \ell' < \ell + 1$ con $M_i \cong \tau_0^{-1}(Z_0)$ y $M_j \cong \overline{Z_0}$. Entonces podemos suponer que Z_0 no es isomorfo a un sumando directo de $M_{\ell'}|_{A_0}$ para $\ell' = 1, \dots, \ell$. Consideremos la sucesión que casi se divide que comienza en $M_{\ell+1}$,

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow M_{\ell+1} \longrightarrow E \longrightarrow \tau^{-1}(M_{\ell+1}) \longrightarrow 0.$$

Notamos que la restricción $\varepsilon|_{A_0}$ no puede ser trivial, pues Z_0 es sumando directo de $M_{\ell+1}|_{A_0}$ pero no de $E|_{A_0}$. Entonces por el lema 3.11(b) se tiene que $(\tau^{-1}(M_{\ell+1}))_{\omega} = 0$ y $\varepsilon|_{A_0}$ es una sucesión que casi se divide en A_0 -mod. En particular $M_{\ell+1}|_{A_0}$ es inescindible y por lo tanto $Z_0 \cong M_{\ell+1}|_{A_0}$. Considerando la forma de los levantamientos dada en 3.11, tenemos que $\tau_0^{-1}Z_0 \cong \tau^{-1}(M_{\ell+1}) \cong M_i$ con $i < \ell + 1$ y $M_{\ell+1} \cong \overline{Z_0}$ (es decir, $i < j = \ell + 1$). \square

Como consecuencia de los lemas anteriores 3.11, 3.12 y 3.13 se tiene el siguiente resultado, que es fundamental para nuestros objetivos. Para dos subconjuntos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 de $\mathbf{ind}A_0$ denotamos con $\mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2$ a la menor clase de objetos en A_0 -mod que contiene los representantes de las clases en \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 .

Proposición 3.14 Sean A_0, W_0 y A como en el lema 3.12. Consideremos los subconjuntos de $\mathbf{ind}A_0$ dados por

$$\mathcal{X} = \mathbf{ConL}([W_0]) = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [M] \prec [W_0]\},$$

$$\mathcal{Y} = \mathbf{ConR}([W_0]) = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [W_0] \prec [M]\}.$$

- a) Todo A -módulo posproyectivo se encuentra en la subcategoría $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X} \vee [W_0])$ de A -mod.
- b) Todo A -módulo preinyectivo se encuentra en la subcategoría $\check{\mathcal{U}}([W_0] \vee \mathcal{Y})$ de A -mod.

Demostración. Probamos (a) por pasos.

Paso 1. Supongamos que Z_0 es un A_0 -módulo inescindible tal que $[\tau_0^i(Z_0)] \in \mathcal{X}_0$ para alguna $i \geq 1$. Entonces Z_0 no es isomorfo a sumandos directos de la

restricción a A_0 de A -módulos posproyectivos. Aquellos levantamientos a A -mod de representantes de elementos de \mathcal{X}_0 están conectados por morfismos irreducibles con el módulo $W_0(\rho_s)$, para el morfismo ρ_s correspondiente al levantamiento de alguna ala $\theta(n_s)$ de vértice $[W_0]$. Entonces por el lema 3.12 los levantamientos de elementos de \mathcal{X}_0 están conectados en $\Gamma(A)$ a un objeto que no es posproyectivo, y por lo tanto no pueden ser posproyectivos. Aplicando iteradamente la afirmación (a) probada en el lema 3.13 es claro que si Z_0 es isomorfo a un sumando directo de $N|_{A_0}$ para algún A -módulo posproyectivo N , entonces el levantamiento $\overline{\tau_0^i(Z_0)}$ pertenece a la componente posproyectiva, lo cual es imposible pues $\tau_0^i(Z_0) \in \mathcal{X}_0$. Esto muestra que Z_0 no puede ser isomorfo a un sumando directo de la restricción a A_0 de un posproyectivo.

Paso 2. *Supongamos que Z_0 es un A_0 -módulo inescindible tal que $\tau_0^i(Z_0) \cong W_0$ para algún $i \geq 1$. Entonces Z_0 no es isomorfo a sumandos directos de la restricción a A_0 de A -módulos posproyectivos.* De nuevo por una aplicación sucesiva del lema 3.13(a) basta mostrar que $\overline{W_0}$ no es un A -módulo posproyectivo. Si $\overline{W_0}$ es posproyectivo, entonces no es un A -módulo inyectivo. Por el lema 3.11 la sucesión que casi se divide que inicia en $\overline{W_0}$ es el levantamiento a A -mod de la sucesión que casi se divide en A_0 -mod que inicia en W_0 (como suponemos que $W_0 \cong \tau_0^i(Z_0)$, el módulo W_0 no es inyectivo en A_0 -mod),

$$0 \longrightarrow W_0 \longrightarrow E \longrightarrow \tau_0^{-1}W_0 \longrightarrow 0.$$

Ya que existe un morfismo irreducible $W_0 \rightarrow W_{2,n_1}^1$ en A_0 -mod, se tiene que W_{2,n_1}^1 es sumando directo de la restricción a A_0 -mod de un A -módulo posproyectivo. Esto contradice el paso 1, pues $\tau_0^{-1}[W_{2,n_1}^1] \in \mathcal{X}_0$.

Paso 3. Concluimos finalmente que si Z_0 es isomorfo a un sumando directo de la restricción a A_0 de un A -módulo posproyectivo N , por los pasos anteriores $\tau_0^i[Z_0]$ no está en \mathcal{X}_0 ni es igual al vértice $[W_0]$ para cualquier $i \geq 1$. Por lo tanto $[Z_0] \in \mathcal{X} \cup \{[W_0]\}$, es decir, N pertenece a $\check{U}(\mathcal{X} \vee [W_0])$.

La prueba del inciso (b) es análoga, enseguida damos los detalles. Damos a la componente preinyectiva de A -mod un orden admisible de sus vértices $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ como en el lema 3.13.

Paso 1'. *Supongamos que Z_0 es un A_0 -módulo inescindible tal que $\tau_0^{-i}(Z_0) \in \mathcal{Y}_0$ para alguna $i \geq 1$. Entonces Z_0 no es isomorfo a un sumando directo de la restricción a A_0 de A -módulos preinyectivos.* Los elementos de \mathcal{Y}_0 (vistos como A -módulos) están conectados por morfismos irreducibles con el A -módulo $W_0(\rho_s)$ para el morfismo ρ_s correspondiente a el levantamiento de alguna ala $\theta(n_s)$ de vértice W_0 . Entonces por el lema 3.12 los elementos de \mathcal{Y}_0 están conectados en $\Gamma(A)$ a un vértice no preinyectivo, y por lo tanto no pueden ser preinyectivos. Aplicando iteradamente el lema 3.13(a') es claro que si Z_0 es isomorfo a un sumando directo de $M|_{A_0}$ para algún preinyectivo M , entonces $\tau_0^{-i}(Z_0) \in \mathcal{Y}_0$ pertenece a la componente preinyectiva, lo cual es imposible. Esto muestra que Z_0 no puede ser sumando directo de la restricción a A_0 de un preinyectivo.

Paso 2'. *Supongamos que Z_0 es un A_0 -módulo inescindible tal que $\tau_0^{-i}(Z_0) \cong W_0$ para algún $i \geq 1$. Entonces Z_0 no es isomorfo a un sumando directo de la restricción a A_0 de A -módulos preinyectivos.* De nuevo por una aplicación sucesiva de 3.13(a') basta mostrar que W_0 no es un A -módulo preinyectivo. Pues si W_0 es preinyectivo entonces W_0 no es proyectivo y la sucesión que casi se divide ε que termina en W_0 (que está contenida en \mathcal{I}) se restringe $\varepsilon|_{A_0}$ a una

sucesión que casi se divide en $A_0\text{-mod}$ (lema 3.11(b)). Ya que existe un morfismo irreducible $W_{1,n_1-1}^1 \rightarrow W_0$ en $A_0\text{-mod}$, se tiene que W_{1,n_1-1}^1 es sumando directo de la restricción a $A_0\text{-mod}$ de un A -módulo preinyectivo. Esto contradice el paso 1', pues $\tau^{-1}(W_{1,n_1-1}^1) \in \mathcal{Y}_0$.

Paso 3'. De los pasos 1' y 2' se sigue que ningún elemento a la izquierda de la sección $\{[W_0]\} \cup \mathcal{Y}_0$ aparece como sumando directo de la restricción a A_0 de un A -preinyectivo, lo cual implica que todo A -módulo preinyectivo es un elemento de $\check{\mathcal{U}}([W_0] \vee \mathcal{Y})$. \square

3.4 Levantamiento de funtores.

Estudiamos ahora situaciones en las que funtores de $A_0\text{-mod}$ pueden ser levantados a la categoría extendida $A_0[R]\text{-mod}$. Necesitaremos el siguiente resultado preliminar.

Lema 3.15 *Sean \mathcal{Z} una k -categoría aditiva y $F, G, H : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ funtores. Para una transformación natural de funtores $\eta : F \rightarrow G$ denotamos con $\eta \cdot H : F \circ H \rightarrow G \circ H$ a la transformación natural dada por $(\eta \cdot H)^M = \eta^{H(M)}$ para cada objeto M de \mathcal{Z} . Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

- a) *la transformación natural $\eta \cdot H$ es un isomorfismo de funtores,*
- b) *si $M \in \mathcal{Z}$ es isomorfo a un objeto de la forma $H(N)$ entonces $\eta^M : F(M) \rightarrow G(M)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo en \mathcal{Z} , por naturalidad de η el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F(H(M)) & \xrightarrow{\eta^{H(M)}} & G(H(M)) \\ F(H(f)) \downarrow & & \downarrow G(H(f)) \\ F(H(N)) & \xrightarrow{\eta^{H(N)}} & G(H(N)), \end{array}$$

por lo que en efecto $\eta \cdot H$ es una transformación natural. Por otro lado, si suponemos que $\eta \cdot H$ es un isomorfismo natural y que $s : M \rightarrow H(N)$ es un isomorfismo para algún N en \mathcal{Z} , entonces por naturalidad de η el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{\eta^M} & G(M) \\ F(s) \downarrow & & \downarrow G(s) \\ F(H(N)) & \xrightarrow{\eta^{H(N)}} & G(H(N)), \end{array}$$

es decir, $\eta^M = G(s)^{-1} \eta^{H(N)} F(s)$ es composición de isomorfismos y por lo tanto un isomorfismo. Esto muestra que (a) implica (b), la otra implicación es evidente. \square

Lema 3.16 Sea $\mathcal{Z} \subset A_0\text{-mod}$ una clase de A_0 -módulos. Supongamos que se tienen un funtor aditivo $F_0 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ y una transformación natural de funtores $\eta_0 : F_0 \rightarrow Id_{\mathcal{Z}}$. Observamos que la pareja (F_0, η_0) determina dos transformaciones naturales

$$\eta_0 \cdot F_0, F_0 \cdot \eta_0 : F_0^2 \rightarrow F_0,$$

donde $\eta_0 \cdot F_0$ se obtiene como en el lema anterior y la transformación $F_0 \cdot \eta_0$ está dado por $(F_0 \cdot \eta_0)^{M_0} = F_0(\eta_0^{M_0})$ para un objeto M_0 en \mathcal{Z} . Entonces existen un funtor $F = \overline{F_0} : \check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z}) \rightarrow \check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$ y una transformación natural $\eta = \overline{\eta_0} : F \rightarrow Id_{\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})}$ tales que $F|_{\mathcal{Z}} = F_0$ y $\eta|_{\mathcal{Z}} = \eta_0$. Más aún,

- si $\eta_0 \cdot F_0 : F_0^2 \rightarrow F_0$ es un isomorfismo de funtores entonces $\eta \cdot F$ también es un isomorfismo natural;
- si $\eta_0 \cdot F_0 = F_0 \cdot \eta_0$ entonces $\eta \cdot F = F \cdot \eta$;
- si $\eta_0^{M_0} : F_0(M_0) \rightarrow M_0$ es epimorfismo para cada M_0 en \mathcal{Z} entonces F es un funtor fiel;
- si además de cumplirse (c) el funtor F_0 preserva sucesiones exactas en \mathcal{Z} entonces F preserva sucesiones exactas en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$.

Demostración. Definamos primero el funtor F . Si $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ es un objeto en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$ se toma $F(M)_\omega$ como el pull-back de $|\eta_0^{M_0}|$ y γ_M

$$\begin{array}{ccc} F(M)_\omega & \xrightarrow{\eta_\omega^M} & M_\omega \\ \gamma_{F(M)} \downarrow & & \downarrow \gamma_M \\ |F_0(M_0)| & \xrightarrow{|\eta_0^{M_0}|} & |M_0|. \end{array}$$

Hacemos entonces $F(M) = (F_0(M_0), F(M)_\omega, \gamma_{F(M)})$ y

$$\eta^M = (\eta_0^{M_0}, \eta_\omega^M) : F(M) \rightarrow M.$$

Supongamos que $f : M \rightarrow N$ es un morfismo en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$. Ya que η_0 es una transformación natural, los caminos externos de $F(M)_\omega$ a $|N_0|$ en el siguiente diagrama conmutan ($\gamma_N f_\omega \eta_\omega^M = |f_0| \gamma_M \eta_\omega^M = |\eta_0^{N_0}| |F_0(f_0)| \gamma_{F(M)}$), por lo que existe $F(f)_\omega : F(M)_\omega \rightarrow F(N)_\omega$ que hace conmutar el diagrama completo

$$\begin{array}{ccccc} & & M_\omega & \xrightarrow{f_\omega} & N_\omega \\ & \nearrow \eta_\omega^M & \downarrow \gamma_M & & \nearrow \eta_\omega^N \\ F(M)_\omega & \cdots \cdots \cdots & F(N)_\omega & & \\ \gamma_{F(M)} \downarrow & & \downarrow \gamma_{F(N)} & & \downarrow \gamma_N \\ & \nearrow |\eta_0^{M_0}| & |M_0| & \xrightarrow{|f_0|} & |N_0| \\ & \downarrow \gamma_{F(M)} & \downarrow \gamma_{F(N)} & & \downarrow \gamma_N \\ |F_0(M_0)| & \xrightarrow{|F_0(f_0)|} & |F_0(N_0)| & \nearrow |\eta_0^{N_0}| & \end{array}$$

Denotamos con $F(f)$ al morfismo entre $F(M)$ y $F(N)$ dado por $(F_0(f_0), F(f)_\omega)$.

Supongamos ahora que $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$ son morfismos que se pueden componer. Por unicidad en la propiedad universal del pull-back se tiene que

$$F(fg)_\omega = F(f)_\omega F(g)_\omega.$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & L_\omega & \xrightarrow{g_\omega} & M_\omega & \xrightarrow{f_\omega} & N_\omega \\
& \nearrow \eta_\omega^L & \downarrow \gamma_L & & \nearrow \eta_\omega^M & \downarrow \gamma_M & \nearrow \eta_\omega^N \\
F(L)_\omega & \xrightarrow{F(g)_\omega} & F(M)_\omega & \xrightarrow{F(f)_\omega} & F(N)_\omega & & \\
\downarrow \gamma_{F(L)} & & \downarrow \gamma_{F(M)} & & \downarrow \gamma_{F(N)} & & \downarrow \gamma_N \\
& & |L_0| & \xrightarrow{|g_0|} & |M_0| & \xrightarrow{|f_0|} & |N_0| \\
\downarrow |\eta_0^{L_0}| & & \downarrow |\eta_0^{M_0}| & & \downarrow |\eta_0^{N_0}| & & \\
|F_0(L_0)| & \xrightarrow{|F_0(g_0)|} & |F_0(M_0)| & \xrightarrow{|F_0(f_0)|} & |F_0(N_0)| & &
\end{array}$$

Es claro también que $F(I_M) = I_{F(M)}$ y que F es un functor aditivo pues F_0 lo es. Por construcción se tiene que $f\eta^M = \eta^N F(f)$, es decir, $\eta : F \rightarrow Id_{\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})}$ es una transformación natural. Evidentemente para cualquier M_0 en \mathcal{Z} se tiene $F(M_0)|_{\mathcal{Z}} = F_0(M_0)$ y $\eta^{M_0}|_{\mathcal{Z}} = \eta_0^{M_0}$.

Para mostrar (a) notamos primero que en un diagrama pull-back de k -espacios vectoriales,

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{x} & B \\
y \downarrow & & \downarrow g \\
C & \xrightarrow{f} & D
\end{array}$$

si f es un isomorfismo entonces x es un isomorfismo. En efecto, como f es suprayectivo la siguiente sucesión es exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} B \oplus C \xrightarrow{[g \ -f]} D \longrightarrow 0.$$

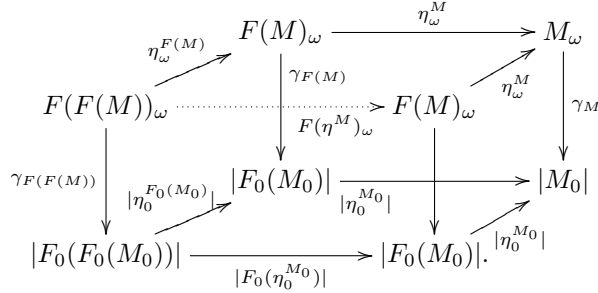
Por lo tanto, si $a \in A$ está en el núcleo de x entonces $0 = g(x(a)) = f(y(a)) = 0$ y $y(a) = 0$ pues f es inyectivo. Entonces a está en el núcleo de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, por lo que $a = 0$. Como $\dim_k(B \oplus C) = \dim_k A + \dim_k D$ y $\dim_k C = \dim_k D$ pues f es isomorfismo, concluimos que $\dim_k A = \dim_k B$ y por lo tanto la transformación inyectiva x es un isomorfismo.

Usando entonces la equivalencia probada en el lema 3.15, debemos mostrar que si $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ es un objeto en $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$ isomorfo a $F(N)$ para algún N en $\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$, entonces η^M es un isomorfismo. Como $M_0 \cong (F(N))_0 = F_0(N_0)$, por hipótesis $\eta_0^{M_0}$ es un isomorfismo, y por lo tanto $|\eta_0^{M_0}|$ también lo es. Como el siguiente diagrama es pull-back,

$$\begin{array}{ccc}
F(M)_\omega & \xrightarrow{\eta_\omega^M} & M_\omega \\
\gamma_{F(M)} \downarrow & & \downarrow \gamma_M \\
|F_0(M_0)| & \xrightarrow{|\eta_0^{M_0}|} & |M_0|,
\end{array}$$

y $|\eta_0^{M_0}|$ es un isomorfismo, por lo anterior η_ω^M , y por lo tanto η^M , son isomorfismos.

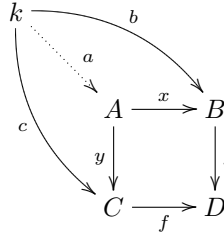
El inciso (b) es inmediato de la definición de $F(\eta^M) = (F_0(\eta_0^{M_0}), F(\eta^M)_\omega)$, como se muestra en el siguiente diagrama



Pues $F(\eta^M)_\omega$ es la única transformación (flecha punteada) que hace conmutar el diagrama anterior y como por hipótesis $F_0(\eta_0^{M_0}) = \eta_0^{F_0(M_0)}$ (y por lo tanto $|F_0(\eta_0^{M_0})| = |\eta_0^{F_0(M_0)}|$), se tiene que $\eta_\omega^{F(M)}$ también hace conmutar el diagrama. De la unicidad en el pull-back se sigue que $\eta_\omega^{F(M)} = F(\eta^M)_\omega$ y

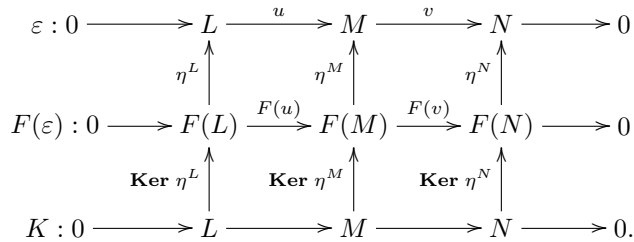
$$F(\eta^M) = (F_0(\eta_0^{M_0}), F(\eta^M)_\omega) = (\eta_0^{F_0(M_0)}, \eta_\omega^{F(M)}) = \eta^{F(M)}.$$

Probamos (c). Notamos que en un diagrama pull-back de k -espacios vectoriales si f es un epimorfismo entonces x es un epimorfismo.



En efecto, para un vector $b \in B$ arbitrario tomamos $c \in C$ tal que $f(c) = g(b)$ (esto es posible pues f es epimorfismo). Se definen entonces las transformaciones $k \rightarrow B$ y $k \rightarrow C$ dadas por $1 \mapsto b$ y $1 \mapsto c$. Entonces el cuadrado externo del diagrama anterior conmuta, por lo que existe $a : k \rightarrow A$ tal que $x(a) = b$. Así x es epimorfismo. Por definición de $\eta^M = (\eta_0^{M_0}, \eta_\omega^M)$ como pull-back, y por lo anterior, como $|\eta_0^{M_0}|$ es epimorfismo ($|-|$ es un funtor exacto) entonces η_ω^M también es epimorfismo. Ya que $f\eta^M = \eta^N F(f)$ y η^M es un epimorfismo tenemos que F es un funtor fiel.

Para verificar (d) supongamos que tenemos una sucesión exacta ε en $\check{U}(\mathcal{Z})$. Por la naturalidad de η el siguiente diagrama es conmutativo, donde el tercer renglón K es la sucesión exacta que se obtiene pasando a núcleos,



Desplegando los módulos M como ternas $(M_0, M_\omega, \gamma_M)$, el diagrama anterior tiene la siguiente forma. Todas las columnas son sucesiones exactas, así como los renglones inferiores ε_0 , $F(\varepsilon)_0$ y K_0 . El primer renglón superior ε_ω es exacto por hipótesis, mientras que el tercer renglón superior K_ω es isomorfo al tercer renglón inferior K_0 por la definición de F a través de pull-backs, ambos exactos. Por el lema del nueve, el segundo renglón superior $F(\varepsilon)_\omega$ también es exacto. Esto prueba que $F(\varepsilon)$ es una sucesión exacta.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & 0 & & 0 \\
& & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow \\
& & & 0 & & 0 & & 0 \\
\varepsilon_\omega : 0 & \longrightarrow & L_\omega & \longrightarrow & M_\omega & \longrightarrow & N_\omega & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\varepsilon_0 : 0 & \longrightarrow & |L_0| & \longrightarrow & |M_0| & \longrightarrow & |N_0| & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F(\varepsilon)_\omega : 0 & \longrightarrow & F(L)_\omega & \longrightarrow & F(M)_\omega & \longrightarrow & F(N)_\omega & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F(\varepsilon)_0 : 0 & \longrightarrow & |F_0(L_0)| & \longrightarrow & |F_0(M_0)| & \longrightarrow & |F_0(N_0)| & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
K_\omega : 0 & \longrightarrow & K^L & \longrightarrow & K^M & \longrightarrow & K^N & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
K_0 : 0 & \longrightarrow & K^L & \longrightarrow & K^M & \longrightarrow & K^N & \longrightarrow & 0 \\
& & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

□

Lema 3.17 Sea $\mathcal{Z} \subseteq A_0\text{-mod}$ una clase de A_0 -módulos. Supongamos que tenemos un functor aditivo $G_0 : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ y una transformación natural de funtores $\eta_0 : Id_{\mathcal{Z}} \rightarrow G_0$. De manera similar que en el caso anterior se tienen dos transformaciones naturales

$$\eta_0 \cdot G_0, G_0 \cdot \eta_0 : G_0 \rightarrow G_0^2.$$

Entonces existen un functor aditivo $G = \overline{G_0} : \check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z}) \rightarrow \check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$ y una transformación natural $\eta = \overline{\eta_0} : Id_{\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})} \rightarrow G$ tales que $G|_{\mathcal{Z}} = G_0$ y $\eta|_{\mathcal{Z}} = \eta_0$. Más aún,

- si $\eta_0 \cdot G_0 : G_0 \rightarrow G_0^2$ es un isomorfismo natural entonces $\eta \cdot G$ es también un isomorfismo de funtores;
- si $\eta_0 \cdot G_0 = G_0 \cdot \eta_0$ entonces $\eta \cdot G = G \cdot \eta$;
- si $\eta_0^{M_0} : M_0 \rightarrow G_0(M_0)$ es monomorfismo para cada M_0 en \mathcal{Z} entonces G es un functor fiel;

d) si G_0 preserva sucesiones exactas en \mathcal{Z} entonces G preserva sucesiones exactas en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$.

Demostración. Para un objeto $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$ definimos $G(M) = (G_0(M_0), M_\omega, \gamma_{G(M)})$ donde $\gamma_{G(M)} = |\eta_0^{M_0}| \gamma_M$. Para un morfismo $g = (g_0, g_\omega) : M \rightarrow N$ hacemos $G(g) = (G_0(g_0), g_\omega)$, ver el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 M_\omega & \xrightarrow{g_\omega} & N_\omega \\
 \downarrow \gamma_M & & \downarrow \gamma_N \\
 |M_0| & \xrightarrow{|g_0|} & |N_0| \\
 \downarrow |\eta_0^{M_0}| & & \downarrow |\eta_0^{N_0}| \\
 |G_0(M_0)| & \xrightarrow{|G_0(g_0)|} & |G_0(N_0)|
 \end{array}$$

$\gamma_{G(M)}$ (curved arrow from M_ω to $|G_0(M_0)|$)
 $\gamma_{G(N)}$ (curved arrow from N_ω to $|G_0(N_0)|$)

Se observa directamente que G es un funtor aditivo. Por otro lado la asignación $\eta^M = (\eta_0^{M_0}, Id_{M_\omega})$ satisface $G(g)\eta^M = \eta^N g$, por lo que η es una transformación natural.

Para probar (a) por el lema 3.15 basta mostrar que si M es isomorfo a un objeto de la forma $G(N)$ entonces η^M es un isomorfismo. Como $\eta^M = (\eta_0^{M_0}, Id_{M_\omega})$, basta verificar que $\eta_0^{M_0}$ es un isomorfismo, lo cual es consecuencia directa de la hipótesis pues $M_0 \cong G_0(N_0)$.

La prueba de (b) es también directa de la definición de $G(\eta^M)$, pues usando la hipótesis se tiene (ver el siguiente diagrama),

$$G(\eta^M) = G(\eta_0^{M_0}, Id_{M_\omega}) = (G_0(\eta_0^{M_0}), Id_{M_\omega}) = (\eta_0^{G_0(M_0)}, Id_{M_\omega}) = \eta^{G(M)},$$

$$\begin{array}{ccc}
 M_\omega & \xrightarrow{Id_{M_\omega}} & G(M)_\omega = M_\omega \\
 \downarrow \gamma_M & & \downarrow \gamma_{G(M)} = |\eta_0^{M_0}| \gamma_M \\
 |M_0| & \xrightarrow{|\eta_0^{M_0}|} & |G_0(M_0)| \\
 \downarrow |\eta_0^{M_0}| & & \downarrow |\eta_0^{G_0(M_0)}| \\
 |G_0(M_0)| & \xrightarrow{|G_0(\eta_0^{M_0})|} & |G_0(G_0(M_0))|
 \end{array}$$

$\gamma_{G(M)}$ (curved arrow from M_ω to $|G_0(M_0)|$)
 $\gamma_{G(G(N))}$ (curved arrow from $G(M)_\omega$ to $|G_0(G_0(M_0))|$)

Para mostrar (c), es claro que si $\eta_0^{M_0}$ es monomorfismo entonces $\eta^M = (\eta_0^{M_0}, Id_{M_\omega})$ es monomorfismo. Como $\eta^M g = G(g)\eta^N$ y η^M es un monomorfismo tenemos que G es un funtor fiel.

Para verificar (d) si $\varepsilon : 0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ es una sucesión exacta en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$, su imagen bajo G tiene la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & L_\omega & \longrightarrow & M_\omega & \longrightarrow & N_\omega \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma_{G(L)} & & \downarrow \gamma_{G(M)} & & \downarrow \gamma_{G(N)} \\
 0 & \longrightarrow & |G_0(L_0)| & \longrightarrow & |G_0(M_0)| & \longrightarrow & |G_0(N_0)| \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Por definición de exactitud en ε el renglón superior del diagrama es exacto. Como G_0 preserva sucesiones exactas y $|-|$ es un funtor exacto, el renglón inferior también es exacto, por lo que $G(\varepsilon)$ es una sucesión exacta en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{Z})$. \square

3.5 Mapeos universales y rango.

De nuevo sean $A_0 = T_{S_0}(L_0)$ el álgebra de caminos de un diagrama de Dynkin Δ (donde L_0 es el S_0 - S_0 -bimódulo de flechas de Δ), $A = A_0[R] \cong k\tilde{\Delta}$ la extensión de un punto de A_0 a través de R (como en el lema 3.8) y W_0 un A_0 -módulo inescindible con $\underline{\dim}M_0$ la raíz positiva máxima de Δ . Para un A_0 -módulo M_0 denotamos con $\sharp M_0$ al número de sumandos inescindibles de M_0 . Sean m_{M_0} la multiplicidad de W_0 en M_0 y e_{M_0} el número de sumandos inescindibles de M_0 no isomorfos a W_0 (de manera que $\sharp M_0 = m_{M_0} + e_{M_0}$). Definimos el **rango** de un A -módulo inescindible $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ como

$$\mathbf{rk}(M) = \mathbf{dim}_k M_\omega - m_{M_0}.$$

Uno de nuestros intereses principales es determinar el comportamiento del rango respecto a la traslación de Auslander-Reiten en A -mod. La herramienta a utilizar son los mapeos universales definidos en Ringel [24, sección 3.4(17)] y sus levantamientos como en la sección anterior.

El siguiente lema y el corolario 3.26 corresponden al teorema 11.5 de Gabriel y Roiter [13]. Recordamos que $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ es la subcategoría plena de $\check{\mathcal{U}}(A_0\text{-mod})$ determinada por los objetos de la forma $M = (M_0, M_\omega, \gamma_M)$ con M_0 en la clase de objetos $\langle X_0 \rangle$ formada con X_0 (comparar con la notación dada después del lema 3.1).

Lema 3.18 Subcategoría de Kronecker. *Sean B la subálgebra de $A = A_0[R]$ dada por $B = A_0[0]$ y W el B -módulo $W = W_0 \oplus S(\omega)$, donde W_0 es un A_0 -módulo inescindible de dimensión vectorial máxima y $S(\omega)$ es el simple de vértice ω . Consideremos la ditálgebra $\mathcal{A} = (A, 0)$ con diferencial cero. Entonces la ditálgebra reducida \mathcal{A}^W es isomorfa al álgebra de Kronecker clásica A_2 (con diferencial cero). El functor asociado a la reducción F^W es una equivalencia de categorías*

$$A_2\text{-mod} \xrightarrow{F^W} \check{\mathcal{U}}(W_0).$$

Las imágenes de las componentes posproyectiva \mathcal{P} y preinyectiva \mathcal{I} de \mathcal{A}^W -mod bajo F^W serán denotadas mediante \mathcal{P}_0 e \mathcal{I}_0 respectivamente.

Demostración. Como W_0 es un A_0 -módulo excepcional (lema 1.34)(a) y $Z_0 = \mathbf{End}_{A_0}(W_0)^{op} \cong k$ (lema 1.14), el módulo W_0 es A_0 -admisibile. El álgebra reducida $A_0^{W_0} = T_{Z_0}(0)$ es entonces isomorfa al campo k (con diferencial cero). Por la proposición 3.6 y el lema 3.3 el álgebra tensorial reducida A^W es isomorfa a

$$A_0^{W_0}[R^{W_0}] \cong k[R^{W_0}] = T_{\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, por el lema 3.9, el k -espacio vectorial $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)^*$ tiene dimensión dos, por lo que existe un isomorfismo entre la extensión $A_0^{W_0}[R^{W_0}]$ y el álgebra de Kronecker clásica $\widetilde{\mathbf{A}}_1 = A_2$. Finalmente observamos que la diferencial reducida δ^W es cero, debido a la proposición 3.6 y a que el morfismo ε del lema 3.4 es cero (pues $P_0 = 0$).

El functor asociado a la reducción $F^W : \mathcal{A}^W\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ es fiel y pleno (proposición A.26) y su imagen es la subcategoría plena de $\mathcal{A}\text{-mod}$ dada por los

módulos M cuya restricción a B se encuentra en $\langle W_0 \oplus S(\omega) \rangle$ (lema A.27), es decir, $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. \square

Los **mapeos universales** a considerar son los funtores

$$F_0 = W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, -) : A_0\text{-mod} \longrightarrow A_0\text{-mod},$$

$$G_0 = W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(-, W_0) : A_0\text{-mod} \longrightarrow A_0\text{-mod}.$$

Sus levantamientos, que resultan ser proyecciones en la subcategoría de Kronecker $\check{\mathcal{U}}(W_0)$, determinan el comportamiento del rango en las componentes preinyectiva \mathcal{I} y posproyectiva \mathcal{P} de $A\text{-mod}$.

Lema 3.19 *Consideremos el funtor*

$$F_0 = W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, -) : A_0\text{-mod} \longrightarrow A_0\text{-mod}.$$

Dado un módulo M_0 en la categoría $A_0\text{-mod}$ se define el **mapeo universal derecho** $\eta_0^{M_0} : F_0(M_0) \rightarrow M_0$ como la evaluación $w \otimes f \mapsto f(w)$. Entonces $\eta_0 : F_0 \rightarrow Id_{A_0\text{-mod}}$ es una transformación natural y

a) $\eta_0 \cdot F_0$ es un isomorfismo de funtores,

b) $\eta_0 \cdot F_0 = F_0 \cdot \eta_0$.

Restringimos el funtor F_0 y la transformación η_0 a la subcategoría $\mathcal{Z} = W_0 \vee \mathcal{Y}$ de $A_0\text{-mod}$, donde \mathcal{Y} es la clase de A_0 -módulos formada por representantes del conjunto $\mathbf{ConR}([W_0]) = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [W_0] \prec [M]\}$. Entonces

c) $\eta_0^{M_0}$ es epimorfismo para cada M_0 en \mathcal{Z} , y

d) F_0 preserva sucesiones exactas en \mathcal{Z} .

Demostración. Observamos que η_0 es una transformación natural, pues

$$\eta_0^{N_0}(F_0(f)(w \otimes h)) = \eta_0^{N_0}(w \otimes fh) = f(h(w)) = f(\eta_0^{M_0}(w \otimes h)),$$

es decir, el siguiente cuadrado es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} F_0(M_0) & \xrightarrow{F_0(f)} & F_0(N_0) \\ \eta_0^{M_0} \downarrow & & \downarrow \eta_0^{N_0} \\ M_0 & \xrightarrow{f} & N_0. \end{array}$$

Consideremos ahora las siguientes transformaciones

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{End}_{A_0}(W_0) \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) & & \\ \downarrow \Phi & \searrow \Psi & \\ \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0)) & & \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) \\ & \nearrow \mathbf{Hom}(W_0, \eta_0^{M_0}) & \end{array}$$

dadas para morfismos $f \in \mathbf{End}_{A_0}(W_0)$, $g \in \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0)$ y un elemento w de W_0 de la siguiente manera: $\Phi(f \otimes g)(w) = f(w) \otimes g$ y $\Psi(f \otimes g) = gf$. Notamos que el diagrama anterior es conmutativo, pues por definición de $\eta_0^{M_0}$

$$\begin{array}{ccc} W_0 \otimes_R \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) & \xrightarrow{\eta_0^{M_0}} & M_0, \\ w \otimes f & \longmapsto & f(w), \end{array}$$

se tiene $\eta_0^{M_0}(\Phi(f \otimes g)(w)) = \eta_0^{M_0}(f(w) \otimes g) = g(f(w)) = \Psi(f \otimes g)(w)$. Ya que $\mathbf{End}_{A_0}(W_0) \cong k$ y como Ψ es epimorfismo entre espacios vectoriales de la misma dimensión, Ψ es isomorfismo. Como el diagrama conmuta, Φ es un monomorfismo entre espacios de la misma dimensión, y por lo tanto Φ también es isomorfismo.

Aplicando el funtor $W_0 \otimes -$ al diagrama anterior tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} W_0 \otimes_k \mathbf{End}_{A_0}(W_0) \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) & & \\ \downarrow Id_{W_0} \otimes \Phi & \searrow Id_{W_0} \otimes \Psi & \\ W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0)) & \xrightarrow{F_0(\eta_0^{M_0})} & W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) \end{array}$$

pues $F_0(\eta_0^{M_0}) = Id_{W_0} \otimes \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, \eta_0^{M_0})$. Observamos que el diagrama anterior también conmuta cuando se sustituye $F_0(\eta_0^{M_0})$ por el morfismo $\eta_0^{F_0(M_0)}$. En efecto, por un lado, usando la notación f , g y w dada antes, se tiene

$$\eta_0^{F_0(M_0)}([Id_{W_0} \otimes \Phi](w \otimes f \otimes g)) = \eta_0^{F_0(M_0)}(w \otimes \Phi(f \otimes g)) = \Phi(f \otimes g)(w) = f(w) \otimes g.$$

Por otro lado $[Id_{W_0} \otimes \Psi](w \otimes f \otimes g) = w \otimes \Psi(f \otimes g) = w \otimes gf$, y como el álgebra de endomorfismos $\mathbf{End}_{A_0}(W_0)$ es isomorfa al campo k la igualdad $f(w) \otimes g = w \otimes gf$ es evidente. Entonces $\eta_0^{F_0(M_0)} = [Id_{W_0} \otimes \Psi][Id_{W_0} \otimes \Phi]^{-1}$ es un isomorfismo y $\eta_0^{F_0(M_0)} = F_0(\eta_0^{M_0})$. Esto prueba los incisos (a) y (b).

Claramente $\eta_0^{M_0}$ es un epimorfismo para módulos M_0 en $\mathcal{Z} = W_0 \vee \mathcal{Y}$ (inciso (c)) pues los módulos en \mathcal{Y} son generados por W_0 (es decir, existe un epimorfismo $h : rW_0 = \bigoplus_{i=1}^r W_0 \rightarrow M_0$, lema 2.12), $\eta_0^{W_0}$ es un isomorfismo y η_0 es una transformación natural,

$$\begin{array}{ccc} r[W_0 \otimes_R \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, W_0)] & \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^r \eta_0^{W_0}} & rW_0 \\ \cong \downarrow & & \parallel \\ W_0 \otimes_R \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, rW_0) & \xrightarrow{\eta_0^{rW_0}} & rW_0 \\ F_0(h) \downarrow & & \downarrow h \\ W_0 \otimes_R \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) & \xrightarrow{\eta_0^{M_0}} & M_0. \end{array}$$

Para mostrar que F_0 preserva sucesiones exactas supongamos que ε es una sucesión exacta en \mathcal{Z} ,

$$\varepsilon = 0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0.$$

Usamos las fórmulas de Auslander-Reiten en el caso hereditario [1, corolario IV.2.14]

$$\mathbf{Ext}_{A_0}^1(W_0, M_0) \cong D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, \tau W_0)$$

y el hecho de que $\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, \tau W_0) = 0$ pues $M_0 \in \mathcal{Y}$ y $\tau W_0 \in \mathcal{X}$ (ver proposición 3.14 y lema 2.12, y usar 1.29 y el que $\Gamma(A_0)$ es dirigido). Entonces $\mathbf{Hom}(W_0, \varepsilon)$ es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, M_0) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, E_0) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, N_0) \longrightarrow 0.$$

Como $Id_{W_0} \otimes -$ es un funtor exacto se concluye que $F_0(\varepsilon) = Id_{W_0} \otimes \mathbf{Hom}(W_0, \varepsilon)$ es una sucesión exacta, por lo que se tiene (d). \square

Denotamos con (\leftarrow, η) al levantamiento de (F_0, η_0) a $\check{\mathcal{U}}(W_0 \vee \mathcal{Y})$. Por el lema 3.16 el funtor

$$F = \overline{W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, -)} : \check{\mathcal{U}}(W_0 \vee \mathcal{Y}) \longrightarrow \check{\mathcal{U}}(W_0)$$

es aditivo, fiel, preserva sucesiones exactas y su restricción a $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ es plena y densa.

Lema 3.20 *Supongamos que $0 \longrightarrow \tau Q \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} Q \longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se divide en $\check{\mathcal{U}}(W_0 \vee \mathcal{Y})$. Si $Q \in \check{\mathcal{U}}(W_0)$ entonces \overleftarrow{f} es un morfismo que casi se divide por la derecha en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. De lo contrario \overleftarrow{f} es una retracción.*

Demostración. Consideremos el mapeo universal derecho η de la sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overleftarrow{\tau Q} & \xrightarrow{\overleftarrow{g}} & \overleftarrow{E} & \xrightarrow{\overleftarrow{f}} & \overleftarrow{Q} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \eta^{\tau Q} & & \downarrow \eta^E & \nearrow t & \downarrow \eta^Q \\ 0 & \longrightarrow & \tau Q & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{f} & Q \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si Q no está en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ entonces η^Q no es retracción, por lo que existe $t : \overleftarrow{Q} \rightarrow E$ tal que $ft = \eta^Q$. Así $\overleftarrow{\eta^Q} = \overleftarrow{f} \overleftarrow{t}$. Por los incisos (a) y (b) de los lemas 3.19 y 3.16 se tiene que $\overleftarrow{\eta^Q} = \eta^{\overleftarrow{Q}}$ es un isomorfismo. Por lo tanto \overleftarrow{f} es una retracción.

Supongamos ahora que Q está en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. Entonces η^Q es un isomorfismo y $(\eta^Q)^{-1}f$ no es retracción, pues f no es retracción y para $s : \overleftarrow{Q} \rightarrow E$, tenemos $(\eta^Q)^{-1}fs = Id_{\overleftarrow{Q}}$ si y solo si $fs(\eta^Q)^{-1} = Id_Q$. Por lo tanto $\overleftarrow{f} = (\eta^Q)^{-1}f\eta^E$ no es retracción. Supongamos por otro lado que V es un objeto en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ y que

$v : V \rightarrow \overleftarrow{Q}$ no es una retracción,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overleftarrow{Q} & \xleftarrow{\overleftarrow{v}} & \overleftarrow{V} \\
 & & \downarrow \eta^{\overleftarrow{Q}} & & \downarrow \eta^V \\
 \overleftarrow{E} & \xrightarrow{\overleftarrow{f}} & \overleftarrow{Q} & \xleftarrow{v} & V \\
 \downarrow \eta^E & & \downarrow \eta^Q & & \\
 E & \xrightarrow{f} & Q & &
 \end{array}$$

Como $\eta^Q v$ no es retracción y f casi se divide por la derecha, existe $s : V \rightarrow E$ tal que $\eta^Q v = fs$. Así, usando de nuevo que $\eta^{\overleftarrow{Q}} = \overleftarrow{\eta^Q}$ (lema 3.16(b)) y la conmutatividad del diagrama anterior se tiene que $v\eta^V = \eta^{\overleftarrow{Q}}\overleftarrow{v} = \overleftarrow{\eta^Q}\overleftarrow{v} = \overleftarrow{f}\overleftarrow{s}$, por lo que $v = \overleftarrow{f}\overleftarrow{s}(\eta^V)^{-1}$. Es decir, \overleftarrow{f} casi se divide por la derecha. \square

Lema 3.21 Sean \mathcal{I} la componente preinyectiva de $A\text{-mod}$ e \mathcal{I}_0 el subconjunto de \mathcal{I} dado en el lema 3.18. Denotemos con $I(\omega)$ e I a las imágenes bajo F^W del \mathcal{A}^W -inyectivo simple e inescindible no simple respectivamente (lema 3.18). Para $i \in \{1, \dots, n, \omega\}$ sea $J(i)$ el A -módulo inyectivo $D(e_i A)$ (ver lema 3.10). Entonces $I(\omega) = J(\omega) = S(\omega)$ e $I = \overline{W_0}$. Además,

- Si $w_0 = \underline{\dim} W_0$ es la raíz positiva máxima del diagrama de Dynkin Δ , entonces $\overleftarrow{J}(\omega) \cong I(\omega)$ y $\overleftarrow{J}(i) \cong (w_0)_i I$ para $i = 1, \dots, n$.
- Para todo $[M] \in \mathcal{I}$ se tiene que \overleftarrow{M} es un objeto en $\langle \mathcal{I}_0 \rangle$.
- La función $\sharp(\overleftarrow{\cdot}) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}$ es aditiva.

Demostración. Consideremos los \mathcal{A}^W -módulos inescindibles inyectivos $\widehat{I}(\omega)$, \widehat{I} , con $\widehat{I}(\omega)$ simple e $\widehat{I} = k^2 \xrightarrow[a]{a} k$ donde $a = [1 \ 0]$ y $b = [0 \ 1]$. Entonces $I(\omega) = F^W(\widehat{I}(\omega)) = S(\omega)$ y $F^W(\widehat{I})$ está dado por (W_0, k^2, γ_I) con la acción de $\gamma_I : k^2 \rightarrow |W_0| = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0) \cong k^2$ inducida por a y b , por lo que γ_I es un isomorfismo. Entonces $I = F^W(\widehat{I}) \cong \overline{W_0}$.

Para mostrar (a) primero observamos que para $i = 1, \dots, n, \omega$ el inyectivo $J(i)$ se encuentra en $\mathcal{U}(W_0 \vee \mathcal{Y})$ (por lo que se puede aplicar $\overleftarrow{\cdot}$ a $J(i)$), pues por el lema 3.10 la restricción $J(i)|_{A_0}$ es un A_0 -módulo inyectivo. Claramente $\overleftarrow{J}(\omega) \cong I(\omega)$. Para $i = 1, \dots, n$ existen isomorfismos $D(W_0)e_i \cong D(e_i W_0)$, por lo que

$$\begin{aligned}
 \dim_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, J(i)_0) &= \dim_k \mathbf{Hom}(W_0, D(e_i A_0)) = \\
 &= \dim_k \mathbf{Hom}(e_i A_0, D(W_0)) = \\
 &= \dim_k D(W_0)e_i = \dim_k e_i W_0 = \\
 &= (w_0)_i.
 \end{aligned}$$

Así tenemos que la multiplicidad de W_0 en $(\overleftarrow{J}(i))_0$ es $m_{(\overleftarrow{J}(i))_0} = (w_0)_i$, pues $(\overleftarrow{J}(i))_0 = F_0(J(i)_0) = W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, J(i)_0)$. Usando el lema 3.9 se tiene

$\dim_k |\overleftarrow{J(i)}_0| = \dim_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, \overleftarrow{J(i)}_0) = 2(w_0)_i$. Como $J(i)$ es inyectivo (isomorfo a $\overline{J(i)}_0$ por el lema 3.10), $\overleftarrow{J(i)}$ se obtiene mediante un pull-back de la forma

$$\begin{array}{ccc} \overleftarrow{J(i)}_\omega & \xrightarrow{\eta_\omega^{J(i)}} & J_\omega^i \\ \gamma_{\overleftarrow{J(i)}} \downarrow & & \parallel \\ |\overleftarrow{J(i)}_0| & \xrightarrow[|\eta_0^{J(i)_0}|]{} & |J(i)_0|. \end{array}$$

Debido a que $|\eta_0^{J(i)_0}|$ es un epimorfismo, por el argumento dado en la prueba del lema 3.16(a) se tiene que $\gamma_{\overleftarrow{J(i)}}$ es un isomorfismo. Por lo tanto $\overleftarrow{J(i)} \cong (w_0)_i I$.

El inciso (b) se obtiene inductivamente del lema anterior. Consideremos la ordenación de módulos preinyectivos inescindibles dada en el lema 3.13, M_1, M_2, M_3, \dots . Como base de inducción, por el inciso (a) la afirmación es cierta para los A -módulos inyectivos inescindibles (que son los primeros en tal ordenación). Supongamos que el enunciado es cierto para los preinyectivos M_1, \dots, M_i y mostrémoslo para M_{i+1} . Por las propiedades de esta ordenación, la sucesión que casi se divide que comienza en M_{i+1} ,

$$\varepsilon : 0 \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} M_\ell \longrightarrow 0,$$

satisface $\ell < i+1$ y para cada M_j isomorfo a un sumando directo de E se tiene $j < i+1$. Por el lema 3.20, si M_ℓ no está en la subcategoría de Kronecker $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ entonces $\overleftarrow{\varepsilon}$ es una sucesión trivial. Por lo tanto $\overleftarrow{M_{i+1}} \in \langle \mathcal{I}_0 \rangle$ pues por hipótesis inductiva $\overleftarrow{E} \in \langle \mathcal{I}_0 \rangle$. Supongamos ahora que M_ℓ es un objeto en la subcategoría $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ (y por lo tanto $\eta^{M_\ell} : \overleftarrow{M_\ell} \rightarrow M_\ell$ es un isomorfismo por el lema 3.16 y la equivalencia 3.15(b)). Por los lemas 3.20 y 1.19, $\overleftarrow{\varepsilon}$ es isomorfa a una sucesión de la forma

$$\overleftarrow{\varepsilon} \cong 0 \longrightarrow P \oplus E'' \xrightarrow{\begin{bmatrix} \mathbf{Ker} f' & 0 \\ 0 & I_{E''} \end{bmatrix}} E' \oplus E'' \xrightarrow{[f' \ 0]} M_\ell \longrightarrow 0,$$

donde $0 \longrightarrow P \longrightarrow E' \xrightarrow{f'} M_\ell \longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se divide en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$, y por lo tanto $[P] \in \mathcal{I}_0$. Por inducción $E' \oplus E'' \cong \overleftarrow{E} \in \langle \mathcal{I}_0 \rangle$, por lo que $E'' \in \langle \mathcal{I}_0 \rangle$ y $\overleftarrow{M_{i+1}} \cong P \oplus E'' \in \langle \mathcal{I}_0 \rangle$.

El inciso (c) es evidente para sucesiones que casi se dividen ε tales que $\overleftarrow{\varepsilon}$ es trivial. Cuando $\overleftarrow{\varepsilon}$ no es una sucesión trivial, el término final M_ℓ de ε es isomorfo a $\overleftarrow{M_\ell}$ y de nuevo por el lema 1.19, $\overleftarrow{\varepsilon}$ es isomorfa a una sucesión como arriba.

Pero las sucesiones de Auslander-Reiten $0 \longrightarrow P \longrightarrow E' \xrightarrow{f'} M_\ell \longrightarrow 0$ en la componente preinyectiva de la subcategoría de Kronecker satisfacen $\sharp M_\ell + \sharp P = \sharp E'$ (ver descripción de la componente preinyectiva \mathcal{I}_0 al final de la sección 2.1). Ya que \leftarrow es un funtor aditivo,

$$\sharp M_{i+1} + \sharp M_\ell = \sharp E'' + \sharp P + \sharp M_\ell = \sharp E'' + \sharp E' = \sharp E,$$

es decir, $\sharp(\overleftarrow{\cdot})$ es una función aditiva en \mathcal{I} . \square

Lema 3.22 *Consideremos ahora el funtor*

$$G_0 = W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(-, W_0) : A_0\text{-mod} \longrightarrow A_0\text{-mod}.$$

Para cada A_0 -módulo M_0 fijamos una base $\alpha_1, \dots, \alpha_u$ del k -espacio vectorial $\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$ y definimos $\eta_0^{M_0} : M_0 \rightarrow G_0(M_0)$ como $m \mapsto \sum_{i=1}^u \alpha_i(m) \otimes \alpha_i^*$. El elemento $\eta_0^{M_0}(m)$ no depende de la elección de la base $\alpha_1, \dots, \alpha_u$. Entonces $\eta_0 : Id_{A_0\text{-mod}} \rightarrow G_0$ es una transformación natural bien definida y

- a) $\eta_0 \cdot G_0$ es un isomorfismo de funtores,
- b) $\eta_0 \cdot G_0 = G_0 \cdot \eta_0$.

Restringimos el funtor G_0 y la transformación η_0 a la subcategoría $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \vee W_0$ de $A_0\text{-mod}$, donde \mathcal{X} es la clase de A_0 -módulos generada por representantes del conjunto $\mathbf{ConL}([W_0]) = \{[M] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [M] \prec [W_0]\}$. Entonces

- c) $\eta_0^{M_0}$ es monomorfismo para cada M_0 en \mathcal{Z} , y
- d) G_0 preserva sucesiones exactas en \mathcal{Z} .

Demostración. Sea $f_0 : M_0 \rightarrow N_0$ un morfismo y fijemos una base $\{\beta_1, \dots, \beta_v\}$ del espacio $\mathbf{Hom}_{A_0}(N_0, W_0)$. Ya que $\beta_j f_0 \in \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$ para cada j , existen $\lambda_{ij} \in k$ tales que $\beta_j f_0 = \sum_{i=1}^u \lambda_{ij} \alpha_i$. Por otro lado, el morfismo

$$D\mathbf{Hom}_{A_0}(f_0, W_0) : D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0) \rightarrow D\mathbf{Hom}_{A_0}(N_0, W_0),$$

está dado en la base $\{\alpha_i^*\}_{i=1}^u$ de $D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$ por $\alpha_i^* \mapsto [g \mapsto \alpha_i^*(gf_0)]$. Notamos entonces que $D\mathbf{Hom}_{A_0}(f_0, W_0)[\alpha_i^*] = \sum_{j=1}^v \lambda_{ij} \beta_j^*$, pues evaluando en la base $\{\beta_j\}_{j=1}^v$ se tiene

$$D\mathbf{Hom}_{A_0}(f_0, W_0)[\alpha_i^*](\beta_j) = \alpha_i^*(\beta_j f_0) = \alpha_i^*\left(\sum_{\ell=1}^u \lambda_{\ell j} \alpha_\ell\right) = \lambda_{ij}.$$

Queremos verificar que el siguiente cuadrado conmuta

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{f_0} & N_0 \\ \eta_0^{M_0} \downarrow & & \downarrow \eta_0^{N_0} \\ G_0(M_0) & \xrightarrow{G_0(f_0)} & G_0(N_0). \end{array}$$

Para un $m \in M_0$ se tiene

$$\begin{aligned} G_0(f_0)\eta_0^{M_0}(m) &= [Id_{W_0} \otimes D\mathbf{Hom}(f_0, W_0)] \left(\sum_{i=1}^u \alpha_i(m) \otimes \alpha_i^* \right) = \\ &= \sum_{i=1}^u \alpha_i(m) \otimes \left(\sum_{j=1}^v \lambda_{ij} \beta_j^* \right) = \sum_{j=1}^v \left(\sum_{i=1}^u \lambda_{ij} \alpha_i(m) \right) \otimes \beta_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^v \beta_j(f_0(m)) \otimes \beta_j^* = \eta_0^{N_0}(f_0(m)). \end{aligned}$$

Así, la asignación $\eta_0 : Id_{A_0\text{-mod}} \rightarrow \tilde{G}_0$ es una transformación natural bien definida. Veamos que el morfismo $\eta_0^{M_0}$ no depende de la elección de base: sean $H := \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$, $m \in M_0$ y consideremos el morfismo φ dado en A.14,

$$\begin{aligned} \mathbf{End}_k(H) &\xrightarrow{\varphi^{-1}} H \otimes_k DH \xrightarrow{\varepsilon_m \otimes 1} W_0 \otimes_k DH, \\ I_H &\longmapsto \sum_i \alpha_i \otimes \alpha_i^* \\ \alpha \otimes h &\longmapsto \alpha(m) \otimes h, \end{aligned}$$

donde claramente la elección $\varphi^{-1}(I_H) = \sum_i \alpha_i \otimes \alpha_i^*$ no depende de la elección de base y $\eta_0^{M_0}(m) = (\varepsilon_m \otimes 1)\varphi^{-1}(I_H)$.

Para mostrar los incisos (a) y (b) consideramos los morfismos

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{End}_{A_0}(W_0) \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0) & & \\ \downarrow \tilde{\Phi} & \searrow \tilde{\Psi} & \\ \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0) & & \\ \uparrow \mathbf{Hom}(\eta_0^{M_0}, W_0) & & \\ \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0), W_0) & & \end{array}$$

definidos de la siguiente manera. Para elementos $f \in \mathbf{End}_{A_0}(W_0)$ y $g \in \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$ se definen $\tilde{\Psi}(f \otimes g) = fg$ y el morfismo $\tilde{\Phi}(f \otimes g)(w \otimes h) = h(fg)w$ para $w \in W_0$ y $h \in D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$. Como el álgebra $\mathbf{End}_{A_0}(W_0)$ es isomorfa al campo k , tanto $\tilde{\Psi}$ como $\tilde{\Phi}$ son isomorfismos. Verificamos que el diagrama anterior es conmutativo: para $m \in M_0$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}_{A_0}(\eta_0^{M_0}, W_0)(\tilde{\Phi}(f \otimes g))(m) &= \tilde{\Phi}(f \otimes g) \left(\sum_{i=1}^u \alpha_i(m) \otimes \alpha_i^* \right) = \\ &= \sum_{i=1}^u \alpha_i^*(fg) \alpha_i(m) = \\ &= f(g(m)) = \tilde{\Psi}(f \otimes g)(m). \end{aligned}$$

Aplicando el funtor $W_0 \otimes_k D(-)$ al diagrama anterior se obtiene el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} W_0 \otimes_k D[\mathbf{End}_{A_0}(W_0) \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)] & & \\ \uparrow Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Phi} & \swarrow Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Psi} & \\ W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0) & & \\ \downarrow G_0(\eta_0^{M_0}) & & \\ W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0), W_0) & & \end{array}$$

Mostraremos que al cambiar $G_0(\eta_0^{M_0})$ por $\eta_0^{G_0(M_0)}$ en el diagrama anterior se sigue teniendo conmutatividad. Tomemos una base dual $(f_i, f_i^*)_{i=1}^u$ del k -espacio vectorial $\mathbf{Hom}_{A_0}(W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0), W_0)$. Por un lado, para

un elemento $w \in W_0$ y una función $h \in D\mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$ se tiene que $[Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Psi}](w \otimes h) = w \otimes (h \circ \tilde{\Psi})$. Por otro lado

$$\begin{aligned} [Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Phi}]\eta_0^{G_0(M_0)}(w \otimes h) &= [Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Phi}]\left(\sum_{i=1}^u f_i(w \otimes h) \otimes f_i^*\right) = \\ &= \sum_{i=1}^u f_i(w \otimes h) \otimes (f_i^* \circ \tilde{\Phi}). \end{aligned}$$

Debemos mostrar entonces que la expresión $w \otimes (h \circ \tilde{\Psi})$ es igual a la expresión $\sum_{i=1}^u f_i(w \otimes h) \otimes (f_i^* \circ \tilde{\Phi})$. Para ello consideremos el isomorfismo K dado por

$$\begin{array}{ccc} W_0 \otimes_k D[\mathbf{End}_{A_0}(W_0) \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)], & & w \otimes H \\ & \downarrow K & \downarrow K \\ \mathbf{Hom}_k([\mathbf{End}_{A_0}(W_0) \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)], W_0), & & [f \otimes g \mapsto H(f \otimes g)w]. \end{array}$$

Para $f \in \mathbf{End}_{A_0}(W_0)$ y $g \in \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0)$ se tiene pues que

$$\begin{aligned} K\left(\sum_{i=1}^u f_i(w \otimes h) \otimes (f_i^* \circ \tilde{\Phi})\right)(f \otimes g) &= \sum_{i=1}^u f_i^*(\tilde{\Phi}(f \otimes g))f_i(w \otimes h) = \\ &= \tilde{\Phi}(f \otimes g)(w \otimes h) = h(fg)w, \end{aligned}$$

mientras que

$$K(w \otimes (h \circ \tilde{\Psi}))(f \otimes g) = h(\tilde{\Psi}(f \otimes g))w = h(fg)w.$$

Por lo tanto el diagrama anterior (sustituyendo $G_0(\eta_0^{M_0})$ por $\eta_0^{G_0(M_0)}$) es conmutativo y tenemos (b). Ya que $Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Psi}$ y $Id_{W_0} \otimes D\tilde{\Phi}$ son ambos isomorfismos, tenemos que $G_0(\eta_0^{M_0})$ y $\eta_0^{G_0(M_0)}$ también son isomorfismos, lo que muestra (a).

Nos restringimos ahora a la clase $\mathcal{X} \vee W_0$ de A_0 -módulos. Ahí todo módulo M_0 es cogenerado por W_0 (lema 2.12) por lo que $\eta_0^{M_0}$ es un monomorfismo (inciso (c)). Finalmente probamos que G_0 preserva sucesiones exactas. Supongamos que ε es una sucesión exacta en \mathcal{Z} ,

$$\varepsilon = 0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow E_0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow 0.$$

Usamos las fórmulas de Auslander-Reiten en el caso hereditario

$$\mathbf{Ext}_{A_0}^1(N_0, W_0) \cong D\mathbf{Hom}_{A_0}(\tau^{-1}W_0, N_0)$$

y el hecho de que $\mathbf{Hom}_{A_0}(\tau^{-1}W_0, N_0) = 0$ pues $[N_0] \in \mathcal{X}$ y $[\tau^{-1}W_0] \in \mathcal{Y}$. Entonces $\mathbf{Hom}_{A_0}(\varepsilon, W_0)$ es una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{A_0}(N_0, W_0) \rightarrow \mathbf{Hom}_{A_0}(E_0, W_0) \rightarrow \mathbf{Hom}_{A_0}(M_0, W_0) \rightarrow 0.$$

Como $Id_{W_0} \otimes D(-)$ es un functor exacto se concluye que $G_0(\varepsilon) = Id_{W_0} \otimes D\mathbf{Hom}_{A_0}(\varepsilon, W_0)$ es una sucesión exacta, por lo que se tiene (d). \square

Sea (\rightarrow, η) el levantamiento de (G_0, η_0) a $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X} \vee W_0)$. Por el lema 3.17 tenemos un functor aditivo y fiel que preserva sucesiones exactas

$$G = \overline{W_0 \otimes D\mathbf{Hom}_{A_0}(-, W_0)} : \check{\mathcal{U}}(\mathcal{X} \vee W_0) \rightarrow \check{\mathcal{U}}(W_0),$$

y cuya restricción a $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ es plena y densa.

Lema 3.23 *Supongamos que $0 \longrightarrow P \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} \bar{\tau}P \longrightarrow 0$ es una sucesión que casi se divide en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X} \vee W_0)$. Si $P \in \check{\mathcal{U}}(W_0)$ entonces \vec{g} es un morfismo que casi se divide por la izquierda en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. De lo contrario \vec{g} es una sección.*

Demostración. Consideremos el diagrama dado por los mapeos universales,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{g} & E & \xrightarrow{f} & \bar{\tau}P \longrightarrow 0 \\ & & \eta^P \downarrow & \swarrow t & \downarrow \eta^E & & \downarrow \eta^{\bar{\tau}P} \\ 0 & \longrightarrow & \vec{P} & \xrightarrow{\vec{g}} & \vec{E} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{\bar{\tau}P} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si P no es un objeto en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ entonces η^P no es una sección, por lo que existe $t : E \rightarrow \vec{P}$ tal que $\eta^P = tg$. Por lo tanto $\eta^{\vec{P}} = \vec{t}\vec{g}$, y como $\eta^{\vec{P}} = \eta^{\vec{P}}$ es un isomorfismo (lema 3.22 más incisos (a) y (b) del lema 3.17), \vec{g} es una sección.

Por otro lado supongamos que $P \in \check{\mathcal{U}}(W_0)$. Entonces η^P es un isomorfismo y $\vec{g} = \eta^E g (\eta^P)^{-1}$ no es una sección, pues $g (\eta^P)^{-1}$ no lo es. Si $U \in \check{\mathcal{U}}(W_0)$ y $u : \vec{P} \rightarrow U$ no es sección, entonces $u\eta^P$ no es sección, por lo que existe $s : E \rightarrow U$ tal que $u\eta^P = sg$.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & \xrightarrow{g} & E \\ & & \eta^P \downarrow & & \downarrow \eta^E \\ U & \xleftarrow{u} & \vec{P} & \xrightarrow{\vec{g}} & \vec{E} \\ \eta^U \downarrow & & \downarrow \eta^{\vec{P}} & & \\ \vec{U} & \xleftarrow{\vec{u}} & \vec{\vec{P}} & & \end{array}$$

(Note: A curved arrow labeled 's' points from E to U, and a curved arrow labeled 'u' points from P to U.)

Así, por el lema 3.17(b) se tiene que $\eta^U u = \vec{u}\eta^{\vec{P}} = \vec{u}\eta^{\vec{P}} = \vec{s}\vec{g}$. Como η^U es invertible concluimos que $u = (\eta^U)^{-1} \vec{s}\vec{g}$, es decir, \vec{g} casi se divide por la izquierda. \square

Lema 3.24 *Sean \mathcal{P} la componente posproyectiva de $A\text{-mod}$ y \mathcal{P}_0 el subconjunto de \mathcal{P} dado en el lema 3.18. Denotemos con $Q(\omega)$ y Q a las imágenes bajo F^W del A^W -proyectivo inescindible no simple y del proyectivo simple respectivamente (lema 3.18). Para $i \in \{1, \dots, n, \omega\}$ sea $P(i)$ el A -módulo proyectivo Ae_i (ver lema 3.10). Entonces $Q = W_0 = (W_0, 0, 0)$ mientras que $Q(\omega) = (W_0 \otimes D\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0), k, \gamma_{Q(\omega)})$ está dado por $\gamma_{Q(\omega)} : 1 \mapsto \eta^R$. Además,*

- Si $w_0 = \underline{\dim} W_0$ es la raíz positiva máxima del diagrama de Dynkin Δ entonces $\vec{P}(\omega) \cong Q(\omega)$ y $\vec{P}(i) \cong (w_0)_i Q$ para $i = 1, \dots, n$.
- Para todo $[N] \in \mathcal{P}$ se tiene $\vec{N} \in \langle \mathcal{P}_0 \rangle$.
- La función $\sharp(\vec{\cdot}) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ es aditiva.

Demostración. Claramente $Q = W_0$. Si $\widehat{Q(\omega)}$ es el \mathcal{A}^W -módulo proyectivo de vector dimensión $(2, 1)$, argumentamos que $Q(\omega) \cong F^W(\widehat{Q(\omega)})$ de la siguiente manera. Primero se muestra que $Q(\omega)$ es excepcional (pues el álgebra $\mathbf{End}_{A_0}(Q(\omega))$ es isomorfa al campo y su vector dimensión es raíz). Pero también $F^W(\widehat{Q(\omega)})$ es excepcional (pues F^W es rígido) y estos módulos tienen el mismo vector dimensión. Por el lema 1.13 $Q(\omega) \cong F^W(\widehat{Q(\omega)})$.

Mostramos ahora (a). Para $i = 1, \dots, n$ es claro que $Ae_i = A_0e_i = P(i)_0$ y como ω es un vértice fuente, $P(i)_\omega = 0$. Debido a que $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(A_0e_i, W_0) = \mathbf{dim}_k(e_i W_0) = (w_0)_i$ tenemos que

$$\overrightarrow{P(i)} = (W_0 \otimes_k D\mathbf{Hom}_{A_0}(P(i)_0, W_0), 0, 0) \cong (w_0)_i Q.$$

Por otro lado, $P(\omega) = (R, k, \gamma_{P(\omega)})$ donde $\gamma_{P(\omega)}$ es la transformación $1 \mapsto Id_R$ (lema 3.10). Por la presentación dada de $[Q(\omega)] \in \mathcal{P}_0$ es claro que $\overrightarrow{P(\omega)} = Q(\omega)$. Las afirmaciones (b) y (c) se muestran de manera análoga que en el lema 3.21. \square

Proposición 3.25 Sean \mathcal{I} y \mathcal{P} las componentes preinyectiva y posproyectiva de A -mod respectivamente. Entonces las funciones $\sharp(\overleftarrow{\cdot}) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\sharp(\overrightarrow{\cdot}) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ son invariantes bajo traslación.

Demostración. Mostramos el resultado en la componente preinyectiva \mathcal{I} . Del lema 3.21(c) tenemos que la función $f = \sharp(\overleftarrow{\cdot})$ es aditiva. Por los lemas 1.33 y 1.25 la componente \mathcal{I} es un carcaj de traslación propio, dirigido, hereditario sin vértices proyectivos y con un número finito de órbitas. Sea \mathcal{S}_0 la cosección de \mathcal{I} que consiste en las clases de isomorfismos de A -módulos inyectivos inescindibles. Entonces el subcarcaj pleno $Q_{\mathcal{S}_0}$ de \mathcal{I} determinado por \mathcal{S}_0 es isomorfo a $\widetilde{\Delta}^{op}$. Por el inciso (b) del lema 1.28 se tiene que

$$f(\tau\mathcal{S}_0) = \Phi_{\widetilde{\Delta}^{op}} f(\mathcal{S}_0),$$

donde $\Phi_{\widetilde{\Delta}^{op}}$ es la matriz de Coxeter asociada al carcaj $\widetilde{\Delta}^{op}$.

Ahora, por el lema 3.21(a) se tiene la igualdad $f(\mathcal{S}_0) = w_0 + \mathbf{e}_\omega$. Por construcción del álgebra $A = k\widetilde{\Delta}$ y el lema 3.7, el vector $w_0 + \mathbf{e}_\omega$ está en el radical de la forma cuadrática $q_{\widetilde{\Delta}^{op}}$. De la equivalencia de (a) y (c) en el lema 1.8 se tiene entonces que $\Phi_{\widetilde{\Delta}}(w_0 + \mathbf{e}_\omega) = w_0 + \mathbf{e}_\omega$, por lo que

$$f(\tau\mathcal{S}_0) = \Phi_{\widetilde{\Delta}^{op}} f(\mathcal{S}_0) = f(\mathcal{S}_0).$$

De manera análoga se muestra el caso de la componente posproyectiva. \square

Recordamos que \mathcal{A}^W es el álgebra de Kronecker reducida del lema 3.18.

Corolario 3.26 Para cada \mathcal{A}^W -módulo preinyectivo (posproyectivo) \widehat{M} el A -módulo $F^W(\widehat{M})$ es preinyectivo (posproyectivo respectivamente).

Demostración. Mostramos el enunciado para \mathcal{A}^W -módulos preinyectivos, el caso posproyectivo es análogo. Sean \widehat{M}_i y M_j ordenaciones admisibles ($i, j \in \mathbb{N}$)

de \mathcal{A}^W y A -módulos inescindibles representantes de las componentes preinyectivas de $\mathcal{A}^W\text{-mod}$ y $A\text{-mod}$ respectivamente, como en el lema 1.26. Probaremos que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $F^W(\widehat{M}_i) \cong M_{j_i}$. Sea

$$\mathcal{N} = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{existe } j_i \in \mathbb{N} \text{ tal que } F^W(\widehat{M}_i) \cong M_{j_i}\}.$$

Recordamos la notación de los A -módulos $F^W(I(\widehat{\omega})) = I(\omega) = (0, k, 0)$, y $F^W(\widehat{I}) = I = \overline{W}_0$ que son imagen bajo F^W de los inyectivos inescindibles $\widehat{I}(\omega)$ y \widehat{I} en la categoría de Kronecker $\mathcal{A}^W\text{-mod}$.

Paso 1. Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un \mathcal{A}^W -módulo preinyectivo \widehat{N} tal que $\overleftarrow{M}_j \cong F^W(\widehat{N})$. Que existe un \widehat{N} con $\overleftarrow{M}_j \cong F^W(\widehat{N})$ es claro, pues $\overleftarrow{M}_j \in \check{\mathcal{U}}(W_0)$ y F^W es denso en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. Probamos por inducción que \widehat{N} es preinyectivo. Como base inductiva la afirmación es válida en los A -módulos inyectivos inescindibles por el inciso (a) del lema 3.21. Supongamos que es cierta para M_1, \dots, M_ℓ y consideremos la sucesión exacta en $A\text{-mod}$ que inicia en $M_{\ell+1}$,

$$\varepsilon = 0 \longrightarrow M_{\ell+1} \longrightarrow E \xrightarrow{f} \tau^{-1}(M_{\ell+1}) \longrightarrow 0.$$

Por el lema 3.20 hay dos situaciones posibles. En la situación (a) el A -módulo $\tau^{-1}(M_{\ell+1})$ no es un objeto en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$, por lo que $\overleftarrow{\varepsilon}$ es una sucesión trivial, y el resultado se tiene por hipótesis de inducción. En la situación (b) supongamos que $\tau^{-1}(M_{\ell+1}) \cong M_{\ell'}$ es un objeto en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ (y por lo tanto $\overleftarrow{M}_{\ell'} \cong M_{\ell'}$). De nuevo por el lema 3.20 el morfismo \overleftarrow{f} casi se divide por la derecha en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. Por la proposición 3.25 y el lema 1.19, como $\sharp\overleftarrow{M}_{\ell'} = 1 = \sharp\overleftarrow{M}_{\ell+1}$, la sucesión $\overleftarrow{\varepsilon}$ de hecho casi se divide,

$$\overleftarrow{\varepsilon} = 0 \longrightarrow \overleftarrow{M}_{\ell+1} \longrightarrow \overleftarrow{E} \xrightarrow{\overleftarrow{f}} \overleftarrow{M}_{\ell'} \longrightarrow 0.$$

Por hipótesis inductiva $\ell' \leq \ell$ y ya que $\overleftarrow{M}_{\ell'} \cong M_{\ell'}$ es inescindible en $\check{\mathcal{U}}(W_0)$, se tiene $\overleftarrow{M}_{\ell'} \cong F^W(\widehat{N})$ para algún \mathcal{A}^W -módulo preinyectivo inescindible \widehat{N} . Por lo tanto existe un isomorfismo $\overleftarrow{M}_{\ell+1} \cong F^W(\tau_K(\widehat{N}))$, de donde se sigue el paso inductivo.

Paso 2. El conjunto de dimensiones $\mathbf{dim}_k \overleftarrow{M}_j$ con $j \in \mathbb{N}$ es un conjunto no acotado de enteros. Recordamos que estamos identificando a M_j con una terna $((M_j)_0, (M_j)_\omega, \gamma_{M_j})$ donde $(M_j)_0$ es un A_0 -módulo. Observemos primero que el conjunto de dimensiones $\mathbf{dim}_k(M_j)_0$ con $j \in \mathbb{N}$ no es acotado. En efecto, notemos que si la transformación γ_{M_j} no es inyectiva, entonces existe un morfismo $M_0 \rightarrow M_j$ del inyectivo simple $M_0 = S(\omega)$ en M_j , por lo que $j = 0$. Por lo tanto $\gamma_{M_j} : (M_j)_\omega \rightarrow |(M_j)_0|$ es inyectivo para $j > 0$. Esto implica que si el conjunto $\{\mathbf{dim}(M_j)_0\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n$ es finito entonces el conjunto $\{\mathbf{dim} M_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^{n+1}$ es finito (pues $|N_0| = \mathbf{Hom}_{A_0}(R, N_0)$, ver lema 3.8). Por el lema 1.13, y ya que cada M_j y cada A_0 -módulo inescindible es excepcional (lema 1.34), el conjunto $\{\mathbf{dim} M_j\}$ con $j \in \mathbb{N}$ es infinito. Por lo tanto los conjuntos $\{\mathbf{dim}(M_j)_0\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^n$ y $\{\mathbf{dim}_k(M_j)_0\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ son infinitos.

Como A_0 es una k -álgebra de tipo de representación finito, lo anterior implica que el número de sumandos directos inescindibles $\sharp(M_j)_0$ de $(M_j)_0$ no es acotado cuando j corre por \mathbb{N} . Como $(M_j)_0 \in \langle [W_0] \vee \mathcal{Y} \rangle$ (proposición 3.14) y

$\mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, Y) \neq 0$ para cada inescindible Y en $\langle [W_0] \vee \mathcal{Y} \rangle$ (lema 2.12), se tiene que el conjunto de dimensiones $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, (M_j)_0)$ es no acotado, lo que implica que el conjunto

$$\mathbf{dim}_k(\overleftarrow{M}_j)_0 = \mathbf{dim}_k W_0 \otimes_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, (M_j)_0),$$

no es acotado cuando $j \in \mathbb{N}$, y en particular el conjunto $\mathbf{dim}_k \overleftarrow{M}_j$ no es acotado cuando $j \in \mathbb{N}$.

Paso 3. *El conjunto \mathcal{N} es infinito.* Por el paso 1 para cada $j \in \mathbb{N}_0$ existe un subconjunto finito $I_j \subset \mathbb{N}_0$ de enteros no negativos y un natural $d_\ell^j > 0$ para cada $\ell \in I_j$ tales que

$$\overleftarrow{M}_j \cong \bigoplus_{\ell \in I_j} d_\ell^j F^W(\widehat{M}_\ell).$$

Por la proposición 3.25 el conjunto $\{\sum_{\ell \in I_j} d_\ell^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ está acotado. Como la dimensión sobre el campo k de \overleftarrow{M}_j no está acotada cuando j corre por \mathbb{N} (paso 2), se sigue que el conjunto de máximos $\{\mathbf{max}_{j \in \mathbb{N}} I_j\}$ no está acotado. Observamos que existe un incremento $\mathbf{max} I_{\ell'} < \mathbf{max} I_{\ell+1}$ precisamente en la situación (b) del paso 1, es decir, $\overleftarrow{M}_{\ell'} \cong M_{\ell'}$ con $\tau^{-1} M_{\ell+1} \cong M_{\ell'}$. Por el lema 3.20 esto implica que \mathcal{N} es un conjunto infinito.

Paso 4. *El conjunto \mathcal{N} es igual a \mathbb{N} .* Sea $i \in \mathbb{N}$ arbitrario. Entonces existe i_0 tal que para cualquier entero $i' \geq i_0$ existe un morfismo no cero $f : \widehat{M}_{i'} \rightarrow \widehat{M}_i$ en la categoría de Kronecker \mathcal{A}^W -mod. Por el paso 3, existe $i_1 \geq i_0$ con $i_1 \in \mathcal{N}$. Así, existe j_{i_1} tal que $F^W(\widehat{M}_{i_1}) \cong M_{j_{i_1}}$, y por lo tanto existe un morfismo no cero $F^W(f) : M_{j_{i_1}} \rightarrow F^W(\widehat{M}_i)$. Ya que $M_{j_{i_1}}$ es preinyectivo, se concluye que $F^W(\widehat{M}_i)$ es un A -módulo preinyectivo inescindible. Entonces $i \in \mathcal{N}$, lo que termina la prueba. \square

Las reducciones que daremos en la próxima sección describen la subcategoría $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X}_0 \vee W_0 \vee \mathcal{Y}_0)$ de A -mod, donde

$$\mathcal{X}_0 = \mathbf{ConL}_0([W_0]) = \{[N_0] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [N_0] \prec [W_0] \text{ pero } \tau_0^{-1}[N_0] \not\prec [W_0]\},$$

$$\mathcal{Y}_0 = \mathbf{ConR}_0([W_0]) = \{[M_0] \in \mathbf{ind}A_0 \mid [W_0] \prec [M_0] \text{ pero } [W_0] \not\prec \tau_0[M_0]\}.$$

Esta subcategoría contiene casi completas a las componentes preinyectiva y posproyectiva de A -mod.

Teorema 3.27 *Consideremos los subconjuntos de $\mathbf{ind}A_0$ dados por*

$$\mathcal{X}_0 = \mathbf{ConL}_0([W_0]) \quad y \quad \mathcal{Y}_0 = \mathbf{ConR}_0([W_0]).$$

- a) *El número de clases de isomorfismo de A -módulos inescindibles posproyektivos que no están en la subcategoría $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X}_0 \vee [W_0])$ es finito.*
- b) *El número de clases de isomorfismo de A -módulos inescindibles preinyektivos que no pertenecen a $\check{\mathcal{U}}([W_0] \vee \mathcal{Y}_0)$ es finito.*

Demostración. Mostramos (a) por pasos. Para ello fijamos un orden contrario al admisible $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (lema 3.13) de representantes de los elementos de la componente posproyectiva \mathcal{P} del álgebra A , es decir, si se tiene un morfismo

irreducible $f : N_i \rightarrow N_j$ entonces $i < j$. Consideramos los subconjuntos de $\mathbf{ind}A_0$ dados por

$$G^{\mathcal{P}} = \{[Z_0] \in \mathbf{ind}A_0 \mid \text{existe } h([Z_0]) \in \mathbb{N} \text{ tal que } Z_0 \cong N_{h([Z_0])}\},$$

$$\overline{G^{\mathcal{P}}} = \{[Z_0] \in \mathbf{ind}A_0 \mid \text{existe } \bar{h}([Z_0]) \in \mathbb{N} \text{ tal que } \overline{Z_0} \cong N_{\bar{h}([Z_0])}\}.$$

Paso 1. *Tenemos que $\overline{G^{\mathcal{P}}} \subset G^{\mathcal{P}}$ y $\overline{G^{\mathcal{P}}} = \tau_0 G^{\mathcal{P}}$.* Para la primera contención observamos que si $[Z_0] \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$, entonces Z_0 es isomorfo a un sumando directo la restricción a A_0 -mod de $N_{\bar{h}([Z_0])}$, y por el lema 3.14(a), tenemos que existe $h([Z_0]) \leq \bar{h}([Z_0])$ tal que $N_{h([Z_0])} \cong Z_0$, es decir, $[Z_0] \in G^{\mathcal{P}}$. Para verificar la igualdad $\overline{G^{\mathcal{P}}} = \tau_0 G^{\mathcal{P}}$ recordamos que si Z_0 es un A_0 -módulo inyectivo, entonces $\overline{Z_0}$ es un A -módulo inyectivo (lema 3.10). De esta manera, si $Z_0 \in G^{\mathcal{P}}$ entonces el A_0 -módulo Z_0 no es inyectivo, pues $\overline{Z_0}$ es posproyectivo y A -mod no es de tipo de representación finito (lema 1.33). Entonces por 3.11 existe una sucesión de Auslander-Reiten en A -mod de la forma

$$\overline{\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow \overline{Z_0} \xrightarrow{(f, |I_{Z_0}|)} (Y_0, |Z_0|, |f|) \xrightarrow{(g, 0)} \tau_0^{-1} Z_0 \longrightarrow 0,$$

y por lo tanto $\tau_0^{-1} Z_0$ es posproyectivo en A -mod, es decir, $\overline{G^{\mathcal{P}}} \subseteq \tau_0 G^{\mathcal{P}}$. Si por otro lado $\tau_0^{-1} Z_0$ pertenece a $G^{\mathcal{P}}$, entonces por la sucesión $\overline{\varepsilon_0}$ anterior se tiene que $\overline{Z_0}$ es posproyectivo, y por lo tanto $\overline{G^{\mathcal{P}}} \supseteq \tau_0 G^{\mathcal{P}}$.

En particular, si $[Z_0] \in G^{\mathcal{P}}$, entonces Z_0 no es inyectivo en A_0 -mod.

Paso 2. *El conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{P}} = G^{\mathcal{P}} - \overline{G^{\mathcal{P}}}$ es una cosección conexa en $\Gamma(A_0)$.* La primera condición de cosección se satisface claramente, pues $\overline{G^{\mathcal{P}}} = \tau_0 G^{\mathcal{P}}$. Verificamos la segunda condición, es decir, si $x \rightarrow s$ es una flecha en $\Gamma(A_0)$ con $s \in \mathcal{S}^{\mathcal{P}}$, entonces o bien $x \in \mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ ó $\tau_0^{-1}(x) \in \mathcal{S}^{\mathcal{P}}$. Veamos que $x \in G^{\mathcal{P}}$. Si $s = [Z_0]$ entonces, como Z_0 no es inyectivo en A_0 -mod, x corresponde a la clase de isomorfismo de un sumando directo del A_0 -módulo Y_0 en la sucesión exacta anterior $\overline{\varepsilon_0}$. Por lo tanto, por el lema 3.13(a), $x \in G^{\mathcal{P}}$. Ahora, si $x \notin \overline{G^{\mathcal{P}}}$ entonces $x \in \mathcal{S}^{\mathcal{P}}$.

Queda por mostrar que si $x \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$, entonces $\tau_0^{-1}(x) \in \mathcal{S}^{\mathcal{P}}$. Por la igualdad $\overline{G^{\mathcal{P}}} = \tau_0 G^{\mathcal{P}}$, ya que $x \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$ entonces $\tau_0^{-1}(x) \in G^{\mathcal{P}}$, por lo que basta ver que $\tau_0^{-1}(x) \notin \overline{G^{\mathcal{P}}}$. Supongamos pues que $\tau_0^{-1}(x) \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$. Entonces $\tau_0^{-1}(x)$ no es inyectivo y $\tau_0^{-2}(x) \in G^{\mathcal{P}}$. Si $x = [X_0]$, entonces existe una sucesión de Auslander-Reiten en la componente posproyectiva de A -mod de la forma

$$0 \longrightarrow \overline{\tau_0^{-1} X_0} \longrightarrow (U_0, |\tau_0^{-1} X_0|, |h|) \longrightarrow \tau_0^{-2} X_0 \longrightarrow 0,$$

donde uno de los sumandos directos de U_0 pertenece a la clase $\tau_0^{-1}(s) = [\tau_0^{-1} Z_0]$ de nuevo por el lema 3.14(a), se tiene que $\tau_0^{-1}(s) \in G^{\mathcal{P}}$. Esto contradice que $s \in G^{\mathcal{P}} - \overline{G^{\mathcal{P}}}$. Entonces $\tau_0^{-1}(x) \in \mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ y por lo tanto $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ es cosección. La conexidad se debe al lema 1.27, pues por la igualdad $\overline{G^{\mathcal{P}}} = \tau_0 G^{\mathcal{P}}$ el conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ contiene a lo más un elemento de cada órbita. Esto prueba el paso 2.

Para cada $[Z_0] \in \mathbf{ind}A_0$ definimos el conjunto

$$\mathcal{N}([Z_0]) = \{i \in \mathbb{N} \mid Z_0 \text{ es isomorfo a un sumando directo de } N_i|_{A_0}\}.$$

Paso 3. $\mathcal{S}^{\mathcal{P}} = \{[Z_0] \in \mathbf{ind}A_0 \mid \mathcal{N}([Z_0]) \text{ es un conjunto infinito}\}$. Para ello observamos primero que $[Z_0]$ pertenece a $G^{\mathcal{P}}$ si y solo si $\mathcal{N}([Z_0]) \neq \emptyset$, y en tal caso

$$h([Z_0]) = \mathbf{min}\mathcal{N}([Z_0]).$$

Esto es consecuencia del lema 3.14(a). Por otro lado, mostramos que $[Z_0] \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$ si y solo si $\mathcal{N}([Z_0])$ es un conjunto finito, y en tal caso

$$\bar{h}([Z_0]) = \mathbf{max}\mathcal{N}([Z_0]).$$

En efecto, si $[Z_0] \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$ entonces para cualquier N_i tal que Z_0 es isomorfo a un sumando directo de $(N_i)_0$, existe un morfismo de A_0 -módulos $f_0 : (N_i)_0 \rightarrow Z_0$ y por lo tanto un morfismo de A -módulos $f : N_i \rightarrow \overline{Z_0}$ dado por

$$\begin{array}{ccc} (N_i)_\omega & \xrightarrow{|f_0| \gamma_{N_i}} & |Z_0| \\ \gamma_{N_i} \downarrow & & \parallel \\ |(N_i)_0| & \xrightarrow{|f_0|} & |Z_0|. \end{array}$$

Por lo tanto $i \leq \bar{h}([Z_0])$ y $\mathcal{N}([Z_0])$ es un conjunto finito (no vacío). Supongamos ahora que $\mathcal{N}([Z_0])$ es finito no vacío y sea j_0 su elemento máximo. Entonces la restricción a A_0 de la sucesión que casi se divide que comienza en N_{j_0} no es trivial, y por el lema 3.11 se tiene que $N_{j_0} \cong \overline{Z_0}$. De esta manera $[Z_0] \in \overline{G^{\mathcal{P}}}$ y $\bar{h}([Z_0]) = \mathbf{max}\mathcal{N}([Z_0])$. Como consecuencia $[Z_0] \in G^{\mathcal{P}}$ si y solo si $\mathcal{N}([Z_0]) \neq \emptyset$, y en tal caso $[Z_0]$ es un elemento de $\overline{G^{\mathcal{P}}}$ si y solo si $\mathcal{N}([Z_0])$ es un conjunto finito. Esto prueba el paso 3.

Mostramos finalmente el inciso (a) del teorema. Por el paso 2 el conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{P}} = G^{\mathcal{P}} - \overline{G^{\mathcal{P}}}$ es una cosección conexa, que está contenida en $\{[W_0]\} \cup \mathbf{ConL}([W_0])$ por la proposición 3.14. Además $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ contiene a $[W_0]$ por el corolario 3.26. De la unicidad en el lema 2.10 se sigue que la cosección $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ es igual a la cosección $\{[W_0]\} \cup \mathbf{ConL}_0([W_0])$, es decir,

$$\mathcal{S}^{\mathcal{P}} = \{[W_0]\} \cup \mathcal{X}_0.$$

Por el paso 3 el siguiente subconjunto de \mathbb{N} es finito,

$$\mathcal{N} = \bigcup_{[Z_0] \in \overline{G^{\mathcal{P}}}} \mathcal{N}([Z_0]).$$

Supongamos entonces que N_j es un A -módulo posproyectivo ($j \in \mathbb{N}$) que no está en $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X}_0 \vee W_0)$. Entonces la restricción $N_j|_{A_0}$ tiene como sumando directo a un A_0 -módulo Z_0 que está en $\overline{G^{\mathcal{P}}}$, y por lo tanto $j \in \mathcal{N}$, que es un conjunto finito. Esto muestra (a), la prueba de (b) es similar. \square

Las funciones $\sharp(\overleftarrow{\cdot})$ y $\sharp(\overrightarrow{\cdot})$ descritas arriba están relacionadas con el rango dentro de las clases de A -módulos del teorema anterior. Recordamos que, como se define al principio de la sección, el rango de un A -módulo inescindible $M = (M_0, M_\omega, \gamma_{M_0})$ está dado por

$$\mathbf{rk}(M) = \mathbf{dim}_k M_\omega - m_{M_0},$$

donde m_{M_0} es el número de sumandos inescindibles de M_0 isomorfos a W_0 .

Proposición 3.28 Sean \mathcal{I}' y \mathcal{P}' los subconjuntos de las componentes preinjectiva \mathcal{I} y posproyectiva \mathcal{P} de A -mod determinados por los inescindibles que se encuentran en $\check{\mathcal{U}}(W_0 \vee \mathcal{Y}_0)$ y $\check{\mathcal{U}}(\mathcal{X}_0 \vee W_0)$ respectivamente.

- a) Si $[M] \in \mathcal{I}'$ entonces $\mathbf{rk}(M) = \check{\#}\overleftarrow{M}$.
- b) Si $[N] \in \mathcal{P}'$ entonces $\mathbf{rk}(N) + \check{\#}\overrightarrow{N} = e_{N_0}$.

Demostración. Primero mostramos (a). Notamos que en un diagrama pull-back con flechas horizontales suprayectivas

$$\begin{array}{ccc} \check{\overleftarrow{M}}_\omega & \longrightarrow & M_\omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{\overleftarrow{M}}_0 & \longrightarrow & |M_0|, \end{array}$$

se satisface la igualdad $\mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_\omega - \mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_0 = \mathbf{dim}_k M_\omega - \mathbf{dim}_k |M_0|$. Ya que $[M_0] \in W_0 \vee \mathcal{Y}_0$ y $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(W_0, Y) = 1$ para cualquier $[Y] \in \mathcal{Y}_0$, se tiene

$$m_{\check{\overleftarrow{M}}_0} = m_{M_0} + e_{M_0}.$$

Como $\mathbf{dim}_k |W_0| = 2$ y $\mathbf{dim}_k |Y| = 1$ (lema 3.9) tenemos que $\mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_0 = 2m_{\check{\overleftarrow{M}}_0}$ y $\mathbf{dim}_k |M_0| = 2m_{M_0} + e_{M_0}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_\omega - \mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_0 &= \mathbf{dim}_k M_\omega - \mathbf{dim}_k |M_0|, \\ \mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_\omega - 2m_{\check{\overleftarrow{M}}_0} &= \mathbf{dim}_k M_\omega - (2m_{M_0} + e_{M_0}), \\ \mathbf{dim}_k \check{\overleftarrow{M}}_\omega - m_{\check{\overleftarrow{M}}_0} - (m_{\check{\overleftarrow{M}}_0}) &= \mathbf{dim}_k M_\omega - m_{M_0} - (m_{M_0} + e_{M_0}), \\ \mathbf{rk}(\check{\overleftarrow{M}}) - (m_{\check{\overleftarrow{M}}_0}) &= \mathbf{rk}(M) - (m_{M_0} + e_{M_0}). \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{rk}(\check{\overleftarrow{M}}) = \mathbf{rk}(M)$ pues $m_{\check{\overleftarrow{M}}_0} = m_{M_0} + e_{M_0}$. Terminamos la prueba de (a) notando que $\check{\#}\overleftarrow{M} = \mathbf{rk}(\check{\overleftarrow{M}})$, pues $\check{\overleftarrow{M}}$ es preinjectivo en la subcategoría de Kronecker $\check{\mathcal{U}}(W_0)$ (lema 3.21(b)). En efecto, si $N = (N_1, N_2, N_{\alpha_1}, N_{\alpha_2})$ es un módulo preinjectivo en la categoría de Kronecker \mathcal{A}^W -mod entonces $\check{\#}N = \mathbf{dim}_k N_2 - \mathbf{dim}_k N_1$. Bajo el funtor F^W dado en el lema 3.18 se tiene

$$\begin{aligned} \check{\#}F^W(N) = \check{\#}(W \otimes N) &= \mathbf{dim}_k(S(\omega) \otimes N_2) - \check{\#}(W_0 \otimes N_1) = \\ &= \mathbf{dim}_k N_2 - \check{\#}(W_0 \otimes N_1) = \mathbf{rk}(F^W(N)). \end{aligned}$$

Mostramos ahora (b). Observamos que si $[N_0] \in \mathcal{X}_0 \vee W_0$ entonces

$$m_{\check{\overrightarrow{N}}_0} = m_{N_0} + e_{N_0},$$

pues si $[X]$ pertenece a \mathcal{X}_0 entonces $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(X, W_0) = 1$. Así

$$\begin{aligned} \mathbf{rk}(N) - \mathbf{rk}(\check{\overrightarrow{N}}) &= (\mathbf{dim}_k N_\omega - m_{N_0}) - (\mathbf{dim}_k N_\omega - m_{\check{\overrightarrow{N}}_0}) \\ &= e_{N_0}. \end{aligned}$$

Se muestra que $\check{\#}\overrightarrow{N} = -\mathbf{rk}(\check{\overrightarrow{N}})$ por ser $\check{\overrightarrow{N}}$ posproyectivo en la subcategoría de Kronecker $\check{\mathcal{U}}(W_0)$. En efecto, si $M = (M_1, M_2, M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2})$ es un módulo

posproyectivo en la categoría de Kronecker \mathcal{A}^W -mod entonces $\sharp M = \mathbf{dim}_k M_1 - \mathbf{dim}_k M_2$. De nuevo bajo el funtor F^W se tiene

$$\begin{aligned} \sharp F^W(M) = \sharp(W \otimes M) &= \sharp(W_0 \otimes M_1) - \mathbf{dim}_k(S(\omega) \otimes M_2) = \\ &= \sharp(W_0 \otimes M_1) - \mathbf{dim}_k M_2 = -\mathbf{rk}(F^W(M)). \end{aligned}$$

Se concluye entonces que

$$\mathbf{rk}(N) + \sharp \vec{N} = e_{N_0}.$$

□

Sea \mathcal{S} una sección conexa de la componente preinyectiva de A -mod contenida en \mathcal{I}' . Por el lema 1.27, \mathcal{S} interseca cada órbita de \mathcal{I}' en exactamente un vértice, por lo que por la proposición 3.25, $\mathbf{rk}(\mathcal{S}) = w_0 + \mathbf{e}_\omega$ es el vector radical de la forma cuadrática q asociada a A . Por otro lado, existe un entero mínimo $p_A \geq 1$ tal que para cualquier sección conexa \mathcal{S} en \mathcal{P}' se tiene $\mathbf{rk}(\mathcal{S}) = \mathbf{rk}(\tau^{-p_A} \mathcal{S})$. En otras palabras, existe un entero m_A tal que

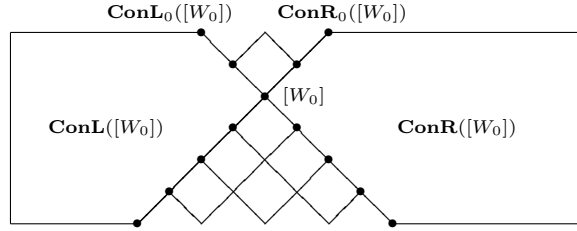
$$\sum_{i=0}^{p_A-1} \mathbf{rk}(\tau^{-i} \mathcal{S}) = m_A(w_0 + \mathbf{e}_\omega).$$

Los enteros p_A y m_A , que llamaremos **periodo** y **multiplicidad** de la componente posproyectiva, dependen solo del tipo del diagrama de Dynkin Δ . Sus valores se muestran en la siguiente tabla.

Diagrama	Tipo tubular	Periodo	Multiplicidad
$\tilde{\mathbf{A}}_{p,q}$		(p, q)	$\frac{pq-(p+q)}{\mathbf{m.c.d.}(p,q)}$
$\tilde{\mathbf{D}}_n$	n impar	$(n-2, 2, 2)$	$2(n-3)$
$\tilde{\mathbf{D}}_n$	n par	$(n-2, 2, 2)$	$n-3$
$\tilde{\mathbf{E}}_6$		$(3, 3, 2)$	5
$\tilde{\mathbf{E}}_7$		$(4, 3, 2)$	11
$\tilde{\mathbf{E}}_8$		$(5, 3, 2)$	29

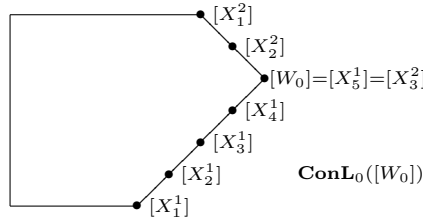
3.6 Reducción de álgebras de Dynkin extendido.

Sean Δ un carcaj de Dynkin y $\tilde{\Delta}$ el carcaj de Dynkin extendido correspondiente tal que el vértice agregado es fuente. Sean A_0 y A las álgebras de caminos de Δ y $\tilde{\Delta}$ respectivamente y consideremos la ditálgebra $\mathcal{A} = (A, 0)$ con diferencial cero. En esta sección estudiamos ditálgebras reducidas \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y a través de módulos admisibles, completos y rígidos X, Y , que se definen a partir del A_0 -módulo W_0 y representantes de los vértices de $\mathcal{X}_0 = \mathbf{ConL}_0([W_0])$ y $\mathcal{Y}_0 = \mathbf{ConR}_0([W_0])$ respectivamente.



Uno de nuestros objetivos es describir representaciones excepcionales de las reducciones \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y , de manera que a través del uso de los funtores F^X y F^Y obtenemos explícitamente representaciones excepcionales del carcaj de Dynkin extendido $\tilde{\Delta}$.

Para un subconjunto de vértices \mathcal{S} de $\Gamma(A_0)$ denotamos con $\Delta_{\mathcal{S}}$ al subcarcaj pleno de $\Gamma(A_0)$ determinado por \mathcal{S} . Recordamos que $\mathcal{X}_0 = \mathbf{ConL}_0([W_0]) = \{W_{1,i}^s\}$ con $i = 1, \dots, n_s$ y $s = 1, \dots, t$ (el entero t toma los valores 1, 2 ó 3 dependiendo del tipo tubular de Δ , consultar sección 2.3). Por simplicidad cambiamos a la notación $W_{1,i}^s = X_i^s$. Con esta notación los módulos W_0 y $X_{n_s}^s$ ($s = 1, \dots, t$) coinciden. Ver la siguiente figura para un ejemplo con dos alas de orden 3 y 5.



Consideremos el A_0 -módulo

$$X_0 = W_0 \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i < n_s \\ s=1, \dots, t}} X_i^s.$$

Denotamos con Δ_{X_0} al carcaj $\Delta_{\{[W_0]\} \cup \mathcal{X}_0}$. Sea $M_{\Delta_{X_0}}$ la matriz asociada a Δ_{X_0} , que es invertible por el lema 1.3. Sea $\Delta_{X_0}^{-1}$ el carcaj cuya matriz asociada es la inversa $M_{\Delta_{X_0}}^{-1}$.

Lema 3.29 *El A_0 -módulo X_0 dado arriba es admisible y completo. Denotamos con (Z_0, P_0) a la escisión del álgebra de endomorfismos opuesta Γ_0 de X_0 . La k -álgebra Z_0 es trivial. El álgebra tensorial reducida $A_0^{X_0}$, dada por $T_{Z_0}(P_0^*)$, es isomorfa al álgebra de caminos del carcaj $\Delta_{X_0}^{-1}$. Además, existen bases duales finitas de elementos legibles*

$$\{(p_{i,j}^s, \gamma_{i,j}^s)\}_{\substack{1 \leq i < j \leq n_s \\ s=1, \dots, t}} \quad \text{y} \quad \{(a_i^s, \xi_i^s), (a, \xi), (a', \xi')\}_{\substack{1 \leq i < n_s, \\ s=1, \dots, t}}$$

de P_0 y $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ respectivamente, donde las restricciones de (a, ξ) y (a', ξ') a $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ son base dual. Se puede elegir la base de P_0 de manera que para $1 \leq i < j \leq n_s$, $1 \leq k < \ell \leq n_r$ y $1 \leq r, s \leq t$ se satisface

$$p_{i,j}^s p_{k,\ell}^r = \begin{cases} p_{i,\ell}^s, & \text{si } j = k, s = r, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Si definimos $a_{n_s}^s = a_{n_s-1}^s p_{n_s-1, n_s}^s$, entonces es posible elegir la base del espacio $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ tal que para $1 \leq j < n_s$, $1 \leq k < \ell \leq n_r$ y $1 \leq r, s \leq t$ se satisface

$$a_j^s p_{k, \ell}^r = \begin{cases} a_\ell^s, & \text{si } j = k, s = r, \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

(todos los productos por $p_{k, \ell}^r$ arriba se toman en Γ_0). Denotamos con ρ_s a la restricción a $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ del morfismo $a_{n_s}^s$ (que pertenece a $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$). Estos morfismos determinan representaciones inescindibles no isomorfas entre sí $W_0(\rho_s)$, para $s = 1, \dots, t$.

Demostración. Observamos que existe un morfismo no cero en $\mathbf{Hom}_{A_0}(X_i^r, X_j^s)$ si y solo si $r = s$, $i \leq j$. Consideremos

$$Z_0 = \mathbf{End}_{A_0}(W_0)^{op} \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i < n_s \\ s=1, \dots, t}} \mathbf{End}_{A_0}(X_i^s)^{op},$$

$$P_0 = \bigoplus_{\substack{1 \leq i < j \leq n_s \\ s=1, \dots, t}} \mathbf{Hom}_{A_0}(X_i^s, X_j^s)^{op}.$$

Entonces el álgebra opuesta de endomorfismos de X_0 , vista como álgebra de matrices, es triangular con diagonal isomorfa a Z_0 . Por el lema 1.14 la k -álgebra Z_0 es trivial, pues todos los sumandos inescindibles de X_0 son excepcionales. Es claro que se tiene una descomposición de Z_0 - Z_0 -bimódulos

$$\Gamma_0 = \mathbf{End}_{A_0}(X_0)^{op} \cong Z_0 \oplus P_0,$$

y por lo tanto X_0 es admisible y completo (lema A.25). Ahora, por definición

$$A_0^{X_0} = (T_{A_0}(0))^{X_0} = T_{Z_0}(P_0^*).$$

Fijamos una base dual del Z_0 -módulo derecho P_0 . Para cada $i = 1, \dots, n_s - 1$ denotamos con $p_{i, i+1}^s$ a un morfismo no cero entre X_i^s y X_{i+1}^s . Todos los morfismos $p_{i, i+1}^s$ son irreducibles y son monomorfismos, pues cada X_i^s es cogenerado por W_0 (lema 2.12),

$$X_1^s \xrightarrow{p_{1,2}^s} X_2^s \xrightarrow{p_{2,3}^s} X_3^s \cdots X_{n_s-2}^s \xrightarrow{p_{n_s-2, n_s-1}^s} X_{n_s-1}^s \xrightarrow{p_{n_s-1, n_s}^s} W_0.$$

Para cada $1 \leq i < j \leq n_s$ definimos

$$p_{i,j}^s = p_{i, i+1}^s p_{i+1, i+2}^s \cdots p_{j-1, j}^s.$$

Entonces $\{(p_{i,j}^s, \gamma_{i,j}^s)\}$ es una base dual de elementos legibles de P_0 , que por construcción satisface la ecuación del enunciado.

Recordamos que el álgebra de caminos $k\Delta_{X_0}^{-1}$ es isomorfa al álgebra tensorial $T_{Z_1}(W_{X_0})$ donde Z_1 es la k -álgebra trivial correspondiente a los caminos idempotentes e_i^s de $\Delta_{X_0}^{-1}$ y W_{X_0} es el bimódulo de flechas del carcaj $\Delta_{X_0}^{-1}$. Claramente se tiene un isomorfismo de álgebras $\Phi_0 : Z_1 \rightarrow Z_0$ que asigna cada idempotente e_i^s en el morfismo identidad f_i^s del módulo X_i^s .

Por el lema 1.3 a cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ de $\Delta_{X_0}^{-1}$ le corresponde un camino $p_{i,j}^s$ de i a j en Δ_{X_0} . Este camino se encuentra contenido en un ala $\theta(n_s)$ de $\Gamma(k\Delta)$

(para algún $s \in \{1, \dots, t\}$) pues $[W_0]$ es pozo en Δ_{X_0} . Se define $\Phi_1(\alpha) = \gamma_{i,j}^s$. Como $\alpha = \alpha e_i$ y $\alpha = e_j \alpha$, observamos que

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha)\Phi_0(e_i) &= \gamma_{i,j}^s f_i^s = \gamma_{i,j}^s = \Phi_1(\alpha e_i), \\ \Phi_0(e_j)\Phi_1(\alpha) &= f_j^s \gamma_{i,j}^s = \gamma_{i,j}^s = \Phi_1(e_j \alpha).\end{aligned}$$

De esta manera la asignación Φ_1 se extiende a un isomorfismo de Z_1 - Z_1 -bimódulos a través de Φ_0 ,

$$\Phi_1 : W_{X_0} \rightarrow P_0^*.$$

Por lo tanto los isomorfismos Φ_0 y Φ_1 se extienden a su vez a un isomorfismo de álgebras tensoriales

$$\Phi : T_{Z_1}(W_{X_0}) \rightarrow T_{Z_0}(P_0^*),$$

cuyas restricciones a T y W_{X_0} son Φ_0 y Φ_1 respectivamente.

Fijamos ahora una base de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ a partir de la base elegida de P_0 . Primero tomemos un elemento no cero $a_1^s \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_1^s)$ para cada $s = 1, \dots, t$. Definimos recursivamente $a_i^s = a_{i-1}^s p_{i-1,i}^s \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_i^s)$ para $1 < i < n_s$. Notemos que $a_i^s \neq 0$ pues $p_{i-1,i}^s$ es monomorfismo. Damos una base $\{a, a'\}$ de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$. Consideramos todos estos morfismos como elementos de

$$\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0) \cong \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0) \oplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i < n_s \\ s=1, \dots, t}} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_i^s).$$

Entonces $\{(a_i^s, \xi_i^s), (a, \xi), (a', \xi')\}$ (con $i = 1, \dots, n_s - 1, s = 1, \dots, t$) es una base dual de elementos legibles de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ que satisface, por construcción, la fórmula del enunciado.

La última afirmación se sigue de la observación previa al lema 3.12. \square

Lema 3.30 Sean $A = A_0[R]$ y B la subálgebra de A dada por $B = A_0[0]$. Denotemos con \mathcal{A} a la ditálgebra con diferencial cero $\mathcal{A} = (A, 0)$. Entonces el B -módulo $X = X_0 \oplus S(\omega)$ es admisible completo y la ditálgebra reducida \mathcal{A}^X es isomorfa a $(k\Delta_{X_0}^{-1}[R^{X_0}], \delta^x)$, donde $R^{X_0} = k\Delta_{X_0}^{-1} \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$. La diferencial δ^x tiene la siguiente forma explícita en flechas sólidas (elementos de las bases elegidas en el lema 3.29 para la componente L_0^X del estrato, ver proposición 3.6). Para $\xi \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$ identificamos a ξ con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_0^X$, así como a $\gamma \in P_0^*$ con la matriz $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^X$.

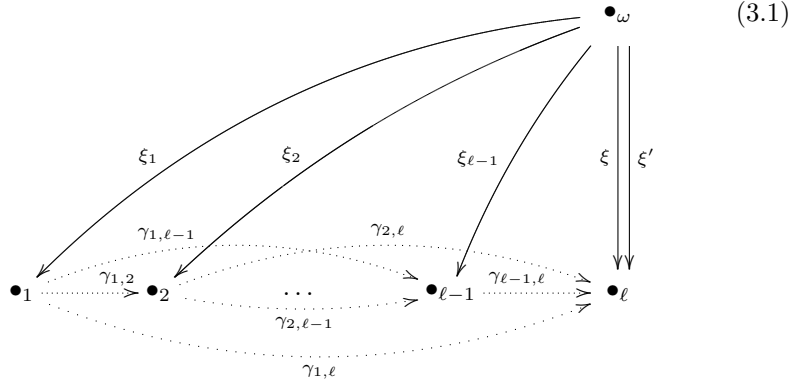
Vector en $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)^*$	Su diferencial δ^x
ξ_j^s	$\sum_{1 \leq i < j} \gamma_{i,j}^s \otimes \xi_i^s,$
ξ	$\sum_{s=1, \dots, t} \beta_s \sum_{1 \leq i < n_s} \gamma_{i, n_s}^s \otimes \xi_i^s,$
ξ'	$\sum_{s=1, \dots, t} \beta'_s \sum_{1 \leq i < n_s} \gamma_{i, n_s}^s \otimes \xi_i^s,$

donde $\rho_s = \beta_s a + \beta'_s a'$ para cada $s = 1, \dots, t$.

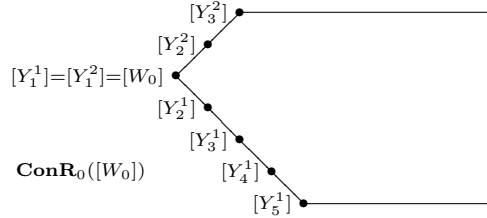
Demostración. La prueba es una aplicación directa de la proposición 3.6 a los resultados del lema anterior 3.29. Para el cálculo de la diferencial se usan la propiedades de las bases dadas en el lema 3.29. \square

Recordamos que $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, N_0) = 1$ para cualquier $N_0 \in \mathcal{X}_0$ y que $\mathbf{dim}_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0) = 2$ (por el lema 3.9). Entonces la extensión de un punto

$A_0^{X_0}[R^{X_0}]$ se forma agregando dos flechas sólidas del vértice ω al vértice m correspondiente al módulo máximo en $\Delta_{X_0}^{-1}$, y una flecha sólida de ω al resto de los vértices. La siguiente figura muestra el carcaj de la ditálgebra reducida \mathcal{A}^X cuando A es el álgebra de caminos de la extensión del diagrama de Dynkin \mathbf{A}_ℓ linealmente ordenado (suprimimos en la notación el superíndice $s = 1$, pues solo tenemos un ala).



El caso de la reducción \mathcal{A}^Y es análogo al anterior. Damos los detalles correspondientes. Escribimos Y_i^s en lugar de la notación W_{i,n_s}^s ($1 < i \leq n_s$ y $s = 1, \dots, t$) para representantes de los elementos de \mathcal{Y}_0 . En este caso todos los A_0 -módulos W_0 y Y_1^s coinciden ($s = 1, \dots, t$), ver como ejemplo la siguiente figura,



Definamos el A_0 -módulo

$$Y_0 = W_0 \oplus \bigoplus_{\substack{1 < i \leq n_s \\ s=1, \dots, t}} Y_i^s,$$

y denotemos con Δ_{Y_0} al carcaj $\Delta_{\{[W_0]\} \cup \mathcal{Y}_0}$. Sea $M_{\Delta_{Y_0}}$ la matriz asociada a Δ_{Y_0} y sea $\Delta_{Y_0}^{-1}$ el carcaj cuya matriz asociada es la inversa $M_{\Delta_{Y_0}}^{-1}$.

Lema 3.31 *El A_0 -módulo Y_0 dado arriba es admisible y completo. Denotamos con (Z'_0, Q_0) a la escisión del álgebra de endomorfismos opuesta Γ'_0 de Y_0 . La k -álgebra Z'_0 es trivial. El álgebra tensorial reducida $A_0^{Y_0}$, dada por $T_{Z'_0}(Q_0^*)$, es isomorfa al álgebra de caminos del carcaj $\Delta_{Y_0}^{-1}$. Además, existen bases duales finitas de elementos legibles*

$$\{(q_{i,j}^s, \varepsilon_{i,j}^s)\}_{\substack{1 \leq i < j \leq n_s \\ s=1, \dots, t}} \quad \text{y} \quad \{(b_i^s, \theta_i^s), (b, \theta), (b', \theta')\}_{\substack{1 < i \leq n_s \\ s=1, \dots, t}}$$

de Q_0 y $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$ respectivamente, donde las restricciones de (b, θ) y (b', θ') a $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ son base dual. Se puede elegir la base de Q_0 de manera

que para $1 \leq i < j \leq n_s$, $1 \leq k < \ell \leq n_r$ y $1 \leq r, s \leq t$ se satisfice

$$q_{i,j}^s q_{k,\ell}^r = \begin{cases} q_{i,\ell}^s, & \text{si } j = k, s = r, \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Sea b_1^s un morfismo no cero en $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$, diferente del morfismo ρ_s dado en el lema 3.29, y consideremos a b_1^s como un elemento de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$. Entonces es posible elegir la base de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$ tal que para $1 \leq j \leq n_s$, $1 \leq k < \ell \leq n_r$ y $1 \leq r, s \leq t$ se satisfice

$$b_j^s q_{k,\ell}^r = \begin{cases} b_\ell^s, & \text{si } j = k, s = r, \\ 0, & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

(todos los productos en Γ'_0).

Demostración. Se observa que existe un morfismo no cero en $\mathbf{Hom}_{A_0}(Y_i^r, Y_j^s)$ si y solo si $r = s$, $i \leq j$. Consideremos

$$Z'_0 = \mathbf{End}_{A_0}(W_0)^{op} \oplus \bigoplus_{\substack{1 < i < j \leq n_s \\ s=1, \dots, t}} \mathbf{End}_{A_0}(Y_i^s)^{op},$$

$$Q_0 = \bigoplus_{\substack{1 \leq i < j \leq n_s \\ s=1, \dots, t}} \mathbf{End}_{A_0}(Y_i^s, Y_j^s)^{op}.$$

Entonces el álgebra opuesta de endomorfismos de Y_0 , vista como álgebra de matrices, es triangular con diagonal isomorfa a Z'_0 . De nuevo por el lema 1.14 la k -álgebra Z'_0 es trivial. Es claro que se tiene una descomposición de Z'_0 - Z'_0 -bimódulos

$$\Gamma'_0 = \mathbf{End}_{A_0}(Y_0)^{op} \cong Z'_0 \oplus Q_0,$$

y por lo tanto Y_0 es admisible y completo. Por definición

$$A_0^{Y_0} = (T_{A_0}(0))^{Y_0} = T_{Z'_0}(Q_0^*).$$

Como en el caso anterior existe un isomorfismo $T_{Z'_0}(Q_0^*) \cong k\Delta_{Y_0}^{-1}$ de álgebras graduadas. Para ello se fija una base dual del Z'_0 -módulo derecho Q_0 . Para cada $i = 1, \dots, n_s - 1$ denotamos con $q_{i,i+1}^s$ a un morfismo no cero entre Y_i^s y Y_{i+1}^s (recordamos que cada Y_1^s es una copia de W_0). Todos los morfismos $q_{i,i+1}^s$ son irreducibles y son epimorfismos, pues cada Y_i^s es generado por W_0 (lema 2.12),

$$W_0 \xrightarrow{q_{1,2}^s} Y_2^s \xrightarrow{q_{2,3}^s} Y_3^s \cdots Y_{n_s-2}^s \xrightarrow{q_{n_s-2, n_s-1}^s} Y_{n_s-1}^s \xrightarrow{q_{n_s-1, n_s}^s} Y_{n_s}^s.$$

Para cada $1 \leq i < j \leq n_s$ definimos

$$q_{i,j}^s = q_{i,i+1}^s q_{i+1,i+2}^s \cdots q_{j-1,j}^s.$$

Entonces $\{(q_{i,j}^s, \varepsilon_{i,j}^s)\}$ es una base dual de elementos legibles de Q_0 , que por construcción satisfice la ecuación del enunciado.

Queremos dar ahora una base de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$ a partir de la base elegida para Q_0 . Primero notamos que para toda $s = 1, \dots, t$ se tiene un diagrama

dual de elementos legibles de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$, donde las restricciones de b y b' a $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ determinan una base, que satisface por construcción la fórmula del enunciado. \square

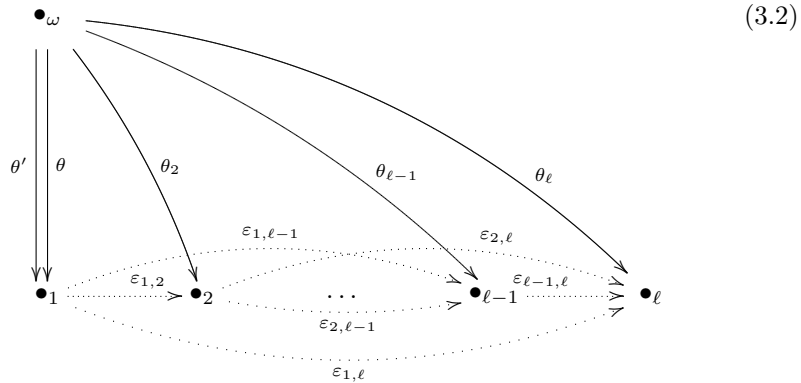
Lema 3.32 Sean $A = A_0[R]$ y B la subálgebra de A dada por $B = A_0[0]$. Denotemos con \mathcal{A} a la ditálgebra con diferencial cero $\mathcal{A} = (A, 0)$. Entonces el B -módulo $Y = Y_0 \oplus S(\omega)$ es admisible completo y la ditálgebra reducida \mathcal{A}^Y es isomorfa a $(k\Delta_{Y_0}^{-1}[R^{Y_0}], \delta^y)$, donde $R^{Y_0} = k\Delta_{Y_0}^{-1} \otimes_{Z_0} \mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)^*$. La diferencial δ^y tiene la siguiente forma explícita en flechas sólidas (elementos de las bases elegidas en el lema 3.31 para la componente L_0^Y del estrato, ver proposición 3.6). Para $\theta \in \mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)^*$ identificamos a θ con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_0^Y$, así como a $\varepsilon \in Q_0^*$ con la matriz $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L_1^Y$.

Vector en $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)^*$	Su diferencial δ^y
θ_j^s	$\alpha_s \varepsilon_{1,j}^s \otimes \theta + \alpha'_s \varepsilon_{1,j}^s \otimes \theta' + \sum_{1 < i < j} \varepsilon_{i,j}^s \otimes \theta_i^s,$
θ	0,
θ'	0,

donde $b_1^s = \alpha_s b + \alpha'_s b'$, para $s = 1, \dots, t$.

Demostración. También consecuencia de la proposición 3.6 y el lema 3.31. \square

De nuevo por el lema 3.9 tenemos que $\dim_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, M_0) = 1$ para todo $[M_0] \in \mathcal{Y}_0$ y $\dim_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0) = 2$. Así, el carcaj de la extensión $A_0^{Y_0}[R^{Y_0}]$ se forma agregando dos flechas sólidas del vértice ω al vértice m correspondiente al módulo máximo en $\Delta_{Y_0}^{-1}$, y una flecha sólida de ω al resto de los vértices. La siguiente figura muestra el carcaj de la ditálgebra reducida \mathcal{A}^Y cuando A es el álgebra de caminos de la extensión del diagrama de Dynkin \mathbf{A}_ℓ linealmente orientado.



Lema 3.33 Los A_0 -módulos X_0 y Y_0 son rígidos.

Demostración. Probamos el caso X_0 . Por las fórmulas de Auslander-Reiten en el caso hereditario, para cualquier par de A_0 -módulos M, N tales que $[M], [N] \in \{[W_0]\} \cup \mathcal{X}_0$ se tiene que

$$\mathbf{Ext}_{A_0}^1(M, N) \cong D\mathbf{Hom}_{A_0}(\tau^{-1}N, M) = 0,$$

pues $M \preceq W_0$ en $\Gamma(A_0)$ y $\tau^{-1}N \not\preceq W_0$.

El caso Y_0 es análogo. Si M, N son A_0 -módulos tales que $[M], [N] \in \{[W_0]\} \cup \mathcal{Y}_0$ se tiene que

$$\mathbf{Ext}_{A_0}^1(M, N) \cong D\mathbf{Hom}_{A_0}(N, \tau M) = 0,$$

pues $W_0 \preceq N$ y $W_0 \not\preceq \tau M$. \square

Denotemos con Δ^X y Δ^Y a los carcajes determinados por las álgebras tensoriales A^X y A^Y . Sea \mathfrak{C}^X el subcarcaj de Δ^X obtenido al eliminar el vértice de extensión ω y el vértice máximo m , así como todas las flechas que inician o terminan en ellos. Como Δ^Y se obtiene de Δ^X al cambiar la orientación de las flechas punteadas, $\mathfrak{C}^Y = (\mathfrak{C}^X)^{op}$. Recuperamos el carcaj Δ^X a partir de \mathfrak{C}^X uniendo una copia de la gráfica de Kronecker $\omega \rightrightarrows m$, una flecha sólida de ω a cada vértice de \mathfrak{C}^X y una punteada de m a cada vértice de \mathfrak{C}^X . De forma similar se recupera Δ^Y a partir de \mathfrak{C}^Y . Las formas cuadráticas de los carcajes Δ^X y Δ^Y coinciden, y será denotada mediante q^{xy} . Sea $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n, d_\omega)$ un vector entero positivo en \mathbb{Z}^{n+1} . Observamos que el valor $q^{xy}(\underline{d})$ no depende del par de enteros d_m, d_ω , solo de su diferencia $r = d_\omega - d_m$, que llamaremos **rango del vector** \underline{d} . En efecto, si denotamos con \mathfrak{C} a la gráfica subyacente de \mathfrak{C}^X (y \mathfrak{C}^Y), se tiene

$$\begin{aligned} q^{xy}(\underline{d}) &= d_\omega^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2d_m d_\omega - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i d_\omega + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i d_m + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j = \\ &= (d_\omega - d_m)^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i (d_\omega - d_m) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j = \\ &= r^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i (d_i - r) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por lo tanto si \underline{d} es una raíz de q^{xy} , entonces para cada entero no negativo u el vector

$$(d_1, \dots, d_{m-1}, d_m + u, d_{m+1}, \dots, d_n, d_\omega + u)$$

también es raíz de q^{xy} . Así, las raíces de las reducciones \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y están dadas en familias numerables para cada entero $r = (d_\omega - d_m)$.

Proposición 3.34 Sean $\mathcal{A}^X = (A^X, \delta^x)$ la ditálgebra dada en el lema 3.30 y $\mathcal{A}^Y = (A^Y, \delta^y)$ la ditálgebra dada en el lema 3.32. Entonces las álgebras de endomorfismos de todo \mathcal{A}^X -módulo excepcional y todo \mathcal{A}^Y -módulo excepcional son isomorfas al campo k . Supongamos que w_0 es la raíz máxima de la forma cuadrática q_0 y sea ℓ el mayor entero que aparece como entrada de w_0 .

- Si $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n, d_\omega)$ es la dimensión vectorial de un \mathcal{A}^Y -módulo excepcional \widetilde{M} tal que $F^Y(\widetilde{M})$ es un A -módulo preinyectivo, entonces $r = (d_\omega - d_m)$ satisface $1 \leq r \leq \ell$.
- Si $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n, d_\omega)$ es la dimensión vectorial de un \mathcal{A}^X -módulo excepcional \widetilde{N} tal que $F^X(\widetilde{N})$ es un A -módulo posproyectivo, entonces $r = (d_\omega - d_m)$ satisface $-1 \leq r < \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i$.

Demostración. Por el lema 3.33 es claro que los B -módulos X y Y son rígidos. Entonces la primera afirmación es consecuencia del lema 1.14, pues los funtores F^X y F^Y son rígidos.

Mostramos primero el inciso (a). Recordamos que la restricción a B de $F^Y(\widetilde{M})$ está dada por $Y \otimes_{Z'_0} \widetilde{M}$, por lo que $e_\omega F^Y(\widetilde{M}) \cong d_\omega S(\omega)$. Además se tiene

$$F^Y(\widetilde{M})|_{A_0} \cong Y_0 \otimes_{Z'_0} \widetilde{M} \cong \bigoplus_{i=1}^n d_i Y_i,$$

por lo que $m_{(F^Y(\widetilde{M}))_0} = d_m$. De esta manera

$$r = d_\omega - d_m = \mathbf{dim}_k(F^Y(\widetilde{M}))_\omega - m_{(F^Y(\widetilde{M}))_0} = \mathbf{rk}(F^Y(\widetilde{M})).$$

Por la proposición 3.28 y ya que $F^Y(\widetilde{M})$ es un preinjectivo en A -mod que se encuentra en $\check{U}(W_0 \vee \mathcal{Y}_0)$, tenemos $r = \mathbf{rk}(F^Y(\widetilde{M})) = \sharp F^Y(\widetilde{M})$. Debido a la proposición 3.25 se concluye que $1 \leq r \leq \ell$.

Mostramos ahora (b). Ya que $\underline{d} = \mathbf{dim} \widetilde{N}$ es el vector dimensión de una representación excepcional \widetilde{N} , por el lema 1.11 se tiene que \underline{d} es raíz de q^{xy} . Por la fórmula (3.3) es claro que $q^{xy}(\underline{d}) = 1$ implica $-1 \leq r$. De manera similar al caso anterior se prueba que $r = \mathbf{rk}(F^X(\widetilde{N}))$. Por la proposición 3.28 y ya que $F^X(\widetilde{N})$ es un posproyectivo en A -mod que se encuentra en $\check{U}(\mathcal{X}_0 \vee W_0)$, se tiene la siguiente igualdad,

$$r + \overrightarrow{\sharp F^X(\widetilde{N})} = \mathbf{rk}(F^X(\widetilde{N})) + \overrightarrow{\sharp F^X(\widetilde{N})} = e_{(F^X(\widetilde{N}))_0}.$$

Se obtiene el resultado observando que $e_{(F^X(\widetilde{N}))_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i$. □

Las siguientes tablas 3.2 y 3.3 muestran familias de raíces positivas de la forma cuadrática q^{xy} asociada a las ditálgebras reducidas \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y . En la notación $\mathcal{R}_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}^{(r)}$ se especifica el rango r y el tipo tubular ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 de la subgráfica donde la raíz es sincera. La presencia de un exponente en el tipo tubular ℓ_s^2, ℓ_s^3 ó $\ell_s^{2^2}$ da cuenta de los enteros d_i distintos de uno fuera de los vértices ω y m .

Rango	Raíces	Subgráfica sincera \mathfrak{C}
-1	$\mathcal{R}_{1,1,1}^{(-1)}$	\emptyset
0	$\dagger \mathcal{R}_{2,1,1}^{(0)}$	1
1	$\mathcal{R}_{1,1,1}^{(1)}; \ddagger \mathcal{R}_{2,1,1}^{(1)}; \mathcal{R}_{2,2,1}^{(1)}; \mathcal{R}_{2,2,2}^{(1)}$	$\emptyset; 1; \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$
2	$\mathcal{R}_{2,2,2}^{(2)}; \mathcal{R}_{3,2,2}^{(2)}; \mathcal{R}_{3,3,2}^{(2)}$	$\begin{matrix} 1; 1 \cdots 1 \\ 1; 1 \end{matrix}; \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}; \begin{matrix} 1 \cdots 1 \\ 1 \end{matrix}$

Tabla 3.2: Raíces positivas (reducidas) de q^{xy} de rango menor. Veremos más adelante que las raíces marcadas con \dagger (rango cero) no son la dimensión vectorial de ningún \mathcal{A}^Y -módulo excepcional, mientras que las marcadas con \ddagger no corresponden a \mathcal{A}^X -módulos excepcionales.

Rango	Raíces	Subgráfica sincera \mathfrak{C}
3	$\mathcal{R}_{3,3,2}^{(3)}; \mathcal{R}_{4,3,2}^{(3)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1; 1 \cdots 1 \\ 1 \quad 1 \end{array}$
	$\mathcal{R}_{3,3,2^2}^{(3)}; \mathcal{R}_{4,3,2^2}^{(3)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1; 1 \cdots 1 \\ 2 \quad 2 \end{array}$
4	$\mathcal{R}_{4,3,2^2}^{(4)}; \mathcal{R}_{5,3,2^2}^{(4)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1; 1 \cdots 1 \\ 1 \cdots 1; 1; 1 \cdots 1 \\ 2 \quad 2 \end{array}$
	$\mathcal{R}_{4,3^2,2^2}^{(4)}; \mathcal{R}_{5,3^2,2^2}^{(4)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1; 1 \cdots 1 \\ i \cdots j; i \cdots j \\ 2 \quad 2 \end{array}$
5	$\mathcal{R}_{5,3^2,2^2}^{(5)}; \mathcal{R}_{5,3^2,2^3}^{(5)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1; 1 \cdots 1 \\ i \cdots j; i \cdots j \\ 2 \quad 3 \end{array}$
	$\mathcal{R}_{5,3^{2^2},2^2}^{(5)}; \mathcal{R}_{5,3^{2^2},2^3}^{(5)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1; 1 \cdots 1 \\ 2 \cdots 2; 2 \cdots 2 \\ 2 \quad 3 \end{array}$
6	$\mathcal{R}_{5,3^{2^2},2^3}^{(6)}; \mathcal{R}_{5^2,3^{2^2},2^3}^{(6)}$	$\begin{array}{c} 1 \cdots 1; 1; 1 \cdots 1 \\ 2 \cdots 2; 2 \cdots 2 \\ 3 \quad 3 \end{array}$

Tabla 3.3: Raíces positivas (reducidas) de q^{xy} de rango mayor. En las raíces de rango 4 y 5 las parejas (i, j) toman los valores $(1, 2)$ y $(2, 1)$. En el último caso los enteros a, b, c, d son mayores o iguales a uno y su suma es cinco. Con implementaciones en GAP [14] se puede argumentar computacionalmente que esta tabla y la tabla 3.2 contienen todos los tipos de raíces positivas de q^{xy} .

Lema 3.35 *Sea q^{xy} la forma cuadrática asociada a las álgebras reducidas \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y y sea $\underline{d} = (d_1, \dots, d_n, d_\omega)$ una raíz positiva de q^{xy} . Si el rango $r = d_\omega - d_m$ del vector \underline{d} es menor o igual a dos, entonces la restricción de \underline{d} a su soporte es uno de los vectores en la tabla 3.2.*

Demostración. Recordamos que

$$q^{xy}(\underline{d}) = r^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i(d_i - r) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j.$$

Si $r \leq 1$ entonces los tres sumandos de la derecha en la ecuación anterior son no negativos.

Caso $r < 0$. En este caso $q^{xy}(\underline{d}) = 1$ implica que $r = -1$ y por lo tanto

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i(d_i + 1) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j.$$

Entonces $d_i = 0$ para $i \in \{1, \dots, \widehat{m}, \dots, n\}$ por lo que \underline{d} tiene la forma $\mathcal{R}_{1,1,1}^{(-1)}$.

Caso $r = 0$. Ahora tenemos

$$1 = q^{xy}(\underline{d}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i^2 + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j,$$

por lo que existe un único $i \in \{1, \dots, \widehat{m}, \dots, n\}$ con d_i distinto de cero y además $d_i = 1$. En este caso el vector \underline{d} tiene la forma $\mathcal{R}_{2,1,1}^{(0)}$.

Caso $r = 1$. Para este caso tenemos la igualdad

$$0 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i(d_i - 1) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j,$$

por lo que si una entrada d_i con $i \in \{1, \dots, \widehat{m}, \dots, n\}$ es distinta de cero, entonces $d_i = 1$. Más aún, dos vértices i, j tales que $d_i = d_j = 1$ no pueden estar en la misma rama de los carcajes Δ^X ó Δ^Y de las ditálgebras reducidas, pues en tal caso existe una flecha punteada $\gamma \in \mathfrak{C}$, entre los vértices i y j (ver figuras (3.1) y (3.2)), y por lo tanto el sumando $\sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j$ es mayor que cero,

lo cual es imposible. Por lo tanto, si existen vértices i tales que $d_i > 0$, entonces $d_i = 1$ y cada vértice i se encuentra en un brazo diferente. Esto corresponde a los cuatro casos de rango uno $\mathcal{R}_{1,1,1}^{(1)}$, $\mathcal{R}_{2,1,1}^{(1)}$, $\mathcal{R}_{2,2,1}^{(1)}$ y $\mathcal{R}_{2,2,2}^{(1)}$.

Caso $r = 2$. Ahora tenemos una igualdad de la forma

$$-3 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^n d_i(d_i - 2) + \sum_{\substack{\gamma \in \mathfrak{C} \\ \gamma: i \rightarrow j}} d_i d_j.$$

Supongamos que existen índices i_1, \dots, i_ℓ en un mismo brazo de Δ^X (ó Δ^Y) tales que $d_{i_j} > 0$. La aportación de las entradas d_{i_j} en la igualdad anterior está dada por

$$\sum_{j=1}^{\ell} d_{i_j}(d_{i_j} - 2) + \sum_{\gamma \in \mathfrak{C}'} d_{s(\gamma)} d_{t(\gamma)},$$

donde \mathfrak{C}' es el subconjunto de \mathfrak{C} dado por flechas (punteadas) entre los vértices i_1, \dots, i_ℓ . Ya que todos estos vértices pertenecen a un mismo brazo, \mathfrak{C}' tiene exactamente $\ell(\ell - 1)/2$ elementos. Por lo tanto

$$\sum_{\gamma \in \mathfrak{C}'} d_{s(\gamma)} d_{t(\gamma)} \geq \frac{\ell(\ell - 1)}{2},$$

y además es claro que $\sum_{j=1}^{\ell} d_{i_j}(d_{i_j} - 2) \geq -\ell$. Entonces

$$\sum_{j=1}^{\ell} d_{i_j}(d_{i_j} - 2) + \sum_{\gamma \in \mathfrak{C}'} d_{s(\gamma)} d_{t(\gamma)} \geq \frac{\ell(\ell - 1)}{2} - \ell = \frac{\ell^2 - 3\ell}{2}.$$

De esta manera la contribución de cada uno de los brazos de Δ^X (ó Δ^Y) es

- -1 , si en el brazo hay exactamente dos vértices i, j con $d_i, d_j > 0$ y además $d_i = d_j = 1$,
- -1 , si en el brazo hay exactamente un vértice i con $d_i > 0$ y además $d_i = 1$,
- no negativa, en todos los demás casos.

Esta serie de rango menos uno corresponde a las K_2 -representaciones posproyectivas (proposición 2.4), y sus imágenes bajo F^Y se encuentran en la componente posproyectiva de $\Gamma(A)$ (por el corolario 3.26). A la derecha, en la figura 3.4, se muestra el carcaj de coeficientes correspondiente al caso $\ell = 6$.

Por otro lado, la familia de raíces $\mathcal{R}_{1,1,1}^{(1)}$ de rango uno corresponde a los K_2 -módulos preinjectivos, por lo que sus imágenes bajo F^Y son A -módulos preinjectivos. Recordamos también que las matrices $I^\leftarrow, I^\rightarrow$ se forman a partir de I agregando una columna de ceros a la izquierda y a la derecha de I respectivamente.

$$\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell] = \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ k^\ell \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad (3.5)$$

En la figura anterior se muestra el carcaj de coeficientes del caso $\ell = 4$.

Para las raíces de rango uno de la forma $\mathcal{R}_{2,1,1}^{(1)}$ se distinguen tres casos. Sean $\widetilde{M}_\theta = I^\leftarrow$ y $\widetilde{M}_{\theta'} = I^\rightarrow$. (en lo sucesivo se omitirá el subíndice 2 en θ^s y ε^s , pues ninguna de las ramas que aparecen tienen longitud mayor que dos).

$$\begin{array}{c} \widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell] = \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \begin{array}{c} \leftarrow \\ \downarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ k^\ell \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Caso } \delta^y(\theta^s) = x(\varepsilon^s \otimes \theta) \\ \widetilde{M}_{\theta^s} = [1, 0, \dots, 0] \\ \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Caso } \delta^y(\theta^s) = x'(\varepsilon^s \otimes \theta') \\ \widetilde{M}_{\theta^s} = [0, \dots, 0, 1] \\ \rightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ k \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Caso } \delta^y(\theta^s) = x(\varepsilon^s \otimes \theta) + x'(\varepsilon^s \otimes \theta') \\ \widetilde{M}_{\theta^s} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \\ \leftrightarrow \end{array} \end{array} \quad (3.6)$$

Para el caso $\delta^y(\theta^s) = x(\varepsilon^s \otimes \theta)$ tomamos $\widetilde{M}_{\theta^s} = [1, 0, \dots, 0]$ y cuando $\delta^y(\theta^s) = x'(\varepsilon^s \otimes \theta')$ hacemos $\widetilde{M}_{\theta^s} = [0, \dots, 0, 1]$ ($x, x' \neq 0$). En el caso $\delta^y(\theta^s) = x(\varepsilon^s \otimes \theta) + x'(\varepsilon^s \otimes \theta')$ podemos colocar el uno de la matriz \widetilde{M}_{θ^s} en cualquier lugar, $\widetilde{M}_{\theta^s} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ ($s \in \{1, \dots, t\}$). En la figura anterior se dan carcajes de coeficientes correspondientes a cada caso para $\ell = 4$.

Para terminar el caso de rango uno observamos que se pueden dar carcajes de coeficientes de los \mathcal{A}^Y -módulos excepcionales $\widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]$ y $\widetilde{M}_{2,2,2}^{(1)}[\ell]$ determinando

representaciones excepcionales para cualquier forma de la diferencial δ^y ,

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell] \\ \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \downarrow I^{\leftarrow} \quad \downarrow I^{\rightarrow} \\ k^{\ell} \\ \downarrow \widetilde{M}_{\theta^r} \\ k \\ \downarrow \widetilde{M}_{\theta^s} \\ k \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagrama de zigzag} \\ \text{con } 4 \text{ picos} \end{array} & \begin{array}{c} \widetilde{M}_{2,2,2}^{(1)}[\ell] \\ \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \downarrow I^{\leftarrow} \quad \downarrow I^{\rightarrow} \\ k^{\ell} \\ \downarrow \widetilde{M}_{\theta^r} \\ k \\ \downarrow \widetilde{M}_{\theta^s} \\ k \\ \downarrow \widetilde{M}_{\theta^u} \\ k \end{array} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \widetilde{M}_{\theta^r} = [1, 0, \dots, 0] \\ \widetilde{M}_{\theta^s} = [0, \dots, 0, 1] \end{array} & & \begin{array}{c} \widetilde{M}_{\theta^u} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0] \end{array} \\
 & & (3.7)
 \end{array}$$

En efecto, si existe $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\delta^y(\theta^i) \in k(\varepsilon^i \otimes \theta)$ (recordamos que $\widetilde{M}_{\theta} = I^{\leftarrow}$), entonces tomamos $r = i$. De forma similar, si existe $j \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\delta^y(\theta^j) \in k(\varepsilon^j \otimes \theta')$ tomamos $s = j$ ($\widetilde{M}_{\theta} = I^{\leftarrow}$). En cualquier otro caso tomamos r, s y u de manera arbitraria. Hacemos $\widetilde{M}_{\theta^r} = [1, 0, \dots, 0]$, $\widetilde{M}_{\theta^s} = [0, \dots, 0, 1]$ y $\widetilde{M}_{\theta^u} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$

Lema 3.36 Las series de \mathcal{A}^Y -módulos de rango menos uno $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(-1)}[\ell]$ ($\ell \geq 1$) y rango uno $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell]$, $\widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell]$, $\widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]$ y $\widetilde{M}_{2,2,2}^{(1)}[\ell]$ ($\ell \geq 0$) dadas arriba consisten en representaciones excepcionales.

Demostración. Como se muestra en la proposición 2.4 las representaciones $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(-1)}[\ell]$ y $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell]$ son excepcionales. Para los casos restantes, ya que las dimensiones vectoriales de las representaciones exhibidas son raíces de q^{xy} , por el lema 1.4 basta mostrar que sus álgebras de endomorfismos son de dimensión uno.

Consideramos primero la familia $\widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell]$ con $\delta^y(\theta^s) = x(\varepsilon^s \otimes \theta)$ ($x \neq 0$). En el siguiente diagrama damos un endomorfismo $f = (f^0, f^1)$ mediante las matrices A^0, B^0 y $C^0 = [c^0]$ (parte f^0) y $A^1 = [a_1^1 \dots a_t^1]$ (parte f^1).

$$\begin{array}{ccc}
 k^{\ell+1} & \xrightarrow{A^0} & k^{\ell+1} \\
 \downarrow I^{\leftarrow} \quad \downarrow I^{\rightarrow} & & \downarrow I^{\leftarrow} \quad \downarrow I^{\rightarrow} \\
 k^{\ell} & \xrightarrow{B^0} & k^{\ell} \\
 \downarrow [1, 0, \dots, 0, 0] & \xrightarrow{[a_1^1 \dots a_t^1]} & \downarrow [1, 0, \dots, 0, 0] \\
 k & \xrightarrow{[c^0]} & k
 \end{array}$$

Ya que las flechas θ y θ' determinan un subcarcaj de Kronecker se tiene $A^0 = [aI]$ y $B^0 = [aI]$ para algún escalar a . Además, de la definición de morfismo (A.5)

tenemos

$$[1, 0 \dots 0, 0]A^0 = C^0[1, 0 \dots 0, 0] + xA^1I^{\leftarrow},$$

es decir,

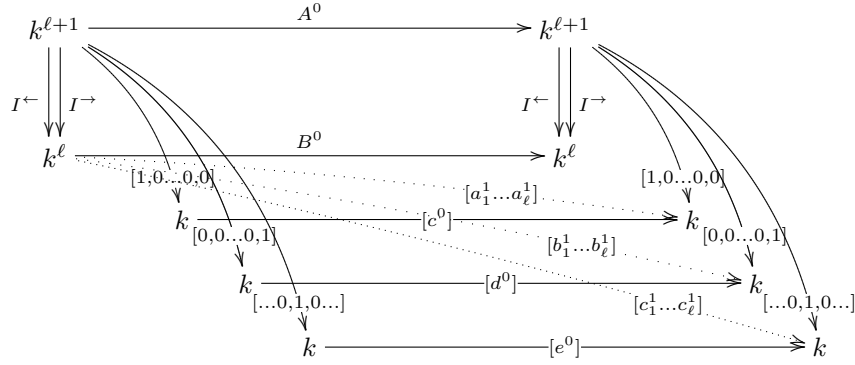
$$[a - c^0, 0 \dots 0, 0] = x[0, a_1^1 \dots a_\ell^1],$$

y por lo tanto $a = c^0$ y $A^1 = 0$. De esta manera $\mathbf{End}_{\mathcal{A}^Y}(\widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell]) = kId$. El caso $\delta^y(\theta^s) = x'(\varepsilon^s \otimes \theta')$ ($x' \neq 0$) se trata de manera similar y para el caso $\delta^y(\theta^s) = x(\varepsilon^s \otimes \theta) + x'(\varepsilon^s \otimes \theta')$ (figura 3.6) observamos que la ecuación anterior tiene la forma

$$[\dots 0, a - c^0, 0 \dots] = x[0, a_1^1 \dots a_\ell^1] + x'[a_1^1 \dots a_\ell^1, 0],$$

por lo que se concluye de nuevo $a = c^0$ y $a_1^1 = \dots = a_\ell^1 = 0$.

Calculamos ahora el álgebra de endomorfismos de $\widetilde{M}_{2,2,2}^{(1)}[\ell]$ (el caso $\widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]$ es análogo) con ayuda del siguiente diagrama,



Ya que el cuadrado central es conmutativo se tiene $A^0 = [aI]$ y $B^0 = [aI]$ (para algún $a \in k$). Las siguientes ecuaciones se deducen de la definición de morfismo y las condiciones $\delta^y(\theta^r) = \varepsilon^r \otimes \theta$, $\delta^y(\theta^s) = \varepsilon^s \otimes \theta'$ y $\delta^y(\theta^u) = x(\varepsilon^u \otimes \theta) + x'(\varepsilon^u \otimes \theta')$ ($x, x' \neq 0$). Otras condiciones se tratan de manera similar cambiando el primer y/o el segundo renglón por uno similar al tercer renglón,

$$[a - c^0, 0 \dots 0, 0] = [0, a_1^1 \dots a_\ell^1],$$

$$[0, 0 \dots 0, a - d^0] = [0, b_1^1 \dots b_\ell^1],$$

$$[\dots 0, a - e^0, 0 \dots] = x[0, c_1^1 \dots c_\ell^1] + x'[c_1^1 \dots c_\ell^1, 0],$$

de manera que $a = c^0 = d^0 = e^0$ y $a_1^1 = \dots = a_\ell^1 = b_1^1 = \dots = b_\ell^1 = c_1^1 = \dots = c_\ell^1 = 0$. Por lo tanto el álgebra de endomorfismos de $\widetilde{M}_{2,2,2}^{(1)}[\ell]$ tiene dimensión uno, lo cual termina la prueba. \square

El caso de \mathcal{A}^Y -representaciones de rango dos se considera por casos dependiendo de la paridad del parámetro ℓ . En la figura (3.8) mostramos explícitamente una serie de módulos para ℓ par (representaciones $\widetilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$) correspondiente a las raíces de tipo $\mathcal{R}_{3,3,2}^{(2)}$ junto con el carcaj de coeficientes en el caso $\ell = 8$. Representaciones correspondientes a raíces de tipo $\mathcal{R}_{3,2,2}^{(2)}[\ell]$ y tipo $\mathcal{R}_{2,2,2}^{(2)}$ se obtienen eliminando del módulo $\widetilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ las matrices \widetilde{N}_{θ^v} y/o \widetilde{N}_{θ^w} (líneas

punteadas en el carcaj de coeficientes), dependiendo del valor de la diferencial δ^y . El caso ℓ impar es descrito en la figura (3.9).

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\theta^r} &= [1, 0 \dots | \dots 0, 0] \\ \tilde{N}_{\theta^s} &= [0, 0 \dots | \dots 0, 1] \\ \tilde{N}_{\theta^u} &= [\dots 0, 1, 0 \dots | \dots 0, 1, 0 \dots] \\ \tilde{N}_{\theta^v} &= [0, 0 \dots | 1, 0 \dots] \\ \tilde{N}_{\theta^w} &= [\dots 0, 1 | \dots 0, 0] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para dar las transformaciones \tilde{N}_{θ^r} , \tilde{N}_{θ^s} y \tilde{N}_{θ^u} supondremos que las flechas θ^r , θ^s y θ^u satisfacen

$$\delta^y(\theta^r) = \varepsilon^r \otimes \theta, \quad \delta^y(\theta^s) = \varepsilon^s \otimes \theta' \quad \text{y} \quad \delta^y(\theta^u) = x(\varepsilon^u \otimes \theta) + x'(\varepsilon^u \otimes \theta'),$$

donde x y x' son escalares diferentes de cero (la forma de $\tilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ es la misma, salvo permutación en los índices r , s y u , para otras formas de la diferencial). Tomamos las transformaciones $\tilde{N}_{\theta^r} = [1, 0 \dots | \dots 0, 0]$, $\tilde{N}_{\theta^s} = [0, 0 \dots | \dots 0, 1]$ y $\tilde{N}_{\theta^u} = [\dots 0, 1, 0 \dots | \dots 0, 1, 0 \dots]$, donde las posiciones de los unos en la última matriz son arbitrarias dentro de los bloques que separa la línea central.

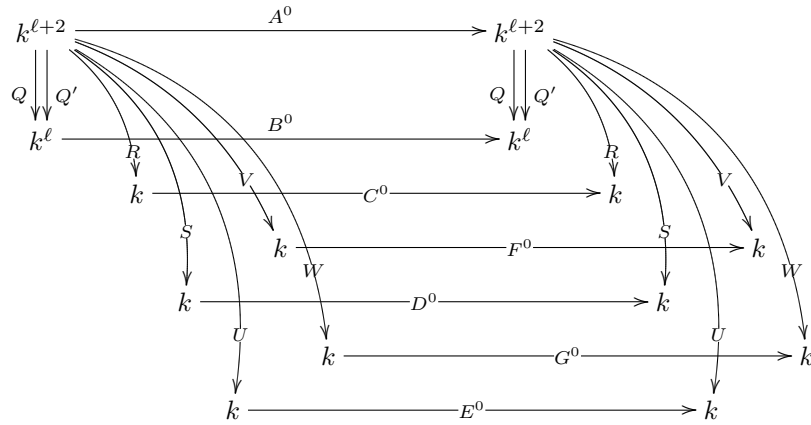
Para el caso ℓ impar hacemos la misma suposición sobre la diferencial de las flechas θ^r , θ^s y θ^u y mostramos como ejemplo el carcaj de coeficientes para el caso $\ell = 7$.

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{\theta^r} &= [1, 0 \dots 0, 0 | 1, 0 \dots 0] \\ \tilde{M}_{\theta^s} &= [0, 0 \dots 0, 0 | 0 \dots 0, 1] \\ \tilde{M}_{\theta^u} &= [0, 0 \dots 0, 0 | \dots 0, 1, 0 \dots] \\ \tilde{M}_{\theta^v} &= [0, 0 \dots 0, 0 | 1, 0 \dots 0] \\ \tilde{M}_{\theta^w} &= [0, 0 \dots 0, 1 | \dots 0, 0] \end{aligned} \quad (3.9)$$

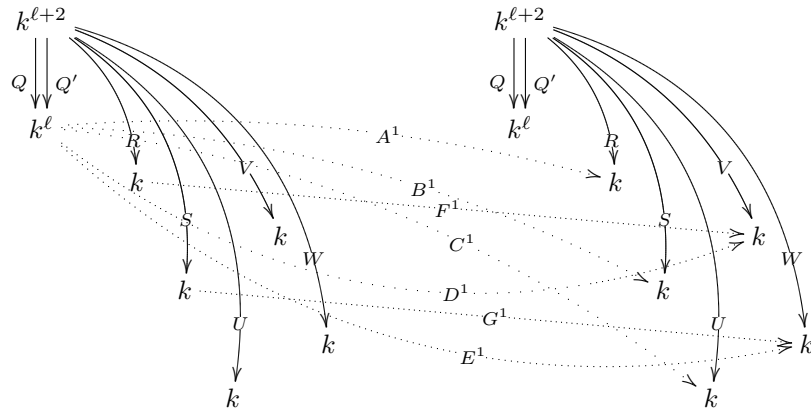
(en la presentación de las matrices $\widetilde{M}_{\theta^r}, \dots, \widetilde{M}_{\theta^w}$ el bloque de la izquierda de línea $|$ tiene tamaño $(\ell + 1)/2 + 1$, mientras que el de la derecha tiene tamaño $(\ell - 1)/2 + 1$.)

Lema 3.37 *Las series de módulos de rango dos $\widetilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ ($\ell \geq 0$ par) y $\widetilde{M}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ ($\ell \geq 1$ impar) dadas arriba consisten en \mathcal{A}^Y -representaciones excepcionales. Más aún, las representaciones $\widetilde{N}_{3,2,2}^{(2)}[\ell]$, $\widetilde{N}_{2,2,2}^{(2)}[\ell]$ y $\widetilde{M}_{3,2,2}^{(2)}[\ell]$, $\widetilde{M}_{2,2,2}^{(2)}[\ell]$ que se obtienen al remover las matrices correspondientes a las flechas θ^v y/o θ^w también son excepcionales.*

Demostración. De nuevo calculamos álgebras de endomorfismos y usamos el lema 1.4. Consideramos primero el caso ℓ par (representaciones $\widetilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$). Damos un endomorfismo (f^0, f^1) de $\widetilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ mediante las matrices A^0, \dots, G^0 , que conforman la parte f^0 y A^1, \dots, G^1 para la parte f^1 (que por claridad mostramos abajo en diagramas separados).



En este caso se tiene $Q = \widetilde{N} = I_{\ell/2}^{\leftarrow} \oplus I_{\ell/2}^{\leftarrow}$ y $Q' = \widetilde{N}' = I_{\ell/2}^{\rightarrow} \oplus I_{\ell/2}^{\rightarrow}$. Además tenemos $R = \widetilde{N}_{\theta^r} = [1, 0 \dots | \dots 0, 0]$, $S = \widetilde{N}_{\theta^s} = [0, 0 \dots | \dots 0, 1]$, $U = \widetilde{N}_{\theta^u} = [\dots 0, 1, 0 \dots | \dots 0, 1, 0 \dots]$, $V = \widetilde{N}_{\theta^v} = [0, 0 \dots | 1, 0 \dots]$ y por último $W = \widetilde{N}_{\theta^w} = [\dots 0, 1 | \dots 0, 0]$ (figura 3.8).



Las matrices A^0, \dots, G^0 y A^1, \dots, G^1 se encuentran sujetas a las siguientes ecuaciones que se obtienen de la definición de morfismo (A.5). Recordamos que nos encontramos bajo la suposición $\delta^y(\theta) = \delta^y(\theta') = 0$, $\delta^y(\theta^r) = \varepsilon^r \otimes \theta$, $\delta^y(\theta^s) = \varepsilon^s \otimes \theta'$ y $\delta^y(\theta^u) = x(\varepsilon^u \otimes \theta) + x'(\varepsilon^u \otimes \theta')$ (y por lo tanto $\delta^y(\theta^v) = \varepsilon^v \otimes \theta + \varepsilon^{r,v} \otimes \theta^r$ y $\delta^y(\theta^w) = \varepsilon^w \otimes \theta' + \varepsilon^{s,w} \otimes \theta^s$),

$$\begin{cases} QA^0 = B^0Q, \\ Q'A^0 = B^0Q', \end{cases} \begin{cases} RA^0 = C^0R + A^1Q, \\ SA^0 = D^0S + B^1Q', \\ UA^0 = E^0U + xC^1Q + x'C^1Q', \end{cases} \begin{cases} VA^0 = F^0V + D^1Q + F^1R, \\ WA^0 = G^0W + E^1Q' + G^1S. \end{cases} \quad (3.10)$$

Considerando restricciones a la subcategoría de Kronecker, las matrices (A^0, B^0) determinan un morfismo $Q_2^{\ell/2} \oplus Q_2^{\ell/2} \rightarrow Q_2^{\ell/2} \oplus Q_2^{\ell/2}$ de A_2 -módulos (consultar proposición 2.4), y por lo tanto están dadas por bloques de la siguiente forma (recordemos que $\mathbf{End}_{A_2}(P_2^{\ell/2}) \cong k$),

$$A^0 = \begin{bmatrix} aI_{n+1} & b'I_{n+1} \\ a'I_{n+1} & bI_{n+1} \end{bmatrix}, \quad B^0 = \begin{bmatrix} aI_n & b'I_n \\ a'I_n & bI_n \end{bmatrix}, \quad \text{donde } n = \ell/2,$$

para escalares $a, b, a', b' \in k$. Las primeras dos ecuaciones del centro (3.10) se reescriben como sigue,

$$\begin{aligned} [a - c^0, 0 \dots 0, 0 | b', 0 \dots 0, 0] &= [0, a_1^1 \dots a_{\ell/2}^1 | 0, a_{\ell/2+1}^1 \dots a_{\ell}^1], \\ [0, 0 \dots 0, a' | 0, 0 \dots 0, b - d^0] &= [b_1^1 \dots b_{\ell/2}^1, 0 | b_{\ell/2+1}^1 \dots b_{\ell}^1, 0], \end{aligned}$$

en particular se tiene que $a' = b' = 0$, y por lo tanto la tercera ecuación central tiene la forma

$$\begin{aligned} [\dots 0, a - e^0, 0 \dots | \dots 0, b - e^0, 0 \dots] &= x [0, c_1^1 \dots c_{\ell/2}^1 | 0, c_{\ell/2+1}^1 \dots c_{\ell}^1] + \\ &+ x' [c_1^1 \dots c_{\ell/2}^1, 0 | c_{\ell/2+1}^1 \dots c_{\ell}^1, 0]. \end{aligned}$$

Así se tiene $a = b = c^0 = d^0 = e^0$ y $A^1 = B^1 = C^1 = 0$ (en particular las representaciones $\tilde{N}_{2,2,2}^{(2)}[\ell]$ son excepcionales). Por otro lado, las ecuaciones del lado derecho son

$$\begin{aligned} [0, 0 \dots 0, 0 | a - f^0, 0 \dots 0, 0] &= [0, d_1^1 \dots d_{\ell/2}^1 | 0, d_{\ell/2+1}^1 \dots d_{\ell}^1] + \\ &+ [f^1, 0 \dots 0, 0 | 0, 0 \dots 0, 0], \\ [0, 0 \dots 0, a - g^0 | 0, 0 \dots 0, 0] &= [e_1^1 \dots e_{\ell/2}^1, 0 | e_{\ell/2+1}^1 \dots e_{\ell}^1, 0] + \\ &+ [0, 0 \dots 0, 0 | 0, 0 \dots 0, g^1], \end{aligned}$$

de donde se sigue que $a = f^0 = g^0$, $D^1 = E^1 = 0$ y $F^1 = G^1 = 0$. De esta manera $f^0 = aId$ y $f^1 = 0$, es decir, el álgebra de endomorfismos de $\tilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ tiene dimensión uno y $\tilde{N}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ es excepcional (así como los módulos $\tilde{N}_{3,2,2}^{(2)}[\ell]$).

Consideramos ahora el caso $\tilde{M}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ dado en la figura (3.9). En este caso se tiene $Q = \tilde{M} = I_{\ell+1/2}^{\leftarrow} \oplus I_{\ell-1/2}^{\leftarrow}$ y $Q' = \tilde{M}' = I_{\ell+1/2}^{\rightarrow} \oplus I_{\ell-1/2}^{\rightarrow}$. Además tenemos $R = \tilde{M}_{\theta^r} = [1, 0 \dots 0 | 1, 0 \dots 0]$, $S = \tilde{M}_{\theta^s} = [0 \dots 0 | 0 \dots 0, 1]$, $U = \tilde{M}_{\theta^u} = [0 \dots 0 | \dots 0, 1, 0 \dots]$, $V = \tilde{M}_{\theta^v} = [0 \dots 0 | 1, 0 \dots 0]$ y $W = \tilde{M}_{\theta^w} =$

$[0 \dots 0, 1 | 0 \dots 0]$. De la conmutatividad del cuadrado que corresponde al subcarcaj de Kronecker, la pareja (A^0, B^0) determina un morfismo de A_2 -módulos $Q_2^{\ell+1/2} \oplus Q_2^{\ell-1/2} \rightarrow Q_2^{\ell+1/2} \oplus Q_2^{\ell-1/2}$, y usando la proposición 2.4 se tiene ($n = (\ell - 1)/2$)

$$A^0 = \begin{bmatrix} aI_{n+2} & 0 \\ a'I_{n+1}^{\leftarrow} + b'I_{n+1}^{\rightarrow} & bI_{n+1} \end{bmatrix}, \quad B^0 = \begin{bmatrix} aI_{n+1} & 0 \\ a'I_n^{\leftarrow} + b'I_n^{\rightarrow} & bI_n \end{bmatrix},$$

para algunos $a, b, a', b' \in k$. De las primeras dos ecuaciones centrales en (3.10) obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} [a + a' - c^0, b', 0 \dots 0 | b - c^0, 0 \dots 0] &= [0, a_1^1 \dots a_{\ell+1/2}^1 | 0, a_{\ell+1/2+1}^1 \dots a_{\ell}^1] \quad (3.11) \\ [0 \dots 0, a', b' | 0 \dots 0, b - d^0] &= [b_1^1 \dots b_{\ell+1/2}^1, 0 | b_{\ell+1/2+1}^1 \dots b_{\ell}^1, 0], \end{aligned}$$

de donde se sigue $b' = 0$, $b = d^0$ y $B^1 = 0$. Entonces la tercera ecuación está dada por

$$\begin{aligned} [\dots 0, a', 0 \dots | \dots 0, b - e^0, 0 \dots] &= x [0, c_1^1 \dots c_{\ell+1/2}^1 | 0, c_{\ell+1/2+1}^1 \dots c_{\ell}^1] + \\ &+ x' [c_1^1 \dots c_{\ell+1/2}^1, 0 | c_{\ell+1/2+1}^1 \dots c_{\ell}^1, 0], \end{aligned}$$

y por lo tanto $a' = 0$, $b = e^0$ y $C^1 = 0$. Ya que $a' = 0$, de la igualdad (3.11) se sigue que $a = c^0 = b$, y como $b' = 0$ se tiene $A^1 = 0$ (en particular las representaciones $\widetilde{M}_{2,2,2}^{(2)}[\ell]$ son excepcionales). Finalmente, del par de ecuaciones a la derecha en (3.10) se obtienen las igualdades

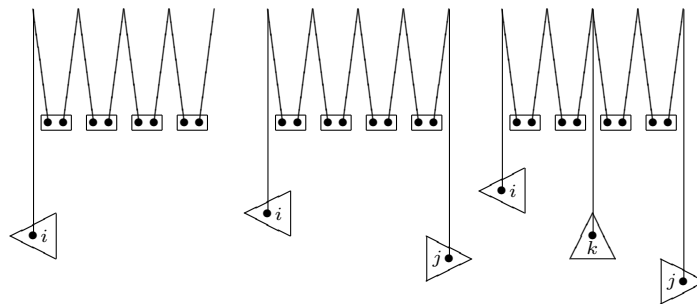
$$\begin{aligned} [0, 0 \dots 0, 0 | a - f^0 \dots 0] &= [0, d_1^1 \dots d_{\ell+1/2}^1 | 0, d_{\ell+1/2+1}^1 \dots d_{\ell}^1] + \\ &+ [f^1, 0 \dots 0, 0 | f^1 \dots 0], \\ [0, 0 \dots 0, a - g^0 | 0 \dots 0] &= [e_1^1 \dots e_{\ell+1/2}^1, 0 | e_{\ell+1/2+1}^1 \dots e_{\ell}^1, 0] + \\ &+ [0, 0 \dots 0, 0 | 0 \dots g^1]. \end{aligned}$$

Entonces $f^1 = 0$ por lo que $a = f^0 = g^0$, $D^1 = E^1 = 0$ y $F^1 = G^1 = 0$, es decir, el álgebra de endomorfismos de $\widetilde{M}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ tiene dimensión uno y $\widetilde{M}_{3,3,2}^{(2)}[\ell]$ es excepcional (así como los módulos $\widetilde{M}_{3,2,2}^{(2)}$). Esto termina la prueba. \square

Capítulo 4

Construcción de módulos excepcionales para $\widetilde{\Delta}$.

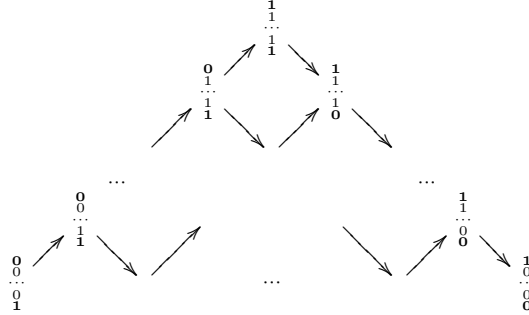
En este capítulo usamos las representaciones excepcionales reducidas dadas al final del capítulo anterior y los funtores asociados a la reducción F^X y F^Y para construir familias de $\widetilde{\Delta}$ -módulos excepcionales, donde $\widetilde{\Delta}$ es un carcaj de Dynkin extendido con su vértice de extensión fuente. La construcción puede ser hecha directamente a nivel de carcajes de coeficientes, para lo cual es necesario conocer explícitamente algunas representaciones del diagrama de Dynkin Δ . El carcaj de coeficientes correspondiente al Δ -módulo excepcional máximo W_0 es indicado mediante $\square \bullet$. Los vértices marcados forman base del espacio vectorial $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$. El resto de Δ -módulos necesarios, cuyas clases de isomorfismo conforman los conjuntos \mathcal{X}_0 y \mathcal{Y}_0 , son indicados mediante la figura $\triangleleft \bullet i$. El índice i determina la representación X_i ó Y_i correspondiente mientras que la orientación del triángulo diferencia las alas de vértice $[W_0]$ en el carcaj de Auslander-Reiten de A_0 .



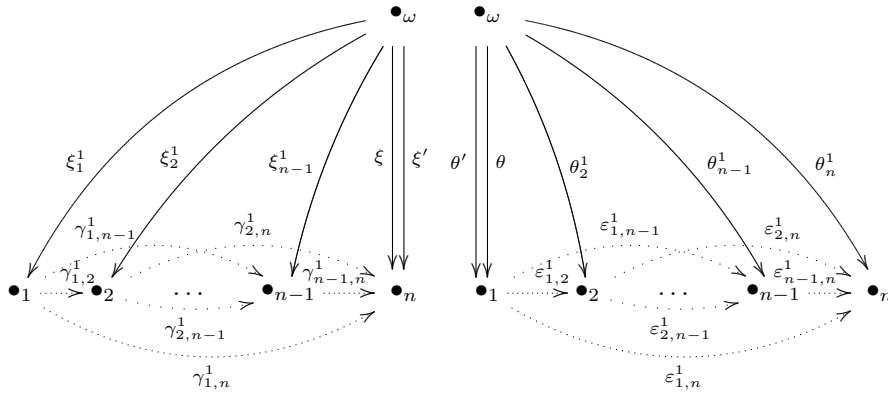
4.1 Representaciones de $\widetilde{\mathbf{A}}_n$.

Primero consideramos carcajes de Dynkin extendido $\widetilde{\mathbf{A}}_n$ ($n \geq 2$) con orientación lineal de sus flechas. En este caso el carcaj de Auslander-Reiten del diagrama

de Dynkin $\Gamma(k\mathbf{A}_n)$ consiste en una sola ala de orden n .



De acuerdo a los lemas 3.30 y 3.32 calculamos las ditálgebras reducidas \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y , donde X_0 es suma directa de representantes de los A_0 -módulos proyectivos y Y_0 es suma directa de representantes de los A_0 -módulos inyectivos (ordenados de izquierda a derecha en ambos casos). Para ello se fijan bases de los espacios $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ y $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$ como en los lemas 3.29 y 3.31, y se elige como base de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$ los vectores $a = \rho_1$ y a' arbitrario, y $b_1^1 = b = a'$, $b' = \rho_1$. Los carcajes correspondientes a las reducciones \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y se muestran a continuación.



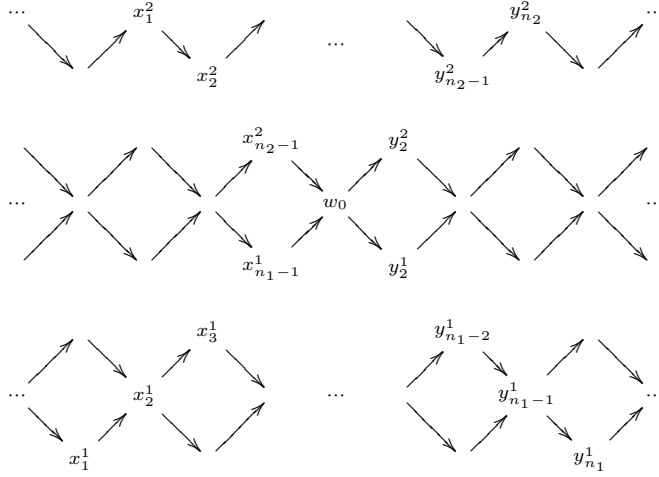
Respecto a las bases elegidas las diferenciales δ^x y δ^y tienen la siguiente forma.

Flecha	Su diferencial δ^x	Flecha	Su diferencial δ^y
ξ_j^1	$\sum_{1 \leq i < j} \gamma_{i,j}^1 \otimes \xi_i^1$,	θ_j^1	$\varepsilon_{1,j}^1 \otimes \theta + \sum_{1 < i < j} \varepsilon_{i,j}^1 \otimes \theta_i^1$,
ξ	$\sum_{1 \leq i < n_1} \gamma_{i,n_1}^1 \otimes \xi_i^1$,	θ	0,
ξ'	0,	θ'	0.

El carcaj de coeficiente de una representación excepcional correspondiente a la raíz máxima del diagrama \mathbf{A}_n , que indicamos mediante la figura \blacksquare , es sustituido en los carcajes de coeficientes de los \mathcal{A}^Y -módulos de rango menos uno $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(-1)}[\ell]$ y rango uno $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell]$ dados en los puntos (3.4) y (3.5) de la sección 3.7, para determinar así directamente carcajes de coeficientes para $F^Y(\widetilde{M}_{1,1,1}^{(-1)}[\ell])$ y $F^Y(\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell])$. Se muestran como ejemplo carcajes de coeficientes para el caso $\ell = 4$.

representación de la forma $F^Y(\widetilde{M})$ donde \widetilde{M} es alguno de los módulos $\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell]$ ó $\widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell]_i$ con $1 < i \leq n$ dados en el lema 3.36. \square

Pasamos ahora al caso \mathbf{A}_n con orientación de flechas no lineal, por lo que tenemos dos alas de vértice $[W_0]$ en el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(k\mathbf{A}_n)$.



Observamos que se tienen exactamente $2n - 2$ representaciones inescindibles Z_0 de \mathbf{A}_n tales que $\dim_k \mathbf{Hom}_{A_0}(R, Z_0) = 1$. Por el lema 3.9 estos son los elementos que conforman los conjuntos \mathcal{X}_0 y \mathcal{Y}_0 . Se tienen reordenaciones de estas raíces como se muestra enseguida, donde como de costumbre w_0 es la raíz máxima de \mathbf{A}_n ,

$$\{x_1^1, \dots, x_{n_1-1}^1, w_0, y_2^2, \dots, y_{n_2}^2\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}, \dots, \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\},$$

$$\{x_2^2, \dots, x_{n_2-1}^2, w_0, y_2^1, \dots, y_{n_1}^1\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \dots, \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}, \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\}.$$

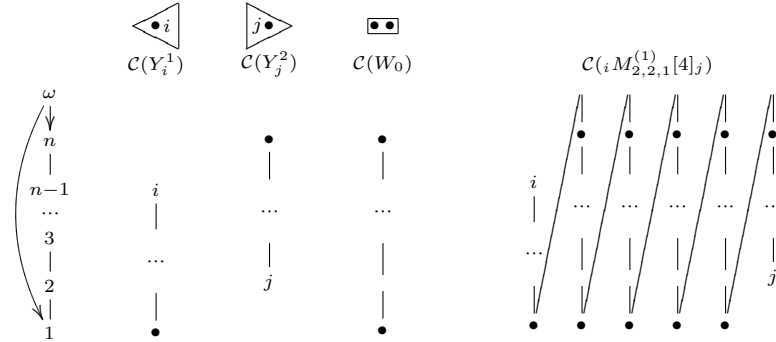
Más aún, ya que existen morfismos no cero $W_0 \rightarrow Y_i^1$ y $W_0 \rightarrow Y_j^2$ para $1 < i \leq n_1$ y $1 < j \leq n_2$, notamos que los elementos de \mathcal{Y}_0 corresponden a aquellas raíces tales que la flecha que une el último uno con el primer cero tiene la orientación $1 \rightarrow 0$. De manera análoga los elementos de \mathcal{X}_0 corresponden a aquellas raíces donde la flecha que une la serie de unos con la serie de ceros tiene la orientación $0 \rightarrow 1$. Para la elección de bases de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, X_0)$ y $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, Y_0)$ tomamos $a = \rho_1$, $a' = \rho_2$, $b_1^1 = b = a'$ y $b_1^2 = b' = a$ (consultar lemas 3.29 y 3.31). De esta manera las diferenciales δ^x y δ^y tienen la forma dada en la siguiente tabla.

Flecha	Su diferencial δ^x	Flecha	Su diferencial δ^y
ξ_j^1	$\sum_{1 \leq i < j} \gamma_{i,j}^1 \otimes \xi_i^1$,	θ_j^1	$\varepsilon_{1,j}^1 \otimes \theta + \sum_{1 < i < j} \varepsilon_{i,j}^1 \otimes \theta_i^1$,
ξ_j^2	$\sum_{1 \leq i < j} \gamma_{i,j}^2 \otimes \xi_i^2$,	θ_j^2	$\varepsilon_{1,j}^2 \otimes \theta' + \sum_{1 < i < j} \varepsilon_{i,j}^2 \otimes \theta_i^2$,
ξ	$\sum_{1 \leq i < n_1} \gamma_{i,n_1}^1 \otimes \xi_i^1$,	θ	0,
ξ'	$\sum_{1 \leq i < n_2} \gamma_{i,n_2}^2 \otimes \xi_i^2$,	θ'	0.

Para completar la lista de módulos de rango uno que aparecen en el caso \mathbf{A}_n consideramos representaciones reducidas del tipo ${}_i\widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_j$ (punto (3.7)) y describimos las representaciones $F^Y({}_i\widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_j)$. Las gráficas indicadas mediante

$\triangleleft \bullet i$ y $\triangleright \bullet j$ corresponden a carcajes de coeficientes de Y_i^1 y Y_j^2 respectivamente. Mostramos como ejemplo el caso $\ell = 4$.

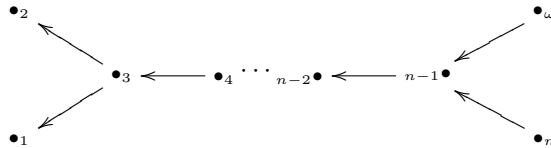
Representaciones de rango uno ${}_i M_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_j = F^Y({}_i \widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_j)$ ($\ell \geq 0$).



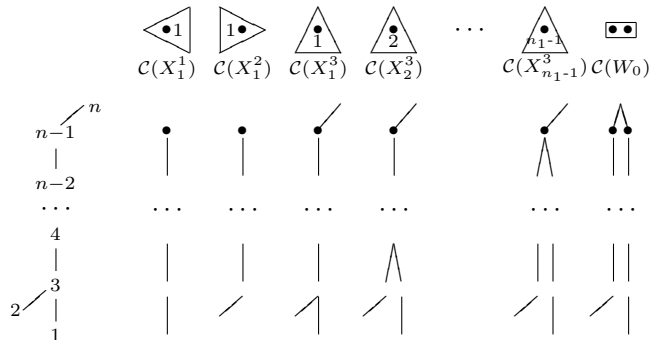
Estas representaciones de $\widetilde{\mathbf{A}}_n$ corresponden a las representaciones N_π determinadas por paseos π (en dirección contraria a las manecillas del reloj) dadas por Gabriel y Roiter [13, sección 11.3].

4.2 Representaciones de $\widetilde{\mathbf{D}}_n$.

Para los diagramas de Dynkin extendido de tipo $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ fijamos la siguiente orientación de flechas,



En la figura 4.1 se muestra el carcaj de Auslander-Reiten $\Gamma(k\mathbf{D}_n)$ del diagrama de Dynkin correspondiente \mathbf{D}_n . Ordenamos las alas de vértice $[W_0]$ comenzando con el ala que contiene al proyectivo sincero (la de orden mayor en los casos $n > 4$). Primero fijamos representaciones para las raíces que aparecen en la figura 4.1. Mostramos carcajes de coeficientes correspondientes al módulo máximo y a representantes de los elementos de \mathcal{X}_0 .



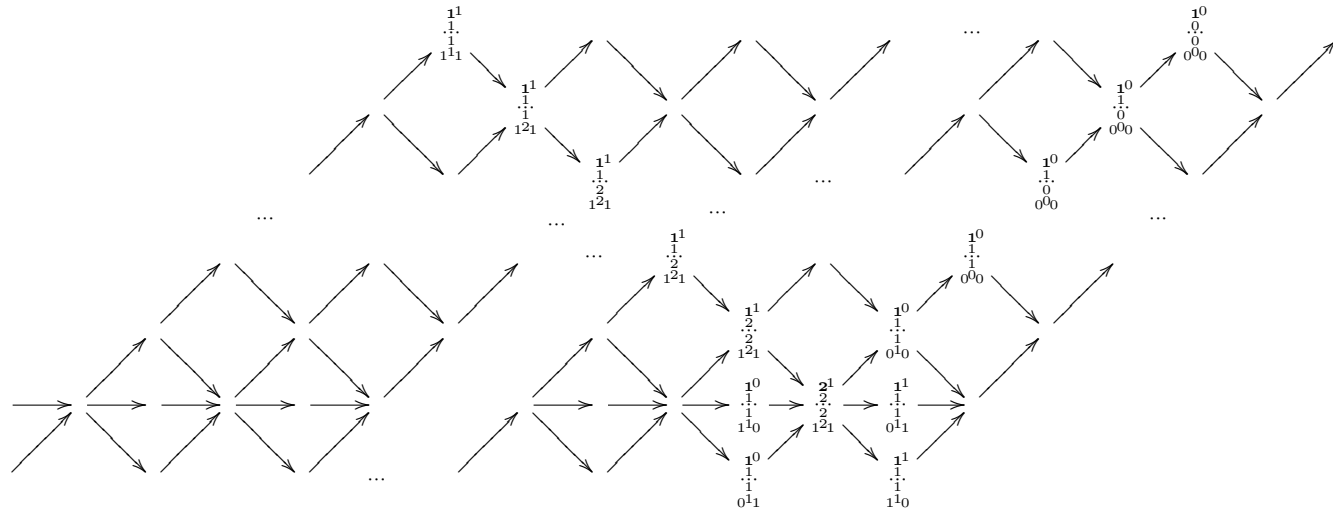
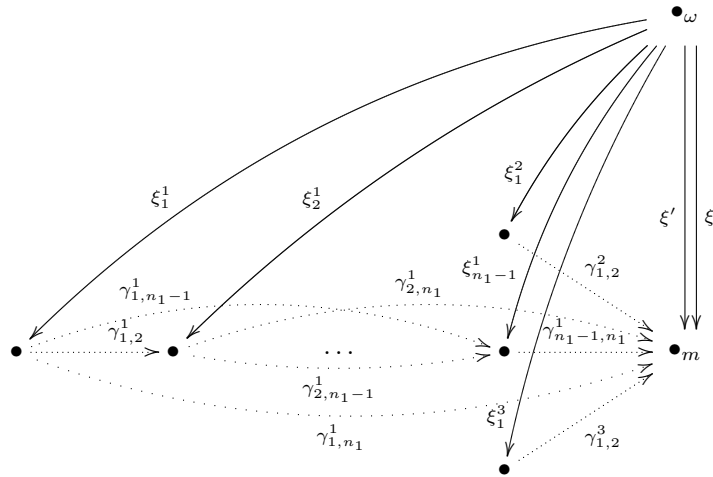


Figura 4.1: Carcaj de Auslander-Reiten del diagrama de Dynkin \mathbf{D}_n correspondiente a la orientación dada de flechas. Se muestran las raíces correspondientes a los costados izquierdo \mathcal{X}_0 y derecho \mathcal{Y}_0 de las alas de vértice $[W_0]$.

Para el cálculo de la ditálgebra reducida \mathcal{A}^X consideramos las representaciones de \mathbf{D}_n anteriores y observamos que $n_2 = n_3 = 2$ y que podemos elegir vectores a_1^2 y a_1^3 tales que $a_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $a_2^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Notamos que en tal caso se puede tomar a_1^1 tal que $a_{n_1}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así, definiendo $a = a_2^2$ y $a' = a_2^3$ se tiene $a_{n_1}^1 = a + a'$ (consultar el lema 3.29).



La diferencial δ^x se describe en la siguiente tabla ($s \in \{1, 2, 3\}$).

Flecha	Su diferencial δ^x
ξ	$\gamma_{1,2}^2 \otimes \xi_1^2 + \sum_{1 \leq i < n_1} \gamma_{i,n_1}^1 \otimes \xi_i^1,$
ξ'	$\gamma_{1,2}^3 \otimes \xi_1^3 + \sum_{1 \leq i < n_1} \gamma_{i,n_1}^1 \otimes \xi_i^1,$
ξ_j^s	$\sum_{1 \leq i < j} \gamma_{i,j}^s \otimes \xi_i^s.$

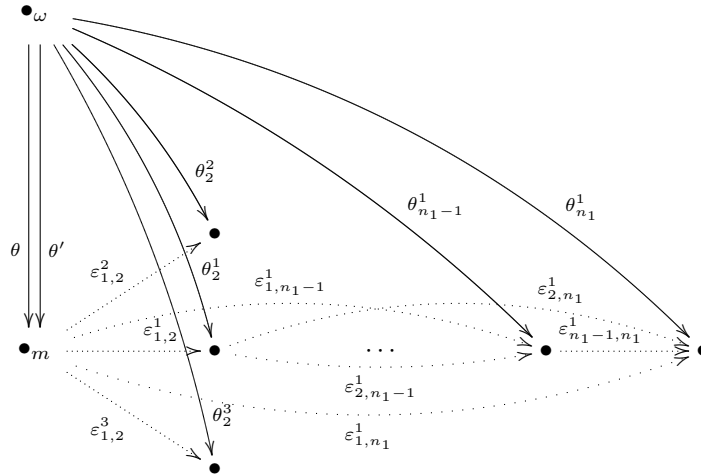
En particular se observa que $\delta^x(\xi_1^1) = \delta^x(\xi_1^2) = \delta^x(\xi_1^3) = 0$.

Describimos ahora la ditálgebra reducida \mathcal{A}^Y . Por el lema 3.31 debemos elegir vectores b_1^1, b_1^2 y b_1^3 tales que

$$b_1^1 \neq a_{n_1}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_1^2 \neq a_2^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1^3 \neq a_2^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

(considerados como elementos de $\mathbf{Hom}_{A_0}(R, W_0)$) por lo que tomamos $b_1^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_1^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b_1^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y hacemos $b = b_1^1$ y $b' = b_1^2$. De esta manera se tiene que

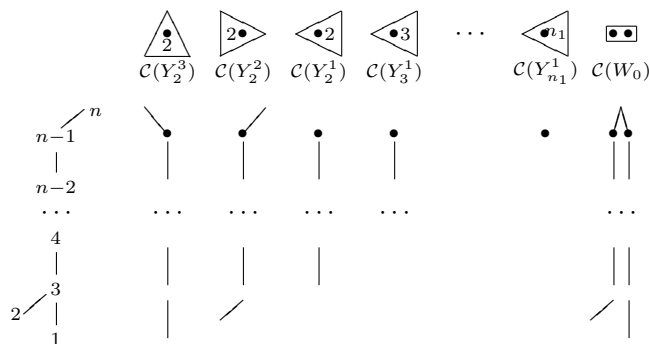
$b_1^3 = b + b'$.



Entonces la diferencial reducida δ^y tiene la siguiente forma,

Flecha	Su diferencial δ^y
θ_j^1	$\varepsilon_{1,j}^1 \otimes \theta + \sum_{1 < i < j} \varepsilon_{i,j}^1 \otimes \theta_i^1,$
θ_2^2	$\varepsilon_{1,2}^2 \otimes \theta',$
θ_2^3	$\varepsilon_{1,2}^3 \otimes \theta + \varepsilon_{1,2}^3 \otimes \theta',$
θ	0,
θ'	0.

Para dar representaciones preinyectivas de $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ elegimos primero módulos del diagrama de Dynkin \mathbf{D}_n correspondientes a los elementos de \mathcal{Y}_0 (ver figura 4.1). Enseguida mostramos sus carcajes de coeficientes.



Para la construcción de $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ -representaciones inescindibles usamos estos carcajes de coeficientes y las series de representaciones de la ditálgebra reducida \mathcal{A}^Y de rango uno del lema 3.36 y de rango dos del lema 3.37. En cada una de las siguientes figuras mostramos la representación un forma matricial (izquierda) y el carcaj de coeficientes para un caso particular del parámetro ℓ (derecha).

Representaciones de rango uno $M_{1,1,1}^{(1)}[\ell] = F^Y(\widetilde{M}_{1,1,1}^{(1)}[\ell])$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{c} I_{\ell}^{\rightarrow} \\ I_{\ell}^{\leftarrow} \end{array} \right] \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \Psi \\ k^{2\ell} \\ = \Psi \\ k^{2\ell} \\ \dots \\ k^{2\ell} \\ = \Psi \\ k^{2\ell} \\ \left[I_{\ell} \ 0 \right] \\ k^{\ell} \leftarrow \Psi \left[0 \ I_{\ell} \right] \\ k^{\ell} \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}(M_{1,1,1}^{(1)}[4]) \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.3)$$

Representaciones de rango uno $M_{2,1,1}^{(1)}[\ell]_2 = F^Y(\widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell]_2)$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{c} I_{\ell+1}^{\rightarrow} \\ I_{\ell}^{\leftarrow} \end{array} \right] \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ \dots \\ k^{2\ell+1} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ \left[I_{\ell+1} \ 0 \right] \\ k^{\ell+1} \leftarrow \Psi \left[0 \ I_{\ell} \right] \\ k^{\ell+1} \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}(M_{2,1,1}^{(1)}[4]_2) \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.4)$$

Representaciones de rango uno $M_{2,1,1}^{(1)}[\ell]^2 = F^Y(\widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell]^2)$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{c} I_{\ell}^{\rightarrow} \\ I_{\ell+1} \end{array} \right] \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ \dots \\ k^{2\ell+1} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ \left[I_{\ell} \ 0 \right] \\ k^{\ell} \leftarrow \Psi \left[0 \ I_{\ell+1} \right] \\ k^{\ell+1} \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}(M_{2,1,1}^{(1)}[4]^2) \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.5)$$

Representaciones de rango uno ${}_i M_{2,1,1}^{(1)}[\ell] = F^Y({}_i \widetilde{M}_{2,1,1}^{(1)}[\ell])$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{c} I_{\ell+1}^{\rightarrow} \\ I_{\ell}^{\leftarrow} \end{array} \right] \begin{array}{c} k^{\ell+1} \\ \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+1} \\ \dots \\ k^{2\ell+1} \\ = \Psi \\ k^{2\ell} \\ \left[I_{\ell} \ 0 \right] \\ k^{\ell} \leftarrow \Psi \left[I_{\ell} \ 0 \right] \\ k^{\ell} \end{array} \\
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}({}_i M_{2,1,1}^{(1)}[4]) \\
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array} \\
 \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\
 \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \\ / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \quad / \quad | \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array} \quad (4.6)$$

Representaciones de rango uno $M_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_2^2 = F^Y(\widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_2^2)$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 [I_{\ell+1}] \\
 [I_{\ell+1}]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 k^{\ell+1} \\
 \Psi \\
 k^{2\ell+2} \\
 = \Psi \\
 k^{2\ell+2} \\
 \dots \\
 k^{2\ell+2} \\
 = \Psi \\
 [0 \ I_{\ell+1}] \\
 k^{\ell+1} \leftarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 I_{\ell+1}^{\rightarrow} \\
 I_{\ell+1}^{\leftarrow}
 \end{array} \right] \\
 k^{\ell+2} \\
 \dots \\
 [I_{\ell+1} \ 0] \\
 k^{\ell+1}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}(M_{2,2,1}^{(1)}[4]_2^2) \\
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram with 6 vertices and 6 edges, zigzag pattern.} \\
 \dots \\
 \text{Diagram with 6 vertical edges and 6 diagonal edges (down-right).}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.7)
 \end{array}$$

Representaciones de rango uno ${}_i M_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_2 = F^Y({}_i \widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_2)$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 [I_{\ell+1}] \\
 [I_{\ell+1}]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 k^{\ell+1} \\
 \Psi \\
 k^{2\ell+2} \\
 = \Psi \\
 k^{2\ell+2} \\
 \dots \\
 k^{2\ell+1} \\
 = \Psi \\
 [0 \ I_{\ell+1}] \\
 k^{\ell+1} \leftarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 I_{\ell+1}^{\rightarrow} \\
 I_{\ell+1}^{\leftarrow}
 \end{array} \right] \\
 k^{\ell+1} \\
 \dots \\
 [I_{\ell} \ 0] \\
 k^{\ell}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}({}_i M_{2,2,1}^{(1)}[4]_2) \\
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram with 6 vertices and 6 edges, zigzag pattern, with a triangle on the left.} \\
 \dots \\
 \text{Diagram with 6 vertical edges and 6 diagonal edges (down-right).}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.8)
 \end{array}$$

Representaciones de rango uno ${}_i M_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_2^2 = F^Y({}_i \widetilde{M}_{2,2,1}^{(1)}[\ell]_2^2)$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 [I_{\ell+1}] \\
 [I_{\ell+1}]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 k^{\ell+1} \\
 \Psi \\
 k^{2\ell+2} \\
 = \Psi \\
 k^{2\ell+2} \\
 \dots \\
 k^{2\ell+1} \\
 = \Psi \\
 [0 \ I_{\ell}] \\
 k^{\ell} \leftarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 I_{\ell+1}^{\rightarrow} \\
 I_{\ell+1}^{\leftarrow}
 \end{array} \right] \\
 k^{\ell+1} \\
 \dots \\
 [I_{\ell} \ 0] \\
 k^{\ell+1}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}({}_i M_{2,2,1}^{(1)}[4]_2^2) \\
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram with 6 vertices and 6 edges, zigzag pattern, with a triangle on the left.} \\
 \dots \\
 \text{Diagram with 6 vertical edges and 6 diagonal edges (down-right).}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.9)
 \end{array}$$

Representaciones de rango uno ${}_i M_{2,2,2}^{(1)}[\ell]_2^2 = F^Y({}_i \widetilde{M}_{2,2,2}^{(1)}[\ell]_2^2)$ ($\ell \geq 0$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 [I_{\ell+1}] \\
 [I_{\ell+1}] \\
 [10 \dots 00]
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 k^{\ell+1} \\
 \Psi \\
 k^{2\ell+3} \\
 = \Psi \\
 k^{2\ell+3} \\
 \dots \\
 k^{2\ell+2} \\
 = \Psi \\
 [I_{\ell+1} \ 0] \\
 k^{\ell+1} \leftarrow
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{l}
 I_{\ell+2}^{\rightarrow} \\
 I_{\ell}^{\leftarrow}
 \end{array} \right] \\
 k^{\ell+2} \\
 \dots \\
 [0 \ I_{\ell+1}] \\
 k^{\ell+1}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \mathcal{C}({}_i M_{2,2,2}^{(1)}[4]_2^2) \\
 \begin{array}{c}
 \text{Diagram with 6 vertices and 6 edges, zigzag pattern, with a triangle on the left and a curved arrow.} \\
 \dots \\
 \text{Diagram with 6 vertical edges and 6 diagonal edges (down-right).}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.10)
 \end{array}$$

Representaciones de rango dos ${}_i N_{2,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2 = F^Y({}_i \tilde{N}_{2,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2)$ ($\ell = 2k$).

$C({}_i N_{2,2,2}^{(2)}[6]_2^2)$

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \leftarrow I_{2\ell+2} \left[\begin{array}{c} k^{2\ell+3} \\ \Psi \\ k^{2\ell+2} \\ \dots \end{array} \right] \\
 \leftarrow [0 \ I_{\ell+1}] \left[\begin{array}{c} k^{2\ell+2} \\ \Psi \\ k^{\ell+1} \end{array} \right] \\
 \leftarrow k^{\ell+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 A \left[\begin{array}{c} k^{\ell+2} \\ \Psi \\ k^{2\ell+3} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+3} \\ \dots \\ k^{2\ell+2} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+2} \\ \Psi [I_{\ell+1} \ 0] \\ k^{\ell+1} \end{array} \right] \leftarrow B \left[\begin{array}{c} k^{\ell+2} \\ k^{\ell+2} \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{k+1} & \\ \hline 0 \cdots 1 & I_{k+1} \\ \hline I_k^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{\ell+1}^{\rightarrow \uparrow} & \\ \hline I_k^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline \end{array}$$

(4.11)

Representaciones de rango dos ${}_{j,i} N_{3,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2 = F^Y({}_{j,i} \tilde{N}_{3,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2)$ ($\ell = 2k$).

$C({}_{j,i} N_{3,2,2}^{(2)}[6]_2^2)$

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \leftarrow I_{2\ell+3} \left[\begin{array}{c} k^{2\ell+4} \\ \Psi \\ k^{2\ell+3} \\ \dots \end{array} \right] \\
 \leftarrow [0 \ I_{\ell+1}] \left[\begin{array}{c} k^{2\ell+2} \\ \Psi \\ k^{\ell+1} \end{array} \right] \\
 \leftarrow k^{\ell+1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 A \left[\begin{array}{c} k^{\ell+2} \\ \Psi \\ k^{2\ell+4} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+4} \\ \dots \\ k^{2\ell+2} \\ = \Psi \\ k^{2\ell+2} \\ \Psi [I_{\ell+1} \ 0] \\ k^{\ell+1} \end{array} \right] \leftarrow B \left[\begin{array}{c} k^{\ell+2} \\ k^{\ell+2} \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{k+1} & \\ \hline 0 \cdots 1 & I_{k+1} \\ \hline I_k^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline & 1 \cdots 0 \\ \hline \end{array} \qquad B = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{\ell+1}^{\rightarrow \uparrow} & \\ \hline I_k^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1}^{\downarrow} \\ \hline \end{array}$$

(4.12)

Representaciones de rango dos ${}_i M_{2,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2 = F^Y({}_i \widetilde{M}_{2,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2)$ ($\ell = 2k + 1$).

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{k+2} & 1 \cdots 0 \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline I_{k+1}^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{\ell+1}^{\rightarrow\uparrow} & \\ \hline I_{k+1}^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline \end{array} \quad (4.13)$$

Representaciones de rango dos ${}_{j,i} M_{3,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2 = F^Y({}_{j,i} \widetilde{M}_{3,2,2}^{(2)}[\ell]_2^2)$ ($\ell = 2k + 1$).

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{k+2} & 1 \cdots 0 \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline I_{k+1}^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1} \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|} \hline I_{\ell+1}^{\rightarrow\uparrow} & \\ \hline I_{k+1}^{\rightarrow} & \\ \hline & I_{k+1}^{\downarrow} \\ \hline \end{array} \quad (4.14)$$

Proposición 4.2 Con la orientación dada al carcaj $\widetilde{\mathbf{D}}_n$, casi toda $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ -representación preinyectiva inescindible es isomorfa a uno de los módulos dados en las figuras (4.3)-(4.14).

Demostración. Por el teorema 3.27(b) y la elección del módulo de reducción Y , casi todo módulo preinyectivo inescindible es isomorfo a un objeto en la imagen del funtor F^Y .

Por la proposición 3.34(a), si \widetilde{M} es un \mathcal{A}^Y -módulo inescindible tal que $F^Y(\widetilde{M})$ es preinyectivo, entonces la dimensión vectorial $\underline{\dim} \widetilde{M}$ es una raíz positiva de rango uno ó rango dos. Por el lema 3.35 $\underline{\dim} \widetilde{M}$ es una de las raíces de la

tabla 3.2, con excepción de las raíces en la familia $\mathcal{R}_{3,3,2}^{(2)}$, pues los carcajes \mathbf{D}_n son de tipo $n_1, 2, 2$. Entonces casi todo $\widetilde{\mathbf{D}}_n$ -módulo preinyectivo inescindible es isomorfo a una representación de la forma $F^Y(\widetilde{M})$ donde \widetilde{M} es alguno de los módulos dados en los lemas 3.36 y 3.37, que son justamente los usados en las figuras (4.3)-(4.14). \square

4.3 Ditálgebras reducidas para los casos $\widetilde{\mathbf{E}}_m$.

En esta última sección damos las álgebras tensoriales reducidas respecto a los módulos admisibles X (izquierda) y Y (derecha) correspondientes a los casos $\widetilde{\mathbf{E}}_6$, $\widetilde{\mathbf{E}}_7$ y $\widetilde{\mathbf{E}}_8$, para orientaciones arbitrarias de flechas (suponiendo que el vértice de extensión ω es fuente). Las formas explícitas de las diferenciales δ^x y δ^y dependen de la orientación de las flechas, y puede calcularse en cada caso a partir de las fórmulas dadas en los lemas 3.30 y 3.32, y de la elección de representaciones de los diagramas de Dynkin \mathbf{E}_m correspondientes a los elementos en \mathcal{X}_0 y \mathcal{Y}_0 (consultar la figura 4.3 para el caso de orientación de subespacio).

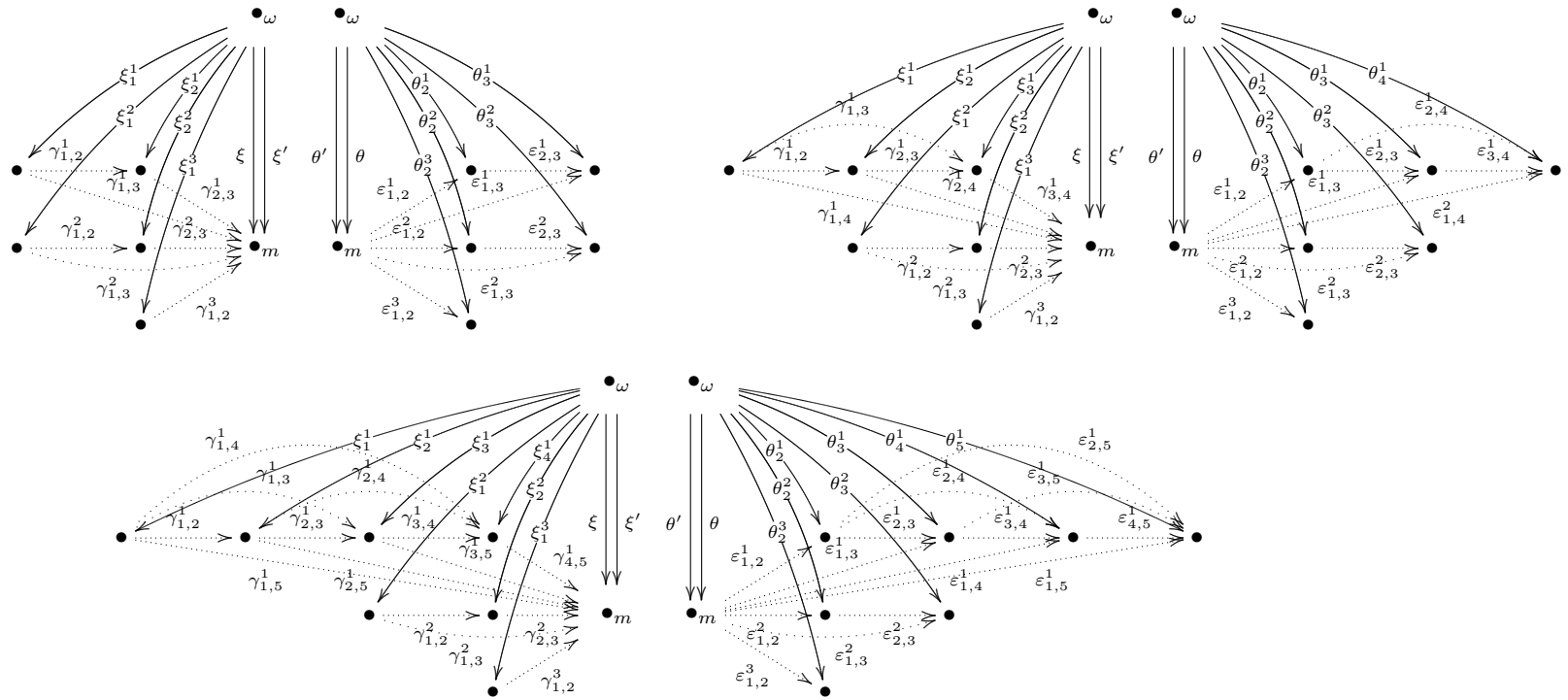


Figura 4.2: Reducciones \mathcal{A}^X y \mathcal{A}^Y de los carcajes de Dynkin extendido $\widetilde{\mathbf{E}}_6$ (superior izquierdo), $\widetilde{\mathbf{E}}_7$ (superior derecho) y $\widetilde{\mathbf{E}}_8$ (inferior) con orientación de subespacio (todas las flechas en dirección al centro de estrella).

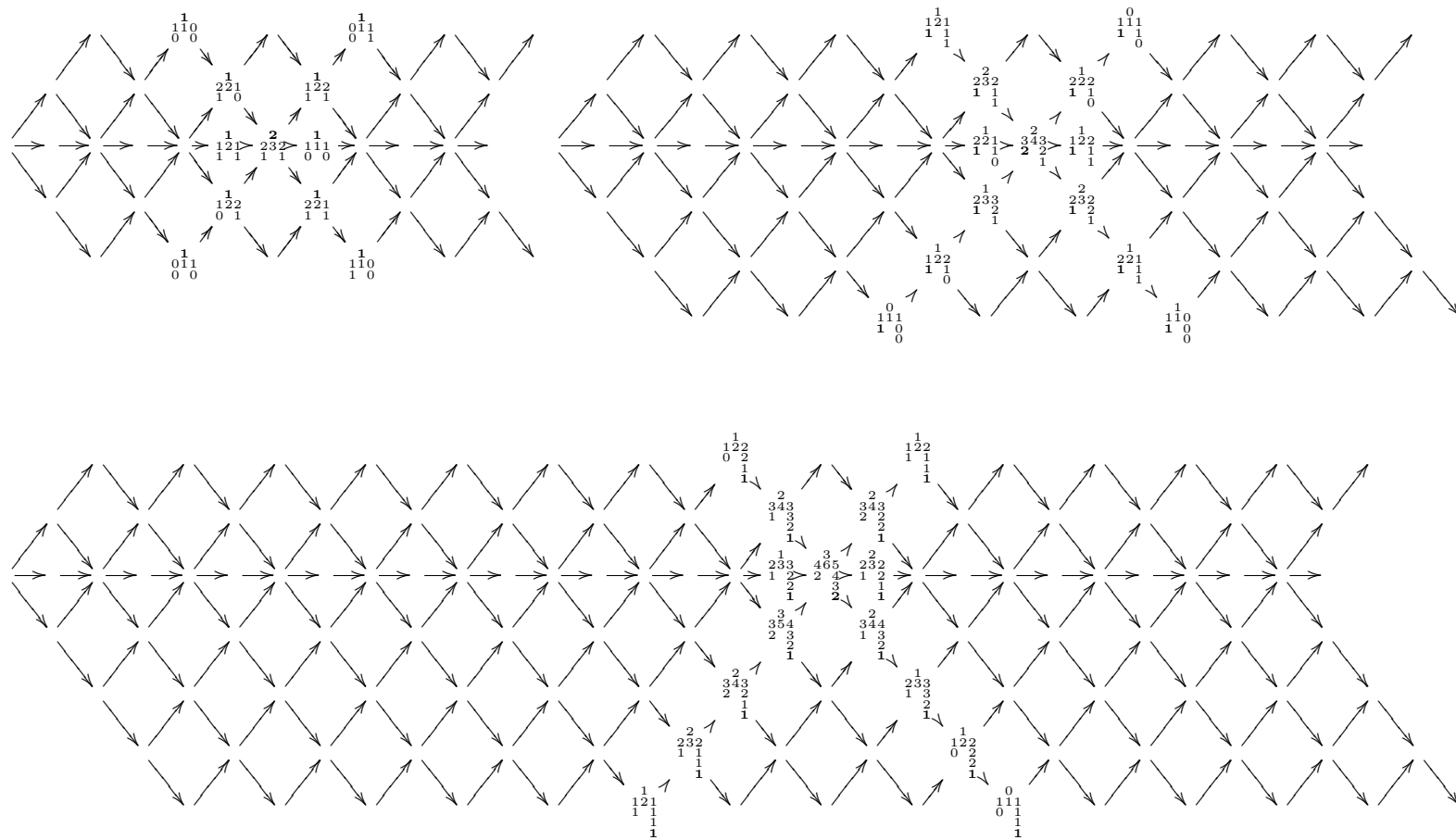


Figura 4.3: Carcaj de Auslander-Reiten de los diagramas de Dynkin E_6 (superior izquierdo), E_7 (superior derecho) y E_8 (inferior) con orientación de subespacio (todas las flechas en dirección al centro de estrella). En cada caso se muestran las raíces correspondientes al costado izquierdo \mathcal{X}_0 y costado derecho \mathcal{Y}_0 de las alas de vértice $[W_0]$.

Apéndice A

Álgebras tensoriales con diferencial.

A.1 Ditálgebras y sus módulos.

Sea k un campo arbitrario. En lo que sigue todas las k -álgebras tendrán uno, los morfismos entre k -álgebras enviarán al uno en el uno, todos los (bi)módulos serán de dimensión finita sobre k y los módulos serán izquierdos, a menos que se especifique lo contrario.

Definición A.1 Una k -álgebra T se llama **positivamente graduada** si existe una descomposición de k -espacios vectoriales

$$T = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_i,$$

tal que si $a \in T_i$ y $b \in T_j$, entonces $ab \in T_{i+j}$. Los elementos de T_i se llaman **homogéneos de grado i** . Sean T una k -álgebra, A una subálgebra de T y V un A - A -subbimódulo de T . Se dice que T es **libremente generada por (A, V)** si para cualquier k -álgebra B , cualquier morfismo de álgebras $\varphi_0 : A \rightarrow B$ y cualquier morfismo de A - A -bimódulos $\varphi_1 : V \rightarrow B$ (donde B es visto como A - A -bimódulo por medio de φ_0), existe un único morfismo de álgebras $\varphi : T \rightarrow B$ que extiende a φ_0 y a φ_1 .

$$\begin{array}{ccc} [A, V] & \hookrightarrow & T \\ \varphi_0 \downarrow & \searrow \varphi_1 & \swarrow \varphi \\ & & B \end{array}$$

Lema A.2 Sean A una k -álgebra y V un A - A -bimódulo. Entonces el álgebra tensorial $T_A(V)$ es positivamente graduada y libremente generada por (A, V) .

Demostración. Recordamos que

$$T_A(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i},$$

donde $V^{\otimes 0} := A$, $V^{\otimes 1} := V$ y $V^{\otimes i+1} := V^{\otimes i} \otimes_A V$ para $i \geq 1$. La multiplicación está dada a través del producto tensorial, mediante los isomorfismos canónicos $A \otimes V \cong V$ y

$$V^{\otimes i} \otimes V^{\otimes j} \longrightarrow V^{\otimes i+j}.$$

De esta manera es claro que $T_A(V)$ es positivamente graduada. Sean entonces $\varphi_0 : A \rightarrow B$ y $\varphi_1 : V \rightarrow B$ como en la definición de álgebra libremente generada. Se define $\varphi_i : V^{\otimes i} \rightarrow B$ para $i > 1$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \times_{i=1}^n V &\longrightarrow B \\ (v_1, \dots, v_n) &\longmapsto \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_1(v_n). \end{aligned}$$

Se observa que esta es una asignación A -balanceada mediante φ_0 , por lo que induce un morfismo $\varphi_i : V^{\otimes i} \rightarrow B$. La familia $\{\varphi_i\}$ induce un morfismo de A - A -bimódulos

$$\varphi : T_A(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i} \longrightarrow B.$$

Es fácil ver que φ es morfismo de álgebras y la unicidad es clara. \square

Lema A.3 a) Si T es libremente generado por (A, V) entonces el morfismo $T \rightarrow T_A(V)$, determinado por las inclusiones de A y V en T , es un isomorfismo.

b) $T_R(W_0 \oplus W_1) \cong T_{T_R(W_0)}(T_R(W_0) \otimes W_1 \otimes T_R(W_0))$.

Demostración. Como tanto T como $T_A(V)$ son libremente generadas por (A, V) , existen morfismos únicos φ, ψ que extienden las inclusiones de A y V en $T, T_A(V)$ respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} [A, V] \hookrightarrow T & & [A, V] \hookrightarrow T_A(V) \\ \downarrow & \swarrow \varphi & \downarrow & \swarrow \psi \\ T_A(V) & & T & \end{array}$$

Entonces $\psi \circ \varphi$ extiende la inclusión de A y V en T , y por unicidad $\psi \circ \varphi = Id_T$.

$$\begin{array}{ccc} [A, V] \hookrightarrow T & & [A, V] \hookrightarrow T_A(V) \\ \downarrow & \swarrow \psi \circ \varphi & \downarrow & \swarrow \varphi \circ \psi \\ T & & T_A(V) & \end{array}$$

Análogamente $\varphi \circ \psi = Id_{T_A(V)}$, por lo que se tiene (a).

Para mostrar (b) definimos $A = T_R(W_0)$ y consideramos las inclusiones $\sigma_0 : R \rightarrow T_R(W_0 \oplus W_1)$ y $\sigma_1 : W_0 \rightarrow T_R(W_0 \oplus W_1)$, que determinan un morfismo de álgebras

$$\sigma : A \rightarrow T_R(W_0 \oplus W_1).$$

Se definen además $\varphi_0 = \sigma$ y

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A \otimes_R W_1 \otimes_R A &\longrightarrow T_R(W_0 \oplus W_1) \\ a \otimes w \otimes b &\longmapsto \varphi_0(a)w\varphi_0(b), \end{aligned}$$

que está bien definido (pues φ_0 es morfismo de R - R -bimódulos) y por definición es morfismo de A - A -bimódulos, considerando las acciones de A en $T_R(W_0 \oplus W_1)$ a través de φ_0 . Entonces φ_0 y φ_1 se extienden de manera única a un morfismo de k -álgebras

$$\varphi : T_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R A) \longrightarrow T_R(W_0 \oplus W_1).$$

Tomamos ahora los morfismos inclusión $\psi_0 : R \rightarrow A$ y $\psi_1^0 : W_0 \rightarrow A$ y consideramos el morfismo de R - R -bimódulos

$$\begin{aligned} \psi_1^1 : W_1 &\longrightarrow A \otimes_R W_1 \otimes_R A \\ w &\longmapsto 1 \otimes w \otimes 1. \end{aligned}$$

Hacemos $\psi_1 = \begin{bmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_1^1 \end{bmatrix} : W_0 \oplus W_1 \rightarrow T_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R A)$ y notamos que ψ_1 también es morfismo de R - R -bimódulos. Entonces ψ_0 y ψ_1 se extienden a un morfismo de k -álgebras $\psi : T_R(W_0 \oplus W_1) \rightarrow T_A(A \otimes_R W_1 \otimes_R A)$, que resulta ser inverso de φ . \square

Definición A.4 a) Sea T una k -álgebra positivamente graduada (con grado $|a|$ para elementos homogéneos a). Una **diferencial** δ de T es una transformación k -lineal $\delta : T \rightarrow T$ tal que $\delta(T_i) \subset T_{i+1}$ y se cumple la regla de Leibniz: si a y b son elementos homogéneos, entonces

$$\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{|a|}a\delta(b). \quad (\text{A.1})$$

b) Un **álgebra tensorial diferencial (ditálgebra)** $\mathcal{A} = (T, \delta)$ consiste en una k -álgebra positivamente graduada T que es libremente generada por (T_0, T_1) , junto con una diferencial δ de T tal que $\delta^2 = 0$. Un morfismo de ditálgebras $\varphi : (T, \delta) \rightarrow (T', \delta')$ es un morfismo de álgebras $\varphi : T \rightarrow T'$ tal que $\varphi(T_i) \subseteq T'_i$ para toda i , y $\delta'\varphi = \varphi\delta$. Denotaremos con A a la subálgebra T_0 de T , y con V al A - A -subbimódulo T_1 .

Observamos que si δ es una diferencial entonces $\delta(c) = 0$ para cualquier $c \in k \subset T$. Si A es una k -álgebra, entonces $\mathcal{A} = (T_A(0), 0)$ es una ditálgebra (llamada **trivial** sobre A). Recordamos que si M y N son A -módulos izquierdos entonces $\mathbf{Hom}_k(M, N)$ es un A - A -bimódulo con acciones

$$[a \cdot f \cdot b](m) = af(bm).$$

Definición A.5 Para A -módulos M y N se define el subespacio

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \subset \mathbf{Hom}_k(M, N) \oplus \mathbf{Hom}_{A-A}(V, \mathbf{Hom}_k(M, N))$$

dado por los pares (f^0, f^1) que satisfacen

$$af^0(m) = f^0(am) + f^1(\delta(a))(m), \quad (\text{A.2})$$

para todo $a \in A$ y $m \in M$. Si además L es también un A -módulo, se define la función composición

$$\circ : \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \times \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(L, M) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(L, N)$$

como $(f, g) \mapsto f \circ g = (f^0 \circ g^0, (f \circ g)^1)$, donde $(f \circ g)^1$ está dado para un $v \in V$ con $\delta(v) = \sum_i v'_i v''_i$ por

$$(f \circ g)^1 = f^0 \circ g^1(v) + f^1(v) \circ g^0 + \sum_i f^1(v'_i) g^1(v''_i). \quad (\text{A.3})$$

La composición anterior está bien definida y de hecho determina, junto con los A -módulos como objetos y grupos de morfismos dados por $\mathbf{Hom}_A(M, N)$, una k -categoría aditiva que se denota mediante $\mathcal{A}\text{-mod}$ y es llamada categoría de módulos (de dimensión finita) sobre la ditálgebra \mathcal{A} [8, proposición 2.3].

Lema A.6 *Un morfismo de ditálgebras $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ induce un funtor*

$$F_\varphi : \mathcal{A}'\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}.$$

Si además φ es suprayectivo, entonces F_φ es fiel.

Demostración. La restricción $\varphi_0 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ induce un funtor restricción $F_{\varphi_0} : \mathcal{A}'\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$. Se define $F_\varphi = F_{\varphi_0}$ en objetos. Para la definición de F_φ en un morfismo $f = (f^0, f^1) : M \rightarrow N$ consideramos la composición

$$V \xrightarrow{\varphi_1} V' \xrightarrow{f^1} \mathbf{Hom}_k(M, N),$$

que es claramente de A - A -bimódulos, pues φ_1 lo es a través de φ_0 . Se define entonces $F_\varphi(f^0, f^1) = (f^0, f^1 \circ \varphi_1)$. Verificamos que este es un morfismo: para $a \in A$ y $m \in M$ se tiene

$$\begin{aligned} a \cdot f^0(m) &= \varphi_0(a) f^0(m) = f^0(\varphi_0(a)m) + f^1(\delta(\varphi_0(a)))(m) = \\ &= f^0(a \cdot m) + (f^1 \circ \varphi_1)(\delta(a))(m). \end{aligned}$$

Claramente la asignación F_φ manda identidades en identidades. Para ver que F_φ abre composiciones basta verificar que

$$(g \circ f)^1 \circ \varphi_1 = (F_\varphi(g) \circ F_\varphi(f))^1.$$

Sea $v \in V$ y hagamos $\delta(v) = \sum_i v'_i v''_i$. Entonces

$$\begin{aligned} (F_\varphi(g) \circ F_\varphi(f))^1(v) &= g^0 f^1(\varphi_1(v)) + g^1(\varphi_1(v)) f^0 + \\ &\quad + \sum_i g^1(\varphi_1(v'_i)) f^1(\varphi_1(v''_i)) = \\ &= (g \circ f)^1(\varphi_1(v)). \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $f = (f^0, f^1) : M \rightarrow N$ es un morfismo tal que $F(f) = (f^0, f^1 \circ \varphi_1) = 0$. Entonces $f^0 = 0$ y si φ es suprayectivo entonces $f^1 = 0$, es decir, F_φ es un funtor fiel. \square

A.2 Estratos, triangularidad y extensiones.

Definición A.7 *Sea R una k -álgebra y W un R - R -bimódulo con descomposición $W = W_0 \oplus W_1$. Entonces (R, W) es llamado **estrato** de una ditálgebra $\mathcal{A} = (T, \delta)$ si $R, W_0 \subseteq T_0$, $W_1 \subseteq T_1$, el álgebra T es libremente generada por (R, W) y $\delta(R) = 0$. Entonces $\delta : T \rightarrow T$ es un morfismo de R - R -bimódulos y basta determinar los valores de la diferencial en W_0 y W_1 [8, lema 4.4].*

Lema A.8 Sean $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra con estrato $(R, W_0 \oplus W_1)$ y $A = T_0$. Supongamos que A' es subálgebra de A y que M y N son A' -módulos. Entonces existe un isomorfismo natural en M y N

$$\mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \xrightarrow{\widehat{}} \mathbf{Hom}_{A'-A'}(A' \otimes_R W_1 \otimes_R A', \mathbf{Hom}_k(M, N)).$$

Demostración. Se observa directamente que las asignaciones

$$\mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \xrightarrow{\widehat{}} \mathbf{Hom}_{A'-A'}(A' \otimes_R W_1 \otimes_R A', \mathbf{Hom}_k(M, N))$$

$$h \longmapsto [a \otimes u \otimes a' \mapsto ah(u)a']$$

y

$$\mathbf{Hom}_{A'-A'}(A' \otimes_R W_1 \otimes_R A', \mathbf{Hom}_k(M, N)) \rightarrow \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N))$$

$$f \longmapsto [u \mapsto f(1 \otimes u \otimes 1)].$$

son inversa una de otra. La naturalidad se puede probar también de manera directa. \square

Por el lema anterior, como $A \otimes_R W_1 \otimes_R A \cong T_1 = V$, se tiene un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_R(M, N) & & \mathbf{Hom}_R(M, N) \\ \oplus & \longrightarrow & \oplus \\ \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) & & \mathbf{Hom}_{A-A}(V, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \end{array}$$

dado por $(f^0, f^1) \mapsto (f^0, \widehat{f^1})$.

Definición A.9 Se dice que un estrato (R, W) de una ditálgebra $\mathcal{A} = (T, \delta)$ es **triangular** si

- 1) existe una sucesión de R - R -subbimódulos $0 = W_0^0 \subseteq W_0^1 \subseteq \dots \subseteq W_0^r = W_0$ tales que $\delta(W_0^{i+1}) \subset A_i W_1 A_i$, para $0 \leq i < r$, donde A_i es la subálgebra de A generada por R y W_0^i ,
- 2) existe una sucesión de R - R -subbimódulos $0 = W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq \dots \subseteq W_1^s = W_1$ tales que $\delta(W_1^{j+1}) \subset A W_1^j A$, para $0 \leq j < s$.

Si además cada bimódulo W_0^i es sumando directo de W_0^{i+1} para $0 \leq i < r$, se dice que el estrato (R, W) es triangular aditivo.

Toda ditálgebra con estrato triangular que satisface la conclusión del siguiente teorema es llamada **ditálgebra de Roiter**.

Teorema A.10 (Propiedad de Roiter) Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra con estrato triangular aditivo (R, W) tal que R es semi-simple. Consideremos un par de R -módulos M y N y morfismos

$$f^0 \in \mathbf{Hom}_R(M, N) \quad y \quad f^1 \in \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)).$$

a) Si f^0 es retracción (basta con ser suprayectivo, pues R es semi-simple) y N tiene estructura de A -módulo, entonces existe una estructura de A -módulo para M (que extiende la de R -módulo) tal que

$$(f^0, \widehat{f^1}) : M \longrightarrow N,$$

es un morfismo en $\mathcal{A}\text{-mod}$.

b) Si f^0 es sección (basta con ser inyectivo, pues R es semi-simple) y M tiene estructura de A -módulo, entonces existe una estructura de A -módulo para N (que extiende la de R -módulo) tal que

$$(f^0, \widehat{f^1}) : M \longrightarrow N,$$

es un morfismo en $\mathcal{A}\text{-mod}$.

Demostración. a) Como $f^0 : M \rightarrow N$ es retracción, existe un morfismo de R -módulos $g^0 : N \rightarrow M$ tal que $f^0 g^0 = Id_N$. Para dar una acción de $A = T_R(W_0)$ en M basta dar un morfismo $\varphi : W_0 \otimes M \rightarrow M$. Para ello usamos la filtración de W_0

$$0 = W_0^0 \subset W_0^1 \subset \dots \subset W_0^{r-1} \subset W_0^r = W_0,$$

y definimos $\varphi_j : W_0^j \otimes M \rightarrow M$ inductivamente usando la siguiente fórmula (donde el factor f_{j-1} está por definir)

$$\varphi_j(w \otimes m) = g^0(w f^0(m)) - g^0[f_{j-1}^1(\delta(w))(m)], \quad \text{para } w \in W_0^j.$$

Si se ha definido φ_{j-1} , entonces M es un A_{j-1} -módulo y $\mathbf{Hom}_k(M, N)$ es un A_{j-1} - A_{j-1} -bimódulo. De esta manera, usando el lema A.8 y ya que el bimódulo $A_{j-1} \otimes_R W_1 \otimes_R A_{j-1}$ es isomorfo a $A_{j-1} W_1 A_{j-1}$ pues cada W_0^i es sumando directo de W_0^{i+1} (consultar la observación 5.2 en [8]), el morfismo $f^1 \in \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N))$ puede ser extendido a un morfismo

$$f_{j-1}^1 \in \mathbf{Hom}_{A_{j-1}-A_{j-1}}(A_{j-1} W_1 A_{j-1}, \mathbf{Hom}_k(M, N)).$$

Como base de inducción, si $w \in W_0^1$ se tiene que $\delta(w) \in A_0 W_1 A_0$. Pero $A_0 = R$ por lo que $\delta(w) \in W_1$. Se define

$$\varphi_1(w \otimes m) = g^0(w f^0(m)) - g^0[f^1(\delta(w))(m)].$$

Observamos que en el último paso llegamos a un morfismo $\varphi = \varphi_r$ tal que

$$\varphi(w \otimes m) = g^0(w f^0(m)) - g^0[\widehat{f^1}(\delta(w))(m)], \quad \text{para } w \in W_0.$$

Notamos que para $w \in R$ ó $w \in W_0$ se tiene

$$\begin{aligned} f^0(w \cdot m) &= f^0(\varphi(w \otimes m)) = f^0(g^0(w f^0(m)) - f^0(g^0[\widehat{f^1}(\delta(w))(m)])) = \\ &= w f^0(m) - f^1(\delta(w))(m), \end{aligned}$$

es decir,

$$w f^0(m) = f^0(w \cdot m) + f^1(\delta(w))(m).$$

La fórmula anterior se extiende a $A = T_R(W_0)$. En efecto, supongamos que la fórmula es válida para los elementos de $W_0^{\otimes \ell-1}$ y sean $w \in W_0^{\otimes \ell-1}$ y $w_\ell \in W_0$. Entonces

$$\begin{aligned} (w_\ell w)f^0(m) &= w_\ell[f^0(w \cdot m) + \widehat{f^1}(\delta(w))(m)] = \\ &= w_\ell f^0(w \cdot m) + \widehat{f^1}(w_\ell \delta(w))(m) = \\ &= f^0(w_\ell \cdot (w \cdot m)) + \widehat{f^1}(\delta(w_\ell))(w \cdot m) + \widehat{f^1}(w_\ell \delta(w))(m) = \\ &= f^0((w_\ell w) \cdot m) + \widehat{f^1}(\delta(w_\ell w)), \end{aligned}$$

por lo que (por linealidad) la fórmula también es válida en $W_0^{\otimes \ell}$, y por lo tanto en todo A . La prueba de (b) es similar. \square

Con la misma idea de demostración se puede probar que (cuando R es semi-simple) un morfismo (f^0, f^1) en $\mathcal{A}\text{-mod}$ es isomorfismo si y solo si f^0 es isomorfismo en $R\text{-mod}$ [8, lema 5.8] y, suponiendo además que W_1 es finitamente generado, que $\mathcal{A}\text{-mod}$ es una categoría Krull-Schmidt [8, teorema 5.13]. Vamos a suponer de aquí en adelante que \mathcal{A} es una ditálgebra como hemos descrito en este párrafo. El siguiente lema se encuentra en [8, lema 5.14]

Lema A.11 *Supongamos que existe $M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N$ en $\mathcal{A}\text{-mod}$ tal que $gf = 0$ y $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} N \longrightarrow 0$ es exacta (que se divide) en $R\text{-mod}$. Entonces existe isomorfismo $h: E' \rightarrow E$ tal que*

$$(h^{-1}f)^1 = 0 \quad \text{y} \quad (gh)^1 = 0.$$

Definición A.12 *Para dos \mathcal{A} -módulos M y N se define la colección $\mathcal{E}(M, N)$ de pares de morfismos (f, g)*

$$N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M,$$

tales que $gf = 0$ y la sucesión de R -módulos

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \longrightarrow 0,$$

es exacta que se divide. Se define además en $\mathcal{E}(N, M)$ la relación $(f, g) \sim (f', g')$ siempre que exista un isomorfismo $h: E \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & M \\ \parallel & & \downarrow h & & \parallel \\ N & \xrightarrow{f'} & E' & \xrightarrow{g'} & M \end{array}$$

Sea $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N) = \mathcal{E}(M, N) / \sim$.

Lema A.13 *Sea \mathcal{A} una ditálgebra de Roiter con estrato (R, W) . Existe una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \rightarrow \mathbf{Hom}_R(M, N) \oplus \mathbf{Hom}_{R-R}(W_1, \mathbf{Hom}_k(M, N)) \xrightarrow{\sigma}$$

$$\xrightarrow{\sigma} \mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N) \xrightarrow{\eta} \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N) \rightarrow 0,$$

donde σ es el morfismo dado por

$$\sigma(f^0, f^1)(w \otimes m) = wf^0(m) - f^0(wm) - f^1(\delta(w))(m).$$

Demostración. Como f^0 , f^1 y δ restringido a W_1 son morfismos de R -(bi)módulos, σ está bien definida. Sean M y N un par de A -módulos. Por el isomorfismo dado en el lema A.8, el espacio $\mathbf{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ es núcleo de σ . Definimos η de la siguiente manera. Para un morfismo de R -módulos $h : W_0 \otimes M \rightarrow N$ se define un A -módulo $N \oplus_h M$, cuyo R -módulo subyacente es $N \oplus M$, de la siguiente manera. Ya que $A = T_R(W_0)$ es libremente generado por (R, W_0) , basta dar una acción $W_0 \otimes_R (N \oplus M) \rightarrow N \oplus M$. Tomamos

$$W_0 \otimes_R (N \oplus M) \longrightarrow N \oplus M$$

$$w \otimes (n, m) \longmapsto (wn + h(w \otimes m), wm),$$

que es un morfismo bien definido de R -módulos. La sucesión exacta trivial de R -módulos $0 \longrightarrow N \xrightarrow{s^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} N \oplus M \xrightarrow{p^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} M \longrightarrow 0$ puede ser considerada como una sucesión exacta de A -módulos,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{s^0} N \oplus_h M \xrightarrow{p^0} M \longrightarrow 0,$$

que a su vez determina una sucesión exacta en \mathcal{A} -mod dada por

$$\eta_h = N \xrightarrow{(s^0, 0)} N \oplus_h M \xrightarrow{(p^0, 0)} M.$$

Definimos $\eta(h)$ como la clase de equivalencia en $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$ de η_h .

Conversamente, si M , N y E son A -módulos tales que el R -módulo subyacente de E es $N \oplus M$ y $0 \longrightarrow N \xrightarrow{s^0} N \oplus_h M \xrightarrow{p^0} M \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en A -mod, entonces $E = N \oplus_h M$ para algún morfismo h en $\mathbf{Hom}_R(W_0 \otimes_R M, N)$.

Paso 1. η es suprayectivo. Por el lema A.11 para cada elemento de $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$

podemos tomar un representante de clase de la forma $e = N \xrightarrow{(f^0, 0)} E \xrightarrow{(g^0, 0)} M$. Ya que suponemos que R es semi-simple, la sucesión exacta de R -módulos $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f^0} E \xrightarrow{g^0} M \longrightarrow 0$ es trivial, por lo que existe un isomorfismo h^0 de R -módulos tal que el siguiente es un diagrama conmutativo en R -mod,

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f^0} & E & \xrightarrow{g^0} & M \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow h^0 & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{s^0} & N \oplus M & \xrightarrow{p^0} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ya que \mathcal{A} es de Roiter, el R -módulo $N \oplus M$ admite estructura de A -módulo $\widehat{N \oplus M}$, de manera que $(h^0, 0) : E \rightarrow \widehat{N \oplus M}$ es un morfismo en \mathcal{A} -mod. Por

la conmutatividad del diagrama s^0 y p^0 son morfismos de A -módulos, y por la observación anterior existe un morfismo de R -módulos $t : W_0 \otimes_R M \rightarrow N$ tal que $\widehat{N \oplus M} = N \oplus_t M$. Entonces se tiene un diagrama conmutativo en $\mathcal{A}\text{-mod}$

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{(f^0,0)} & E & \xrightarrow{(g^0,0)} & M \\ \parallel & & \downarrow (h^0,0) & & \parallel \\ N & \xrightarrow{(s^0,0)} & N \oplus_t M & \xrightarrow{(p^0,0)} & M, \end{array}$$

y como $(h^0, 0)$ es un isomorfismo, $\eta(t)$ es la clase de equivalencia de e .

Paso 2. *El núcleo de η es la imagen de σ .* Sea e un elemento de $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$ dado como $e = \eta(h)$ para algún morfismo $h : W_0 \otimes M \rightarrow N$. Entonces e se divide si y solo si existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccccc} e : & N & \xrightarrow{(s^0,0)} & N \oplus_h M & \xrightarrow{(p^0,0)} & M \\ & \parallel & & \downarrow \lambda=(\lambda^0, \lambda^1) & & \parallel \\ 0 : & N & \xrightarrow{(s^0,0)} & N \oplus_0 M & \xrightarrow{(p^0,0)} & M. \end{array}$$

Por conmutatividad λ^0 y para $w \in W_0$, $\lambda^1(w)$ tienen la forma matricial

$$\lambda^0 = \begin{bmatrix} I_N & f^0 \\ 0 & I_M \end{bmatrix}, \quad \lambda^1 = \begin{bmatrix} 0 & f^1(w) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $f^0 \in \mathbf{Hom}_R(M, N)$ y $f^1 \in \mathbf{Hom}_{R-R}(W_0, \mathbf{Hom}_k(M, N))$. Por lo tanto e se divide si y solo si λ es morfismo en $\mathcal{A}\text{-mod}$, $w\lambda^0(n+m) = \lambda^0(w(n+m)) + \widehat{\lambda^1}(\delta(w))(n+m)$, o de forma matricial,

$$w \cdot \begin{bmatrix} I_N & f^0 \\ 0 & I_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N & f^0 \\ 0 & I_M \end{bmatrix} w \cdot \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{f^1}(\delta(w)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix},$$

si y solo si

$$\begin{bmatrix} wn + wf^0(m) \\ wm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_N & f^0 \\ 0 & I_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wn + h(w \otimes m) \\ wm \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{f^1}(\delta(w))(m) \\ 0 \end{bmatrix},$$

si y solo si

$$h(w \otimes m) = wf^0(m) - f^0(wm) - \widetilde{f^1}(\delta(w))(m),$$

es decir, si y solo si $h = \sigma(f^0, f^1)$. La linealidad de η se prueba usando la estructura aditiva en $\mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(M, N)$ (consultar la proposición 6.13 en [8]). \square

A.3 Algunas propiedades de bimódulos y sus duales.

Recordamos que una **base dual derecha** $\{(u_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$ de un S -módulo derecho U es una colección de elementos $u_i \in U$ y $\lambda_i \in U^* = \mathbf{Hom}_S(U_S, S_S)$ tal que

para cada $u \in U$ el conjunto de índices i para los que $\lambda_i(u) \neq 0$ es finito y se tiene

$$u = \sum_{i \in I} u_i \lambda_i(u).$$

La prueba del inciso (a) en el siguiente lema se encuentra en [8, lema 11.3]. El inciso (b) se prueba de manera similar.

Lema A.14 *Sea W un T - S -bimódulo y supongamos que U es un R - S -bimódulo que admite una base dual finita $\{(u_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$ como S -módulo derecho. Entonces existe un isomorfismo natural de T - R -bimódulos*

$$\varphi : {}_T W_S \otimes_S U_R^* \longrightarrow \mathbf{Hom}_S(U, W),$$

dado por $\varphi(w \otimes \lambda)(u) = w\lambda(u)$. La inversa φ^{-1} tiene la forma

$$\varphi^{-1}(h) = \sum_{i \in I} h(u_i) \otimes \lambda_i.$$

Para el siguiente resultado consultar el lema 11.4 en [8].

Lema A.15 *Consideremos bimódulos ${}_T A_S$ y ${}_S B_R$ tales que A_S tiene una base dual derecha finita $\{(a_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$. Entonces existe un isomorfismo natural de R - T -bimódulos $\psi : B^* \otimes_S A^* \rightarrow (A \otimes_S B)^*$ dado por la regla $\psi(g \otimes f)[a \otimes b] = g(f(a)b)$. Su inversa satisface, para un elemento $h \in (A \otimes_S B)^*$,*

$$\psi^{-1}(h) = \sum_{i \in I} \rho_i(h) \otimes \lambda_i,$$

donde $\rho_i(h)[b] = h(a_i \otimes b)$.

Definición A.16 *Sean Γ una k -álgebra, S una subálgebra de Γ y P un ideal de Γ . La pareja (S, P) es llamada **escisión** de Γ si el módulo P_S admite una base dual finita $\{(p_j, \gamma_j)\}_{j \in J}$ y existe una descomposición de S - S -bimódulos $\Gamma = S \oplus P$. En tal caso el producto en Γ induce un morfismo de S - S -bimódulos $m : P \otimes_S P \rightarrow P$. Se tiene el morfismo de S - S -bimódulos $\mu := \psi^{-1}m^* : P^* \rightarrow P^* \otimes P^*$, donde $P^* = \mathbf{Hom}_S(P_S, S_S)$. La función μ es llamado comultiplicación de P y satisface la regla de coasociatividad, es decir, el siguiente diagrama conmuta,*

$$\begin{array}{ccc} P^* & \xrightarrow{\mu} & P^* \otimes P^* \\ \mu \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \mu \\ P^* \otimes P^* & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & P^* \otimes P^* \otimes P^* \end{array}$$

Tenemos la siguiente expresión explícita del coproducto en términos de la base dual de P ,

$$\mu(\gamma) = \sum_{i, j \in J} \gamma(p_i p_j) \gamma_j \otimes \gamma_i, \quad \text{para } \gamma \in P^*.$$

Definición A.17 *Supongamos que B y Γ son k -álgebras y que (S, P) es una escisión de Γ . Supongamos además que X es un B - Γ -bimódulo tal que X_S admite una base dual finita $\{(u_i, \nu_i)\}_{i \in I}$. Se tienen los morfismos de B - Γ -bimódulos*

$$\begin{aligned} m_\ell : X \otimes_S P &\longrightarrow X & \text{y} & \quad m_r : X \longrightarrow \mathbf{Hom}_S(P, X) \\ x \otimes p &\longmapsto xp, & & \quad x \longmapsto [p \mapsto xp], \end{aligned}$$

que determinan las coacciones de P en X dadas por

$$\lambda := \psi^{-1}m_\ell^* : X^* \rightarrow P^* \otimes_S X^* \quad y \quad \rho := \varphi^{-1}m_r : X \rightarrow X \otimes P^*,$$

donde φ y ψ son los morfismos dados en los lemas A.14 y A.15. Considerando las bases de X_S y P_S se tienen las siguientes expresiones de λ y ρ en elementos $\nu \in X^*$ y $x \in X$,

$$\lambda(\nu) = \sum_{i \in I, j \in I} \nu(x_i p_j) \gamma_j \otimes \nu_i \quad y \quad \rho(x) = \sum_{j \in J} x p_j \otimes \gamma_j.$$

Además los morfismos λ y ρ son compatibles con el coproducto μ , es decir, los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{array}{ccc} X^* & \xrightarrow{\lambda} & P^* \otimes X^* \\ \lambda \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \lambda \\ P^* \otimes X^* & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & P^* \otimes P^* \otimes X^* \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\rho} & X \otimes P^* \\ \rho \downarrow & & \downarrow 1 \otimes \mu \\ X \otimes P^* & \xrightarrow{\rho \otimes 1} & X \otimes P^* \otimes P^*. \end{array}$$

A.4 Reducción a través de módulos admisibles.

Definición A.18 Sean $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra con estrato (R, W) y supongamos que $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$ es una descomposición de R - R -bimódulos tal que $\delta(W'_0) = 0$. Consideramos la subálgebra B de T generada por R y W'_0 y notemos que B es una subálgebra de T_0 libremente generada por (R, W'_0) . Observamos además que $\mathcal{A}' = (B, 0)$ es una subditálgebra de \mathcal{A} y que T_0 es libremente generado por $(B, BW''_0 B)$. Entonces el álgebra T tiene por estrato (además de (R, W)) a la pareja (B, \underline{W}) (ver el lema A.3), donde $\underline{W} = \underline{W}_0 \oplus \underline{W}_1$ con $\underline{W}_0 = BW''_0 B$ y $\underline{W}_1 = BW_1 B$.

Definición A.19 Sea $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra con estrato (R, W) . Dado un \mathcal{A} -módulo X , el álgebra $\Gamma = \mathbf{End}_{\mathcal{A}}(X)^{op}$ actúa por la derecha de X mediante la regla $xp = p^0(x)$ para $p = (p^0, p^1)$ y $x \in X$. Se dice que X es un **módulo admisible** si se satisfacen las siguientes condiciones

- 1) Γ admite una escisión (S, P) ;
- 2) el S -módulo derecho X admite una base dual finita, y
- 3) los morfismos f en S son de la forma $f = (f^0, 0)$.

Ya que en este trabajo estamos interesados solo en \mathcal{A}' -módulos admisibles para subditálgebras \mathcal{A}' de la forma dada en A.18, el punto (3) de la definición anterior se satisface de manera automática. En todos los casos de nuestro interés S es un álgebra semi-simple, por lo que el punto (2) se satisface siempre que X sea de dimensión finita sobre el campo.

Definición A.20 Supongamos que X es un \mathcal{A}' -módulo admisible, donde \mathcal{A}' es una subditálgebra de \mathcal{A} como en la definición A.18. Teniendo en cuenta la notación de la definición anterior, se define el S - S -bimódulo $W^X = W_0^X \oplus W_1^X$ por las fórmulas

$$W_0^X = X^* \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X \quad y \quad W_1^X = [X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X] \oplus P^*.$$

Tomamos el **álgebra tensorial reducida** $T^X = T_S(W^X)$ con estrato (S, W^X) .

Queremos definir una diferencial δ^X en T^X . Para ello se definen los siguientes morfismos auxiliares.

Lema A.21 *Supongamos que X es un \mathcal{A}' -módulo admisible y que T^X es el álgebra tensorial reducida como en la definición anterior. Sea $D(X) = (X^* \times X) \sqcup (P^* \otimes_S X^* \times X) \sqcup (X^* \times X \otimes_S P^*)$. Recordamos que T es libremente generado por (B, \underline{W}) . Para cada elemento $(u, v) \in D(X)$ existe un morfismo lineal*

$$\sigma_{u,v} : T_B(\underline{W}) \longrightarrow T^X,$$

tal que para $w_1, \dots, w_n \in \underline{W}$ se tiene a $\sigma_{u,v}(w_1 \otimes \dots \otimes w_n)$ dado por

$$\sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} u \otimes w_1 \otimes x_{i_1} \otimes \nu_{i_1} \otimes w_2 \otimes x_{i_2} \otimes \nu_{i_2} \otimes \dots \otimes x_{i_{n-1}} \otimes \nu_{i_{n-1}} \otimes w_n \otimes v,$$

y para $b \in B$,

$$\begin{cases} \sigma_{\nu,x}(b) = \nu(bx), & \text{si } \nu \in X^*, x \in X, \\ \sigma_{u,x}(b) = \sum_r \varphi_r \psi_r(bx), & \text{si } x \in X, u = \sum_r \varphi_r \otimes \psi_r, \varphi_r \in P^*, \psi_r \in X^*, \\ \sigma_{\nu,v}(b) = \sum_s \nu(by_s) \varphi'_s, & \text{si } \nu \in X^*, v = \sum_s y_s \otimes \varphi'_s, y_s \in X, \varphi'_s \in P^*. \end{cases}$$

La prueba junto con algunas propiedades de los morfismos $\sigma_{u,v}$ se encuentran en [8, lema 12.8]. En particular nos interesa que, para todo par $x \in X$ y $\nu \in X^*$, el morfismo $\sigma_{\nu,x}$ preserva grados.

Lema A.22 *Existe un morfismo de S - S -bimódulos*

$$\delta^X : [X^* \otimes_B \underline{W} \otimes_B X] \oplus P^* \rightarrow T^X,$$

cuya restricción a P^* es el coproducto μ de P , y para $w \in \underline{W}_0 \cup \underline{W}_1$, $x \in X$ y $\nu \in X^*$,

$$\delta^X(\sigma_{\nu,x}(w)) = \sigma_{\lambda(\nu),x}(w) + \sigma_{\nu,x}(\delta(w)) + (-1)^{|w|+1} \sigma_{\nu,\rho(x)}(w),$$

donde λ y ρ son las coacciones dadas en A.17. Este morfismo puede extenderse a una diferencial en el álgebra tensorial T^X , que también denotamos con δ^X , de manera que $\mathcal{A}^X = (T^X, \delta^X)$ es una ditálgebra con estrato (S, W^X) .

La ditálgebra \mathcal{A}^X es llamada **reducción de \mathcal{A} con respecto a X** . Una de las herramientas principales de este trabajo es el **functor de reducción** $F^X : \mathcal{A}^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$, como se construye por Bautista, Salmerón y Zuazua en la proposición 12.10 de [8].

Proposición A.23 *Sean $\mathcal{A} = (T, \delta)$ una ditálgebra con estrato (R, W) y $A = T_0$. Sea X un \mathcal{A}' -módulo admisible, donde \mathcal{A}' es una subditálgebra de \mathcal{A} como en la definición A.18. Entonces existe un functor*

$$F^X : \mathcal{A}^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod},$$

definido de la siguiente manera.

Dado un \mathcal{A}^X -módulo M denotamos con \star a la acción izquierda de $T^X = T_S(W^X)$ en M . Hacemos $F^X(M) = X \otimes_S M$ (considerado como B -módulo izquierdo) a quien queremos dar estructura de A -módulo. Para ello recordamos que A es libremente generado por B y \underline{W}_0 , por lo que, para dar a $F^X(M)$

estructura de A -módulo, basta dar un morfismo de B -módulos izquierdos $\underline{W}_0 \otimes_B X \otimes_S M \rightarrow X \otimes_S M$. Consideramos la composición

$$\begin{array}{c}
 \underline{W}_0 \otimes_B (X \otimes_S M) \longrightarrow \mathbf{End}_S(X) \otimes [\underline{W}_0 \otimes_B (X \otimes_S M)] \\
 \downarrow \varphi^{-1} \otimes 1 \\
 (X \otimes_S X^*) \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B (X \otimes_S M) \\
 \downarrow \cong \\
 X \otimes_S [(X^* \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X) \otimes_S M] \\
 \parallel \\
 X \otimes_S (\underline{W}_0^X \otimes_S M) \\
 \downarrow 1 \otimes \star \\
 X \otimes_S M,
 \end{array}$$

donde φ es el morfismo dado en el lema A.14. Usando la expresión de φ^{-1} dada en dicho lema, se muestra la siguiente fórmula para $a \in A$,

$$a \cdot (x \otimes m) = \sum_i x_i \otimes \sigma_{\nu_i, x}(a) \star m.$$

Si $f = (f^0, f^1) \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{A}^X}(M, N)$ entonces $F^X(f)$ está dado por

$$\begin{aligned}
 (F^X(f))^0[x \otimes m] &= x \otimes f^0(m) + \sum_j x p_j \otimes f^1(\gamma_j)[m], \\
 (F^X(f))^1(v)[x \otimes m] &= \sum_i x_i \otimes f^1(\sigma_{\nu_i, x}(v))[m],
 \end{aligned}$$

donde $x \in X$, $m \in M$ y $v \in V = T_1$.

Se dan ahora condiciones que garantizan que el funtor de reducción F^X sea fiel y pleno. Observamos que para un \mathcal{A}' -módulo admisible X se pueden hacer dos reducciones \mathcal{A}^X y \mathcal{A}'^X . Los funtores de reducción $F^X : \mathcal{A}^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ y $F'^X : \mathcal{A}'^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}'\text{-mod}$ se pueden relacionar de la siguiente manera. Recordamos que se tiene una descomposición $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$ con $\delta(W'_0) = 0$, y que B es la subálgebra de T generada por R y W'_0 . Entonces la inclusión $r = B \rightarrow T$ determina un morfismo de ditálgebras $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$.

Por otro lado, recordamos que si (S, P) es escisión de $\mathbf{End}_{\mathcal{A}'}(X)^{op}$ entonces la ditálgebra reducida \mathcal{A}^X tiene por estrato a (S, W^X) donde

$$W_0^X = X^* \otimes_B \underline{W}_0 \otimes_B X \quad \text{y} \quad W_1^X = X^* \otimes_B \underline{W}_1 \otimes_B X \oplus P^*,$$

$\underline{W}_0 = BW''_0B$ y $\underline{W}_1 = BW_1B$. Ahora, para la reducción \mathcal{A}'^X se considera la descomposición trivial de bimódulos $W'_0 = W'_0 \oplus 0$ en el estrato (R, W'_0) de \mathcal{A}' . Entonces la ditálgebra reducida \mathcal{A}'^X tiene estrato (S, P^*) . La inclusión de bimódulos $P^* \rightarrow W^X$ induce un morfismo de ditálgebras $\hat{r} : \mathcal{A}'^X \rightarrow \mathcal{A}^X$. Más aún, el siguiente diagrama es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}^X\text{-mod} & \xrightarrow{F^X} & \mathcal{A}\text{-mod} \\
 F_{\hat{r}} \downarrow & & \downarrow F_r \\
 \mathcal{A}'^X\text{-mod} & \xrightarrow{F'^X} & \mathcal{A}'\text{-mod}.
 \end{array}$$

Definición A.24 Sea $\mathcal{A}' = (B, 0)$ una ditálgebra con estrato (R, W'_0) como en la definición A.18. Un \mathcal{A}' -módulo admisible X se llama completo si el funtor de reducción $F'^X : \mathcal{A}'^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}'\text{-mod}$ es fiel y pleno.

La prueba de los siguientes resultados se encuentra en [8, 13.3 y 13.5].

Lema A.25 Sea $\mathcal{A}' = (B, 0)$ una ditálgebra con estrato (R, W'_0) como en la definición A.18. Supongamos que X es un \mathcal{A}' -módulo admisible, donde el álgebra $\mathbf{End}_{\mathcal{A}'}(X)^{op}$ admite por escisión al par (S, P) . Supongamos además que X es de dimensión finita sobre el campo base k y que S es semi-simple. Entonces X es un \mathcal{A}' -módulo admisible completo.

Proposición A.26 Supongamos que X es un \mathcal{A}' -módulo admisible completo, donde $\mathcal{A}' = (B, 0)$ es una subditálgebra de la ditálgebra con estrato \mathcal{A} como en la definición A.18. Entonces el funtor asociado $F^X : \mathcal{A}^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ es fiel y pleno.

El siguiente lema describe a los \mathcal{A} -módulos que se encuentran en la imagen del funtor F^X [8, lema 16.1].

Lema A.27 Supongamos que X es un \mathcal{A}' -módulo admisible, donde $\mathcal{A}' = (B, 0)$ es una subditálgebra de la ditálgebra con estrato \mathcal{A} como en la definición A.18. Supongamos que M es un S -módulo tal que existe un objeto $\overline{X} \otimes_S \overline{M}$ en $\mathcal{A}\text{-mod}$ cuya estructura subyacente de B -módulo es la estructura canónica en $X \otimes_S M$. Entonces existe un único \mathcal{A}^X -módulo \overline{M} con estructura subyacente de S -módulos M tal que $F^X(\overline{M}) = \overline{X} \otimes_S M$.

Terminamos esta sección con una descripción del efecto del funtor asociado F^X en grupos de extensiones. Consultar [8, 16.6].

Lema A.28 Supongamos que X es un \mathcal{A}' -módulo admisible, donde $\mathcal{A}' = (B, 0)$ es una subditálgebra de la ditálgebra con estrato triangular \mathcal{A} como en la definición A.18 y que en la descomposición $W_0 = W'_0 \oplus W''_0$ el bimódulo W'_0 aparece en la filtración de W_0 en la definición de estrato triangular. Entonces \mathcal{A}' es una ditálgebra con estrato triangular. Supongamos además que en la escisión (S, P) de $\Gamma = \mathbf{End}_{\mathcal{A}'}(X)^{op}$, el álgebra S es semi-simple y $P = \mathbf{rad}\Gamma$ y que X es de dimensión finita sobre el campo k . Entonces $F_X : \mathcal{A}^X\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}\text{-mod}$ es un funtor exacto y para cada par de \mathcal{A}^X -módulos M y N induce una sucesión exacta de espacios vectoriales

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}^X}^1(M, N) &\xrightarrow{F_X^*} \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}}^1(F_X(M), F_X(N)) \\ &\xrightarrow{F_r^*} \mathbf{Ext}_{\mathcal{A}'}^1(F_r F_X(M), F_r F_X(N)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski. *Elements of the representation theory of associative algebras*, volume 1 of *London Mathematical Society Student Texts 65*. Cambridge University Press, (2006).
- [2] M. Auslander, I. Reiten, and S. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Number 36 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, (1995).
- [3] M. Barot and J.A. de la Peña. Root-induced integral quadratic forms. *Linear Algebra Appl.*, 412:291–302, (2006).
- [4] R. Bautista. Sections in Auslander-Reiten quivers. *Lectures Notes in Math.* 832, pages 74–96, (1979). Representation Theory II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont.).
- [5] R. Bautista. Sections in Auslander-Reiten components II. *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México*, 20(2):157–175, (1980).
- [6] R. Bautista. Mesh categories for translation quivers over different fields. *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma de México*, 24:1–12, (1984).
- [7] R. Bautista, J. Boza, and E. Pérez. Reduction functors and exact structures for bocses. *Bol. Soc. Mat. Mexicana(3)*, 1(9):21–60, (2003).
- [8] R. Bautista, L. Salmeron, and R. Zuazua. *Differential tensor algebras and their module categories*. London Mathematical Society, LNS 362. Cambridge University Press, (2009).
- [9] W. Crawley-Boevey. Matrix problems and Drozd’s theorem. *Topics in Algebra, Banach Center Publ.*, vol. 26, part I:199–222, (Warsaw 1990).
- [10] V. Dlab and C.M. Ringel. Indecomposable representations of graphs and algebras. *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, 6(173):1–57, (1976).
- [11] P. Gabriel. Unzerlegbare Darstellungen I. *Man. Math.*, 6:71–103, (1972).
- [12] P. Gabriel. Indecomposable representations II. *Symposia Math. Inst. Naz. Alta Mat.*, XI:81–104, (1973).
- [13] P. Gabriel and A. V. Roiter. *Representations of finite-dimensional algebras*. London Mathematical Society, LNS 362. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1997).

- [14] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.5*, 2014.
- [15] I.M. Gelfand and V.A. Ponomarev. Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space. *Colloquia math. Soc. Janos Bolyai*, 5:163–237, (1972).
- [16] J.A. Jiménez-González. Geometry in the indecomposable modules of a hereditary algebra. *PhD Thesis*, (2014). arXiv:1412.8233.
- [17] D. Kedzierski and H. Meltzer. Indecomposable modules for extended Dynkin quivers of type \widetilde{E}_8 . *Colloquium Mathematicum*, 124(1):95–116, (2011).
- [18] S. Komoda and H. Meltzer. Indecomposable modules for domestic canonical algebras in arbitrary characteristic. *International Journal of Algebra*, 2(4):153–161, (2008).
- [19] D. Kussin and H. Meltzer. Indecomposable representations for extended Dynkin quivers. *arXiv:math/0612453v1*, (2006).
- [20] D. Kussin and H. Meltzer. Indecomposable modules for domestic canonical algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, (211):471–483, (2007).
- [21] G. Medina and A.G. Zavadskij. The four subspace problem: an elementary solution. *Linear Algebra and its Applications*, 392:11–23, (2004).
- [22] L.A. Nazarova. Representations of a tetrad. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 31, pages 1361–1378, (1967). English translation: *Math. USSR, Izv.* 1(1967), 1305–1321.
- [23] L.A. Nazarova and A.V. Roiter. Representations of partially ordered sets. *J.Sov.Math.*, 3(5):585–606, (1975).
- [24] C.M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099. Springer LNM, (1984).
- [25] C.M. Ringel. The braid group action on the set of exceptional sequences of a hereditary artin algebra. *Abelian Group Theory and Related Topics, Contemp. Math.*, 171:339–352, (1994).
- [26] C.M. Ringel. Exceptional modules are tree modules. *Lin. Alg. Appl.*, 275–276:471–463, (1998).
- [27] C.M. Ringel. Distinguished bases of exceptional modules. (2012).
- [28] C.M. Ringel. Indecomposable representations of the Kronecker quivers. *Proc. Amer. Math. Soc.*, (141):115–121, (2013).
- [29] S.L. Suteu-Szollosi. *Kronecker modules and matrix pencils*. PhD thesis, Babes-Bolyai University, 2011.
- [30] Th. Weist. Tree modules for the generalized Kronecker quiver. *Journal of Algebra*, 323:1107–1138, (2010).
- [31] Th. Weist. Tree modules. *Bull. London Math. Soc.*, (DOI: 10.1112/blms/bds019), (2012). First published online April 17,2012.

Índice

- ConL**(\cdot), **ConR**(\cdot), 60
- ind**($-$), 4
- rk**(\cdot), 92
- $\check{U}(\mathcal{Z})$, 69, 92
- ConL**₀(\cdot), **ConR**₀(\cdot), 60
- $\langle \mathcal{S} \rangle, \vee$, 4
- \mathcal{A} -mod, 3
- \mathcal{P}, \mathcal{I} , 40
- $\sharp(M_0)$, 92

- ala, 62
- álgebra de caminos, 3
- álgebra de Kronecker, 43
- álgebra elemental, 3
- álgebra libremente generada, 145
- álgebra positivamente graduada, 145
- álgebra tensorial reducida, 155

- base árbol, 24
- base de módulo, 23
- base dual, 153

- camino, 3
- característica de Euler, 7
- carcaj, 1
- carcaj de Auslander-Reiten, 30
- carcaj de coeficiente, 23
- carcaj de Dynkin, 58
- carcaj de Dynkin extendido, 67
- carcaj de traslación, 30
- carcaj de traslación admisible, 34
- carcaj de traslación hereditario, 30
- carcaj de traslación propio, 31
- carcaj dirigido, 31
- carcaj estrella, 62
- carcaj localmente finito, 30
- carcaj preinjectivo/posproyectivo, 31
- categoría con sucesiones exactas cortas, 29
- categoría de caminos, 42
- categoría de mallas, 42

- categoría de subespacios, 68
- categoría Krull-Schmidt, 4, 29
- centro de estrella, 63
- cerrado por mallas, 33
- ciclos orientados, 3
- clase de objetos, 4
- componente posproyectiva, 41
- componente preinyectiva, 41
- cosección, 31

- destino, 1
- diferencial, 147
- diferencial triangular, 4, 149
- dimensión vectorial, 7
- ditálgebra, 3, 147
- ditálgebra con estrato, 148
- ditálgebra de Roiter, 149
- ditálgebra reducida, 16, 156
- ditálgebra trivial, 147
- dividirse sobre radical, 16

- escisión, 154
- estrato, 3, 148
- estructura exacta, 4
- extensión de un punto, 68
- extensión de un punto tensorial, 69

- forma bilineal entera, 2
- forma bilineal simétrica, 3
- forma cuadrática entera, 3
- función aditiva, 35
- fundor de reducción, 156
- funtor de reducción, 17
- funtor exacto, 12
- funtor rígido, 13

- gráfica de órbitas, 31

- ideal de mallas, 42

- levantamiento de funtores, 87

- levantamiento de módulos, 79
- módulo árbol, 24
- módulo admisible, 16, 155
- módulo cogenerado, 63
- módulo de reducción, 16
- módulo excepcional, 5
- módulo generado, 63
- módulo inescindible, 4
- módulo rígido, 5
- módulo sincero, 22
- mallá, 33
- mapeos universales, 93
- matriz de Cartan, 6
- matriz de Coxeter, 8
- matriz de incidencias, 2
- morfismo de carcajes, 1
- morfismo irreducible, 27
- morfismo minimal, 28
- morfismo que casi se divide, 27
- multiplicidad, 108

- norma, 13

- órbita, 30
- orden de estrella, 63
- ordenación admisible, 1
- orientación de subespacio, 142, 143
- orientación lineal, 62, 112, 115
- origen, 1

- par exacto que casi se divide, 29
- periodo, 108
- polarización, 42
- predecesores directos, 1
- producto matricial, 70

- raíz, 3
- raíz máxima w_0 , 59
- radical, 27
- rango de un módulo, 92
- rango de vector, 116
- reducción, 16, 156
- reflexiones simples, 8

- sección, 31
- subcarcaj cerrado por mallas, 33
- subcarcaj de traslación, 33
- subcategoría de Kronecker, 92
- sucesión que casi se divide, 29
- sucesores directos, 1

- suma de mallá, 42

- tipo (tubular) de diagrama, 63
- traslación, 30
- traslación de Auslander-Reiten, 30
- triangularidad, 4, 149

- vértice ala, 62
- vértice proyectivo/inyectivo, 30
- vector homogéneo, 145
- vector legible, 3
- vector radical, 67, 76

Centro de Ciencias Matemáticas
UNAM Campus Morelia
Apartado Postal 61-3 (Xangari), C.P. 58089
Morelia, Michoacán, México