UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

MÓDULOS CÍCLICOS Y ESTRUCTURA DE ANILLOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO ACADÉMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

CARLOS HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ RÍOS MONTES

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D.F. FEBRERO, 2015

Módulos Cíclicos y Estructura de Anillos

Introducción

El los primeros cinco capítulos de este trabajo proporcioné los resultados de la teoría de anillos y módulos, que use en el desarrollo del capítulo principal, el capítulo 6. El tratamiento de estos primeros capítulos no pretende ser exhaustivo.

En las primeras tres secciones del capítulo 1, proporcioné los fundamentos de la teoría de anillos por razones de completitud y para dar a los lectores rápido acceso a los temas en la teoría de anillos que pudieran requerir para refrescar su memoria. Una introducción a las propiedades fundamentales de los módulos (unitarios), submódulos y homomorfismos de módulos también son proporcionados en este capítulo.

En el capítulo 2 introduje tres conceptos que son ubicuos en álgebra abstracta: productos directos, sumas directas y módulos libres.

Generar y cogenerar módulos, subgeneradores y condiciones de cadena, forman la esencia del capítulo 3.

El capítulo 4 trata con módulos inyectivos y cápsulas inyectivas que son los módulos de interés del capítulo 6.

En el capítulo 5 ví algunas propiedades del radical y el zoclo de módulos.

El capítulo 6 abre con los anillos Villamayor (V-anillos), es decir anillos sobre los cuales cada módulo simple es inyectivo. Hablé de los *débilmente V-anillos*, es decir, anillos sobre los cuales cada módulo simple es inyectivo relativo a módulos cíclicos propios. Después vi anillos cada uno de cuyos módulos simples es Σ-inyectivo. Por último, estudié anillos sobre los cuales cada módulo cíclico tiene la propiedad de que su cápsula inyectiva es Σ-inyectiva.

Índice general

Capítulo 1

Propiedades Básicas de Anillos y Módulos

Las primeras tres secciones de este capítulo contienen un breve repaso de las propiedades básicas de los anillos y sus homomorfismos también como las definiciones y terminología que se ocuparán a lo largo de la tesis. Estas secciones son presentadas en orden para proporcionar una transición suave al concepto de módulo.

1. Anillos

DEFINICIÓN 1.1. Un *anillo* R es un conjunto no vacío junto con dos operaciones binarias $+$ y $\cdot$, llamada *adición* y *multiplicación*, respectivamente, tal que las siguientes condiciones se cumplen:

R1. R *junto con la adición forma un grupo abeliano aditivo*.

R2. *La multiplicación es asociativa*: $a(bc) = (ab)c$ para todo $a, b, c \in R$.

R3. *La multiplicación es distributiva sobre la adición a la izquierda y a la derecha*: $a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$ para todo $a, b, c \in R$.

Si $ab = ba$ para todo $a, b \in R$, entonces R es llamado un *anillo conmutativo* y si existe un elemento necesariamente único $1 \in R$ tal que $a1 = 1a = a$ para todo $a \in R$, entonces R es un *anillo con unidad*. El elemento 1 es la *identidad multiplicativa* de R, denotada por 1_R si existe una necesidad de hacer hincapié del anillo. Si R es un anillo con identidad y a es un elemento no cero de R, entonces un elemento $b \in R$ (debería existir) es llamado un *inverso derecho* (*izquierdo*) para a si $ab = 1$ ($ba = 1$). Un elemento que es un inverso derecho y un inverso izquierdo para a es llamado un *inverso multiplicativo de* a, y será denotado por a^{-1}. Si $a \in R$ tiene un inverso multiplicativo en R, entonces a es llamado un *elemento invertible* de R o una *unidad* en R.

Un ejemplo trivial de un anillo con identidad es el anillo cero $R = \{0\}$, donde 0 es ambos la identidad aditiva y la identidad multiplicativa de R. Para eliminar este anillo de nuestras consideraciones, suponemos de este punto en adelante que todos los anillos tendrán una identidad $1 \neq 0$. A causa de esta suposición, cada anillo considerado tendrá al menos dos elementos y la expresión "para todos los anillos" significará "para todos los anillos con identidad."

DEFINICIÓN 1.2. Un elemento $0 \neq a \in R$ es un *divisor izquierdo* (*derecho*) *de cero* si existe un elemento diferente de cero $b \in R$ tal que $ab = 0$ ($ba = 0$). Un elemento diferente de cero $a \in R$ será llamado un *divisor de cero* si existe un elemento diferente de cero $b \in R$ tal que $ab = ba = 0$. Un anillo R en el cual cada elemento diferente de cero tiene un inverso multiplicativo es un *anillo con división*. Un anillo con división conmutativo es un *campo*. Un anillo conmutativo que no tiene divisores de cero es un *dominio entero*. Si S es un subconjunto no vacío de un anillo R, entonces S es llamado un *subanillo* de R si S es un anillo bajo las operaciones de adición y multiplicación sobre R. Debido a nuestra suposición de que todos los anillos tengan una unidad, si S es un subanillo de R, entonces S debe tener una identidad y también requerimos que $1_S = 1_R$ antes de que podamos decir que S es un subanillo de R.

Es fácil ver que cada anillo con división está libre de divisores izquierdos y derechos de cero , así cada campo es un dominio entero. El dominio entero $\mathbb{Z}$ de los enteros muestra que el inverso es falso. Sin embargo, cada anillo finito sin divisores de cero es un anillo con división.

Ejemplos

1. (a) Si $\{R_\alpha\}_\Delta$ es una familia indexada de anillos, entonces $\prod_\Delta R_\alpha$ es un anillo bajo la *adición componente a componente*,

$$(a_\alpha) + (b_\alpha) = (a_\alpha + b_\alpha),$$

y *multiplicación componente a componente*

$$(a_\alpha)(b_\alpha) = (a_\alpha b_\alpha),$$

El anillo $\prod_\Delta R_\alpha$ es llamado el *anillo producto directo* de $\{R_\alpha\}_\Delta$. Puesto que cada R_α tiene una identidad, $\prod_\Delta R_\alpha$ tiene una identidad (1_α), donde cada 1_α es la identidad de R_α. $\prod_\Delta R_\alpha$ es conmutativo si y solo si cada R_α es conmutativo, pero $\prod_\Delta R_\alpha$ nunca es un dominio entero aun si cada R_α lo es. Por ejemplo, $\mathbb{Z}$ es un dominio entero, sin embargo $(a, 0)(0, b) = (0, 0)$ está en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{Z} \times 0$ es un anillo con identidad $(1, 0)$ bajo la adición coordenada a coordenada y multiplicación coordenada a coordenada y $\mathbb{Z} \times 0 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sin embargo, no consideramos a $\mathbb{Z} \times 0$

para ser un subanillo de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puesto que $id_{\mathbb{Z}\times 0} = (1,0) \neq (1,1) = id_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$.

2. **Anillos de Matrices.** El conjunto $\mathbb{M}_n(R)$ de todas las $n \times n$ matrices cuyas entradas están en R es un anillo no conmutativo bajo la adición y multiplicación de matrices. Además, $\mathbb{M}_n(R)$ tiene divisores de cero, así no es un dominio entero aun si R es un dominio. $\mathbb{M}_n(R)$ es mencionado como el anillo de las $n \times n$ matrices sobre R. Los elementos de $\mathbb{M}_n(R)$ serán denotados por (a_{ij}), donde a_{ij} representa la entrada en la i-ésima fila y la j-ésima columna.
3. **Anillos de Matrices Triangulares.** Considerar el anillo de matrices $\mathbb{M}_n(R)$ del Ejemplo 2. Una matriz $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ es llamada *matriz triangular superior* si $a_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Si $\mathbb{T}_n(R)$ denota el conjunto de las matrices triangulares superiores, entonces $\mathbb{T}_n(R)$ es un subanillo de $\mathbb{M}_n(R)$. Si una matriz triangular superior tiene ceros en las entradas de la diagonal entonces la matriz es llamada una *matriz triangular superior estrictamente*.
4. **Anillo de los Enteros Módulo n.** Sea $\mathbb{Z}_n$ el conjunto de clases de equivalencia $[a]$, $a \in \mathbb{Z}$, determinada por la relación de equivalencia definida sobre $\mathbb{Z}$ por $a \equiv b$ mod n. Entonces $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ es un anillo con identidad bajo las operaciones
$$[a] + [b] = [a+b]$$
$$[a][b] = [ab].$$
$\mathbb{Z}_n$, es llamado el *anillo de los enteros módulo* n, tendrá divisores de cero si n es un entero compuesto y $\mathbb{Z}_n$ es un campo si y solo si n es un número primo.
5. **Divisores Izquierdos de Cero No Necesitan Ser Divisores Derechos de Cero .** Considerar el anillo de matrices
$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & [b] \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{Z} \text{ y } [b] \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$
Entonces
$$\begin{pmatrix} 2 & [0] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & [1] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & [0] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
y sin embargo
$$\begin{pmatrix} 0 & [1] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & [0] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & [1] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí, $\begin{pmatrix} 2 & [0] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es un divisor izquierdo de cero , pero no un divisor derecho de cero .

6. **El Anillo Opuesto.** Si R es un anillo, entonces podemos construir un anillo nuevo llamado el *anillo opuesto* de R, denotado por R^{op}. Como conjuntos, $R = R^{op}$ y las estructuras aditivas sobre ambos anillos son las mismas. La multiplicación $\circ$ es definida sobre R^{op} por $a \circ b = ba$, donde ba es la multiplicación en R. Claramente, si R es conmutativo, entonces R y R^{op} son el mismo anillo.
7. **Anillos de Endomorfismos.** Si G es un grupo abeliano aditivo y $End_{\mathbb{Z}}(G)$ denota el conjunto de todos los homomorfismos de grupo $f : G \to G$, entonces $End_{\mathbb{Z}}(G)$ es un anillo con identidad bajo la adición de funciones y la composición de funciones. La identidad aditiva de $End_{\mathbb{Z}}(G)$ es el homomorfismo cero y la identidad multiplicativa es el homomorfismo identidad $id_G : G \to G$. $End_{\mathbb{Z}}(G)$ es llamado el *anillo de endomorfismos* de G.

2. Ideales Izquierdos y Derechos

Ahora dirigimos nuestra atención a los subgrupos de un anillo que son cerrados bajo la multiplicación por elementos del anillo.

DEFINICIÓN 1.3. Un subgrupo aditivo A del grupo aditivo de R es llamado un *ideal derecho* (*izquierdo*) de R si $ab \in A$ ($ba \in A$) para todo $a \in A$ y todo $b \in R$. Si I es un ideal izquierdo y derecho de R, entonces I es un *ideal* de R. Un ideal derecho (Un ideal izquierdo, Un ideal) A de R es llamado *propio* si $A \subsetneq R$. Un ideal derecho propio (ideal izquierdo propio, ideal propio) $\mathfrak{m}$ de R es un ideal derecho máximo (ideal izquierdo máximo, ideal máximo) si siempre que A sea un ideal derecho (ideal izquierdo, ideal) de R tal que $\mathfrak{m} \subseteq A \subseteq R$, entonces $\mathfrak{m} = A$ o $A = R$. Un ideal derecho (izquierdo) A de R es llamado *ideal derecho (izquierdo) mínimo* si $\{0\}$ y A son los únicos ideales derechos (izquierdos) de R contenidos en A. El símbolo 0 será usado para denotar ambos el *ideal cero* y la identidad aditiva de R. El contexto de la discusión indicará cual está siendo considerado. El ideal derecho $aR = \{ab/b \in R\}$ de R es el *ideal derecho principal* de R generado por a. Un ideal principal aR en un anillo conmutativo R frecuentemente será denotado por (a). Un ideal propio $\mathfrak{p}$ de un anillo conmutativo R es llamado un *ideal primo* si siempre que $a, b \in R$ son tal que $ab \in \mathfrak{p}$, entonces $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Finalmente un anillo conmutativo R es llamado un *anillo local* si tiene un ideal máximo $\mathfrak{m}$ único.

Ejemplos

1. **Anillos Simples.** Cada anillo tiene al menos dos ideales, a saber el ideal cero y el anillo R. Si estos son los únicos ideales de R, entonces R es llamado un *anillo simple*. Cada anillo con división es un anillo simple.
2. **Ideales Derechos e Izquierdos en un Anillo de Matrices.** Si $\mathbb{M}_n(R)$ es el anillo de las $n \times n$ matrices sobre R, entonces para cada entero k, $1 \leq k \leq n$, sea $c_k(R)$ el conjunto de matrices k-ésima columna (a_{ij}) definidas por $a_{ij} = 0$ si $j \neq k$. Entonces $c_k(R)$ es solo el conjunto de todas las matrices con entradas arbitrarias de R en la k-ésima columna y ceros en otra parte. El conjunto $c_k(R)$ es un ideal izquierdo pero no un ideal derecho de $\mathbb{M}_n(R)$. Igualmente, para cada k, $1 \leq k \leq n$, el conjunto $r_k(R)$ de matrices k-ésima fila (a_{ij}) con $a_{ij} = 0$ si $i \neq k$ es un ideal derecho pero no ideal izquierdo de $\mathbb{M}_n(R)$. Si D es un anillo con división, entonces para cada k, $c_k(D)$ es un ideal izquierdo mínimo de $\mathbb{M}_n(R)$ y $r_k(R)$ es un ideal derecho mínimo de $\mathbb{M}_n(R)$. Además, uno puede mostrar que si $\bar{I}$ es un ideal de $\mathbb{M}_n(R)$, entonces existe un ideal determinado únicamente I de R tal que $\bar{I} = \mathbb{M}_n(I)$. Se sigue que si R es un anillo simple, entonces $\mathbb{M}_n(R)$ es un anillo simple. De aquí, si D es un anillo con división, entonces $\mathbb{M}_n(D)$ es un anillo simple. Sin embargo, $\mathbb{M}_n(D)$ no es un anillo con división puesto que $\mathbb{M}_n(D)$ tiene divisores de cero.
3. **Anillos de Ideales Principales.** Cada ideal del anillo $\mathbb{Z}$ es un ideal principal y un ideal (p) de $\mathbb{Z}$ es primo si y solo si es un ideal máximo si y solo si p es un número primo. Un anillo conmutativo en el cual cada ideal es principal es llamado un *anillo ideal principal* y un dominio entero con esta propiedad es un *dominio ideal principal*.
4. El anillo $\mathbb{Z}_{p^n}$, donde p es un número primo y n es un entero positivo es un anillo local. Los ideales de $\mathbb{Z}_{p^n}$ son linealmente ordenados y $([p])$ es el ideal máximo único de $\mathbb{Z}_{p^n}$. Un campo también es un anillo local con ideal máximo 0.
5. **Sumas de Ideales Derechos.** Si $\{A_\alpha\}_\Delta$ es una familia de ideales derechos de R, entonces

$$\sum_\Delta A_\alpha = \Big\{ \sum_\Delta a_\alpha \ / \ a_\alpha \in A_\alpha \ \text{para todo} \ \alpha \in \Delta \Big\}$$

es un ideal derecho de R. Una observación similar se cumple para ideales izquierdos e ideales de R.

6. Si S es un subconjunto no vacío de R, entonces $ann_r(S) = \{a \in R/Sa = 0\}$ es un ideal derecho de R llamado el *anulador derecho* de S. El *anulador izquierdo* $ann_l(S) = \{a \in R/aS = 0\}$ de S es un ideal izquierdo de R. También se sigue que $ann_r(S) = \{a \in R/Sa = 0\}$ ($ann_l(S) = \{a \in R/aS = 0\}$) es un ideal de R si A es un ideal derecho (izquierdo) de R.

PROPOSICIÓN 1.1. *Las siguientes afirmaciones se cumplen en cualquier anillo R.*

(1) Sean A y B subconjuntos no vacíos de R. Si B es un ideal derecho (si A es un ideal izquierdo) de R, entonces

$$AB = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i / a_i \in A, b_i \in B \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 1 \Big\}$$

es un ideal derecho (un ideal izquierdo) de R.

(2) Para cualquier $r \in R$,

$$RrR = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i r b_i / a_i, b_i \in R \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n,\ n \geq 1 \Big\}$$

es un ideal de R.

Notación. En este punto es importante indicar diferencias de notación que serán usadas a través de la tesis. Si A es un ideal derecho de R y $n \geq 2$ es un entero, entonces $A^n = AA \cdots A$ denotará el conjunto de todas las sumas finitas de productos $a_1 a_2 \cdots a_n$ de n elementos de A. La notación $A^{(n)}$ será usada para $A \times A \times \cdots \times A$, con n factores de A. A^n es un ideal derecho de R y $A^{(n)}$ es un R-módulo, un concepto definido más adelante.

La siguiente proposición frecuentemente es mencionada como el lema de Krull. La demostración involucra nuestra primera aplicación del lema de Zorn.

PROPOSICIÓN 1.2 (Krull). *Cada ideal derecho propio (ideal izquierdo, ideal) A de un anillo R está contenido en un ideal derecho máximo (ideal izquierdo máximo, ideal máximo) de R.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A un ideal derecho propio de R y suponer que $\mathcal{S}$ es la colección de ideales derechos B de R que contienen a A. Entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$ puesto que $A \in \mathcal{S}$. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{S}$, entonces $\bar{A} = \bigcup_{\mathcal{C}} B$ es un ideal derecho de R que contiene a A. Puesto que R tiene una identidad, $\bar{A} \neq R$ y así $\bar{A}$ es una cota superior en $\mathcal{S}$ para $\mathcal{C}$. De esta manera, $\mathcal{S}$ es inductivo y el lema de Zorn indica que $\mathcal{S}$ tiene un elemento máximo, digamos $\mathfrak{m}$, el cual, por la definición de $\mathcal{S}$, contiene a A. Si $\mathfrak{m}$ no es un ideal derecho máximo de R, entonces existe un ideal derecho B de R tal que $\mathfrak{m} \subsetneq B \subsetneq R$. Pero B es entonces un ideal derecho propio de R que contiene a A y esto contradice la maximalidad de $\mathfrak{m}$ en $\mathcal{S}$. Por lo tanto, $\mathfrak{m}$ es un ideal derecho máximo de R. Una demostración similar se cumple si A es un ideal izquierdo o un ideal de R. $\square$

COROLARIO 1.1. *Cada anillo R tiene al menos un ideal derecho máximo (ideal izquierdo máximo, ideal máximo).*

Anillos Cocientes

DEFINICIÓN 1.4. Si I es un ideal de R, entonces R/I, el conjunto de clases laterales de I en R, es un anillo bajo la adición de clases laterales y la multiplicación de clases laterales definidas por

$$(a+I)+(b+I)=(a+b)+I \quad \text{y} \quad (a+I)(b+I)=ab+I.$$

R/I es llamado el *anillo factor* (o *anillo cociente*) de R formado al factorizar I. La identidad aditiva de R/I usualmente será denotada por 0 en lugar de $0+I$ y la identidad multiplicativa de R/I es $1+I$.

Observación. Puesto que el anillo cero ha sido eliminado de nuestra discusión por suposición de que todos los anillos tengan una identidad $1 \neq 0$, no permitimos $I=R$ cuando se forma el anillo factor R/I, al menos que esto pudiera surgir naturalmente en nuestra discusión.

La siguiente proposición bien conocida demuestra la conexión entre ideales primos (máximos) en un anillo conmutativo y los dominios enteros (campos).

PROPOSICIÓN 1.3. *Si R es un anillo conmutativo, entonces:*

(1) $R/\mathfrak{p}$ es un dominio entero si y solo si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R.
(2) $R/\mathfrak{m}$ es un campo si y solo si $\mathfrak{m}$ es un ideal máximo de R.

COROLARIO 1.2. *Si R es un anillo conmutativo, entonces cada ideal máximo de R es primo.*

DEFINICIÓN 1.5. Un anillo R es llamado un *anillo regular* (*von Neumann*) si para cada $x \in R$ existe un $y \in R$ tal que $x = xyx$.

Por ejemplo, cualquier producto directo de anillos con división es regular.

TEOREMA 1.1. *Para un anillo R, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es regular von Neumann.*
2. *Cada ideal derecho (izquierdo) principal de R es generado por un idempotente.*
3. *Cada ideal derecho (izquierdo) finitamente generado de R es generado por un idempotente.*

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$ Dado $x \in R$, existe $y \in R$ tal que $xyx = x$. Entonces xy es un idempotente en R tal que $xyR = xR$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Basta mostrar que $xR + yR$ es principal para cualquier $x, y \in R$. Ahora $xR = eR$ para algún idempotente $e \in R$, y puesto que $y - ey \in xR + yR$ vemos que $xR + yR = eR + (y - ey)R$. Existe un idempotente $f \in R$ tal que $fR = (y - ey)R$, y notamos que $ef = 0$. Consecuentemente, $g = f - fe$ es un idempotente ortogonal a e. Observando que $fg = g$ y $gf = f$, vemos que $gR = fR = (y - ey)R$, donde $xR + yR = eR + gR$. Ya que e y g son ortogonales, concluimos que $xR + yR = (e + g)R$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Dado $x \in R$, existe un idempotente $e \in R$ tal que $eR = xR$. Entonces $e = xy$ para algún $y \in R$, y $x = ex = xyx$. $\square$

3. Homomorfismos de Anillos

Un concepto fundamental en el estudio de los anillos es la de un homomorfismo de anillos. Su importancia radica en el hecho de que un homomorfismo de anillos $f : R \to S$ proporciona la transferencia de información algebraica entre los anillos R y S.

DEFINICIÓN 1.6. Si R y S son anillos, no necesariamente con identidades, entonces una función $f : R \to S$ es un *homomorfismo de anillos* si $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y $f(ab) = f(a)f(b)$ pata todo $a, b \in R$. La función identidad $id_R : R \to R$ es un homomorfismo de anillos llamado el *homomorfismo identidad*. Un homomorfismo de anillos que es inyectivo y suprayectivo es un *isomorfismo de anillos*. Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos suprayectivo, entonces S es llamado una *imagen homomorfa* de R. Si f es un isomorfismo, entonces decimos que R y S son *anillos isomorfos* y escribimos $R \cong S$. Si R y S tienen identidades y $f(1_R) = 1_S$, entonces f es llamado un *homomorfismo de anillos preservando identidad*.

Ahora suponemos que todos los homomorfismos de anillos preservan identidad. Al menos que se indique lo contrario, esta suposición se mantendrá a través del resto de la tesis.

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos. Entonces:*

(1) $f(0_R) = 0_S$ y $f(-a) = -f(a)$ para cada $a \in R$.
(2) Si $a \in R$ tiene un inverso multiplicativo en R, entonces $f(a)$ tiene un inverso multiplicativo en S y $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

PROPOSICIÓN 1.5. *Si $f : R \to S$ un homomorfismo de anillos, entonces:*

(1) Si R' es un subanillo de R, entonces $f(R')$ es un subanillo de S.
(2) Si S' es un subanillo de S, entonces $f^{-1}(S')$ es un subanillo de R.
(3) Si f es suprayectiva y A es un ideal derecho (un ideal izquierdo, un ideal) de R, entonces $f(A)$ es un ideal derecho (un ideal izquierdo, un ideal) de S.
(4) Si B es un ideal derecho (un ideal izquierdo, un ideal) de S, entonces $f^{-1}(B)$ es un ideal derecho (un ideal izquierdo, un ideal) de R.

DEFINICIÓN 1.7. Si I es un ideal de R, entonces la función $\eta : R \to R/I$ definido por $\eta(a) = a + I$ es un homomorfismo de anillos suprayectivo llamado la *suryección canónica* o el *homomorfismo natural*. Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos, entonces el conjunto $Nu(f) = \{a \in R / f(a) = 0\}$ es el *núcleo* de f.

La siguiente proposición es una de las piedras angulares de la teoría de anillos. La parte (3) de la proposición muestra que cada imagen homomorfa de un anillo R es, hasta isomorfismo, un anillo factor de R.

PROPOSICIÓN 1.6 (Primer Teorema de Isomorfismo para Anillos). *Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos, entonces*

(1) $Nu(f)$ es un ideal de R.
(2) f es inyectiva si y solo si $Nu(f) = 0$, y
(3) $R/Nu(f) \cong f(R)$.

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones de (1) y (2) son directas. (3) Sea $\varphi : R/Nu(f) \to S$ definido por $\varphi(a + Nu(f)) = f(a)$. Si $a+Nu(f) = b+Nu(f)$ entonces $a-b \in Nu(f)$, o $f(a)-f(b) = 0$, así φ está bien definido. En seguida, φ es un homomorfismo. Escribiendo $\bar{a}$ para $a + Nu(f)$, tenemos

$$\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\overline{a + b}) = f(a + b) = f(a) + f(b) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b}).$$

Similarmente, $\varphi(\bar{a}\bar{b}) = \varphi(\bar{a})\varphi(\bar{b})$. Claramente, φ es una función sobre. Mostramos que φ es 1-1. Sea $f(a) = f(b)$. Entonces $f(a-b) = 0$, así $a - b \in Nu(f)$. Pero entonces $\bar{a} = \bar{b}$. Esto muestra que φ es 1-1. De aquí, $R/Nu(f) \cong Imf$. $\square$

COROLARIO 1.3. *Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos suprayectivo, entonces $R/Nu(f) \cong S$.*

Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos inyectivo, entonces $f(R)$ es un subanillo de S que es isomorfo a R. Cuando este es el caso decimos que R se *encaja* en S y que S contiene una *copia* de R. Notar también que si f es un isomorfismo, entonces se sigue que la función inversa $f^{-1} : S \to R$ también es un isomorfismo de anillos.

TEOREMA 1.2. *Si K es un ideal en un anillo R, entonces cada ideal (ideal derecho o izquierdo) en R/K es de la forma A/K, donde A es un ideal (ideal derecho o izquierdo) en R conteniendo a K.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\eta : R \to R/K$ el homomorfismo natural de R sobre R/K. Entonces cualquier ideal (ideal derecho o izquierdo) en R/K es de la forma $\eta(A)$, donde A es un ideal (ideal derecho o izquierdo) en R conteniendo $Nu(\eta) = K$. Entonces K también es un ideal en A (considerado como un anillo de él mismo), y $\eta(A) = \{\eta(a)+K/a \in A\}$ es precisamente A/K. Esto demuestra el teorema. $\square$

PROPOSICIÓN 1.7 (Segundo Teorema de Isomorfismo para Anillos). *Si A y B son ideales de un anillo R tal que $B \subseteq A$, entonces $(R/B)/(A/B) \cong R/A$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior A/B es un ideal de R/B. Definir la función $f : R/B \to R/A$ por $f(x+B) = x+A$, f está bien definida, en efecto $x + B = y + B$ implica que $x - y \in B \subseteq A$. De esta manera, $x + A = y + A$. Es fácil ver f es un homomorfismo de anillos suprayectivo.

Ahora $Nu(f) = \{x + B/x + A = \bar{0}\} = \{x + B/x \in A\} = A/B$. De aquí, por la Proposición 1.6 $(R/B)/(A/B) \cong R/A$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.8 (Tercer Teorema de Isomorfismo para Anillos). *Si A y B son ideales de un anillo R, entonces $A/(A \cap B) \cong (A+B)/B$.*

DEMOSTRACIÓN. La función $f : A \to (A + B)/B$ definida por $f(a) = a + B$ es un homomorfismo de anillos suprayecyivo bien definido con $Nu(f) = A \cap B$. El Corolario 1.3 muestra que $A/(A \cap B) \cong (A + B)/B$. $\square$

Ejemplos

1. **Encajamiento de Funciones.** (a) La función $f : R \to R[X]$ dada por $f(a) = a$, donde a es visto como un polinomio constante en $R[X]$, es un homomorfismo de anillos inyectivo.
   (b) La función $f : R \to \mathbb{M}_n(R)$ definida por $f(a) = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $a_{ii} = a$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, es un homomorfismo de anillos inyectivo. De esta manera, el anillo de las $n \times n$ matrices $\mathbb{M}_n(R)$ contiene una copia del anillo R.
   (c) Si $\mathfrak{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$, entonces $\mathfrak{C}$ es un subanillo de $\mathbb{M}_2(R)$. La función $a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}$ a $\mathfrak{C}$ es un isomorfismo de anillos. De esta manera, el anillo de matrices $\mathbb{M}_2(R)$ contiene una copia del campo de los números complejos.

Concluimos nuestro breve repaso de los anillos con la siguiente proposición.

Proposición 1.9 (Propiedad de Correspondencia de Anillos). *Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos suprayectivo, entonces existe una correspondencia 1-1 entre los siguientes conjuntos.*

(1) El conjunto de ideales derechos (izquierdos) en R que contienen a $Nu(f)$ y el conjunto de ideales derechos (izquierdos) en S.
(2) El conjunto de ideales derechos (izquierdos) máximos de R que contienen a $Nu(f)$ y el conjunto de ideales derechos (izquierdos) máximos de S.
(3) El conjunto en ideales de R que contienen a $Nu(f)$ y el conjunto de ideales en S.
(4) El conjunto en ideales máximos de R que contienen a $Nu(f)$ y el conjunto de ideales máximos en S.
(5) El conjunto de subanillos de R que contienen a $Nu(f)$ y el conjunto de subanillos de S.

4. Módulos

En un espacio vectorial, los escalares tomados de un campo actúan sobre los vectores por multiplicación escalar, sujeta a ciertas reglas. En un módulo, los escalares necesitan solo pertenecer a un anillo, así el concepto de un módulo es una generalización significante. Mucha de la teoría de los módulos está interesada con extender las propiedades de los espacios vectoriales a los módulos. Sin embargo, la teoría de módulos puede ser mucha más complicada que la de los espacios vectoriales. Por ejemplo, cada espacio vectorial tiene una base y la cardinalidad de cualesquiera dos bases del espacio vectorial son iguales. Sin embargo, un módulo no necesita tener una base y aun si la tiene, entonces puede ser el caso de que el módulo tenga dos o más bases con cardinalidades diferentes.

Los módulos son centrales para el estudio del álgebra conmutativa y el álgebra homológica. Además, son usados ampliamente en la geometría algebraica y la topología algebraica.

DEFINICIÓN 1.8. Si M es un grupo abeliano aditivo, entonces M es llamado un R-*módulo derecho* (unitario) si existe una operación binaria $M \times R \to R$ tal que si $(x, a) \mapsto xa$, entonces las siguiente condiciones se cumplen para todo $x, y \in M$ y $a, b \in R$.

(1) $x(a + b) = xa + xb$
(2) $(x + y)a = xa + ya$
(3) $x(ab) = (xa)b$
(4) $x1 = x$

Los R-módulos izquierdos son definidos análogamente pero con los elementos del anillo operando a la izquierda de los elementos de M. Si M es un R-módulo derecho, entonces un subconjunto no vacío N de M es llamado un *submódulo* de M si N es un subgrupo del grupo aditivo de M y $xa \in N$ siempre que $x \in N$ y $a \in R$. Si N es un submódulo de M y $N \neq M$, entonces N es un *submódulo propio* de M. Finalmente, si R y S son anillos y M es a la vez un R-módulo izquierdo y un S-módulo derecho tal que $a(xb) = (ax)b$ para todo $a \in R$, $b \in S$ y $x \in M$, entonces M es llamado un (R, S)-*bimódulo*.

Si R es un anillo no conmutativo, entonces un R-módulo derecho M no puede ser transformado en un R-módulo izquierdo poniendo $a \cdot x = xa$. La versión a la izquierda de las propiedades (1), (2) y (4) de la Definición 1.8 se trasladarán, pero la condición que no se cumple es la propiedad (3). Si poniendo $a \cdot x = xa$, para todo $x \in M$ y $a \in R$, fuera a convertir a M en R-módulo izquierdo, entonces tendríamos

$$(ab) \cdot x = x(ab) = (xa)b = b \cdot (xa) = b \cdot (a \cdot x) = (ba) \cdot x$$

para todo $x \in M$ y $a, b \in R$. Los ejemplos de R-módulos izquierdos sobre un anillo no conmutativo abundan, donde $(ab) \cdot x \neq (ba) \cdot x$, así tenemos una contradicción. Por supuesto, si el anillo es conmutativo, esta dificultad desaparece y M puede ser transformado en un R-módulo izquierdo en exactamente esta manera. Aun cuando un R-módulo derecho puede ser no transformado en un R-módulo izquierdo usando el método justamente descrito, un R-módulo derecho puede ser transformado en un R^{op}-módulo izquierdo poniendo $a \cdot x = xa$ para todo $x \in M$ y $a \in R$. Si la multiplicación in R^{op} está definida por $\circ$, $x \in M$ y $a, b \in R^{op}$, entonces

$$(a \circ b) \cdot x = (ba) \cdot x = x(ba) = (xb)a = a \cdot (xb) = a \cdot (b \cdot x),$$

así la versión a la izquierda de la propiedad (3) se cumple y es fácil verificar que las versiones a la izquierda de las propiedades (1), (2) y (3) también se cumplen.

Si el anillo R es reemplazado por un anillo con división D, entonces la Definición 1.8 da la definición de un *espacio vectorial derecho* V sobre D y cuando R es un campo K, V es un *espacio vectorial sobre* K. Si V es un espacio vectorial derecho sobre un anillo con división D, entonces un submódulo de V frecuentemente será mencionado como un *subespacio* de V.

Terminología. Para simplificar la terminología, la expresión "R-módulo" o "módulo" significará R-módulo derecho. Cuando M sea un R-módulo también en ocasiones, nos referiremos a la multiplicación $M \times R \to M$ dada por $(x, a) \mapsto xa$ como la R-*acción* sobre M.

Ejemplos

1. **Sumas Finitas de Submódulos.** Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ son submódulos de un R-módulo M, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} M_i = M_1 + M_1 + \cdots + M_n =$$
$$\{x_1 + x_2 + \cdots + x_n / x_i \in M \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

es un submódulo de M para cada entero $n \geq 1$.

2. **El R-módulo $\mathbb{M}_n(R)$.** Si $\mathbb{M}_n(R)$ es el conjunto de las $n \times n$ matrices sobre R, entonces $\mathbb{M}_n(R)$ es un grupo abeliano aditivo bajo la adición de matrices. Si $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ y $a \in R$, entonces la operación $(a_{ij})a = (a_{ij}a)$ convierte a $\mathbb{M}_n(R)$ en un R-módulo. $\mathbb{M}_n(R)$ también es un R-módulo izquierdo bajo la operación $a(a_{ij}) = (aa_{ij})$.

3. **Ideales Derechos e Izquierdos como Submódulos.** El anillo R es un R-módulo derecho e izquierdo bajo la operación de multiplicación definida sobre R, llamados *regular derecho* y *regular izquierdo*, respectivamente. Notar que A es un ideal derecho (izquierdo) de R si y solo si A es un submódulo de R cuando R es visto como un R-módulo derecho (izquierdo).

4. **El Anulador de un Módulo.** Si M es un R-módulo y
$$A = ann_r(M) = \{a \in R/xa = 0 \text{ para todo } x \in M\},$$
entonces A es un ideal de R, mencionado como el *anulador en* R *de* M. Si existe la necesidad de enfatizar el anillo, entonces escribiremos $ann_r^R(M)$ para $ann_r(M)$. Por ejemplo, si S es un subanillo de R y si M es un R-módulo, entonces $ann_r^S(M)$ indicará que el anulador es tomado en S. Si A es un ideal izquierdo de R, entonces
$$ann_l^M(A) = \{x \in M/xa = 0 \text{ para todo } x \in A\}$$
es un submódulo de M, llamado el *anulador en* M *de* A.
Si I es un ideal de R tal que $I \subseteq ann_r(M)$, entonces M también es un R/I-módulo bajo la adición ya presente sobre M y la R/I-acción sobre M definida por $x(a+I) = xa$ para todo $x \in M$ y $a + I \in R/I$.
5. **Módulos sobre Anillos de Endomorfismos.** Si G es un grupo abeliano aditivo, entonces $End_{\mathbb{Z}}(G)$ el conjunto de todos los homomorfismos de grupo $f : G \to G$, es un anillo bajo la adición y composición de homomorfismos de grupos. El grupo G es un $End_{\mathbb{Z}}(G)-$módulo izquierdo si ponemos $fx = f(x)$ para todo $x \in G$ y todo $f \in End_{\mathbb{Z}}(G)$. G también es un $End_{\mathbb{Z}}(G)-$módulo derecho bajo la operación $xf = (x)f$, donde aceptamos escribir cada homomorfismo de grupo a la derecha de su argumento y en expresiones tales como $(x)fg$ primero aplicamos f y después g. Puesto que G es un $\mathbb{Z}$-módulo, se sigue que G es un $(End_{\mathbb{Z}}(G), \mathbb{Z})$-bimódulo y un $(\mathbb{Z}, End_{\mathbb{Z}}(G))$-bimódulo.
6. **Submódulos formados de Matrices Columna y Fila.** Sean $c_k(R)$ y $r_k(R)$, $1 \leq k \leq n$, los conjuntos de matrices k-ésima columna y matrices k-ésima fila, respectivamente, así definidas en el Ejemplo 2 en la Sección 2. Entonces para cada k, $c_k(R)$ y $r_k(R)$ son submódulos del R-módulo $\mathbb{M}_n(R)$.
7. **Módulos Cíclicos.** Si M es un R-módulo y $x \in M$, entonces $xR = \{xa/a \in R\}$ es un submódulo de M llamado el *submódulo cíclico de* M *generado por* x. Si $M = xR$ para algún $x \in M$, entonces M es llamado un *módulo cíclico*.
8. **El módulo $R[X]$.** Si $R[X]$ es el conjunto de todos los polinomios en X con sus coeficientes en R, entonces $R[X]$ es un grupo abeliano aditivo bajo la adición de polinomios. $R[X]$ es un R-módulo vía la R-acción sobre $R[X]$ definida por $(a_0 + Xa_1 + \cdots + X^n a_n)a = (a_0a) + X(a_1a) + \cdots + X^n(a_na)$.

9. **Cambios de Anillos.** Si $f : R \to S$ es un homomorfismo de anillos y M es un S-módulo y $xa = xf(a)$ para todo $x \in M$ y $a \in R$, entonces M es un R-módulo. Decimos que M ha sido convertido en un R-módulo por *retroceso a lo largo de* f. Claramente si M es un R-módulo y S es un subanillo de R, entonces M es un S-módulo por retroceso a lo largo de la inyección canónica $i : S \to R$.
10. **Ley Modular.** Existe una propiedad de los módulos que es frecuentemente usada. Es conocida como la *ley modular* o como la *propiedad de modularidad de módulos*. Si M, N y X son submódulos de un R-módulo y $X \supseteq M$, entonces $X \cap (M + N) = M + (X \cap N)$.

Hay varias propiedades elementales de los módulos que se cumplen independientemente de si son módulos derechos o izquierdos. Expresadas para un R-módulo M,

$$\begin{aligned} x0_R =& 0_M \\ x(-1) =& -x \\ x(a-b) =& xa - xb \\ x(-a)b = (xa)(-b) =& -x(ab) \\ (x-y)a =& xa - ya \end{aligned}$$

para todo $x, y \in M$ y $a, b \in R$.

PROPOSICIÓN 1.10. *Un subconjunto no vacío N de un R-módulo M es un submódulo de M si y solo si $x + y \in N$ y $xa \in N$ para todo $x, y \in N$ y $a \in R$.*

DEMOSTRACIÓN. Si N es un submódulo de M, no hay nada que demostrar, así suponer que $x + y \in N$ y $xa \in N$ para todo $x, y \in N$ y $a \in R$. Entonces $x - y = x + y(-1) \in N$, así N es un subgrupo del grupo aditivo de M. Las condiciones (1) hasta (4) de la Definición 1.8 deben cumplirse para todo $x, y \in N$ y $a, b \in R$, puesto que estas condiciones se cumplen para todo $x, y \in M$ y $a, b \in R$. $\square$

DEFINICIÓN 1.9. Sea N un submódulo de un R-módulo M y suponer que S es un subconjunto de N. Si cada elemento de $x \in N$ puede ser expresado como $x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i$, donde $x_i \in S$ y $a_i \in R$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces decimos que S es un conjunto de *generadores* de N o que N es generado por S. Si N es generado por S, entonces escribimos $N = \sum_{S} xR$ y cuando S es un conjunto finito, decimos que N es *finitamente generado*.

Cada R-módulo M tiene al menos un conjunto generador, a saber el conjunto M.

PROPOSICIÓN 1.11. *Las siguientes afirmaciones se cumplen para cualquier R-módulo M.*

(1) Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de M, entonces $\bigcap\limits_\Delta M_\alpha$ es un submódulo de M.

(2) Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de M, entonces

$$\sum_\Delta M_\alpha = \{\sum_\Delta x_\alpha / x_\alpha \in M_\alpha \text{ para todo } \alpha \in \Delta\}$$

es un submódulo de M.

(3) Sea S un subconjunto de M y suponer que $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de M cada uno de los cuales contiene a S. Entonces S es un conjunto de generadores para el submódulo $\bigcap\limits_\Delta M_\alpha$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $x, y \in \bigcap\limits_\Delta M_\alpha$, $a \in R$. Entonces para cada $\alpha \in \Delta$, $x - y \in M_\alpha$ y $xa \in M_\alpha$, porque los M_α son submódulos. De aquí $x - y, xa \in \bigcap\limits_\Delta M_\alpha$. Por la Proposición 1.10, $\bigcap\limits_\Delta M_\alpha$ es un submódulo de M.

(2) Si $\sum\limits_\Delta x_\alpha, \sum\limits_\Delta y_\alpha \in \sum\limits_\Delta M_\alpha$, entonces

$$\sum_\Delta x_\alpha - \sum_\Delta y_\alpha = \sum_\Delta (x_\alpha - y_\alpha)$$

pertenece a $\sum\limits_\Delta M_\alpha$, porque $x_\alpha - y_\alpha \in M_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$. También, si $a \in R$, entonces

$$\Big(\sum_\Delta x_\alpha\Big)a = \sum_\Delta (x_\alpha a) \in \sum_\Delta M_\alpha,$$

porque $x_\alpha a \in M_\alpha$, para todo $\alpha \in \Delta$. De esta manera, $\sum\limits_\Delta M_\alpha$ es un submódulo de M por la Proposición 1.10.

(3) Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de submódulos de M cada uno de los cuales contiene a S. Si $x \in S$, entonces $x \in \bigcap\limits_\Delta M_\alpha$, así $xR \subseteq \bigcap\limits_\Delta M_\alpha$. De aquí $\sum\limits_S xR \subseteq \bigcap\limits_\Delta M_\alpha$. Para la contención inversa notar que $\sum\limits_S xR$ es un submódulo de M que contiene a S. De esta manera, $\bigcap\limits_\Delta M_\alpha \subseteq \sum\limits_S xR$, así tenemos que $\bigcap\limits_\Delta M_\alpha = \sum\limits_S xR$. $\square$

COROLARIO 1.4. *El conjunto vacío es un conjunto de generadores para el módulo cero.*

DEMOSTRACIÓN. La parte (3) de la Proposición 1.11 muestra que si $S = \emptyset$ y si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es la familia de todos los submódulos de M, entonces $\emptyset \subseteq M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. De aquí, $\bigcap_\Delta M_\alpha = 0$, así $\sum_\emptyset xR = 0$. □

5. Módulos Cocientes

Si N es un submódulo de un R-módulo M, entonces N es un subgrupo del grupo aditivo de M. Así si N es visto como un subgrupo del grupo abeliano M, entonces sabemos de la teoría de grupos que podemos formar el conjunto de clases laterales $\{x + N\}_{x\in M}$ de N en M, donde $x + N = \{x + n/n \in N\}$. Si M/N denota el conjunto de clases laterales, entonces también sabemos que M/N puede ser convertido en un grupo abeliano aditivo si la adición de clases laterales es definida por

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N.$$

Con esto en mente M/N puede ahora ser convertido en un R-módulo definiendo la R-acción sobre M/N por $(x + N)a = xa + N$ para $x + N \in M/N$ y $a \in R$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.10. Si N es un submódulo de un R-módulo M, entonces M/N junto con las operaciones

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N \text{ y } (x + N)a = xa + N$$

para $x + N, y + N \in M/N$ y $a \in R$ es llamado el *módulo factor* (o el *módulo cociente*) de M formado factorizando N.

Ejemplos

11. Considerar el R-módulo $R[X]$. Si P es el conjunto de polinomios en $R[X]$ con término constante cero, entonces P es un submódulo de $R[X]$. Cada elemento del módulo factor $R[X]/P$ puede ser expresado como $a_0+Xa_1+\cdots+X^na_n+P$. Pero puesto que $Xa_1 + \cdots + X^na_n \in P$, vemos que

$$a_0 + Xa_1 + \cdots + X^na_n + P = a_0 + P.$$

Consecuentemente, las operaciones sobre $R[X]/P$ están dadas por

$$(a+P)+(b+P)=(a+b)+P$$
$$(a+P)c=ac+P,$$

donde $a,b,c\in R$.

12. Considerar el R-módulo $\mathbb{M}_3(R)$. El conjunto de todas las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ es un submódulo N de $\mathbb{M}_3(R)$. Se sigue que los elementos del módulo factor $\mathbb{M}_3(R)/N$ pueden ser expresados en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}+N.$$

DEFINICIÓN 1.11. Cada R-módulo derecho no cero tiene al menos dos submódulos, a saber M y el *submódulo cero*, denotado simplemente por 0. Un R-módulo derecho no cero S que tiene solo a 0 y a S por sus submódulos es llamado un *módulo simple*. El conjunto de todos los submódulos de un R-módulo derecho M es parcialmente ordenado por $\subseteq$, es decir, por la inclusión. Bajo este orden un *submódulo mínimo* de M es solamente un submódulo simple de M. Un submódulo propio N de M es llamado un *submódulo máximo* de M si siempre que N' sea un submódulo de M tal que $N\subseteq N'\subseteq M$, o $N=N'$ o $N'=M$. Claramente, A es un ideal derecho mínimo de R si y solo si A_R es un R-módulo simple.

Ejemplos

13 Si N es un submódulo máximo de M, entonces se sigue que M/N es un R-módulo simple. En particular, un subconjunto no vacío A de un anillo R es un ideal derecho de R si y solo si A es un submódulo de R cuando R es visto como un R-módulo. De aquí, podemos formar el módulo factor R/A. Así si $\mathfrak{m}$ es un ideal derecho máximo de R, entonces $R/\mathfrak{m}$ es un R-módulo simple.

6. Homomorfismos de Módulos

Una faceta importante de los homomorfismos de anillos es que proporcionan la transferencia de información algebraica entre anillos. Para transferir información algebraica entre módulos, necesitamos el concepto de un homomorfismo de módulos.

DEFINICIÓN 1.12. Si M y N son R-módulos, entonces una función $f : M \to N$ es llamada un *homomorfismo de R-módulos* si
(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y
(2) $f(xa) = f(x)a$
para todo $x, y \in M$ y $a \in R$. Una función $f : M \to N$ que satisface (1) es llamada una *función aditiva*. La función identidad $M \to M$ definida por $x \mapsto x$ es un homomorfismo de R-módulos que será denotado por id_M. Un homomorfismo de R-módulos que es una función inyectiva será mencionado para simplificar un *monomorfismo* y un homomorfismo de R-módulos que es una función suprayectiva será llamado un *epimorfismo*. Si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces N es llamado una *imagen homomorfa* de M. Si $f : M \to M$ es un homomorfismo, entonces f es un *endomorfismo* de M. Un *isomorfismo* es un homomorfismo que es inyectivo y suprayectivo y un isomorfismo $f : M \to M$ es llamdo un *automorfismo* de M. Si $f : M \to N$ es un isomorfismo, entonces M y N son llamados *R-módulos isomorfos*, denotado por $M \cong N$. El conjunto de todos los homomorfismos de M a N será denotado por $Hom_R(M, N)$ y cuando $M = N$, $Hom_R(M, M)$ será escrito como $End_R(M)$.

Ejemplos

1. **$Hom_R(M, N)$ como un R-módulo Izquierdo.** Si M y N son R-módulos, entonces $Hom_R(M, N)$ es un grupo abeliano aditivo bajo la adición de funciones, es decir, $Hom_R(M, N)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo. En general, $Hom_R(M, N)$ no es un R-módulo si fa es definida como $(fa)(x) = f(xa)$ puesto que

   $$(f(ab))(x) = f(x(ab)) = f((xa)b) = (fb)(xa) = ((fb)a)(x),$$

   así $f(ab) = (fb)a$. Sin embargo, lo que es requerido es que $f(ab) = (fa)b$, así la condición (3) de la Definición 1.8 no se cumple. Si R es conmutativo, entonces inmediatamente vemos que $Hom_R(M, N)$ puede ser convertido en R-módulo precisamente en esta manera. Aunque $Hom_R(M, N)$ no puede ser convertido en R-módulo poniendo $(fa)(x) = f(xa)$, $Hom_R(M, N)$ puede ser convertido en un R-módulo izquierdo usando esta técnica. Si $a \in R$ y $x \in M$, dejar que $(af)(x) = f(xa)$. Entonces para $a, b \in R$ y $x \in M$ vemos que

   $$((ab)f)(x) = f(x(ab)) = f((xa)b) = (bf)(xa) = a(bf)(x).$$

   De aquí, $(ab)f = a(bf)$, así la versión a la izquierda de la condición (3) de la Definición 1.8 se cumple. Es fácil verificar que la versión a la izquierda de las condiciones (1),

(2) y (4) también se cumplen, así cuando M y N son R-módulos, $Hom_R(M, N)$ es un R-módulo izquierdo. Similarmente, cuando M y N son R-módulos izquierdos, entonces $Hom_R(M, N)$ puede ser convertido en un R-módulo poniendo $(fa)(x) = f(ax)$ para todo $a \in R$ y $x \in M$.

2. **El Anillo de Endomorfismos de un Módulo.** Si M es un R-módulo, entonces $End_{\mathbb{Z}}(M)$ y $End_R(M)$ son anillos bajo la adición de funciones y la composición de funciones llamados el *anillo de $\mathbb{Z}$-endomorfismos de M* y el *anillo de R-endomorfismos de M*, respectivamente. Si definimos $fx = f(x)$ para cada $f \in End_{\mathbb{Z}}(M)$ y todo $x \in M$, entonces esto convierte a M en un $End_{\mathbb{Z}}(M)$- módulo izquierdo. Puesto que $End_R(M)$ es un subanillo de $End_{\mathbb{Z}}(M)$, M también es un $End_R(M)$-módulo izquierdo bajo la misma operación.

Observación. Las estructuras de bimódulos producen varias estructuras de módulos sobre Hom.

(1) Si M es un (R, S)-bimódulo y N es un R-módulo izquierdo, entonces $Hom_R({}_RM_S, {}_RN)$ es un S-módulo izquierdo. Si sf es definido por $(sf)(x) = f(xs)$ para todo $f \in Hom_R({}_RM_S, {}_RN)$, $s \in S$ y $x \in M$, entonces $sf \in Hom_R({}_RM_S, {}_RN)$. En efecto, si $a \in R$, entonces

$$(sf)(ax) = f((ax)s) = f(a(xs)) = af(xs) = a(sf)(x).$$

(2) Si M es un (R, S)-bimódulo y N es un S-módulo derecho, entonces $Hom_S({}_RM_S, N_S)$ es un R-módulo derecho. Si $(fa)(x) = f(ax)$ para $f \in Hom_S({}_RM_S, N_S)$, $a \in R$ y $x \in M$, entonces se sigue que $fa \in Hom_S({}_RM_S, N_S)$ porque para $s \in S$ tenemos

$$(fa)(xs) = f(a(xs)) = f((ax)s) = f(ax)s = (fa)(x)s.$$

(3) Si N es un (R, S)-bimódulo y M es un R-módulo izquierdo, entonces $Hom_R({}_RM, {}_RN_S)$ es un S-módulo derecho. Para ver esto, dejar que $(fs)(x) = f(x)s$ para $f \in Hom_R({}_RM, {}_RN_S)$, $s \in S$ y $x \in M$. Entonces la función fs está en $Hom_R({}_RM, {}_RN_S)$ debido al hecho de que si $a \in R$, entonces

$$(fs)(ax) = f(ax)s = af(x)s = a(fs)(x).$$

(4) Si N es un (R, S)-bimódulo y M es un S-módulo derecho, entonces $Hom_S(M_S, {}_RN_S)$ es un R-módulo izquierdo. Si af es definido por $(af)(x) = af(x)$ para $f \in Hom_S(M_S, {}_RN_S)$, $a \in R$ y $x\ M$, entonces af está en $Hom_S(M_S, {}_RN_S)$ puesto que si $s \in S$, entonces

$$(af)(xs) = af(xs) = af(x)s = (af)(x)s.$$

DEFINICIÓN 1.13. Sea $f : M \to N$ un R-homomorfismo de R-módulos. Entonces

(1) El conjunto $K = \{x \in M/f(x) = 0\}$ es llamado el *núcleo* de f y es escrito $Nu(f)$.
(2) El conjunto $f(M) = \{f(x)/x \in M\}$ es llamado la *imagen homomorfa* (o simplemente *imagen*) de M bajo f y es denotado por Imf.
(3) Si $A \subseteq M$ y $B \subseteq N$ son subconjuntos de los R-módulos M y N, respectivamente. Entonces $f^{-1}(B) = \{x \in A/f(x) \in B\}$.

PROPOSICIÓN 1.12. *Si $f : M \to N$ es un R-homomorfismo de módulos, entonces $f(0_M) = 0_N$ y $f(-x) = -f(x)$ para cada $x \in M$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que

$$f(0_M) + f(0_M) = f(0_M + 0_M) = f(0_M) = 0_S + f(0_M)$$

De aquí, $f(0_M) = 0_S$. Ahora

$$f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0_M) = 0_S$$

De aquí, $f(-x) = -f(x)$. □

PROPOSICIÓN 1.13. *Sea $f : M \to N$ un R-homomorfismo de módulos.*

(1) Si M' es un submódulo de M, entonces $f(M')$ es un submódulo de N.
(2) Si N' es un submódulo de N, entonces $f^{-1}(N')$ es un submódulo de M.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea M' un submódulo del R-módulo M. Si $n, n' \in f(M')$ y $a \in R$. Entonces $n + n' = f(x) + f(x') = f(x + x') \in f(M')$ y $na = f(x)a = f(xa) \in f(M')$ para algunos $x, x' \in M'$. Por la Proposición 1.10, $f(M')$ es un submódulo de N.

(2) Si $x, y \in f^{-1}(N')$ para algunos $x, y \in M$ y $a \in R$. Entonces

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \in N' \text{ y } f(xa) = f(x)a \in N'.$$

De esta manera, $x + y, xa \in f^{-1}$. □

PROPOSICIÓN 1.14. *Si M es un R-módulo, entonces $Hom_R(R, M) \cong M$ como R-módulos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : Hom_R(R, M) \to M$ tal que $\varphi(f) = f(1)$. Entonces $\varphi(f + g) = (f + g)(1) = f(1) + g(1) = \varphi(f) + \varphi(g)$ y $\varphi(fa) = (fa)(1) = f(a) = f(1)a = \varphi(f)a$, así φ es R-lineal. Si $f \in Nu(\varphi)$, entonces $0 = \varphi(f) = f(1)$ claramente implica que $f = 0$, así φ es inyectivo. Si $x \in M$, entonces $f_x : R \to M$ definido por

$f_x(a) = xa$ es R-lineal y $\varphi(f_x) = x$. De esta manera, φ también es biyectiva. □

Las siguientes tres proposiciones son de importancia fundamental. La primera de estas proposiciones es uno de los resultados más útiles en la teoría de módulos.

PROPOSICIÓN 1.15 (Primer Teorema de Isomorfismo de Módulos). *Si $f : M \to N$ es un R-homomorfismo de R-módulos, entonces*
(1) $Nu(f)$ es un submódulo de M,
(2) f es un monomorfismo si y solo si $Nu(f) = 0$, y
(3) $M/Nu(f) \cong f(M)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $x, y \in Nu(f)$ y $a \in R$, entonces $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0$, y $f(xa) = f(x)a = 0a = 0$, asi $x + y, xa \in Nu(f)$. La Proposición 1.10 da el resultado.

(2) Si f es un monomorfismo y $x \in Nu(f)$, entonces $f(x) = 0 = f(0)$, así $x = 0$ puesto que f es inyectiva. De esta manera, $Nu(f) = 0$. Inversamente, suponer que el $Nu(f) = 0$ y $x, y \in M$ tal que $f(x) = f(y)$. Entonces $f(x - y) = 0$, así $x - y \in Nu(f) = 0$. De aquí, $x = y$, así f es inyectiva.

(3) Definir $\varphi : M/Nu(f) \to f(M)$ por $\varphi(x + Nu(f)) = f(x)$. Si $x+Nu(f) = y+Nu(f)$, entonces $x-y \in Nu(f)$, así $f(x) = f(y)$, así φ está bien definido. Se sigue fácilmente que φ es un epimorfismo y si $\varphi(x + Nu(f)) = 0$, entonces $f(x) = 0$, así $x \in Nu(f)$. De esta manera, $x + Nu(f) = 0$, así φ es inyectiva y tenemos que φ es un isomorfismo. □

COROLARIO 1.5. *Si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces $M/Nu(f) \cong N$.*

La parte (2) de la Proposición 1.15 muestra que un homomorfismo $f : M \to N$ es un monomorfismo si y solo si $Nu(f) = 0$. También se sigue que f es un epimorfismo si y solo si $N/Imf = Cokerf = 0$.

Si $f : M \to N$ es un monomorfismo, entonces $f(M)$ es un submódulo de N que es isomorfo a M. Cuando este es el caso decimos que M *se encaja en* N y que N *contiene una copia de* M

TEOREMA 1.3. *Sean N y U submódulos de un R-módulo M. Los submódulos del módulo cociente M/N son de la forma U/N, donde U es un submódulo de M conteniendo a N.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f : M \to M/N$ el homomorfismo canónico; es decir, $f(x) = x + N$, $x \in M$. Sea X un submódulo de M/N. Considerar $U = \{x \in M/f(x) \in X\}$. Afirmamos que U es un R-submódulo de M. En efecto si $x, y \in U$ y $a \in R$, entonces

$f(x-y) = f(x) - f(y) \in X$ y $f(xa) = f(x)a \in X$, lo que muestra que U es un R-submódulo de M. También, $N \subseteq U$, porque para todo $x \in N$, $f(x) = \bar{0} \in X$. De esta manera, N es un R-submódulo de U. También, si $x \in X$, entonces existe $y \in M$ tal que $f(y) = x$, porque f es un homomorfismo suprayectivo. Así por definición de U, $y \in U$. De aquí, $X \subseteq f(U)$. Claramente, $f(U) \subseteq X$. De esta manera, $X = f(U)$. Pero $f(U) = U/N$. Así, $X = U/N$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.16 (Segundo Teorema de Isomorfismo para Módulos). *Si M_1 y M_2 son submódulos de un R-módulo M tal que $M_1 \subseteq M_2$, entonces M_2/M_1 es un submódulo de M/M_1 y $(M/M_1)/(M_2/M_1) \cong M/M_2$.*

DEMOSTRACIÓN. Que M_2/M_1 es un submódulo de M/M_1 se sigue del teorema anterior. Sea $f : M/M_1 \to M/M_2$ la función definida por $f(x+M_1) = x+M_2$. Si $x+M_1 = y+M_1$, entonces $x-y \in M_1 \subseteq M_2$, así $f(x+M_1) = x+M_2 = y+M_2 = f(y+M_1)$, así f está bien definida. Claramente, f es un epimorfismo. Ahora $x + M_1 \in Nu(f)$ si y solo si $x \in M_2$ y de aquí si y solo si $x + M_1 \in M_2/M_1$. De esta manera, $Nu(f) = M_2/M_1$. Así el resultado se sigue del Corolario 1.5. $\square$

PROPOSICIÓN 1.17 (Tercer Teorema de Isomorfismo para Módulos). *Si M_1 y M_2 son submódulos de un R-módulo M, entonces $M_1/(M_1 \cap M_2) \cong (M_1 + M_2)/M_2$.*

DEMOSTRACIÓN. El epimorfismo $f : M_1 \to (M_1 + M_2)/M_2$ definido por $f(x) = x + M_2$ tiene núcleo $M_1 \cap M_2$. El Corolario 1.5 da el resultado. $\square$

PROPOSICIÓN 1.18 (Propiedad de Correspondencia de Módulos). *Si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces existe una correspondencia 1-1 entre los submódulos de M que contienen a $Nu(f)$ y los submódulos de N.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\widetilde{N}$ es un submódulo de $M/Nu(f)$ y $\eta : M \to M/Nu(f)$ es el homomorfismo natural, existe un submódulo único $N = \eta^{-1}(\widetilde{N})$ de M tal que $N \supseteq Nu(f)$ y $N/Nu(f) = \tilde{N}$. El resultado se sigue de la observación de que $M/Nu(f) \cong N$. $\square$

Capítulo 2

Construcciones Fundamentales

Ahora introducimos conceptos que son ubicuos en álgebra abstracta: productos directos, sumas directas. Cada concepto puede ser usado para producir un objeto que posee una propiedad conocida como la *propiedad de la función universal*.

1. Productos Directos y Sumas Directas

Productos Directos

Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces el producto Cartesiano $\prod\limits_\Delta M_\alpha$ puede ser convertido en un R-módulo definiendo

$$(x_\alpha) + (y_\alpha) = (x_\alpha + y_\alpha) \text{ y } (x_\alpha)a = (x_\alpha a)$$

para todo $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod\limits_\Delta M_\alpha$ y $a \in R$, donde ponemos $\prod\limits_\Delta M_\alpha = 0$ si $\Delta = \emptyset$. La adición y la R-acción sobre $\prod\limits_\Delta M_\alpha$ son llamadas *operaciones componente a componente*. La función $\pi_\beta : \prod\limits_\Delta M_\alpha \to M_\beta$ tal que $\pi_\beta((x_\alpha)) = x_\beta$ para todo $(x_\alpha) \in \prod\limits_\Delta M_\alpha$ es un epimorfismo llamado la β-*ésima proyección canónica* y la función $i_\beta : M_\beta \to \prod\limits_\Delta M_\alpha$ definida por $i_\beta(x) = (x_\alpha)$, donde $x_\alpha = 0$ si $\alpha \neq \beta$ y $x_\beta = x$, es una inyección R-lineal llamada la β-*ésima inyección canónica*. El R-módulo $\prod\limits_\Delta M_\alpha$ junto con la familia de *proyecciones canónicas* $\{\pi_\alpha : \prod\limits_\Delta M_\alpha \to M_\alpha\}_\Delta$ es llamado el *producto directo* de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$. Tal producto será denotado por $(\prod\limits_\Delta M_\alpha, \pi_\alpha)$ o más simple por $\prod\limits_\Delta M_\alpha$ con la familia de funciones $\{\pi_\alpha\}_\Delta$ entendida. Frecuentemente, nos referiremos a $\prod\limits_\Delta M_\alpha$ como un producto directo. Las funciones $\{\pi_\alpha\}_\Delta$ son llamadas las *funciones de estructura* del producto $\prod\limits_\Delta M_\alpha$. Notar que las inyecciones canónicas $i_\beta : M_\beta \to \prod\limits_\Delta M_\alpha$ no han sido mencionadas. Esto no es una equivocación, pronto veremos que estas funciones están determinadas realmente por las π_β.

Ejemplo

1. Un producto directo de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos es particularmente simple cuando Δ es finito. Por ejemplo, sea $\Delta = \{1,2,3\}$ y suponer que M_1, M_2 y M_3 son R-módulos. Entonces
$$\prod_\Delta M_i = M_1 \times M_2 \times M_3$$
y las operaciones sobre $\prod\limits_\Delta M_i$ están dadas por
$$(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \text{ y}$$
$$(x_1,x_2,x_3)a = (x_1a, x_2a, x_3a)$$
para todo $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \prod\limits_\Delta M_i$ y $a \in R$. En este caso,
$$\begin{aligned} &\pi_1((x_1,x_2,x_3)) = x_1, \;\; i_1(x) = (x,0,0),\\ &\pi_2((x_1,x_2,x_3)) = x_2, \;\; i_2(x) = (0,x,0),\\ &\pi_3((x_1,x_2,x_3)) = x_3, \;\; i_1(x) = (0,0,x). \end{aligned}$$

Ahora necesitamos el siguiente concepto: Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos y suponer que para cada $\alpha \in \Delta$ existe un homomorfismo $f_\alpha : N \to M_\alpha$, N un R-módulo fijo. Entonces
$$f : N \to \prod_\Delta M_\alpha \text{ definido por } f(x) = (f_\alpha(x))$$
es un homomorfismo bien definido, llamado el *producto de la familia de los funciones* $\{f_\alpha\}_\Delta$.

La siguiente proposición da una propiedad fundamental de un producto directo.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si* $\{M_\alpha\}_\Delta$ *es una familia de* R*-módulos, entonces un producto directo* $(\prod\limits_\Delta M_\alpha, \pi_\alpha)$ *tiene la propiedad de que para cada* R*-módulo* N *y cada familia* $\{f_\alpha : N \to M_\alpha\}_\Delta$ *de homomorfismos existe un homomorfismo único* $f : N \to \prod\limits_\Delta M_\alpha$ *tal que para* *cada* $\alpha \in \Delta$ *el diagrama*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "f_\alpha"] \arrow[dd, dotted, "f"'] & \\ & M_\alpha \\ \prod\limits_\Delta M_\alpha \arrow[ur, "\pi_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

DEMOSTRACIÓN. Sea N un R-módulo y suponer que, para cada $\alpha \in \Delta$, $f_\alpha : N \to M_\alpha$ es un homomorfismo. Si $f : N \to \prod\limits_\Delta M_\alpha$ es el producto de una familia de funciones $\{f_\alpha\}_\Delta$, entonces f es tal que $\pi_\alpha f = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Ahora suponer que $g : N \to \prod\limits_\Delta M_\alpha$ también es un homomorfismo tal que $\pi_\alpha g = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Si $g(x) = (x_\alpha)$, entonces $f_\alpha(x) = \pi_\alpha g(x) = \pi_\alpha((x_\alpha)) = x_\alpha$, así $(x_\alpha) = (f_\alpha(x)) = f(x)$. De aquí, $f = g$. $\square$

La Proposición 2.1 y la discusión anterior proporcionan la motivación para la definición formal de un producto directo de una familia de R-módulos.

DEFINICIÓN 2.1. Un R-módulo P junto con una familia de homomorfismos $\{p_\alpha : P \to M_\alpha\}_\Delta$ es llamado un *producto directo* de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos si para cada R-módulo N y cada familia de homomorfismos $\{f_\alpha : N \to M_\alpha\}_\Delta$, existe un homomorfismo único $f : N \to P$ tal que, para cada $\alpha \in \Delta$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "f_\alpha"] \arrow[dd, dotted, "f"'] & \\ & M_\alpha \\ P \arrow[ur, "p_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Las funciones de la familia $\{p_\alpha\}_\Delta$ son las *funciones de estructura* para el producto directo. Un producto directo $(P, p_\alpha)_\Delta$ es universal en el sentido de que dada cualquier familia $\{f_\alpha : N \to M_\alpha\}_\Delta$ de homomorfismos siempre existe un homomorfismo único $f : N \to P$ tal que $p_\alpha f = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Es en este sentido que decimos que $(P, p_\alpha)_\Delta$ tiene la *propiedad de la función universal*.

La Proposición 2.1 muestra que cada familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos tiene un producto directo. Un resultado importante de la propiedad de la función universal es que para un producto directo $(P, p_\alpha)_\Delta$ el R-módulo P es único hasta isomorfismo.

PROPOSICIÓN 2.2. *Si $(P, p_\alpha)_\Delta$ y $(P', p'_\alpha)_\Delta$ son productos directos de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces existe un isomorfismo único $\varphi : P' \to P$ tal que $p_\alpha\varphi = p'_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$.*

DEMOSTRACIÓN. Considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "p'_\alpha"] & \\
P \arrow[r, "p_\alpha"] \arrow[d, "\psi"'] & M_\alpha \\
P' \arrow[ur, "p'_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

donde φ y ψ son las funciones únicas dadas por la definición de un producto directo. Puesto que $p_\alpha\varphi = p'_\alpha$ y $p'_\alpha\psi = p_\alpha$, vemos que $p'_\alpha\psi\varphi = p'_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. De aquí, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dd, "\psi\varphi"'] \arrow[dr, "p'_\alpha"] & \\
& M_\alpha \\
P' \arrow[ur, "p'_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Pero id'_P es tal que $p'_\alpha id_{P'} = p'_\alpha$, así se sigue de la unicidad de la función $\psi\varphi$ que $\psi\varphi = id_{P'}$. Similarmente, se sigue que $\varphi\psi = id_P$. De esta manera, φ es el isomorfismo requerido. $\square$

En vista de la Proposición 2.2, vemos que $(\prod\limits_\Delta M_\alpha, \pi_\alpha)$ realmente es un modelo para cada producto directo de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos. Si $(P, p_\alpha)_\Delta$ también es un producto directo de $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces existe un isomorfismo único $\varphi : P \to \prod\limits_\Delta M_\alpha$ tal que $\pi_\alpha\varphi = p_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Puesto que π_α es un epimorfismo, se sigue que p_α también es un epimorfismo. De esta manera, si $(P, p_\alpha)_\Delta$ es un producto de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces cada una de sus funciones de estructura es un epimorfismo. Un producto directo $(P, p_\alpha)_\Delta$ también determina una familia $\{u_\alpha : M_\alpha \to P\}_\Delta$ de inyecciones R-lineales en P.

PROPOSICIÓN 2.3. *Si $(P, p_\alpha)_\Delta$ es un producto directo de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces existe una familia única $\{u_\alpha : M_\alpha \to P\}_\Delta$ de homomorfismos inyectivos tal que $p_\alpha u_\alpha = id_{M_\alpha}$, para cada $\alpha \in \Delta$ y $p_\beta u_\alpha = 0$ cuando $\alpha \neq \beta$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que $(P, p_\alpha)_\Delta$ es un producto directo de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos y sea α un elemento fijo de Δ. Sea $N = M_\alpha$ y para cada $\beta \in \Delta$ definir $f_\beta : N \to M_\beta$ por $f_\beta = 0$ si $\beta \neq \alpha$ y $f_\alpha = id_{M_\alpha}$. Entonces tenemos una familia de homomorfismos $\{f_\beta : N \to M_\beta\}_\Delta$, así se sigue de la definición de un producto directo que existe un homomorfismo único $u_\alpha : N \to P$ tal que $p_\beta u_\alpha = f_\beta$ para cada $\beta \in \Delta$. De aquí, $p_\beta u_\alpha = 0$, si $\alpha \neq \beta$ y $p_\alpha u_\alpha = id_{M_\alpha}$. Puesto que $p_\alpha u_\alpha = id_{M_\alpha}$, tenemos que u_α es una función inyectiva y que p_α es suprayectivo, un hecho observado antes. □

La familia $\{u_\alpha\}_\Delta$ de homomorfismos inyectivos dados en la Proposición 2.3 es llamada la *familia de inyecciones canónicas determinadas* (únicamente) por $(P, p_\alpha)_\Delta$. Se sigue que la familia $\{i_\beta : M_\beta \to \prod_\Delta M_\alpha\}_\Delta$ de inyecciones canónicas está determinada únicamente por $(\prod_\Delta M_\alpha, \pi_\alpha)$.

Si $\{R_\alpha\}_\Delta$ es una familia indexada de anillos, entonces el producto Cartesiano $\prod_\Delta R_\alpha$ es un anillo con identidad (1_α) bajo la adición componente a componente

$$(a_\alpha) + (b_\alpha) = (a_\alpha + b_\alpha)$$

y la multiplicación componente a componente

$$(a_\alpha)(b_\alpha) = (a_\alpha b_\alpha).$$

El *anillo producto directo* $\prod_\Delta R_\alpha$ es tal que la inyección canónica $i_\beta : R_\beta \to \prod_\Delta R_\alpha$ es un homomorfismo de anillos que no preserva identidades. Sin embargo, cada proyección canónica $\pi_\beta : \prod_\Delta R_\alpha \to R_\beta$ preserva identidades.

2. Sumas Directas Externas

Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces $\prod_\Delta M_\alpha$ tiene un submódulo llamado la *suma directa externa* de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$. No es difícil mostrar que

$$\bigoplus_{\Delta} M_\alpha = \Big\{(x_\alpha) \in \prod_{\Delta} M_\alpha / x_\alpha = 0 \text{ para casi toda } \alpha \in \Delta\Big\}$$

es un submódulo de $\prod\limits_{\Delta} M_\alpha$. Además, para cada $\beta \in \Delta$, existe una inyección R-lineal $i_\beta : M_\beta \to \bigoplus_\Delta M_\alpha$ dada por $i_\beta(x) = (x_\alpha)$, donde $x_\alpha = 0$, si $\alpha \neq \beta$ y $x_\beta = x$. La función i_β es la *β-ésima inyección canónica* en $\bigoplus_\Delta M_\alpha$.

El R-módulo $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ junto con la familia $\{i_\alpha\}_\Delta$ de inyecciones canónicas es un ejemplo de una *suma directa externa* de $\{M_\alpha\}_\Delta$. Tal suma será denotada $(\bigoplus_\Delta M_\alpha, i_\alpha)$ y las funciones $\{i_\alpha\}_\Delta$ son las *funciones de estructura* para $\bigoplus_\Delta M_\alpha$.

Antes definimos el producto de una familia de funciones. Ahora necesitamos el concepto de una suma de una familia de funciones: Si $f_\alpha : M_\alpha \to N$ es un homomorfismo para cada $\alpha \in \Delta$, donde N es un R-módulo fijo, entonces $f : \bigoplus_\Delta M_\alpha \to N$ definida por $f((x_\alpha)) = \sum_\Delta f_\alpha(x)$ es un homomorfismo bien definido llamado la *suma de la familia* $\{f_\alpha\}_\Delta$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces $(\bigoplus_\Delta M_\alpha, i_\alpha)$ tiene la propiedad de que para cada R-módulo N y cada familia $\{f_\alpha : M_\alpha \to N\}_\Delta$ de homomorfismos existe un homomorfismo único $f : \bigoplus_\Delta M_\alpha \to N$ tal que para cada $\alpha \in \Delta$ el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_\Delta M_\alpha \arrow[dd, dotted, "f"] \\
M_\alpha \arrow[ur, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \\
 & N
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

DEMOSTRACIÓN. Sea N un R-módulo y suponer que, para cada $\alpha \in \Delta$, $f_\alpha \to N$ es un homomorfismo. Si $f : \bigoplus_\Delta M_\alpha \to N$ es la suma de la familia de funciones $\{f_\alpha\}_\Delta$, entonces $fi_\alpha = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Ahora suponer que $g : \bigoplus_\Delta M_\alpha \to N$ también es tal que $gi_\alpha = f_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Si $(x_\alpha) \in \bigoplus_\Delta M_\alpha$, entonces $f((x_\alpha)) = \sum\limits_\Delta f_\alpha(x_\alpha) = \sum\limits_\Delta gi_\alpha(x_\alpha) = g\sum\limits_\Delta i_\alpha(x_\alpha) = g((x_\alpha))$, así $f = g$. $\square$

Ahora la definición formal de una suma directa externa.

DEFINICIÓN 2.2. Un R-módulo S junto con una familia de homomorfismos $\{u_\alpha : M_\alpha \to S\}_\Delta$ es llamado una *suma directa externa* de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos si para cada R-módulo N y cada familia de homomorfismos $\{f_\alpha : M_\alpha \to N\}_\Delta$, existe un homomorfismo único $f : S \to N$ tal que para cada $\alpha \in \Delta$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dd, dotted, "f"] \\ M_\alpha \arrow[ur, "u_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \\ & N \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Una suma directa externa será denotada por $(S, u_\alpha)_\Delta$. Las funciones de la familia $\{u_\alpha\}_\Delta$ son llamadas las *funciones de estructura* para la suma directa externa. Puesto que la función única $f : S \to N$ siempre existe, una suma directa externa $(S, u_\alpha)_\Delta$ tiene la *propiedad de la función universal*.

Notar que la demostración de la Proposición 2.4 es solo la demostración de la Proposición 2.1 con las fechas invertidas y los ajustes necesarios hechos. De manera similar las demostraciones de las siguientes proposiciones pueden ser modeladas después de las demostraciones de las proposiciones “correspondientes” dadas para los productos directos.

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $(S, u_\alpha)_\Delta$ y $(S', u'_\alpha)_\Delta$ son sumas directas de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces existe un isomorfismo único $\varphi : S \to S'$ tal que $\varphi u_\alpha = u'_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$.*

Por la Proposición 2.5 vemos que $(\bigoplus_\Delta M_\alpha, i_\alpha)$ es un modelo para una suma directa externa de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos. Si $(S, u_\alpha)_\Delta$ también es una suma directa externa de $\{M_\alpha\}_\Delta$, entonces existe un isomorfismo único $\varphi : S \to \bigoplus_\Delta M_\alpha$ tal que $\varphi u_\alpha = i_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. Puesto que i_α es una inyección, se sigue que u_α también es una inyección. De esta manera, si $(S, u_\alpha)_\Delta$ es una suma directa externa de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces cada una de las funciones de estructura es una inyección. Una suma directa externa $(S, u_\alpha)_\Delta$ también determina una familia de proyecciones $\{p_\alpha : S \to M_\alpha\}_\Delta$.

PROPOSICIÓN 2.6. *Si $(S, u_\alpha)_\Delta$ es una suma directa externa de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces existe una familia $\{p_\alpha : S \to M_\alpha\}_\Delta$ de homomorfismos suprayectivos tal que $p_\alpha u_\alpha = id_{M_\alpha}$ para cada $\alpha \in \Delta$ y $p_\beta u_\alpha = 0$ cuando $\alpha \neq \beta$.*

Las funciones de la familia $\{p_\alpha\}_\Delta$ de homomorfismos suprayectivos dados por la Proposición 2.6 son llamadas las *proyecciones canónicas* determinadas (únicamente) por $(S, u_\alpha)_\Delta$. De esto vemos que las proyecciones canónicas $\pi_\beta : \bigoplus_\Delta M_\alpha \to M_\beta$ están determinadas únicamente por $(\bigoplus_\Delta M_\alpha, i_\alpha)$.

Observación. Antes definimos un producto y una suma de una familia $\{f_\alpha\}_\Delta$ de homomorfismos. También tenemos los conceptos de un producto directo y suma directa de una familia de funciones. Sean $\{M_\alpha\}_\Delta$ y $\{N_\alpha\}_\Delta$ familias de R-módulos y suponer que para cada $\alpha \in \Delta$ existe un homomorfismo $f_\alpha : M_\alpha \to N_\alpha$. Entonces

$$\prod_\Delta f_\alpha : \prod_\Delta M_\alpha \to \prod_\Delta N_\alpha \text{ dada por } \Big(\prod_\Delta f_\alpha\Big)((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$$

es un homomorfismo bien definido llamado el *producto directo de la familia de funciones* $\{f_\alpha\}_\Delta$. Igualmente,

$$\bigoplus_\Delta f_\alpha : \bigoplus_\Delta M_\alpha \to \bigoplus_\Delta N_\alpha \text{ dada por } \Big(\bigoplus_\Delta f_\alpha\Big)((x_\alpha)) = (f_\alpha(x_\alpha))$$

es un homomorfismo bien definido llamado la *suma directa de la familia*.

3. Sumas Directas Internas

La parte (2) de la Proposición 1.11 muestra que la suma $\sum\limits_\Delta M_\alpha$ de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de submódulos de M es un submódulo de M. Ahora definimos la suma directa interna de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de submódulos de M. Estas sumas son importantes en el estudio de la estructura interna de los módulos. Un producto directo y una suma directa de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos ahora será denotada más simplemente por $\prod\limits_\Delta M_\alpha$ y $\bigoplus\limits_\Delta M_\alpha$, respectivamente, con las funciones canónicas asociadas con cada estructura entendidas.

Antes de definir la suma directa interna de una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de submódulos de M, consideremos un ejemplo para motivar la definición. Sean N_1, N_2 y N_3 R-módulos y considerar el R-módulo $M = N_1 \times N_2 \times N_3$. Entonces

$$M_1 = N_1 \times 0 \times 0 = \{(x_1, 0, 0)/x_1 \in N_1\},$$
$$M_2 = 0 \times N_2 \times 0 = \{(0, x_2, 0)/x_2 \in N_2\},$$
$$M_3 = 0 \times 0 \times N_3 = \{(0, 0, x_3)/x_3 \in N_3\}$$

son submódulos de M tal que

$$M_1 \cap (M_2 + M_3) = 0,$$

$$M_2 \cap (M_1 + M_3) = 0,$$
$$M_3 \cap (M_1 + M_2) = 0.$$

Se sigue que $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$ y cada sumando en esta expresión para (x_1, x_2, x_3) es único. Para indicar que cada elemento de M puede ser escrito únicamente como una suma de estos elementos de M_1, M_2 y M_3 escribimos $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ y decimos que M es la *suma directa interna* de M_1, M_2 y M_3. Puesto que $M_i \cap M_j = 0$ siempre que $i \neq j$, también escribimos $M_i \oplus M_j$ y decimos que esta suma es directa.

DEFINICIÓN 2.3. Suponer que $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de un R-módulo M tal que

$$M_\beta \cap \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha = 0 \text{ para cada } \beta \in \Delta.$$

Entonces la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es llamada la *suma directa interna* de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$. La notación $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ indicará que la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es directa. Si $M = \bigoplus_\Delta M_\alpha$, entonces M es llamada la suma directa interna de la familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ y $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ es una *descomposición directa* de M. Si N es un submódulo de M y si existe un submódulo N' de M tal que $N \cap N' = 0$ y $M = N + N'$, entonces $M = N \oplus N'$ y N es mencionado como un *sumando directo* de M.

Ejemplos

2. **Matrices.** Considerar el R-módulo $\mathbb{M}_n(R)$ de las $n \times n$ matrices sobre R. Entonces $\mathbb{M}_n(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i(R)$, y $\mathbb{M}_n(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} c_i(R)$. Por ejemplo, si $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_2(R)$, entonces

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

Claramente, $\mathbb{M}_2(R) = r_1(R) \oplus r_2(R) = c_1(R) \oplus c_2(R)$.

3. **$\mathbb{Z}$-módulos.** El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_6$ es tal que $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. En general, si s y t son divisores enteros primos relativos de n tal que $st = n$, entonces $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_s \oplus \mathbb{Z}_t$. Además, si $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$ es una factorización de n como un producto de números primos distintos, entonces $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \cdots \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$ son isomorfos como $\mathbb{Z}$-módulos y también como anillos.

4. **Polinomios.** Si $R[X]$ es el R-módulo de polinomios en X con coeficientes en R y $R_k = \{X^k a_k / a_k \in R\}$, entonces R_k es un submódulo de $R[X]$ para $k = 0, 1, 2 \ldots,$ donde $X^0 = 1$. Se sigue fácilmente que $R[X] = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R_k$. Los submódulos R_k son llamados los *submódulos homogéneos* de $R[X]$.
5. **Productos Directos Finitos.** Si $\{M_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto finito de R-módulos, entonces para cada k, $1 \leq k \leq n$,
$$N_k = \left\{(x_i) \in \prod_{i=1}^{n} M_i / x_i = 0 \text{ si } i \neq k\right\}$$
es un submódulo de $\prod_{i=1}^{n} M_i$ y
$$\prod_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i.$$
6. **Sumas Directas y Módulos Cociente.** Sean M_1 y M_2 submódulos de un R-módulo M tal que $M = M_1 \oplus M_2$. Entonces $M/M_1 \cong M_2$ y $M/M_2 \cong M_1$. En general, si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de M tal que $M = \bigoplus_\Delta M_\alpha$, entonces $M/M_\beta \cong \bigoplus_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$ y $M/\bigoplus_{\alpha \neq \beta} M_\alpha \cong M_\beta$.

Proposición 2.7. *Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de un R-módulo M tal que $M = \sum_\Delta M_\alpha$. Entonces la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es directa si y solo si cada $x \in M$ puede ser escrito en una y solo una manera como una suma $x = \sum_\Delta x_\alpha$, donde $x_\alpha \in M_\alpha$ para todo $\alpha \in \Delta$.*

Demostración. Sea la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ directa y suponer que $x \in M$ puede ser escrito como $x = \sum_\Delta x_\alpha$ y $x = \sum_\Delta y_\alpha$. Entonces $\sum_\Delta x_\alpha = \sum_\Delta y_\alpha$, así para cada $\beta \in \Delta$ tenemos
$$x_\beta - y_\beta = \sum_{\alpha \neq \beta} (y_\alpha - x_\alpha) \in M_\beta \cap \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha = 0.$$
De esta manera, $x_\beta = y_\beta$ para cada $\beta \in \Delta$, la expresión $\sum_\Delta x_\alpha$ es única.

Inversamente, suponer que cada elemento x de M puede ser escrito de manera única como una suma finita de elementos de M_α. Si $x \in M_\beta \cap \sum_{\alpha \neq \beta} M_\alpha$, entonces $x = x_\beta$ para algún $x_\beta \in M_\beta$ y $x = \sum_{\alpha \neq \beta} x_\alpha$, donde $x_\alpha \in M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$, $\alpha \neq \beta$. De esta manera, si $\sum_\Delta y_\alpha$ es tal que $y_\beta = -x_\beta$ y $y_\alpha = x_\alpha$ cuando $\alpha \neq \beta$, entonces $\sum_\Delta y_\alpha = 0$. Pero 0 puede ser escrito como $0 = \sum_\Delta 0_\alpha$, donde $0 = 0_\alpha \in M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. De aquí, $\sum_\Delta y_\alpha = \sum_\Delta 0_\alpha$ da $x_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$, así $x = 0$. Consecuentemente, la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es directa. $\square$

Observación. También es el caso que si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de un R-módulo M, entonces la suma $\sum_\Delta M_\alpha$ es directa si y solo si para cada suma finita $\sum_\Delta x_\alpha$ tal que $\sum_\Delta x_\alpha = 0$ tenemos que $x_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$. Notar que si la suma $\sum_\Delta x_\alpha$ es directa y $\sum_\Delta x_\alpha = 0$, entonces $\sum_\Delta x_\alpha = \sum_\Delta 0_\alpha$ y la proposición anterior da $x_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$. Inversamente, suponer que $\sum_\Delta x_\alpha = 0$ implica que $x_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$. Si $x \in M_\alpha \cap \sum\limits_{\beta\neq\alpha} M_\beta$, entonces $x = x_\alpha$ y $x = \sum\limits_{\beta\neq\alpha} x_\beta$, así $x_\alpha + \sum\limits_{\beta\neq\alpha}(-x_\beta) = 0$ da $x = x_\alpha = 0$, así la suma $\sum\limits_\Delta M_\alpha$ es directa.

Existe una conexión fundamental entre sumas directas externas y sumas directas internas. Puesto que la sumas directas internas y las sumas directas externas están incluidas en la siguiente proposición, para los propósitos de esta proposición y su demostración, $\bigoplus^i$ y $\bigoplus^e$ denotarán una suma directa interna y externa, respectivamente.

Proposición 2.8. *Las siguientes condiciones se cumplen para cualquier R-módulo M.*

(1). Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de M tal que $M = \bigoplus^i_\Delta M_\alpha$, entonces $M \cong \bigoplus^e_\Delta M_\alpha$.

(2). Si existe una familia $\{N_\alpha\}_\Delta$ de R-submódulos de M tal que $M \cong \bigoplus^e_\Delta N_\alpha$, entonces existe una familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ se submódulos de M tal que $M = \bigoplus^i_\Delta M_\alpha$ y $N_\alpha \cong M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$.

Demostración. (1) Si $M = \bigoplus^i_\Delta M_\alpha$, entonces cada elemento de M puede ser escrito como una suma finita $\sum_\Delta x_\alpha$, donde los $x_\alpha \in M_\alpha$ son únicos. Se sigue que $\varphi : \bigoplus^i_\Delta M_\alpha \to \bigoplus^e_\Delta M_\alpha$ definido por $\varphi(\sum_\Delta x_\alpha) = (x_\alpha)$ es un isomorfismo.

(2) Si $\varphi : \bigoplus^e_\Delta N_\alpha \to M$ es un isomorfismo, dejar que $M_\alpha = \varphi i_\alpha(N_\alpha)$ para cada $\alpha \in \Delta$, donde $i_\alpha : N_\alpha \to \bigoplus^e_\Delta N_\alpha$ es la inyección canónica. Se tiene que $M = \bigoplus^i_\Delta M_\alpha$. Es claro que $N_\alpha \cong M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Delta$. $\square$

Proposición 2.9. *Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos. Entonces*

(1) $Hom_R(\bigoplus_\Delta M_\alpha, N) \cong \prod_\Delta Hom_R(M_\alpha, N)$,

(2) $Hom_R(N, \prod_\Delta M_\alpha) \cong \prod_\Delta Hom_R(N, M_\alpha)$

para cualquier R-módulo N.

4. Módulos Libres

Recordar que si N es un submódulo de un R-módulo M, entonces un subconjunto X de N tal que $N = \sum_X xR$ es llamado un *conjunto de generadores* para N y decimos que N es *generado por* X. Si X es un conjunto finito, entonces N es llamado *finitamente generado*. Recordar también que si N es generado por X y si $\{N_\alpha\}$ es una familia de submódulos de M que contienen a X, entonces $N = \cap_\Delta N_\alpha = \sum_X xR$.

Cada submódulo N de un R-módulo M tiene al menos un conjunto de generadores, a saber el conjunto N. Además, un submódulo puede tener más de un conjunto de generadores. Por ejemplo, el submódulo $N = \{[0], [2], [4], [6]\}$ del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_8$ es generado por $\{[2]\}$, por $\{[6]\}$ y por $\{[2], [4]\}$. De aquí, un conjunto de generadores de un submódulo no necesita ser único y no es necesario para conjuntos generadores para un submódulo que tengan la misma cardinalidad. Si M es un R-módulo y X es un conjunto de generadores de M, entonces decimos que X es un *conjunto mínimo de generadores* para M si M no es generado por un subconjunto propio de X. Los conjuntos $\{[2]\}$ y $\{[6]\}$ son ambos conjuntos mínimos de generadores de $\{[0], [2], [4], [6]\}$.

Notación. Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos tal que $M_\alpha = M$ para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\prod_\Delta M_\alpha$ y $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ serán denotados por M^Δ y $M^{(\Delta)}$, respectivamente. Recordar que $M^{(n)}$ representa el producto directo $M \times M \times \cdots \times M$ de n factores de M.

Definición 2.4. Si M es un R-módulo, entonces un conjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$ de elementos de M es llamado *linealmente independiente* si la única manera de que una suma finita $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$ de elementos de $\{x_\alpha\}_\Delta$ pueda ser tal que $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha = 0$ es para $a_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$. Si existe una suma finita $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$ de elementos de $\{x_\alpha\}_\Delta$ tal que $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha = 0$ con al menos un $a_\alpha \neq 0$, entonces el conjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$ es *linealmente dependiente*. Si un R-módulo F tiene un conjunto linealmente independiente $\{x_\alpha\}_\Delta$ de generadores, entonces $\{x_\alpha\}_\Delta$ es llamado una base para F y F es llamado un R-*módulo libre* con base $\{x_\alpha\}_\Delta$. Un conjunto X de elementos linealmente independientes de un R-módulo M es llamado un *conjunto linealmente independiente máximo* de elementos de M si ningún conjunto de elementos linealmente independientes de M propiamente contiene a X.

Ejemplos

1. Notar que el conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto linealmente independiente en cada R-módulo M. Suponer lo contrario significaría que existen elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \emptyset$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ tal que

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$$

   con al menos un $a_i \neq 0$, un absurdo evidente. Hemos visto antes que el módulo cero es generado por $\emptyset$, así consideraremos al módulo cero para ser un R-módulo libre con base $\emptyset$.
2. Si el anillo R es visto como un R-módulo, entonces R es un R-módulo libre con base $\{1\}$.
3. El R-módulo $R^{(n)}$ es un R-módulo libre con base $\{e_i\}_{i=1}^n$, donde

$$\begin{aligned} e_1 =&(1,0,0,\ldots,0),\\ e_2 =&(0,1,0,\ldots,0),\\ e_3 =&(0,0,1,\ldots,0),\\ &\vdots\\ e_n =&(0,0,0,\ldots,1). \end{aligned}$$

   En general, si Δ es un conjunto no vacío, entonces $R^{(\Delta)}$ es un R-módulo libre con base $\{e_\alpha\}_\Delta$, donde $e_\alpha = (a_\beta)$ con $a_\beta = 1$ si $\beta = \alpha$ y $a_\beta = 0$ si $\beta \neq \alpha$. La base $\{e_\alpha\}_\Delta$ será mencionada como la *base canónica* para $R^{(\Delta)}$. Notar que $R^{(\Delta)}$ también es un R-módulo izquierdo libre con la misma base $\{e_\alpha\}_\Delta$.
4. El anillo de matrices $\mathbb{M}_n(R)$ es un R-módulo libre. Una base de $\mathbb{M}_n(R)$ es el conjunto de matrices unitarias $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ con n^2 elementos. Por ejemplo, si $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_2(R)$, entonces $(a_{ij}) = E_{11}a_{11} + E_{12}a_{12} + E_{21}a_{21} + E_{22}a_{22}$.

Para evitar discusiones triviales, suponemos que si F es un R-módulo libre, entonces $F \neq 0$.

PROPOSICIÓN 2.10. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un subconjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$ de un R-modulo M.*

(1) $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base para M.
(2) $\{x_\alpha\}_\Delta$ es (a) un subconjunto linealmente independiente máximo de M y (b) un conjunto mínimo de generadores de M.

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$ Suponer que $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base para M y que $\{x_\alpha\}_\Delta$ no es un subconjunto máximo de elementos linealmente independientes de M. Sea $\{y_\beta\}_\Gamma$ un conjunto de elementos linealmente independientes de M tal que $\{x_\alpha\}_\Delta \subsetneq \{y_\beta\}_\Gamma$. Si $y \in \{y_\beta\}_\Gamma - \{x_\alpha\}_\Delta$, entonces puesto que $\{x_\alpha\}_\Delta$ generan a M vemos que $y = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$, donde $a_\alpha = 0$ para casi todo $\alpha \in \Delta$. Pero entonces $y + \sum_\Delta x_\alpha(-a_\alpha) = 0$ es una combinación lineal de elementos en $\{y_\beta\}_\Gamma$ y no todos los a_α pueden ser cero, puesto que $y \neq 0$. De esta manera, $\{y_\beta\}_\Gamma$ es linealmente dependiente, una contradicción, así tenemos (a). Suponer en seguida que $\{x_\alpha\}_\Delta$ no es un conjunto mínimo de generadores de M. Entonces existe un conjunto $\{y_\beta\}_\Gamma \subsetneq \{x_\alpha\}_\Delta$ tal que $\{y_\beta\}_\Gamma$ genera a M. Si $x \in \{x_\alpha\}_\Delta - \{y_\beta\}_\Gamma$, entonces podemos escribir $x = \sum_\Gamma y_\alpha a_\alpha$. Pero entonces $x + \sum_\Gamma y_\alpha(-a_\alpha) = 0$ es una combinación lineal de elementos en $\{x_\alpha\}_\Delta$ y no todos los a_α pueden ser cero, contradiciendo el hecho de que $\{x_\alpha\}_\Delta$ es linealmente independiente. De aquí, tenemos (b).

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea $\{x_\alpha\}_\Delta$ un subconjunto linealmente independiente de M el cual es al mismo tiempo un conjunto mínimo de generadores de M. Entonces es inmediato que $\{x_\alpha\}$ es una base para M. □

PROPOSICIÓN 2.11. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un subconjunto $\{x_\alpha\}_\Delta$ de un R-módulo M.*

(1) $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base para M.
(2) Cada elemento $x \in M$ puede ser escrito como $x = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$, donde a_α es única y $a_\alpha = 0$ para casi todo $\alpha \in \Delta$.
(3) $M = \bigoplus_\Delta x_\alpha R$.

COROLARIO 2.1. *Un R-módulo F es libre si y solo si existe un conjunto Δ tal que $F \cong R^{(\Delta)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que F es un R-módulo libre con base $\{x_\alpha\}$. Entonces $F = \bigoplus_\Delta x_\alpha R$, así sea $f : F \to R^{(\Delta)}$ tal que $f(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha) = (a_\alpha)$. Afirmamos que f es un isomorfismo. Si $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$,

$\sum_\Delta x_\alpha b_\alpha \in \bigoplus_\Delta x_\alpha R$ y $a \in R$, entonces

$$\begin{aligned} f\big(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha + \sum_\Delta x_\alpha b_\alpha\big) =& f\big(\sum_\Delta x_\alpha(a_\alpha + b_\alpha)\big) \\ =&(a_\alpha + b_\alpha) = (a_\alpha) + (b_\alpha) \\ =& f\big(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha\big) + f\big(\sum_\Delta x_\alpha b_\alpha\big) \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\big(\big(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha\big)a\big) =& f\big(\sum_\Delta x_\alpha(a_\alpha a)\big) \\ =&(a_\alpha a) = (a_\alpha)a \\ =&\big(f\big(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha\big)\big)a. \end{aligned}$$

así f es R-lineal. Si $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha \in Nu(f)$, entonces $(a_\alpha) = 0$ indica que $a_\alpha = 0$ para cada $\alpha \in \Delta$. De esta manera, $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha = 0$, así (2) Proposición 1.6 muestra que f es inyectivo. si $(a_\alpha) \in R^{(\Delta)}$, entonces $\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha \in F$ y $f(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha) = (a_\alpha)$, así f también es suprayectiva.

Inversamente, suponer que existe un conjunto Δ tal que $F \cong R^{(\Delta)}$. Primero, notar que $R^{(\Delta)}$ es un R-módulo libre con base $\{e_\alpha\}_\Delta$, donde $e_\alpha = (a_\beta)$ con $a_\beta = 1$ si $\beta = \alpha$ y $a_\beta = 0$ cuando $\beta \neq \alpha$. Si $f : R^{(\Delta)} \to F$ es un isomorfismo y $f(e_\alpha) = x_\alpha$, entonces se sigue que $\{x_\alpha\}_\Delta$ es una base para F. □

Los elementos base de un R-módulo libre F determinan únicamente los homomorfismos con dominio F.

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea F un R-módulo libre con base $\{x_\alpha\}_\Delta$.*

(1) Si $f, g : F \to M$ son homomorfismos tal que $f(x_\alpha) = g(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Delta$, entonces $f = g$.

(2) Si $f : \{x_\alpha\}_\Delta \to M$ es una función, entonces existe un homomorfismo único $g : F \to M$ tal que $g(x_\alpha) = f(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Delta$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Si $x \in F$ y $x = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$, suponer que $f, g : F \to M$ son homomorfismos tales que $f(x_\alpha) = g(x_\alpha)$ para todo $\alpha \in \Delta$. Entonces $f(x) = f(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha) = \sum_\Delta f(x_\alpha)a_\alpha = \sum_\Delta g(x_\alpha)a_\alpha = g(\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha) = g(x)$.

(2) Si $g : F \to M$ está definido por $g(x) = \sum_\Delta f(x_\alpha)a_\alpha$ para cada $x = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha \in F$, entonces g es el homomorfismo deseado. La unicidad de g se sigue de (1). □

La función $g : F \to M$ construida en la demostración de (2) de la Proposición 2.12 se dice que es obtenida *extendiendo f linealmente a F*.

PROPOSICIÓN 2.13. *Cada R-módulo M es la imagen homomorfa de un R-módulo libre. Además, si M es finitamente generado, entonces el módulo libre puede ser escogido para ser finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M R-módulo y suponer que $\{x_\alpha\}_\Delta$ es un conjunto de generadores de M. Si $f : R^{(\Delta)} \to M$ está definido por $f((a_\alpha)) = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
f((a_\alpha) + (b_\alpha)) =& f((a_\alpha + b_\alpha)) = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha + \sum_\Delta x_\alpha b_\alpha \\
=& f((a_\alpha)) + f((b_\alpha)) \text{ y} \\
f((a_\alpha)a) =& f((a_\alpha a)) \\
=& \sum_\Delta x_\alpha(a_\alpha a) = (\sum_\Delta x_\alpha a_\alpha)a \\
=& f((a_\alpha))a
\end{aligned}$$

para todo $(a_\alpha), (b_\alpha) \in R^{(\Delta)}$ y $a \in R$. De aquí, f es R-lineal. Si $x \in M$, entonces x puede ser escrito como $x = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$, donde $a_\alpha = 0$ para casi todo $\alpha \in \Delta$. Se sigue que $(a_\alpha) \in R^{(\Delta)}$, así $f((a_\alpha)) = \sum_\Delta x_\alpha a_\alpha$ y f es de esta manera un epimorfismo.

Si M es finitamente generado, entonces Δ es un conjunto finito. Si $\Delta = \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces M es una imagen homomorfa del R-módulo libre finitamente generado $R^{(n)}$. $\square$

Observación. A causa del Corolario 2.1 vemos que cualquier conjunto X determina un R-módulo libre $R^{(X)}$. Si $X = \emptyset$, entonces hemos visto que $R^{(X)} = 0$ es un R-módulo libre con base $\emptyset$. Si $X \neq \emptyset$, entonces X también puede ser considerado para ser una base para $R^{(X)}$. Claro está, sea $\delta : X \times X \to R$ tal que $\delta(x, y) = \delta_{xy}$, donde $\delta_{xx} = 1$ y $\delta_{xy} = 0$ si $x \neq y$. La función δ es llamada la *delta de Kronecker* definida sobre $X \times X$. Si $e_x = (\delta_{xy})$ para cada $x \in X$, entonces $\{e_x\}_X$ es una base para $R^{(X)}$. La función $f : X \to \{e_x\}_{x \in X}$ tal que $f(x) = e_x$ es una biyección, así si identificamos cada $x \in X$ con e_x, entonces cada elemento de $R^{(X)}$ puede ser expresado únicamente como $\sum_X x a_x$. Bajo esta identificación, X es una base para $R^{(X)}$ y $R^{(X)}$ junto con la función f es llamado el *módulo libre sobre* X. En este entorno, el módulo libre $(R^{(X)}, f)$ tiene la propiedad de la función universal en el sentido de que si M es cualquier R-módulo y si $g : X \to M$ es cualquier función al conjunto subyacente de M, entonces existe un homomorfismo único $\varphi : R^{(X)} \to M$ tal que $\varphi f = g$.

Consecuentemente, un módulo libre $R^{(X)}$ sobre un conjunto X es único hasta isomorfismo.

Definición 2.5. Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de R-módulos. Un submódulo $M \subset \prod_\Delta M_\alpha$ es llamado el *producto subdirecto* de los M_α, si para cada $\alpha \in \Delta$, la restricción de la proyección π_α a M, $\pi_\alpha|_M : M \to M_\alpha$ es un epimorfismo.

Referente a las propiedades del producto se verifica fácilmente.

Proposición 2.14. *(1) Un módulo N es isomorfo a un producto subdirecto de $\{M_\alpha\}_\Delta$ si y solo si existe una familia de epimorfismos $f_\alpha : N \to M_\alpha$ con $\bigcap_\Delta Nu(f_\alpha) = 0$.*

(2) Si $\{N_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos del R-módulo N, entonces $N/\bigcap_\Delta N_\alpha$ es isomorfo a un producto subdirecto de los módulos $\{N/N_\alpha\}_\Delta$.

Definición 2.6. Un R-módulo N es llamado *subdirectamente irreducible*, si no es un producto subdirecto de módulos cocientes propios.

Proposición 2.15. *Un R-módulo N es subdirectamente irreducible si y solo si la intersección de todos los submódulos no cero de N es no cero.*

5. Sucesiones Exactas en $\boldsymbol{Mod_R}$

Definición 2.7. Una sucesión $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ de R-módulos y homomorfismos de R-módulos es llamada *exacta en* M si $Im\, f = Nu(g)$, mientras que una sucesión de la forma

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots,$$

$n \in \mathbb{Z}$, es llamada una *sucesión exacta* si es exacta en M_n para cada $n \in \mathbb{Z}$. Una sucesión del tipo

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

que es exacta en M_1, en M y en M_2 es llamada una *sucesión exacta corta*.

Observación. No hay nada especial acerca de considerar sucesiones del tipo

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

con subíndices crecientes. Podríamos del mismo modo haber considerado sucesiones del tipo

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots ,$$

con subíndices decrecientes.

Si $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ es una sucesión exacta corta, entonces se sigue que f es un monomorfismo y g es un epimorfismo. Si N es un submódulo de M, entonces $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\eta} M/N \to 0$ es una sucesión exacta corta, donde i es la inyección canónica y η es el homomorfismo natural. Un homomorfismo $f : M \to N$ da lugar a dos sucesiones exactas cortas canónicas

$$0 \longrightarrow Nu(f) \longrightarrow M \longrightarrow f(M) \longrightarrow 0 \text{ y}$$

$$0 \longrightarrow f(M) \longrightarrow N \longrightarrow Coker\, f \longrightarrow 0 \text{ y}$$

donde los homomorfismos son los obvios.

DEFINICIÓN 2.8. Si $f : M_1 \to M$ es un monomorfismo, entonces decimos que f es un *monomorfismo que se escinde* si existe un homomorfismo $f' : M \to M_1$ tal que $f'f = id_{M_1}$. Igualmente, si $g : M \to M_2$ es un epimorfismo y si existe un homomorfismo $g' : M_2 \to M$ tal que $gg' = id_{M_2}$ entonces decimos que g es un *epimorfismo que se escinde*.

Notar que si $f : M_1 \to M$ es un monomorfismo que se escinde, entonces $f' : M \to M_1$ es un epimorfismo que se escinde y si $g : M \to M_2$ es un epimorfismo que se escinde, entonces $g' : M_2 \to M$ es un monomorfismo que se escinde.

PROPOSICIÓN 2.16. *Si $M_1 \xrightarrow{f} M$ es un monomorfismo que se escinde con $f' : M \to M_1$ tal que $f'f = id_{M_1}$, entonces $M = Im\, f \oplus Nu(f')$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in M$, entonces $f'(x) \in M_1$, así $f(f'(x)) \in M$. Si $z = x - f(f'(x))$, entonces $f'(z) = f'(x) - f'(f(f'(x))) = 0$ puesto que $f'f = id_{M_1}$. De esta manera $z \in Nu(f')$ y $x = f(f'(x)) + z \in Im\, f \oplus Nu(f')$. Por lo tanto, $M = Im\, f + Nu(f')$. Si $y \in Im\, f \cap Nu(f')$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in M_1$, así $0 = f'(y) = f'f(x) = x$. De aquí $y = 0$ y tenemos que $M = Im\, f \oplus Nu(f')$. $\square$

La Proposición 2.16 también establece la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.17. *Si $M \xrightarrow{g} M_2$ es un epimorfismo que se escinde y $g' : M_2 \to M$ es tal que $gg' = id_{M_2}$, entonces $M = Img' \oplus Nu(g)$.*

6. Sucesiones Exactas Cortas Que Se Escinden

DEFINICIÓN 2.9. Si S:$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ es una sucesión exacta corta de R-módulos y R-homomorfismos de módulos y f es un monomorfismo que se escinde, entonces se dice que S se *escinde a la izquierda*. Si g es un epimorfismo que se escinde, entonces se dice que *S* se *escinde a la derecha*.

La conexión entre una sucesión exacta corta que se escinde a la izquierda y una que se escinde a la derecha está dada por la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.18. *Una sucesión exacta corta de R-módulos y R-homomorfismos de módulos se escinde a la izquierda si y solo si se escinde a la derecha.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ es una sucesión exacta corta de R-módulos y R-homomorfismos de módulos que se escinde a la izquierda y sea $f' : M \to M_1$ una función tal que $f'f = id_{M_1}$. La Proposición 2.16 muestra que $M = Im\, f \oplus Nu(f')$. Notamos que

$$f'(x - f(f'(x))) = f'(x) - f'(f(f'(x))) = f'(x) - f'(x) = 0,$$

así $(x - f(f'(x)) \in Nu(f')$ para cada $x \in M$. Ahora definir $g' : M_2 \to M$ por $g'(y) = x - f(f'(x))$, donde $x \in M$ es tal que $g(x) = y$. Tal x existe porque g es un epimorfismo, pero puede haber más de un x de este tipo. Sin embargo, afirmamos que g' está bien definida. Suponer que $x' \in M$ es tal que $g(x') = y$. Entonces $x - x' \in Nu(g) = Im\, f$, así

$$\begin{aligned}(x - f(f'(x))) - (x' - f(f'(x'))) =&(x - x') - (f(f'(x) - f(f'(x'))) \\ =&(x - x') - f(f'(x - x')) \\ \in& Nu(f') \cap Im\, f = 0.\end{aligned}$$

De esta manera, se sigue que g' está bien definida. Si $y \in M_2$ y $g'(y) = x - f(f'(x))$, donde $x \in M$ es tal que $g(y) = x$, entonces $g(g'(y)) = g(x - f(f'(x))) = g(x) - g(f(f'(x))) = g(x) = y$ puesto que $gf = 0$. De aquí, $gg' = id_{M_2}$, así la sucesión se escinde a la derecha. El inverso tiene una demostración similar. □

A causa de la Proposición 2.18, si una sucesión exacta corta se escinde o a la izquierda o a la derecha, entonces simplemente decimos que la *sucesión se escinde* o que es *exacta que se escinde*. La siguiente proposición da información adicional sobre sucesiones exactas cortas.

PROPOSICIÓN 2.19. *Una sucesión exacta corta* $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ *se escinde si y solo si una de las siguientes tres condiciones equivalentes se cumple.*

(1) $Im\, f$ *es un sumando directo de* M*.*
(2) $Nu(f)$ *es un sumando directo de* M*.*
(3) $M \cong M_1 \oplus M_2$*.*

DEMOSTRACIÓN. Primero mostramos que las tres condiciones son equivalentes. Notar que (1) claramente implica (2) puesto que $Im f = Nu(g)$. Si $Nu(g)$ es un sumando directo de M, sea N un submódulo de M tal que $M = Nu(g) \oplus N$. Entonces $M_2 \cong M/Nu(g) \cong N$ y $Nu(g) = Im\, f \cong M_1$ y así tenemos que $M \cong M_1 \oplus M_2$. De esta manera, (2) implica (3).

Suponer que (3) se cumple. Puesto que $Im\, f \cong M_1$, tenemos que $M \cong Im\, f \oplus M_2$, así la Proposición 2.8 muestra que existen submódulos N_1 y N_2 de M tal que $M = N_1 \oplus N_2$ con $Im\, f \cong N_1$ y $M_2 \cong N_2$. Afirmamos que $M = Im\, f \oplus N_2$. Si $z \in M$, entonces existen $x \in N_1$ y $y \in N_2$ tal que $z = x + y$. Si $w \in M_1$ es tal que $f(w) = x$, entonces $z = f(w) + y$, así $M = Im\, f + N_2$. Se sigue que $Im\, f \cap N_2 = 0$ y así $Im\, f$ es un sumando directo de M. De esta manera, (3) implica (1).

Finalmente, suponer que $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ se escinde. Entonces la Proposición 2.16 da $M = Im\, f \oplus Nu(f')$ donde f' es tal que $f'f = id_{M_1}$. De aquí, (1) se cumple. Inversamente, suponer que (1) se cumple y sea N un submódulo de M tal que $M = Im\, f \oplus N$. Si $f' : Im\, f \oplus N \to M_1$ es tal que $f'(f(x) + y) = x$, entonces f' es tal que $f'f = id_{M_1}$, así $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ se escinde. □

7. Funtor $\boldsymbol{Hom}$

Ahora investigamos un importante bifuntor el cual es aditivo en cada variable. Para el resto de la sección, adoptamos la notación Hom para el bifuntor

$$Hom_R(-,-) : \boldsymbol{Mod_R^{op}} \times \boldsymbol{Mor_R} \to \boldsymbol{Ab}.$$

Propiedades de $\boldsymbol{Hom}$

Si X es un R-módulo fijo y $f : M \to N$ es un función R-lineal entonces el funtor contravariante

$$Hom_R(-, X) : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Ab}$$

es tal que

$$Hom_R(f, X) = f^* : Hom_R(N, X) \to Hom_R(M, X) \text{ donde } f^*(h) = hf.$$

Para el funtor covariante

$$Hom_R(X,-) : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Ab}$$

tenemos

$Hom_R(X,f) = f_* : Hom_R(X,M) \to Hom_R(X,N)$ donde $f_*(h) = fh.$

De esta manera, si

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$$

es una sucesión de R-módulos y R-homomorfismos de módulos, entonces para cualquier R-módulo X

$$Hom_R(M_2,X) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,X) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M_1,X) \text{ y}$$

$$Hom_R(X,M_1) \xrightarrow{f^*} Hom_R(X,M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(X,M_2)$$

son sucesiones de grupos abelianos aditivos y homomorfismos de grupos.

Una de las primeras preguntas que hay que abordar en relación con Hom es, si

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta en $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces

$$0 \longrightarrow Hom_R(M_2,X) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,X) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M_1,X) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow Hom_R(X,M_1) \xrightarrow{f^*} Hom_R(X,M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(X,M_2) \longrightarrow 0$$

son sucesiones exactas en $\boldsymbol{Ab}$. La siguiente definición ayudará a clarificar esto.

DEFINICIÓN 2.10. Sean R y S anillos. Un funtor $\mathcal{F} : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Mod_S}$ es llamado *exacto izquierdo* si

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(M_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M_2)$$

es una sucesión exacta en $\boldsymbol{Mod_S}$ siempre que

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$$

sea exacta en $\boldsymbol{Mod_R}$. Igualmente, si

$$\mathcal{F}(M_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M_2) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\boldsymbol{Mod_S}$ para cada sucesión exacta

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

en $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces $\mathcal{F}$ es llamado *exacto derecho*. Si $\mathcal{F}$ es exacto izquierdo y derecho, entonces $\mathcal{F}$ es llamado un *funtor exacto*. Si $\mathcal{F} : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Mod_S}$ es contravariante y

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(M_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M_1)$$

es exacta en $\boldsymbol{Mod_S}$ siempre que

$$M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$$

es exacta en $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces $\mathcal{F}$ es llamado *exacto izquierdo*. Si

$$\mathcal{F}(M_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(M_1) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\boldsymbol{Mod_S}$ para cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$$

en $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces $\mathcal{F}$ es *exacto derecho*. Si $\mathcal{F}$ es exacto izquierdo y derecho, entonces $\mathcal{F}$ es un *funtor contravariante exacto*.

De esta manera, funtores exactos, o covariantes o contravariantes, son precisamente esos funtores que mandan sucesiones exactas cortas a sucesiones exactas cortas.

Proposición 2.20. *Para cualquier R-módulo X, $Hom_R(-, X) : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Ab}$ y*
$Hom_R(X, -) : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Ab}$ son exactos izquierdos.

Proposición 2.21. *Si $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta corta que se escinde en $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces para cualquier R-módulo X*

$$(1)\ \ 0 \longrightarrow Hom_R(M_2, X) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M, X) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M_1, X) \longrightarrow 0 \ \ \textit{y}$$

$$(2)\ \ 0 \longrightarrow Hom_R(X, M_1) \xrightarrow{f_*} Hom_R(X, M) \xrightarrow{g_*} Hom_R(X, M_2) \longrightarrow 0$$

son sucesiones exactas cortas que se escinden en $\boldsymbol{Ab}$.

Capítulo 3

Condiciones De Cadena

Empezamos con una discusión de la generación y cogeneración de módulos la cual es seguida por una introducción de condiciones de cadena sobre módulos. Las condiciones de cadena juegan un papel importante en la clasificación de los anillos.

1. Generadores

Recordar que un subconjunto (finito) X de un R-módulo M es un *conjunto de generadores* (finito) de M si $M = \sum_X xR$. Si $\mathcal{S}$ es un conjunto de submódulos de M tal que $M = \sum_{\mathcal{S}} N$, entonces se dice que $\mathcal{S}$ *genera a* M. Recordar también que cada módulo M tiene al menos un conjunto X de generadores, a saber el conjunto $X = M$.

Proposición 3.1. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un R-módulo M.*

(1) Para cada familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de submódulos de M tal que $\{M_\alpha\}_\Delta$ genera a M existe un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ tal que $\{M_\alpha\}_F$ genera a M.

(2) Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es cualquier familia de R-módulos, entonces para cada conjunto de funciones R-lineales $\{f_\alpha : M_\alpha \to M\}_\Delta$ tal que $\{Im\, f_\alpha\}_\Delta$ genera a M existe un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ tal que $\{Im\, f_\alpha\}_F$ genera a M.

(3) Para cada familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos para la cual existe un epimorfismo $\bigoplus_\Delta M_\alpha \to M$ existe un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ y un epimorfismo $\bigoplus_F M_\alpha \to M$.

(4) M es finitamente generado.

Definición 3.1. Un R-módulo M es *generado por un conjunto* $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos si existe un epimorfismo $\bigoplus_\Delta M_\alpha \to M$. Una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos *genera a* $\boldsymbol{Mod_R}$ si cada R-módulo M es generado por un conjunto $\{M_\alpha\}_\Delta$ de módulos en $\mathcal{C}$. En este caso, también decimos que $\mathcal{C}$ es una *clase de generadores* para $\boldsymbol{Mod_R}$. Un R-módulo M genera a un R-módulo N si existe un epimorfismo $M^{(\Delta)} \to N$ para algún conjunto Δ. Si $\mathcal{C} = \{M\}$ genera a $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces simplemente diremos que M genera a $\boldsymbol{Mod_R}$.

Es obvio que $\boldsymbol{Mod_R}$ tiene la clase de todos los R-módulos como una clase de generadores. Además, si $f : M \to N$ es un epimorfismo, entonces cualquier conjunto de módulos que genera a M también genera a N. Consecuentemente, si M es finitamente generado, entonces así es N. Notar también que cada módulo es la imagen homomorfa de un R-módulo libre, así R genera a $\boldsymbol{Mod_R}$.

DEFINICIÓN 3.2. Para un R-módulo L , el submódulo

$$Tr(\mathcal{U}, L) = \sum \{Im(h)/h \in Hom(U, L), U \in \mathcal{U}\} \subset L$$

es llamado la *traza de* $\mathcal{U}$ *en* L. Si $\mathcal{U}$ consiste de un solo módulo U simplemente escribimos $Tr(U, L)$.

PROPOSICIÓN 3.2 (Propiedades de la traza). *Sea* $\mathcal{U}$ *un conjunto de* R*-módulos y* L *un* R*-módulo.*

(1) $Tr(\mathcal{U}, L)$ *es el submódulo más grande de* L *generado por* $\mathcal{U}$*.*
(2) $L = Tr(\mathcal{U}, L)$ *si y solo si* L *es* $\mathcal{U}$*-generado.*
(3) $Tr(\mathcal{U}, L)$ *es un* $End_R(L)$*-submódulo de* L *(puesto que* $Hom(U, L)$ *es un* $End_R(L)$*-módulo).*
(4) Si $\mathcal{U}$ *contiene un solo módulo* U*, entonces*

$$Tr(U, L) = UHom(U, L) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(u_i)/u_i \in U, \varphi_i \in Hom(U, L), k \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Debido a al Proposición 3.1 un R-módulo M es finitamente generado si y solo si para cada conjunto de submódulos $\{M_\alpha\}_\Delta$ tal que $M = \sum_\Delta M_\alpha$, existe un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ tal que $M = \sum_F M_\alpha$. Esto lleva a la siguiente definición de un módulo finitamente cogenerado.

2. Cogeneradores

DEFINICIÓN 3.3. Un R-módulo M es *finitamente cogenerado* si siempre que $\{M_\alpha\}_\Delta$ sea un conjunto de submódulos de M tal que $\bigcap_\Delta M_\alpha = 0$ existe un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ tal que $\bigcap_F M_\alpha = 0$.

PROPOSICIÓN 3.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un* R*-módulo* M*.*

(1) M *es finitamente cogenerado.*
(2) Para cada familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ *de* R*-módulos y cada familia* $\{f_\alpha : M_\alpha \to M\}_\Delta$ *de* R*-homomorfismos con* $\bigcap_\Delta Nu(f_\alpha) = 0$ *existe un subconjunto finito* $F \subseteq \Delta$ *tal que* $\bigcap_F Nu(f_\alpha) = 0$*.*
(3) Para cada familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ *de* R*-módulos para la cual existe un monomorfismo* $M \to \prod_\Delta M_\alpha$ *existe un subconjunto finito* $F \subseteq \Delta$ *y un monomorfismo* $M \to \prod_F M_\alpha$*.*

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$ es claro.

$(2) \Rightarrow (3)$ Si $\phi : M \to \prod_\Delta M_\alpha$ es un monomorfismo, entonces $\bigcap_\Delta Nu(\pi_\alpha \phi) = 0$, donde $\pi_\alpha : \prod_\Delta M_\alpha \to M_\alpha$ es la α-ésima proyección canónica para cada $\alpha \in \Delta$. Por suposición existe un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ tal que $\bigcap_F Nu(\pi_\alpha \phi) = 0$ y esto da un monomorfismo $M \to \prod_F M_\alpha$.

$(3) \Rightarrow (1)$ Sea $\{M_\alpha\}_\Delta$ una familia de submódulos de M tal que $\bigcap_\Delta M_\alpha = 0$. Si $\eta_\alpha : M \to M/M_\alpha$ es el homomorfismo natural para cada $\alpha \in \Delta$, entonces $\phi : M \to \prod_\Delta M/M_\alpha$ definido por $\phi(x) = (\eta_\alpha(x))$ es tal que $Nu(\phi) = \bigcap_\Delta M_\alpha = 0$, así ϕ es un monomorfismo. Pero (3) da un subconjunto finito $F \subseteq \Delta$ y un monomorfismo $M \to \prod_F M/M_\alpha$. de esta manera, $\bigcap_F M_\alpha = 0$ y así tenemos (1). □

DEFINICIÓN 3.4. Un R-módulo M es *cogenerado por un conjunto* $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos si existe un monomorfismo $M \to \prod_\Delta M_\alpha$. Una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos es llamada una *clase de cogeneradores para* $\boldsymbol{Mod_R}$ si cada R-módulo es cogenerado por un conjunto de módulos en $\mathcal{C}$. En este caso, diremos que $\mathcal{C}$ *cogenera a* $\boldsymbol{Mod_R}$. Si $\mathcal{C} = \{M\}$, entonces un R-módulo N es cogenerado por M si existe un conjunto Δ y un monomorfismo $N :\to M^\Delta$. Si $\mathcal{C} = \{M\}$ y $\mathcal{C}$ cogenera a $\boldsymbol{Mod_R}$, entonces decimos que M *cogenera a* $\boldsymbol{Mod_R}$.

Es claro que $\boldsymbol{Mod_R}$ tiene a la clase de todos los R-módulos como una clase cogeneradores. Además, si un R-módulo es (finitamente) cogenerado por $\{M_\alpha\}_\Delta$ y si $fN :\to M$ es un monomorfismo, entonces $\{M_\alpha\}_\Delta$ también (finitamente) cogenera a N.

DEFINICIÓN 3.5. Para cualquier R-módulo L, el submódulo

$$Re(L,\mathcal{U}) = \bigcap \{Nu(f)/f \in Hom(L,U), U \in \mathcal{U}\} \subset L$$

es llamado el *rechazo de* $\mathcal{U}$ *en* L.

PROPOSICIÓN 3.4 (Propiedades del rechazo). *Sea* $\mathcal{U}$ *un conjunto de* R*-módulos y* L *un* R*-módulo.*

(1) $Re(L,\mathcal{U})$ ***es el submódulo más pequeño*** K ***de*** L ***para el cual*** L/K ***es*** $\mathcal{U}$***-cogenerado.***

(2) $Re(L,\mathcal{U}) = 0$ ***si y solo si*** L ***es*** $\mathcal{U}$***-cogenerado.***

(3) $Re(L,\mathcal{U})$ ***es un*** $End_R(L)$***-submódulo de*** L ***(puesto que, para cualquier*** $U \in \mathcal{U}$***, el grupo*** $Hom(L,U)$ ***es un*** $End_R(L)$***-módulo).***

(4) ***En el caso de que*** $\mathcal{U}$ ***consista de un solo módulo*** U***, entonces***

$$Re(L,U) = \bigcap \{Nu(f)/f \in Hom(L,U)\}.$$

DEFINICIÓN 3.6. Un R-módulo N es finitamente cogenerado si para cada monomorfismo $\varphi : N \to \prod_{\Delta} U_\lambda$ (en Mod_R) existe un subconjunto finito $E \subset \lambda$ tal que

$$N \xrightarrow{\varphi} \prod_{\lambda} U_\lambda \xrightarrow{\pi_E} \prod_{E} U_\lambda$$

es un monomorfismo.

La siguiente proposición caracteriza los módulos finitamente cogenerados.

PROPOSICIÓN 3.5. *Para un R-módulo M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) N es finitamente cogenerado.

(b) para cada familia $\{V_\lambda\}_\Delta$ de submódulos de N con $\bigcap_\Delta V_\lambda = 0$, existe un subconjunto finito $E \subset \Delta$ con $\bigcap_E V_\lambda = 0$.

(c) para cad familia de morfismos $\{f_\lambda : N \to U_\lambda\}$ en Mod_R con $\bigcap_\Delta Nu(f_\lambda) = 0$, existe un subconjunto finito $E \subset \Delta$ con $\bigcap_E Nu(f_\lambda) = 0$.

(d) cada submódulo de N es finitamente cogenerado.

Un módulo cíclico $N = n_0 R$ puede ser caracterizado por la propiedad de que cada morfismo $f : M \to N$ con $n_0 \in Im(f)$ es epimorfismo. Dualmente definimos.

DEFINICIÓN 3.7. Un R-módulo N es llamado *cocíclico* si existe un $n_0 \in N$ con la propiedad: cada morfismo $g : N \to M$ con $n_0 \notin Nu(f)$ es monomorfismo.

Recordar que un módulo no cero N es simple si no tiene submódulos propios no cero. Obviamente, los módulos simples son cocíclicos.

La siguiente proposición caracteriza a los módulos cocíclicos.

PROPOSICIÓN 3.6. *Para un R-módulo no cero N las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) N es cocíclico.v

(b) N tiene un submódulo simple K el cual está contenido en cada submódulo no cero de N.

(c) la intersección de todos los submódulos no cero de N es no cero.

(d) N es subdirectamente irreducible.

(e) para cualquier monomorfismo $\varphi : N \to \prod_\Delta U_\lambda$ en Mod_R, existe $\lambda_0 \in \Delta$ para el cual $\pi_{\lambda_0}\varphi : N \to U_{\lambda_0}$ es monomorfismo.

(f) N es una extensión esencial de un módulo simple.

DEMOSTRACIÓN. $(a) \to (b)$ Si U es un submódulo de N, $n_0 \in N$ como en la definición anterior y $n_0 \notin U$, entonces $N \to N/U$ es monomorfismo, es decir, $U = 0$. De aquí n_0R está contenido en cada submódulo no cero de N y por lo tanto es simple.

$(b) \Rightarrow (a)$ Si $K = n_1R$ y $g : N \to M$ es un morfismo con $n_1 \notin Nu(g)$, entonces concluimos que $Nu(g) = 0$. Así, N es cocíclico.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sea $\mathcal{S}$ el conjuntos de todos los submódulos no cero de N que contienen a K. Entonces $\mathcal{S} \neq 0$ porque $N \in \mathcal{S}$. Sea $I = \bigcap_{N' \in \mathcal{S}} N'$. Entonces I es el R-submódulo más pequeño de N conteniendo a K. De aquí, $I \neq 0$.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sea I la intersección de todos los submódulos no cero de N. Entonces I es un submódulo no cero de N contenido en cada submódulo no cero de N. De aquí, I es simple.

$(c) \Rightarrow (d)$ La familia de epimorfismos $\{f_\lambda : N \to N/N_\lambda\}_\Delta$ induce un morfismo $f : N \to \prod_\Delta N/N_\lambda$ con $0 \neq \bigcap_\Delta N_\lambda = \bigcap_\Delta Nu(f_\lambda)$. Por la Proposición 2.14 N es subdirectamente irreducible.

$(d) \Rightarrow (c)$ Se sigue de la Proposición 2.14

$(a) \Rightarrow (e)$ Escoger n_0 como en la definición anterior. Puesto que $0 = Nu(\varphi) = \bigcap_\Delta \pi_\lambda\varphi$ ($n_0 \notin Nu(\varphi)$) debemos tener que $n_0 \notin Nu(\pi_{\lambda_0}\varphi)$ para algún $\lambda_0 \in \Delta$. Entonces $\pi_{\lambda_0}\varphi$ es monomorfismo.

$(e) \Rightarrow (a)$ Es obtenida de la siguiente proposición y de la observación trivial de que submódulos de módulos cocíclicos son cocíclicos.

$(b) \Rightarrow (f)$ Sea K un submódulo simple de N tal que $K \subseteq N'$ para cada submódulo no cero N' de N. De aquí, $K \cap N' = K \neq 0$ para cada submódulo N' de N. De aquí, K es un submódulo esencial de N.

$(f) \Rightarrow (b)$ Sea K un submódulo esencial simple de N. Entonces para cada submódulo no cero N' de N, tenemos que $K \cap N' = K$, es decir, K está contenido en cada submódulo no cero de N. $\square$

PROPOSICIÓN 3.7. *Producto subdirecto de módulos cocíclicos.*

(1) Cada módulo no cero es isomorfo a un producto subdirecto de sus módulos cocientes cocíclicos.

(2) Un R-módulo es finitamente cogenerado si y solo si es isomorfo a un producto subdirecto de finitamente muchos módulos cocíclicos.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $0 \neq N \in Mod_R$ y $0 \neq n \in N$. El conjunto de submódulos U de N con $n \notin U$ ordenado por la inclusión es inductivo y de aquí tiene un elemento máximo $U_n \subset N$ ($n \notin U_n$). Los submódulos L/U_n de N/U_n corresponden a los submódulos L de N conteniendo a U_n, de aquí $n \in L$ si $L \neq U_n$. Por lo tanto $(nR+U_n)/U_n$

está contenido en cada submódulo no cero de N/U_n, es decir, N/U_n es cocíclico.

El morfismo canónico $\varphi : N \to \prod_{N\setminus 0} N/U_n$ con $Nu(\varphi) = \bigcap_{N\setminus 0} Nu(\varphi_n) = 0$.

(2) Veremos más adelante que la suma directa finita de módulos finitamente cogenerados (en particular cocíclicos) es finitamente cogenerada. Esto implica la afirmación por (1). $\square$

Como una consecuencia observamos que la clase de módulos cocíclicos es una clase de cogeneradores en Mod_R.

PROPOSICIÓN 3.8. *(Caracterización de los cogeneradores) Sea $M \in Mod_R$, $\{E_\lambda\}_\Delta$ un conjunto mínimo de representantes de los módulos simples en $\sigma[M]$ y $\widehat{E}_\lambda$ la cápsula M-inyectiva de E_λ, $\lambda \in \Delta$.*

(1) Un módulo $Q \in \sigma[M]$ es un cogenerador en $\sigma[M]$ si y solo si contiene, para cada $\lambda \in \Delta$, un submódulo isomorfo a $\widehat{E}_\lambda$.
(2) $\{\widehat{E}_\lambda\}_\Delta$ es un conjunto de cogeneradores en $\sigma[M]$.
(3) Cada cogenerador en $\sigma[M]$ contiene un submódulo isomorfo a $\bigoplus_\Delta \widehat{E}_\lambda$ (el cual es un cogenerador "mínimo").

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea $Q \in \sigma[M]$ un cogenerador. Puesto que los $\widehat{E}_\lambda$ son cocíclicos por la Proposición 3.6, obtenemos para cada $\lambda \in \Delta$, un monomorfismo $\widehat{E}_\lambda \to Q$.

Ahora suponer que el módulo $Q \in \sigma[M]$ contiene a todos los $\widehat{E}_\lambda$ como submódulos. Puesto que cada módulo cocíclico es una extensión esencial de algún $\widehat{E}_\lambda$ Proposición 3.6 es un submódulo de $\widehat{E}_\lambda$. Pero cada módulo es cogenerado por su módulos cocientes cocíclicos y de aquí es cogenerado por Q.

(2) Si $E = \prod_\Delta^M \widehat{E}_\lambda$, entonces para $\lambda \in \Delta$, $\widehat{E}_\lambda \subset E$. Por (1) E es un cogenerador en $\sigma[M]$ y esto implica que $\{\widehat{E}_\lambda\}_\Delta$ es un conjunto de cogeneradores en $\sigma[M]$.

(3) Sea Q un cogenerador en $\sigma[M]$. Por (1) podemos suponer que $\widehat{E}_\lambda \subset Q$, para cada $\lambda \in \Delta$, y también que $\sum_\Delta \widehat{E}_\lambda \subset Q$. Para cada $\lambda \in \Delta$, obtenemos que $\widehat{E}_\lambda \cap \sum\limits_{\lambda \neq \lambda'} \widehat{E}_{\lambda'} = 0$ (de otra manera $\widehat{E}_\lambda \subset \sum\limits_{\lambda \neq \lambda'} \widehat{E}_{\lambda'}$ para algún $\lambda' \neq \lambda$, contradiciendo la minimalidad de $\{E_\lambda\}_\Delta$). Por lo tanto $\{\widehat{E}_\lambda\}_\Delta$ es una familia independiente y $\bigoplus_\Delta \widehat{E}_\lambda = \sum_\Delta \widehat{E}_\lambda \subset Q$. $\square$

3. Subgeneradores

Ahora queremos definir, para un R-módulo M, una categoría cercanamente conectada con M y de aquí reflejando propiedades de M.

DEFINICIÓN 3.8. Sea M un R-módulo. Decimos que un R-módulo N es *subgenerado por* M, o que M es un *subgenerador para* N, si N es isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado.

Una subcategoría $\mathcal{C}$ de Mod_R es *subgenerada por* M, o M es un *subgenerador para* $\mathcal{C}$, si cada objeto en $\mathcal{C}$ es subgenerado por M.

Denotamos por $\sigma[M]$ la subcategoría completa de Mod_R cuyos objetos son todos los R-módulos subgenerados por M.

PROPOSICIÓN 3.9. *Para un R-módulo M tenemos:*

(1) Para N en $\sigma[M]$, todos los módulos cocientes y submódulos de N pertenecen a $\sigma[M]$.

(2) La suma directa de una familia de módulos en $\sigma[M]$ pertenece a $\sigma[M]$ y es igual al coproducto de estos módulos en $\sigma[M]$.

(3) Los conjuntos

$$\mathcal{M}_e = \{U \subset M^{\mathbb{N}} / U \text{ es finitamente generado}\} \text{ y } \mathcal{M}_z = \{mR/m \in \mathbb{N}\}$$

son conjuntos de generadores en $\sigma[M]$.

Por lo tanto $\sigma[M]$ es llamada una categoría finitamente generada localmente.

(4) $U_e = \bigoplus\{U/U \in \mathcal{M}_e\}$ y $U_z = \bigoplus\{Z/Z \in \mathcal{M}_z\}$ son generadores in $\sigma[M]$.

(5) Para una familia $\{N_\lambda\}_\Delta$ de módulos en $\sigma[M]$, el producto en $\sigma[M]$ existe y está dado por $\prod_\Delta^M N_\lambda = Tr(U_e, \prod_\Delta N_\lambda)$.

4. Módulos Neterianos y Artinianos

En esta sección investigamos las condiciones de cadena ascendente y descendente sobre módulos. Como veremos, existe una conexión entre módulos que satisfacen la condición de la cadena ascendente (descendente) y los módulos que son finitamente generados (finitamente cogenerados).

DEFINICIÓN 3.9. Un R-módulo M satisface la *condición de la cadena ascendente* si cada vez que

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$$

sea una cadena ascendente de submódulos de M, existe un entero positivo n tal que $M_i = M_n$ para todo $i \geq n$. En este caso, decimos que la *cadena termina en* M_n o simplemente la cadena termina. Un R-módulo que satisface la condición de la cadena ascendente es llamado *neteriano*. Si el anillo R es neteriano como un R-módulo, entonces R es llamado un *anillo derecho neteriano*. Los R-módulos izquierdos neterianos y los anillos izquierdos neterianos son definidos en la manera obvia. Un anillo R izquierdo y derecho que es neteriano es un *anillo neteriano*.

DEFINICIÓN 3.10. Un R-módulo M satisface la *condición de la cadena descendente* si cada vez que

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$$

es una cadena descendente de submódulos de M, existe un entero positivo n tal que $M_i = M_n$ para todo $i \geq n$. En este caso, decimos que la *cadena termina en* M_n. Un R-módulo que satisface la condición de la cadena descendente es llamado *artiniano*. Si el anillo R es artiniano como un R-módulo, entonces R es llamado un *anillo derecho artiniano* . Los R-módulos izquierdos artinianos y los anillos izquierdos artinianos son definidos en la manera obvia. Un anillo R izquierdo y derecho que es artiniano es un *anillo artiniano*.

PROPOSICIÓN 3.10. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un R-módulo M.*

(1) M es neteriano.
(2) Cada colección no vacía de submódulos de M, cuando ordenada por la inclusión, tiene un elemento máximo.
(3) Cada submódulo de M es finitamente generado.

PROPOSICIÓN 3.11. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un R-módulo M.*

(1) M es artiniano.
(2) Cada colección no vacía de submódulos de M tiene un elemento mínimo.
(3) Cada módulo cociente de M es finitamente cogenerado.
(4) Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de submódulos de M, existe un subconjunto finito F de Δ tal que $\bigcap_F M_\alpha = \bigcap_\Delta M_\alpha$.

Observación. Si $\mathcal{S}$ es una colección no vacía de submódulos de un R-módulo M, entonces decimos que los *submódulos en* $\mathcal{S}$ *satisfacen la condición de la cadena ascendente* (*descendente*) si cada cadena ascendente (descendente) $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ ($M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$) de submódulos en $\mathcal{S}$ termina.

Capítulo 4

Módulos Inyectivos y Proyectivos

Si U es un subespacio de un espacio vectorial V sobre un anillo con división, entonces U es un sumando directo de V. Esta propiedad se sigue directamente del hecho de que el lema de Zorn puede ser usado para extender una base de U a una base de V. Existen R-módulos que poseen esta propiedad de sumando aun cuando puedan no tener una base. Tales módulos, llamados *módulos inyectivos*, forman una clase importante de módulos.

1. Módulos Inyectivos

DEFINICIÓN 4.1. Un R-módulo M es llamado *inyectivo* si para cada diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

de R-módulos y homomorfismos de R-módulos puede ser completado conmutativamente por un homomorfismo $g : N_2 \to M$.

Es fácil mostrar que si M y N son R-módulos isomorfos, entonces M es inyectivo si y solo si N es inyectivo. También puede ser mostrado que un R-módulo M es inyectivo si y solo si para cada R-módulo N_2 y cada submódulo N_1 de N_2, cada homomorfismo $f : N_1 \to M$ puede ser extendido a un homomorfismo $g : N_2 \to M$. Así en la Definición 4.1, podemos seguramente suponer que N_1 es un submódulo de N_2 y h puede ser reemplazado por la inyección canónica $i : N_1 \to N_2$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Si M es un submódulo inyectivo de un R-módulo N, entonces M es un sumando directo de N.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M es un submódulo inyectivo de un R-módulo N y considerar el diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id_M"'] & N \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

de R-módulos, donde id_M es el homomorfismo identidad sobre M e i es la inyección canónica. Si $g : N \to M$ completa el diagrama conmutativamente, entonces $gi = id_M$. El resultado se sigue inmediatamente de la Proposición 2.16. □

Ejemplos.

1. **No cada R-módulo es Inyectivo.** El $\mathbb{Z}$-módulo $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ no es inyectivo.
2. **Espacios Vectoriales.** Si V es un espacio vectorial sobre un anillo con división D, entonces V es un D-módulo inyectivo.
3. **Los Números Racionales.** El campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

DEFINICIÓN 4.2. Sean M y U dos R-módulos. U es llamado M-*inyectivo* si cada diagrama en $\boldsymbol{Mod_R}$ con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \\ & U & \end{tikzcd}$$

puede ser extendido conmutativamente por un morfismo $M \to U$.

Esta propiedad obviamente es equivalente a la condición de que la función

$$Hom_R(f, U) : Hom_R(M, U) \to Hom_R(K, U)$$

es suprayectiva para cada monomorfismo $f : K \to M$.

DEFINICIÓN 4.3. Un R-módulo M es llamado *auto inyectivo* (o *casi inyectivo*) si es M-inyectivo.

La siguiente proposición útil e importante es debida a R. Baer. Será mencionada como el *criterio de Baer para inyectividad*.

PROPOSICIÓN 4.2 (Criterio de Baer). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un R-módulo M.*

(1) M es inyectivo.

(2) *Para cada ideal derecho A de R, cada homomorfismo $f : A \to M$ puede ser extendido a un homomorfismo $g : R \to M$.*
(3) *Para cada ideal derecho A de R y cada homomorfismo $f : A \to M$ existe un $x \in M$ tal que $f(a) = xa$ para todo $a \in A$.*

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$ de la definición de inyectividad.

$(2) \Rightarrow (3)$. Si g extiende f a R, dejar que $g(1) = x$. Entonces $f(a) = g(a) = g(1)a = xa$ para cada $a \in A$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Si N_1 es un submódulo de N_2, $i : N_1 \to N_2$ es la inyección canónica y $f : N_1 \to M$ es un homomorfismo, entonces necesitamos mostrar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \arrow[dl, dotted, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

puede ser completado conmutativamente por un homomorfismo $g : N_2 \to M$. Considerar el conjunto $\mathcal{S}$ de pares ordenados (X, g), donde X es un submódulo de N_2 tal que $N_1 \subseteq X$ y g restringido a N_1 da f. Ordenar parcialmente $\mathcal{S}$ por $(X, g) \leq (X', g')$ si $X \subseteq X'$ y g' restringida a X produce g. Notar que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ puesto que $(N_1, f) \in \mathcal{S}$. También cualquier cadena creciente $\{(X_i, g_i)/i \in \mathcal{I}\}$ de tales pares ordenados está acotada superiormente. En efecto, una cota superior apropiada es (X', g'), donde $X' = \bigcup_{\mathcal{I}} X_i$ y $g'|_{X_i} = g_i$. Se sigue que $\mathcal{S}$ es inductivo, así el lema de Zorn produce un elemento máximo de $\mathcal{S}$, digamos (X^*, g^*). Si $X^* = N_2$, entonces la demostración está completa, así suponer que $X^* \neq N_2$. Si $y \in N_2 - X^*$, entonces tenemos un homomorfismo del ideal derecho $I = \{a \in R/ya \in X^*\}$ a M dado por $a \mapsto g^*(ya)$. Por suposición, esto implica que existe un $z \in M$ tal que $a \mapsto za$ para todo $a \in I$. Si $h : X^* + yR \to M$ es definido por $h(x+ya) = g^*(x)+za$, entonces h extiende g^* a X^*+yR, lo cual contradice la maximalidad de (X^*, g^*) en $\mathcal{S}$. De esta manera, $X^* = N_2$. □

El criterio de Baer muestra que la colección de ideales derechos es un conjunto prueba para la inyectividad de un R-módulo. Frecuentemente, existe una colección “más pequeña” de ideales derechos de R que ejecutará esta tarea.

PROPOSICIÓN 4.3. *Un módulo I es inyectivo si y solo si cualquier monomorfismo $\varphi : I \to M$ se escinde.*

DEMOSTRACIÓN. ($\Rightarrow$) Considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "id_I"'] & M \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

El morfismo h da la escinción requerida.

($\Rightarrow$) Sea $f : M \to N$ un monomorfismo y sea $g : M \to I$ un morfismo. Definir

$$M' := \frac{N \oplus I}{\{(f(m), -g(m))/m \in M\}}$$

Tenemos funciones naturales de N e I a M', llamarlas i_1 y i_2, respectivamente. Primero notar que por construcción de M' se sigue que $i_1 \circ f = i_2 \circ g$. Afirmamos que i_2 es inyectivo. Claro está, si $(0, i) = (f(m), g(m))$ para algún $m \in M$, se sigue que $m = 0$ y de aquí $i = 0$ (puesto f es un monomorfismo). Por nuestra suposición obtenemos un función$\varphi : M' \to I$ tal que $\varphi \circ i_2 = id_I$. Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[d, "i_1"] \\ & I \arrow[r, bend left, "i_2"] & M' \arrow[l, bend left, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

Obtenemos un función$\psi := \varphi \circ i_1 : N \to I$. Calculamos:

$$\begin{aligned} \psi \circ f =& \varphi \circ i_1 \circ f \\ =& \varphi \circ i_2 \circ g \\ =& g \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 4.4. *Si el R-módulo U es M_α-inyectivo para cada familia $\{M_\alpha\}_\Delta$ de R-módulos, entonces U también es $\bigoplus_\Delta M_\alpha$-inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea U M_α-inyectivo para todo $\alpha \in \Delta$, $M = \bigoplus_\Delta M_\alpha$ y $K \subset M$. Para un morfismo $g : K \to U$, consideremos el conjunto

$$\mathcal{F} = \{h : L \to U/K \subset L \subset M \text{ y } h|_K = g\}.$$

Este conjunto está ordenado por

$$[h_1 : L_1 \to U] < [h_2 : L_2 \to U] \Leftrightarrow L_1 \subset L_2 \text{ y } h_2|_{L_1} = h_1.$$

Es fácil ver que $\mathcal{F}$ es inductivo y, por el Lema de Zorn, tiene un elemento máximo $h_0 : L_0 \to U$. Para demostrar que $M = L_0$ es suficiente mostrar que $M_\alpha \subset L_0$ para cada $\alpha \in \Delta$. Cada diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_0 \cap M_\alpha \arrow[r] \arrow[d] & M_\alpha \\ & L_0 \arrow[r, "h_0"] & U \end{tikzcd}$$

puede, por suposición, ser conmutativamente extendido por algún $h_\alpha : M_\alpha \to U$. La asignación

$$h^* : L_0 + M_\alpha \to U \text{ dado por } h^*(l + m_\alpha) = h_0(l) + h_\alpha(m_\alpha),$$

es independiente de la representación $l + m_\alpha$ puesto que, para $l + m_\alpha = 0$, obtenemos $l = -m_\alpha \in L_0 \cap M_\alpha$ y de aquí $h^*(l + m_\alpha) = h_0(l) - h_\alpha(l) = 0$.

Por lo tanto $h^* : L_0 + M_\alpha \to U$ es un morfismo perteneciendo a $\mathcal{F}$ y obviamente es más grande que $h_0 : L_0 \to U$.

A causa de la maximalidad de $h_0 : L_0 \to U$, el morfismo h^* y h_0 deben ser iguales y, en particular, $L_0 + M_\alpha = L_0$ y $M_\alpha \subset L_0$. □

La siguiente proposición caracteriza a los módulos M-inyectivos.

PROPOSICIÓN 4.5. *Para R-módulos U y M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) U es M-inyectivo.
(b) U es N-inyectivo para cada submódulo (finitamente generado, cíclico) N de M.
(c) U es N-inyectivo para cada $N \in \sigma[M]$ (es decir, U es inyectivo para $\sigma[M]$).
*(d) el funtor $Hom(-, U) : \sigma[M] \to$ **Ab** es exacto.*

DEFINICIÓN 4.4. Un submódulo N de un R-módulo M es llamado un *submódulo esencial* (o *grande*) de M, si $N \cap N' \neq 0$ para cada submódulo no cero N' de M. Si N es un submódulo esencial de M, entonces M es mencionado como una *extensión esencial* de N y denotado por $N \subseteq_e M$.

Un submódulo N de un R-módulo M es llamado *superfluo* o *pequeño en* M, escrito $K \ll M$, si para cada submódulo $L \subset M$, la igualdad $K + L = M$ implica que $L = M$.

Cada R-módulo M siempre tiene al menos un submódulo esencial, a saber M. Ahora mostramos que para cada submódulo N de M existe un submódulo N_c de M tal que la suma $N + N_c$ es directa y tal que $N + N_c$ es un submódulo esencial de M. Veremos después que existen R-módulos M que no tienen submódulos esenciales propios. Para estos módulos $N \oplus N_c = M$, así que cada submódulo de M es un sumando directo de M. Los módulos con esta propiedad demostrarán ser de especial interés.

PROPOSICIÓN 4.6. *Si N es un submódulo de un R-módulo M, existe un submódulo N_c de M tal que la suma $N + N_c$ es directa y $N + N_c$ es esencial en M.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que N es un submódulo de M y sea $\mathcal{S}$ el conjunto de submódulos N' de M tal que $N \cap N' = 0$. Entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$ puesto que el submódulo cero de M está en $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ es parcialmente ordenado por la inclusión, entonces $\mathcal{S}$ es inductivo y el lema de Zorn indica que $\mathcal{S}$ tiene un elemento máximo. Si N_c es un elemento máximo de $\mathcal{S}$, entonces es inmediato que la suma $N + N_c$ es directa.

Afirmamos que $N + N_c$ es un submódulo esencial de M. Sea X un submódulo no cero de M y suponer que $(N + N_c) \cap X = 0$. Notar que X no puede estar contenido en N_c, así $X + N_c$ propiamente contiene a N_c. Por lo tanto, $N \cap (X + N_c) \neq 0$. Sea $z \in N \cap (X + N_c)$, $z \neq 0$, y escoger $x \in X$ y $y \in N_c$ tal que $z = x + y$. Entonces $z - y = x \in (N + N_c) \cap X = 0$. De aquí, $z = y$ y así $z \in N \cap N_c = 0$, una contradicción. Por lo tanto, $(N + N_c) \cap X \neq 0$, lo cual establece que $N + N_c$ es un submódulo esencial de M. $\square$

DEFINICIÓN 4.5. Si N es un submódulo de un R-módulo M, entonces un submódulo N_c de M tal que $N \oplus N_c$ es esencial en M es llamado un *complemento* de N en M.

PROPOSICIÓN 4.7. *Sea R un anillo y sean $U's$, $V's$ y $W's$ R-módulos.*

1. *Si $W \subseteq_e V$ y $U \subseteq V$, entonces $(U \cap W) \subseteq_e U$.*
2. *Sea $W_i \subseteq_e V$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_i$, entonces $W \subseteq_e V$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea X un submódulo no cero de U. Puesto que $W \subseteq_e V$, tenemos que $X \cap W \neq 0$. Pero $X \subseteq U$, así $X = X \cap U$ y de aquí $X \cap (U \cap W) \neq 0$.

(2) Basta considerar el caso $n = 2$. Puesto que $W_2 \subseteq_e V$, lo anterior implica que $(W_1 \cap W_2) \subseteq_e W_1$. De esta manera, puesto que $W_1 \subseteq_e V$, la transitividad de $\subseteq_e$ da el resultado. $\square$

Proposición 4.8. *Un R-módulo M es inyectivo si y solo si para cada ideal derecho esencial A de R y cada homomorfismo $f : A \to M$, existe $x \in M$ tal que $f(a) = xa$ para todo $a \in R$:*

Demostración. Si M es un R-módulo inyectivo, no hay nada que demostrar, así suponer que la condición se cumple para cada ideal derecho esencial de R. Sa A un ideal derecho de R y suponer que $f : A \to M$ es un homomorfismo. Si A_c es un complemento de A en R, entonces $A \oplus A_c$ es un ideal derecho esencial de R. Si $g : A \oplus A_c \to M$ es tal que $g(a + a') = f(a)$, entonces g está bien definido y es R-lineal, así existe $x \in M$ tal que $g(a + a') = x(a + a')$. De aquí, $f(a) = g(a + 0) = xa$ para todo $a \in A$, así M es inyectivo por el criterio de Baer. $\square$

2. Módulos Inyectivos y el Funtor $\boldsymbol{Hom_R(-, M)}$

Otra propiedad poseída por un R-módulo inyectivo M es que hace al funtor contravariante $Hom_R(-, M)$ exacto.

Proposición 4.9. *Un R-módulo M es inyectivo si y solo si para cada sucesión exacta $0 \to N_1 \xrightarrow{g} N_2$ de R-módulos y homomorfismos de R-módulos, la sucesión $Hom_R(N_2, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N_1, M) \to 0$ es exacta en $\boldsymbol{Ab}$.*

Demostración. Si M es inyectivo y $f \in Hom_R(N_1, M)$, entonces la inyectividad de M da un homomorfismo $h : N_2 \to M$ tal que $f = hg = g^*(h)$. De aquí, g^* es un epimorfismo, así $Hom_R(N_2, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N_1, M) \to 0$ es exacta.

Inversamente, si $Hom_R(N_2, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N_1, M) \to 0$ es exacta y $f \in Hom_R(N_1, M)$, entonces g^* es un epimorfismo, así existe un $h \in Hom_R(N_2, M)$ tal que $g^*(h) = f$. Pero entonces $hg = f$, así el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N_2 \arrow[dl, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

es conmutativo y consecuentemente, M es inyectivo. $\square$

Puesto que $Hom_R(-, M)$ es exacto izquierdo cualquier R-módulo M, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1. *Un R-módulo M es inyectivo si y solo si el funtor contravariante $Hom_R(-, M) : \boldsymbol{Mod_R} \to \boldsymbol{Ab}$ es exacto.*

La caracterización de los módulos inyectivos como precisamente esos R-módulos M para los cuales $Hom_R(-, M)$ preserva epimorfismos da la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.10. *Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces el R-módulo $\prod_\Delta M_\alpha$ es inyectivo si y solo si cada M_α es inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $0 \to N_1 \xrightarrow{g} N_2$ una sucesión exacta de R-módulos y homomorfismos de R-módulos. Para cada $\alpha \in \Delta$, sea

$$g_a^* : Hom_R(N_2, M_\alpha) \to Hom_R(N_1, M_\alpha) \text{ tal que } g_a^*(f) = fg$$

para cada $f \in Hom_R(N_2, M_\alpha)$. Si $\prod_\Delta M_\alpha$ es inyectivo, entonces

$$Hom_R\Big(N_2, \prod_\Delta M_\alpha\Big) \xrightarrow{g^*} Hom_R\Big(N_1, \prod_\Delta M_\alpha\Big) \to 0$$

es exacta. La Parte (2) de la Proposición 2.9 muestra que para cada $\alpha \in \Delta$ tenemos un diagrama conmutativo con fila exacta

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(N_2, \prod_\Delta M_\alpha) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\varphi"'] & Hom_R(N_1, \prod_\Delta M_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & 0 \\
\prod_\Delta Hom_R(N_2, M_\alpha) \arrow[r, "\prod g_\alpha^*"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \prod_\Delta Hom_R(N_1, M_\alpha) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_\alpha"] & 0 \\
Hom_R(N_2, M_\alpha) \arrow[r, "g_\alpha^*"] & Hom_R(N_1, M_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

donde π_α y π'_α son las proyecciones canónicas, φ y φ' son isomorfismos tal que $\varphi(f) = (\pi_\alpha f)$ y $\varphi'(f') = (\pi'_\alpha f')$, respectivamente, y $\prod g_\alpha^*$ está definido por $\prod g_\alpha^*((f_\alpha)) = (f_\alpha g)$. Un diagrama de persecución simple muestra que g_α^* es un epimorfismo, por lo que cada M_α es inyectivo.

Inversamente, si M_α es inyectivo para cada $\alpha \in \Delta$, entonces

$$\prod g_\alpha^* : \prod_\Delta Hom_R(N_2, M_\alpha) \to \prod_\Delta Hom_R(N_1, M_\alpha)$$

es un epimorfismo. La función $\varphi^{-1}((f_\alpha)) = f$, donde $f(x) = (f_\alpha(x))$ para cada $x \in N_2$ y $\varphi'^{-1}((f'_\alpha)) = f'$ con $f'(x) = (f'_\alpha(x))$ para $x \in N_1$

da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\Delta} Hom_R(N_2, M_\alpha) \arrow[r, "\prod g_\alpha^*"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & \prod\limits_{\Delta} Hom_R(N_1, M_\alpha) \arrow[r] & 0 \\
Hom_R(N_2, \prod\limits_{\Delta} M_\alpha) \arrow[r, "g^*"] & Hom_R(N_1, \prod\limits_{\Delta} M_\alpha) &
\end{tikzcd}$$

Es claro que g^* es un epimorfismo, así $\prod\limits_{\Delta} M_\alpha$ es inyectivo. $\square$

COROLARIO 4.2. *Un sumando directo de un R-módulo inyectivo es inyectivo.*

La Proposición 4.10 muestra que los productos directos de módulos inyectivos siempre son inyectivos para módulos sobre un anillo arbitrario. Sin embargo, sumas directas de módulos inyectivos no siempre son inyectivas al menos que el anillo satisfaga ciertas condiciones.

3. Cápsulas Inyectivas

Aunque los módulos inyectivos existen, no cada módulo es inyectivo. Aún cuando existen módulos que no son inyectivos, es el caso que para cada R-módulo M existe un encajamiento $M \to E$, donde E es un módulo inyectivo. Entre los módulos inyectivos que contienen a un submódulo isomorfo a M, existe uno, llamado la *cápsula inyectiva* de M, que es único hasta isomorfismo. Esta cápsula es, en algún sentido, la "*la mejor aproximación*" de M por un módulo inyectivo. Si la clase de módulos inyectivos que contienen una copia de M es ordenada por la inclusión, será mostrado que existe al menos un módulo inyectivo que es un elemento mínimo de esta clase.

DEFINICIÓN 4.6. Una *cápsula inyectiva* de un R-módulo M es un módulo inyectivo $E(M)$ junto con un monomorfismo $\varphi : M \to E(M)$ tal que $E(M)$ es una extensión esencial de $\varphi(M)$. Una cápsula inyectiva $\varphi : M \to E(M)$ de M se dice que es única hasta isomorfismo si siempre que $\varphi' : M \to E(M)'$ sea otra cápsula inyective de M, existe un isomorfismo $f : E(M)' \to E(M)$ tal que $f\varphi' = \varphi$.

LEMA 4.1. *Si M es un submódulo esencial de un R-módulo M' y $f : M \to N$ es un monomorfismo de M en un R-módulo N, entonces cualquier extensión $g : M' \to N$ de f a M' también es un monomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : M' \to N$ una extensión de un monomorfismo $f : M \to N$. Si $x \in M \cap Nu(g)$, entonces $f(x) = g(x) = 0$, así $x = 0$ puesto que f es inyectiva. De aquí, $M \cap Nu(g) = 0$, así $Nu(g) = 0$ puesto que M es un submódulo esencial de M'. □

El conjunto de ideales derechos esenciales de un anillo R sirve como un conjunto prueba para la inyectividad de un R-módulo. Cada módulo se encaja en un módulo inyectivo. Brevemente, veremos módulos inyectivos sobre un dominio ideal principal. Los módulos inyectivos sobre tal dominio gozan de una propiedad de divisibilidad que es equivalente a inyectividad.

DEFINICIÓN 4.7. Si R es un dominio ideal principal, entonces un R-módulo M se dice que es R-*divisible* si $Ma = M$ para cada $0 \neq a \in R$. Es decir, M es R-divisible si y solo si dado un elemento $0 \neq a \in R$ y $y \in M$, existe un $x \in M$ tal que $xa = y$.

Ejemplos

1. **Imágenes Homomorfas**. Cada imagen homomorfa de un R-módulo R-divisible es R-divisible.
2. **Sumas Directas**. Una suma directa (producto directo) de R-módulos R-divisibles es R-divisible y un sumando directo de un R-módulo divisible es R-divisible.
3. **Los Números Racionales**. El campo de los números racionales $\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Z}$-divisible, así $\mathbb{Q}^{(\Delta)}$ es $\mathbb{Z}$-divisible para cualquier conjunto Δ. De esta manera, $\mathbb{Q}^{(\Delta)}/N$ es $\mathbb{Z}$-divisible para cualquier subgrupo N de $\mathbb{Q}^{(\Delta)}$.

PROPOSICIÓN 4.11. *Si R es un dominio ideal principal, entonces un R-módulo es inyectivo si y solo si es R-divisible.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que M es un R-módulo inyectivo y sea $0 \neq a \in R$. Entonces (a) es un ideal de R y puesto que R es un dominio entero, si $y \in M$, entonces $f(ab) = yb$ da un homomorfismo bien definido de (a) a M. Pero M es inyectivo, así el criterio de Baer indica que existe un $x \in M$ tal que $f(c) = xc$ para todo $c \in$ (a). En particular, $f(a) = xa$, así $xa = y$. De aquí, M es R-divisible.

Inversamente, suponer que M es R-divisible. Sea (a) un ideal no cero de R y suponer que $f : (a) \to M$ es un R-homomorfismo. Si $f(a) = y$, entonces existe un $x \in M$ tal que $xa = y$. Consecuentemente, si $ab \in (a)$, entonces $f(ab) = f(a)b = yb = x(ab)$. Por lo tanto, el criterio de Baer es satisfecho, así M es un R-módulo inyectivo. □

Un aspecto importante de los $\mathbb{Z}$-módulos divisibles es que pueden ser usados para producir R-módulos inyectivos.

PROPOSICIÓN 4.12. *Las siguientes afirmaciones se cumplen para cualquier R-módulo M.*

1. *Si M es visto como un $\mathbb{Z}$-módulo, entonces M puede ser encajado en un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.*
2. *Si Q es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es un R-módulo inyectivo.*
3. *Existe un monomorfismo de M en un R-módulo inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea M un R-módulo. Si $\{x_\alpha\}_\Delta$ es un conjunto de generadores para M como un grupo abeliano aditivo, existe un epimorfismo de grupos $\mathbb{Z}^{(\Delta)} \to M$. Si K es el núcleo de esta función, entonces $M \cong \mathbb{Z}^{(\Delta)}/K \subsetneq \mathbb{Q}^{(\Delta)}/K$. El Ejemplo 3 anterior indica que $\mathbb{Q}^{(\Delta)}/K$ es $\mathbb{Z}$-divisible mientras que la Proposición 4.11 muestra que $\mathbb{Q}^{(\Delta)}/K$ es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo.

(2) Puesto que R es un $(R, \mathbb{Z})$-bimódulo, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es un R-módulo vía $(ha)(x) = h(ax)$ para todo $a, x \in R$ y $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. Ahora sea A un ideal derecho de R y suponer que $f : A \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es un R-homomorfismo. Para mostrar que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es un R-módulo inyectivo, basta, por el criterio de Baer, encontrar un $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ tal que $f(a) = ha$ para todo $a \in A$. Si $a \in A$, entonces $f(a) \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ y para cada $x \in R$, $f(a)(x) \in Q$. Se sigue que $a \mapsto f(a)(1)$ es un $\mathbb{Z}$-homomorfismo $g : A \to Q$, así si Q es un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo, entonces existe un homomorfismo $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ que extiende g a R. Si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $(ha)(b) = h(ab) = g(ab) = f(ab)(1) = (f(a)b)(1) = f(a)(b)$. De aquí, $f(a) = ha$ para todo $a \in A$, así $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ es un R-módulo inyectivo.

(3) Por (1) existe un encajamiento $0 \to M \to Q$ de M en un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo Q. Puesto que $Hom_{\mathbb{Z}}(R, -)$ es exacto izquierdo y covariante, tenemos una sucesión exacta $0 \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, M) \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$. Pero $M \cong Hom_R(R, M) \subseteq Hom_{\mathbb{Z}}(R, M)$, así se sigue que M se encaja en $Hom_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ el cual es, por (2), un R-módulo inyectivo. No es difícil mostrar que el encajamiento es un R-homomorfismo. □

PROPOSICIÓN 4.13 (Eckmann-Schöpf). *Cada R-módulo tiene una cápsula inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Si M es cualquier R-módulo, entonces, por la Proposición 4.12 existe un monomorfismo $\varphi : M \to E$, donde E es un R-módulo inyectivo. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todos los submódulos N de E tal que N es una extensión esencial de $\varphi(M)$. Entonces $\mathcal{S} \neq \emptyset$ puesto que $\varphi(M) \in \mathcal{S}$. Si $\{N_\alpha\}_\Delta$ es una cadena en $\mathcal{S}$, entonces

$\bigcup_{\Delta} N_\alpha \in \mathcal{S}$ sirve como una cota superior para la cadena. De aquí, $\mathcal{S}$ es inductivo, así por el lema de Zorn $\mathcal{S}$ tiene un elemento máximo, digamos $E(M)$.

Afirmamos que $\varphi : M \to E(M)$ es una cápsula inyectiva de M. Observar primero que si E_c es un complemento de $E(M)$ en E, entonces $E(M) \cong (E(M) \oplus E_c)/E_c$ es un submódulo esencial de E/E_c. Esto se sigue puesto que si N/E_c es un submódulo de E/E_c tal que $((E(M) \oplus E_c)/E_c) \cap (N/E_c) = 0$, entonces $(E(M) \oplus E_c) \cap N \subseteq E_c$. Por la ley modular $(E(M) \cap N) \oplus E_c = (E(M) \oplus E_c) \cap N = 0$, así tenemos que $E_c \subseteq (E(M) \cap N) \oplus E_c \subseteq E_c$. Por lo tanto, $E(M) \cap N = 0$, así por la maximalidad de E_c, $E_c = N$. De esta manera, $N/E_c = 0$ y así $(E(M) \oplus E_c)/E_c$ es esencial en E/E_c.

En seguida, afirmamos que $E = E(M) \oplus E_c$. Para ver esto, considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (E(M) \oplus E_c)/E_c \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi"'] & E/E_c \arrow[d, "g"] \\
& E(M) \arrow[r, "i'"] & E
\end{tikzcd}$$

donde ψ es el isomorfismo $E(M) \cong (E(M) \oplus E_c)/E_c$, i e i' son las inyecciones canónicas y g es el homomorfismo dado por la inyectividad de E. Notar que, $i\psi$ es una inyección, así el Lema 4.1 muestra que g también es una inyección. Del diagrama tenemos que $E(M) = Im(i'\psi) = g((E(M) \oplus E_c)/E_c) \subseteq g(E/E_c)$. Pero $\varphi(M)$ es esencial en $E(M)$ y se sigue que $E(M) = g((E(M) \oplus E_c)/E_c)$ es esencial en $g(E/E_c)$, puesto que $(E(M) \oplus E_c)/E_c$ es esencial en E/E_c. De aquí, $\varphi(M)$ es esencial en $g(E/E_c)$. Ahora $E(M)$ es una extensión esencial máxima de $\varphi(M)$ en E, así por la maximalidad de $E(M)$, $g((E(M) \oplus E_c)/E_c) = g(E/E_c)$. De aquí, vemos que $E(M) \oplus E_c = E$. Puesto que un sumando directo de un módulo inyectivo es inyectivo, tenemos que $E(M)$ es un R-módulo inyectivo. De esta manera, $\varphi : M \to E(M)$ es una cápsula inyectiva de M. □

PROPOSICIÓN 4.14. *Las cápsulas invectivas son únicas hasta isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M un R-módulo y suponer que $\varphi_1 : M \to E_1$ y $\varphi_2 : M \to E_2$ son cápsulas inyectivas de M. Entonces el Lema

4.1 muestra que el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & E_2 \arrow[dl, dotted, "f"] \\ & E_1 & \end{tikzcd}$$

puede ser completado conmutativamente por un monomorfismo $f : E_2 \to E_1$. Pero esto indica que $f(E_2)$ es un submódulo inyectivo de E_1 y como tal es, por la Proposición 4.1 un sumando directo de E_1. Si $f(E_2) \oplus N = E_1$, entonces $\varphi_1(M) \cap N = 0$ puesto que $\varphi_1(M) \subseteq f(E_2)$. Pero $\varphi_1(M)$ es esencial en E_1, así $N = 0$. De aquí, f también es un epimorfismo. $\square$

Puesto que una cápsula inyectiva $\varphi : M \to E(M)$ de un R-módulo M es única hasta isomorfismo, podemos hablar de la cápsula inyectiva de M. No hay perdida de generalidad en identificar a M con $\varphi(M)$ y considerar a M para ser un submódulo de $E(M)$. El homomorfismo φ ahora puede ser reemplazado por la inyección canónica $i : M \to E(M)$.

PROPOSICIÓN 4.15. *Las siguientes propiedades se cumplen para las cápsulas inyectivas.*

1. *Si M es un submódulo de un R-módulo inyectivo E, entonces $E \cong E(M) \oplus E'$ para algún submódulo (necesariamente inyectivo) E' de E.*
2. *Si M es un submódulo esencial de un R-módulo N, entonces $E(M) \cong E(N)$.*
3. *Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces $\bigoplus_\Delta E(M_\alpha)$ se encaja en $E(\bigoplus_\Delta M_\alpha)$ y el encajamiento es un isomorfismo si $\bigoplus_\Delta E(M_\alpha)$ es inyectivo.*

Se sigue inmediatamente de (3) de la proposición anterior, que si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos y si el conjunto de índices Δ es finito, entonces $\bigoplus_\Delta E(M_\alpha) \cong E(\bigoplus_\Delta M_\alpha)$ puesto que las sumas directas finitas de módulos inyectivos son inyectivas.

4. Módulos Proyectivos

Aunque los módulos inyectivos existen Los R-módulos proyectivos son duales a los módulos inyectivos. Podemos obtener la definición de un R-módulo proyectivo simplemente invirtiendo las flechas en el diagrama dado en la Definición 4.1 de un módulo inyectivo.

DEFINICIÓN 4.8. Un R-módulo M es llamado *proyectivo* si cada diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ N_2 \arrow[r, "h"] & N_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de R-módulos y homomorfismos de R-módulos puede ser completado conmutativamente por un homomorfismo $g : M \to N_2$.

Claramente, si M y N son R-módulos isomorfos, entonces M es proyectivo si y solo si N es proyectivo. Se puede mostrar que un R-módulo M es proyectivo si y solo si para cada R-módulo N y cada submódulo N' de N, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "\eta"] & N/N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

puede ser completado conmutativamente por un homomorfismo $g : M \to N$, donde η es la suryección canónica.

Ejemplos.

1. **Espacios Vectoriales.** Cada espacio vectorial sobre un anillo con división es proyectivo.
2. **Módulos Libres.** Cada R-módulo libre es proyectivo.
3. **Módulos Que No Son Proyectivos.** Existen módulos que no son proyectivos. Por ejemplo, $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}_i$, donde $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.
4. En anillo de las $n \times n$ matrices $\mathbb{M}_n(R)$ es proyectivo como un $\mathbb{M}_n(R)$-módulo y como un R-módulo.

Un R-módulo inyectivo M es un sumando directo de cada R-módulo N que extiende a M. En efecto, si M es inyectivo y $f : M \to N$ es un monomorfismo, entonces existe un submódulo X de N tal que $M \cong X$ y X es un sumando directo de N. Los módulos proyectivos gozan de una propiedad similar.

PROPOSICIÓN 4.16. *Si $f : M \to N$ es un epimorfismo y M es un R-módulo proyectivo, entonces M es isomorfo a un sumando directo de N.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que el diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "1_M"] & \\ N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

puede ser completado conmutativamente por un homomorfismo $g : M \to N$ tal que $fg = id_M$ y g es un monomorfismo. La Proposición 2.17 muestra que $N = Img \oplus Nu(f)$, así el resultado se sigue puesto que $Im\, g \cong M$. □

PROPOSICIÓN 4.17. *Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces $\bigoplus_\Delta M_\alpha$ es proyectivo si y solo si cada M_α es proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es dual a esa de la Proposición 4.10. □

COROLARIO 4.3. *Un sumando directo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.*

LEMA 4.2. *El anillo R es un R-módulo proyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. Necesitamos mostrar que cada diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, dotted, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ N_2 \arrow[r, "h"] & N_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

puede ser completado conmutativamente por un homomorfismo $g : R \to N_2$. Si $f(1) = y$ y $x \in N_2$ es tal que $h(x) = y$, sea $g : R \to N_2$ definida por $g(a) = xa$. entonces g está bien definida, es R-lineal y $f = hg$. □

TEOREMA 4.1. *Sea M un R-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) M es un R-módulo proyectivo.
(2) Cada sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to M \to 0$ se escinde.
(3) M es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo libre.

Capítulo 5

Teoría Clásica De Anillos

1. El Radical de Jacobson

Numerosos tipos de radicales han emergido durante los años cada uno con un fundamento diferente. De esta manera, cuando la palabra "radical" sea encontrada, se debe tener cuidado para determinar su significado exacto.

DEFINICIÓN 5.1. El *radical de Jacobson* de un anillo R, denotado por $J(R)$, es la intersección de los ideales derechos máximos de R. Si $J(R) = 0$, entonces R es llamado un *anillo semisimple de Jacobson*. (Los anillos semisimples de Jacobson también son mencionados como *anillos J-semisimples* y a veces son llamados *anillos semiprimitivos*.)

En este punto, el radical de Jacobson de R probablemente debería ser llamado el radical de Jacobson derecho de R puesto que está formado tomando la intersección de los ideales derechos máximos de R. Sin embargo, $J(R)$ también es la intersección de los ideales izquierdos máximos de R, así una distinción de izquierdo y derecho es inmaterial.

El concepto de radical de Jacobson de R se traslada a módulos.

DEFINICIÓN 5.2. Si M es R-módulo, entonces el *radical* de M, denotado por $J(M)$, es la intersección de los submódulos máximos de M. Si M no tiene submódulos máximos, entonces ponemos $J(M) = M$.

Existen módulos que no tienen submódulos máximos. Por ejemplo, el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ no tiene submódulos máximos. La siguiente proposición muestra que existe una clase "grande" de módulos los cuales siempre tienen al menos un submódulo máximo.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea M un R-módulo derecho no cero con un conjunto generador finito. Entonces cada submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo. En particular, M tiene un submódulo máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea K un submódulo propio de M. Entonces existe una sucesión $x_1, \ldots, x_n \in M$ tal que

$$M = K + x_1R + \cdots + x_nR.$$

Así ciertamente entre todas las sucesiones de este tipo existe una de longitud mínima (probablemente existen varias sucesiones de este tipo), y así podemos suponer que $x_1, \ldots, x_n$ tiene longitud mínima. Entonces

$$L = K + x_2R + \cdots + x_nR$$

es un submódulo propio de M (de otra manera la sucesión demasiado corta $x_2, \ldots, x_n$ la haría de $x_1, \ldots, x_n$). Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todos los submódulos propios de M que contienen a L. Claramente, $\mathcal{P}$ es un subconjunto no vacío parcialmente ordenado de la retícula de submódulo de M en efecto $L \in \mathcal{P}$. Ahora un submódulo N que contiene a L está en $\mathcal{P}$ si y solo si $x_1 \notin N$. Aplicamos el lema de Zorn a $\mathcal{P}$. Suponer que $\mathcal{C}$ es una cadena no vacía en el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P}$. Poner $V = \bigcup \mathcal{C}$. Afirmamos que V es un submódulo de M. En efecto si $a, b \in R$ y $x, y \in V$, entonces para algunos $N_x, N_y \in \mathcal{C}$, $x \in N_x$ y $y \in N_y$. Puesto que $\mathcal{C}$ es una cadena, podemos suponer que $N_x \leq N_y$. Así $x, y \in N_y$ y por la Proposición 1.10 $xa + yb \in N_y \subseteq V$. De esta manera V es un submódulo de M así afirmado. Pero claramente puesto que x_1 no está en ningún elemento de $\mathcal{C}$, $x_1 \notin V$. Hemos mostrado entonces que cada cadena no vacía en $\mathcal{P}$ tiene una cota superior en $\mathcal{P}$, a saber su unión, así por el lema de Zorn $\mathcal{P}$ tiene un elemento máximo, digamos N. Porque N es máximo en $\mathcal{P}$ cualquier submódulo estrictamente más grande de M no está en $\mathcal{P}$, y así contiene a x_1. Pero entonces cualquier módulo de este tipo debe contener a $N + x_1R \geq L + x_1R = M$. De esta manera N es un submódulo (propio) máximo de M conteniendo a K. Para la proposición final del Teorema dejar que $K = 0$. $\square$

Sea $\mathcal{E}$ la clase de R-módulos simples. Entonces $J(M)$ es justamente el rechazo de $\mathcal{E}$ en M.

La siguiente proposición caracteriza el radical de un módulo.

PROPOSICIÓN 5.2. *Para un R-módulo tenemos*

$$J(M) = Re(M, \mathcal{E}) = \bigcap \{K \subset M / K \text{ es máximo en } M\}$$
$$= \sum \{L \subset M / L \text{ es superfluo en } M\}.$$

DEMOSTRACIÓN. La primera fila es justamente la definición.
Si $L \ll M$ y K es un submódulo máximo de M no conteniendo a L, entonces $K + L = M$ y $K = M$. De aquí cada submódulo superfluo está contenido en el radical.

Ahora suponer que $m \in J(M)$ y $U \subset M$ con $mR + U = M$. Si $U \neq M$ entonces por el Lema de Zorn, existe un submódulo $L \subset M$ máximo con respecto a $U \subset L$ y $m \notin L$. Puesto que $L + mR = M$, el submódulo L es máximo en M y $m \in J(M) \subset L$, una contradicción. De aquí tenemos que $U = M$ y $mR \ll M$. Consecuentemente, $J(M)$ es la suma de los submódulos superfluos en M. □

$J(M)$ no necesita ser superfluo en M pero cada submódulo finitamente generado de $J(M)$ es superfluo en M. Por definición, $J(M)$ es el submódulo más pequeño $U \subset M$ para el cual el módulo cociente M/U es cogenerado por módulos simples. De aquí tenemos.

PROPOSICIÓN 5.3. *$J(M) = 0$ si y solo si M es cogenerado por módulos simples.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que $J(M) = 0$. Sea $\mathcal{E} = \{S_\alpha\}_\Delta$ la clase de R-módulos simples. Para cada $\alpha \in \Delta$, $S_\alpha \cong M/M_\alpha$ con M_α un submódulo máximo de M. La familia de morfismos $\{\eta_\alpha : M \to M/M_\alpha\}_\Delta$ induce un morfismo $\varphi : M \to \prod_\Delta M/M_\alpha$ tal que $Nu(\varphi) = \bigcap_\Delta Nu(\eta_\alpha) = \bigcap_\Delta M_\alpha = 0$. Así, M es cogenerado por módulos simples.

Inversamente, suponer que M es cogenerado por módulos simples. Sea $\mathcal{E} = \{S_\alpha\}_\Delta$ la clase R-módulos simples. Para cada $\alpha \in \Delta$, $S_\alpha \cong M/M_\alpha$ con M_α es un submódulo máximo de M. Entonces existe un monomorfismo $\varphi : M \to \prod\limits_{S_\alpha \in \mathcal{E}} S_\alpha$ tal que

$$0 = Nu(\varphi) = \bigcap_\Delta Nu(\pi_\alpha \varphi) \supset J(M).$$

De aquí, $J(M) = 0$. □

COROLARIO 5.1. *Si M es un R-módulo finitamente generado no cero, entonces $J(M) \neq M$.*

Puesto que R es generado por 1, $J(R) \neq R$. Una propiedad útil del radical de un módulo es que es preservado bajo sumas directas.

PROPOSICIÓN 5.4. *Si $\{M_\alpha\}_\Delta$ es una familia de R-módulos, entonces*

$$J\big(\bigoplus_\Delta M_\alpha\big) = \bigoplus_\Delta J(M_\alpha).$$

2. Zoclo de un módulo

DEFINICIÓN 5.3. El *zoclo* de un R-módulo M, denotado por $Soc(M)$, es la suma de todos los submódulos simples (mínimos) de M. Si no existen submódulos mínimos en M ponemos $Soc(M) = 0$. Un R-módulo M es llamado *semisimple* (o *completamente reducible*) si $M = Soc(M)$.

Ejemplos

1. Si D es un anillo con división, entonces $M = D \times D$ es un D-módulo bajo la adición coordenada a coordenada y la D-acción sobre M dada por $(x, y)a = (xa, ya)$. Los submódulos $D \times 0$ y $0 \times D$ son submódulos simples de M y $M = (D \times 0) \oplus (0 \times D)$. De aquí M es un D-módulo semisimple. En general, el producto directo $\prod_{i=1}^{n} D_i$, con $D_i = D$ para cada i, es un D-módulo semisimple bajo la adición coordenada a coordenada y una D-acción similar a esa definida sobre M.
2. Si D es un anillo con división, entonces $\mathbb{M}_n(D)$ es un anillo simple. Para ver esto, observar que si $\bar{I}$ es un ideal de $\mathbb{M}_n(D)$ e I es el conjunto de todos los elementos que son entradas en la primera fila y primera columna de una matriz en $\bar{I}$, entonces I es un ideal únicamente determinado de D tal que $\bar{I} = \mathbb{M}_n(I)$. De esta manera, $\bar{I} = 0$ o $\bar{I} = \mathbb{M}_n(D)$ puesto que 0 y D son los únicos ideales de D. Es también el caso que $\mathbb{M}_n(D)$ es un anillo semisimple izquierdo y derecho con $\mathbb{M}_n(D) = \bigoplus_{i=1}^{n} c_i(D) = \bigoplus_{i=1}^{n} r_i(D)$, donde cada ideal izquierdo mínimo $c_i(D)$ es el conjunto de todas las matrices columna con entradas de D en la i-ésima columna y ceros en todas partes y cada ideal derecho mínimo $r_i(D)$ es el conjunto de todas las matrices fila en $\mathbb{M}_n(D)$ con entradas de D en la i-ésima fila y ceros en todas partes. De esta manera, $\mathbb{M}_n(D)$ es un anillo semisimple. Esta propiedad de $\mathbb{M}_n(D)$ no es fuera de lo ordinario.
3. Puesto que $Soc(0) = 0$, el módulo cero es, por definición semisimple.

Notar que si los submódulos de M son ordenados por la inclusión, entonces los submódulos mínimos no cero de M bajo esta orden son justamente los submódulos simples de M. La suma de submódulos mínimos de M es dual a la intersección de los submódulos máximos de M, es decir, $Soc(M)$ es dual a $J(M)$. Notar también que si dos R-módulos son isomorfos, entonces tienen zoclos isomorfos. De esta manera, si uno de los módulos es semisimple, entonces el otro módulo también será semisimple.

Vimos en el Ejemplo 1 que el D-módulo semisimple M no solo es la suma de sus submódulos simples sino que la suma es directa. La siguiente proposición muestra que un caso similar se cumple para un módulo semisimple no cero M, aunque si $M = \bigoplus_{\Delta} S_\alpha$, entonces la familia $\{S_\alpha\}_\Delta$ de módulos simples de M puede ser un subconjunto propio de la colección de todos los submódulos simples de M.

PROPOSICIÓN 5.5. *Si el zoclo de un R-módulo M es no cero, entonces $Soc(M)$ es una suma directa de una subfamilia de la familia $\{S_\alpha\}_\Delta$ de módulos simples de M. Además, si $f : M \to M$ es un homomorfismo entonces $f(Soc(M)) \subseteq Soc(M)$; es decir, el $Soc(M)$ es estable bajo cada endomorfismo de M.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que el $Soc(M) \neq 0$ y sea $\{S_\alpha\}_\Delta$ la familia de submódulos simples de M. Entonces $Soc(M) = \sum_\Delta S_\alpha$. En seguida suponer que $\mathcal{S}$ es la colección de subconjuntos Γ de Δ tal que la suma $\sum_\Gamma S_\alpha$ es directa. El conjunto $\mathcal{S}$ es no vacío puesto que los subconjuntos de un solo elemento de Δ están en $\mathcal{S}$. Ordenar parcialmente $\mathcal{S}$ por la inclusión. Si $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{S}$, entonces afirmamos que $\Lambda = \bigcup_{\mathcal{C}} \Gamma$ está en $\mathcal{S}$. Sea $\sum_\Lambda x_\alpha \in \sum_\Lambda S_\alpha$. Si $\sum_\Lambda x_\alpha = 0$, entonces los $x_\alpha \neq 0$ en esta suma son a lo más finitos en número. El hecho de que $\mathcal{C}$ es una cadena, implica que existe un $\Gamma \in \mathcal{C}$ tal que los subíndices de los posiblemente $x_\alpha \neq 0$ están en Γ. Pero $\sum_\Gamma S_\alpha$ es directa, así estos x_α también deben ser cero. Por lo tanto, la suma $\sum_\Lambda S_\alpha$ es directa, así $\mathcal{S}$ es inductivo. Aplicar el lema de Zorn y escoger Γ^* para ser un elemento máximo de $\mathcal{S}$. Si $\sum_{\Gamma^*} S_\alpha \neq Soc(M)$, entonces existe un submódulo simple S_β de M tal que S_β no está contenido en la suma $\sum_{\Gamma^*} S_\alpha$. Se sigue $S_\beta \cap \sum_{\Gamma^*} S_\alpha = 0$, así la suma $S_\beta + \sum_{\Gamma^*} S_\alpha$ es directa. Pero entonces el conjunto $\Gamma^* \cup \{\beta\}$ contradice la maximalidad de Γ^* y de esta manera debe ser el caso que $Soc(M) = \bigoplus_{\Gamma^*} S_\alpha$.

Finalmente, si $f : M \to M$ es un homomorfismo y S es un submódulo simple de M, entonces o $f(S) = 0$ o $f(S)$ es un submódulo simple de M. Se sigue de esta observación que $f(Soc(M)) \subset Soc(M)$. □

COROLARIO 5.2. *Para cada R-módulo M, $Soc(M)$ es el submódulo semisimple más grande, único de M.*

LEMA 5.1. *Sea M un R-módulo con la propiedad de que cada submódulo de M es un sumando directo de M. Entonces cada submódulo de M también tiene esta propiedad.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M un R-módulo con la propiedad de que cada submódulo de M es un sumando directo de M. Sea N un submódulo de M y suponer que N_1 es un submódulo de N. Afirmamos que N_1 es un sumando directo de N. Puesto que N_1 es un sumando directo de M, existe un submódulo N_2 de M tal que $M = N_1 \oplus N_2$. De esto tenemos que $N = N \cap M = N \cap (N_1 \oplus N_2)$. Por la propiedad de modularidad de los módulos, dada en el Ejemplo 10 de la Sección 1.4, vemos que $N = N_1 \oplus (N \cap N_2)$, así N_1 es un sumando directo de N. $\square$

LEMA 5.2. *Un R-módulo es semisimple si y solo si cada submódulo de M es un sumando directo de M.*

COROLARIO 5.3. *Un R-módulo es semisimple si y solo si M no tiene submódulos esenciales propios.*

DEMOSTRACIÓN. Si M es un R-módulo semisimple, entonces es claro que M no tiene submódulos esenciales propios. Inversamente, si N es un submódulo de M y N_c es un complemento de N en M, entonces $N \oplus N_c$ es un submódulo esencial de M. De esta manera, $N \oplus N_c = M$, así N es un sumando directo de M. $\square$

COROLARIO 5.4. *Cada submódulo y cada imagen homomorfa de un módulo semisimple es semisimple.*

DEMOSTRACIÓN. Los Lemas 5.1 y 5.2 muestran que cada submódulo de un módulo semisimple es semisimple. Si $f : M \to N$ es un epimorfismo y M es un R-módulo semisimple, entonces $0 \to Nu(f) \to M \to N \to 0$ se escinde. De aquí, N es isomorfo a un submódulo semisimple de M y es de esta manera semisimple. $\square$

Previamente hemos visto que el radical de un R-módulo M es la suma de los submódulos superfluos de M. Dualmente, el zoclo de M puede ser descrito en términos de los submódulos esenciales (o grandes) de M.

PROPOSICIÓN 5.6. *Si $\{N_\alpha\}_\Delta$ es la familia de submódulos esenciales de un R-módulo M, entonces $Soc(M) = \bigcap_\Delta N_\alpha$.*

DEMOSTRACIÓN. Si S es un submódulo simple de M y N es un submódulo esencial de M, entonces $S \cap N$ es un submódulo no cero de S. De aquí, $S = S \cap N \subseteq N$, así $Soc(M) \subseteq N$. De esta manera, $Soc(M) \subseteq \bigcap_\Delta N_\alpha$. Inversamente, sea $N = \bigcap_\Delta N_\alpha$ y suponer que X es un submódulo de N. Si X_c es un complemento en M de X, entonces $X \oplus X_c$ es, por la Proposición 4.6, un submódulo esencial de M. Puesto que $X \subseteq N \subseteq X \oplus X_c$, vemos, por modularidad, que $N = N \cap (X \oplus X_c) = X \oplus (N \cap X_c)$. De aquí, cada submódulo de N es un sumando directo de N, así N es, por el Lema 5.2, un submódulo semisimple de M. De esta manera, se sigue del Corolario 5.2 que $N \subseteq Soc(M)$. Por lo tanto, $Soc(M) = \bigcap_\Delta N_\alpha$. $\square$

Capítulo 6

Anillos Cuyos Módulos Simples Son Inyectivos

1. $\mathbf{V}$-anillos

DEFINICIÓN 6.1. Un anillo R es llamado un V-*anillo derecho* si cada R-módulo derecho simple es inyectivo.

TEOREMA 6.1. *Para cualquier anillo R, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(1) R es un V-anillo derecho.
(2) Para cualquier R-módulo derecho M, $J(M) = 0$.
(3) Cada ideal derecho A ($\neq R$) de R es una intersección de ideales derechos máximos.

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$. Sea R un V-anillo derecho y sea M un R-módulo derecho. Afirmamos que la intersección de todos los submódulos máximos de M es cero. Sea $0 \neq x \in M$. Considerar el R-módulo derecho cíclico xR. Sea N un submódulo máximo de xR. Entonces $S = xR/N$ es un R-módulo derecho simple y de aquí inyectivo, por suposición. Considerar el homomorfismo suprayectivo canónico $f : xR \to S$. Puesto que S es inyectivo, f puede ser extendido a $f' : M \to S$. Claramente $Nu(f')$ es un submódulo máximo de M tal que $x \notin Nu(f')$. Esto muestra que la intersección de todos los submódulos máximos de M es cero, es decir, $J(M) = 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$. Sea $A \neq R$ un ideal derecho de R. Puesto que $J(R/A) = 0$, concluimos que A es una intersección de ideales derechos máximos.

$(3) \Rightarrow (1)$. Sea S cualquier R-módulo derecho simple. Sea I cualquier ideal derecho de R. Considerar un homomorfismo no cero $f : I \to S$. Para demostrar que S es inyectivo, necesitamos mostrar que f puede ser extendido a R. Fijar un elemento $x \in I \backslash Nu(f)$. Puesto que el $Nu(f)$ es la intersección de una familia de ideales derechos máximos de R y $x \notin Nu(f)$, existe un ideal derecho máximo $M \supseteq Nu(f)$ tal que $x \notin M$. Puesto que $I/Nu(f) \cong S$ es simple, tenemos que $M \cap I = Nu(f)$. Claramente, $I + M = R$. Ahora podemos extender f a $f' : R \to S$ definiendo $f'(a + m) = f(a)$ para cualquier

$a \in I$ y $m \in M$. Esto muestra que cada R-módulo derecho simple es inyectivo y de aquí R es un V-anillo derecho. $\square$

TEOREMA 6.2. *Para un anillo R, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *R es un V-anillo derecho.*
2. *Cada ideal derecho I de R es un idempotente, es decir, $I^2 = I$ y todos los anillos cociente primitivos derechos de R son V-anillos derechos.*

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$. Sea R un V-anillo derecho. Claramente cada anillo cociente de R es un V-anillo derecho. Suponer que existe un ideal derecho I de R tal que $I^2 \neq I$. Por el teorema anterior, el ideal derecho I^2 es una intersección de ideales derechos máximos. Por lo tanto existe un ideal derecho máximo M de R tal que $I^2 \subseteq M$ e $I \nsubseteq M$. Entonces $R = M + I$. De esta manera existen elementos $m \in M$ y $a \in I$ con $1 = m + a$. Entonces $I = (m+a)I \subseteq mI + aI \in M + I^2 = M$, una contradicción. De aquí $I^2 = I$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Sea S un R-módulo derecho simple. Sea E una extensión esencial de S, y sea $A = ann_r(S)$. Puesto que el anillo cociente R/A es primitivo derecho, por suposición, R/A es un V-anillo derecho. Ahora afirmamos que $A = ann_r(E)$. Suponer lo contrario $A \neq ann_r(E)$. Entonces existe un elemento $x \in E$ tal que $xA \neq 0$. Puesto que E es una extensión esencial del módulo simple S, tenemos que $S \subseteq xA$. Por lo tanto existe un ideal derecho I de R tal que $I \subseteq A$ y $xI = S$. Ahora $S = xI = xI^2 = SI \subseteq SA = 0$, una contradicción. De aquí $A = ann_r(E)$. Ahora E es un R/A-módulo derecho que es una extensión esencial del R/A-módulo simple S. Puesto que R/A es un V-anillo derecho, $S = E$. Por lo tanto S es inyectivo y de aquí R es un V-anillo derecho. $\square$

LEMA 6.1. *Sea R un anillo regular von Neumann.*

(a) Todos los ideales unilaterales de R son idempotentes.
(b) Todos los ideales bilaterales de R son semiprimos.
(c) El radical de Jacobson de R es cero.
(d) R es semihereditario derecho e izquierdo.
(e) R es no singular derecho e izquierdo.

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea J un ideal derecho de R. Dado $x \in J$, tenemos que $xyx = x$ para algún $y \in R$, y, consecuentemente, $x = (xy)x \in J^2$. De esta manera $J = J^2$.

(b) Es claro de (a).

(c) Se sigue del hecho de que el radical de Jacobson no contiene idempotentes no cero.

(d) De acuerdo al Teorema 1.1, cada ideal unilateral finitamente generado de R es un sumando directo de R y así es proyectivo.

(e) Suponer que $xJ = 0$ para algún $x \in R$ y algún submódulo esencial $J \subseteq R_R$. Existe un idempotente $e \in R$ tal que $Re = Rx$, y, puesto que $ReJ = RxJ = 0$, vemos que $J \subseteq (1-e)R$. Entonces $J \cap eR = 0$, de donde $eR = 0$, y, consecuentemente, $x = 0$. De esta manera, R_R es no singular. $\square$

COROLARIO 6.1. *Sea R un anillo regular von Neumann tal que cada anillo cociente primitivo de R es artiniano. Entonces R es un V-anillo derecho e izquierdo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea R un anillo regular von Neumann y sea J un ideal derecho (izquierdo) de R. Por el Lema 6.1 $J = J^2$.

Sea S un R-módulo simple. Puesto que $A = ann_r(S)$ es un ideal primitivo derecho de R, R/A es primitivo derecho y artiniano. Así, R/A es artiniano simple lo que implica que R/A es semisimple derecho. De aquí, cada R/A-módulo es inyectivo. Por el Teorema 6.2 R es un V-anillo derecho. Similarmente, R es un V-anillo izquierdo. $\square$

El siguiente teorema es un resultado inédito bien conocido debido a Kaplansky.

TEOREMA 6.3. *Un anillo conmutativo R es un V-anillo si y solo si es un anillo regular von Neumann.*

DEMOSTRACIÓN. Sea R un anillo conmutativo regular von Neumann. Puesto que un anillo conmutativo primitivo es un campo y cada ideal derecho de un anillo regular von Neumann es idempotente, del Teorema 6.2, se sigue que R es un V-anillo. Inversamente, suponer que R es un V-anillo conmutativo. Entonces, por el Teorema 6.2, cada ideal derecho de R es idempotente. Sea $a \in R$. Entonces $aR = (aR)^2 = a^2R$. Así existe un elemento b en R tal que $a = a^2b = aba$. De aquí R es un anillo regular von Neumann. $\square$

Sin embargo, en el caso de los anillos no conmutativos, las dos condiciones son completamente diferentes.

2. $\mathbf{WV}$-anillos

DEFINICIÓN 6.2. Un anillo R es llamado *débilmente V-anillo derecho* (WV-anillo por abreviar) si cada R-módulo derecho simple es R/A-inyectivo para cualquier ideal derecho A tal que $R/A \ncong R$ (i.e., R/A es propio).

Tales anillos no necesitan ser V-anillos derechos, así por ejemplo el anillo $\mathbb{Z}_{p^2}$ para cualquier primo p es un WV-anillo el cual no es un V-anillo.

Empezamos con la siguiente observación.

LEMA 6.2. *Sea R un WV-anillo derecho, y sean R/A y R/B R-módulos derechos cíclicos propios tal que $A \cap B = 0$. Entonces R es un V-anillo derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que R es un WV-anillo derecho, por la Proposición 4.4 cualquier R-módulo derecho simple es $(R/A) \times (R/B)$-inyectivo. Puesto que R_R se encaja en $(R/A) \times (R/B)$, cualquier R-módulo derecho simple es R_R inyectivo, es decir R es un V-anillo derecho. $\square$

DEFINICIÓN 6.3. Un R-módulo M tiene *dimensión Goldie* (o *dimensión uniforme*) *finita*, denotada como $Gdim(M)$, si M no contiene una colección infinita de submódulos no cero cuya suma sea directa. Si R es de dimensión finita como un R-módulo, entonces R es un *anillo* (derecho) *de dimensión finita* .

DEFINICIÓN 6.4. Un R-módulo U es llamado *uniforme* si $U \neq 0$ y cada submódulo no cero de U es un submódulo esencial.

TEOREMA 6.4. *Sea R un WV-anillo derecho tal que R no es un V-anillo derecho. Entonces R debe ser uniforme derecho .*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que R es un WV-anillo derecho. Si R es de dimensión Goldie infinita, entonces R contiene una suma directa $A \oplus B$ donde ambos A y B son sumas directas infinitas de ideales derechos no cero. Si $R/A \cong R$, entonces R/A es proyectivo, y de aquí existe un ideal derecho C de R tal que $R = C \oplus A$. Pero entonces el módulo cíclico R/C es isomorfo a una suma directa infinita de módulos no cero, una contradicción. De esta manera R/A es propio. Similarmente R/B es propio, y así R es un V-anillo derecho por el Lema 6.2. Suponer ahora que Gdim$(R) = n > 1$ es finita. Entonces existen ideales derechos uniformes cerrados U_i tal que $\bigoplus_{i=1}^{n} U_i \subset_e R$. Ahora Gdim$(R/U_1) = n - 1 = Gdim(R/U_2)$, y así R/U_1 y R/U_2 son propios. De aquí R es V-anillo derecho por el Lema 6.2. Así si R es un WV-anillo derecho pero no un V-anillo derecho, debemos tener que Gdim$(R) = 1$, es decir R es uniforme derecho. $\square$

PROPOSICIÓN 6.1. *Sea R un anillo tal que R/I es propio para cualquier ideal derecho no cero I. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *R es un WV-anillo derecho.*
2. *$J(R/I) = 0$ para cualquier ideal derecho no cero I de R.*
3. *Cualquier ideal derecho no cero $I \neq R$ es una intersección de ideales derechos máximos.*

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea I cualquier ideal derecho no cero de R. Para cada $0 \neq \overline{x} \in R/I$ ($x \notin I$) considerar el R-submódulo derecho cíclico xR/I de R/I. Sea K_α/I un submódulo máximo de xR/I (K_α máximo en xR) con $\alpha \in \Delta$. Considerar el siguiente diagrama de módulos y R-homomorfismos el cual conmuta por suposición.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & xR/I \arrow[r] \arrow[d, "p_x"'] & R/I \arrow[dl, "\overline{p_x}"] \\ & (xR/I)/(K_\alpha/I) \cong xR/K_\alpha & \end{tikzcd}$$

y notar que $p_x(\bar{x}) = \overline{p_x}(\overline{x}) \neq 0$. La familia de morfismos $\{\overline{p_x}\}_{\bar{x} \in R/I}$ induce un morfismo

$$\varphi : R/I \to \prod_{\overline{x} \in R/I} xR/K_\alpha$$

tal que $Nu(\varphi) = \bigcap_{\bar{x} \in R/I} Nu(\overline{p_\alpha}) = 0$. De esta manera, φ es un monomorfismo y la Proposición 5.3 implica que $J(R/I) = 0$.

$(2) \Rightarrow (3)$ se sigue del Teorema de Correspondencia para módulos.

$(3) \Rightarrow (1)$ Sea I un ideal derecho propio no cero de R y sea S un R-módulo simple. Considerar un submódulo J/I de R/I y un morfismo no cero $f : J/I \to S$. Si $H/I = Nu(f)$ entonces $(J/I)/(H/I) \cong J/H \cong S$ por el Corolario 1.5. De esta manera, H/I es un submódulo máximo de J/I. De aquí, H es un submódulo máximo de J. Por suposición existe un submódulo máximo K de R tal que $H \subset K$ y $J \not\subset K$. Claramente, $J + K = R$, de donde $R/I = (J + K)/I$. Ahora podemos extender f a $\overline{f} : R/I \to S$ definiendo $\overline{f}(\bar{j} + \bar{k}) = f(\bar{j})$ para cualquier $\bar{j} \in J/I$ y $\bar{k} \in K/I$. Esto muestra que cada R-módulo simple es R/I-inyectivo y de aquí R es un WV-anillo derecho. □

COROLARIO 6.2. *Si R es un WV-anillo derecho, entonces $R/J(R)$ es un V-anillo derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Si R es un V-anillo derecho, entonces claramente $R/J(R)$ es un V-anillo derecho. Así, suponer que R no es un

V-anillo derecho. Entonces por el Teorema 6.4, R es uniforme derecho. Por la Proposición 6.1, cada ideal derecho no cero $(\neq R)$ de R es una intersección de ideales derechos máximos. Si $J(R) = 0$, entonces el ideal cero también es una intersección de ideales derechos máximos, y así R $(= R/J(R))$ es un V-anillo derecho. Si $J(R) \neq 0$, entonces en $R/J(R)$ todos los ideales derechos $(\neq R/J(R))$ son intersecciones de ideales derechos máximos, y así $R/J(R)$ es un V-anillo. □

De esta manera, en particular, un WV-anillo derecho regular von Neumann es un V-anillo derecho. En efecto, si R es un regular von Neumann entonces $J(R) = 0$ y $R \cong R/J(R)$ y por el Corolario 6.2 R es un V-anillo derecho.

PROPOSICIÓN 6.2. *Si R es un WV-anillo derecho, entonces las siguientes proposiciones se cumplen:*

1. *Si I es un ideal derecho de R, entonces $I^2 = 0$ o $I^2 = I$.*
2. *Si R es un dominio, entonces R es simple.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Si R es un V-anillo derecho, entonces por el Teorema 6.2, $I^2 = I$ para cada ideal derecho de R. Suponer que R no es un V-anillo derecho. Entonces R es uniforme derecho por el Teorema 6.4. Sea $I \neq R$ un ideal derecho y suponer que $I^2 \neq 0$. Por la Proposición 6.1, ambos I e I^2 son intersecciones de ideales derechos máximos. Si $I^2 \neq I$, debe existir un ideal derecho máximo M tal que $I^2 \subseteq M$ pero $I \nsubseteq M$. De esta manera tenemos $R = I + M$ y podemos escribir $1 = x + m$ para algún $x \in I$, $m \in M$. Esto da $I = (x+m)I \subseteq xI + mI \subseteq I^2 + M = M$, una contradicción. De aquí $I^2 = I$.

(2) Sea $0 \neq a \in R$. Puesto que R es un dominio, $(aR)^2 \neq 0$, así la parte (1) nos da $(aR)^2 = aR$, es decir $aRaR = aR$. Puesto que R es un dominio, esto da $RaR = R$ y de aquí R es un anillo simple. □

COROLARIO 6.3. *Si R es un WV-dominio derecho, entonces R es un V-dominio derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Sea R en un WV-dominio por la Proposición 6.2 R es simple y $J(R) = 0$. De esta manera R $(\cong R/J(R))$ es un V-dominio derecho. □

DEFINICIÓN 6.5. Un R-módulo derecho M es llamado un V-*módulo* si cada módulo simple en $\sigma[M]$ es M-inyectivo.

De esta manera, un anillo R es un V-anillo derecho si y solo si cada R-módulo derecho es un V-módulo; y un anillo R es un WV-anillo derecho si y solo si cada módulo cíclico propio es un V-módulo. El siguiente teorema es una generalización del Teorema 6.1 para V-módulos.

TEOREMA 6.5. *Para un R-módulo derecho M, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) M es un V-módulo.
(b) cada módulo finitamente cogenerado en $\sigma[M]$ es M-inyectivo.
(c) cada módulo en $\sigma[M]$ es un V-módulo.
(d) cada módulo finitamente cogenerado en $\sigma[M]$ es semisimple.
(e) cada módulo cociente finitamente cogenerado de M es semisimple.
(f) $\sigma[M]$ tiene un cogenerador semisimple.
(g) $\sigma[M]$ tiene un cogenerador Q con $J(Q) = 0$.
(h) para cada módulo $N \in \sigma[M]$, $J(N) = 0$.
(i) para cada módulo cociente N de M, $J(N) = 0$.
(j) cualquier submódulo propio de M es una intersección de submódulos máximos.

DEMOSTRACIÓN. $(a) \Rightarrow (f)$ Si cada módulo simple en $\sigma[M]$ es M-inyectivo, entonces la suma directa de los módulos simples en $\sigma[M]$ es un cogenerador semisimple (ver Proposición 3.8).

$(f) \Rightarrow (g)$ Sea $Q \in \sigma[M]$ un cogenerador semisimple. De aquí $Q = \bigoplus_\Delta S_\lambda$ con S_λ submódulo simple en Q, $\lambda \in \Delta$. De esta manera $J(Q) = J(\bigoplus_\Delta S_\lambda) = \bigoplus_\Delta J(S_\lambda) = 0$.

$(g) \Rightarrow (h)$ Sea $Q \in \sigma[M]$ un cogenerador con $J(Q) = 0$. Para cada módulo $N \in \sigma[M]$ existe un monomorfismo $f : N \to Q^\Delta$. Para cada $\lambda \in \Delta$, $\pi_\lambda f(J(N)) \subset J(Q) = 0$. De esta manera, $J(N) \subset \bigcap_\Delta Nu(\pi_\lambda f) = Nu(f) = 0$, es decir, $J(N) = 0$.

$(h) \Rightarrow (i)$ Puesto que $M \in \sigma[M]$, $M/N \in \sigma[M]$ para todo submódulo N de M. Por (h) $J(M/N) = 0$.

$(i) \Leftrightarrow (j)$ Inmediato de la definición de radical.

$(i) \Rightarrow (e)$ Sea N un módulo cociente finitamente cogenerado de M. Por (i) $J(N) = 0$. De aquí, N es cogenerado por módulos simples S_λ, $\lambda \in \Delta$, y la composición $N \to \prod_\Delta S_\lambda \overset{\pi_F}{\to} \prod_F S_\lambda$ es un monomorfismo con $F \subset \Delta$ un subconjunto finito. De esta manera, N es semisimple.

$(e) \Rightarrow (a)$ Sea S un módulo simple en $\sigma[M]$ y $\widehat{S}$ la cápsula M-inyectiva de S. Cualquier diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & S \arrow[r] & \widehat{S} \end{tikzcd}$$

puede ser extendido a un diagrama conmutativo por algún morfismo $f : M \to \widehat{S}$. Como un submódulo de $\widehat{S}$, $f(M)$ es finitamente cogenerado y de aquí semisimple por (e), es decir, $f(M) \subset Soc(\widehat{S}) = S$. Por lo tanto S es M-inyectivo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Puesto que cada módulo simple en $\sigma[M]$ es finitamente cogenerado, por (b) cada módulo simple en $\sigma[M]$ es M-inyectivo. De aquí, M es un V-módulo.

$(a) \Rightarrow (d)$ Sea $\{S_\lambda\}_\Delta$ un conjunto mínimo de representantes de los módulos simples en $\sigma[M]$ y $\widehat{S}_\lambda$ la cápsula M-inyectiva de S_λ, $\lambda \in \Delta$. Por la Proposición 3.8, $\{S_\lambda\}_\Delta$ es un conjunto de cogeneradores en $\sigma[M]$. Sea $N \in \sigma[M]$ finitamente cogenerado. Entonces la composición $N \to \prod_\Delta S_\lambda \stackrel{\pi_F}{\to} \prod_F S_\lambda$ es un monomorfismo con $F \subset \Delta$ un subconjunto finito, es decir, N es semisimple.

$(d) \Rightarrow (e)$ Es obvio.

$(a) \Rightarrow (c)$ Cada módulo simple en $\sigma[M]$ es M-inyectivo. Por la Proposición 4.5 cada módulo simple es N-inyectivo para cualquier $N \in \sigma[M]$. Así, cada módulo $N \in \sigma[M]$ es un V-módulo.

$(d) \Rightarrow (b)$ Puesto que ya hemos visto que $(d) \Leftrightarrow (a)$, la condición (d) implica que cada módulo finitamente cogenerado en $\sigma[M]$ es una suma directa finita de módulos simples M-inyectivos y de aquí M-inyectivo. $\square$

En vista del Corolario 6.2, se sigue que si R un WV-anillo derecho el cual no es un V-anillo derecho, entonces $J(R) \neq 0$.

LEMA 6.3. *Sea R un WV-anillo derecho el cual no es un V-anillo derecho. Entonces $J(R)$ es un R-módulo derecho simple.*

DEMOSTRACIÓN. Sea N_R un submódulo propio de $J(R)$. Si $R/N \cong R$, entonces R/N es proyectivo y de aquí N es un sumando directo de R, una contradicción porque R es uniforme derecho. De esta manera R/N es un cíclico propio. Puesto que R es un WV-anillo derecho, R/N es un V-módulo y de aquí $J(R/N) = 0 = J(R)/N$. De esta manera $J(R) = N$ y de aquí $J(R)$ es un R-módulo derecho simple. $\square$

COROLARIO 6.4. *Sea R un WV-anillo derecho el cual no es un V-anillo derecho. Entonces cada ideal derecho no cero de R contiene a $J(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea I un ideal derecho no cero de R. Puesto que R es uniforme derecho, $0 \neq I \cap J(R) \subseteq J(R)$. Porque $J(R)_R$ es simple, tenemos que $I \cap J(R) = J(R)$. De esta manera $J(R) \subseteq I$. $\square$

LEMA 6.4. *Sea R un WV-anillo derecho el cual no es un V-anillo derecho. Entonces cada ideal derecho cíclico no cero de $R/J(R)$ es isomorfo a $R/J(R)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{R} = R/J(R)$ Sea $0 \neq \bar{x} \in \bar{R}$. Entonces existe $x \in R \backslash J(R)$ tal que $\bar{x} = x + J(R)$. Si $xR \ncong R_R$, entonces como R es un WV-anillo derecho y $J(R)$ es un R-módulo derecho simple, $J(R)$ es xR-inyectivo. Pero $J(R) \subseteq xR$ por el Corolario 6.4, así $J(R)$ es un sumando directo de xR, una contradicción ya que R es uniforme derecho. De esta manera $xR \cong R_R$. Sea $f : xR \to R$ un isomorfismo. Puesto que $\bar{R}$ es un V-anillo derecho, $J(xR/J(R)) = 0$. De aquí $J(xR) \subseteq J(R)$. Ahora cada submódulo no cero de xR contiene a $J(R)$ por el Corolario 6.4, y así $J(xR) \neq 0$. Ahora, como $J(R)_R$ es simple, $J(xR) = J(R)$. De aquí $f(J(R)) \subseteq J(R)$. Puesto que f es una inyección, $f(J(R)) \neq 0$, y así $f(J(R)) = J(R)$. De esta manera $\bar{x}\bar{R} \cong \bar{R}$. $\square$

TEOREMA 6.6. *Sea R un WV-anillo derecho el cual no es un V-anillo derecho. Entonces*

1. *R tiene exactamente tres ideales bilaterales $0 \subset J(R) \subset R$. Además, para cualquier elemento no cero $x \in J(R)$, $Rx \cong {}_R(R/J(R))$.*
2. *Si ${}_RJ(R)$ es finitamente generado, entonces $R/J(R)$ es un anillo con división y así, R tiene exactamente tres ideales derechos $0 \subset J(R) \subset R$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sea $\bar{R} = R/J(R)$. Sea $0 \neq \bar{x} \in \bar{R}$. Entonces $\bar{x}\bar{R} \cong \bar{R}$ por el Lema 6.4. Así $\bar{x}\bar{R}$ es proyectivo. de esta manera $\bar{R}_{\overline{R}} = \bar{P} \oplus \bar{Q}$, donde $\bar{P} \cong \bar{x}\bar{R}$. Si $\bar{Q} \neq \bar{0}$, entonces es generado por un idempotente no trivial $\bar{e} \in \bar{R}$. Puesto que $J(R)_R$ es simple, $J(R)^2 = 0$. Puesto que $J(R)$ es nil, los idempotentes módulo $J(R)$ pueden ser levantados. Así podemos suponer que e es un idempotente en R. Pero R es uniforme derecho, así esto es una contradicción. de esta manera $\bar{0} = \bar{Q} \cong ann_{\bar{R}}(\bar{x})$. Esto implica que $\bar{R}$ es un dominio. Puesto que $\bar{R}$ es un V-anillo

derecho, $\bar{R}$ es un anillo simple. De esta manera se sigue que R tiene exactamente tres ideales bilaterales $0 \subset J(R) \subset R$. Finalmente, sea $0 \neq x \in J(R)$. Entonces $Rx = J(R)$. Puesto que $ann_l^R(J(R))$ es un ideal bilateral, así es $ann_l^R(x)$. Puesto que $J(R)^2 = 0$ y R es simple, debemos tener que $ann_l^R(x) = J(R)$. De esta manera se sigue que $Rx \cong {}_R(R/J(R))$.

2. Suponer que ${}_RJ(R) = Rx_1 + \cdots + Rx_k$ para algún entero positivo k, donde $0 \neq x_i \in J(R)$ para $1 \leq i \leq k$. Definir $\varphi : R_R \to J(R)^{(k)}$ por $\varphi(r) = (x_1r, \ldots, x_kr)$. Poner $I = Nu(\varphi) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} ann_r^R(x_i)$. Entonces $I \subseteq ann_r^R(J(R))$. Pero $J(R)^2 = 0$ y $\bar{R}$ es simple, así $ann_r^R(J(R)) = J(R) = I$. Ahora $R/J(R)$ es isomorfo a un submódulo de $J(R)^{(k)}$, de donde $\bar{R}_{\bar{R}}$ es semisimple. Puesto que $\bar{R}$ es un dominio, debe ser un anillo con división y consecuentemente R tiene exactamente tres ideales derechos $0 \subset J(R) \subset R$. □

Consecuentemente, tenemos el siguiente.

COROLARIO 6.5. *Sea R un WV-anillo derecho tal que R no es un V-anillo derecho. Suponer, además, que R es un WV-anillo izquierdo. Entonces R es un anillo uniserial derecho e izquierdo, y $0 \subset J(R) \subset R$ es la única serie de composición en R.*

Consecuentemente, si R es un WV-anillo derecho tal que R no es un V-anillo derecho, entonces R es un WV-anillo izquierdo si y solo si ${}_RJ(R)$ es un módulo simple.

DEMOSTRACIÓN. Sea R un WV-anillo derecho como izquierdo. Si R también fuera un V-anillo izquierdo entonces por el Corolario 6.2 $J(R) = 0$ lo cual es una contradicción. De esta manera R es un WV-anillo izquierdo el cual no es un V-anillo izquierdo y por el Teorema 6.6 se sigue que R es un anillo uniserial derecho e izquierdo, y $0 \subset J(R) \subset R$ es la única serie de composición en R.

Por otra parte si R es un WV-anillo derecho e izquierdo el cual no es un V-anillo derecho, entonces R no es un V-anillo izquierdo y por el Lema 6.3 ${}_RJ(R)$ es simple. Inversamente, si ${}_RJ(R)$ es simple por el Teorema 6.6 R tiene exactamente tres ideales izquierdos $0 \subset J(R) \subset R$. De esta manera, trivialmente cada ideal izquierdo no cero de R es intersección de ideales izquierdos máximos y por la Proposición 6.1 R es un WV-anillo izquierdo. □

3. $\mathbf{\Sigma}$-V anillos

DEFINICIÓN 6.6. Un R-módulo M es llamado Σ-inyectivo si $M^{(\alpha)}$ es inyectivo para cualquier cardinal α.

Un anillo R es llamado un Σ-V anillo derecho si cada R-módulo derecho simple es Σ-inyectivo.

El siguiente teorema da caracterizaciones para que un módulo inyectivo sea Σ-inyectivo.

TEOREMA 6.7. *Para un módulo inyectivo M_R, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *M es Σ- inyectivo.*
2. *$M^{(\aleph_0)}$ es inyectivo.*
3. *Cada extensión esencial de $M^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos que son o inyectivos o proyectivos.*
4. *R satisface la CCA sobre el conjunto de ideales derechos I de R que son anuladores de subconjuntos de M.*

DEMOSTRACIÓN. $(3) \Rightarrow (1)$ Suponer que cada extensión esencial de $M^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos que son o inyectivos o proyectivos. Suponer lo contrario que M no es Σ-inyectivo. Entonces $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$, ($M_i \cong M$) no es inyectiva para algún conjunto de índices infinito $\mathcal{I}$. De esta manera, por el criterio de inyectividad de Baer, existe un ideal derecho A de R y un R-homomorfismo derecho $g : A \to \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ tal que el conjunto $I' = \{j \in \mathcal{I} : \pi_j \circ g \neq 0\}$ es infinito, donde $\pi_j : \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i \to M_j$ es la proyección canónica. Porque de lo contrario la $Im(g)$ estaría contenida en una subsuma directa finita de $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$; y puesto que cualquier suma directa finita de módulos inyectivos es inyectiva, la función g se extendería a R y esto contradiría nuestra suposición de que $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ no es inyectiva. Sea $\mathcal{J}$ un subconjunto numerablemente infinito de I'. Ahora, escoger un elemento $a_j \in A$. Sea $b_j = g(a_j)$ y $N_j = b_jR$. Entonces N_j es un submódulo cíclico de M_j. Puesto que $\mathcal{J}$ es numerable y cada N_j es cíclico, $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} N_j$ es numerablemente generada. Denotar por Q_j, una cápsula inyectiva de N_j en M_j. Sea $Q = E(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j)$ una cápsula inyectiva de $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$. Sea $\pi : \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i \to \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$ el epimorfismo que lleva a M_i a cero si $i \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{J}$; mientras que para todo $i \in \mathcal{J}$, la restricción de π a M_i, $\pi|_{M_i} = \beta \circ \alpha$ donde $\alpha : M_i \to Q_i$ es la proyección sumando directo natural y $\beta : Q_i \to \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$ es el monomorfismo canónico. Afirmamos que el homomorfismo $f = \pi \circ g : A \to \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$ no puede ser extendido a un homomorfismo $h : R \to \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$ a lo largo del monomorfismo $\mu : A \to R$. En particular, afirmamos que $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$ no es inyectiva. Suponer lo contrario que f admite tal extensión h. Puesto que $h(1)$ está contenida solamente en una subsuma directa finita de $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j$, la $Im(f)$ está contenida en $\bigoplus_{j\in\mathcal{F}} Q_j$ para algún subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{J}$. De esta manera, $\pi_j \circ f = 0$ para cada $j \in \mathcal{J}\backslash\mathcal{F}$. Pero esto no es posible ya que $\pi_j \circ f : A \to Q_j$ y cada Q_j es una cápsula inyectiva de N_j en M_j.

Considerar el conjunto Ω de submódulos P de Q satisfaciendo las siguientes tres condiciones:

1. $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j \subseteq P \subseteq Q$;
2. P es un suma directa de submódulos inyectivos de Q;
3. $f = \pi \circ g : A \to \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j \subseteq P$ no puede ser extendida a un homomorfismo $h : R \to P$ a lo largo del monomorfismo $\mu : A \to R$.

Claramente, Ω es no vacío ya que $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j \in \Omega$. Definir un orden parcial $\leq$ sobre Ω como $P_1 \leq P_2$ si y solo si $P_1 \subseteq P_2$. Afirmamos que Ω es un conjunto inductivo bajo este orden parcial. Sea $\{P_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ una cadena en Ω. Sea $P = \bigcup_{k\in\mathcal{K}} P_k$. Como $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j \subseteq_e Q = E(\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j)$, tenemos que $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j \subseteq_e P$. De aquí, $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} M_j \subseteq_e P$. Por suposición, $P = (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus (\bigoplus_{v\in\mathcal{U}'} C'_v)$, donde los C_u son módulos inyectivos y los C'_v son módulos proyectivos. Por Kaplansky, sabemos que cada módulo proyectivo es una suma directa de módulos numerablemente generados. De aquí, tenemos que $P = (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus (\bigoplus_{v\in\mathcal{V}} D_v)$, donde cada C_u es un módulo inyectivo y cada D_v, un módulo numerablemente generado. Además, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son conjuntos numerables, porque P contiene un submódulo numerablemente generado $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} N_j$ tal que $\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} N_j \subseteq_e P$. De esta manera, $D = \bigoplus_{v\in\mathcal{V}} D_v$ es numerablemente generado. Podemos escribir $D = \sum_{n\in\mathbb{N}} D'_n$ como una suma numerable de submódulos finitamente generados. Puesto que D_1' es finitamente generado, $D_1' \subset \bigcup_{k\in\mathcal{F}} P_k$ para algún subconjunto finito $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}$. Además, puesto que cada P_k es una suma directa de submódulos inyectivos, P contiene una cápsula inyectiva $E(D_1')$ de D_1'. Además, $E(D_1') \cap (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) = 0$, porque $D_1' \cap (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) = 0$. De esta manera

$$E(D_1') \cong \frac{(\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus E(D_1')}{\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u} \subseteq \frac{(\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus (\bigoplus_{v\in\mathcal{V}} D_v)}{\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u} \cong \bigoplus_{v\in\mathcal{V}} D_v = D.$$

Claramente el isomorfismo anterior fija D_1'. De esta manera, D contiene la cápsula inyectiva $E(D_1')$ de D_1', y por lo tanto tenemos una descomposición $D = E(D_1') \oplus D_1''$. Denotamos por $D_{1,n}'$ la imagen de D_n' bajo la proyección natural sobre D_1'' para $n \geq 2$. Poner $D_{1,1}' = D_1'$ por simplicidad. Es fácil verificar que $D = E(D_{1,1}') \oplus \sum_{n\geq 2} D_{1,n}'$. Esto da una descomposición $P = (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus E(D_{1,1}') \oplus \sum_{n\geq 2} D_{1,n}'$. Aplicando la misma construcción a P y a $D_{1,2}'$ obtenemos $P = (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus E(D_{1,1}') \oplus E(D_{2,2}') \oplus \sum_{n\geq 3} D_{2,n}'$. Repitiendo este proceso, construimos un conjunto infinito $\{E(D_{n,n}')\}_{n\in\mathbb{N}}$ de submódulos inyectivos de P tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, tenemos que $(\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus (\bigoplus_{n=1}^{m} E(D_{n,n}')) \subseteq P$. Además, por construcción, $D_m' \subseteq \bigoplus_{n=1}^{m} D_{n,n}'$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Como una consecuencia, $D \subseteq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E(D_{n,n}')$, así $P = (\bigoplus_{u\in\mathcal{U}} C_u) \oplus (\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E(D_{n,n}'))$. De esta manera P satisface (2). Finalmente, procedemos a demostrar que el homomorfismo $f = \pi \circ g : A \to \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} Q_j \subseteq P$ no puede ser extendido a un homomorfismo $h : R \to P$ a lo largo del monomorfismo $\mu : A \to R$. Suponer, si es posible, que f admite tal extensión h. Puesto que $Im(h)$ es finitamente generada y $\{P_k\}_{k\in\mathcal{K}}$ es una cadena, existe un $k \in \mathcal{K}$ tal que $Im(h) \subseteq P_k$. Esto da una contradicción porque $P_k \in \Omega$ y por lo tanto, por suposición, f no puede ser extendido a un homomorfismo $R \to P_k$. De aquí, $P \in \Omega$. Esto establece nuestra afirmación que Ω es un conjunto inductivo y de aquí por el Lema de Zorn, Ω tiene un elemento máximo, digamos P_0. Por hipótesis, $P_0 = \bigoplus_{t\in\mathcal{T}} W_t$, donde cada W_t es inyectivo. Sea $\varphi_t : P_0 \to W_t$ las proyecciones canónicas. Puesto que, por hipótesis, f no puede ser extendido a un homomorfismo $h : R \to P_0$, existe un subconjunto infinito $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ tal que $\varphi_t \circ f \neq 0$, para cada $t \in \mathcal{T}'$. Porque de lo contrario $Im(f)$ estaría contenida en $\bigoplus_{\mathcal{F}} W_t$ donde $\mathcal{F}$ es un conjunto finito. Puesto que $\bigoplus_{\mathcal{F}} W_t$ es inyectiva, f se extendería a un homomorfismo $R \to \bigoplus_{\mathcal{F}} W_t \subseteq P_0$, dando una contradicción. Escribamos $\mathcal{T}$ como una unión ajena de conjuntos infinitos $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$. Denotar $\varphi_{\mathcal{T}_1} : \bigoplus_{t\in\mathcal{T}} W_t \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t$ y $\varphi_{\mathcal{T}_2} : \bigoplus_{t\in\mathcal{T}} W_t \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_2} W_t$. Notar que $\varphi_{\mathcal{T}_i} \circ f : A \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_i} W_t$ no puede ser extendido a un homomorfismo $h : R \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_i} W_t$ para cada $i \in \{1,2\}$. Porque de lo contrario $Im(h) \subseteq \bigoplus_{t\in\mathcal{F}} W_t$, donde $\mathcal{F}$ es un conjunto finito y de aquí $\varphi_t \circ f = \varphi_t \circ \varphi_{\mathcal{T}_i} \circ f = 0$, para cada $t \in \mathcal{T}_i \backslash \mathcal{F}$, una contradicción. Esto implica que $\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t$ no es inyectiva y de aquí $\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t \neq E(\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t)$. De esta manera, $P_0 = \bigoplus_{t\in\mathcal{T}} W_t \subsetneq E(\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t) \oplus (\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_2} W_t)$. Ahora, puede ser observado que f no puede ser extendido a un homomorfismo $R \to E(\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t) \oplus (\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_2} W_t)$, porque de lo contrario $\varphi_{\mathcal{T}_2} \circ f$ se extendería a un homomorfismo $R \to \bigoplus_{t\in\mathcal{T}_2} W_t$, una contradicción. Por lo tanto, $E(\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_1} W_t) \oplus (\bigoplus_{t\in\mathcal{T}_2} W_t) \in \Omega$. Pero esto da una contradicción a la maximalidad de P_0. De aquí, M debe ser Σ-inyectivo.

$(1) \Rightarrow (3)$ Si M es Σ-inyectivo, entonces $M^{(\aleph_0)}$ es inyectivo y de aquí $M^{(\aleph_0)}$ no tiene extensiones esenciales propias. De esta manera la proposición de que cada extensión esencial de $M^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos que son o inyectivos o proyectivos se cumple trivialmente.

$(1) \Rightarrow (2)$ Sea M Σ-inyectivo. Entonces $M^{(\alpha)}$ es inyectivo para cualquier cardinal α.

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea $M^{(\aleph_0)}$ es inyectivo. Entonces $M^{(\aleph_0)}$ no tiene extensiones esenciales propias y se cumple (3) trivialmente lo que a su vez implica (1).

$(2) \Rightarrow (4)$ Suponer que (2) se cumple pero que (4) no. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots$$

de anuladores en R de subconjuntos de M. Los anuladores izquierdos en M de esta sucesión

$$ann_l^M(I_1) \supset ann_l^M(I_2) \supset \cdots$$

son estrictamente decrecientes. Escoger $x_n \in ann_l^M(I_n) \backslash ann_l^M(I_{n+1})$ y sea

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Entonces para cada $a \in I$ existe un $n > 0$ tal que $x_{n+k}a = 0$ para todo $k = 1, 2, \ldots$. Así, la función

$$f : a \mapsto (x_1 a, x_2 a, \ldots) \quad (a \in I)$$

es un R-homomorfismo $f : I \to M^{\aleph_0}$. Ahora por el criterio de inyectividad de Baer existe un

$$y = (y_1, \ldots y_n, 0, \ldots) \in M^{\aleph_0}$$

tal que, para todo $a \in I$

$$(x_1 a, x_2 a, \ldots) = f(a) = (y_1 a, \ldots y_n a, 0, \ldots).$$

Pero esto es contrario a nuestra elección de $x_{n+1} \notin ann_l^M(I_{n+2})$.

$(4) \to (1)$ Suponer que se cumple (4). Entonces cada colección no vacía de anuladores derechos de subconjuntos de M contiene un elemento máximo. Sea I un submódulo del módulo regular derecho R_R y considerar un R-homomorfismo

$$f : I \to M^{(A)}.$$

Puesto que M^A es inyectivo y puesto que $M^{(A)}$ es un submódulo de M^A, existe un $x \in M^A$ tal que $f(a) = xa$ para todo $a \in I$. Para cada subconjunto $B \subseteq A$ sea $x_B = i_B \pi_B(x)$, es decir,

$$\pi_\alpha(x_B) = \begin{cases} \pi_\alpha(x), & \text{si } \alpha \in B \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Si F recorre los subconjuntos finitos de A, entonces por hipótesis, el conjunto de ideales derechos anuladores de la forma

$$ann_r^R(x_{A \backslash F}) = ann_r^R(\{\pi_\alpha(x) / \alpha \in A \backslash F\})$$

contiene un elemento máximo $ann_r^R(x_{A \backslash F_0})$. Por maximalidad, si F es un subconjunto finito de A, entonces

$$F \supseteq F_0 \text{ implica que } ann_r^R(x_{A \backslash F}) = ann_r^R(x_{A \backslash F_0}).$$

Ahora para cada $a \in I$, puesto que $f(a) \in M^{(A)}$, existe un subconjunto finito $F_a \supseteq F_0$ tal que

$$a\pi_\alpha(x) = \pi_\alpha(xa) = \pi_\alpha(f(a)) = 0 \qquad (\alpha \in A \backslash F_a).$$

Así, para cada $a \in I$ tenemos que $ann_r^R(x_{A \backslash F_a}) = ann_r^R(x_{A \backslash F_0})$, de donde

$$f(a) = xa - x_{A \backslash F_0} a = x_{F_0} a \quad (a \in I).$$

Puesto que $x_{F_0} \in M^{(A)}$ se sigue por el criterio de inyectividad de Baer que $M^{(A)}$ es inyectivo. $\square$

DEFINICIÓN 6.7. Una suma directa interna $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A_i$ de submódulos de un módulo M es llamada un *sumando local* de M, si dado cualquier subconjunto finito $\mathcal{F}$ de $\mathcal{I}$, la suma directa $\bigoplus_{i\in\mathcal{F}} A_i$ es un sumando directo de M.

DEFINICIÓN 6.8. Sea $M = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ una descomposición del módulo M en sumandos no cero M_i. Esta descomposición es llamada *complemento de sumandos directos* si, siempre que A sea un sumando directo de M, existe un subconjunto $\mathcal{J}$ de $\mathcal{I}$ para el cual $M = (\bigoplus_{j\in\mathcal{J}} M_j) \oplus A$.

Ahora estamos listo para demostrar el siguiente.

COROLARIO 6.6. *Un R-módulo derecho M arbitrario es Σ-inyectivo si y solo si cada extensión esencial de $M^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que cada extensión esencial de $M^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos inyectivos. Sea $E = E(M)$. Tenemos que $M^{(\aleph_0)} \subset_e E^{(\aleph_0)}$. Por suposición, $M^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos inyectivos. Por lo tanto, $M^{(\aleph_0)}$ es un sumando local de $E^{(\aleph_0)}$. Puesto que por el teorema anterior, E es Σ-inyectivo, así es $E^{(\aleph_0)}$. De aquí $E^{(\aleph_0)}$ tiene una descomposición inescindible que complementa sumandos directos. Por lo tanto, cualquier sumando local de $E^{(\aleph_0)}$ es un sumando directo. De aquí, $M^{(\aleph_0)}$ es un sumando directo de $E^{(\aleph_0)}$. Por lo tanto, $M^{(\aleph_0)}$ es inyectivo y de esta manera M es Σ-inyectivo. El inverso es obvio. $\square$

PROPOSICIÓN 6.3. *Cada Σ-V anillo derecho es un V-anillo derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Sean R un Σ-V anillo derecho y S un R-módulo simple. Por suposición $S^{(\alpha)}$ es inyectivo para cualquier cardinal α. De aquí S es inyectivo y así R es un V- anillo derecho. $\square$

PROPOSICIÓN 6.4. *Una suma directa arbitraria de R-módulos inyectivos es inyectiva si y solo si R es un anillo neteriano derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer que R es derecho neteriano y sea $\{E_i/i \in \mathcal{I}\}$ una colección de R-módulos inyectivos. Sea $E = \bigoplus E_i$ y sea $\sigma : I \to E$ un homomorfismo de R-módulos con I un ideal derecho de R. Entonces I_R es finitamente generado y, puesto que la imagen de cada generador tiene solo finitamente muchas componentes no cero, se sigue que $\sigma(I)$ tiene solo finitamente muchas componentes no cero. Así $\sigma(I) \subseteq E'$ donde $E' = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. Puesto que E' es una suma directa finita de módulos inyectivos, se sigue que E' es inyectivo y de aquí la función $\sigma : I \to E'$ se extiende a un R-homomorfismo $\sigma^* : R \to E' \subseteq E$. Por el Criterio de Baer E es inyectivo.

Inversamente, sea $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ una cadena creciente de ideales derechos de R y poner $I = \bigcup_n I_n$ de modo que I también es un ideal derecho de R. Para cada n, la cápsula inyectiva $E_n = E(R/I_n)$ es un R-módulo inyectivo y de aquí, por suposición $E = \bigoplus E_n$ también es inyectivo. Ahora definir $\sigma : I \to E$ por $\sigma : x \mapsto \oplus_n(x + I_n)$. Puesto que $I = \bigcup_n I_n$, cualquier $x \in I$ está contenido en algún I_m y de aquí en todo I_n con $n \geq m$. De esta manera $\sigma(x)$ tiene solo finitamente muchas componentes no cero y está contenido en E. Puesto que E es inyectivo, σ se extiende a una función $\sigma^* : R \to E$, digamos $\sigma^*(1) \in E' = \bigoplus_{n=1}^{k-1} E_n$. Entonces $\sigma(I) \subseteq \sigma^*(R) = \sigma^*(1)R$ también está contenido en E'. De esta manera la k-componente de cada $\sigma(x)$ es cero y concluimos que $I = I_k$. En otras palabras, la cadena ascendente dada de ideales derechos se estabiliza en k y se sigue que R es derecho neteriano. □

PROPOSICIÓN 6.5. *Cada V-anillo derecho, neteriano derecho es un Σ-V anillo derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Sean R un V-anillo derecho y S un R-módulo simple. Por suposición S es inyectivo y por la Proposición 6.4 se sigue que S es Σ-inyectivo. De esta manera R es un Σ-V anillo derecho. □

DEFINICIÓN 6.9. Un anillo R es llamado un *PCI-anillo derecho* si cada R-módulo derecho cíclico propio es inyectivo.

TEOREMA 6.8. *Sea R un PCI-anillo derecho. Entonces R es neteriano derecho y hereditario derecho.*

PROPOSICIÓN 6.6. *Si R es un PCI-anillo derecho. Entonces R es un Σ-V anillo derecho.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S un R-módulo simple. Entonces $S = xR$ para $0 \neq x \in S$. Por suposición S es inyectivo. Así R es un V-anillo derecho y por el Teorema 6.8 R es neteriano derecho. De esta manera por la Proposición 6.5 R es un Σ-V anillo derecho. □

Puesto que en un Σ-V anillo derecho requerimos que cada módulo simple sea Σ-inyectivo, esperamos alguna clase de finitud en tales anillos. Empezamos con algunas definiciones y observaciones útiles.

DEFINICIÓN 6.10. Un anillo R es llamado $q.f.d.$ *derecho* (*cociente de dimensión finita*) *relativo a un módulo* M si ningún R-módulo derecho cíclico contiene una suma directa infinita de módulos isomorfos a submódulos de M.

LEMA 6.5. *Si un R-módulo derecho M es Σ-inyectivo, entonces R es $q.f.d.$ relativo a M.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer lo contrario que R no es $q.f.d.$ derecho relativo a M. Entonces existe un módulo derecho cíclico C con una familia independiente infinita $\{V_i/i \in \mathcal{I}\}$ de submódulos no cero de C tal que cada V_i es isomorfo a un submódulo de M y $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} V_i$ es esencial en C. Poner $M_i = M$, $i \in \mathcal{I}$. Puesto que M es Σ-inyectivo, el monomorfismo $\varphi : \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} V_i \to \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$ tal que $\varphi(V_i) \subseteq M_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$ se extiende a un monomorfismo $f : C \to \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} M_i$. Ahora, puesto que C es cíclico, existe un subconjunto finito $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ tal que $f(C) \subseteq \bigoplus_{j\in\mathcal{J}} M_j$. Por lo tanto $f(V_k) \cap M_k \subseteq f(C) \cap M_k = 0$ para todo $k \notin \mathcal{J}$, una contradicción al hecho de que $f(V_i) = \varphi(V_i) \subseteq M_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$.

De esta manera R es $q.f.d.$ derecho relativo a M $\square$

LEMA 6.6. *Sea R un Σ-V anillo derecho y sea S cualquier R-módulo derecho simple. Entonces R es $q.f.d.$ derecho relativo a S.*

DEMOSTRACIÓN. Por suposición S es Σ-inyectivo y por el Lema 6.5 R es q.f.d. derecho relativo a S. $\square$

DEFINICIÓN 6.11. Un R-módulo M es llamado *directamente finito* (o *finito von Neumann, o finito Dedeking*) si M no es isomorfo a ningún sumando directo propio de él mismo. Equivalentemente, M es directamente finito si y solo si $N = 0$ es el único módulo para el cual $M = M \oplus N$.

Notar que cualquier sumando directo de un módulo directamente finito es directamente finito. Un módulo que no es directamente finito es llamado *directamente infinito*. Por ejemplo, cada módulo libre de rango infinito es directamente infinito.

LEMA 6.7. *Un R-módulo M es directamente finito si y solo si $xy = 1$ implica que $yx = 1$, para todo $x, y \in End_R(M)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si A es directamente infinito, entonces $A = B \oplus C$ con $B \cong A$ y $C \neq 0$. Escoger un isomorfismo $y : A \to B$, y definir $x \in End_R(A)$ tal que $xC = 0$ y x se restringe a $y^{-1} : B \to A$. Entonces $xy = 1$ y $yx \neq 1$.

Inversamente, suponer que $x, y \in End_R(A)$ con $xy = 1$ y $yx \neq 1$. Puesto que yx es idempotente y $yxy = y$, obtenemos $A = yA \oplus (1 - yx)A$. Observando que $yA \cong A$ y $(1 - yx)A \neq 0$, concluimos que A es directamente infinito. $\square$

DEFINICIÓN 6.12. Un anillo R es llamado *directamente finito* si para cada $x, y \in R$, $xy = 1$ implica que $yx = 1$.

PROPOSICIÓN 6.7. *Si M es un módulo directamente infinito, entonces $End(M)$ contiene un conjunto infinito de matrices unitarias no cero e_{ij} (para $i, j = 1, 2, \dots$), es decir, $e_{ij}e_{jn} = e_{in}$ para todo i, j, n y $e_{ij}e_{kn} = 0$ para todo $j \neq k$. Consecuentemente, $End(M)$ contiene una sucesión infinita $\{e_{11}, e_{22}, \dots\}$ de idempotentes no cero ortogonales dos a dos tal que $e_{ii}M \cong e_{jj}M$ para todo i, j.*

DEMOSTRACIÓN. Existen funciones $x, y \in End(M)$ tal que $xy = 1$ y $yx \neq 1$, y ponemos $e_{ij} = y^{i-1}x^{j-1}$ para todo $i, j = 1, 2, \dots$. Siempre que $j \leq k$, calculamos que

$$e_{ii}y^k = y^{i-1}x^{j-1}y^k - y^i x^j y^k = y^{i-1}y^{k-j+1} - y^i y^{k-j} = 0.$$

Consecuentemente, $e_{ij}e_{kn} = e_{ij}y^{k-1}x^{n-1} - e_{ij}y^k x^n = 0$ siempre que $j \leq k - 1$, y

$$\begin{aligned} e_{ij}e_{jn} = e_{ij}y^{j-1}x^{n-1} - e_{ij}y^i x^n &= (y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j)y^{j-1}x^{n-1} \\ &= y^{i-1}x^{n-1} - y^i x x^{n-1} = e_{in}. \end{aligned}$$

Puesto que $x^k e_{kn} = x^k y^{k-1}x^{n-1} - x^k y^k x^n = xx^{n-1} - x^n = 0$, también obtenemos que $x^j e_{kn} = 0$ para todo $j \geq k$; de aquí, $e_{ij}e_{kn} = y^{i-1}x^{j-1}e_{kn} - y^i x^j e_{kn} = 0$ siempre que $j \geq k+1$. De esta manera, los e_{ij} son matrices unitarias.

Por cuanto $e_{1i}e_{ij}e_{j1} = e_{11} = 1 - yx \neq 0$, vemos que todos los $e_{ij} \neq 0$. Es claro que los e_{ii} son idempotentes no cero ortogonales dos a dos, y que los $e_{ii}M$ son isomorfos dos a dos. $\square$

No es difícil observar que un anillo R con dimensión finita Goldie derecha debe ser directamente finito. La técnica general para demostrar esto es suponer lo contrario que R no es directamente finito. Esto da lugar a un conjunto infinito de idempotentes ortogonales en

R dando una suma directa infinita de ideales derechos contenidos en R, una contradicción a la dimensión Goldie derecha finita de R. En el siguiente resultado generalizamos este argumento.

LEMA 6.8. *Sea R un anillo el cual no es $q.f.d.$ derecho relativo a cada R-módulo simple. Entonces R debe ser directamente finito.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer lo contrario que R no es directamente finito. Entonces existen $x, y \in R$ tal que $xy = 1$ y $yx \neq 1$. Poner $e_{ij} = y^{i-1}x^{j-1} - y^i x^j$ para todo $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Entonces $\{e_{ij}/(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito de matrices unidades no cero, es decir $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ para todo $i, j, k, l \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, produciremos submódulos cíclicos $C_{n,i}$ de R_R, donde $C_{n,i} \cong C_{n,j}$ para todo $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Producimos estos submódulos cíclicos por inducción.

Sea $n > 1$. Denotemos por Q, el anillo de cocientes derecho máximo de R. Puesto que $R \subseteq_e Q$, existe un submódulo cíclico no cero $C_{n,1}$ de R_R tal que $C_{n,1} \subseteq e_{n^2,n^2}Q \cap R$. Ahora escogemos $0 \neq x_2 \in e_{n^2+1,n^2}C_{n,1} \cap R$. Entonces $x_2 = e_{n^2+1,n^2}x_1$, donde $x_1 \in C_{n,1}$. Denotar $C_{n,2} = x_2R$ y redefinir $C_{n,1}$ poniendo $C_{n,1} = x_1R$. Definir el homomorfismo de módulos $\varphi : C_{n,1} \to C_{n,2}$ por $\varphi(x) = e_{n^2+1,n^2}x$. Claramente, φ es un isomorfismo (con inverso dado por la multiplicación izquierda por e_{n^2,n^2+1}), y así $C_{n,1} \cong C_{n,2}$. Suponer ahora que hemos definido submódulos cíclicos $C_{n,1} \cong C_{n,2} \cong \cdots \cong C_{n,j-i}$ en R, donde $C_{n,i} = x_iR$, $i = 1, 2, \ldots, j-1$. En seguida, escoger x_j tal que $x_j \in e_{n^2+j-1,n^2+j-2}C_{n,j-1} \cap R$ y escribir $x_j = e_{n^2+j-1,n^2+j-2}x_{j-1}r_{j-1}$ donde $r_{j-1} \in R$. Sea $x'_{j-1} = x_{j-1}r_{j-1}$, y poner $C_{n,j} = x_jR$. Ahora redefinir $C_{n,j-1} = x'_{j-1}R$ (el cual está contenido en el $C_{n,j-1}$ previamente construido). Entonces $C_{n,j-1} \cong C_{n,j}$ bajo el isomorfismo que envía $x \in C_{n,j-1}$ a $e_{n^2+j-1,n^2+j-2}x$. Redefinimos $C_{n,1}, C_{n,2}, \ldots, C_{n,j-2}$ anterior en consecuencia para que todos ellos permanezcan isomorfos uno a otro y a $C_{n,j-1}$. Notar que la familia $\{C_{n,i} : n = 2, 3, \ldots, i = 1, 2, \ldots, n\}$ es independiente puesto que $\{e_{i,j}Q : i, j \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ es independiente. Por nuestra construcción, $C_{n,i} \cong C_{n,j}$ para todo $n = 2, 3, \ldots$ y $1 \leq i, j \leq n$. Por lo tanto existen submódulos máximos $M_{n,i}$ de $C_{n,i}$ $n = 2, 3, \ldots$ y $1 \leq i \leq n$ tal que $C_{n,i}/M_{n,i} \cong C_{n,j}/M_{n,j}$ para todo n, i, j. Poner $\bigoplus_{n,i} M_{n,i}$ y $S_n = C_{n,1}/M_{n,1}$. Claramente, tenemos que $R/M \supset (\oplus C_{n,i})/(\oplus M_{n,i}) \cong C_{2,1}/M_{2,1} \times C_{2,2}/M_{2,2} \times C_{3,1}/M_{3,1} \times \cdots$. De esta manera R/M es un R-módulo derecho cíclico que contiene una suma directa infinita de módulos cada uno isomorfo al módulo simple S_n. Esto da una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto R debe ser directamente finito. $\square$

TEOREMA 6.9. *Cada Σ-V anillo derecho es directamente finito.*

DEMOSTRACIÓN. Sea R un Σ-V anillo derecho. Sea S cualquier R-módulo derecho simple. Entonces por el Lema 6.6, R es $q.f.d.$ derecho relativo a S. Por lo tanto, por el Lema 6.8, R debe ser directamente finito.

Damos una demostración directa más corta abajo.
Suponer lo contrario que R no es directamente finito. Entonces $R = R_1 \oplus A_1$, $R_1 = R_2 \oplus A_2$, etcétera, donde para cada n, $R_n \cong R_R$, y $A_1 \cong A_2 \cong \cdots$. Entonces podemos hallar, en cada A_n, un submódulo máximo M_n tal que A_n/M_n son todos isomorfos al mismo módulo simple. Entonces, por suposición $\bigoplus\limits_n A_n/M_n$ es inyectiva y de aquí se escinde en $R/(\bigoplus\limits_n M_n)$ una contradicción, puesto que $R/(\bigoplus\limits_n M_n)$ es cíclico. Por lo tanto R es directamente finito. $\square$

DEFINICIÓN 6.13. Un anillo regular von Neumann es llamado un *anillo regular abeliano* si todos sus idempotentes son centrales. Un idempotente e en un anillo regular von Neumann R es llamado un *idempotente abeliano* o un *idempotente directamente finito* si el anillo eRe es abeliano (directamente finito). Un idempotente e en un anillo auto-inyectivo derecho regular es llamado un *idempotente fiel* si 0 es el único idempotente central ortogonal a e, es decir, $ef = 0$ implica que $f = 0$ cuando f es idempotente central.

Sea R un anillo auto-inyectivo derecho regular von Neumann. El anillo R es llamado del Tipo I siempre que contenga un idempotente abeliano fiel. El anillo R es llamado del Tipo II siempre que R contenga un idempotente directamente finito fiel pero R no contiene idempotentes abelianos no cero. El anillo R es llamado del Tipo III si no contiene idempotentes directamente finitos no cero. El anillo R es llamado del (i) Tipo I_f si R es del Tipo I y es directamente finito, (ii) Tipo I_∞ si R es del tipo I y es puramente infinito, (iii) Tipo II_f si R es del Tipo II y es directamente finito, (iv) Tipo II_∞ si R es del Tipo II y es puramente infinito. Si R es un anillo auto-inyectivo derecho regular von Neumann del Tipo I_f entonces $R \cong \Pi R_n$ donde cada R_n es un anillo de $n \times n$ matrices sobre un anillo auto-inyectivo regular abeliano.

DEFINICIÓN 6.14. El *índice de nilpotencia* de un elemento nilpotente x en un anillo R es el entero positivo mínimo n tal que $x^n = 0$. El índice de nilpotencia de un ideal bilateral I en R es el supremo de los índices de nilpotencia de todos los elementos nilpotentes de

I. Si este supremo es finito, entonces se dice que I tiene *índice de nilpotencia acotado*.

Si M es un R-módulo derecho y $H = End_R(M)$, entonces M es un H-módulo izquierdo bajo la adición ya presente sobre M y bajo la H-acción sobre M dada por $hx = h(x)$ para $h \in H$ y $x \in M$. Es fácil verificar que M es un (H, R)-bimódulo. Si ahora formamos el anillo $End_H(M)$ y escribimos $f \in End_H(M)$ a la derecha del argumento $x \in M$ opuesto a la de la acción del anillo H sobre M, entonces M es un $(H, End_H(M))$-bimódulo. Con estas estructuras de bimódulos en mente, la siguiente propiedad se cumple.

Sea $\varphi : R \to End_H(M)$ tal que $\varphi(a) = f_a$, donde $f_a : {}_HM \to {}_HM$ está definido por $(x)f_a = xa$ para todo $x \in M$. Entonces

$$\begin{aligned}(x+y)f_a &= (x+y)a = xa + ya = (x)f_a + (y)f_a,\\ (hx)f_a &= (hx)a = h(x)a = h(x)f_a\end{aligned}$$

para todo $x, y \in M$ y $h \in H$. De aquí f_a es una función H-lineal y también tenemos que

$$\begin{aligned}(x)f_{a+b} &= x(a+b) = xa + yb = (x)f_a + (y)f_b,\\ (x)f_{ab} &= x(ab) = (xa)b = (xa)f_b = (x)f_af_b,\\ (x)f_1 &= x\end{aligned}$$

para todo $x \in M$ y $a, b \in R$. Así,

$$\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi(a) + \varphi(b),\\ \varphi(ab) &= \varphi(a)\varphi(b),\\ \varphi(1) &= id_{End_H(M)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, φ es un homomorfismo de anillos que preserva identidad. Además, φ es un homomorfismo de anillos inyectivo cuando M es fiel. Así puesto que $E(R_R)$ es un R-módulo fiel, tenemos un encajamiento $\varphi : R \to End_H(E(R_R))$.

DEFINICIÓN 6.15. Sea R un anillo y poner $E = E(R_R)$. Para evitar confusión, suponer que la copia de R_R en E es e_0R con $e_0 \in E$. En otras palabras, tenemos que $R \cong e_0R$ a través de la función $r \mapsto e_0r$ y e_0R es un submódulo esencial del módulo inyectivo E. Sea $Q = End_H(E)$, llamamos a $Q = Q_{max}(R)$ el anillo (derecho) máximo de cocientes de R.

PROPOSICIÓN 6.8. *Sean R un anillo, $E = E(R_R)$, $H = End_R(E)$, tenemos que*

1. $E \cong He_0$.
2. $Q \cong e_0Q$ *como Q-módulos derechos a través de la función* $q \mapsto e_0q$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Sea e un elemento arbitrario de E y sea $\sigma : e_0R \to E$ dado por $e_0r \mapsto er$. Puesto que $e_0R \subseteq E$ y puesto que E es inyectivo, σ se extiende a un R-homomorfismo de R-módulos $h : E \to E$. De esta manera, $h \in H = End_R(E)$ y $e = \sigma(e_0) = he_0 \in He_0$.

(2) La función $\tau : Q \to e_0Q$ dado por $q \mapsto e_0q$ es ciertamente un epimorfismo de Q-módulos. Además, si $e_0q = 0$, entonces $Eq = (He_0)q = H0 = 0$, así $q = 0$. De esta manera, τ es un isomorfismo. □

TEOREMA 6.10. *Sea R un anillo y poner $E = E(R_R)$ y $Q = Q_{max}(R)$. Entonces $E_Q \cong E(Q_Q)$ y $Q_{max}(Q) = Q$.*

DEFINICIÓN 6.16. Si I es un ideal derecho de R y $x \in R$, entonces definimos el *residual* $x^{-1}I$ por

$$x^{-1}I = \{r \in R/xr \in I\}.$$

De esta manera, $x^{-1}I$ es el subconjunto más grande de R con $x \cdot x^{-1}I \subseteq I$.

LEMA 6.9. *Sean I y J ideales derechos de R y sean $x, y \in R$.*

1. $x^{-1}I$ *es un ideal derecho de* R.
2. $y^{-1}I(x^{-1}I) = (xy)^{-1}I$.
3. $x^{-1}(I \cap J) = (x^{-1}I) \cap (x^{-1}J)$.

DEMOSTRACIÓN. (1) Puesto que $x \cdot (x^{-1}I)R \subseteq IR \subseteq I$, se sigue que $(x^{-1}I)R \subseteq x^{-1}I$.

(2) Notar que $r \in y^{-1}(x^{-1}I)$ si y solo si $yr \in x^{-1}I$ y de aquí si y solo si $xyr \in I$.

(3) Claramente, $r \in x^{-1}(I \cap J)$ si y solo si $xr \in I$ y $xr \in J$. □

DEFINICIÓN 6.17. Si A es un subconjunto de R, recordamos que

$$ann_l^R(A) = \{r \in R/rA = 0\}$$

es llamado el anulador izquierdo de A en R. Si D es cualquier ideal derecho de R, entonces D se dice que es *denso* si y solo si ann_l^R $(x^{-1}D) = 0$ para todo $x \in R$. Listamos algunas propiedades elementales.

LEMA 6.10. *Sean D y D' ideales densos de R y sea I un ideal derecho de R.*

1. *Si $I \supseteq D$, entonces I es denso.*
2. *Si $x \in R$, entonces $x^{-1}D$ es denso.*
3. *$D \cap D'$ es denso.*
4. *D es esencial en R_R.*
5. *Si I es un ideal de R, entonces I es denso si y solo si $ann_l^R(I) = 0$.*

Ahora consideramos la relación entre ideales derechos densos y la cápsula inyectiva $E = E(R_R)$:

LEMA 6.11. *Sea D un ideal derecho de R. Entonces D es denso si y solo si $0 = ann_l^E(D) = \{e \in E/eD = 0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponer primero que D es denso y sea $0 \neq e \in E$. Puesto que $e_0R \subseteq_e E$ y $eR \neq 0$, existe $x \in R$ con $ex \in e_0R \backslash 0$. De esta manera, puesto que $e_0R \cong R$ y $ann_l^R(x^{-1}D) = 0$, se sigue que $ex \cdot x^{-1}D \neq 0$. Pero $x \cdot x^{-1}D \subseteq D$, así $eD \neq 0$.

Ahora suponer que $ann_l^E(D) = 0$, fijar $x \in R$ y sea $a \in ann_l^R(x^{-1}D)$. Consideremos la función $\sigma : D + xR \to e_0R \subseteq E$ dado por $d + xr \mapsto e_0ar$. Esta función está bien definida. Claro está, si $d + xr = 0$, entonces $xr \in D$, así $r \in x^{-1}D$ y $ar = 0$. Ahora E es inyectivo y $D + xR \subseteq R$, así σ se extiende a $\sigma^* : R \to E$. Pero entonces $0 = \sigma(D) = \sigma^*D = \sigma^*(1)D$, así $\sigma^*(1) \in ann_l^E(D) = 0$ y por lo tanto $\sigma^* = 0$. En particular, $\sigma = 0$, así $0 = \sigma(x) = e_0a$ y $a = 0$. Se sigue que $ann_l^R(x^{-1}D) = 0$ y de aquí D es denso. □

LEMA 6.12.

1. *Sean $W \subseteq V$ R-módulos con $W \subseteq_e V$. Si $v \in V$, entonces $\{r \in R/vr \in W\}$ es un ideal derecho esencial de R.*
2. *Sea I un ideal derecho esencial de R. Si $x \in R$, entonces $(x^{-1}I) \subseteq_e R$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Es claro que $J = \{r \in R/vr \in W\}$ es un ideal derecho de R. Sea X un ideal derecho no cero de R. Si $vX = 0$, entonces $vX \subseteq W$, así $X \subseteq J$ y $X \cap J \neq 0$. Por otra parte, si $vX \neq 0$, entonces xV es un submódulo no cero de V. De esta manera, puesto que $W \subseteq_e V$, tenemos que $xV \cap W \neq 0$; claramente $X \cap J \neq 0$, por la definición de J. De esta manera $X \cap J \neq 0$ en todos los casos y $J \subseteq_e R$.

(2) Notar que $x^{-1}I = \{r \in R/xr \in I\}$. Así (2) se sigue de (1) con $V = R$ y $W = I$. □

PROPOSICIÓN 6.9. *Sea M un R-módulo y*

$\mathcal{Z}(M) = \{x \in M/ann_r^R(x)$ *es un ideal derecho esencial de* $R\}$

1. *$\mathcal{Z}(M)$ es un submódulo de M.*
2. *Si $W \subseteq M$, entonces $\mathcal{Z}(W) = W \cap \mathcal{Z}(M)$. Además, si $M = \bigoplus M_i$, entonces $\mathcal{Z}(M) = \bigoplus \mathcal{Z}(M_i)$.*
3. *$\mathcal{Z}(R_R)$ es un ideal de R. Además, si N es un submódulo esencial de M y $\mathcal{Z}(N) = 0$, entonces $\mathcal{Z}(M) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Primero, notar que $\mathcal{Z}(M) \neq \emptyset$ puesto que $ann_r^R(0) = R$ es un ideal derecho esencial de R. Si $x, y \in \mathcal{Z}(M)$, entonces $ann_r^R(x) \cap ann_r^R(y) \subseteq ann_r^R(x+y)$ y $ann_r^R(x) \cap ann_r^R(y)$ es un ideal derecho esencial de R. De aquí, $ann_r^R(x+y)$ es un ideal derecho esencial de R, así $x + y \in \mathcal{Z}(M)$. Si $x \in \mathcal{Z}(M)$ y $a \in R$, entonces necesitamos mostrar que $ann_r^R(xa)$ es un ideal derecho esencial de R. Suponer que existe un ideal derecho no cero A de R tal que $ann_r^R(xa) \cap A = \emptyset$. Bajo esta suposición, si $b \in A$, $b \neq 0$, entonces $xab \neq 0$, así $ab \neq 0$. Por lo tanto, aA es un ideal derecho no cero de R. Pero $ann_r^R(x)$ es un ideal derecho esencial de R, así $ann_r^R \cap aA \neq 0$. Sea c un elemento de A tal que $ac \neq 0$ y $xac = 0$. Entonces $c \in ann_r^R(xa) \cap A = 0$, una contradicción. De esta manera, $ann_r^R(xa)$ es un ideal derecho esencial de R, así $xa \in \mathcal{Z}(M)$ y tenemos que $\mathcal{Z}(M)$ es un submódulo de M.

(2) La primera parte es clara, puesto que la pertenencia en $\mathcal{Z}(M)$ es una condición elemento a elemento. La segunda se sigue inmediatamente de la Proposición 4.7, puesto que $ann_r^R(\oplus x_i) = \bigcap_i ann_r^R(x_i)$.

(3) $\mathcal{Z}(R_R)$ es un ideal de R puesto que si $b \in R$ y $a \in \mathcal{Z}(R_R)$, entonces $ann_r^R(a) \subseteq ann_r(ba)$.

Finalmente, suponer que N es un submódulo esencial de M tal que $\mathcal{Z}(N) = 0$. Si $\mathcal{Z}(M) \neq 0$ y, $0 \neq x \in N \cap \mathcal{Z}(M) = 0$. Entonces $ann_r^R(x)$ es un ideal derecho esencial de R, así $x \in \mathcal{Z}(N) = 0$, una contradicción. De aquí, $\mathcal{Z}(M) = 0$. □

DEFINICIÓN 6.18. El submódulo $\mathcal{Z}(M)$ es llamado el *submódulo singular* de M y $\mathcal{Z}(R_R)$ es el *ideal singular derecho* de R. Si $\mathcal{Z}(M) = 0$, entonces se dice que M es un *módulo no singular* y si $\mathcal{Z}(M) = M$, entonces se dice que M es *singular*. Si $\mathcal{Z}(R_R) = 0$, entonces R es un *anillo derecho no singular*. Singularidad izquierda y no singularidad izquierda tienen definiciones análogas.

PROPOSICIÓN 6.10. *Suponer que R es un anillo no singular y escribir $E = E(R)$ y $H = End_R(E)$.*

1. *E es un R-módulo no singular.*
2. *Cada ideal derecho esencial de R es denso.*
3. *Si $V \subseteq_e E$ y $hV = 0$ para algún $h \in H$, entonces $h = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. (1) Este es inmediato de la Proposición 6.9 (2), puesto que $e_0R \subseteq_e E$ y $e_0R \cong R$ es un R-módulo no singular.

(2) Si I es un ideal derecho esencial de R, entonces $ann_l^R(I) \subseteq \mathcal{Z}(R) = 0$. Además, por la Proposición 6.12 (2), el residual $r^{-1}I$ también es esencial. De esta manera, $ann_l^R(r^{-1}I) = 0$ para todo $r \in R$ e I es denso.

(3) Sea $e \in E$ arbitrario. Puesto que $V \subseteq_e E$, la Proposición 6.12 (1) implica que existe un ideal derecho esencial I de R con $eI \subseteq V$. Así, $heI = 0$ y, puesto que I es denso por (2), la Proposición 6.11 implica que $he = 0$. En otras palabras, $hE = 0$ y de aquí $h = 0$. $\square$

TEOREMA 6.11. *Si R es un anillo no singular, entonces $Q_{max}(R)$ es un anillo auto-inyectivo, regular von Neumann.*

DEMOSTRACIÓN. Como es usual, sea $E = E(R) \supseteq e_0R \cong R$ y escribir $H = End_R(E)$ y $Q = Q_{max}(R)$. Puesto que $e_0R \subseteq_e E$, se sigue de la parte (3) del Lema 6.10 que ningún elemento no cero de H puede anular a e_0. De esta manera, puesto que $E = He_=$ por la Proposición 6.8 (1), vemos que la función $H \to E$ dada por $h \mapsto he_0$ es un isomorfismo de H-módulos. En otras palabras, E es isomorfo al H-módulo regular izquierdo ${}_HH$ y, por supuesto, $End_H({}_HH) \cong H$ actuando a la derecha. De esta manera concluimos que $Q = End_H({}_HE)$ es isomorfo a H y, puesto que $1H = H$ y 1 corresponde a e_0, tenemos que $e_0Q = E$. Pero, por la Proposición 6.8 (2) y el Teorema 6.10, E es la cápsula inyectiva del Q-módulo $e_0Q \cong Q$. De esta manera $E = e_0Q$ implica que Q es auto-inyectivo.

Ahora sea h un elemento fijo de H y poner $A = \{e \in E/he = 0\}$. Entonces A es un R-submódulo de E y, por la Proposición 4.6, podemos escoger un R-submódulo B de E con $(A \oplus B) \subseteq_e E$. Puesto que B es ajeno de A, la función $\sigma : hB \to E$ dada por $hb \mapsto b$ es un R-homomorfismo bien definido. De esta manera, puesto que $hB \subseteq E$ y E es inyectivo, σ se extiende a un endomorfismo de R-módulos $h' : E \to E$. En otras palabras, $h' \in H$ y $h'hb = b$ para todo $b \in B$. Finalmente, si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $h(a+b) = hb$, así

$$hh'h(a+b) = hh'hb = hb = h(a+b).$$

De esta manera $hh'h - h \in H$ anula al R-submódulo esencial $A \oplus B$ y el Lema 6.10 (3) implica que $hh'h - h = 0$. Puesto que $h \in H$ fue arbitrario, se sigue que H es regular von Neumann. Pero $Q \cong H$ y por lo tanto lo mismo es verdadero para Q. $\square$

El siguiente lema proporciona la estructura del anillo máximo de cocientes derecho de cualquier anillo no singular derecho el cual es $q.f.d.$ derecho relativo a cada uno de sus módulos simples.

LEMA 6.13. *Sea R un anillo no singular derecho el cual es $q.f.d.$ derecho relativo a cada R-módulo simple. Entonces $Q^r_{max}(R)$, el anillo máximo de cocientes derecho de R, es un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos auto-inyectivos regulares abelianos.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $Q = Q^r_{max}(R)$ es un anillo auto-inyectivo derecho regular von Neumann. Por el Lema 6.6, el anillo R es directamente finito y de aquí así es el anillo Q. De aquí por la teoría de tipo de los anillos auto-inyectivos derechos regulares von Neumann, $Q = Q_1 \times Q_2$, donde Q_1 es del Tipo I_f y Q_2 es del Tipo II_f. Ahora afirmamos que Q debe ser del tipo I_f, es decir, $Q_2 = 0$. Suponer lo contrario que $Q_2 \neq 0$. Entonces, existe un idempotente $e_3' \in Q_2$ tal que $(Q_2)_{Q_2} \cong e_3'(e_3'Q_2)$. Por lo tanto $Q_2 = e_1Q_2 \oplus e_2Q_2 \oplus e_3Q_2$ donde $e_1, e_2, e_3 \in Q_2 \subseteq Q$ son idempotentes ortogonales no cero tal que su suma es la identidad del anillo Q_2. Claramente, $e_iQ = e_iQ_2$, y $e_jQ_2 = e_jQ$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$ y así $e_iQ \cong e_jQ$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$. Por lo tanto existen submódulos cíclicos no cero $C_{2i} \subseteq e_iQ \cap R$, $i = 1, 2$, tal que $C_{21} \cong C_{22}$. Ahora $e_3Q_2e_3 = End(e_3Q_2)$ es del Tipo II_f y así como antes existen idempotentes ortogonales no cero $f_1, f_2, f_3, f_4 \in e_3Q_2e_3$ tal que $f_i(e_3Q_2e_3) \cong f_j(e_3Q_2e_3)$ para todo $1 \leq i, j \leq 4$. De aquí $f_i(e_3Qe_3) \cong f_j(e_3Qe_3)$ para todo i, j. Existe $a \in f_i(e_3Qe_3)f_j$ y $b \in f_j(e_3Qe_3)f_i$ tal que $f_i = ab$ y $f_j = ba$. Entonces, para todo i, j, tenemos que $f_iQ \cong f_jQ$ bajo la función que envía f_ix a bf_ix para cada $x \in Q$. Además, existen submódulos cíclicos no cero $C_{3i} \subseteq f_iQ \cap R$, $i = 1, 2, 3$ tal que $C_{3i} \cong C_{3j}$ para todo $1 \leq i, j \leq 3$. Continuando de esta manera, construimos una familia independiente $\{C_{ij} : i = 2, 3, \ldots ; 1 \leq j \leq i\}$ de submódulos cíclicos no cero de R tal que $C_{ij} \cong C_{ik}$ para todo $1 \leq j, k \leq i; i = 2, 3, \ldots$. Por lo tanto existen submódulos máximos M_{ij} de C_{ij}, $1 \leq j \leq i; i = 2, 3, \ldots$ tal que $C_{ij}/M_{ij} \cong C_{ik}/M_{ik}$ para todo i, j, k. Poniendo $M = \bigoplus\limits_{i,j} M_{ij}$ y $S_i = C_{i1}/M_{i1}$, obtenemos que el módulo derecho cíclico R/M contiene una suma directa infinita de módulos cada uno isomorfos a S_i, una contradicción a nuestra hipótesis. Por lo tanto $Q_2 = 0$ y Q es del

Tipo I_f. De aquí $Q = \prod_{i=1}^{\infty} Q_i$ donde cada Q_i es un anillo de $i \times i$ matrices sobre un anillo auto-inyectivo regular abeliano. Ahora afirmamos que este producto debe ser un producto finito. Suponer lo contrario que el producto es infinito. Entonces, para cualquier entero positivo n, existe un índice $m \geq n$ tal que $Q_m \neq 0$. Ahora, para cualquier k fijo, tenemos matrices unidades $\{e_{ij}^k : 1 \leq i, j \leq k\}$ las cuales son $k \times k$ matrices. De esta manera tenemos una familia infinita de matrices unidades no cero $\{\{e_{ij}^k : 1 \leq i, j \leq k\} : k = 2, 3, \dots\} \subseteq Q$. Puesto que $R \subseteq_e Q$, existe un submódulo cíclico no cero $C_{k,1}$ de R tal que $C_{k,1} \subseteq e_{11}^k Q \cap R$ y después, comenzando con $C_{k,1}$, construimos una familia independiente $\{C_{k,i} : k = 2, 3, \dots, 1 \leq i \leq k\}$ de submódulos cíclicos de R tal que $C_{k,i} \cong C_{k,j}$ para todo k, i, j (exactamente así mostrado en la demostración de la parte (a)). Por lo tanto existen submódulos máximos $M_{k,i}$ de $C_{k,i}$, $k = 2, 3, \dots$ y $1 \leq i \leq k$, tal que $C_{k,i}/M_{k,i} \cong C_{k,j}/M_{k,j}$ para todo $k, i.j$. Poner $M = \bigoplus_{k,i} M_{k,i}$ y $S_k = C_{k,1}/M_{k,1}$. Notar que el módulo derecho cíclico R/M contiene una suma directa infinita de módulos cada uno isomorfo a S_k, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $Q = Q_{max}^r(R)$ es el producto directo de un número finito de anillos de matrices sobre anillos auto-inyectivos regulares abelianos. □

TEOREMA 6.12. *Sea R un Σ-V anillo derecho, no singular derecho. Entonces el anillo derecho máximo de cocientes de R, $Q_{max}^r(R)$ es un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos auto-inyectivos regulares abelianos.*

DEMOSTRACIÓN. Esta se sigue del Lema 6.6 y el Lema 6.13. □

Como una consecuencia del anterior, tenemos el siguiente.

COROLARIO 6.7. *Sea R un Σ-V anillo derecho no singular derecho. Entonces R debe tener índice de nilpotencia acotado.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior, el anillo derecho máximo de cocientes $Q_{max}^r(R)$ tiene índice de nilpotencia acotado y de aquí R debe tener igual. □

Un V-anillo derecho no singular no necesita tener índice de nilpotencia acotado. El siguiente resultado de Tyukavkin da una condición para que un V-anillo derecho auto-inyectivo derecho regular von Neumann tenga índice de nilpotencia acotado.

TEOREMA 6.13. *(Tyukavkin) Sea R un V-anillo derecho auto-inyectivo derecho regular von Neumann tal que la dimensión de cada R-módulo derecho simple S sobre el anillo con división de endomorfismos de S es menor que $2^{2^{\aleph_0}}$. Entonces R tiene índice de nilpotencia acotado.*

En seguida discutimos los Σ-V anillos derechos regulares von Neumann.

LEMA 6.14. *Sea R un Σ-V anillo derecho auto-inyectivo derecho regular von Neumann. Entonces R es un producto directo finito de anillos de matrices sobre anillos auto-inyectivos regulares abelianos.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que los anillos regulares von Neumann son no singulares derechos, este se sigue del Lema 6.8(b). □

PROPOSICIÓN 6.11. *Sean $J \subseteq K$ ideales bilaterales en un anillo regular R, y n un entero positivo. Entonces K tiene índice a lo más n si y solo si J y K/J tienen índice a lo más n.*

PROPOSICIÓN 6.12. *Sean n un entero positivo, R un anillo regular de índice a lo más n y P un ideal bilateral propio de R tal que R/P es inescindible (como un anillo). Entonces $R/P \cong M_k(D)$ para algún entero positivo $k \leq n$ y algún anillo con división D.*

PROPOSICIÓN 6.13. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es un anillo regular von Neumann.*
2. *Cada R-módulo es plano.*
3. *Cada R-módulo cíclico es plano.*

PROPOSICIÓN 6.14. *Sea $\varphi : R \to S$ una función de anillos, y sea A un S-módulo derecho inyectivo. Si $_RS$ es plano, entonces A también es un R-módulo inyectivo.*

El siguiente teorema caracteriza los Σ-V anillos derechos regulares von Neumann.

TEOREMA 6.14. *Para un anillo regular von Neumann R, las siguientes son equivalentes:*

1. *R es un Σ-V anillo derecho.*
2. *Para cualquier ideal primo P, R/P es artiniano.*
3. *R es un Σ-V anillo izquierdo.*

DEMOSTRACIÓN. $(1) \Rightarrow (2)$ Sea R un Σ-V anillo derecho regular von Neumann. Por el Lema 6.1 R es no singular y por el Corolario 6.7 R tiene índice de nilpotencia acotado. Sea P cualquier ideal primo de R. Entonces R/P es un anillo regular von Neumann con índice de nilpotencia acotado. De aquí R/P debe ser artiniano simple por la Proposición 6.12.

$(2) \Rightarrow (1)$ Sea S un R-módulo derecho simple. Sea $P = ann_r(S)$, P es un ideal primitivo derecho y de aquí primo. Así R/P es primo y por suposición, es artiniano. De aquí R/P es neteriano derecho. Por el Corolario 6.1 R es un V-anillo derecho e izquierdo. Por lo tanto, S es inyectivo y por la Proposición 6.4 S es Σ-inyectivo como un R/P-módulo. Puesto que R es un anillo regular von Neumann, R/P es plano por la Proposición 6.13 como un R-módulo derecho. Entonces por la Proposición 6.14, S es Σ-inyectivo como un R-módulo derecho también. De aquí R es un Σ-V anillo derecho. La demostración de la equivalencia de (2) y (3) es similar. □

OBSERVACIÓN 6.1. *El teorema anterior muestra que la clase de Σ-V anillos regulares von Neumann es simétrica izquierda-derecha.*

PROPOSICIÓN 6.15. *Sea R un Σ-V anillo derecho primo no singular derecho. Entonces R es un anillo Goldie derecho simple.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 6.7, $Q^r_{max}(R)$ tiene índice de nilpotencia acotado. De esta manera $Q^r_{max}(R)$ es un anillo regular von Neumann primo con índice de nilpotencia acotado, de aquí artiniano simple por la Proposición 6.12. Por lo tanto R es un anillo Goldie derecho simple. □

En seguida, tenemos la siguiente caracterización de los Σ-V anillos derechos.

TEOREMA 6.15. *Un anillo R es un Σ-V anillo derecho si y solo si para cada R-módulo derecho simple S, cada extensión esencial de $S^{(\aleph_0)}$ es una suma directa de módulos inyectivos.*

DEMOSTRACIÓN. Este se sigue del Corolario 6.6. □

4. $\mathbf{CSI}$ anillos

DEFINICIÓN 6.19. Un anillo R es llamado un *CSI-anillo derecho* si, para cada R-módulo derecho cíclico C, la cápsula inyectiva $E(C)$ es Σ-inyectiva.

DEFINICIÓN 6.20. Un anillo$R$ es llamado un *anillo Kasch* derecho si contiene una copia de cada R-módulo derecho simple. Un ideal derecho I de R es llamado *colocal* si R/I es subdirectamente irreducible.

DEFINICIÓN 6.21. Un subconjunto K de un anillo R se dice que es T-*nilpotente derecho* (T por transfinito) si para cada sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$, de elementos de K, $a_n \cdots a_2 a_1 = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y T-*nilpotente izquierdo* si $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Un módulo M es un *módulo máx* si cada submódulo tiene un submódulo máximo

TEOREMA 6.16 (Shock). *Un módulo máx no finitamente generado tiene un cociente con zoclo infinito y radical de Jacobson cero.*

LEMA 6.15. *Si R es un anillo conmutativo, teniendo zoclo esencial, simple, y teniendo la condición de la cadena ascendente sobre anuladores de elementos únicos, entonces R tiene in ideal T-nilpotente máximo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $S = sR$ el zoclo de R y sea $M = ann_r(s)$. Sea $\{m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\}$ una colección de elementos en M. Por la condición de la cadena ascendente sobre anuladores, existe un entero N con $ann_r(m_1 \cdots m_N) = ann_r(m_1 \cdots m_{N+1})$. Esto dice que $ann_r(m_{N+1}) \cap (m_1 \cdots m_N)R = 0$. Pero, puesto que S es esencial, cualesquiera dos ideales en R tienen intersección no cero. Además, $m_{N+1}S = 0$, de modo que $ann_r(m_{N+1}) \neq 0$, de modo que $m_1 \cdots m_n = 0$. □

TEOREMA 6.17. *Un anillo conmutativo R es neteriano si y solo si cada cociente es Goldie.*

DEMOSTRACIÓN. Mostramos que si R es un anillo Goldie completamente conmutativo, entonces R_R es un módulo máx. Sea A cualquier ideal de R, y sea $0 \neq x \in A$. Sea B un ideal, máximo con respecto a excluir a x. Entonces, como es fácilmente mostrado, el anillo R/B tiene zoclo esencial, simple generado por $x + B$. Además, $A+B/B$ es un módulo no cero sobre R/B. Por el lema anterior, R/B tiene un ideal T-nilpotente máximo y, cada módulo sobre R/B tiene un submódulo máximo, de modo que $A + B/B$ también. Este corresponde al submódulo máximo M de $A + B$ conteniendo a B. Entonces $M \not\supset A$, de modo que $M \cap A$ es un submódulo máximo de A.

Ahora, si A es un ideal no finitamente generado en R, A es un un módulo máx, de modo que, por el Teorema de Shock, A tendría un cociente con zoclo infinito, contradiciendo la hipótesis Goldie. □

TEOREMA 6.18. *Un CSI-anillo derecho es neteriano derecho bajo cualesquiera de las siguientes condiciones:*

1. *R es conmutativo.*
2. *R tiene solo finitamente muchos módulos simples hasta isomorfismo, por ejemplo R es semilocal.*
3. *R satisface la CCA sobre ideales derechos colocales.*
4. *R o $R/J(R)$ es Kasch derecho.*
5. *$R/J(R)$ es regular von Neumann, por ejemplo R es continuo derecho.*
6. *La cápsula inyectiva de cualquier R-módulo derecho semisimple numerablemente generado es Σ-inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Teorema 6.7(4) que si R es un CSI-anillo derecho entonces R/I es Goldie derecho para cualquier ideal I de R. Por el Teorema 6.17 un anillo conmutativo R es neteriano si R/I es un anillo Goldie para cualquier ideal I de R. Esto demuestra (1).

Notar que (2) se sigue fácilmente de un resultado de Kurshan que dice un anillo R es neteriano derecho si y solo si cada suma directa numerable de cápsulas inyectivas de R-módulos simples derechos es inyectiva.

Ahora demostraremos (5). Por el Lema 6.5, se sigue que un CSI anillo derecho es $q.f.d.$ derecho. Ahora suponer que $R/J(R)$ es regular von Neumann. Puesto que un anillo regular von Neumann con dimensión Goldie finita es artiniano semisimple, tenemos que un CSI anillo derecho R tal que $R/J(R)$ es regular von Neumann debe ser semilocal y de aquí el resultado se sigue de (2).

Las otras partes son fáciles de demostrar. □

Bibliografía

[1] Anderson, F., Fuller, K. *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag 1973.

[2] E. Bland, Paul, *Rings and their Modules*, De Gruyter Graduate 2011.

[3] Goodearl, K. R., *Von Neumann Regular Rings*, Pitman Publishing 1979.

[4] Jain, S. K., Srivastava, Ashish K., Tuganbaev Askar A., *Cyclic Modules and the Structure of Rings*, Oxford Mathematical Monographs 2012.

[5] McConnell, J. C., Robson J. C., *Noncommutative Noetherian Rings*, GSM, Vol. 30, AMS 2000.

[6] Wisbauer, Robert, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Beach Science Publishers 1991.