

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**  
FACULTAD DE CIENCIAS

29

**TEORIA DE GRUPOS Y  
CUASIPARTICULAS**

**TESIS**

Que para obtener el grado de  
**DOCTOR EN FISICA**

presenta

**PIER ACHILLE MELLO PICCO**

INSTITUTO DE FISICA



México, D. F.

**BIBLIOTECA**  
JUAN B. DE OYARZABAL

1965

G.F.T. 110



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Mi agradecimiento al Dr. Marcos  
Moshinsky por haber propuesto y  
dirigido este trabajo.

A Raquel

## INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	I
CAPITULO I	
INTRODUCCION MATEMATICA ( PARTICULAS IDENTICAS )	5
1.- Los grupos $U_{2\Omega}$ y $Sp_{2\Omega}$ .	
2.- El grupo del cuasispin.	
3.- El grupo auxiliar $R_{4\Omega}$ .	
4.- Operadores tensoriales en el cuasiespacio.	
5.- Generalización del cuasispin a varias capas.	
6.- Construcción de las eigenfunciones del cuasispin.	
CAPITULO II	
EL PROBLEMA DE LA FUERZA DE APAREAMIENTO ( PARTICULAS IDENTICAS )	42
1.- Introducción.	
2.- La aproximación de bosón.	
3.- El método de las cuasipartículas libres.	
4.- La aproximación de cuasibosón.	
5.- Interpretación del estado base BCS en el lenguaje de la mecánica estadística.	
6.- Algunos resultados de la teoría de apareamiento.	

### CAPITULO III

Pág.

#### OSCILACIONES COLECTIVAS EN LOS NUCLEOS ESFERICOS. ( PARTICULAS IDENTICAS )

109

- 1.- Introducción.
- 2.- La aproximación de cuasibosón.

### CAPITULO IV

#### ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UNA INTE- RACCION ARBITRARIA. ( PARTICULAS IDENTICAS )

121

- 1.- La aproximación de bosón.
- 2.- El método de las cuasipartículas

### CAPITULO V

#### ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL CASO DE PARTICULAS CON ISOSPIN ,

140

- 1.- Los grupos  $U_{6\alpha}$ ,  $U_{2\alpha}$ ,  $U_2^{(\tau)}$ .
- 2.- El grupo  $R_5$ .
- 3.- Fuerza de apareamiento para protones y neutrones.

## INTRODUCCION

En el desarrollo histórico de la física nuclear se han seguido algunas ideas comunes no sólo a otras ramas de la física, sino a la ciencia en general : la construcción de modelos para describir ciertos fenómenos. Uno de los modelos más antiguos en la física nuclear, fue el modelo de la gota de líquido, desarrollado, principalmente, por N. Bohr <sup>47)</sup>, mediante el cual se pueden describir algunos aspectos de las reacciones nucleares y ciertas características colectivas de los estados de algunos núcleos. Entre los fenómenos que el modelo de la gota de líquido es incapaz de describir, podemos apuntar toda una serie de regularidades que se observan a lo largo de la tabla periódica y que se repiten cuando el número de protones o el de neutrones es igual a uno de los llamados números mágicos. Esto recuerda un fenómeno análogo en la física atómica, que ya se había explicado con el modelo de capas del átomo. Esto llevó a M. G. Mayer <sup>48)</sup>, Jensen y otras personas a proponer un modelo análogo en la física nuclear. Este es el modelo de capas del núcleo, que ha tenido un éxito considerable en la interpretación de muchos fenómenos : además de explicar las numerosas características de la sistemática nuclear asociadas con las discontinuidades en los números mágicos, el modelo explica muchas regularidades en los espines y paridades de los núcleos. El modelo de capas supone que las partículas se mueven ( en primera aproximación independientemente ) en un potencial común, con ciertos niveles de energía.

Estamos aquí frente a dos modelos en cierta forma contradictorios : por un lado el modelo de la gota de líquido, que supone una interacción muy intensa entre los nucleones y que es capaz de describir características colectivas en los núcleos y, por otro lado, el modelo de capas, que considera que las partículas se mueven independientemente en un potencial común y que es capaz de describir excitaciones individuales ( de una sola partícula ) de los núcleos.

Hay entonces fenómenos que sólo pueden ser descritos por uno de los dos modelos y otros, igualmente importantes, que sólo describe el segundo modelo.

Sería entonces muy interesante tener un modelo único, capaz de describir a la vez ambos tipos de fenómenos. Esta es la idea del modelo unificado de Bohr - Mottelson <sup>37)</sup>, dentro del cual un núcleo se trata como si los nucleones fuera de la capa cerrada se estuvieran moviendo en un potencial común producido por una gota de líquido, que es el modelo hidrodinámico de los nucleones dentro de la capa cerrada. Los extranucleones interactúan con la gota, pero se siguen considerando independientes entre sí.

Uno de los éxitos del modelo unificado es la predicción del momento cuadrupolar de los núcleos. El modelo de partícula independiente predice un momento cuadrupolar más pequeña que el valor experimental, a veces por un factor de 20 ( ref. 37), pág. 54 ) ; en el modelo unificado el valor teórico es un poco más grande que el experimental y la razón entre ambos es, a veces, igual a 2 : o sea, 10 veces menor que en el caso anterior.

Hay sin embargo algunos fenómenos que no se pueden explicar si no se toma en cuenta la interacción residual entre los nucleones. Por ejemplo, en el espectro experimental de los núcleos pares se observa que el primer grupo de excitaciones individuales de una sola partícula está separado del estado base por una brecha considerable de energía. Este hecho llevó a Bohr, Mottelson y Pines <sup>28)</sup> a sugerir el uso de una interacción residual de apareamiento entre los nucleones, semejante a la que se había usado con éxito en la teoría de la

superconductividad <sup>16)</sup>.

Llegamos entonces a un modelo en el que los extranucleones se mueven en el potencial producido por la coraza e interaccionan con ella y además interaccionan entre sí mediante una fuerza de apareamiento. Este modelo unificado puede describir razonablemente varios aspectos, tanto nucleares como colectivos, de la estructura nuclear. Sin embargo es todavía demasiado fenomenológico, "poco unificado", usando una frase de Baranger <sup>31)</sup>: quisiéramos un modelo más fundamental que, usando exclusivamente la interacción entre todos los nucleones que componen el núcleo, nos pudiera describir tanto los aspectos individuales como los colectivos del sistema. Ante todo hay que darse cuenta que éste es un punto de vista demasiado utópico, ya que no se conoce la interacción exacta entre los nucleones; aun cuando se conociera, el problema matemático sería extremadamente complicado. Pero se conocen algunas de las características de dicha interacción y algunas de sus consecuencias. Por ejemplo, por la discusión que acabamos de dar del modelo unificado, es de esperarse que una parte de la interacción entre los nucleones produzca un potencial común dentro del cual los mismos nucleones se van a mover y que otra parte produzca un efecto de apareamiento <sup>50)</sup>. Se han desarrollado métodos muy poderosos que permiten extraer de una interacción general, por un lado aquella parte que da lugar a un campo autoconsistente y, por otro, aquella que contribuye al apareamiento <sup>51), 52), 53)</sup>. Si desarrollamos en multipolos una interacción general, los primeros términos correspondientes a los órdenes multipolares más bajos corresponden a una interacción de largo alcance y son los que más contribuyen al campo autoconsistente; en cambio, el resto de los términos corresponde a una interacción de corto alcance y se espera que puedan reproducir las características de apareamiento <sup>50), 14)</sup>. De los primeros términos, el cuadrupolar es el responsable de que el campo efectivo que siente cada nucleón tenga precisamente una deformación de tipo cuadrupolar, que es una de las más importantes en los

núcleos. De hecho, una interacción de tipo cuadrupolo-cuadrupolo ha sido usada con éxito por Elliott para describir las características colectivas de algunos núcleos ligeros<sup>54,55</sup>. Podemos entonces pensar en un modelo en el que los nucleones se mueven en un potencial común como en el modelo de capas e interaccionan a través de una fuerza de apareamiento, más una interacción cuadrupolo-cuadrupolo.

En el presente trabajo utilizamos métodos generales de teoría de grupos para desarrollar técnicas que sirvan para atacar el problema indicado en el párrafo anterior. En particular nos interesamos en entender, desde el punto de vista de teoría de grupos, el formalismo conectado con las cuasipartículas. Los temas tratados en este trabajo incluyen en el primer capítulo, los métodos de teoría de grupos que se utilizarán después para la solución del problema de la fuerza de apareamiento en tres nucleones idénticos. En el segundo capítulo se aprovecha el formalismo del cuasispin para dar la solución exacta al problema de nucleones idénticos moviéndose en capas degeneradas e interaccionando mediante una fuerza de apareamiento; se expone el problema de capas no degeneradas y se resuelve mediante la aproximación de bosón, la aproximación de las cuasipartículas libres y la aproximación de cuasibosón. En el tercer capítulo se introduce una interacción multipolar, para tratar las vibraciones colectivas en los núcleos esféricos. En el cuarto capítulo se trata brevemente el problema de una interacción arbitraria. Finalmente, en el capítulo quinto se considera el caso de una interacción de apareamiento que pueda actuar sobre protones y neutrones simultáneamente, se expone el formalismo del grupo  $R_5$  que permite resolver exactamente el problema con capas degeneradas y se desarrolla un método sistemático para la construcción de las eigenfunciones de la fuerza de apareamiento.

En esta tesis no se discuten aplicaciones específicas, porque algunas de éstas ya han sido analizadas en otras publicaciones en que participó el autor<sup>36, 49</sup>.

CAPITULO I

INTRODUCCION MATEMATICA  
(PARTICULAS IDENTICAS)

I.- Los grupos  $M_{2n}$  y  $Sp_{2n}$ .

Consideremos un conjunto de fermiones idénticos moviéndose en un potencial común. Supongamos que elegimos el esquema  $j-j$  para clasificar los estados de una sola partícula. Por ejemplo, en un potencial común de oscilador armónico, algunos de los estados de una sola partícula en el esquema  $j-j$  se ñan los que se indican en la fig. 1

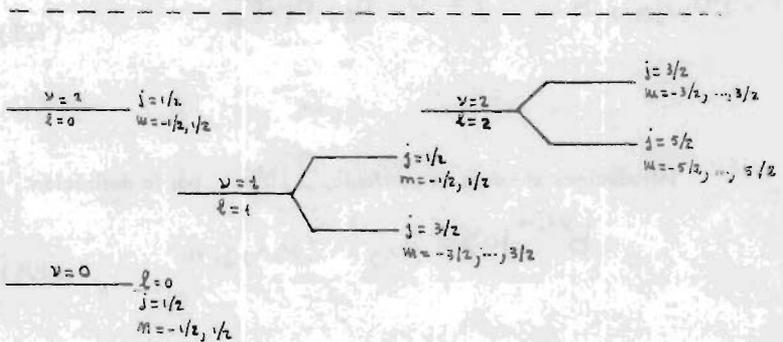


Fig. 1

Podemos usar los índices  $\nu \ell j m$  que se indican en la Fig. 1 para clasificar los estados de una sola partícula, que se indicarán por tanto con el ket

$$|\nu \ell j m\rangle \quad (1.1),$$

Para todas las discusiones posteriores es conveniente trabajar con las técnicas de la segunda cuantización <sup>1)</sup>, que no sólo permiten escribir muchas expresiones de una manera más compacta, sino que permiten también tener una expresión explícita de algunas interacciones, como la fuerza de apareamiento, que no se puede escribir como un potencial local en el espacio de configuración <sup>2)</sup>. Introducimos entonces los operadores de creación y de aniquilación de fermiones, con las reglas de anticonmutación ordinarias.

$$\begin{cases} b_{\nu \ell j m}^+ & , \quad \text{op. de creación} \\ b_{\nu \ell j m} & , \quad \text{" " aniquilación} \end{cases} \quad (1.2),$$

$$\begin{aligned} \{b_{\nu \ell j m}^+, b_{\nu' \ell' j' m'}^+\} &= \{b_{\nu \ell j m}, b_{\nu' \ell' j' m'}\} = 0 \\ \{b_{\nu \ell j m}^+, b_{\nu' \ell' j' m'}\} &= \delta_{\nu}^{\nu'} \delta_{\ell}^{\ell'} \delta_{j}^{j'} \delta_{m}^{m'} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Introducimos el vacío de partículas  $|0\rangle$  por la definición :

$$b_{\nu \ell j m} |\nu \ell j m\rangle = 0, \quad \forall \nu, \ell, j, m \quad (1.4)$$

El efecto de  $b_{\nu\ell jm}^+$  es el de crear un fermión en el estado  $(\nu\ell jm)$  y el de  $b_{\nu\ell jm}$  es el de aniquilarlo en ese estado.

Como una función de onda de  $n$  fermiones debe ser antisimétrica frente al intercambio de 2 partículas cualesquiera, vemos que los operadores de Fermi recién defini dos están hechos ad hoc para tratar funciones de onda de este tipo. Por ejemplo, si defi nimos  $\rho \equiv (\nu\ell jm)$ , entonces al determinante de Slater :

$$\sum_P (-)^P P[\psi_{\rho_1}(1) \psi_{\rho_2}(2) \cdots \psi_{\rho_n}(n)] \quad (1.5)$$

( $P$  indica permutación de las variables  $1, 2, \dots, n$ )

se le asocia :

$$|\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n\rangle = b_{\rho_1}^+ b_{\rho_2}^+ \cdots b_{\rho_n}^+ |0\rangle \quad (1.6)$$

que claramente es antisimétrica frente al intercambio de 2 índices cualesquiera.

Vamos a concentrarnos en una sola capa  $(\nu\ell j)$  y, por brevedad, vamos a indicar los op. de creación y de aniquilación de Fermi en esa capa por

$$b_m^+, b_m^m \quad (1.7)$$

respectivamente.

Las  $(2j+1)$  cantidades  $b_m^+$  son las componentes de un tensor irreducible (ref. 3), cap. 5) de orden  $j$  frente a rotaciones en el espacio  $R_3$  que afectan tanto las coordenadas espaciales como las del spin. Las  $b_m^+|0\rangle$  son entonces bases para las representaciones irreducibles (BRI)  $\mathcal{D}_{mm'}^j(\alpha\beta\gamma)$  del grupo  $R_3$ , en la

cadena  $R_3 \supset R_2$  o sea :

$$(b_m^+)' = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m',m}^j b_{m'}^+ \quad (1.8)$$

Transponiendo y conjugando ambos miembros y recordando que

$$(b_m^+)^{\dagger} = b_m^m \quad (1.9)$$

(ref. 3), cap. 4)

$$[\mathcal{D}_{m',m}^j(\alpha\beta\gamma)]^* = (-)^{m'-m} \mathcal{D}_{-m',-m}^j(\alpha\beta\gamma) \quad (1.10)$$

se tiene :

$$[(-)^{j-m} b_m^+]' = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m',m}^j [(-)^{j-m'} b_{-m'}^-] \quad (1.11)$$

que muestra que las cantidades  $(-)^{j-m} b_m^+$  tienen las mismas propiedades de transformación frente a  $R_3$  que las cantidades  $b_m^+$

Definimos entonces :

$$b_m \equiv (-)^{j-m} b_m^+ \quad (1.12)$$

Ya hemos averiguado las propiedades de los operadores  $b_m^+$  frente al grupo  $R_3$ . Vamos a estudiar ahora sus propiedades frente a otros grupos, para poder clasificar las funciones de onda de  $n$  partículas.

Consideremos un espacio vectorial de

$$2\Omega \equiv 2j+1 \quad (1.13)$$

dimensiones y consideremos a las  $b_m^+$  como las  $2\Omega$  componentes de un vector en este espacio. Si sobre este vector efectuamos una transformación, mediante una matriz unitaria de  $2\Omega$  dimensiones, las  $2\Omega$  componentes se transformarán entre sí y se ve entonces que constituyen una base para una representación del grupo  $\mathcal{U}_{2\Omega}$  (ref. 4 cap. II). De hecho son una base para la R. I. [1] de  $\mathcal{U}_{2\Omega}$ . La función de onda de  $n$  partículas, o sea un producto de  $n$   $b_m^+$  será una base para una representación de  $\mathcal{U}_{2\Omega}$  y, dadas las reglas de anticonmutación de las  $b_m^+$  y puesto que sólo tenemos un índice disponible ( $m$ ), ese producto será una base para la R. I. totalmente antisimétrica  $[1^n]$  de  $\mathcal{U}_{2\Omega}$ . Por otro lado, las  $2\Omega$   $b_m^+$  son, como ya se ha visto, una base para la R. I.  $\mathcal{D}_{m'm}^j$  de  $R_3$ ; un producto de  $n$   $b_m^+$  será una base, en general reducible, de  $R_3$ . Tomando combinaciones lineales apropiadas se pueden construir BRI de  $R_3$ , o sea, bases de momento angular total  $J$  definido.

Hasta  $j = 7/2$  y  $n = 3$  partículas la clasificación anterior

$$\mathcal{U}_{2\Omega} \supset R_3 \supset R_2$$

es suficiente, puesto que cada  $J$  aparece una sola vez. Para  $j$  y  $n$  mayores se requieren otros números cuánticos para clasificar totalmente las funciones de onda. Podemos buscar un grupo  $G$  contenido en  $\mathcal{U}_{2\Omega}$  y que contenga a  $R_3$ , para tener un nuevo número cuántico. Hay varias formas de escoger ese grupo  $G$  y en la práctica  $G$  es de utilidad si las transformaciones de  $G$  dejan invariante a la parte de interacción del hamiltoniano del problema. Aquí escogeremos al grupo  $G$  que deje invariante una forma bilineal del tipo

$$I = \sum_m (-)^{j-m} b_m^+ b_{-m}^+ \quad (1.14).$$

Esta elección va a ser muy importante para nosotros, porque veremos que la llamada interacción de apareamiento se puede expresar en términos de  $I$  y de su transpuesta conjugada, y será entonces invariante frente a  $R_3$ . Pero hay un grupo más amplio que  $R_3$ , bajo el cual  $I$  es un invariante. Viendo que el producto escalar (1.14) se puede expresar en términos de un tensor métrico

$$g_{mm'} = (-)^{j-m} \delta_{m, -m'} \quad (1.15)$$

$$I = \sum_{m, m'} b_m^+ g_{mm'} b_{m'}^+ \quad (1.16)$$

y observando que  $g_{mm'} = -g_{m'm}$  es una matriz antisimétrica, inferimos (ref. 3 ec. 10.64) que  $G$  es el grupo simpléctico de  $(2j+1)$  dimensiones  $Sp_{2\Omega}$ .

Más adelante, cuando veamos la construcción explícita de las funciones de onda, veremos que las R.I. de  $Sp_{2\Omega}$  contenidas en la R.I.  $[1^n]$  de  $\mathcal{U}_{2\Omega}$  están caracterizadas por  $(1^v)$ , donde  $v$  es el seniority del estado, definido como el número de partículas no apareadas a momento angular cero presentes en ese estado. Entonces, al usar la cadena de grupos

$$\mathcal{U}_{2\Omega} \supset Sp_{2\Omega} \supset R_3 \supset R_2 \quad (1.17)$$

para clasificar los estados, estos se pueden escribir en la forma

$$|j^n v \alpha J M\rangle, \quad (1.18),$$

donde  $\alpha$  representa los números cuánticos extra, necesarios para clasificar totalmente

los estados.

Vamos a estudiar brevemente los generadores de los grupos  $U_{2\Omega}$  y  $Sp_{2\Omega}$  que acabamos de introducir.

A partir de los operadores de creación  $b_m^+$  y de los de aniquilación  $b_m$  podemos construir los operadores :

$$C_m^{m'} \equiv b_m^+ b_m^{m'} \quad (1.19)$$

y las reglas de conmutación de dos  $C_m^{m'}$  son :

$$[C_m^{m'}, C_{\bar{m}}^{\bar{m}'}] = C_m^{\bar{m}'} \delta_{\bar{m}}^{m'} - C_{\bar{m}}^{m'} \delta_m^{\bar{m}'} \quad (1.20),$$

que son precisamente las reglas de conmutación de los generadores de un grupo unitario de  $2\Omega$  dimensiones (ref. 5, cap. 2 y apéndice 1). Entonces los operadores  $C_m^{m'}$  definidos en (1.19) son los generadores de nuestro grupo  $U_{2\Omega}$ .

Los generadores de  $Sp_{2\Omega}$  se deben construir como combinaciones lineales de las  $C_m^{m'}$ , ya que  $Sp_{2\Omega}$  es subgrupo de  $U_{2\Omega}$ ; además esos generadores deben conmutar con el invariante  $I$  definido en (1.14).

Esas combinaciones lineales son :

$$\Lambda_m^{m'} \equiv C_m^{m'} + (-)^{m+m'} C_{-m}^{-m'} \quad (1.21),$$

Es inmediato verificar que :

$$[\Lambda_m^{m'}, I] = 0 \quad (1.22),$$

Por otro lado se puede verificar que las reglas de conmutación

$$\begin{aligned}
 & [\Lambda_m^{m'}, \Lambda_{\bar{m}}^{\bar{m}'}] = \\
 & = \Lambda_m^{\bar{m}'} \delta_{\bar{m}}^{m'} - \Lambda_{\bar{m}}^{m'} \delta_{\bar{m}}^m + \\
 & + (-)^{m+m'} \Lambda_{-m}^{\bar{m}'} \delta_m^{-\bar{m}} + (-)^{\bar{m}+\bar{m}'} \Lambda_m^{-\bar{m}} \delta_{-m}^{\bar{m}'}
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

son las de los generadores de un grupo simpléctico de  $2\Omega$  dimensiones.

Acabamos de exponer brevemente la clasificación de los estados de  $n$  partículas en una capa de momento angular total  $j$ , según la cadena de grupos y subgrupos (1.17) cadena conocida como de Racah - Flowers.

Cuando el número cuántico  $j$  es muy grande, tenemos que tratar con un grupo unitario y su subgrupo simpléctico de un número de dimensiones ( $2\Omega$ ) considerable.

Veremos en la sección siguiente que existe otra cadena de grupos, conocida como la de Helmers, que consiste en utilizar explícitamente el grupo complementario del  $Sp_{2\Omega}$  y obtener la misma información que la que nos da la cadena de Racah. Ese grupo complementario es un grupo  $SU_2$ , independientemente del valor de  $j$ , cuyas transformaciones se llevan a cabo en el llamado cuasiespacio, según veremos en la próxima sección.

2.- El grupo del Cuasispin.

Consideremos una sola capa  $j$ . En esa capa definimos los siguientes operadores: 2), 6), 7)

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = -\frac{\sqrt{\Omega}}{2} [b^+ b^+]_{00} \\ S_0 = -\sqrt{\frac{\Omega}{2}} [b^+ b]_{00} - \frac{\Omega}{2} = \frac{N - \Omega}{2} \\ S_{-1} = -\frac{\sqrt{\Omega}}{2} [b b]_{00} \end{array} \right. \quad (1.24),$$

donde

$$[b^+ b^+]_{00} \equiv \sum_m \langle j j m - m | 00 \rangle b_m^+ b_{-m}^+ \quad (1.25)$$

y análogamente  $[b^+ b]_{00}$  y  $[b b]_{00}$ , y  $N$  es el operador de número en la capa ( $\nu j$ ), definido como:

$$N \equiv \sum_m b_m^+ b^m \quad (1.25)'$$

Si se calculan los conmutadores de los operadores (1.24) se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} [S_{-1}, S_1] = S_0 \\ [S_0, S_1] = S_1 \\ [S_0, S_{-1}] = -S_{-1} \end{array} \right. \quad (1.26),$$

Vemos que (1.26) coinciden con las reglas de conmutación de los operadores  $L_1, L_0, L_{-1}$  del momento angular; entonces  $S_1, S_0, S_{-1}$  son los generadores de un grupo  $SU_2$ , el llamado grupo del cuasispin. Análogamente a lo que se hace para el momento angular ordinario, definimos  $S_1$  como el generador de ascenso,  $S_{-1}$  como el de descenso y  $S_0$  como el de peso; al aplicar  $S_1$  a un estado con proyección  $M$  (eigenvalor de  $S_0$ ) definida, la aumenta en una unidad, mientras que  $S_{-1}$  la disminuye en una unidad.

Por las definiciones (1.24) vemos que  $S_1$  crea una pareja de partículas acopladas a momento angular  $J=0$ ,  $S_{-1}$  aniquila una pareja acoplada a  $J=0$  y  $S_0$  cuenta esencialmente el número total de partículas. Es entonces de esperarse que el eigenvalor  $\beta(\beta+1)$  de

$$S^2 \equiv \sum_q (-)^q S_q S_{-q} \quad (q=1,0,-1) \quad (1.27)$$

esté conectado con el seniority del estado. En efecto, consideremos un estado de  $v$  partículas en la capa  $j$  y con seniority  $v$ ; por definición de seniority, este estado no tiene parejas de partículas acopladas a  $J=0$ ; entonces  $S_{-1}$  aplicado a él debe dar cero:

$$S_{-1} |j^v \nu \alpha J\rangle = 0 \quad (1.28)$$

Pero, por lo explicado antes, esto significa que el estado  $|j^v \nu \alpha J\rangle$  es de mínimo peso en el cuasispin; o sea:

$$\begin{cases} S^2 |j^v \nu \alpha J\rangle = \beta(\beta+1) |j^v \nu \alpha J\rangle \\ S_0 |j^v \nu \alpha J\rangle = M |j^v \nu \alpha J\rangle \end{cases} \quad (1.29)$$

con

$$M = \frac{v - \Omega}{2} \quad \text{y} \quad \mathcal{J} = -M = \frac{\Omega - v}{2} \quad (30).$$

Un estado con  $n$  partículas y ( $n > v$ ) no será de mínimo peso y se obtiene aplicándole al estado  $|j^v v \alpha J\rangle$  el generador de ascenso  $S_+$ ; pero  $S_+$  conmuta con  $S^2$  y en el proceso no se altera el eigenvalor de  $S^2$  y por tanto no se altera el seniority  $v$ ; esto concuerda con la definición de seniority, que es el mismo para diferentes estados que solo difieran en parejas de partículas acopladas a momento angular cero. Entonces un estado de  $n$  partículas y seniority  $v$  se puede indicar de cualquiera de las dos formas siguientes:

$$|j^n v \alpha J\rangle \equiv \left| \mathcal{J} = \frac{\Omega - v}{2}, M = \frac{n - \Omega}{2}; \alpha J \right\rangle \quad (1.31)$$

En la 1ª sección se vio que clasificando los estados en la cadena de Racah-Flowers, el grupo unitario  $U_{2\Omega}$  nos da el número de partículas del estado y su subgrupo simpléctico  $Sp_{2\Omega}$  nos da el seniority; acabamos ahora de ver que el grupo  $SU_2$  del cuasipin nos da el seniority del estado y su subgrupo  $R_2$  con generador  $S_0$  nos da el número de partículas. Se ve que esta 2ª forma de clasificar los estados, que da origen a la llamada cadena de Helmers, es muy práctica, ya que la dimensión del grupo no cambia al cambiar la degeneración  $2\Omega$  de nuestro estado.

Vamos ahora a estudiar más de cerca la relación entre las dos cadenas de grupos <sup>6)</sup>.

Recordando las definiciones para los generadores de los grupos  $U_{2\Omega}$   $Sp_{2\Omega}$  y  $SU_2$ , definimos:

Operador de Casimir de 1er. orden de  $\mathcal{M}_{2\Omega}$  : 
$$N = \sum_m \mathcal{E}_m^m \quad (a)$$

Operador de Casimir de 2o. orden de  $\mathcal{M}_{2\Omega}$  : 
$$\Gamma = \sum_{m,m'} \mathcal{E}_m^{m'} \mathcal{E}_m^m \quad (b)$$

Operador de Casimir de  $Sp_{2\Omega}$  : 
$$\Phi = \sum_{m,m'} \Lambda_m^{m'} \Lambda_m^m \quad (c) \quad (1.32)$$

Operador de Casimir de  $SU_2$  : 
$$S^2 = \sum_q (-1)^q S_q S_{-q} \quad (d)$$

Operador de Casimir de  $R_2$  : 
$$S_0 = \frac{N - \Omega}{2} \quad (e)$$
  
 ( $R_2 \subset SU_2$ )

Por un simple desarrollo algebraico se encuentra :

$$S^2 = -\frac{1}{2} \Phi + \frac{1}{4} \Omega (\Omega + 2) \quad (1.33)$$

Ante todo, como estamos trabajando con operadores de creación del tipo  $b_m^+$  con un solo índice disponible, recordamos que la R. I. de  $\mathcal{M}_{2\Omega}$  queda especificada por un solo número ( $n$ ) y la de  $Sp_{2\Omega}$  también por un solo número ( $\nu$ ). En tonces, debido a (1.33), vemos que un conjunto de funciones de onda es una B. R. I. de  $SU_2$ , lo es automáticamente de  $Sp_{2\Omega}$ , porque conociendo el eigenvalor de  $S^2$  conocemos el de  $\Phi$ ; por otro lado (1.33) muestra que si  $\mathcal{J}$  está conectado con el seniority, el eigenvalor de  $\Phi$  del grupo simpléctico también lo estará.

Además (e) muestra que conociendo el eigenvalor de  $S_0$  se conoce el del operador de Casimir de 1er. orden de  $\mathcal{M}_{2\Omega}$ , que es el número de partículas en ambos casos.

Con lo anterior se ve entonces que es enteramente equivalente clasificar las funciones de onda por la cadena  $U_{2\Omega} \supset Sp_{2\Omega}$  o por la cadena  $SU_2 \supset R_2$ .

Recordemos que en la sección I se habían introducido los generadores  $\Lambda_m^{m'}$  de  $Sp_{2\Omega}$  pidiendo que conmutaran con el invariante  $I$  de la ec. (I.16); pero  $I$  es proporcional a  $S_4$ . Entonces  $[\Lambda_m^{m'}, S_4] = 0$ . Se puede verificar de inmediato que

$$[\Lambda_m^{m'}, S_q] = 0 \quad (1.34),$$
$$\begin{cases} m = -j, \dots, j \\ q = 1, 0, -1 \end{cases}$$

Si los generadores de un grupo  $G$  conmutan con los de un grupo  $H$  y los operadores de Casimir de  $G$  se pueden expresar en términos de los de  $H$ , se dice que  $G$  y  $H$  son complementarios. Entonces el grupo  $SU_2$  del cuasispin es complementario del grupo simpléctico  $Sp_{2\Omega}$ <sup>6)</sup>. Un buen ejemplo de esto se puede encontrar en la ref. 7), en donde se obtiene el grupo complementario del grupo  $R_3$  de rotaciones en el espacio físico; ese grupo complementario resulta ser un grupo de Lorentz.

### 3.- El grupo auxiliar $R_{4\Omega}$ .

Como se menciona en la ref. 9), se puede encontrar un grupo que contenga al producto directo de los dos grupos complementarios  $Sp_{2\Omega}$  y  $SU_2$ . Para ello vamos a definir los siguientes operadores :

$$\mathcal{Q}_{mm'}^+ \equiv b_m^+ b_{m'}^+ \quad (a)$$

$$\mathcal{Q}^{mm'} \equiv b^m b^{m'} \quad (b)$$

(1.35).

Utilizando el índice

$$\mu = m + \Omega + \frac{1}{2} \quad (1.36),$$

con  $\mu = 1, \dots, 2\Omega$  ( $\mu > 0$  siempre), podemos definir los operadores

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} \equiv \mathcal{C}_{mm'}^{\mu'} - \frac{1}{2} \mathcal{S}_m^{\mu'} \quad (a)$$

$$\Lambda_{\mu}^{-\mu'} \equiv \mathcal{Q}_{mm'}^+ \quad (b) \quad (1.37)$$

$$\Lambda_{-\mu}^{\mu'} \equiv \mathcal{Q}^{mm'} \quad (c).$$

Si calculamos las reglas de conmutación de los operadores (1.37),

obtenemos :

$$\begin{aligned}
 & [\Lambda_M^{M'}, \Lambda_{\bar{M}}^{\bar{M}'}] = \\
 & = \Lambda_M^{\bar{M}'} \delta_{\bar{M}}^{M'} - \Lambda_{\bar{M}}^{M'} \delta_M^{\bar{M}'} + \Lambda_{-\bar{M}'}^{M'} \delta_M^{-\bar{M}} - \Lambda_M^{-\bar{M}} \delta_{-\bar{M}'}^{M'}
 \end{aligned}
 \tag{1.38}$$

donde  $M = -2\Omega, \dots, -1, 1, \dots, 2\Omega$ .

Se demuestra en la ref. 5) cap. 5 y apéndice I que (1.38) son las reglas de conmutación de un grupo ortogonal de  $4\Omega$  dimensiones, que designaremos como  $R_{4\Omega}$ .

Utilizando las definiciones de los generadores  $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$  de  $R_{4\Omega}$ ,  $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$  de  $Sp_{2\Omega}$  y  $S_{\eta}$  de  $SU_2$ , se puede demostrar:

$$\begin{cases}
 S_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\mu > 0} (-)^{\mu} \Lambda_{-\mu}^{\mu-2\Omega-1} & (a) \\
 S_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu > 0} \Lambda_{\mu}^{\mu} & (b) \\
 S_{-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{\mu > 0} (-)^{\mu} \Lambda_{-\mu}^{-\mu+2\Omega+1} & (c)
 \end{cases}
 \tag{1.38}$$

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} - (-)^{\mu+\mu'} \Lambda_{-\mu'+2\Omega+1}^{-\mu+2\Omega+1}
 \tag{1.39}$$



#### 4.- Operadores tensoriales en el cuasiespacio.

Una ventaja muy grande de la cadena de Helmers sobre la de Racah está en el cálculo de los elementos de matriz de algunos operadores. Si un operador es un tensor irreducible frente a un grupo  $G$  y a un subgrupo  $H$  en la cadena  $G \supset H$  y queremos calcular sus elementos de matriz respecto a funciones de onda clasificadas en la cadena de grupos  $G \supset H$ , podemos aplicar el teorema de Wigner - Eckart y la dependencia en el renglón aparecerá exclusivamente a través de un coeficiente de Wigner en la cadena  $G \supset H$ . Ahora bien, si se tiene un tensor irreducible en la cadena  $U_{2\Omega} \supset Sp_{2\Omega}$ , el teorema de Wigner - Eckart nos dará un coeficiente de Wigner en esa cadena, coeficiente que, en general, no se conoce. Pero sabemos que ese operador también es tensor irreducible en la cadena  $SU_2 \supset R_2$  y aquí el coeficiente de Wigner es un coeficiente de Clebsch - Gordan ordinario del grupo de rotaciones.

Procedemos entonces a señalar algunos operadores que son tensores irreducibles en el cuasiespacio.

Calcularemos, ante todo, las reglas de conmutación de los generadores  $S_4, S_0, S_{-4}$  del cuasispin, con los operadores de creación y de aniquilación  $b_m^+, b_m$ . Se obtiene:

$$[S_4, b_m^+] = 0$$

$$[S_4, b_m] = -\frac{1}{\sqrt{2}} b_m^+$$

$$[S_0, b_m^+] = \frac{1}{2} b_m^+$$

$$[S_0, b_m] = -\frac{1}{2} b_m$$

$$[S_{-4}, b_m^+] = \frac{1}{\sqrt{2}} b_m$$

$$[S_{-4}, b_m] = 0$$

(1.41).

Las reglas anteriores muestran ( ref. 3) ec. 5.5) que los operadores de creación y de aniquilación de Fermi son tensores de orden  $1/2$  en el cuasiespacio : los operadores de creación tienen componente  $1/2$  y los de aniquilación,  $-1/2$ . Indicaremos con  $T_{JM}$  un tensor irreducible en el cuasiespacio, donde el índice  $J$  es el orden del tensor y  $M$  es su proyección. Con esta notación podemos escribir :

$$\begin{cases} b_m^+ = T_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \\ b_m = T_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (1.42)$$

Si además queremos especificar, en un tensor dado, sus propiedades de transformación frente a  $R_3$ , usamos la notación :  $T_{JM, kq}$ , que frente a  $R_3$  se transforma como un tensor de orden  $k$  y proyección  $q$ . Con esta notación tenemos :

$$\begin{aligned} b_m^+ &= T_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}, jm} \\ b_m &= T_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}, jm} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Con estos tensores de orden  $1/2$  podemos construir, por acoplamiento directo, escalares y vectores en el cuasiespacio.

Podemos construir de inmediato un escalar en el cuasiespacio de la manera siguiente :

$$T_{00} = \sum_{\tau} \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \tau - \tau | 00 \rangle T_{\frac{1}{2} \tau, jm_1} T_{\frac{1}{2} -\tau, jm_2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (b_{m_1}^+ b_{m_2} - b_{m_1} b_{m_2}^+) = \\
 &= \frac{(-)^{j-m_2}}{\sqrt{2}} [b_{m_1}^+ b^{-m_2} + (-)^{m_1-m_2} b_{m_2}^+ b^{-m_1}] - (-)^{j-m_1} \delta_{m_2}^{-m_1} = \\
 &= \frac{(-)^{j-m_2}}{\sqrt{2}} [\mathcal{E}_{m_1}^{-m_2} + (-)^{m_1-m_2} \mathcal{E}_{m_2}^{-m_1}] - (-)^{j-m_1} \delta_{m_2}^{-m_1} \\
 & \hspace{20em} (1.44) .
 \end{aligned}$$

La parte encerrada en el paréntesis cuadrado es el generador  $\Lambda_{m_1}^{-m_2}$  del grupo simpléctico  $Sp_{2\Omega}$  que, de acuerdo con (1.34), conmuta con los generadores  $S_q$  del cuasispin; entonces  $T_{00}$  es, efectivamente, un escalar en el cuasiespacio.

La expresión (1.44) se indicó simplemente con  $T_{00}$ , porque no tiene propiedades irreducibles de transformación frente a  $R_3$ ; más adelante nos interesarán expresiones acopladas a momento angular total definido. Vamos a analizar los siguientes operadores <sup>7)</sup>:

$$\left\{ \begin{aligned}
 S_{+kq} &\equiv -\frac{\sqrt{\Omega}}{2} [b^+ b^+]_{kq} \\
 S_{0kq} &\equiv -\sqrt{\frac{\Omega}{2}} [b^+ b]_{kq} - \frac{\Omega}{2} \delta_{k0} \\
 S_{-kq} &\equiv -\frac{\sqrt{\Omega}}{2} [b b]_{kq}
 \end{aligned} \right. \hspace{10em} (1.45) ,$$

donde

$$[b^+ b^+]_{kq} = \sum_{m_1, m_2} \langle j j m_1 m_2 | k q \rangle b_{m_1}^+ b_{m_2}^+$$

$$[b^+ b]_{kq} = \sum_{m_1, m_2} \langle j j m_1 m_2 | k q \rangle b_{m_1}^+ b_{m_2} \quad (1.46)$$

$$[b b]_{kq} = \sum_{m_1, m_2} \langle j j m_1 m_2 | k q \rangle b_{m_1} b_{m_2}$$

Las 3 cantidades (1.45) son, desde luego, tensores irreducibles en el espacio físico de rotaciones, de orden  $k$  y proyección  $q$ . Vamos a analizar sus propiedades de transformación frente al cuasispin.

Si  $k$  es non, entonces  $S_{1kq} \equiv S_{-1kq} \equiv 0$ , debido a las reglas de simetría de los coeficientes de Clebsch - Gordan y a las reglas de anticommutación de los operadores  $b_{m_1}^+$  y  $b_{m_2}$ ;  $S_{0kq}$  es diferente de cero. Si calculamos los conmutadores con los generadores del cuasispin, obtenemos:

$$\underbrace{k \text{ non}} \left\{ \begin{array}{l} [S_1, S_{0kq}] = 0 \\ [S_0, S_{0kq}] = 0 \\ [S_{-1}, S_{0kq}] = 0 \end{array} \right. \quad (1.47)$$

expresiones que indican que  $S_{0kq}$  con  $k$  non es un escalar frente al cuasispin.

Si  $k$  es par, se tienen las siguientes reglas de conmutación:

$$[S_1, S_{1kq}] = 0; \quad [S_1, S_{0kq}] = -S_{1kq}; \quad [S_1, S_{-1kq}] = -S_{0kq}$$

k

$$[S_0, S_{1kq}] = S_{1kq}; \quad [S_0, S_{0kq}] = 0; \quad [S_0, S_{-1kq}] = -S_{-1kq}$$

par

$$[S_{-1}, S_{1kq}] = S_{0kq}; \quad [S_{-1}, S_{0kq}] = S_{-1kq}; \quad [S_{-1}, S_{-1kq}] = 0$$

(1.48).

Estos conmutadores indican que  $S_{1kq}$ ,  $S_{0kq}$ ,  $S_{-1kq}$  con  $k$  par son las 3 componentes de un vector en el cuasiespacio. En particular, si  $k=0$ , las expresiones (1.45) se reducen exactamente a las definiciones de  $S_1$ ,  $S_0$ ,  $S_{-1}$ , que, como sabemos, son las 3 componentes de un vector en el cuasiespacio.

5.- Generalización del cuasispin a varias capas (2), 7).

El tratamiento anterior se llevó a cabo para una sola capa  $\nu l j$  (vease fig 1) por simplicidad. En un problema físico hay necesidad de considerar, en general, mezclas de configuración, hecho que nos lleva a la necesidad de generalizar la definición de cuasispin. Desde luego, la notación más precisa para los operadores de creación sería  $b_{\nu l j m}^+$ ; por simplicidad en la escritura los indicaremos con  $b_{j m}^+$ ; cuando hubiere confusión, porque la misma  $j$  corresponde a niveles con  $\nu, l$  distintas, distinguiremos esos niveles con una prima, una doble prima, etc.; por ejemplo, se sobreentiende que  $1/2, 1/2', 1/2''$  son estados de  $j = 1/2$ , pero que provienen de  $\nu$  y  $l$  diferentes. Análogamente usaremos la notación  $S_{q j}$  para indicar los generadores del cuasispin en la capa  $j$ , con la misma convención del párrafo anterior. En la nueva notación escribimos entonces los generadores del cuasispin en la capa  $j$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{+j} = -\frac{\sqrt{\Omega_j}}{2} [b_j^+ b_j]_{00} \\ S_{0j} = \frac{N_j - \Omega_j}{2} \\ S_{-j} = -\frac{\sqrt{\Omega_j}}{2} [b_j b_j^+]_{00} \end{array} \right. \quad (1.49),$$

donde  $\Omega_j = \frac{2j+1}{2}$ , como antes y  $N_j = \sum_m b_{j m}^+ b_{j m}$  es el operador de número en la capa  $j$ .

Un hecho muy importante es que los generadores  $S_{q j}$  conmutan con los generadores  $S_{q j'}$  de una capa diferente y, como ya sabemos, dentro de una capa  $S_{q j}$  tienen las reglas de conmutación ordinarias del momento angular. O sea:

$$\begin{aligned}
 [S_{-1j}, S_{1j'}] &= S_{0j} \delta_{jj'} \\
 [S_{0j}, S_{1j'}] &= S_{1j} \delta_{jj'} \\
 [S_{0j}, S_{-1j'}] &= -S_{-1j} \delta_{jj'}
 \end{aligned}
 \tag{1.50}$$

Adicionalmente, los operadores de creación y de aniquilación  $b_{jm}^+$ ,  $b_{jm}$  son escalares frente al cuasiespacio de una capa  $j' \neq j$  y son las dos componentes de un tensor de orden 1/2 en el cuasiespacio de la capa  $j$ . O sea :

$$\begin{aligned}
 [S_{1j'}, b_{jm}^+] &= 0 & [S_{1j'}, b_{jm}] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} b_{jm}^+ \delta_{jj'} \\
 [S_{0j'}, b_{jm}^+] &= \frac{1}{2} b_{jm}^+ \delta_{jj'} & [S_{0j'}, b_{jm}] &= -\frac{1}{2} b_{jm} \delta_{jj'} \\
 [S_{-1j'}, b_{jm}^+] &= \frac{1}{\sqrt{2}} b_{jm} \delta_{jj'} & [S_{-1j'}, b_{jm}] &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

Con esta nueva notación  $S_{qj}$ , podemos escribir la ec. (1.27) que define el cuasispin  $S_j^2$  de la capa  $j$  de la manera siguiente:

$$S_j^2 = \sum_q (-)^q S_{qj} S_{-qj}
 \tag{1.52}$$

Nótese que en la ec. (1.50) se muestra que los generadores del cuasispin para capas diferentes son independientes; por tanto se puede trabajar con ellos exactamente como se tratan los generadores del momento angular ordinario de partículas diferentes.

En particular, si tenemos un problema con  $c$  capas, podemos hablar de un estado con  $n$  cuasispin  $J_i$  y proyección  $M_i$  en la capa 1, cuasispin  $J_2$  y proyección  $M_2$  en la capa 2, etc., hasta un cuasispin  $J_c$  con proyección  $M_c$  en la última capa  $c$ . Indicaremos este estado con el ket

$$|J_1 M_1, J_2 M_2, \dots, J_c M_c; \alpha J\rangle \quad (1.53),$$

donde  $J$  es el momento angular total del estado y  $\alpha$  es un número cuántico extra que completa la clasificación. Un estado como (1.53) significa que hemos clasificado los estados de una sola partícula de la forma siguiente :

$$R_{4\Omega} = \begin{pmatrix} R_{4\Omega_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{4\Omega_c} \end{pmatrix}, \quad R_{4\Omega_i} = \begin{matrix} Sp_{2\Omega_i} & \times & SU_2(i) \\ U & & U \\ \mathcal{D}^{\Omega_i}(R_3) & & R_2(i) \end{matrix} \quad (1.54),$$

donde  $\Omega = \sum_{i=1}^c \Omega_i$  y  $SU_2(i)$  es el grupo del cuasispin cuyas transformaciones se efectúan en el cuasiespacio de la capa  $i$ .

Como se explicó en los capítulos anteriores :

$$f_i = \frac{\Omega_i - v_i}{2}, \quad M_i = \frac{n_i - \Omega_i}{2} \quad (1.55).$$

Entonces el estado (1.53) tiene, en cada capa, un número de partículas y un seniority definidos. Por tanto podemos escribir el estado (1.53) de la forma siguiente :

$$|j_1^{n_1} v_1, j_2^{n_2} v_2, \dots, j_c^{n_c} v_c; \alpha J\rangle \quad (1.56).$$

De (1.56) se ve claramente que la cadena de Racah correspondiente a este tipo de estados es :

$$U_{2\Omega} \supset \left( \begin{matrix} \mu_{2\Omega_1} \\ \dots \\ \mu_{2\Omega_c} \end{matrix} \right) \supset \left( \begin{matrix} Sp_{2\Omega_1} \\ \dots \\ Sp_{2\Omega_c} \end{matrix} \right) \supset \left( \begin{matrix} \mathcal{D}^{j_1}(R_3) \\ \dots \\ \mathcal{D}^{j_c}(R_3) \end{matrix} \right) \quad (1.57).$$

Las funciones de onda clasificadas por la cadena anterior diagonalizan exactamente una parte muy importante del hamiltoniano : la parte que corresponde a la separación original de los niveles  $j$  (vease fig 1) de una sola partícula ("single-particle splitting") y que se puede escribir así :

$$W_{sps} = \sum_j \epsilon_j N_j \quad (1.58),$$

donde  $\epsilon_j$  es la energía del nivel  $j$ .

El operador (1.58) es diagonal respecto a las funciones de onda (1.53) ó (1.56), ya que en ellas el número de partículas en cada capa es buen número cuántico.

Se mencionó anteriormente que la cadena (1.39) o su equivalente (1.40) diagonaliza exactamente en 1 capa la parte del hamiltoniano llamada "interacción de apareamiento", que se tratará en detalle en el capítulo siguiente. Se explicó que esto se debe a que la fuerza de apareamiento se puede expresar en términos de  $I$  ( ec. (1.14) ) y su transpuesto conjugado, que son invariantes frente al grupo  $Sp_{2\Omega_i}$ . Entonces los estados (1.53) ó (1.56) diagonalizan no sólo  $W_{sps}$  sino también una fuerza de apareamiento expresable exclusivamente en términos de los invariantes  $I, I^\dagger$  para cada una de las capas; es una fuerza de apareamiento cortada, incapaz de pasar partículas de una capa a otra. Si se tiene una fuerza de apareamiento general, que inclusive puede pasar partículas de una capa a otra, entonces un estado como el (1.56) no puede ser un eigenestado de esa interacción, porque ésta alteraría el número de partículas en cada capa.

Se verá en el capítulo siguiente que se puede diagonalizar exactamente una interacción — como la descrita, si nuestra cadena de grupos contiene al grupo  $Sp_{2\Omega}$ , donde

$\Omega = \sum_{i=1}^c \Omega_i$  en la cadena de Racah o bien a su grupo complementario  $SU_2$  en la cadena de Helmers. Este grupo  $SU_2$  efectúa transformaciones por el mismo ángulo en todas las capas simultáneamente. Nótese que las transformaciones del grupo  $SU_2(i)$  de (1.54) son análogas a las que se efectuarían con el grupo  $R_3$  ordinario sobre las coordenadas de la partícula  $i$ , en un sistema de  $c$  partículas;

las transformaciones del grupo  $SU_2$  que se acaba de mencionar son análogas a las que se efectuarían ( en nuestro ejemplo de  $c$  partículas ) simultáneamente sobre las  $c$  partículas, por el mismo ángulo en todas.

En esta clasificación el ket correspondiente es :

$$|j, j_z \dots j_c, \beta SM; \alpha J\rangle \quad (1.59),$$

donde  $J$  representa el momento angular total;  $\alpha, \beta$  sirven para clasificar totalmente el estado,  $j$  es el cuasispin total del sistema, obtenido acoplando vectorialmente los cuasispines individuales  $j_i$  de las diferentes capas y  $M$  es la proyección de  $j$ .

De nuevo, por analogía con el caso del momento angular ordinario de  $c$  partículas, podemos escribir inmediatamente los generadores del cuasispin total del sistema de la forma siguiente :

$$S_q = \sum_{i=1}^c S_{qi} \quad (1.60).$$

Desde luego  $S_i, S_0, S_{-1}$  tienen las reglas de conmutación ordinarias del momento angular. Usando la notación de (1.59),  $M$  será el eigenvalor de  $S_0$  :

$$M = \frac{n - \Omega}{2} \quad (1.61),$$

donde  $n$  es ahora el número total de partículas y  $\Omega$  la degeneración total ;

$j(j+1)$  será el eigenvalor de

$$S^2 = \sum_q (-)^q S_q S_{-q} \quad (1.62)$$

y

$$J = \frac{\Omega - V}{2} \quad (1.63).$$

A la cantidad  $V$  de (1.63) le llamaremos seniority vectorial total del sistema, porque se obtiene acoplando vectorialmente los cuasispines de todas las capas; llamaremos simplemente seniority total <sup>7), 10)</sup> o seniority algebraico a la suma algebraica de los seniorities de todas las capas y lo indicaremos con  $v$  :

$$v \equiv \sum_{i=1}^c v_i \quad (1.64).$$

Un estado como el (1.59) proviene de la siguiente clasificación de los estados de una sola partícula, en la cadena de Helmers :

$$R_{4\Omega} = \begin{cases} \begin{matrix} (v) & (n) \\ SU_2 & \supset R_2 \end{matrix} \\ \times \\ \begin{matrix} Sp_{2\Omega} = \begin{pmatrix} Sp_{2\Omega_1} & & \\ & \ddots & \\ & & Sp_{2\Omega_c} \end{pmatrix} \supset \begin{pmatrix} \mathcal{D}^{j_1}(R_3) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{D}^{j_c}(R_3) \end{pmatrix} \\ (v) & (v_1, \dots, v_c) & (j) \end{matrix} \end{cases} \quad (1.65),$$

donde las cantidades entre paréntesis indican los números cuánticos a los que da lugar cada grupo. Nótese que la presencia de los grupos  $Sp_{2\Omega_i}$  hace que el seniority de cada capa esté definido.

La cadena (1.65) es equivalente a la cadena de Racah siguiente :

$$\mu_{2\Omega} \supset Sp_{2\Omega} \supset \left( Sp_{2\Omega_1} \dots Sp_{2\Omega_c} \right) \supset \left( Q^{j_1}(R_1) \dots Q^{j_c}(R_c) \right) \quad (1.66),$$

cadena que, por la ausencia de la parte  $\sum \mu_{2\Omega_i}$  (que sí aparece en 1.57), hace que el número de partículas en cada capa no sea buen número cuántico.

6.- Construcción de las eigenfunciones del cuasispin.

Si una función de onda de partículas idénticas es base para una R. I. del grupo  $SU_2$  del cuasispin, automáticamente lo será del grupo simpléctico complementario. Construiremos entonces las funciones de onda con seniority y número de partículas definidos pidiendo que sean eigenfunciones del cuasispin y de su proyección.

Empezaremos con el problema de una sola capa. Queremos construir una función de onda de  $n$  partículas y seniority  $v$ , corresponde a pedir que su cuasispin  $\mathcal{J}$  y su proyección  $M$  valgan:

$$\mathcal{J} = \frac{\Omega - v}{2}, \quad M = \frac{n - \Omega}{2} \quad (1.67)$$

Como  $M$  es proyección de  $\mathcal{J}$ , vemos que  $v$  es par si  $n$  es par y  $v$  es non si  $n$  es non; además  $0 \leq v \leq n$

Para empezar, podemos construir la función de onda con la  $\mathcal{J}$  pedida y de proyección mínima:

$$M_{\min} = \frac{v + \Omega}{2} \quad (1.68)$$

Pero esto equivale a tener  $v$  partículas con seniority  $v$ ; o sea,  $v$  partículas sin que ninguna pareja esté acoplada a momento angular cero. Un estado de este tipo es, por ejemplo, el siguiente :

$$\begin{aligned} & \left| f = \frac{\Omega - v}{2}, M = \frac{v - \Omega}{2}, J_{MAX} = \frac{1}{2} v(2j + 1 - v) \right\rangle = \\ & = \left| j^v v J_{MAX} = \frac{1}{2} v(2j + 1 - v) \right\rangle = b_j^+ b_{j-1}^+ \cdots b_{j-v+1}^+ |0\rangle \end{aligned} \quad (1.69).$$

Es inmediato verificar que

$$S_{-1} (b_j^+ b_{j-1}^+ \cdots b_{j-v+1}^+) |0\rangle = 0 \quad (1.70).$$

Este estado está acoplado al momento angular máximo posible con  $v$  partículas :  $J_{MAX} = \frac{1}{2} v(2j + 1 - v)$  ; los demás momentos angulares compatibles con el seniority (  $\delta$  sea tales que nunca se tengan parejas apareadas a cero ) se pueden obtener, por ejemplo, por acoplamiento directo mediante coeficientes de Clebsch - Gordan .

Para este fin se puede también seguir un proceso enteramente análogo a los procesos sistemáticos que han sido desarrollados para la cadena de grupos

$$M_4 \supset R_7 \supset R_3 \quad (36).$$

Hemos construido un estado de mínimo peso en el cuasispin, lo que significa un estado con el menor número posible de partículas, compatible con el

seniority pedido. Para aumentar el peso, basta aplicar repetidas veces el operador de ascenso  $S_+$ , hasta tener el peso pedido; o sea, al estado (1.69) le vamos agregando parejas de partículas acopladas a momento angular cero, hasta tener el número pedido de partículas. Recordemos que en el proceso no se altera el seniority, ya que  $[S^2, S_+] = 0$ . En el proceso tampoco se altera el momento angular, ya que  $S_+$  tiene momento angular cero. Entonces un estado de  $n$  partículas, seniority  $v$  y el mismo momento angular  $J_{MAX}$  de (1.69) es:

$$\begin{aligned}
 |j^n v, J_{MAX} = \frac{1}{2}v(2j+1-v)\rangle &= |f = \frac{\Omega-v}{2}, M = \frac{n-\Omega}{2}, \bar{J}_{MAX} = \frac{1}{2}v(2j+1-v)\rangle = \\
 &= b_j^+ b_{j-1}^+ \cdots b_{j-v+1}^+ (S_+)^{\frac{n-v}{2}} |0\rangle
 \end{aligned}
 \tag{1.71}$$

Nótese que el proceso seguido es el mismo que se usa en conexión con el grupo  $R_3$  ordinario, si, dada una función de onda con un cierto momento angular y proyección mínima, se quieren construir los estados con todas las proyecciones posibles.

Si se tienen varias capas, el proceso a seguir es enteramente análogo, considerando ahora el cuasispin total  $S$  y su proyección  $M$ . Pero surgen aquí algunos hechos interesantes, que es conveniente visualizar antes bajo otro ángulo.

Consideremos un problema de dos capas y supongamos que queremos construir los estados de cuasispin total definido acoplando estados de cuasispines individuales, usando coeficientes de Clebsch - Gordan ordinarios. Por ejemplo, el único estado posible de seniority vectorial  $V=0$  y  $n$  partículas es el siguiente:

$$\left| \frac{\Omega}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle_{J=0} = \sum_{M_1, M_2} \left\langle \frac{\Omega_1}{2}, \frac{\Omega_2}{2} M_1, M_2 \left| \frac{\Omega}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_1}{2} M_1 \right\rangle_{J_1=0} \left| \frac{\Omega_2}{2} M_2 \right\rangle_{J_2=0} \right. \\ \left. (1.72), \right.$$

donde  $\Omega_1 = \frac{2j_1 + 1}{2}$  (capa 1)

$\Omega_2 = \frac{2j_2 + 1}{2}$  (capa 2)

y  $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ .

Se ve que un estado de seniority vectorial  $V=0$  sólo se puede obtener mediante estados de seniorities individuales  $v_i=0$ ; o sea, nuestro estado tiene seniority  $V=0$  (véanse las definiciones de seniority total  $v$  y seniority vectorial total  $V$  después de la ec. (1.63)); entonces en (1.72) todas las parejas de partículas están apareadas a cero.

Si ahora queremos un estado de seniority vectorial  $V=2$  y  $n$  partículas, tenemos las siguientes posibilidades :

$$\left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle_{J=0} = \sum_{M_1, M_2} \left\langle \frac{\Omega_1}{2}, \frac{\Omega_2}{2} M_1, M_2 \left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_1}{2} M_1 \right\rangle_{J_1=0} \left| \frac{\Omega_2}{2} M_2 \right\rangle_{J_2=0} \right. \\ \left. v_1=0 \quad v_2=0 \quad \therefore V=0 \right. \quad (1.73)$$

$$\left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle_{J=0} = \sum_{M_1, M_2} \left\langle \frac{\Omega_1-2}{2}, \frac{\Omega_2}{2} M_1, M_2 \left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_1-2}{2} M_1 \right\rangle_{J_1 \neq 0} \left| \frac{\Omega_2}{2} M_2 \right\rangle_{J_2=0} \right. \\ \left. v_1=2 \quad v_2=0 \quad \therefore V=2 \right. \quad (1.74)$$

$$\left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle = \sum_{\substack{J_1=j_1 \\ J_2=j_2}} \sum_{M_1, M_2} \left\langle \frac{\Omega_1-1}{2}, \frac{\Omega_2-1}{2} M_1, M_2 \left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_1-1}{2}, M_1 \right\rangle_{J_1=j_1} \left| \frac{\Omega_2-1}{2}, M_2 \right\rangle_{J_2=j_2} \right. \quad \boxed{V=2} \quad (1.75)$$

$$\left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle = \sum_{\substack{J_1 \neq 0 \\ J_2 \neq 0}} \sum_{M_1, M_2} \left\langle \frac{\Omega_1}{2}, \frac{\Omega_2-2}{2} M_1, M_2 \left| \frac{\Omega-2}{2}, \frac{n-\Omega}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_1}{2}, M_1 \right\rangle_{J_1=0} \left| \frac{\Omega_2-2}{2}, M_2 \right\rangle_{J_2 \neq 0} \right. \quad \boxed{V=2} \quad (1.76)$$

Vemos que un estado de seniority vectorial  $V=2$  puede corresponder a seniority  $v=0$  ó bien  $v=2$ ; entonces, si bien los seniorities individuales  $v_i$  nos indican el número de partículas no apareadas en cada capa, el seniority vectorial  $V$  no indica las partículas no apareadas en todo el sistema; por ejemplo, en (1.73)  $V$  vale 2 y todas las partículas están apareadas; ni siquiera el seniority total algebraico  $v$  nos da esa información ya que, en (1.75)  $v=2$  y sin embargo, si  $j_1$  fuera igual a  $j_2$ , podríamos aparear a cero la partícula no apareada de la primera capa con la partícula no apareada de la segunda. El seniority algebraico nos indica simplemente la suma de las partículas no apareadas en las diferentes capas.

Veremos más adelante que, así como el seniority ordinario en una capa clasifica los niveles de energía debidos a la fuerza de apareamiento, el seniority vectorial  $V$  juega ese mismo papel en varias capas; veremos sin embargo que  $V$  no es necesariamente un buen número cuántico en un problema físico; veremos que en algunos casos será el seniority algebraico  $v$  el que juegue el papel de buen número cuántico (10).

Desde luego todos los estados (1.73) ... (1.76) se pueden obtener con

un proceso enteramente análogo al que se explicó para una sola capa. Por ejemplo, para construir un estado de seniority vectorial  $V$  y,  $n$  partículas, se empieza con un estado de  $V$  partículas, para agregarle luego el operador  $S_{-1}$ ,  $\frac{n-V}{2}$  veces.

La diferencia respecto al problema de una capa está en que ese estado de mínima peso ( $V$  partículas y seniority vectorial  $V$ ) puede contener parejas de partículas apareadas a momento angular cero; la única condición que se pide es que sea mínimo peso en el grupo  $SU_2$  del cuasispin total. O sea :

$$S_{-1} \left( \underbrace{b^+ \dots b^+}_{V \text{ partículas}} \right) |0\rangle = 0 \quad (1.77).$$

Un ejemplo es el estado (1.73) ya mencionado en el que todas las partículas están apareadas. Para construirlo debemos partir de un estado de  $V = 2$  partículas apareadas a cero. Busquemos una combinación lineal de  $S_{1j_1}$  y de  $S_{1j_2}$ , tal que :

$$S_{-1} \left( S_{1j_1} + a S_{1j_2} \right) |0\rangle = 0 \quad (1.78).$$

Esta condición impone

$$a = -\frac{\Omega_1}{\Omega_2} \quad (1.79).$$

Debemos entonces partir de un estado que, aparte la normalización, vale :

$$\left| \frac{\Omega-2}{2} \frac{2-\Omega}{2} \right\rangle_{v_1=v_2=0} \propto \left( S_{1j_1} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} S_{1j_2} \right) |0\rangle \quad (1.79).$$

y aplicarle  $\frac{n-2}{2}$  veces el operador de ascenso  $S_1$ . En efecto, el estado (1.79) es idéntico al que se obtiene por acoplamiento directo, si en (1.73) ponemos  $n=2$ , ya que en este caso

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\Omega_1}{2} \frac{\Omega_2}{2} \frac{2-\Omega_1}{2} - \frac{\Omega_2}{2} \left| \frac{\Omega-2}{2} \frac{2-\Omega}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{\Omega_2}{\Omega}} \\ \left\langle \frac{\Omega_1}{2} \frac{\Omega_2}{2} - \frac{\Omega_1}{2} \frac{2-\Omega_2}{2} \left| \frac{\Omega-2}{2} \frac{2-\Omega}{2} \right\rangle = -\sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega}} \end{cases} \quad (1.80)$$

(vease ref. 3, ec. 3.29)

y el estado (1.73) normalizado es:

$$\begin{aligned} |v_1=0, v_2=0, V=2, n=2\rangle &= \left| \frac{\Omega-2}{2} \frac{2-\Omega}{2} \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{\Omega_2}{\Omega}} \left| \frac{\Omega_1}{2} \frac{2-\Omega_1}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_2}{2} - \frac{\Omega_2}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{\Omega_1}{\Omega}} \left| \frac{\Omega_1}{2} - \frac{\Omega_1}{2} \right\rangle \left| \frac{\Omega_2}{2} \frac{2-\Omega_2}{2} \right\rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2\Omega_2}{\Omega_1\Omega}} \left( S_{1j_1} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} S_{1j_2} \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (1.81),$$

que corrobora el resultado (1.79).

Para construir los estados (1.74), (1.75) y (1.76) se parte, respectivamente, de los estados:

$$[b_{j_1}^+ b_{j_1}^+]_{j_1 \neq 0} |0\rangle, [b_{j_1}^+ b_{j_2}^+]_{j_1} |0\rangle, [b_{j_2}^+ b_{j_2}^+]_{j_2 \neq 0} |0\rangle \quad (1.82)$$

y se les aplica luego  $\frac{n-2}{2}$  veces el operador de ascenso  $S_1$ .

Para más de dos capas los principios que se aplican son exactamente los mis mos.

En el capítulo siguiente haremos uso extenso de los conceptos expuestos en este capítulo, aplicados a la interacción de apuramiento ya mencionada, que es una parte muy importante de la interacción entre los nucleones.



Un hecho notable es que esa brecha no aparece en los núcleos impares.

La brecha en la energía que se observa en la fig. 2 lleva a la mente un fenómeno análogo en los superconductores ( la existencia de la brecha no es condición necesaria, pero sí suficiente para que haya superconductividad <sup>(8)</sup> ).

Históricamente, Cooper trató el problema de dos electrones fuera de la superficie de Fermi y encontró que su espectro presenta una brecha como la mencionada, si entre los 2 electrones se supone una interacción que sólo actúe cuando las dos partículas están apareadas a momento lineal nulo <sup>(7)</sup>. Esta interacción recibe el nombre de interacción de apareamiento.

De hecho Racah <sup>(20)</sup> ya había introducido la clasificación de los estados por seniority ( que es la que diagonaliza la fuerza de apareamiento ) como una necesidad matemática de clasificación.

Debido al éxito que había tenido la interacción de apareamiento en el problema de la superconductividad, se pensó en la aplicación de una interacción análoga en la física nuclear <sup>(4)</sup>

Empezaremos entonces por el estudio de la fuerza de apareamiento, que tanto éxito ha tenido en los problemas de estructura nuclear.

Es posible demostrar que una interacción de muy corto alcance entre los nucleones da lugar a una brecha en el espectro de energías, como la que queremos describir <sup>(1),21)</sup>

La interacción de apareamiento que definiremos dentro de un momento se puede considerar como un buen modelo que toma en cuenta la parte de muy corto alcance de la interacción entre los nucleones.

Definimos la fuerza de apareamiento de la manera siguiente :

$$\mathcal{O} \equiv -\frac{G}{4} \sum_{\substack{j, m \\ j', m'}} (-)^{j-m} (-)^{j'-m'} b_{j, m}^+ b_{j, m}^- b_{j', m'}^{j'-m'} b_{j', m'}^{j'-m'} \quad (2.1)$$

Se toma  $G > 0$  para tener una interacción atractiva.

Como se había mencionado en el capítulo I,  $\mathcal{O}$  está expresada en términos del invariante  $\mathbf{I}$  y su traspuesto conjugado.

Utilizando las definiciones (1.49) para los generadores del cuaspín tenemos :

$$\mathcal{O} = 2G \sum_{j, j'} S_{+j} S_{-j'} \quad (2.2)$$

Recordando la definición de los generadores del cuaspín total (1.60) se tiene :

$$\mathcal{O} = 2G S_+ S_- \quad (2.3)$$

O bien :

$$\mathcal{O} = G [-S^2 + S_0(S_0 - 1)] \quad (2.4)$$

Entonces, en una base de funciones de onda en la que  $S^2$  y  $S_0$  sean diagonales, la interacción de apareamiento  $\mathcal{O}$  es diagonal. Recordando que el eigenvalor de  $S^2$  es  $\mathcal{J}(\mathcal{J}+1)$ , con  $\mathcal{J} = (\Omega - \nu)/2$  y el eigenvalor de  $S_0$  es  $M = (n - \Omega)/2$ , podemos escribir el eigenvalor de  $\mathcal{O}$  como  $p_{n\nu}$ , que

será función del seniority vectorial total  $V$  y del número de partículas  $n$  :

$$p_{nV} = -\frac{G}{4} [n(2\Omega - n + 2) - V(2\Omega - V + 2)] \quad (2.5).$$

Desde luego, como  $M$  es la proyección de  $\mathcal{J}$ , para  $n$  par sólo pueden ocurrir valores pares de  $V$  y para  $n$  non sólo pueden ocurrir valores nones de  $V$ , con la condición  $V \leq n$ .

Podemos entonces dibujar el espectro de la interacción de apareamiento para los núcleos pares y los nones, como se muestra en las figuras 3 y 4.

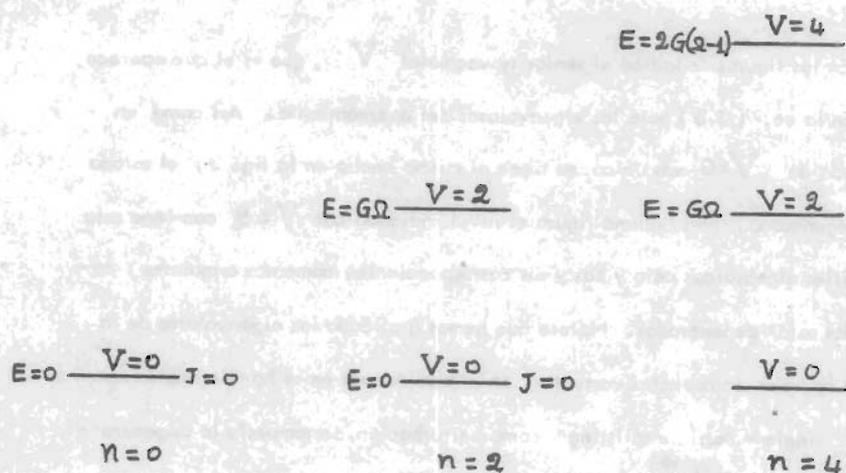


Fig. 3

$$(2.5) \quad \left[ (1+V+2J)V - (1+V-2J)V \right] E = 2G(2-2) \frac{V=5}{V=5}$$

$$E = G(2-1) \frac{V=3}{V=3}$$

$$E = G(2-1) \frac{V=3}{V=3}$$

$$E=0 \quad \frac{V=1}{V=1} \quad J = j_1, j_2, \dots$$

$$E=0 \quad \frac{V=1}{V=1} \quad J = j_1, j_2, \dots$$

$$E=0 \quad \frac{V=1}{V=1} \quad J = j_1, j_2, \dots$$

$$n=1$$

$$n=3$$

$$n=5$$

Fig. 4

En las figuras se indicó el seniority vectorial  $V$ , que es el que aparece directamente en la ec. (2.5) para los eigenvalores del apareamiento. Así como en (1.73) el estado de  $V=0$  era único, se tiene el mismo hecho en la fig. 3; el estado base no está degenerado. En la misma figura el nivel indicado con  $V=2$  contiene estados con seniorities algebraicos cero y dos y sus correspondientes momentos angulares; todos estos estados están degenerados. Nótese que hemos graficado los eigenvalores de la interacción de apareamiento exclusivamente; si introdujéramos en el hamiltoniano una separación de "single - particle splitting" como perturbación, se rompería la degeneración mencionada y tendríamos un grupo de niveles bien separado del estado base; esto nos da la brecha bien conocida de los núcleos pares.

En la fig. 4 el estado base ( $V=1$ ) está degenerado, ya que se puede --

formar con una partícula en el nivel  $j_1$ , o bien en el  $j_2$ , etc., más  $(n-1)/2$  parejas acopladas a cero. La degeneración de nuevo se debe a que en nuestras capas no hemos considerado el "single - particle splitting". Al introducirlo, se rompe la degeneración y tendremos  $c-1$  niveles (si hemos partido de  $c$  capas) cercanos al estado base. Vemos que para  $n$  impar no hay brecha de energía, tal como se observa experimentalmente.

Vemos entonces que la fuerza de apareamiento es un buen modelo para explicar algunas características de los núcleos cercanos a una capa cerrada. Si suponemos que los nucleones se mueven en un potencial común, como en el modelo de capas, tendremos que resolver el problema de  $n$  nucleones regidos por un hamiltoniano del tipo :

$$H = \sum_j \epsilon_j N_j + \mathcal{O} \quad (2.6),$$

donde las  $\epsilon_j$  son las energías de los diferentes niveles del potencial común, en el que se mueven las partículas en un modelo de partículas independientes ;  $\mathcal{O}$  es la interacción residual de apareamiento. Ya hemos visto que una base de funciones de onda clasificadas como en (1.53) diagonaliza exactamente la  $1^a$  parte de  $H$  ; en cambio la base (1.59) diagonaliza  $\mathcal{O}$  ; desde luego, como  $\mathcal{O}$  no conmuta con  $\sum_j \epsilon_j N_j$ , no se puede encontrar una base que diagonalice simultáneamente las dos partes.

Se han ideado varios métodos <sup>21)</sup> para resolver aproximadamente el hamiltoniano (2.6) ; trataremos algunos de ellos en las secciones siguientes. En la sección 2 veremos la solución aproximada del hamiltoniano (2.6) mediante la aproximación de bosón, que da resultados razonables cuando el número de partículas del sistema es muy pequeño comparado con la degeneración de los estados. Para un número arbitrario de

partículas, la aproximación de bosón no se puede aplicar y se puede entonces usar el esquema de cuasipartículas libres para tener una aproximación mejor, según veremos en la sección 3. Estos resultados se pueden todavía mejorar, mediante la aproximación de cuasibosón, que se verá en la sección 4 .

(B.5)

$$\hat{D} + \mu_3 \hat{\Sigma} = H$$

## 2.- La aproximación de bosón.

Como se explicará en detalle en este capítulo, la aproximación de bosón consiste en considerar a una pareja de fermiones aproximadamente como un bosón; veremos que esto es razonable cuando el número de partículas del sistema es muy pequeño comparado con la degeneración total de los estados en los que se mueven dichas partículas.

Empecemos definiendo unos operadores que crean o que aniquilan dos partículas situadas en la misma capa  $j$  y acopladas a momento angular cero (21), (28) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_j^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [b_j^+ b_j^+]_{00} \end{array} \right. \quad (2.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_j^{\dot{}} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} [b_j^{\dot{}} b_j^{\dot{}}]_{00} \end{array} \right. \quad (2.7b)$$

Comparando las definiciones (2.7) con las de los generadores  $S_{qj}$  del cuasispín en la capa  $j$ , tenemos :

$$A_j^+ = -\sqrt{\frac{2}{\Omega_j}} S_{4j} \quad (2.8a)$$

$$A_j^{\dot{}} = \sqrt{\frac{2}{\Omega_j}} S_{-4j} \quad (2.8b)$$

Los operadores  $A_j^+$  y  $A_j^{\dot{}}$  difieren respectivamente de  $S_{4j}$  y  $S_{-4j}$  por una constante; esta nueva definición nos va a permitir escribir el conmutador entre  $A_j^{\dot{}}$  y  $A_j^+$  de una manera que, posteriormente, va a ser muy importante. Dicho conmutador vale :

$$[A^j, A_{j'}^+] = \delta_{j,j'} \left(1 - \frac{N_j}{\Omega_j}\right) \quad (2.9),$$

donde  $N_j = \sum_m b_{jm}^+ b^{jm}$  es, como siempre, el operador de número en la capa  $j$ . En términos de estos nuevos operadores podemos escribir el hamiltoniano (2.6), que consta del "single - particle splitting" más la interacción de apareamiento, de la manera siguiente :

$$H = \sum_j \epsilon_j N_j - G \sum_{i,j} \sqrt{\Omega_i \Omega_j} A_i^+ A_j \quad (2.10).$$

Para empezar, consideraremos el problema de dos partículas que se pueden mover en  $c$  capas de un potencial común, regidas por el hamiltoniano (2.10). Empezamos con este problema, porque el resultado exacto para los niveles de energía se puede expresar en una ecuación implícita sumamente sencilla, que permite inmediatamente el estudio cualitativo de dichos niveles. Además estos resultados nos servirán de base para tratar el problema con un número mayor de partículas, dentro de la aproximación de bosón que definiremos más adelante.

Los elementos de matriz de  $\mathcal{O}$  entre estados de dos partículas valen :

$$\begin{aligned} \langle l_1 j_1, l_2 j_2, JM | \mathcal{O} | l'_1 j'_1, l'_2 j'_2, JM \rangle = \\ = - G \sqrt{\Omega_{j_1} \Omega_{j'_1}} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{j_1 j'_1} \delta_{l_2 l'_2} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{J_0} \quad (2.11) \end{aligned}$$

Consideremos entonces la matriz del hamiltoniano ( 2.10 ), cuyos renglones y columnas corresponden a estados del tipo :

$$|l_1 j_1, l_2 j_2, JM\rangle \quad (2.12).$$

Por la ec. ( 2.11 ) se ve que hay una submatriz diferente de cero y no diagonal, cuyos renglones y columnas corresponden a los estados :

$$|l_j, l_j, 00\rangle \quad (2.13).$$

Fuera de esta submatriz tendremos solamente elementos diagonales, que valdrán :

$$\langle l_1 j_1, l_2 j_2, JM | H | l_1 j_1, l_2 j_2, JM \rangle = \epsilon_{l_1 j_1} + \epsilon_{l_2 j_2} \quad (2.14).$$

De ( 2.11 ) ó ( 2.14 ) hemos escrito los niveles de una sola partícula como  $( l_j )$ , para enfatizar el hecho de que la fuerza de apareamiento se define diferente de cero sólo entre estados con  $J=0$  y por tanto  $j_1 = j_2, j'_1 = j'_2$  ( ec. ( 2.11 ) ) con la condición de que  $l_1 = l_2$  y  $l'_1 = l'_2$ . Entonces en ( 2.14 ) tendremos: 1) valores de  $J$  diferentes de cero y 2) valores de  $J=0$  si  $j_1 = j_2$ , pero con  $l_1 \neq l_2$ , caso que corresponde a las dos partículas en capas diferentes.

La única parte que hay que diagonalizar es la submatriz correspondiente a los estados ( 2.13 ); sobre ella nos concentramos ahora.

Un estado normalizado del tipo ( 2.13 ) se puede escribir como :

$$A_j^+ |0\rangle \quad (2.15)$$

y un eigenestado de nuestro hamiltoniano será entonces de la forma :

$$\psi = \sum_j a_j A_j^+ |0\rangle \quad (2.16),$$

con  $\sum_j |a_j|^2 = 1$ .

Nótese que ( 2.16 ) describe solamente algunos de los eigenestados con  $J=0$  de nuestro hamiltoniano; los otros estados tienen una energía conocida ( dada por ( 2.14 ) ) y corresponden a la submatriz diagonal.

El efecto del hamiltoniano ( 2.10 ) sobre el estado  $\psi$  de la ec. ( 2.16 ) se puede calcular inmediatamente :

$$H\psi = \sum_j (2a_j \epsilon_j - G \sum_i \sqrt{\Omega_i \Omega_j} a_i) A_j^+ |0\rangle = E \sum_j a_j A_j^+ |0\rangle.$$

Por independencia lineal de los diferentes  $A_j^+ |0\rangle$ , tenemos :

$$2\epsilon_j a_j - G \sum_i \sqrt{\Omega_i \Omega_j} a_i = E a_j \quad (2.17)$$

$$a_j = -\frac{G\sqrt{\Omega_j}}{E-2\epsilon_j} \left( \sum_i \sqrt{\Omega_i} a_i \right) \quad (2.18).$$

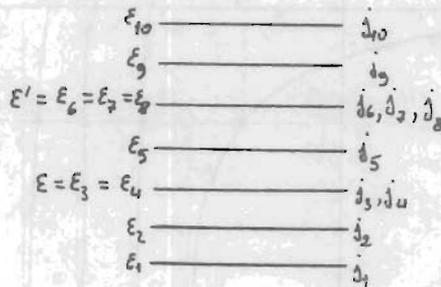
De aquí se obtiene la siguiente ecuación de eigenvalores :

$$\boxed{-\frac{1}{G} = \sum_j \frac{\Omega_j}{E-2\epsilon_j}} \quad (2.19).$$

En la deducción de esta ecuación se ha supuesto :

$$\sum_j a_j \sqrt{\Omega_j} \neq 0 \quad (2.20),$$

ya que se tuvo necesidad de dividir entre esta cantidad. Es posible demostrar que si tenemos un problema con  $c$  capas y ninguna está degenerada con ótras, entonces la condición (2.20) se sigue necesariamente, para todos los eigenvectores  $a_j^{(k)}$ , donde el índice  $(k)$  numera los eigenvectores. En este caso las soluciones de (2.19) nos dan los  $c$  eigenvalores de nuestra matriz de  $C \times C$ . También es posible demostrar que si en nuestro espectro de una sola partícula hay grupos de niveles degenerados, con energías  $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \dots$ , respectivamente, ( Fig. 4 ),



( Fig. 4 )

entonces la condición (2.20) hace que la ecuación (2.19) nos describa sólo algunos de los eigenvalores de la matriz de  $C \times C$ ; faltan los eigenvalores  $2\mathcal{E}, 2\mathcal{E}'$ , etc., porque se demuestra que para ellos los eigenvectores cumplen  $\sum_j a_j \sqrt{\Omega_j} = 0$ . En resumen, (2.19) nos da todos los eigenvalores de nuestro problema que podríamos llamar "no triviales". Sabemos cómo obtener los demás: los que provienen de  $\sum_j a_j \sqrt{\Omega_j} = 0$  valen  $2\mathcal{E}, 2\mathcal{E}'$ , etc. y los que provienen de la submatriz ya diagonal (2.14) valen  $\mathcal{E}_{2j_1} + \mathcal{E}_{2j_2}$ .

Las soluciones de ( 2.19 ) son los puntos de intersección que se muestran en la fig. ( 5 ) con un pequeño círculo.

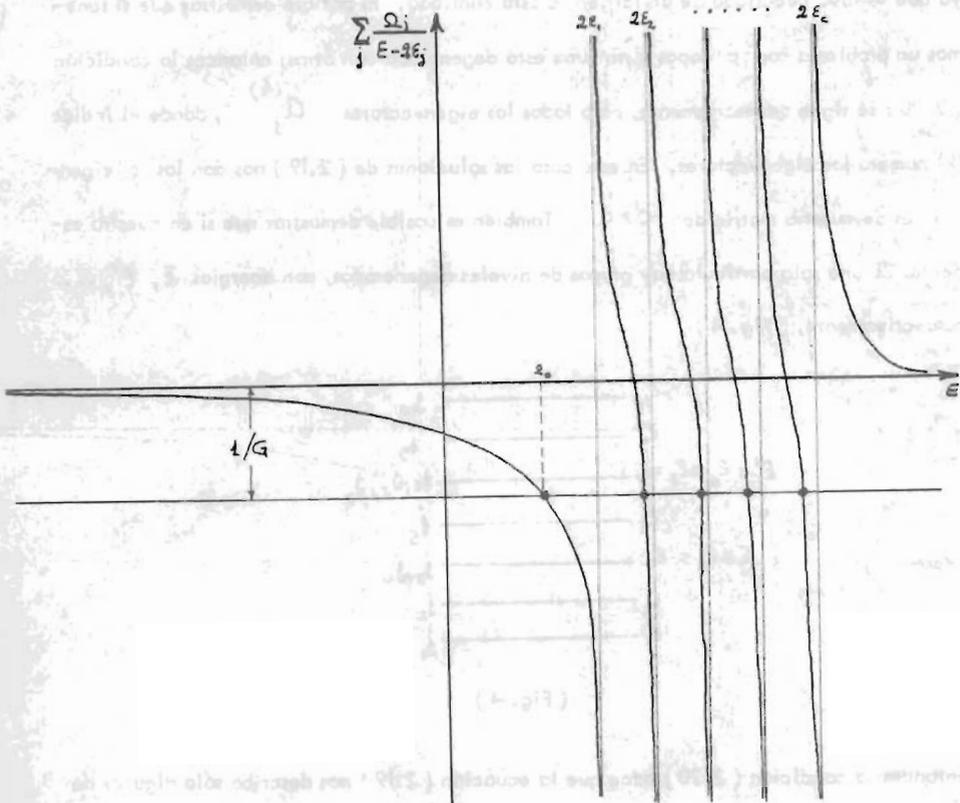


Fig. 5

Se observa la depresión característica de la energía del estado base, respecto a los estados excitados.

Los niveles de energía de nuestro problema de dos partículas son entonces los circuitos de la Fig. 5, más los niveles del tipo  $\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}$ , según se ha explicado.

Consideremos ahora el problema general de  $p$  parejas de partículas regidas por el hamiltoniano (2.10). En este caso los elementos de matriz de  $H$  entre estados con  $J \neq 0$  no son necesariamente nulos; es entonces necesario considerar la forma más general posible de estos estados. Para este fin es muy conveniente generalizar las definiciones (2.7) de  $A_j^+$  y  $A_j^{\dot{}}$ , para poder disponer de operadores que creen y que aniquilen parejas de partículas situadas en capas cualesquiera y acopladas a un momento angular  $J$  arbitrario. Definimos entonces los siguientes operadores:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{j_1 j_2}^+ JM \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{j_1 j_2}}} [b_{j_1}^+ b_{j_2}^+] JM \\ A_{j_1 j_2}^{\dot{}} JM \equiv -\frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{j_1 j_2}}} [b_{j_1}^{\dot{}} b_{j_2}^{\dot{}}] JM \end{array} \right. \quad (2.21a)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{j_1 j_2}^+ JM \\ A_{j_1 j_2}^{\dot{}} JM \end{array} \right\} \quad (2.21b)$$

Estos operadores se reducen a  $A_j^+$  y  $A_j^{\dot{}}$  respectivamente, si en las definiciones anteriores hacemos  $j_1 = j_2 = j$ ,  $J = M = 0$ . En la notación de (2.21),  $A_j^+$  y  $A_j^{\dot{}}$  se escriben  $A_{jj00}^+$  y  $A_{jj00}^{\dot{}}$ , respectivamente.

En términos de los operadores (2.21) se puede escribir la función de onda más general posible de  $2p$  partículas de la manera siguiente :

$$\psi = \sum_{\substack{j_1, j_1', J_1, M_1 \\ j_2, j_2', J_2, M_2 \\ \vdots \\ j_p, j_p', J_p, M_p}} a_{j_1, j_1', J_1, M_1, j_2, j_2', J_2, M_2, \dots, j_p, j_p', J_p, M_p} A_{j_1, j_1', J_1, M_1}^+ A_{j_2, j_2', J_2, M_2}^+ \dots A_{j_p, j_p', J_p, M_p}^+ |0\rangle \quad (2.22)$$

Por ejemplo, una expresión como :

$$b_{j_1, u_1}^+ b_{j_2, u_2}^+ b_{j_3, u_3}^+ b_{j_4, u_4}^+ |0\rangle$$

se puede escribir como :

$$-\sqrt{(1+\delta_{j_1, j_2})(1+\delta_{j_3, j_4})} \sum_{\substack{JM \\ J'M'}} \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | JM \rangle \langle j_3, j_4, m_3, m_4 | J'M' \rangle A_{j_1, j_2, JM}^+ A_{j_3, j_4, J'M'}^+ |0\rangle$$

y a partir de ella se puede construir la función de onda más general posible de 4 partículas.

Supondremos de ahora en adelante que ordenamos los niveles  $(l_j)$  de una sola partícula de alguna manera arbitraria; por ejemplo, podemos decir que  $(l_j) < (l_{j'})$  si en la pareja  $(l-l', j-j')$ , el 1er. número diferente de cero que aparece es negativo y que  $(l_j) = (l_{j'})$  si  $l=l', j=j'$ . En la convención que hemos seguido (por brevedad de escritura) de indicar  $(l_j)$  simplemente con  $j$  y  $(l_{j'})$  simplemente con  $j'$ , escribiremos  $j \leq j'$  cuando se cumpla  $(l_j) \leq (l_{j'})$  en el sentido arriba indicado.

Habiendo definido el orden, convengamos ahora en usar exclusivamente los operadores  $A_{j, j', JM}^+$  y  $A_{j, j', JM}$  con  $j \leq j'$  (diremos que las  $j$ 's están en orden creciente). Por un lado esto es suficiente, ya que :

$$A_{jj'JM}^+ = -(-)^{j+j'-J} A_{j'jJM}^+ \quad (2.23a)$$

$$A^{jj'JM} = -(-)^{j+j'-J} A^{j'jJM} \quad (2.23b)$$

Por otro lado, debemos usar sólo operadores con las  $j$ 's en un cierto orden ( hemos elegido el creciente ), para que las reglas de conmutación entre ellos tengan la forma que anotamos a continuación :

$$\begin{aligned} [A_{j_1 j_2 JM}^{i_1 i_2}, A_{j'_1 j'_2 J'M'}^+] &= \delta_{j'_1}^{i_1} \delta_{j'_2}^{i_2} \delta_{J'}^J \delta_{M'}^M - \\ &- \frac{(-)^{J+M+j_1+i'_2} \sqrt{(2J+1)(2J'+1)}}{\sqrt{(1+\delta_{j_1 j_2})(1+\delta_{j'_1 j'_2})}} \sum_I \left\{ \frac{\langle JJ' - M M' | I (M'-M) \rangle}{\sqrt{2I+1}} \times \right. \\ &\times \left[ \delta_{j_2 j'_1} \frac{(-)^{J+J'}}{\sqrt{2j_2+1}} W(j_1 j_2' JJ'; I j_2) [b_{j_2}^+ b_{j_1}]_{I (M'-M)} + \right. \\ &+ \delta_{j_2 j_2} \frac{(-)^J}{\sqrt{2j_2+1}} W(j_1 j_1' JJ'; I j_2) [b_{j'_1}^+ b_{j_1}]_{I (M'-M)} + \\ &+ \delta_{j_1 j'_1} \frac{(-)^{J'}}{\sqrt{2j_1+1}} W(j_2 j_2' JJ'; I j_1) [b_{j_2}^+ b_{j_2}]_{I (M'-M)} + \\ &\left. \left. + \delta_{j_1 j_2} \frac{1}{\sqrt{2j_1+1}} W(j_2 j_1' JJ'; I j_1) [b_{j_1}^+ b_{j_2}]_{I (M'-M)} \right] \right\} \quad (2.24) \end{aligned}$$

Como referencia, reproducimos aquí las reglas de conmutación (2.9), que corresponden al caso :  $j_1 = j_2 = j$  ,  $j'_1 = j'_2 = j'$  ,  $J = J' = M = M' = 0$  :

$$[A^{jj'00}, A_{j'j'00}^+] = \left(1 - \frac{N_j}{\Omega_j}\right) \delta_{j'}$$
(2.25).

Por las reglas de conmutación (2.24) vemos que la aplicación de nuestro hamiltoniano (2.10) a una función de onda de  $n$  partículas escrita en términos de los operadores  $A_{j_1 j_2 JM}^+$  es una tarea sumamente laboriosa. Es necesario en este punto introducir alguna aproximación para facilitar la solución del problema. Hemos mencionado al principio de este capítulo que se espera que un hamiltoniano del tipo (2.10) describa algunas de las características de los núcleos cercanos a una capa cerrada; si en nuestro tratamiento nos restringimos a este tipo de núcleos, podemos tratar de resolver el problema de pocas partículas moviéndose entre una capa cerrada y la siguiente de nuestro potencial común. En este caso podemos afirmar que el número de partículas es pequeño comparado con la degeneración de los estados comprendidos entre las dos capas cerradas mencionadas.

Se ve entonces que puede ser de interés abordar el problema de un número de partículas pequeño comparado con la degeneración de los estados. En este caso hacemos la aproximación de despreciar el término  $N_j / \Omega_j$  en la ec. (2.9) y el conmutador se reduce a :

$$[A^{jj'00}, A_{j'j'00}^+] \approx \delta_{j'}$$
(2.26)

Vemos que (2.26) es precisamente la regla de conmutación de los bosones; por esta razón

la aproximación hecha se llama "aproximación de bosón". (1), 21), 26)

En el 2o. término de ( 2.9 ) aparece el operador de número

$$N_j = \sum_m b_{jm}^+ b^{jm} = \sqrt{2\Omega_j} [b_j^+ b_j]_{00} \quad \text{y su presencia se}$$

debe a la estadística de las partículas, que impide que una pareja de fermiones sea rigurosamente un bosón; el efecto será el de provocar una dispersión en cada partícula ("single - particle scattering" ), representada por  $[b_j^+ b_j]_{00}$  ; se espera que esta dispersión sea pequeña si las pocas partículas presentes tienen mucho "espacio" para moverse (  $\Omega$  grande ). Análogamente, en ( 2.24 ) aparecen términos del tipo  $[b_j^+ b_{j'}]_{I(M' M)}$

que de nuevo representan una dispersión de las partículas y despreciamos estos términos por las mismas razones ya apuntados. Veremos en el capítulo IV que es razonable despreciar esos términos cuando la interacción entre las partículas es de corto alcance. Con estas simplificaciones, todos nuestros operadores  $A_{j_1 j_2 J M}$  ,  $A_{j_1' j_2' J' M'}$  cumplen aproximadamente las reglas de conmutación de los operadores de creación y de aniquilación de bosones :

$$[A_{j_1 j_2 J M}, A_{j_1' j_2' J' M'}^+] \approx \delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'} \delta_{J J'} \delta_{M M'} \quad (2.27).$$

Vemos entonces que dentro de la aproximación de bosón, el operador

$$A_{j_1 j_2 J M}^+ A_{j_1 j_2 J M}$$

actuando sobre una expresión del tipo ( 2.22 ) ( función de  $A_{j j' J M}^+$  ), cuenta el número de bosones  $A_{j_1 j_2 J M}^+$  presentes.

Por ejemplo :

$$\begin{aligned} & \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ A_{j_1 j_2 JM} \right) \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ \right)^2 |0\rangle = \\ & = 2 \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ \right)^2 |0\rangle \end{aligned} \quad (2.28).$$

Vemos entonces que dentro de la aproximación de bosón, y para un sistema con un número par de partículas, el término  $\sum_j \epsilon_j N_j$  del hamiltoniano, actuando sobre una expresión del tipo (2.22) es equivalente a :

$$\sum_j \epsilon_j N_j \rightarrow \sum_{j_1 j_2 JM} (\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) A_{j_1 j_2 JM}^+ A_{j_1 j_2 JM} \quad (2.29).$$

Por ejemplo, usando el mismo ejemplo (2.28) se tiene :

$$\begin{aligned} & \sum_j \epsilon_j N_j \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ \right)^2 |0\rangle = 2 (\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ \right)^2 |0\rangle \\ & \sum_{j_1 j_2 JM} (\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) A_{j_1 j_2 JM}^+ A_{j_1 j_2 JM} \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ \right)^2 |0\rangle = 2 (\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) \left( A_{j_1 j_2 JM}^+ \right)^2 |0\rangle. \end{aligned}$$

Por consiguiente, si aceptamos la aproximación de bosón, podemos escribir el hamiltoniano (2.10) de la siguiente manera :

$$H = \sum_{\substack{j_1 j_2 j_3 j_4 \\ JM}} \left[ (\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) \delta_{j_3 j_1} \delta_{j_4 j_2} - G \sqrt{\Omega_{j_1} \Omega_{j_3}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{J0} \right] A_{j_1 j_2 JM}^+ A_{j_3 j_4 JM} \quad (2.30).$$

O bien :

$$H = \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3, j_4 \\ JM}} V_{j_3 j_4}^{j_1 j_2 J} A_{j_1 j_2 JM}^+ A_{j_3 j_4 JM} \quad (2.31),$$

donde

$$V_{j_3 j_4}^{j_1 j_2 J} \equiv (\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}) \delta_{j_3 j_1} \delta_{j_4 j_2} - G \sqrt{\Omega_{j_1} \Omega_{j_3}} \delta_{j_1 j_2} \delta_{j_3 j_4} \delta_{J0} \quad (2.32),$$

Vemos de inmediato que (2.31) es la expresión en  $Z^a$  cuantización del hamiltoniano de un sistema de bosones independientes sujetos exclusivamente a un potencial de una sola partícula; es decir, un potencial de la forma  $\sum_{i=1}^p V_i$ , donde  $i$  es el índice de partícula y se tienen  $p$  partículas ( $p$  bosones en nuestro problema). En (2.31) vemos que nuestros bosones están sujetos solamente a un potencial como el mencionado y no aparece ninguna interacción entre parejas de bosones. Esta es realmente la gran ventaja que se obtiene de la aproximación de bosón.

Nuestro objetivo es ahora diagonalizar la matriz (2.32):  $\| V_{j_3 j_4}^{j_1 j_2 J} \|$ , para tener un hamiltoniano de bosones independientes, moviéndose en un potencial común, - cuyos niveles de energía van a ser los eigenvalores de la matriz mencionada. Para diagonalizar esa matriz, es conveniente presentar su forma, aunque sea esquemáticamente (ver fig. 6). En esta figura se indican con cruces los elementos  $\neq 0$ . Vemos de (2.32) que los bloques de  $J \neq 0$  son diagonales y sus elementos son del tipo  $(\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2})$ . En el bloque  $J=0$  hemos vuelto a indicar en la figura los estados originales de una sola partícula con  $(l_j)$ , por claridad.

Como ya sabemos, el 2o. término de ( 2.32 ) se escribe, en esta notación así :

$$- G \sqrt{\Omega_{j_1} \Omega_{j_2}} \delta_{(l_1, j_1), (l_2, j_2)} \delta_{(l_3, j_3), (l_4, j_4)} \delta_{J, 0}$$

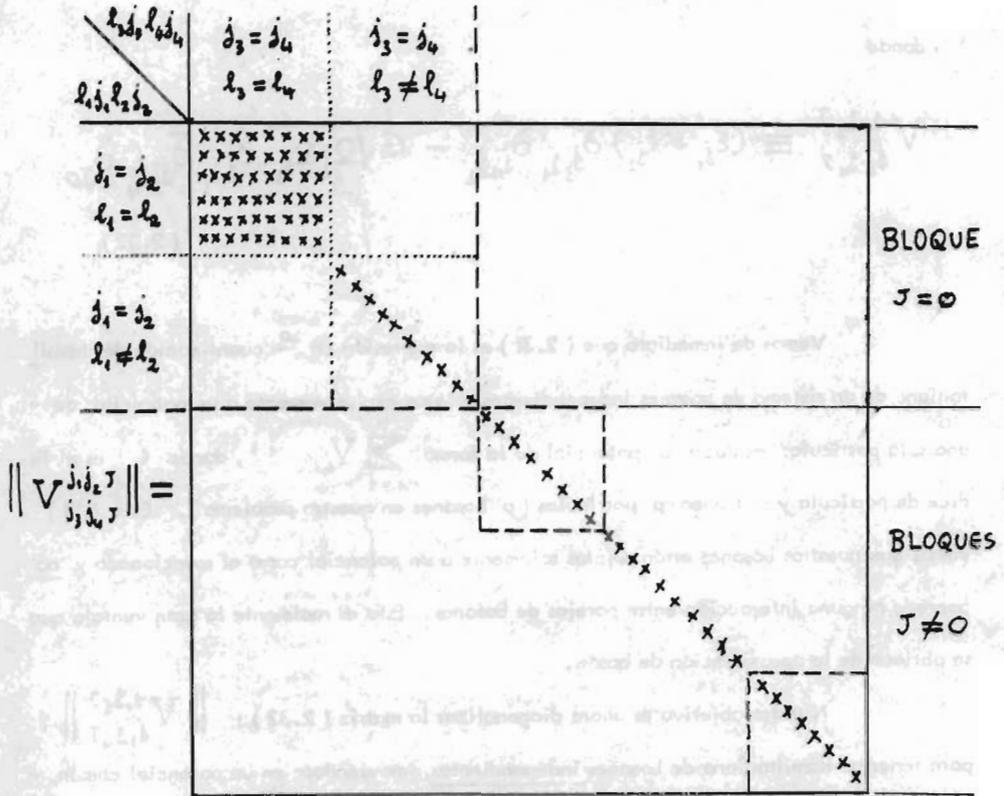


Fig. 6

Entonces, en el bloque  $J = 0$  , este término no contribuye a la parte  $l_1 \neq l_2$  ,  $l_3 \neq l_4$  , parte que será de nuevo diagonal, con elementos del tipo

$$\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2}$$

Finalmente, el primer bloque de la fig. 6 es el único no diagonal,

con elementos dados por :

$$V_{j'j}^{ij_0} = 2\varepsilon_j \delta_{jj'} - G\sqrt{\Omega_j \Omega_{j'}} \quad (2.33).$$

Regresemos ahora a la ec. ( 2.17 ), con la que se calculan los eigenvalores del problema de dos partículas. Por comodidad, reproducimos aquí la ec. ( 2.17 ) :

$$2\varepsilon_j a_j - G \sum_i \sqrt{\Omega_i \Omega_j} a_i = E a_j .$$

Esta ecuación se puede también escribir así :

$$\sum_{j'} (2\varepsilon_j \delta_{jj'} - G\sqrt{\Omega_j \Omega_{j'}}) a_{j'} = E a_j .$$

Usando ( 2.33 ) obtenemos :

$$\sum_{j'} V_{j'j}^{ij_0} a_{j'} = E a_j \quad (2.34).$$

Esta ecuación nos dice un hecho muy importante: la única submatriz que tenemos que diagonalizar en la fig. 6 tiene exactamente los mismos eigenvalores y eigenvec-  
tores que la submatriz no diagonal del problema de dos partículas.

Entonces los eigenvalores de la matriz de la fig. 6 son las intersecciones de la fig. 5, más otros triviales que, como dijimos, son del tipo  $\varepsilon_{j_1} + \varepsilon_{j_2}$ .  
Para tener una notación cómoda, designemos con  $E_{qJ}$  al q-ésimo eigenvalor del blo-  
que de momento angular  $J$ , en la matriz de la fig. 6 y con  $a_{j_1 j_2 J}^q$  al  
elemento  $(j_1, j_2, J)$  del eigenvector correspondiente. Supondremos que nuestros  
eigenvectores están ortonormalizados.

En esta notación tendremos :

$$\sum_{j_1 j_2} V_{j_1 j_2}^{j_1 j_2 J} a_{j_1 j_2}^q = E_{qJ} a_{j_1 j_2}^q \quad (2.35)$$

Por comodidad, vamos a definir los siguientes operadores :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{j_1 j_2}^{+qJM} &= \sum_q a_{j_1 j_2}^q \bar{A}_{qJM}^+ \end{aligned} \right. \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_{j_1 j_2}^{qJM} &= \sum_q a_{j_1 j_2}^q \bar{A}_{qJM} \end{aligned} \right. \quad (2.36b)$$

Substituyendo en ( 2.31 ) obtenemos la siguiente expresión :

$$H = \sum_{qJM} E_{qJ} \bar{A}_{qJM}^+ \bar{A}_{qJM} \quad (2.37)$$

Este es el resultado que queremos obtener. La expresión ( 2.37 ) es un hamiltoniano que describe un conjunto de bosones independientes, moviéndose en un potencial común con niveles dados por  $E_{qJ}$ . Como se ha indicado, algunos de estos niveles son los que se indican en la fig. 5 para el problema de dos partículas, y los otros son del tipo  $(\epsilon_{j_1} + \epsilon_{j_2})$ . Basta entonces colocar nuestros  $p$  bosones en todas las formas posibles en ese pozo común y tendremos todos los niveles de energía del sistema.

Dentro de la aproximación de bosón, los eigenestados de nuestro hamiltoniano

no serán entonces del tipo :

$$\psi = \bar{A}_{q_1 J_1 M_1}^+ \bar{A}_{q_2 J_2 M_2}^+ \cdots \bar{A}_{q_p J_p M_p}^+ |0\rangle \quad (2.38).$$

Se pueden luego calcular combinaciones lineales apropiadas de funciones de onda del tipo  $\psi$ , para tener estados con momento angular total definido.

Regresemos al problema de los niveles de energía. Si tenemos  $p$  parejas de partículas, o sea  $p$  bosones, el estado base se conseguirá colocando los  $p$  bosones en el nivel más bajo del potencial común  $E_{qj}$  de (2.37). Si llamamos  $\epsilon_0$  la energía del estado base de un bosón (el primer circuitito de la izquierda en la fig. 5) y  $E_0$  la del estado base de nuestro sistema de  $p$  bosones, tenemos :

$$E_0 = p \epsilon_0.$$

Es interesante calcular explícitamente esta cantidad, como función de la intensidad de la fuerza de apareamiento y de las energías originales  $\epsilon_j$ . Reproducimos aquí la ec. (2.19) para 1 bosón, que es la que nos va a servir de base :

$$-\frac{1}{G} = \sum_j \frac{\Omega_j}{E - 2\epsilon_j} \quad (2.39).$$

Como hemos visto, esta ecuación se puede resolver para  $E$  gráficamente, o bien numéricamente. Para tener una expresión explícita para  $E$  es necesario hacer alguna suposición extra. Para tener una idea cualitativa del comportamiento del estado base, vamos a suponer que nuestros niveles  $\epsilon_j$  forman una distribución continua desde  $\epsilon'$

hasta  $\epsilon''$  ; llamemos  $\rho'(\epsilon)$  a la densidad de niveles  $i$  en la energía  $\epsilon$  ; en vez de  $\epsilon_j$  pongamos  $\epsilon$  y en vez de  $\Omega_j$  ,  $\Omega(\epsilon)$  ; podemos substituir la suma en ( 2.39 ) por una integral :

$$-\frac{1}{G} = \int_{\epsilon'}^{\epsilon''} \frac{\Omega(\epsilon) \rho'(\epsilon)}{\epsilon - 2\epsilon} d\epsilon .$$

Pero  $\Omega(\epsilon) \rho'(\epsilon)$  es la densidad de parejas de estados en la energía  $\epsilon$  , ya que cada nivel  $i$  contribuye con  $\Omega_j$  estados. Llamemos  $\rho(\epsilon)$  a dicha densidad de estados :

$$\rho(\epsilon) = \Omega(\epsilon) \rho'(\epsilon) \qquad \int_{\epsilon'}^{\epsilon''} \rho(\epsilon) d\epsilon = \Omega$$

Tenemos entonces :

$$-\frac{1}{G} = \int_{\epsilon'}^{\epsilon''} \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{\epsilon - 2\epsilon}$$

Como ejemplo, vamos a resolver el problema de una densidad de estados constante :  $\rho(\epsilon) = \rho$  . Tenemos :

$$\frac{1}{G} = \rho \int_{\epsilon'}^{\epsilon''} \frac{d\epsilon}{2\epsilon - \epsilon}$$

Definimos la cantidad

$$\eta \equiv \frac{1}{\rho G} \qquad (2.40)$$

$$2\eta = \int_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} \frac{2d\varepsilon}{2\varepsilon - E} = \ln \left| \frac{2\varepsilon'' - E}{2\varepsilon' - E} \right|$$

Si nos interesa la energía del estado base  $E = \varepsilon_0$ , vemos de la fig. 5 que  $\varepsilon_0 < 2\varepsilon'$  siempre; desde luego se sigue  $\varepsilon_0 < 2\varepsilon''$ ; para  $E = \varepsilon_0$  podemos entonces suprimir las barras de valor absoluto y tenemos:

$$\varepsilon_0 = 2 \frac{\varepsilon' e^{2\eta} - \varepsilon''}{e^{2\eta} - 1} \quad (2.41).$$

Si  $G \rightarrow 0$ , entonces  $\eta \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon_0 \rightarrow 2\varepsilon'$

Si  $G \rightarrow \infty$ , entonces  $\eta \rightarrow 0$  y  $\varepsilon_0 \rightarrow -\infty$ ,

como se puede observar en la gráfica de la fig. 5.

Utilizando la definición de las funciones hiperbólicas podemos escribir:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon' + \varepsilon'' - (\varepsilon'' - \varepsilon') \operatorname{ctgh} \eta \quad (2.42).$$

La energía del estado base de  $p$  bosones, o sea,  $n = 2p$  partículas, es entonces:

$$E_0 = \left[ (\varepsilon' + \varepsilon'') - (\varepsilon'' - \varepsilon') \operatorname{ctgh} \eta \right] \frac{n}{2} \quad (2.43).$$

Esta fórmula coincide precisamente con la que obtiene Beliaev <sup>14)</sup> para el caso de una densidad de estados constante, si además se considera  $n \ll \Omega$  ( ec. ( 63 ) de la ref. 14 ) ).

Vamos a calcular ahora la energía del primer estado excitado respecto al estado base. En el estado base se tienen los  $p$  bosones colocados en el estado más bajo del problema de 2 partículas. La primera excitación se obtiene sacando 1 bosón y colocándolo en el primer estado excitado : o sea, con energía  $2 \varepsilon'$ . La diferencia de energías será entonces :

$$E_1 = 2\varepsilon' - \varepsilon_0$$

$$E_1 = (\varepsilon'' - \varepsilon')(\operatorname{ctgh} \eta - 1) \quad (2.44)$$

Si calculamos la energía de dos cuasipartículas utilizando la ec. ( 69 ) de la ref. 14) ( Beliaev ), para una densidad constante de niveles y usando  $n/\Omega \ll 1$  obtenemos exactamente el resultado ( 2.44 ).

Es interesante ver a qué se reduce ( 2.44 ) para el caso  $\eta \ll 1$  ; se tiene :  $\operatorname{ctgh} \eta - 1 \approx \frac{1}{\eta} = \rho G$ .

$$E_1 = (\varepsilon'' - \varepsilon') \rho G$$
$$(\varepsilon'' - \varepsilon') \rho = \Omega$$

$$E_1 = \Omega G \quad (2.45)$$

Para el caso totalmente degenerado, podemos pensar que  $\varepsilon'' - \varepsilon'$  se va reduciendo y  $\rho$  va aumentando, manteniéndose  $(\varepsilon'' - \varepsilon') \rho = \Omega$  , la

degeneración total; si  $\rho$  aumenta mucho y si suponemos que  $G$  es suficientemente grande, tenemos precisamente el caso  $\rho G \gg 1$ ; o sea,  $\eta \ll 1$  y la ec. (3.45) es aplicable. Veremos en la sección siguiente (ec. (2.86)) que el método de las cuasipartículas da el siguiente valor para la energía de  $V$  cuasipartículas:

$$E_V = \frac{V}{2} G \Omega ,$$

de modo que la energía de dos cuasipartículas es precisamente la que nos da la ec. (2.45). Calculemos ahora los eigenvectores correspondientes a los diferentes eigenvalores que nos da la ec. secular (3.12).

De (2.18) obtenemos:

$$\alpha_j = \frac{G \sqrt{\Omega_j}}{E - 2\varepsilon_j} \quad (2.46),$$

donde

$$\alpha_j \equiv \frac{-a_j}{\sum_i \sqrt{\Omega_i} a_i}.$$

La ec. (3.47) nos da entonces las componentes del eigenvector normalizado, si se conoce  $E$  correspondiente; las otras cantidades que intervienen en (2.19), son conocidas.

Como  $\alpha_j$  eran las componentes del eigenvector normalizado, tenemos:

$$a_j = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\sum_j \alpha_j^2}}$$

Utilizando (2.46), la suma que aparece en la ecuación anterior se puede expresar como:

$$\sum_j \alpha_j^2 = \sum_j \frac{G^2 \Omega_j}{(E - 2E_j)^2}$$

De nuevo podemos aproximar la suma por una integral, calculada desde  $E'$  hasta  $E''$  y tenemos :

$$\sum_j \alpha_j^2 = \frac{G^2 \Omega}{\sqrt{(2E' - E)(2E'' - E)}}$$

Entonces las componentes del eigenvector normalizado, correspondientes al eigenvalor E son :

$$a_j = \sqrt{\frac{(2E' - E)(2E'' - E)}{\Omega}} \cdot \frac{\sqrt{\Omega_j}}{E - 2E_j} \quad (2.47)$$

Como comprobación, supongamos que tenemos el caso totalmente degenerado:

$E' = E'' = E_j \equiv E$ ,  $\forall j$ . Entonces (2.47) nos da :

$$a_j = \sqrt{\frac{\Omega_j}{\Omega}} \quad (2.48)$$

Sabemos que en este caso la ec. secular (2.19) sólo nos da el estado base del sistema de 2 partículas. En vista de (2.48) podemos entonces escribir :

$$|0\rangle \equiv \sum_j \sqrt{\frac{\Omega_j}{\Omega}} A_j^\dagger |0\rangle = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \sum_j S_{1j} |0\rangle$$

$$|0\rangle = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} S_1 |0\rangle \quad (2.49),$$

que como ya sabemos es precisamente el estado base normalizado de 2 partículas en el caso totalmente degenerado. En el caso general sin degeneración, las componentes  $a_j^0$  del eigenvector del estado base toman una forma muy sencilla si se hace uso de la ec. (2.42) para la energía  $\epsilon_0$  correspondiente :

$$a_j^0 = G\sqrt{\Omega} \frac{\eta}{\sinh \eta} \frac{\sqrt{\Omega_j}}{\epsilon_0 - 2\epsilon_j} \quad (2.50),$$

O bien : 
$$a_j^0 = G\sqrt{\Omega} \frac{\eta}{\sinh \eta} \frac{\sqrt{\Omega_j}}{G\Omega\eta(1 - \operatorname{ctgh} \eta) - 2(\epsilon_j - \epsilon')} \quad (2.51),$$

Si definimos

$$\bar{A}^\dagger \equiv \sum_j a_j^0 A_j^\dagger \quad (2.52),$$

entonces el estado base del sistema de 2 partículas es :

$$|0\rangle_{n=2} = \bar{A}^\dagger |0\rangle \quad (2.53)$$

y, dentro de la aproximación de bosón, sabemos que el estado base de  $n$  partículas ( $n$ , par) está dado por :

$$|0\rangle_n = (\bar{A}^\dagger)^{n/2} |0\rangle \quad (2.54)$$

Calculemos ahora el número de partículas que en promedio se encuentran en la capa  $j$ , cuando el sistema está en el estado base (2.54) :

$$\bar{n}_j = {}_n \langle 0 | N_j | 0 \rangle_n \quad (2.55)$$

Se tiene :

$$\bar{n}_j = n (a_j^0)^2 \quad (2.56)$$

Substituyendo el valor de  $a_j^0$  que da la ec. (2.50), se tiene :

$$\bar{n}_j = n \cdot G^2 \Omega \frac{\eta^2}{\sinh^2 \eta} \cdot \frac{\Omega_j}{(\epsilon_0 - 2\epsilon_j)^2} \quad (2.57)$$

Podemos ahora comparar esta expresión con la que se obtiene del trabajo de Belyaev<sup>16)</sup>. El número promedio de partículas en la capa  $j$  está dado, según veremos en la sección siguiente (ec. (2.80)), por  $2 \Omega_j V_j^2$ ; esta cantidad se puede calcular usando la ec. (55) que Belyaev da para el potencial químico  $\lambda$  y la ec. (57) para la cantidad  $\Delta$ . Si luego se desarrolla en serie el resultado, conservando solo el término lineal en  $n$ , se tiene exactamente la expresión (2.57).

Es interesante utilizar estos resultados para escribir en una forma un poco diferente la energía  $E_0$  ( ec. (2.43) ) del estado base de  $n$  partículas. Queremos escribir  $E_0$  de la siguiente forma :

$$E_0 = W_0 + E_p \quad ,$$

donde definimos  $W_0$  como :

$$W_0 \equiv \sum_j \epsilon_j \bar{n}_j \quad (2.58)$$

y de aquí queremos calcular el valor de  $E_p$ .  $W_0$  va a ser entonces la contribución que dan al estado las energías  $\epsilon_j$  de una sola partícula ; si no hubiera fuerza de apareamiento,  $W_0$  sería simplemente  $n \epsilon'$ , ya que todas las partículas estarían en el nivel más bajo  $\epsilon'$  ; debido a la presencia de la interacción, la superficie de Fermi ya no presenta un corte tan neto, sino que se difunde; este efecto lo toman en cuenta las cantidades  $\bar{n}_j$  que aparecen en ( 2.58 ). Substituyendo el valor de  $\bar{n}_j$  que da la ec. ( 2.57 ) se calcula  $W_0$  y, de aquí, se obtiene  $E_p$ . El resultado es el siguiente :

$$E_0 = W_0 - \frac{G\Omega}{2} n \frac{\eta^2}{\sinh^2 \eta} \quad (2.59).$$

Si consideramos la ec. ( 115 ) que da Belyaev <sup>(14)</sup> y hacemos como siempre  $n/\Omega \ll 1$ , los primeros dos términos dan precisamente la ec. ( 2.59 ) que acabamos de obtener; el tercer término de la ec. ( 115 ) de Belyaev está conectado con la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, que no hemos considerado en nuestro análisis.

Vemos que la aproximación de bosón da resultados satisfactorios para un sistema de partículas moviéndose en un potencial común e interaccionando mediante una fuerza de apareamiento, cuando el número de partículas es pequeño comparado con la degeneración de los estados de una sola partícula que se estén considerando. Para un número considerable de partículas hay que utilizar otros métodos. Veremos en la próxima sección el método de las cuasipartículas libres.

$$W_0 \approx \sum_{\alpha} e^{-\beta E_{\alpha}}$$

$$E_0 = W_0^{-1} \frac{\partial W_0}{\partial \beta} = - \frac{\partial \ln W_0}{\partial \beta}$$

### 3.- El método de las cuasipartículas libres.

Este método es la aplicación directa a la física nuclear de las técnicas usadas en la teoría de la superconductividad para resolver un hamiltoniano del tipo (2.6). La aplicación de la teoría B.C.S. a los núcleos fue mencionada por primera vez por Bohr, Mottelson y Pines<sup>28)</sup> y entonces Belyaev<sup>14)</sup> llevó a cabo un estudio cualitativo de sus consecuencias en varios aspectos de la estructura nuclear. Posteriormente Kisslinger<sup>15)</sup> y Sorensen<sup>29)</sup> llevaron a cabo estudios cuantitativos, aplicando la teoría del apareamiento a los núcleos esféricos.

Usaremos aquí la nomenclatura de partículas y de cuasipartículas en el sentido de Belyaev<sup>14)</sup> y de Bayman<sup>11)</sup>. Daremos después las razones físicas por las que los creadores de la teoría de la superconductividad prefieren usar una nomenclatura un poco diferente<sup>17)</sup> y, en cierto sentido, un poco más precisa.

Hemos definido en el primer capítulo los operadores de creación y de aniquilación de partículas:  $b_{jm}^+$ ,  $b_{jm}$ . Vamos a efectuar sobre estos operadores la transformación ordinaria de Bogoliubov<sup>22)</sup>-Valatin<sup>23)</sup>, que define los operadores de creación y de aniquilación de cuasipartículas:

$$\begin{cases} \beta_{jm}^+ \equiv U_j b_{jm}^+ - V_j b_{jm} \\ \beta_{jm} \equiv V_j b_{jm}^+ + U_j b_{jm} \end{cases} \quad (2.60),$$

donde

$$\begin{aligned} (\beta_{jm}^+)^+ &= \beta_{jm} \quad y \\ \beta_{jm} &= (-)^{j-m} \beta_{j-m} \end{aligned}$$

como en (1.12). En (2.60) se tiene la condición:

$$U_j^2 + V_j^2 = 1 \quad (2.61),$$

con lo que se asegura que la transformación sea canónica, en el sentido de que conserva las reglas de anticonmutación de Fermiones para las  $\beta_{jm}^+$  y  $\beta_{jm}$ :

$$\begin{aligned} \{\beta_{jm}^+, \beta_{j'm'}^+\} &= \{\beta_{jm}, \beta_{j'm'}\} = 0 \\ \{\beta_{jm}^+, \beta_{j'm'}\} &= \delta_j^{j'} \delta_m^{m'} \end{aligned} \quad (2.62).$$

Cabe mencionar que Cami<sup>24)</sup> está investigando la posibilidad de una transformación no canónica, de manera que los operadores de creación y de aniquilación de cuasipartículas no tengan ni las reglas de conmutación de los fermiones ni la de los bosones. Su argumento se basa esencialmente en el hecho de que una cuasipartícula es una partícula "vestida" por la interacción y a priori no podemos afirmar nada acerca de la estadística que debe obedecer.

Podemos escribir la transformación (2.60) en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \beta_{jm}^+ \\ \beta_{jm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_j & -V_j \\ V_j & U_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{jm}^+ \\ b_{jm} \end{pmatrix} \quad (2.63).$$

Recordemos que  $b_{jm}^+$  y  $b_{jm}$  son las componentes  $1/2$  y  $-1/2$ , respectivamente, de un tensor de orden  $1/2$  en el cuasiespacio de la capa  $j$ . En este cuasiespacio podemos definir 3 ejes  $\xi_j$ ,  $\eta_j$ ,  $\zeta_j$  y podemos hablar de

rotaciones de los ejes, definidas por 3 ángulos de Euler :  $\varphi_j$  (alrededor de  $\xi_j$ ),  $\vartheta_j$  (alrededor de  $\eta'_j$ ) y  $\psi_j$  (alrededor de  $\xi_j''$ ) (estos 3 ángulos de Euler se han definido en el mismo orden de  $(\alpha\beta\gamma)$  de Rose<sup>3)</sup>, pág. 50). Entonces (2.63) corresponde a una rotación en los ejes del cuasiespacio de la capa  $j$  por los ángulos de Euler siguientes :

$$\begin{cases} \varphi_j = \psi_j = 0 \\ \cos \frac{\vartheta_j}{2} = U_j \\ \sin \frac{\vartheta_j}{2} = V_j \end{cases}$$

(Compárese la matriz  $2 \times 2$  de (2.63) con  $D_{mm'}^{1/2}$  de la ref. 3), ec. (4.54)).

Veremos que, en general, los parámetros  $U_j, V_j$  varían de capa a capa. Entonces la transformación de Bogoliubov corresponde a una rotación en el cuasiespacio de cada capa, por un ángulo  $\vartheta_j$  distinto en cada una de ellas. Si tenemos  $c$  capas, podemos regresar a nuestro ejemplo de  $c$  partículas del 1<sup>er</sup> capítulo y decir que la transformación de Bogoliubov es análoga a efectuar una rotación en las coordenadas de cada partícula, por un ángulo diferente en cada una de ellas.

Al efectuar estas rotaciones, las componentes del cuasispin se transformarán con la ley ordinaria de transformación de los vectores. Tendremos unas componentes rotadas  $S'_{qj}$  que son las mismas funciones de  $\beta_{jm}^+$  y de  $\beta^{jm}$  que las  $S_{qj}$  de  $b_{jm}^+$  y  $b^{jm}$  :

$$\begin{cases} S'_{1j} = -\frac{\sqrt{\Omega_j}}{2} [\beta_j^+ \beta_j^+]_{00} \\ S'_{0j} = \frac{N_j - \Omega_j}{2} \\ S'_{-1j} = -\frac{\sqrt{\Omega_j}}{2} [\beta_j \beta_j]_{00} \end{cases} \quad (2.64),$$

donde  $N_j' \equiv \sum_m \beta_{jm}^\dagger \beta^{jm}$  es el operador de número de cuasipartículas en la capa  $j$ .

Las cantidades  $S_{qj}'$  tienen las mismas reglas de conmutación de las  $S_{qj}$  y les llamaremos los generadores del cuasicuasispin. La transformación entre las  $S_{qj}$  y las  $S_{qj}'$  es la siguiente (ref. 3), ec. 4.46 para  $\mathcal{D}_{mm'}^\dagger$ ):

$$\begin{pmatrix} S_{1j} \\ S_{0j} \\ S_{-1j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_j^2 & \sqrt{2}U_jV_j & V_j^2 \\ -\sqrt{2}U_jV_j & U_j^2 - V_j^2 & \sqrt{2}U_jV_j \\ V_j^2 & -\sqrt{2}U_jV_j & U_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{1j}' \\ S_{0j}' \\ S_{-1j}' \end{pmatrix} \quad (2.65).$$

En términos del cuasispin, el hamiltoniano (2.6) se puede escribir así:

$$H = \sum_j \epsilon_j (2S_{0j} + \Omega_j) + 2G \sum_{jj'} S_{1j} S_{-1j'} \quad (2.66).$$

Si le aplicamos a (2.66) la transformación de Bogoliubov (2.65) y hacemos las conmutaciones apropiadas para poner todos los términos en orden normal, podemos escribir  $H$  de la siguiente manera:

$$H = H_{00} + H_{11} + H_{20} + H_{40} + H_{31} + H_{22} \quad (2.67),$$

donde:

$$H_{00} = \sum_j \left( \epsilon_j - \frac{G V_j^2}{2} \right) \cdot 2 \Omega_j V_j^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (2.68a)$$

$$H_{11} = \sum_j \left[ (\epsilon_j - G V_j^2) (U_j^2 - V_j^2) + 2 \Delta U_j V_j \right] N_j' \quad (2.68b)$$

$$H_{20} = -2\sqrt{2} \sum_j \left[ (U_j^2 - V_j^2) \frac{\Delta}{2} - U_j V_j (\epsilon_j - G V_j^2) \right] (S_{-1j}' - S_{1j}') \quad (2.68c)$$

$$H_{40} = 2G \sum_{i,j} U_i^2 V_j^2 (S_{1i}' S_{1j}' + S_{-1i}' S_{-1j}') \quad (2.68d)$$

$$H_{31} = \sqrt{2} G \sum_{i,j} (V_i^2 - U_i^2) U_j V_j (S_{1i}' N_j' - N_j' S_{-1i}') \quad (2.68e)$$

$$H_{22} = G \sum_{i,j} \left[ 2(U_i^2 U_j^2 + V_i^2 V_j^2) S_{1i}' S_{-1j}' + U_i V_i U_j V_j \sum_{m,m'} (\beta_{im}^+ \beta_{jm'}^+ \beta_{im} \beta_{jm'}) \right] \quad (2.68f),$$

donde

$$\Delta \equiv G \sum_j \Omega_j U_j V_j \quad (2.69).$$

Los subíndices en cada H indican el número de operadores de creación y de aniquilación presentes ; por ejemplo,  $H_{31}$  indica que contiene 3 operadores de creación y uno de aniquilación en un término y uno de creación y 3 de aniquilación en el otro.

Si escogemos nuestros parámetros  $U_j$  ,  $V_j$  de tal forma que --

$H_{20} \equiv 0$  y despreciamos  $H_{40}$ ,  $H_{31}$ ,  $H_{22}$ , sobre la base de que  $H_{40}$  y  $H_{31}$  no conservan el número de cuasipartículas y  $H_{22}$  es de la forma  $\beta^+ \beta^+ \beta \beta$  y corresponde por tanto a una interacción entre cuasipartículas, que podemos suponer pequeña, entonces nuestro hamiltoniano  $H$  se reduce a una constante  $H_{00}$ , más un término de cuasipartículas independientes  $H_{11}$ .

Si las hipótesis propuestas son válidas, hemos logrado diagonalizar aproximadamente el hamiltoniano (2.66). Aquí la idea es análoga a la que lleva de los nucleones en interacción a unos nucleones independientes, metidos en un potencial común, como en el modelo de capas; (los niveles son las energías  $\epsilon_j$  que hemos estado usando); la mayor parte de la interacción se ha usado para construir el potencial común y de ahí en adelante se trabaja con un modelo de partículas independientes. Se refina el modelo introduciendo una interacción residual, como el apareamiento en nuestro caso. Se pasa por segunda vez de un modelo de partículas en interacción a un modelo de cuasipartículas independientes, medidas en un nuevo potencial común, con niveles dados por el coeficiente de  $N_j'$  en  $H_{11}$ ; de nuevo se ha usado la parte más importante de la interacción residual para construir este nuevo pozo común y de aquí en adelante se trabaja con un modelo de cuasipartículas independientes, moviéndose en el nuevo pozo mencionado. Un refinamiento posterior sería seguir adelante por tercera vez con la misma idea y tomar en cuenta la interacción entre las cuasipartículas. Este paso lo haremos posteriormente.

Admitiendo la validez de las hipótesis hechas, vemos que la energía más baja del sistema está dada por el término constante  $H_{00}$  y  $N_j'$  cuenta el número de cuasipartículas independientes y su coeficiente nos da entonces la energía de excitación. Busquemos entonces una función de onda para el estado base del sistema; esa función de onda, que designaremos con  $|0\rangle$ , deberá ser tal que cualquier operador de aniquilación de cuasipartícula actuando sobre ella de cero;  $|0\rangle$  es entonces el vacío de --

cuasipartículas:

$$\beta_{j,m} |0\rangle = 0, \quad \forall j, m \quad (2.70).$$

Vemos inmediatamente que una expresión que satisface (2.70) es la siguiente:

$$|0\rangle = \prod_{j,m} \beta_{j,m} |0\rangle \quad (2.71),$$

donde  $|0\rangle$  es el vacío de partículas.

Usando (2.60) tenemos:

$$|0\rangle = \prod_{j,m} (V_j b_{j,m}^+ + U_j b_{j,m}) |0\rangle \quad (2.72),$$

o bien:

$$|0\rangle = \prod_{j,m>0} [(-)^{j-m} U_j V_j + V_j^2 b_{j,m}^+ b_{j-m}^+] |0\rangle \quad (2.73).$$

Hemos escrito  $|0\rangle$  en la forma (2.73) para compararlo posteriormente con el estado base que se propone usualmente en la superconductividad. El estado base (2.73) es muy fácil de normalizar y se obtiene:

$$|0\rangle = \prod_{j,m>0} [U_j + (-)^{j-m} V_j b_{j,m}^+ b_{j-m}^+] |0\rangle \quad (2.74).$$

Es muy ilustrativo escribir el estado base de la siguiente manera:

$$|0\rangle = \left[ \prod_{j,m>0} (-)^{j-m} U_j V_j \right] \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \left[ \frac{(-)^p 2^{p/2}}{p!} \left( \sum_j \frac{V_j}{U_j} S_{1j} \right)^p \right] |0\rangle \quad (2.75).$$

Vemos que nuestro estado base es una mezcla de  $0, 1, 2, \dots, \Omega$

$(\Omega \equiv \sum_j (2j+1)/2)$  parejas de partículas acopladas a momento angular cero. Consideremos un término  $p$  de la suma :

$$\left( \sum_j W_j S_{1j} \right)^p |0\rangle \quad (2.76),$$

donde  $W_j = v_j / u_j$ .

Este término contiene exactamente  $p$  parejas de partículas acopladas a momento angular cero, distribuidas sobre todas las capas  $j$ . Si las  $W_j$  valieran 1 para todas las capas, (2.76) se reduciría a :

$$\left( \sum_j S_{1j} \right)^p |0\rangle = (S_1)^p |0\rangle \quad (2.77),$$

que sabemos que corresponde al estado base de  $2p$  partículas interaccionando con fuerza de apareamiento en el caso totalmente degenerado (sin "single - particle splitting"). Una combinación como la (2.76) se espera que pueda describir el caso no degenerado.

Si queremos describir un sistema con  $2p = n$  partículas, sería deseable que en  $|0\rangle$  apareciera solo el término (2.76); pero el tipo de tratamiento es tal que aparecen otros términos con un número diferente de partículas. Entonces es necesario pedir que el término  $n = 2p$  sea el más importante: o sea, que la distribución en el número de partículas tenga un pico en  $n = 2p$ ; esto se obtiene pidiendo que el valor esperado del operador de número de partículas en el estado base sea  $n$ . O sea :

$$n = \frac{\langle 0 | N | 0 \rangle}{\langle 0 | 0 \rangle} \quad (2.78)$$

Desarrollando ( 2.78 ) se obtiene :

$$n = \sum_j 2\Omega_j V_j^2 \quad (2.79)$$

Es interesante notar que

$$\bar{n}_j = \frac{(0|N_j|0)}{(0|0)} = 2\Omega_j V_j^2 \quad (2.80)$$

es el promedio de partículas en la capa  $j$  . Entonces el 1<sup>er</sup> término de  $H_{00}$  ( ec. 2.68a ) :  $\sum_j \epsilon_j (2\Omega_j V_j^2)$  nos da precisamente la energía promedio de nuestras partículas, por estar medidas en un pazo común con energías de una sola partícula iguales a  $\epsilon_j$  .

Tenemos ahora el problema que nuestros parámetros  $V_j$  deben satisfacer ( 2.79 ) y además deben ser tales que anulen idénticamente  $H_{20}$  según ya se explicó. El mismo conjunto de  $V_j$  no podría, en general, satisfacer ambas condiciones. Se introduce entonces un parámetro extra  $\lambda$  con dim. de energía y se conviene en medir las energías  $\epsilon_j$  desde  $\lambda$  . Debemos entonces substituir  $\epsilon_j$  por  $\epsilon_j - \lambda$  en todas las ecuaciones. Se llega al mismo resultado si en vez de pedir que  $H_{20} \equiv 0$  , se buscan los parámetros  $V_j$  tales que minimicen la energía  $H_{00}$  del estado base, con la condición  $\sum_j 2\Omega_j V_j^2 = n$  ; esto nos fuerza a introducir un multiplicador de Lagrange  $\lambda$  y a trabajar con el hamiltoniano.

$$H' = H - \lambda N \quad (2.81)$$

donde  $H$  es el hamiltoniano original y  $N$  es el operador de número. Por ambos métodos (14), (14) el resultado es el siguiente :

$$\left\{ \frac{2}{G} = \sum_j \frac{\Omega_j}{\sqrt{(\tilde{\epsilon}_j - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right. \quad (2.82a)$$

$$\left. n = \sum_j \Omega_j \left[ 1 - \frac{\tilde{\epsilon}_j - \lambda}{\sqrt{(\tilde{\epsilon}_j - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right] \right. \quad (2.82b),$$

donde  $\tilde{\epsilon}_j \equiv \epsilon_j - G V_j^2$  (2.82c).

Resolviendo la pareja de ecuaciones (2.82a, b) se encuentran  $\lambda$  y  $\Delta$ .

El parámetro  $V_j^2$  vale :

$$V_j^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\tilde{\epsilon}_j - \lambda}{\sqrt{(\tilde{\epsilon}_j - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right] \quad (2.83)$$

y  $U_j^2 = 1 - V_j^2$ .

Con estos parámetros se puede demostrar (14) que la fluctuación fraccional en el número de partículas para el estado boscé es  $\Delta n/n \sim 1/\sqrt{n}$ . Si  $n$  es muy grande, esta fluctuación es pequeña.

Con las hipótesis hechas, podemos escribir el hamiltoniano (2.66) de la manera siguiente :

$$H = H_{00} + \sum_j E_j N_j' \quad (2.83),$$

donde  $E_j$ , la energía de una cuasipartícula, se obtiene de ( 2.68b ) introduciendo los resultados que acabamos de citar :

$$E_j = \sqrt{(\bar{\epsilon}_j - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad ( 2.83 )'$$

Vamos a investigar ahora algunas características del espectro, en nuestro modelo de cuasipartículas independientes. Empecemos con la energía del estado base y consideremos, como ilustración, el caso totalmente degenerado, ya que este caso se puede resolver exactamente ; por otro lado, las ecuaciones ( 2.82 ) y ( 2.83 ) tienen solución inmediata. Para el caso totalmente degenerado de  $c$  capas situadas a una energía  $\epsilon$  se obtiene :

$$H_{00} = n\epsilon - \frac{G}{4} n \left( 2\Omega - n + \frac{n}{\Omega} \right).$$

Si calculamos la energía del estado base con la ecuación exacta ( 2.5 ) haciendo  $V=0$  y agregándole la energía  $n\epsilon$  obtenemos :

$$H_{00}(\text{exacta}) = n\epsilon - \frac{G}{4} n \left( 2\Omega - n + 2 \right).$$

Calculemos el error relativo  $\delta$  de la parte de la energía del estado base debida a la fuerza de apareamiento :

$$\delta \equiv \frac{H_{00}(\text{exacta}) - H_{00}}{H_{00}(\text{exacta})} = \frac{2 - \frac{n}{\Omega}}{2\Omega - n + 2} = \frac{2 - \frac{n}{\Omega}}{2 - \frac{n}{\Omega} + \frac{2}{\Omega}} \cdot \frac{1}{\Omega}.$$

Si  $\Omega \gg 1$ , entonces

$$\delta \sim 1/\Omega \quad ( 2.84 )$$

Esperamos entonces tener buena aproximación si la degeneración es muy grande.

Pasemos ahora a los estados excitados. Hemos visto que el estado base es una combinación lineal de términos, cada uno con un número par de partículas. El primer estado excitado se obtiene aplicándole a  $|0\rangle$  un operador de creación de cuasipartícula:

$$H|0\rangle = H_{00}|0\rangle$$

$$H[\beta_{jm}^{\dagger}|0\rangle] = (H_{00} + E_j)\beta_{jm}^{\dagger}|0\rangle$$

y su energía será  $H_{00} + E_j$ ; el estado correspondiente es una mezcla de términos con un número non de partículas. La siguiente excitación se obtiene volviendo a aplicar un operador de creación de cuasipartícula:

$$H[\beta_j^{\dagger}\beta_{j'}^{\dagger}]_{JM}|0\rangle = [H_{00} + (E_j + E_{j'})][\beta_j^{\dagger}\beta_{j'}^{\dagger}]_{JM}|0\rangle$$

La energía es ahora  $H_{00} + (E_j + E_{j'})$  y el estado correspondiente contiene sólo términos con un número par de partículas.

Vemos entonces que para describir un núcleo par debemos partir del estado base  $|0\rangle$  y los estados excitados se obtendrán aplicando sucesivamente parejas de cuasipartículas. Para un núcleo par tenemos entonces el estado base y luego un grupo de niveles con energías  $E_j + E_{j'}$ ,  $E_{j''} + E_{j'''}$ , donde los índices  $j$  pueden correr sobre todas las capas. Si  $\Delta$  es mucho mayor que la diferencia entre las energías  $E_j$  originales, entonces los niveles del primer grupo excitado estarán separados por una energía del orden de la diferencia mencionada, mientras que su altura sobre el estado base será del orden de  $2\Delta$ . Tenemos entonces la característica que esperábamos de los núcleos pa-

res, como se explicó en conexión con la figura 3.

Para un núcleo non en cambio, el estado base se obtiene como un estado de una cuasipartícula.

$$(\beta_{jm}^+ | 0) \quad (2.85)$$

Como  $j$  puede tener cualquier valor entre las capas escogidas, tendremos muchos niveles cerca del estado base, a una distancia del orden de la diferencia entre las  $\epsilon_j$ . Este es precisamente el hecho que se observó en conexión con la fig. 4. El siguiente grupo de niveles excitados se obtiene agregándole a (2.85) 2 cuasipartículas. Por la explicación que se acaba de dar se ve que se reproducen los grupos de niveles de las figs. 3 y 4 con un número de cuasipartículas igual a  $V$ . Podemos demostrar esto más formalmente para el caso totalmente degenerado. En este caso todas las energías  $\epsilon_j$  de una cuasipartícula son iguales a  $G\Omega/2$ . Entonces para un núcleo par, la energía de excitación de  $V$  cuasipartículas vale:

$$E_V = \frac{V}{2} G\Omega \quad (2.86)$$

La fórmula exacta (2.5) nos da:

$$p_{nV} = \frac{V}{2} G \left( \Omega - \frac{V}{2} + \frac{2}{\Omega} \right).$$

Entonces si  $\Omega \gg 1$  y  $\Omega \gg V$ , podemos identificar el número de cuasipartículas con el seniority vectorial.

Análogamente se puede probar lo mismo para un núcleo impar.

Habiendo encontrado la forma de construir los estados excitados con el método de las cuasipartículas libres, es importante hacer notar que este método nos da estados

espurias, cuya presencia se debe a las aproximaciones del método, que llevan a la no conservación del número de partículas. Como referencia, consideremos la solución exacta para el problema de la fuerza de apareamiento para el caso de una sola capa  $j$ . Si tenemos  $n$  partículas, el estado base ( $\nu = 0$ ) es:

$$|\nu=0, J=0\rangle \propto (S_1)^{n/2} |0\rangle \quad (2.87)$$

Tenemos luego un conjunto de estados de seniority  $\nu = 2$  y momento angular  $J \neq 0$ , todos con la misma energía:

$$|\nu=2, JM\rangle \propto S_{1JM} (S_1)^{\frac{n-1}{2}} |0\rangle \quad (2.88)$$

donde  $J = 2, 4, \dots, (2j - 1)$ .

En la solución aproximada de este problema con el método de las cuasipartículas libres, se tiene un grupo de estados de  $n' = 2$  cuasipartículas, todos con energía  $G \Omega$ , que se obtienen aplicándole al estado base  $|0\rangle$  dos cuasipartículas acopladas a un momento angular total definido  $J$ :

$$|n'=2, JM\rangle \propto [\beta_j^+ \beta_j^+]_{JM} |0\rangle \quad (2.89)$$

donde  $J = 0, 2, 4, \dots, (2j - 1)$ . Vemos que el estado  $J = 0$ , que no aparece en el tratamiento exacto, es posible en el método de las cuasipartículas libres. Se trata de un estado espurio, cuyo origen se debe a la no conservación en el número de partículas <sup>15)</sup>.

También en el problema de  $c$  capas degeneradas, el método de las cuasipartículas libres nos

da, entre los estados de dos cuasipartículas con  $J = 0$ , un estado más que el que se obtiene con el tratamiento exacto. En este tratamiento exacto el estado base es

$$|V=0, J=0\rangle = (\mathcal{S}_1)^{n/2} |0\rangle \quad (2.90),$$

donde  $\mathcal{S}_1 \equiv \sum_{j=1}^c S_{1j}$  es el operador de ascenso del cuasipin total. Como se vio en la ec. (1.73), si se tiene más de una capa es posible construir estados de seniority vectorial  $V=2$  y momento angular  $J=0$ . Los estados con estas características y 2 partículas se pueden escribir por generalización inmediata de la ec. (1.79) :

$$|m=2, V=2, J=0\rangle = \sum_j a_j S_{1j} |0\rangle \quad (2.91),$$

con la condición

$$\sum_j a_j \Omega_j = 0 \quad (2.92),$$

que equivale a pedir :  $\mathcal{S}_1 \sum_j a_j S_{1j} |0\rangle = 0$  (ec. (1.77)).

El estado con  $V=2$ ,  $J=0$  y  $n$  partículas es entonces :

$$|m, V=2, J=0\rangle = \left( \sum_j a_j S_{1j} \right) (\mathcal{S}_1)^{\frac{n-2}{2}} |0\rangle \quad (2.93).$$

Debido a la condición (2.92), vemos que sólo tenemos  $(c-1)$  combinaciones lineales linealmente independientes del tipo (2.91), si  $c$  es el número de capas de generadas del problema. Entonces tenemos  $(c-1)$  estados excitados con  $J=0$  y  $V=2$ .

En el método de las cuasipartículas, tenemos exactamente  $c$  estados excitados de 2 cuasipartículas y momento angular cero :

$$[\beta_j^+ \beta_j^+]_{00} |0\rangle \quad (2.94),$$

con  $j = j_1, \dots, j_c$ .

Como se ve, tenemos un estado extra, que es espurio.

En la sección siguiente veremos que la aproximación de cuasibosón permite no sólo mejorar los resultados de la aproximación de cuasipartículas libres, sino que también elimina automáticamente los estados espurios mencionados.

Finalmente, para terminar esta sección es conveniente anotar la forma de razonar que siguen Bardeen, Cooper y Schrieffer en la teoría de la superconductividad <sup>(6), (7)</sup>. La única diferencia en notación con el caso de la física nuclear está en que hay que usar el momento lineal en vez del momento angular. Usaremos este último para no alterar las fórmulas ya obtenidas.

En la teoría de la superconductividad se tiene que resolver el hamiltoniano (2.6). Se acostumbra llamar "partícula" al electrón totalmente "desnudo", al electrón libre. Se introduce luego la interacción entre las partículas y la mayor parte de ella se toma en cuenta para construir un potencial común ( como en la teoría de Landau, por ejemplo ), dentro del cual se van a mover nuestras partículas, ya "vestidas" por la parte de la interacción que se ha tomado en cuenta; estas partículas vestidas se llaman "cuasipartículas" y difieren de las partículas "desnudas" en una renormalización de la masa. Esto da origen al primer término de la ec. (2.6). Se mejora luego el modelo, introduciendo una interacción entre las cuasipartículas, que es la interacción de apareamiento. Entonces se --

considera la ec. ( 2.6 ) como un hamiltoniano de cuasipartículas.

En vista de que la fuerza de apareamiento favorece las parejas apareadas, se parte proponiendo una probabilidad  $V_j^2$  de que se encuentre en la capa  $j$  una pareja del tipo  $(-)^{j-m} b_{jm}^+ b_{j-m}^+$  y una probabilidad  $U_j^2$  de que esa pareja no se encuentre ( entonces  $U_j^2 + V_j^2 = 1$  ). Se propone entonces el estado base ( 2.74 ) que reproducimos aquí :

$$|0\rangle = \prod_{j,m>0} [U_j + (-)^{j-m} V_j b_{jm}^+ b_{j-m}^+] |0\rangle \quad (2.95).$$

De hecho hay en  $|0\rangle$  una fluctuación en el número de parejas: para los problemas de la superconductividad esto no importa, ya que se trabaja usualmente con un número de electrones que es del orden de  $10^{23}$ .

Según la nomenclatura establecida, ( 2.95 ) es el estado base de nuestras cuasipartículas en interacción. Si no existiera dicha interacción de apareamiento entre ellas, el estado base consistiría de todas las cuasipartículas colocadas en los estados más bajos posibles del potencial común. Un estado excitado de una sola cuasipartícula se obtendría aniquilando una cuasipartícula, y volviéndola a crear en un estado más alto. Si además tenemos una interacción de apareamiento, pensamos de una manera análoga; se excita al sistema rompiendo un par, operación que consiste de dos pasos : primero se aniquila un electrón de un par y luego se crea en un estado diferente.

Queremos entonces averiguar cómo se puede lograr esa excitación, utilizando los operadores de creación  $b_{jm}^+$  y los de aniquilación  $b_{jm}$  de cuasipartículas, que tenemos a nuestra disposición. Para ello, apliquémosle los operadores  $b_{j'm'}^+$  y  $b_{j'-m'}$  al estado base  $|0\rangle$  definido en ( 2.95 ). Se hace el cálculo y se

encuentra un resultado sorprendente :

$$b_{j,m}^+ |0\rangle = U_j b_{j,m}^+ \prod_{\substack{j',m'>0 \\ (\neq j,m')}} [U_{j'} + (-)^{j'-m'} V_{j'} b_{j'm'}^+ b_{j'-m'}^+] |0\rangle \quad (2.96a)$$

$$b_{j',m'}^{j'-m'} |0\rangle = -(-)^{j'-m'} V_{j'} b_{j',m'}^+ \prod_{\substack{j,m>0 \\ (\neq j',m')}} [U_j + (-)^{j-m} V_j b_{jm}^+ b_{j-m}^+] |0\rangle \quad (2.96b)$$

Debido a la forma especial que tiene el estado  $|0\rangle$  y debido al bloqueo que se produce al introducir una nueva cuasipartícula (por el principio de Pauli), el efecto de  $b_{j,m}^+$  y el de  $b_{j',m'}^{j'-m'}$  sobre  $|0\rangle$  es exactamente el mismo (salvo una constante): la producción de una cuasipartícula en el estado  $j'm'$ , sin que esté apareada con ninguna otra.

El estado (2.96) tiene una energía mayor que el  $|0\rangle$ ; esa excitación se puede calcular <sup>(7)</sup> y resulta ser igual a  $E_j$ , de la ec. (2.83).

Es entonces muy natural combinar los operadores  $b_{j,m}^+$  y  $b_{j',m'}^{j'-m'}$  para que el resultado sea el estado (2.96) normalizado. El resultado es:

$$\beta_{jm}^+ = U_j b_{jm}^+ - V_j b_{jm} \quad (2.97)$$

En efecto :

$$\beta_{j'm'}^+ |0\rangle = b_{j'm'}^+ \prod_{\substack{j,m>0 \\ (\neq j',m')}} [U_j + (-)^{j-m} V_j b_{jm}^+ b_{j-m}^+] |0\rangle \quad (2.98)$$

Como en (2.97) el efecto sobre  $|0\rangle$  tanto de  $b_{jm}^+$  como de  $b_{jm}$  es el de crear una cuasipartícula  $b_{jm}^+$  no acoplada a ninguna otra, al operador  $\beta_{jm}^+$  se le llama operador de creación de una cuasipartícula. Nótese que solo es legítimo aplicar  $\beta_{jm}^+$  sobre un estado como  $|0\rangle$ , que tiene fluctuaciones en el número de partículas, ya que  $\beta_{jm}^+$  se definió como en (2.97) por conveniencia, aprovechando las propiedades de  $b_{jm}^+$  y  $b_{jm}$  al actuar precisamente sobre  $|0\rangle$ . Si  $\beta_{jm}^+$  se aplicara (cosa que no es legítima) al estado  $|0\rangle_n$  (obtenido proyectando de  $|0\rangle$  un número definido de cuasipartículas), nos encontraríamos con la situación paradójica de que  $\beta_{jm}^+$  es una mezcla de una partícula y un agujero. Sobre un estado como  $|0\rangle_n$  ya sabemos cómo crear una cuasipartícula en el estado  $j'm'$ : se aplica sencillamente  $b_{j'm'}^+$ .

La definición (2.97) no sólo tiene la ventaja de que su efecto sobre  $|0\rangle$  nos da un estado normalizado: su principal ventaja es que podemos definir su transpuesto conjugado  $\beta^{jm}$  que, al actuar sobre  $\beta_{jm}^+ |0\rangle$  nos da:

$$\beta^{jm} (\beta_{jm}^+ |0\rangle) = |0\rangle \quad (2.99)$$

Entonces  $\beta^{jm}$  aniquila la excitación producida por  $\beta_{jm}^+$  destruyendo la cuasipartícula que  $\beta_{jm}^+$  había creado sin pareja, y regresando todo al

estado base.

A  $\beta_{jm}$  se le llama entonces operador de aniquilación de una cuasi-partícula.

Es fácil verificar que, si  $\beta_{jm} = (-)^{j-m} \beta_{j-m}$ , con

$$\beta_{jm} = V_j b_{jm}^+ + U_j b_{jm} \quad (2.100),$$

entonces se tiene la propiedad anterior y además :

$$\beta_{jm} |0\rangle = 0, \quad \forall j, m.$$

Entonces al estado  $|0\rangle$  se le llama vacío de cuasipartículas.

Se ve entonces que el punto de partida de Bardeen - Cooper - Schrieffer y el de Bogoliubov son formalmente diferentes, pero que los resultados de ambos ataques son idénticos.

4.- La aproximación de cuasibosón.

En la sección anterior vimos la solución aproximada del problema de  $n$  fermiones moviéndose en un potencial común con  $c$  niveles de energía no degenerados e interactuando mediante una fuerza de apareamiento. La aproximación consistió en usar el esquema de las cuasipartículas libres. Se anuló idénticamente el término  $H_{20}$ , mediante una elección apropiada de los coeficientes  $U_j$ ,  $V_j$  y se despreciaron los términos que no conservan el número de cuasipartículas y aquéllos que corresponden a una interacción entre las mismas. Hasta la fecha no se conoce un método que sea capaz de tomar en cuenta exactamente todos esos términos; sin embargo se han desarrollado métodos que permiten estudiar el efecto de aquella parte de los términos restantes que puede tener algún significado físico claro. Por ejemplo, de esos términos restantes es posible extraer una parte que, bajo ciertas aproximaciones, corresponde a un conjunto de osciladores armónicos, cuyos cuantos de excitación tienen momento angular cero. Esto es muy interesante, ya que corresponde a extraer de la interacción de apareamiento aquella porción que tiene propiedades colectivas; en efecto, estas últimas están íntimamente conectadas con la interacción entre las cuasipartículas.

Vemos inmediatamente que de  $H_{40}$  (ec. (2.68d)) y  $H_{22}$  (ec. (2.68f)) podemos extraer la parte siguiente :

$$H_c \equiv 2G \sum_{i,j} (U_i^2 S'_{ii} + V_i^2 S'_{-ii}) (U_j^2 S'_{-ij} + V_j^2 S'_{ij}) \quad (2.10f)$$

y deseamos el resto, por no saber cómo tratarlo.

Nuestro hamiltoniano aproximado será entonces :

$$H' = H_{00} + H_{11} + H_c$$

Para estudiar las propiedades de este hamiltoniano es conveniente definir unos operadores  $B_j^+$ ,  $B_j^-$ , análogos a los operadores  $A_j^+$ ,  $A_j^-$  de las ecs. (2.7), pero definidos en términos de los operadores de creación y de aniquilación de cuasipartículas :

$$B_j^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_j^+ \beta_j^+]_{00} \quad (2.102a)$$

$$B_j^- \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_j^- \beta_j^-]_{00} = -\frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_j^- \beta_j^-]_{00} = B_j^- \quad (2.102b)$$

En términos de los generadores del cuasicuasi spin, ec. (2.64), se tiene :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_j^+ = -\sqrt{\frac{2}{\Omega_j}} S'_{1j} \\ B_j^- = \sqrt{\frac{2}{\Omega_j}} S'_{-1j} \end{array} \right. \quad (2.103a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_j^+ = -\sqrt{\frac{2}{\Omega_j}} S'_{1j} \\ B_j^- = \sqrt{\frac{2}{\Omega_j}} S'_{-1j} \end{array} \right. \quad (2.103b)$$

Los operadores  $B_j^+$  y  $B_j^-$ , que crean o destruyen una pareja de cuasipartículas situadas en la capa  $j$  y acopladas a momento angular cero, cumplen las reglas de conmutación siguientes :

$$[B_j^-, B_{j'}^+] = \delta_{j'j} \left( 1 - \frac{N_j}{\Omega_j} \right) \quad (2.104)$$

donde  $N'_j = \sum_m \beta_{jm}^+ \beta^{jm}$  es, como siempre, el operador de número de cuasipartículas en la capa  $j$ . Si en nuestro problema tenemos muy pocas cuasipartículas, en comparación con la degeneración de los estados ( $n'_j \ll \Omega_j$ ), podemos escribir (2.104) aproximadamente como:

$$[B^j, B_{j'}^+] \approx \delta_{j'}^j \quad (2.105).$$

Esta se llama la aproximación de cuasibosón.

Si el número de partículas del sistema es grande, la aproximación de bosón - que se describió en la sección 2 no es válida; pero si se quieren estudiar los estados de excitación más baja, el número de cuasipartículas será pequeño y la aproximación de cuasibosón será razonable.

Vamos a escribir el término  $H_c$  (ec. (2.101)) de nuestro hamiltoniano - en términos de los operadores  $B_j^+$  y  $B^j$ :

$$H_c = G \sum_{i,j} \sqrt{\Omega_i \Omega_j} (U_i^2 B_i^+ - V_i^2 B^i) (U_j^2 B^j - V_j^2 B_j^+) \quad (2.106).$$

Como se va a suponer que los operadores  $B_j^+$  y  $B^j$  cumplen las reglas de conmutación (2.105), se pueden considerar como los operadores de creación y de aniquilación de cuantos de un oscilador armónico. Veremos ahora que los diferentes osciladores armónicos acoplados que aparecen en (2.106) se pueden desacoplar y que el hamiltoniano se puede escribir en la forma siguiente:

$$H' = H'_{00} + \sum_j \omega_j \Gamma_j^+ \Gamma^j \quad (2.108),$$

por la que se refiere a su aplicación a estados con momento angular cero.

$H'_{00}$  es la energía del estado base del sistema,  $\Gamma_j^+$  y  $\Gamma_j^-$  son los operadores de creación y de aniquilación de los cuantos libres del sistema y  $\omega_j$  es la energía del cuanto creado por  $\Gamma_j^+$ . El estado base del sistema lo indicaremos como  $|\tilde{0}\rangle$  y tendrá la propiedad:

$$\Gamma_j^- |\tilde{0}\rangle = 0, \quad \forall j \quad (2.109).$$

Se puede excitar el estado base  $|\tilde{0}\rangle$ , mediante la creación de un cuanto. Así, el estado  $\Gamma_j^+ |\tilde{0}\rangle$  tendrá una energía  $\omega_j$ , respecto al estado base  $|\tilde{0}\rangle$ . Queremos ahora calcular  $\omega_j$ , usando el hecho de que  $\Gamma_j^+$  y  $\Gamma_j^-$  diagonalizan  $H'$  y deberán ser combinaciones lineales de los operadores  $B_j^+$  y  $B_j^-$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_j^+ = \sum_i (r_{ij} B_i^+ + s_{ij} B_i^-) \end{array} \right. \quad (2.110a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_j^- = \sum_i (r_{ij} B_i^- + s_{ij} B_i^+) \end{array} \right. \quad (2.110b).$$

Pedimos que el operador  $\Gamma_j^+$  satisfaga la siguiente condición:

$$[H', \Gamma_j^+] = \omega_j \Gamma_j^+ \quad (2.111)$$

El resultado nos dará una ecuación de eigenvalores para  $\omega_j$ . El cálculo del conmutador (2.111) es una aplicación directa de la regla (2.105), e igualando el

resultado á  $\omega_j \Gamma_j^+$  se tienen las siguientes condiciones sobre los coeficientes :

$$\left\{ \begin{aligned} r_{ij} &= -\frac{G\sqrt{\Omega_i}}{\omega_j - 2E_i} (U_i^2 \rho_j + V_i^2 \sigma_j) \end{aligned} \right. \quad (2.112a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} s_{ij} &= \frac{G\sqrt{\Omega_i}}{\omega_j + 2E_i} (V_i^2 \rho_j + U_i^2 \sigma_j) \end{aligned} \right. \quad (2.112b),$$

donde :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_j &= \sum_k \sqrt{\Omega_k} (U_k^2 r_{kj} + V_k^2 s_{kj}) \end{aligned} \right. \quad (2.113a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_j &= \sum_k \sqrt{\Omega_k} (V_k^2 r_{kj} + U_k^2 s_{kj}) \end{aligned} \right. \quad (2.113b).$$

Substituyendo las ecs. (2.112) en las ecs. (2.113) se tienen las dos relaciones siguientes :

$$\left\{ \left[ \sum_i \Omega_i \frac{2\omega_j(E_i - \lambda) + \omega_j^2 - 2\Delta^2}{2E_i(\omega_j^2 - 4E_i^2)} \right] \rho_j + \left[ \sum_i \frac{\Omega_i \Delta^2}{E_i(\omega_j^2 - 4E_i^2)} \right] \sigma_j = 0 \right. \quad (2.114a)$$

$$\left\{ \left[ \sum_i \frac{\Omega_i \Delta^2}{E_i(\omega_j^2 - 4E_i^2)} \right] \rho_j + \left[ \sum_i \Omega_i \frac{-2\omega_j(E_i - \lambda) + \omega_j^2 - 2\Delta^2}{2E_i(\omega_j^2 - 4E_i^2)} \right] \sigma_j = 0 \right.$$

(2.114b),

donde  $\Delta = G \sum_j \Omega_j U_j V_j$ , como siempre y  $\lambda$  es el potencial químico.

La condición para que las ecs. ( 2.114 ) tengan solución no trivial para  $\rho_j$  y  $\sigma_j$  es que el determinante de los coeficientes valga cero. Calculando el determinante y haciendo las reducciones algebraicas necesarias se obtiene :

$$\omega_j \sum_i \frac{\Omega_i}{E_i [\sqrt{\omega_j^2 - 4\Delta^2} + 2(\tilde{\epsilon}_i - \lambda)]} = 0 \quad (2.115)$$

Para el caso  $\omega_j \neq 0$  tenemos entonces :

$$\sum_i \frac{\Omega_i}{E_i [\sqrt{\omega_j^2 - 4\Delta^2} + 2(\tilde{\epsilon}_i - \lambda)]} = 0 \quad (2.116)$$

Esta es la ecuación que debe satisfacer  $\omega_j$ .

La gráfica de esta ecuación es cualitativamente muy sencilla y de ella podremos obtener una conclusión muy importante. Definimos las cantidades :

$$\begin{aligned} \epsilon'_i &\equiv \tilde{\epsilon}_i - \lambda \\ x &\equiv \sqrt{\omega^2 - 4\Delta^2} \\ y &\equiv \sum_i \frac{\Omega_i / E_i}{x + 2\epsilon'_i} \end{aligned} \quad (2.117)$$

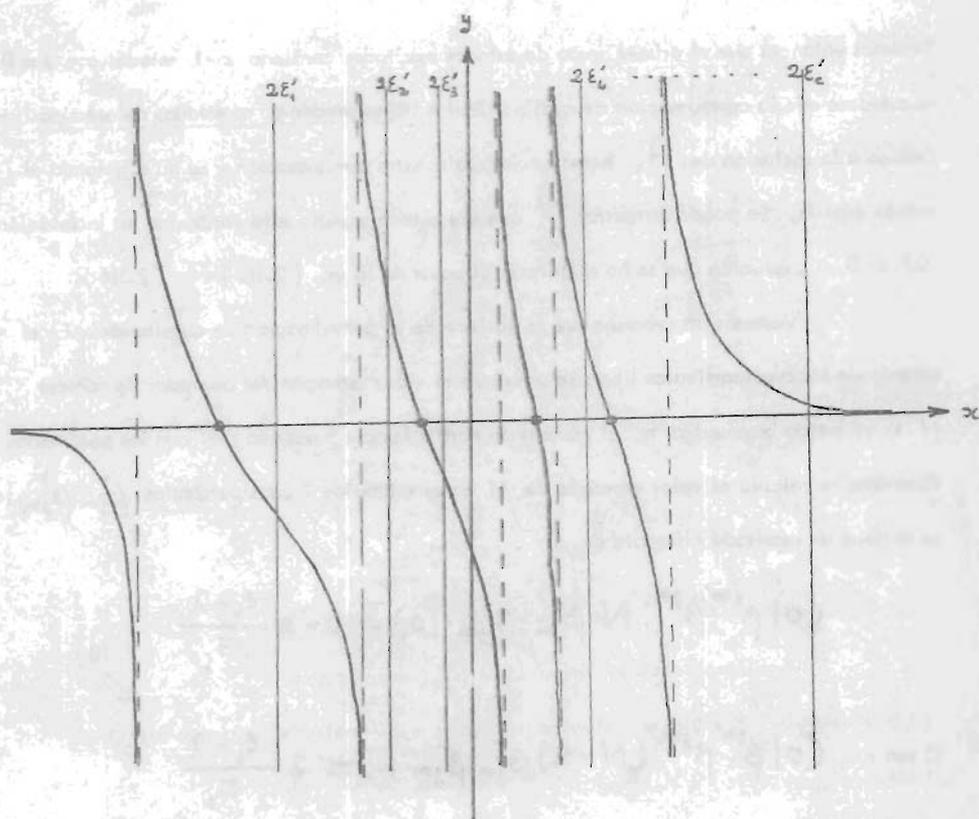


Fig. 7

En la figura se indican con líneas llenas verticales las energías  $2\varepsilon'_j$  para el problema de  $c$  capas; las líneas verticales de puntos son  $-2\varepsilon'_c, -2\varepsilon'_{c-1}, \dots, -2\varepsilon'_2, -2\varepsilon'_1$ ; o sea, las reflejadas respecto al eje  $y$  de las líneas llenas; las curvas con línea gruesa son la gráfica  $y = y(x)$  de la ec. (2.117). Finalmente las soluciones del problema se obtienen cortando esa gráfica con la recta  $y = 0$  y se obtienen los círculos de la figura. Un hecho notable es que para el problema de  $c$  capas se obtienen precisamente  $(c - 1)$  soluciones para  $\omega_j$ ; recuérdese que  $\omega_j$  es la energía del cuanto creado por  $\Gamma_j^\dagger$  y corresponde, por lo tanto, a estados de momento angular cero.

Tenemos entonces que el primer grupo de estados excitados contiene  $c-1$  estados con  $J=0$ .  
 Recuérdese que la aproximación de cuasipartículas libres predice  $c$  estados de ese tipo. -  
 Debido a la inclusión de  $H_c$  hemos mejorado nuestra aproximación y se ha eliminado el  
 estado espurio. Se puede demostrar <sup>26)</sup> que ese estado espurio está contenido en la solución  
 $\omega = 0$ , solución que se ha eliminado al pasar de la ec. (2.115) a la (2.116).

Veremos otra ventaja que se obtiene de la aproximación de cuasibosón. En el  
 método de las cuasipartículas libres se pide que el valor esperado del operador de número  
 $N$  en el estado base valga  $n$ , el número de partículas del problema; si con los parámetros  
 obtenidos se calcula el valor esperado de  $N$  en el estado de 2 cuasipartículas  $|\beta_{jm}^+ \beta_{jm'}^+|0\rangle$   
 se obtiene un resultado diferente de  $n$ :

$$\langle 0 | \beta_{jm'} \beta_{jm} N \beta_{jm}^+ \beta_{jm'}^+ | 0 \rangle = n + 2 \frac{\epsilon_j - \lambda}{\epsilon_j} \quad (2.118).$$

$$0 \text{ sea: } \langle 0 | \beta_{jm'} \beta_{jm} (N - n) \beta_{jm}^+ \beta_{jm'}^+ | 0 \rangle = 2 \frac{\epsilon_j - \lambda}{\epsilon_j} \quad (2.119).$$

Si se hace ahora el mismo cálculo (2.119) dentro de la aproximación de cua-  
 sibosón, utilizando los parámetros del método de cuasipartículas libres, se obtiene un resulta-  
 do que esencialmente contiene el término (2.119) sumado sobre todas las capas; se espera  
 que esta suma sea pequeña, si hay niveles de una sola partícula  $\epsilon_j$  a ambos lados de  
 $\lambda$ . En particular, el resultado vale cero si esos niveles están distribuidos simétrica-  
 mente alrededor de  $\lambda$ .

5.- Interpretación del estado base B. C. S. en el lenguaje de la mecánica estadística.

Vamos a considerar un problema sumamente sencillo : sean dos capas  $j_1$  y  $j_2$ , con degeneración  $2\Omega_1$  y  $2\Omega_2$ , respectivamente, con  $\Omega_1 \gg \Omega_2$ .

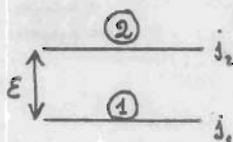
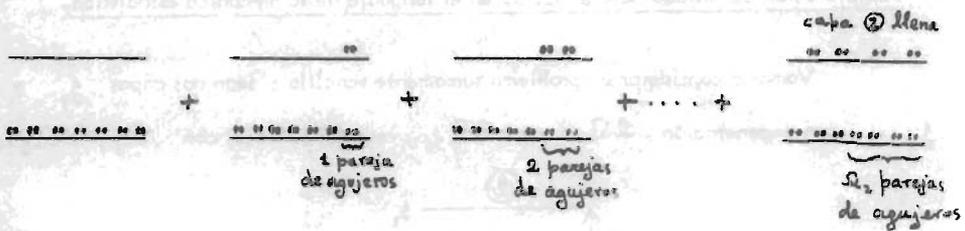


Fig. 8

Las capas no están degeneradas y la separación entre ellas es  $\epsilon$ . Supongamos que tenemos precisamente  $2\Omega_1$  nucleones. Entonces, en ausencia de interacción, el estado base del sistema se obtiene cuando los  $2\Omega_1$  nucleones están en la capa 1, mientras que la capa 2 está vacía; la capa 1 define entonces con toda precisión el nivel de Fermi. Vamos a ver cuál es el efecto de introducir una interacción de apareamiento entre las partículas. Claramente el estado base anterior no será eigenestado de la interacción, ya que la fuerza de apareamiento aniquila una pareja de partículas acopladas a momento angular cero y las puede volver a crear ya sea en la misma capa, o bien en una diferente. Entonces el estado base de nuestros  $2\Omega_1$  nucleones será una combinación lineal del estado base arriba mencionado ( cero partículas en la capa 2 y cero agujeros en la capa 1 ), de un segundo estado con 1 pareja de partículas ( acopladas a momento angular cero ) en ② y una pareja de agujeros en ①, un tercer estado con 2 parejas ( cada una de momento angular cero ) de partículas en ② y 2 parejas de agujeros en ①, etcétera, hasta un estado con  $\Omega_2$  parejas de partículas en ② y  $\Omega_2$  parejas de agujeros en ①. En forma esquemática, esta combinación lineal se vería así :

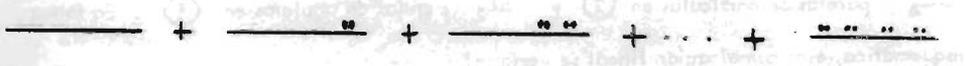


( 2.120 ).

Hasta este punto, esta es la forma exacta del estado base ( con los coeficientes apropiados en la combinación lineal ) y el número de partículas del sistema es buen número cuántico. Pero, si  $\Omega_1 \gg \Omega_2$ , podemos introducir una simplificación.

En la combinación lineal mencionada,  $\Omega_2$  es el número máximo de parejas de agujeros en la capa 1 ; como partimos de  $\Omega_1$  parejas de partículas en (1) y  $\Omega_1 \gg \Omega_2$ , podemos despreciar en (1) el efecto de los agujeros; (1) es un mar muy grande, que prácticamente no se afecta al sacarle una, dos, ...,  $\Omega_2$  parejas de partículas. En cambio el efecto de las partículas en (2) será notable, ya que tenemos términos que van desde la capa 2 vacía hasta la capa 2 llena. En la figura podemos entonces introducir una rejilla imaginaria entre las dos capas, de tal forma que nos permita observar sólo arriba de ella. El resultado esquemático será una combinación lineal del tipo :

( 2.121 ).



Si bien el número de partículas en (1) más en (2) es constante, estamos despreciando el cambio en el número de partículas del mar y, al observar sólo la capa 2, tenemos la impresión de que el número de partículas del sistema varía de término a término en la combinación lineal.

Podemos resolver el problema ( 2.120 ), usando la presencia de la capa (1) sólo como un artificio que nos permite pedir que el eigenvector correspondiente ( los coeficientes de la combinación lineal ) sea tal que el promedio de partículas en la capa 2 sea un número dado  $n$ . Es de esperarse que los coeficientes resultantes correspondan a los del estado base B.C.S., cuando se resuelve el problema de  $n$  partículas en la capa 2 mediante una combinación lineal del tipo ( 2.121 ).

Las ideas anteriores son totalmente análogas a las que se siguen en mecánica estadística, cuando se pasa de una distribución microcanónica en el número de partículas a una canónica en dicho número <sup>27)</sup>. Se supone que el cuerpo en estudio tiene un número bien definido de partículas en el primer tipo de distribución; en el segundo tipo, en cambio, se supone que el cuerpo se ha introducido en un reservoír muy grande, de tal forma que el cuerpo y el reservoír puedan intercambiar partículas. Si bien la suma total de las partículas es siempre constante, el número de partículas del cuerpo es variable; por otro lado, la variación correspondiente en el reservoír es despreciable, si éste es muy grande comparado con el cuerpo.

6.- Algunos resultados de la teoría del apareamiento 21), 31)

Se mencionó al principio de la sección 3 de este capítulo que Kisslinger y Sorensen<sup>29)</sup> (KS) hicieron aplicaciones cuantitativas muy interesantes de la teoría del apareamiento. KS decidieron estudiar los núcleos semimágicos: es decir, aquellos en los cuales  $Z$  ó  $N$  (pero no ambos) es mágico. De este modo el problema es el de un solo tipo de partículas: neutrones, o bien protones.

En primer lugar, KS tuvieron que elegir las energías  $\epsilon_j$  de una sola partícula. En algunos casos, ellos tomaron simplemente las energías del modelo de capas esférica que Nilsson<sup>30)</sup> había usado como punto de partida para el cálculo de las energías de los estados deformados. En los isótopos del Pb, KS tomaron los niveles de energía del  $Pb^{207}$ , que difiere del núcleo doblemente mágico  $Pb^{208}$  por un agujero en neutrones.

Después de esto, KS se quedaron con un solo parámetro, la intensidad  $G$  de la fuerza de apareamiento; pensaron que la intensidad de la interacción tenía que ser (en orden de magnitud) inversamente proporcional al volumen del núcleo. Un argumento parecido se encuentra en la referencia 32). Entonces supusieron  $G \sim A^{-1}$  y tomaron  $GA$  como parámetro.

En la figura se muestran los resultados de KS para la diferencia en la masa, entre los núcleos pares y los nanes. Los puntos gruesos muestran los resultados experimentales y las líneas delgadas muestran los resultados teóricos para 3 valores del parámetro  $GA$ :

a:  $GA = 19 \text{ MeV}$

b:  $GA = 23 \text{ MeV}$

c:  $GA = 30 \text{ MeV}$

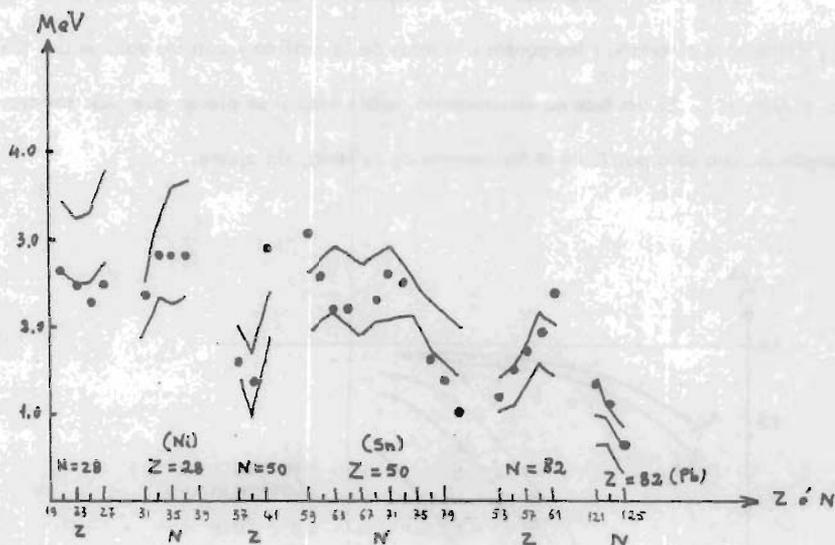


Fig. 9

Por la gráfica, parece razonable tomar  $G \sim A^{-1}$ . Se puede ver con claridad la tendencia de las curvas a bajar cerca de los núcleos doblemente mágicos.

KS también predijeron los estados excitados más bajos de toda una serie de núcleos impares.

Es interesante notar que Cohen y Price<sup>34)</sup> y Yoshida<sup>35)</sup> han mostrado cómo se pueden usar las reacciones de stripping y de pick-up para determinar las probabilidades de ocupación  $V_j^2$  de los niveles de una sola partícula en el estado base B.C.S. El factor espectroscópico<sup>33)</sup> para una reacción de stripping es esencialmente  $U_j^2$ ,

mientras que para una reacción de pick-up es esencialmente  $V_j^2$

La siguiente figura muestra una comparación de los valores obtenidos por Cohen y Price para el estaño ( los puntos discretos de la gráfica ) con los valores de KS ( líneas continuas ). El acuerdo es satisfactorio, sobre todo si se piensa que KS tomaron sus energías de una sola partícula directamente de Nilsson, sin ajustes.

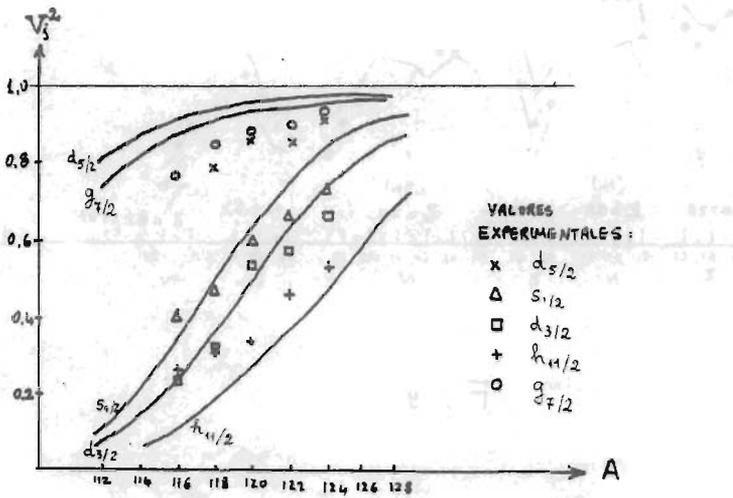


Fig. 10

### CAPITULO III

## OSCILACIONES COLECTIVAS EN LOS NUCLEOS ESFERICOS ( PARTICULAS IDENTICAS )

### I.- Introducción.

El modelo que hemos discutido en el capítulo II es capaz de explicar algunas propiedades nucleares, como la brecha de energía entre el estado base y el primer estado excitado de los núcleos pares y la diferencia importante entre el espectro de los núcleos pares y los nones. Los estados excitados que se obtienen son estados de cuasipartículas libres y, como tales, son excitaciones individuales del sistema. Ahora bien, se sabe por evidencia experimental que los estados excitados de muchos núcleos corresponden a excitaciones colectivas del sistema; por ejemplo, en los núcleos esféricos se encuentran estados que corresponden a vibraciones colectivas, del tipo de las vibraciones de la gota de líquido, discutidas por Bohr y Mottelson<sup>37)</sup>. En el modelo hidrodinámico se predice que las vibraciones de carácter cuadrupolar son las más bajas en energía<sup>37), 38)</sup> y entonces el primer estado excitado corresponde a la excitación de un fonón de momento angular  $J^\pi = 2^+$  y energía  $\omega$ . La siguiente excitación corresponde a 2 fonones y se tienen entonces 3 estados degenerados con energía  $2\omega$  y con los momentos angulares  $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+$ . Un espectro de este tipo se llama : espectro vibracional.

En la naturaleza no se verifica exactamente este fenómeno. Sin embargo, la idea cualitativa del modelo se encuentra presente en muchos casos y en algunos de ellos la razón de la energía del segundo grupo de niveles excitados a la energía del primero es razonablemente cercana a  $2^{39)}$ . Este fenómeno se encuentra principalmente en los núcleos esféricos, ya que los núcleos muy deformados presentan más bien bandas rotacionales construidas sobre cada excitación individual, o bien sobre cada excitación vibracional<sup>31),39)</sup>.

Es entonces importante construir un modelo microscópico de las oscilaciones colectivas, que sería entonces más fundamental que el modelo hidrodinámico de la gota de líquido<sup>32)</sup>. Veremos que esto se puede hacer introduciendo una interacción del tipo cuadrupolo-cuadrupolo entre los nucleones.

En la sección 2 veremos el tratamiento de esta interacción mediante la aproximación de cuasibosón<sup>11)</sup>.

2.- La aproximación de cuasibosón.

Este método se presta para discutir excitaciones vibratoriales de un orden cualquiera. Discutiremos aquí una interacción del tipo siguiente :

$$V = -F^k \sum_{i,j} f_k(r_i) f_k(r_j) P_k(\cos \omega_{ij}) \quad (3.1)$$

$$= -(-)^k \frac{4\pi F^k}{\sqrt{2k+1}} \sum_{i,j} f_k(r_i) f_k(r_j) [Y_k(\Omega_i) Y_k(\Omega_j)]_{00}$$

$$\therefore V = -(-)^k \frac{4\pi F^k}{\sqrt{2k+1}} [V_k V_k]_{00} \quad (3.2),$$

donde se define el operador de una sola partícula  $V_{kq}$  como :

$$V_{kq} \equiv \sum_i f_k(r_i) Y_{kq}(\Omega_i) \quad (3.3).$$

En la interacción (3.1) se han incluido los términos de una sola partícula, del tipo  $-F^k f_k(r_i) f_k(r_i)$ , que modifican los niveles originales de una sola partícula. Supondremos que se ha resuelto el problema de  $n$  partículas moviéndose en un potencial común e interaccionando a través de una fuerza de apareamiento, utilizando el método de las cuasipartículas libres; tomaremos esos resultados como base y expresaremos el efecto de (3.1) como una interacción entre las cuasipartículas; trataremos entonces con parejas ligadas de cuasipartículas y mediante dichas parejas construiremos los fonones de excitación del sistema.

Vamos a generalizar las definiciones ( 2.102 ) para tener operadores que puedan crear o aniquilar una pareja de cuasipartículas situadas en dos capas cualesquiera y acopladas a un momento angular arbitrario. Esta nueva definición va a ser análoga a la que se dió en ( 2.21 ) para  $A_{j_1 j_2 JM}^+$  y  $A_{j_1 j_2 JM}$ , con la diferencia que ahora va a contener operadores de creación y aniquilación de cuasipartículas. Definimos entonces :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{j_1 j_2 JM}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{j_1 j_2}}} [\beta_{j_1}^+ \beta_{j_2}^+]_{JM} \end{array} \right. \quad (3.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{j_1 j_2 JM} \equiv -\frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{j_1 j_2}}} [\beta_{j_1} \beta_{j_2}]_{JM} \end{array} \right. \quad (3.4b)$$

Se hace la misma convención de la sección 2, cap. II, de que  $j_1, j_2$  estén en orden creciente y, al calcular las reglas de conmutación de los operadores  $B_{j_1' j_2' J' M'}^+$  y  $B_{j_1 j_2 JM}$  se llega a la ec. ( 2.24 ), simplemente cambiando  $b_{j_1}^+$  por  $\beta_{j_1}^+$ , y  $b_{j_1}$  por  $\beta_{j_1}$ . Por el mismo argumento que se dió en esa sección, si tenemos pocas cuasipartículas en comparación con la degeneración de los estados, hacemos la aproximación de cuasibosón y llegamos a las reglas de conmutación aproximadas :

$$[B_{j_1 j_2 JM}, B_{j_1' j_2' J' M'}^+] \approx \delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'} \delta_{J J'} \delta_{M M'} \quad (3.5)$$

Esta aproximación será razonable si trabajamos con estados de 2 cuasipartículas. Veremos más adelante que en términos de estos cuasibosones podremos definir las excitaciones vibrativas del sistema.

Como hemos dicho, suponemos que hemos resuelto el problema de cuasipartículas libres; el hamiltoniano correspondiente es :

$$H_{11} = \sum_j E_j N'_j \quad (3.6),$$

si convenimos en poner nuestro origen de energías en la energía del estado base  $|0\rangle$ . Por un argumento análogo al que llevó a la ec. (2.29), si aceptamos la aproximación de cuasibosón podemos escribir el hamiltoniano de cuasipartículas libres en la forma :

$$H_{11} = \sum_{j_1, j_2, JM} (E_{j_1} + E_{j_2}) B_{j_1, j_2, JM}^+ B^{j_1, j_2, JM} \quad (3.7),$$

Se tiene entonces un sistema de osciladores independientes. Veremos ahora que el efecto de introducir la interacción (3.1) es el de acoplar esos osciladores. Mediante una transformación apropiada los desacoplaremos, para encontrar así los fonones apropiados para nuestro problema.

Empezaremos expresando la cantidad  $V_{kq}$  (ec. (3.3)) en segunda cuantización. Como  $V_{kq}$  es un operador de una sola partícula, se tiene :

$$V_{kq} = \sum_{j_1, m_1, j_2, m_2} \langle j_1, m_1 | V_{kq}(r) | j_2, m_2 \rangle b_{j_1, m_1}^+ b^{j_2, m_2}$$

o bien :

$$V_{kq} = \sum_{j_1 j_2} q^k(j_1 j_2) [b_{j_1}^+ b_{j_2}]_{kq} \quad (3.8)$$

donde se define :

$$q^k(j_1 j_2) = -\sqrt{\frac{2j_1+1}{2k+1}} \langle j_1 \| V_k(i) \| j_2 \rangle \quad (3.9)$$

y el elemento de matriz reducido se define de la manera usual <sup>3)</sup> :

$$\langle j_1 m_1 | V_{kq}(i) | j_2 m_2 \rangle = \langle j_2 k m_2 q | j_1 m_1 \rangle \langle j_1 \| V_k(i) \| j_2 \rangle$$

Para nuestra interacción (3.2) tenemos entonces :

$$V = (-)^k \frac{4\pi F^k}{\sqrt{2k+1}} \sum_{\substack{j_1 j_2 \\ j_3 j_4}} q^k(j_1 j_2) q^k(j_3 j_4) [b_{j_1}^+ b_{j_2}]_k [b_{j_3}^+ b_{j_4}]_k \quad (3.10)$$

Expresemos ahora  $b_{j_1 m_1}^+$  ,  $b_{j_2 m_2}$  en términos de los operadores de creación y de aniquilación de cuasipartículas. En el resultado aparecerán términos de los siguientes tipos :

$$H_{40} : \left[ [\beta_{i_1}^+ \beta_{i_2}^+]_{\mathbf{k}} [\beta_{j_3}^+ \beta_{j_4}^+]_{\mathbf{k}} \right]_{00} , \left[ [\beta_{i_1} \beta_{i_2}]_{\mathbf{k}} [\beta_{j_3} \beta_{j_4}]_{\mathbf{k}} \right]_{00} .$$

$$H_{22} : \left[ [\beta_{i_1}^+ \beta_{i_2}^+]_{\mathbf{k}} [\beta_{j_3} \beta_{j_4}]_{\mathbf{k}} \right]_{00} , \text{ con las permutaciones posibles de los operadores } \beta^+ \text{ y } \beta .$$

$$H_{31} : \begin{cases} \left[ [\beta_{i_1}^+ \beta_{i_2}^+]_{\mathbf{k}} [\beta_{j_3}^+ \beta_{j_4}]_{\mathbf{k}} \right]_{00} , \text{ con las permutaciones posibles de } \beta^+, \beta . \\ \left[ [\beta_{i_1}^+ \beta_{i_2}]_{\mathbf{k}} [\beta_{j_3} \beta_{j_4}]_{\mathbf{k}} \right]_{00} , \text{ " " " " " } \beta^+, \beta . \end{cases}$$

Si estamos interesados en extraer de la interacción la parte que da origen a las vibraciones, desechamos  $H_{31}$ , porque no se puede expresar en términos de los operadores de cuasibosón. Por otro lado, si estamos estudiando la interacción k-polar, los estados del problema serán del tipo

$$B_{i_1 i_2 \mathbf{k} q}^+ B_{j_3 j_4 \mathbf{k} q'}^+ \dots |0\rangle \quad (3.11)$$

Ahora bien, un término de  $H_{22}$  como el que se indicó más arriba tendrá una cierta contribución al actuar sobre (3.11). Pero un término de  $H_{22}$  del tipo :

$$\left[ [\beta_{i_1}^+ \beta_{i_2}]_{\mathbf{k}} [\beta_{j_3}^+ \beta_{j_4}]_{\mathbf{k}} \right]_{00} =$$

$$= \sum_K \left\{ (-)^{j_4 - j_u + k - K} W(j_2 j_u j_1 j_3; K k) \left[ [\beta_{j_1}^+ \beta_{j_3}^+]_K [\beta_{j_2} \beta_{j_u}]_K \right]_{00} + \right. \\ \left. + (-)^{k - j_1 - j_2} \delta_{j_2 j_3} \delta_{j_1 j_u} \frac{\sqrt{2k+1}}{2j_1+1} N_{j_1}' \right\} \quad (3.12)$$

contiene osciladores repartidos entre muchos valores de  $K$  y se espera que su efecto sobre un estado del tipo (3.11) sea pequeño; además, si bien  $N_{j_1}'$  (el operador de número de cuasipartículas) se puede expresar en términos de los cuasibosones, vemos que está dividido entre  $2j_1+1$ , que es un número grande; se espera que su efecto sea más pequeño que el de la parte  $\sum_j E_j N_j'$

Al quedarnos sólo con  $H_{40}$  y los términos de  $H_{22}$  con osciladores concentrados en  $k$ , tenemos el siguiente resultado para el hamiltoniano (3.7) más la interacción  $k$ -polar:

$$H = \sum_{\substack{j_1 \leq j_2 \\ JM}} (E_{j_1} + E_{j_2}) B_{j_1 j_2 JM}^+ B^{j_1 j_2 JM} - \\ - (-)^k \frac{4\pi F^k}{\sqrt{2k+1}} \sum_{\substack{j_1 \leq j_2 \\ j_3 \leq j_4}} \bar{q}_+^k(j_1 j_2) \bar{q}_-^k(j_3 j_4) \left[ [B_{j_1 j_2 k}^+ + (-)^k B_{j_1 j_2 k}] [B_{j_3 j_4 k}^+ + (-)^k B_{j_3 j_4 k}] \right]_{00} \quad (3.13),$$

donde

$$\bar{q}_+^k(j_1 j_2) \equiv \frac{q^k(j_1 j_2) (U_{j_1} V_{j_2} + U_{j_2} V_{j_1})}{\sqrt{1 + \delta_{j_1 j_2}}} \quad (3.14),$$

Vemos entonces que el efecto de la interacción consiste en acoplar los diferen

tes cuasibosones de momento angular  $k$ . La forma de desacoplarlos es con el procedimiento que se expuso en el capítulo II. Se buscan operadores del tipo :

$$\left\{ \Gamma_{kq}^+ \equiv \sum_{j_1 \leq j_2} (\gamma_{j_1 j_2} B_{j_1 j_2 kq}^+ + s_{j_1 j_2} B_{j_1 j_2 kq}) \right. \quad (3.15a)$$

$$\left. \Gamma_{kq} \equiv \sum_{j_1 \leq j_2} (\gamma_{j_1 j_2} B_{j_1 j_2 kq} + s_{j_1 j_2} B_{j_1 j_2 kq}^{(-)}) \right\} \quad (3.15b),$$

con la propiedad :

$$[H, \Gamma_{kq}^+] = \omega_k \Gamma_{kq}^+ \quad (3.16).$$

Estos nuevos operadores son los que diagonalizan el hamiltoniano, el cual va a describir entonces un sistema de nuevos cuasibosones libres, con energía  $\omega_k$ . El nuevo vacío del problema  $|\tilde{0}\rangle$  tendrá entonces la propiedad :

$$\Gamma_{kq} |\tilde{0}\rangle = 0 \quad (3.17)$$

y el estado  $\Gamma_{kq}^+ |\tilde{0}\rangle$  tendrá una energía  $\omega_k$  respecto al estado base  $|\tilde{0}\rangle$ . El estado  $\Gamma_{kq}^+ \Gamma_{kq}^+ |\tilde{0}\rangle$  tendrá una energía  $2\omega_k$  etcétera.

Al imponer la condición (3.16) se llega a un sistema de 2 ecuaciones para los coeficientes  $\gamma_{j_1 j_2}$  y  $s_{j_1 j_2}$ , los cuales son aun más fácilmente eliminables que en el caso expuesto en el capítulo II. Después de la eliminación se llega a la siguiente ecuación de eigenvalores :

$$\sum_{i \leq j} \frac{\bar{q}^2(ij)(E_i + E_j)}{(E_i + E_j)^2 - \omega_k^2} = \frac{2k+1}{16\pi F^k} \quad (3.18)$$

El aspecto de la gráfica de ( 3.18 ) se muestra en la siguiente figura :

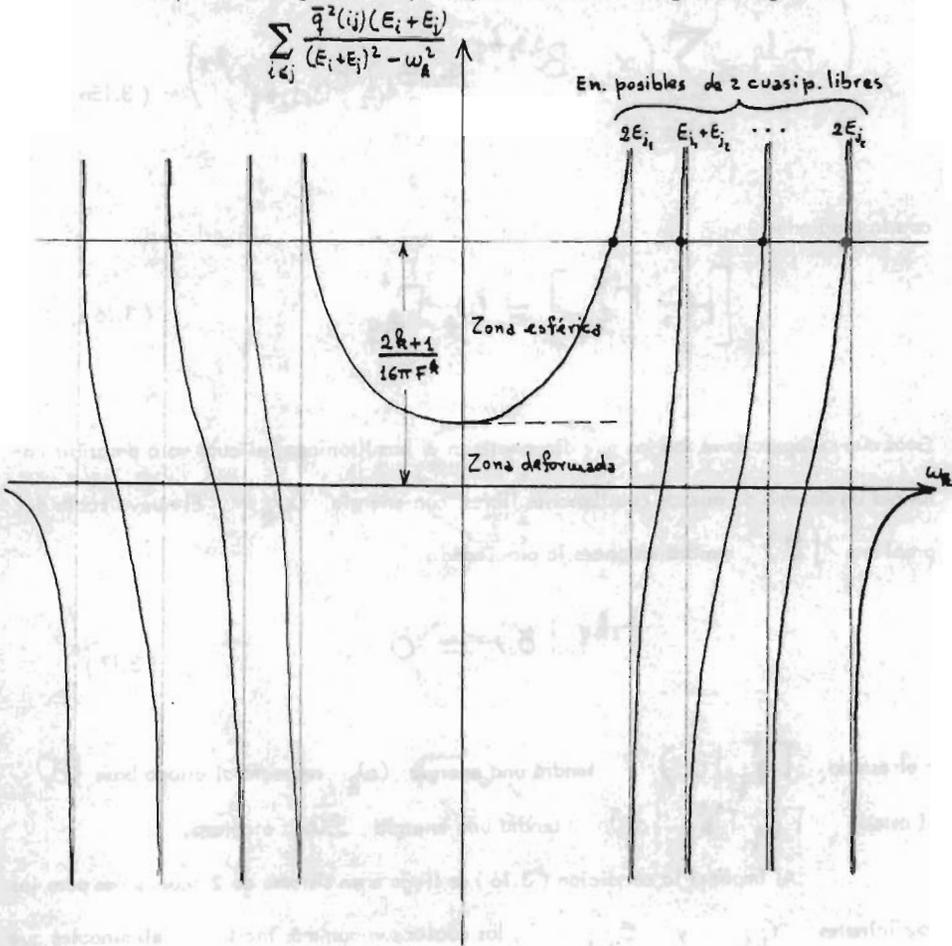


Fig. 11

Las soluciones  $\omega_k$  se indican con pequeños círculos en la figura. Se observa que si  $F^k$  es muy pequeña, las soluciones tienden a las energías de 2 cuasipartículas libres. Si la intensidad  $F^k$  de la interacción aumenta, el primer nivel excitado baja; estamos en la zona en que el núcleo es esférico; si  $F^k$  aumenta más, llegamos a un punto en el que el primer nivel excitado ha alcanzado el estado base; en esta zona la forma esférica se vuelve inestable; para  $F^k$  todavía mayor,  $\omega_k$  es imaginaria, lo que significa que estamos en la zona de deformación estable del núcleo.

Es de particular interés el caso totalmente degenerado, porque en ese caso se puede escribir explícitamente la solución de (3.18) y en ella se puede ver claramente la dependencia del número de partículas. Utilizando los resultados del cap. II para el caso de generado, se tiene :

$$[\bar{q}^k(j_1 j_2)]^2 = \frac{[q^k(j_1 j_2)]^2}{1 + \delta_{j_1 j_2}} \cdot \left[ 4 \frac{n}{2\Omega} \left( 1 - \frac{n}{2\Omega} \right) \right]$$

$$E_j = \frac{G\Omega}{2}, \quad \forall j$$

Se tiene entonces :

$$\omega_k = G\Omega \sqrt{1 - \frac{n(2\Omega - n)}{G\Omega^3} \cdot \frac{4\pi F^k}{2k+1} \sum_{ij} [q^k(i,j)]^2} \quad (3.19)$$

En esta ecuación se muestra explícitamente la dependencia de la energía de excitación con el número  $n$  de partículas. Vemos que al principio de la capa,  $\omega_k$  está muy cerca de la energía  $G\Omega$  de dos cuasipartículas libres. La energía de excitación

disminuye al introducir más partículas; al acercarnos al valor cero del radicando de ( 3.19 ), la forma esférica se hace inestable y más allá de este punto el núcleo tiene deformación estable. Las vibraciones colectivas ocurren entonces para valores de  $n$  y de la intensidad de la interacción que hacen positivo el radicando ( 3.19 ).

$$\left[ \left( \frac{\pi}{2\Omega} - 1 \right) \frac{1}{2\Omega} + \frac{1}{2\Omega} \right] \frac{[P(\lambda)]^2}{\lambda^2 + 2} = [P(\lambda)]^2$$

$$\frac{1}{2\Omega} - 1 = \frac{2\Omega}{1} = 2\Omega$$

$$\omega = 2\Omega \sqrt{1 - \frac{2(2\Omega - 1)}{2\Omega}} \quad (3.19)$$

En esta ecuación se muestra explícitamente la dependencia de la energía de las partículas. Véase que el término de la izquierda es el número de partículas. La energía de las partículas es  $2\Omega$ .

## CAPITULO IV

### ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE UNA INTERACCION ARBITRARIA ( PARTICULAS IDENTICAS )

#### 1.- La aproximación de bosón.

En la sección 2 del capítulo II vimos que la aproximación de bosón da buenos resultados para un sistema con un número par de partículas moviéndose en un potencial común con niveles no degenerados e interaccionando a través de una fuerza de apareamiento. La restricción básica del método es que el número de partículas debe ser par y muy pequeño comparado con la degeneración de los estados de una sola partícula que se consideren.

Vamos a considerar brevemente el caso de una interacción arbitraria, para ver en qué casos podemos aplicar la aproximación de bosón.

Consideremos entonces un conjunto de niveles clasificados en el esquema  $jj$  como siempre y consideremos, como hamiltoniano del problema, el siguiente :

$$H = \sum_j \epsilon_j N_j + V \quad (4.1),$$

donde  $V$  es una interacción central arbitraria entre pares de partículas, del tipo

$V = \sum_{i,j} V_{ij}$  . Vamos a concentrarnos por el momento sólo en esta interacción. Su

expresión en 2ª cuantización es :

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j_1 m_1 \\ j_2 m_2}} \sum_{\substack{j_3 m_3 \\ j_4 m_4}} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | V_{ab} | j_3 m_3, j_4 m_4 \rangle b_{j_1 m_1}^+ b_{j_2 m_2}^+ b_{j_3 m_3} b_{j_4 m_4} \quad (4.2),$$

donde  $ab$  es una pareja arbitraria de partículas.

Usando los desarrollos siguientes :

$$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | = \sum_{JM} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle \langle j_1 j_2 JM |$$

$$| j_3 m_3, j_4 m_4 \rangle = \sum_{J'M'} \langle j_3 j_4 m_3 m_4 | J'M' \rangle | j_3 j_4 J'M' \rangle$$

y el hecho de que  $V$  es una interacción central, podemos escribir :

$$\mathcal{V} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{j_1 j_2 J \\ j_3 j_4 J'}} \langle j_1 j_2 J | V_{ab} | j_3 j_4 J' \rangle [b_{j_1}^+ b_{j_2}^+]_{JM} [b_{j_3} b_{j_4}]_{J'M} \quad (4.3).$$

O sea, hemos desarrollado  $\mathcal{V}$  en fuerzas de apareamiento generalizadas <sup>5)</sup>.

Usando ahora las definiciones de  $A_{j_1 j_2 JM}^+$  y de  $A_{j_3 j_4 JM}$ , dadas en las ecs. ( 2.21 ), tenemos :

$$\mathcal{V} = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \sum_{JM} \sqrt{\frac{1 + \delta_{j_1 j_2}}{2}} \langle j_1 j_2 J | V_{ab} | j_3 j_4 J \rangle \sqrt{\frac{1 + \delta_{j_3 j_4}}{2}} A_{j_1 j_2 JM}^+ A_{j_3 j_4 JM} \quad (4.4).$$

Nótese que la primera suma en (4.4) se efectúa sobre todos los valores posibles de  $j_1, j_2, j_3, j_4$ . Si quisiéramos restringir la suma sólo a valores crecientes de  $j_1, j_2$  y de  $j_3, j_4$ , el resultado sería el siguiente :

$$U = \sum_{\substack{j_1 < j_2 \\ j_3 < j_4 \\ JM}} V_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J A_{j_1 j_2 JM}^\dagger A_{j_3 j_4 JM} \quad (4.5),$$

donde las cantidades  $V_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J$  se definen como :

$$V_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J \equiv \langle j_1 j_2 J | V_{ab} | j_3 j_4 J \rangle_A \quad (4.6),$$

con el bra y el ket antisimetrizados. O sea, (4.6) son los elementos de matriz de nuestra interacción, para el problema físico de 2 partículas; físico, porque los estados que hay que usar para construir la matriz son los estados ya antisimetrizados. La matriz  $\|V\| \equiv \|V_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J\|$  tiene renglones numerados por  $j_1 j_2 J$  y columnas numeradas por  $j_3 j_4 J$ ; además esta matriz está rota en bloques, por cada valor de  $J$ . El aspecto de la matriz es el siguiente :

$$\|V\| = \begin{array}{c} \begin{array}{c} j_3 j_4 J \\ j_1 j_2 J \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \begin{array}{|c|} \hline J_1 \\ \hline \end{array} & \\ \hline & & \begin{array}{|c|} \hline J_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline & & \dots \\ \hline & & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad (4.7)$$

Supongamos que diagonalizamos cada bloque de la matriz (4.7) y que designamos con  $V_{qJ}$  al  $q$ -ésimo eigenvalor del bloque  $J$  y con  $a_{j_1 j_2 J}^q$  al elemento  $(j_1 j_2 J)$  del eigenvector correspondiente. Supondremos que nuestros eigenvectores están ortonormalizados. O sea :

$$\sum_{j_3 j_4} V_{j_3 j_4 J}^q a_{j_1 j_2 J}^q = V_{qJ} a_{j_1 j_2 J}^q \quad (4.8).$$

Definimos ahora, como se hizo en (2.36), los operadores  $\bar{A}_{qJM}^+$  y  $\bar{A}_{qJM}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{j_1 j_2 JM}^+ = \sum_q a_{j_1 j_2 J}^q \bar{A}_{qJM}^+ \end{array} \right. \quad (4.9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{j_3 j_4 JM} = \sum_q a_{j_3 j_4 J}^q \bar{A}_{qJM} \end{array} \right. \quad (4.9b).$$

Substituyendo estas definiciones en la ec. (4.5) obtenemos :

$$U = \sum_{qJM} V_{qJ} \bar{A}_{qJM}^+ \bar{A}_{qJM} \quad (4.10).$$

Es importante enfatizar el hecho de que (4.10) es una expresión exacta : es simplemente otra forma de escribir la expresión en 2ª cuantización (4.2) de nuestra interacción entre pares de partículas.

Supongamos ahora que tenemos un problema en el que todos nuestros niveles  $j$

están degenerados. Entonces (4.10) es, salvo una constante aditiva, el hamiltoniano de nuestro problema. En estas condiciones (4.10) sugiere inmediatamente hacer la aproximación de bosón, para tratar a la cantidad  $\sum_M \bar{A}_{qJM}^+ \bar{A}^{qJM}$  como el operador de número de bosones en el nivel  $(qJ)$ . Con esto podríamos resolver el problema de un número pequeño de partículas, para una interacción arbitraria, conociendo simplemente la solución del problema para el caso de 2 partículas, tal como se hizo para la fuerza de apareamiento. Vamos a analizar esta posibilidad. Para ello, vamos a considerar un caso sumamente sencillo. Consideremos el problema de  $n$  partículas situadas en una sola capa  $j$ , interaccionando a través de una interacción de alcance infinito y de intensidad  $V_0$ . Inmediatamente podemos escribir:

$$V = \sum_{i < j} V_{ij} = \sum_{i < j} V_0 \quad (4.11)$$

$$V = V_0 \frac{n(n-1)}{2} \quad (4.12)$$

Por otro lado, la expresión exacta en 2<sup>a</sup> cuantización de esta interacción es:

$$\mathcal{V} = V_0 \sum_{JM} A_{jJM}^+ A^{jJM} \quad (4.13)$$

Si en este momento convenimos en tratar solamente el problema de  $n \ll \Omega$ , hacemos la aproximación de bosón y el operador  $\sum_{JM} A_{jJM}^+ A^{jJM}$  es el operador de número  $\mathcal{N}$  de nuestros bosones; este operador  $\mathcal{N}$ , al actuar sobre una función de onda de  $n/2$  bosones, nos da, como eigenvalor,  $n/2$ . Entonces, si designamos con  $V'$  al eigenvalor de  $\mathcal{V}$ , tenemos:

$$V' = V_0 \cdot \frac{n}{2} \quad (4.14)$$

Notamos que (4.12) y (4.14) son totalmente diferentes: el resultado exacto (4.12) nos dice que la energía tiene 2 términos, uno de los cuales es proporcional a  $n^2$ , independientemente de la capacidad  $2\Omega$  de la capa. En cambio la aproximación de bosón (4.14) predice una energía proporcional a  $n$ . Vemos entonces que no basta que el número de partículas sea pequeño para hacer la aproximación de bosón; para el caso particular de los operadores  $A_{jj'00}$   $A_{jj'00}^+$ , el conmutador vale:

$$[A_{jj'00}, A_{jj'00}^+] = \delta_{jj'} \left(1 - \frac{N_j}{2}\right)$$

y basta despreciar  $N_j/2$  para tener la aproximación de bosón. Para una interacción de apareamiento estos son precisamente los operadores que intervienen. Para una interacción general entran en juego todos los operadores  $A_{j_1 j_2 JM}^+$  y para hacer la aproximación de bosón hay que despreciar los términos que aparecen en el corchete de la ec. (2.24), de los cuales, los que tienen  $I \neq 0$  no corresponden al operador de número. Acabamos de ver que para una interacción de largo alcance no está justificado despreciarlos. Si analizamos la aproximación de bosón, es fácil ver la razón física por la cual funciona para una interacción de corto alcance, pero no para una de largo alcance. En efecto, la aproximación de bosón considera que hay correlaciones sólo entre las 2 partículas que forman cada bosón, pero no entre los diferentes bosones; en efecto, en esta aproximación la expresión (4.10) se interpreta como el hamiltoniano de un sistema de bosones independientes, moviéndose en un potencial común. Desde luego esto no puede ser válido para una interacción de largo alcance,

que toma en cuenta la interacción entre todas las partículas. Entonces la aproximación de bosón no se puede usar para describir propiedades colectivas. En cambio una interacción de corto alcance es efectiva sólo entre 2 partículas muy cercanas y para ella es de esperarse - que la aproximación de bosón sea razonable : de hecho, esto se ha demostrado para la fuerza de apareamiento, en la sección 2 del capítulo II.

Entonces en la expresión ( 4.10 ) podemos hacer la aproximación de bosón si nuestra interacción es de alcance suficientemente pequeña y el número de partículas del sistema también es pequeño comparado con la degeneración de los niveles. Si aceptamos esto, podemos aún tratar el término  $\sum_j \epsilon_j N_j$  en nuestro hamiltoniano, de la misma forma que se vió en la ec. ( 2.29 ) :

$$\sum_j \epsilon_j N_j \longrightarrow \sum_{i_1, i_2, J, M} (\epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2}) A_{i_1, i_2, J, M}^\dagger A_{i_1, i_2, J, M}$$

Dentro de la aproximación de bosón podemos entonces escribir el hamiltoniano ( 4.1 ) de la siguiente manera :

$$H = \sum_{\substack{i_1, i_2, i_3, i_4 \\ J, M}} H_{i_1, i_2, J}^{i_3, i_4} A_{i_3, i_4, J, M}^\dagger A_{i_1, i_2, J, M} \quad (4.15),$$

donde

$$H_{i_3, i_4, J}^{i_1, i_2} \equiv (\epsilon_{i_1} + \epsilon_{i_2}) \delta_{i_3, i_1} \delta_{i_4, i_2} + V_{i_3, i_4, J}^{i_1, i_2} \quad (4.16)$$

y  $V_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J$  ya se ha definido en la ec. (4.6). En este caso,  $H_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J$  son los elementos de matriz de nuestra interacción, para el problema físico de 2 partículas, moviéndose en un pozo común con niveles  $\epsilon_j$  no degenerados. De nuevo podemos suponer que hemos diagonalizado esta matriz y que  $E_{qJ}$  es el q-ésimo eigenvalor del bloque  $J$ ; en términos del eigenvector correspondiente definimos los operadores  $\bar{A}_{qJM}^+$  y  $\bar{A}^{qJM}$ , tal como se hizo en las ec. (4.9). Podemos entonces escribir el hamiltoniano como :

$$H = \sum_{qJM} E_{qJ} \bar{A}_{qJM}^+ \bar{A}^{qJM} \quad (4.17).$$

Esta expresión se interpreta entonces, dentro de la aproximación de bosón, como el hamiltoniano de un sistema de bosones independientes, moviéndose en un potencial común, con niveles de energía de un solo bosón dados por  $E_{qJ}$ . De nuevo enfatizamos el hecho de que (4.17) es válida si el número de partículas es pequeño y si la interacción  $V$  tiene un alcance suficientemente corto. Recordemos que la aproximación de cuasibosón ha sido utilizada con éxito para describir movimientos colectivos en los --- núcleos  $(1), (2), (3), (2)$ , como se expresó en el cap. III. El formalismo es el mismo que el que se acaba de exponer para la aproximación de bosón; la única diferencia es que se trabaja con cuasipartículas en vez de partículas. La razón del éxito es que se consideran estados con 2 cuasipartículas como máximo, lo que equivale a considerar 1 solo cuasibosón, y en este caso está justificado considerar un hamiltoniano de cuasibosones libres.

## 2.- El método de las cuasipartículas.

En las secciones 3 y 4 del capítulo II vimos cómo se puede tratar una interacción de apareamiento mediante el método de las cuasipartículas y en el capítulo III vimos las correlaciones entre las cuasipartículas a las que da lugar una interacción k-polar. Veremos en esta sección cómo se puede tratar una interacción arbitraria con el método de las cuasipartículas libres.

Seguiremos considerando el caso de los núcleos esféricos y supondremos, como siempre, que los estados de una sola partícula están clasificados en el esquema  $jj$ . Por brevedad usaremos la siguiente notación :

$$\alpha \equiv (n l j m) \quad (\text{ todos los números cuánticos de los estados de una sola partícula })$$

$$\bar{\alpha} \equiv (n l j -m) \quad (\text{ lo mismo que } \alpha, \text{ excepto por el signo de } m )$$

$$a \equiv (n l j) \quad (4.18)$$

$$S_{\alpha} \equiv (-)^{j-m} = -S_{\bar{\alpha}}$$

Supongamos entonces que las partículas del sistema se mueven en un pozo común con niveles de energía de una sola partícula dados por  $\epsilon_a$  y están sujetos a una interacción arbitraria entre pares del tipo :

$$V = \sum_{i,j} V(i,j) \quad (4.19)$$

El hamiltoniano del sistema es entonces :

$$H' = \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha} - \lambda) b_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} V_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} b_{\delta} b_{\gamma} \quad (4.20),$$

donde ya se ha incluido el potencial químico  $\lambda$  . Como siempre :

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \int \psi_{\alpha}^{*(1)} \psi_{\beta}^{*(2)} V(12) \psi_{\gamma}^{(1)} \psi_{\delta}^{(2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &\equiv \langle \alpha\beta | V(12) | \gamma\delta \rangle \end{aligned} \quad (4.21).$$

Veremos en los desarrollos algebraicos que siguen, en vez de usar  $V(12)$  en la expresión (4.21), es más cómodo trabajar con un operador antisimetrizado  $\mathcal{V}(12)$ , que definimos así :

$$\mathcal{V}(12) \equiv \frac{1 - P_{12}^{\dagger}}{\sqrt{2}} V(12) \frac{1 - P_{12}}{\sqrt{2}} \quad (4.21),$$

donde  $P_{12}$  es el operador que intercambia las partículas 1 y 2. La razón de este cambio es que las cantidades :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \int \psi_{\alpha}^{*(1)} \psi_{\beta}^{*(2)} \mathcal{V}(12) \psi_{\gamma}^{(1)} \psi_{\delta}^{(2)} d\tau_1 d\tau_2 \\ &\equiv \langle \alpha\beta | \mathcal{V}(12) | \gamma\delta \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

obedecen ahora las siguientes relaciones :

$$\mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\mathcal{V}_{\beta\alpha\gamma\delta} = -\mathcal{V}_{\alpha\beta\delta\gamma} = \mathcal{V}_{\beta\alpha\delta\gamma} \quad (4.23).$$

En términos de estas nuevas cantidades  $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$  podemos escribir el hamiltoniano  $H'$  ( ec. ( 4.20 ) ) de la siguiente manera :

$$H' = \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha} - \lambda) b_{\alpha}^{\dagger} b^{\alpha} + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} U_{\alpha\beta\gamma\delta} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} b^{\delta} b^{\gamma} \quad (4.24).$$

Introducimos ahora la misma transformación de Bogoliubov que ya teníamos en el capítulo II y la escribimos con la notación nueva del presente capítulo, para los diferentes índices :

$$\begin{cases} b^{\alpha} = U_{\alpha} \beta^{\alpha} + s_{\alpha} V_{\alpha} \beta_{\bar{\alpha}}^{\dagger} & (4.25a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_{\alpha}^{\dagger} = U_{\alpha} \beta_{\alpha}^{\dagger} + s_{\alpha} V_{\alpha} \beta^{\bar{\alpha}} & (4.25b) \end{cases}$$

El vacío de las cuasipartículas es el mismo que se dió en la ec. ( 2.71 ).

Para expresar el hamiltoniano  $H'$  ( ec. ( 4.24 ) ) en términos de los operadores de creación y de aniquilación de cuasipartículas podemos substituir directamente -- ( 4.25 ) en ( 4.24 ) y efectuar las conmutaciones necesarias para poner los términos en orden normal. Sin embargo es más rápido y elegante usar un teorema de la teoría del campo, el teorema de Dyson ( ref. 1, pág. 440 ) :

$$\begin{aligned} b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} b^{\delta} b^{\gamma} &= \\ &= \langle b_{\alpha}^{\dagger} b^{\gamma} \rangle \langle b_{\beta}^{\dagger} b^{\delta} \rangle - \langle b_{\alpha}^{\dagger} b^{\delta} \rangle \langle b_{\beta}^{\dagger} b^{\gamma} \rangle + \langle b_{\alpha}^{\dagger} b_{\beta}^{\dagger} \rangle \langle b^{\delta} b^{\gamma} \rangle + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + :b_{\alpha}^{+} b^{\gamma}: \langle b_{\beta}^{+} b^{\delta} \rangle + \langle b_{\alpha}^{+} b^{\gamma} \rangle :b_{\beta}^{+} b^{\delta}: - :b_{\alpha}^{+} b^{\delta}: \langle b_{\beta}^{+} b^{\gamma} \rangle - \\
 & - \langle b_{\alpha}^{+} b^{\delta} \rangle :b_{\beta}^{+} b^{\gamma}: + :b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+}: \langle b^{\delta} b^{\gamma} \rangle + \langle b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} \rangle :b^{\delta} b^{\gamma}: + \\
 & + :b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} b^{\delta} b^{\gamma}:
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

Con la notación  $:A:$  indicamos que al substituir en el operador  $A$  los operadores  $\beta^{+}$ ,  $\beta$ , éstos deben quedar en orden normal; con  $\langle B \rangle$  indicamos el valor esperado del operador  $B$  respecto al vacío de las cuasipartículas.

Como ejemplo tenemos :

$$\begin{aligned}
 :b_{\alpha}^{+} b^{\gamma}: & = U_{\alpha} U_{\gamma} \beta_{\alpha}^{+} \beta^{\gamma} - s_{\alpha} s_{\gamma} V_{\alpha} V_{\gamma} \beta_{\gamma}^{+} \beta^{\bar{\alpha}} + \\
 & + s_{\gamma} U_{\alpha} V_{\gamma} \beta_{\alpha}^{+} \beta_{\gamma}^{+} + s_{\alpha} V_{\alpha} U_{\gamma} \beta^{\bar{\alpha}} \beta^{\gamma}
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle b_{\alpha}^{+} b^{\beta} \rangle & = V_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^{\alpha} & (4.28a)
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle b_{\alpha}^{+} b_{\beta}^{+} \rangle & = s_{\alpha} U_{\alpha} V_{\alpha} \delta_{\beta}^{\bar{\alpha}} & (4.28b)
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \langle b^{\alpha} b^{\beta} \rangle & = -s_{\alpha} U_{\alpha} V_{\alpha} \delta_{\beta}^{\alpha} & (4.28c)
 \end{aligned} \right.$$

Usando el teorema (4.26),  $H'$  se puede escribir como la suma de los 4

términos siguientes :

$$H' = H_{00} + H_{11} + H_{20} + H_{res}. \quad (4.29),$$

donde se ha usado la notación del capítulo II para los primeros 3 términos, en el sentido de que  $H_{00}$  es una constante,  $H_{11}$  contiene términos del tipo  $\beta^+\beta$  y  $H_{20}$  contiene términos del tipo  $\beta^+\beta^+$  y  $\beta\beta$ ;  $H_{res}$  contiene partes del tipo  $H_{31}(\beta^+\beta\beta\beta, \beta^+\beta^+\beta^+\beta)$ ,  $H_{22}(\beta^+\beta^+\beta\beta)$  y  $H_{40}(\beta^+\beta^+\beta^+\beta^+, \beta\beta\beta\beta)$ .

Si queremos empezar con un modelo de cuasipartículas libres no tomamos en cuenta  $H_{res}$ , de acuerdo con la filosofía expuesta en el capítulo II. Apuntaremos solamente que tiene 16 términos provenientes del siguiente producto normal :

$$H_{res} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} : b_{\alpha}^+ b_{\beta}^+ b_{\delta} b_{\gamma} : \quad (4.30)$$

La constante  $H_{00}$  se puede calcular inmediatamente usando las relaciones (4.28). El resultado es :

$$H_{00} = \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha} - \lambda) V_{\alpha}^2 + \frac{1}{4} \left\{ \sum_{\alpha\beta} \mathcal{V}_{\alpha\beta\alpha\beta} V_{\alpha}^2 V_{\beta}^2 - \sum_{\alpha\beta} \mathcal{V}_{\alpha\beta\beta\alpha} V_{\alpha}^2 V_{\beta}^2 + \sum_{\alpha\gamma} s_{\alpha} s_{\gamma} U_{\alpha} V_{\alpha} U_{\gamma} V_{\gamma} \mathcal{V}_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}} \right\}$$

Vemos aquí la utilidad de haber usado el operador antisimetrizado (4.21), porque ahora se puede hacer uso de (4.23) para escribir :

$$H_{00} = \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha} - \lambda) V_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \mathcal{U}_{\alpha\beta\alpha\beta} V_{\alpha}^2 V_{\beta}^2 + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\gamma} S_{\alpha} S_{\gamma} U_{\alpha} V_{\alpha} U_{\gamma} V_{\gamma} \mathcal{U}_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}}$$

(4.31)

Vamos a definir las siguientes cantidades :

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{\alpha} &\equiv \sum_{\beta} \mathcal{U}_{\alpha\beta\alpha\beta} V_{\beta}^2 \end{aligned} \right. \quad (4.32a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\alpha} &\equiv -\frac{1}{2} S_{\alpha} \sum_{\gamma} \mathcal{U}_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}} S_{\gamma} U_{\gamma} V_{\gamma} \end{aligned} \right. \quad (4.32b),$$

donde  $\Gamma_{\alpha}$  juega el papel del potencial autoconsistente de Hartree - Fock y  $\Delta_{\alpha}$  representa el efecto de la parte de la interacción que corresponde a una fuerza de apareamiento. En términos de  $\Gamma_{\alpha}$  y  $\Delta_{\alpha}$  podemos escribir  $H_{00}$  en la forma :

$$H_{00} = \sum_{\alpha} (\epsilon_{\alpha} + \frac{1}{2} \Gamma_{\alpha} - \lambda) V_{\alpha}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Delta_{\alpha} U_{\alpha} V_{\alpha} \quad (4.33)$$

Nótese que en las definiciones (4.32) hemos escrito  $\Gamma_{\alpha}$  y  $\Delta_{\alpha}$  en vez de  $\Gamma_{\alpha}$  y  $\Delta_{\alpha}$ , ya que se puede demostrar que esas cantidades no dependen de  $m_{\alpha}$ . En efecto :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha} &\equiv \sum_{\beta} \mathcal{U}_{\alpha\beta\alpha\beta} V_{\beta}^2 = \sum_{\beta} \left( \sum_{m_{\beta}} \mathcal{U}_{\alpha\beta\alpha\beta} \right) V_{\beta}^2 \\ &= \sum_{m_{\beta}} \mathcal{U}_{\alpha\beta\alpha\beta} = \sum_{m_{\beta}} \langle \alpha_{\beta} | \mathcal{U}(12) | \alpha_{\beta} \rangle = \\ &= \sum_{m_{\beta}} \langle (n\ell jm)_{\alpha} (n\ell jm)_{\beta} | \mathcal{U}(12) | (n\ell jm)_{\alpha} (n\ell jm)_{\beta} \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m_\beta} \sum_{JM} \langle (nlj)_a (nlj)_\beta J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_a (nlj)_\beta J \rangle \langle j_a j_b m_\alpha m_\beta | JM \rangle \langle j_a j_b m_\alpha m_\beta | JM \rangle = \\
 &= \frac{1}{2j_a+1} \sum_J (2J+1) \langle (nlj)_a (nlj)_\beta J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_a (nlj)_\beta J \rangle \\
 \therefore \Gamma_a &= \frac{1}{2j_a+1} \sum_{b,J} (2J+1) \langle (nlj)_a (nlj)_\beta J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_a (nlj)_\beta J \rangle. \quad (4.34a)
 \end{aligned}$$

Vemos que, efectivamente,  $\Gamma_a$  no depende de la proyección  $m_\alpha$ . Análogamente tenemos para  $\Delta_a$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta_a &\equiv -\frac{1}{2} S_\alpha \sum_\gamma \mathcal{V}_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}} \mathcal{S}_\gamma U_c V_c = -\frac{1}{2} S_\alpha \sum_c \left( \sum_{m_\gamma} \mathcal{S}_\gamma \mathcal{V}_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}} \right) U_c V_c \\
 \sum_{m_\gamma} \mathcal{S}_\gamma \mathcal{V}_{\alpha\bar{\alpha}\gamma\bar{\gamma}} &= \sum_{m_\gamma} \mathcal{S}_\gamma \langle (nlj)_a m_\alpha, (nlj)_a -m_\alpha | \mathcal{V}(12) | (nlj)_c m_\gamma, (nlj)_c -m_\gamma \rangle = \\
 &= \sum_{m_\gamma JM} \mathcal{S}_\gamma \langle (nlj)_a (nlj)_a J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_c (nlj)_c J \rangle \langle j_a j_a m_\alpha -m_\alpha | JM \rangle \langle j_c j_c m_\gamma -m_\gamma | JM \rangle = \\
 &= S_\alpha \sqrt{\frac{2j_c+1}{2j_a+1}} \langle (nlj)_a (nlj)_a J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_c (nlj)_c J \rangle \\
 \therefore \Delta_a &= -\frac{1}{2\sqrt{2j_a+1}} \sum_c \sqrt{2j_c+1} \langle (nlj)_a (nlj)_a J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_c (nlj)_c J \rangle U_c V_c
 \end{aligned} \quad (4.34b)$$

y nuevamente  $\Delta_a$  no depende de la proyección  $m_\alpha$ .

Por lo que ahora concierne los términos  $H_{11}$  y  $H_{20}$ , no los escribiremos explícitamente. Sin embargo daremos algunos detalles para ilustrar un punto muy -

importante. Para ese fin consideremos, como ejemplo, el término de  $H_{44}$  que proviene de  $b_\alpha^+ b_\beta^+$ :  $\langle b_\beta^+ b_\alpha^+ \rangle$  de la expresión (4.26); o sea:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma} V_b^2 (U_a U_c \beta_\alpha^+ \beta_\gamma^+ - s_\alpha s_\gamma V_a V_c \beta_\gamma^+ \beta_\alpha^+) \quad (4.35)$$

$$= \sum_{\alpha\gamma} \sum_b \left( \sum_{m_\beta} \mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma} \right) V_b^2 (U_a U_c \beta_\alpha^+ \beta_\gamma^+ - s_\alpha s_\gamma V_a V_c \beta_\gamma^+ \beta_\alpha^+)$$

$$\sum_{m_\beta} \mathcal{V}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{m_\beta} \langle (nljm)_\alpha (nljm)_\beta | \mathcal{V}(12) | (nljm)_\gamma (nljm)_\beta \rangle =$$

$$= \sum_{m_\beta} \sum_{JM} \langle (nlj)_a (nlj)_b J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_c (nlj)_b J \rangle \langle j_a j_b m_\alpha m_\beta | JM \rangle \langle j_c j_b m_\gamma m_\beta | JM \rangle$$

$$= \left[ \sum_J \frac{2J+1}{2j_a+1} \langle (nlj)_a (nlj)_b J | \mathcal{V}(12) | (nlj)_c (nlj)_b J \rangle \right] \delta_{j_c j_a} \delta_{m_\gamma m_\alpha} \quad (4.36)$$

Debido a la presencia de estas deltas, vemos que en la suma sobre  $\gamma$  de (4.35) permanece una suma sobre  $(nl)_\gamma$  y la parte  $(jm)_\gamma$  sólo toma el valor  $(jm)_\alpha$ ; si bastaran  $(jm)$  para definir totalmente los estados de una sola partícula, entonces los índices  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  serían abreviaturas de  $(jm)_\alpha, (jm)_\beta, (jm)_\gamma, \dots$ ; si esto fuera cierto, las deltas de (4.36) implicarían  $\delta_{\gamma\alpha}$  y podríamos simplificar inmediatamente la expresión (4.35); como se ha mencionado, ése no es el caso en nuestro problema y seguimos teniendo una suma sobre  $(nl)_\gamma$ . Sin embargo, en un cálculo práctico con el modelo de capas para núcleos esféricos, podemos suponer que nos restringimos a una sola capa completa, en cuyo caso  $(jm)$  bastan para clasificar completamente los niveles de una sola partícula (3), (31).

Esta suposición no es válida para núcleos deformados, porque para el cálculo de la deformación la mezcla de las capas completas es muy importante.

Si nos interesa tratar los núcleos esféricos, entonces, bajo la aproximación mencionada, (4.35) se convierte en :

$$\sum_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}^2 V_{\alpha\beta}^2 (U_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^+ \beta^{\alpha} - V_{\alpha}^2 \beta_{\alpha}^+ \beta^{\bar{\alpha}}) \quad (4.37).$$

Para escribir la expresión explícita de  $H_{11}$  y  $H_{20}$  usaremos la simplificación mencionada y además haremos uso de la invariancia de la interacción frente a inversión en el tiempo, que implica :

$$U_{\alpha\beta\gamma\delta} = S_{\alpha} S_{\beta} S_{\gamma} S_{\delta} U_{\bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (4.37).$$

Se llega finalmente a los resultados :

$$H_{11} = \sum_{\alpha} [(U_{\alpha}^2 - V_{\alpha}^2) \eta_{\alpha} + 2 U_{\alpha} V_{\alpha} \Delta_{\alpha}] \beta_{\alpha}^+ \beta^{\alpha} \quad (4.38),$$

$$H_{20} = \sum_{\alpha} S_{\alpha} [U_{\alpha} V_{\alpha} \eta_{\alpha} - \frac{1}{2} (U_{\alpha}^2 - V_{\alpha}^2) \Delta_{\alpha}] (\beta_{\alpha}^+ \beta_{\bar{\alpha}}^+ + \beta_{\bar{\alpha}} \beta_{\alpha}) \quad (4.39),$$

donde se ha usado la notación :

$$\eta_a \equiv \epsilon_a + \Gamma_a - \lambda \quad (4.40).$$

Vemos que en las fórmulas (4.38) y (4.39)  $\eta_a$  es la cantidad que juega el papel de la energía de los estados de una sola partícula; en (4.40) se ve claramente que  $\Gamma_a$  es el potencial autoconsistente proveniente de la interacción. Vemos entonces de (4.38) que en la energía de las cuasipartículas libres se está tomando en cuenta a través de  $\Gamma_a$  la contribución de la interacción arbitraria al campo autoconsistente y, a través de  $\Delta_a$ , la contribución de nuestra interacción al apareamiento.

En este momento se sigue el mismo proceso que se explicó en el capítulo II y se pide que  $H_{20} \equiv 0$ ; esto impone una condición sobre los coeficientes  $U_a$  y  $V_a$ , que substituida en (4.38) nos permite escribir finalmente el término de cuasipartículas libres en la forma:

$$\begin{aligned} H_{11} &= \sum_a E_a \beta_a^+ \beta_a \\ E_a &= \sqrt{\eta_a^2 + \Delta_a^2} \end{aligned} \quad (4.41).$$

Finalmente, al pedir que el valor esperado del operador de número en el estado base sea  $n$ , se tiene:

$$\sum_a (2j_a + 1) V_a^2 = n \quad (4.42).$$

En la sección 3 del capítulo II vimos la solución del problema de la fuerza de apareamiento usando la aproximación de las cuasipartículas libres; en la sección 4 mejoramos la solución mediante la aproximación de cuasibosón.

Ahora estamos estudiando una interacción arbitraria y estamos en la etapa de las cuasipartículas libres. También en este caso se puede mejorar la solución usando la aproximación de cuasibosón, para tomar en cuenta las correlaciones entre las cuasipartículas <sup>(2), (3)</sup>.

Arvieu <sup>(2)</sup> ha aplicado este método para el estudio de los isótopos del estaño, utilizando una interacción de Yukawa con intercambio y los resultados se comparan con el experimento en forma bastante satisfactoria.

## CAPITULO V

### ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL CASO DE PARTICULAS CON ISOSPIN

1.- Los grupos  $U_{62}$ ,  $M_{22}$ ,  $M_2^{(\tau)}$ .

Consideremos un conjunto de fermiones con isospin moviéndose en un potencial común y supongamos que elegimos el esquema  $jj$  para clasificar los estados de una sola partícula; por ejemplo, en un potencial común de oscilador armónico se tienen los estados que se muestran en la Fig. 1.

Como se hizo en el capítulo I, clasificamos la parte spinorbital de los estados de una sola partícula mediante los índices  $(\nu l j m)$  y ahora indicamos con  $\tau$  la parte correspondiente al isospin;  $\tau$  puede tomar los valores  $\frac{1}{2}$  (estados de neutrón) y  $-\frac{1}{2}$  (estado de protón). Los operadores de creación y de aniquilación serán entonces :

$$b_{\nu l j m, \tau}^+ \quad , \quad b_{\nu l j m, \tau}$$

con las reglas de anticonmutación :

$$\{b_{\nu l j m, \tau}^+, b_{\nu' l' j' m', \tau'}^+\} = \{b^{\nu l j m, \tau}, b^{\nu' l' j' m', \tau'}\} = 0$$

$$\{b_{\nu l j m, \tau}^+, b^{\nu' l' j' m', \tau'}\} = \delta_{\nu \nu'} \delta_{l l'} \delta_j^{j'} \delta_m^{m'} \delta_{\tau \tau'} \quad (5.1)$$

y, como siempre, se introduce el vacío  $|0\rangle$  con la propiedad :

$$b^{\nu l j m, \tau} |0\rangle = 0, \quad \forall \nu, l, j, m, \tau.$$

Podemos indicar con la letra  $\rho$  al conjunto de números cuánticos  $(\nu l j m \tau)$  y en ese caso podemos escribir las reglas de anticonmutación (5.1) en la forma :

$$\{b_{\rho}^+, b_{\rho'}^+\} = \{b^{\rho}, b^{\rho'}\} = 0$$

$$\{b_{\rho}^+, b^{\rho'}\} = \delta_{\rho \rho'} \quad (5.2).$$

Igual que en el capítulo 1, vamos a concentrarnos en una sola capa  $j$ ; cuando tengamos necesidad de desdoblar el índice  $\rho$  en sus componentes, indicaremos éstas simplemente con  $(m \tau)$ , ya que  $(\nu l j)$  son fijas; los operadores de creación y de aniquilación se indicarán entonces así :

$$b_{\rho}^+ \equiv b_{m \tau}^+, \quad b^{\rho} \equiv b^{m \tau} \quad (5.3).$$

Vamos a definir ahora los siguientes 3 operadores <sup>5)</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p^{p'} \equiv b_p^+ b^{p'} \end{array} \right. \quad (5.4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m^{m'} \equiv \sum_{\tau} b_{m\tau}^+ b^{m'\tau} \end{array} \right. \quad (5.4b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{\tau}^{\tau'} \equiv \sum_m b_{m\tau}^+ b^{m\tau'} \end{array} \right. \quad (5.4c)$$

Es inmediato verificar que los operadores (5.4) obedecen las siguientes reglas de conmutación:

$$[C_p^{p'}, C_{\bar{p}}^{\bar{p}'}] = C_p^{\bar{p}'} \delta_{\bar{p}}^{p'} - C_{\bar{p}}^{p'} \delta_p^{\bar{p}'} \quad (5.5a)$$

$$[C_m^{m'}, C_{\bar{m}}^{\bar{m}'}] = C_m^{\bar{m}'} \delta_{\bar{m}}^{m'} - C_{\bar{m}}^{m'} \delta_m^{\bar{m}'} \quad (5.5b)$$

$$[C_{\tau}^{\tau'}, C_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}'}] = C_{\tau}^{\bar{\tau}'} \delta_{\bar{\tau}}^{\tau'} - C_{\bar{\tau}}^{\tau'} \delta_{\tau}^{\bar{\tau}'} \quad (5.5c)$$

Reconocemos inmediatamente las reglas de conmutación (5.5) como las de los generadores de los grupos unitarios<sup>5)</sup>. Como el índice  $m$  puede tomar  $2\Omega$  valores y el índice  $\tau$ ,  $2$  valores, tendremos que  $p$  podrá tomar  $4\Omega$  valores.

Entonces  $C_p^{p'}$  son los generadores de un grupo unitario de  $4\Omega$  dimensiones, que indicaremos como  $U_{4\Omega}$ ;  $C_m^{m'}$  son los generadores de un grupo unitario  $U_{2\Omega}$  y finalmente  $C_{\tau}^{\tau'}$  son los generadores de un grupo  $U_2(\tau)$ .

$U_{4\Omega}$  corresponde a transformaciones en el espacio completo : spinorbital más isospin;  $U_{2\Omega}$  sólo efectúa transformaciones en el espacio spinorbital y  $U_2^{(\tau)}$  transforma en el espacio del isospin.

Nótese que podemos escribir las definiciones ( 5.4 ) en la forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{m\tau}^{m'\tau'} = b_{m\tau}^+ b^{m'\tau'} \quad (5.6a) \\ \mathcal{G}_m^{m'} = \sum_{\tau} C_{m\tau}^{m'\tau} \quad (5.6b) \\ C_{\tau}^{\tau'} = \sum_m C_{m\tau}^{m\tau'} \quad (5.6c), \end{array} \right.$$

que muestra que tanto los generadores  $\mathcal{G}_m^{m'}$  como los  $C_{\tau}^{\tau'}$  son combinaciones lineales de los generadores  $C_{m\tau}^{m'\tau'}$ . Entonces  $U_{2\Omega}$  y  $U_2^{(\tau)}$  son subgrupos de  $U_{4\Omega}$ . Como por otro lado

$$[\mathcal{G}_m^{m'}, C_{\tau}^{\tau'}] = 0 \quad (5.7),$$

tenemos que el grupo  $U_{4\Omega}$  contiene al producto directo  $U_{2\Omega} \times U_2^{(\tau)}$  :

$$U_{4\Omega} \supset U_{2\Omega} \times U_2^{(\tau)} \quad (5.8).$$

Tenemos entonces una cadena de grupos, mediante la cual podemos clasificar nuestros estados. Los estados de una sola partícula son una B.R.I. caracterizada por un solo bloque, tanto del grupo  $U_{2\Omega}$ , como del  $U_2^{(\tau)}$  y del  $U_{4\Omega}$ . Un estado de  $n$  partículas del tipo :

$$b_{p_1}^+ b_{p_2}^+ \dots b_{p_n}^+ |0\rangle \quad (5.9)$$

es automáticamente una base para la representación irreducible totalmente antisimétrica  $\{1^n\}$  del grupo  $U_{4\Omega}$ ; (5.9) es una base para una representación en general reducible de los subgrupos  $U_{2\Omega}$  y  $U_2^{(\tau)}$ ; formando combinaciones lineales apropiadas se pueden construir B.R.I. de los subgrupos mencionados. Se pueden demostrar <sup>40)</sup> que dada una R.I.  $[h]$  de  $U_{2\Omega}$  contenida en  $\{1^n\}$  de  $U_{4\Omega}$ , la única R.I. permitida de  $U_2^{(\tau)}$  es la conjugada de  $[h]$  (que indicaremos con  $(\nu) = [\tilde{h}]$ ) y viceversa,  $([\tilde{h}] = (\nu))$ . Ahora bien, como el diagrama de Young de un grupo unitario de  $n$  dimensiones puede tener  $n$  renglones como máximo, las R.I. de  $U_2^{(\tau)}$  pueden tener, a lo más, 2 renglones; entonces las R.I. de  $U_{2\Omega}$  pueden tener, a lo más, 2 columnas. Tenemos entonces, en forma esquemática:

$$U_{4\Omega} \supset U_{2\Omega} \times U_2^{(\tau)}$$

$$n \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama de Young de } U_{4\Omega} \\ \text{(una columna de } n \text{ cuadros)} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama de Young de } U_{2\Omega} \\ \text{(dos columnas de } \frac{n}{2} - \tau \text{ y } 2\tau \text{ cuadros)} \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama de Young de } U_2^{(\tau)} \\ \text{(dos renglones de } \tau \text{ y } \tau \text{ cuadros)} \end{array} \right\} \quad (5.10)$$

$$\{1^n\} \supset [h_1 \dots h_{2\Omega}] \times (\nu_1, \nu_2) \quad \begin{cases} \nu_1 + \nu_2 = n \\ h_1 + \dots + h_{2\Omega} = n \end{cases}$$

$$(\nu_1, \nu_2) = [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{2\Omega}]$$

Como se sabe, si una R.I. del grupo del isospin está caracterizada por  $(\nu_1, \nu_2)$  entonces el isospin mismo está dado por: <sup>4), 40)</sup>

$$T = \frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \quad (5.11)$$

Siguiendo las mismas ideas que se expusieron en el capítulo I, queremos encontrar ahora subgrupos de  $U_{2\Omega}$  y de  $U_2(\tau)$  que nos permitan clasificar más nuestras funciones de onda.

Empecemos con el grupo  $U_2(\tau)$ . Claramente podemos elegir, para el grupo correspondiente, los siguientes 3 generadores:

$$\begin{cases} T_+ = C_{1/2}^{-1/2} & (5.12a) \\ T_0 = \frac{1}{2} (C_{1/2}^{1/2} - C_{-1/2}^{-1/2}) & (5.12b) \\ T_- = C_{-1/2}^{1/2} & (5.12c), \end{cases}$$

que son los generadores de ascenso, de peso y de descenso, respectivamente. El peso es el eigenvalor  $M_T$  de  $T_0$ , que es la tercera componente del isospín. Podemos elegir, como subgrupo de  $U_2(\tau)$ , al grupo  $U_1(\tau)$  con generador  $T_0$ , de manera que la cadena

$$U_2(\tau) \supset U_1(\tau) \quad (5.13)$$

nos da, para un número dado  $n$  de partículas, el isospín  $T$  y su proyección  $M_T$ .

Para el grupo  $U_{2\Omega}$  elegimos, como subgrupo, al grupo simpléctico  $Sp_{2\Omega}$ , porque veremos que está conectado con un tipo de fuerza de apareamiento que es escalar frente al isospín. Elegimos luego, como subgrupo de  $Sp_{2\Omega}$ , al grupo  $R_3$  de rotaciones en el espacio físico. Las representaciones irreducibles de  $Sp_{2\Omega}$  contenidas en una R.I. de 2 columnas de  $U_{2\Omega}$  pueden tener, a lo más, 2 columnas.

Los generadores del grupo  $Sp_{2\Omega}$  son:

$$\Lambda_m^{m'} = \mathcal{C}_m^{m'} + (-)^{m+m'} \mathcal{C}_{-m}^{-m'} \quad (5.12).$$



2.- El grupo  $R_S$  .

Helmers <sup>6)</sup> ha discutido el grupo del cuasispin generalizado para el caso de partículas con isospin arbitrario. Veremos aquí únicamente el caso de partículas con isospin  $1/2$ , que ha sido discutido por Hecht <sup>41)</sup> Ginocchio <sup>42)</sup>, Flowers. Seguiremos de cerca la notación de Hecht. Para la capa  $j$  que estamos considerando, definimos los siguientes 10 operadores :

$$A^+(M_T) \equiv \sqrt{\frac{\Omega}{2}} [b^+ b^+]_{00, 1M_T} \quad (5.15a)$$

$$A(M_T) \equiv -\sqrt{\frac{\Omega}{2}} [b b]^{00, 1M_T} \quad (5.15b)$$

$$H_1 \equiv \frac{N}{2} - \Omega \quad (5.15c)$$

$$T_+ \equiv C_{1/2}^{-1/2} \quad (5.15d)$$

$$T_- \equiv C_{-1/2}^{1/2} \quad (5.15e)$$

$$T_0 \equiv H_2 \equiv \frac{1}{2} (C_{1/2}^{1/2} - C_{-1/2}^{-1/2}) \quad (5.15f)$$

donde

$$\left\{ \begin{aligned} [b^+ b^+]_{00, 1M_T} &\equiv \sum_{m, \tau} \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \langle 1/2, 1/2, \tau, \tau' | 1M_T \rangle b_{m\tau}^+ b_{-m\tau'}^+ \\ [b b]^{00, 1M_T} &\equiv \sum_{m, \tau} \frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}} \langle 1/2, 1/2, \tau, \tau' | 1M_T \rangle b_{m\tau} b_{-m\tau'} \end{aligned} \right.$$

El conjunto (5.15) es cerrado bajo la conmutación y se demuestra que es el conjunto de generadores de un grupo  $R_5$ .

Vemos que  $T_+, T_0, T_-$  forman el grupo  $SU_2^{(\tau)}$  del isospin y son los mismos operadores que se definieron en (5.12).  $A^+(M_T)$  crea una pareja de partículas acopladas a momento angular total cero e isospin 1 con proyección  $M_T$ ;  $A(M_T)$  aniquila una pareja con las características mencionadas.

Es trivial demostrar que los generadores  $\Lambda_{w_i}^{w_i'}$  de  $Sp_{2,2}$  conmutan con los generadores (5.15); esta característica ya la habíamos encontrado en conexión con el cuasispin  $SU_2$ .

Vamos a investigar ahora cómo se caracterizan las R.I. de  $R_5$  y cuál es el significado físico de los números cuánticos correspondientes. Las R.I. de un grupo  $R_5$  se caracterizan por 2 números  $(\lambda_1, \lambda_2)$  y necesitaremos entonces 2 números  $(w_1, w_2)$  para especificar el peso de un estado; elegimos  $w_1$  como el eigenvalor de  $H_1$  y  $w_2$  como el de  $H_2$ . Como es costumbre, el máximo peso define la R.I.:

$$(w_{1M}, w_{2M}) = (\lambda_1, \lambda_2) \quad (5.16)$$

Convenimos en decir que el peso  $(w_1, w_2)$  es mayor que el peso  $(w_1', w_2')$  si en  $(w_1 - w_1', w_2 - w_2')$  el primer número diferente de cero es positivo.

Vamos a ver en qué forma podemos subdividir los 8 generadores restantes en generadores de ascenso y en generadores de descenso. Para ello, calculemos el conmutador de  $H_1$  y de  $H_2$  con esos 8 generadores. El cálculo es inmediato y el resultado es:

$$\begin{cases} [H_1, A^+(M)] = A^+(M) \\ [H_1, A(M)] = -A(M) \\ [H_1, T_{\pm}] = 0 \end{cases} \quad (5.17a),$$

$$\begin{cases} [H_2, A^+(1)] = A^+(1); [H_2, A^+(0)] = 0; [H_2, A^+(-1)] = -A^+(-1) \\ [H_2, A(1)] = -A(1); [H_2, A(0)] = 0; [H_2, A(-1)] = A(-1) \\ [H_2, T_+] = T_+ \\ [H_2, T_-] = -T_- \end{cases} \quad (5.17b),$$

Podemos entonces construir la siguiente tabla, que indica el incremento que sufre el peso de un estado al aplicarle cada uno de los 8 generadores que se indican :

	$\Delta w_1$	$\Delta w_2$	
$A^+(1)$	1	1	(5.18),
$A^+(0)$	1	0	
$A^+(-1)$	1	-1	
$A(1)$	-1	-1	
$A(0)$	-1	0	
$A(-1)$	-1	1	
$T_+$	0	1	
$T_-$	0	-1	

De acuerdo con la convención que se dió para saber si un peso es mayor que otro, tenemos entonces que subdividir los 8 generadores que aparecen en (5.18) en los dos conjuntos siguientes :

Generadores de ascenso :  $A^+(1), A^+(0), A^+(-1), T_+$  (5.19a)

Generadores de descenso :  $A(1), A(0), A(-1), T_-$  (5.19b)

y luego se tienen los siguientes dos

Generadores de peso :  $H_1, H_2$  (5.19c)

Aprovecharemos en seguida estos resultados.

Definimos ahora un estado de  $\nu$  nucleones con seniority  $\nu$  mediante la ecuación :

$$A(M) |j^\nu \nu\rangle = 0, \quad M = 1, 0, -1 \quad (5.20)$$

Definimos el isospin reducido  $t$  como el isospin de estos  $\nu$  nucleones; si la proyección de  $t$  es mínima ( $-t$ ), tenemos :

$$T_- |j^\nu \nu, T=t, M_T = -t\rangle = 0 \quad (5.21)$$

Como los 4 generadores de descenso aplicados a nuestro estado  $|j^\nu \nu, T=t, M_T = -t\rangle$  dan cero, ese estado es de mínimo peso en  $R_5$  ;

recordando que tenemos  $N = \nu$  nucleones y que el eigenvalor de  $H_2$  es precisamente la proyección del isospin, tenemos, para ese mínimo peso  $(w_{1m} w_{2m})$ , las expresiones :

$$\begin{cases} w_{1m} = \frac{\nu}{2} - \Omega & (5.22a) \\ w_{2m} = -t & (5.22b) \end{cases}$$

Se puede demostrar <sup>44)</sup> que para el grupo  $R_5$  el máximo peso y el mínimo peso tienen signos contrarios. Entonces, usando (5.16) :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \Omega - \frac{\nu}{2} \\ \lambda_2 = t \end{cases} \quad (5.23)$$

Veamos cuál es el proceso que lleva del estado de mínimo peso que se muestra en (5.21) al estado de máximo peso. En este proceso hay que aplicar : 1) los operadores de ascenso  $A^+(M)$ , que van agregando pares de partículas con momento angular cero e isospin 1 y 2) el operador  $T_+$  que cambia la proyección del isospin total, sin cambiar, desde luego, el isospin mismo. Si al empezar teníamos  $\nu$  partículas con isospin  $t$ , durante el proceso  $\nu$  permanece constante, ya que no se altera el número de partículas no apareadas y el isospin reducido  $t$  de esas partículas tampoco cambia, ya que sólo puede cambiar su proyección. Se ve entonces razonable que los índices de la representación irreducible  $(\lambda_1 \lambda_2)$  estén conectados precisamente con el seniority  $\nu$  y el isospin reducido  $t$ , como se muestra en (5.23). Al llegar al final del proceso de ascenso, los operadores  $A^+(M)$  y  $T_+$  dan cero al aplicarse al nuevo estado, por ser generadores de ascenso.

Además se obtiene, de (5.23) :

$$\lambda_2 = \lambda$$
$$\therefore W_{2M} = \lambda$$

O sea :

$$T_0 P|0\rangle = \lambda P|0\rangle,$$

donde  $P|0\rangle$  es nuestro estado de máximo peso. Como acabamos de ver que

$$T_+ P|0\rangle = 0$$

se infiere que el isospin total del estado de máximo peso es igual a  $\lambda$ , que era el isospin total del estado de mínimo peso.

Para ver cuántas parejas se han tenido que agregar para llegar al máximo peso, recordemos que :

$$\lambda_1 = \Omega - \frac{\nu}{2}$$
$$W_{1M} = \frac{n_M}{2} - \Omega$$

Como  $\lambda_1 = W_{1M}$ , se infiere que :

$$n_M = 4\Omega - \nu \quad (5.24)$$

Entonces, si se tiene un estado de seniority  $\nu$ , el mínimo peso corresponde a  $\nu$  partículas y el máximo peso, a  $\nu$  agujeros.

El número de parejas agregadas es entonces :

$$\text{no. de parejas} = 2\Omega - \nu \quad (5.25)$$

Habiendo visto cuál es el significado del mínimo y del máximo peso, vamos a construir explícitamente el polinomio de mínimo peso en  $\mathcal{R}_5$ . Si designamos con  $P|0\rangle$  al estado correspondiente, hemos visto que debe satisfacer las ecuaciones:

$$A(M) P|0\rangle = 0 \quad (5.26a)$$

$$T_- P|0\rangle = 0 \quad (5.26b)$$

$$H_1 P|0\rangle = -\lambda_1 P|0\rangle \quad (5.26c)$$

$$H_2 P|0\rangle = -\lambda_2 P|0\rangle \quad (5.26d)$$

- a) implica que en  $P|0\rangle$  no hay parejas apareadas a momento angular cero.  
 c) implica que en  $P|0\rangle$  hay  $\nu = 2(\Omega - \lambda_1)$  partículas.  
 b) y d) nos dicen que el isospin de estas  $\nu$  partículas es  $t = \lambda_2$  con proyección mínima:  $m_t = -\lambda_2$ .

Las condiciones (5.26) no determinan totalmente al polinomio buscado. Para ello, falta imponer ciertas condiciones sobre el grupo de los invariantes de  $\mathcal{R}_5$ , que es el grupo simpléctico  $Sp_{2j+1}$ . Supondremos que estamos interesados en el polinomio de máximo peso en el grupo  $Sp_{2j+1}$ . En estas condiciones, vamos a demostrar que el siguiente estado cumple las condiciones (5.26):

$$P|0\rangle = \left[ \overbrace{b_{j, -\frac{1}{2}}^+ b_{(j-1), -\frac{1}{2}}^+ \cdots b_{(j-\frac{\nu}{2}-t+1), -\frac{1}{2}}^+}^{\nu/2 + t} \right] \left[ \overbrace{b_{j, \frac{1}{2}}^+ b_{(j-1), \frac{1}{2}}^+ \cdots b_{(j-\frac{\nu}{2}+t+1), \frac{1}{2}}^+}^{\nu/2 - t} \right] |0\rangle$$

$$\begin{cases} \nu = 2(\Omega - \lambda_1) \\ t = \lambda_2 \end{cases}$$

$$(5.27)$$

Vemos que en el 1er. paréntesis hay  $\left(\frac{\nu}{2} + t\right)$  operadores de creación y hay  $\left(\frac{\nu}{2} - t\right)$  en el segundo.

$T_-$  aplicado á  $P|0\rangle$  da cero, ya que cambia  $1/2$  por  $-1/2$  y, como hay menos índices  $1/2$  que  $-1/2$ , todos los índices  $m_j$  que hay en el 2o. paréntesis están también en el 1o. Entonces se satisface (5.26b).

Por otro lado :

$$H_1 P|0\rangle = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\nu}{2} + t + \frac{\nu}{2} - t \right) - \Omega \right] P|0\rangle = \left( \frac{\nu}{2} - \Omega \right) P|0\rangle = -\lambda_1 P|0\rangle$$

$$H_2 P|0\rangle = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\nu}{2} - t \right) - \left( \frac{\nu}{2} + t \right) \right] P|0\rangle = -t P|0\rangle = -\lambda_2 P|0\rangle$$

y se satisfacen (5.26 c y d).

Falta demostrar que  $A(M) P|0\rangle = 0$ .

Ante todo demostraremos que todos los índices  $m_j$  de la expresión (5.27) son positivos. Como el 2o. paréntesis tiene menos operadores  $b^+$  que el 1o, basta demostrar que todos los índices  $m_j$  del 1o. son positivos. Para demostrarlo, recordemos que, si  $(\lambda_1, \lambda_2)$  definen la RII de  $R_5$ , se tiene :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2$$

$$\Omega - \frac{\nu}{2} \geq t \quad (5.28)$$

$$\frac{\nu}{2} + t \leq \Omega$$

Entonces en el primer paréntesis de (5.27) hay, como máximo,  $\Omega$  partículas. En ese primer paréntesis el índice  $m_j$  más pequeño es  $j - \left(\frac{\nu}{2} + t\right) + 1$ ; usando (5.28) se tiene :

$$j - \left(\frac{\nu}{2} + t\right) + 1 \geq j - \Omega + 1 = j - \frac{2j+1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore j - \frac{\nu}{2} - t + 1 \geq \frac{1}{2}$$

(5.29),

como queríamos demostrar.

Vamos ahora a ver cuál es el efecto de  $A(M)$  sobre el estado (5.27).

Para ello, calculemos primero el conmutador siguiente :

$$[A(M), b_{m\tau}^+] = (-)^{j-m} \sum_{\tau'} \langle 1/2, 1/2, \tau, \tau' | 1M \rangle b^{-m\tau'} \quad (5.30)$$

Ahora bien : en (5.27) hay  $\nu$  operadores  $b_{m\tau}^+$ , con  $m$  siempre positiva; al aplicarle  $A(M)$ , este operador salta una  $b_{m\tau}^+$  y se tiene un término extra, que es el conmutador (5.30), que da lugar a una  $b^{-m\tau'}$ , con  $(-m)$  negativa; esta  $b^{-m\tau'}$  puede saltar todas las  $b_{m\tau}^+$  con  $m$  positiva que tiene a su derecha, hasta actuar sobre  $|0\rangle$ , para dar cero; repitiendo la operación con todas las  $b_{m\tau}^+$  de (5.27), se comprueba entonces que  $A(M)P|0\rangle = 0$ .

Queda entonces demostrado que (5.27) es un estado de mínimo peso en  $R_5$ , correspondiente a la RI  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ; en particular, hemos escrito el estado que es de máximo peso en  $Sp_{2j+1}$ . Es cuestión ahora de subir el peso para conseguir los valores apropiados de  $W_1$  y de  $W_2$ ; o sea, para conseguir el número de partículas y la proyección del isospin total que se pidan. Pero es más interesante caracterizar los pesos mediante los índices de las RI de los subgrupos de  $R_5$ . Vamos entonces a investigar algunas cadenas de subgrupos de  $R_5$ .

Una cadena posible es la siguiente :

$$R_5 \supset R_4 \sim R_3^{(p)} \times R_3^{(n)} \quad (5.31).$$

En esta cadena,  $R_3^{(p)}$  y  $R_3^{(n)}$  son homomorfos respectivamente a los grupos  $SU_2^{(p)}$  y  $SU_2^{(n)}$ , que son precisamente los grupos del cuasispin para protones por un lado y para neutrones por el otro, con todas las características estudiadas en el capítulo I.  $R_3^{(p)}$  nos da, como números cuánticos,  $n_p$  y  $v_p$ , que son el número de protones y su seniority;  $R_3^{(n)}$  nos da  $n_n$  y  $v_n$ , que son el número de neutrones y su seniority. La cadena (5.31) nos da entonces 4 números cuánticos como renglón de  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ; se trata entonces de una cadena completa, que nos puede definir totalmente un estado. Sin embargo tiene poco interés físico, ya que en ella el isospin total  $T$  no es buen número cuántico. Preferimos entonces usar la siguiente cadena física, en la cual el número de partículas, el isospin total y su proyección son buenos números cuánticos :

$$R_5 \supset U_4 \times SU_2^{(\tau)} \quad (5.32).$$

Otro interés considerable de la cadena (5.32) es que permite diagonalizar un tipo especial de fuerza de apareamiento para protones y neutrones en una sola capa  $j$ , que definiremos en la próxima sección. Sin embargo, esta cadena no es completa, ya que nos da solamente 3 números cuánticos como renglón de  $(\lambda_1, \lambda_2)$ .

En términos de esta cadena, nuestro estado de mínimo peso (5.27) se escribe así :

$$P|0\rangle = |(\lambda_1, \lambda_2); n=v, T=t, M_T=-t\rangle \quad (5.33).$$

Para un estado con un peso arbitrario necesitaremos, en general, un número cuántico extra  $\alpha$ , que lo clasifique completamente.

Aumentar el peso de (5.33) significa conseguir el número de partículas, el isospin y su proyección que se pidan. El siguiente estado

$$\begin{aligned}
 & |(\lambda, \lambda_2) \alpha n T = \frac{n-v}{2} + t, M_T = -(\frac{n-v}{2} + t)\rangle = \\
 & = [b_{j, -\frac{1}{2}}^+ \cdots b_{(j-\frac{v}{2}-t+1), -\frac{1}{2}}^+] [b_{j, \frac{1}{2}}^+ \cdots b_{(j-\frac{v}{2}+t+1), \frac{1}{2}}^+] [A^+(-)]^{\frac{n-v}{2}} |0\rangle
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

tiene  $n$  partículas, su isospin total es  $T = \frac{n-v}{2} + t$  con proyección mínima. El problema es ahora encontrar un método para conseguir el isospin deseado sin alterar el número de partículas; el operador buscado debe cambiar el isospin y deberá contener entonces generadores de  $R_5$  que no estén en  $SU_2^{(r)}$ ; proponemos el uso de  $A^+A$ , ya que cumple con esta condición y no altera el número de partículas. Le pedimos al operador buscado que nos pase de un estado con un cierto isospin  $T$  y mínima proyección (como el estado (5.34)), a otro estado con isospin  $T'$  y mínima proyección. Llamando  $M_{TT'}$  a ese operador, tenemos:

$$M_{TT'} |(\lambda, \lambda_2) \alpha n T - T\rangle = \sum_{\alpha'} B_{\alpha'\alpha} |(\lambda, \lambda_2) \alpha' n T' - T'\rangle
 \tag{5.35}$$

Proponemos un operador del tipo:

$$M_{TT'} = \sum_M a_M^{(T, T')} (T_+)^{-M+T-T'} A_M
 \tag{5.36}$$

donde :

$$A_M \equiv \sum_{M_1, M_2} (-)^{M_2} \langle 11 M_1 M_2 | 2 M \rangle A^+(M_1) A(-M_2) \quad (5.37),$$

con la condición :

$$[T_-, m_{TT'}] |T-T\rangle = 0 \quad (5.38).$$

Es inmediato verificar que esta condición da lugar a la siguiente regla de recurrencia sobre los coeficientes  $a_M^{(T, T')}$  de (5.36) :

$$a_{M+1}^{(T, T')} = -a_M^{(T, T')} \frac{(M-T+T')(M-T-T'-1)}{\sqrt{(3+M)(2-M)}} \quad (5.39).$$

Vamos a escribir la forma explícita de  $A_2, A_1, A_0$  ; nótese que  $A_{-1}$  y  $A_{-2}$  no se necesitan, ya que estos dos últimos operadores dan cero al aplicarse a un estado de mínima proyección del isospin.

$$A_2 = -A^+(1)A(-1) \quad (5.40a)$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [A^+(1)A(0) - A^+(0)A(-1)] \quad (5.40b)$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{6}} [-A^+(1)A(1) + 2A^+(0)A(0) - A^+(-1)A(-1)] \quad (5.40c).$$

El operador  $m_{TT'}$  definido en (5.36) cambia el isospin de un estado de  $T$  á  $T'$ , conservando la proyección mínima; pero nótese que  $|T-T'| \leq 2$ ,

ya que  $A_M$  es un tensor de Racah de orden 2 en el isoespacio; si se deseara cambiar el isospin en más de 2 unidades, habría que aplicar el operador  $M_{TT}$ , más de una vez.

Habiendo conseguido el estado con el isospin deseado, es ahora un problema trivial conseguir la proyección pedida, ya que basta aplicar el operador de ascenso  $T_+$  un número apropiado de veces.

La idea del proceso que acabamos de exponer es idéntica a la que se expone en la ref. 36) para conseguir el momento angular  $L'$  deseado, partiendo de otro momento angular  $L$ ; el operador definido en esa referencia es  $M_{LL'}$ .

Queremos hacer notar que la aplicación del operador  $M_{TT}$ , a un estado del tipo (5.34) es totalmente mecánica, si se hace uso de las tablas I y II, que dan los conmutadores de los 10 generadores de  $R_5$  entre sí y de los operadores  $A^+(M), A(M)$  con  $b_{m\tau}^+$  y  $b^{m\tau}$ .

TABLA I

$\begin{matrix} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} \end{matrix}$	$A^+(1)$	$A^+(0)$	$A^+(-1)$	$A(1)$	$A(0)$	$A(-1)$	$H_1$	$H_2$	$T_+$	$T_-$
$A^+(1)$	0	0	0	$H_1 + H_2$	$\frac{T_+}{\sqrt{2}}$	0	$-A^+(1)$	$-A^+(1)$	0	$-\sqrt{2}A^+(0)$
$A^+(0)$	0	0	0	$\frac{T_-}{\sqrt{2}}$	$H_1$	$\frac{T_+}{\sqrt{2}}$	$-A^+(0)$	0	$-\sqrt{2}A^+(1)$	$-\sqrt{2}A^+(-1)$
$A^+(-1)$	0	0	0	0	$\frac{T_-}{\sqrt{2}}$	$H_1 - H_2$	$-A^+(-1)$	$A^+(-1)$	$-\sqrt{2}A^+(0)$	0
$A(1)$	$-H_1 - H_2$	$-\frac{T_+}{\sqrt{2}}$	0	0	0	0	$A(1)$	$A(1)$	$\sqrt{2}A(0)$	0
$A(0)$	$-\frac{T_+}{\sqrt{2}}$	$-H_1$	$-\frac{T_-}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$A(0)$	0	$\sqrt{2}A(-1)$	$\sqrt{2}A(1)$
$A(-1)$	0	$-\frac{T_+}{\sqrt{2}}$	$H_2 - H_1$	0	0	0	$A(-1)$	$-A(-1)$	0	$\sqrt{2}A(0)$
$H_1$	$A^+(1)$	$A^+(0)$	$A^+(-1)$	$-A(1)$	$-A(0)$	$-A(-1)$	0	0	0	0
$H_2$	$A^+(1)$	0	$-A^+(-1)$	$-A(1)$	0	$A(-1)$	0	0	$T_+$	$-T_-$
$T_+$	0	$\sqrt{2}A^+(1)$	$\sqrt{2}A^+(0)$	$-\sqrt{2}A(0)$	$-\sqrt{2}A(-1)$	0	0	$-T_+$	0	$2H_2$
$T_-$	$\sqrt{2}A^+(0)$	$\sqrt{2}A^+(-1)$	0	0	$-\sqrt{2}A(1)$	$-\sqrt{2}A(0)$	0	$T_-$	$-2H_2$	0

En la tabla aparecen los conmutadores de los generadores de  $R_5$  en

el siguiente orden :  $[\textcircled{1}, \textcircled{2}]$ .

( La notación es la de Hecht ).

TABLA II

① \ ②	$b_{m\frac{1}{2}}^+$	$b_{m-\frac{1}{2}}^+$	$b^{m\frac{1}{2}}$	$b^{m-\frac{1}{2}}$
$A^+(+)$	0	0	$-(-)^{j-m} b_{m\frac{1}{2}}^+$	0
$A^+(0)$	0	0	$-\frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2}} b_{m-\frac{1}{2}}^+$	$-\frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2}} b_{m\frac{1}{2}}^+$
$A^+(-)$	0	0	0	$-(-)^{j-m} b_{m-\frac{1}{2}}^+$
$A(+)$	$(-)^{j-m} b^{m-\frac{1}{2}}$	0	0	0
$A(0)$	$\frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2}} b^{m-\frac{1}{2}}$	$\frac{(-)^{j-m}}{\sqrt{2}} b^{m\frac{1}{2}}$	0	0
$A(-)$	0	$(-)^{j-m} b^{m-\frac{1}{2}}$	0	0

En la tabla aparecen los conmutadores en el orden  $[\textcircled{1}, \textcircled{2}]$ .

En esta sección hemos estado trabajando con la siguiente cadena de grupos y subgrupos, conocida como la cadena de Helmers :

$$\begin{array}{c}
 Sp_{2\Omega} \times R_5^{(v,t)} \text{ (ó } Sp_4) \\
 \cup \\
 U_1 \times SU_2 \\
 (n) \quad (T, M_T)
 \end{array} \quad (5.41),$$

donde se han indicado entre paréntesis los números cuánticos a los que da lugar cada grupo. Se ve entonces que es enteramente equivalente trabajar con esta cadena o con la de Racah-Flowers, que se muestra en (5.14). La gran ventaja de la cadena de Helmers es que <sup>se</sup>trabaja con un grupo ortogonal que siempre es de 5 dimensiones, independientemente de la capacidad de la capa. Si se sigue el procedimiento expuesto para construir BRL en la cadena  $R_5 \supset U_1 \times SU_2$ , tendremos funciones de onda caracterizadas por  $n, T, v, t$  y sigue en pie, desde luego, el problema de construir combinaciones lineales apropiadas para tener un momento angular total  $J$  definido. Para este fin se pueden seguir técnicas análogas a las que se exponen en la referencia 36).

Como ya hemos indicado, la cadena (5.32) permite diagonalizar un tipo de fuerza de apareamiento entre protones y neutrones en una sola capa  $j$  que definiremos en la próxima sección. Veremos que esa fuerza se puede expresar en términos del operador de Casimir de 2o. orden de  $R_5$ ; vamos entonces a estudiar ese operador y a encontrar sus eigenvalores. Para ello es muy conveniente escribir los generadores de  $R_5$  en una forma ligeramente diferente. Nos vamos a basar en las expresiones (5.18) y vamos a indicar cada generador con el símbolo  $E_{ab}$ , con  $a \equiv \Delta w_1$ ,  $b \equiv \Delta w_2$ ; como  $H_1$  no cambia ni  $w_1$  ni  $w_2$ , lo indicaremos con  $E_{00}$  y finalmente  $H_2$  se

indicará con  $E_{o'o'}$  (se conviene en que  $-o' \equiv o'$ ). Construimos entonces la siguiente tabla, donde los diferentes coeficientes se han introducido por conveniencia :

$$\begin{aligned}
 H_1 &= E_{o_o} \\
 H_2 &= E_{o'o'} \\
 A^+(1) &= E_{11} \\
 A^+(0) &= E_{1_0} \\
 A^+(-1) &= E_{1_{-1}} \\
 A(1) &= E_{-1-1} \\
 A(0) &= E_{-1_0} \\
 A(-1) &= E_{-1_1} \\
 T_+ &= \sqrt{2} E_{01} \\
 T_- &= \sqrt{2} E_{0_{-1}}
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

Definimos ahora la siguiente cantidad :

$$\Phi \equiv \sum_{a,b} E_{ab} E_{-a-b}
 \tag{5.43}$$

con  $a, b = 1, 0, o', -1$ .

Se puede verificar que  $\Phi$  conmuta con todos los generadores  $E_{ab}$  y es por tanto un operador de Casimir de 2o. orden de  $\mathcal{R}_5$ . Desarrollando la suma (5.43), usando las definiciones de los  $E_{ab}$  (5.42) y efectuando las conmutaciones apropiadas se puede escribir  $\Phi$  en la siguiente forma :

$$\Phi = 2 \sum_M A^\dagger(M) A(M) + T^2 + H_1(H_1 - 3) \quad (5.44)$$

La matriz de  $\Phi$  es diagonal en una base para una representación irreducible de  $R_5$  y los elementos de matriz dependen de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  pero son independientes del renglón. Podemos entonces calcularlos para el mínimo peso en  $(\lambda_1, \lambda_2)$ ; esto es muy conveniente porque el primer término de (5.44) aniquila el estado de mínimo peso, por ser  $A(M)$  un generador de descenso. Para este estado el isospin total es igual al isospin reducido:  $T = t = \lambda_2$  y el eigenvalor de  $H_1$  es simplemente  $-\lambda_1$ . Llamando  $\varphi$  a los eigenvalores de  $\Phi$  tenemos entonces:

$$\varphi = \lambda_1(\lambda_1 + 3) + \lambda_2(\lambda_2 + 1) \quad (5.45)$$

Hasta este momento hemos trabajado con una sola capa  $j$ . Para la extensión a varias capas se siguen ideas totalmente análogas a las que se expusieron en conexión con el cuasispin para partículas idénticas. En primer lugar hay que definir los generadores para el grupo  $R_5(j)$ , correspondiente a cada capa  $j$ . Las ecuaciones (5.15) se convierten entonces en lo siguiente:

$$A_j^\dagger(M_j) = \sqrt{\frac{\Omega_j}{2}} [b_j^\dagger b_j^\dagger]_{00, \pm M_j} \quad (5.46a)$$

$$A_j(M_j) = -\sqrt{\frac{\Omega_j}{2}} [b_j b_j]^{00, \pm M_j} \quad (5.46b)$$

$$H_{1j} = \frac{N_j}{2} - \Omega_j \quad (5.46c)$$

$$T_{j+} = \sum_m b_{jm+1/2}^+ b^{jm-1/2} \quad (5.46d)$$

$$T_{j-} = \sum_m b_{jm-1/2}^+ b^{jm+1/2} \quad (5.46e)$$

$$T_{0j} = H_{2j} = \frac{1}{2} \sum_m (b_{jm+1/2}^+ b^{jm-1/2} - b_{jm-1/2}^+ b^{jm+1/2}) \quad (5.46f)$$

En el caso de varias capas, una forma posible de clasificar los estados consiste en asociarle a cada capa los números cuánticos que acabamos de encontrar : seniority  $\nu_j$  , isospin reducido  $t_j$  , isospin total  $T_j$  y su proyección  $M_{T_j}$  , número de partículas  $n_j$  y algún índice extra  $\alpha_j$  que nos complete la clasificación. Un estado para  $c$  capas clasificado en esta forma es entonces del tipo :

$$|(\lambda_1 \lambda_2)_{j_1} \alpha_{j_1} n_{j_1} T_{j_1} M_{T_{j_1}} ; \dots ; (\lambda_1 \lambda_2)_{j_c} \alpha_{j_c} n_{j_c} T_{j_c} M_{T_{j_c}} \rangle \quad (5.47)$$

En un sistema de estados clasificados como en ( 5.47 ) la parte del hamiltoniano correspondiente al potencial de una sola partícula ( "single - particle splitting" ) es diagonal ; nótese que  $(\lambda_1 \lambda_2)_{j_j}$  nos da el seniority  $\nu_{j_j}$  y el isospin reducido  $t_{j_j}$  de la capa  $j_j$  .

Otra forma posible de clasificar los estados de  $c$  capas consiste en acoplar las diferentes  $(\lambda_1 \lambda_2)_{j_j}$  para tener una  $(\lambda_1 \lambda_2)$  total definida, con su renglón correspondiente  $(\alpha \nu T M_T)$  . Esto es análogo a lo que se hizo con el cuasispin para partículas idénticas, donde acoplábamos  $j_1, j_2, \dots, j_c$  , para tener un

cuasispin  $S$  total definido, que nos daba el seniority vectorial  $V$  del estado, con un renglón  $M$ , que nos daba el número total  $n$  de partículas. En este esquema los estados son del tipo :

$$|(\lambda_1 \lambda_2)_{j_1} (\lambda_1 \lambda_2)_{j_2} \dots (\lambda_1 \lambda_2)_{j_c} ; \beta (\lambda_1 \lambda_2) \alpha n T M_T \rangle$$

(5.48),

donde  $\alpha$  sirve para completar la clasificación en la cadena  $R_5 \supset U_1 \times SU_2$  (donde  $R_5$ ,  $U_1$  y  $SU_2$  corresponden a transformaciones en el espacio total de las  $c$  capas simultáneamente) y  $\beta$  proviene del hecho que el mismo conjunto  $(\lambda_1 \lambda_2)_{j_i}$ ,  $(\lambda_1 \lambda_2)_{j_2} \dots (\lambda_1 \lambda_2)_{j_c}$ , al acoplarse puede dar la misma representación  $(\lambda_1 \lambda_2)$  más de una vez.

El grupo  $R_5$  de transformaciones sobre las  $c$  capas simultáneamente tiene

los siguientes generadores :

$$A^+(M_T) = \sum_j A_j^+(M_T) \quad (5.49a)$$

$$A(M_T) = \sum_j A_j(M_T) \quad (5.49b)$$

$$H_1 = \sum_j H_{1j} \quad (5.49c)$$

$$T_+ = \sum_j T_{j+} \quad (5.49d)$$

$$T_- = \sum_j T_{j-} \quad (5.49e)$$

$$T_0 = H_2 = \sum_j T_{0j} \quad (5.49f)$$

En ( 5.48 ),  $n$  es el número total de partículas,  $T$  el isospin total,  $M_T$  su proyección,  $\lambda_2 = t$  el isospin reducido del sistema,  $\lambda_1 = \Omega - \frac{V}{2}$ , y llamaremos  $V$  el seniority vectorial del estado.

Cuando tratamos el caso de partículas idénticas vimos que en el caso de dos capas, la relación entre un estado del tipo ( 5.44 ) y uno del tipo ( 5.43 ) no era más que un coeficiente de Wigner ordinario de  $SU_2$ ; en el caso presente, se tendrá un coeficiente de Wigner del grupo  $R_5$ . Podemos escribir entonces, para dos capas :

$$\begin{aligned}
 & |(\lambda_1 \lambda_2)_{j_1} (\lambda_1 \lambda_2)_{j_2} ; \beta (\lambda_1 \lambda_2) \alpha n T M_T \rangle = \\
 & = \sum_{\substack{\alpha_{j_1} n_{j_1} T_{j_1} M_{T_{j_1}} \\ \alpha_{j_2} n_{j_2} T_{j_2} M_{T_{j_2}}}} \langle (\lambda_1 \lambda_2)_{j_1} \alpha_{j_1} n_{j_1} T_{j_1} M_{T_{j_1}}, (\lambda_1 \lambda_2)_{j_2} \alpha_{j_2} n_{j_2} T_{j_2} M_{T_{j_2}} | \beta (\lambda_1 \lambda_2) \alpha n T M_T \rangle \\
 & \quad \times |(\lambda_1 \lambda_2)_{j_1} \alpha_{j_1} n_{j_1} T_{j_1} M_{T_{j_1}} ; (\lambda_1 \lambda_2)_{j_2} \alpha_{j_2} n_{j_2} T_{j_2} M_{T_{j_2}} \rangle \\
 & \hspace{20em} ( 5.50 ).
 \end{aligned}$$

Aun para el caso de dos capas se necesita el índice  $\beta$ , debido a la no simple reducibilidad del grupo  $R_5$ ; ese índice no era necesario en el problema de dos capas con el grupo  $SU_2$ . Algunos de los coeficientes de Wigner de  $R_5$  se encuentran discutidos por Hecht en la referencia 41).

Veremos en la próxima sección que la cadena ( 5.48 ) es muy importante, porque permite diagonalizar una fuerza de apareamiento especial entre protones y neutrones que se pueden mover en  $c$  capas degeneradas. Veremos que esa fuerza de apareamiento se puede escribir en términos del operador de Casimir de 2o. orden del grupo  $R_5$ , cuyas transformaciones se efectúan sobre las  $c$  capas simultáneamente y cuyos generadores se acaban de dar en ( 5.49 ).

Como las reglas de conmutación de los generadores ( 5.49 ) entre sí son las mismas que las de los generadores ( 5.15 ), el operador de Casimir buscado será :

$$\Phi = 2 \sum_M A^+(M) A(M) + T^2 + H_1(H_1 - 3) \quad (5.51),$$

con eigenvalores :

$$\varphi = \lambda_1(\lambda_1 + 3) + \lambda_2(\lambda_2 + 1) \quad (5.52),$$

donde  $(\lambda_1, \lambda_2)$  son los índices que caracterizan la RI del grupo  $R_5$  total mencionado y son los mismos índices que aparecen en ( 5.48 ).

### 3.- Fuerza de apareamiento para protones y neutrones.

En muchos artículos se ha recalcado la importancia de tomar en cuenta una fuerza de apareamiento que pueda mezclar protones y neutrones y el formalismo del grupo  $R_5$  se presta particularmente a un estudio de este tipo. Consideraremos aquí únicamente una fuerza de apareamiento independiente de la carga (escalar en el isoespacio) y tal que su acción sobre una pareja de partículas sea efectiva sólo cuando éstas estén acopladas a  $J=0$  y  $T=1$ . Desde luego ésta es una representación incompleta de la interacción real, ya que hay casos en que la parte correspondiente a  $J=1$  y  $T=0$  es importante. Por ejemplo, una interacción en acoplamiento LS como la siguiente :

$$\beta' = \frac{G}{2} \sum_{\substack{\sigma\sigma' \\ \tau\tau'}} \left[ \sum_m (-)^m b_{m\sigma\tau}^+ b_{-m\sigma'\tau'}^+ \right] \left[ \sum_{m'} (-)^{m'} b_{m'\sigma'\tau'} b_{-m'\sigma\tau} \right]$$

aniquila una pareja de partículas con  $L=0$  y se tienen 2 posibilidades para el spin y el isospin :  $S=0, T=1$ , o bien  $S=1, T=0$ , que corresponden, respectivamente, a  $J=0, T=1$  y  $J=1, T=0$ . Esta fuerza ha sido usada con éxito en varios problemas de estructura nuclear<sup>36), 49)</sup>. El grupo de simetrías de esta interacción es un grupo ortogonal  $R_{2l+1}$  (para una subcapa  $l$ ) y su grupo complementario correspondiente es  $R_8$ <sup>50)</sup>. Sin embargo puede ser interesante estudiar algunas características de la fuerza mencionada al principio de la sección, efectiva sólo para parejas con  $J=0, T=1$ , ya que se puede escribir enteramente en términos de los generadores del grupo  $R_5$  y se pueden generalizar inmediatamente muchas propiedades encontradas en el capítulo II para la fuerza de apareamiento entre nucleones idénticos.

Consideremos una interacción del tipo :

$$\mathcal{P} = -\frac{G}{4} \sum_{\substack{j_1 m_1 \tau_1 \\ j_2 m_2 \tau_2}} (-)^{j_1 - m_1} (-)^{j_2 - m_2} b_{j_1 m_1 \tau_1}^+ b_{j_1 - m_1 \tau_1}^+ b_{j_2 - m_2 \tau_2} b_{j_2 m_2 \tau_2}$$

(5.53)

Utilizando las expresiones (5.45) podemos escribir  $\mathcal{P}$  en la forma :

$$\mathcal{P} = -G \sum_M A^+(M) A(M) \quad (5.54).$$

Este tipo de fuerza de apareamiento se expresa entonces en términos de los generadores del grupo  $R_5$ . Utilizando ahora la ec. (5.51), podemos escribir  $\mathcal{P}$  en términos del operador de Casimir  $\Phi$  de  $R_5$ , del operador de Casimir  $T^2$  de su subgrupo  $SU_2$  y en términos del operador de Casimir  $H_1$  del subgrupo  $U_1$  ( $H_1$  coincide con el único generador que tiene  $U_1$ ):

$$\mathcal{P} = -\frac{G}{2} [\Phi - T^2 - H_1(H_1 - 3)] \quad (5.55).$$

Vemos entonces que si se usa la cadena  $R_5 \supset U_1 \times SU_2$  y se usa el esquema (5.48), la fuerza de apareamiento es diagonal. Utilizando los eigenvalores (5.52) para el operador de Casimir  $\Phi$ , se pueden escribir inmediatamente los eigenvalores  $p$  de la fuerza de apareamiento :

$$p = -\frac{G}{2} [\lambda_1(\lambda_1 + 3) + \lambda_2(\lambda_2 + 1) - T(T + 1) - w_1(w_1 - 3)] \quad (5.56).$$

Substituyendo

$$\lambda_1 = \Omega - \frac{V}{2}$$

$$\lambda_2 = t$$

$$w_1 = \frac{n}{2} - \Omega$$

se tiene :

$$p = -\frac{G}{2} \left\{ \left( \Omega - \frac{V}{2} \right) \left( \Omega - \frac{V}{2} + 3 \right) + t(t+1) - T(T+1) - \frac{1}{4} \left[ n^2 - (4\Omega + 6)n + 4\Omega(\Omega + 3) \right] \right\}$$

( 5.57 ).

Como comprobación, si hacemos  $T = \frac{n}{2}$  y  $t = \frac{V}{2}$  , tenemos :

$$p = -\frac{G}{4} \left[ n(2\Omega - n + 2) - V(2\Omega - V + 2) \right] ,$$

que es precisamente el resultado que se obtuvo en la ec. ( 2.5 ) para el caso de partículas idénticas.

Vamos a analizar brevemente el espectro ( 5.57 ) de la fuerza de apareamiento que hemos introducido. Consideraremos un sistema con un número de partículas y un isospin total dados y, en las gráficas, pondremos el origen de energías en el estado base. Las cantidades a la izquierda de cada nivel indican la energía y los números entre paréntesis a la derecha son el seniority  $V$  y el isospin reducido  $t$  .

$$\begin{array}{l} 2G(\Omega + \frac{1}{2}) \text{-----} (40) \\ 2G\Omega \text{-----} (41) \\ 2G(\Omega - 1) \text{-----} (42) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G(\Omega + 1) \text{-----} (20) \\ G\Omega \text{-----} (21) \end{array} \quad \begin{array}{l} G(\Omega + 1) \text{-----} (20) \\ G\Omega \text{-----} (21) \end{array}$$

$$\circ \text{-----} \frac{J=0}{n=0} \text{-----} (00) \quad \circ \text{-----} \frac{J=0}{n=2} \text{-----} (00) \quad \circ \text{-----} \frac{J=0}{n=4} \text{-----} (00)$$

$n=0$

$n=2$

$n=4$

$$\begin{array}{l} 2G\Omega \text{-----} (5 \frac{1}{2}) \\ 2G(\Omega - \frac{1}{2}) \text{-----} (5 \frac{3}{2}) \\ 2G(\Omega - 2) \text{-----} (5 \frac{5}{2}) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} G(\Omega + \frac{1}{2}) \text{-----} (3 \frac{1}{2}) \\ G(\Omega - 1) \text{-----} (3 \frac{3}{2}) \end{array} \quad \begin{array}{l} G(\Omega + \frac{1}{2}) \text{-----} (3 \frac{1}{2}) \\ G(\Omega - 1) \text{-----} (3 \frac{3}{2}) \end{array}$$

$$\circ \text{-----} \frac{J=\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_c}{n=1} \text{-----} (1 \frac{1}{2}) \quad \circ \text{-----} \frac{J=\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_c}{n=3} \text{-----} (1 \frac{1}{2}) \quad \circ \text{-----} \frac{J=\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_c}{n=5} \text{-----} (1 \frac{1}{2})$$

A lo largo de este capítulo hemos visto entonces cómo se pueden construir las eigenfunciones de la fuerza de apareamiento (5.53) y hemos obtenido sus eigenvalores.

Hemos entonces resuelto el problema

$$H = \sum_j \epsilon_j N_j + \mathcal{O} \quad (5.58),$$

cuando  $\epsilon_j = \epsilon, \forall j$ , o sea para el caso totalmente degenerado. Cuando los niveles de una sola partícula no están degenerados, surge el mismo problema que para el caso de las partículas idénticas. Como los dos términos de  $H$  (ec. (5.58)) no conmutan, no se pueden diagonalizar simultáneamente: el 1er. término es diagonal en el esquema (5.47) y el 2o. lo es en el esquema (5.48). Hay que recurrir entonces a métodos aproximados para la solución del hamiltoniano completo.

En la ref. 43), Camiz, Covello y Jean analizan una transformación de Bogoliubov generalizada para tratar el problema de la fuerza de apareamiento (5.53) y por simplicidad consideran solamente el problema de una capa  $j$ ; como el problema es bastante complejo, analizan sólo ese caso (que por otro lado tiene solución exacta con la cual se pueden comparar los resultados), para explorar la validez del procedimiento.

Recordemos que en el caso de las partículas idénticas la transformación de Bogoliubov no es más que una rotación en el cuasiespacio  $SU_2$  y como  $(b^+, b)$  son los dos componentes de un espinor de orden  $1/2$  en dicho cuasiespacio, la matriz que pasa de  $(b^+, b)$  a  $(\beta^+, \beta)$  es una matriz  $2 \times 2$ . Para el caso de protones y neutrones se considera en la ref. 43) una rotación general en el espacio  $Sp_4$  y se tienen matrices unitarias de  $4 \times 4$ . Se transforma el hamiltoniano como siempre y se introducen dos potenciales químicos:  $\lambda_n$  para los neutrones y  $\lambda_p$  para los protones. Se encuentra la energía del estado base como siempre y se pide que sea estacionaria respecto a variaciones de los parámetros de la transformación. Muestran los autores que se tienen entonces dos soluciones  $E_A$  y  $E_B$  para la energía del estado base y que  $E_A$  es siempre menor que  $E_B$ ; muestran que  $E_A$  es comparable con el resultado exacto ( $V=t=0$  en la ec. (5.57)) para  $T = T_{\min.} = |T_z|$  y que  $E_B$  lo es para  $T = T_{\max} = \frac{\pi}{2}$ . Un resultado muy interesante es que los parámetros correspondientes al primer resultado  $E_A$

dan lugar a dos transformaciones de Bogoliubov ordinarias para protones y neutrones separadamente. En otras palabras, para este caso la transformación se efectúa en la cadena que mencionamos en la ec. (5.31):  $R_5 \supset R_4 \sim R_3^{(p)} \times R_3^{(n)}$  ; o sea, es una rotación en el cuasiespacio  $R_3^{(p)}$  de los protones y una rotación en el cuasiespacio  $R_3^{(n)}$  de los neutrones, independientemente.

Estos resultados son muy interesantes; pero aparece una dificultad que vamos a mencionar brevemente. Para el caso de las partículas idénticas se muestra en la ref. 10) para varios núcleos que para el estado base y los estados excitados más bajos el seniority es buen número cuántico con una aproximación muy buena. Como el número de cuasipartículas es aproximadamente igual al seniority, se tiene una aproximación razonable al restringirse a un número pequeño de cuasipartículas; el estado base, por ejemplo, es un estado de cero cuasipartículas, con aproximación muy buena. Pero para el caso de protones y neutrones, se ha mostrado en muchos artículos<sup>45), 46)</sup> que la simetría simpléctica ( $\nu t$ ) no es buen número cuántico, no sólo para los estados excitados, sino que tampoco lo es para el estado base; esos artículos se refieren a núcleos con protones y neutrones en la capa  $1 f_{7/2}$ . Es entonces muy dudoso el uso de la idea de cuasipartículas, como estamos acostumbrados con partículas idénticas.

Como hace notar Baranger<sup>31)</sup>, el problema para protones y neutrones es, hasta la fecha, un problema abierto, en el sentido de que no se han logrado obtener resultados cualitativos sistemáticos para un número arbitrario de capas, como lo ha hecho Belyaev<sup>14)</sup> para el caso de las partículas idénticas.

## Referencias

- 1.- S. Schweber, An introduction to relativistic quantum field theory, Harper and Row, Publ., New York, 1962.
- 2.- A. K. Kerman, Ann. of Phys. 12 ( 1961 ) 300.
- 3.- M. E. Rose, Elementary theory of angular momentum, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.
- 4.- M. Hamermesh, Group theory and its application to physical problems, Add. Wesley Publ. Co., Reading, Mass. U.S.A., 1962.
- 5.- M. Moshinsky, Group theory and the many-body problem, publicado en "Physics of many-particle systems", ed. por E. Meron ( Gordon and Breach, New York, 1965 ).
- 6.- K. Helmers, Nucl. Phys. 23 ( 1961 ) 594.
- 7.- R. D. Lawson and M. H. Macfarlane, Nucl. Phys. 68 ( 1965 ).
- 8.- M. Moshinsky, Journ. of Math. Phys. 4 ( 1963 ) 1128.
- 9.- G. Györgyi and J. Révai, Phys. Lett. 11 No. 1 ( 1964 ) 47.
- 10.- S. Cohen, R. D. Lawson, M. H. Macfarlane and M. Soga, The effective interaction and identical-nucleon seniority for nuclei near  $Zr^{90}$  ( por publicarse ).
- 11.- B. F. Bayman, Lectures on seniority, quasi-particles and collective vibrations, Palmer Phys. Laf., Princeton, 1960.
- 12.- R. Arvieu, Tesis Doctoral, 1963.
- 13.- M. Baranger, Phys. Rev. 120 ( 1960 ) 957.
- 14.- S. T. Belyaev, Mat. Fys. Medd. 31 No. 11 ( 1959 ).
- 15.- Lipkin, Ann. of Phys. 9 ( 1960 ) 272.

- 16.- J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108 ( 1957 ) 1175.
- 17.- J. R. Schrieffer, Theory of superconductivity, W. A. Benjamin, Inc., Publ.,  
New York - Amsterdam, 1964.
- 18.- J. M. Blatt, Theory of superconductivity, Academic Press, New York - London, 1964.
- 19.- Y. Nogami, Progr. Theor. Phys., Japan 29 ( 1963 ) 938.
- 20.- G. Rach, Phys. Rev. 63 ( 1943 ) 367.
- 21.- A. Lane, Nuclear theory, W. A. Benjamin, Inc., Publ., New York - Amsterdam,  
1964.
- 22.- N. N. Bogoliubov, Nuovo Cimento 7 ( 1958 ) 794.
- 23.- J. G. Valatin, Nuovo Cimento 7 ( 1958 ) 843.
- 24.- G. Cami, Basic many-body concepts from a unified collective point of view,  
Escuela Latino Americana de Física, México, 1965.
- 25.- B. F. Bayman, Nucl. Phys. 15 ( 1960 ) 33.
- 26.- J. Høgaasen - Feldman, Nucl. Phys. 28 ( 1961 ) 258.
- 27.- Landau - Lifschitz, Statistical Physics, Pergamon Press Ltd., 1958.
- 28.- Bohr, Mottelson and Pines, Phys. Rev. 110 ( 1958 ) 936.
- 29.- L. S. Kisslinger and R. A. Sorensen, Mat. Fys. Medd. 32 No. 9 ( 1960 ).
- 30.- S. G. Nilsson, Mat. Fys. Medd. 29 , No. 16 ( 1955 ).
- 31.- M. Baranger, Theory of Finite nuclei, 1962 Cargèse Lectures in Theoretical  
Physics ( M. Lévy ), W. A. Benjamin, Inc., 1963.
- 32.- S. T. Belyaev, Collective motions in nuclei, Escuela Latino Americana de Física,  
México, 1965.
- 33.- B. Bayman, Selected topics in nuclear physics, Escuela Latino Americana de Física,  
México, 1965.