Universidad Nacional Autónoma de México
Doctorado en Ciencias Matemáticas
Instituto de Matemáticas

FUNCIONES DE TAMAÑO FUERTE

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
AUGUSTO CÉSAR PICENO CABRERA

TUTOR:
DR. SERGIO MACÍAS ÁLVAREZ
Instituto de Matemáticas de la UNAM

Febrero 2015

A mi mamá, ejemplo de fortaleza y amor.

Agradecimientos

Afortunadamente en mi vida me he topado con muy buenas personas que, la mayoría de las veces me han aportado cosas importantes. Seguramente no podré mencionar a muchas y ciertamente, mis agradecimientos no serán suficientes. Mil disculpas.

Muchas gracias papá y mamá, por hacerme felíz, por animarme cuando he estado triste, por enseñarme tantas cosas, por estar conmigo cada que los he necesitado, gracias por hacerme parte de este mundo. Gracias a mi familia, que siempre ha sido parte de mi vida. Gracias Beto y, gracias Ely por compartir tantas aventuras conmigo.

Muchas gracias Sergio, por aceptar ser mi tutor en el doctorado, disfruté y aprendí muchísimo trabajando contigo. Gracias por compartirme pacientemente tu sabiduría.

Quiero agradecer especialmente a mis sinodales: Dr. Raúl Escobedo, Dr. Ángel Tamaríz, Dra. Patricia Pellicer y a la Dra. Isabel Puga, por tomarse el tiempo para revisar este trabajo. Todos ellos, afortunadamente, han sido muy importante en mi formación como matemático y como topólogo. No quisiera dejar de agradecer al Dr. Jesús Munciño por aceptar ser parte de mi comité tutorial.

Sin duda, también tengo que agradecer a todos aquellos profesores que han sido reelevantes en mi formación como matemático, que por temor a olvidar a alguno, no me atrevo a mencionar más que a mi padre, que me mostró el mundo maravilloso de las matemáticas.

Gracias al Conacyt por su apoyo económico en mis estudios de posgrado, a la UNAM por mis estudios de posgrado y a la

BUAP por mi formación en la licenciatura.

Gracias amigos, por darme la oportunidad de entrar en su mundo y compartir conmigo sus vidas. Gracias Δ 03.

Gracias Carolina, haberte encontrado es lo mejor que me ha pasado. Gracias por todos esos momentos que hemos vivido juntos, gracias por regalarme tu sonrisa cada mañana.

Índice

Introducción

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Dado un continuo X podemos definir los siguientes hiperespacios: 2^X que consiste de todos los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Para cada entero positivo n, $C_n(X)$ consiste de todos los elementos de 2^X con a lo más n componentes (cuando $n = 1$ escribimos $C(X)$) y $F_n(X)$ que consiste de todos los elementos de 2^X con a lo más n elementos. Es claro que $F_n(X) \subset C_n(X)$ y $C_n(X) \subset 2^X$ para todo entero positivo n. A $F_n(X)$ lo llamamos *n-ésimo producto simétrico* de X y a $C_n(X)$ lo llamamos *n-ésimo hiperespacio* de X.

La teoría de los hiperespacios tiene sus inicios a principios del siglo XX. Durante las decadas de 1920 y 1930 gran parte de la estructura fundamental de los hiperespacios fue determinada. En 1931 K. Borsuk y S. Mazurkiewicz demuestran que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ son arcoconexos [4]. En ese mismo año (1931) es publicado, por K. Borsuk y S. Ulam, el primer artículo sobre productos simétricos [5], en él se demuestra que los productos simétricos de un continuo son continuos. En 1939 es publicado otro resultado importante para la teoría de hiperspacios, Wojdisławski demuestra que 2^X y $C_n(X)$ son retractos absolutos cuando X es un continuo localmente conexo [58]. En 1942, Kelley publica un artículo fundamental en la teoría de hiperespacios [25], ya que, entre otras cosas, es el primer artículo que usa a las funciones de Whitney para estudiar a los hiperespacios, en ese mismo artículo el autor menciona, sin demostración, que algunos de sus resultados son ciertos para el n-ésimo hiperespacio de un continuo [25, Observación, pág. 29]. Desde ese entonces, las funciones de Whitney se han convertido en una herramienta usada en casi todos los artículos sobre hiperespacios. También, el artículo de Kelley fue el primer artículo sobre hiperespacios en dar aplicaciones de hiperespacios a otras áreas. En 1959, Segal demuestra que $C(X)$ es acíclico [52]. En los años 1970, otro resultado importante es obtenido, una pregunta formulada en los años 1920 y que había sido de interés desde entonces es respondida de manera afirmativa por Curtis, Schori [10]. La pregunta era: ¿Si X es un continuo localmente conexo, entonces 2^X es homeomorfo al cubo de Hilbert?. En [45], [47] y en [16] se investiga la accesibilidad por arcos de los elementos de $F_1(X)$ desde puntos de $C_2(X)$. En [47, (0.71.2)] se define una función $f : C_2(X) \to F_2(C(X))$ como:

$$f(K) = \{A \in C(X) : A \text{ es una componente de } K\}$$

y se pide probar que f no es suprayectiva y que nunca es continua. Eso es una muestra de que nuestra idea más intuitiva para encajar $C_n(X)$ en $F_n(C(X))$ no sirve. En 2001 Sergio Macías publica [29], que es, según sabemos, el primer artículo sobre los n-ésimos hiperespacios de continuos desde que Wojdisławski publicó [58] en 1931. Otros artículos sobre el n-ésimo hiperespacio de un continuo son [6], [18], [22], [30], [31], [32], [34], [36], [37], [38], [39], [40] y [41].

Posteriormente, en 2011, H. Hosokawa define las funciones de tamaño fuerte (y prueba su existencia) para los n-ésimos hiperespacios de continuos en [18], que son, una generalización de las funciones de Whitney definidas en $C(X)$.

Las funciones de Whitney están estrechamente relacionadas con las estructuras de arcos en los hiperespacios, esa es una de las razones por las que nos ha parecido importante estudiar también las funciones de tamaño fuerte. Además, las funciones de tamaño fuerte tienen una ventaja trascendental sobre las funciones de Whitney definidas en $C_n(X)$ para $n \geq 2$, y es que las funciones de tamaño fuerte son monótonas y abiertas, mientras que las funciones de Whitney no siempre lo son. Esto, estructuralmente es muy agradable, ya que genera una partición monótona y continua del hiperespacio $C_n(X)$ para cualquier entero positivo n.

En esta tesis estudiamos a los hiperespacios de continuos. En particular, estudiamos a los n-ésimos productos simétricos, y los n-ésimos hiperespacios de continuos, a las funciones de tamaño y de tamaño fuerte definidas en ellos. También estudiamos los niveles de tamaño y de tamaño fuerte generados por las funciones de tamaño y las funciones de tamaño fuerte. La tesis está dividida en seis capítulos.

En el Capítulo 1 incluimos la notación, definiciones, conocimientos básicos y los resultados preliminares que serán usados en el resto de la tesis. También incluimos un ejemplo en el cual, una función de Whitney no es monótona para el segundo hiperespacio de un continuo dado (Ejemplo 1.64).

En el Capítulo 2, aparecen algunos resultados que se saben (hasta la fecha) sobre las funciones de tamaño fuerte. En este capítulo damos ciertas condiciones para asegurar cuándo, al operar algebraicamente las funciones de tamaño fuerte con las funciones de Whitney o las funciones de tamaño, el resultado sigue siendo una función de tamaño fuerte. Damos dos ejemplos explícitos de la construcción de dos funciones de tamaño fuerte. Terminamos el capítulo con un teorema de extensión de funciones de tamaño fuerte definidas en un subconjunto cerrado de un n-ésimo hiperespacio de un continuo al n-ésimo hiperespacio completo (Teorema 2.15).

En el Capítulo 3, presentamos los resultados que se saben, hasta la fecha, sobre los niveles de tamaño fuerte y sobre las propiedades de tamaño fuerte. También en este capítulo caracterizamos a los niveles de tamaño fuerte como anticadenas que son intersectadas por todos los arcos de orden maximales (Teorema 3.3). Demostramos que los niveles de tamaño fuerte para los n-ésimos hiperespacios con $n \geq 2$, contienen $(n-1)$-celdas (Corolario 3.5). En la Sección 3.1 demostramos que la aposindesis numerable, la aposindesis finita, la encadenabilidad por continuos y la aciclicidad (para $n \geq 3$) son propiedades de tamaño fuerte. Como una consecuencia del Teorema 3.15, obtenemos que la arcoconexidad es una propiedad de tamaño fuerte (Corolario 3.17). De esta forma, presentamos una prueba de este hecho, diferente a la dada por Hosokawa. En la Sección 3.2, demostramos que la clase de las funciones que preservan niveles de tamaño fuerte coincide con la clase de homeomorfismos (Teorema 3.39).

En el Capítulo 4, definimos las funciones de tamaño fuerte admisibles y demostramos que los niveles de las funciones de tamaño fuerte admisibles para el n-ésimo hiperespacio de los continuos localmente conexos que no contienen arcos libres son cubos de Hilbert.

En el Capítulo 5, definimos las propiedades de tamaño fuerte reversibles y demostramos, entre otras cosas que las siguientes propiedades: el ser un continuo encadenable por continuos (Teorema 5.12), el ser un continuo localmente conexo (Teorema 5.13) y el ser un continuo con la propiedad de Kelley (Teorema 5.15) son propiedades de tamaño fuerte reversibles.

Finalmente, en el Capítulo 6, trabajamos sólo con funciones de tamaño definidas en $C(X)$, donde X es un continuo. En este capítulo definimos los techos de niveles tamaño y demostramos que si X es un continuo localmente conexo, entonces cada nivel de tamaño en $C(X)$ contiene un conjunto que es límite de una sucesión de niveles de Whitney (Teorema 6.12).

Parte de los resultados de este trabajo se encuentran en [40] y [41].

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notación y definiciones

1.1 Notación. Dado un subconjunto A de un espacio métrico Z con métrica d, la cerradura, la frontera y el interior de A están denotados por $cl_Z(A)$, $fr_Z(A)$ e $int_Z(A)$, respectivamente. De no haber motivo de confusión se omitirá el subíndice.

1.2 Notación. Denotamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales y por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales.

1.3 Definición. Diremos que un espacio es *no degenerado* si contiene más de un punto, en caso contrario diremos que es *degenerado*.

1.4 Definición. Dado un espacio métrico X, una *vecindad* de un punto $x \in X$, es un conjunto que tiene a x en su interior.

1.5 Notación. Dados un espacio métrico X con métrica d y $x \in X$, denotamos como:

$$V_r^d(x)$$

a la bola abierta con centro en x y radio r.

1.6 Definición. Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es *acotado* si existe $r > 0$, tal que $d(x, y) < r$ para todo x y todo y en A.

1.7 Definición. Dado un subconjunto no vacío y acotado A de un espacio métrico (X, d), definimos el *diámetro* de A como:

$$\text{diám}_d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

1.8 Definición. Dados un espacio métrico (X, d), $x \in X$ y un subconjunto no vacío A de X, definimos la *distancia de x a A* como:

$$d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, a) : a \in A\}.$$

1.9 Definición. Dados un espacio métrico (X, d) y cualquier par de subconjuntos no vacíos A y B de X, definimos la *distancia entre conjuntos* como:

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Cabe mencionar que la función definida en la Definición 1.9 no es una métrica para el espacio de subconjuntos de X, ni siquiera en el caso de subconjuntos compactos, pues si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $d(A, B) = 0$.

1.10 Definición. Un *arco* es un espacio homeomorfo a $[0, 1]$. Si X es un arco y $\alpha : [0, 1] \to X$ es un homeomorfismo, a $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se les llama *puntos finales* de X.

1.11 Observación. Si X es un arco y $\alpha : [0, 1] \to X$ es un homeomorfismo, entonces X tiene un orden inducido por α, es decir, $x \leq y$ si y sólo si $\alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$.

1.12 Definición. Un espacio métrico X es *arcoconexo*, si para cada par de puntos p y q de X, existe una función continua e inyectiva $f : [0, 1] \to X$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

1.13 Definición. Sean X un espacio métrico, A un arco en X, $\alpha : [0,1] \to A$ un homeomorfismo. Decimos que A es un *arco libre* si $\alpha((0,1))$ es abierto en X.

1.14 Definición. Un *cubo de Hilbert* es un espacio homeomorfo al producto cartesiano numerable $\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$, donde cada $I_i = [0,1]$.

1.15 Definición. Dado un espacio métrico X, definimos el *cono* de X, denotado por $Cono(X)$, como el espacio cociente que resulta de identificar en un punto al subconjunto $X \times \{1\}$ del espacio $X \times [0,1]$. Es decir, $Cono(X)$ es el espacio cociente $X \times [0,1]/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia sobre $X \times [0,1]$ dada por $(x_1, t_1) \sim (y_2, t_2)$ si y sólo si $(x_1, t_1) = (y_2, t_2)$ o $t_1 = t_2 = 1$. El punto $X \times \{1\}$ de $Cono(X)$ es llamado *vértice del cono* de X. El subconjunto $X \times \{0\}$ de $Cono(X)$ es llamado la *base del cono* de X.

1.16 Definición. Un espacio métrico X es *localmente conexo* si para cada punto $x \in X$ y cada conjunto abierto U de X que contiene a x, existe un conjunto abierto y conexo V de X, tal que $x \in V \subset U$.

1.2 Continuos

En esta sección presentamos la definición de continuo, ejemplos de continuos, algunos resultados de cultura general sobre los continuos y algunos tipos de continuos.

1.17 Definición. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.

Tal vez, los ejemplos más conocidos de continuos sean los siguientes:

1.18 Ejemplo. El arco ($[0,1]$), la circunferencia unitaria (S^1), la *n-celda* ($\prod_{i=1}^n I_i$, donde cada $I_i = [0,1]$), el cubo de Hilbert ($\prod_{i\in\mathbb{N}} I_i$, donde cada $I_i = [0,1]$) y el continuo sen$\frac{1}{x}$ ($\{(0,y) : y \in [-1,1]\} \cup \{(x, \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) : x \in (0,1]\}$).

Los primeros cuatro ejemplos son continuos que son localmente conexos y arcoconexos, sin embargo, el continuo sen$\frac{1}{x}$ es un continuo que no es ni localmente conexo ni arcoconexo. Merece la pena mencionar que el ser un continuo arcoconexo no es equivalente a ser un continuo localmente conexo, hay muchos ejemplos de continuos que son arcoconexos y no son localmente conexos.

Los siguientes resultados, son herramientas muy útiles y muy conocidas de la teoría de continuos. Estos resultados, a pesar de no ser mencionados explícitamente, estarán presentes en muchas de las demostraciones que se presentarán en esta tesis.

1.19 Lema. Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Dada una función $f : X \to Y$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es continua.
2. Para cada $x \in X$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se tiene que para cualquier subsucesión convergente $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.
3. Para cada $x \in X$ y cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, existe una subsucesión convergente $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.

Demostración. Sea d una métrica para Y. Que 1. implica 2. y que 2. implica 3. es evidente. Demostraremos que 3. implica 2. y que 2. implica 1..

Demostremos que 3. implica 2.. Sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tales que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$. Consideremos la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y y sea $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $y = \text{lím}_{k\to\infty} f(x_{n_k})$, como $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$, tenemos que $\text{lím}_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Entonces, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\text{lím}_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Por 3., existe una subsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\text{lím}_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = f(x)$. Concluímos que $y = \text{lím}_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$.

Finalmente, demostremos que 2. implica 1.. Sean $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tales que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$. Supongamos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $G = \{n \in \mathbb{N} : d(f(x), f(x_n)) \geq \epsilon\}$ es infinito. Ordenemos a los elementos de G en una sucesión $n_1 < n_2 < \ldots$. Como Y es compacto, existen una subsucesión $\{f(x_{n_{k_j}})\}_{j\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un punto $y \in Y$ tales que $\text{lím}_{j\to\infty} f(x_{n_{k_j}}) = y$. Por 2. tenemos que $y = f(x)$, lo cual es absurdo pues $d(f(x), f(x_{n_{k_j}})) \geq \epsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Con lo que concluímos que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, es decir, f es continua.$\square$

1.20 Teorema. [35, Teorema 1.7.2] Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de continuos tales que $X_{n+1} \subset X_n$ para cada natural n, entonces $\cap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es un continuo.

1.21 Teorema. [48, Teorema 2.1] El producto cartesiano finito o numerable de continuos (espacios métricos, compactos y no vacíos) es un continuo (espacio métrico, compacto y no vacío).

1.22 Teorema. [48, Teorema 5.6] Sean X un continuo y E un subconjunto propio no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $cl_X(K) \cap fr_X(E) \neq \emptyset$.

1.23 Teorema. [35, Teorema 1.1.16] Todo continuo puede ser encajado topológicamente en el cubo de Hilbert.

1.2.1 Clases de Continuos

Como ya hemos visto, hay continuos que tienen diferentes propiedades, como los continuos que son localmente conexos y los que son arcoconexos. A continuación, presentamos una serie de definiciones que nos sirven para clasificar a algunos tipos de continuos.

1.24 Definición. Decimos que un continuo es *descomponible* si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios. Diremos que un continuo es *indescomponible* si no es descomponible. Un continuo es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subcontinuos son indescomponibles.

1.25 Definición. Decimos que un continuo X es *unicoherente* si para todo par de subcontinuos A y B de X, tales que $A \cup B = X$ se tiene que $A \cap B$ conexo. Un continuo es *hereditariamente unicoherente* si todos sus subcontinuos son unicoherentes.

1.26 Notación. Si X es un continuo y n es un entero positivo, entonces $\check{H}^n(X)$ denota el n-ésimo grupo de cohomología reducida de Čech para X con coeficientes enteros [44, Definición pág. 437].

1.27 Definición. Un continuo X se dice que es *acíclico* si $\check{H}^1(X)$ es trivial.

1.28 Definición. Un continuo X es *aposindético* si para cada par de puntos x_1 y x_2 de X, existe un subcontinuo W de X tal que $x_1 \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{x_2\}$.

1.29 Definición. Un continuo X es *finitamente aposindético* (*numerablemente aposindético*) si para cada subconjunto finito (subconjunto numerable y cerrado) F de X y cada punto $x \in$

$X \setminus F$, existe un subcontinuo W de X tal que $x \in int_X(W) \subset W \subset X \setminus F$.

1.30 Definición. Sean p y q dos puntos de un continuo X. Una colección finita $\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ de conjuntos se dice que es una *cadena de* p a q si $p \in L_1$, $q \in L_m$ y $L_i \cap L_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. Una cadena es una *cadena de continuos* si cada uno de sus elementos es un continuo. Una cadena de continuos es una ϵ-*cadena de continuos* si el diámetro de cada uno de sus elementos es menor que ϵ.

1.31 Definición. Se dice que un continuo X es *encadenable por continuos* si para cada par de puntos p y q de X y todo $\epsilon > 0$, existe una ϵ-cadena de continuos de p a q.

1.32 Observación. Notemos que todos los continuos arcoconexos son encadenables por continuos.

1.3 Espacios Parcialmente Ordenados

En esta sección presentamos los conceptos y resultados sobre espacios parcialmente ordenados que necesitamos para el desarrollo de la tesis.

1.33 Definición. Un *espacio parcialmente ordenado* es un espacio P dotado con un orden parcial $\leq$ cuya gráfica es un conjunto cerrado de $P \times P$.

Uno de los ejemplos más conocidos de espacios parcialmente ordenados es la recta real. Como uno pensaría, cualquier subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto parcialmente ordenado, pues hereda el orden del conjunto más grande.

Si P es un espacio parcialmente ordenado y $x \in P$, escribimos $L(x) = \{p \in P : p \leq x\}$ y $M(x) = \{p \in P : x \leq p\}$, si $A \subset P$, $L(A) = \cup\{L(a) : a \in A\}$ y $M(A) = \cup\{M(a) : a \in A\}$. Un elemento m de un conjunto parcialmente ordenado es *minimal* (*maximal*) si, siempre que $x \in P$ y $x \leq m$ ($m \leq x$), tenemos que $x = m$. El conjunto de elementos minimales de P es denotado por $\text{Mín}(P)$ y el conjunto de elementos maximales de P es denotado por $\text{Máx}(P)$.

L. E. Ward, Jr. demostró el siguiente teorema:

1.34 Teorema. [56, Teorema]. Si P es un espacio métrico, compacto y parcialmente ordenado tal que $\text{Mín } P$ y $\text{Máx } P$ son cerrados y disjuntos, entonces existe una función continua $\mu : P \to [0, 1]$ tal que $\mu(x) = 0$ para cada $x \in \text{Mín } P$ y $\mu(x) = 1$ para cada $x \in \text{Máx } P$ y $\mu(x) < \mu(y)$ si $x < y$.

1.35 Definición. Un subconjunto A de un espacio parcialmente ordenado $(P, \leq)$ es una *anticadena* si los elementos de A no son comparables bajo $\leq$.

Los siguientes dos resultados nos hablan de dos propiedades de L y M. El tercero nos da condiciones suficientes para asegurar cuándo una función tiene una extensión continua que preserva el orden.

1.36 Teorema. [55, Teorema 2.2] Si K es un subconjunto compacto de un conjunto parcialmente ordenado P, entonces $L(K)$ y $M(K)$ son conjuntos cerrados.

1.37 Teorema. [55, Teorema 2.3] Si x y y son elementos de un espacio compacto parcialmente ordenado P y si $M(x) \cap L(y) = \emptyset$, entonces existen abiertos disjuntos U y V en P tales que $x \in U = M(U)$ y $y \in V = L(V)$.

1.38 Teorema. [55, Lema 3.2] Supongamos que P es un espacio compacto parcialmente ordenado tal que Mín(P) y Máx(P) son conjuntos cerrados y disjuntos, $\mathcal{Q}$ es un subconjunto cerrado que contiene a Mín$(P)\cup$Máx(P), y supongamos que A y B son subconjuntos cerrados, disjuntos y no vacíos de P tales que $A = M(A)$ y $B = L(B)$. Si $f : \mathcal{Q} \to [0,1]$ es una función continua que preserva el orden tal que $f(\text{Mín}(P)) = \{0\}$ y $f(\text{Máx}(P)) = \{1\}$, entonces f admite una extensión continua que preserva el orden $\hat{f} : P \to [0,1]$ tal que $\hat{f}(a) \geq \text{ínf}\, f(A \cap \mathcal{Q})$ para cada $a \in A$ y $\hat{f}(b) \leq \sup f(B \cap \mathcal{Q})$ para cada $b \in B$.

1.39 Lema. Si $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ es una biyección que preserva el orden (invierte el orden), entonces α es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Observemos que puesto que α es biyectiva y preserva el orden (invierte el orden), tenemos que $\alpha((a,b)) = (\alpha(a), \alpha(b))$ $(\alpha((a,b)) = (\alpha(b), \alpha(a)))$ para todo $(a,b) \subset [0,1]$, también $\alpha([0,b)) = [\alpha(0), \alpha(b))$ $(\alpha([0,b)) = (\alpha(b), \alpha(0)])$ para todo $[0,b) \subset [0,1]$ y $\alpha((a,1]) = (\alpha(a), \alpha(1)]$ $(\alpha((a,1]) = [\alpha(1), \alpha(a)))$ para todo $(a,1] \subset [0,1]$. Por lo tanto, α es abierta y biyectiva, es decir, es un homeomorfismo.$\square$

1.4 Hiperespacios de Continuos

1.40 Definición. Dado un espacio métrico y compacto (X,d), consideramos el siguiente *hiperespacio* de X:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es no vacío y cerrado en } X\}.$$

1.41 Definición. Dados un espacio métrico (X,d), $\epsilon > 0$ y un subconjunto cerrado A de X, definimos la *bola abierta de radio* ϵ *alrededor de* A como:

$$V_\epsilon(A) = \cup\{V_\epsilon(a) : a \in A\}.$$

No es difícil comprobar que si A y B son dos elementos de 2^X tales que $A \subset B$, donde X es un espacio métrico y $0 < \epsilon < \delta$, entonces entonces $V_\epsilon(A) \subset V_\delta(A)$ y $V_\epsilon(A) \subset V_\epsilon(B)$. Otro resultado sencillo es el siguiente:

1.42 Lema. Sea X un espacio métrico y compacto. Si $A \in 2^X$ y U es un abierto de X tal que $A \subset U$, entonces existe ϵ tal que $V_\epsilon(A) \subset U$.

Demostración. Si $U = X$ la solución es trivial. Supongamos que $U \neq X$, entonces $X \setminus U \neq \emptyset$. Como $A \subset U$, $A \cap (X \setminus U) = \emptyset$ y, de esta forma, tenemos que $d(A, X \setminus U) > 0$. Por lo tanto, si definimos $\epsilon = \frac{d(A,X\setminus U)}{2}$, entonces $V_\epsilon(A) \subset U$.□

1.43 Lema. Sean X un espacio métrico, A y $B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces

$$V_\epsilon(A) \cup V_\epsilon(B) = V_\epsilon(A \cup B)$$

Demostración. Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, tenemos que $V_\epsilon(A) \cup V_\epsilon(B) \subset V_\epsilon(A \cup B)$. Por otro lado, si $x \in V_\epsilon(A \cup B)$, entonces existe un $y \in A \cup B$ tal que $d(x, y) < \epsilon$. Así, que si $y \in A$, $x \in V_\epsilon(A)$, y si $y \in B$, $x \in V_\epsilon(B)$.□

1.44 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y compacto. La *métrica de Hausdorff* para 2^X inducida por d, que denotaremos por d_H, se define como sigue; para cualesquiera A y $B \in 2^X$:

$$d_H(A, B) = \text{ínf}\{r > 0 : A \subset V_r(B) \text{ y } B \subset V_r(A)\}.$$

En el Teorema 1.8.3 de [35] se muestra que d_H es, en efecto, una métrica para el espacio 2^X. Otro resultado familiar para los que estudian hiperespacios es el siguiente:

1.45 Lema. Dados un espacio métrico, compacto y no vacío X, A y $B \in 2^X$, se tiene que $d_H(A, B) < r$ si y sólo si $A \subset V_r(B)$ y $B \subset V_r(A)$.

Demostración. Supongamos que $d_H(A,B) < r$, por definición, existe $t > 0$ tal que $r > t$, $B \subset V_t(A)$ y $A \subset V_t(B)$. Como $r > t$, tenemos que $B \subset V_r(A)$ y $A \subset V_r(B)$. Ahora, supongamos que $A \subset V_r(B)$ y $B \subset V_r(A)$. Supongamos que no existe $r' < r$ tal que $B \subset V_{r'}(A)$. Sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $(0, r)$ que converge a r. Para cada $i \in \mathbb{N}$, elijamos $b_i \in B \setminus V_{r_i}(A)$. Como B es un conjunto compacto, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{b_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $b \in B$. Claramente, $b \notin \cup_{i\in\mathbb{N}} V_{r_i}(A)$, lo que implica que $d(b, A) \geq r$, es decir, $b \notin V_r(A)$, y por lo tanto $B \nsubseteq V_r(A)$, lo cual contradice nuestra hipótesis inicial. Así, podemos concluír que existen $r_1 < r$ y $r_2 < r$, tales que $B \subset V_{r_1}(A)$ y $A \subset V_{r_2}(B)$. Ahora, si definimos $r_3 = \text{máx}\{r_1, r_2\}$, tenemos que $r_3 < r$, $A \subset V_{r_3}(B)$ y $B \subset V_{r_3}(A)$, lo que implica que $d_H(A,B) \leq r_3 < r$.□

1.46 Notación. Dados un espacio métrico, compacto y no vacío X, $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, definimos la *bola de Hausdorff* alrededor de A como:

$$V_\epsilon^H(A) = \{B \in 2^X : d_H(A,B) < \epsilon\}.$$

Definimos también, para un continuo X, los siguientes hiperespacios:

1.47 Definición.

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\},$$

donde n es un entero positivo. A $C_n(X)$ se le llama el *n-ésimo hiperespacio* de X. Cuando $n = 1$, escribimos $C(X)$ en lugar de $C_1(X)$.

1.48 Definición. El símbolo $F_n(X)$ denota el *n-ésimo producto simétrico* de X; que es:

$$F_n(X) = \{A \in C_n(X) : A \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}.$$

Notemos que, por definición, $F_n(X) \subset C_n(X)$ y $C_n(X) \subset 2^X$. Es sabido que, si X es un continuo, entonces 2^X y $C_n(X)$ son continuos arcoconexos (para 2^X y $C(X)$ ver ([47], Teorema 1.13); para $C_n(X)$ y $n \geq 2$, ver [35, Corolario 1.8.12]. También, $F_n(X)$ es un continuo para todos los enteros positivos n ([5, pág. 877] o [35, Corolario 1.8.7]).

1.49 Definición. Sean X un continuo y n un entero positivo. Un *arco de orden* en $C_n(X)$ es un arco $\alpha : [0, 1] \to C_n(X)$ tal que si $0 \leq s < t \leq 1$, entonces $\alpha(s) \subset \alpha(t)$ y $\alpha(s) \neq \alpha(t)$.

1.50 Definición. Sean X un continuo, n un entero positivo y B y A dos elementos de $C_n(X)$. Decimos que la pareja (B, A) satisface la *propiedad* (OA) si $B \subset A$ y cada componente de A intersecta a B. Notemos que esta condición garantiza la existencia de un arco de orden en $C_n(X)$ de B a A, cuando $B \neq A$ [47, Teorema 1.8]. Sean X un continuo y n un entero positivo. Si $B \in C_n(X)$, entonces definimos:

$$C_n(B, X) = \{A \in C_n(X) : B \subset A\}$$

y

$$\mathcal{OA}_n(B, X) =$$
$$\{A \in C_n(X) : (B, A) \text{ satisface la propiedad}(OA)\}.$$

Si $A \in \mathcal{OA}_n(B, X)$, entonces

$$\mathcal{OA}_n(B, A) = \{D \in \mathcal{OA}_n(B, X) : D \subset A\}.$$

1.51 Definición. Dados un continuo X y un elemento $B \in C_n(X)$, la *malla* de B, denotada por malla(B), es:

$$\text{malla}(B) = \text{máx}\{\text{diám}(K) : K \text{ es una componente de } B\}.$$

1.4.1 Topología de Vietoris

1.52 Definición. Sea X un espacio métrico. La *topología de Vietoris* para 2^X es la topología más pequeña, T_V, para 2^X que tiene la siguiente propiedad: $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in T_V$ para todo U abierto de X, y $\{A \in 2^X : A \subset B\}$ es cerrado con la topología T_V para todo cerrado B de X.

1.53 Teorema. [47, Teorema 0.13] Si (X, d) es un espacio métrico y compacto, entonces $(2^X, T_V)$ es metrizable y T_V es igual a la topología generada por la métrica de Hausdorff $(2^X, T_{d_H})$.

Es útil saber que si X es un continuo y $U_1, \ldots, U_n$ son subconjuntos de X, y definimos:

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle =$$
$$\{A \in 2^X : A \subset \cup_{i=1}^n U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

y

$$\mathfrak{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle :$$
$$n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ es un abierto en } X \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\},$$

entonces $\mathfrak{B}$ es una base para T_V [47, Teorema 0.11].

1.54 Notación. Si X es un continuo, $U_1, \ldots, U_m$ son subconjuntos de X y n un entero positivo, definimos:

$$\langle U_1, \ldots, U_m \rangle_n = \langle U_1, \ldots, U_m \rangle \cap C_n(X).$$

1.4.2 Convergencia en Hiperespacios

1.55 Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se define el *límite inferior* de

$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por lím inf A_i, y el *límite superior* de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por lím sup A_i, como sigue:

1. lím inf $A_i = \{x \in X$: para todo conjunto abierto U de X tal que $x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset$ excepto para un número finito de elementos de la sucesión$\}$,

2. lím sup $A_i = \{x \in X$: para todo conjunto abierto U de X tal que $x \in U, U \cap A_i \neq \emptyset$ para una infinidad de elementos de la sucesión$\}$.

Además, si $A \subset X$, decimos que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *L-convergente* a A si lím inf $A_n = A =$ lím sup A_n. En este caso escribimos que $A = \text{lím}_{n\to\infty} A_n$. En el Teorema 1.57 vemos que L-convergente y *convergente* con la métrica de Hausdorff es lo mismo en 2^X.

El siguiente lema es una herramienta que, aunque sencilla, es útil para saber cuándo una sucesión es L-convergente.

1.56 Lema. [48, Lema 4.10] Sean X un espacio métrico, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos de X y $A \subset X$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\text{lím}_{n\to\infty} A_n = A$,

2. $A \subset$ lím inf A_n y lím sup $A_n \subset A$.

El teorema que sigue, nos dice que, en un espacio métrico y compacto, la L-convergencia y la convergencia con respecto a la métrica de Hausdorff son equivalentes.

1.57 Teorema. [47, Teorema 0.7] Sean X un espacio métrico y compacto y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Entonces, $\text{lím}_{n\to\infty} A_n = A$ si y sólo si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A con respecto a la métrica de Hausdorff.

1.4.3 Modelos de Hiperespacios

Aunque la mayoría de los hiperespacios no son "dibujables", es de ayuda, al menos tener un modelo para el hiperespacio del continuo no degenerado más famoso; el arco $[0,1]$.

Sabemos que los subconjuntos cerrados y conexos del intervalo son conjuntos de un solo punto o intervalos cerrados, es decir:

$$C([0,1]) = \{[a,b] \subset [0,1] : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Una manera para hacer una representación de $C([0,1])$ es mediante la función $h : C([0,1]) \to \mathbb{R}^2$ definida como $h([a,b]) = (a,b)$. Es decir, a cada intervalo, le asignamos el par ordenado en $\mathbb{R}^2$, donde la primera entrada es el elemento más pequeño del intervalo y la segunda entrada representa el elemento más grande del intervalo. No es difícil ver que esta función es un homeomorfismo en su imagen. Por lo tanto, $C([0,1])$ es homeomorfo al triángulo en $\mathbb{R}^2$ que tiene como vértices a los puntos $(0,0), (0,1)$ y $(1,1)$. Además, observemos que a los elementos de $F_1(X)$ se les asigna la diagonal $\{(x,x) : \{x\} \in F_1(X)\}$. Por otro lado, los intervalos que tienen a 0 como uno de sus extremos quedan representados en el triángulo como el segmento que une los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. Los intervalos que contienen a 1 como uno de sus extremos quedan representados en dicho triángulo como el segmento que une los puntos $(1,1)$ y $(0,1)$.

Otro modelo, que nos da una idea de cómo puede crecer la dimensión topológica de un continuo al tomar algún hiperespacio de éste, es el siguiente:

Sea T la colección de puntos de $\mathbb{R}^3$ contenidos en los ejes coordenados cuya distancia al origen es menor o igual que uno. A este espacio se le conoce como un *triodo simple*. En este caso, los subconjuntos cerrados y conexos del triodo simple son conjuntos de un solo punto o intervalos cerrados o copias de T, es decir:

$$C(T) = \{A \subset T : A \neq \emptyset$$

$$\text{y } A \text{ es una copia de } T\text{, un subintervalo cerrado o un punto}\}.$$

Observemos que las copias de T (los triodos) siempre contienen al origen O. Los subintervalos que tienen a O como punto "interior"pueden ser considerados como triodos con una pata degenerada. Mientras que los intervalos que tienen a O como un punto "extremo"pueden ser considerados como triodos con dos patas degeneradas. Así, un triodo queda completamente determinado por la longitud de sus patas. Como hay "tres grados de libertad", uno por cada uno de los ejes de $\mathbb{R}^3$, se tiene que el subconjunto de $C(T)$ que consiste de la familia de los triodos puede ser identificada con el cubo unitario $[0,1]^3$. Por otra parte, los subintervalos de T que no contienen a O están contenidos en alguna de las patas de T, esto es, son parte del hiperespacio de un arco que, como ya sabemos es un triángulo. La parte común con los triodos consiste en los subintervalos de T que contienen a O y están contenidos en una de las patas, y corresponden a los lados del triángulo. Por lo tanto, pegando los tres triángulos obtenemos que un modelo para T es un cubo con alas.

A pesar de que parece sencillo encontrar modelos para el hiperespacio de continuos de un continuo, hacerlo para el n-ésimo hiperespacio de un continuo es bastante difícil. R. Schori demostró en 1999 que un modelo para $C_2([0,1])$ es $[0,1]^4$, una prueba de eso se encuentra en [35, Teorema 6.8.11]. En [22] se prueba que un modelo para $C_2(\mathcal{S}^1)$ es el cono sobre el toro sólido (el *toro sólido* es el conjunto $\mathcal{S}^1 \times B$, donde B es el disco unitario). Otros modelos de hiperespacios se encuentran en [33].

1.5 Funciones en Hiperespacios

En esta sección definimos las funciones con dominio en los hiperespacios respectivos que más usamos durante la tesis.

1.58 Definición. Dados dos continuos X y Y, una función continua $f : X \to Y$ y $n \in \mathbb{N}$, se definen las funciones inducidas $2^f : 2^X \to 2^Y$ y $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ como $2^f(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ y $C_n(f)(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ para todo $A \in 2^X$ y $A \in C_n(X)$, respectivamente. A la función $C_n(f)$ la llamamos *función inducida por* f al n-ésimo hiperespacio de X.

Debido a que $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$, por el Teorema 1.8.22 de [35], obtenemos que $C_n(f)$ es una función continua cuando f es continua. Cuando $n = 1$ simplemente escribimos $C(f)$.

1.59 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos y compactos. Una función continua $f : X \to Y$ se dice que es *débilmente confluente* si cada subcontinuo de Y es imagen de un subcontinuo de X bajo f.

1.60 Observación. Si X y Y son dos continuos homeomorfos y $f : X \to Y$ es una función débilmente confluente, entonces $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ es suprayectiva. Esto se debe a que cada elemento A de $C_n(Y)$ tiene a lo más n componentes y cada componente de A es imagen de un subcontinuo de X.

1.61 Proposición. Si X y Y son dos continuos homeomorfos y $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $C_n(h) : C_n(X) \to C_n(Y)$ es un homeomorfismo.

Demostración. Por el Teorema 1.8.22 de [35], $C_n(h)$ es continua. Por otro lado, como h es inyectiva, $C_n(h)$ es inyectiva.

También, como h es un homeomorfismo, h es débilmente confluente y así, $C_n(h)$ es suprayectiva (Observación 1.60). Por lo tanto, $C_n(h)$ es un homeomorfismo.$\square$

1.62 Definición. Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado de 2^X. Se dice que una función continua $\sigma : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ es una *función de tamaño* si cumple lo siguiente:

1. $\sigma(A) = 0$ para cada $A \in F_1(X) \cap \mathcal{H}$ y
2. si $A \subset B$, entonces $\sigma(A) \leq \sigma(B)$.

Para cualquier función de tamaño σ definida en $\mathcal{H}$ y cualquier $t \in \sigma(\mathcal{H})$, llamamos a los conjuntos de la forma $\sigma^{-1}(t)$, *niveles de tamaño de $\mathcal{H}$*. A lo largo de la tesis, $\sigma(X) \neq 0$ en el caso de que $X \in \mathcal{H}$, (dado que la multiplicación de una función de tamaño por una constante positiva sigue siendo una función de tamaño) supondremos que $\sigma(X) = 1$.

1.63 Definición. Sean X un continuo y $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado de 2^X. Se dice que una función continua $\omega : \mathcal{H} \to [0, \infty)$ es una *función de Whitney* si cumple lo siguiente:

1. $\omega(A) = 0$ para cada $A \in F_1(X) \cap \mathcal{H}$ y
2. si $A \subset B$ y $A \neq B$, entonces $\omega(A) < \omega(B)$.

A los conjuntos de la forma $\omega^{-1}(t)$, donde ω es una función de Whitney definida en $\mathcal{H}$ y cualquier $t \in \omega(\mathcal{H})$, son llamados *niveles de Whitney de $\mathcal{H}$*. Puesto que trabajaremos con continuos con más de un punto, de no decir lo contrario, supondremos que $\omega(X) = 1$ para toda función de Whitney.

Uno podría preguntarse el motivo para definir esta clase de funciones, una de las razones es que con ellas se pueden estudiar las propiedades de los hiperespacios a partir de las propiedades de los espacios iniciales.

Además, los niveles de Whitney en el hiperespacio de subcontinuos de un continuo tienen propiedades interesantes. Por ejemplo, si X es un continuo y $\omega : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, entonces $\omega^{-1}(t)$ es un continuo para cada $t \in [0,1]$ [47, Teorema 14.2]. También, $\omega : C(X) \to [0,1]$ es una función abierta [13, pág. 1032].

Sin embargo, las funciones de Whitney no son tan útiles para estudiar los n-ésimos hiperespacios cuando $n > 1$, pues ahí, los niveles de Whitney no son necesariamente conexos. Ejemplo de ello es lo siguiente:

1.64 Ejemplo. Sea:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$$

$$\sup\{|x|,|y|\} = 1 \text{ y tal que si } x = 1, \text{ entonces } y \leq 0 \text{ o } y \geq \frac{1}{2}\},$$

con la métrica Euclidiana. Para cada $m \geq 2$, tomemos $K \in F_m(X)$, donde $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$, aunque se puede dar que $k_i = k_j$ para $i \neq j$. Definimos:

$$\omega_m(K) = \text{mín}\{d(k_i,k_j) : i \neq j\}.$$

Para cada $A \in C_n(X)$, definimos:

$$\mu_m(A) = \sup\{\omega_m(K) : K \in F_m(A)\}.$$

La función $\mu : C_2(X) \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\mu(A) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\mu_m(A)}{2^m}$$

es una función de Whitney (Ver demostración de Ejemplo 2.7). Observemos que si $A = \{(1,0),(1,\frac{1}{2})\}$, entonces $\mu(A) = \frac{1}{8}$. También notemos que si $B \in C_2(X) \setminus \{A\}$ es tal que $d_H(A,B) < \frac{1}{4}$, entonces $\mu(B) \geq \frac{\mu_2(B)}{4} > \frac{1}{8}$, lo que implica que A es un punto aislado de $\mu^{-1}(\frac{1}{8})$. Por otro lado, existen abiertos de X, tales que sus imagenes bajo μ tampoco son abiertas, pues para todo $\epsilon \in (0,\frac{1}{4})$, $\mu(V_\epsilon^H(\{(1,0),(1,\frac{1}{2})\})) \subset [\frac{1}{2},\mu(X)]$ y $\mu(\{(1,0),(1,\frac{1}{2})\}) = \frac{1}{2}$.

1.65 Definición. Sean X y Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función continua, se dice que f es una *función monótona* si $f^{-1}(y)$ es conexo para cada $y \in Y$.

1.66 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es una *función abierta* si para cada abierto U de X, $f(U)$ es abierto en Y.

A diferencia de las funciones de Whitney, la siguiente clase de funciones que definiremos, tiene la ventaja de que son monótonas y abiertas (Teorema 2.11 y Teorema 2.9).

1.67 Definición. Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mathcal{H}$ un subconjunto cerrado de $C_n(X)$. Se dice que una función continua $\mu : \mathcal{H} \to [0,\infty)$ es una *función de tamaño fuerte* si cumple lo siguiente:

1. $\mu(A) = 0$ para cada $A \in F_n(X) \cap \mathcal{H}$ y
2. si $A \subset B, A \neq B$ y $B \notin F_n(X)$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Para cualquier función de tamaño fuerte μ, definida en $C_n(X)$ ($\mathcal{H}$) y cualquier $t \in \mu(\mathcal{H})$, llamamos *nivel de tamaño fuerte de* $C_n(X)$ ($\mathcal{H}$) al conjunto de la forma $\mu^{-1}(t)$.

Por [18, Teorema 2.2], las funciones de tamaño fuerte existen para cada continuo X y cada entero positivo n. Notemos que para $n = 1$ las funciones de tamaño fuerte son las funciones de Whitney para $C(X)$. Puesto que en el resto de la tesis vamos a trabajar con continuos no degenerados, podemos suponer que $\mu(X) = 1$, cuando μ esté definido en todo $C_n(X)$.

1.68 Definición. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es llamada *propiedad de tamaño fuerte* si siempre que X tenga la propiedad $\mathcal{P}$, también la tienen todos los niveles de tamaño fuerte de $C_n(X)$, para cada entero positivo n.

1.6 Retractos

1.69 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos y f y g dos funciones continuas de X a Y. Si existe una función continua $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que $H((x, 0)) = f(x)$ y $H((x, 1)) = g(x)$ para todo $x \in X$, entonces decimos que f y g son *homotópicas*; en este caso, se dice que la función H es una *homotopía* entre f y g.

1.70 Definición. Sea X un espacio métrico no vacío. Una *retracción* es una función continua, r, definida de X a X tal que r es la identidad en su rango (i.e. $r(r(y)) = r(y)$ para cada $y \in X$).

1.71 Definición. Sea Z un espacio métrico. Por una *deformación* nos referimos a una función continua $H : Z \times [0, 1] \to Z$ tal que $H((z, 0)) = z$ para cada $z \in Z$. Sea $A = \{H((z, 1)) : z \in Z\}$. Si la función $r : Z \to A$ dada por $r(z) = H((z, 1))$ es una retracción de Z a A, entonces A es un *retracto por deformación* *de* Z. Si, para cada a en A y cada $t \in [0,1]$, $H((a,t)) = a$, entonces A es un *es un retracto fuerte por deformación de* Z. En este caso, el conjunto A se dice que es *rectracto por deformación de* Z (*retracto fuerte por deformación,* respectivamente).

1.72 Definición. Un espacio métrico Z es un *retracto absoluto* si para cada encaje $e : Z \to X$ de Z en un espacio métrico X tal que $e(Z)$ es cerrado en X, $e(Z)$ es retracto de X.

1.73 Definición. Un espacio métrico K es un *retracto de vecindad absoluto*, si siempre que K sea encajado en un espacio métrico Y, la copia encajada K' de K, es un retracto de alguna vecindad de K' en Y.

1.74 Definición. Un espacio métrico K, es llamado *extensor absoluto* si siempre que B sea un subconjunto cerrado de un espacio métrico M y $f : B \to K$ sea una función continua, entonces f se puede extender a una función continua $F : M \to K$.

1.75 Teorema. [19, Teorema 3.2, pág. 84] Un espacio métrico K, es un retracto absoluto si y sólo si K es un extensor absoluto.

1.76 Teorema. [3, Teorema (9.1)] Un espacio métrico es un retracto absoluto si y sólo si es un retracto de vecindad absoluto que es contraíble en sí mismo.

Finalizamos esta sección con una elegante caracterización del cubo de Hilbert, que utilizaremos en el Teorema 4.23. Para esto necesitamos las Definiciones 1.77 y 1.78.

1.77 Definición. Sea (Y, d) un espacio métrico y compacto. Un conjunto cerrado A de Y se dice que es un *Z-conjunto* en Y si para cada $\epsilon > 0$, existe una función continua $f_\epsilon : Y \to Y \setminus A$ tal que $d(f_\epsilon(y), y) < \epsilon$ para todo $y \in Y$.

1.78 Definición. Se dice que una función continua entre dos espacios métricos y compactos $f : X \to Y$, es una *Z-función* si $f(X)$ es un Z-conjunto en Y.

1.79 Teorema. [53, Teorema 1] Sea Y un retracto absoluto compacto. Si la función identidad en Y es un límite uniforme de Z-funciones, entonces Y es un cubo de Hilbert.

1.7 Resultados Preliminares

En esta sección se encuentran otros resultados que vamos a necesitar en la tesis.

1.80 Lema. [40, Lema 3.1] Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $t > 0$ y $\mathcal{S} = \mu^{-1}(t)$ es un nivel de tamaño fuerte para $C_n(X)$, $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado $\mathcal{S}$ y $B \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $A \nsubseteq V_\epsilon(B)$ para ninguna $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Supongamos que el resultado es falso. Entonces, para cada entero m, existe un $A_m \in \mathcal{A}$ tal que $A_m \subset V_{\frac{1}{m}}(B)$. Puesto que $\mathcal{A}$ es cerrado en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}$ es cerrado en $C_n(X)$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a un elemento A de $\mathcal{A}$. Observemos que $A \subset B$. Dado que $\mathcal{S}$ es un nivel de tamaño fuerte, tenemos que $A = B$. Por lo tanto, $A = B$ y, así, $B \in \mathcal{A}$ lo cual es una contradicción a la elección de B.$\square$

La prueba del siguiente lema es similar a la hecha para un resultado parecido para niveles de Whitney [47, Lema 14.8.1].

1.81 Lema. [40, Lema 3.2] Sean X un continuo, n un entero positivo, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte y $\mathcal{S} =$

$\mu^{-1}(t)$ un nivel de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Sean $A, B \in \mathcal{S}$, $A_1, \ldots, A_l$ las componentes de A y $B_1, \ldots, B_m$ las componentes de B. Si $P \in F_n(X)$ es tal que $P \subset A \cap B$, $P \cap A_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$ y $P \cap B_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$, entonces existe un arco en $\mathcal{S}$ que une a A y B.

Demostración. Sean α y $\beta : [0,1] \to C_n(X)$ dos arcos de orden tales que $\alpha(0) = P$, $\alpha(1) = A$, $\beta(0) = P$ y $\beta(1) = B$ [7, Proposición 2.6]. Dado $s \in [0,1]$, definimos $f_s : [0,1] \to C_n(X)$ por $f_s(r) = \alpha(s) \cup \beta(r)$. Entonces f_s está bien definida y es continua. Puesto que $\mu(f_s(0)) = \mu(\alpha(s) \cup \beta(0)) = \mu(\alpha(s)) \leq t$ y $\mu(f_s(1)) = \mu(\alpha(s) \cup \beta(1)) = \mu(\alpha(s) \cup B) \geq t$, por el teorema del valor intermedio existe $r_s \in [0,1]$ tal que $\mu(f_s(r_s)) = t$. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathcal{S}$ dada por $\gamma(s) = \alpha(s) \cup \beta(r_s)$. Mostraremos que γ está bien definida. Para hacerlo, sea $s \in [0,1]$ y supongamos que existe $r \in [0,1]$ tal que $\alpha(s) \cup \beta(r) \in \mathcal{S}$. Puesto que β es un arco de orden, tenemos que $\beta(r) \subset \beta(r_s)$ o $\beta(r_s) \subset \beta(r)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\beta(r) \subset \beta(r_s)$. Entonces $\alpha(s) \cup \beta(r) \subset \alpha(s) \cup \beta(r_s)$, puesto que $\mathcal{S}$ es un nivel de tamaño fuerte, obtenemos que $\alpha(s) \cup \beta(r) = \alpha(s) \cup \beta(r_s)$. Por lo tanto, γ está bien definida. Para ver que γ es continua, sea $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $[0,1]$ que converge a un elemento s de $[0,1]$. Entonces la sucesión correspondiente $\{r_{s_m}\}_{m=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{r_{s_{m_k}}\}_{k=1}^{\infty}$. Sea r el límite de la sucesión $\{r_{s_{m_k}}\}_{k=1}^{\infty}$. Puesto que α y β son continuas, tenemos que $\lim_{k \to \infty} \gamma(s_{m_k}) = \lim_{k \to \infty} (\alpha(s_{m_k}) \cup \beta(r_{s_{m_k}})) = \alpha(s) \cup \beta(r)$. Por la definición de γ, $\gamma(s) = \alpha(s) \cup \beta(r_s)$, puesto que $\alpha(s) \cup \beta(r)$ y $\alpha(s) \cup \beta(r_s)$ pertenecen a $\mathcal{S}$ y $\alpha(s) \cup \beta(r) \subset \alpha(s) \cup \beta(r_s)$ o $\alpha(s) \cup \beta(r_s) \subset \alpha(s) \cup \beta(r)$, tenemos que $\alpha(s) \cup \beta(r) = \alpha(s) \cup \beta(r_s)$. Por lo tanto, γ es continua. $\square$

El siguiente resultado es conocido, pero no encontramos una referencia, por lo que presentamos nuestra prueba.

1.82 Lema. [40, Lema 3.3] Si X es un continuo, entonces $\check{H}^0(X)$ es trivial.

Demostración. El resultado sigue de los siguientes tres hechos: (1) cada continuo es un límite inverso de poliedros conexos [42, Teorema 2], (2) el 0-ésimo grupo de cohomología reducido de un poliedro conexo es trivial [44, 42.2], y (3) el teorema de continuidad de la teoría para la cohomología de Čech [54, Teorema 7-7]. $\square$

1.83 Definición. Una métrica ρ para un continuo X se dice que es una *métrica convexa* si para cada par de puntos x y z de X, existe un punto $y \in X$ tal que $\rho(x, y) = \frac{\rho(x,z)}{2} = \rho(y, z)$.

El siguiente resultado fue presentado en [1] por R. H. Bing y en [43] por E. E. Moise de forma independiente en el mismo año.

1.84 Teorema. [43, Teorema 4] Todo continuo localmente conexo admite una métrica convexa.

1.85 Definición. Si X es un continuo localmente conexo con una métrica convexa ρ, definimos $K_\rho : [0, \infty) \times 2^X \to 2^X$ como:

$$K_\rho((t, A)) = \{x \in X : \rho(x, y) \leq t \text{ para algún } y \in A\}.$$

1.86 Observación. Si X es un continuo localmente conexo con una métrica convexa ρ, entonces dados 2 puntos x y y de X, existe un arco $\gamma : [0, \rho(x, y)] \to X$ tal que γ es una isometría ((0.65.3)(a) de [47]). Esto implica que el conjunto $K_\rho((t, A))$ tiene a lo más tantas componentes como A para cada $t \in [0, \infty)$. También, observemos que si $t \geq$ diám (X), entonces $K_\rho((t, A)) = X$ para cada $A \in 2^X$.

1.87 Proposición. [46, Corolario 3.4] Si X es un continuo localmente conexo con métrica convexa ρ, entonces la función $K_\rho : [0,\infty) \times 2^X \to 2^X$ es una función continua.

1.88 Observación. Como consecuencia de la Proposición 1.87 y la Observación 1.86, tenemos que la función:

$$K_\rho|_{[0,\infty)\times C_n(X)} : [0,\infty) \times C_n(X) \to C_n(X)$$

está bien definida y es continua. De hecho, si $A \in 2^X$, entonces $K_\rho : ((\cdot, A)) : [0,\infty) \to 2^X$ es un arco de orden.

1.89 Definición. Sea X un continuo. Definimos la *función unión* $\cup : 2^{2^X} \to 2^X$ como $\cup(\mathcal{A}) = \cup\{A : A \in \mathcal{A}\}$.

La función unión es una función continua y es una contracción [25, Lema 1.1 (a)].

1.90 Lema. [25, Lema 1.2] Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{A}\cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\cup\mathcal{A}$ es un continuo.

1.91 Corolario. [35, Corolario 6.1.2] Sea X un continuo. Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, entonces $\cup\mathcal{A}$ tiene a lo más n componentes.

1.92 Lema. Si X es un continuo y $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subcontinuos de X, entonces $\lim\sup Q_m = \cup \{\lim \mathcal{A} :$ $\mathcal{A}$ es una subsucesión convergente de $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Claramente se cumple que $\cup\{\lim\mathcal{A} : \mathcal{A}$ es una subsucesión convergente de $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}\} \subset \lim\sup Q_n$. Demostremos la otra contención. Sea $x \in \lim\sup Q_n$. Entonces para cada $V_{\frac{1}{k}}(x)$ existe un $Q_{m_k} \in \{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $V_{\frac{1}{k}}(x)\cap Q_{m_k} \neq \emptyset$. Sea $\{Q_{m_{k_r}}\}_{r\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente de$\{Q_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, como $x \in \lim\inf \{Q_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que $x \in \lim Q_{m_{k_r}}$. Con lo que se finaliza la prueba. $\square$

1.93 Proposición. [47, Teorema 1.8] Sean $A_0, A_1 \in 2^X$ tales que $A_0 \neq A_1$. Entonces existe un arco de orden de A_0 a A_1 si y sólo si $A_0 \subset A_1$ y cada componente de A_1 intersecta a A_0.

1.94 Lema. Sean X y Y dos continuos y $f : X \to Y$ una función monótona. Entonces, $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es una función monótona, es más, cada fibra es arcoconexa.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in C(Y)$, como f es monótona, tenemos que $f^{-1}(A) \in C(X)$. Por lo tanto, $f^{-1}(A) \in C(f)^{-1}(A)$. Además, observemos que si $B \in C(f)^{-1}(A)$, entonces $B \subset f^{-1}(A)$. Por lo que la Proposición 1.93 implica que existe un arco de orden α que va de B a $f^{-1}(A)$ en $C(X)$. También, es fácil notar que si $C \in \alpha$, entonces $C(f)(C) = A$. Por lo tanto, $\alpha \subset C(f)^{-1}(A)$ y $C(f)^{-1}(A)$ es arcoconexo.$\square$

Capítulo 2

Funciones de tamaño fuerte

Sean X un continuo y n un entero positivo. Para A y $B \in C_n(X)$, decimos que $A < B$ si $A \subset B$, $A \neq B$ y $B \notin F_n(X)$. Decimos que $A \leq B$ si $A < B$ o $A = B$. Es fácil notar que $C_n(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado con respecto al orden $\leq$. Claramente Mín $C_n(X) = F_n(X)$ y Máx $C_n(X) = \{X\}$ son cerrados y, dado que X es un continuo no degenerado obtenemos que, son disjuntos. Por lo tanto, el siguiente teorema es consecuencia del Teorema 1.34.

2.1 Teorema. [18, Teorema 2.2] Dado un continuo X. Existe una función de tamaño fuerte $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$ para cada número natural n.

La Proposición 2.2 y el Lema 2.3 nos proporcionan información de cómo se pueden manejar algebraicamente las funciones de tamaño fuerte y las funciones de tamaño para obtener más funciones de tamaño fuerte.

2.2 Proposición. Sea X un continuo. Si $\mathcal{H}$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X)$ para algún natural n, $\omega : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es una función de tamaño y $\omega(F_n(X)) = \{0\}$. Entonces, $r\omega + s\mu : \mathcal{H} \to$

$\mathbb{R}$ es una función de tamaño fuerte para cualquier función de tamaño fuerte $\mu : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, para todo $r \geq 0$ y para cada $s > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que la suma de funciones continuas con rango en $\mathbb{R}$ es también continua. También es fácil notar que si $r \geq 0$, entonces $r\omega$ es una función de tamaño, de igual forma, si $s > 0$, entonces $s\mu$ es una función de tamaño fuerte. Por otro lado:

1. si $A \in F_n(X)$, entonces $\omega(A) + \mu(A) = 0 + 0 = 0$,
2. si $A \in \mathcal{H} \setminus F_n(X)$, entonces $\omega(A) + \mu(A) \geq 0 + \mu(A) > 0$, y
3. si $B \notin F_n(A)$ y $A \subsetneq B$, entonces $\omega(A) + \mu(A) \leq \omega(B) + \mu(A) < \omega(B) + \mu(B)$.

Con lo cual, queda demostrada la proposición.□

2.3 Lema. [41, Lema 4.3] Sean X un continuo y n un número natural. Si $\mathcal{H}$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X)$, $\mu : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es una función de tamaño fuerte y $\theta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ es una función de tamaño tal que $\theta(A) > 0$ para todo $A \in \mathcal{H} \setminus F_n(X)$, entonces la función $\mu * \theta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definida como $\mu * \theta(A) = \mu(A)\theta(A)$ es una función de tamaño fuerte.

DEMOSTRACIÓN. Claramente, la función está bien definida y es continua. Demostremos que, efectivamente, el producto es una función de tamaño fuerte.

1. si $A \in F_n(X)$, entonces $\mu(A)\theta(A) = (0)\theta(A) = 0$,
2. si $A \in \mathcal{H} \setminus F_n(X)$, entonces, por las características de θ y por ser μ una función de tamaño fuerte, tenemos que $\mu(A)\theta(A) > 0$ y, finalmente,

3. si $B \notin F_n(A)$ y $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A)\theta(A) \leq \mu(A)\theta(B) < \mu(B)\theta(B)$.

Con lo cual, queda demostrado el lema.$\square$

2.4 Lema. Sean X y Y dos continuos homeomorfos, $h : Y \to X$ un homeomorfismo y n un entero positivo. Si $\mu_X : C_n(X) \to [0,1]$ es una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$, entonces $\mu_Y : C_n(Y) \to [0,1]$ definida como $\mu_Y = \mu_X \circ C_n(h)$, es una función de tamaño fuerte para $C_n(Y)$.

Demostración. Dado que h es un homeomorfismo (Proposición 1.61), tenemos que $C_n(h)$ es un homeomorfismo, lo que implica que μ_Y está definida en todo Y y que μ_Y es continua pues es composición de dos funciones continuas. Por otro lado, como $C_n(h)$ es una función, tenemos que si $A \in F_n(Y)$, entonces $C_n(h)(A) \in F_n(X)$, lo que implica que $\mu_Y(A) = 0$. También, puesto que h es inyectiva, tenemos que si $A \subset B$, $A \neq B$ y $B \notin F_n(Y)$, entonces $C_n(h)(A) \subset C_n(h)(B)$, $C_n(h)(A) \neq C_n(h)(B)$ y $C_n(h)(B) \notin F_n(Y)$. Por lo tanto $\mu_Y(A) < \mu_Y(B)$.$\square$

2.5 Observación. Naturalmente, si en el Lema 2.4 pedimos que $h : Y \to X$ sea continua e inyectiva en lugar de homeomorfismo, obtenemos que $\mu_{C_n(h)(Y)} : C_n(h)(Y) \to [0,1]$ definida como $\mu_{C_n(h)(Y)} = \mu_X \circ C_n(h)$, es una función de tamaño fuerte para $C_n(h)(Y)$.

La siguiente es una construcción de una función de tamaño fuerte para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada continuo X, la cual nos será util en el Teorema 4.13.

2.6 Ejemplo. Sean X un continuo con una métrica d, acotada por 1 y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $A \in C_n(X)$ y cada entero positivo m, sea:

$$\mu_m(A) =$$

ínf$\{\epsilon > 0 :$ existen $p_1, \ldots, p_m \in X$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^m V_\epsilon(p_i)\}$. Entonces $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ dada por:

$$\mu(A) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{\mu_m(A)}{2^m}$$

es una función de tamaño fuerte. Esto se debe a lo siguiente:

1. Observemos que para cada $j \in \mathbb{N}$, si $\epsilon > 0$ y A y B son dos elementos de $C_n(X)$, tales que $d_H(A,B) < \epsilon$, entonces $\mu_j(A) < \mu_j(B) + 3\epsilon$ y $\mu_j(B) < \mu_j(A) + 3\epsilon$. Esto se debe a lo siguiente: sean $b_1, \ldots, b_j$, elementos de X tales que $B \subset \cup_{i=1}^j V_{\mu_j(B)+\epsilon}(b_i)$. Como $d_H(A,B) < \epsilon$, tenemos que para todo $a \in A$, existe un $b \in B$ tal que $d(a,b) < \epsilon$, además $d(b, b_i) < \mu_j(B) + \epsilon$ para algún i entre 1 y j, pues $B \subset \cup_{i=1}^j V_{\mu_j(B)+\epsilon}(b_i)$, lo que implica que $d(a, b_i) \leq d(a,b) + d(b, b_i) < \mu_j(B) + 2\epsilon$, y por lo tanto, $A \subset \cup_{i=1}^j V_{\mu_j(B)+2\epsilon}(b_i)$, entonces $\mu_j(A) < \mu_j(B) + 3\epsilon$. Analogamente podemos concluír que $\mu_j(B) < \mu_j(A) + 3\epsilon$. Lo que implica que μ_j es una función continua. Por otro lado, dado que $\sum_{m=n}^{\infty} \frac{\mu_m(A)}{2^m}$ es una serie convergente para cualquier $A \in C_n(X)$, obtenemos que μ es una función continua.

2. Si $A \in F_n(X)$, entonces $\mu(A) = 0$. Pues $\mu_j(A) = 0$ para todo $j \geq n$.

3. Si $A \in C_n(X) \setminus F_n(X)$, entonces $\mu(A) > 0$. Dado que A tiene más de n puntos, se tiene que $\mu_n(A) > 0$.

4. Si $A \subsetneq B$ y $B \notin F_n(X)$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$. Primero observemos que si $A \in F_n(X)$, entonces, dado que $B \notin F_n(X)$, tenemos por 2. de esta demostración que $\mu(A) < \mu(B)$. Supongamos que $A \notin F_n(X)$. Sea $p \in B \setminus A$. Sin

pérdida de generalidad, podemos suponer que existe un $\epsilon > 0$ tal que $d(p, A) > 2\epsilon$. Como A es compacto, existen un $\delta \in (0, \epsilon)$ y un $l > n$ tales que existe una colección de puntos $\{x_1, \ldots, x_l\}$ tal que $A \subset \cup_{i=1}^{l} V_\delta(x_i)$ y para cualquier otra colección con menos de l puntos, no se cumple que A está contenida en la unión de sus bolas con radio δ. Por lo tanto, $\mu_l(A) \leq \delta < \mu_l(B)$, lo que implica que $\mu(A) < \mu(B)$.

Con todo esto, concluímos que μ es una función de tamaño fuerte.

A continuación presentamos otra función de tamaño fuerte que se puede definir en $C_n(X)$ para todo continuo X y todo natural n. Esta función, por la forma en que se define, cumple que se preserva bajo isometrías.

2.7 Ejemplo. Sean X un continuo con métrica d, acotada por 1 y $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ tomemos $K \in F_m(X)$, donde $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$, aunque se puede dar que $k_i = k_j$ para $i \neq j$. Definimos:

$$\omega_m(K) = \text{mín}\{d(k_i, k_j) : i \neq j\}.$$

Para cada $A \in C_n(X)$, definimos:

$$\mu_m(A) = \sup\{\omega_m(K) : K \in F_m(A)\}.$$

La función $\mu : C_n(X) \to \mathbb{R}$ definida como:

$$\mu(A) = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\mu_m(A)}{2^m}$$

es una función de tamaño fuerte.

Para comprobar esto, observemos que si $A \in F_n(X)$, entonces $\omega_m(K) = 0$ para todo $m > n$ y todo $K \in F_m(A)$ pues K repite al menos un elemento de A. Por lo tanto, $\mu_m(A) = 0$ para todo $m > n$. Es decir, $\mu(A) = 0$. Por otro lado, si $A \in C_n(X) \setminus F_n(X)$, entonces A tiene más de $n+1$ elementos, lo que implica que $\mu_{n+1}(A) > 0$ y, por lo tanto, $\mu(A) > 0$. Ahora, supongamos que $A \in C_n(X)$, $A \subsetneq B$ y $B \in C_n(X) \setminus F_n(X)$. Es fácil notar que $\mu_m(A) \leq \mu_m(B)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sólo queda demostrar que para algún $m > n$, se cumple la desigualdad estricta. Sean $p \in B \setminus A$ y $\delta = \frac{d(p,A)}{3}$. Dado que A es compacto, tenemos que para todo $\epsilon > 0$, existe $L' \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_l(A) < \epsilon$ para todo $l \geq L'$. Sean L tal que $\mu_{l'}(A) < \delta$ para todo $l' \geq L$, $l > L$ y $\{K_i\}_{i=1}^{\infty} \subset F_l(A)$ una sucesión, donde $K_i = \{k_1^i, k_2^i, \ldots, k_l^i\}$ tal que $\lim_{i \to \infty} \omega_l(K_i) = \mu_l(A)$. Para todo $i \in \mathbb{N}$, definimos H_i como $H_i = \{p, k_2^i, \ldots, k_l^i\}$. Observemos que $\omega_l(H_i) \geq \delta$ y, por lo tanto, $\mu_l(B) \geq 3\delta > \delta \geq \mu_l(A)$.

Ya que $\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge, para la continuidad, sólo tenemos que demostrar que cada μ_l es continua para cada $l > n$. Sean $\epsilon > 0$ y l un entero mayor que n. Es claro que si A y $B \in F_n(X)$, entonces $\mu_l(A) = 0 = \mu_l(B)$ y, en consecuencia, continua en $F_n(X)$. Por lo tanto, supongamos que $A \in F_n(X)$ y $B \in C_n(X) \setminus F_n(X)$ son tales que $d_H(A,B) < \epsilon$. Por la definición de μ_l, tenemos que $\mu_l(A) = 0$. Por otro lado, ya que $d_H(A,B) < \epsilon$, tenemos que $B \subset V_\epsilon(A)$ (Lema 1.45), lo que implica que malla$(B) \leq 2n\epsilon$. Puesto que B tiene a lo más n componentes y como $l > n$, tenemos que en cualquier colección de l elementos de B, al menos hay dos elementos de la colección que pertenecen a la misma componente. Por lo tanto, $\mu_l(B) \leq 2n\epsilon$.

Ahora, supongamos que $A, B \in C_n(X) \setminus F_n(X)$ son tales que $\mu_l(A) = r > 0$ y $d_H(A,B) < \epsilon$. Entonces, tenemos (por ser A compacto) que existe $\{a_1, \ldots, a_l\} \subset A$ tal que $\sup\{d(a_i,a_j) : a_i \in \{a_1, \ldots, a_l\}, a_j \in \{a_1, \ldots, a_l\}, j \neq i\} = r$. Ya que no controlamos el valor de r, tenemos dos opciones, la primera es que $\epsilon < \frac{r}{3}$, la segunda es que $\epsilon \geq \frac{r}{3}$. Supongamos primero que $\epsilon < \frac{r}{3}$. Como $d_H(A,B) < \epsilon < \frac{r}{3}$, para cada $a_i \in \{a_1, \ldots, a_l\}$, sea b_i un elemento de $V_{\frac{r}{3}}(a_i) \cap B$. Por lo tanto, el conjunto $\{b_1, \ldots, b_l\} \subset B$, es tal que $d(b_i, b_j) \geq d(a_i, a_j) - (d(b_i, a_i) + d(b_j, a_j)) > r - 2\epsilon$, lo que implica que $\mu_l(B) > r - 2\epsilon$. Por otro lado, si $\mu_l(B) > r + 2\epsilon$, entonces, ya que $d_H(A,B) < \epsilon$, tendríamos que existiría una colección $\{c_1, \ldots, c_l\} \subset A$ tal que $d(c_i, c_j) > r$ para todo $i \neq j$. Lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $\mu_l(B) \in (\mu_l(A) - 2\epsilon, \mu_l(A) + 2\epsilon)$.

Por otro lado, supongamos que $\epsilon \geq \frac{r}{3}$ y sean $b, c \in B$. Como $d_H(A,B) < \epsilon$, tenemos que $B \subset V_\epsilon(A)$. Por lo tanto, existen a_b y a_c en A, tales que $d(a_b, b) < \epsilon$ y $d(a_c, c) < \epsilon$. También existen a_j y $a_i \in \{a_1, \ldots, a_l\}$ tales que $d(a_b, a_j) \leq r$ y $d(a_i, a_c) \leq r$, de lo contrario, $\sup\{d(x,y) : x \in \{a_b, a_1, \ldots, a_l\}, y \in \{a_c, a_1, \ldots, a_l\}, x \neq y\} > r$, lo que contradice el hecho de que $\mu_l(A) = r$. Así, $d(b,c) \leq d(b, a_b) + d(a_b, a_j) + d(a_j, a_i) + d(a_i, a_c) + d(a_c, c) \leq \epsilon + r + r + r + \epsilon \leq 11\epsilon$. Como la elección de b y de c no tuvo restricciones, tenemos que $\mu_l(B) \leq 11\epsilon$, es decir, μ_l es continua. Con lo que concluímos que μ es continua.

Para demostrar que todas las funciones de tamaño fuerte son abiertas utilizaremos el siguiente lema, cuya demostración es muy fácil.

2.8 Lema. [18, Lema 2.7] Sean X un continuo, n un entero positivo, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte y $\alpha : [0,1] \to C_n(X)$ un arco de orden. Entonces la función $\gamma : [0,1] \to [\mu(\alpha(0)), \mu(\alpha(1))]$ definida como $\gamma(t) = \mu(\alpha(t))$ es un homeomorfismo.

Demostración. γ es biyectiva pues α es un homeomorfismo en su imagen y μ es una función de tamaño fuerte. Luego, por la Observación 1.39, obtenemos que γ es un homeomorfismo.$\square$

2.9 Teorema. [18, Teorema 2.8] Toda función de tamaño fuerte es abierta.

Demostración. Sean X un continuo, n un entero positivo, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte y $\mathcal{U}$ un abierto de $C_n(X)$. Sean $A \in \mathcal{U}$ y α un arco de orden de $F_n(X)$ a X que pasa por A (existe por la Proposición 1.93). Por el Lema 2.8, la función $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ definida como $\gamma(t) = \mu(\alpha(t))$ es un homeomorfismo. Dado que α es continua, $\alpha^{-1}(\mathcal{U})$ es un abierto que contiene a $\alpha^{-1}(A)$. Por lo tanto, $\gamma(\alpha^{-1}(\mathcal{U}))$ es un abierto que contiene a $\mu(A)$. Como $\gamma(\alpha^{-1}(\mathcal{U})) \subset \mu(\mathcal{U})$, μ es una función abierta.$\square$

Para demostrar que las funciones de tamaño fuerte son monótonas, es necesario el siguiente teorema, demostrado por Sergio Macías.

2.10 Teorema. [29, Teorema 4.8] El hiperespacio $C_n(X)$ es unicoherente para cada natural n y para cada continuo X.

2.11 Teorema. [18, Teorema 2.10] Cada función de tamaño fuerte es monótona.

Demostración. Sean X un continuo, n un número natural y μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Por la definición de función de tamaño fuerte, tenemos que $\mu^{-1}(0) = F_n(X)$, que es un continuo [35, Corolario 1.8.8]. Ahora, sea $t \in (0,1)$. Es fácil ver que cada elemento $A \in \mu^{-1}([0,t])$ puede ser unido por un arco de orden en $C_n(X)$ a un elemento de $F_n(X)$ (Proposición 1.93). Por lo tanto, $\mu^{-1}([0,t])$ es un continuo. De forma similar, cualquier elemento de $\mu^{-1}([t,1])$ puede ser unido por un arco de orden en $C_n(X)$ con X. Lo que implica que $\mu^{-1}([t,1])$ es un continuo. Finalmente, como $C_n(X) = \mu^{-1}([0,t]) \cup \mu^{-1}([t,1])$, tenemos que $\mu^{-1}(t) = \mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,1])$ es conexo (Teorema 2.10).$\square$

2.12 Teorema. [18, Teorema 2.11] Sean X un continuo, A_0, A_1, B_0, $B_1 \in 2^X$, α un arco de orden de A_0 a A_1, β un arco de orden de B_0 a B_1 en 2^X. Sean n un entero positivo y μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Si $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_0 \cup B_0 \in C_n(X)$ y $\mu(A_1 \cup B_0) \leq t \leq \mu(A_0 \cup B_1)$, entonces existe una única función continua $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s) \cup \beta(\gamma(s))) = t$ para cada $s \in [0,1]$.

Demostración. Sea $s \in [0,1]$. Entonces $\alpha(s) \cap B_1 = \emptyset$ ya que $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ y $\alpha(s) \subset A_1$. Por el Lema 2.6 de [18], el conjunto $\{\alpha(s) \cup \beta(r) : r \in [0,1]\}$ es un arco de orden de $\alpha(s) \cup B_0$ a $\alpha(s) \cup B_1$. Dado que $\alpha(s) \cup B_0 \subset A_1 \cup B_0$ y que $A_0 \cup B_1 \subset \alpha(s) \cup B_1$, tenemos que $\mu(\alpha(s) \cup B_0) \leq t \leq \mu(\alpha(s) \cup B_1)$. Así, por el Lema 2.8, la función $\theta : [0,1] \to [\mu(\alpha(s) \cup B_0), \mu(\alpha(s) \cup B_1)]$ definida como $\theta(r) = \mu(\alpha(s) \cup \beta(r))$ es un homeomorfismo. De esta forma, existe un único $s_0 \in [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s) \cup \beta(s_0)) = t$. Definimos $\gamma(s) = s_0$. Si $s_1 < s_2$, entonces $\gamma(s_2) < \gamma(s_1)$ ya que $\alpha(s_1) \subsetneq \alpha(s_2)$, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ y los conjuntos $\alpha(s_1) \cup \beta(\gamma(s_1))$ y $\alpha(s_2) \cup \beta(\gamma(s_2))$ están en el mismo nivel de tamaño fuerte.

Sea $r \in [\gamma(1), \gamma(0)]$. Entonces $\{\alpha(s) \cup \beta(r) : s \in [0,1]\}$ es un arco de orden y $\mu(\alpha(0) \cup \beta(r)) \leq t \leq \mu(\alpha(1) \cup \beta(r))$ Por lo tanto, existe un único $s \in [0,1]$ tal que $\gamma(s) = r$. Así $\gamma : [0,1] \to [\gamma(1), \gamma(0)]$ es una biyección que cambia el orden. Por lo tanto, γ es una función continua (Observación 1.39).$\square$

Observemos que en el Teorema 2.12, la condición $B_1 \cap A_1 = \emptyset$ es necesario. El siguiente ejemplo es un ejemplo en el que no existe una función continua $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\mu(\alpha(s) \cup \beta(\gamma(s))) = t$.

2.13 Ejemplo. [18, Ejemplo 2.12] Sean $X = [0,1]$, $A_0 = \{\frac{1}{2}\}$, $A_1 = [\frac{1}{2}, 1]$, $B_0 = \{0\}$ y $B_1 = [0,1]$. Definimos α como $\alpha(s) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{s}{2}]$ y β como $\beta(s) = [0, s]$ para cualquier $s \in [0,1]$. Entonces α es un arco de orden de A_0 a A_1 y β es un arco de orden que va de B_0 a B_1. Sean μ una función de tamaño fuerte arbitraria para $C_2(X)$ y $t < 1$ tales que $\mu(B_0 \cup A_1) < t$ y $\mu([0, \frac{1}{2}]) < t$. Por la elección de t, existe $s_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ tal que $\mu([0, s_0]) = t$. Sea $\gamma : [0,1] \to [0,1]$ cualquier función tal que $\mu(\alpha(s) \cup \beta(\gamma(s))) = t$. Observemos que si $s \in [0, 2s_0 - 1)$, entonces $\alpha(s) \cup \beta(\gamma(s)) = \beta(\gamma(s))$, por lo tanto, $\gamma(s) = s_0$ para cada $s \in [0, 2s_0 - 1)$. También, notemos que para cada $s \in (2s_0 - 1, 1]$, tenemos que $A_0 \subsetneq [\frac{1}{2}, 2(s_0 - 1)] \subsetneq \alpha(s)$, lo que implica que $\gamma(s) < \frac{1}{2}$ para cada $s \in (2s_0 - 1, 1]$, de lo contrario $\mu(\alpha(s) \cup \beta(\gamma(s))) = \mu([0, 2(2s_0 - 1)]) > t$. Puesto que $s_0 \neq \frac{1}{2}$, γ no es continua en $s = 2s_0 - 1$.

2.14 Teorema. [18, Teorema 2.13] Sean X un continuo, n un entero positivo, μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$ y α un arco de orden de A a X en $C_{n-1}(X)$. Si B es un subconjunto cerrado de X tal que $\mu(\{b\} \cup A) \leq t$ para cada $b \in B$, entonces existe una función continua $\gamma : B \to [0,1]$ tal que $\mu(\{b\} \cup \alpha(\gamma(b))) = t$ para cada $b \in B$.

Demostración. Sea $b \in B$. Entonces, por la Proposición 2.3 de [18], $\{\{b\} \cup \alpha(s) : s \in [0,1]\}$ es un arco de orden. Dado que $\alpha(1) = X$, $\mu(\{b\} \cup \alpha(0)) \leq t \leq \mu(\{b\} \cup \alpha(1))$. Por lo tanto, la función $\theta : [0,1] \to [\mu(\{b\} \cup \alpha(0)), \mu(\{b\} \cup \alpha(1))]$ definida como $\theta(r) = \mu(\{b\} \cup \alpha(r))$ es un homeomorfismo (Lema 2.8). Así, existe un único elemento $s_b \in [0,1]$ tal que $\mu(\{b\} \cup \alpha(s_b)) = t$. Definimos γ como $\gamma(b) = s_b$.

Para demostrar que γ es continua en $b \in B$, sea $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en B tal que converge a b y $\lim_{i \to \infty} \gamma(b_i) = r_0$.

Puesto que α es continua, tenemos que $\lim_{i\to\infty}\alpha(\gamma(b_i)) = \alpha(\lim_{i\to\infty}\gamma(b_i)) = \alpha(r_0)$. También, puesto que μ es continua, tenemos que $\lim_{i\to\infty}\mu(\{b_i\}\cup\alpha(\gamma(b_i))) = \mu(\lim_{i\to\infty}(\{b_i\}\cup\alpha(\gamma(b_i))))$ $= \mu(\{b\}\cup\alpha(r_0))$. Por otro lado, $\mu(\{b_i\}\cup\alpha(\gamma(b_i))) = t$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Por lo tanto, tenemos que $\mu(\{b\} \cup \alpha(r_0)) = t$. Puesto que r_0 está determinado de manera única, tenemos que $r_0 = \gamma(b)$. Como b fue elegido arbitrariamente, tenemos que γ es continua.$\square$

Sean X un continuo y n un entero positivo. A continuación, mostramos que si $\mathfrak{C}$ es un subconjunto cerrado no vacío de $C_n(X)$ y $\mu : \mathfrak{C} \to [0, 1]$ es una función de tamaño fuerte, entonces μ puede ser extendida a una función de tamaño fuerte definida en $C_n(X)$. También, en el Capítulo 3 sobre "Niveles de tamaño Fuerte", usamos este resultado para dar una caracterización de los niveles de tamaño fuerte.

2.15 Teorema. [40, Teorema 5.4] Sean X un continuo y n un entero positivo. Si $\mathfrak{C}$ es un subconjunto cerrado no vacío de $C_n(X)$ y $\mu : \mathfrak{C} \to [0, 1]$ es una función de tamaño fuerte, entonces μ puede ser extendida a una función de tamaño fuerte μ_n definida en $C_n(X)$.

Demostración. Sean $\mathfrak{C}$ un subconjunto cerrado no vacío de $C_n(X)$ y $\mu : \mathfrak{C} \to [0, 1]$ una función de tamaño fuerte. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $F_n(X)\cup\{X\} \subset \mathfrak{C}$, de lo contrario, podemos unir $\mathfrak{C} \cup (F_n(X) \cup \{X\})$ y definir μ' en $\mathfrak{C} \cup (F_n(X) \cup \{X\})$, como $\mu'(A) = \mu(A)$ si $A \in \mathfrak{C}$, $\mu'(A) = 0$ si $A \in F_n(X)$ y $\mu'(X) = 1$ ya que no afecta a la definición de función de tamaño fuerte. Sean $\mathfrak{U}$ una base numerable para $C_n(X)$ y:

$$\mathfrak{B} = \{(U, V) : M(cl(\mathcal{U})) \cap L(cl(\mathcal{V})) = \emptyset \text{ y } \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{U}\}.$$

Entonces $\mathfrak{B}$ es numerable y podemos numerar sus elementos $\mathfrak{B} = \{(\mathcal{U}_k, \mathcal{V}_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Por el Teorema 1.36, los conjuntos $M(cl(\mathcal{U}))$ y $L(cl(\mathcal{V}))$ son cerrados. Por lo tanto, por el Teorema 1.38, para cada entero positivo k, existe una función continua que preserva el orden $\omega_k : C_n(X) \to [0,1]$ tal que $\omega_k|_{\mathfrak{C}} = \mu$ y:

$$\omega_k(A) \geq \text{ínf } (M(cl(\mathcal{U}_k)) \cap \mathfrak{C}) \text{ si } A \in M(cl(\mathcal{U}_k)),$$
$$\omega_k(B) \geq \text{máx } (L(cl(\mathcal{U}_k)) \cap \mathfrak{C}) \text{ si } B \in L(cl(\mathcal{U}_k)).$$

Definimos $\mu_n : C_n(X) \to [0,1]$ como $\mu_n(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(A)}{2^k}$ para todo $A \in C_n(X)$. Observemos que μ_n es una extensión continua de μ. Puesto que ω_k preserva el orden, también lo hace μ_n. Resta demostrar que si A y $B \in C_n(X)$ y $A < B$ entonces $\mu_n(A) < \mu_n(B)$. Es suficiente probar que existe un entero positivo k tal que $\omega_k(A) < \omega_k(B)$.

Sean A y $B \in C_n(X)$ tales que $A < B$, $t_A = $sup $\mu(L(A) \cap \mathfrak{C})$ y $t_B = $ínf $\mu(M(B) \cap \mathfrak{C})$. Dado que μ es una función de tamaño fuerte, $t_A < t_B$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \frac{1}{2}(t_B - t_A)$. Por el Teorema 1.37, existen dos abiertos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $C_n(X)$ tal que $A \in \mathcal{V} = L(\mathcal{V})$ y $B \in \mathcal{U} = M(\mathcal{U})$ y, por compacidad, podemos suponer que $\mu(\mathcal{V} \cap \mathfrak{C}) \subset [0, t_A + \epsilon)$ y que $\mu(\mathcal{U} \cap \mathfrak{C}) \subset (t_B - \epsilon, 1]$. Se sigue que existe un entero positivo k tal que $A \in \mathcal{V}_k \subset cl(\mathcal{V}_k) \subset \mathcal{V}$ y $B \in \mathcal{U}_k \subset cl(\mathcal{U}_k) \subset \mathcal{U}$, de donde obtenemos que:

$$\omega_k(A) \leq t_A + \epsilon < t_B - \epsilon \leq \omega_k(B).$$

□

Como resultado inmediato, tenemos el siguiente corolario.

2.16 Corolario. [40, Corolario 5.5] Sea X un continuo. Si $\mu : C(X) \to [0,1]$ es una función de Whitney, μ puede ser extendida a una función de tamaño fuerte μ_n definida en $C_n(X)$.□

Capítulo 3

Niveles de tamaño fuerte

Por el Teorema 2.11, tenemos que cada nivel de tamaño fuerte es un continuo. Ésta, creo yo, es la propiedad que más distingue a las funciones de tamaño fuerte de las funciones de Whitney, ya que es sabido que los niveles de Whitney y, por lo tanto, los niveles de tamaño no son necesariamente conexos para $n \geq 2$ (Ejemplo 1.64).

3.1 Teorema. [18, Teorema 2.14] Sean X un continuo, n un entero positivo, $K_1, K_2, \ldots, K_m$ una colección de subcontinuos de X y μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Entonces:

1. El conjunto $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$ es arcoconexo.
2. Si $K_i \cap K_j = \emptyset$ para cada par $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ tales que $i \neq j$, entonces el conjunto $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ es conexo para cada $t \in [0, 1)$.

Demostración. Si $\cup_{i=1}^m K_i$ tiene más de n componentes, entonces $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$ es vacío y no hay nada que demostrar. Supongamos que $\cup_{i=1}^m K_i$ tiene a lo más n componentes. Para demostrar 1., sea $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$. Puesto que cada K_i es no vacío, por definición, tenemos que $K \in \langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$.

Si $A \in \langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$, entonces $A \subset K$ y cada componente de K intersecta a A. Si $A \neq K$, entonces, por la Proposición 1.93, existe un arco de orden α de A a K.

También, por la Proposición 1.93, α está contenido en $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$. Por lo tanto, $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$ es arcoconexo.

Para demostrar 2., podemos suponer que $m \leq n$ (de lo contrario, el conjunto $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$ sería vacío) y que $K_1, \ldots, K_m$ son no degenerados (ya que si K_m es degenerado, tenemos que $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n$ es homeomorfo a $\langle K_1, \ldots, K_{m-1} \rangle_n$). Escojamos un punto $k_i \in K_i$ y un arco de orden ψ_i de $\{k_i\}$ a K_i para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ (Proposición 1.93).
Paso 1.- Sea $t \in [0, 1)$. Demostraremos que para cualquier $A \in \langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$, existe un subcontinuo $\mathcal{K}$ de $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ tal que $\mathcal{K}$ contiene a A y a B donde B es un conjunto tal que $B \cap K_i$ es un elemento de ψ_i para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Sean $A \in \langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$, $A_1 = A \cap K_1$ y $A \setminus A_1 = A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_r$, donde $A_2, \ldots, A_r$ son las componentes de $A \setminus A_1$. Para cada $i \in \{2, 3, 4, \ldots, r\}$, escojamos un punto $a_i \in A_i$ tal que si $A_i \in \psi_j$, para algún $j \in \{2, \ldots, m\}$, entonces $a_i = k_j$ y, en los otros casos, tomamos a_i como cualquier punto de A_i. Pongamos $M_0 = \{a_2, \ldots, a_r\}$.

Demostraremos que existen un subcontinuo $\mathcal{K}_1$ de $\langle K_1, K_2, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ y $B_1 \in \langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ tales que $A, B_1 \in \mathcal{K}_1$, $B_1 \cap K_1 \in \psi_1$, $B_1 \setminus K_1 = D_2 \cup \cdots \cup D_r$ donde, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$, D_i es un subcontinuo de A_i y si $A_i \in \psi_j$, para algún $j \in \{2, \ldots, m\}$, entonces $D_i \in \psi_j$.

Si $A_1 = K_1$, entonces ponemos $B_1 = A$ y $\mathcal{K}_1 = \{A\}$. Por lo tanto, podemos suponer que $A_1 \neq K_1$. Primero supongamos que $M_0 \neq A \setminus A_1$. Sea $\alpha_1 : [0, 1] \to C_n(X)$ un arco de orden de A_1 a K_1. Si $A_i \in \psi_j$ para algún $i \in \{2, \dots, r\}$ y algún $j \in \{2, \dots, m\}$, definimos $\theta_i : [0,1] \to C(X)$ como $\theta_i(s) = \psi_j(s(\psi_j^{-1}(A_i)))$. Si existe algún $i \in \{2, \dots, r\}$ tal que $A_i \notin \psi_j$ para toda $j \in \{2, \dots, m\}$, sea $\theta_i : [0,1] \to C(X)$ un arco de orden de $\{a_i\}$ a A_i (Proposición 1.93). Definimos $\alpha_2 : [0,1] \to C_n(X)$ como $\alpha_2(s) = \cup_{i=2}^{r} \theta_i(s)$. Es fácil notar que $\alpha_2 : [0,1] \to C_n(X)$ es un arco de orden de M_0 a $A \setminus A_1$ tal que si $A_i \in \psi_j$ para algunas $i \in \{2, 3, \dots, r\}$ y $j \in \{2, 3, \dots, m\}$, entonces $\alpha_2(s) \cap A_i \in \psi_j$ para algún $s \in [0,1]$.

Caso 1.- Supongamos que $\mu(K_1 \cup M_0) \leq t$.

En este caso, el Teorema 2.12 implica que existe una función $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_1(s) \cup \alpha_2(\varphi(s))) = t$ para cada $s \in [0,1]$. En este caso, sean $\mathcal{K}_1 = \{\alpha_1(s) \cup \alpha_2(\varphi(s)) : s \in [0,1]\}$ y $B_1 = K_1 \cup \alpha_2(\varphi(1))$. Entonces $\mathcal{K}_1$ es un subcontinuo de $\langle K_1, \dots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ que contiene a A y a B_1.

Caso 2.- Supongamos que $\mu(K_1 \cup M_0) > t$.

Por el Teorema 2.12, existe una función $\varphi_1 : [0,1] \to [0,1]$ tal que $\mu(\alpha_2(s) \cup \alpha_1(\varphi_1(s))) = t$ para cada $s \in [0,1]$. Observemos que el número de componentes de $\alpha_1(\varphi_1(0))$ es menor o igual que $n - r$. Es fácil ver que la función $\sigma : C_{n-r}(K_1) \to [0, \sigma(K_1 \cup M_0)]$ definida por $\sigma(L) = \mu(L \cup M_0)$ es una función de tamaño fuerte. El conjunto $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(t)$ es un nivel de tamaño fuerte de $C_{n-r}(K_1)$; por lo tanto, por el Teorema 2.11, $\mathcal{L}$ es conexo. Notemos que la intersección de $\psi_1([0,1])$ y $\mathcal{L}$ tiene un único elemento. Sea $L_0 \in \psi_1 \cap \mathcal{L}$.

Sean $\mathcal{K}_1 = \{\alpha_2(s) \cup \alpha_1(\varphi_1(s)) : s \in [0,1]\} \cup \{L \cup M_0 : L \in \mathcal{L}\}$ y $B_1 = L_0 \cup M_0$. Entonces $B_1 \cap K_1 \in \psi_1$. Observemos que $\{\alpha_2(s) \cup \alpha_1(\varphi_1(s)) : s \in [0,1]\}$ y $\{L \cup M_0 : L \in \mathcal{L}\}$ son subcontinuos de $\langle K_1, \dots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ con un el elemento común $M_0 \cup \alpha_1(\varphi_1(0))$. Por lo tanto, $\mathcal{K}_1$ y B_1 satisfacen las condiciones requeridas. Cuando $A \setminus A_1 = M_0$, definimos $\mathcal{K}_1 = \{L \cup M_0 : L \in \mathcal{L}\}$, donde $\mathcal{L} = \{L \in C_{n-r}(K_1) : \mu(L \cup M_0) = t\}$ y $B_1 = L_0 \cup M_0$, donde $L_0 \in \mathcal{L} \cap \psi_1$. Entonces $\mathcal{K}_1$ es un subcontinuo de $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ que contiene a A y a B_1. De forma similar, podemos encontrar subcontinuos $\mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_m$ de $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ y $B_2, \ldots, B_m$ tales que B_{i-1} y $B_i \in \mathcal{K}_i$, $B_i \cap K_j \in \psi_j$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ e $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$. Definimos $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{K}_m$ y $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$. Entonces los conjuntos $\mathcal{K}$ y B satisfacen las condiciones requeridas en el Paso 1.

Puesto que ya está demostrado el Paso 1, sólo resta ver, que para cada par de elementos diferentes A y B de $\mu^{-1}(t)$ tales que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ y $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ donde $A_i = \psi_i(r_i)$, $B_i = \psi_i(s_i)$, tal que r_i y $s_i \in [0, 1]$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ existe un arco que los une y, así, llegar a que $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ es conexo.

Paso 2.- Sean A y B elementos diferentes de $\mu^{-1}(t)$ tales que $A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ y $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$, donde $A_i = \psi_i(r_i)$ y $B_i = \psi_i(s_i)$, tales que r_i y $s_i \in [0, 1]$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Debemos demostrar que existe un arco en $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ con puntos terminales A y B.

Podemos suponer que dados $p \leq q \leq m$, $r_i < s_i$ para $i \leq p$, $s_i < r_i$ para $p < i \leq q$ y $s_i = r_i$ para $q < i \leq m$.

Sean α' un arco de orden de $A_1 \cup \cdots \cup A_p$ a $B_1 \cup \cdots \cup B_p$ (existe por la Proposición 1.93 y $r_i < s_i$ para $i \in \{1, \ldots, p\}$) y β' un arco de orden de $B_{p+1}, \ldots, B_q$ a $A_{p+1}, \ldots, A_q$ (existe por la Proposición 1.93 y $r_i > s_i$ para $i \in \{p + 1, \ldots, q\}$). Por lo tanto, existe una función $\varphi' : [0, 1] \to C_n(X)$ tal que $\mu(\alpha'(s) \cup \beta'(\varphi'(s)) \cup A_{p+q+1} \cup A_{p+q+2} \cup \cdots \cup A_m) = t$ (ver la demostración del Lema 1.81). El conjunto $\{\alpha'(s) \cup \beta'(\varphi'(s) \cup A_{p+q+1} \cup \cdots \cup A_m) : s \in$

$[0,1]\}$ es un arco en $\langle K_1,\ldots,K_m\rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ con puntos terminales A y B. Los Pasos 1 y 2 implican que $\langle K_1,\ldots,K_m\rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ son conexos.$\square$

El siguiente ejemplo nos muestra que $\langle K_1,\ldots,K_4\rangle \cap \mu^{-1}(t)$ no es conexo para una función de tamaño fuerte μ y un t pequeño, a pesar de que cada K_i es conexo. Con lo cual, se observa que el requerimiento de que $K_i \cap K_j = \emptyset$ para $i \neq j$ del Teorema 3.1 es necesaria.

3.2 Ejemplo. [18, Ejemplo 2.15] Sean X un cuadrado con lados K_1, K_2, K_3 y K_4. Sea $K_i \cap K_{i+1} = \{a_i\}$ para $i \in \{1,2,3\}$ y $K_4 \cap K_1 = a_4$, donde $a_1, .., a_4$ son los vértices del cuadrado X. Sea μ una función de tamaño fuerte definida en $C_2(X)$. Entonces el conjunto $\langle K_1,K_2,K_3,K_4\rangle_2 \cap \mu^{-1}(0)$ consiste de dos elementos $\{a_1,a_3\}$ y $\{a_2,a_4\}$. Si $t < \mu(K_i)$ para $i \in \{1,2,3,4\}$, entonces $\langle K_1,K_2,K_3,K_4\rangle_2 \cap \mu^{-1}(t)$ tiene dos componentes.

A continuación, presentamos una caracterización de los niveles de tamaño fuerte para $C_n(X)$.

3.3 Teorema. [41, Teorema 3.1] Sean X un continuo no degenerado, n un entero positivo. Un subconjunto cerrado $\mathcal{S}$ de $C_n(X)$ es un nivel de tamaño fuerte si y sólo si $F_n(X) = \mathcal{S}$ o $\mathcal{S} \cap F_n(X) = \emptyset$, $\mathcal{S}$ es una anticadena y todo arco de orden que parte desde cualquier elemento de $F_n(X)$ y llega a X intersecta a $\mathcal{S}$.

Demostración. Si $\mathcal{S}$ es un nivel de tamaño fuerte, es claro que $\mathcal{S} = F_n(X)$ o $\mathcal{S} \cap F_n(X) = \emptyset$, $\mathcal{S}$ es una anticadena y cada arco de orden de un elemento de $F_n(X)$ a X intersecta $\mathcal{S}$.

Ahora, supongamos que $F_n(X) = \mathcal{S}$ o $\mathcal{S}$ es cerrado, $\mathcal{S} \cap F_n(X) = \emptyset$, $\mathcal{S}$ es una anticadena y todo arco de orden que parte desde cualquier elemento de $F_n(X)$ y llega a X intersecta a $\mathcal{S}$.

El caso $\mathcal{S} = F_n(X)$ es trivial. Supongamos ahora que $\mathcal{S}$ es una anticadena, $\mathcal{S} \cap F_n(X) = \emptyset$ y todo arco de orden que parte desde cualquier elemento de $F_n(X)$ hasta X, intersecta a $\mathcal{S}$. Definimos la función $\mu : \mathcal{S} \to [0,1]$, como $\mu(B) = \frac{1}{2}$ para todo $B \in \mathcal{S}$. Observemos que μ es una función de tamaño fuerte para $\mathcal{S}$. Por lo tanto, por el Teorema 2.15, existe una extensión μ_n de μ definida en $C_n(X)$ tal que μ_n es una función de tamaño fuerte. Por construcción, tenemos que $\mathcal{S} \subset \mu_n^{-1}(\frac{1}{2})$. Resta demostrar que $\mu_n^{-1}(\frac{1}{2}) \subset \mathcal{S}$. Sean $A \in \mu_n^{-1}(\frac{1}{2})$ y α_A un arco de orden que parte desde algún elemento de $F_n(X)$ hasta X y que pase por A (α_A existe por Teorema 1.8 de [47]). Por hipótesis, $\alpha_A \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$, sea $A' \in \alpha_A \cap \mathcal{S}$. Como $A' \in \mu_n^{-1}(\frac{1}{2})$ y μ_n es una función de tamaño fuerte, tenemos que $A = A'$. Por lo tanto, $\mathcal{S} = \mu_n(\frac{1}{2})$. Con lo que queda terminada la prueba. $\square$

Otro propiedad que tienen en común todos los niveles de tamaño fuerte definidos en $C_n(X)$, es que contienen $n-1$ celdas. De esto tratan los siguientes dos resultados.

3.4 Teorema. [41, Teorema 3.2] Sean X un continuo no degenerado, $n \geq 2$, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte y $t \in [0,1]$. Si $A \in (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)) \cap \mu^{-1}(t)$, entonces existe una $(n-1)$-celda $\mathcal{A}$ contenida en $\mu^{-1}(t)$ tal que $A \in \mathcal{A}$.

Demostración. Sea $A \in (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)) \cap \mu^{-1}(t)$. Sean $A_1, \ldots, A_n$ las componentes de A. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sean a_j un punto de A_j y $\alpha_j : [0,1] \to C(X)$ un arco de orden tal que $\alpha_j(0) = \{a_j\}$, $\alpha_j(1) = X$ y $\alpha_j(\frac{1}{2}) = A_j$. Definimos la función $\xi : [0,1]^n \to C_n(X)$ como $\xi((r_1, \ldots, r_n)) = \cup_{j=1}^n \alpha_j(r_j)$. Entonces ξ está bien definida y es continua ([25, Lema 1.1 (a)]).

Puesto que $A \in C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$ y ξ es continua, existe un $\epsilon > 0$ tal que $\xi(\prod_{j=1}^n [\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon]_j) \subset C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)$, donde $[\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon]_j$ es una copia de $[\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon]$.

Notemos que $A = \xi((\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}))$ y que $\mu(\xi((\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2} + \epsilon))) > t$. Por la continuidad de α y de μ, existe un $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y:

$$\mu(\xi((s_1, \ldots, s_{n-1}, \frac{1}{2} + \epsilon))) > t,$$

para todo $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \prod_{j=1}^{n-1} [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta]_j$.

Definimos $\theta : \prod_{j=1}^{n-1} [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}]_j \to [0, \frac{1}{2} + \epsilon]$ como sigue: para cada punto $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ de $\prod_{j=1}^{n-1} [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}]_j$, sea $\theta((s_1, \ldots, s_{n-1}))$ el único elemento de $[0, \frac{1}{2} + \epsilon]$ tal que:

$$\mu(\xi((s_1, \ldots, s_{n-1}), \theta((s_1, \ldots, s_{n-1})))) = t.$$

Para demostrar que θ es una función continua, sea $\{(s_1^k, \ldots, s_{n-1}^k)\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\prod_{j=1}^{n-1} [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}]_j$ que converge a $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \in \prod_{j=1}^{n-1} [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}]_j$. Consideremos la sucesión $\{\theta((s_1^k, \ldots, s_{n-1}^k))\}_{k=1}^{\infty}$ de elementos de $[0, \frac{1}{2} + \epsilon]$. Puesto que $[0, \frac{1}{2} + \epsilon]$ es compacto, $\{\theta((s_1^k, \ldots, s_{n-1}^k))\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{\theta((s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l}))\}_{l=1}^{\infty}$ que converge a $s \in [0, \frac{1}{2} + \epsilon]$. Entonces, dado que μ y ξ son continuas, tenemos que:

$$\begin{gathered}
\lim_{l \to \infty} \mu(\xi((s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l}), \theta((s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l})))) = \\
\mu(\xi(\lim_{l \to \infty}(s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l}), \lim_{l \to \infty} \theta((s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l})))) \\
= \mu(\xi((s_1, \ldots, s_{n-1}, s))).
\end{gathered}$$

Puesto que para cada entero positivo l:

$$\mu(\xi((s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l}), \theta((s_1^{k_l}, \ldots, s_{n-1}^{k_l})))) = t,$$

obtenemos que $\mu(\xi((s_1, \ldots, s_{n-1}, s))) = t$ y $\theta((s_1, \ldots, s_{n-1})) = s$. Por lo tanto, θ es continua. Sea $\chi : \prod_{j=1}^{n-1} [\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}]_j \to \mu^{-1}(t)$

dado por:

$$\chi((s_1, \ldots, s_{n-1})) = \xi((s_1, \ldots, s_{n-1}), \theta((s_1, \ldots, s_{n-1}))).$$

Entonces χ es un encaje de la $(n-1)$-celda $\prod_{j=1}^{n-1}[\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}]_j$ en $\mu^{-1}(t)$.$\square$

3.5 Corolario. [41, Corolario 3.3] Si X es un continuo no degenerado, $n \geq 2$ y μ es una función de tamaño fuerte definida en $C_n(X)$, entonces, para todo $t \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t)$ contiene a una $(n-1)$-celda.

Demostración. Puesto que $C_{n-1}(X)$ tiene interior vacío en $C_n(X)$ [35, Teorema 6.1.7], tenemos que $\mu^{-1}([t,1]) \cap (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X)) \neq \emptyset$, para todo $t \in [0,1)$, pues $\mu^{-1}([t,1])$ tiene interior no vacío para todo $t \in [0,1)$. Sean $A \in \mu^{-1}([t,1]) \cap (C_n(X) \setminus C_{n-1}(X))$ y α un arco de orden que va de $F_n(X)$ a X que pasa por A, por el Teorema 3.3 y las definiciones de función de tamaño fuerte y de arco de orden, $\alpha \cap \mu^{-1}(t)$ tiene un único elemento, llamemos A_t a este elemento, por la Proposición 1.93, A_t tiene n componentes. Por lo tanto, por el Teorema 3.4, $\mu^{-1}(t)$ contiene una $(n-1)$-celda.$\square$

3.6 Teorema. [41, Teorema 6.10] Sean X un continuo localmente conexo con métrica convexa ρ, n un entero positivo, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte y $t \in (0,1]$. Entonces $\mu^{-1}(t)$ es un retracto fuerte por deformación de $\mu^{-1}[0,t]$.

Demostración. Sea $A \in \mu^{-1}[0,t]$. Entonces, puesto que $K_\rho((\cdot, A)) : [0,\infty) \to C_n(X)$ es un arco de orden (Observación 1.88), existe un único elemento $r_A \in [0,\infty)$ tal que $K_\rho((r_A, A)) \in \mu^{-1}(t)$. Sea $\Omega : \mu^{-1}[0,t] \to \mathbb{R}$ como $\Omega(A) = r_A$. Para ver que Ω es continua, sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de

$\mu^{-1}([0,t])$ que converge a un punto $A \in \mu^{-1}([0,t])$. Necesitamos demostrar que la sucesión $\{r_{A_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a r_A. Supongamos que $\{r_{A_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a l. Entonces, puesto que K_ρ es continua (Teorema 1.87), tenemos que la sucesión $\{K_\rho((r_{A_k}, A_k))\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $K_\rho((l, A))$. Puesto que para cada entero positivo k, $K_\rho((r_{A_k}, A_k))$ pertenece a $\mu^{-1}(t)$, obtenemos que $K_\rho((l, A))$ también pertence $\mu^{-1}(t)$. Por lo tanto, $l = r_A$. Así, Ω es una función continua. Notemos que si $A \in \mu^{-1}(t)$, entonces $\Omega(A) = 0$.

Sea $H : \mu^{-1}[0,t] \times [0,1] \to [0,1]$ dado por $H((A,s)) = K_\rho((s \cdot \Omega(A), A))$. Entonces H es continua. Sea $A \in \mu^{-1}[0,t]$. Entonces $H((A,0)) = K_\rho((0 \cdot \Omega(A), A)) = K_\rho((0,A)) = A$, $H((A,1)) = K_\rho((1 \cdot \Omega(A), A)) = K_\rho((\Omega(A), A)) \in \mu^{-1}(t)$. Además, si $A \in \mu^{-1}(t)$ y $s \in [0,1]$, entonces $H((A,s)) = K_\rho((s \cdot \Omega(A), A)) = K_\rho((s \cdot 0, A)) = A$. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t)$ es un retracto fuerte por deformación de $\mu^{-1}([0,t])$. $\square$

3.7 Corolario. [41, Corolario 6.11] Si X es un continuo localmente conexo, n un número natural y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ es una función de tamaño fuerte, entonces $\mu^{-1}([t,1])$ es un retracto absoluto para cada $t \in [0,1]$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema II_m de [58], tenemos que $C_n(X)$ es un retracto absoluto. Sea $t \in [0,1]$. Si $t = 1$ es trivial. Si $t = 0$, entonces $\mu^{-1}([0,1]) = C_n(X)$. Si $t \in (0,1)$ por el Teorema 3.6, existe una retracción fuerte por deformación de $\mu^{-1}[0,t]$ a $\mu^{-1}(t)$. Puesto que $\mu^{-1}([0,t]) \cap \mu^{-1}([t,1]) = \mu^{-1}(t)$, tenemos que $\mu^{-1}([t,1])$ es retracto fuerte por deformación de $C_n(X)$. Por lo tanto, dado que $C_n(X)$ es un retracto absoluto, tenemos que $\mu^{-1}([t,1])$ es un retracto absoluto [3, Corolario 2.2, pág. 86].$\square$

3.1 Algunas propiedades de tamaño fuerte

Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una *propiedad de tamaño fuerte* si siempre que un continuo X tenga la propiedad $\mathcal{P}$, también la tiene cada nivel de tamaño fuerte no degenerado de $C_n(X)$ para cada entero positivo n.

El Corolario 3.5, nos da como resultado inmediato el siguiente resultado:

3.8 Corolario. [41, Corolario 3.4] La propiedad de ser hereditariamente indescomponible no es una propiedad de tamaño fuerte.$\square$

Lo anterior, nos lleva a preguntarnos si habrá continuos X, para los cuales, los niveles de tamaño fuerte sean indescomponibles.

3.9 Pregunta. ¿Si X es hereditariamente indescomponible, entonces los niveles de tamaño fuerte son indescomponibles?

3.10 Definición. Sean X un continuo y p un elemento de X. Se dice que X es *conexo en pequeño en* p, si toda vecindad de p en X, contiene una vecindad de p que es conexa.

3.11 Teorema. [18, Teorema 3.1] La propiedad de ser un continuo localmente conexo es una propiedad de tamaño fuerte.

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo, que n es un natural, μ es una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$ y que $t \in [0,1)$.

Sea $A \in \mu^{-1}(t)$, denotemos por A_i, con $i = \{1,\ldots,m\}$, las componentes de A. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad de A en $\mu^{-1}(t)$. Sean $U_1,\ldots,U_m$, abiertos ajenos de X tales que $A_i \subset U_i$, para $i = 1,\ldots,m$ y $\langle U_1,\ldots,U_m\rangle_n \cap \mu^{-1}(t) \subset \mathcal{U}$. Dado que X es localmente conexo, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, existe una vecindad K_i de A_i tal que K_i es un continuo y $K_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces, por el Teorema 3.1, $\langle K_1, \ldots, K_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(t)$ es un continuo que es una vecindad de A en $\mu^{-1}(t)$ contenida en $\mathcal{U}$. Así, $\mu^{-1}(t)$ es conexo en pequeño en A. Dado que A fue escogido arbitrariamente, tenemos que $\mu^{-1}(t)$ es localmente conexo [35, Teorema 1.7.12].$\square$

H. Hosokawa demostró en [18, Teorema 3.4], que la aposindesis es una propiedad de tamaño fuerte, nosotros extendemos ese resultado a la aposindesis numerable.

3.12 Teorema. [40, Teorema 4.1] La aposindesis numerable es una propiedad de tamaño fuerte.

Demostración. Sean X un continuo numerablemente aposindético, $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte, $t \in [0,1]$ y $\mathcal{S} = \mu^{-1}(t)$ un nivel de tamaño fuerte para $C_n(X)$. Es sabido que si $n \geq 2$, entonces $F_n(X)$ es numerablemente aposindético [28, Teorema 8]. Por lo tanto, el caso $t = 0$ está cubierto. Supongamos que $t > 0$ y sea $\mathcal{A}$ un subconjunto numerable y cerrado de $\mathcal{S}$. Puesto que $\mathcal{S}$ es un continuo y $\mathcal{A}$ es numerable, existe $B \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{A}$. Por el Lema 1.80, existe un $\epsilon > 0$ tal que $A \nsubseteq V_\epsilon(B)$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Sea $U = X \setminus cl_X(V_{\frac{\epsilon}{2}}(B))$. Por [21, Teorema 2.1], existe una función continua $s : \mathcal{A} \to X$ tal que $s(A) \in A \cap U$ para cada $A \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $s(\mathcal{A})$ es un subconjunto cerrado numerable de X tal que $s(\mathcal{A}) \cap B = \emptyset$. Entonces, para cada $b \in B$, existe un subcontinuo K_b de X tal que $b \in int_X(K_b) \subset K_b \subset X \setminus s(\mathcal{A})$. Por lo tanto, $\{int_X(K_b) : b \in B\}$ es una cubierta abierta de B. Puesto que B es compacto, existen $b_1, \ldots, b_l \in B$ tales que $B \subset \cup_{j=1}^{l} int_X(K_{b_j}) \subset \cup_{j=1}^{l} K_{b_j}$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que la familia $\{K_{b_1}, \ldots, K_{b_l}\}$ consiste de continuos disjuntos. Entonces, por el Teorema 3.1,

$\langle K_{b_1}, \ldots, K_{b_l}\rangle_n \cap \mathcal{S}$ es un subcontinuo de $\mathcal{S}$. Observemos que $B \in int_{C_n(X)}(\langle K_{b_1}, \ldots, K_{b_l}\rangle_n) \cap \mathcal{S}$. Puesto que para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$, $s(\mathcal{A}) \cap K_{b_j} = \emptyset$, obtenemos que $A \nsubseteq \cup_{j=1}^{l} K_{b_j}$ para ninguna $A \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, $(\langle K_{b_1}, \ldots, K_{b_l}\rangle_n \cap \mathcal{S}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Así, $\mathcal{S}$ es numerablemente aposindético. $\square$

El siguiente corolario responde de manera afirmativa a una de las preguntas hechas por Hosokawa [18, Pregunta pág. 964].

3.13 Corolario. [40, Corolario 4.2] La aposindesis finita es una propiedad de tamaño fuerte.

3.14 Lema. Sean X un continuo y n un entero positivo. Si $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ es una función de tamaño fuerte y $t > 0$, entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para cada $D \in C_n(X)$ con malla$(D) < \epsilon$, se tiene que $\mu(D) < t$.

Demostración. Sean $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte y $t > 0$. Supongamos que para todo natural m existe un elemento $D_m \in C_n(X)$ tal que malla$(D_m) < \frac{1}{m}$ y $\mu(D_m) > t$. Naturalmente el $\lim_{m\to\infty}$malla$(D_m) = 0$. Por otro lado, como $C_n(X)$ es compacto, existe una subsucesión convergente $\{D_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{D_m\}_{m\in\mathbb{N}}$. Sea $D = \lim_{k\to\infty} D_{m_k}$, como $\lim_{m\to\infty}$ malla$(D_m) = 0$ tenemos que malla$(D) = 0$, lo que implica que $D \in F_n(X)$. Además, ya que $\mu(D_m) > t$ para todo m y μ es continua, tenemos que $\mu(D) \geq t$, lo cual es una contradicción.$\square$

3.15 Teorema. [40, Teorema 4.3] Sean X un continuo encadenable por continuos, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $t \in (0,1)$ y $\mathcal{S} = \mu^{-1}(t)$, entonces $\mathcal{S}$ es un continuo arcoconexo.

Demostración. Sean A y B dos elementos de $\mathcal{S}$. Por el Lema 3.14, existe un $\epsilon > 0$ tal que si $D \in C_n(X)$ y malla$(D) < \epsilon$

entonces $\mu(D) < t$. Puesto que $t > 0$ y A y $B \in \mathcal{S}$, por lo menos una de las componentes tanto de A, como de B es no degenerada. Así, A y B tienen una cantidad no numerable de puntos. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ un subconjunto de A que intersecta a cada componente de A. De la misma forma, sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ un subconjunto de B que intersecta a cada componente de B. Dado que X es un continuo encadenable por continuos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existen subcontinuos $D_1^i, \ldots, D_{k_i}^i$ de X tales que $a_i \in D_1^i, b_i \in D_{k_i}^i, D_j^i \cap D_l^i \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - l| \leq 1$, y diám$(D_j^i) < \frac{\epsilon}{n}$ para $j \in \{1, \ldots, k_i\}$. Sea $k = \text{máx}\{k_1, \ldots, k_n\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea $D_j = \cup_{i=1}^n D_j^i$, donde $D_j^i = D_{k_i}^j$ si $j \geq k_i$. Notemos que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $D_j \in C_n(X)$ y la malla$(D_j) < \epsilon$. Por lo tanto, $\mu(D_j) < t$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, sean $p_j^i \in D_j^i \cap D_{j+1}^i$ y $P_j = \{p_j^1, \ldots, p_j^n\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sean α_j un arco de orden de D_j a X (Proposición 1.93) y $D'_j \in \mathcal{S}$ tal que $\{D'_j\} = \alpha_j \cap \mathcal{S}$. Notemos que A, D'_1 y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ satisfacen la hipótesis del Lema 1.81. Entonces, existe un arco β_1 en $\mathcal{S}$ de A a D'_1. Notemos también, que si $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, entonces D'_j, D'_{j+1} y P_j satisfacen la hipótesis del Lema 1.81. Por lo tanto, existe un arco β_{j+1} que va de D'_j a D'_{j+1}. De igual forma, por el Lema 1.81, existe un arco β_{k+1} en $\mathcal{S}$ desde D'_k a B. Por lo tanto, $\cup_{j=1}^{k+1}\beta_j$ contiene un arco desde A hasta B. Así, $\mathcal{S}$ es arcoconexo. $\square$

Con esto, la Observación 1.32 y con [7, Teorema 2.9], obtenemos que:

3.16 Corolario. [40, Corolario 4.4] Ser un continuo encadenable por continuos es una propiedad de tamaño fuerte. $\square$

También, como consecuencia de la Observación 1.32, el Teorema 3.15 y [7, Proposición 2.7] obtenemos el siguiente resultado, obtenido por Hosokawa [18, Teorema 3.3]:

3.17 Corolario. [40, Corolario 4.5] La arcoconexidad es una propiedad de tamaño fuerte.

Nuestro siguiente objetivo, es probar que para cualquier entero $n \geq 3$, los niveles de tamaño fuerte de $C_n(X)$ son acíclicos (Corolario 3.32). Para hacer esto, nos guiamos en [51] de J. T. Rogers. Es sabido que la aciclicidad no es una propiedad de Whitney [50, Ejemplo 2], sin embargo, lo es para los continuos de dimensión 1 [51, Corolario 7]. Puesto que no pedimos condiciones adicionales al continuo X, el Teorema 3.31 nos dice que, para $n \geq 3$, los niveles de tamaño fuerte son, de cierta forma, "más agradables"que los niveles de Whitney.

3.18 Definición. Una colección no vacía Σ de subconjuntos cerrados de un continuo X se dice que es una *estructura* si Σ es cerrado con respecto a uniones finitas, intersecciones finitas e intersecciones anidadas.

3.19 Definición. Si Σ es una estructura en X, entonces un elemento P de Σ se le llama *conjunto indescomponible* si siempre que $P = A \cup B$ para algunos elementos A y B de Σ, tenemos que $P = A$ o $P = B$.

Dado un continuo X, consideramos dos estructuras en $C_n(X)$. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X)$, sea:

$$\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \cup\{\mathcal{OA}_n(B, X) : B \in \mathcal{B}\}.$$

3.20 Observación. Notemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son dos subconjuntos cerrados de $C_n(X)$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{B} \cup \mathcal{D}) = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \cup \mathcal{M}(\mathcal{D})$. También, si $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cadena ordenada por la inclusión, entonces $\mathcal{M}(\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}(\mathcal{B}_\lambda)) = \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}(\mathcal{B}_\lambda)$.

3.21 Lema. [40, Lema 4.7] Sean X un continuo y n un entero positivo. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de $C_n(X)$, entonces $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ es cerrado en $C_n(X)$.

Demostración. Sea $D \in cl_{C_n(X)}(\mathcal{M}(\mathcal{B}))$. Entonces existe una sucesión $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ que converge a D. Para cada m, existe $B_m \in \mathcal{B}$ tal que $D_m \in \mathcal{OA}_n(B_m, X)$. Puesto que $\mathcal{B}$ es compacto, existe una subsucesión $\{B_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ que converge a un elemento $B \in \mathcal{B}$. Puesto que $D_{m_k} \in \mathcal{OA}_n(B_{m_k}, X)$, tenemos que $D \in \mathcal{OA}_n(B, X)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ es cerrado en $C_n(X)$. $\square$

Para un continuo y un entero positivo n, sea:

$$\Sigma_1 = \cup\{\mathcal{M}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ es un subconjunto cerrado de } C_n(X)\}$$

Por la Observación 3.20 y el Lema 3.21, Σ_1 es una estructura.

3.22 Observación. Notemos que los conjuntos indescomponibles de Σ_1 son los conjuntos de la forma $\mathcal{M}(\{B\})$, donde $B \in C_n(X)$. Puesto que $\mathcal{M}(\{B\})$ es homeomorfo a $\mathcal{OA}_n(B, X)$ y este conjunto es un retracto absoluto [36, Teorema 4.3], los conjuntos indescomponibles de Σ_1 tienen todos sus grupos de cohomología reducida de Čech triviales. Por lo tanto, todos los grupos de cohomología reducida de Čech de cada elemento de Σ_1 son triviales [51, Teorema 2].

Otra estructura se encuentra en $\mathcal{OA}_n(Z, X)$, donde Z es un punto arbitrario de $C_n(X)$. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{OA}_n(Z, X)$, sea:

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \cup\{\mathcal{OA}_n(Z, B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

3.23 Observación. Observemos que si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ son dos subconjuntos cerrados de $\mathcal{OA}_n(Z, X)$, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{B} \cup \mathcal{D}) = \mathcal{L}(\mathcal{B}) \cup$

$\mathcal{L}(\mathcal{D})$. También, si $\{\mathcal{B}\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un conjunto ordenado por la inclusión, entonces $\mathcal{L}(\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{B}_\lambda) = \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{L}(\mathcal{B}_\lambda)$.

3.24 Lema. [40, Lema 4.10] Sean X un continuo, n un entero positivo y $Z \in C_n(X)$. Si $\mathcal{B}$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{OA}_n(Z, X)$, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ es cerrado en $C_n(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \in cl_{C_n(X)}(\mathcal{L}(\mathcal{B}))$. Entonces existe una sucesión $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ que converge a D. Para cada m, existe un $B_m \in \mathcal{B}$ tal que $D_m \in \mathcal{OA}_n(Z, B_m)$. Dado que $\mathcal{OA}_n(Z, X)$ es un continuo [36, Teorema 4.3], $\mathcal{B}$ es compacto. Entonces existe una subsucesión $\{B_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ que converge a un elemento $B \in \mathcal{B}$. Dado que $D_{m_k} \in \mathcal{OA}_n(Z, B_{m_k})$, obtenemos que $D \in \mathcal{OA}_n(Z, B)$. Por lo tanto, $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ es cerrado en $C_n(X)$. $\square$

Sean X un continuo y n un entero positivo. Para un elemento Z de $C_n(X)$, sea:

$$\Sigma_2 = \{\mathcal{L}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ es un subconjunto cerrado de } \mathcal{OA}_n(Z, X)\}$$

Por la Observación 3.23 y el Lema 3.24, Σ_2 es una estructura.

3.25 Observación. Notemos que los conjuntos indescomponibles de Σ_2 son los conjuntos de la forma $\mathcal{L}(\{B\})$ donde $B \in \mathcal{OA}_n(Z, X)$. Puesto que $\mathcal{L}(\{B\})$ es homeomorfo a $\mathcal{OA}_n(Z, B)$ y este conjunto es un retracto absoluto [36, Teorema 4.3], todos sus grupos de cohomología reducida de Čech son triviales. Por lo tanto, todos sus grupos de cohomología reducida de Čech para los elementos de Σ_2 son triviales [51, Teorema 2].

Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$ una función de tamaño fuerte. Para cada elemento Z de $C_n(X)$ y un elemento $t \in [\mu(Z), 1]$, sea:

$$\mathcal{D}_n(Z, t) = \mathcal{M}(\{Z\}) \cap \mu^{-1}(t).$$

Como consecuencia del Lema 1.81, $\mathcal{D}_n(Z,t)$ es un continuo arcoconexo. La prueba del siguiente teorema es similar a la dada en [51, Teorema 4].

3.26 Teorema. [40, Teorema 4.12] Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $t \in [\mu(Z),1]$, entonces todos los grupos de cohomología reducida de Čech de $\mathcal{D}_n(Z,t)$ son triviales.

Demostración. Consideremos la pareja $\{\mathcal{M}(\mathcal{D}(Z,t)), \mathcal{L}(\mathcal{D}_n(Z,t))\}$ de subconjuntos de $\mathcal{OA}_n(Z,X)$. Para un entero $m \geq 0$, consideremos parte de la sucesión reducida de Mayer-Vietoris:

$$\check{H}^m(\mathcal{M}(\mathcal{D}_n(Z,t))) \oplus \check{H}^m(\mathcal{L}(\mathcal{D}_n(Z,t))) \to \check{H}^m(\mathcal{D}_n(Z,t)) \to \check{H}^{m+1}(\mathcal{OA}_n(Z,X))$$

para esta pareja. Por las Observaciones 3.22 y 3.25, tenemos que $\check{H}^m(\mathcal{M}(\mathcal{D}_n(Z,t)))$ y $\check{H}^m(\mathcal{L}(\mathcal{D}_n(Z,t)))$ son triviales. Puesto que $\mathcal{OA}_n(Z,X)$ es un retracto absoluto [36, Teorema 4.3], $\check{H}^{m+1}(\mathcal{OA}_n(Z,X))$ son triviales también. Por lo tanto, $\check{H}^m(\mathcal{D}_n(Z,t))$ es trivial. Así, todos los grupos de cohomología reducida de Čech de $\mathcal{D}_n(Z,t)$ son triviales. $\square$

3.27 Definición. Sean X y Y dos espacios métricos y compactos. Una función $F : X \to 2^Y$ se dice que es *semicontinua superiormente* en un punto $p \in X$, si para todo abierto U de Y tal que $F(x) \subset U$, existe un abierto V de X tal que $p \in V$ y $\cup\{F(x) : x \in V\} \subset U$.

Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Sean $s,t \in [0,1]$ tales que $s \leq t$. Definimos ${}_n\gamma_s^t : \mu^{-1}(s) \to \mu^{-1}(t)$ por ${}_n\gamma_s^t(Z) = \mathcal{D}_n(Z,t)$. El siguiente teorema muestra que ${}_n\gamma_s^t$ es semicontinua superiormente.

3.28 Lema. [40, Lema 4.13] Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $s, t \in [0,1]$ son tales que $s \leq t$, entonces ${}_n\gamma_s^t$ es semicontinua superiormente.

Demostración. Sea $\{Z_m\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $\mu^{-1}(s)$ que converge a un elemento $Z \in \mu^{-1}(s)$. Sea $Y \in$ lím sup ${}_n\gamma_s^t(Z_m)$. Entonces existe una subsucesión $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión natural tal que para cada entero positivo k, existe $Y_{m_k} \in {}_n\gamma_s^t(Z_{m_k})$ tal que la sucesión $\{Y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a Y. Puesto que, para todo k, $Z_{m_k} \subset Y_{m_k}$ y $\{Z_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a Z, nosotros tenemos que $Z \subset Y$. Es fácil ver que $Y \in \mathcal{OA}_n(Z, X)$. Por lo tanto, $Y \in {}_n\gamma_s^t(Z)$. Así, ${}_n\gamma_s^t$ es semicontinua superiormente. $\square$

3.29 Teorema. [40, Teorema 4.14] Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $s, t \in [0,1]$ son tales que $s \leq t$, entonces ${}_n\gamma_s^t$ induce un monomorfismo $({}_n\gamma_s^t)^* : \check{H}^1(\mu^{-1}(t)) \to \check{H}^1(\mu^{-1}(s))$.

Demostración. Por el Teorema 3.26, todos los grupos de cohomología reducida de Čech de ${}_n\gamma_s^t(Z)$ son triviales. Supongamos que $t \neq 1$, el resultado es claro para $t = 1$. Sea $B \in \mu^{-1}(t)$ y supongamos que $B_1, \ldots, B_m$ son las componentes de B. Notemos que $({}_n\gamma_s^t)^{-1}(B) = \langle B_1, \ldots, B_m \rangle_n \cap \mu^{-1}(s)$ y este conjunto es un subcontinuo propio de $\mu^{-1}(s)$ por [18, Teorema 2.14]. El resultado se sigue ahora de los Lemas 3.28, 1.82 y [51, Teorema 3]. $\square$

3.30 Corolario. [40, Corolario 4.15] Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $t \in [0,1]$, entonces ${}_n\gamma_s^t$ induce un monomorfismo:

$$({}_n\gamma_s^t)^*; \check{H}^1(\mu^{-1}(t)) \to \check{H}^1(\mu^{-1}(0)).$$

3.31 Teorema. [40, Teorema 4.16] Sean X un continuo, $n \geq 3$ un entero y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte. Si $\mathcal{S} = \mu^{-1}(t)$ es un nivel de tamaño fuerte, entonces $\mathcal{S}$ es acíclico.

DEMOSTRACIÓN. Por [27, Teorema 8], cada función continua de $F_n(X)$ dentro del círculo unitario en el plano es homotópica a una función constante. Esto implica, por [11, Teorema 8.1], que $\check{H}^1(F_n(X))$ es trivial; es decir, $F_n(X)$ es acíclico. El teorema sigue ahora de que $\mu^{-1}(0) = F_n(X)$ y el Corolario 3.30. $\square$

3.32 Corolario. [40, Corolario 4.17] La propiedad de ser acíclico es una propiedad de tamaño fuerte para cada entero $n \geq 3$.

3.33 Corolario. [40, Corolario 4.18] La propiedad de se acíclico es una propiedad de tamaño fuerte para los continuos localmente conexos.

DEMOSTRACIÓN. Sea X un continuo localmente conexo. Para $n \geq 3$, el corolario sigue del Corolario 3.32. Supongamos que $n = 2$. Por [14, Teorema 1], [57, (7.4)] y por [11, Teorema 8.1], tenemos que $F_2(X)$ es acíclico. Por lo tanto, puesto que $\mu^{-1}(0) = F_2(X)$, por Corolario 3.30, $\mu^{-1}(t)$ es acíclico para todo $t \in (0,1]$. Si $n = 1$, el corolario es consecuencia de [20, pág. 253], [57, (7.4)] y [11, Teorema 8.1]. Por lo tanto, la propiedad de ser acíclico es una propiedad de tamaño fuerte para los continuos localmente conexos. $\square$

3.2 Acerca de la existencia de funciones que preservan niveles de tamaño fuerte para $n \geq 2$

En [12] la noción de función preservadora de Whitney es introducida. Aquí demostramos que la noción correspondiente para funciones de tamaño fuerte y para un entero $n \geq 2$, es trivial; es decir, este tipo de función debe ser un homeomorfismo (Teorema 3.39).

3.34 Definición. Se dice que una función $f : X \to Y$ es una función *n-preservadora de tamaño fuerte* si f es continua y existen dos funciones de tamaño fuerte:

$$\mu : C_n(X) \to [0,1] \text{ y } \omega : C_n(Y) \to [0,1]$$

tales que para cada $t \in [0,1]$ existe $s \in [0,1]$ tal que

$$C_n(f)(\mu^{-1}(t)) = \omega^{-1}(s).$$

Es decir, una función f es n-preservadora de tamaño fuerte si existen dos funciones de tamaño fuerte para las cuales, la función inducida $C_n(f)$ manda niveles de tamaño fuerte de $C_n(X)$ sobre niveles de tamaño fuerte de $C_n(Y)$. En este caso, decimos que f es *(μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte.*

3.35 Lema. [41, Lema 7.1] Sean X y Y dos continuos, n un entero positivo $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ y $\omega : C_n(Y) \to [0,1]$ dos funciones de tamaño fuerte. Si $f : X \to Y$ es una función (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte, entonces f es suprayectiva y $C_n(f)(\mu^{-1}(0)) = \omega^{-1}(0)$.

Demostración. Sea $f : X \to Y$ una función (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte. Sea $\{x_1, \ldots, x_m\} \in \mu^{-1}(0)$. Claramente, $C_n(f)(\{x_1, \ldots, x_m\}) = \{f(x_1), \ldots, f(x_m)\} \in \omega^{-1}(0)$. Por lo tanto, $C_n(f)(\mu^{-1}(0)) \subset \omega^{-1}(0)$. Por definición de función n-preservadora de tamaño fuerte, $C_n(f)(\mu^{-1}(0)) = \omega^{-1}(t)$ para algún $t \in [0,1]$. Así, $C_n(f)(\mu^{-1}(0)) = \omega^{-1}(0)$. Sea $y \in Y$. Entonces $\{y\} \in \omega^{-1}(0)$. Por lo tanto, por lo anterior, existe $A \in \mu^{-1}(0)$ tal que $C_n(f)(A) = \{y\}$. Claramente, si $a \in A$, entonces $f(a) = y$. Por lo tanto, f es suprayectiva.$\square$

3.36 Definición. Se dice que una función continua $f : X \to Y$ entre continuos X y Y es *ligera* si $f^{-1}(f(x))$ es totalmente disconexo para todo $x \in X$.

3.37 Lema. [41, Lema 7.2] Sean X y Y dos continuos tales que Y es no degenerado, $n \geq 2$ y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ y $\omega : C_n(Y) \to [0,1]$ dos funciones de tamaño fuerte. Si $f : X \to Y$ es una función (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte, entonces f es ligera.

Demostración. Supongamos que f no es ligera. Sea:

$$\mathcal{A} = \{\mu(A) : A \in C(X) \text{ y } C_n(f)(A) \in F_1(Y)\}.$$

Dado que f no es ligera, $\mathcal{A}$ no es vacío y como Y es no degenerado, tenemos que $\max \mathcal{A} > 0$. Sean $a = \max \mathcal{A}$, $A \in \mu^{-1}(a) \cap \mathcal{A}$ y $p \in X \setminus A$. Por la definición de función de tamaño fuerte, $\mu(A \cup \{p\}) > \mu(A)$; sin embargo $\omega(C_n(f)(A \cup \{p\})) \in F_n(Y)$. Lo que implica que $\omega(C_n(f)(A \cup \{p\})) = 0$. Sea B un subcontinuo de X tal que $A \subsetneq B$ y $\mu(A \cup \{p\}) > \mu(B)$, entonces, puesto que $A \in \mu^{-1}(a)$, tenemos que $C_n(f)(B) \notin F_n(X)$. Por lo tanto, $\omega(C_n(f)(B)) > \omega(C_n(f)(A) \cup \{p\})$, lo cual es una contradicción.$\square$

3.38 Lema. [41, Lema 7.3] Sean X y Y dos continuos tales que Y es no degenerado, $n \geq 2$ y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ y $\omega : C_n(Y) \to [0,1]$ dos funciones de tamaño fuerte. Sea $f : X \to Y$ una función (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte. Si $C_n(f)(\mu^{-1}(t)) = \omega^{-1}(s)$ y $t' \in (0, t)$, entonces $C_n(f)(\mu^{-1}(t')) = \omega^{-1}(s')$ donde $s' \leq s$.

Demostración. Sean $A' \in \mu^{-1}(t')$ y $A \in \mu^{-1}(t)$ tales que $A' \subset A$. Entonces $C_n(f)(A') \subset C_n(f)(A)$. Por lo tanto, $\omega(C_n(f)(A'))$

$\leq \omega(C_n(f)(A))$. Por lo tanto, $s' \leq s$. Puesto que f es una función (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte, tenemos que $C_n(f)(\mu^{-1}(t')) = \omega^{-1}(s')$. $\square$

3.39 Teorema. [41, Teorema 7.4] Sean X y Y dos continuos tales que Y es no degenerado, $n \geq 2$ y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ y $\omega : C_n(Y) \to [0,1]$ dos funciones de tamaño fuerte. Si $f : X \to Y$ es una función (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Supongamos que f no es un homeomorfismo. Dado que f es (μ, ω)-n-preservadora de tamaño fuerte, tenemos que f es suprayectiva (por el Lema 3.35). Por lo tanto, f no es inyectiva. Sean p y q dos puntos diferentes de X tales que $f(p) = f(q)$. Sea $\alpha : [0,1] \to C_n(X)$ un arco de orden tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = X$. Sea $r_q = \text{mín}\{t \in [0,1] : q \in \alpha(t)\}$. Puesto que $r_q > 0$ y f es ligera (por el Lema 3.37), $\omega(C_n(f)(\alpha(r_q))) > 0$. Sea $s_q = \omega(C_n(f)(\alpha(r_q)))$. Por la continuidad de ω y $C_n(f)$ y, dado que, $\omega(C_n(f)(\{p,q\})) \in F_n(Y)$, tenemos que existe $r \in (0, r_q)$ tal que:

$$0 < \omega(C_n(f)(\alpha(r) \cup \{q\})) < s_q.$$

Ya que μ es una función de tamaño fuerte, $q \notin \alpha(r)$ y $\alpha(r) \notin F_n(X)$, tenemos que $\mu(\alpha(r) \cup \{q\}) > \mu(\alpha(r)) > 0$. Sea A el elemento de $\mu^{-1}(\mu(\alpha(r) \cup \{q\})) \cap \alpha([0,1])$ y supongamos que $\mu(A) = r_\mu$.

Por la continuidad de α, $C_n(f)$ y ω, existe $r' \in (r, r_\mu)$ tal que:

$$\mu(\alpha(r) \cup \{q\}) > \mu(\alpha(r')) > \mu(\alpha(r)).$$

Como α es un arco de orden, $C_n(f)$ es una función inducida y ω es una función de tamaño fuerte, tenemos que:

$$\omega \circ C_n(f) \circ \alpha : [0,1] \to [0,1]$$

es una función creciente. Puesto que f es ligera (por el Lema 3.37), $\omega(C_n(f)(\alpha(t))) = 0$ si y sólo si $t = 0$. Por lo tanto, existe $s' \in (0, r')$ tal que para todo $s > s'$ se cumple que:

$$\omega(C_n(f)(\alpha(s'))) < \omega(C_n(f)(\alpha(s))).$$

Lo cual implica que:

$$\omega(C_n(f)(\alpha(r) \cup \{p\})) = \omega(C_n(f)(\alpha(r))) < \omega(C_n(f)(\alpha(r'))),$$

y esto es una contradicción, ya que $\mu(\alpha(r) \cup \{q\}) > \mu(\alpha(r'))$. $\square$

Capítulo 4

Funciones de tamaño fuerte admisibles

En [15], los profesores J. T. Goodykoontz y S. B. Nadler, Jr. definen las funciones de Whitney admisibles y demuestran, bajo las hipótesis adecuadas, que los niveles de Whitney de las funciones de Whitney admisibles, son cubos de Hilbert. En este capítulo, siguiendo el trabajo ya mencionado, nosotros consideramos las funciones de tamaño fuerte admisibles y demostramos que, bajo las hipótesis adecuadas, los niveles de tamaño fuerte de las funciones de tamaño fuerte admisibles, son también, cubos de Hilbert. Además, en este capítulo, presentamos otras propiedades de las funciones de tamaño fuerte admisibles.

4.1 Definición. Sean X un continuo y n un número natural. Se dice que una función de tamaño fuerte $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ es *admisible* si existe una homotopía $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ que cumple lo siguiente:

1. Para todo $A \in C_n(X)$, $H(A,1) = A$ y $H(A,0) \in F_1(X)$,
2. si $\mu(H(A,t)) > 0$, para algún $t \in (0,1]$, entonces $\mu(H(A,s)) < \mu(H(A,t))$, para todo $0 \leq s < t$.

A una homotopía $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$, que satisface las condiciones anteriores, se le llama *deformación μ-admisible* para $C_n(X)$.

4.2 Lema. Sean X un continuo y n un número natural. Si $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ es una deformación μ-admisible, entonces, si $\mu(H(A,t)) = 0$ para algún $t > 0$, entonces $\mu(H(A,s)) = 0$ para todo $s \leq t$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ es una deformación μ-admisible tal que existen $t > s > 0$ tales que $\mu(H(A,t)) = 0$ y $\mu(H(A,s)) > 0$. Por la continuidad de μ y de H, tenemos que existe un $s' \in (s,t)$ tal que $\mu(H(A,s')) = \frac{1}{2}\mu(H(A,s))$, lo cual contradice 2. de 4.1.$\square$

4.3 Proposición. [41, Proposición 6.1] Sean X y Y dos continuos homeomorfos y n un entero positivo. Si existe una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$, entonces también existe una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que μ_X es función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$ y sea H_X una deformación μ_X-admisible para $C_n(X)$. Sea $h : Y \to X$ un homeomorfismo. Entonces $C_n(h) : C_n(Y) \to C_n(X)$ es un homeomorfismo (Proposición 1.61). Definimos $\mu_Y : C_n(Y) \to [0,1]$ como $\mu_Y(A) = \mu_X(C_n(h)(A))$ para cada $A \in C_n(Y)$. Dado que h es un homeomorfismo, μ_Y es una función de tamaño fuerte definida en $C_n(Y)$ (Lema 2.4). Ahora, definimos $H_Y : C_n(Y) \times [0,1] \to C_n(Y)$ como:

$$H_Y((A,t)) = h^{-1}(H((h(A),t)))$$

para todo $(A,t) \in C_n(Y) \times [0,1]$. Demostremos que H_Y es una deformación μ_Y-admisible. Sea $B \in C_n(Y)$. Entonces:

$$H_Y((B,1)) = C_n(h)^{-1}(H_X((C_n(h)(B),1))) =$$

$$C_n(h)^{-1}((C_n(h)(B))) = B.$$

Puesto que $H_X((C_n(h)(B),0)) \in F_1(X)$ y $C_n(h)$ es un homeomorfismo inducido, tenemos que $C_n(h)^{-1}(H_X((C_n(h)(B),0))) \in F_1(Y)$. Por lo tanto, $H_Y((B,0)) \in F_1(Y)$. Ahora, sean $B \in C_n(Y)$ y $t \in (0,1]$ tales que $\mu_Y(H_Y((B,t))) > 0$ y $s < t$. Entonces:

$$\mu_Y(H_Y((B,s))) = \mu_X(C_n(h)(H_Y((B,s)))) =$$
$$\mu_X(C_n(h)(C_n(h)^{-1}(H_X((C_n(h)(B),s))))) =$$
$$\mu_X(H_X(C_n(h)(B),s)) < \mu_X(H_X(C_n(h)(B),t)) =$$
$$\mu_X(C_n(h)(C_n(h)^{-1}(H_X((C_n(h)(B),t))))) =$$
$$\mu_X(C_n(h)(H_Y((B,t)))) = \mu_Y(H_Y((B,t))).$$

Por lo tanto, H_Y es una deformación μ_Y-admisible. □

4.4 Proposición. [41, Proposición 6.2] Sean X un continuo y n un entero positivo. Si existe una función de tamaño fuerte admisible μ para $C_n(X)$, entonces $F_n(X)$ es arcoconexo.

Demostración. Sea H una deformación μ-admisible. Claramente, $H(C_n(X) \times \{0\}) \subset F_n(X)$. Puesto que $C_n(X)$ es arcoconexo, tenemos que $H(C_n(X) \times \{0\})$ es arcoconexo. Ahora, sean $A \in F_n(X)$ y $\mathcal{A} = \{H(A,t) : t \in [0,1]\}$. Ya que $H(A,1) = A \in \mu^{-1}(0)$, por la Observación 4.2, tenemos que $\mathcal{A} \subset F_n(X)$. Como $\mathcal{A}$ es arcoconexo, existe un arco en $F_n(X)$ que une $H(A,1)$ con $H(A,0)$. Por lo tanto, cada punto de $F_n(X)$ puede unirse con un arco contenido en $F_n(X)$ a $H(C_n(X) \times \{0\})$. Por lo tanto, $F_n(X)$ es arcoconexo.□

4.5 Teorema. [41, Teorema 6.3] Sean X un continuo, n un entero positivo y μ una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$. Si $C_n(X)$ es contraíble, entonces $F_n(X)$ es contraíble.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $C_n(X)$ es contraíble. Se sigue, de [47, Lema 16.3] que existe una contracción $G : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ tal que para todo $A \in C_n(X)$, $G((A,0)) = A$, $G((A,1)) = X$, y, si $0 \leq t' \leq t'' \leq 1$, $G((A,t')) \subset G((A,t''))$, esta función está bien definida por la Proposición 2.6 de [7]. Sea H una deformación de tamaño fuerte μ-admisible para $C_n(X)$. Definimos $f : F_n(X) \times [0,1] \to F_n(X)$ como sigue:

$$f((A,t)) = \begin{cases} H((A, 1-2t)), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H((G(A, 2t-1), 0)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por el Lema 4.2, tenemos que el rango de f está contenido en $F_n(X)$. También, para cada $A \in F_n(A)$, $f(A,0) = A$ y $f(A,1) = H(X,0)$. Por lo tanto, $F_n(X)$ es contraíble.$\square$

Dado que los n-ésimos hiperespacios de continuos con la propiedad de Kelley son contraíbles [35, Corolario 6.1.16], como consecuencia del Teorema 4.5 tenemos el siguiente corolario:

4.6 Corolario. [41, Corolario 6.4] Sean X un continuo con la propiedad de Kelley y n un entero positivo. Si existe una función de tamaño fuerte admisible μ para $C_n(X)$, entonces $F_n(X)$ es contraíble.

Puesto que los continuos localmente conexos tienen la propiedad de Kelley [47, Ejemplo 16.11], por el Corolario 4.6, tenemos que:

4.7 Corolario. [41, Corolario 6.5] Sean X un continuo localmente conexo y n un entero positivo. Si existe una función de tamaño fuerte admisible μ para $C_n(X)$, entonces $F_n(X)$ es contraíble.

4.8 Corolario. [41, Corolario 6.6] Sean X un continuo que es un retracto de vecindad absoluto y n un entero positivo. Si existe una función de tamaño fuerte admisible μ para $C_n(X)$, entonces, $F_n(X)$ es un retracto absoluto.

Demostración. Dado que X es un retracto de vecindad absoluto, por [24, Teorema 5.1], $F_n(X)$ es un retracto de vecindad absoluto. Puesto que existe una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$, por el Teorema 4.5, tenemos que $F_n(X)$ es contraíble. Así, por el Teorema 1.76, $F_n(X)$ es un retracto absoluto.□

4.9 Pregunta. ¿Existe un par de números naturales n y m tales que n sea mayor que m y exista una función de tamaño fuerte admisible para n y no para m?

4.10 Teorema. [41, Teorema 6.12] Sean X un continuo y n un entero positivo. Si μ es una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$, entonces, para cualquier $t_0 \in (0,1)$, $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto de $\mu^{-1}([t_0,1])$.

Demostración. Sea $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ una deformación μ-admisible para $C_n(X)$. Fijemos $t_0 \in (0,1)$ y sea $\Gamma = \mu^{-1}([t_0,1])$. Tomemos $A \in \Gamma$. Dado que $H((A,1)) = A$, $\mu(H((A,1))) \geq t_0$ y, puesto que $H((A,0)) \in F_n(X)$, tenemos que $\mu(H((A,0))) = 0$. Por lo tanto, por la continuidad de H y de μ, existe $t_A \in [0,1]$ tal que $\mu(H((A,t_A))) = t_0$. Además, ya que $\mu(H((A,t_A))) > 0$ tenemos, por (2) de la Definición 4.1 que t_A es el único que cumple que $\mu(H((A,t_A))) = t_0$. Por lo tanto, podemos definir una función $\theta : \Gamma \to [0,1]$ como sigue: sea $\theta(A)$ el único elemento en $[0,1]$ tal que $\mu(H((A,\theta(A)))) = t_0$. Usando la compacidad de Γ, de $[0,1]$ y la continuidad de las funciones H y μ, es fácil demostrar que θ es continua: para ilustrar esto, sea $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en Γ que converja a A. Por la definición de θ, tenemos que $\{\theta(A_m)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$. Por lo tanto,

$\{\theta(A_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{\theta(A_{m_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, supongamos que $\{\theta(A_{m_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a s. Por la continuidad de μ y de H, tenemos que $\text{lím}_{m\to\infty}\mu(H((A_{m_k}, \theta(A_{m_k})))) = \mu(H((A, s)))$, ahora, $\text{lím}_{m\to\infty}\mu(H((A_{m_k}, \theta(A_{m_k})))) = t_0$ pues $\mu(H((A_{m_k}, \theta(A_{m_k})))) = t_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así, gracias a que θ es una función bien definida y $\mu(H((A, s))) = t_0$, tenemos que $\theta(A) = t_0$ y en consecuencia, continua (Lema 1.19). Ahora, definimos $r : \Gamma \to \mu^{-1}(t_0)$ como $r(A) = H((A, \theta(A)))$, para cada $A \in \Gamma$. Puesto que θ y H son continuas, tenemos que r es continua. Si $A \in \mu^{-1}(t_0)$ entonces $\mu(A) = t_0$ y, por lo tanto, $r(A) = H((A, \theta(A))) = H((A, 1)) = A$. De esta forma llegamos a que r es una retracción de Γ en $\mu^{-1}(t_0)$.$\square$

4.11 Teorema. [41, 6.13] Sean X un continuo, n un entero positivo y μ una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$. Si $C_n(X)$ es contraíble, entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es contraíble para cada $t_0 \in [0, 1]$.

Demostración. Fijemos $t_0 \in [0, 1]$. Si $t_0 = 0$, entonces $\mu^{-1}(t_0) = F_n(X)$ y, por lo tanto, por Teorema 4.5, $\mu^{-1}(t_0)$ es contraíble. Por lo tanto, podemos suponer que $t_0 \in (0, 1)$, ya que el caso $t_0 = 1$ es trivial. Sea $G : C_n(X) \times [0, 1] \to C_n(X)$ como en la demostración del Teorema 4.5. Sea $\Gamma = \mu^{-1}([t_0, 1])$. Por como está definida G, obtenemos que $G|_{\Gamma\times[0,1]}$ manda $\Gamma \times [0, 1]$ a Γ. Por lo tanto, Γ es contraíble. Por el Teorema 4.10, $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto de Γ. Por lo tanto, $\mu^{-1}(t_0)$ es contraíble [3, Teorema 13.2, pág. 26]. Lo que completa la demostración.$\square$

4.12 Teorema. [41, 6.14] Si X es un continuo localmente conexo y existe una función de tamaño fuerte admisible μ, definida en $C_n(X)$ para algún entero positivo n. Entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto absoluto para cada $t_0 \in (0, 1)$.

Demostración. Dado que X es un continuo localmente conexo tenemos, por el Corolario 3.7, que $\mu^{-1}([t_0, 1])$ es un retracto absoluto. Así, por el Teorema 4.10, $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto de $\mu^{-1}([t_0, 1])$. Por lo tanto, por [3, Corolario 2.2, pág. 86], $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto absoluto.$\square$

4.13 Teorema. [41, Teorema 6.15] Sea X un continuo con métrica d tal que existe una homotopía $\phi : X \times [0, 1] \to X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $\phi((x, 1)) = x$ y, para algún punto fijo $p \in X$, $\phi((x, 0)) = p$ para todo $x \in X$;
2. Si $d(\phi((x_1, t)), \phi((x_2, t))) > 0$ para $x_1, x_2 \in X$ y $t \in [0, 1]$, entonces $d(\phi((x_1, s)), \phi((x_2, s))) < d(\phi((x_1, t)), \phi((x_2, t)))$ siempre que $0 \leq s < t$.

Entonces, existe una función de tamaño fuerte admisible ω para todo $C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Definimos $\omega : C_n(X) \to \mathbb{R}$, como $\omega(A) = \text{diám}(A)\mu(A)$, donde μ está definida como en el Ejemplo 2.6. Por el Lema 2.3, ω es una función de tamaño fuerte. Definimos también, $H : C_n(X) \times [0, 1] \to C_n(X)$, como $H((A, t)) = \phi(A \times \{t\})$. Dado que ϕ es uniformemente continua, tenemos que H es continua. Demostremos que H es una deformación ω-admisible para $C_n(X)$. Sea $A \in C_n(X)$, observemos que, por 1. de la hipótesis y por la definición de H, tenemos que $H((A, 1)) = A$ y $H((A, 0)) = \{p\} \in F_1(X)$.

Sean $A \in C_n(X)$ y $t \in (0, 1]$ tales que $\omega(H((A, t))) > 0$ y $s \in [0, t)$. Si $s = 0$, entonces $\omega(H((A, s))) < \omega(H((A, t)))$. Supongamos que $s > 0$. Observemos que, para todo $m \geq n$, tenemos que $\mu_m(H((A, t))) \geq \mu_m(H((A, s)))$, donde μ_m es como en el Ejemplo 2.6, pues si $H((A,t)) \subset V_\epsilon(\{p_1,\ldots,p_m\})$, donde $\{p_1,\ldots,p_m\} \subset X$, entonces, por la definición de ϕ, obtenemos que

$$H((A,s)) \subset V_\epsilon(\{\phi((p_1,s)),\ldots,\phi((p_m,s))\}).$$

Lo que implica que $\omega(H((A,t))) \geq \omega(H((A,s)))$. Por otro lado, por la definición de H, tenemos que $\text{diám}(H((A,t))) > \text{diám}(H((A,s)))$ y, por lo tanto, $\omega(H((A,t))) > \omega(H((A,s)))$. □

4.14 Definición. Un subconjunto S de un espacio de Banach E es *estrellado* si existe un punto $p \in S$ (llamado *vértice*) tal que para todo $x \in S$, el arco convexo en E de p a x está contenido en S, es decir, $\{tp + (1-t)x : t \in [0,1]\} \subset S$.

4.15 Corolario. [41, Corolario 6.16] Si X es un subconjunto compacto y estrellado de un espacio de Banach E, entonces existe una función de tamaño fuerte admisible μ para $C_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el vértice de X está en el origen del espacio de Banach E. Entonces, para cualesquiera $t \in [0,1]$ y $x \in X$, el producto escalar $t \cdot x$ es un punto de X. Por lo tanto, si definimos $\psi((x,t)) = t \cdot x$ para cada $(x,t) \in X \times [0,1]$, tenemos que $\psi : X \times [0,1] \to X$ es continua. Claramente, ψ satisface 1. del Teorema 4.13, y si d denota la métrica de X, obtenida de la norma en el espacio de Banach, podemos observar que ψ también satisface 2. del Teorema 4.13. Por lo tanto, el corolario queda demostrado.□

4.16 Corolario. [41, Corolario 6.17] Si X es un cono topológico sobre cualquier espacio métrico compacto Y, entonces, existe una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Por [3, Teorema 8.1, pág. 79], podemos pensar que Y está encajado en un espacio de Banach E. Por lo tanto, podemos considerar Y como un subespacio de $E \times \{0\}$ que a su vez es un subespacio del espacio de Banach $E \times \mathbb{R}$. Sean $v = (e, 1) \in E \times \mathbb{R}$ fijo y X' el subconjunto de $E \times \mathbb{R}$ obtenido, uniendo a cada elemento de Y con v por un arco convexo en $E \times \mathbb{R}$. Entonces X' es un compacto estrellado contenido en $E \times \mathbb{R}$ y, como X' es homeomorfo a X tenemos, como consecuencia del Corolario 4.15 y la Proposición 4.3, el resultado deseado.$\square$

4.17 Definición. Una *dendrita* es un continuo localmente conexo que no contiene curvas cerradas simples.

4.18 Definición. Sea X un espacio métrico parcialmente ordenado por $\leq$. Se dice que una métrica d es *radialmente convexa* con respecto al orden parcial $\leq$ en X, si $x \leq y$, $y \leq z$ y $y \neq z$ implica que $d(x, y) \leq d(x, z)$.

4.19 Teorema. [41, Teorema 6.18] Si X es una dendrita, entonces existen funciones de tamaño fuerte admisibles para $C_n(X)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $p \in X$ fijo. Para cada $y, z \in X$, decimos que $y \leq_p z$ si y está en el único arco que va de p a z. Como es sabido, $(X, \leq_p)$ es un espacio parcialmente ordenado [26, pág. 680]. Por lo tanto, por [8, Teorema 1], tenemos que X tiene una métrica d que es radialmente convexa con respecto a $\leq_p$. Además, por la prueba de [8, Teorema 1 págs. 229-230], sabemos que:

(*)Si $y \leq_p z$, entonces $d(p, z) = d(p, y) + d(y, z)$.

A partir de esta métrica, creamos una métrica D que genere la misma topología en X para la cual se cumplan las condiciones del Teorema 4.13. Sean $y, z \in X$, $y \wedge z$ denota el último punto (con respecto a $\leq_p$) donde el arco de p a y, intersecta al arco de p a z. Definimos D de la siguiente manera:

$$D(y, z) = d(y, y \wedge z) + d(y \wedge z, z).$$

Es claro que D es una métrica. Ahora, sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Como X es una dendrita, tenemos que X es localmente conexo y cada subconjunto conexo de X es arcoconexo [48, Proposición 10.9]. Por lo tanto, existe un abierto arcoconexo U de X, tal que $x \in U$ y $U \subset V_{\frac{\epsilon}{3}}(x)$. Además, como X no contiene curvas cerradas simples, tenemos que si $y \in U$, entonces $x \wedge y \in U$. Lo que implica que la $D(x, y) = d(x, x \wedge y) + d(x \wedge y, y) \leq 2\frac{\epsilon}{3} < \epsilon$. Así, D es una métrica que genera la topología original de X.

Definimos $\psi : X \times [0, 1] \to X$ como $\psi((x, t))$, que es el único punto en el arco de p a x tal que:

$$D(p, \psi((x, t))) = t \cdot D(p, x).$$

Se sigue facilmente que ψ es continua. También, ψ satisface 1. del Teorema 4.13 y, usando (*), observamos que ψ satisface 2. del Teorema 4.13. Por lo tanto, por el Teorema 4.13, tenemos que existe una función de tamaño fuerte admisible en $C_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.$\square$

4.20 Proposición. [41, Proposición 6.19] Sean X un continuo, n un entero positivo, μ una función de tamaño fuerte para $C_n(X)$, $\mathcal{H} \subset C_n(X)$ y $\sigma : \mathcal{H} \to C(C_n(X))$ una función continua tal que, para cada $B \in \mathcal{H}$, $\sigma(B)$ es un arco de orden en $C_n(X)$. Sea $t_0 \in [0, 1]$. Supongamos que $\mu^{-1}(t_0) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$. Si para cada $B \in \mathcal{H}$, denotamos por $\sigma_{t_0}(B)$ al elemento de $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0)$, entonces la función $\sigma_{t_0} : \mathcal{H} \to \mu^{-1}(t_0)$, así definida, es una función continua.

Demostración. Por el Teorema 3.3 y por la hipótesis de que para cada elemento B de $\mathcal{H}$, $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$, tenemos que σ_{t_0} está bien definida. Por otro lado, si $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $B \in \mathcal{H}$, entonces, como σ es continua, tenemos que $\{\sigma(B_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $\sigma(B)$. Lo cual implica, que si $\{\sigma_{t_0}(B_{j_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente, puesto que σ es continua ésta debe converger a un elemento A de $\sigma(B)$, pero $\mu^{-1}(t_0)$ es un compacto y, por lo tanto, A también debe estar en $\mu^{-1}(t_0)$. Lo que implica que $A = \sigma_{t_0}(B)$ y, por lo tanto, σ_{t_0} es continua (Lema 1.19).$\square$

4.21 Lema. [41, Lema 6.20] Sean X un continuo localmente conexo con más de un punto, n un entero positivo, A un subconjunto cerrado de X con interior no vacío y $\epsilon > 0$. Si A no contiene arcos libres en X, entonces, existe una función continua $G : C_n(X) \to C_n(X) \setminus C_n(A, X)$ tal que $\rho_0(G, id_{C_n(X)}) < \epsilon$, donde ρ_0 es la métrica del supremo y $G(B) \setminus A = B \setminus A$, para cada $B \in C_n(X)$.

Demostración. Sean X un continuo localmente conexo con más de un punto, A un subconjunto cerrado de X sin arcos libres y con interior no vacío y $\epsilon > 0$. Por el Teorema 8.9 de [48], podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe una colección finita $\mathcal{P}$ de conjuntos conexos abiertos de diámetro menor que $\frac{1}{2}\epsilon$ tal que la unión de las cerraduras de los elementos de $\mathcal{P}$ es X. Además, podemos suponer que la cerradura de cada elemento de $\mathcal{P}$ es localmente conexa y que existe un elemento α de $\mathcal{P}$ tal que el conjunto:

$$\mathrm{St}(\alpha) = \cup\{cl(\beta) : \beta \in \mathcal{P} \text{ y } cl(\alpha) \cap cl(\beta) \neq \emptyset\}$$

esté contenido en A. Como $cl(\alpha)$ es un continuo localmente conexo, existe un arbol T en $cl(\alpha)$ tal que:

$$M = T \cup \{cl(\beta) : \beta \in \mathcal{P} \setminus \{\alpha\} \text{ y } cl(\alpha) \cap cl(\beta) \neq \emptyset\}$$

es conexo y, así, M es un continuo localmente conexo y, por lo tanto, $C_n(M)$ es un retracto absoluto [58, Teorema $\mathrm{II_m}$]. Por el Teorema 1.75, existe una función continua $r_0 : \mathrm{St}(\alpha) \to C_n(M)$ tal que $r_0(x) = \{x\}$ para cada $x \in M$. Por el Teorema 1.75, podemos extender r_0 a $r : X \to C_n(X)$, como $r(x) = \{x\}$ para cada $x \in X \setminus \mathrm{St}(\alpha)$. Puesto que A no contiene arcos libres, tenemos que $int(\alpha)$ no está contenido en M. Para concluir, definimos $G : C_n(X) \to C_n(X) \setminus C_n(A, X)$ como sigue, $G(B) = \cup\{r(b) : b \in B\}$. Claramente, G está bien definida y es continua, pues $\cup$ y r son continuas ([25, Lema 1.1 (a)]). Por otro lado, gracias a la construcción de $\mathrm{St}(\alpha)$ y de r, es fácil notar que $\rho_0(G, id_{C_n(X)}) < \epsilon$ y, puesto que A no contiene arcos libres, tenemos que $\alpha \nsubseteq M$. Por lo tanto, $G(B) \setminus A = B \setminus A$ para cada $B \in C_n(X)$.$\square$

4.22 Lema. [41, Lema 6.21] Sean X un continuo localmente conexo, n un entero positivo y A un subconjunto cerrado de X con interior no vacío. Supongamos que A no contiene un arco libre en X. Si μ es una función de tamaño fuerte admisible para $C_n(X)$, entonces para todo $t_0 \in (0, 1)$, el conjunto $\{B \in \mu^{-1}(t_0) : A \subset B\}$ es un Z-conjunto en $\mu^{-1}(t_0)$.

Demostración. Sea $H : C_n(X) \times [0, 1] \to C_n(X)$ una deformación μ-admisible. Fijemos t_0 tal que $0 < t_0 < 1$ y tomemos $s \in (0, 1)$. Definimos $G : C_n(X) \to C_n(X)$ como en el Lema 4.21. Puesto que $G(B) = \cup\{r(b) : b \in B\}$ para cada $B \in C_n(X)$, tenemos lo siguiente:

1. Si B_1 y $B_2 \in C_n(X)$ y $B_1 \subset B_2$, entonces $G(B_1) \subset G(B_2)$.

2. También, por el Lema 4.21, podemos suponer que G está tan cerca a la identidad que $\mu(G(X)) > t_0$.

3. Dado que H es una deformación μ-admisible para $C_n(X)$ y dado que $s < 1$ y $t_0 > 0$, $\mu(H((B, s))) < t_0$ para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Así, puesto que $\mu^{-1}(t_0)$ es compacto y μ y H son funciones continuas, tenemos que:

$$\inf \{t_0 - \mu(H((B, s))) : B \in \mu^{-1}(t_0)\} > 0.$$

   Por lo tanto, usando nuevamente el Lema 4.21, podemos suponer que $\mu(G(H((B, s)))) < t_0$ para todo $B \in \mu^{-1}(t_0)$.

Como X es localmente conexo, tenemos que X admite una métrica convexa ρ (Teorema 1.84) y que $K_\rho : [0, \infty) \times C_n(X) \to C_n(X)$ definida en la Definición 1.85, es continua. Para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$, sea:

$$\sigma(B) = \{G(K_\rho(t, H((B, s)))) : t \geq 0\}.$$

Ya que K_ρ y G son continuas, tenemos que $\sigma(B)$ es un subcontinuo de $C_n(X)$ para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. También, usando 1. de esta demostración, tenemos que, para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$:

$$G(K_\rho(t_1, H((B, s)))) \subset G(K_\rho(t_2, H((B, s)))) \text{ si } 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

Por lo tanto, $\sigma(B)$ es un arco de orden en $C_n(X)$, para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Por otro lado, si $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a B, entonces, por la continuidad de H, K_ρ y G, tenemos que $\{G(K_\rho(t, H((B_j, s))))\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge a $G(K_\rho(t, H((B, s))))$ para todo t, lo que implica, que $\sigma : \mu^{-1}(t_0) \to C(C_n(X))$ es continua. Además, por 3. de esta demostración, tenemos que para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$:

$$\mu(G(K_\rho(0, H((B, s))))) < t_0$$

y, definiendo $\delta = \text{diám}_\rho(X)$ tenemos, por 2., que:

$$\mu(G(K_\rho(\delta, H((B,s))))) > t_0.$$

Ahora, como $\sigma(B)$ es un arco de orden, resulta que $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$, para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Por lo tanto, si definimos $\sigma_{t_0} : \mu^{-1}(t_0) \to \mu^{-1}(t_0)$ como en la Proposición 4.20, obtenemos σ_{t_0} es continua. Por otro lado, el Lema 4.21 nos dice que $A \not\subseteq G(B)$ para ninguna $B \in C_n(X)$. Por lo tanto, $\sigma_{t_0}(\mu^{-1}(t_0)) \subset \mu^{-1}(t_0) \setminus \{B \in \mu^{-1}(t_0) : A \subset B\}$. También, para cualquier $\epsilon > 0$, es fácil notar que si s está lo suficientemente cerca de 1 y G está también lo suficientemente cerca de la identidad, entonces σ_{t_0} estará a una distancia no mayor que ϵ de la identidad en $\mu^{-1}(t_0)$. Por lo tanto, $\{B \in \mu^{-1}(t_0) : A \subset B\}$ es un Z-conjunto en $\mu^{-1}(t_0)$.$\square$

El siguiente teorema, nos da condiciones suficientes para asegurar cuándo los niveles de tamaño fuerte en el n-ésimo hiperespacio de un continuo, son cubos de Hilbert.

4.23 Teorema. [41, Teorema 6.23] Sean X un continuo localmente conexo y n un entero positivo. Si existe una función de tamaño fuerte admisible μ para $C_n(X)$ y si X no contiene arcos libres, entonces $\mu^{-1}(t_0)$ es un cubo de Hilbert para todo $t_0 \in (0,1)$.

Demostración. Sea $H : C_n(X) \times [0,1] \to C_n(X)$ una deformación μ-admisible para $C_n(X)$ y fijemos $t_0 \in (0,1)$. Por el Teorema 4.12, tenemos que $\mu^{-1}(t_0)$ es un retracto absoluto. Por lo tanto, por el Teorema 1.79, es suficiente demostrar que la función identidad en $\mu^{-1}(t_0)$ es un límite uniforme de Z-funciones. Ya que X es un continuo localmente conexo, existe una métrica convexa ρ para X (Teorema 1.84) y la función K_ρ de la Definición

1.85, es una función continua. Fijemos $s \in (0,1)$. Definimos σ en $\mu^{-1}(t_0)$ como:

$$\sigma(B) = \{K_\rho((t, H((B,s)))) : t \geq 0\}$$

para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Por razones similares a las del Lema 4.22, tenemos que σ es una función continua que va de $\mu^{-1}(t_0)$ a $C(C_n(X))$ y, que para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$, se tiene que $\sigma(B) \cap \mu^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. Así, si definimos $\sigma_{t_0} : \mu^{-1}(t_0) \to \mu^{-1}(t_0)$ como en la Proposición 4.20, tenemos que σ_{t_0} es una función continua. Para terminar la demostración, sólo queda demostrar que σ_{t_0} es una Z-función.

Puesto que H es una deformación μ-admisible y dado que $s < 1$ y $t_0 > 0$, $\mu(H((B,s))) < t_0$, para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Así, dado que $\mu^{-1}(t_0)$ es compacto y H y μ son continuas, observamos que:

$$\sup\{\mu(H((B,s))) : B \in \mu^{-1}(t_0)\} < t_0.$$

Gracias a la definición de σ_{t_0}, tenemos que para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$, existe t_B tal que $\sigma_{t_0}(B) = K_\rho((t_B, H((B,s))))$. Puesto que, $\mu(\sigma_{t_0}(B)) = t_0$ para cada $B \in \mu^{-1}(t_0)$, se sigue fácilmente que existe $\gamma > 0$, tal que $t_B \geq \gamma$ para $B \in \mu^{-1}(t_0)$. Sea $\{p_1, \ldots, p_m\}$ un subconjunto finito de X tal que para cualquier punto $x \in X$, $\rho(x, p_i) < \frac{\gamma}{2}$, para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, sea:

$$\mathcal{P}_i = \{E \in \mu^{-1}(t_0) : K_\rho(\frac{\gamma}{2}, \{p_i\}) \subset E\}.$$

Demostremos ahora, que $\sigma_{t_0}(\mu^{-1}(t_0)) \subset \cup_{i=1}^m \mathcal{P}_i$. Sean $B_0 \in \mu^{-1}(t_0)$ y $x_0 \in H((B_0, s))$. Como $\rho(x_0, p_i) < \frac{\gamma}{2}$, para algún $i \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que, para ese i y para cualquier $y \in K_\rho(\frac{\gamma}{2}, \{p_i\})$, se cumple que:

$$\rho(y, x_0) \leq \rho(y, p_i) + \rho(p_i, x_0) \leq \gamma \leq t_{B_0}$$

y, por lo tanto, $K_\rho((\frac{\gamma}{2},\{p_i\}))\subset K_\rho((t_{B_0},H((B_0,s))))=\sigma_{t_0}(B_0)$. Con lo que demostramos que $\sigma_{t_0}(\mu^{-1}(t_0))\subset\cup_{i=1}^m\mathcal{P}_i$. Ahora, por el Lema 4.22, cada $\mathcal{P}_i$ es un Z-conjunto en $\mu^{-1}(t_0)$. Es decir, $\sigma_{t_0}(\mu^{-1}(t_0))$ está contenido en una unión finita de Z-conjuntos de $\mu^{-1}(t_0)$ ([9, Teorema 3.1]) y, por lo tanto, σ_{t_0} es una Z-función. Nuevamente, eligiendo s lo suficientemente cerca a 1, podemos hacer que σ_{t_0} esté tan cerca de la identidad en $\mu^{-1}(t_0)$ como queramos. Con esto, hemos demostrado que la función identidad es límite uniforme de Z-funciones. Finalmente, aplicamos el Teorema 1.79 para concluir que $\mu^{-1}(t_0)$ es un cubo de Hilbert.$\square$

Capítulo 5

Propiedades de tamaño fuerte reversibles

Hasta antes de este capítulo, dado un entero positivo n, sólo hemos analizado las propiedades de los niveles de tamaño fuerte del n-ésimo hiperespacio de un continuo X, a partir de las propiedades del mismo X. Esto ha servido para entender mejor algunas características de $C_n(X)$, a través de sus niveles de tamaño fuerte.

Lo que queremos hacer en este capítulo, es lo contrario, es decir; tratar de obtener información de un continuo X a partir de su n-ésimo hiperespacio y alguna función de tamaño fuerte definida en él.

5.1 Definición. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es de *tamaño fuerte reversible*, si siempre que X sea un continuo tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para toda función de tamaño fuerte $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$, si $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para todo $t \in [0, 1)$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

5.2 Definición. Sea $n \in \mathbb{N}$. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es de *tamaño fuerte n-reversible* de tamaño fuerte, si siempre que X sea un continuo, tal que para toda función de tamaño fuerte μ :

$C_n(X) \to [0,1]$, $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para todo $t \in [0,1)$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

5.3 Observación. Una propiedad de tamaño fuerte es n-reversible de tamaño fuerte para todo $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si es reversible. También, el ser 1-reversible es equivalente a ser reversible de Whitney.

5.4 Observación. El ser acíclico no es una propiedad n-reversible de tamaño fuerte para ninguna $n \geq 3$ (Teorema 3.31). Sin embargo, es una propiedad reversible de Whitney [50, Ejemplo 2].

5.5 Pregunta. ¿El ser acíclico es una propiedad 2-reversible de tamaño fuerte?

5.6 Pregunta. ¿Hay alguna propiedad que sea n-reversible y no m-reversible para $m < n$?

5.7 Definición. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad de *tamaño fuerte sólidamente reversible*, si siempre que X sea un continuo, tal que exista una función de tamaño fuerte $\mu : C_n(X) \to [0,1]$, donde $\mu^{-1}(t)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, para algún $n \in \mathbb{N}$ y para todo $t \in [0,1)$. Entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

5.8 Lema. [41, Lema 5.5] Si X es un continuo, $n \in \mathbb{N}$ y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ es una función de tamaño fuerte, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe $t > 0$ tal que malla$(A) < \epsilon$ para todo $A \in \mu^{-1}([0,t])$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existen una sucesión $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $\text{lím}_{m\to\infty} t_m = 0$ y $A_m \in \mu^{-1}(t_m)$ tales que malla$(A_m) > \epsilon$ para cada m. Sea A'_m una componente de A_m tal que diám$(A'_m) > \epsilon$ para cada entero positivo m. Puesto que $C_n(X)$ es compacto, existe una subsucesión convergente $\{A'_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{A'_m\}_{m=1}^{\infty}$. Ya que $\text{lím}_{m\to\infty} t_m = 0$, $\text{lím}_{k\to\infty} A'_{m_k} \in F_1(X)$. Pero el $\text{diám}(A'_{m_k}) > \epsilon$ para cada k. Lo cual implica que $\text{lím}_{k\to\infty}\ \text{diám}(A'_{m_k}) \geq \epsilon$, y esto es una contradicción.$\square$

5.9 Lema. [41, Lema 5.6] Sean X un continuo y n un entero positivo. Si $\epsilon > 0$, $A \in C_n(X)$ es tal que $\text{malla}(A) < \epsilon$ y $\mathcal{A}$ es un continuo de $C_n(X)$ que contiene a A de diámetro menor que ϵ, entonces, $\text{malla}(\cup\mathcal{A}) \leq 3n\epsilon$.

Demostración. Sean $\epsilon > 0$, $A \in C_n(X)$ tales que $\text{malla}(A) < \epsilon$ y $\mathcal{A}$ un continuo de $C_n(X)$ que contiene a A de diámetro menor que ϵ. Como $A \in \mathcal{A}$ y $\text{diám}(\mathcal{A}) < \epsilon$, tenemos que $d_H^2(\{A\}, \mathcal{A}) < \epsilon$, donde d_H^2 es la distancia de Hausdorff en 2^{2^X}, lo que implica que $d_H(A, \cup\mathcal{A})$ es menor que ϵ [47, Lema 1.48]. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$, las componentes de A. Puesto que $d_H(A, \cup\mathcal{A}) < \epsilon$, tenemos que $\cup\mathcal{A} \subset \cup_{i=1}^{m} V_\epsilon(A_i)$. Así, si D es una componente de $\cup\mathcal{A}$ entonces $\text{diám}(D) \leq \sum_{i=1}^{m} \text{diám} V_\epsilon(A_i) \leq m(3\epsilon) \leq 3n\epsilon$. $\square$

5.10 Lema. [41, Lema 5.7] Sean X un continuo y n un entero positivo. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos subcontinuos de $C_n(X)$ tales que $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, entonces cada componente de $\cup\mathcal{A}$ intersecta a $\cup\mathcal{B}$ y cada componente de $\cup\mathcal{B}$ intersecta a $\cup\mathcal{A}$.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Por [17, Lema 3.1] cada componente de A intersecta a cada componente de $\cup\mathcal{A}$ y también intersecta a cada componente de $\cup\mathcal{B}$ y, como obviamente $A \subset (\cup\mathcal{A}) \cap (\cup\mathcal{B})$, tenemos el resultado deseado. $\square$

La definición de propiedad de tamaño fuerte sólidamente reversible puede ser modificada para obtener la siguiente definición.

5.11 Definición. Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es una propiedad de *tamaño fuerte sólidamente reversible por sucesiones* si, siempre que X sea un continuo tal que existen un $n \in \mathbb{N}$, una función de tamaño fuerte $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ y una sucesión $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$ que converge a cero que cumple que $\mu^{-1}(t_m)$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Claramente, el ser una propiedad que es sólidamente reversible por sucesiones implica, ser una propiedad sólidamente reversible.

5.12 Teorema. [41, Teorema 5.8] La encadenabilidad por continuos es una propiedad de tamaño fuerte sólidamente reversible por sucesiones.

Demostración. Sean X un continuo, $n \in \mathbb{N}$, $\{t_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a cero y $\mu : C_n(X) \to [0,1]$ una función de tamaño fuerte tal que $\mu^{-1}(t_l)$ es encadenable por continuos para todo $l \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 5.8 y la convergencia de $\{t_l\}_{l\in\mathbb{N}}$, existe $L \in \mathbb{N}$ tal que malla$(A) < \frac{\epsilon}{3n}$ para todo $l \geq L$ y todo $A \in \mu^{-1}(t_l)$. Sean p y q dos elementos de X, $l \geq L$, P y Q dos elementos de $C(X) \cap \mu^{-1}(t_l)$ tales que $p \in P$ y $q \in Q$. Como $\mu^{-1}(t_l)$ es encadenable por continuos, existe una $\frac{\epsilon}{3n}$-cadena de continuos que va de P a Q en $\mu^{-1}(t_l)$. Denotemos a esta cadena como $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_m\}$, donde $P \in \mathcal{A}_1$ y $Q \in \mathcal{A}_m$. Por el Lema 5.9, cada componente de $\cup\mathcal{A}_i$ tiene diámetro menor que ϵ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Dado que $P \in \mathcal{A}_1 \cap C(X)$, por [47, Lema 1.49], tenemos que $\cup\mathcal{A}_1$ es un continuo, de igual forma, dado que $Q \in \mathcal{A}_m \cap C(X)$ tenemos que $\cup\mathcal{A}_m$ es también un continuo. Por lo tanto, por el Lema 5.10, obtenemos que $(\cup\mathcal{A}_1) \cup (\cup\mathcal{A}_2)$ es también un subcontinuo de X. Continuando con este proceso, obtenemos que $\cup(\cup_{i=1}^{m}\mathcal{A}_i)$ es un subcontinuo de X. Por otro lado, por el Lema 5.10, existe un conjunto de continuos $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ que cumple que $P \subset B_1$ y $Q \subset B_m$, donde $B_1 = \cup\mathcal{A}_1$, cada B_i

es una componente de $\cup\mathcal{A}_i$ para $i \in \{2, \ldots, m-1\}$, $B_m = \cup\mathcal{A}_m$ $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$. A partir de aquí, podemos definir una cadena de continuos $\{B'_1, \ldots, B'_r\}$ de la siguiente manera: $B'_1 = B_1$ y para todo $i > 1$, $B'_i = B_j$, donde $j = \text{Máx}\{k \in \{1, \ldots, m\} : B_k \cap B'_{i-1} \neq \emptyset\}$ y B_j no intersecta a Q o $B'_i = B_j \cup Q$ donde $j = \text{Máx}\{k \in \{1, \ldots, m\} : B_k \cap B'_{i-1} \neq \emptyset\}$ y B_j intersecta a Q. Es fácil notar, que $\{B'_1, \ldots, B'_r\}$ es una cadena de continuos que va de p a q. Ahora, como malla$(\cup\mathcal{A}_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tenemos que diám$(B'_i) < \epsilon$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Así, obtenemos que X es encadenable por continuos.$\square$

5.13 Teorema. [41, Teorema 5.9] Sean X un continuo, n un entero positivo y $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$ una función de tamaño fuerte. Si existe una sucesión $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ de números en $(0, 1]$ que converge a 0 y $\mu^{-1}(t_m)$ es localmente conexo para cada entero positivo m, entonces X es localmente conexo. Por lo tanto, el ser un continuo localmente conexo es una propiedad de tamaño fuerte sólidamente reversible por sucesiones.

Demostración. Para demostrar que X es localmente conexo, por [48, Teorema 8.4], sólo necesitamos demostrar que para cada $\epsilon > 0$, X puede ser visto como la unión de una cantidad finita de subcontinuos de X con diámetro menor que ϵ.

Sea $\epsilon > 0$, por el Lema 5.8, existe $t \in (0, 1)$ tal que malla$(A) < \epsilon$ para cada $A \in \mu^{-1}(t)$. Puesto que $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a 0, existe m tal que $t_m < t$. Por lo tanto, malla$(A) < \epsilon$ para todo $A \in \mu^{-1}(t_m)$. Puesto que $\mu^{-1}(t_m)$ es un continuo localmente conexo, por [48, Teorema 8.4], existe una cantidad finita de subcontinuos $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ de $\mu^{-1}(t_m)$, tales que $\mu^{-1}(t_m) \subset \cup_{j=1}^{k}\Gamma_j$ y diám$(\Gamma_j) < \frac{\epsilon}{3n}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, sea $G_j = \cup\Gamma_j$. Entonces, por el Corolario 1.91, $G_j \in C_n(X)$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Por el Lema 5.9, malla$(G_j) < \epsilon$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Dado que $\mu^{-1}(t_m) = \cup_{j=1}^{k} \Gamma_j$ y $\cup \mu^{-1}(t_m) = X$, tenemos que $X = \cup_{j=1}^{k} G_j$. Por lo tanto, podemos escribir a X como la unión de a lo más $n \cdot k$ subcontinuos de X, cada uno de los cuales con diámetro menor que ϵ. Así, concluímos que X es un continuo localmente conexo.$\square$

5.14 Definición. Sea X un continuo con métrica d. Decimos que X tiene la *propiedad de Kelley*, si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ que satisface la siguiente condición:

- si p y $q \in X$ son tales que $d(p, q) < \delta$ y si $A \in C(X)$ es tal que $p \in A$, entonces existe un $B \in C(X)$ tal que $q \in B$ y $d_H(A, B) < \epsilon$.

5.15 Teorema. [41, Teorema 5.10] La propiedad de Kelley es una propiedad de tamaño fuerte sólidamente reversible por sucesiones.

Demostración. Sean X un continuo y $n \in \mathbb{N}$ tales que existe una función de tamaño fuerte $\mu : C_n(X) \to [0, 1]$ y una sucesión $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim_{m \to \infty} t_m = 0$ y $\mu^{-1}(t_m)$ tiene la propiedad de Kelley para todo $m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley. Entonces existen un elemento p de X y un $\epsilon > 0$ tales que para cada entero positivo k, existen un punto q_k de X y un subcontinuo P_k de X tales que $d(p, q_k) < \frac{1}{k}$, $p \in P_k$ y para cada subcontinuo Q de X que contiene a q_k, $d_H(P_k, Q) \geq \epsilon$. Por el Lema 5.8, existe $s \in [0, 1]$ tal que malla$(A) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $A \in \mu^{-1}(s)$. Sea N un entero positivo tal que $t_N < s$. Notemos que malla$(A) < \frac{\epsilon}{3}$ para cada $A \in \mu^{-1}(t_N)$.

Para cada entero positivo k, sea $Q_k \in \mu^{-1}(t_N) \cap C(X)$ tal que $q_k \in Q_k$. Dado que $C(X)$ es compacto [35, Teorema 1.8.5], sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las sucesiones $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergen a P y a Q, respectivamente. Observemos que P y Q son subcontinuos de X. Además $Q \in \mu^{-1}(t_N)$ y $p \in P \cap Q$. Puesto que diám$(Q) =$ malla$(Q) < \frac{\epsilon}{3}$, tenemos que $d_H(P, P \cup Q) < \frac{\epsilon}{3}$.

Puesto que $\mu^{-1}(t_N)$ tiene la propiedad de Kelley, y $Q \in \mu^{-1}(t_N)$, existe un $\delta > 0$ tal que si $A \in \mu^{-1}(t_N)$, $d_H(Q, A) < \delta$ y $\mathcal{Q}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_N)$ que contiene a Q ([47, Lema 14.11.1]), entonces existe un subcontinuo $\mathcal{A}$ de $\mu^{-1}(t_N)$ tal que $A \in \mathcal{A}$ y $d_H^2(\mathcal{Q}, \mathcal{A}) < \frac{\epsilon}{3}$, donde d_H^2 es la métrica de Hausdorff en $C(\mu^{-1}(t_N))$.

Sea $\mathcal{Q} = C(P \cup Q) \cap \mu^{-1}(t_N)$. Entonces $\mathcal{Q}$ es un subcontinuo de $\mu^{-1}(t_N)$ que contiene a Q. Sea k_0 un entero positivo tal que $d_H(P_{k_0}, P) < \frac{\epsilon}{3}$ y $d_H(Q_{k_0}, Q) < \delta$. Entonces existe un subcontinuo $\mathcal{Q}_{k_0}$ de $\mu^{-1}(t_N)$ tal que $Q_{k_0} \in \mathcal{Q}_{k_0}$ y $d_H^2(\mathcal{Q}_{k_0}, \mathcal{Q}) < \frac{\epsilon}{3}$.

Sea $Q' = \cup\mathcal{Q}_{k_0}$. Entonces, por el Lema 1.90, Q' es un subcontinuo de X. Notemos que $q_{k_0} \in Q'$. Dado que $P \cup Q = \cup\mathcal{Q}$ y $d_H(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_{k_0}) < \frac{\epsilon}{3}$, por [25, Lema 1.1 (a)], tenemos que $d_H(P \cup Q, Q') < \frac{\epsilon}{3}$. Por lo tanto, $d_H(P_{k_0}, Q') \leq d_H(P_{k_0}, P)$ $+ d_H(P, P \cup Q) + d_H(P \cup Q, Q') < \epsilon$, lo cual es una contradicción con la elección de q_{k_0}. Con lo que concluímos que X tiene la propiedad de Kelley.$\square$

5.16 Corolario. [41, Corolario 5.11] La propiedad de Kelley es una propiedad de tamaño fuerte sólidamente reversible.$\square$

Capítulo 6

Funciones tamaño

En realidad, las funciones tamaño que no son de Whitney para el hiperespacio de subcontinuos de un continuo se han estudiado poco, como consecuencia, tampoco se sabe mucho acerca de los niveles de tamaño, lo que hacemos en este capítulo es estudiar un poco sobre estos dos temas.

6.1 Techos de Niveles tamaño

A continuación presentamos la definición dada en la Definición 1.62, restringida al hiperespacio de subcontinuos de un continuo.

Se dice que una función continua $\sigma : C(X) \to [0, \infty)$ es una *función de tamaño* (o *función tamaño*) si $\sigma(\{x\}) = 0$ para todo $x \in X$ y $\sigma(A) \leq \sigma(B)$ si $A \subset B$. Si $t \in [0, \sigma(X)]$, decimos que $\sigma^{-1}(t)$ es un *nivel de tamaño*.

Sin duda, el ejemplo más conocido de función tamaño es el diámetro, que es, una función de tamaño para todo continuo X. Cabe mencionar, que el único continuo que se conoce para el cuál la función de diámetro es de Whitney es el arco, hasta la fecha es una pregunta abierta el si hay otro continuo en el que la función diámetro sea una función de Whitney.

Como podemos ver en la siguiente proposición, no es difícil construir funciones de tamaño que no sean de Whitney.

6.1 Proposición. Para todo continuo no degenerado existe una función tamaño que no es función de Whitney.

Demostración. Sabemos que, para todo continuo X, existe una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$ (Teorema 2.1). Sean $t_0,\ t_1 \in \mathbb{R}$ tales que $0 < t_0 < t_1 < 1$. Definimos $\sigma : C(X) \to \mathbb{R}$ como:
$\sigma(A) = \mu(A)$ si $\mu(A) \leq t_0$,
$\sigma(A) = t_0$ si $t_0 \leq \mu(A) \leq t_1$,
$\sigma(A) = \mu(A) - t_1 + t_0$ si $\mu(A) \geq t_1$.
Claramente, σ es una función de tamaño que no es de Whitney, de hecho $\sigma^{-1}(t_0) = \mu^{-1}([t_0, t_1])$. $\square$

Dada la Proposición 6.1, uno podría pensar que todos los niveles tamaño contienen algún nivel de Whitney, el siguiente es un ejemplo en el cual un nivel tamaño no contiene ningún nivel de Whitney:

6.2 Ejemplo. Sea $\sigma : C([0,3]) \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\sigma(A) = \text{diám}(A \setminus [0,1]).$$

En este ejemplo definimos el diámetro del conjunto vacío como 0. σ es una función continua, pues si $d_H(A,B) < \epsilon$, entonces $|\text{diám}(A \setminus [0,1]) - \text{diám}(B \setminus [0,1])| \leq 2d_H(A,B) < 2\epsilon$.

Si $A \subset B$, entonces $(A \setminus [0,1]) \subset (B \setminus [0,1])$. Por lo tanto, $\sigma(A) \leq \sigma(B)$. Observemos que $\sigma^{-1}(1) = \{[x, x+1] : 1 \leq x \leq 2\} \cup \{[x, 2] : 0 \leq x \leq 1\}$. Además, notemos que si $\mathcal{A}$ es una anticadena contenida en $\sigma^{-1}(1)$, entonces $\mathcal{A} \cap \{[x,2] : 0 \leq x \leq 1\}$ tiene a lo más un elemento, pues $\{[x,2] : x \leq 1\}$ es una familia de conjuntos anidados. Por lo tanto, $\sigma^{-1}(1)$ no contiene ninguna anticadena que intersecte a cada arco de orden de $F_1([0,3])$ a $[0,3]$ y, así, por el Teorema 3.3, $\sigma^{-1}(1)$ no contiene ningún nivel de Whitney.$\square$

A continuación presentaremos una condición suficiente para que un nivel de tamaño contenga un nivel de Whitney. Para eso necesitamos las siguientes definiciones:

6.3 Definición. Dado un espacio métrico X, llamaremos $\mathcal{AO}(X)$ al conjunto de todos los arcos de orden de los elementos de $F_1(X)$ a X.

6.4 Definición. Dados un continuo X, $x \in X$, un arco de orden α de $\{x\}$ a X, $\sigma : C(X) \to [0,1]$ una función de tamaño y un nivel de tamaño $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(t)$, para algún $t \in [0,1]$, definimos $\text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha)$ como el elemento $K \in \alpha \cap \mathcal{L}$ tal que $C \subset K$ para todo $C \in \alpha \cap \mathcal{L}$.

6.5 Observación. Notemos que la Definición 6.4 es correcta, ya que $\text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha)$ siempre existe. Esto se debe a que $\alpha([0,1])$ y $\mathcal{L}$ son compactos, $\alpha([0,1]) \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$ (por la continuidad de α, de σ y el Teorema del valor intermedio) y α es un conjunto ordenado por $\subset$.

6.6 Definición. Dados un continuo no degenerado X, $\sigma : C(X) \to [0,1]$ una función de tamaño, $t \in [0,1]$ y un nivel de tamaño $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(t)$ en $C(X)$, definimos $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ como:

$$\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}} = \{\text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha) : \alpha \in \mathcal{AO}(X)\}.$$

A $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ lo llamaremos *techo de* $\mathcal{L}$.

En la siguiente proposición damos condiciones suficientes para asegurar cuándo un nivel de tamaño contiene un nivel de Whitney.

6.7 Proposición. Sean X un continuo, $\sigma : C(X) \to [0,1]$ una función de tamaño, $t \in [0,1]$ y $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(t)$ un nivel de tamaño en $C(X)$. Si para cualesquiera A y $B \in \mathcal{L}$, con la propiedad de que $A \subsetneq B$, existe un $C \in \mathcal{L}$ tal que $A \subset int(C)$, entonces $\mathcal{L}$ contiene un nivel de Whitney.

Demostración. Observemos que si $t = 0$, entonces $F_1(X) \subset \mu^{-1}(t)$. Supongamos que $t > 0$. Entonces, por definición, $\mu^{-1}(t) \cap F_1(X) = \emptyset$. Consideremos a $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ como en la Definición 6.6. Por construcción, $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ intersecta a cada arco de orden. Demostraremos que $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ es una anticadena. Sean $A, B \in \mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ tales que $A \subsetneq B$. Por hipótesis, existe $C \in \mathcal{L}$ tal que $A \subset int(C)$. Sea α un arco de orden tal que $A = \text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha)$. Como $A \subset int(C)$, $A \in \langle int(C) \rangle_1$ y, por lo tanto, $\alpha^{-1}(A) \in \alpha^{-1}(\langle int(C) \rangle_1)$. Como $\alpha^{-1}(\langle int(C) \rangle_1)$ es abierto y $A \subsetneq X$, existe $r > \alpha^{-1}(A)$ tal que $\alpha(r) \in \langle int(C) \rangle_1$ así, $A \subsetneq \alpha(r) \subset C$. Lo que contradice el hecho de que $A = \text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha)$. De esta forma, queda demostrado que $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ es una anticadena. Así, por el Teorema 3.3, concluímos que $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ es un nivel Whitney.$\square$

6.8 Ejemplo. Como consecuencia directa de la Proposición 6.7, tenemos que diám: $S^1 \to [0,2]$ es una función de tamaño, que no es de Whitney, tal que cada nivel de tamaño contiene a un nivel de Whitney. Observemos que para $t < 2$, $\text{diám}^{-1}(t)$ es un nivel de Whitney (Teorema 3.3), pues si A y $B \in \text{diám}^{-1}(t)$, entonces $A \nsubseteq B$ o viceversa.

Para el Lema 6.10 necesitamos la siguiente definición.

6.9 Definición. Sea X un continuo. Para una función de tamaño $\sigma : C(X) \to [0,1]$, $r \in [0,1]$, un nivel tamaño $\sigma^{-1}(r)$ y una función de Whitney $\mu : C(X) \to [0,1]$, definimos una sucesión de funciones de Whitney $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la siguiente manera: $\mu_n : C(X) \to \mathbb{R}$ como $\mu_n(A) = \sigma(A) + \frac{\mu(A)}{2^n}$. Por la Proposición 2.2, tenemos que cada μ_n es en realidad una función de Whitney. Definimos también $\mathcal{C}_n = \mu_n^{-1}([r, r + \frac{1}{2^n}])$ y $\mathcal{Q}_n = \mu_n^{-1}(r + \frac{1}{2^n})$.

6.10 Lema. Sean X un continuo, $\sigma : C(X) \to \mathbb{R}$ una función tamaño y $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(r)$ un nivel tamaño. Si $\{\mathcal{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de nivles de Whitney descritos en la Definición 6.9, entonces $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}} \subset \text{lím inf } \mathcal{Q}_n$

DEMOSTRACIÓN. Sean $A \in \mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$ y α un arco de orden tales que $A = \text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha)$. Por el Teorema 3.3, sabemos que $\alpha \cap \mathcal{Q}_n \neq \emptyset$ y consiste de un único elemento, llamemos a este elemento A_n. Sea $\mathcal{C}_n$ como en la Definición 6.9. Como $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}_n$ y $A_n = \text{Máx}_{\mathcal{C}_n}(\alpha)$, tenemos que $A \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, como $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$, $A_{n+1} \subset A_n$ y α es un arco de orden $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tiene un único punto límite B. Notemos que $B \in \mathcal{L}$, pues $\cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{C}_n = \mathcal{L}$. Como ya dijimos, $A \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $A \subset B$. Por otro lado, $B \in \mathcal{L} \cap \alpha$, pues α es compacto, así $A = B$, pues $A = \text{Máx}_{\mathcal{L}}(\alpha)$. Con lo que demostramos que la sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a A y, por lo tanto, $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}} \subset \text{lím inf } \mathcal{Q}_n$.$\square$

6.11 Lema. Sean X un continuo, $\sigma : C(X) \to [0, 1]$ una función tamaño, $r \in [0, 1]$ y $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(r)$ un nivel tamaño. Sea $\{\mathcal{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de niveles de Whitney descritos en la Definición 6.9. Si $B \in \text{lím sup } \mathcal{Q}_n$ y X es conexo en pequeño en cada elemento de B, entonces $B \in \mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $B \in \text{lím sup } \mathcal{Q}_n$. Si $r = 1$, tenemos que $\mathcal{Q}_n = \mu^{-1}(1 + \frac{1}{2^n}) = \{X\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Lo que implica que $B = X$ y, por lo tanto, $B \in \mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$. Supongamos que $r < 1$. Entonces $B \in \text{lím }_{n\to\infty}\mathcal{C}_n$ pues $\mathcal{Q}_n \subset \mathcal{C}_n$

y $\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. También sabemos que $B \in fr(\sigma^{-1}([0,r]))$, de lo contrario, B no estaría en el límite superior de la sucesión $\{\mathcal{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para demostrar lo anterior, supongamos que $B \notin fr(\sigma^{-1}([0,r]))$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon^H(B) \subset \sigma^{-1}([0,r])$ o $V_\epsilon^H(B) \subset C(X) \setminus \sigma^{-1}([0,r])$. Supongamos primero que $V_\epsilon^H(B) \subset \sigma^{-1}([0,r])$. Entonces si $A \in V_\epsilon^H(B) \cap \mathcal{Q}_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tenemos que, $\mu_n(A) = r + \frac{1}{2^n}$, lo cual es una contradicción pues $A \neq X$ y $\sigma(A) \leq r$. Ahora, supongamos que $V_\epsilon^H(B) \subset C(X) \setminus \sigma^{-1}([0,r])$. Por lo tanto, $cl(V_{\frac{\epsilon}{2}}^H(B)) \subset C(X) \setminus \sigma^{-1}([0,r])$, lo que implica que $a = \text{mín}\{\sigma(A) - r : A \in cl(V_\epsilon^H(B))\} > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < a$. Entonces $\mathcal{Q}_m \cap V_{\frac{\epsilon}{2}}^H(B) = \emptyset$ para todo $m \geq N$, lo que implica que $B \notin \text{lím sup}\mathcal{Q}_n$. Así, $B \in fr(\sigma^{-1}([0,r]))$.

Por otro lado, dado que X es conexo en pequeño en cada elemento de B, podemos encontrar $J_n \in C(X)$ tal que $B \subset int\ (J_n)$ y $J_n \in V_{\frac{1}{n}}^H(B)$. Como $B \subset int\ (J_n)$, $\langle int\ (J_n) \rangle_1 \cap \mathcal{Q}_{n'} \neq \emptyset$ para algun $n' \in \mathbb{N}$.

Como $\mu_{n'}(B) = \sigma(B) + \frac{\mu(B)}{2^{n'}} < r + \frac{1}{2^{n'}}$, existe $\epsilon_{n'} > 0$ tal que $\mu_{n'}(R) < r + \frac{1}{2^{n'}}$ para todo $R \in V_{\epsilon_{n'}}^H(B)$. Sea $K_{n'} \in C(X)$ tal que $d_H(K_{n'}, B) < \epsilon_{n'}$, $K_{n'} \subset J_n$ y que $B \subset int\ (K_{n'})$. Entonces $K_{n'}$ es conexo en pequeño en cada punto de B, además, $\mu_{n'}(K_{n'}) < r + \frac{1}{2^{n'}}$. Como $\langle J_n \rangle_1 \cap \mathcal{Q}_{n'} \neq \emptyset$, tenemos que si β es un arco de orden de $K_{n'}$ a J_n (el arco existe por [47, Teorema 1.8]), entonces $\beta \cap \mathcal{Q}_{n'} \neq \emptyset$. Sea D_1 un continuo tal que $K_{n'} \subset D_1 \subset J_n$ y $\mu_{n'}(D_1) = r + \frac{1}{2^{n'}}$, D_1 es conexo en pequeño en cada elemento de B pues $K_{n'} \subset D_1$. Haciendo un procedimiento igual pero ahora con $C(D_1)$ y con los niveles $\mathcal{Q}_n \cap C(D_1)$, podemos encontrar D_2 con las propiedades de que $B \subset int(D_2) \subset D_2 \subset D_1$, D_2 es conexo en pequeño en cada punto de B y $\mu_{n''}(D_2) = r + \frac{1}{2^{n''}}$ para alguna $n'' \in \mathbb{N}$. Repitiendo el proceso, encontramos una sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ con las siguientes propiedades:

1. $D_{n+1} \subset D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
2. $B \subset int(D_n) \subset D_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
3. D_n es conexo en pequeño en cada punto de B para todo $n \in \mathbb{N}$,
4. $\mu_l(D_n) = r + \frac{1}{2^l}$ para alguna $l \in \mathbb{N}$,
5. $\lim_{n\to\infty} d_H(D_n, B) = 0$.

Por como está definida la sucesión $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} D_n = B$. Ahora, sólo resta encontrar un arco de orden θ para el cual $B = \text{Máx}_{\mathcal{L}}(\theta)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\theta_n : [1 + \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^{n-1}}] \to C(X)$ un arco de orden de D_n a D_{n-1}, en donde $D_0 = X$. También, dado un punto $y \in B$, sea $\alpha : [0, 1] \to C(X)$ un arco de orden tal que $\alpha(0) = \{y\}$ y $\alpha(1) = B$. Definimos $\theta : [0, 2] \to C(X)$ como sigue:

$\theta(t) = \theta_n(t)$ si $t \in [1 + \frac{1}{2^n}, 1 + \frac{1}{2^{n-1}}]$ y $\theta(t) = \alpha(t)$ si $t \in [0, 1]$. θ es continua, pues si $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a 1, entonces la sucesión $\{\theta(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\theta(1)$. Por lo tanto, θ es un arco de orden que va de $\{y\}$ a X para el cual $B = \text{Máx}_{\mathcal{L}}(\theta)$. Con esto concluímos que $B \in \mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$.$\square$

6.12 Teorema. Si X es un continuo localmente conexo, entonces cada nivel de tamaño contiene un conjunto que es el límite de una sucesión de niveles de Whitney.

Demostración. Supongamos que X es un continuo localmente conexo. Sean $\sigma : C(X) \to \mathbb{R}$ una función tamaño y $\mathcal{L} = \sigma^{-1}(r)$

un nivel tamaño. Sea $\{\mathcal{Q}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de nivelets de Whitney definidos como en la Definición 6.9. Por el Lema 6.10, tenemos que $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}} \subset \text{lím inf } \mathcal{Q}_n$. Por el Lema 6.11 y el hecho de que X es localmente conexo, obtenemos que lím sup $\mathcal{Q}_n \subset \mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}}$. Así, $\mathcal{Q}_{X,\mathcal{L}} = \text{lím}_{n\to\infty}\mathcal{Q}_n$ (Lema 1.56).$\square$

Referencias

[1] R. H. Bing, *Partitioning a set*, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 1101-1110.

[2] K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Mat. 17 (1931), 152-170.

[3] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monogr. Mat. 44 (1967).

[4] K. Borsuk and S. Mazurkiewicz, *Sur l'hyperspace d'un continu*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, 24 (1931), 149-152.

[5] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[6] J. J. Charatonik, A. Illanes and S. Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, Houston J. Math., 28 (2002), 781-805.

[7] J. J. Charatonik and S. Macías, *Mappings of some hyperspaces*, JP Jour. Geometry & Topology, 4(1) (2004), 53-80.

[8] J. H. Carruth, *A note on partially ordered compacta*, Pacific J. Math. 24 (1968), 229-231.

[9] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. Math., Vol. 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 1976.

[10] D. W. Curtis and R.M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, Fund. Math., 101 (1978), 19-38.

[11] C. H. Dowker, *Mapping Theorems for Non-Compact Spaces*, American J. of Math., Vol. 69, No. 2 (Apr.,1947), 200-242.

[12] B. Espinoza, *Whitney preserving functions*, Topology Appl., 126 (2002), 351-358.

[13] Carl Eberhart and S. B. Nadler, Jr., *The dimension of certain hyperspaces*, Bull. Pol. Acad. Sci., 19 (1971), 1027-1034.

[14] T. Ganea, *Symmetrische potenzen topologischer räume*, Math. Natch, 11 (1954), 305-316.

[15] J. T. Goodykoontz and S. B. Nadler, Jr., *Whitney levels in hyperspaces of Peano continua*, Trans. Amer. Math. Soc., 274 (1982), 671-694.

[16] J. Grispolakis and E. D. Tymchatyn, *Irreducible continua with nondegenerate end-tranches and arcwise accessibility in hyperspaces*, Fund. Math., 100 (1980), 117-130.

[17] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., 21 (1997), 239-250.

[18] H. Hosokawa, *Strong size levels of $C_n(X)$*, Houston J. Math., 37 (2011), 955-965.

[19] S. Hu, *Theorey of Rectracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, Mich., 1965.

[20] A. Illanes, *Multicoherence of Whitney levels*, Topology Appl., 68 (1996), 251-265.

[21] A. Illanes, *Countable closed set aposyndesis and hyperspaces*, Houston J. Math., (1997), 57-64.

[22] A. Illanes, *A model for the hyperspace* $C_2(\mathcal{S}^1)$, Q & A in General Topology, 22 (2004), 117-130.

[23] A. Illanes, S. Macías and S. B. Nadler, Jr., *Symmetric products and $\mathcal{Q}$-manifolds*, Geometry and Topology in Dynamics, Contemporary Math. Series of Amer. Math. Soc., Vol. 246, 1999, Providence, RI, 137-141

[24] J. W. Jaworowski, *Symmetric products of ANR's*, Math. Ann., 192 (1971), 173-176.

[25] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22-36.

[26] R. J. Koch and I. S. Krule, *Weak cutpoint ordering on Hereditarily unicoherent continua*, Louisiana State University, November 12, 1959, 679-681.

[27] S. Macías, *On Symmetric Products of Continua*, Topology and its Applications 92 (1999) 173-182.

[28] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc., 22 (1997), 281-296.

[29] S. Macías, *On the hyperspaces* $C_n(X)$ *of a continuum* X, Topology Appl., 109 (2001), 237-256.

[30] S. Macías, *On the hyperspaces* $C_n(X)$ *of a continuum* X, II, Topology Proc., 25 (2000), 255-276.

[31] S. Macías, *On arcwise accesibility in hyperspaces*, Topology Proc., 26 (2001-2002), 247-254.

[32] S. Macías, *Connectedness of the hyperspace of closed subsets with at most n components*, Q & A in General Topology, 19 (2001), 133-138.

[33] S. Macías, *Hiperespacios y productos simétricos*, Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Comunicaciones #27 (2000), 211-223.

[34] S. Macías, *Fans whose hyperspaces are cones*, Topology Proc., 27 (2003), 217-222.

[35] S. Macías, *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[36] S. Macías, *Deformation retracts and Hilbert cubes in n-fold hyperspaces*, Topology Proc., 40 (2012), 215-226.

[37] S. Macías and Sam B. Nadler, Jr., *n-fold hyperspaces, cones and products*, Topology Proc., 26 (2001-2002), 255-270.

[38] S. Macías and Sam B. Nadler, Jr., *Smoothness in n-fold hyperspaces*, Glasnik Mat., 37(57) (2002), 365-373.

[39] S. Macías and Sam B. Nadler, Jr., *Z-Sets in hyperspaces* Q & A in General Topology, 19 (2001), 227-241.

[40] S. Macías and C. Piceno, *Strong Size Properties*, Glasnik Mat., 48(68) (2013), 103-114.

[41] S. Macías and C. Piceno, *More on strong size properties*, manuscrito mandado para su publicación.

[42] S. Mardešić and J. Segal, *ϵ-mappings onto polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc., 109 (1963), 146-164.

[43] E. E. Moise, *Grille Decomposition and Convexification Theorems for Compact Locally Connected Continua*, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 1111-1121.

[44] J. R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.

[45] Sam B. Nadler, Jr., *Arcwise accessibility in hyperspaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 138 (1976), 1-29.

[46] Sam B. Nadler, Jr., *A Characterization of locally connected continua by hyperspace retractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 67, (1977), 167-176.

[47] Sam B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, Basel, 1978. Reimpreso en: Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Textos 33, 2006.

[48] Sam B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, an Introduction*, Pure and Applied Mathematics 158, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[49] Sam B. Nadler Jr., Thelma West, *Size levels for arcs*, Fundamenta Mathematicae, (1992) 243-255.

[50] A. Petrus, *Contractibility of Whitney continua in $\mathcal{C}_n(X)$*, General Topology Appl., 9 (1978), 275-288.

[51] J. T. Rogers, Jr., *Applications of a Vietoris-Begle Theorem for Multi-valued Maps to the Cohomology of Hyperspaces*, Michigan Math. J. 22 (1975) 315-319.

[52] J. Segal *Hyperspaces of the inverse limit space*, Proc. Amer. Math. Soc., 50 (1962), 237-248.

[53] H. Toruńczyk, *On CE-images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fund. Math. 106 (1980), 31-40

[54] A. H. Wallace, *Algebraic topology, homology and cohomology*, W. A. Benjamin Inc., 1970.

[55] L. E. Ward, *Extending Whitney maps*, Pacific J. Math., 93 (1981), 465-469.

[56] L. E. Ward, *A note on Whitney maps*, Canad. Math. Bull., 23 (1980), 373-374.

[57] J. T. Whyburn, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.,Vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1942

[58] M. Wojdisławski, *Rétractes Absoluts et Hyperespaces des Continus*, Fund. Math., 32 (1939), 184-192.

Índice alfabético