



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ZARAGOZA**

**MODELO ELECTROREOLÓGICO APLICADO AL
SISTEMA AUDITIVO**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO QUÍMICO

P R E S E N T A :

RICARDO MENDOZA VIZCAYA



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA**

2015

México, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JEFE DE LA UNIDAD DE ADMINISTRACION ESCOLAR

PRESENTE

Comunico usted que el alumno Ricardo Mendoza Vizcaya con número de cuenta 408061348 de la carrera de Ingeniería Química, se le ha fijado el día 13 del mes de Febrero de 2015 a las 12:00 horas para presentar su examen profesional, que tendrá lugar en las sala de exámenes profesionales del Campus II de esta Facultad, con el siguiente jurado.

Presidente: Ing. Raúl Ramón Mora Hernández
Vocal: Dr. Edtson Emilio Herrera Valencia (*)
Secretario: Dr. Mariano Pérez Camacho
Suplente: Dr. Fausto Calderas García
Suplente: Ing. Alejandro Juvenal Guzmán Gómez

El título de la tesis que se presenta es: Modelo Electrorreológico Aplicado al Sistema Auditivo

Opción de Titulación: Examen Profesional

RESUMEN

La flexo-electricidad en las membranas timpánicas, es un efecto de acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición. La flexo-electricidad aplicada a las membranas utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno. Motivados por el funcionamiento de la (CCE), en este trabajo se modela la respuesta mecánica oscilatoria de una membrana flexo-eléctrica circular inmersa entre dos fases viscoelásticas sujetas por un campo eléctrico armónico de pequeña amplitud con frecuencia arbitraria. El modelo se basa en la integración de: (i) la ecuación de forma de la membrana flexo-eléctrica aplicada a una membrana circular unida a la superficie interior de un capilar circular y (ii) el flujo volumétrico acoplado a las fases viscoelásticas de contacto, de tal manera, que el efecto del campo eléctrico produce distorsión en la membrana y la evolución de ella induce un flujo volumétrico, el cual depende completamente de las propiedades viscoelásticas del sistema.

Palabra claves: Flexo-electricidad. Reología, Cristales Líquidos, Ecuación constitutiva, Modelo de Maxwell, Modelo electroreológico, Electromotilidad, Células Ciliadas Externas.

ABSTRACT

Membrane flexoelectricity is an electromechanical coupling effect between the membrane average curvature and macroscopic electric polarization, which is essential to the physiology of hearing. Flexoelectric actuation uses an imposed electric field to create membrane bending and is used by the Outer Hair Cells (OHCs) located in the inner ear. Motivated by the functioning of the OHC, in this paper we model the amplitude oscillatory dynamics of a tethered circular membrane immersed in viscoelastic fluid media driven by a small amplitude harmonic electric field of arbitrary frequency. The model is based on the integration of (i) the flexoelectric membrane shape equation applied to a circular membrane attached to the inner surface of a circular capillary and (ii) the coupled capillary flow of the contacting viscoelastic phases, such that the membrane flexoelectric oscillations drive periodic viscoelastic capillary flows.

Key words: Flexoelectricity, Rheology, Liquid Crystals, Constitutive Equations Maxwell Model, Electro rheological model, Electro-motility Outer Hair Cells

DEDICATORIAS

AGRADECIMIENTOS

- Carrera de Ingeniería Química, Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Laboratorio de Reología del departamento de Reología y Mecánica de Materiales del instituto de Investigación en materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México.
- Dr. Fausto Calderas García por el intercambio de ideas y de opiniones y ser punto de enlace para que este proyecto se presentara en el IIM.

ÍNDICE

RESUMEN	III
NOTACIÓN	XII
GLOSARIO.....	XVI
CAPÍTULO 1	1
INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 Flexo-electricidad en la membrana	2
1.2 Membranas flexoeléctricas.....	6
1.3 Modelos matemáticos electro-reológicos	8
1.3.1 Modelo estático.....	8
1.3.2 Modelo viscoso	8
1.3.3 Modelo viscoso no lineal.....	9
1.3.4 Modelo viscoelástico.....	9
1.4 Objetivos	12
1.4.1 Objetivo General.....	12
1.4.2 Objetivos Particulares.....	12
1.4.3 Hipótesis.....	12
CAPÍTULO 2	13
MARCO TEÓRICO	13
2.1 Fluidos complejos.....	14
2.2 Cristales líquidos.....	14
2.2.1 Cristales líquidos biológicos.....	14
2.2.2 Tipos de fase en los cristales líquidos	15
2.2.2.1 Fase nemática.....	15
2.3 Ecuaciones constitutivas	16
2.3.1 Fluido newtoniano.....	16
2.3.2 Fluidos no newtonianos	17
2.3.2.1 Modelo de ley de potencia	17
2.3.2.2 Modelo de Ellis.....	18
2.3.2.3 Maxwell	18
2.3.2.4 Jeffrey	19
2.3.2.5 Tanner.....	20
2.4 Fenómenos de transporte	21
2.4.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento.....	22
2.4.2 La ecuación de transporte de energía	22
2.4.3 La ecuación de transporte de masa.....	23
2.5 Reología.....	23
2.5.1 Fluidos newtonianos	24
2.5.2 Fluidos no newtonianos	24

2.5.3 Tensor de esfuerzos	24
2.5.4 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta	25
2.5.5 El tensor rapidez de deformación	25
2.6 Pruebas de flujo	25
2.6.1 Flujo cortante en estado estacionario	25
2.6.1.1 Flujo cortante: Modelo viscoelástico de Maxwell.....	26
2.6.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias	27
2.6.2.1 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias: Modelo viscoelástico de Maxwell	27
2.6.2.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias: Modelo viscoelástico de Jeffrey	29
2.7 Campo eléctrico	30
2.8 Polarización eléctrica	30
2.9 Fisiología del oído	31
2.9.1 Región periférica del sistema auditivo	31
2.9.2 Oído externo	32
2.9.2.1 Anatomía y funcionamiento	32
2.9.3 Oído medio	32
2.9.3.1 Anatomía	32
2.9.3.2 Propagación del sonido	33
2.9.4 Oído interno	33
2.9.4.1 Anatomía	33
2.9.5 Células ciliadas externas	35
2.9.5.1 Que son las células ciliadas externas	35
2.9.5.2 Funcionamiento de las células ciliadas externas	35
CAPÍTULO 3	37
MODELO	37
3.1 Modelo electroreológico viscoelástico	38
3.2 Ecuaciones básicas.....	39
3.3 Consideraciones energéticas	42
3.3.1 Balance de Energía	42
3.3.1.1 Potencia disipada	43
3.3.1.2 Energía elástica de la membrana.....	43
3.3.1.3 Potencia del fluido	43
3.3.1.4 Factor de selectividad Q.....	43
3.4 Modelo electroreológico viscoelástico adimensional	44
3.4.1 Variables adimensionales	44
3.4.2 Modelo electroreológico adimensional	46
3.4.3 Números adimensionales	46
3.4.3.1 Memoria	47
3.4.3.2 Viscosidad de bulto	47
3.4.3.3 Radio elástico.....	48
3.4.4 Coeficientes adimensionales	48
3.4.4.1 Inercia	48

3.4.4.2 Viscosidad.....	49
3.5 Espacio prismático 3D.....	50
3.6 Restricciones del modelo electroreológico	50
CAPÍTULO 4	52
EVOLUCIÓN TEMPORAL Y OSCILATORIA.....	52
4.1 Respuesta mecánica.....	53
4.1.1 Estado no estacionario	53
4.1.1.1 Casos particulares	54
4.1.2 Flujo oscilatorio.....	55
4.1.2.1 Potencia	56
4.1.2.2 Almacenamiento de energía elástica de la membrana.....	56
4.1.2.3 Factor de selectividad Q.....	57
4.2 Resonancia	57
CAPÍTULO 5	58
SIMULACIONES COMPUTACIONALES.....	58
5.1 Respuesta mecánica.....	59
5.2 Factor de selectividad Q.....	61
5.3 Línea material resonante.....	62
5.3.1 Condiciones materiales para las curvas resonantes.....	62
5.4 Curvas resonantes de la potencia.....	64
5.5 Energía elástica en la línea material que une los modos III y IV	66
5.6 Factor de selectividad Q en la línea material que une los modos III y IV	67
5.7 Aplicaciones biológicas (CCE)	68
CAPÍTULO 6	71
CONCLUSIONES	71
6.1 Resumen y principales contribuciones	72
6.2 Modelo dinámico	73
6.3 Curvas resonantes y zona biológica.....	73
6.4 Potencia y disipación viscosa.....	75
6.5 Factor Q	75
6.6 Calculo de los parámetros materiales	76
6.7 Contribución al conocimiento	77
CAPÍTULO 7	79
TRABAJO FUTURO	79
7.1 Modelos viscoelásticos de orden superior.....	80
7.2 Modelos viscoelásticos no lineales.....	80
APÉNDICES.....	81

APÉNDICE A	82
APÉNDICE B	87
APÉNDICE C	90
APÉNDICE D	92
BIBLIOGRAFÍA	95

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. “Contracción de la membrana plasmática de la CCE”	3
Figura 2. “Organización del proyecto de tesis”	11
Figura 3. “Ordenamiento de las moléculas en la fase nemática”	16
Figura 4. “Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de temperatura”	16
Figura 5. “Esquema que muestra el corte simple en un sistema de placas paralelas”	26
Figura 6. “Esquema que ilustra el flujo oscilatorio a bajas frecuencias”	27
Figura 7. “Representación esquemática del oído externo, medio e interno”	31
Figura 8. “Representación esquemática del oído medio”	33
Figura 9. “Representación esquemática del oído interno”	35
Figura 10. “Esquema ilustrativo de la geometría y la membrana flexoeléctrica” ...	39
Figura 11. “Espacio material prismático para los seis posibles modos”	50
Figura 12. “Respuesta mecánica en función de la frecuencia adimensional”	59
Figura 13. “Factor de selectividad Q en función de la frecuencia adimensional” ...	61
Figura 14. “Coeficiente viscoso adimensional como función del radio elástico”	64
Figura 15. “Potencia en función de la frecuencia adimensional”	65
Figura 16. “Energía elástica de la membrana como función de la frecuencia adimensional”	66
Figura 17. “Factor de selectividad Q en función de la frecuencia adimensional para los parámetros materiales”	67
Figura 18. “Factor Q, energía elástica y potencia en función de frecuencia adimensional para un valor del radio elástico de 0.25”	69
Figura 19. “Resumen cualitativo de los resultados obtenidos”	70
Figura 20. “Geometría de la membrana flexoeléctrica”	92

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. “Variables aplicables a la ecuación general de transporte”	21
Tabla 2. “Variables características para la Adimensionalización”	45
Tabla 3. “Modos que despliega el sistema”	49
Tabla 4. “Respuesta del sistema en función de la frecuencia adimensional para los distintos modos”	60
Tabla 5. “Variación del número flexoeléctrico con el radio elástico”	63

NOTACIÓN

a	Radio del capilar [m]
$\{b_i\}; i = 1, 2$	Coefficientes viscoso e inercial [1/s, 1/s ²]
$\{c_1, c_2\}$	Coefficientes flexo-eléctricos
$C_i(z)$	Constante de integración [1]
C_f	Coefficiente flexoeléctrico de la membrana [C]
$\{E, E_0\}$	Magnitud del campo eléctrico, y amplitud del campo eléctrico aplicado [N/C]
E_m	Energía elástica de almacenamiento de la membrana [J]
$\{dE/dt, d^2E/dt^2\}$	Primera y segunda derivadas temporales del campo eléctrico [N/ Cs; N/Cs ²]
F_{membrana}	Fuerza de restauración de la membrana [N]
$\{G_b, G_t\}$	Módulo elástico definido en la región inferior y superior [Pa]
h	Altura del domo esférico [m]
H	Curvatura promedio [1/m]
$\{H_0, H_1\}$	Condiciones iniciales de la curvatura promedio [1/m, 1/m s]
$\{\dot{H}, \ddot{H}\}$	Primera y segunda derivada temporal de la curvatura promedio [1/m s, 1/m s ²]
$\{k_c, \bar{k}_c\}$	Módulos de rigidez y de torsión de la membrana [J]
L	Longitud característica axial del tubo capilar [m]
M	Parámetro elástico de la membrana [Pa]
P	Potencia [J/s]
$p(z, t)$	Presión [Pa]
$\Delta p(z, t)$	Diferencia de presión [Pa]
$\{p_t, p_b\}$	Presión superior ($z = 2L$) e inferior ($z = 0$) [Pa]
P_0	Presión constante en la parte superior e inferior del capilar [Pa]
$\dot{V}(t)$	Flujo volumétrico [m ³ /s]
R	Radio del domo esférico [m]
(r, ϕ, z)	Coordenadas cilíndricas [m, rad, m]
t	Variable temporal [s]
V_z	Velocidad axial [m/s]

Vectores y tensores

D	Tensor rapidez de deformación [1/s]
F_E	Fuerza eléctrica [1/s]
g	Vector aceleración de la gravedad [m/s ²]
n	Vector director [1]
R	Vector de posición [m]
σ	Tensor de esfuerzo [Pa]

Variables adimensionales

$\{b_1^*, b_2^*\}$	Coefficientes viscosos e inercial [1]
\bar{E}	Campo eléctrico [1]
\bar{E}_m	Energía elástica de la membrana [1]
$\{\bar{G}_b, \bar{G}_t\}$	Módulos elásticos de los fluidos (superior e inferior) [1]
$\{\bar{H}, \bar{H}_{io}, \bar{H}_{oi}, \bar{H}^*\}$	Curvatura promedio, en fase y fuera de fase y compleja [1]
$\left\{ \begin{matrix} \bar{H} \\ \bar{H} \end{matrix} \right\}$	Primera y segunda derivadas temporales de la curvatura promedio [1]
$\{\bar{H}_0, \bar{H}_1\}$	Condiciones iniciales de la curvatura promedio [1]
k	Radio elástico [1]
k_0	Radio elástico crítico [1]
\bar{M}	Elasticidad de la membrana [1]
\bar{P}	Potencia [1]
\bar{P}_{peak}	Potencia máxima [1]
Q	Factor de selectividad biológico Q [1]
t	Tiempo [1]
ω	Frecuencia [1]
$\Sigma_{\bar{\eta}}$	Viscosidad total [1]
$\{\Sigma_{\bar{\eta}_{min}}, \Sigma_{\bar{\eta}_{max}}\}$	Limites inferior y superior de la viscosidad total [1]

Letras Griegas

ε	Parámetro de dimensiones pequeñas [1]
γ_0	Tensión superficial [Pa]
$\dot{\gamma}_{rz}$	Rapidez de corte [1/s]
$\{\eta_t, \eta_b\}$	Viscosidades inferior y superior [Pa s]
$\{\lambda_t, \lambda_b\}$	Tiempos de relajación viscoelásticos de Maxwell superior e inferior [s]
$\bar{\eta}_i; i = \{t, b\}$	Viscosidades adimensionales (superior e inferior) [1]
$\{\bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b\}$	Tiempos de relajación viscoelásticos de Maxwell (superior e inferior) [1]
$\{\rho_t, \rho_b\}$	Densidades de los fluidos (superior e inferior) [kg /m ³]
Σ_λ	Suma de los tiempos de relajación en el sistema [s]
Σ_G	Suma de la elasticidad de bulto en el sistema [Pa]
Σ_η	Suma de las viscosidades en el sistema [Pa s]
$\{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}$	Componentes del tensor de esfuerzos [Pa]

Otros Símbolos

$\{\text{sen}, \text{cos}\}$	Funciones seno y coseno [1]
$ \square $	Determinante [1]
\neq	Diferente de cero [1]
\simeq	Factor geométrico [m ²]
$\{>, <\}$	Mayor y menor que [1]
$\{>>, <<\}$	Mucho mayor y mucho menor que [1]
π	Numero irracional pi [1]
$\{d/dt\}$	Derivadas con respecto al tiempo [s ⁻¹]
$\{\partial/\partial z, \partial/\partial t\}$	Derivada parcial espacial y temporal [m ⁻¹ , s ⁻¹]
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada [1]
$ \square $	Valor absoluto [1]
$\det \cdot $	Determinante [1]
$\int_0^t (\cdot) d\xi$	Definición de integral [1]

Subíndices

{b,t}	Refiere a los fluidos en la parte inferior y superior respectivamente [1]
{rz,rr,θθ,zz}	Refiere a las componentes del tensor de esfuerzos [1]

Abreviaciones

LC	Cristal líquido
NLC	Cristal líquido nemático
OHC	Células ciliadas externas
CCE	Células ciliadas externas
{LS, LV, FM}	Baja simetría, baja viscosidad y membrana suave
{LS, LV, SM}	Baja simetría, baja viscosidad y membrana rígida
{LS, HV, FM}	Baja simetría, alta viscosidad y membrana suave
{LS, HV, SM}	Baja simetría, alta viscosidad y membrana rígida
{HS, IV, FM}	Alta simetría, viscosidad intermedia y membrana suave
{HS, IV, SM}	Alta simetría, viscosidad intermedia y membrana rígida

Glosario

Campo eléctrico:	Fuerza eléctrica por unidad de carga
Cristal líquido:	Sistema complejo que presenta propiedades entre sólido y líquido que es altamente anisótropico.
Ecuación constitutiva:	Ecuación que relaciona las variables dinámicas en un sistema (Rapidez de deformación, Esfuerzo, Deformación).
Ecuación de continuidad:	Ecuación diferencial parcial que representa la conservación de materia en un sistema físico.
Ecuación de movimiento:	Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo.
Electromotilidad:	Es el cambio de forma que resulta de la conversión directa de potencial eléctrico a fuerza Mecánica, comprimiendo y expandiendo las CCE.
Estado estacionario:	Estado en el que ninguna propiedad dinámica del sistema depende del tiempo.
Flexo-electricidad:	Capacidad de un material para modificar su curvatura por acción de un campo eléctrico externo.
Fluido incompresible:	Fluido que tiene una densidad constante.
Fluido newtoniano:	Fluido con viscosidad constante e independiente de la rapidez de deformación.
Fluido no newtoniano:	La viscosidad es una función de la rapidez de deformación.
Flujo volumétrico:	Volumen por unidad de tiempo.
Membrana:	Elemento biológico o sintético que delimita un espacio físico y puede o no tener actividad biológica.

Modelo de Maxwell:	Ecuación constitutiva no newtoniana que combina las propiedades elásticas y viscosas del fluido.
Rapidez de deformación:	Rapidez con la que se deforma un fluido.
Resonancia:	Fenómeno que se produce cuando un cuerpo capaz de vibrar es sometido a la acción de una fuerza periódica cuyo periodo de vibración se acerca al periodo de vibración característico del sistema.
Viscoelásticidad:	Termino que se utiliza para describir materiales que poseen características tanto viscosas como elásticas.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Flexo-electricidad en la membrana

La flexo-electricidad en las membranas timpánicas, es un efecto de acoplamiento electromecánico entre la curvatura promedio de la membrana y la polarización eléctrica macroscópica que es esencial para la fisiología de la audición (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009).

La flexo-electricidad aplicada a las membranas utiliza un campo eléctrico impuesto para crear flexión entre ellas, la cual es utilizada por las células ciliadas externas (CCE) ubicadas en el oído interno, para amplificar el sonido que viaja del oído externo al oído medio, a través del complejo sistema auditivo (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

Motivados por el funcionamiento de la (CCE), en este trabajo se modela la respuesta mecánica oscilatoria de una membrana flexo-eléctrica circular inmersa entre dos fases viscoelásticas sujetas por un campo eléctrico sinusoidal de pequeña amplitud (Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

El modelo se basa en la integración de: (i) la ecuación de forma de la membrana flexo-eléctrica aplicada a una membrana circular unida a la superficie interior de un capilar circular y (ii) el flujo volumétrico acoplado a las fases viscoelásticas de contacto, de tal manera, que el efecto del campo eléctrico produce distorsión en la membrana y la evolución de ella induce un flujo volumétrico, el cual depende completamente de las propiedades viscoelásticas del sistema (A. D. Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia E.E. & A. D. Rey 2014).

El modelo membrano-dinámico que describe la evolución de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado, es de segundo orden en las derivadas temporales de la curvatura promedio y del campo eléctrico y bajo ciertas transformaciones algebraicas, se mapea en un modelo de Burgers de la mecánica de sólidos (A. D. Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia E.E. & A. D. Rey 2014).

El espacio material conformado por la inercia, viscosidad y la elasticidad de la membrana, se utiliza para clasificar y caracterizar la respuesta de la frecuencia del sistema eléctrico-mecánico. La respuesta dinámica del sistema, es típica de un oscilador armónico forzado y puede mostrar curvas resonantes en la potencia total.

La amplitud, la frecuencia y la anchura de las curvas resonantes en la potencia son de relevancia para el funcionamiento de las células ciliadas externas

(CCE), las cuales dependen de la inercia que proviene de las fases viscoelásticas y la relación entre la elasticidad de la membrana y la de los líquidos en contacto.

El modelo membrano-dinámico (Viscoelástico/Flexo-Eléctrico) integrado y las aportaciones de este trabajo contribuyen a la búsqueda constante en el entendimiento de los motores biológicos conocidos como células ciliadas externas (CCE), especialmente en el papel fundamental de la deformación de la membrana en la entrega de energía mecánica, a través de electro-motilidad y su conversión en energía dependiente de la frecuencia (Brownell et al. 2001; A. D. Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia E.E. & A. D. Rey 2014).

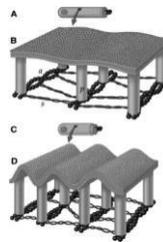


Figura 1. “Contracción de la membrana plasmática de la CCE”

Los cristales líquidos nemáticos son materiales multifuncionales viscoelásticos anisotrópicos auto-organizados, los cuales son orientados debido a campos externos como por ejemplo: (i) campos eléctricos, (ii) campos magnéticos, (iii) esfuerzos cortantes, (iv) potenciales químicos, y (vi) sistemas ópticos (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009).

El orden orientacional se define por un vector director \mathbf{n} y las distorsiones elásticas por el tensor $\nabla \mathbf{n}$ (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

Una propiedad sorprendente y característica de los cristales líquidos nemáticos es conocida como flexo-electricidad (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014), la cual describe el acoplamiento entre los mecanismos asociados a los gradientes elásticos y la polarización eléctrico, como aquella producida por un campo eléctrico el cual modifica la curvatura y esto a su vez crea un efecto de polarización en el sistema (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009).

El vector natural de polarización asociado a las deformaciones $\mathbf{S} = \mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n}$ y el asociado con la orientación de la curvatura $\mathbf{B} = -\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}$ pueden polarizar los cristales líquidos nemáticos (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

$$\mathbf{P}_f = c_s \mathbf{S} + c_B \mathbf{B} \quad (1.1)$$

en donde \mathbf{P}_f es el polarización asociada a la flexo-electricidad, los coeficientes flexo-eléctricos $\{c_s, c_B\}$, están asociados a los mecanismos tipo abanico y a la curvatura y son del orden de 10pCm^{-1} (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). La Ec. (1.1) describe un sensor que cuantifica los mecanismos flexo-eléctricos (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014), donde la deformación crea polarización. El efecto de los mecanismos flexo-eléctricos (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014), describe una torca asociado a estos, e inducida por el campo eléctrico:

$$\Gamma_f = \mathbf{n} \times \left\{ (c_s - c_B) [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{n} - \nabla (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})] + (c_s + c_B) (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{E}) \right\} \quad (1.2)$$

donde Γ_f depende del campo eléctrico y del tensor gradiente de campo eléctrico.

La torca Γ_f está dada por la suma de un tensor de esfuerzos flexo-eléctrico y un tensor acoplado flexo-eléctrico:

$$\Gamma_f = -\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{T}_f + \nabla \cdot \mathbf{C}_f \quad (1.3)$$

La Ec. (1.2) indica como el campo eléctrico \mathbf{E} crea un efecto mecánico. Las aplicaciones actuales de los cristales líquidos flexo-eléctricos incluyen ahorro de energía, transductores electro-mecánicos y pantallas (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). La electro-elasticidad de membranas biológicas y sintéticas pueden ser eficientemente descritas por la teoría de cristales líquidos, usando una aproximación conocida como nemato-membranología. Por ejemplo la elasticidad de una membrana doble bi-lipida es bien descrita por la conocida ecuación de Helfrich E_H para las energías de flexión y torsión respectivamente. Matemáticamente se expresa como (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

$$E_H = 2k_c H^2 + \bar{k}_c K \quad (1.4)$$

donde H es la curvatura promedio y K es la curvatura Gaussiana, la cual surge de la ecuación de energía elástica nemática de Frank (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

$$E_F = \frac{K_1}{2} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 - K_{24} \nabla \cdot (\mathbf{n} \nabla \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}) \quad (1.5)$$

en donde K_1 y K_{24} son constantes de elásticas. Las variables geométricas definidas en este trabajo se pueden estudiar en la literatura especializada en el

tema (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

La ciencia que estudia las membranas flexoeléctricas desde el punto de vista de los cristales líquidos, es conocida como nemato-membranología. Esta se basa en la premisa de que una membrana es afín a un cristal líquido cuando el vector unitario normal \mathbf{k} , el cual describe cómo cambia la curvatura promedio en una membrana, coincide con el vector director \mathbf{n} que describe la orientación preferencial de los elementos materiales de un cristal líquido, i.e. $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ en Ec. (1.5), y considerando solamente deformaciones tangenciales ∇_s , se obtiene la siguiente ecuación para la energía de Frank (Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

$$E_F = \left(\frac{K_1}{2} + 4K_{24} \right) H^2 + (-2K_{24}) K \quad (1.6)$$

si se comparan las Ecs. (1.5) y (1.6) se obtienen las siguientes relaciones:

$$4k_c = (K_1 + 8K_{24}) \quad (1.7)$$

$$\bar{k}_c = -2K_{24} \quad (1.8)$$

El gradiente asociado a la superficie puede ser obtenido por la proyección tangencial del gradiente total $\nabla_s(\cdot) = \mathbf{I}_s \cdot \nabla(\cdot); \mathbf{I}_s = \mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}$, en donde las membranas y los cristales líquidos exhiben flexo-electricidad, i.e., un acoplamiento entre la polarización y la curvatura (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia E.E. & Rey 2014). Usando la misma aproximación que se estudió anteriormente, la Ec. (1.1) da la polarización en función de los cambios del vector unitario \mathbf{k} y el gradiente superficial ∇_s :

$$\mathbf{P} = c_f (\nabla_s \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} \quad (1.9)$$

en donde C_f es el coeficiente flexo-eléctrico de la membrana, el cual puede ser calculado a través de experimentos. La torca Γ asociado a los efectos flexo-eléctricos \mathbf{E} , puede ser descrita de la siguiente manera (Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

$$\Gamma = \mathbf{k} \times \left\{ c_f \left[(\nabla \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}_{//} - \nabla_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \right] \right\} \quad (1.10)$$

donde la proyección tangencial del campo eléctrico es $\mathbf{E}_{//} = (\mathbf{I} - \mathbf{k}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}$. La Ec. (1.10) muestra que los efectos eléctricos se llevan a cabo bajo las siguientes condiciones:

$$c_f > 0, \mathbf{E}_{//} \neq 0, \text{ ó } \nabla_s (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \neq 0 \quad (1.11)$$

En conclusión parcial, los mecanismos asociados a la flexo-electricidad pueden aplicarse a sensores de tipo biológicos, debido a su acoplamiento entre la polarización y la curvatura como en los cristales líquidos nemáticos. Esta investigación es motivada por las propiedades flexoeléctricas, i.e., la facilidad que tiene un sistema para modificar su curvatura por efecto de un campo eléctrico aplicado, como aquel encontrado en las células ciliadas externas localizado en el oído interno (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

1.2 Membranas flexoeléctricas

Las membranas flexoeléctricas han sido estudiadas debido a sus capacidades como sensores debido al acoplamiento entre la curvatura promedio y los mecanismos de polarización, los cuales describen a los cristales líquidos nemáticos. Esta investigación es motivada por las observaciones en membranas biológicas flexoeléctricas como las observadas en las células ciliadas externas, las cuales se encuentran en el oído interno y son conocidos como los motores biológicos que amplifican el sonido en el oído humano (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). La flexo-electricidad en las membranas tienen un potencial uso debido a sus capacidades como sensores biológicos (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a, 2006b, 2006c, 2007, 2008 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014) y debido a esto, es una área de interés en materia suave de materiales (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2006b, 2006c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). La flexo-electricidad en materia suave complementa y extiende la aplicación de los materiales piezoeléctricos los cuales acoplan la deformación con la polarización en materiales complejos tipo cristales y cerámicos.

Muchos materiales, exhiben estructuras complejas como los cristales líquidos, como los encontrados en la proteína producida por las arañas, colágeno y membranas biológicas como las encontradas en las células ciliadas externas (Petrov 1999, 2001, 2006; Sachs et al. 2009; Rey 2006a-c, 2006b, 2006c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

Durante muchos años, mucho de las investigaciones en materiales flexo eléctricos se han centrado en el estudio del cálculo de las coeficientes flexo-eléctricos en diferentes sistemas de cristales líquidos. Para membranas biológicas tipo cristal líquido, el valor numérico de los coeficientes están en el orden de 3 a 20 pC/m, pero recientemente Harden et al. 2010, han reportado coeficientes flexo eléctricos hasta del orden 35 nC/m en cristales líquidos tipo banana empleados en transductores mecánico eléctricos (Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Harden et al; 2010).

Las células ciliadas externas exhiben un comportamiento complejo llamado electro-motilidad (Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Rabitts et al. 2009; Harden et al; 2010). Las células ciliadas ubicadas en el oído interno, en la cóclea las cuales amplifican el sonido hasta un valor cercano de 50 db (Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Rabitts et al. 2009; Harden et al; 2010) la cóclea amplifica y provee a los mamíferos la capacidad de oír en un amplio intervalo de frecuencias. La potencia disipada por las células ciliadas (Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Rabitts et al. 2009; Harden et al; 2010) es de mucho interés en los procesos de pérdida auditiva muchas veces causados por el deterioro de estos motores biológicos (Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Rabitts et al. 2009; Harden et al; 2010), cuyo entendimiento requiere de teoría de ecuaciones constitutivas viscoelásticas para el entendimiento de la electromotilidad en las células ciliadas externas.

Un hecho clave en la amplificación del sonido en las células ciliadas, son la energía disipada y la energía almacenada respectivamente. Así que la descripción y el entendimiento de la electromotilidad se basa en su dependencia con la frecuencia de oscilación, inmersas en medios viscoelásticos debido a campos eléctricos oscilantes (Patel & Meyer 1987; Broughton et al. 2005; Harden et al. 2008; Harden et al; 2010; Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). El campo eléctrico E produce oscilaciones en la membrana elástica a través de efectos mecano eléctricos y flexo-eléctricos (Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

Por otro lado las oscilaciones de la membrana elástica desplazan las fases viscoelásticas a través de los mecanismos elásticos y viscoelásticos respectivamente (Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). El efecto combinado que permite la conversión de energía eléctrica a mecánica es la integración de los efectos flexo eléctricos y los efectos mecánicos (Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). Los puntos importantes de la conversión de energía en este dispositivo son: (i) Cuanta potencia es liberada por la membrana debido al contacto de las fases viscoelásticas por efecto al campo eléctrico impuesto, (ii) Cuanta energía elástica es almacenada en la membrana elástica y (iii) en sistemas biológicos las propiedades importantes son las curvas resonantes y su caracterización (frecuencia de resonancia, máximo valor en las curvas resonantes, anchura de las curvas resonantes, Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014)

Las células ciliadas externas o CCE, están colocadas en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti. Son células sensoriales con características realmente únicas. Están preparadas para realizar la transducción mecano-eléctrica, como las CCI, pero no transmiten ninguna característica del estímulo

sonoro al cerebro. Al contrario, un mecanismo activo de transducción inversa (electro-mecánico) le permite reenviar la energía para aumentar la sensibilidad y la selectividad frecuencia. La cóclea humana tiene entre 10.000 y 12.000 de la CCE (Rey 2006a-c, 2007, 2008, 2010; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

1.3 Modelos matemáticos electro-reológicos

1.3.1 Modelo estático

La relación básica entre la curvatura promedio y el campo eléctrico aplicado en membranas flexo-eléctricas, ha sido presentada y discutida profundamente por Rey (2005, 2006a-c, 2007, 2008) y Abou-Dakka et al. (2012), matemáticamente se expresa de la siguiente manera:

$$\left(\frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L} \right) H(t) = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} E(t) \quad (1.12)$$

La Ec. (1.12) es la relación básica para estos sistemas, la cual se basa en la relación entre la curvatura promedio y el campo eléctrico. Nótese que el paréntesis del lado izquierdo de la igualdad, describe la elasticidad de la membrana a través de las propiedades materiales asociados a los módulos de torsión y de flexión $\{k_c, \bar{k}_c\}$, y la tensión interfacial. El miembro derecho de la Ec. (1.12) describe los mecanismos eléctricos a través de la carga en el sistema C_f y variables geométricas $\{L, \mathfrak{S}\}$.

1.3.2 Modelo viscoso

La Ec. (1.12) ha sido base para estudiar el efecto de las membranas flexoeléctricas en medios viscosos y viscoelásticos (Rey 2005, 2006a-c, 2007, 2008, Abou-Dakka et al. 2012). Para estudiar estos sistemas, Rey (2008) y Abou-Dakka et al. (2012), propusieron un capilar de longitud $z = 2L$ y radio $r = a$, la parte superior inmersa con un fluido viscoso de viscosidad η_i y la parte inferior con una viscosidad η_b . La membrana flexo-eléctrica es colocada en medio del capilar, en donde la curvatura de la membrana cambia por efecto de un campo eléctrico aplicado a la parte inferior del capilar (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012).

El modelo resultante, es una ecuación diferencial de primer orden para la curvatura promedio en función del campo eléctrico y las propiedades materiales, i.e.

$$(\eta_t + \eta_b) \frac{dH(t)}{dt} + \left(\frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L} \right) H(t) = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} E(t) \quad (1.13)$$

en la Ec. (1.13), $\Sigma_\eta = \eta_t + \eta_b$ es la viscosidad total del sistema y d/dt es el operador derivada temporal, que describe la evolución de la curvatura promedio, y físicamente da información acerca de la rapidez con la que oscila la membrana (Rey 2008; Rey et al. 2012).

1.3.3 Modelo viscoso no lineal

Este modelo fue extendido a un modelo no lineal tomando en cuenta que la longitud L es una función de $h(t)$, i.e., $L = h(t)$, por lo que se obtiene la siguiente ecuación diferencial no lineal, la cual fue resuelta por Rey 2008, mediante técnicas perturbativas.

$$2\eta a^2 H(t) \frac{dH(t)}{dt} + \left(2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I} \right) H(t) = C_f \mathfrak{I} E(t) \quad (1.14)$$

nótese, que la Ec. (1.14) no contiene una longitud característica axial. Aquí se supuso que las dos fases viscosas tienen el mismo valor, por lo que $\Sigma_\eta = \eta_t + \eta_b = 2\eta$. El siguiente paso fue extender el modelo viscoso incorporando los mecanismos elásticos, mediante el modelo de Maxwell (Abou-Dakka et al. 2012).

1.3.4 Modelo viscoelástico

Abou-Dakka et al. 2012, analizaron este mismo problema, para dos fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal generando el siguiente modelo de segundo orden lineal de coeficientes constantes:

$$\left(b_2 \frac{d^2}{dt^2} + b_1 \frac{d}{dt} + b_0 \right) H(t) = \left(a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) E(t)$$

$$b_2 = \eta_t \lambda_b + \eta_b \lambda_t + \lambda_t \lambda_b \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L}$$

$$b_1 = \eta_t + \eta_b + (\lambda_t + \lambda_b) \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L} \quad (1.15)$$

$$b_0 = \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I}}{4L}$$

$$a_2 = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} \lambda_t \lambda_b, \quad a_1 = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L} (\lambda_t + \lambda_b), \quad a_0 = \frac{C_f \mathfrak{I}}{4L}$$

este modelo incluye como casos particulares los modelos anteriores, cuando los tiempos de relajación son cero, i.e., $\lambda_t = \lambda_b = 0$, por lo que se recupera el modelo viscoso. Si los tiempos de relajación y las viscosidades son cero, i.e. $\lambda_t = \lambda_b = 0$; $\eta_t = \eta_b = 0$, se recupera el caso flexoeléctrico (Abou-Dakka et al. 2012)).

Por otra parte Herrera-Valencia & Rey 2014, demostraron que el modelo viscoelástico de Abou-Dakka et al. 2012, es equivalente a un sistema mecánico y que el sistema físico campo eléctrico-curvatura promedio puede ser representado mediante una función de transferencia compleja con retroalimentación, el cual es gobernado por los mecanismos reológicos y flexoeléctricos a través de las propiedades materiales en el sistema. Además, se demostró que los efectos inerciales con llevan a tener varios picos resonantes como los encontrados en otros sistemas físicos (Herrera-Valencia & Rey 2014). Finalmente, los efectos resonantes, son un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas, elásticas de la membrana y flexoeléctricas. Las curvas resonantes, son obtenidas cuando hay un contraste entre las fases viscoelásticas, i.e., una de ellas es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica, la viscosidad de bulto debe ser la máxima en el sistema, la elasticidad de la membrana debe ser pequeña en comparación con la elasticidad de bulto (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

En este trabajo, tomamos como punto de partida, la investigación realizada por Abou-Dakka et al. 2012 y **corregimos el modelo dado por las Ecs.(1.15) en forma adimensional de Abou-Dakka et al. 2012 mediante la incorporación de un término faltante.** A partir del modelo obtenido, se deduce la solución en estado no estacionario y las respectivas ecuaciones para la potencia y la energía elástica de la membrana. La distribución de la tesis se presenta en la Figura 2 y el objetivo general y los particulares son enunciados posteriormente.

Por otro lado y debido a la búsqueda constante de entender el sistema auditivo humano y así poder acceder a aplicaciones científicas y tecnológicas en la búsqueda de nuevos materiales y resultados analíticos simples que permitan contrastar las predicciones numéricas y las observaciones experimentales, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de licenciatura.

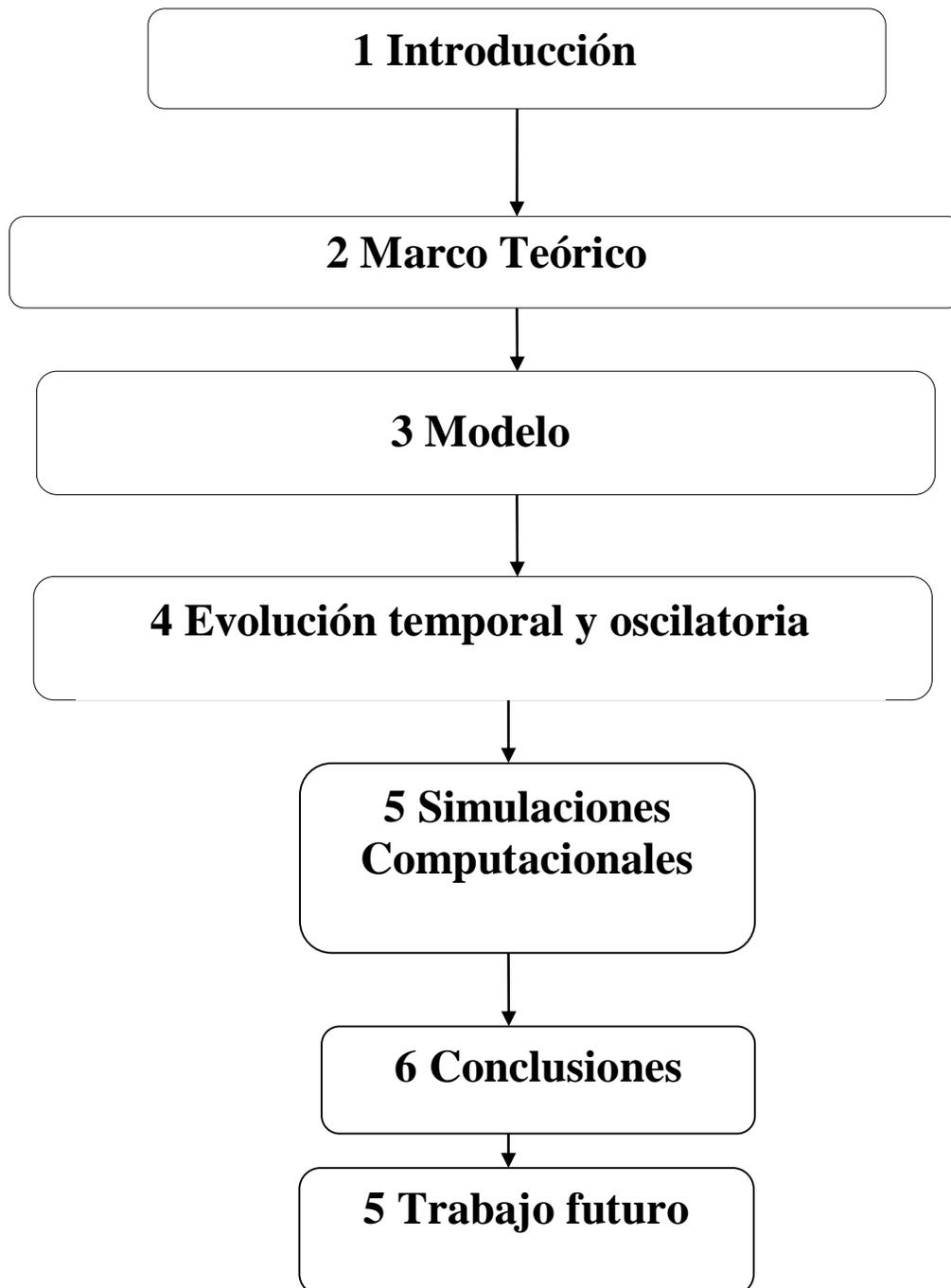


Figura 2. "Organización del proyecto de tesis".

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

- a) Contribuir al entendimiento del comportamiento reológico de las membranas flexoeléctricas en medios viscoelásticos, para su aplicación como modelo a las CCE.

1.4.2 Objetivos Particulares

- a) Deducir un modelo matemático que describa la curvatura de la membrana flexoeléctrica, en función de las propiedades viscoelásticas, flexoeléctricas y elásticas del sistema.

- b) Mediante un campo eléctrico, obtener expresiones para la módulos de la curvatura, potencia, energía elástica y el factor Q, el cual describe la relación entre las propiedades elásticas y la disipación en el medio.

1.4.3 Hipótesis

La aplicación de un campo eléctrico al sistema (membrana flexoeléctrica) produce el efecto de curvatura en la membrana flexoeléctrica la cual a su vez induce un flujo volumétrico a través del capilar, de los fluidos viscoelásticos produciendo una disipación de energía la cual está relacionada con el efecto de amplificación en las células ciliadas externas.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

2.1 Fluidos complejos

Los fluidos complejos como su nombre lo indica, son aquellos que presentan comportamiento reológicos en estado estacionario y no estacionario, muy interesantes debido a los agentes externos que apliquen en ellos (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). Algunos ejemplos de fluidos complejos son los sistemas poliméricos, micelares, fluidos biológicos, cristales líquidos, etc. Los polímeros por ejemplo, son sistemas en donde una unidad llamada monómero se repite y que presentan propiedades físicas complejas debido a las interacciones entre sus cadenas y peso molecular (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012). Los sistemas micelares contienen miles o decenas de miles de agentes tenso activos (un tensoactivo es un sistema que abate la tensión superficial de los líquidos) y que contienen una parte hidrofobia y una hidrofilia (Rey & Herrera-Valencia 2012). Los sistemas micelares dependen de la concentración y dependiendo de esta, pueden pasar de sistema esféricos a cilíndricos por efecto de un agente estos sistemas micelares dependen de la concentración y por agente externo entiéndase una fuerza que se aplica en una área paralela a la fuerza (Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). Los cristales líquidos son fluidos anisotrópicos, es decir dependen de la posición y pueden ser orientados a través de campos externos eléctricos y magnéticos (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b).

2.2 Cristales líquidos

El cristal líquido es un tipo especial de estado de agregación de la materia que tiene propiedades de las fases líquida y sólida (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). Dependiendo del tipo de cristal líquido, es posible, por ejemplo, que las moléculas tengan libertad de movimiento en un plano, pero no entre planos, o que tengan libertad de rotación, pero no de traslación cada molécula consta de un papel que a su vez o sirve y no se llega a una conclusión exacta solo por eso se le llaman líquidos. Se suele atribuir el descubrimiento de los cristales líquidos al botánico Friedrich Reinitzner que en 1888 encontró una sustancia que parecía tener dos puntos de fusión (de Gennes and Prost 1994). Un año más tarde Otto Lehmann solvento el problema con la descripción de las nano estructuras liótropicas de cristal líquido (de Gennes & Prost 1994).

2.2.1 Cristales líquidos biológicos

Los cristales líquidos biológicos son abundantes en los seres vivos. Por consiguiente, los cristales líquidos liotrópicos atraen la atención particular en el campo de la química biomimética (Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). En particular, las membranas biológicas y las membranas de las células son una forma de cristal líquido. Sus moléculas dispuestas en forma de barra (por ejemplo, los fosfolípidos o las lecitinas) son organizadas perpendicularmente a la superficie de la membrana, más la membrana es líquida y elástica (Rey & Herrera-Valencia

2012a-b). Las moléculas del componente pueden fluir fácilmente, pero tienden a no salir de la membrana, y pueden desplazarse de un lado a otro de la membrana con alguna dificultad (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). Estas fases del cristal líquido en la membrana pueden recibir e introducir las proteínas importantes como si fuesen libremente receptores "flotantes", o por fuera de la membrana (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). Muchas otras estructuras biológicas exhiben la conducta de cristal líquido (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). Por ejemplo la solución concentrada de la proteína que es arrojada por una araña para generar seda de araña es, de hecho, una fase del cristal líquido (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b). El orden preciso de las moléculas en la seda es crítico para darle su conocida fuerza. El ADN y muchos polipéptidos conforman fases de cristal líquido (de Gennes & Prost 1994; Rey & Herrera-Valencia 2012a-b).

2.2.2 Tipos de fase en los cristales líquidos

Los cristales líquidos dependen fuertemente de la temperatura ya que estos son una mesofase entre la fase cristal y la fase líquida, una primera clasificación de los cristales líquidos consiste en la temperatura de operación y el grado de ordenamiento.

2.2.2.1 Fase nemática

Una de las fases de cristales líquidos más comunes es la nemática. La palabra nemática viene del griego $\eta\mu\alpha$ (nema), que significa "hilo". Este término se origina de los defectos topológicos que se observan en los cristales líquidos nemáticos, los cuales se denominan formalmente como "disclinaciones". Los nemáticos también exhiben defectos topológicos llamados "erizos". En una fase nemática, las moléculas orgánicas calamíticas o con forma de vara no tienen un orden posicional, pero se alinean automáticamente para tener un orden direccional de largo alcance con sus ejes longitudinales más o menos paralelos; por lo tanto, las moléculas son libres de fluir y el centro de las posiciones de sus masas se distribuyen al azar como en un líquido, pero mantienen su origen direccional de largo alcance. La mayoría son cristales líquidos nemáticos mono axiales: tienen un eje que es más largo y preferido, con los otros dos siendo equivalentes (pueden aproximarse como cilindros o varillas).

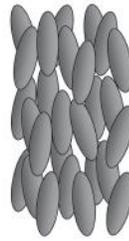


Figura 3. “Ordenamiento de las moléculas en la fase nemática”

Sin embargo, algunos cristales líquidos son nemáticos biaxiales, lo que significa que, además de la orientación de su eje largo, también se orientan a lo largo de un eje secundario. Los nemáticos tienen una fluidez similar a la de los líquidos comunes (isotrópicos) pero pueden ser fácilmente alineados por un campo eléctrico o magnético externo. Los cristales líquidos nemáticos alineados tienen las propiedades ópticas de los cristales mono axiales y esto los hace muy útiles en pantallas de cristal líquido LCD).

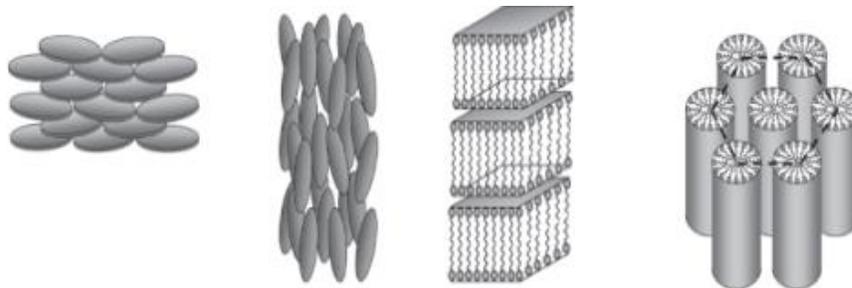


Figura 4. “Esquema que clasifica las diferentes fases que se presentan, por orden de temperatura”

2.3 Ecuaciones constitutivas

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos. Primero se define la ecuación más simple, el modelo newtoniano, seguida de alguno de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema (Bird et al. 1987).

2.3.1 Fluido newtoniano

En esta sección, se presentan algunas de las ecuaciones constitutivas más utilizadas en Fenómenos de Transporte y Reología de fluidos complejos (Bird et al 1987). Primero se define la ecuación más simple, el modelo newtoniano, seguida de alguno de los modelos no newtonianos más utilizados en la literatura especializada en el tema (Bird et al 1987).

Desde el punto de vista de los fenómenos de transporte y reología, el fluido más sencillo es el newtoniano, llamado así porque su comportamiento sigue la ley de Newton (Bird et al 1987). El esfuerzo de corte es proporcional al gradiente de velocidad de corte:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2\mu\mathbf{D} \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T)\end{aligned}\quad (2.1)$$

La constante de proporcionalidad se denomina viscosidad y se mide en Pa s (en SI) en la práctica se utiliza comúnmente el centipoise (cp). Por definición, todos aquellos fluidos que no siguen la ec. (1) son no newtonianos (Bird et al. 1987).

2.3.2 Fluidos no newtonianos

Desde el punto de vista tecnológico e industrial, los fluidos no-newtonianos, son aquellos que presentan propiedades, aplicaciones tecnológicas y científicas más interesantes (Herrera et al. 2009; Herrera et al 2010; Bird et al. 1987).

La definición más simple y sencilla de un fluido no newtoniano, es aquella en donde la rapidez de deformación, no muestra una relación lineal entre el esfuerzo y la rapidez de deformación (Bird et al. 1987). En este punto la viscosidad no es constante y depende de la rapidez con la que se deforme la muestra, la temperatura, la presión, la concentración, el pH entre otras (Bird et al 1987).

2.3.2.1 Modelo de ley de potencia

El modelo más sencillo después del modelo newtoniano, es el del ley de potencia, o de Ostwald de Waele, el cual, tiene la siguiente representación matemática (Bird et al. 1987):

$$\sigma = 2\eta(\Pi_D)\mathbf{D} = 2K\left(\sqrt{2(\mathbf{D}:\mathbf{D})}\right)^{n-1}\mathbf{D}\quad (2.2)$$

donde K y n son parámetros empíricos, K es el índice de consistencia y n es el índice de comportamiento de flujo (Bird et al. 1987). El término entre corchetes se denomina viscosidad aparente y es evidente que no es constante, dependiendo directamente de la velocidad de corte $\dot{\gamma}_{rz}$. Debido a que n determina precisamente el modo en que se desarrolla el flujo, si $n < 1$ el fluido se denomina pseudoplástico (Adelgazante al corte), estos fluidos fluyen más fácilmente aumentando la velocidad de deformación (Bird et al. 1987).

Por el contrario, cuando $n > 1$, la resistencia a fluir aumenta con un incremento en la velocidad de corte, y el fluido se denomina dilatante (engrozante al corte). La mayoría de los fluidos no newtonianos son pseudoplásticos: alimentos (jugo y pure de frutas, salsas) polímeros fundidos (poliestireno, acrilonitrilo, polipropileno, etc), cosméticos, latex, tinta de imprenta (Bird et al. 1987).

Los fluidos engrozantes al corte son los más raros, entre otros el cemento y las suspensiones concentradas (ej: almidón de maíz) siguen este comportamiento (Bird et al. 1987). A bajas velocidades de corte, el líquido presente llena los espacios libres, a medida que la velocidad de corte aumenta, el material se expande o dilata y comienza a aparecer esfuerzos de interacción solido-solido que se traducen en un aumento de la viscosidad aparente (Bird et al. 1987).

Una limitación importante de la ley de la potencia es que es aplicable a un rango limitado de velocidades de corte. Además el valor de K depende del valor numérico de n , con lo cual valores de K de distintos fluidos no son comparables.

2.3.2.2 Modelo de Ellis

El modelo de Ellis, contiene tres propiedades materiales las cuales describen una primera zona newtoniana a bajas rapidezces de deformación, y una zona intermedia relacionada con el modelo de ley potencia (Bird et al. 1987). Este modelo puede ser deducido mediante una combinación del modelo newtoniano y el de ley de potencia respectivamente, suponiendo que la rapidez de deformación es aditiva (Bird et al. 1987). La ecuación constitutiva de Ellis, contiene tres parámetros ajustables denotados por: $\{\varphi_0, \varphi_1, \alpha\}$ los cuales están relacionados con la fluidez a cortes bajos y moderados y el inverso del índice del modelo de ley de potencia. Este modelo admite soluciones analíticas en flujo cortante simple en diferentes situaciones de flujo para el perfil de velocidades, flujo volumétrico, función viscosidad, rapidez de deformación, etc, el modelo matemático es el siguiente:

$$2\mathbf{D} = \varphi_0 \boldsymbol{\sigma} + \varphi_1 |\boldsymbol{\sigma}|^{\alpha-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.3)$$

2.3.2.3 Maxwell

El modelo de Maxwell, es el modelo más sencillo que describe a los fluidos viscoelásticos en el régimen de viscoelasticidad lineal (Bird et al. 1987; Calderas et al 2009; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). Este modelo combina al solido de Hook, con el fluido newtoniano. El modelo de Maxwell contiene dos parámetros materiales $\{\lambda_0 = \eta_0/G_0, \eta_0\}$, el tiempo característico $\lambda_0 = \eta_0/G_0$ se conoce como el tiempo de relajación del sistema, y es el tiempo que

tarde el sistema en alcanzar el equilibrio después de ser sometido a un esfuerzo (Bird et al. 1987).

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (2.4)$$

cuando el tiempo de relajación λ_0 es cero el sistema se reduce al modelo newtoniano, mientras que a velocidades muy bajas $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$, el sistema puede ser integrado y puede obtener el modelo de Hook (Bird et al. 1987). Las propiedades materiales que intervienen la Ec. (2.4) pueden ser calculadas mediante pruebas de flujo oscilatorio y de flujo en estado estacionario respectivamente (Calderas et al 2009).

2.3.2.4 Jeffrey

El modelo de Jeffrey, es un modelo viscoelástico que acopla el modelo newtoniano (solvente) con el modelo de Maxwell (polímero) (Bird et al. 1987, 2005). Suponiendo que el esfuerzo total en el sistema es la suma del esfuerzo del solvente, más el esfuerzo del polímero:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_p = 2\eta_s \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma}_p \\ \boldsymbol{\sigma}_p + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}_p &= 2\eta_p \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.5)$$

combinando las Ecs. (2.5), se tiene el modelo de Jeffrey;

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_{JP} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D}; \lambda_{JP} = \left(\frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_p} \right) \lambda_p; \eta_0 = \eta_s + \eta_p \quad (2.6)$$

Este modelo contiene tres propiedades materiales las cuales son dos tiempos característicos y una viscosidad a bajo corte $\{\eta_0, \lambda_p, \lambda_{JP}\}$ (Bird et al. 1987, 2009). La Ec. (2.6) es frecuentemente utilizado en la descripción de polímeros de peso molecular bajo. Esta ecuación constitutiva se reduce al modelo newtoniano cuando el tiempo de Maxwell y Jeffrey tiende a cero, i.e. $\{\lambda_p = \lambda_{JP} = 0\}$, al modelo de Maxwell cuando $\{\lambda_{JP} = 0\}$, al modelo de Hook cuando el frente de velocidades es homogéneo, es decir a rapidezces de deformación baja, i.e. $\dot{\gamma}_{rz} \cong 0$ (Bird et al 2009, 2010).

2.3.2.5 Tanner

Existen en la literatura de fenómenos de transporte y reología muchas ecuaciones constitutivas que describen el comportamiento a altas rapideces de deformación, i.e. en el régimen de viscoelasticidad no lineal (Bird et al 1987, 2010). Uno de esos modelos, es la ecuación constitutiva de Tanner (Bird et al 1987; Bird et al 2010), la cual puede ser expresada en términos de la derivada convectiva superior de Maxwell (Bird et al. 1987, 2006)

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D} \quad (2.7)$$

en donde la derivada convectiva superior de Maxwell se define como:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{D}{Dt} \boldsymbol{\sigma} - \{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \} = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{V} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} - \{ \nabla \mathbf{V}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{V} \} \quad (2.8)$$

La función viscosidad puede tomar cualquier forma, en particular, si se combina el modelo de Tanner (Bird et al. 1987) con el modelo de Ley de potencia, se tiene lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda_0 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2m \left(\sqrt{2(\mathbf{D} : \mathbf{D})} \right)^{n-1} \mathbf{D} \quad (2.9)$$

Esta ecuación nos describe el comportamiento viscoelástico no lineal para un fluido que presenta propiedades elásticas y adelgazantes al corte respectivamente (Bird et al. 1987, 2009).

Finalmente, los modelos discutidos en esta sección, nos permite establecer, las diferencias de los modelos inelásticos no-newtonianos más comunes de la literatura, en general las soluciones de bajo peso molecular como el agua, acetona, algunos líquidos inmiscibles. Por otra parte, los fluidos no-newtonianos presentan un reto en la descripción de sistemas complejos. La aplicación de estos fluidos, se presenta en diferentes situaciones físicas, como por ejemplo: La ciencia y la ingeniería de nuevos materiales como son: (i) fibras sintéticas (utilizadas en la industria espacial), (ii) polímeros (plásticos), (iii) polímeros asociativos (utilizados como agentes estabilizantes en la industria de las pinturas base agua), (iv) cristales líquidos (utilizados por sus propiedades ópticas en pantallas de cristales líquidos, fibras sintéticas, y reconstrucción de tejido óseo en bioingeniería), (v) fluidos biológicos, los cuales representan un reto para los ingenieros modernos (Rey 2005, 2006, 2007, 2008; Rey & Herrera 2012). En este contexto, los fluidos no-newtonianos involucran conocimientos multidisciplinarios, como la física, química, biología, matemáticas e ingeniería.

2.4 Fenómenos de transporte

Los Fenómenos de Transporte, se define como la rama de la Ingeniería Química que estudia los mecanismos de transporte en momento, energía y masa. Los fenómenos de transporte pueden ser estudiados a nivel macroscópico, microscópico y molecular (Bird et al. 1987, 2006). La ecuación básica de transporte puede ser descrita en término de la derivada material D/Dt (Bird et al 1987):

$$\frac{DX}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{X} = -\nabla \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{f} \quad (2.10)$$

Mecanismo de Transporte	\mathbf{X}	\mathbf{Y}	\mathbf{f}
Momento Newton	$\rho \mathbf{V}$	$\Phi = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + \mathbf{T} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} - p \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}$	$\rho \mathbf{g}$
Energía Termodinámica Irreversible	$U = \rho C_p T$	$\mathbf{q} = -k \nabla T$	$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$
Masa Conservación de los moles en un sistema	C_A	$\mathbf{N}_A = -c D_{AB} \nabla X_A + X_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$	R_A
Continuidad Conservación de la masa	ρ	$\rho \mathbf{V}$	0

Tabla 1. "Variables aplicables a la ecuación general de transporte"

El primer término de la Ec. (2.10) representa la derivada material de la propiedad X , la cual es igual a los cambios espaciales del flux a través de la divergencia del flux Y y por último la fuente f (Bird et al. 2005).

2.4.1 La ecuación de transporte de cantidad de movimiento

La ecuación de momento, se basa principalmente en la segunda ley de Newton del movimiento en un medio continuo, la cual puede ser escrita de la siguiente manera (Bird et al. 1987, 2005)

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.11)$$

En la Ec. (2.11) ρ es la densidad del líquido, \mathbf{V} es el vector de velocidad, p es la presión, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de esfuerzos viscoso, y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad, que en el campo terrestre es constante. Si el fluido que describe la relación del tensor de esfuerzos con la rapidez de deformación es lineal, la Ec. (2.11) se transforma en la Ec. de Navier-Stokes para los fluidos newtonianos (Bird et al. 1987, 2005):

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} \quad (2.12)$$

la Ec. (2.12) es base para el cálculo de la mecánica de fluidos newtonianos.

2.4.2 La ecuación de transporte de energía

La ecuación de energía, se puede interpretar como una extensión de la primera ley de la termodinámica a un sistema irreversible, en donde el tiempo sí es una variable importante, ya que desde el punto de vista clásico, no es tomada en cuenta (Bird et al. 1987, 2005). A partir de la tabla se tiene lo siguiente:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = k \nabla^2 T + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.13)$$

La Ec.(2.13) describe la evolución temporal y espacial de la temperatura como una consecuencia del flux de energía, y del trabajo irreversible realizado por un agente externo sobre los mecanismos viscosos. La Ec. (2.13) es punto de partida en los cálculos del perfil de temperatura asociado a los procesos moleculares y los disipativos respectivamente (Bird et al. 1987, 2005).

2.4.3 La ecuación de transporte de masa

Suponiendo que existe un sistema físico en donde hay intercambio de masa, la ecuación que rige este intercambio, puede ser descrita en términos de la derivada material (Bird et al. 1987, 2005):

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = cD_{AB} \nabla^2 X_A - \nabla_{X_A} \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) - X_A \nabla \cdot (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B) + R_A \quad (2.14)$$

La Ec. (2.14) describe los cambios temporales y espaciales de la concentración de la especie A por efecto de los mecanismos difusivos y de las contribuciones de los cambios espaciales a través del movimiento global del fluido. Cuando el movimiento global del fluido se desprecia es decir, los cambios espaciales en el movimiento global del fluido son despreciables y solamente los mecanismos difusivos y el término de generación contribuyen al balance, por lo que la ecuación de conservación se puede escribir como (Bird et al. 1987, 2005):

$$\frac{DC_A}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) C_A = D_{AB} \nabla^2 (cX_A) - k_n'' C_A^n = D_{AB} \nabla^2 C_A - k_n'' C_A^n \quad (2.15)$$

La Ec. (2.15) describe los cambios espaciales y temporales de la concentración como función de los mecanismos difusivos y de reacción química respectivamente.

2.5 Reología

La reología, es la ciencia que estudia el flujo y la deformación de la materia, es decir, las propiedades mecánicas de los gases, líquidos, plásticos, sustancias asfálticas, materiales cristalinos y otros. Por lo tanto, el campo de la reología se extiende, desde la mecánica de fluidos newtonianos por una parte, hasta la elasticidad de Hooke por otra parte. Su objetivo está restringido a la observación del comportamiento de materiales sometidos a deformaciones muy sencillas, desarrollando posteriormente un modelo matemático que permita obtener las propiedades reológicas del material. Un sistema es capaz de fluir debido a las fuerzas de cohesión en sus moléculas y suele deformarse continuamente cuando se somete a un esfuerzo cortante (Bird et al. 1987, 2005). En su forma más simple, la viscosidad μ es una propiedad de transporte, que se puede interpretar como la resistencia que ofrecen los fluidos a ser deformados cuando son sometidos a un esfuerzo (Bird et al. 1987, 2005).

2.5.1 Fluidos newtonianos

Los newtonianos son fluidos en los que el deslizamiento relativo de los elementos de fluido al circular uno sobre otro es proporcional al esfuerzo cortante sobre el fluido. Todos los gases, agua líquida y líquidos de moléculas sencillas (amoníaco, alcohol, benceno, petróleo, cloroformo, butano, etc.) son newtonianos. Las pastas, emulsiones, fluidos biológicos, polímeros, suspensiones de sólidos y otras mezclas son probablemente no newtonianos. Un fluido newtoniano se caracteriza por cumplir la Ley de Newton, es decir, que existe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación (Bird et al. 1987, 2005). La viscosidad de un fluido newtoniano no depende del tiempo de aplicación de esfuerzo, aunque sí puede depender tanto de la temperatura como de la presión a la que se encuentre.

2.5.2 Fluidos no newtonianos

Las suspensiones densas, lodos, emulsiones, soluciones de polímeros de cadena larga, fluidos biológicos, alimentos líquidos, pinturas, suspensiones de arcillas y mezclas de hormigón son, en general, no-newtonianos (Bird et al. 1987, 2005). La relación entre esfuerzo cortante y la velocidad de deformación para fluidos no newtonianos no es lineal (Bird et al. 1987, 2005). Estos fluidos a su vez se diferencian en dependientes e independientes del tiempo.

2.5.3 Tensor de esfuerzos

El tensor de esfuerzos, es un tensor de segundo orden, el cual se puede describir como una matriz de 3 x 3 formada por nueve elementos. Los elementos a fuera de la diagonal principal son llamados esfuerzos cortantes, mientras que los elementos en la diagonal principal son llamados esfuerzo normales. Nótese, que los esfuerzos cortantes deforman continua e irreversiblemente el material, por lo que el sistema fluye (Bird et al. 1987, 2005). Mientras que los elementos en la diagonal principal modifican la forma geométrica del elemento de control, pero no su volumen. La representación del tensor de esfuerzos se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

matemáticamente, es importante destacar que el tensor de esfuerzos es simétrico, es decir los elementos fuera de la diagonal principal, son iguales (Bird et al. 1987, 2005).

2.5.4 Tensor gradiente de velocidad y su traspuesta

Los tensores gradiente de velocidad y su traspuesta se definen como (Bird et al. 1987, 2005):

$$\nabla \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial y} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_y}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix}; (\nabla \mathbf{V})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

2.5.5 El tensor rapidez de deformación

El tensor rapidez de deformación, es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad por lo que, se puede expresar de la siguiente manera (Bird et al. 1987, 2005):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

es importante notar, que el tensor de rapidez de deformación nos da información acerca de la rapidez con la que se deforma el material.

2.6 Pruebas de flujo

2.6.1 Flujo cortante en estado estacionario

En el flujo cortante en estado estacionario, se destruye la estructura con el fin de estudiar la función viscosidad del sistema (Bird et al. 1987, 2005). En esta prueba mecánica, la muestra es colocada en dos placas paralelas y la placa superior se le aplica una velocidad constante, de tal forma que el momento se transfiere ortogonal a la velocidad y el fluido se deforma continua e irreversiblemente. La Figura 5 ilustra este experimento:

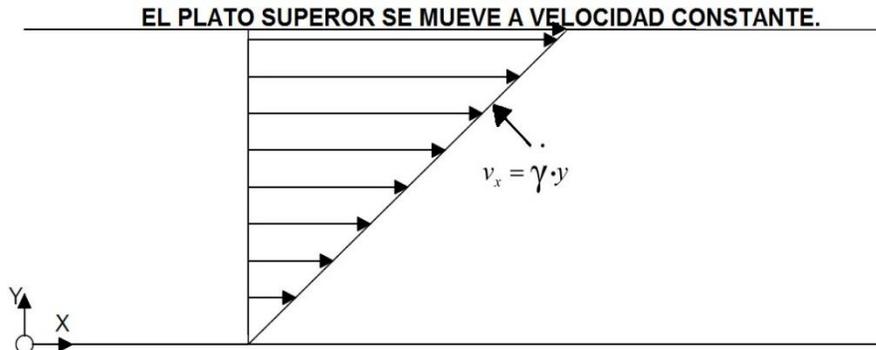


Figura 5. “Esquema que muestra el corte simple en un sistema de placas paralelas”

2.6.1.1 Flujo cortante: Modelo viscoelástico de Maxwell

El flujo cortante simple se genera cuando las fuerzas que actúen en el sistema, quedan fuera de la diagonal principal de la matriz asociada al tensor de esfuerzos (Bird et al. 1987, 2005):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

sustituyendo en el modelo de Maxwell se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\eta_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

desacoplando el sistema se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma} \quad (2.21)$$

en estado estacionario, este modelo se reduce al newtoniano, i.e.

$$\sigma_{rz} = \eta_0 \dot{\gamma}_{rz} \quad (2.22)$$

la viscosidad en este caso, se define como el cociente entre el esfuerzo y la rapidez de deformación (Bird et al. 1987, 2005):

$$\eta \left(\dot{\gamma}_{rz} \right) = \frac{\sigma_{rz}}{\dot{\gamma}_{rz}} = \eta_0 \quad (2.23)$$

por lo tanto, el modelo de Maxwell en un flujo cortante simple en estado estacionario coincide con el modelo de Newton de los fluidos viscosos.

2.6.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias

En el flujo oscilatorio, se prueba la respuesta mecánica del sistema, i.e., la muestra es colocada en dos placas paralelas y la placa superior comienza a oscilar en torno a una posición de equilibrio (Bird et al. 1987, 2005; Barnes et al. 1989). La Fig. (6) ilustra este experimento.

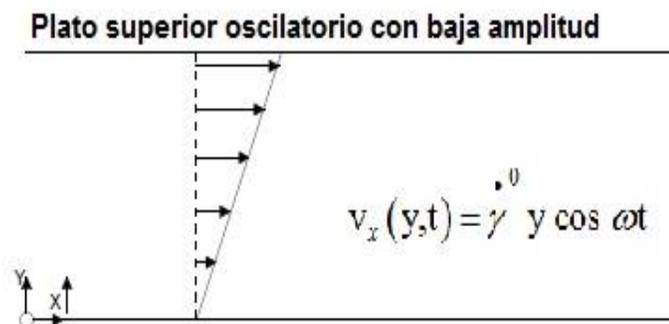


Figura 6. “Esquema que ilustra el flujo oscilatorio a bajas frecuencias”

2.6.2.1 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias: Modelo viscoelástico de Maxwell

En flujo oscilatorio se estudia la respuesta mecánica del material por lo que el modelo de Maxwell toma la siguiente forma en el espacio de Fourier de las frecuencias (Bird et al. 1987, 2005; Barnes et al. 1989):

$$(1 + \lambda_0 \cdot i\omega) \sigma_{rz}(\omega) = \eta_0 \dot{\gamma}(\omega) \quad (2.24)$$

dividiendo el esfuerzo y la rapidez de deformación, se obtiene la viscosidad compleja (Bird et al. 1987, 2005; Barnes et al. 1989):

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\gamma(i\omega)} = \frac{\eta_0}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (2.25)$$

desacoplando la Ec. (2.25) se tiene lo siguiente:

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1}{1 + i\lambda_0\omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0\omega}{1 - i\lambda_0\omega} = G_0\lambda_0 \left\{ \frac{1}{1 + \lambda_0^2\omega^2} - i \frac{\lambda_0\omega}{1 + \lambda_0^2\omega^2} \right\} \quad (2.26)$$

igualando ambos miembros de la ecuación tenemos lo siguiente:

$$\eta'(\omega) = \frac{G_0\lambda_0}{1 + \left(\frac{\eta_0}{G_0}\right)\omega^2}; \quad \eta''(\omega) = \frac{\eta_0\lambda_0\omega}{1 + \left(\frac{\eta_0}{G_0}\right)\omega^2} \quad (2.27)$$

y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega\eta''(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega\eta'(\omega)$. Por último, igualando las ecuaciones obtenemos (Bird et al. 1987, 2005; Barnes et al. 1989):

$$G''(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0\omega}{1 + (\lambda_0\omega)^2}; \quad G'(\omega) = G_0 \frac{\lambda_0^2\omega^2}{1 + (\lambda_0\omega)^2} \quad (2.28)$$

{ G' , G'' } son los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Maxwell.

Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia. Un hecho importante, es cuando se igualan las dos expresiones: $\lambda_0 = 1/\omega_{int}$ se obtiene el tiempo viscoelástico de Maxwell a frecuencias bajas por lo que este sistema de flujo, permite calcular una propiedad material del líquido en la zona viscoelástica lineal (Bird et al. 1987, 2005; Barnes et al. 1989). Por otra parte, al aumentar la frecuencia, i.e.,

$$1 + \left(\frac{\eta_0}{G_0}\right)\omega^2 \cong \left(\frac{\eta_0}{G_0}\right)\omega^2; \quad G''(\omega) = \frac{G_0}{\lambda_0\omega}; \quad G'(\omega) = G_0 \quad (2.29)$$

Por lo que se tendría el valor del módulo elástico G_0 en la zona donde es independiente de la frecuencia. A muy baja frecuencia G'' es mucho mayor que G' , por lo que predomina el comportamiento viscoso de un líquido. Al aumentar la frecuencia, las curvas de G' y G'' se cruzan y empieza a dominar el comportamiento elástico típico de un sólido. A bajas frecuencias hay una región viscosa o terminal en la que $G'' > G'$ y gobierna el flujo. Al aumentar la frecuencia hay una región de transición al flujo, en la que el punto de corte entre G' y G'' da una frecuencia definida por la inversa del tiempo de relajación en el modelo de

Maxwell, luego hay una muestra elastomérica en la que domina G' , la cual puede aumentar ligeramente y, tras una región de transición, en la que G'' vuelve a aumentar más rápidamente que G' hasta que a mayor frecuencia, vuelven a cruzarse ambas, momento a partir del cual se aprecia una región vítrea en la que vuelve a dominar el comportamiento viscoso (Bird et al. 1987, 2005; Barnes et al. 1989).

2.6.2.2 Flujo oscilatorio a bajas frecuencias: Modelo viscoelástico de Jeffrey

La componente rz del modelo Jeffreys está dado por la siguiente ecuación diferencial parcial (Bird et al. 1987, 2005):

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = \eta_0 \left(1 + \lambda_J \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma \quad (2.30)$$

aplicando el formalismo de Fourier en la se obtiene la siguiente expresión para la función viscosidad (Bird et al. 1987, 2005)

$$\eta(i\omega) = \frac{\sigma(i\omega)}{\gamma(i\omega)} = \frac{\eta_0 (1 + \lambda_J i\omega)}{1 + \lambda_0 i\omega} \quad (2.31)$$

multiplicando por el complejo conjugado del denominador de la Ec.(2.31), y separando las partes real e imaginaria respectivamente (Bird et al. 1987, 2005):

$$\eta(i\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \eta_0 \frac{1 + i\lambda_J \omega}{1 + i\lambda_0 \omega} \cdot \frac{1 - i\lambda_0 \omega}{1 - i\lambda_0 \omega} = G_0 \lambda_0 \left\{ \frac{1 + \lambda_J \lambda_0 \omega^2}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} - i \frac{(\lambda_0 - \lambda_J) \omega}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \right\} \quad (2.32)$$

igualando ambos miembros de la ecuación y recordando que los módulos y viscosidades complejas están dados por las siguientes expresiones: $G''(\omega) = \omega \eta'(\omega)$ y $G'(\omega) = \omega \eta''(\omega)$. Por último, igualando las ecuaciones obtenemos:

$$\eta'(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{1 + \lambda_0 \lambda_J}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega^2; \quad \eta''(\omega) = G_0 \lambda_0 \frac{\lambda_0 - \lambda_J}{1 + \lambda_0^2 \omega^2} \omega \quad (2.33)$$

$$G''(\omega) = \eta_0 \frac{(\lambda_0 - \lambda_J)}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \omega^2; \quad G'(\omega) = \omega \eta_0 \frac{\lambda_0^2 \omega^2}{1 + (\lambda_0 \omega)^2} \quad (2.34)$$

{G', G''} son los módulos de almacenamiento y pérdida del modelo de Jeffrey. Estas expresiones describen las propiedades viscoelásticas del material a través de la variación de la frecuencia (Bird et al. 1987, 2005).

2.7 Campo eléctrico

El campo eléctrico es un campo físico que es representado mediante un modelo que describe la interacción entre cuerpos y sistemas con propiedades de naturaleza eléctrica. Se describe como un campo vectorial en el cual una carga eléctrica puntual de valor q sufre los efectos de una fuerza eléctrica \mathbf{F} dada por la siguiente ecuación (Griffiths, 1999):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.35)$$

Los campos eléctricos pueden tener su origen tanto en cargas eléctricas como en campos magnéticos variables (Griffiths, 1999). Si se tiene una distribución de carga superficial o volumétrica, la Ec. (2.35) se sustituye por la siguiente expresión:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{X}; X = \{\sigma, \rho\} \quad (2.36)$$

la Ec. (2.36) representa el campo eléctrico en una distribución superficial σ y volumétrica de carga ρ (Griffiths, 1999).

2.8 Polarización eléctrica

En electromagnetismo clásico la polarización eléctrica, también llamada densidad de polarización, es un campo vectorial que expresa la densidad de los momentos eléctricos dipolares permanentes o inducidos en un material dieléctrico (Griffiths, 1999). El vector de polarización \mathbf{P} se define como el momento dipolar por unidad de volumen. La unidad de medida en el SI es el Cm^{-2} . La polarización eléctrica es uno de los tres campos eléctricos macroscópicos que describen el comportamiento de los materiales. Los otros dos son el campo eléctrico \mathbf{E} y el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} (Griffiths, 1999).

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (2.37)$$

en la Ec. (2.37) χ_e es la susceptibilidad eléctrica del medio y ϵ_0 es la permitividad en el vacío (Griffiths, 1999).

2.9 Fisiología del oído

La generación de sensaciones auditivas en el ser humano es un proceso extraordinariamente complejo, el cual se desarrolla en tres etapas básicas (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009):

- Captación y procesamiento mecánico de las ondas sonoras.
- Conversión de la señal acústica (mecánica) en impulsos nerviosos, y transmisión de dichos impulsos hasta los centros sensoriales del cerebro.
- Procesamiento neural de la información codificada en forma de impulsos nerviosos.

La captación, procesamiento y transducción de los estímulos sonoros se llevan a cabo en el oído propiamente dicho, mientras que la etapa de procesamiento neural, en la cual se producen las diversas sensaciones auditivas, se encuentra ubicada en el cerebro (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Así pues, se pueden distinguir dos regiones o partes del sistema auditivo: la región periférica, en la cual los estímulos sonoros conservan su carácter original de ondas mecánicas hasta el momento de su conversión en señales electroquímicas, y la región central, en la cual se transforman dichas señales en sensaciones (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009)

2.9.1 Región periférica del sistema auditivo

El oído o región periférica se divide usualmente en tres zonas, llamadas oído externo, oído medio y oído interno, de acuerdo a su ubicación en el cráneo, como puede verse en la Figura 7.

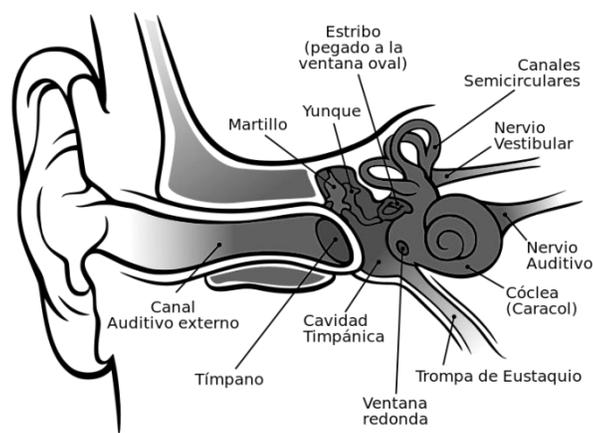


Figura 7. "Representación esquemática del oído externo, medio e interno"

Los estímulos sonoros se propagan a través de estas zonas, sufriendo diversas transformaciones hasta su conversión final en impulsos nerviosos. Tanto el procesamiento mecánico de las ondas sonoras como la conversión de éstas en señales electroquímicas son procesos no lineales, lo cual dificulta la caracterización y modelado de los fenómenos perceptuales (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

2.9.2 Oído externo

2.9.2.1 Anatomía y funcionamiento

El oído externo (Figura 7) está formado por el pabellón auricular u oreja, el cual dirige las ondas sonoras hacia el conducto auditivo externo a través del orificio auditivo. El otro extremo del conducto auditivo se encuentra cubierto por la membrana timpánica o tímpano, la cual constituye la entrada al oído medio. La función del oído externo es la de recolectar las ondas sonoras y encauzarlas hacia el oído medio. Asimismo, el conducto auditivo tiene dos propósitos adicionales: proteger las delicadas estructuras del oído medio contra daños y minimizar la distancia del oído interno al cerebro, reduciendo el tiempo de propagación de los impulsos nerviosos (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

2.9.3 Oído medio

2.9.3.1 Anatomía

El oído medio (Figura 8) está constituido por una cavidad llena de aire, dentro de la cual se encuentran tres huesecillos, denominados martillo, yunque y estribo, unidos entre sí en forma articulada (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Uno de los extremos del martillo se encuentra adherido al tímpano, mientras que la base del estribo está unida mediante un anillo flexible a las paredes de la ventana oval, orificio que constituye la vía de entrada del sonido al oído interno (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Finalmente, la cavidad del oído medio se comunica con el exterior del cuerpo a través de la trompa de Eustaquio, la cual es un conducto que llega hasta las vías respiratorias y que permite igualar la presión del aire a ambos lados del (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

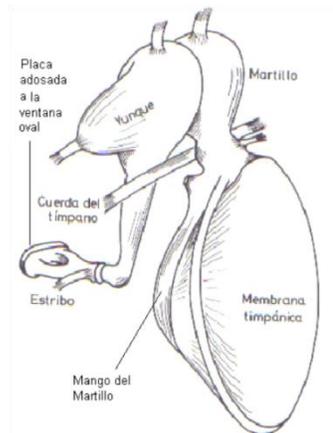


Figura 8. “Representación esquemática del oído medio”

2.9.3.2 Propagación del sonido

Los sonidos, formados por oscilaciones de las moléculas del aire, son conducidos a través del conducto auditivo hasta el tímpano (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Los cambios de presión en la pared externa de la membrana timpánica, asociados a la señal sonora, hacen que dicha membrana vibre siguiendo las oscilaciones de dicha señal. Las vibraciones del tímpano se transmiten a lo largo de la cadena de huesecillos, la cual opera como un sistema de palancas, de forma tal que la base del estribo vibra en la ventana oval (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Este huesecillo se encuentra en contacto con uno de los fluidos contenidos en el oído interno; por lo tanto, el tímpano y la cadena de huesecillos actúan como un mecanismo para transformar las vibraciones del aire en vibraciones del fluido.

2.9.4 Oído interno

El oído interno representa el final de la cadena de procesamiento mecánico del sonido, y en él se llevan a cabo tres funciones primordiales: filtraje de la señal sonora, transducción y generación probabilística de impulsos nerviosos (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

2.9.4.1 Anatomía

En el oído interno se encuentra la cóclea o caracol, la cual es un conducto rígido en forma de espiral (ver la Figura 9) de unos 35 mm de longitud, lleno con dos fluidos de distinta composición (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa

1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

El interior del conducto está dividido en sentido longitudinal por la membrana basilar y la membrana de Reissner, las cuales forman tres compartimientos o escalas (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). La escala vestibular y la escala timpánica contienen un mismo fluido (perilinfa), puesto que se interconectan por una pequeña abertura situada en el vértice del caracol, llamada helicotrema (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Por el contrario, la escala media se encuentra aislada de las otras dos escalas, y contiene un líquido de distinta composición a la perilinfa (endolinfa).

La base del estribo, a través de la ventana oval, está en contacto con el fluido de la escala vestibular, mientras que la escala timpánica desemboca en la cavidad del oído medio a través de otra abertura (ventana redonda) sellada por una membrana flexible (membrana timpánica secundaria). Sobre la membrana basilar y en el interior de la escala media se encuentra el órgano de Corti, el cual se extiende desde el vértice hasta la base de la cóclea y contiene las células ciliares que actúan como transductores de señales sonoras a impulsos nerviosos (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Sobre las células ciliares se ubica la membrana tectorial, dentro de la cual se alojan las prolongaciones o cilios de las células ciliares externas. Dependiendo de su ubicación en el órgano de Corti, se pueden distinguir dos tipos de células ciliares: internas y externas. **Existen alrededor de 3500 células ciliares internas y unas 20000 células externas** (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

Ambos tipos de células presentan conexiones o sinapsis con las fibras nerviosas aferentes (que transportan impulsos hacia el cerebro) y eferentes (que transportan impulsos provenientes del cerebro), las cuales conforman el nervio auditivo. Sin embargo, la distribución de las fibras es muy desigual: más del 90% de las fibras aferentes inervan a las células ciliares internas, mientras que la mayoría de las 500 fibras eferentes inervan a las células ciliares externas (Brownell 1985; Raphael et al. 2000; Hawkins & Lovett 2004; Spector et al. 2006; Rabbits et al. 2009).

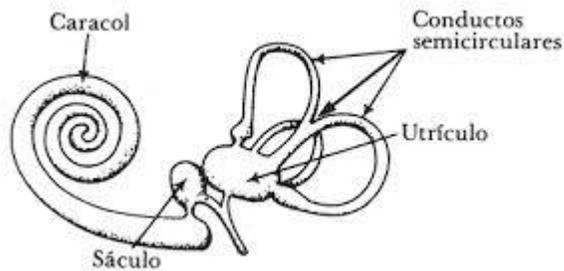


Figura 9. "Representación esquemática del oído interno"

2.9.5 Células ciliadas externas

2.9.5.1 Que son las células ciliadas externas

Las células ciliadas externas o CCE, están colocadas en tres hileras en el lado externo del túnel de Corti. Son células sensoriales con características realmente únicas. Están preparadas para realizar la transducción mecano-eléctrica, como las CCI, pero no transmiten ninguna característica del estímulo sonoro al cerebro (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009). Al contrario, un mecanismo activo de transducción inversa (electro-mecánico) le permite reenviar la energía para aumentar la sensibilidad y la selectividad frecuencia (Brownell 1985; Raphael et al. 2000; Hawkins & Lovett 2004; Spector et al. 2006; Rabbits et al. 2009) y debido a que la cóclea humana tiene entre 10.000 y 12.000 de la CCE es de vital importancia en el funcionamiento del sistema auditivo ya que son consideradas como los motores biológicos del oído (Thornton & Abbas 1980; Ehrenstein & Iwasa 1996; Oghalai et. al 2000; Brownell et al. 2001; Messini et. al 2002; Sachs et.al 2009).

2.9.5.2 Funcionamiento de las células ciliadas externas

El funcionamiento de las células ciliadas externas es muy complejo ya que estas poseen una capacidad única de contracción-expansión la cual es la base de la transducción electro-mecánica (electromotilidad) descubierta por Brownell en el año 1985, la cual se activa de la siguiente manera (Brownell et al. 2001):

a) El estímulo eléctrico viaja a través de la escala vestibular en forma de vibraciones mecánicas, excitando la membrana basilar, esta última vibra a una frecuencia de resonancia la cual se acopla con la frecuencia de las vibraciones mecánicas produciendo el efecto de resonancia.

b) La membrana basilar oscila hacia arriba y abajo permitiendo que estas vibraciones muevan las células ciliadas externas, dándole cierto grado de inclinación a los estereocilios que se encuentran en su polo apical, dando lugar a la transducción mecano-eléctrica.

c) El efecto mecano-eléctrico abre los canales que permiten el paso de fluido rico en iones potasio (endolinfa), este fluido a su vez modifica el potencial eléctrico de la célula ciliada, lo cual resulta en una contracción de la membrana plasmática.

d) Finalmente, al regresar a su potencial de equilibrio la célula expande su membrana plasmática, estos cambios de curvatura inducen un flujo volumétrico debido a una potencia de energía liberada, la cual es una medida indirecta de la transducción electro-mecánica (Brownell 1985; Raphael et al. 2000; Hawkins & Lovett 2004; Spector et al. 2006; Rabbits et al. 2009).

CAPÍTULO 3

MODELO

3.1 Modelo electroreológico viscoelástico

Básicamente el sistema físico es el mismo que el propuesto por Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012 y Herrera-Valencia & Rey 2014).

Para estudiar el comportamiento de las células ciliadas externas afectadas por un campo externo, propusieron el siguiente esquema físico. Con el fin de modelar la dinámica de estos sistemas biológicos, se utiliza un capilar de longitud $z = 2L$, y radio $r = a$ (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

La parte superior del capilar $[L, 2L]$ está llena con una fase líquida viscoelástica de constantes materiales $\{\eta_t, \lambda_t\}$, de la misma manera la parte inferior del capilar $[0, L]$ está llena con otra fase líquida viscoelástica con constantes materiales $\{\eta_b, \lambda_b\}$ y las densidades de las fases líquidas son: $\{\rho_t, \rho_b\}$ respectivamente (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

Nótese Los subíndices (t, b) están referidos a la parte superior (top) e inferior (bottom) respectivamente. En medio del capilar, i.e., ($z = L$), se adhiere una membrana flexo-eléctrica circular, es decir una membrana que por efecto de un campo eléctrico se deforma en forma de domo esférico y oscila en torno a una posición de equilibrio (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014).

Las siguientes suposiciones físicas son necesarias para el modelado de este problema:

- a) Los efectos inerciales son despreciables, i.e. el sistema opera bajo número de Reynolds pequeños ($Re \rightarrow 0$).
- b) Los efectos gravitacionales son despreciables en comparación con el gradiente de presión inducido por el movimiento de la membrana debido al campo eléctrico.
- c) La presión en la parte superior e inferior es la misma, i.e. $P(z = 2L) = P_0$ & $P(z = 0) = P_0$.
- d) El flujo y la reología del sistema pueden ser descritos mediante el moldeo viscoelástico de Maxwell, i.e. las deformaciones en el fluido son bajas (viscoelasticidad lineal).
- e) Simetría cilíndrica, i.e. no existe dependencia de ningún atributo o variable dinámica con el ángulo.

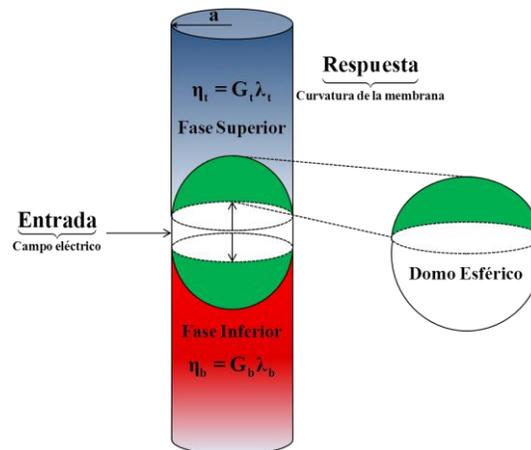


Figura 10. “Esquema ilustrativo de la geometría y la membrana flexoeléctrica”

En la Figura 10 se ilustra el capilar de radio $r = a$ y longitud $z = 2L$ con la membrana flexo-eléctrica inmersa. El campo eléctrico E distorsiona la membrana y la evolución de la membrana con el tiempo, induce un flujo volumétrico debido a las dos fases viscosas con viscosidades $\{\eta_t, \eta_b\}$ y densidades $\{\rho_t, \rho_b\}$. Suponemos que el campo eléctrico aplicado deforma la membrana en forma de domo esférico de altura h y radio $r = R$, como se muestra en la Fig.12 y crea una oscilación entre las fases viscoelásticas (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

- La rapidez de evolución de la curvatura de la membrana induce un flujo volumétrico.
- El flujo volumétrico es generado por una diferencia de presiones en la parte superior e inferior.

3.2 Ecuaciones básicas

La dinámica lineal de la membrana es descrita mediante un balance de fuerzas entre las eléctricas, la diferencia de presiones en la membrana y la fuerza restauradora asociada con la elasticidad de la membrana flexo-eléctrica. La ecuación fundamental puede ser descrita de la siguiente manera (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$(C_r \mathfrak{S})E(t) = \Delta p(z=L, t) + \left[2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S} \right] H(t) = \Delta p(z=L, t) + 4MLH(t) \quad (3.1)$$

La Ec. (3.1) es un balance de fuerzas entre la fuerza eléctrica, las fuerzas del bulto debido a la disipación y la fuerza elástica del sistema basada en la recuperación de la membrana, el factor geométrico indica el área deformada debido al campo eléctrico $\mathbf{E}(t)$ aplicado en la dirección axial de la geometría

(Figura 10). Nótese que en la Ec. (3.1) se redefinió la Ec. (3.1) la elasticidad de la membrana como:

$$M = \frac{1}{4L} \left(2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S} \right) \quad (3.2)$$

la fuerza eléctrica oscilante $\mathbf{F}_E(t)$

$$\mathbf{F}_E(t) = (c_f \mathfrak{S}) \mathbf{E}(t) = c_f \left(8/a^2 \right) \mathbf{E}(t) \quad (3.3)$$

es directamente proporcional al campo eléctrico aplicado y un coeficiente c_f el cual, está asociado con las propiedades eléctricas del sistema (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). Para que la Ec. (3.1) pueda ser utilizada para relacionar la deformación de la membrana con el campo eléctrico aplicado, es necesario conocer la diferencia de presiones entre la membrana, i.e., $\Delta p(z = L, t)$, para esto se aplica un balance de presiones entre la parte superior e inferior del capilar y la membrana (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014). A partir de la ecuación de momento (Segunda ley de Newton aplicada a un medio continuo), se tiene la siguiente expresión matemática para la presión en la parte superior del sistema (membrana-capilar superior):

$$p_t = p_0 + \left[\rho_t \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \frac{G_t \lambda_t}{\left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right)} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] (2L - z) \quad (3.4)$$

de la misma manera, para la inferior y la membrana se tiene:

$$p_b = p_0 - \left[\rho_b \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r \frac{G_b \lambda_b}{\left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right)} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] z \quad (3.5)$$

el cambio de presión evaluado en $z = L$, i.e. $\Delta p(z = L, t)$, está dado por la siguiente expresión

$$\Delta p(t) = \left[\left(\frac{G_t \lambda_t}{\left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right)} + \frac{G_b \lambda_b}{\left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right)} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - (\rho_t + \rho_b) \frac{\partial v_z}{\partial t} \right] L \quad (3.6)$$

sustituyendo la Ec. (3.6) en el balance de fuerzas (Ec. (3.1)) se tiene lo siguiente

$$\left[\left(\frac{G_t \lambda_t}{\left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right)} + \frac{G_b \lambda_b}{\left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right)} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - (\rho_t + \rho_b) \frac{\partial v_z}{\partial t} \right] = \quad (3.7)$$

$$(C_f \mathfrak{S}) E(t) - [2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}] H(t)$$

La Ec. (3.7) es una ecuación diferencial parcial que describe los cambios temporales y espaciales de la velocidad en función del campo eléctrico aplicado y la curvatura promedio de la membrana a través de las propiedades flexo-eléctricas y elásticas de la membrana (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). La rapidez con que evoluciona la membrana es proporcional a la evolución temporal de la curvatura promedio por lo que se tiene la siguiente relación:

$$\dot{V}(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_z r dr d\theta = -\frac{1}{2} \pi a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (3.8)$$

Una vez que la Ec. (3.7) se resuelve suponiendo que los efectos inerciales son despreciables y sustituyendo el resultado en la Ec. (3.8) se tiene la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para la curvatura promedio (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera-Valencia & Rey 2014):

$$\left(b_2 \frac{d^2}{dt^2} + b_1 \frac{d}{dt} + b_0 \right) H(t) = \left(a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \right) E(t)$$

$$b_2 = G_t \lambda_t \lambda_b + G_b \lambda_b \lambda_t + \lambda_t \lambda_b \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L}$$

$$b_1 = G_t \lambda_t + G_b \lambda_b + (\lambda_t + \lambda_b) \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L} \quad (3.9)$$

$$b_0 = \frac{2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}}{4L}$$

$$a_2 = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} \lambda_t \lambda_b, \quad a_1 = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L} (\lambda_t + \lambda_b), \quad a_0 = \frac{C_f \mathfrak{S}}{4L}$$

La Ec. (3.9) describe los cambios temporales de la curvatura promedio de la membrana en función del campo eléctrico aplicado. Los coeficientes b_i , $i = \{0, 1, 2\}$ y a_i , $i = \{0, 1, 2\}$ son los coeficientes asociados a los mecanismos inerciales, disipativos y de almacenamiento relacionados con la evolución temporal de la

curvatura promedio en la membrana (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

El modelo diferencial contiene una segunda y primera derivadas temporales las cuales están asociadas a la inercia y a los procesos disipativos en el sistema respectivamente. Nótese, que la ecuación diferencial es simétrica en el orden de la derivada para la curvatura y el campo eléctrico respectivamente. En la siguiente sección, se presenta el modelo (Ec. (3.9)) y se propone un conjunto de variables adimensionales con el fin de obtener una ecuación diferencial adimensional y los correspondientes grupos adimensionales, los cuales nos dan una panorámica general de los mecanismos gobernantes en el sistema (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.3 Consideraciones energéticas

Para deducir el modelo electroreológico adimensional se propondrán variables para poder escalar el sistema, primeramente se encuentran la relación energética que da lugar a las definiciones de los puntos clave en la descripción de este sistema como modelo para las células ciliadas externas.

3.3.1 Balance de Energía

Partiendo de la ecuación de forma de la membrana (Ec. (3.1)), se puede obtener el balance energético, multiplicando por el flujo volumétrico, por lo que se tiene la siguiente expresión (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\dot{V}(t)(C_r \mathfrak{I})E(t) = \dot{V}(t)\Delta p(z=L,t) + 4\dot{V}(t)MLH(t) \quad (3.10)$$

si se divide la Ec. (3.10) por $4ML$, la siguiente expresión es obtenida:

$$\frac{\dot{V}(t)(C_r \mathfrak{I})}{4L} \frac{1}{M} E(t) = \frac{1}{4ML} \dot{V}(t)\Delta p(t) + 4\dot{V}(t)H(t) \quad (3.11)$$

La Ec. (3.11) es punto de partida en los cálculos relacionados con: (i) la potencia disipada debido por la membrana debido al contacto por las fases viscoelásticas, (ii) La membrana elástica, (iii) la potencia del fluido, las cuales son definidas a continuación (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.3.1.1 Potencia disipada

La potencia disipada es la energía utilizada debido a la oscilación de la membrana flexo-eléctrica en las dos fases viscoelásticas y se define como el producto de la fuerza eléctrica por unidad de área, multiplicada por el flujo volumétrico, i.e.

$$P(\omega) = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{(C_f \mathfrak{S}) \dot{V}(t) E(t)}{4ML} dt = \frac{C_f \mathfrak{S} / 4L}{M} \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{T=2\pi/\omega} \dot{V}(t) E(t) dt \quad (3.12)$$

la Ec. (3.12) muestra como la potencia disipada por el contacto de la membrana flexoeléctrica depende de los mecanismos elásticos y flexo eléctricos de la membrana (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.3.1.2 Energía elástica de la membrana

La energía elástica de la membrana está asociada con la energía de recuperación debido a las deformaciones que sufre por efecto de la fuerza motriz, asociada con el campo eléctrico de bajas frecuencias. Matemáticamente, se calcula como el producto de la fuerza elástica y el flujo volumétrico, i.e.,

$$E_m(\omega) = \langle E_m(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{V}(t) H(t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{T=2\pi/\omega} \dot{V}(t) H(t) dt \quad (3.13)$$

3.3.1.3 Potencia del fluido

La potencia disipada por el fluido debido a las fuerzas viscosas, se puede calcular como el producto del flujo volumétrico y la diferencia de presión debido al flujo de Poiseuille inducido por la membrana flexo-eléctrica:

$$P_{\text{fluido}}(\omega) = \langle P_{\text{fluido}}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{V}(t) \Delta p(z=L, t) dt = \frac{1}{2\pi/\omega} \int_0^{T=2\pi/\omega} \dot{V}(t) \Delta p(z=L, t) dt \quad (3.14)$$

3.3.1.4 Factor de selectividad Q

El factor de selectividad Q es un cociente entre los mecanismos disipativos y los elásticos asociados con la recuperación de la membrana, el cual se define matemáticamente de la siguiente manera:

$$Q(\omega) = \frac{Em(\omega)}{P(\omega)} = \frac{\int_0^{T=2\pi/\omega} \dot{V}(t)H(t)dt}{(C_f \mathfrak{S} / 4L) \frac{1}{M} \int_0^{T=2\pi/\omega} \dot{V}(t)E(t)dt} \quad (3.15)$$

El factor de selectividad $Q(\omega)$ es punto de partida en la descripción bilógica de nuestro modelo matemático inspirado en las células ciliadas externas del oído interno, debido a que nos da un criterio para discernir bajo qué criterios, los mecanismos disipativos dominan sobre los elásticos.

3.4 Modelo electroreológico viscoelástico adimensional

Para deducir el modelo electroreológico adimensional se propondrán variables para poder escalar el sistema, primeramente se encuentran la relación energética que da lugar a las definiciones de los puntos clave en la descripción de este sistema como modelo para las células ciliadas externas.

3.4.1 Variables adimensionales

Para la resolución de la Ec. (3.9) se proponen el siguiente conjunto de variables adimensionales, para el campo eléctrico, curvatura, tiempo, frecuencia, módulos elásticos, tiempos de relajación y elasticidad de la membrana (Rey 2008; Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{E}{E_0}; \bar{H} = aH; \bar{t} = \frac{t}{\Sigma_\lambda}; \bar{\omega} = \Sigma_\lambda \omega; \bar{G}_t = \frac{G_t}{\Sigma_G}; \\ \bar{G}_b &= \frac{G_b}{\Sigma_G}; \bar{\lambda}_t = \frac{\lambda_t}{\Sigma_\lambda}; \bar{\lambda}_b = \frac{\lambda_b}{\Sigma_\lambda}; \bar{M} = \frac{M}{\Sigma_G} \end{aligned} \quad (3.16)$$

las variables características empleadas en Ec. (3.16) son definidas a continuación en la Tabla 2.

Variable	Símbolo	Variable característica	Descripción
Campo eléctrico	E	E_0	Amplitud campo eléctrico
Curvatura	H	a	Radio del capilar
Tiempo	t	Σ_λ	Viscoelásticidad total
Frecuencia	ω	Σ_λ	Viscoelásticidad total
Módulo elástico	G_t	Σ_G	Elasticidad de bulto total
Modulo elástico	G_b	Σ_G	Elasticidad de bulto total
Tiempo de Maxwell	λ_t	Σ_λ	Viscoelásticidad total
Tiempo de Maxwell	λ_b	Σ_λ	Viscoelásticidad total
Membrana elástica	M	Σ_G	Elasticidad de bulto total

Tabla 2. “Variables características para la Adimensionalización”

Las variables adimensionales para la elasticidad total de bulto de los fluidos y la suma de los tiempos de relajación de Maxwell, satisfacen las siguientes restricciones (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$X_t + X_b = 1; X = \{G, \lambda\}$$

Al sustituir las variables adimensionales en la ecuación de energía se obtiene las variables escaladas para el caso de la potencia disipada y la energía mecánica elástica (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\bar{P} = \frac{P}{P_c} = \frac{P}{4\Sigma_G (L/a)Q_0} \cdot \frac{1}{M}; \bar{E}_m = \frac{E_m}{E_{m_c}} = \frac{E_m}{4\Sigma_G (L/a)Q_0} \cdot \frac{1}{M}$$

En donde $Q_0 = \pi a^3 / \Sigma_\lambda$ es el flujo volumétrico característico en el sistema (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.4.2 Modelo electroreológico adimensional

Al sustituir las variables adimensionales obtenemos el modelo membrano-dinámico el cual, es punto de partida, en la presente tesis de licenciatura. Este modelo corrige el modelo deducido por Abou-Dakka et al. 2012, por lo que se describe a continuación:

$$\begin{aligned} & \left(b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{d\bar{t}^2} + b_1^* (\Sigma_{\bar{\eta}}, k) \frac{d}{d\bar{t}} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) \\ & = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left(k b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{d\bar{t}^2} + \frac{d}{d\bar{t}} + 1 \right) \bar{E}(\bar{t}) \\ & b_2^* (\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, k) = \frac{\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b}{k} \\ & b_1^* (\Sigma_{\bar{\eta}}, k) = 1 + \left(\frac{1-k}{k} \right) \Sigma_{\bar{\eta}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

la Ec. (3.17) satisface las siguientes condiciones iniciales:

$$\bar{H}(\bar{t} = 0) = \bar{H}_0; \left. \frac{d\bar{H}}{d\bar{t}} \right|_{\bar{t}=0} = \bar{H}_1 \quad (3.18)$$

La Ec.(3.17) es una ecuación diferencial de segundo orden en la derivada temporal para la curvatura promedio y el campo eléctrico aplicado. El miembro izquierdo, describe la evolución de la curvatura promedio de la membrana a través de la inercia, disipación y los procesos de recuperación o elásticos de la membrana (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). El miembro derecho de esta expresión, describe la evolución del campo eléctrico en función de la inercia, la disipación y los procesos flexo-eléctricos en el sistema (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). La ecuación diferencial Ec. (3.17) contiene tres números adimensionales los cuales, están asociados con los diferentes mecanismos involucrados en el sistema $\{\bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}}, k\}$, que junto con las condiciones dadas por las Ec. (3.18), corresponden a un problema de valor inicial (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.4.3 Números adimensionales

La ecuación diferencial con las condiciones iniciales definidas en las Ecs. (3.17) y (3.18) contienen tres grupos adimensionales los asociados con los diferentes mecanismos en el sistema (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.4.3.1 Memoria

El primero de estos grupos está relacionado con la memoria $(\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b)$ del material, y es el producto de los tiempos viscoelásticos adimensionales, $\bar{\lambda}_t$ y $\bar{\lambda}_b$ que obedecen la restricción: $\bar{\lambda}_t + \bar{\lambda}_b = 1$. Este número está asociado con la asimetría elástica de los fluidos y contiene dos límites relacionados con la asimetría de los fluidos (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). Este número adimensional, contiene dos límites asintóticos relacionados con el contraste de las fases viscoelásticas:

- (i) Cuando $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 1/4$ (simétrico), el valor numérico de los tiempos de Maxwell es el mismo en las dos fases viscoelásticas, i.e. $\bar{\lambda}_t = \bar{\lambda}_b = 1/2$.
- (ii) Por otra parte, cuando el producto de los tiempos de Maxwell es pequeño, i.e. $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 10^{-4}$ (anti-simétrico), uno de los tiempos de relajación es muy pequeño del orden de $\bar{\lambda}_t = 10^{-4}$, mientras que el otro es del orden de $\bar{\lambda}_b \cong 0.9999$.

3.4.3.2 Viscosidad de bulto

El segundo grupo adimensional, relaciona la viscosidad total del bulto, es decir es la suma de la viscosidad en la parte inferior y superior del capilar respectivamente.

$$\Sigma_{\bar{\eta}} = \bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b = \bar{G}_t \bar{\lambda}_t + \bar{G}_b \bar{\lambda}_b \quad (3.19)$$

Nótese que la suma de los módulos elásticos adimensionales satisface la siguiente restricción en el sistema: $\bar{G}_t + \bar{G}_b = 1$, es decir tanto los tiempos viscoelásticos de Maxwell como los módulos elásticos están normalizados a la unidad (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

El valor numérico de este número está controlado por el producto de los tiempos viscoelásticos adimensionales. Los valores máximo y mínimo que toma la viscosidad de bulto $\{\Sigma_{\bar{\eta} \min}, \Sigma_{\bar{\eta} \max}\}$ son determinados por los valores de los tiempos de relajación de Maxwell. Bajo simetría perfecta $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 1/4$, la viscosidad total es igual a 0.5, i.e. $\Sigma_{\bar{\eta}}(\bar{\lambda}_t = \bar{\lambda}_b = \bar{\lambda}) = \bar{\eta}_t + \bar{\eta}_b = \bar{G}_t \bar{\lambda}_t + \bar{G}_b \bar{\lambda}_b = (\bar{G}_t + \bar{G}_b) \bar{\lambda} = 1 \cdot \bar{\lambda} = 0.5$, por lo que en el caso de simetría el valor de la viscosidad queda completamente determinada. De la misma manera, en el caso asimétrico, cuando el producto de

los tiempos de relajación es pequeño del orden de épsilon, i.e. $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon \ll 1$, los valores de los tiempos de relajación están determinados por: $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \{\varepsilon, 1-\varepsilon\}$, por lo que la viscosidad total toma la forma: $\Sigma_{\eta}(\bar{\lambda}_t = \varepsilon, \bar{\lambda}_b = 1-\varepsilon) = \bar{G}_t(\varepsilon) + (1-\bar{G}_t)(1-\varepsilon)$, por lo tanto la viscosidad de bulto, satisface la siguiente desigualdad para sus valores máximo y mínimo respectivamente: $\varepsilon = \Sigma_{\eta_{\min}} < \Sigma_{\eta}(\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \varepsilon) < \Sigma_{\eta_{\max}} = 1-\varepsilon$ (Abou-Dakka et al. (2012); Herrera- Valencia & Rey (2014)).

3.4.3.3 Radio elástico

El tercer grupo adimensional es conocido como radio elástico (k): es la relación adimensional entre la elasticidad total en las dos fases viscoelásticas y la de la membrana:

$$0 < k = \frac{1}{1+1/M} < 1 \quad (3.20)$$

La Ec. (3.20) tiene dos límites asintóticos, respectivamente. (i) El primero de ellos es cuando el valor de $k \ll 1$. Esto significa, que es una membrana suave y que puede ser deformada debido a la fuerza externa (Campo eléctrico). (ii) Por otra parte, cuando el valor de k es uno, i.e. $k = 1$, se tiene una membrana completamente rígida (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.4.4 Coeficientes adimensionales

Los coeficientes en la Ec. (3.17) están relacionados con los mecanismos inerciales y viscosos de la siguiente manera (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

3.4.4.1 Inercia

El coeficiente asociado a la contribución inercial tiene la forma (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014):

$$b_2^*(\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, k) = \frac{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}{k} \quad (3.21)$$

Es claro que la contribución inercial, está completamente determinada por la memoria de las fases viscoelásticas y el radio elástico.

3.4.4.2 Viscosidad

El coeficiente asociado a los mecanismos disipativos tiene la forma (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$b_1^*(\Sigma_{\bar{\eta}}, k) = 1 + \left(\frac{1-k}{k}\right) \Sigma_{\bar{\eta}} \quad (3.22)$$

La Ec. (3.22) depende de la viscosidad total (bulto) y del radio elástico. Los coeficientes $\{b_1^*, b_2^*\}$ asociados a los mecanismos inerciales y viscosos satisfacen la siguiente desigualdad (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$kb_2^* = \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b < b_2^*(k, \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b) < b_1^*(k, \Sigma_{\bar{\eta}}) \quad (3.23)$$

Memoria Inercia Viscosidad

La Ec. (3.23) indica que para cualquier valor de la memoria y de la membrana elástica, el coeficiente asociado con la viscosidad es mayor que el de la inercia. Nótese, que los valores límite de los números adimensionales $\{\Sigma_{\bar{\eta}}, \bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b, k\}$ despliega seis posibles modos distintos resumidos en la Tabla 3 (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). La notación en la Tabla 3, se describe a continuación: (LS, HS) se relaciona con la baja y alta simetría de las fases viscoelásticas, (LV, HV) tiene que ver con la mínima y máxima viscosidad en el sistema. Por último, (FM, SM) describe los dos límites posibles de nuestra membrana. El primero de ellos, se basa en una membrana suave fácilmente deformable por el campo eléctrico, y el otro límite relaciona una membrana rígida. Los valores numéricos característicos mostrados en la Tabla 3 son seleccionados para cada modo (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

Distintos modos del sistema	$\bar{\lambda}_i \bar{\lambda}_b$	$\Sigma_{\bar{\eta}}$	k
I Baja simetría, Baja viscosidad, Membrana suave	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
II Baja simetría, Baja viscosidad, Membrana rígida	10^{-4}	10^{-4}	0.9999
III Baja simetría, Alta viscosidad, Membrana suave	10^{-4}	0.9999	10^{-4}
IV Baja simetría, Alta viscosidad, Membrana rígida	10^{-4}	0.9999	0.9999
V Alta simetría, Viscosidad media, Membrana suave	0.25	0.5	10^{-4}
VI Alta simetría, Viscosidad media, Membrana rígida	0.25	0.5	0.9999

Tabla 3. "Modos que despliega el sistema"

3.5 Espacio prismático 3D

Los seis modos en la Tabla 3, pueden ser descritos en un espacio prismático tridimensional, que describe el estado material en el sistema. Los primeros cuatro modos {I-IV} están asociados con la asimetría, y los modos {V, VI}, están asociados con la simetría en el espacio físico (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

a) Modo asimétrico

Por ejemplo, la manera de interpretar cada punto en el espacio material prismático se ejemplifica con el modo I. EL modo I (LS, LV, FM) describe una baja simetría, es decir, una de las fases viscoelásticas es muy poco viscoelástica y la otra completamente viscoelástica, la viscosidad de bulto es la mínima del sistema y se tiene una membrana muy deformable (Membrana suave).

b) Modo simétrico

El segundo ejemplo es el modo VI. Este modo está relacionado con una alta simetría en las fases viscoelásticas (la viscoelásticidad en las fases es la misma), se tiene una viscosidad Intermedia y la Membrana es rígida (en este caso, la membrana actúa como un sólido).

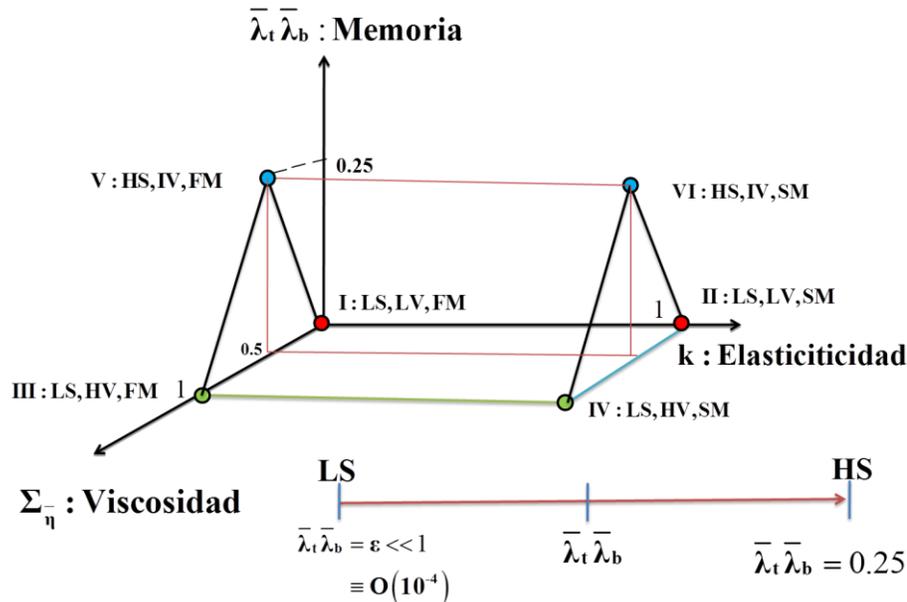


Figura 11. "Espacio material prismático para los seis posibles modos"

3.6 Restricciones del modelo electroreológico

El modelo electroreológico que se dedujo en la Ec. (3.17), es válido tomando en cuenta las siguientes restricciones físicas:

- Es válido solamente para campos eléctricos de baja amplitud, debido a que para grandes amplitudes los efectos de compresibilidad juegan un papel importante en el sistema.
- Los mecanismo de transferencia de calor se desprecian por lo que suponemos que el proceso es isotérmico, es decir que ninguna propiedad física o físico-química del sistema es función de la temperatura.
- Es válido para deformaciones bajas, es decir en el régimen de viscoelasticidad lineal
- Los efectos gravitacionales no se consideran en el balance de momento
- Los mecanismos inerciales son despreciables (Numero de Reynolds bajos)
- El espesor de la membrana es despreciable.

En la siguiente sección, probaremos las bondades de nuestro modelo cuando el campo eléctrico toma la forma más simple que es la de una función sinusoidal (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

CAPÍTULO 4

EVOLUCIÓN TEMPORAL Y OSCILATORIA

4.1 Respuesta mecánica

En esta sección se presenta la función respuesta del sistema a la aplicación de un campo eléctrico an-armónico (cosenoidal), para analizar el comportamiento de la curvatura promedio.

4.1.1 Estado no estacionario

En esta prueba se estudia la evolución de la curvatura promedio en función de las propiedades materiales del medio. Matemáticamente se considera como un problema de valor inicial. En esta sección se resuelve la Ec. (3.17) con las condiciones iniciales dadas por la Ec. (3.18) mediante la técnica de coeficientes indeterminados (Ver apéndice A para la deducción completa) para un campo de eléctrico de la forma (Rey 2008, Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\bar{E}(\bar{\omega t}) = \cos(\bar{\omega t}) \quad (4.1)$$

sustituyendo la Ec. (4.1) en la Ec. (3.17) se obtiene:

$$\left(b_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* (\Sigma_{\bar{\eta}}, k) \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left((1-\bar{\omega} k b_2^*) \cos(\bar{\omega t}) - \bar{\omega} \sin(\bar{\omega t}) \right) \quad (4.2)$$

la ecuación diferencial anterior (Ec. (4.2)), puede ser descrita, en una forma más simple:

$$\begin{aligned} \left(b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) &= \left(a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) (1-\bar{\omega} k b_2^*) \right) \cos(\bar{\omega t}) \\ &+ \left(- a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \bar{\omega} \right) \sin(\bar{\omega t}) \\ &= A \cos(\bar{\omega t}) + B \bar{\omega} \sin(\bar{\omega t}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

La ecuación diferencial (Ec. (4.3)), se resuelve con los métodos clásicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución puede ser separada en dos contribuciones, la primera de ellas la solución homogénea, y las soluciones particulares correspondientes (apéndice A), finalmente obteniéndose:

$$\bar{H}(\bar{t}) = C_1 \text{Exp}(r_1 \bar{t}) + C_2 \text{Exp}(r_2 \bar{t}) + (A_{11} + B_{11}) \cos(\bar{\omega t}) + (A_{12} + B_{12}) \sin(\bar{\omega t}) \quad (4.4)$$

donde los coeficientes están dados por las siguientes expresiones

$$r_1 = \frac{-b_1^* + \sqrt{b_1^{*2} - 4b_2^*}}{2b_2^*} < 0; \quad r_2 = \frac{-b_1^* - \sqrt{b_1^{*2} - 4b_2^*}}{2b_2^*} < 0 \quad (4.5)$$

$$C_1 = \frac{r_2 (\bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11})) - (\bar{H}_1 - \bar{\omega} (A_{12} + B_{12}))}{r_2 - r_1} \quad (4.6)$$

$$C_2 = \frac{(\bar{H}_1 - \bar{\omega} (A_{12} + B_{12})) - r_1 (\bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11}))}{r_2 - r_1}$$

$$A_{11} + B_{11} = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left(\frac{(1-kb_2^* \bar{\omega}) (1-b_2^{* \bar{\omega}^{-2}}) + b_1^{* \bar{\omega}^{-2}}}{(1-b_2^{* \bar{\omega}^{-2}})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \right) \quad (4.7)$$

$$A_{12} + B_{12} = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left(\frac{-b_1^* (1-kb_2^* \bar{\omega}) - (1-b_2^{* \bar{\omega}^{-2}})}{(1-b_2^{* \bar{\omega}^{-2}})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \right) \quad (4.8)$$

Las Ecs. (4.4)-(4.8) representan la solución al problema de valor inicial. La solución se puede separar en dos contribuciones: (i) Una parte que se desvanece en forma exponencial, (ii) la otra contribución oscilatoria.

4.1.1.1 Casos particulares

La solución general (Ec. (4.4)) contiene varios casos particulares, los cuales son mencionados a continuación:

- a) Membrana rígida (Modos pares 2,4,6) la solución oscilatoria desaparece y solo queda la contribución de las exponenciales decrecientes:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{t}) &= C_1 \text{Exp}(r_1 \bar{t}) + C_2 \text{Exp}(r_2 \bar{t}) \\ r_1 &= \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}}{2\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b} \\ r_2 &= \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}}{2\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b} \end{aligned} \quad (4.9)$$

- b) Membrana rígida y alta simetría (fases viscoelásticas iguales), $k = 1$,
 $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = 1/4$

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{t}) &= C_1 \text{Exp}(r\bar{t}) + C_2 \bar{t} \text{Exp}(r\bar{t}) \\ r_1 = r_2 = r &= -2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

las raíces de la Ec. (4.5) para el caso de una membrana rígida y fases viscoelásticas iguales (Modo VI) presenta el caso de raíces repetidas y una solución se desvanece con el tiempo mucho más rápido que la otra.

4.1.2 Flujo oscilatorio

Esta prueba, consiste en descomponer la curvatura promedio en dos contribuciones, una en fase con el campo eléctrico y la otra desfasada del campo eléctrico (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). Por lo tanto, se propone que la solución oscilatoria tenga la siguiente forma:

$$\bar{H}_p(\bar{t}) = \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \text{sen}(\bar{\omega}\bar{t}) \quad (4.11)$$

En la Ec. (4.11) io denota la parte de la curvatura que esta es fase con el campo eléctrico y oi representa la parte de la curvatura que esta fuera de fase del campo eléctrico. Sustituyendo la Ec. (4.11) en la Ec. (3.17) e igualando los coeficientes, los módulos de curvatura son obtenidos (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\bar{H}_{io}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left[\frac{1 + (b_1^* - (1+k)b_2^*) \bar{\omega}^{-2} + k b_2^{*2} \bar{\omega}^{-4}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \right] \quad (4.12)$$

$$\bar{H}_{oi}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left[\frac{(b_1^* - 1) \bar{\omega} + (1 - b_1^* k) b_2^* \bar{\omega}^{-3}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \right] \quad (4.13)$$

por lo tanto, la solución general es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{H}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) &= a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \\ & \left\{ \left[\frac{1 + (b_1^* - (1+k)b_2^*) \bar{\omega}^{-2} + k b_2^{*2} \bar{\omega}^{-4}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \right] \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + \left[\frac{(b_1^* - 1) \bar{\omega} + (1 - b_1^* k) b_2^* \bar{\omega}^{-3}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2} \right] \text{sen}(\bar{\omega}\bar{t}) \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

A partir de esto se calculan los módulos de curvatura, la potencia disipada y la energía elástica promedio. Se calcula además el factor de selectividad $\bar{Q}(\bar{\omega})$, el cual es un cociente entre la energía elástica y la potencia disipada en el sistema (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014). Es importante resaltar, que las cantidades clave para la descripción del sistema son la potencia liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana $\bar{P}(\bar{\omega})$, la energía elástica almacenada por la membrana $\bar{E}(\bar{\omega})$ y la relación de estas cantidades conocido como factor de selectividad $\bar{Q}(\bar{\omega})$.

4.1.2.1 Potencia

La potencia liberada a los fluidos viscoelásticos por la oscilación de la membrana puede ser calculada por medio de una integral promediando sobre un periodo, y se define como el producto del campo eléctrico y el flujo volumétrico. Nótese, que el flujo volumétrico puede ser expresado en términos de la evolución de la curvatura promedio (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\begin{aligned}\bar{P}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) &= -\frac{1}{2} \left\langle \bar{E}(\bar{t}) \cdot \bar{V}(\bar{t}) \right\rangle = \left\langle \bar{E}(\bar{t}) \cdot \bar{H}(\bar{t}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \bar{\omega} \bar{H}_{oi} = \frac{1}{2} a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \frac{(b_1^* - 1) \bar{\omega}^{-2} + (1 - b_1^* k) b_2^* \bar{\omega}^{-4}}{(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^* \bar{\omega})^2}\end{aligned}\quad (4.15)$$

4.1.2.2 Almacenamiento de energía elástica de la membrana

La energía elástica promedio almacenada por la membrana se calcula utilizando el teorema del promedio integral sobre un periodo. Físicamente, la energía elástica de la membrana, indica la cantidad de energía almacenada y se define como el cuadrado de la evolución de la curvatura promedio (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\begin{aligned}\bar{E}_m(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) &= \left\langle \bar{H}(\bar{\omega}) \cdot \bar{H}(\bar{\omega}) \right\rangle = \left\langle \bar{H}^2(\bar{\omega}) \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\bar{H}^*(\bar{\omega}) \right)^2 \\ \bar{H}^*(\bar{\omega}) &= \sqrt{\bar{H}_{io}^2(\bar{\omega}) + \bar{H}_{oi}^2(\bar{\omega})}\end{aligned}\quad (4.16)$$

4.1.2.3 Factor de selectividad Q

El factor de selectividad Q es la relación entre la energía almacenada por la membrana y la potencia liberada hacia los fluidos viscoelásticos y es una medida de la importancia relativa del proceso disipativo y de almacenamiento de energía, este factor depende los mecanismos inerciales, elásticos y volumétricos a través de números adimensionales (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

$$\bar{Q}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) = \frac{\bar{E}_m(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega})}{\bar{P}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega})} = \frac{\bar{H}^*(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega})^2}{\bar{\omega} \bar{H}_{oi}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega})} \quad (4.17)$$

la magnitud del factor $\bar{Q}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega})$ define 3 regiones para las cuales toma el valor de:

$\bar{Q}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) > 1$; Almacenamiento elástico de la membrana > Potencia liberada a los fluidos

$\bar{Q}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) = 1$; Almacenamiento elástico de la membrana = Potencia liberada a los fluidos

$\bar{Q}(a_0^*, b_1^*, b_2^*, k; \bar{\omega}) < 1$; Almacenamiento elástico de la membrana < Potencia liberada a los fluidos

4.2 Resonancia

Para obtener la frecuencia de resonancia en el sistema $\bar{\omega}_{res}$, el denominador de los módulos de curvatura (Ecs. (4.12) y (4.13)), debe ser cero, por lo que, despejando la frecuencia se tiene lo siguiente:

$$\bar{\omega}_{res}(k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b) = \sqrt{\frac{1}{b_2^*(k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b)}} = \sqrt{\frac{k}{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b}} \quad (4.18)$$

la Ec. (4.18) muestra que la frecuencia a la cual el sistema presenta los mecanismos resonantes está determinada por la elasticidad y la asimetría de las fases viscoelásticas (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

CAPÍTULO 5

SIMULACIONES COMPUTACIONALES

5.1 Respuesta mecánica

En esta sección se representa la respuesta mecánica: (i) módulos de curvatura, (ii) potencia y (iii) la energía elástica promedio vs función de la frecuencia adimensional. Nuestro análisis muestra que los modos pares (II, IV, V) no tienen relevancia física, por lo que nos centraremos solo en los modos impares (I, III, V). Por efectos de simplicidad, solo se muestra el análisis para el modo I (LS, LV, FM) y posteriormente, se hace un resumen de los seis modos en la Tabla 4.

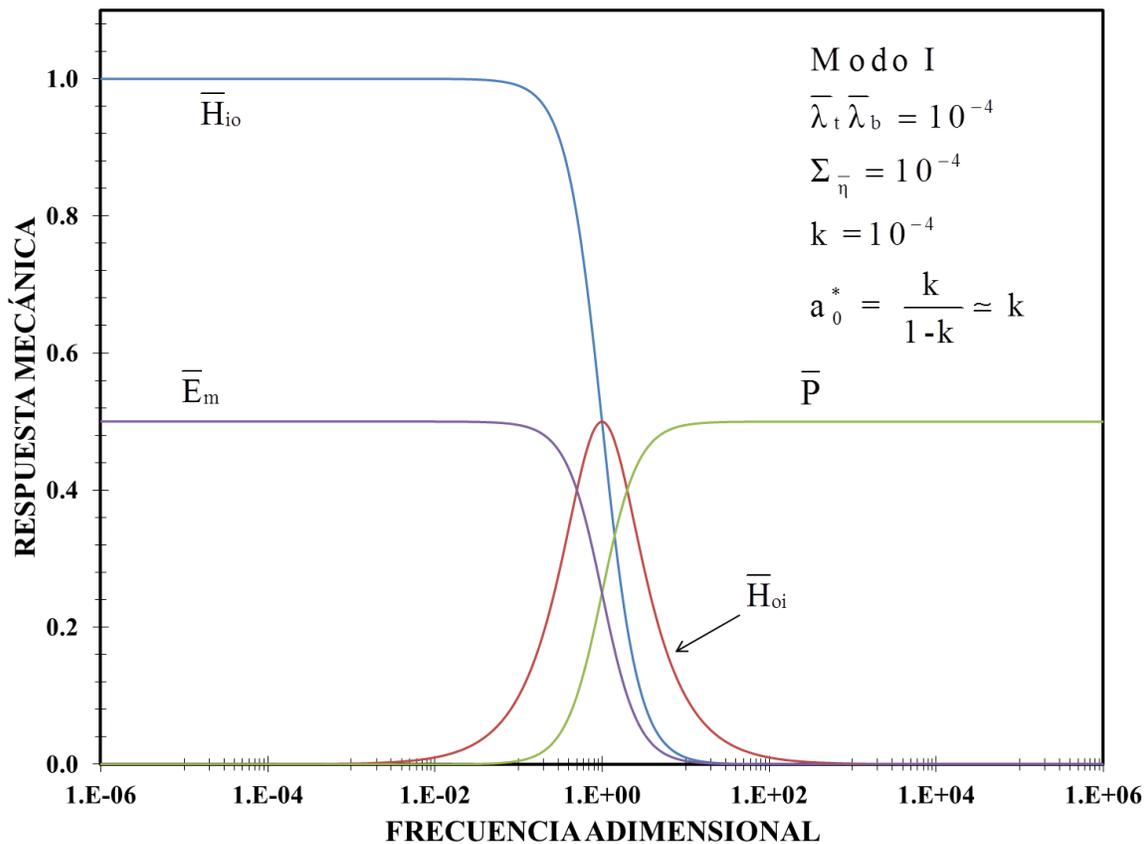


Figura 12. “Respuesta mecánica en función de la frecuencia adimensional”

En la Figura 12 se ilustra la respuesta mecánica en flujo oscilatorio de la ecuación electroreológica para el modo I. Se observa que \bar{H}_{io} , describe una primera meseta, seguido de una zona intermedia tipo ley de potencia y a frecuencia altas una segunda meseta que tiende asintóticamente a cero. Por otra parte \bar{H}_{oi} , despliega el clásico comportamiento resonante en donde el máximo está centrado en la frecuencia de resonancia. Es importante resaltar, que el máximo está determinado por un acoplamiento entre las propiedades viscoelásticas y elásticas del sistema.

La potencia $\bar{P}(\bar{\omega})$, describe un comportamiento constante a bajas frecuencias y para un cierto valor crítico, la potencia disipada describe un comportamiento monótono creciente hasta un segundo valor en donde es independiente de la frecuencia. Finalmente la energía elástica presenta dos zonas constantes a baja y altas frecuencias y una zona intermedia tipo ley de potencia. A bajas frecuencias el sistema se comporta como sólido, mientras que a altas frecuencias el sistema se comporta como un líquido, en la Tabla 4 se muestra en resumen el comportamiento de las respuestas mecánicas.

Modo	$\bar{H}_{oi}(\bar{\omega})$	$\bar{H}_{io}(\bar{\omega})$	$\bar{P}(\bar{\omega})$	$\bar{E}_m(\bar{\omega})$	$Q(\bar{\omega})$
I {LS,LV,FM}	Pulso simple con un pico máximo centrado en la frecuencia de resonancia	2 mesetas a baja y alta frecuencia y una zona tipo ley de potencia	2 mesetas a baja y alta frecuencias y una zona tipo ley de potencia, con un valor máximo a altas frecuencias	2 mesetas a baja y alta frecuencia y una zona tipo ley de potencia, con un máximo a bajas frecuencias	Decrece linealmente a un valor asintótico menor a la unidad
II {LS,LV,SM}	El módulo de curvatura se anula	El módulo de curvatura se anula	La potencia se anula en este modo	La energía elástica de la membrana se anula en este modo	El factor Q de selectividad se anula
III {LS,HV,FM}	Pulso simple con un pico máximo centrado en la frecuencia de resonancia	2 mesetas a bajas frecuencias y una zona tipo ley de potencia	2 mesetas a bajas frecuencias y una zona tipo ley de potencia a bajas frecuencias	2 mesetas a bajas frecuencias y una zona tipo ley de potencia con un máximo a bajas frecuencias	Decrece linealmente a un valor asintótico igual a la unidad
IV {LS,HV,SM}	El módulo de curvatura se anula	El módulo de curvatura se anula	La potencia se anula en este modo	La energía elástica de la membrana se anula en este modo	El factor Q de selectividad se anula
V {HS,IV,FM}	Pulso simple con un pico máximo centrado en la frecuencia de resonancia	2 mesetas a bajas frecuencias y una zona tipo ley de potencia con un valor máximo a bajas frecuencias	2 mesetas a bajas frecuencias y una zona tipo ley de potencia a bajas frecuencias	2 mesetas a bajas frecuencias y una zona tipo ley de potencia con un máximo a bajas frecuencias	Decrece linealmente a un valor asintótico menor a la unidad
VI {HS,IV,SM}	El módulo de curvatura se anula	El módulo de curvatura se anula	La potencia se anula en este modo	La energía elástica de la membrana se anula en este modo	El factor Q de selectividad se anula

Tabla 4. “Repuesta del sistema en función de la frecuencia adimensional para los distintos modos”

5.2 Factor de selectividad Q

En la Figura 13 se ilustra el Factor de selectividad Q vs frecuencia adimensional para los seis modos descritos en la Tabla 4. El comportamiento del factor Q se puede separar en dos regiones: (a) $Q > 1$, los mecanismos dominantes son los elásticos, en comparación con los procesos disipativos asociados con el contacto de las fases viscoelásticas. En este contexto los modos pares, (II, IV, VI) los procesos dominantes son los elásticos. (b) $Q = 1$, en este contexto, los mecanismos de almacenamiento y los disipativos son iguales, (c) $Q < 1$, los mecanismo dominantes son los disipativos y los que se minimizan son los elásticos (almacenamiento de la energía en la membrana). De igual manera, los modos que minimizan la energía elástica corresponden a los modos (I, III, V). En las siguientes secciones se demostrara que el único modo biológicamente posible es el modo III asociado con el contraste en las fases viscoelásticas, la máxima viscosidad de Bulto del sistema y una membrana suave y deformable.

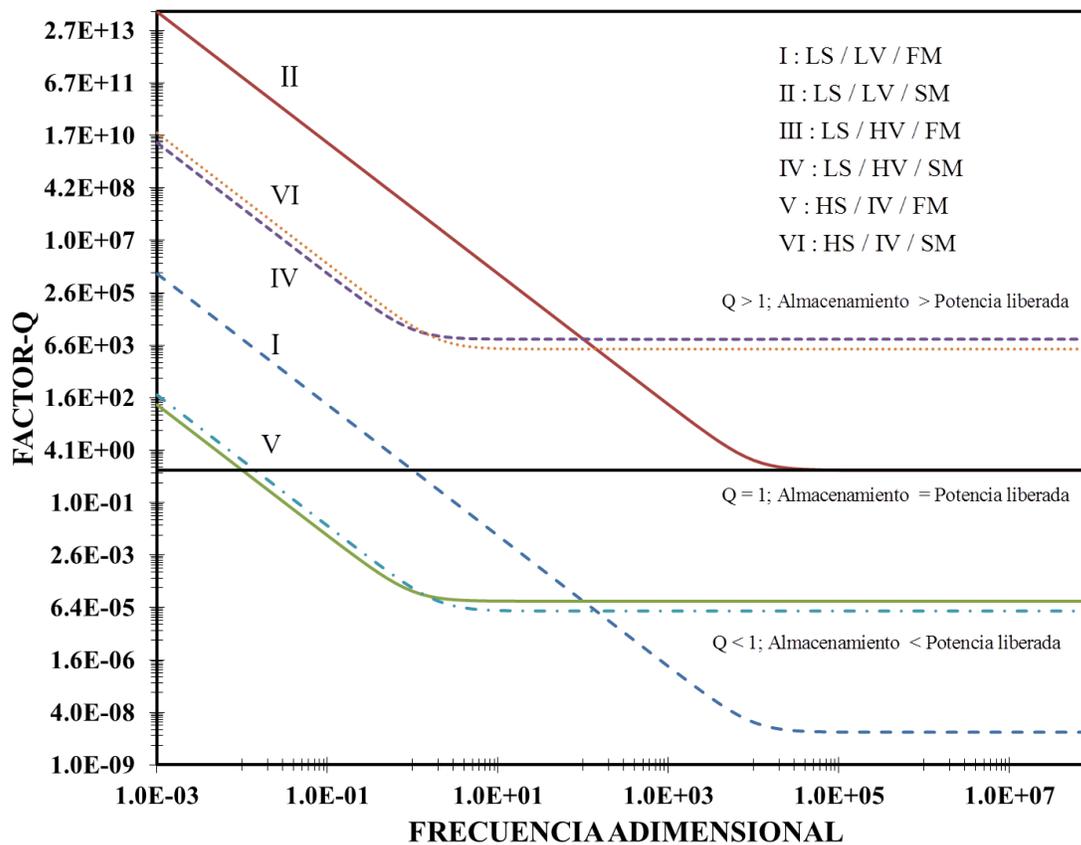


Figura 13. "Factor de selectividad Q en función de la frecuencia adimensional"

5.3 Línea material resonante

5.3.1 Condiciones materiales para las curvas resonantes

La identificación de las condiciones materiales que conducen a la localización del máximo en la función potencia $\bar{P}(\bar{\omega})$ es un paso importante en el entendimiento de las células ciliadas externas (CCE). Un examen de la Ec. (4.15) muestra que la potencia es una función monótona creciente y para valores altos en la frecuencia adimensional, su valor es constante, i.e. no existe ningún valor numérico de la frecuencia para el cual, la potencia presente las curvas resonantes que permiten disipar la máxima potencia debido al contacto de las fases viscoelásticas.

I. Primera condición material:

Sin embargo, cuando el coeficiente viscoso b_1^* es igual al inverso del radio elástico k , i.e. $b_1^* = 1/k$ este hecho implica que el segundo término del numerador de la potencia disipada se anule, i.e. $1 - b_1^*k = 0$, por lo que la potencia disipada toma la siguiente forma analítica:

$$\bar{P}(\bar{\omega}, a_0^*, k, \bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b) = \frac{1}{2} a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \frac{\bar{\omega}^{-2}}{\left(k - \bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b \bar{\omega}^{-2} \right)^2 + \bar{\omega}^{-2}} (1-k)k \quad (5.1)$$

la condición $b_1^* = 1/k$ implica las siguientes condiciones materiales en el sistema:

- El valor de la viscosidad de bulto debe ser máxima, es decir, la suma de la viscosidad debe aproximarse a 1, i.e. $\Sigma_{\bar{\eta}} \rightarrow 1$.
- La condición de máxima viscosidad en el sistema, implica que el producto de los tiempos viscoelásticos de Maxwell debe ser pequeño, del orden de cero, i.e. $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b \approx \varepsilon = 10^{-4}$. Físicamente, significa que una de las fases debe ser muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica.
- Los números adimensionales $\{\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, \Sigma_{\bar{\eta}}\}$ no son independientes por lo que el producto de los tiempos de Maxwell determina las cotas inferior y superior de la viscosidad de bulto, respectivamente.

II. Segunda condición material

De la misma manera como en la condición 1, un examen exhaustivo del modelo simplificado (5.1), los mecanismos flexo-eléctricos deben de cumplir la siguiente restricción en el sistema:

$$a_0^* \frac{1-k}{k} = 1 \Leftrightarrow a_0^* = a_0^*(k) = \frac{k}{1-k} \quad (5.2)$$

- d) De acuerdo con nuestro espacio prismático 3D adimensional, los modos que corresponden a estas condiciones materiales son los modos: (i) III (LS, HV, FM) y (ii) IV (LS, HV, SM) respectivamente.

En la Tabla 5. Se presentan algunos valores del coeficiente flexo-eléctrico en función del radio elástico.

Radio elástico	Numero flexo-eléctrico	Mecanismo dominante
K	$a_0^*(k)$	
0.0001	0.0001	Elástico
0.10	1/9	Elástico
0.25	1/3	Elástico
0.50	1	Elástico= Flexo eléctrico
0.75	3	Elástico= Flexo eléctrico
0.90	9	Elástico= Flexo eléctrico

Tabla 5. “Variación del número flexoeléctrico con el radio elástico”

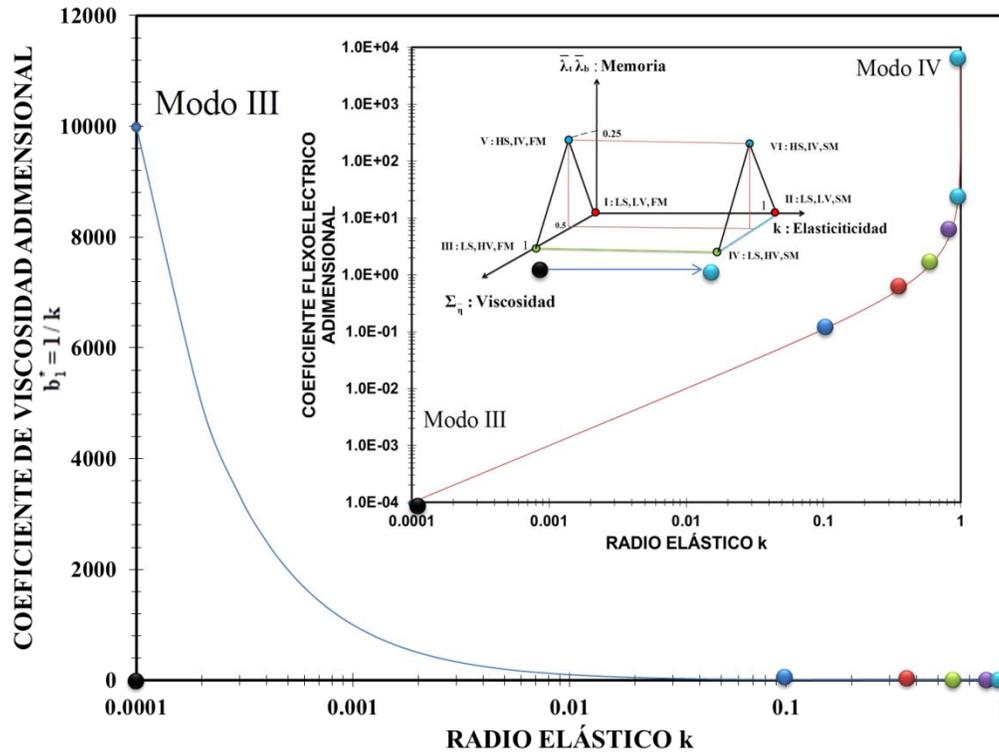


Figura 14. “Coeficiente viscoso adimensional como función del radio elástico”

5.4 Curvas resonantes de la potencia

La potencia de resonancia se calcula a la frecuencia de resonancia, por lo que:

$$\bar{P}_{res} = \bar{P}(\bar{\omega}_{res}, a_0^*, k) = \frac{1}{2} a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) (1-k) k \quad (5.3)$$

un análisis exhaustivo de la Ec. (5.2) implica que las únicas condiciones posibles para obtener las curvas resonantes, se presentan cuando el coeficiente asociado a los mecanismos flexo-eléctricos satisfacen la Ec. (5.2), por lo que se tiene:

$$\bar{P}_{res} = \bar{P}\left(\bar{\omega}_{res}, a_0^* = \frac{k}{1-k}, k\right) = \frac{1}{2} (1-k) k \quad (5.4)$$

La Ec. (5.4) es la más importante, del presente análisis y es punto de partida, de las simulaciones que se presentan en los capítulos posteriores. Al tomar la derivada con respecto al radio elástico en la Ec. (5.4) e igualarla a cero $d\bar{P}_{res} / dk = 0$, y despejando el radio elástico, se tiene que el valor crítico es: $k=1/2$, por lo que la Ec. (5.4) toma la forma:

$$\left(\bar{P}_{res}\right)_{max} = \bar{P}\left(\bar{\omega}_{res}, k=1/2\right) = 1/2^3 \quad (5.5)$$

la Ec. (5.5) representa el máximo valor que puede tomar la potencia en las curvas resonantes.

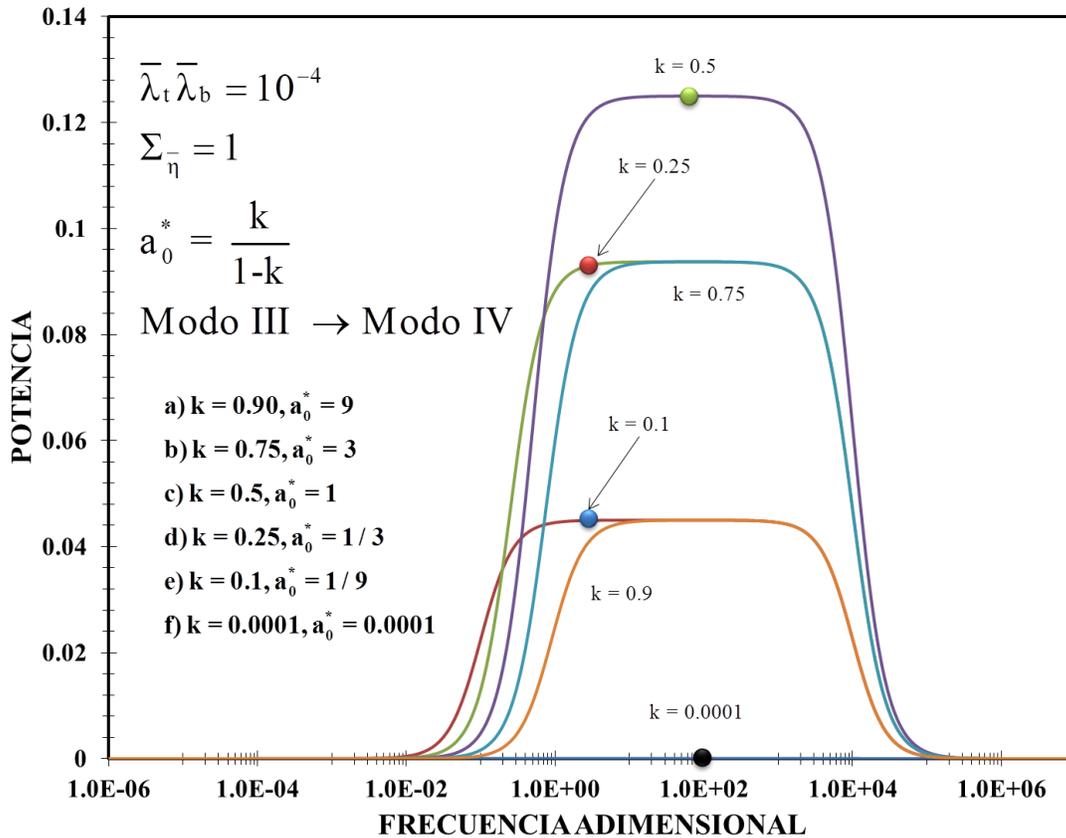


Figura 15. “Potencia en función de la frecuencia adimensional”

En la Figura 15 se presenta la potencia en función de la frecuencia adimensional para diferentes valores del radio elástico. Los parámetros utilizados en esta simulación corresponden al modo III (LS, HV, FM). Se observa que el máximo valor de la membrana se obtiene para $k = 0.5$, y el valor máximo de la potencia se obtiene en $\bar{P}_{max} = 0.125$. Dos regímenes se pueden observar en la figura 12. (i) A valores de radio elástico de $k \in (\varepsilon, 0.5)$ las curvas resonantes aumentan hasta el valor máximo en $k = 0.5$, mientras que (ii) para $k \in (0.5, 1)$, el máximo y el ancho de las curvas resonantes decrecen, debido a los mecanismos elásticos asociados con el radio elástico. Un hecho importante, en esta simulación, es el de que el número adimensional $a_0^*(k)$ está determinado por las propiedades

flexoelectricas del material a través del radio elástico k , por lo que para el inserto de la Figura 14 los valores correspondientes son descritos en la Tabla 5.

5.5 Energía elástica en la línea material que une los modos III y IV

En la Figura 16 se ilustra el efecto del radio elástico en la energía elástica de la membrana como función del radio elástico k , para la línea material que une los modos (III) y (IV) representada en la Figura 11. Matemáticamente, en todos los casos, se observa dos mesetas a bajas y altas frecuencias adimensionales respectivamente, y una zona intermedia tipo ley de potencia. Físicamente, a bajas frecuencias se comporta como un sólido elástico, mientras a frecuencias moderadas, el sistema presenta un comportamiento monótono decreciente lo que infiere que el sistema pasa de estados de mayor a menor elasticidad por efecto de la frecuencia adimensional aplicada en el sistema.

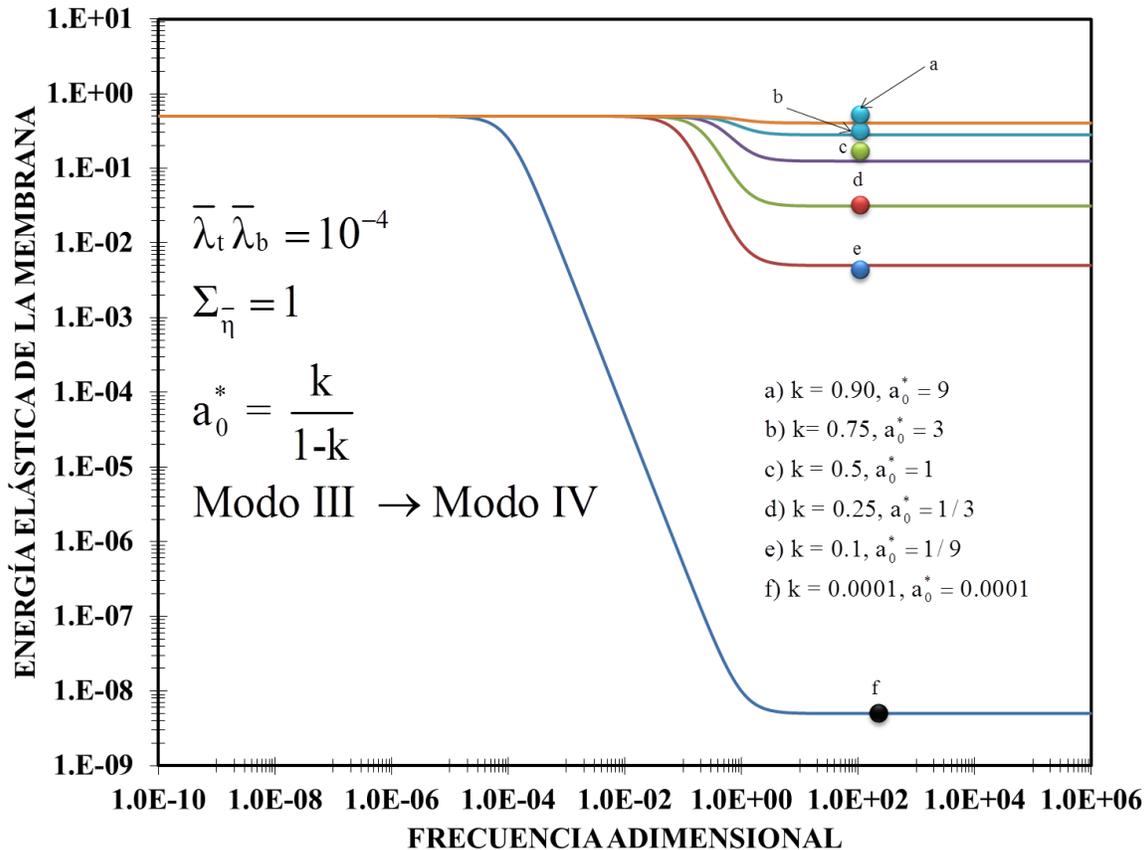


Figura 16. “Energía elástica de la membrana como función de la frecuencia adimensional”

5.6 Factor de selectividad Q en la línea material que une los modos III y IV

En la Figura 17 se ilustra el factor Q como función de la frecuencia adimensional y en función del radio elástico k. En general las curvas muestran un comportamiento monótono decreciente y creciente a bajos y altos valores de la frecuencia adimensional respectivamente y una zona intermedia a valores intermedios de la frecuencia adimensional. Es claro que en la línea material que une a los modos (III) y (IV) se observan todas las curvas resonantes, sin embargo, el factor de selectividad Q es menor a uno, i.e., $Q < 1$ solamente para $k \in (\varepsilon, 0.5)$.

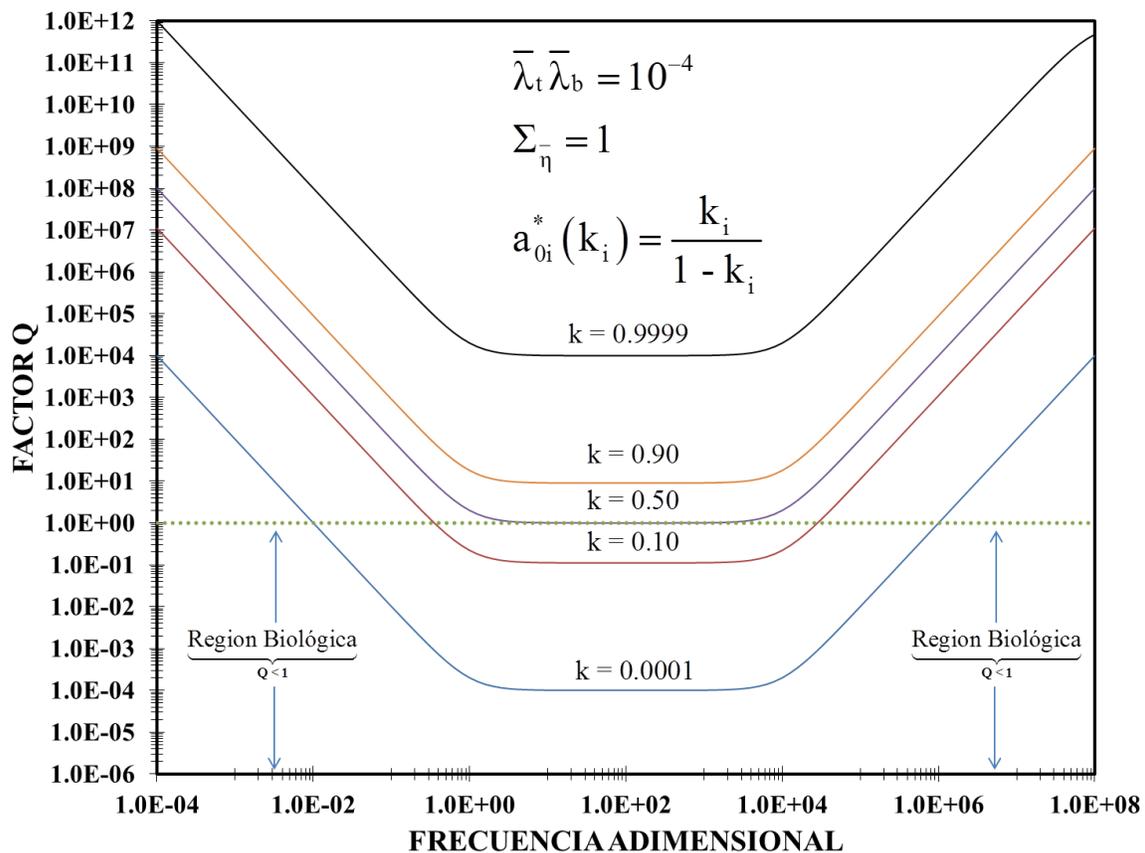


Figura 17. “Factor de selectividad Q en función de la frecuencia adimensional para los parámetros materiales”

En esta zona, la energía elástica de la membrana se minimiza y la potencia disipada debido a las fases viscoelásticas se maximiza. Los resultados obtenidos en la Figura 17 pueden ser resumidos a continuación:

- a) $Q > 1$, para $k \in (0.5, 1)$ los mecanismos dominantes son los elásticos asociados con la elasticidad de la membrana.

- b) $Q = 1$ para $k = 0.5$ la disipación viscosa debido a las fases viscoelásticas y los mecanismos elásticos de la membrana son iguales.
- c) $Q < 1$, para $k \in (\varepsilon, 0.5)$ la disipación viscosa se maximiza en comparación con las propiedades elásticas en el sistema, lo que corresponde precisamente a la zona biológica de las células ciliadas externas en el organismo humano.

5.7 Aplicaciones biológicas (CCE)

De acuerdo con los trabajos de Sachs y colaboradores (2009) las CCE usan la electromotilidad de los estereocilios (HB) para vencer la viscosidad y ajustar el efecto de resonancia para maximizar la potencia y disipar la energía. El receptor (estereocilios) de las células ciliadas externas activa las oscilaciones permitiendo que se ajusten a la frecuencia de resonancia, para poder disipar la máxima energía y posteriormente mediante otros procesos fisiológicos y fisicoquímicos poder convertirla en impulsos nerviosos.

La respuesta mecánica al campo eléctrico inducido produce las oscilaciones en las CCE que ocurre a la frecuencia del sonido que llega y ajustada a la frecuencia resonante, produciendo una amplificación mecano-eléctrica. Rabbit et al. 2009 formularon un modelo matemático para las CCE basado en el primer principio (electromotilidad HB) de transducción mecano-eléctrica y ellos analizaron la conversión de potencia en el dominio del espacio de la frecuencia (espacio de Fourier). Cabe mencionar que en este trabajo se usa la integración de la ecuación de forma de la membrana acoplada con el modelo constitutivo de Maxwell para caracterizar los fluidos viscoelásticos, el cual es un modelo que intenta reproducir el efecto producido por la electromotilidad somática. Como ha sido demostrado (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014) una característica biológica clave es la forma y ubicación del pulso de amplificación de la potencia liberada a los fluidos. El modelo presentado en este trabajo es cualitativamente consistente con el fenómeno biológico que ocurre en las OHC.

Finalmente, en la Figura 18 se presenta un resumen de los principales méritos de la presente investigación. La Figura 18 ilustra el factor de selectividad Q , la potencia disipadas por las fases viscoelásticas y la energía almacenada en función de la frecuencia adimensional y los parámetros biológicos que describen las curvas resonantes y las características relevantes de ellas (Anchura y máximo de las curvas resonantes) y minimizan la energía elástica asociada a los mecanismos elásticos de la membrana. En nuestro modelo, el valor del máximo en la potencia está determinado por tres efectos acoplados. (i) La asimetría en las fases viscoelásticas, i.e. $\bar{\lambda}_a \bar{\lambda}_b \neq 1$, esto significa que en una de las fases, el tiempo de relajación es muy pequeño (débilmente viscoelástico) y la otra fase es completamente viscoelástica. (ii) La viscosidad de bulto en el sistema, toma su

valor máximo, i.e. $\sum_{\eta} \cong 1$ y (iii) el valor numérico del radio elástico es pequeño, es decir $k \ll 1$; $O(k) = 10^{-4}$. El ancho de las curvas resonantes está determinado por la asimetría de las fases viscoelásticas a través del número de memoria $\bar{\lambda}_t, \bar{\lambda}_b$ y del radio elástico k . La energía elástica presenta dos mesetas a bajas y altas frecuencias y una zona intermedia tipo ley de potencia. La segunda meseta está completamente determinada por el radio elástico. La zona de ley de potencia y la meseta a bajos valores en la frecuencia son de vital importancia en el funcionamiento biológico y fisiológico de las células ciliadas externas. De acuerdo con nuestro análisis paramétrico, el valor de Q en el modo III (baja simetría, máxima viscosidad de bulto y radio elástico mucho menor a uno) el factor Q es menor de la unidad, lo que implica que el sistema se comporta como un amplificador de tipo biológico.

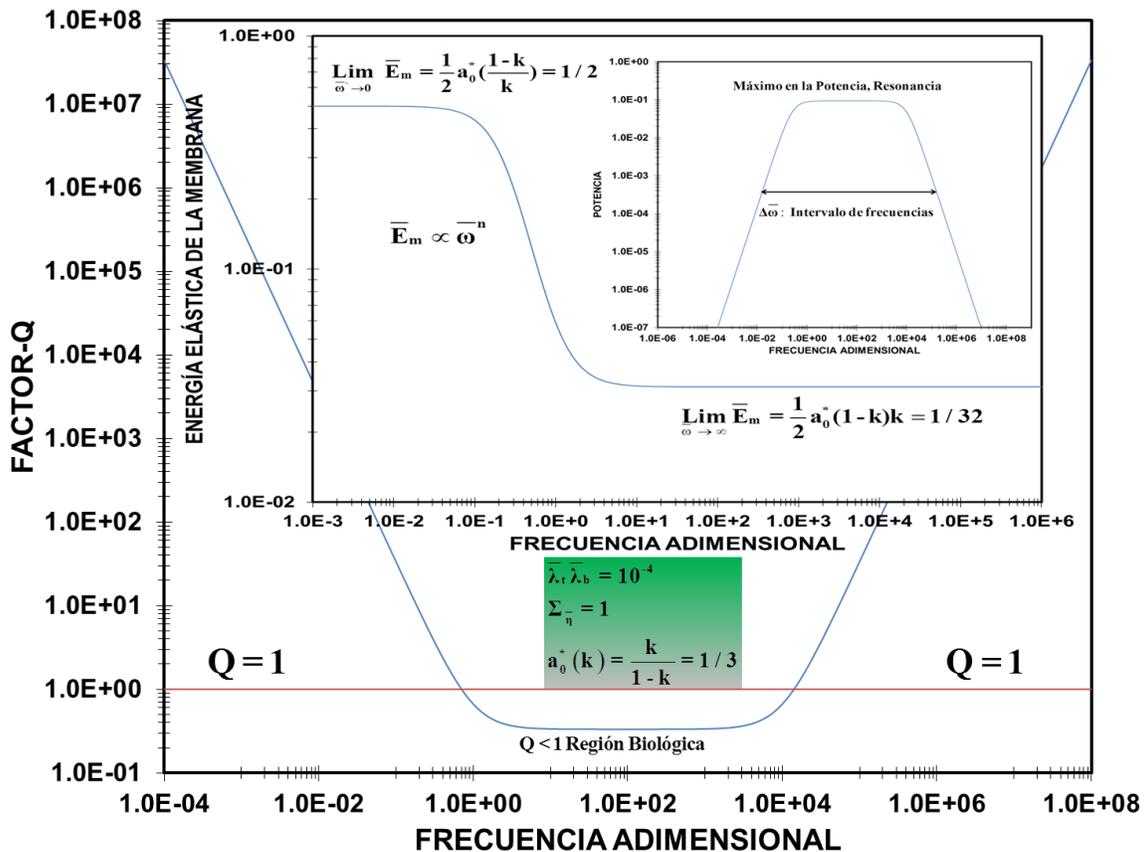


Figura 18. “Factor Q, energía elástica y potencia en función de frecuencia adimensional para un valor del radio elástico de 0.25”

En nuestro sistema, un valor de $Q \ll 1$, significa que los mecanismos elásticos se minimizan en comparación con los procesos disipativos, los cuales están determinados por los procesos biológicos y fisiológicos en las células ciliadas del cuerpo humano. Las propiedades materiales importantes aquí son: la

dureza de la membrana, (ii) la elasticidad de las fases viscoelásticas, (iii) los tiempos de relajación de Maxwell asociados con los mecanismos viscoelásticos en el sistema. La forma de cambiar o adaptar estas propiedades materiales es cambiando la concentración, la distribución del peso molecular disolviendo las cadenas poliméricas. Para incrementar la amplitud en las curvas resonantes asociadas a la disipación viscosa, uno de los fluidos debe ser débilmente viscoelástico y el otro completamente viscoelástico (asimetría en las fases). Para cambiar la localización del máximo y el ancho en las curvas resonantes, la elasticidad de la membrana con respecto a la elasticidad de bulto de las fases viscoelásticas debe ser ajustada. Para ajustar la anchura de las curvas resonantes, los tiempos de relajación de Maxwell, elasticidad de la membrana y la viscosidad de bulto deben ser modificados.

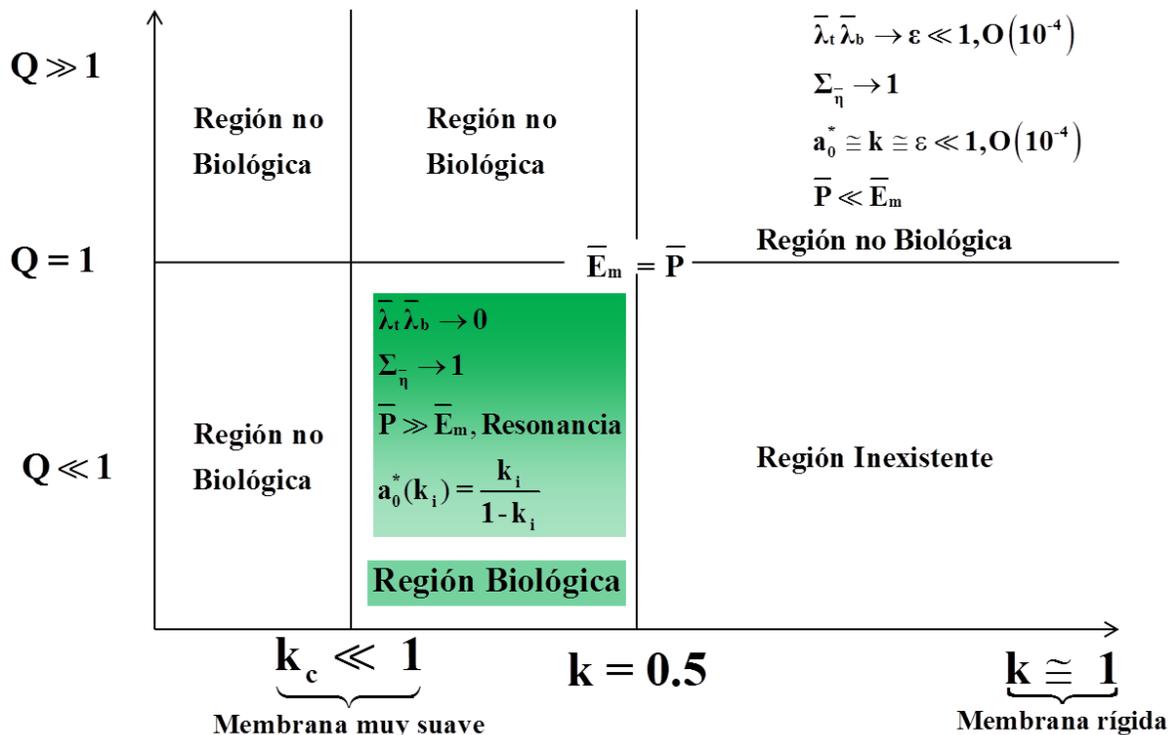


Figura 19. “Resumen cualitativo de los resultados obtenidos”

En la Figura 19 se presenta un esquema en el que se resumen los resultados cualitativos de este trabajo. Se puede observar que la región biológica se obtiene solo con una membrana con una rigidez menor a $\frac{1}{2}$ y cierto valor crítico, que es donde se amplifica la señal debido a la resonancia del sistema, fuera de esta región descrita anteriormente nuestro modelo no puede describir el sistema biológico.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 Resumen y principales contribuciones

En este trabajo se utilizó el concepto de flexo-electricidad en cristales líquidos con aplicación a las células ciliadas externas. Para modelar este fenómeno se utilizó un capilar con dos fases viscoelásticas y una membrana flexoeléctrica adherida en el centro del capilar a la cual se le aplicó un campo eléctrico de baja amplitud, lo que provoca que se forme un domo inferior y superior lo cual, induce un flujo volumétrico debido a la diferencia de presiones entre la parte superior e inferior de la membrana demostrado (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

A partir de un balance mecánico y la ecuación de forma de la membrana y suponiendo que las fases son viscoelásticas se deduce una ecuación que describe el cambio de la curvatura promedio en función del campo eléctrico aplicado y las propiedades materiales (viscoelásticas, elásticas y flexoeléctricas) del sistema.

Matemáticamente el modelo describe una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la curvatura promedio la cual se puede interpretar como una clase de oscilador armónico forzado, este modelo contiene una contribución inercial asociado a la segunda derivada de la curvatura con respecto al tiempo, una primera derivada asociada con la disipación y el termino constante relacionado con la elasticidad de la membrana. Es importante resaltar, que este modelo es un caso especial de un modelo mecánico de Burgués de seis elementos. Por otra parte, el miembro derecho de la ecuación contiene una segunda y primera derivadas del campo eléctrico por lo que el modelo matemático es simétrico.

Para analizar la respuesta mecánica, se propuso una función anarmonica para el campo eléctrico (Trigonométrica) por lo cual, la curvatura promedio se separó en dos contribuciones una en fase con el campo eléctrico y otra desfasada del campo a partir de esto, se obtuvieron expresiones analíticas para las siguientes variables dinámicas:

- a. Módulos de curvatura
- b. Potencia disipada por el contacto con las fases viscoelásticas
- c. Energía elástica de la membrana (Recuperación)
- d. Factor Q de selectividad el cual separa en dos mecanismos principales, uno de ellos asociado con la disipación viscosa y el otro, con la energía elástica

Proponiendo un conjunto de variables adimensionales, se obtuvieron tres números adimensionales ($\lambda_t, \lambda_b, \Sigma_\eta, k$), relacionados a la asimetría de las fases viscoelásticas, la viscosidad total de bulto y el radio elástico, en donde los limites

matemáticos de estos números adimensionales, generan un espacio material de seis posibles modos. Geométricamente, este espacio puede ser representado por un espacio prismático 3D. Las coordenadas de este espacio son la viscosidad de Bulto, la elasticidad de la membrana y la memoria asociada al producto de los tiempos de relajación respectivamente. Estos modos representan cualquier punto material en nuestro sistema.

6.2 Modelo dinámico

La Ec. diferencial deducida por Abou-Dakka et al. 2012, para un sistema similar, no está bien escalada por lo que esta tesis presenta la ecuación diferencial correcta. Sin embargo, el modelo de Abou-Dakka et al 2012, deducido por un método similar al que se presenta en este trabajo, conduce a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden (Ver apéndice B de Abou-Dakka et al 2012)

$$\left(b_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* (\Sigma_{\bar{\eta}}, k) \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = \left(kb_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{E}(\bar{t})$$

este modelo está incompleto porque le falta un número asociado a la flexo-electricidad. El modelo deducido en este trabajo corrige este defecto y explica la cuarta condición para que existan las curvas resonantes. Matemáticamente la corrección es la siguiente:

$$\left(b_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* (\Sigma_{\bar{\eta}}, k) \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left(kb_2^* (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b, k) \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{E}(\bar{t})$$

Nótese, que esta ecuación fue deducida de un manera general, por lo que se puede extender fácilmente a otras ecuaciones constitutivas lineales como las explicadas en la capítulo II (Modelos viscoelásticos de Jeffreys y Burgers) de la presente investigación. La corrección de este trabajo, es el producto del número flexoeléctrico multiplicado por la elasticidad de la membrana, i.e.

$$a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right)$$

Este producto de números adimensionales, será punto de partida en la descripción de las curvas resonantes y de la zona biológica.

6.3 Curvas resonantes y zona biológica

Las condiciones que se encontraron para las curvas resonantes son enlistadas a continuación: (i) El número de memoria debe ser menor que uno, del orden de 10^{-4} ; es decir una de ellas es débilmente viscoelástica y la otra completamente viscoelástica. (ii) La viscosidad de bulto debe ser la máxima

permitida, es decir, su valor debe ser cercano a la unidad. (iii) El radio elástico, el cual relaciona la elasticidad de la membrana con la de la elasticidad de bulto del fluido debe ser menor de uno. La cuarta condición y contribución de esta tesis (iv), es que el valor numérico del número flexo-eléctrico el cual, debe ser del orden del radio elástico, i.e., $a_0^* \cong k = 10^{-4}$. Para que se cumpla esto, el producto $a_0^*(1-k/k)$ debe ser igual a la unidad, i.e.

$$a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) = 1$$

Esto implica que existe una relación entre el número flexoeléctrico y el radio elástico por lo que podemos expresarlo en términos de una función:

$$a_0^*(k) = \frac{k}{1-k}$$

Físicamente se encontró que las curvas resonantes están asociadas a que el coeficiente flexoeléctrico sea del orden del radio elástico, i.e. que

$$a_0^*(k) = k(1-k)^{-1} = k(1+k+O(k^2)) \cong k$$

Finalmente una de las contribuciones más importantes de la presente investigación, es que los números adimensionales están acoplados, es decir los mecanismos no son independientes. La viscosidad depende de la memoria y la flexo-electricidad del radio elástico, por lo que se tiene lo siguiente:

$$\text{Numeros-adimensionales: } \begin{cases} \Sigma_{\eta}^- = \Sigma_{\eta}^- (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b) \\ a_0^* = a_0^*(k) \\ \bar{\lambda}_t + \bar{\lambda}_b = 1 \\ \bar{G}_t + \bar{G}_b = 1 \end{cases}$$

las condiciones para las cuales se da el efecto resonante son las siguientes:

- El número adimensional asociado a la memoria debe ser del orden de ϵ , i.e. $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \epsilon = O(10^{-4})$. Físicamente implica que hay un contraste en las fases viscoelásticas del sistema.
- Una vez que el número de memoria es muy pequeño, la viscosidad del bulto, puede tener dos valores posibles mínimo y máximo $\Sigma_{\eta \min}^- < \Sigma_{\eta}^- = \Sigma_{\eta}^- (\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b = \epsilon) < \Sigma_{\eta \max}^-$, por lo que, se debe de escoger el valor máximo de acuerdo a nuestro estudio paramétrico, i.e. $\Sigma_{\eta}^- \square \Sigma_{\eta \max}^-$.
- El radio elástico debe ser del orden de ϵ , i.e. $k \cong \epsilon$. Físicamente la elasticidad de la membrana es mucho menor que la elasticidad de bulto del sistema (las dos fases viscoelásticas).

- d) El coeficiente flexoeléctrico, debe ser del orden del valor numérico de la membrana, es decir, $a_0^* \cong k = \varepsilon = O(10^{-4})$

6.4 Potencia y disipación viscosa

Abou-Dakka et al. 2012, obtuvieron dos ecuaciones adimensionales para la disipación viscosa y la energía elástica de la membrana.

$$\bar{P}(\bar{\omega}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi/\bar{\omega}} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} \bar{E}(\bar{t}) d\bar{t}$$

Sin embargo, y de acuerdo con la teoría desarrollada en este trabajo, la potencia propuesta por Abou-Dakka et al. 2012, es incorrecta debido al número adimensional, asociado con la flexo-electricidad del sistema, multiplicado por $1-k/k$.

La ecuación correcta para la potencia disipada es la siguiente:

$$\bar{P}(\bar{\omega}) = -a_0^* \frac{1-k}{k} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi/\bar{\omega}} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} \bar{E}(\bar{t}) d\bar{t} \right)$$

Un hecho notable de este modelo, es que los números adimensionales están acoplados y por ende las curvas resonantes, son un fenómeno acoplado es decir, las variables independientes son el número de memoria $\bar{\lambda}_t \bar{\lambda}_b$ y el radio elástico k del sistema. Estos valores determinan el valor de la viscosidad de bulto y los mecanismos flexo-eléctricos a través del número a_0^* .

6.5 Factor Q

Abou-Dakka et al. 2012, obtuvieron al igual que la potencia, una expresión que relaciona la disipación viscosa con la energía elástica de la membrana. La fórmula que obtuvieron es la siguiente:

$$\bar{Q}(\bar{\omega}) = \frac{\int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} \bar{H}(\bar{t}) d\bar{t}}{\int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} \bar{E}(\bar{t}) d\bar{t}}$$

El factor $\bar{Q}(\bar{\omega})$, obtenido en este trabajo, contiene el número flexo-eléctrico a_0^* multiplicado por $(1-k)/k$, por lo que el factor de selectividad $\bar{Q}(\bar{\omega})$ queda expresado como:

$$\bar{Q}(\bar{\omega}) = \frac{\int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} \bar{H}(\bar{t}) d\bar{t}}{a_0 \frac{1-k}{k} \int_0^{2\pi/\bar{\omega}} \frac{d\bar{H}(\bar{t})}{d\bar{t}} \bar{E}(\bar{t}) d\bar{t}}$$

Nótese, que el factor $\bar{Q}(\bar{\omega})$ obtenido en este trabajo, no está definida cuando el radio elástico $k \rightarrow 1$.

6.6 Calculo de los parámetros materiales

En este trabajo, los resultados relevantes y que caracterizan la resonancia, la cual es punto de partida en el cálculo de la zona biología son: a) El máximo en la curva resonante, (b) la anchura de las curvas resonantes y (c) el desplazamiento de las curvas resonantes. La manera de poder modificar los parámetros físicos importantes, es a través de las propiedades materiales en el sistema, estas propiedades son funciones del pH, el peso molecular la concentración etc. Experimentalmente los parámetros materiales reológicos y fisicoquímicos pueden ser calculados de la siguiente manera:

Propiedad Material	Símbolo	Prueba Reométrica	Prueba Físicoquímica	Prueba Geométrica
Tiempo de relajación	$\{\lambda_t, \lambda_b\}$	Flujo Oscilatorio a baja amplitud. Cono y plato		
Módulo elástico	$\{G_t, G_b\}$	Flujo Oscilatorio a baja amplitud. Cono y plato		
Viscosidades	$\{\eta_t, \eta_b\}$	Prueba de Flujo en estado estacionario. Cono y Plato		
Tensión interfacial	γ		Tensiómetro de Du Nouy	
Coefficientes de curvatura	$\{k, \bar{k}_c\}$			Teóricamente se pueden calcular

Este trabajo contribuye a la búsqueda constante de comprender los sistemas biológicos que conforman el sistema auditivo utilizando los fenómenos de transporte, reología de fluidos complejos y teoría de cristales líquidos, modelado matemático y simulación computacional como herramientas de caracterización de nuevos materiales.

6.7 Contribución al conocimiento

- Se deduce un modelo electroreológico que describa los cambios en la curvatura en función del campo eléctrico aplicado y las propiedades viscoelásticas del medio y elásticas de la membrana flexo-eléctricas.
- Se presenta una metodología general en el régimen de viscoelasticidad lineal, con el fin de incorporar diferentes mecanismos a través de las ecuaciones constitutivas.
- A partir de los resultados obtenidos se mejora y corrige el modelo membranodinámico recién publicado en Journal of Non-Newtonian Fluid mechanics por Abou-Dakka et al. 2012, introduciendo un término que cuantifica los efectos flexoeléctrico acoplados con la membrana.

- Se obtiene soluciones analíticas, para la curvatura como función del tiempo (inicio de curvatura) y las propiedades del medio (fases viscoelásticas y membrana elástica).
- Se corrigen las soluciones en la prueba oscilatoria (respuesta mecánica) para los módulos de curvatura que son punto de partida en los cálculos de la potencia disipada y energía elástica almacenada por la membrana.
- Se corrigen y mejoran las ecuaciones analíticas para la potencia disipada, energía elástica almacenada en función de los parámetros adimensionales.
- Con base en el análisis adimensional, se obtienen las condiciones para las cuales, se obtienen las curvas resonantes en donde el sistema trabaja como un amplificador de tipo biológico. La primera de estas condiciones es el contraste en las fases viscoelásticas (asimetría de las fases), una de las fases es muy viscoelástica y la otra débilmente viscoelástica, (ii) La segunda es que la viscosidad de bulbo debe ser muy grande es decir cercana a uno. Esto significa que la fase superior e inferior tiene la máxima viscosidad posible. La tercera es que la elasticidad de la membrana es muy pequeña con respecto a la elasticidad de bulbo de las fases viscoelásticas. La cuarta condición y la contribución de esta tesis es que los mecanismos flexo-eléctricos deben ser del orden del radio elástico de la membrana, i.e. las fuerzas flexoeléctricas deben ser pequeñas en comparación con la elasticidad de bulbo del sistema.
- Todos los resultados obtenidos en la presente investigación, son analíticos y pueden ser punto de partida para resultados numéricos en el régimen de viscoelasticidad no lineal.

CAPÍTULO 7

TRABAJO FUTURO

7.1 Modelos viscoelásticos de orden superior

En este trabajo se abordaron fluidos a bajas deformaciones de corte, una extensión natural de este trabajo sería incorporar otro tipo de modelo viscoelásticos lineales con el fin de introducir parámetros reológicos que permiten obtener otro tipo de respuesta mecánica (Máximos y Mínimos en las curvas resonantes), como el modelo de Jeffreys (Bird et al. 1987)

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D}$$

el cual es una combinación del esfuerzo del solvente y la contribución del esfuerzo de un líquido polimérico (Capítulo 2). Otro modelo que se puede ocupar es el de Burgers el cual se describe a continuación

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma + \beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sigma = 2\eta_0 \left(1 + \lambda_j \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D}$$

7.2 Modelos viscoelásticos no lineales

Por otra parte, fenómenos más complejos están relacionados con el régimen de viscoelasticidad no lineal a través de ecuaciones constitutivas que nos representen rapidez de deformación alta. En este punto se pueden utilizar modelos como son: Tanner y Oldroyd B (Bird et al. 1987).

$$\sigma + \lambda_0 \frac{\partial}{\partial t} \sigma = 2\eta(\Pi_D) \mathbf{D}$$

Por otra parte se pueden incorporar efectos inerciales y estudiar por medio de la transformada de Fourier el efecto de los mecanismos inerciales y elásticos en la potencia disipada. Las membranas son sistemas en donde hay intercambio de iones por lo que acoplar el efecto del corte con la transferencia de masa es un paso natural del presente proyecto de licenciatura. Este modelo de membrana flexoeléctrica intenta ser una primera aproximación para poder representar el fenómeno físico de electromotilidad somática descubierto por Brownell 1985, en las células ciliadas externas, los experimentos y modelos desarrollados en su mayoría tratan de representar la electromotilidad HB (Hair Bundle) en los estereocilios debido a la transducción mecano-eléctrica, debido a esto, sería posible acoplar un modelo de transducción mecano-eléctrico con el modelo desarrollado en este trabajo (transducción electro-mecánica) para poder así comparar datos experimentales (Abou-Dakka et al. 2012; Herrera- Valencia & Rey 2014).

APÉNDICES

APÉNDICE A

En este apéndice se presentan las principales derivaciones del modelo electroreológico empleado en este trabajo. Las hipótesis principales, para su deducción, son las siguientes: (i) Fluido incompresible (densidad constante), (ii) El sistema se encuentra en estado no estacionario, i.e., la velocidad axial, el esfuerzo y el gradiente de presión dependen del tiempo, (iv) El flujo es unidireccional, i.e., el vector velocidad solo tiene una componente en la dirección axial, la componente radial y angular son cero. El vector velocidad puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = (0, 0, V_z(r,t)) \quad (\text{A.1})$$

el tensor gradiente de velocidad y su transpuesta toman la forma:

$$\nabla \mathbf{V} = \gamma_{rz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \nabla \mathbf{V}^T = \gamma_{rz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

los tensores de esfuerzo y el tensor rapidez de deformación pueden ser escritos de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{D} = \gamma_{rz} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

El tensor des esfuerzos físicamente nos da la distribución de las fuerzas por unidad de área en un elemento de control mientras que el tensor rapidez de deformación, nos describe la evolución temporal del tensor de deformación. La ecuación de movimiento en forma vectorial toma la forma:

$$\rho_i \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \rho_i \mathbf{g}; i = \{t, p\} \quad (\text{A.4})$$

despreciando los términos no-lineales, se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales lineales involucradas en la parte superior:

$$\rho_t \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_t + \rho_t \mathbf{g} \quad (\text{A.5})$$

y en la parte inferior se tiene:

$$\rho_b \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_b + \rho_b \mathbf{g} \quad (\text{A.6})$$

multiplicando por el operador temporal O_i

$$O_i = 1 + \lambda_i \frac{\partial}{\partial t}; i = \{t, b\} \quad (\text{A.7})$$

las Ecs. (A-5, A-6), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales lineales:

$$\rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = - \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla p + \eta_t \nabla^2 \mathbf{V} + \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho_t \mathbf{g} \quad (\text{A.8})$$

$$\rho_b \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = - \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla p + \eta_t \nabla^2 \mathbf{V} + \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho_b \mathbf{g} \quad (\text{A.9})$$

multiplicando por un vector unitario en la dirección de z, se tiene lo siguiente

$$\rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) = - \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla \left(p \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) + \eta_t \nabla^2 \left(\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) + \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \rho_t \left(\mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \right) \quad (\text{A.10})$$

la Ec. (A.10) toma la forma

$$\rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} V_z(r,t) = - \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{dp}{dz} + \eta_t \nabla^2 V_z(r,t) + \rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) g_z \quad (\text{A.11})$$

incluyendo la componente z del vector aceleración gravitacional en el gradiente de presión, e integrando con respecto a z, se tiene lo siguiente:

$$\int_L^{2L} \left(\rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \eta_t \nabla^2 \right) V_z(r,t) dz = - \int_{p_t}^{p_0} \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) dp \quad (\text{A.12})$$

simplificando esta expresión se tiene lo siguiente:

$$\left(\rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \eta_t \nabla^2 \right) V_z(r,t) L = - \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t} \right) (p_0 - p_t) \quad (\text{A.13})$$

repetiendo los mismos cálculos para la parte inferior, obtenemos una expresión similar a la Ec. (A.13):

$$\left(\rho_b \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} - \eta_b \nabla^2 \right) V_z(r,t) L = - \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t} \right) (p_b - p_0) \quad (\text{A.14})$$

Las Ecs. (A.13), (A.14) son las más importantes del presente análisis, por lo que son punto de partida en la deducción del modelo electro-reológico. Multiplicando la Ec. (A.13) por el operador $O_b = 1 + \lambda_b \partial / \partial t$ y la Ec. (A.14) y por el operador $O_t = 1 + \lambda_t \partial / \partial t$ se tiene lo siguiente:

$$\left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\rho_t \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} - \eta_t \nabla^2 \right) V_z(r,t)L = - \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) (p_0 - p_t) \quad (\text{A.15})$$

$$\left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\rho_b \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} - \eta_b \nabla^2 \right) V_z(r,t)L = - \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) (p_b - p_0) \quad (\text{A.16})$$

sumando las Ecs. (A.15) y (A.16) obtenemos la ecuación diferencial lineal, que describe la transferencia de momento en el sistema flexoeléctrico inmerso en las fases viscoelásticas:

$$\left\{ \left(\rho_t + \rho_b \right) \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) \eta_t + \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) \eta_b \right\} \nabla^2 \right\} V_z(r,t)L \quad (\text{A.17})$$

$$= - \left(1 + \lambda_b \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(1 + \lambda_t \frac{\partial}{\partial t}\right) (p_b - p_t)$$

factorizando la Ec. (A.17), se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \left(\rho_t + \rho_b \right) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_t) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_t) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \nabla^2 \right\} V_z(r,t)L \quad (\text{A.18})$$

$$= - \left(1 + (\lambda_b + \lambda_t) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) (p_b - p_t)$$

finalmente, tomando la parte radial del operador Laplaciano ∇_r^2 , y despreciando las variaciones angulares y axiales se tiene lo siguiente:

$$\left\{ \left(\rho_t + \rho_b \right) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_t) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} - \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_t) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \right\} V_z(r,t)L \quad (\text{A.19})$$

$$= - \left(1 + (\lambda_b + \lambda_t) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) (p_b - p_t)$$

integrando con respecto a r y utilizando la siguiente relación del flujo volumétrico

$$\left\{ -\pi (\rho_t + \rho_b) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_t) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^a dr r \int_0^r dr \bar{r} \right) V_z(r,t) - \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_t) \frac{\partial}{\partial t} \right\} Q \right\} \quad (\text{A.20})$$

$$= \frac{\pi a^4}{8L} \left(1 + (\lambda_b + \lambda_t) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_t \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) (p_b - p_t)$$

El flujo volumétrico puede ser expresado en función de la evolución de la curvatura:

$$\begin{aligned}
 & -\pi(\rho_t + \rho_b) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^a drr \int_0^r d\bar{r} \right) Vz(r,t) \\
 & + \frac{1}{2} \pi a^4 \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_b) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial t} H(t) = \tag{A.21} \\
 & \frac{\pi a^4}{8L} \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (p_b - p_t)
 \end{aligned}$$

simplificando la Ec. (A.21), se obtiene la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\pi(\rho_t + \rho_b) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^a drr \int_0^r d\bar{r} \right) Vz(r,t) \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \pi a^4 \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_b) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial t} H(t) \tag{A.22} \\
 & = + \frac{\pi a^4}{8L} \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Delta p(t)
 \end{aligned}$$

En la Ec. (A.22) la diferencia de presión $\Delta p(t)$, es la diferencia entre la presión en la membrana superior e inferior, i.e. $\Delta p(t) = p_t - p_b$, sustituyendo en la Ec. (A.22) la diferencia de presión de la membrana por la diferencia entre las fuerzas eléctrica y elástica de la membrana.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ -\pi(\rho_t + \rho_b) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^a drr \int_0^r d\bar{r} \right) Vz(r,t) \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \pi a^4 \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_b) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial t} H(t) \tag{A.23} \\
 & = + \frac{\pi a^4}{8L} \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left((C_r \mathfrak{I}) E(t) - \left[2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{I} \right] H(t) \right)
 \end{aligned}$$

finalmente, la Ec. (A.23) puede tomar la forma:

$$\left\{ -(\rho_t + \rho_b) \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^a drr \int_0^r drr \right) Vz(r,t) \right\} +$$

$$\frac{1}{2} a^4 \left\{ \eta_t + \eta_b + (\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_b) \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial t} H(t) +$$

$$\frac{a^4}{8L} \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (4MLH(t)) =$$

$$\frac{a^4 (C_f \mathfrak{S})}{8L} \left(1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_b \lambda_b \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E(t)$$
(A.24)

finalmente, el modelo electroreológico, puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\left\{ \left(\lambda_b \lambda_b + \frac{\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_b}{M} \right) \frac{d^2}{dt^2} + \left((\lambda_b + \lambda_b) + \frac{\eta_t + \eta_b}{M} \right) \frac{d}{dt} + 1 \right\} H(t)$$

$$= \frac{1}{M} \left(\lambda_b \lambda_b \frac{d^2}{dt^2} + 1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{d}{dt} + 1 \right) \left(\frac{a^4 (C_f \mathfrak{S})}{4L} E(t) - \frac{(\rho_t + \rho_b)}{a^4} \frac{d}{dt} I(t) \right)$$
(A.25)

en el modelo electroreológico definido en la Ec. (A.25), se han definido las siguientes cantidades:

$$I(t) = \left(\int_0^a drr \int_0^r drr \right) Vz(r,t)$$
(A.26)

$$4MLH(t) = 2\gamma_0 + (2k_c + \bar{k}_c) \mathfrak{S}$$
(A.27)

en ausencia de mecanismos inerciales, la Ec. (A.25) toma la forma del presente trabajo de investigación:

$$\left\{ \left(\lambda_b \lambda_b + \frac{\lambda_b \eta_b + \lambda_t \eta_b}{M} \right) \frac{d^2}{dt^2} + \left((\lambda_b + \lambda_b) + \frac{\eta_t + \eta_b}{M} \right) \frac{d}{dt} + 1 \right\} H(t)$$

$$= \frac{a^4 (C_f \mathfrak{S})}{4L} \frac{1}{M} \left(\lambda_b \lambda_b \frac{d^2}{dt^2} + 1 + (\lambda_b + \lambda_b) \frac{d}{dt} + 1 \right) (E(t))$$
(A.28)

sustituyendo en las Ec. (A.28) las variables adimensionales, definidas en el capítulo (3), se obtiene el modelo electroreológico correspondiente a este trabajo, descrito en los capítulos 2 y 3 respectivamente.

APÉNDICE B

En este apéndice se presenta la solución completa de la curvatura promedio en el estado transitorio, se procede de la siguiente manera. El modelo dinámico que representa la curvatura promedio está dado por la siguiente expresión:

$$\left(b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = \left(a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) (1 - \omega k b_2^*) \right) \cos(\omega \bar{t}) + \left(-a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \omega \right) \text{sen}(\omega \bar{t}) \quad (\text{B.1})$$

$$= A \cos(\omega \bar{t}) + B \text{sen}(\omega \bar{t})$$

La Ec. (B.1) es una ecuación diferencial de segundo orden, la cual puede ser resuelta por el método de coeficientes indeterminados. Por lo tanto se postula que la solución general de la Ec. (B.1) puede ser escrita como la suma de dos contribuciones, una solución homogénea y una particular, i.e.

$$\bar{H}(\bar{t}) = \bar{H}_H(\bar{t}) + \bar{H}_P(\bar{t}) \quad (\text{B.2})$$

Solución particular

La solución particular se obtiene de la siguiente manera:

$$\left(b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = 0 \quad (\text{B.3})$$

el polinomio característico toma la forma:

$$p(r) = b_2^* r^2 + b_1^* r + 1 \quad (\text{B.4})$$

las raíces de la Ec. (B.3) característica, son obtenidas igualando el polinomio a cero, i.e. $p(m)=0$;

$$b_2^* r^2 + b_1^* r + 1 = 0 \quad (\text{B.5})$$

la solución de la ecuación de segundo orden algebraico está dada por

$$r_1 = \frac{-b_1^* + \sqrt{b_1^{*2} - 4b_2^*}}{2b_2^*} < 0; \quad r_2 = \frac{-b_1^* - \sqrt{b_1^{*2} - 4b_2^*}}{2b_2^*} < 0 \quad (\text{B.6})$$

y las solución particular general, es la suma de dos soluciones particulares, la primera de ellas, se propone de la siguiente manera:

$$\bar{H}_{p1}(\bar{t}) = A_{11} \cos(\omega \bar{t}) + A_{12} \text{sen}(\omega \bar{t}) \quad (\text{B.7})$$

la segunda solución puedes ser descrita en una forma similar:

$$\bar{H}_{p2}(\bar{t}) = B_{11} \cos(\omega \bar{t}) + B_{12} \text{sen}(\omega \bar{t}) \quad (\text{B.8})$$

La solución general corresponde a la solución homogénea más las dos soluciones particulares, mediante la técnica de coeficientes indeterminados se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= \bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11}) \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 &= \bar{H}_1 - \bar{\omega}(A_{12} + B_{12}) \end{aligned} \quad (B.9)$$

que en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11}) \\ \bar{H}_1 - \bar{\omega}(A_{12} + B_{12}) \end{pmatrix} \quad (B.10)$$

la solución de este sistema se puede obtener mediante la regla de Kramer

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\begin{vmatrix} \bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11}) & 1 \\ \bar{H}_1 - \bar{\omega}(A_{12} + B_{12}) & r_2 \end{vmatrix}}{r_2 - r_1} = \frac{r_2 (\bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11})) - (\bar{H}_1 - \bar{\omega}(A_{12} + B_{12}))}{r_2 - r_1} \\ C_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & \bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11}) \\ r_1 & \bar{H}_1 - \bar{\omega}(A_{12} + B_{12}) \end{vmatrix}}{r_2 - r_1} = \frac{(\bar{H}_1 - \bar{\omega}(A_{12} + B_{12})) - r_1 (\bar{H}_0 - (A_{11} + B_{11}))}{r_2 - r_1} \end{aligned} \quad (B.11)$$

los valores de A_{11} y A_{12} se obtienen mediante el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left. \begin{aligned} b_2^* \frac{d^2 \bar{H}p_1(\bar{t})}{d\bar{t}^2} &= b_2^* \left(-\bar{\omega}^2 A_{11} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) - \bar{\omega}^2 A_{12} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \right) \\ + b_1^* \frac{d\bar{H}p_1(\bar{t})}{d\bar{t}} &= b_1^* \left(-\bar{\omega} A_{11} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) + \bar{\omega} A_{12} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) \right) \\ + \bar{H}p_1(\bar{t}) &= A_{11} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + A_{12} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \end{aligned} \right\} = A \cos(\bar{\omega}\bar{t}) \quad (B.12)$$

en forma matricial. El sistema descrito por la Ec. (B.12) toma la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 - \bar{\omega}^2 b_2^* & b_1^* \bar{\omega} \\ -b_1^* \bar{\omega} & 1 - b_2^* \bar{\omega}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \quad (B.13)$$

la solución de este sistema de ecuaciones algebraicas es:

$$A_{11} = A \frac{1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}}{\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right)^2 + \left(b_1^* \bar{\omega}\right)^2}$$

$$A_{12} = A \frac{b_1^* \bar{\omega}}{\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right)^2 + \left(b_1^* \bar{\omega}\right)^2}$$
(B.14)

sumando las dos expresiones se tiene la primera solución particular , de la misma manera, para la segunda solución 'particular

$$\left. \begin{aligned} b_2^* \frac{d^2 \bar{H}p_1(\bar{t})}{d\bar{t}^2} &= b_2^* \left(-\bar{\omega}^{-2} B_{11} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) - \bar{\omega}^{-2} B_{12} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \right) \\ + b_1^* \frac{d\bar{H}p_1(\bar{t})}{d\bar{t}} &= b_1^* \left(-\bar{\omega} B_{11} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) + \bar{\omega} B_{12} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) \right) \\ + \bar{H}p_1(\bar{t}) &= B_{11} \cos(\bar{\omega}\bar{t}) + B_{12} \sin(\bar{\omega}\bar{t}) \end{aligned} \right\} = B \sin(\bar{\omega}\bar{t})$$
(B.15)

igualando los coeficientes se tiene lo siguiente

$$-\bar{\omega} b_1^* B_{11} + \left(1 - \bar{\omega}^{-2} b_2^*\right) B_{12} = B$$

$$\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right) B_{11} + b_1^* \bar{\omega} B_{12} = 0$$
(B.16)

que en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} -b_1^* \bar{\omega} & \left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right) \\ \left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right) & b_1^* \bar{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$
(B.17)

resolviendo y sumando las soluciones se obtiene la segunda solución particular

$$B_{11} + B_{12} = -B \frac{b_1^* \bar{\omega} + \left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right)}{\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right)^2 + \left(b_1^* \bar{\omega}\right)^2} = a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \left(\frac{-\bar{\omega} \left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2} + b_1^* \bar{\omega}\right)}{\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^{-2}\right)^2 + \left(b_1^* \bar{\omega}\right)^2} \right)$$
(B.18)

finalmente sustituyendo se llega a la solución es estado no estacionario.

APÉNDICE C

En este apéndice presentamos los pasos principales en la deducción de la respuesta mecánica oscilatoria. La ecuación básica se presenta a continuación:

$$\left(b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = \left(a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) (1 - kb_2^* \bar{\omega}^2) \right) \cos(\bar{\omega} \bar{t}) + \left(-a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \bar{\omega} \right) \text{sen}(\bar{\omega} \bar{t}) \quad (\text{C.1})$$

$$= A \cos(\bar{\omega} \bar{t}) + B \text{sen}(\bar{\omega} \bar{t})$$

descomponiendo la curvatura en fase y fuera de fase con el campo eléctrico, se tiene lo siguiente:

$$\bar{H}(\bar{t}) = \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \cos(\bar{\omega} \bar{t}) + \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \text{sen}(\bar{\omega} \bar{t}) \quad (\text{C.2})$$

introduciendo esto en la Ecuación diferencial se tiene lo siguiente:

$$\left(b_2^* \frac{d^2}{dt^2} + b_1^* \frac{d}{dt} + 1 \right) \bar{H}(\bar{t}) = \left(\bar{H}_{io}(\bar{\omega}) + \bar{\omega} b_1^* \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) - \bar{\omega}^2 b_2^* \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \right) \cos(\bar{\omega} \bar{t}) \quad (\text{C.3})$$

$$+ \left(\bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) - \bar{\omega} b_1^* \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) - \bar{\omega}^2 b_2^* \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \right) \text{sen}(\bar{\omega} \bar{t}) = A \cos(\bar{\omega} \bar{t}) + B \text{sen}(\bar{\omega} \bar{t})$$

simplificando e igualando coeficientes, se tiene:

$$\left(1 - \bar{\omega}^2 b_2^* \right) \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) + \bar{\omega} b_1^* \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) = A \quad (\text{C.4})$$

$$-\bar{\omega} b_1^* \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) + \left(1 - \bar{\omega}^2 b_2^* \right) \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) = B$$

en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \left(1 - \bar{\omega}^2 b_2^* \right) & \bar{\omega} b_1^* \\ -\bar{\omega} b_1^* & \left(1 - \bar{\omega}^2 b_2^* \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) \\ \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

resolviendo el sistema matricial, se tiene lo siguiente:

$$\bar{H}_{io}(\bar{\omega}) = \frac{\Delta_{\bar{H}_{oi}(\bar{\omega})}}{\Delta} = \frac{A \left(1 - \bar{\omega}^2 b_2^* \right) - B \bar{\omega} b_1^*}{\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^2 \right)^2 + \left(b_1^* \bar{\omega} \right)^2} \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) = \frac{\Delta_{\bar{H}_{io}(\bar{\omega})}}{\Delta} = \frac{B \left(1 - \bar{\omega}^2 b_2^* \right) + A \bar{\omega} b_1^*}{\left(1 - b_2^* \bar{\omega}^2 \right)^2 + \left(b_1^* \bar{\omega} \right)^2}$$

y simplificando la expresión anterior, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{io}(\bar{\omega}) &= a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \frac{1 + (b_1^* - (1+k)b_2^*)\bar{\omega}^{-2} + kb_2^{*2}\bar{\omega}^{-4}}{(1-\bar{\omega}^{-2}b_2^*)^2 + (\bar{\omega}b_1^*)^2} \\ \bar{H}_{oi}(\bar{\omega}) &= a_0^* \left(\frac{1-k}{k} \right) \frac{(b_1^* - 1)\bar{\omega} + (1-kb_1^*)b_2^*\bar{\omega}^{-3}}{(1-b_2^*\bar{\omega}^{-2})^2 + (b_1^*\bar{\omega})^2} \end{aligned} \quad (C.7)$$

las Ecs. (C.7) representan los módulos de curvatura de la curvatura de la membrana en la curvatura promedio en la prueba de flujo oscilatorio.

APÉNDICE D

En este apéndice se deduce la relación que existe entre el flujo volumétrico inducido por la oscilación de la membrana flexo-eléctrica y la rapidez de la curvatura promedio de la membrana. La relación se deduce para un domo esférico mostrado en la Figura 20 mostrada a continuación.

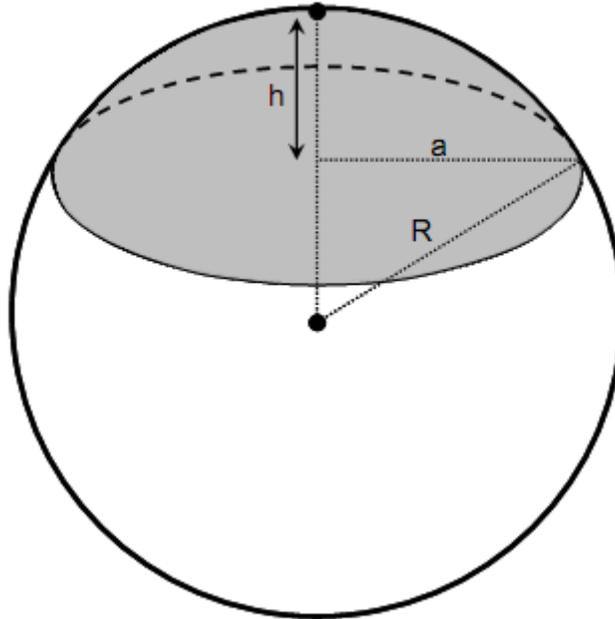


Figura 20. “Geometría de la membrana flexoeléctrica”

Por el teorema de Pitágoras se obtiene la siguiente relación:

$$R^2 = a^2 + (R - h)^2 \quad (D.1)$$

$$a^2(h) = 2Rh - h^2 \quad (D.2)$$

para calcular el volumen del domo esférico se sabe que el área de la sección transversal del domo es un círculo que es función de la altura h , utilizando la definición de volumen

$$V = \int_a^b A(h)dh \quad (D.3)$$

se tiene la siguiente expresión

$$V = \int_a^b A(h)dh = \int_0^h \pi a(h)^2 dh = \int_0^h \pi (2Rh - h^2) dh \quad (D.4)$$

donde finalmente se obtiene

$$V(h) = \frac{\pi}{2} a^2 h + \frac{\pi}{6} h^3 \quad (D.5)$$

Debido a que la altura es función del tiempo el volumen también dependerá del tiempo por lo que se tiene

$$V(h(t)) = \frac{\pi}{2} a^2 h(t) + \frac{\pi}{6} h(t)^3 \quad (D.6)$$

El flujo volumétrico se define en términos de la derivada temporal del volumen

$$\dot{V}(t) = \frac{dV(t)}{dt} \quad (D.7)$$

por lo tanto, el flujo volumétrico en el domo esférico es

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi}{2} a^2 h(t) + \frac{\pi}{6} h(t)^3 \right) = \frac{\pi}{2} a^2 \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right] \frac{dh(t)}{dt} \quad (D.8)$$

por otro lado, la curvatura media de una esfera de radio R es el inverso del radio i.e. $H = 1/R$ por lo que se tiene usando la relación dada en la Ec. (D.2)

$$R = \frac{a^2 + h(t)^2}{2h(t)} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{2h(t)}{a^2 + h(t)^2} = \frac{2h(t)}{a^2 \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right]} \quad (D.9)$$

obteniendo la curvatura promedio $H(t)$ como:

$$H(t) = \frac{2h(t)}{a^2 \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right]} \quad (D.10)$$

despejando y derivando $h(t)$ de la Ec. (D.10) se obtiene

$$\left(\frac{1}{a} - H(t) \frac{h(t)}{a} \right) \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left\{ a \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right] \right\} \frac{dH(t)}{dt} \quad (D.11)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\left\{ a \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right] \right\}}{\left(\frac{1}{a} - H(t) \frac{h(t)}{a} \right)} \frac{dH(t)}{dt}$$

sustituyendo la Ec. (D.11) en la Ec. (D.8) se obtiene finalmente la relación buscada

$$\dot{V}(t) = \frac{\pi}{4} a^2 \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right] \frac{\left\{ a \left[1 + \left(\frac{h(t)}{a} \right)^2 \right] \right\}}{\left[\frac{1}{a} - H(t) \left(\frac{h(t)}{a} \right) \right]} \frac{dH(t)}{dt} \quad (D.12)$$

si se supone que el factor $\frac{h(t)}{a} \ll 1$, se obtiene la relación usada en este trabajo, entre el flujo volumétrico y el cambio temporal de la curvatura promedio con respecto al tiempo:

$$\dot{V}(t) = \frac{\pi}{4} a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (D.13)$$

la Ec. (D.13) esta deducida para medio ciclo (solamente el domo superior), debido a que la membrana oscila también hacia abajo creando un domo esférico inferior, el flujo volumétrico total es el doble del flujo volumétrico deducido anteriormente, por lo tanto:

$$\dot{V}(t)_{Th(t)} = 2 \dot{V}(t) = \frac{\pi}{2} a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (D.14)$$

finalmente, la Ec. (D.14) es rescrita como:

$$\dot{V}(t) = -\frac{\pi}{2} a^4 \frac{dH(t)}{dt} \quad (D.15)$$

el signo de la ultima ecuación es debido a que el flujo volumétrico debe de ser positivo.

BIBLIOGRAFÍA

- Abou-Dakka, M., Herrera-Valencia, E.E., & Rey, A.D. 2012 Linear oscillatory dynamics of flexoelectric membranes embedded in viscoelastic media with applications to outer hair cells. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.***185-186** 1-17. (doi: 10.1016/j.jnnfm.2012.07.007)
- Barnes, H.A., Hutton, J.F., & Walters, K. 1989 An introduction to rheology, Amsterdam: Elsevier.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C. & Hassager, O. 1987 *Dynamics of polymeric liquids, vol. 1*. New York: John Wiley & Sons.
- Broughton, B.J., Clarke, M.J., Blatch, A.E., & Coles, H.J. 2005 Optimized flexoelectric response in a chiral liquid-crystal phase device. *J. Appl. Phys.***98** 034109/1-034109/6. (doi: 10.1063/1.2006227)
- Brownell, W.E. 1985 Evoked mechanical responses of isolated cochlear outer hair cells. *Science* **227** 194-196. (doi: 10.1126/science.3966153)
- Calderas, F., Sánchez-Solis, A., Maciel, A. & Manero, O. 2009 The transient flow of the PETPEN-Montmorillonite clay Nanocomposite, *Macromol Symp. MACROMEX* **283-284** 354-360. (doi: 10.1002/masy.200950942)
- de Gennes, P.G. & Prost, J. 1994 *The Physics of Liquid Crystals*. Oxford, UK: Second Edition, Oxford University Press.
- Ehrenstein, D. & Iwasa, K.H. 1996 Viscoelastic relaxation in the membrane of the auditory outer hair cell. *J. Biophys.* **71** 1087-1094. (doi: 10.1016/S0006-3495)

- Fikus, M. & Pawlowski, P. 1989 Bioelectrorheological model of the cell. 2. Analysis of creep and its experimental verification. *J. Theor. Biol.* **137** 365-373. (doi: 10.1016/S0022-5193(89)80035-9)
- Griffiths D.J. 1999 Introduction to electrodynamics, Third edition, New Jersey: Prentice Hall.
- Harden, J., Chambers, M., Verduzco, R., Luchette, P., Gleeson, J.T., Sprunt, S. & Jákli, A. 2010 Giant flexoelectricity in bent-core nematic liquid crystals elastomers. *Appl. Phys. Lett.* **96** 102907/1-102907/3. (doi:10.1063/1.3358391)
- Harden, J., Teeling, R., Gleeson, J.T., Sprunt, S. & Jákli, A. 2008 Converse flexoelectricity effect in a bent-core nematic liquid crystal. *Phys. Rev.* **E78** 031702/1-031702/5. (doi: 10.1103/PhysRevE.78.031702)
- Hawkins, R.D. & Lovett, M. 2004 The developmental genetics of auditory hair cells. *Hum. Mol. Genet.* **13** R289-R296. (doi: 10.1093/hmg/ddh249)
- Herrera-Valencia E.E. & A. D. Rey 2014 Actuation of flexoelectric membranes in viscoelastic fluids with applications to outer hair cells. *Phil. Trans. R. Soc. A.* **372**: 20130369/1-28 (doi: 10.1098/rsta.2013.0369)
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E., Manero, O. & Mena, B. 2009 Effect of random longitudinal vibrations pipe on the Poiseuille flow of a complex liquid. *Rheol. Acta* **48** 779-800. (doi:10.1007/s00397-009-0372-x)
- Herrera, E.E., Calderas, F., Chavez, A.E. & Manero, O. 2010 Study on the pulsating flow of worm-like micellar solution. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 165 174-183. (doi: 10.1016/j.jnnfm.2009.11.001)

- Messini, N., Karabarbounis, A., Philippetis, A.L. & Margaritis, L. H. 2002 Mechanism for action of electromagnetics field on cells. *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **298** 95-102. (doi:10.1016/S0006-291X(02)02393-8)
- Middleman, S. Fundamentals of polymer Processing, McGraw-Hill
- Nguyen, S.T., Dormieux, L., Pape, Y.L. & Sanahuja, J. 2011 A burger model for the effective behavior of a microcracked viscoelastic solid. *Int. J. Damage Mech.* **20** 1116-1129. (doi: 10.1177/1056789510395554)
- Oghalai, J.S., Zhao, H.B., Kutz, J.W. & Brownell, W.E. 2000 Voltage-and tension-dependent lipid mobility in the outer hair cell plasma membranes. *Science* **287** 658-661. (doi.10.1126/science.287.5453.658)
- Patel, J.S., Meyer, R.B., 1987 Flexoelectric electro-optics of a cholesteric liquid crystals *Phys. Rev. Lett.* **58** 1538-1540. doi:10.1103/PhysRevLett.58.1538
- Panagopoulos, D.J., Messini, N., Karabarbounis, A., Philippetis, A.L & Margaritis, L.H 2000 A mechanism for action of oscillating electric fields on cells. *Biochem. Biophys. Res. Commun.* **272** 634-640. (doi: 10.1006/bbrc.2000.2746)
- Petrov, A. G. 2006 Electricity and mechanics of bio-membrane systems: flexoelectricity in living membranes. *Anal. Chim. Acta* **568**, 70-83. (doi:10.1016/j.aca.2006.01.108)
- Petrov, A. G. 2001 Flexoelectricity of model and living membranes. *BBA-Biomembranes* **1561**, 1-25. (doi: 10.1016/S0304-4157(01)00007-7)
- Petrov, A. G. 1999 *The lyotropic state of matter: Molecular Physics and Living Matter Physics*.Amsterdan, The Netherlands: Gordon and Breach Science Publisher.

- Quintanilla, R & Rajagopal, K.R. 2006 On Burgers fluids. *Math.Meth. Appl. Sci.***29** 2133-2147. (doi: 10.1002/mma.760)
- Rabbits, R.D., Clifford, S., Breneman, K.D., Farrell, B. & Brownell, W.E. 2009 Power efficiency of outer hair cell somatic electromotility. *Plos Comput. Biol.***5** 1-14. (doi:10.1371/journal.pcbi.1000444)
- Raphael, R.M., Popel, A.S. & Brownell, W. E. 2000 A membrane bending model of outer hair cell electromotility. *Biophys. J.* **78** 2844-2862. (doi: 10.1016/S0006-3495(00)76827-5)
- Rey, A.D. 2008 Nonlinear actuator model for flexoelectric membranes. *Int. J. of Design Nature Ecodynam.***3** 28-38. (doi: 10.2495/D-NE-V3-N1-28-38)
- Rey, A.D. 2006a Liquid crystals model of membrane flexoelectricity. *Phys. Rev. E* **74** 011710/1-011710/11. (doi: 10.1103/PhysRevE.74.011710)
- Rey, A. D. 2006b Liquid crystals model of membrane flexoelectricity. *Virtual J. Biol. Phys. Res.***12** 011710/1-011710/11. (doi: 10.1103/PhysRevE.74.011710)
- Rey, A.D. 2006c Polar fluid model of viscoelastic membranes and interfaces. *J. Coll. Int. Sci.* **304** 226-238. (doi: 10.1016/j.jcis.2006.08.027)
- Rey, A.D. 2008 Linear Viscoelastic Model for Bending and Torsional Modes in Fluid Membranes. *Rheol. Acta* **47** 861-871. (doi: 10.1007/s00397-008-0259-2)
- Rey, A.D. 2005 Mechanics of soft solids-liquid crystals interfaces. *Phys. Rev. E* **72** 0117061-01170616. (doi:10.1103/PhysRevE.72.011706)
- Rey, A.D. 2007 Capillary models for liquid crystal fibers, membranes, films, and drops. *Soft Matter* **2** 1349-1368. (doi: 10.1039/B704248P)

- Rey, A.D. 2010 Liquid crystals models of biological materials and processes. *Soft Matter* **6** 3402-3429. (doi: 10.1039/B921576J)
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2010 Micromechanics model of liquid crystals anisotropic triple lines with applications to contact line self-assembly. *Langmuir* **26** 1349-1368. (doi: 10.1021/la1019668)
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012a *Rheological theory and simulations of surfactant nematic liquid crystals, in Self-Assembled Supramolecular Architectures: Lyotropic Liquid Crystals*. New Jersey, USA: John Wiley & Sons Inc. Hoboken. (eds N. Garti, P. Somasundaran and R. Mezzenga). doi: 10.1002/9781118336632.ch2
- Rey, A.D. & Herrera-Valencia, E.E. 2012b Liquid crystal models of biological materials and silk spinning. *Biopolymers* **97** 374-396. (doi: 10.1002/bip.21723)
- Rey, A.D. Mojdeh Golmohammadi & Herrera-Valencia, E.E 2011 A model for mesophase wetting thresholds of sheets, fibers and fiber bundles. *Soft Matter* 5002-5009. (doi: 10.1039/c1sm05113j)
- Sachs, F., Brownell, W.E. & Petrov A.G., 2009 Membrane electromechanics in biology, with a focus on hearing. *MRS Bull* **34** 665-670. (doi: 10.1557/mrs2009.178)
- Spector, A.A., Deo, N., Ratnanather, J.T. & Raphael, R.M. 2006 Electromechanical models of the outer hair cell composite membrane. *J. Membr. Biol.* **209** 135-152. (doi: 10.1007/s00232-005-0843-7)