(1-2)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

TRAYECTORIAS CERRADAS EN EL PENDULO ESFERICO

por

ANTONIO ROMERO JUAREZ

Tesis presentada como requisito parcial para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

de la

FACULTAD DE CIENCIAS

México, D. F., 1942

I N D I C E

I

EL PROBLEMA. ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO

1. El problema. - Imaginemos una partícula restringida a moverse en una superficie esférica y solicitada por una fuerza constante; se tiene entonces lo que se llama un péndulo esférico. -- Prácticamente se tiene una aproximación de un péndulo esférico en el sistema constituído por una masa pequeña y pesada unida a una varilla rígida y de peso despreciable que puede fijarse en uno de sus puntos.

El problema que se tiene es el problema dinámico de describir analíticamente el movimiento de la partícula en la superficie esférica; en particular, en este trabajo se investigan las condiciones en las que el péndulo describe trayectorias cerradas (o periódicas) y la manera de encontrar los elementos de estas trayectorias.

2. Las ecuaciones del movimiento. - Se va a deducir directamente la ecuación de las trayectorias recurriendo al principio de la menor acción;[1] éste principio, enunciado por vez primera por Maupertuis expresa que la acción A a lo largo de una curva (C) entre los puntos P y Q, definida como

[1] McConnell, "Applications of the Absolute Differential Calculus," (Blackie and Son; London, 1936), págs. 228-231.

$$A = \sqrt{2M} \int_{P \atop (C)}^{Q} \sqrt{h - V}\, dS, \qquad (1)$$

en donde dS es el elemento lineal, h una constante, M la masa de la partícula y V su energía potencial, es estacionaria para la trayectoria de la partícula. Además, h es la energía total a lo largo de la trayectoria; resulta de lo último que a lo largo de la trayectoria real (L) la acción es

$$A = \int_{P \atop (L)}^{Q} Mv\, dS = \int_{P \atop (L)}^{Q} p\, dS \qquad (2)$$

si v es la velocidad de la partícula y p su cantidad de movimiento.

Hagamos ahora una transformación del espacio en donde se mueve la partícula a un espacio definido por el elemento lineal

$$ds^2 = 2M(h - V)\, dS^2, \qquad (3)$$

donde dS es el elemento lineal en el espacio del movimiento; resulta entonces:

$$A = \int_{A \atop (L')}^{B} ds,$$

o sea que la acción es igual a la "longitud" de la curva (L'), representativa de la trayectoria en el nuevo espacio; luego, las trayectorias están representadas en el nuevo espacio por geodésicas. El problema dinámico de encontrar las trayectorias de una partícula en un campo de fuerza dado se reduce pues al de encon--

trar las geodésicas en una superficie o hipersuperficie de elemento lineal conocido.

Es interesante, además, hacer notar que el principio de Fermat es traducción del principio de la menor acción de Maupertuis cuando se introducen las relaciones entre onda y corpúsculo de la Mecánica Ondulatoria. El primero dice que el tiempo que emplea un fotón o un rayo luminoso para ir de P a Q por diferentes caminos, es estacionario para la trayectoria real del rayo, ésto es, que

$$\delta \int_{\substack{P \\ (L)}}^{Q} \frac{dS}{v} = 0;$$

pero

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{\nu\lambda} = \frac{1}{h\nu}\frac{h}{\lambda}$$

y además

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad E = h\nu,$$

donde como ordinariamente, h es la constante de Planck, E la energía del fotón, p su cantidad de movimiento y ν la frecuencia de la onda asociada;

$$\therefore \quad \delta \int_{\substack{P \\ (L)}}^{Q} \frac{dS}{v} = \delta \frac{1}{E} \int_{\substack{P \\ (L)}}^{Q} p \, ds = 0,$$

y se ve entonces que ambos principios no son más que una misma cosa, lográndose establecer así una conexión entre la Mecánica y la Optica.

Sea R la longitud del péndulo y g la aceleración del campo que sobre él actúa, magnitudes que se considerarán como datos del problema. En el caso que nos ocupa el elemento dS está definido utilizando coordenadas esféricas (R, θ, φ) por

$$dS^2 = R^2\, d\theta^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2.$$

Además, si se toma el plano ecuatorial $z = 0$ como plano de referencia para medir la energía potencial,

$$V = Mgz = MgR \cos\theta;$$

entonces, según (3),

$$ds^2 = 2M(h - MgR\cos\theta)\, R^2 \operatorname{sen}^2\theta \left[\frac{d\theta^2}{\operatorname{sen}^2\theta} + d\varphi^2\right]. \qquad (4)$$

La superficie caracterizada por este elemento lineal, cuya forma general, en términos de las coordenadas curvilíneas ortogonales - u y v, es

$$ds^2 = (U - V)\left[U_1^2\, du^2 + V_1^2\, dv^2\right],$$

donde $U = U(u), \quad U_1 = U_1(u),$

y $V = V(v), \quad V_1 = V_1(v),$

es una superficie de Liouville.[2]

Las geodésicas en estas superficies son:

[2] Eisenhart, "A Treatise on the Differential Geometry of -- Curves and Surfaces," (Ginn and Co.; Boston, 1909), pág. - 218.

$$- \frac{1}{2} \int \frac{U_1 \, du}{\sqrt{U - a_1}} \pm \frac{1}{2} \int \frac{V_1 \, dv}{\sqrt{a_1 - V}} = b_1,$$

donde a_1 y b_1 son constantes arbitrarias.

En el caso particular de (4) las geodésicas serán:

$$\varphi = \pm \int \frac{C \, d\theta}{\operatorname{sen} \theta \sqrt{2M(h - MgR \cos\theta) R^2 \operatorname{sen}^2\theta - C^2}} + C_1, \qquad (5)$$

donde C y C_1 son constantes arbitrarias.

Esta es la ecuación de las trayectorias del péndulo esférico en coordenadas esféricas θ y φ. Para M, h, g y R dados, a cada valor de C corresponde una trayectoria. En particular, si $C = 0$, se tiene el caso ordinario del péndulo oscilante en un plano y la trayectoria es un meridiano.

La ecuación (5) también se puede escribir, multiplicando numerador y denominador del integrando por $R^2 \operatorname{sen} \theta$ y haciendo transformaciones obvias,

$$\varphi = \pm \int \frac{CR \, dz}{(R^2 - z^2) \sqrt{2M(h - Mgz)(R^2 - z^2) - C^2}} + C_1. \qquad (6)$$

Encontremos el significado de la constante arbitraria C. En la superficie de elemento lineal

$$ds^2 = E \, d\theta^2 + G \, d\varphi^2,$$

la dirección superficial $(d\theta, d\varphi)$ hace un ángulo α con las curvas θ = constante, tal que

$$\cos \alpha = \sqrt{G}\,\frac{d\varphi}{ds}$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{E}\,\frac{d\theta}{ds},$$

$$\therefore \tan \alpha = \sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{d\theta}{d\varphi}.$$

Para una trayectoria, el ángulo α se encuentra sustituyendo $\frac{d\theta}{d\varphi}$ por el obtenido de la ecuación (5):

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{1}{C} \operatorname{sen} \theta \sqrt{2M(h - MgR \cos\theta)\, R^2 \operatorname{sen}^2\theta - C^2}$$

y como en la esfera

$$\sqrt{\frac{E}{G}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta},$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{C} \sqrt{2M(h - MgR \cos\theta)\, R^2 \operatorname{sen}^2\theta - C^2};$$

si para un punto de la trayectoria en que $\theta = \theta_0$ y $\varphi = \varphi_0$ se tiene $\tan \alpha = 0$,

$$C^2 = 2M(h - MgR \cos \theta_0)\, R^2 \operatorname{sen}^2\theta_0$$

$$= M^2 v_0^2\, R^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0,$$

$$\therefore C = M\, v_0\, R \operatorname{sen} \theta_0$$

y se ve entonces que C es el momento de la cantidad de movimiento para $\theta = \theta_0$ con respecto a OZ; pero en virtud de un teorema bien conocido de Dinámica podemos afirmar que en el caso del péndulo esférico el momento de la cantidad de movimiento con respecto a OZ es constante, ya que se tiene en general

$$\frac{d\Omega}{dt} = M_f,$$

donde Ω es el momento de la cantidad de movimiento con respecto a un eje cualquiera, t el tiempo y M_f la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al mismo eje, y puesto que en nuestro problema $M_f = 0$ para OZ. Esto nos permite, dado h,C y un punto cualquiera (θ_1, φ_1) determinar $\bar{v}$; es decir, que si estamos interesados en las trayectorias cerradas y podemos determinar por algún medio los valores de C correspondientes a estas trayectorias, estamos capacitados para saber si las condiciones iniciales de posición y velocidad llenan los requisitos necesarios para que la órbita determinada por esas condiciones sea cerrada.

En virtud de que C es el momento de la cantidad de movimiento con respecto a OZ se puede escribir la relación

$$M(R^2 - z^2)\frac{d\varphi}{dt} = C,$$

$$\therefore \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{M(R^2 - z^2)}. \tag{7}$$

Teniendo en cuenta (6) se deduce de aquí:

$$R\frac{dz}{dt} = \frac{1}{M}\sqrt{2M(h - Mgz)(R^2 - z^2) - C^2}. \tag{8}$$

Para eliminar en las ecuaciones (6), (7) y (8) las dimensiones físicas hagamos las sustituciones siguientes:

$$\mu = \frac{z}{R}, \qquad \gamma = \frac{h}{MgR}, \qquad c = \frac{C}{MR\sqrt{gR}}$$

y dichas ecuaciones se transforman en

$$\varphi = \int \frac{c d\mu}{(1 - \mu^2)\sqrt{2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2}} + C_1, \qquad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c\sqrt{\frac{R}{g}}}{1 - \mu^2}, \qquad (10)$$

$$\sqrt{\frac{R}{g}}\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2}. \qquad (11)$$

Es fácil ver que μ, γ y c son números abstractos; ahora, si se toma como unidad de longitud la longitud R del péndulo y como unidad de aceleración la producida por el campo que actúa en él, lo que implica, como puede demostrarse en seguida, que la unidad de tiempo sea

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}},$$

las ecuaciones (9), (10) y (11) toman la siguiente forma si se designa con la misma letra t la nueva variable que depende del tiempo:

$$\varphi = \int \frac{c\, d\mu}{(1 - \mu^2)\sqrt{2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2}} + C_1, \qquad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{1 - \mu^2}, \qquad (13)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2}, \qquad (14)$$

con lo cual se ha logrado que aparezca únicamente el carácter métrico del movimiento.

II

FUNCIONES ELIPTICAS

Las integrales a que dan lugar las últimas ecuaciones son integrales elípticas. A continuación se dan algunas definiciones sobre funciones elípticas y se demuestran las propiedades que interesan en este trabajo.

1. Funciones de Weierstrass. - En la teoría de Weierstrass de las funciones elípticas[3] se generan éstas de una función de la variable compleja u, análoga en ciertos aspectos a $\operatorname{sen} u$, regular en todos los puntos a distancia finita y admitiendo como ceros los puntos

$$u = 0$$

$$u = 2m\omega + 2n\omega', \qquad (m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

donde ω y ω' son dos constantes cuya razón no es real, llamada función sigma, definida por:

$$\sigma(u) = u \prod_{m,n}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \tag{15}$$

donde $w = 2m\omega + 2n\omega'$, m y n no siendo simultáneamente nulos, circunstancia que se indica con el acento puesto al signo del producto.

---

[3] P. Appell y E. Lacour, "Principes de la Théorie des Fonctions Elliptiques et Applications," (Gauthier-Villars; Paris, 1897), págs. 22 y sigs.

Se puede demostrar que $\sigma(u)$ tiene ceros únicamente en los puntos indicados y que estos ceros son de primer orden.[4] El producto de $\sigma(u)$ converge uniforme y absolutamente[5] en cualquier dominio cerrado de u.

La derivada logarítmica de $\sigma(u)$ es la función $\zeta(u)$:

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u) = \zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right], \tag{16}$$

con $w = 2m\omega + 2n\omega'$, m y n no simultáneamente nulos.

La función elíptica elemental en la teoría de Weierstrass es la función $P(u)$ (pe u), definida por

$$P(u) = -\frac{d\zeta}{du} = \frac{1}{u^2} + \Sigma' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]. \tag{17}$$

Las funciones $\sigma(u)$ y $\zeta(u)$ no son doblemente periódicas; en cambio se puede demostrar a partir de la definición (17) que $P(u)$ es doblemente periódica con períodos 2ω y $2\omega'$, ésto es, que

$$\begin{aligned} P\,(u + 2\omega) &= P\,(u), \\ P\,(u + 2\omega') &= P\,(u). \end{aligned} \tag{18}$$

2. <u>Propiedades que interesan de $\sigma(u)$ y $\zeta(u)$.</u> Integremos las ecuaciones (18):

---

[4] K. Knopp, "Teoría de Funciones," (Edit. Labor; Barcelona, 1926), pág. 188.

[5] Whittaker and Watson, "A Course of Modern Analysis," (Cambridge, University Press; 4th ed., 1940, repr.), pág. 447.

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\eta,$$
$$\zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\eta', \qquad (19)$$

donde η y η' son constantes arbitrarias; si se hace $u = -\omega$ en la primera y $u = -\omega'$ en la segunda y se tiene en cuenta que $\sigma(u)$ es impar,[6] se encuentra:

$$\eta = \zeta(\omega),$$
$$\eta' = \zeta(\omega'). \qquad (20)$$

Integrando de nuevo las (19):

$$\sigma(u + 2\omega) = c \; e^{2\eta u} \; \sigma(u),$$
$$\sigma(u + 2\omega') = c' \; e^{2\eta' u} \; \sigma(u), \qquad (21)$$

donde c y c' son constantes; para determinar las constantes arbitrarias de integración hagamos en la primera ecuación $u = -\omega$ y $u = -\omega'$ en la segunda; teniendo en cuenta que $\zeta(u)$ es también función impar[7] resulta:

$$c = -e^{2\eta\omega},$$
$$c' = -e^{2\eta'\omega'};$$
$$\therefore \quad \sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u + \omega)} \; \sigma(u),$$
$$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta'(u + \omega')} \; \sigma(u). \qquad (22)$$

[6] Whittaker and Watson, op. cit., pág. 445.
[7] Whittaker and Watson, op. cit., pág. 447.

3. La fórmula de adición de la función $\zeta(u)$. - Se demuestra que toda función elíptica $f(u)$ de polos $a_1, a_2, \ldots, a_r$ y de ceros $b_1, b_2, \ldots, b_r$ (el número de polos es igual al número de ceros en cada paralelogramo de periodicidad) se puede representar en la forma:

$$f(u) = A \frac{\sigma(u - b_1)\, \sigma(u - b_2) \ldots \sigma(u - b_r)}{\sigma(u - a_1)\, \sigma(u - a_2) \ldots \sigma(u - a_r)},$$

donde A es una constante.

Puesto que la función $f(u) = P(u) - P(v)$ admite a cero como polo doble, también tiene dos ceros en cada paralelogramo de periodicidad. Estos puntos son $u = v$ y $u = -v$. Por tanto, según el teorema anterior,

$$P(u) - P(v) = A \frac{\sigma(u + v)\, \sigma(u - v)}{\sigma^2(u)}$$

siendo A una constante; para determinarla multipliquemos ambos miembros de la ecuación anterior por u^2 y hagamos tender u a cero; resulta, puesto que

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1,$$

$$A = -\frac{1}{\sigma^2(v)};$$

$$\therefore \quad P(u) - P(v) = -\frac{\sigma(u + v)\, \sigma(u - v)}{\sigma^2(u)\, \sigma^2(v)}. \tag{23}$$

Si se toma ahora la derivada logarítmica con respecto a u se tiene:

$$\frac{P'(u)}{P(u) - P(v)} = \zeta(u + v) + \zeta(u - v) - 2\zeta(u);$$

permutando u y v en ambos miembros:

$$\frac{-P'(v)}{P(u) - P(v)} = \zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta(v), \tag{24}$$

de donde, sumando miembro a miembro las últimas igualdades:

$$\frac{1}{2}\,\frac{P'(u) - P'(v)}{P(u) - P(v)} = \zeta(u + v) - \zeta(u) - \zeta(v) \tag{25}$$

4. Funciones de Jacobi. - En las notaciones de Jacobi el papel de la función $\sigma(u)$ lo desempeña la función $H(u)$ (Eta u), impar, con los mismos ceros que $\sigma(u)$. La relación entre ambas funciones es:[8]

$$\frac{H(u)}{H'(0)} = e^{-\frac{\eta}{2\omega}u^2}\,\sigma(u). \tag{26}$$

De las propiedades de $\sigma(u)$ relativas a la edición de un período en el argumento se deducen las correspondientes de $H(u)$:

$$H(u + 2\omega) = -H(u),$$

$$H(u + 2\omega') = -e^{-\frac{2\delta}{\omega}(u + \omega')}\,H(u), \tag{27}$$

donde $\delta = \eta\omega' - \omega\eta'$.

La función $\zeta(u)$ en la teoría de Jacobi se reemplaza por la función[9]

$$Z(u) = \frac{H'(u)}{H(u)} \tag{28}$$

o

$$Z(u) = \zeta(u) - \frac{\eta}{\omega}\,u. \tag{29}$$

[8] Appel-Lacour, op. cit., pág. 28.

[9] Se sigue aquí la notación de Jacobi-Hermite y no debe confundirse la función que se introduce con la conocida generalmente con el nombre de función zeta de Jacobi: $Z(u) = \Theta'(u)/\Theta(u)$; v. pág. 22.

Con estas definiciones $Z(u)$ satisface las relaciones

$$\begin{aligned} Z(u + 2\omega) &= Z(u), \\ Z(u + 2\omega') &= Z(u) - \frac{2\delta}{\omega}, \end{aligned} \tag{30}$$

con la misma significación para δ que en (27).

III

INTEGRACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES POR FUNCIONES DE WEIERSTRASS

Las ecuaciones (12), (13) y (14) pueden reducirse directamente a los tipos de las integrales de Legendre y Jacobi pero es más conveniente tener la expresión de φ y μ en términos de t -- utilizando las funciones elípticas de Weierstrass, ya que estas - funciones son más manejables para estudios teóricos.

Después, y a fin de poder hacer las aplicaciones numéricas,- se hará la transformación de las soluciones a las notaciones de - Jacobi.

1. Cálculo de μ. - En la ecuación (14) μ queda definida como función de t; hagamos el cambio de variable

$$\mu = As + B$$

para darle la forma

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3. \tag{31}$$

La constante A se determinará desde luego igualando a 4 el coeficiente de s^3 en la expresión transformada de

$$\frac{G(\mu)}{A^2} = \frac{2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2}{A^2} ;$$

B se determinará igualando a 0 el coeficiente de s en la misma expresión transformada; se encuentra así:

$$A = 2$$
$$B = \frac{\gamma}{3}. \qquad (32)$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de los coeficientes de s y del término independiente en la transformada de $\frac{G(\mu)}{A^2}$ se encuentra:

$$g_2 = 1 + \frac{\gamma^2}{3},$$

$$g_3 = \frac{c^2}{4} + \frac{\gamma}{3}\left(\frac{\gamma^2}{9} - 1\right).$$

El polinomio $G(\mu) = 2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2$ tiene tres raíces reales μ_1, μ_2, μ_3; en efecto, se tiene para

$$\mu = 1, \qquad G(\mu) = -c^2,$$

y para

$$\mu = -1, \qquad G(\mu) = -c^2,$$

y además debe existir un valor de μ, μ_o, tal que $-1 < \mu_o < 1$, para el cual $G(\mu_o) > 0$ para que pueda existir el movimiento.

Supongamos $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$; entonces μ_2 y μ_3 están comprendidas entre $+1$ y -1 y $\mu_1 > 1$. El movimiento se efectúa pues entre los paralelos de alturas μ_2 y μ_3.

Además, ya que en

$$G(\mu) = \mu^3 - \mu^2 - \mu + (\gamma - \frac{c^2}{2}) = 0 \qquad (33)$$

se verifica, como es sabido, que

$$\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 + \mu_3\mu_1 = -1,$$

se tendrá:

$$\mu_1 = -\frac{1 + \mu_2\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \qquad (34)$$

y como $\mu_1 > 1$ se deberá tener:

$$\mu_2 + \mu_3 < 0,$$

lo que demuestra que μ_3 es siempre menor que cero y que el límite superior de μ_2 es $|\mu_3|$.

El polinomio $4s^3 - g_2 s - g_3$ tiene entonces tres raíces reales e_r

$$e_r, = \frac{1}{2}\mu_r - \frac{\gamma}{6}, \quad (r = 1,2,3), \qquad (35)$$

y se tendrá $e_1 > e_2 > e_3$.

La función $P(u)$ donde u puede a su vez ser función de t, de "invariantes" g_2 y g_3 verifica la ecuación diferencial[10]

$$P'^2(u) = 4\,P^3(u) - g_2\,P(u) - g_3 = \frac{G(As+b)}{A^2}. \qquad (36)$$

Sustituyendo s por $P(u)$ en (31) se tiene:

[10] Appell-Lacour, op. cit., pág. 40.

$$P'^2(u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = 4\,P^3(u) - g_2\,P(u) - g_3,$$

$$\therefore\ \frac{du}{dt} = \pm 1;$$

tomando el signo $+$, lo que siempre puede hacerse ya que $P(u)$ es par, se deduce

$$u = t + a,$$

a siendo una constante que vamos a determinar echando mano de las propiedades de la función $P(u)$ y de las condiciones iniciales del problema. Para $\mu = \mu_3$ se tiene $s = P(u) = e_3$ y para $\mu = \mu_2$, $s = P(u) = e_2$; la relación $\mu = AP(u) + B$ donde $A > 0$ indica que si μ decrece de μ_2 a μ_3, $P(u)$ decrece de e_2 a e_3. Se demuestra[11] que si u tiene la forma $v + \omega'$ (v real), cuando v varía de ω a 0, $P(u)$ varía de $P(\omega + \omega') = e_2$ a $P(\omega') = e_3$ pasando por valores reales; por lo tanto se tendrá:

$$u = t + a = v + \omega'$$

y si $t = t_0$ cuando $\mu = \mu_3$, esto es, cuando

$$s = e_3$$

o

$$u = \omega',$$

deberá ser $\quad v = 0$

y entonces $\quad t_0 + a = \omega'.$

Si además $t_0 = 0$, o sea que se empiece a contar el tiempo cuando el móvil se encuentre a la altura μ_3, se tiene $a = \omega'$ y por tanto

[11] Appell-Lacour, op. cit., págs. 68-75.

$$u = t + \omega', \tag{37}$$

$$s = P(t + \omega');$$

$$\therefore \quad \mu = 2\,P(t + \omega') + \frac{\gamma}{3}. \tag{38}$$

El tiempo que tarda μ en variar de μ_2 a μ_3 es ω, el semiperíodo real; cuando el tiempo aumenta en 2ω la altura del péndulo adquiere su valor inicial.

2. <u>Cálculo de φ</u>. - Determinada μ como función de t, φ queda también definida como función de t por la ecuación (13),-

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{1 - \mu^2}. \tag{13}$$

Descomponiendo en fracciones simples el segundo miembro y notando por (37) que

$$dt = du,$$

$$d\varphi = \frac{c}{2}\left(\frac{du}{\mu + 1} - \frac{du}{\mu - 1}\right).$$

Definamos los argumentos a y b con las condiciones:

$$\begin{aligned} 1 &= 2\,P(a) + \frac{\gamma}{3}, \\ -1 &= 2\,P(b) + \frac{\gamma}{3}; \end{aligned} \tag{39}$$

entonces usando (38):

$$d\varphi = \frac{c}{4}\left[\frac{du}{P(u) - P(b)} - \frac{du}{P(u) - P(a)}\right]; \tag{40}$$

pero por la ecuación (24):

$$\int \frac{du}{P(u) - P(v)} = - \frac{1}{P'(v)} \left[L\,\sigma(u + v) - L\,\sigma(u - v) - 2u\,\zeta(v) \right] ,$$

luego, aplicando esta fórmula a cada término del 2° miembro de -- (40):

$$\varphi = \frac{c}{4} \left\{ \frac{-1}{P'(b)} \left[L\,\sigma(u + b) - L\,\sigma(u - b) - 2u\,\zeta(b) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{P'(a)} \left[L\,\sigma(u + a) - L\,\sigma(u - a) - 2u\,\zeta(a) + L(-F^2) \right] \right\} ,$$

donde F es una constante arbitraria.

De la ecuación (36) se deduce haciendo $\mu = 1$ y $\mu = -1$, o sea, por (39), haciendo $u = a$ y $u = b$, que

$$P'^2(a) = P'^2(b) = - \frac{c^2}{A^2}.$$

o sea que

$$P'(a) = P'(b) = \frac{ic}{2}; \tag{41}$$

entonces

$$\varphi = \frac{1}{2i} \left\{ L \left[- F^2 \frac{\sigma(u + a)\ \sigma(u - b)}{\sigma(u + b)\ \sigma(u - a)} \right] + 2u \left[\zeta(b) - \zeta(a) \right] \right\} , \tag{42}$$

o

$$e^{2i\varphi} = - F^2 \frac{\sigma(u + a)\ \sigma(u - b)}{\sigma(u + b)\ \sigma(u - a)}\ e^{2u\left[\zeta(b) - \zeta(a)\right]} . \tag{43}$$

La constante $-F^2$ se determina por las condiciones iniciales; - por ejemplo, si $\varphi = 0$ cuando $\mu = \mu_3$ y si entonces $t = 0$ y - por tanto $u = \omega'$, resulta de (42):

$$L\,(-F^2) = - L \frac{\sigma(\omega' + a)\ \sigma(\omega' - b)}{\sigma(\omega' + b)\ \sigma(\omega' - a)} - 2\omega' \left[\zeta(b) - \zeta(a) \right]. \tag{44}$$

Las ecuaciones (38) y (42) son las ecuaciones que definen el movimiento del péndulo esférico y también, desde luego, las ecuaciones paramétricas de su órbita.

IV

ANGULO DE LONGITUD DESCRITO EN EL TIEMPO 2ω TRAYECTORIAS CERRADAS. TRADUCCION DE LAS ECUACIONES ANTERIORES A LAS NOTACIONES DE JACOBI

1. Angulo girado en el tiempo 2ω. - La ecuación (38) muestra que μ es una función periódica de t; cuando t aumenta en 2ω la altura del péndulo vuelve a ser su altura inicial. La función φ no es periódica. Nos interesa ahora calcular el cambio en φ cuando t aumenta en 2ω.

Para ésto hagamos uso de la primera de las ecuaciones (22).- Se encuentra, llamando φ_1 el ángulo de longitud correspondiente al tiempo $t + 2\omega$ y determinado por (43):

$$e^{2i\varphi_1} = e^{2i\varphi} + 4\left[\zeta(b) - \zeta(a)\right]\omega + 4\eta(a - b),$$

o designando el ángulo $\varphi_1 - \varphi$ por 2ϕ

$$2\phi = -2i\left[\zeta(b) - \zeta(a)\right]\omega - 2\eta i\,(a - b). \tag{45}$$

Resulta que el ángulo girado en el tiempo 2ω es constante.

2. Condición necesaria y suficiente para que una trayectoria sea cerrada periódica. - Se ve desde luego que si la trayectoria del péndulo (se excluye el caso del péndulo cónico en donde μ = constante) es cerrada (periódica), el ángulo 2ϕ debe ser conmensurable con π, pues basta considerar el movimiento como iniciado en uno de los puntos de altura extrema: si el móvil pasa por dicho punto después de un número determinado n de vueltas -

alrededor del eje OZ, se deberá cumplir la condición enunciada. Por otra parte si esta condición se verifica, el péndulo, después de un número determinado de períodos tendrá el mismo ángulo de -- longitud φ cualquiera que haya sido el punto inicial y como el tiempo transcurrido es un múltiplo de 2ω, su altura y su velocidad serán las mismas que la de ese punto inicial y la trayectoria será cerrada. En otros términos, que $2\emptyset$ sea conmensurable con π es la condición necesaria y suficiente para que la trayectoria sea periódica:

$$2\emptyset = 2m\pi,$$

donde m es un número racional para órbitas periódicas. En virtud[12] de que $\frac{\pi}{2} < \emptyset < \pi$, m es acotado:

$$\frac{1}{2} < m < 1.$$

3. <u>Traducción de las ecuaciones anteriores a las notaciones de Jacobi</u>. - Las funciones de Weierstrass se prestan para discu-- siones teóricas; pero cuando se trata de calcularlas numéricamente son poco manejables debido a que intervienen series de doble - entrada o series de potencias lentamente convergentes; a fin de - tener las soluciones del problema en forma utilizable al cálculo numérico, haremos la transformación de las ecuaciones a las notaciones de Jacobi.

La función sn u, de períodos 2K y 2iK', se define como sigue:

---

[12] G. H. Halphen, "Traité des Fonctions Elliptiques et de - leurs Applications," (Gauthier-Villars; Paris, 1888) 2º tomo, pág. 128.

Se puede dar una demostración elemental de que $2\emptyset > \pi$, véase por ejemplo: Appell, "Traité de Mécanique Rationnelle," (Gauthier-Villars; Paris, 1926), 1er. tomo, págs. 515-519 o Webster, "The Dynamics of particles and of rigid, elastic, and fluid bodies," (Der Mathematischen Wissenschaften XI. Teubner; Leipzig, 1925), págs. 52-54.

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}$$

con

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta(K)},$$

$$\Theta(u) = \frac{1}{i\lambda} H(u + iK') \quad , \quad \lambda = e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u + iK')} .$$

Además se tienen para $H(u)$ y $\Theta(u)$ los siguientes desarro---llos:[13]

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q} \operatorname{sen} v - 2\sqrt[4]{q^9} \operatorname{sen} 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}} \operatorname{sen} 5v - \ldots, \tag{46}$$

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^9 \cos 6v - \ldots, \tag{47}$$

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

$$v = \frac{\pi u}{2K}.$$

Se demuestra[14] que las funciones $P(u)$ y $\operatorname{sn} u$ están relacionadas entre sí mediante la ecuación

$$P(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\, u)}, \tag{48}$$

$$P'^2(u) = 4\left[P(u) - e_1\right]\left[P(u) - e_2\right]\left[P(u) - e_3\right],$$

en la cual $\operatorname{sn} u$ tiene módulo k dado por:

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}; \tag{49}$$

---

[13] Wilson, "Advanced Calculus," (Ginn and Company; Boston, 1912), págs. 467-471.

[14] Whittaker and Watson, op. cit., pág. 505.

además, si 2ω y $2\omega'$ son los períodos de $P(u)$ y

$$\lambda^2 = \frac{1}{e_1 - e_3},$$

se tiene:

$$2\omega = 2K\lambda,$$
$$2\omega' = 2K'\lambda. \tag{50}$$

Aplicando (48) con el argumento $t + \omega'$:

$$P(t + \omega') = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{t}{\lambda} + \frac{\omega'}{\lambda}\right)};$$

teniendo en cuenta las (50) y la relación[15]

$$\mathrm{sn}\,(u + iK') = k^{-1}\,\mathrm{ns}\,u = \frac{1}{k\,\mathrm{sn}\,u},$$

se encuentra:

$$P(t + \omega') = e_3 + k^2\,(e_1 - e_3)\,\mathrm{sn}^2\,\frac{t}{\lambda}$$

y finalmente por (49):

$$P(t + \omega') = e_3 + (e_2 - e_3)\,\mathrm{sn}^2\,(\sqrt{e_1 - e_3}\,t).$$

Llevando esta igualdad a (38),

$$\mu = 2\,P(t + \omega') + \frac{\gamma}{3}, \tag{38}$$

se obtiene finalmente:

$$\mu = 2\,e_3 + 2(e_2 - e_3)\,\mathrm{sn}^2\,(\sqrt{e_1 - e_3}\,t) + \frac{\gamma}{3}. \tag{51}$$

Para encontrar la expresión de φ en términos de las funcio nes de Jacobi utilizamos las ecuaciones (26) y (29) de las que de ducimos:

[15] Whittaker and Watson, op. cit., pág. 503.

$$\sigma(u) = \frac{1}{H'(0)} e^{\frac{\eta}{2\omega} u^2} H(u), \tag{52}$$

$$\zeta(u) = Z(u) - \frac{\eta}{\omega} u. \tag{53}$$

Haciendo las sustituciones en la fórmula (42) se encuentra después de reducciones fáciles:

$$\varphi = \frac{1}{2i} \left\{ L \left[- F^2 \frac{H(u + a)\ H(u - b)}{H(u + b)\ H(u - a)} \right] + 2u \left[Z(b) - Z(a) \right] \right\} \tag{54}$$

y con las mismas condiciones iniciales que en (III, 2) se tiene para F:

$$L\,(- F^2) = L \frac{H(\omega' + b)\ H(\omega' - a)}{H(\omega' + a)\ H(\omega' - b)} - 2\omega' \left[Z(b) - Z(a) \right]. \tag{55}$$

Para el ángulo 2ϕ de (45) se encuentra por (53) y (45):

$$2\phi = - 2i\omega \left[Z(b) - Z(a) \right], \tag{56}$$

valor que también puede obtenerse de (54).

La determinación numérica de 2ϕ requeriría al aplicar (56), el cálculo de la función $Z(u)$ para los dos argumentos a y b; es preferible encontrar otra expresión para 2ϕ en donde sea uno sólo el argumento de $Z(u)$ y que obtendremos de la siguiente manera: de la ecuación (25) se tiene cambiando u en b y v en $-a$:

$$\zeta(b) - \zeta(a) = \zeta(b - a) - \frac{1}{2} \frac{P'(b) + P'(a)}{P(b) - P(a)}, \tag{57}$$

ya que $P(u)$ es par y $P'(u)$ impar.

Los parámetros b y a satisfacen las ecuaciones (39) por las que quedaron determinadas y además las (41); según esto la -- (57) se transforma en

$$\zeta(b) - \zeta(a) = \zeta(b - a) - \frac{ic}{2}.$$

Llevando esta expresión de $\zeta(b) - \zeta(a)$ a (45) se tiene:

$$2\phi = -2i\omega\,\zeta(b - a) + c\omega - 2\eta i\,(a - b),$$

e introduciendo la función $Z(u)$,

$$2\phi = -2i\omega\,Z(b - a) + c\omega, \tag{58}$$

que es la relación buscada.

Las constantes a y b quedaron definidas por (39); para - su cálculo numérico es necesario tener su expresión en término de las funciones de Jacobi, la cual se obtendrá a partir de (39) con aplicación de (48); se tiene por (39):

$$P(a) = \frac{3 - \gamma}{6}, \tag{59}$$

$$P(b) = \frac{3 + \gamma}{6}; \tag{60}$$

pongamos

$$\frac{3 - \gamma}{6} = r, \tag{61}$$

$$-\frac{3 + \gamma}{6} = s; \tag{62}$$

entonces por (48):

$$r = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\,a)},$$

$$s = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_3}\,b)};$$

$$\therefore \quad \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3}\, a) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{r - e_3}} \tag{63}$$

$$y \qquad \operatorname{sn}(\sqrt{e_1 - e_3}\, b) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{s - e_3}}\,. \tag{64}$$

Si $x = \int_0^y \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}$, $y = \operatorname{sn}(x, k)$ y por tanto las igualdades anteriores son equivalentes a

$$\sqrt{e_1 - e_3}\, a = \int_0^{\sqrt{\frac{e_1 - e_3}{r - e_3}}} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}, \tag{65}$$

$$\sqrt{e_1 - e_3}\, b = \int_0^{\sqrt{\frac{e_1 - e_3}{s - e_3}}} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}. \tag{66}$$

Examinando la estructura de (58) nos damos cuenta de que es muy conveniente encontrar una relación análoga a (63) y (64) en donde intervenga el argumento $a - b$ con objeto de no tener que determinar separadamente las integrales elípticas (65) y (66). Dichas relaciones las deduciremos como sigue: de la fórmula de adición[16] de la función $P(u)$:

$$P(z + y) = \frac{1}{4}\left[\frac{P'(z) - P'(y)}{P(z) - P(y)}\right]^2 - P(z) - P(y),$$

se obtiene haciendo $z = b$ y $y = -a$:

$$P(b - a) = \frac{1}{4}\left[\frac{P'(b) + P'(a)}{P(b) - P(a)}\right]^2 - P(b) - P(a),$$

la cual se convierte por (59), (60) y (41) en:

$$P(b - a) = -\frac{c^2}{4} + \frac{\gamma}{3};$$

[16] Whittaker and Watson, op. cit., pág. 441.

poniendo

$$- \frac{c^2}{4} + \frac{\gamma}{3} = p, \tag{67}$$

se tendrá de modo análogo a como se procedió con (59) y (60):

$$\operatorname{sn} \sqrt{e_1 - e_3}\,(a - b) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{p - e_3}} \tag{68}$$

o

$$a - b = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\sqrt{\frac{e_1-e_3}{p-e_3}}} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2w^2)}}$$

con

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

V

ELECCION DE μ_2 Y μ_3 COMO PARAMETROS INDEPENDIENTES

1. Fórmulas generales. - Si se nos diera en el problema que estudiamos la energía total del péndulo, su cantidad de movimiento, su masa, longitud y la aceleración g del campo de fuerza -- que sobre él actúa, podríamos calcular con las fórmulas ya esta-- blecidas los elementos del movimiento, por ejemplo, su período de oscilación, su posición en cada instante, y por tanto su trayecto ria o también, por ejemplo, su velocidad o el ángulo de longitud ϕ descrito en el tiempo ω que tarda en ir del punto más bajo - al más alto de su trayectoria. Para aplicar las fórmulas encon-- tradas, habría que resolver en primer lugar la ecuación de tercer grado

$$G(\mu) = 2(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2 = 0; \tag{69}$$

ahora bien, el problema concreto que estamos tratando es el de encontrar la energía total y cantidad de movimiento que satisfagan la condición de que la órbita determinada por ellas sea cerrada; después de encontradas estas magnitudes podremos encontrar todas las que intervienen en el movimiento.

Se vió en (IV, 2) que la condición necesaria y suficiente para que una órbita sea periódica es que

$$2\phi = 2m\pi$$

$$\left(\tfrac{1}{2} < m < 1, \qquad m \text{ racional}\right)$$

o por (58):

$$- 2i\omega\, Z(b - a) + c\omega = 2m\pi. \tag{70}$$

El primer miembro de (70) depende de los parámetros γ y c puesto que a y b son funciones de γ y además ω es función de c; como no tenemos manera de resolver la ecuación (70), para m dado, con respecto a uno de los dos parámetros γ y c en forma explícita cuando mantengamos el otro constante, habremos de calcular diversos valores del primer miembro para después por aproximaciones sucesivas o por interpolación encontrar los valores del parámetro que hayamos hecho variar que satisfagan dicha ecuación (70). Salta a la vista entonces, la conveniencia de tomar como parámetros independientes las raíces μ_2 y μ_3 en lugar de γ y c a fin de evitarse la resolución de (69) para diversos pares de valores de γ y c.

Vamos a encontrar con ayuda de las ecuaciones establecidas - las expresiones de las diversas magnitudes que aparecen en la solución del problema.

Se tiene, como se vió en (IV, 3), ecuación (51):

$$\mu = 2 e_3 + 2 (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2 (\sqrt{e_1 - e_3}\, t) + \frac{\gamma}{3}, \tag{51}$$

de donde se deduce inmediatamente, con ayuda de las (35),

$$e_r = \frac{1}{2} \mu_r - \frac{\gamma}{6} \qquad (r = 1, 2, 3): \tag{35}$$

$$\mu = \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3) \operatorname{sn}^2 (\sqrt{e_1 - e_3}\, t). \tag{71}$$

Además, ecuación (34),

$$\mu_1 = - \frac{1 + \mu_2 \mu_3}{\mu_2 + \mu_3},$$

$$\therefore \frac{1}{\lambda^2} = e_1 - e_3 = \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_3) = - \frac{1 + 2 \mu_2 \mu_3 + \mu_3^2}{2 (\mu_2 + \mu_3)}. \tag{72}$$

El módulo de la función sn u de (71) es, ecuación (49):

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3},$$

$$\therefore k^2 = - \frac{\mu_2^2 - \mu_3^2}{1 + 2 \mu_2 \mu_3 + \mu_3^2}. \tag{73}$$

La determinación de las constantes a y b depende de

$$\frac{e_1 - e_3}{r - e_3} \quad \text{y de} \quad \frac{e_1 - e_3}{s - e_3}$$

según (63) y (64). De nuevo con aplicación de (35) y recordando que se ha puesto como indican las ecuaciones (61) y (62),

$$r = \frac{3 - \gamma}{6},$$

$$s = -\frac{3 + \gamma}{6},$$

se encuentra:

$$\frac{e_1 - e_3}{r - e_3} = -\frac{1 + 2\mu_2\mu_3 + \mu_3^2}{(\mu_2 + \mu_3)(1 - \mu_3)}, \tag{74}$$

$$\frac{e_1 - e_3}{s - e_3} = \frac{1 + 2\mu_2\mu_3 + \mu_3^2}{(\mu_2 + \mu_3)(1 + \mu_3)}. \tag{75}$$

Los parámetros γ y c se expresan desde luego en términos de μ_2 y μ_3 considerando las relaciones que se verifican en la ecuación (69); se tiene:

$$\frac{\mu_2\mu_3(1 + \mu_2\mu_3)}{\mu_2 + \mu_3} = \gamma - \frac{c^2}{2}, \tag{76}$$

$$\mu_2 + \mu_3 - \frac{1 + \mu_2\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} = \gamma, \tag{77}$$

$$\therefore \quad c^2 = 2\,\frac{(\mu_2 + \mu_3)^2 - (1 + \mu_2\mu_3)^2}{\mu_2 + \mu_3}; \tag{78}$$

el valor de c es necesario obtenerlo para determinar el ángulo 2ϕ mediante la ecuación (58),

$$2\phi = -2i\omega\, Z(b - a) + c\omega \tag{58}$$

y únicamente habrá que valuar la función $Z(u)$ para el argumento $b - a$ definido por (68),

$$\operatorname{sn} \sqrt{e_1 - e_3}\,(a - b) = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{p - e_3}}\,; \tag{68}$$

como

$$p = -\frac{c^2}{4} + \frac{\gamma}{3},$$

ecuación (67), se tiene, siguiendo el camino de antes:

$$p - e_3 = -\frac{c^2}{4} - \frac{\mu_3}{2} + \frac{\gamma}{2} \tag{79}$$

y llevando a esta igualdad los valores c^2 y γ dados por (77) y (78) se tiene:

$$p - e_3 = \frac{\mu_3^{\,2}\,(\mu_2^{\,2} - 1)}{2\,(\mu_2 + \mu_3)}, \tag{80}$$

$$\therefore \quad \frac{e_1 - e_3}{p - e_3} = -\frac{1 + 2\,\mu_2\,\mu_3 + \mu_3^{\,2}}{\mu_3^{\,2}\,(\mu_2^{\,2} - 1)}. \tag{81}$$

Haremos notar que $\frac{e_1 - e_3}{r - e_3}$ es siempre mayor que 1, porque de

$$-\frac{1 + 2\,\mu_2\,\mu_3 + \mu_3^{\,2}}{(\mu_2 + \mu_3)(1 - \mu_3)} > 1$$

se deduce

$$-\frac{1 + \mu_2\,\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} > 1$$

y se vió en (III, 1) que el primer miembro de esta desigualdad es μ_1, la raíz mayor de

$$2\,(\gamma - \mu)(1 - \mu^2) - c^2,$$

y que esta raíz es siempre mayor que 1. Además,

$$\frac{e_1 - e_3}{r - e_3} < \frac{1}{k^2},$$

porque esta desigualdad es equivalente a

$$- \frac{1 + 2\,\mu_2\,\mu_3 + \mu_3^{\,2}}{(\mu_2 + \mu_3)(1 - \mu_3)} < - \frac{1 + 2\,\mu_2\,\mu_3 + \mu_3^{\,2}}{(\mu_2 + \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)},$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{1 - \mu_3} < \frac{1}{\mu_2 - \mu_3}$$

o

$$\mu_2 < 1,$$

lo que siempre se verifica según lo dicho en (III, 1).

Por lo anterior, recordando el comportamiento de la función[17] sn u, se puede ver que la constante a tiene la forma

$$a = \pm \lambda \left(K + \frac{Kr_1}{\pi}\, i\right),$$

siendo r_1 un número positivo que habrá que determinar, o por (50):

$$a = \pm \left(\omega + \frac{\omega r_1}{\pi}\, i\right). \tag{82}$$

Asimismo se ve que

$$\frac{e_1 - e_3}{s - e_3} = \frac{1 + 2\,\mu_2\,\mu_3 + \mu_3^{\,2}}{(\mu_2 + \mu_3)(1 + \mu_3)} < 0,$$

puesto que $\mu_2 + \mu_3 < 0$, (III, 1); luego la constante b será un imaginario puro,

$$b = \pm \frac{\omega r_2}{\pi}\, i, \tag{83}$$

[17] Appell-Lacour, op. cit., págs. 148-152.

en donde r_2 es un número positivo por determinar. La constante

$$c = \frac{C}{MR\sqrt{gR}}$$

se puede suponer siempre positiva; luego por (41) y por el conocimiento del signo de $P'(u)$ en el rectángulo de los semiperíodos,[18] se deberá tener:

$$a = \omega + \frac{\omega r_1}{\pi} i, \tag{84}$$

$$b = -\frac{\omega r_2}{\pi} i, \tag{85}$$

$$\therefore \quad b - a = -\frac{\omega}{\pi}(r_1 + r_2)\, i - \omega. \tag{86}$$

Ahora, a fin de valuar $Z\,(b - a)$, si ω y ω' son los períodos de la función $H(u)$, se tiene, ecuación (46):

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\,\text{sen}\, v - 2\sqrt[4]{q^9}\,\text{sen}\, 3v + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\text{sen}\, 5v - \ldots, \tag{87}$$

$$q = e^{-\frac{\pi\omega'}{i\omega}} = e^{-\frac{\pi K'}{K}},$$

$$v = \frac{\pi u}{2\omega},$$

de donde se deduce:

$$H'(u) = 2\sqrt[4]{q}\,(\cos v - 3q^4 \cos 3v + 5q^6 \cos 5v - \ldots)\,\frac{\pi}{2\omega}$$

$$\therefore \quad Z(u) = \frac{H'(u)}{H(u)} = \frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\cos v - 3q^4 \cos 3v + 5q^6 \cos 5v - \ldots}{\text{sen}\, v - q^2\,\text{sen}\, 3v + q^6\,\text{sen}\, 5v - \ldots}. \tag{88}$$

Para el argumento $b - a$, se encuentra, utilizando las expresiones de a y b dadas por (84) y (85):

---

[18] Appell-Lacour, op. cit., pág. 75.

$$-2i\omega\, Z(b-a) = \pi \frac{\mathrm{Sh}\frac{r_1+r_2}{2} + 3q^2\, \mathrm{Sh}\frac{3(r_1+r_2)}{2} + 5q^6\, \mathrm{Sh}\frac{5(r_1+r_2)}{2} + \ldots}{\mathrm{Ch}\frac{r_1+r_2}{2} + q^2\, \mathrm{Ch}\frac{3(r_1+r_2)}{2} + q^6\, \mathrm{Ch}\frac{5(r_1+r_2)}{2} + \ldots} \qquad (89)$$

fórmula que se usará para la determinación de $2\emptyset$ al aplicar la ecuación (58).

2. <u>La órbita límite correspondiente a $q = 0$. Péndulo cónico</u>. - Por la fórmula que da k, para el caso en que $\mu_2 = \mu_3$ se tiene:

$$k^2 = 0.$$

Se obtiene entonces (véase VI, 2):

$$q = 0, \qquad K = \frac{\pi}{2}.$$

Como aquí

$$\frac{1}{\lambda^2} = e_1 - e_3 = -\frac{1 + 3\mu_3^2}{4\mu_3}$$

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{-\mu_3}{1 + 3\mu_3^2}}.$$

Las ecuaciones (68) y (81) dan para este "caso de degeneración" de las funciones elípticas:

$$\mathrm{sen}\, \frac{\pi}{2\omega}(a - b) = \sqrt{-\frac{1 + 3\mu_3^2}{\mu_3^2(\mu_3^2 - 1)}},$$

puesto que en estas circunstancias la función $\mathrm{sn}\, u$ coincide con $\mathrm{sen}\, u$. Además, $Z(u)$ es en este caso:

$$Z(u) = \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega};$$

se encuentra entonces que:

$$Z(b - a) = \frac{\pi i}{2\omega}(1 + \mu_3^2)\sqrt{\frac{1}{1 + 3\mu_3^2}}$$

y

$$c\omega = \pi(1 - \mu_3^2)\sqrt{\frac{1}{1 + 3\mu_3^2}};$$

$\therefore$ de (58),

$$2\phi = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1 + 3\mu_3^2}}.$$

Por otra parte, esta fórmula se comprueba fácilmente porque cuando $\mu_2 = \mu_3$ se tiene el caso del llamado péndulo cónico en que la trayectoria es un paralelo porque se puede ver que entonces la altura es constante. Por métodos elementales se demuestra que la velocidad angular α es también constante y que vale

$$\alpha = \sqrt{\frac{-1}{\mu_3}}.$$

El ángulo de longitud descrito en el tiempo 2ω es pues

$$2\phi = \alpha \cdot 2\omega = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1 + 3\mu_3^2}}$$

igualdad que coincide con la encontrada antes.

VI

EJEMPLO NUMERICO: INVESTIGACION DE UNA TRAYECTORIA CERRADA PARA EL CASO n = 3

1. Objeto. - Nos proponemos encontrar ahora, como un ejemplo de aplicación de las fórmulas deducidas, una órbita cerrada cuando el péndulo ejecuta tres vueltas alrededor del eje vertical OZ.

Se tiene en general llamando n el número de vueltas que -- ejecuta el péndulo alrededor de OZ en una órbita cerrada y ℓ el número de ángulos iguales a 2ϕ recorridos en esa órbita:

$$\ell \cdot 2\phi = n \cdot 2\pi,$$

$$\therefore \quad 2\phi = \frac{n}{\ell} 2\pi;$$

ésto es, el racional m de (IV, 2) es

$$m = \frac{n}{\ell}.$$

Como

$$\frac{1}{2} < m < 1,$$

se deberá tener

$$n < \ell < 2n.$$

Para $n = 3$ se tendrá: $3 < \ell < 6$, esto es: $\ell = 4$ o $\ell = 5$. Tomaremos $\ell = 4$; entonces:

$$m = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \quad 2\phi = \frac{3\pi}{2}.$$

Además, para tratar un problema concreto se suponen los datos: -- $g = 980$ cm/seg^2, $R = 100$ cm (es necesario dar únicamente la razón $\frac{g}{R}$).

Se vió en (V) que en el problema general aparecen dos parámetros independientes arbitrarios y resultó ahí que convenía elegir como tales las raíces μ_2, μ_3 de cierto polinomio de tercer grado. Como tenemos libertad al dejar variar estos parámetros, - podemos hacer que uno de ellos permanezca constante; para nuestro caso particular estudiado pondremos:

$$\mu_3 = -0.9;$$

quiere decir que obligamos al péndulo a moverse de manera que la altura del paralelo más bajo de los dos entre los cuales se efectúa el movimiento sea igual a -90 cm.

El problema actual es de encontrar μ_2 de manera que el péndulo describa una trayectoria cerrada y que al partir de un punto inicial cualquiera regrese a él después de tres vueltas alrededor de la vertical de su punto de suspensión. Por otra parte, por la elección de ℓ la órbita tendrá 4 arcos 2ϕ (4 hojas). Encontrado μ_2 se podrá calcular la energía total y el momento de la cantidad de movimiento del péndulo así como todos los elementos del movimiento, por las fórmulas ya establecidas.

2. Cálculo de q, K y ω. - A continuación se expone muy brevemente cómo se encuentran en general los parámetros de que dependen las funciones elípticas y cómo se calculan éstas numéricamente.

Por la fórmula (73) se calcula directamente, con μ_2 y μ_3 dados, el módulo k. A partir de éste se tendrá el "módulo complementario," k' dado por

$$k^2 + k'^2 = 1;$$

en seguida el parámetro q de Jacobi por la fórmula[19]

$$q = \frac{1}{2}\,\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} + \frac{2}{2^5}\left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}\right)^5 + \frac{15}{2^9}\left(\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}\right)^9 + \dots \qquad (90)$$

---

[19] Wilson, op. cit., pág. 472.

El semiperíodo real K está relacionado con q y K' por la ecuación.[20]

$$\sqrt{K} = \frac{\sqrt{2\pi}}{1 + \sqrt{k'}} (1 + 2q^4 + \ldots). \tag{91}$$

Calculado K, ω se obtendrá en seguida por

$$\omega = K\lambda,$$

donde λ está dado por (72).

Es digno de mención el hecho de que en las series que aparecen en (90) y (91) bastan generalmente uno o dos términos para tenerlas correctas con cinco cifras decimales.

La función elíptica $\operatorname{sn} u$ (que es la que aparece en la solución para μ) se calcula por la expresión[21]

$$\operatorname{sn}(x,k) = \frac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt{k}} \, \frac{2\operatorname{sen} v - 2q^2 \operatorname{sen} 3v + 2q^6 \operatorname{sen} 5v - \ldots}{1 - 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v - 2q^9 \cos 6v + \ldots},$$

$$v = \frac{\pi x}{2K},$$

fórmula muy conveniente para el cálculo numérico debido a la extrema rapidez de convergencia de las series que en ella ocurren.-

Las funciones $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$ quedan determinadas por las relaciones

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1,$$

$$\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1.$$

---

[20] Wilson, op. cit., pág. 507.
[21] Wilson, op. cit., pág. 506.

3. <u>Cálculo de a y b</u>. - Los argumentos a y b que intervienen en la solución para φ y en la fórmula que da $2\emptyset$ dependen, como se ha visto, del cálculo de "integrales elípticas de primera especie." Este cálculo se llevó a cabo mediante la fórmula dada por Wilson,[22]

$$\cot \lambda_1 = \frac{\mathrm{dn}\, x}{\sqrt{k'}} = \frac{1 + 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v + \ldots}{1 - 2q \cos 2v + 2q^4 \cos 4v + \ldots},$$

$$v = \frac{\pi x}{2k},$$

de la cual se obtienen las ecuaciones aproximadas:

$$\frac{\cot \lambda_1 - 1}{\cot \lambda_1 + 1} = 2q \cos 2v$$

y

$$\frac{\cot \lambda_1 - 1}{\cot \lambda_1 + 1} = \frac{2q \cos 2v}{1 + 2q^4 \cos 4v}, \tag{94}$$

con las que puede calcularse $\cos 2v$ por el método de aproximaciones sucesivas. En general las aproximaciones dadas por las ecuaciones anteriores bastaron para que los resultados fueran correctos con cinco cifras decimales. Al aplicar (93) y (94) fue necesario utilizar las funciones hiperbólicas.

Con las fórmulas anteriores quedan determinadas directamente las constantes r_1 y r_2 de (82) y (83) o preferiblemente, partiendo de (68), la suma $r_1 + r_2$ requerida para el cálculo de $Z(u)$ por (89).

4. <u>Determinación de μ_2 para una órbita cerrada</u>. - Con el parámetro μ_3 constante e igual como se dijo a - 0.9 se calcu-

[22] Wilson, op. cit., pág. 508.

laron por la ecuación (58) y con ayuda de (89) diversos valores del ángulo 2ϕ correspondientes a diferentes valores del parámetro μ_2. Con los valores $\mu_2 = 0.26936$ y $\mu_2 = 0.26447$ se obtuvieron los ángulos $2\phi = 4.72981$ y $2\phi = 4.72058$ respectivamente; una extrapolación lineal entre estos valores de μ_2, para los cuales el ángulo 2ϕ es bastante cercano a

$$2\phi = \frac{3\pi}{2} = 4.71239,$$

suministró el valor

$$\mu_2 = 0.26002$$

con el que se calculó el ángulo 2ϕ correspondiente como se ha indicado, arrojando el valor

$$2\phi = 4.71248.$$

Es evidente que el valor μ_2 puede obtenerse con la aproximación suficiente para que el ángulo 2ϕ difiere de uno arbitrariamente dado $2\phi_1$ tan poco como se quiera; para ésto hay que determinar varios valores de 2ϕ suficientemente cercanos a $2\phi_1$ para distintos valores de μ_2; en seguida por interpolación y con ayuda de una de las fórmulas conocidas, calcular el valor de μ_2 que corresponda al ángulo $2\phi = 2\phi_1$. El problema de encontrar las trayectorias cerradas puede pues considerarse completamente resuelto.

El valor de μ_2 calculado para nuestro caso particular suministra un ángulo 2ϕ que difiere del valor

$$2\phi_1 = 4.71239$$

únicamente en una unidad del cuarto orden y tiene por tanto una - aproximación satisfactoria para el objeto de los presentes cálculos.

Las magnitudes que intervienen en la solución y que se calcularon por la manera ya indicada, son las siguientes para el anterior valor de μ_2:

$$k^2 = 0.55321$$
$$k'^2 = 0.44679$$
$$q = 0.050185$$
$$K = 1.909198$$
$$\lambda = 0.31197$$
$$\omega = 0.59336.$$

El tiempo ω y λ están aquí ya reducidos a segundos teniendo en cuenta que, como se dijo en (I, 2), la unidad de tiempo es

$$T = \sqrt{\frac{R}{g}} ;$$

se tomaron los valores de R y g dados al principio del capítulo.

Con el parámetro de Jacobi q de arriba y con ayuda de (92) se calculó μ por (71),

$$\mu = \mu_3 + (\mu_2 - \mu_3)\ \mathrm{sn}^2 \frac{t}{\lambda} \qquad (71)$$

para diversos valores de t, resultados que aparecen en la Tabla I con otros que se deducen de ellos inmediatamente. Con las dos primeras columnas se construyó la gráfica de la figura 1.

TABLA I

t	μ	$1 - \mu^2$	$\frac{c}{1 - \mu^2}$
0	-0.9	0.19	12.25947
$\frac{\omega}{24}$	-0.89274	0.20302	11.47325
$\frac{\omega}{12}$	-0.87123	0.24096	9.66675
$\frac{\omega}{8}$	-0.83630	0.30060	7.74883
$\frac{\omega}{6}$	-0.78925	0.37708	6.17720
$\frac{\omega}{4}$	-0.66576	0.55676	4.18367
$\frac{\omega}{3}$	-0.51661	0.73311	3.17729
$\frac{5\omega}{12}$	-0.35825	0.87166	2.67226
$\frac{\omega}{2}$	-0.20474	0.95808	2.43122
$\frac{7\omega}{12}$	-0.06637	0.99560	2.33959
$\frac{2\omega}{3}$	+0.05038	0.99746	2.33523
$\frac{3\omega}{4}$	+0.14221	0.97978	2.37737
$\frac{5\omega}{6}$	+0.20782	0.95681	2.43444
$\frac{11\omega}{12}$	+0.24702	0.93898	2.48067
ω	+0.26002	0.93239	2.49820

TABLA II

t	φ	φ en grados	$\rho = \sqrt{1-\mu^2}$
0	0.000	0.00	0.43589
$\frac{\omega}{24}$	0.297	17.02	0.45058
$\frac{\omega}{12}$	0.557	31.91	0.49088
$\frac{\omega}{8}$	0.771	44.18	0.54827
$\frac{\omega}{6}$	0.942	53.97	0.61407
$\frac{\omega}{4}$	1.190	68.18	0.74616
$\frac{\omega}{3}$	1.370	78.50	0.85622
$\frac{5\omega}{12}$	1.513	86.69	0.93363
$\frac{\omega}{2}$	1.637	93.79	0.97882
$\frac{7\omega}{12}$	1.754	100.50	0.99780
$\frac{2\omega}{3}$	1.870	107.14	0.99873
$\frac{3\omega}{4}$	1.987	113.85	0.98984
$\frac{5\omega}{12}$	2.105	120.[illegible]1	0.97817
$\frac{11\omega}{6}$	2.236	127.54	0.96901
ω	2.358	135.10	0.96560

El ángulo de longitud φ requiere para su cálculo la determinación numérica de las 4 funciones $H(u + a)$, $H(u - b)$, --- $H(u + b)$, $H(u - a)$ de la fórmula (54) y que se lleva a cabo mediante el desarrollo en serie de $H(u)$ dado por (87).

Unicamente para el objeto de dibujar una representación de - la trayectoria se puede utilizar para la determinación de φ un método gráfico. Desde luego para este propósito se ve también -- que era por demás haber obtenido el parámetro μ_2 correspondiente al ángulo $2\phi_1 = \frac{3\pi}{2}$ con mayor aproximación que la alcanzada.

Se procedió de la siguiente manera: se utilizó la ecuación - (13); de los valores de μ calculados y del de c dado por (78) se obtuvieron los de

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{1 - \mu^2} \tag{13}$$

para diversos valores de t; se construyó así la gráfica 2; en - seguida por medio de una integración mecánica con un planímetro - se obtuvieron los resultados que aparecen en la Tabla II, (se incluyen aquí en la 4ª columna los valores de $\rho = \sqrt{1 - \mu^2}$) cons-- truyéndose con los de las dos primeras columnas la gráfica de la figura 3. Debe notarse la gran concordancia, dentro de los límites de precisión del procedimiento, entre los dos valores de 2ϕ: el calculado y el determinado por el método gráfico. Finalmente, con los resultados de las dos últimas columnas, que representan - respectivamente el ángulo de longitud del péndulo y su distancia ρ al eje vertical OZ, se construyó la figura 4 que es la pro-- yección ortogonal de la trayectoria sobre el plano ecuatorial.

VII

BIBLIOGRAFIA

(Orden cronológico)

1) Lagrange, "Mécanique Analytique," (Gauthier-Villars; Paris, - 1888), 2° tomo.

2) Halphen, "Traité des Fonctions Elliptiques et de leurs Applications," (Gauthier-Villars; Paris, 1888), 2° tomo.

3) Appell-Lacour, "Principes de la Théorie des Fonctions Ellip-- tiques et Applications," (Gauthier-Villars; Paris, 1897).

4) Eisenhart, "Differential Geometry of Curves and Surfaces," - (Ginn and Co.; Boston, 1909).

5) Wilson, "Advanced Calculus," (Ginn and Co.; Boston, 1912).

6) Webster, "The Dynamics of particles and of rigid, elastic and fluid bodies," (Der Mathematischen Wissenschaften XI, Teubner; Leipzig, 1925).

7) Appell, "Traité de Mécanique Rationnelle," (Gauthier-Villars; Paris, 1926), 1er. tomo.

8) Knopp, "Teoría de Funciones," (Editorial Labor; Barcelona -- 1926).

9) McConnell, "Applications of the Absolute Differential Calcu-- lus," (Blackie and Son; London, 1936).

10) Osgood, "Mechanics," (Macmillan; New York, 1937).

11) Whittaker and Watson, "A Course of Modern Analysis," (Cam--- bridge, University Press; 1940, repr.).

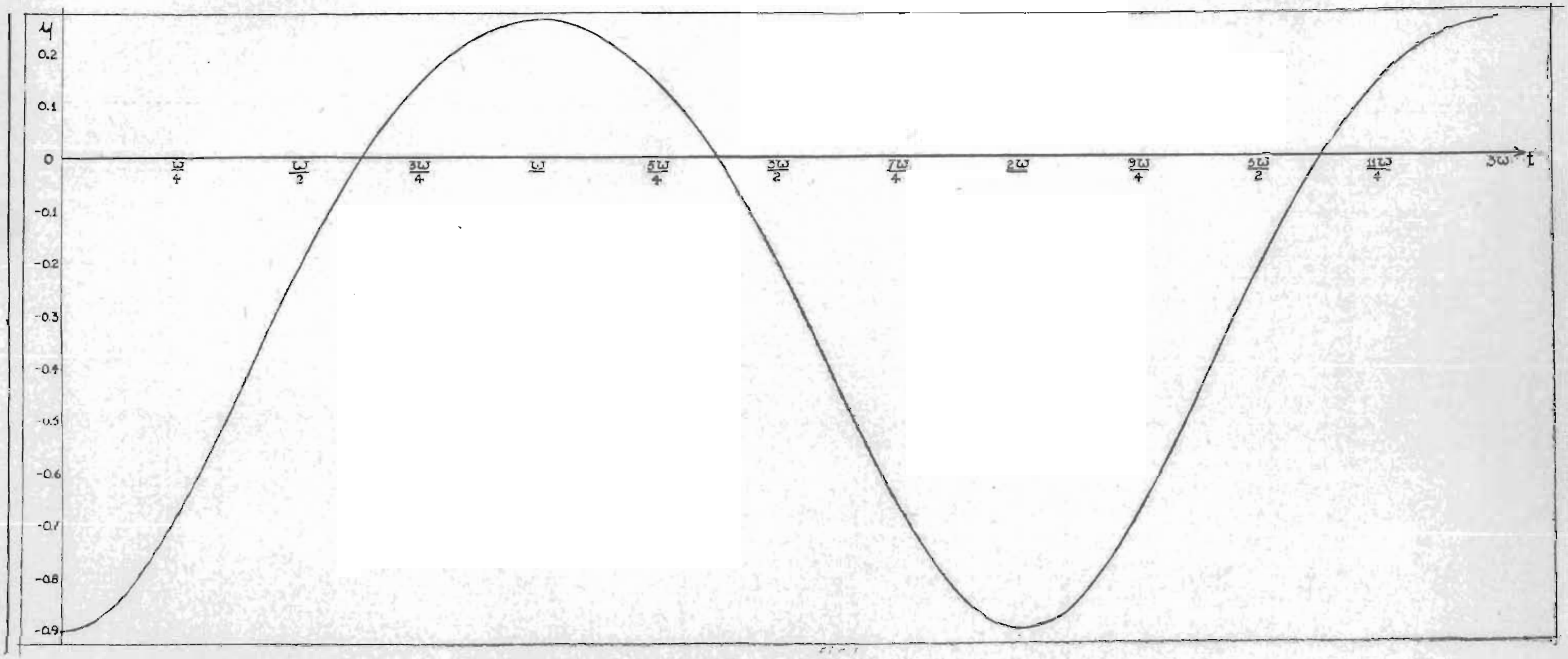
Tablas Matemáticas

12) Pierce, "A Short-Table of Integrals," (Ginn and Co.; Boston, 1910).

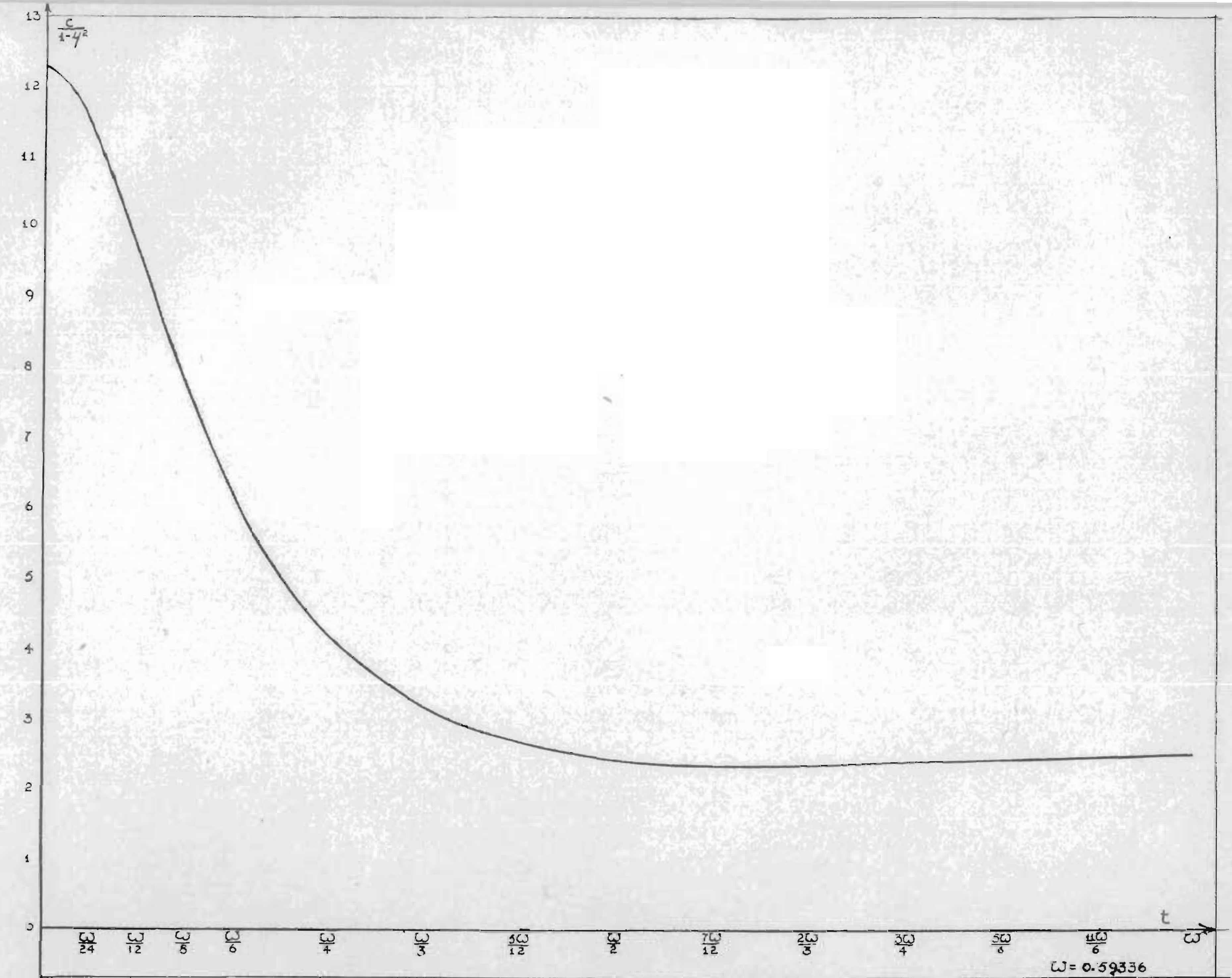
13) "Smithsonian Tables, Hyperbolic Fonctions," (The Smithsonian Institution; Washington, 1931).

14) Baron von Vega, "Logarithmic Tables," (Van Nostrand, New -- York).

15) Brandenburg, "Siebenstellige Trigonometrische Tafel" (Leip-- zig, 1931).

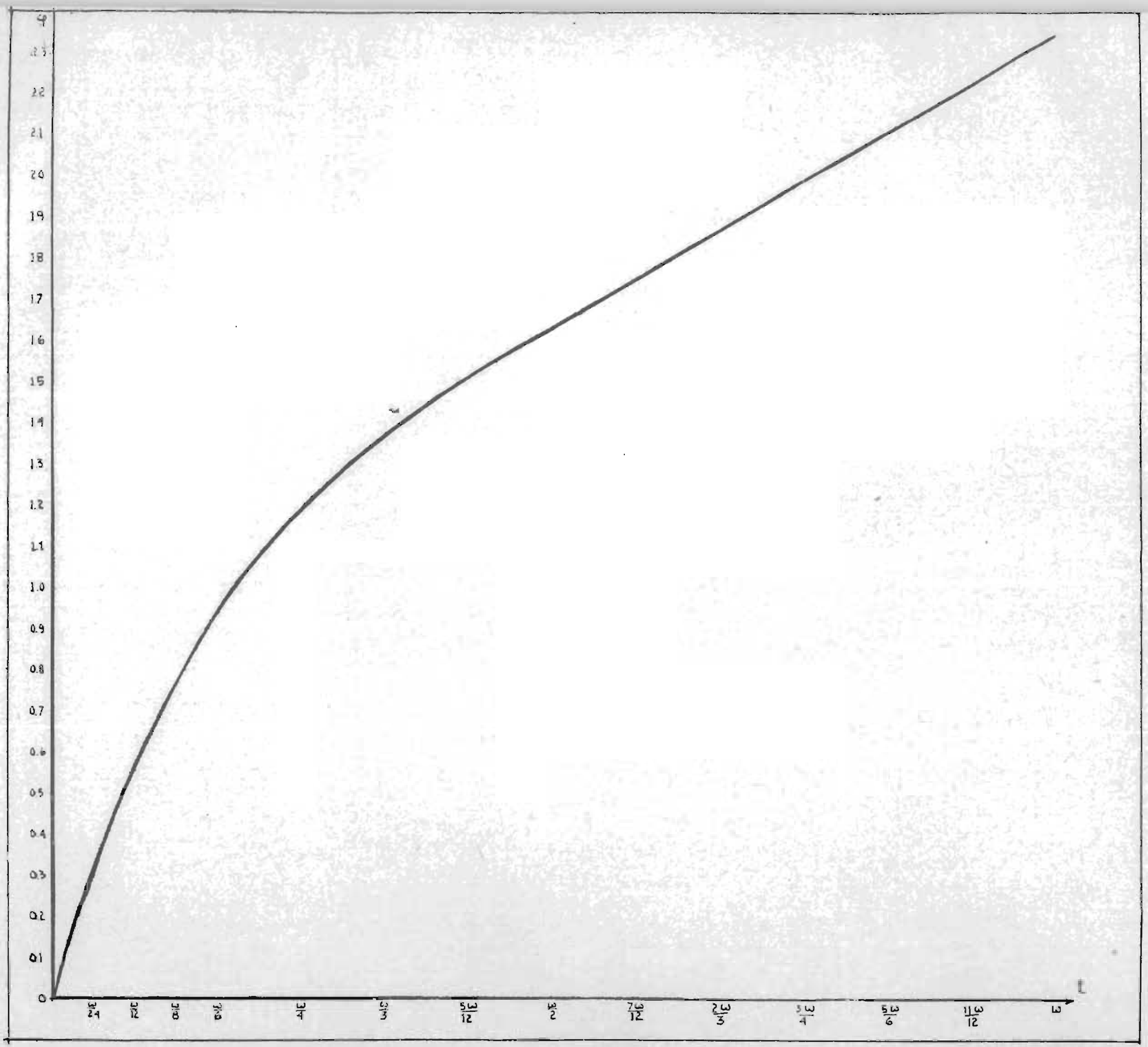


ψ
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
ω/4
ω/2
3ω/4
ω
5ω/4
3ω/2
7ω/4
2ω
9ω/4
5ω/2
11ω/4
3ω
t



$\frac{c}{1-\psi^2}$
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
t
$\frac{\omega}{24}$ $\frac{\omega}{12}$ $\frac{\omega}{8}$ $\frac{\omega}{6}$ $\frac{\omega}{4}$ $\frac{\omega}{3}$ $\frac{5\omega}{12}$ $\frac{\omega}{2}$ $\frac{7\omega}{12}$ $\frac{2\omega}{3}$ $\frac{3\omega}{4}$ $\frac{5\omega}{6}$ $\frac{11\omega}{6}$ ω
$\omega = 0.59336$

fig. 2.



φ
2.3
2.2
2.1
2.0
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
t
ω/24
ω/12
ω/8
ω/6
ω/4
ω/3
5ω/12
ω/2
7ω/12
2ω/3
3ω/4
5ω/6
11ω/12
ω

fig. 3.

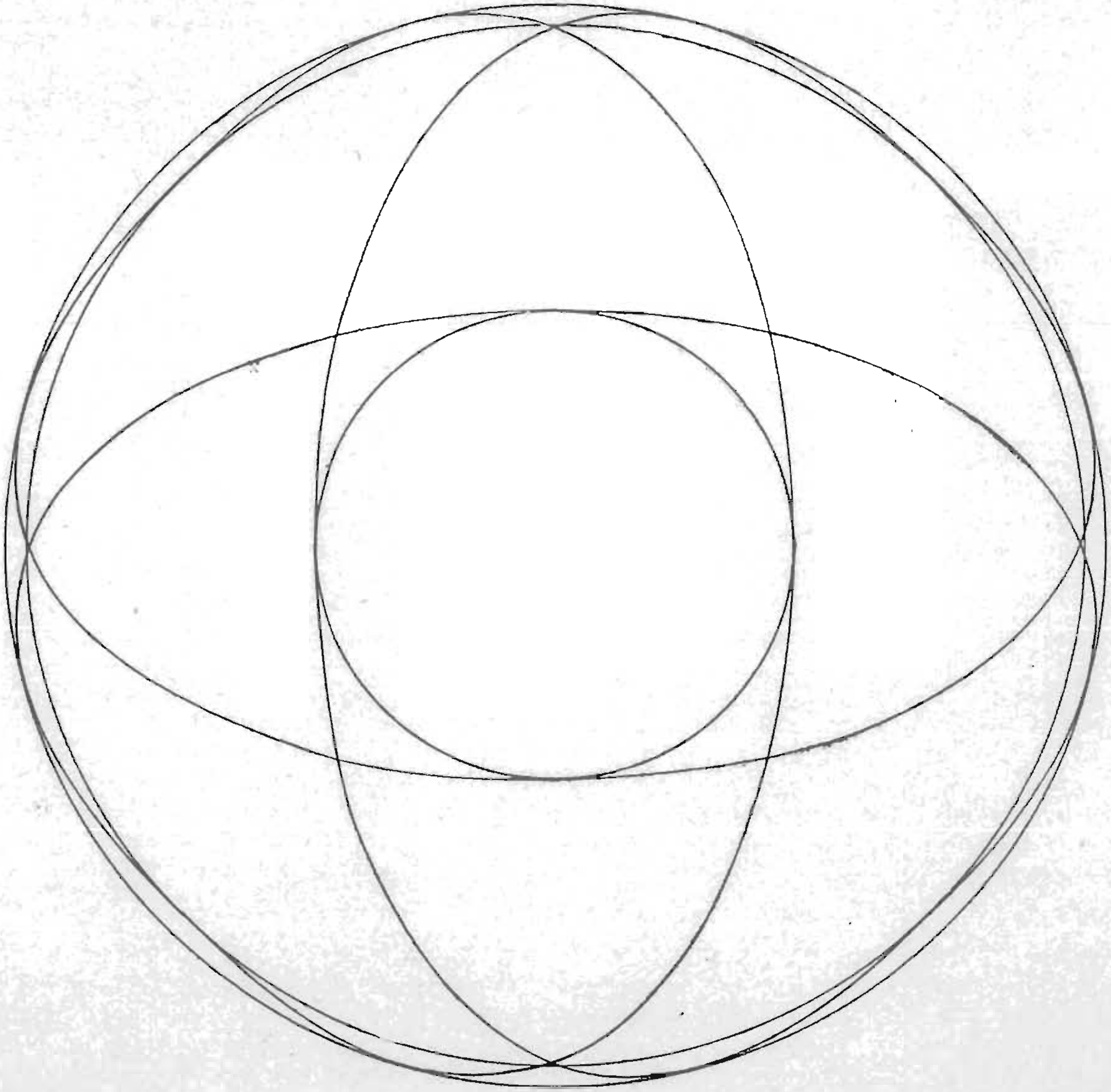


fig.4.